Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Teoremas de fatoração para operadores somantes

Alexandre César Bispo Lima

João Pessoa – PB
Julho de 2023

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Teoremas de fatoração para operadores somantes

por

Alexandre César Bispo Lima

sob a orientação do

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

João Pessoa – PB
Julho de 2023

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L732t Lima, Alexandre César Bispo.
Teoremas de fatoração para operadores somantes / Alexandre César Bispo Lima. - João Pessoa, 2023.
73 f. : il.

Orientação: Joedson Silva dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Operadores absolutamente somantes. 3. Teorema de fatoração de Pietsch. I. Santos, Joedson Silva dos. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por Larissa Silva Oliveira de Mesquita - CRB-15/746

Teoremas de fatoração para operadores somantes

por

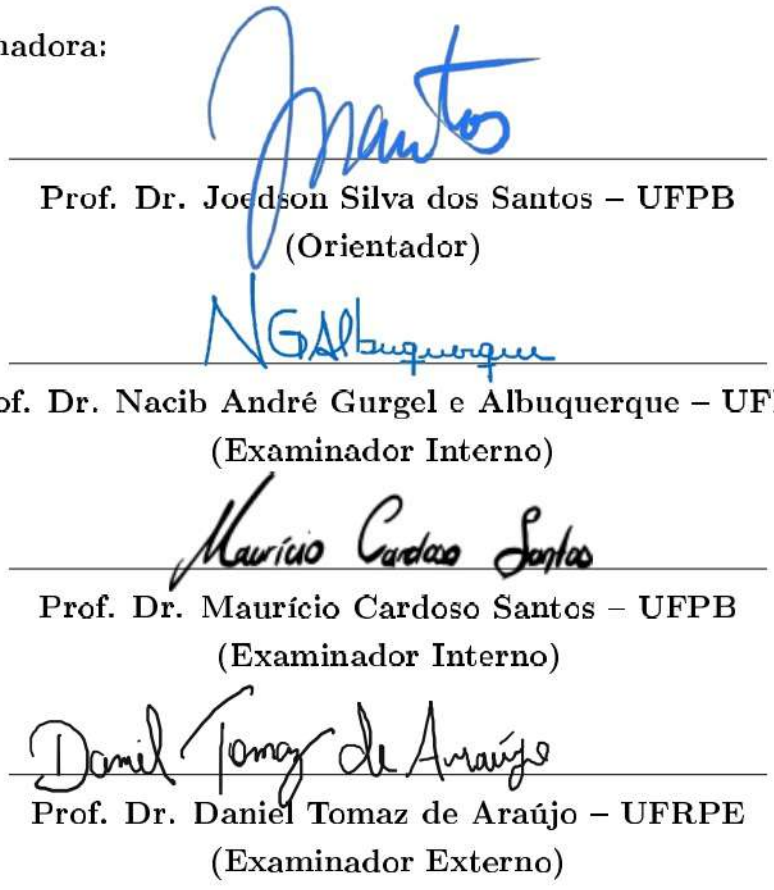
Alexandre César Bispo Lima[1]

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 28 de julho de 2023

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque – UFPB
(Examinador Interno)

Prof. Dr. Maurício Cardoso Santos – UFPB
(Examinador Interno)

Prof. Dr. Daniel Tomaz de Araújo – UFRPE
(Examinador Externo)

[1]Este trabalho contou com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

À minha família, por todo apoio, e aos meus amigos, que foram compreensivos em meus momentos de ausência.

Agradecimentos

- À minha mãe, Verônica Bispo, ao meu pai, Roberto Lima e aos meus irmãos, Caio César e Rodolfo César, por todo amor e pelos momentos de apoio durante a minha vida, sendo um suporte fundamental para as minhas realizações.
- Aos meus amigos que sempre acompanharam minha trajetória de perto, torcendo por mim e compreendendo minha ausência em momentos importantes, em especial: João Paulo (Bob), Miryam Pontes, Rebeca Maciel e Tiago Eiras.
- Ao meu orientador, Joedson Silva dos Santos, pelo acompanhamento da minha formação e pelo esforço e dedicação para o engradecimento deste trabalho.
- A Renato Burity, pelo acompanhamento e contribuições durante este trabalho e, com certeza, diversos outros que virão.
- Aos professores Nacib André Gurgel e Albuquerque, Maurício Cardoso Santos e Daniel Tomaz de Araújo por aceitarem o convite para compor a banca deste trabalho, trazendo contribuições primordiais.
- Aos professores e professoras do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba que contribuíram na minha formação.
- Aos amigos e amigas de curso que em todos os momentos me apoiaram nas minhas escolhas e nas minhas realizações, em especial: Antônio Nascimento, Diego Gomes, Fábio Lima, Geivison Ribeiro (GG), Ginaldo Santana, João Pedro (JP), Manoel Júnior, Matheus da Penha e Yasmin Lopes.
- A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram de forma positiva para a minha formação, em particular para a realização deste trabalho.
- Ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O Teorema de Fatoração de Pietsch é um dos principais resultados da Teoria dos Operadores absolutamente somantes. Este trabalho tem como objetivo estudar algumas classes de operadores lineares e multilineares, em um certo contexto abstrato, que satisfazem um teorema do tipo Fatoração de Pietsch. Como consequência, apresentaremos uma fatoração para os operadores lineares absolutamente $(p;\sigma)$-contínuos e os operadores multilineares $(p_1,\ldots,p_m;\sigma)$-contínuos dominados e fortemente $(p;\sigma)$-contínuos fatoráveis.

Palavras-chave: Operadores absolutamente somantes, Teorema de Fatoração de Pietsch.

Abstract

Pietsch's Factorization Theorem is one of the main results of the Theory of absolutely summing Operators. This work aims to study some classes of linear and multilinear operators, in a certain abstract context, that satisfy a Pietsch-type Factorization theorem. As a result, we will present a factorization for the $(p;\sigma)$-absolutely continuous linear operators, and dominated $(p_1,\ldots,p_m;\sigma)$-continuous and factorable strongly $(p;\sigma)$-summing multilinear operators.

Keywords: Absolutely summing operators, Pietsch's Factorization Theorem.

Sumário

Notações **x**

Introdução **1**

1 Operadores multilineares e produto tensorial **3**

1.1 Operadores multilineares e produto tensorial 3

1.2 Linearização de aplicações multilineares 5

1.3 Caracterizações dos operadores multilineares contínuos 6

1.4 Produto tensorial projetivo 7

2 Operadores lineares absolutamente somantes **9**

2.1 Sequências p-somáveis 9

2.2 Operadores lineares absolutamente p-somantes 15

2.3 Teorema de Dominação de Pietsch e suas generalizações abstratas 17

2.4 Teorema de Fatoração de Pietsch 20

3 Fatoração de operadores somantes em um contexto abstrato **23**

3.1 Espaço de dominação 23

3.2 Operadores lineares Φ-abstratos p-somantes 30

3.3 Operadores multilineares fortemente Φ-abstratos p-somantes 33

3.4 Operadores multilineares $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstratos $(p_1, \ldots, p_m)$-somantes . . . 40

4 Aplicações **47**

4.1 Operadores lineares absolutamente $(p;\sigma)$-contínuos 47

4.2 Operadores multilineares $(p_1, \ldots, p_m;\sigma)$-contínuos dominados 48

4.3 Operadores multilineares fortemente $(p;\sigma)$-contínuos fatoráveis 49

4.4 Considerações finais 55

A Noções e resultados iniciais de Análise Funcional **56**

Referências Bibliográficas **61**

Notações

- $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{R}$ denota o corpo dos números reais;
- $\mathbb{C}$ denota o corpo dos números complexos;
- $\mathbb{K}$ denota o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- Todos os espaços vetorias, normados ou de Banach apresentados neste trabalho serão considerados sobre o corpo $\mathbb{K}$;
- $X, X_1, \ldots, X_m, Y$ e Z denotam espaços vetoriais, normados ou de Banach;
- $\|\cdot\|_X$ denotará uma norma em X (quando não houver perigo de confusão, utilizaremos apenas $\|\cdot\|$);
- p denota um número real tal que $1 \leq p < \infty$;
- $L(X;Y)$ denota o espaço vetorial formado pelos operadores lineares de X em Y;
- $\mathcal{L}(X;Y)$ denota o espaço vetorial formado pelos operadores lineares contínuos de X em Y com a norma do supremo;
- $X^{\#}$ denota o dual algébrico de X, isto é, $L(X;\mathbb{K})$;
- X^* denota o dual topológico de X, isto é, $\mathcal{L}(X;\mathbb{K})$;
- $L(X_1, \ldots, X_m; Y)$ denota o espaço vetorial formado pelos operadores m-lineares de $X_1 \times \cdots \times X_m$ em Y;
- $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ denota o espaço vetorial formado pelos operadores m-lineares contínuos de $X_1 \times \cdots \times X_m$ em Y com a norma do supremo;
- $\ell_p(X)$ denota o espaço vetorial formado pelas sequências fortemente p-somáveis de X com a norma $\|\cdot\|_p$;
- $\ell_{p,w}(X)$ denota o espaço vetorial formado pelas sequências fracamente p-somáveis de X com a norma $\|\cdot\|_{p,w}$;

- $\ell_\infty(X)$ denota o espaço vetorial formado pelas sequências limitadas de X com a norma $\|\cdot\|_\infty$;
- $\ell_{\infty,w}(X)$ denota o espaço vetorial formado pelas sequências fracamente limitadas de X com a norma $\|\cdot\|_{\infty,w}$;
- $c_0(X)$ denota o subespaço vetorial de $\ell_\infty(X)$ formado pelas sequências de X convergentes para $0 \in X$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$;
- $c_{00}(X)$ denota o subespaço vetorial de $\ell_\infty(X)$ formado pelas sequências eventualmente nulas de X com a norma $\|\cdot\|_\infty$;
- $\widehat{T^s} : \ell_p(X) \to \ell_p(Y)$, $\widehat{T^{s,w}} : \ell_p(X) \to \ell_{p,w}(Y)$, $\widehat{T^w} : \ell_{p,w}(X) \to \ell_{p,w}(Y)$ e $\widehat{T^{w,s}} : \ell_{p,w}(X) \to \ell_p(Y)$ são operadores induzidos por $T : X \to Y$ dados pela correspondência $(x_j)_{j=1}^\infty \mapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty$;
- K denota um espaço topológico compacto de Hausdorff;
- $C(K)$ denota o espaço vetorial formado pelas funções $f : K \to \mathbb{K}$ contínuas;
- B_X denota a bola fechada unitária de X;
- id_X denota a aplicação identidade de X;
- ι denota uma aplicação inclusão;
- J_p denota a aplicação inclusão canônica de $C(B_{X^*})$ em $L_p(\mu)$;
- $\sigma(X^*, X)$ denota a topologia fraca* em X^*;
- A notação $\xrightarrow{w^*}$ indica convergência fraca*;
- I denota a isometria linear canônica de X em $C(B_{X^*})$;
- $\langle x, \cdot\rangle$ representa o elemento $I(x)$;
- $\widehat{X}$ denota o conjunto $I(X) = \{\langle x, \cdot\rangle : x \in X\}$;
- J_p^X denota a restrição de J_p ao conjunto $\widehat{X}$;
- $x^1 \otimes \cdots \otimes x^m$ denota o tensor elementar formado por $(x^1, \ldots, x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$;
- $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ denota o produto tensorial formado por $X_1, \ldots, X_m$;
- π denota a norma projetiva em $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$;
- $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ denota o produto tensorial projetivo de $X_1, \ldots, X_m$;
- I_m denota a aplicação m-linear canônica de $X_1 \times \cdots \times X_m$ em $C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$;

- $\langle x^1 \otimes \cdots \otimes x^m; \cdot \rangle$ representa o elemento $I_m(x^1, \ldots, x^m)$;
- $\widehat{V_m}$ representa o conjunto $\text{span}\{I_m(X_1 \times \cdots \times X_m)\}$;
- Φ denota uma aplicação absolutamente homogênea de $\widehat{X}$ em $C(B_{X^*})$ ou de $\widehat{V_m}$ em $C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$;
- $\rho_{\Phi,Z}$ denota a seminorma em $\widehat{X}$ ou em $\widehat{V_m}$ associada a Φ e Z;
- $\widehat{X}_\Phi^Z$ denota o espaço de dominação de X associado a Φ e Z;
- $(\widehat{V_m})_\Phi^Z$ denota o espaço de dominação de $\widehat{V_m}$ associado a Φ e Z;
- $I_{\widehat{X}_\Phi^Z}$ denota a aplicação canônica de $\widehat{X}$ em $\widehat{X}_\Phi^Z$;
- $I_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z}$ denota a aplicação canônica de $\widehat{V_m}$ em $\widehat{(V_m)}_\Phi^Z$;
- $T_L : X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \to Y$ denota a linearização de $T \in L(X_1, \ldots, X_m; Y)$;
- $T_L : X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m \to Y$ denota a linearização de $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$.

Introdução

Em meados da década de 50, A. Grothendieck introduziu o conceito de operador absolutamente somante em seu renomado trabalho [14] (denominado a época por *application semi-integral à droite*). Uma década mais tarde, os trabalhos de Lindenstrauss e Pelcyński [16], Mitjagin e Pelcyński [19] e Pietsch [26] apresentaram a Teoria de Operadores lineares absolutamente somantes de forma mais acessível, simplificando a abordagem feita por Grothendieck, fazendo com que essa teoria desempenhasse um papel de destaque na Análise Funcional. Essa classe de operadores melhora, em certo sentido, a noção de somabilidade de sequências. Mais precisamente, um operador linear contínuo entre espaços de Banach $T : X \to Y$ é dito absolutamente p-somante quando transforma sequências fracamente p-somantes de X em sequências fortemente p-somantes de Y. A partir da década de 80, o conceito "absolutamente somante" foi generalizado para outros contextos como polinômios, aplicações multilineares, aplicações liptschitzianas, entre outras.

Pietsch apresentou duas importantes caracterizações para a classe dos operadores absolutamente somantes, conhecidas por: Teoremas de Dominação e de Fatoração de Pietsch. Em virtude da importância desses teoremas e suas aplicações, é natural que se busque esses resultados nas generalizações dessa classe de operadores. Isso é uma tarefa bastante desafiadora, uma vez que muitas das ferramentas usadas na teoria linear não funcionam em contextos mais gerais.

Em [6], os autores apresentaram uma abordagem abstrata para o Teorema de Dominação de Pietsch, a fim de provar que os teoremas dessa natureza pudessem ser obtidos como uma consequência dessa versão abstrata. Porém, existem casos onde ela parece não funcionar. Para contornar isso, em [25], Pellegrino et al. trouxeram à tona uma "abordagem mais completa" do Teorema de Dominação de Pietsch que recupera tanto a versão abstrata presente em [6], quanto em situações nas quais ela parece não funcionar, além de provar esse tipo de resultado para outras classes de operadores.

Diferentemente do que foi mencionado anteriormente, o mesmo não ocorre com o Teorema de Fatoração de Pietsch. Abordagens mais gerais para esse tipo de resultado podem ser encontradas nos trabalhos [1, 5], que tratam de operadores multilineares e Lipschitz, respectivamente. Desta forma, este trabalho tem o objetivo de estudar algumas classes de operadores lineares e multilineares, introduzidas por Achour et al., em [1], que acompanham um tipo de Fatoração de Pietsch.

No primeiro capítulo apresentaremos noções básicas acerca dos operadores multilineares e do produto tensorial. Esse breve estudo servirá, principalmente, para apresentarmos propriedades e resultados elementares que norteiam esses dois conceitos, no intuito de mostrar como podemos trabalhar com esses espaços e como manipular seus elementos.

No segundo capítulo vamos fazer um estudo motivacional para o nosso trabalho, apresentando os operadores lineares absolutamente p-somantes, bem como diversas de suas propriedades. Posteriormente, mostraremos que essa classe de operadores admite uma caracterização via propriedade de somabilidade. Em seguida, apresentaremos, sem suas demonstrações, os teoremas de Dominação de Pietsch, bem como suas versões abstratas. Por fim, abordaremos o clássico, e principal motivador do nosso trabalho, Teorema de Fatoração de Pietsch. Mais precisamente, um operador linear contínuo entre espaços de Banach $T : X \to Y$ é absolutamente p-somante se, e somente se, existem uma medida regular de probabilidade de Borel μ em B_{X^*}, um subespaço fechado X_p de $L_p(\mu)$ e um operador $\widehat{T} : X_p \to Y$ tal que T pode ser fatorado utilizando $\widehat{T}$.

O terceiro capítulo será, mesmo que de maneira imperceptível, dividido em duas partes. Inicialmente apresentaremos os espaços de dominação associados a uma aplicação absolutamente homogênea Φ e a um espaço de Banach Z. Tais espaços servirão como agentes intermediários para conseguirmos a fatoração procurada (os espaços de dominação farão o papel do subespaço fechado X_p de $L_p(\mu)$ no Teorema de Fatoração de Pietsch clássico). Posteriormente, apresentaremos algumas classes de operadores lineares e multilineares, em um determinado contexto abstrato, e encontraremos, utilizando os espaços de dominação, um tipo de Fatoração de Pietsch para esses operadores. São eles: os operadores lineares Φ-abstratos p-somantes e os multilineares fortemente Φ-abstratos p-somantes e $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstratos $(p_1, \ldots, p_m)$-somantes.

No quarto capítulo apresentaremos algumas aplicações das classes abstratas estudadas anteriormente. Dentre elas, destacamos a classe dos operadores multilineares fortemente p-somantes, introduzida por Dimant em [12]. É conhecido que essa classe, até então, não satisfazia um tipo de Fatoração Pietsch. Entretanto, vamos mostrar que essa classe é recuperada pelos operadores multilineares fortemente Φ-abstratos p-somantes.

Por fim, apresentaremos no Apêndice A conceitos e resultados básicos de Análise Funcional, com o intuito de deixar o trabalho o mais autocontido possível.

Capítulo 1

Operadores multilineares e produto tensorial

Neste capítulo, faremos uma rápida revisão de conceitos e resultados básicos sobre operadores multilineares e produto tensorial. Vale salientar que não buscamos fazer uma apresentação completa, mas sim, apenas nortear o leitor com conceitos básicos que ajudarão a entender algumas particularidades do ambiente multilinear, diferenciando-o do ambiente linear, por exemplo. As referências utilizadas para a construção deste capítulo foram a dissertação [30] e os livros [11, 28]. Caso seja necessário um estudo prévio sobre operadores lineares, indicamos o Apêndice A deste trabalho ou [7, Capítulo 2].

1.1 Operadores multilineares e produto tensorial

Definição 1.1. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_m$ e Y espaços vetoriais. Dizemos que uma aplicação $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é um *operador m-linear* se T é linear em cada uma de suas variáveis, isto é, quando fixados $t \in \{1, \ldots, m\}$ e $y^t = (x^1, \ldots, x^{t-1}, x^{t+1}, \ldots, x^m) \in X_1 \times \ldots X_{t-1} \times X_{t+1} \ldots X_m$, a aplicação $T(y^t) : X_t \to Y$ dada por

$$T(y^t)(x) = T(x^1, \ldots, x^{t-1}, x, x^{t+1}, \ldots, x^m), \text{ para todo } x \in X_t,$$

é linear. No caso particular em que $Y = \mathbb{K}$, dizemos que T é um *funcional m-linear*.

Se $T, S : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ são operadores m-lineares e $\lambda \in \mathbb{K}$, então o operador $T + \lambda S : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ também é m-linear. Assim, o conjunto formado por todos os operadores m-lineares de $X_1 \times \cdots \times X_m$ em Y, denotando por $L(X_1, \ldots, X_m; Y)$, é um espaço vetorial. O espaço $L(X; Y)$ dos operadores lineares entre X e Y é um caso particular de $L(X_1, \ldots, X_m; Y)$, quando $m = 1$ e $X_1 = X$. Além disso, quando $Y = \mathbb{K}$, recaímos no dual algébrico $X^{\#} = L(X; \mathbb{K})$ de X.

Dado $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, considere $x^1 \otimes \cdots \otimes x^m : L(X_1, \dots, X_m; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ dado por

$$x^1 \otimes \cdots \otimes x^m(T) = T(x^1, \dots, x^m), \text{ para todo } T \in L(X_1, \dots, X_m; \mathbb{K}).$$

O funcional $x^1 \otimes \cdots \otimes x^m$ é chamado de *tensor elementar*. Afirmamos que todo tensor elementar é linear. Com efeito, dados $T, S \in L(X_1, \dots, X_m; \mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se

$$\begin{aligned} x^1 \otimes \cdots \otimes x^m(T + \lambda S) &= (T + \lambda S)(x^1, \dots, x^m) \\ &= T(x^1, \dots, x^m) + \lambda S(x^1, \dots, x^m) \\ &= x^1 \otimes \cdots \otimes x^m(T) + \lambda x^1 \otimes \cdots \otimes x^m(S). \end{aligned}$$

Definição 1.2. O *produto tensorial* de $X_1, \dots, X_m$, denotado por $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$, é o subespaço de $L(X_1, \dots, X_m; \mathbb{K})^{\#}$ gerado por todos os tensores elementares definidos em $L(X_1, \dots, X_m; \mathbb{K})$, isto é,

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_m := \text{span}\{x^1 \otimes \cdots \otimes x^m : (x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m\}.$$

Os elementos de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ são chamados de *tensores*.

A proposição a seguir nos fornece uma propriedade elementar e muito útil do produto tensorial.

Proposição 1.3. Para quaisquer que sejam $t \in \{1, \dots, m\}$, $(a^1, , \dots, a^{t-1}, a^{t+1}, \dots, a^m) \in X_1 \times \dots X_{t-1} \times X_{t+1} \times \cdots \times X_m$, $x^t, y^t \in X_t$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se

$$a^1 \otimes \cdots \otimes (x^t + \lambda y^t) \otimes \cdots \otimes a^m = a^1 \otimes \cdots \otimes x^t \otimes \cdots \otimes a^m + \lambda a^1 \otimes \cdots \otimes y^t \otimes \cdots \otimes a^m.$$

Demonstração. Dado $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; \mathbb{K})$, tem-se

$$\begin{aligned} &a^1 \otimes \cdots \otimes (x^t + \lambda y^t) \otimes \cdots \otimes a_m(T) = T(a^1, \dots, x^t + \lambda y^t, \dots, a^m) \\ &= T(a^1, \dots, x^t, \dots, a^m) + \lambda T(a^1, \dots, y^t, \dots, a^m) \\ &= a^1 \otimes \cdots \otimes x^t \otimes \cdots \otimes a^m(T) + \lambda a^1 \otimes \cdots \otimes y^t \otimes \cdots \otimes a^m(T), \end{aligned}$$

provando a igualdade requerida. □

Se $v \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$, então existem $d \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \in \mathbb{K}$ e $(y^{1,k}, \dots, t^{m,k}) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, com $k \in \{1, \dots, d\}$, tais que

$$v = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k y^{1,k} \otimes \cdots \otimes y^{m,k}.$$

Pela Proposição 1.3, podemos reescrever v da seguinte forma:

$$v = \sum_{k=1}^{d} (\lambda_k y^{1,k}) \otimes \cdots \otimes y^{m,k}.$$

Como X_1, em particular, é um espaço vetorial, cada termo $\lambda_k y^{1,k}$ pertence a X_1, então renomeando-os por $x^{1,k} := \lambda_k y^{1,k}$ e tomando $x^{t,k} := y^{t,k}$, para todo $(t,k) \in \{2,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,d\}$, podemos reescrever v da seguinte forma:

$$v = \sum_{k=1}^{d} x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k}. \tag{1.1}$$

Utilizaremos a representação apresentada em (1.1) para representar um tensor arbitrário de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$.

1.2 Linearização de aplicações multilineares

Considere a aplicação canônica $\sigma_m : X_1 \times \cdots \times X_m \to X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ dada por

$$\sigma_m(x^1,\ldots,x^m) = x^1 \otimes \cdots \otimes x^m, \text{ para todo } (x^1,\ldots,x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m.$$

Segue diretamente da Proposição 1.3 que σ_m é m-linear.

Proposição 1.4. Para cada operador m-linear $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$, existe um único operador linear $T_L : X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \to Y$ dado por

$$T_L\left(\sum_{k=1}^{n} x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k}\right) = \sum_{k=1}^{n} T(x^{1,k},\ldots,x^{m,k})$$

de modo que $T = T_L \circ \sigma_m$. Mais ainda, a correspondência $T \leftrightarrow T_L$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L(X_1,\ldots,X_m;Y)$ e $L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_m;Y)$. Em particular, $L(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K})$ e $(X_1 \otimes \cdots \otimes X_m)^{\#}$ são isomorfos.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [30, Teorema 1.10]. O operador linear T_L é chamado de *linearização* do operador m-linear T. O isomorfismo que fornece a correspondência entre $L(X_1,\ldots,X_m;Y)$ e $L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_m;Y)$ nos permite enxergar, em certo sentido, um operador multilinear como linear. Entretanto, o "preço que se paga" é que passamos de uma aplicação cujo domínio é um espaço simples (produto cartesiano) para uma aplicação cujo domínio é um espaço mais complicado (produto tensorial).

1.3 Caracterizações dos operadores multilineares contínuos

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_m$ e Y espaços normados. Se $T, S : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ são operadores m-lineares contínuos e $\lambda \in \mathbb{K}$, então o operador $T + \lambda S : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ também é m-linear contínuo. Assim, o conjunto formado por todos os operadores m-lineares contínuos de $X_1 \times \cdots \times X_m$ em Y, denotado por $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$, é um espaço vetorial. Segue de imediato que $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ é um subespaço de $L(X_1, \ldots, X_m; Y)$. O espaço $\mathcal{L}(X; Y)$ dos operadores lineares contínuos entre X e Y é um caso particular de $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ quando $m = 1$ e $X_1 = X$. Além disso, quando $Y = \mathbb{K}$, recaímos no dual topológico $X^* = \mathcal{L}(X; \mathbb{K})$ de X.

Proposição 1.5. Seja $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ um operador m-linear. São equivalentes:

(i) T é contínuo.

(ii) T é contínuo na origem.

(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que $\|T(x^1, \ldots, x^m)\| \leq C \prod_{t=1}^{m} \|x^t\|$, para todo $(x^1, \ldots, x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$.

(iv) $\|T\| := \sup_{\substack{x^t \in B_{X_t} \\ t \in \{1,\ldots,m\}}} \|T(x^1, \ldots, x^m)\| < \infty$.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [30, Proposição 2.7].

Observação 1.6. Sejam $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ um operador m-linear contínuo e $(x^1, \ldots, x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, com $x^t \neq 0$, para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$. Segue do item (iv) da proposição anterior que

$$\left\| T\left(\frac{x^1}{\|x^1\|}, \ldots, \frac{x^m}{\|x^m\|} \right) \right\| \leq \|T\|,$$

donde, usando a m-linearidade de T, tem-se

$$\|T(x^1, \ldots, x^m)\| \leq \|T\| \prod_{t=1}^{m} \|x^t\|. \tag{1.2}$$

Novamente pela m-linearidade de T, conclui-se que a desigualdade acima vale no caso em que $x^t = 0$, para algum $t \in \{1, \ldots, m\}$ (valendo inclusive a igualdade), o que nos permite concluir que essa desigualdade vale para qualquer que seja $(x^1, \ldots, x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$.

Afirmamos que a expressão

$$\|T\| = \sup_{\substack{x^t \in B_{X_t} \\ t \in \{1,\ldots,m\}}} \|T(x^1, \ldots, x^m)\| \tag{1.3}$$

define uma norma em $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;Y)$. De fato, em virtude do item (iv) da Proposição 1.5, a função $\|\cdot\|$ está bem definida. Além disso, é imediato que $\|\cdot\|$ é não-negativa e que $\|0\|=0$. Mais ainda, segue da desigualdade (1.2) que se $\|T\|=0$ então $T(x^1,\dots,x^m)=0$, para todo $(x^1,\dots,x^m)\in X_1\times\cdots\times X_m$. Considere agora $T,S\in\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;Y)$ e $\lambda\in\mathbb{K}$. Então

$$\|\lambda T\| = \sup_{\substack{x^t\in B_{X_t}\\ t\in\{1,\dots,m\}}} \|\lambda T(x^1,\dots,x^m)\| = |\lambda| \sup_{\substack{x^t\in B_{X_t}\\ t\in\{1,\dots,m\}}} \|T(x^1,\dots,x^m)\| = |\lambda|\|T\|.$$

Por fim, segue da Observação 1.6 que

$$\begin{aligned}\|(T+S)(x^1,\dots,x^m)\| &= \|T(x^1,\dots,x^m)+S(x^1,\dots,x^m)\|\\ &\le \|T(x^1,\dots,x^m)\|+\|S(x^1,\dots,x^m)\|\\ &\le \|T\|\prod_{t=1}^m\|x^t\|+\|S\|\prod_{t=1}^m\|x^t\| = (\|T\|+\|S\|)\prod_{t=1}^m\|x^t\|.\end{aligned}$$

Logo

$$\|T+S\|\le\|T\|+\|S\|.$$

Portanto $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;Y)$.

A norma dada pela expressão (1.3) é chamada de *norma do supremo* e é a norma usual considerada em $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;Y)$.

Proposição 1.7. Se Y é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;Y)$ é um espaço de Banach.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [30, Corolário 2.13].

1.4 Produto tensorial projetivo

A expressão

$$\pi(v)=\inf\left\{\sum_{k=1}^d\prod_{t=1}^m\|x^{t,k}\| : v=\sum_{k=1}^d x^{1,k}\otimes\cdots\otimes x^{m,k}\right\} \tag{1.4}$$

define uma norma em $X_1\otimes\cdots\otimes X_m$, de modo que, para todo $(x^1,\dots,x^m)\in X_1\times\cdots\times X_m$, tem-se

$$\pi(x^1\otimes\cdots\otimes x^m)=\prod_{t=1}^m\|x^t\|, \tag{1.5}$$

(ver [30, Proposição 3.3]). A norma π em $X_1\otimes\cdots\otimes X_m$ é chamada de *norma projetiva*. O espaço $X_1\otimes\cdots\otimes X_m$ munido com a norma projetiva π é denotado por $X_1\otimes_\pi\cdots\otimes_\pi X_m$ e não necessariamente é completo (ver [28, Exercise 2.5]). Sendo assim, denotaremos por

$X_1\widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ o completamento de $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_m$. O espaço de Banach $X_1\widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ é chamado de *produto tensorial projetivo de* $X_1, \dots, X_m$.

Proposição 1.8. Para cada operador m-linear contínuo $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$, existe um único operador linear contínuo $T_L : X_1\widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m \to Y$ dado por

$$T_L\left(\sum_{k=1}^{n} x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k}\right) = \sum_{k=1}^{n} T(x^{1,k}, \dots, x^{m,k})$$

de modo que $T = T_L \circ \sigma_m$. Mais ainda, a correspondência $T \leftrightarrow T_L$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços normados $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ e $\mathcal{L}(X_1\widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y)$. Em particular, $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; \mathbb{K})$ e $(X_1\widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*$ são isometricamente isomorfos.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [30, Teorema 3.17].

Observação 1.9. Note que, tanto na Proposição 1.4 quanto na Proposição 1.8, para todo $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, vale a seguinte igualdade:

$$T_L(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) = T(x^1, \dots, x^m).$$

Vimos anteriormente que um operador $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é m-linear se, e somente se, sua linearização $T_L : X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \to Y$ é linear. Sendo assim, a Proposição 1.8 nos diz que, através da introdução da norma projetiva, o operador m-linear T é contínuo se, e somente se, sua linearização também é contínua.

Capítulo 2

Operadores lineares absolutamente somantes

Neste capítulo, estudaremos os operadores lineares absolutamente p-somantes. Para isto, é necessário introduzir algumas noções e propriedades básicas sobre somabilidade de sequências e espaços de sequências somantes. As propriedades apresentadas serão fundamentais para que possamos utilizar resultados clássicos de Análise Funcional, dentre eles destacamos: o Teorema de Hahn-Banach e o Teorema do Gráfico Fechado. Para o estudo dos operadores lineares absolutamente p-somantes utilizamos [15, Capítulo 2] como principal referência e [13, 21, 29] como referências auxiliares. Caso seja necessário um estudo prévio sobre os resultados mencionados anteriormente, indicamos a leitura do Apêndice A, [7, Capítulos 2 e 3] ou [8, Capítulos 1 e 2].

2.1 Sequências p-somáveis

Definição 2.1. Sejam X um espaço normado e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X é *fortemente p-somável* se

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty.$$

Denotamos por $\ell_p(X)$ o espaço vetorial formado pelas sequências fortemente p-somáveis de X.

A expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{1/p}$$

define uma norma em $\ell_p(X)$. Mesmo que não haja menção, vamos considerar o espaço $\ell_p(X)$ com a norma $\|\cdot\|_p$. Quando $X = \mathbb{K}$, escrevemos apenas ℓ_p ao invés de $\ell_p(\mathbb{K})$.

Proposição 2.2. Se X é um espaço de Banach, então $\ell_p(X)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(X)$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$k, l \geq N \Rightarrow \|x^k - x^l\|_p < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos escrever $x^k = (x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$. Desta forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\|x_n^k - x_n^l\| = \left(\|x_n^k - x_n^l\|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^k - x_j^l\|^p\right)^{1/p} = \|x^k - x^l\|_p. \tag{2.2}$$

Sendo assim, segue de (2.1) e (2.2) que

$$k, l \geq N \Rightarrow \|x_n^k - x_n^l\| < \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso nos diz que $(x_n^k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em X, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X é completo, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_n^k = x_n$ em X. Denotando por $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ e fazendo $l \to \infty$ em (2.1), segue da continuidade da norma que $\lim_{k\to\infty} x^k = x$ em $\ell_p(X)$. Sabemos que $x^N \in \ell_p(X)$ e pela expressão (2.1) temos $x - x^N \in \ell_p(X)$. Como $\ell_p(X)$ é um espaço vetorial, concluímos que $x = (x - x^N) + x^N \in \ell_p(X)$. Portanto $\ell_p(X)$ é completo. □

Definição 2.3. Seja X um espaço normado. Dizemos que uma sequência em X é *limitada* quando existe $C > 0$ tal que $\|x_j\| \leq C$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\ell_\infty(X)$ o espaço vetorial formado pelas sequências limitadas de X.

A expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|$$

define uma norma em $\ell_\infty(X)$. Mesmo que não haja menção, $\|\cdot\|_\infty$ é a norma usual considerada em $\ell_\infty(X)$. Quando $X = \mathbb{K}$, escrevemos apenas ℓ_∞ ao invés de $\ell_\infty(\mathbb{K})$.

Proposição 2.4. Se X é um espaço de Banach, então $\ell_\infty(X)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_\infty(X)$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$k, l \geq N \Rightarrow \|x^k - x^l\|_\infty < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos escrever $x^k = (x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(X)$. Notamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\|x_n^k - x_n^l\| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j^k - x_j^l\| = \|x^k - x^l\|_\infty. \tag{2.4}$$

Sendo assim, segue de (2.3) e (2.4) que

$$k, l \geq N \Rightarrow \|x_n^k - x_n^l\| < \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso nos diz que $(x_n^k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em X, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X é completo, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_n^k = x_n$ em X. Denotando por $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ e fazendo $l \to \infty$ em (2.3), segue da continuidade da norma que $\lim_{k\to\infty} x^k = x$ em $\ell_\infty(X)$. Sendo $\ell_\infty(X)$ espaço vetorial, tem-se $x = (x - x^N) + x^N \in \ell_\infty(X)$, pois $x - x^N, x^N \in \ell_\infty(X)$. Portanto $\ell_\infty(X)$ é completo. □

Apresentaremos agora dois importantes subespaços de $\ell_\infty(X)$.

Definição 2.5. Seja X um espaço normado. Denotamos por $c_0(X)$ o espaço vetorial das sequências em X que convergem para $0 \in X$. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em X é *eventualmente nula* se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_j = 0$, para todo $j > n$. Nesse caso, denotamos tal sequência por $(x_j)_{j=1}^n$. O espaço vetorial formado pelas sequências eventualmente nulas de X será denotado por $c_{00}(X)$.

Não é difícil perceber que $c_0(X)$ é um subespaço de $\ell_\infty(X)$ e que $c_{00}(X)$ é um subespaço de $c_0(X)$. A partir de agora, salvo menção contrária, a norma usual considerada em $c_0(X)$ e $c_{00}(X)$ será a norma $\|\cdot\|_\infty$ induzida nesses subespaços.

Observação 2.6. Analogamente à notação utilizada para as sequências eventualmente nulas, quando existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_j = 0$, para todo $j < n$, escreveremos $(x_j)_{j=n}^\infty$ para representar tal sequência.

Se X é um espaço de Banach, então $c_0(X)$ também é um espaço de Banach (prova análoga à Proposição 2.4). Contudo, $c_{00}(X)$ nunca é um espaço de Banach. De fato, fixado $a \in X$, a sequência $(x^j)_{j=1}^\infty$ em $c_{00}(X)$ dada por $x^j = (\frac{a}{n})_{n=1}^j$, para todo $j \in \mathbb{N}$, converge para a sequência $x = (\frac{a}{n})_{n=1}^\infty$, pois $\|x^j - x\|_\infty = \|(\frac{a}{n})_{n=1}^j - (\frac{a}{n})_{n=1}^\infty\|_\infty = \|(\frac{a}{n})_{n=j+1}^\infty\|_\infty = \frac{\|a\|}{j+1} \to 0$. Entretanto $x \in c_0(X)\backslash c_{00}(X)$, logo $c_{00}(X)$ não é fechado em $c_0(X)$ e, portanto, não é um espaço de Banach (ver Proposição A.5).

Lema 2.7. Sejam A e B conjuntos não vazios e $f : A \times B \to \mathbb{R}$ uma função. Então

$$\sup_{x\in A}\sup_{y\in B} f(x,y) = \sup_{y\in B}\sup_{x\in A} f(x,y). \tag{2.5}$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [21, Lema 2.4.10]. O lema técnico anterior nos fornece uma condição para que um supremo duplo comute. Esse resultado será utilizado algumas vezes ao longo desse trabalho.

Definição 2.8. Seja X um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em X é *fracamente limitada* se a sequência $(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty$ é limitada, para todo $\varphi \in X^*$. Denotamos por $\ell_{\infty,w}(X)$ o espaço vetorial formado pelas sequências fracamente limitadas de X.

Afirmamos que a expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty,w} := \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sup_{j\in\mathbb{N}} |\varphi(x_j)|\right)$$

define uma norma em $\ell_{\infty,w}(X)$. Não é difícil verificar que as propriedades de norma são satisfeitas. Entretanto, não é nítido que esta função está bem definida. Para cada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty,w}(X)$, segue de (2.5) e do Teorema de Hahn-Banach que

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty,w} = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sup_{j\in\mathbb{N}} |\varphi(x_j)|\right) \overset{(2.5)}{=} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left(\sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\varphi(x_j)|\right) \overset{\text{H-B}}{=} \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty}.$$

Logo a função $\|\cdot\|_{\infty,w}$ está bem definida. Mesmo que não haja menção, $\|\cdot\|_{\infty,w}$ é a norma usual considerada em $\ell_{\infty,w}(X)$. Se X é um espaço de Banach, então $\ell_{\infty,w}(X)$ é um espaço de Banach. Mais ainda, $\ell_{\infty}(X) = \ell_{\infty,w}(X)$.

Definição 2.9. Sejam X um espaço normado e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X é *fracamente p-somável* se

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty,$$

para todo $\varphi \in X^*$. Denotamos por $\ell_{p,w}(X)$ o espaço vetorial formado pelas sequências fracamente p-somáveis de X.

Afirmamos que a expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w} := \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p}$$

define uma norma em $\ell_{p,w}(X)$. Analogamente à $\ell_{\infty,w}(X)$, não é difícil verificar que que as propriedades de norma são satisfeitas. No entanto, a boa definição de $\|\cdot\|_{p,w}$ não é imediata. Para mostrar isso, considere $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X)$ e defina o operador $u : X^* \to \ell_p$ dado por

$$u(\varphi) = (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}, \text{ para todo } \varphi \in X^*.$$

Claramente u está bem definida e é linear. Vamos mostrar que o gráfico de u é fechado em $X^* \times \ell_p$. Para isso, seja $(\varphi_0, z_0) \in X^* \times \ell_p$ e considere uma sequência $((\varphi_k, z_k))_{k=1}^{\infty}$ em $G(u)$ tal que $\lim_{k\to\infty}(\varphi_k, z_k) = (\varphi_0, z_0)$. Como $(\varphi_k, z_k) \in G(u)$, segue que $u(\varphi_k) = z_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, logo $\lim_{k\to\infty} u(\varphi_k) = \lim_{k\to\infty} z_k = z_0$ em ℓ_p e $\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi_0$ em X^*. Escrevendo

$z_0 = (z_j)_{j=1}^{\infty}$, notamos que

$$|\varphi_k(x_n) - z_n| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_k(x_j) - z_j|^p\right)^{1/p} = \|u(\varphi_k) - z_0\|_p.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $k \to \infty$, obtemos $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_n) = z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, temos

$$|\varphi_k(x_n) - \varphi_0(x_n)| = |(\varphi_k - \varphi_0)(x_n)| \leq \|\varphi_k - \varphi_0\|\|x_n\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $k \to \infty$, obtemos $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_n) = \varphi_0(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela unicidade do limite, concluímos que $\varphi_0(x_n) = z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$z_0 = (z_j)_{j=1}^{\infty} = (\varphi_0(x_j))_{j=1}^{\infty} = u(\varphi_0),$$

consequentemente $G(u)$ é fechado em $X^* \times \ell_p$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, segue que u é contínuo. Então existe $M > 0$ tal que $\|u(\varphi)\|_p \leq M\|\varphi\|$, para todo $\varphi \in X^*$. Portanto

$$\sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p} = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_p = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \|u(\varphi)\|_p \leq \sup_{\varphi\in B_{X^*}} M\|\varphi\| = M.$$

Isso prova a boa definição de $\|\cdot\|_{p,w}$. A partir de agora, mesmo que não haja menção, vamos considerar a norma $\|\cdot\|_{p,w}$ em $\ell_{p,w}(X)$.

Proposição 2.10. Se X é um espaço de Banach, então $\ell_{p,w}(X)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_{p,w}(X)$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$k, l \geq N \Rightarrow \|x^k - x^l\|_{p,w} < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos escrever $x^k = (x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X)$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, tem-se

$$\|x_n^k - x_n^l\| \overset{\text{H-B}}{=} \sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\varphi(x_n^k - x_n^l)| \leq \|x^k - x^l\|_{p,w}, \tag{2.7}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, segue de (2.6) e (2.7) que

$$k, l \geq N \Rightarrow \|x_n^k - x_n^l\| < \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso nos diz que $(x_n^k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em X, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X é completo, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que

$\lim_{k\to\infty} x_n^k = x_n$ em X. Denotando por $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ e fazendo $l \to \infty$ em (2.6), segue da continuidade da norma que $\lim_{k\to\infty} x^k = x$ em $\ell_{p,w}(X)$. Sendo $\ell_{p,w}(X)$ espaço vetorial, tem-se $x = (x - x^N) + x^N \in \ell_{p,w}(X)$, pois $x - x^N, x^N \in \ell_{p,w}(X)$. Portanto $\ell_{p,w}(X)$ é completo. □

Observação 2.11. Note que $\ell_p(X) \subseteq \ell_{p,w}(X)$, pois

$$\sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p} \leq \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \|\varphi\| \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p\right)^{1/p}.$$

Sejam X e Y espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Se $T : X \to Y$ é um operador linear contínuo não nulo, afirmamos que a correspondência

$$(x_j)_{j=1}^\infty \mapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty \tag{2.8}$$

induz os operadores lineares contínuos $\widehat{T^s} : \ell_p(X) \to \ell_p(Y)$, $\widehat{T^{s,w}} : \ell_p(X) \to \ell_{p,w}(Y)$ e $\widehat{T^w} : \ell_{p,w}(X) \to \ell_{p,w}(Y)$ (caso $T = 0$, os operadores mencionados claramente estão bem definidos). Com efeito, considere inicialmente $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(X)$. A expressão

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \|T(x_j)\|^p\right)^{1/p} \leq \|T\| \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p\right)^{1/p}$$

garante a boa definição do operador $\widehat{T^s}$. Da expressão acima juntamente com a Observação 2.11, segue a boa definição do operador $\widehat{T^{s,w}}$ (em outras palavras, considerando o operador inclusão $\iota : \ell_p(Y) \to \ell_{p,w}(Y)$, que está bem definido em virtude da Observação 2.11, temos $\widehat{T^{s,w}} = \iota \circ \widehat{T^s}$). Por fim, considere $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X)$. Como T é linear e contínuo, então para cada $\psi \in B_{Y^*}$, tem-se $\psi \circ \left(\frac{T}{\|T\|}\right) \in B_{X^*}$. Daí,

$$\begin{aligned}\sup_{\psi\in B_{Y^*}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\psi(T(x_j))|^p\right)^{1/p} &= \|T\| \sup_{\psi\in B_{Y^*}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left|\psi \circ \left(\frac{T}{\|T\|}\right)(x_j)\right|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \|T\| \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j))|^p\right)^{1/p},\end{aligned}$$

provando a boa definição do operador $\widehat{T^w}$.

Observação 2.12. Observe que a construção feita anteriormente não menciona a boa definição do operador $\widehat{T^{w,s}} : \ell_{p,w}(X) \to \ell_p(Y)$ induzido pela correspondência (2.8). Mais ainda, o Teorema fraco de Dvoretzsky-Rogers (ver [15, Theorem 2.18]) nos diz que todo espaço de dimensão infinita contém sequências fracamente p-somáveis que não são fortemente p-somáveis. Em outras palavras, se X possui dimensão infinita, então o operador $\widehat{id_X}^{w,s} : \ell_{p,w}(X) \to \ell_p(X)$ induzido pela correspondência (2.8) não está bem definido.

2.2 Operadores lineares absolutamente p-somantes

Em virtude das Observações 2.11 e 2.12, faz sentido estudar os operadores lineares contínuos $T : X \to Y$ os quais fica bem definido o operador induzido $\widehat{T}^{w,s} : \ell_{p,w}(X) \to \ell_p(Y)$ dado pela correspondência (2.8). Além disso, em virtude de $\ell_\infty(X) = \ell_{\infty,w}(X)$, não faz sentido se preocupar com os operadores induzidos de $\ell_{\infty,w}(X)$ em $\ell_\infty(X)$. Sendo assim, a partir de agora consideraremos apenas o caso $1 \leq p < \infty$.

Definição 2.13. Sejam X e Y espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que um operador linear contínuo $T : X \to Y$ é *absolutamente p-somante* quando estiver bem definido o operador induzido $\widehat{T}^{w,s} : \ell_{p,w}(X) \to \ell_p(Y)$ dado pela correspondência (2.8).

Em outras palavras, um operador linear contínuo $T : X \to Y$ é absolutamente p-somante quando transforma sequências fracamente p-somáveis de X em sequências fortemente p-somáveis de Y, isto é, $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(Y)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X)$.

Proposição 2.14. Se $T : X \to Y$ é absolutamente p-somante, então o operador linear $\widehat{T}^{w,s} : \ell_{p,w}(X) \to \ell_p(Y)$ induzido pela correspondência (2.8) é contínuo.

Demonstração. Mostraremos que $G(\widehat{T}^{w,s})$ é fechado em $\ell_{p,w}(X)\times\ell_p(Y)$. De fato, considere $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência em $\ell_{p,w}(X)$, $x \in \ell_{p,w}(X)$ e $y \in \ell_p(Y)$ tais que $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$ em $\ell_{p,w}(X)$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{T}^{w,s}(x^k) = y$ em $\ell_p(Y)$. Note que podemos escrever $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$, $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ e $y = (y_j)_{j=1}^\infty$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$ em $\ell_{p,w}(X)$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq N \to \|x^k - x\|_{p,w} < \varepsilon.$$

Então para todos $k, j \in \mathbb{N}$, segue do Teorema de Hahn-Banach que

$$\|x_j^k - x_j\| \overset{\text{H-B}}{=} \sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\varphi(x_j^k - x_j)| \leq \|x^k - x\|_{p,w}.$$

Sendo assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$k \geq N \Rightarrow \|x_j^k - x_j\| < \varepsilon.$$

Logo $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^k = x_j$ em X e da continuidade de T segue que $\lim\limits_{k\to\infty} T(x_j^k) = T(x_j)$ em Y, para todo $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{T}^{w,s}(x^k) = y$ em $\ell_p(Y)$, segue que para tal $\varepsilon > 0$, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq N' \Rightarrow \|\widehat{T}^{w,s}(x^k) - y\|_p < \varepsilon.$$

Mas, para todos $k, j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\|T(x_j^k) - y_j\| \leq \|(T(x_j^k)_{j=1}^\infty - (y_j)_{j=1}^\infty\|_p = \|\widehat{T}^{w,s}(x^k) - y\|_p.$$

Sendo assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$k \geq N' \Rightarrow \|T(x_j^k) - y_j\| < \varepsilon.$$

Logo $\lim_{k\to\infty} T(x_j^k) = y_j$ em Y, para todo $j \in \mathbb{N}$. Pela unicidade do limite, concluímos que $T(x_j) = y_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e consequentemente

$$\widehat{T}^{w,s}(x) = \widehat{T}^{w,s}((x_j)_{j=1}^\infty) = (y_j)_{j=1}^\infty = y.$$

Portanto $(x, y) \in G(\widehat{T}^{w,s})$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, concluímos que o operador $\widehat{T}^{w,s}$ é contínuo. □

Proposição 2.15 (Propriedade de ideal)**.** Sejam X_0, Y_0, X e Y espaços de Banach e $R : X_0 \to X$, $T : X \to Y$ e $S : Y \to Y_0$ operadores lineares contínuos. Se T é absolutamente p-somante, então $S \circ T \circ R : X_0 \to Y_0$ é absolutamente p-somante.

Demonstração. Como R e S são lineares e contínuos, já vimos que estão bem definidos os operadores $\widehat{R}^w : \ell_{p,w}(X_0) \to \ell_{p,w}(X)$ e $\widehat{S}^s : \ell_p(Y) \to \ell_p(Y_0)$ induzidos pela correspondência (2.8). Além disso, como T é absolutamente p-somante, então fica bem definido o operador $\widehat{T}^{w,s} : \ell_{p,w}(X) \to \ell_p(Y)$ induzido pela correspondência (2.8). Afirmamos que

$$\widehat{(S \circ T \circ R)}^{w,s} = \widehat{S}^s \circ \widehat{T}^{w,s} \circ \widehat{R}^w : \ell_{p,w}(X_0) \to \ell_p(Y_0).$$

De fato, dado $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X_0)$, temos

$$\begin{aligned}
\widehat{(S \circ T \circ R)}^{w,s}((x_j)_{j=1}^\infty) &= (S \circ T \circ R(x_j))_{j=1}^\infty = (S(T(R(x_j))))_{j=1}^\infty \\
&= \widehat{S}^s(T(R(x_j))_{j=1}^\infty) = \widehat{S}^s(\widehat{T}^{w,s}((R(x_j))_{j=1}^\infty)) \\
&= \widehat{S}^s(\widehat{T}^{w,s}(\widehat{R}^w((x_j)_{j=1}^\infty))) = \widehat{S}^s \circ \widehat{T}^{w,s} \circ \widehat{R}^w((x_j)_{j=1}^\infty).
\end{aligned}$$

Segue daí que está bem definido o operador induzido $\widehat{(S \circ T \circ R)}^{w,s}$, portanto $S \circ T \circ R$ é absolutamente p-somante. □

Teorema 2.16 (Propriedade de somabilidade)**.** Um operador linear contínuo $T : X \to Y$ é absolutamente p-somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que, para quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p}. \tag{2.9}$$

Demonstração. Supondo que T é absolutamente p-somante, segue da Proposição 2.14 que existe $C > 0$ tal que, para quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$, tem-se

$$\|\widehat{T}^{w,s}((x_j)_{j=1}^n))\|_p \leq C\|(x_j)_{j=1}^n)\|_{p,w},$$

o que prova (2.9). Reciprocamente, supondo (2.9), seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X)$. Então

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|T(x_j)\|^p\right)^{1/p} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=1}^{n}\|T(x_j)\|^p\right)^{1/p} \leq C\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p}$$
$$\overset{(2.5)}{=} C\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p} = C\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p} < \infty,$$

logo $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$, como queríamos. □

2.3 Teorema de Dominação de Pietsch e suas generalizações abstratas

Nesta seção, apresentaremos o Teorema de Dominação de Pietsch e suas generalizações abstratas. Entretanto, para não fugir do escopo do nosso trabalho, vamos omitir suas demonstrações e vamos utilizá-las apenas como ferramentas para alcançar o nosso objetivo: provar o Teorema de Fatoração de Pietsch e, posteriormente, encontrar tipos de Fatoração de Pietsch para algumas classes de operadores lineares e multilineares somantes.

Teorema 2.17 (Dominação de Pietsch)**.** Um operador linear contínuo $T : X \to Y$ é absolutamente p-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em B_{X^*} tais que, para todo $x \in X$, tem-se

$$\|T(x)\| \leq C\left(\int_{B_{X^*}}|\varphi(x)|^p\, d\mu(\varphi)\right)^{1/p}. \tag{2.10}$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [13, Teorema 1.3.5].

Botelho, Pellegrino e Rueda introduziram, em [6], uma classe abstrata de operadores e apresentaram um tipo de Teorema de Dominação de Pietsch para essa classe. Na versão inicial apresentada, três hipóteses foram impostas acerca de tais operadores. Isso, de certa forma, dificultava encontrar classes de operadores que se encaixassem nessa definição abstrata. Posteriormente, Pellegrino e Santos, em [24], aprimoraram o resultado, exigindo apenas uma hipótese. Observe a seguir.

Sejam X, Y e E conjuntos não vazios arbitrários, $\mathcal{H}$ uma família de aplicações de X em Y, G um espaço de Banach, K um espaço topológico compacto de Hausdorff, $0 < p < \infty$ e

$$\begin{cases} R : K \times E \times G \to [0,\infty) \\ S : \mathcal{H} \times E \times G \to [0,\infty) \end{cases}$$

aplicações arbitrárias.

Definição 2.18. Com as notações acima, dizemos que uma aplicação $f \in \mathcal{H}$ é *R-S-abstrata p-somante* se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{n} S(f, x_j, b_j)^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^{n} R(\varphi, x_j, b_j)^p\right)^{1/p}.$$

Para todos $x \in E$ e $b \in G$, denotaremos por $R_{x,b}$ a aplicação $R(\cdot, x, b) : K \to [0, \infty]$, isto é,

$$R_{x,b}(\varphi) = R(\varphi, x, b), \text{ para todo } \varphi \in K.$$

Teorema 2.19 (Dominação de Pietsch Unificado)**.** Com as notações acima, suponha que para todos $x \in E$ e $b \in G$, a aplicação $R_{x,b}$ é contínua. Então $f \in \mathcal{H}$ é R-S abstrata p-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em K tais que, para todos $x \in E$ e $b \in G$, tem-se

$$S(f, x, b) \leq C \left(\int_K R(\varphi, x, b)^p \, d\mu(\varphi)\right)^{1/p}.$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [24, Theorem 3.1].

Observação 2.20. Essa classe recupera os operadores lineares absolutamente p-somantes quando $E = X$, $\mathcal{H} = \mathcal{L}(X; Y)$, $G = \mathbb{R}$, $K = B_{X^*}$ munida com a topologia fraca*, $R : B_{X^*} \times X \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada por

$$R(\varphi, x, b) = |\varphi(x)|$$

e $S : \mathcal{L}(X; Y) \times X \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada por

$$S(f, x, b) = \|f(x)\|.$$

Além disso, a Proposição 2.25 garante que, uma vez fixados $x \in X$ e $b \in \mathbb{R}$, a aplicação $R_{x,b}$ é contínua. Assim, o Teorema de Dominação de Pietsch Unificado generaliza o Teorema de Dominação de Pietsch clássico.

O refinamento feito por Pellegrino e Santos, em [24], foi primordial para que diversas classes de operadores lineares e não lineares fossem contempladas com um tipo de Dominação de Pietsch. Contudo, ainda assim exisitiam classes de operadores que pareciam não ser contempladas. No geral, essas classes têm algo em comum: o lado direito da expressão que as define via propriedade de somabilidade possui um produtório que a cada índice pode variar a expressão. Com isso, para que essas classes fossem contempladas, Pellegrino et al., em [25], introduziram a, assim denominada, "generalização mais completa" dos operadores R-S-abstratos p-somantes. Observe a seguir.

Sejam $m, k, v \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_m, E_1, \ldots, E_k, Y$ conjuntos não vazios arbitrários, $\mathcal{H}$ uma família de aplicações de $X_1 \times \cdots \times X_m$ em Y, $G_1, \ldots, G_v$ espaços de Banach, $K_1, \ldots, K_v$ espaços topológicos compactos de Hausdforff, $0 < p, p_1, \ldots, p_v < \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_v}$ e

$$\begin{cases} R_t : K_t \times E_1 \times \cdots \times E_k \times G_t \to [0, \infty), t \in \{1, \ldots, v\} \\ S : \mathcal{H} \times E_1 \times \cdots \times E_k \times G_1 \times \cdots \times G_v \to [0, \infty) \end{cases}$$

aplicações arbitrárias.

Definição 2.21. Com as notações acima, dizemos que uma aplicação $f \in \mathcal{H}$ é $R_1, \ldots, R_v$-S-*abstrata* $(p_1, \ldots, p_v)$-*somante* se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todos $n \in \mathbb{N}$, $(x_j^1, \ldots, x_j^k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$ e $(b_j^1, \ldots, b_j^v) \in G_1 \times \cdots \times G_v$, com $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{n} S(f, x_j^1, \ldots, x_j^k, b_j^1, \ldots, b_j^v)^p \right)^{1/p} \leq C \prod_{t=1}^{v} \sup_{\varphi \in K_t} \left(\sum_{j=1}^{n} R_t(\varphi, x_j^1, \ldots, x_j^k, b_j^t)^{p_t} \right)^{1/p_t}.$$

Para todos $x^l \in X_l$ e $b^t \in G_t$, com $(l, t) \in \{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, v\}$, denotaremos por $(R_t)_{x^1, \ldots, x^k, b^t}$ a aplicação $R_t(\cdot, x^1, \ldots, x^k, b^t) : K_t \to [0, \infty)$, isto é,

$$(R_t)_{x^1, \ldots, x^k, b^t}(\varphi) = R_t(\varphi, x^1, \ldots, x^k, b^t), \text{ para todo } \varphi \in K_t.$$

Teorema 2.22 (Dominação de Pietsch Generalizado)**.** Com as notações acima, suponha que R e S cumprem as seguintes condições:

(i) Para todos $x^l \in X_l$ e $b^t \in G_t$, com $(l, t) \in \{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, v\}$, a aplicação $(R_t)_{x^1, \ldots, x^k, b^t}$ é contínua.

(ii) As seguintes desigualdades ocorrem:

$$\begin{cases} R_t(\varphi, x^1, \ldots, x^k, \lambda_t b^t) \leq \lambda_t R_t(\varphi, x^1, \ldots, x^k, b^t), \\ S(f, x^1, \ldots, x^k, \alpha_1 b^1, \ldots, \alpha_v b^v) \geq \alpha_1 \ldots \alpha_v S(f, x^1, \ldots, x^k, b^1, \ldots, b^v), \end{cases}$$

para todos $t \in \{1, \ldots, v\}$, $\varphi \in K_t$, $0 \leq \lambda_t, \alpha_t \leq 1$, $b^t \in G_t$, $(x^1, \ldots, x^k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$ e $f \in \mathcal{H}$.

Então $f \in \mathcal{H}$ é $R_1, \ldots, R_v$-S-abstrata $(p_1, \ldots, p_v)$-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ_t em K_t, para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$, tais que para todos $(x^1, \ldots, x^k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$ e $(b^1, \ldots, b^v) \in G_1 \times \cdots \times G_v$, tem-se

$$S(f, x^1, \ldots, x^k, b^1, \ldots, b^v) \leq C \prod_{t=1}^{v} \left(\int_{K_t} R_t(\varphi, x^1, \ldots, x^k, b^t)^{p_t} \, d\mu_t(\varphi) \right)^{1/p_t}.$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [25, Theorem 4.6].

Observação 2.23. Os operadores R-S-abstratos p-somantes são $R_1, \ldots, R_v$-abstratos $(p_1, \ldots, p_v)$-somantes, quando $m = k = v = 1$.

A grandeza dessas generalizações se dá principalmente pela ausência da necessidade de supor alguma propriedade algébrica para o operador, como por exemplo linearidade, multilinearidade etc. Assim, essas classes abstratas unificam diversas classes de operadores encontrados na literatura, fornecendo um tipo de Dominação de Pietsch para elas.

2.4 Teorema de Fatoração de Pietsch

O clássico Teorema de Fatoração de Pietsch é um resultado de extrema importância para a Teoria dos Operadores e é uma peça fundamental para a motivação do nosso trabalho. Este resultado caracteriza, via fatoração, os operadores lineares absolutamente p-somantes. Apresentaremos agora algumas ferramentas que serão primordiais para provarmos este resultado.

Proposição 2.24. Se X é um espaço de Banach, então a inclusão canônica $J_p : C(B_{X^*}) \to L_p(\mu)$ é absolutamente p-somante, para qualquer que seja a medida regular de probabilidade de Borel μ em B_{X^*}.

Demonstração. Dado $w \in B_{X^*}$, considere a aplicação linear $\delta_w : C(B_{X^*}) \to \mathbb{K}$ dada por

$$\delta_w(f) = f(w), \text{ para todo } f \in C(B_{X^*}).$$

Sendo assim, a expressão $|\delta_w(f)| = |f(w)| \leq \|f\|_{C(B_{X^*})}$ nos diz que δ_w é contínua e que $\delta_w \in B_{C(B_{X^*})^*}$, isto é,

$$\{\delta_w : w \in B_{X^*}\} \subseteq B_{C(B_{X^*})^*}. \tag{2.11}$$

Agora, considere $n \in \mathbb{N}$ e $f_1, \ldots, f_n \in C(B_{X^*})$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \|J_p(f_j)\|_p^p = \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p^p &= \sum_{j=1}^{n} \int_{B_{X^*}} |f_j(w)|^p \, d\mu(w) = \int_{B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} |f_j(w)|^p \, d\mu(w) \\
&\leq \int_{B_{X^*}} \sup_{v \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} |f_j(v)|^p \, d\mu(w) = \sup_{v \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} |f_j(v)|^p \int_{B_{X^*}} d\mu(w) \\
&= \sup_{v \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} |f_j(v)|^p = \sup_{v \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} |\delta_v(f_j)|^p \\
&= \sup_{\varphi \in \{\delta_v : v \in B_{X^*}\}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(f_j)|^p \overset{(2.11)}{\leq} \sup_{\varphi \in B_{(C(B_{X^*}))^*}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(f_j)|^p.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.16 concluímos que J_p é absolutamente p-somante. □

Proposição 2.25. Seja X um espaço de Banach. Se B_{X^*} está munida com a topologia fraca*, então a aplicação $I : X \to C(B_{X^*})$ dada por

$$I(x)(\varphi) = \varphi(x), \text{ para todos } x \in X \text{ e } \varphi \in B_{X^*},$$

é uma isometria linear.

Demonstração. Afirmamos inicialmente que I está bem definida. De fato, seja $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em B_{X^*} tal que $\varphi_j \overset{w^*}{\to} \varphi$. Segue daí que

$$I(x)(\varphi_j) = \varphi_j(x) \to \varphi(x) = I(x)(\varphi),$$

para todo $x \in X$. Logo $I(x)$ é contínua, para todo $x \in X$, provando a boa definição de I. Mostraremos agora que I é uma isometria linear. Com efeito, dados inicialmente $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$I(x + \lambda y)(\varphi) = \varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y) = I(x)(\varphi) + \lambda I(y)(\varphi) = (I(x) + \lambda I(y))(\varphi),$$

para todo $\varphi \in B_{X^*}$. Logo $I(x + \lambda y) = I(x) + \lambda I(y)$, provando a linearidade de I. Por fim, segue do Teorema de Hahn-Banach que

$$\|I(x)\|_{C(B_{X^*})} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |I(x)(\varphi)| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x)| \overset{\text{H-B}}{=} \|x\|,$$

para todo $x \in X$, provando que I é uma isometria. □

Observação 2.26. A proposição anterior nos diz que se X é um espaço de Banach, então $C(B_{X^*})$ contém uma cópia isométrica de X, a saber, $I(X)$. A restrição da aplicação $J_p : C(B_{X^*}) \to L_p(\mu)$ ao conjunto $I(X)$ será denotada por J_p^X.

Com as ferramentas necessárias, apresentaremos agora o célebre Teorema de Fatoração de Pietsch.

Teorema 2.27 (Fatoração de Pietsch)**.** Um operador linear contínuo $T : X \to Y$ é absolutamente p-somante se, e somente se, existem uma medida regular de probabilidade de Borel μ em B_{X^*}, um subespaço fechado X_p de $L_p(\mu)$ contendo $J_p^X(I(X))$ e um operador linear contínuo $\widehat{T} : X_p \to Y$ tais que $T = \widehat{T} \circ J_p^X \circ I$, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad T \quad} & Y \\ {\scriptstyle I}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \widehat{T}} \\ I(X) & \xrightarrow[J_p^X]{} & X_p \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração. Se $T : X \to Y$ é absolutamente p-somante, então pelo Teorema 2.17 existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em B_{X^*} tais que, para todo $x \in X$, tem-se

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{1/p}. \tag{2.12}$$

Note que $S_p := J_p^X(I(X))$ é um subespaço de $L_p(\mu)$. Além disso, considere o operador $\widehat{T_0} : S_p \to Y$ dado por

$$\widehat{T_0}(J_p^X(I(x))) = T(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Vamos mostrar que $\widehat{T_0}$ está bem definido. Com efeito, dados $x, y \in X$ tais que $J_p^X(I(x)) = J_p^X(I(y))$, segue da definição de J_p que $I(x) = I(y)$. Como I é uma isometria linear, em particular é injetiva, então $I(x - y) = 0$ e, consequentemente, $x = y$. Portanto

$$\widehat{T_0}(J_p^X(I(x))) = T(x) = T(y) = \widehat{T_0}(J_p^X(I(y))),$$

provando a boa definição de $\widehat{T_0}$. Mostraremos agora que $\widehat{T_0}$ é linear e contínuo. Para isso, considere inicialmente $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo

$$\begin{aligned} \widehat{T_0}(J_p^X(I(x)) + \lambda J_p^X(I(y))) &= \widehat{T_0}(J_p^X(I(x + \lambda y))) = T(x + \lambda y) \\ &= T(x) + \lambda T(y) = \widehat{T_0}(J_p^X(I(x))) + \lambda \widehat{T_0}(J_p^X(I(y))), \end{aligned}$$

provando a linearidade de $\widehat{T_0}$. Por fim, notamos que para todo $x \in X$, tem-se

$$\begin{aligned} \|\widehat{T_0}(J_p^X(I(x)))\| = \|T(x)\| &\overset{(2.12)}{\leq} C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{1/p} = C \left(\int_{B_{X^*}} |I(x)(\varphi)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{1/p} \\ &= C \left(\int_{B_{X^*}} |J_p^X(I(x))(\varphi)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{1/p} = C \|J_p^X(I(x))\|_p, \end{aligned}$$

portanto $\widehat{T_0}$ é contínuo. Considerando $X_p := \overline{S_p} \subseteq L_p(\mu)$, obtemos $J_p^X(I(X)) \subseteq X_p$. Denotando a única extensão linear contínua de $\widehat{T_0}$ a X_p por $\widehat{T} : X_p \to Y$, concluímos que

$$\widehat{T} \circ J_p^X \circ I(x) = \widehat{T}(J_p^X(I(x))) = \widehat{T_0}(J_p^X(I(x))) = T(x),$$

para todo $x \in X$. A recíproca segue imediatamente da propriedade de ideal, uma vez que I é linear contínuo, J_p^X é absolutamente p-somante e $\widehat{T}$ é linear contínuo, portanto $T = \widehat{T} \circ J_p^X \circ I$ é absolutamente p-somante. □

Capítulo 3

Fatoração de operadores somantes em um contexto abstrato

Em virtude da importância do Teorema de Fatoração de Pietsch para a Teoria dos Operadores, diversos matemáticos buscam encontrar tipos de teoremas de Fatoração de Pietsch para as mais variadas classes de operadores lineares e não lineares presentes na literatura. Percebe-se que diversos desses tipos de Fatoração de Pietsch são provados utilizando o mesmo argumento. Sendo assim, de maneira similar à abstração feita por Botelho, Pellegrino e Rueda, em [6], visando encontrar um Teorema do tipo Dominação de Pietsch, é comum procurar classes abstratas de operadores que possuam um tipo de Fatoração de Pietsch.

Neste capítulo, apresentaremos algumas classes de operadores lineares e multilineares, em um contexto abstrato, introduzidos por Achour et al., em [1], que vêm acompanhadas de um tipo de Dominação de Pietsch. Contudo, não é imediata a existência de um tipo de Fatoração de Pietsch para estes operadores. Sendo assim, o nosso objetivo é construir um espaço de Banach, chamado espaço de dominação, que atue como um agente intermediário na tarefa de nos fornecer resultados nessa vertente.

3.1 Espaço de dominação

Definição 3.1. Sejam X e Y espaços vetoriais. Dizemos que uma aplicação $\Psi : X \to Y$ é *absolutamente homogênea* quando $\Psi(\lambda x) = |\lambda|\Psi(x)$, para todos $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Observe que uma aplicação homogênea não nula $\Psi : X \to Y$ entre os espaços normados X e Y nunca é limitada no sentido da Definição A.6. Entretanto, a restrição de aplicações homogêneas a subconjuntos limitados de X, podem ou não ser limitadas. Isso nos permite apresentar a definição a seguir.

Definição 3.2. Sejam X e Y espaços normados. Dizemos que uma aplicação $\Psi : X \to Y$ é *limitada* se existe uma constante $K_\Psi > 0$ tal que $\|\Psi(x)\| \leq K_\Psi \|x\|$, para todo $x \in X$.

No contexto da definição anterior, uma aplicação $\Psi : X \to Y$ é limitada quando transforma subconjuntos limitados de X em subconjuntos limitados de Y.

A nossa tarefa agora é definir uma seminorma que dará origem a uma norma em um determinado espaço quociente. Considerando $(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*$ munido com a topologia fraca*, segue que $B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}$ é um compacto topológico de Hausdorff. Tal seminorma será definida num subespaço de $C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$.

Proposição 3.3. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $X_1, \dots, X_m$ espaços de Banach. Se $B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}$ está munida com a topologia fraca*, então a aplicação canônica $I_m : X_1 \times \cdots \times X_m \to C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$ dada por

$$I_m(x^1, \dots, x^m)(\varphi) = \varphi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m),$$

para todos $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$ e $\varphi \in B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}$, é m-linear e contínua.

Demonstração. Afirmamos inicialmente que I_m está bem definida. De fato, seja $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência em $B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}$ tal que $\varphi_j \overset{w^*}{\to} \varphi$. Segue daí que

$$I_m(x)(\varphi_j) = \varphi_j(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) \to \varphi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) = I_m(x)(\varphi),$$

para todo $x = (x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$. Logo $I_m(x)$ é contínua, provando a boa definição de I_m. Mostraremos agora que I_m é m-linear e contínua. Com efeito, dados $t \in \{1, \dots, m\}$, $(a^1, \dots, a^{t-1}, a^{t+1}, \dots, a^m) \in X_1 \times \cdots \times X_{t-1} \times X_{t+1} \cdots \times X_m$, $x^t, y^t \in X_t$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} I_m(a^1, \dots, x^t + \lambda y^t, \dots, a^m)(\varphi) &= \varphi(a^1 \otimes \cdots \otimes (x^t + \lambda y^t) \otimes \cdots \otimes a^m) \\ &= \varphi(a^1 \otimes \cdots \otimes x^t \otimes \dots a^m + \lambda a^1 \otimes \cdots \otimes y^t \otimes \dots a^m) \\ &= \varphi(a^1 \otimes \cdots \otimes x^t \otimes \dots a^m) + \lambda \varphi(a^1 \otimes \cdots \otimes y^t \otimes \dots a^m) \\ &= I_m(a^1, \dots, x^t, \dots, a^m)(\varphi) + \lambda I_m(a^1, \dots, y^t, \dots, a^m)(\varphi), \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}$. Logo

$$I_m(a^1, \dots, x^t + \lambda y^t, \dots, a^m) = I_m(a^1, \dots, x^t, \dots, a^m) + \lambda I_m(a^1, \dots, y^t, \dots, a^m)$$

Isso mostra que I_m é m-linear. Por fim, segue do Teorema de Hahn-Banach juntamente com (1.5) que

$$\|I_m(x)\| = \sup_{\varphi \in B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}} |\varphi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m)| \overset{\text{H-B}}{=} \pi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) \overset{(1.5)}{=} \prod_{t=1}^m \|x^t\|,$$

provando a continuidade de I_m. □

Considere agora o subespaço $\widehat{V_m} := \text{span}\{I_m(X_1 \times \cdots \times X_m)\}$ de $C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$. Dado $\mathbf{x} \in \widehat{V_m}$, existem $d \in \mathbb{N}$, $(y^{1,1}, \ldots, y^{m,1}), \ldots, (y^{1,d}, \ldots, y^{m,d}) \in X_1 \times \cdots \times X_m$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ tais que

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k I_m(y^{1,k}, \ldots, y^{m,k}). \tag{3.1}$$

Como I_m é m-linear e, em particular, X_1 é um espaço vetorial, então renomeando $x^{1,k} = \lambda_k y^{1,k}$, para todo $k \in \{1, \ldots, d\}$ e $x^{t,k} = y^{t,k}$, para todo $(t,k) \in \{2, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, d\}$, podemos reescrever 3.1 da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{d} I_m(\lambda_k y^{1,k}, \ldots, y^{m,k}) = \sum_{k=1}^{d} I_m(x^{1,k}, \ldots, x^{m,k}). \tag{3.2}$$

Por simplicidade de escrita, utilizaremos a notação $\langle x^1 \otimes \cdots \otimes x^m, \cdot \rangle$ para representar o elemento $I_m(x^1, \ldots, x^m)$. Sendo assim, podemos reescrever (3.2) da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{d} \langle x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k}, \cdot \rangle. \tag{3.3}$$

Habitualmente, vamos utilizar a forma (3.3) para representar um elemento $\mathbf{x} \in \widehat{V_m}$ e vamos utilizar as letras $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ e $\mathbf{w}$ para denotar elementos de $\widehat{V_m}$.

Observação 3.4. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \widehat{V_m}$, considerando as representações

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{d_\mathbf{x}} \langle x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k}, \cdot \rangle \text{ e } \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{d_\mathbf{y}} \langle y^{1,k} \otimes \cdots \otimes y^{m,k}, \cdot \rangle,$$

para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $d_\mathbf{x} = d_\mathbf{y}$, pois caso contrário, basta completar com $\langle 0, \cdot \rangle$ nas parcelas restantes.

Sejam $\Phi : \widehat{V_m} \to C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$ uma aplicação absolutamente homogênea, Z um espaço de Banach e $J : \text{span}\{\Phi(\widehat{V_m})\} \to Z$ um operador linear contínuo. Utilizando a representação usual (3.3), defina a função $\rho_{\Phi,Z} : \widehat{V_m} \to \mathbb{R}$ associada a Φ e Z, dada por

$$\rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x}) := \inf \sum_{i=1}^{r} \left\| J \circ \Phi \left(\sum_{k=1}^{d} \langle x_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_i^{m,k}, \cdot \rangle \right) \right\|_Z, \text{ para todo } \mathbf{x} \in \widehat{V_m},$$

onde o ínfimo é computado sobre todas as decomposições de $\mathbf{x}$ da forma

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{d} \langle x_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_i^{m,k}, \cdot \rangle,$$

com $r \in \mathbb{N}$ e $(x_i^{1,k}, \ldots, x_i^{m,k}) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, para $(i,k) \in \{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, d\}$.

Observação 3.5. Para qualquer que seja a decomposição de $\mathbf{x}$ da forma

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_i^{m,k}, \cdot\rangle,$$

tem-se

$$\rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^{r}\left\| J \circ \Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_i^{m,k}, \cdot\rangle\right)\right\|_Z.$$

Em particular,

$$\rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x}) \leq \left\| J \circ \Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k}, \cdot\rangle\right)\right\| = \|J \circ \Phi(\mathbf{x})\|_Z.$$

Observação 3.6. De maneira análoga à Observação 3.4, se

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r_x}\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_i^{m,k}, \cdot\rangle \text{ e } \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{r_y}\sum_{k=1}^{d}\langle y_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes y_i^{m,k}, \cdot\rangle$$

são decomposições para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, então podemos supor, sem perda de generalidade, que $r_x = r_y$.

Proposição 3.7. Sob as condições anteriores, $\rho_{\Phi,Z}$ é uma seminorma em $\widehat{V_m}$.

Demonstração. Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \widehat{V_m}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ (podemos supor, sem perda de generalidade, que $\lambda \neq 0$). Escrevendo

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{d}\langle x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k}, \cdot\rangle \text{ e } \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{d}\langle y^{1,k} \otimes \cdots \otimes y^{m,k}, \cdot\rangle,$$

sejam

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_i^{m,k}, \cdot\rangle, \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle y_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes y_i^{m,k}, \cdot\rangle \text{ e } \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle w_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes w_i^{m,k}, \cdot\rangle$$

decomposições arbitrárias para $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\lambda\mathbf{x}$, respectivamente. Como

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_i^{m,k}, \cdot\rangle$$

é uma decomposição arbitrária para $\mathbf{x}$, então

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle (\lambda x_i^{1,k}) \otimes x_i^{2,k} \otimes \cdots \otimes x_i^{m,k}, \cdot\rangle$$

é uma decomposição para $\lambda\mathbf{x}$, pois

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle(\lambda x_i^{1,k})\otimes x_i^{2,k}\otimes\cdots\otimes x_i^{m,k},\cdot\rangle = \lambda\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_i^{m,k},\cdot\rangle = \lambda\mathbf{x}.$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}\rho_{\Phi,Z}(\lambda\mathbf{x}) &\leq \sum_{i=1}^{r}\left\|J\circ\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle(\lambda x_i^{1,k})\otimes x_i^{2,k}\otimes\cdots\otimes x_i^{m,k},\cdot\rangle\right)\right\|_Z\\ &= |\lambda|\sum_{i=1}^{r}\left\|J\circ\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_i^{m,k},\cdot\rangle\right)\right\|_Z\end{aligned}$$

e, consequentemente, $\rho_{\Phi,Z}(\lambda\mathbf{x}) \leq |\lambda|\rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x})$. Por outro lado, como

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle w_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes w_i^{m,k},\cdot\rangle$$

é uma decomposição arbitrária para $\lambda\mathbf{x}$, então pondo $\gamma = \frac{1}{\lambda}$, segue que

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle(\gamma w_i^{1,k})\otimes w_i^{2,k}\otimes\cdots\otimes w_i^{m,k},\cdot\rangle$$

é uma decomposição para $\mathbf{x}$, pois

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle(\gamma w_i^{1,k})\otimes w_i^{2,k}\otimes\cdots\otimes w_i^{m,k},\cdot\rangle = \gamma\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle w_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes w_i^{m,k},\cdot\rangle = \gamma\lambda\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Daí temos

$$\begin{aligned}\rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x}) &\leq \sum_{i=1}^{r}\left\|J\circ\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle(\gamma w_i^{1,k})\otimes w_i^{2,k}\otimes\cdots\otimes w_i^{m,k},\cdot\rangle\right)\right\|_Z\\ &= |\gamma|\sum_{i=1}^{r}\left\|J\circ\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle w_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes w_i^{m,k},\cdot\rangle\right)\right\|_Z\end{aligned}$$

e, consequentemente, $|\lambda|\rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x}) \leq \rho_{\Phi,Z}(\lambda\mathbf{x})$. Desta forma, fica estabelecida a igualdade

$$\rho_{\Phi,Z}(\lambda\mathbf{x}) = |\lambda|\rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x}).$$

Para a desigualdade triangular, afirmamos incialmente que

$$\sum_{i=1}^{2r}\sum_{k=1}^{d}\langle z_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes z_i^{m,k},\cdot\rangle$$

é uma decomposição para $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, considerando

$$(z_i^{1,k},\dots,z_i^{m,k}) = \begin{cases} (x_i^{1,k},\dots,x_i^{m,k}), \text{ se } i\in\{1,\dots,r\} \\ (y_{i-r}^{1,k},\dots,y_{i-r}^{m,k}), \text{ se } i\in\{r+1,\dots,2r\}, \end{cases} \tag{3.4}$$

para todo $k\in\{1,\dots,d\}$. De fato, observe que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{y} &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_i^{m,k},\cdot\rangle + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle y_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes y_i^{m,k},\cdot\rangle \\ &\overset{(3.4)}{=} \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle z_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes z_i^{m,k},\cdot\rangle + \sum_{i=r+1}^{2r}\sum_{k=1}^{d}\langle z_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes z_i^{m,k},\cdot\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{2r}\sum_{k=1}^{d}\langle z_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes z_i^{m,k},\cdot\rangle.\end{aligned}$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}\rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &\le \sum_{i=1}^{2r}\left\| J\circ\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle z_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes z_i^{m,k},\cdot\rangle\right)\right\|_Z \\ &\overset{(3.4)}{=} \sum_{i=1}^{r}\left\| J\circ\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_i^{m,k},\cdot\rangle\right)\right\|_Z + \sum_{i=r+1}^{2r}\left\| J\circ\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle y_{i-r}^{1,k}\otimes\cdots\otimes y_{i-r}^{m,k},\cdot\rangle\right)\right\|_Z \\ &= \sum_{i=1}^{r}\left\| J\circ\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_i^{m,k},\cdot\rangle\right)\right\|_Z + \sum_{i=1}^{r}\left\| J\circ\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle y_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes y_i^{m,k},\cdot\rangle\right)\right\|_Z.\end{aligned}$$

Daí concluímos que

$$\rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \le \rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x}) + \rho_{\Phi,Z}(\mathbf{y}).$$

Isso completa a demonstração. □

De agora em diante, mesmo que não haja menção, consideraremos $\widehat{V_m}$ com a norma induzida por $\|\cdot\|_{C(B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})}$.

Lema 3.8. Se $\Phi:\widehat{V_m}\to C(B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$ é uma aplicação absolutamente homogênea limitada, então $\rho_{\Phi,Z}$ é contínua.

Demonstração. Segue da Observação 3.5 e do item (iii) da Proposição A.2 que

$$\begin{aligned}|\rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x})-\rho_{\Phi,Z}(\mathbf{y})| \le \rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) &\le \|J\circ\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|_Z \\ &\le \|J\|\|\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|_{C(B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})} \\ &\le \|J\|K_\Phi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{C(B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})},\end{aligned}$$

para todos $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\widehat{V}$, onde $K_\Phi>0$ é a constante oriunda da limitação de Φ. A expressão acima mostra que $\rho_{\Phi,Z}$ é lipschitziana e, consequentemente, contínua. □

Considerando agora o subespaço $N = \{\mathbf{x} \in \widehat{V_m} : \rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x}) = 0\}$ de $\widehat{V_m}$, a expressão

$$\|[\mathbf{x}]\|_{\widehat{V_m}/N} = \rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x})$$

define uma norma em $\widehat{V_m}/N$ (ver Apêndice A). O completamento de $\widehat{V_m}/N$, denotado por $(\widehat{V_m})_\Phi^Z$ e chamado de *espaço de dominação* de $\widehat{V_m}$ associado a Φ e Z, é um espaço de Banach com a norma

$$\|[\mathbf{x}]\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z} = \|[\mathbf{x}]\|_{\widehat{V_m}/N}. \tag{3.5}$$

Mesmo que não haja menção, vamos sempre considerar $(\widehat{V_m})_\Phi^Z$ com a norma $\|\cdot\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z}$ acima.

Observação 3.9. Como $(\widehat{V_m})_\Phi^Z$ é o completamento de $\widehat{V_m}/N$, então existe um isomorfismo isométrico $S : \widehat{V_m}/N \to S(\widehat{V_m}/N) \subseteq (\widehat{V_m})_\Phi^Z$ tal que $S(\widehat{V_m}/N)$ é denso em $(\widehat{V_m})_\Phi^Z$. Desta forma, dado $\mathbf{v} \in (\widehat{V_m})_\Phi^Z$, existe uma sequência $(\mathbf{x}_j)_{j=1}^\infty$ em $\widehat{V_m}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} S([\mathbf{x}_j]) = \mathbf{v}.$$

Como $\|\cdot\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z}$ é uma norma em $(\widehat{V_m})_\Phi^Z$, em particular $\|\cdot\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z}$ é contínua, então

$$\|\mathbf{v}\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z} = \|\lim_{j\to\infty} S([\mathbf{x}_j])\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z} = \lim_{j\to\infty} \|S([\mathbf{x}_j])\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z}.$$

Isso significa que é suficiente definir $\|\cdot\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z}$ apenas nos elementos de $S(\widehat{V_m}/N)$. Observe que isso foi exatamente o que fizemos em (3.5), a menos do abuso de notação $[\mathbf{x}] \in (\widehat{V_m})_\Phi^Z$, pois, na verdade, $S([\mathbf{x}]) \in (\widehat{V_m})_\Phi^Z$. De agora em diante vamos cometer esse abuso de notação, visto que $\widehat{V_m}/N$ e $S(\widehat{V_m}/N)$ são isomorfos isometricamente (ver Apêndice A).

Segue da Observação 3.5 que, para todo $\mathbf{x} \in \widehat{V_m}$, tem-se

$$\|[\mathbf{x}]\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z} \leq \|J \circ \Phi(\mathbf{x})\|_Z.$$

Lema 3.10. Se $\Phi : \widehat{V_m} \to C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$ é uma aplicação absolutamente homogênea limitada, então a aplicação linear $I_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z} : \widehat{V_m} \to (\widehat{V_m})_\Phi^Z$ dada por

$$I_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z}(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}], \text{ para todo } \mathbf{x} \in \widehat{V_m},$$

é contínua.

Demonstração. Para todo $\mathbf{x} \in \widehat{V_m}$, tem-se

$$\|I_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z}(\mathbf{x})\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z} = \|[\mathbf{x}]\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z} \leq \|J \circ \Phi(\mathbf{x})\|_Z \leq K_\Phi \|J\| \|\mathbf{x}\|_{C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})},$$

onde $K_\Phi > 0$ é a constante oriunda da limitação de Φ. Portanto $I_{(\widehat{V_m})_\Phi^Z}$ é contínua. □

Observação 3.11. No caso particular em que $J = J_p^{X_1\times\cdots\times X_m}$ e $Z = L_p(\mu)$, para alguma medida regular de probabilidade de Borel μ em $B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\ldots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}$, temos

$$\rho_{\Phi,Z}(\mathbf{x}) = \inf\sum_{i=1}^{r}\left(\int_{B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}}\left|\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_i^{m,k},\cdot\rangle\right)(\varphi)\right|^p d\mu(\varphi)\right)^{1/p},$$

onde o ínfimo é computado sobre todas as decomposições de $\mathbf{x}$ da forma

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_i^{m,k},\cdot\rangle.$$

com $r\in\mathbb{N}$ e $(x_i^{1,k},\ldots,x_i^{m,k})\in X_1\times\cdots\times X_m$, para $(i,k)\in\{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,d\}$.

3.2 Operadores lineares Φ-abstratos p-somantes

Nesta seção, apresentaremos uma classe de operadores lineares, em um certo contexto abstrato, que generaliza os operadores absolutamente p-somantes. Inicialmente, lembramos que pela Proposição 2.25, todo espaço de Banach X pode ser visto como um subespaço de $C(B_{X^*})$ através do isomorfismo isométrico $I : X \to C(B_{X^*})$. A partir de agora, por simplicidade de escrita, vamos utilizar as notações $\langle x,\cdot\rangle$ para representar $I(x)$ e $\widehat{X}$ para representar $I(X)$. Em outras palavras, a correspondência $x\leftrightarrow\langle x,\cdot\rangle$ define um isomorfismo isométrico entre X e $\widehat{X}$ de modo que

$$\langle x,\varphi\rangle = \varphi(x), \text{ para todo } \varphi\in B_{X^*}.$$

Observação 3.12. Na construção do espaço de dominação associado a Φ e Z realizada anteriormente, quando $m=1$ e $X_1=X$, tem-se $I_1 = I : X\to C(B_{X^*})$. Assim,

$$\widehat{V_1} = \text{span}\{I_1(X_1)\} = \text{span}\{I(X)\} = \text{span}\{\widehat{X}\} = \widehat{X}.$$

Daí, a seminorma $\rho_{\Phi,Z} : \widehat{X}\to\mathbb{R}$ em $\widehat{X}$ é dada por

$$\rho_{\Phi,Z}(\langle x,\cdot\rangle) = \inf\sum_{i=1}^{r}\|J\circ\Phi(\langle x,\cdot\rangle)\|_Z, \text{ para todo } x\in X,$$

onde o ínfimo é computado sobre todas as decomposições de x da forma

$$x = \sum_{i=1}^{r} x_i,$$

com $r\in\mathbb{N}$ e $x_1,\ldots,x_r\in X$.

Definição 3.13 (Operadores lineares Φ-abstratos p-somantes)**.** Sejam X e Y espaços de Banach, $1 \leq p < \infty$ e $\Phi : \widehat{X} \to C(B_{X^*})$ uma aplicação absolutamente homogênea. Dizemos que um operador linear contínuo $T : X \to Y$ é Φ-*abstrato p-somante* (ver [1, Definition 2.1]) se existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$ dados, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^p\right)^{1/p} \leq C \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} |\Phi(\langle x_j, \cdot\rangle)|^p\right)^{1/p} \right\|_{C(B_{X^*})}.$$

No caso particular em que $\Phi = |\iota| : \widehat{X} \to C(B_{X^*})$, onde $\iota : \widehat{X} \to C(B_{X^*})$ é a inclusão de $\widehat{X}$ em $C(B_{X^*})$, obtemos os operadores lineares absolutamente p-somantes (ver Teorema 2.16).

Exemplo 3.14. Seja $\Phi : \widehat{X} \to C(B_{X^*})$ a aplicação dada por

$$\Phi(\langle x, \cdot\rangle) := \begin{cases} \dfrac{|\langle x, \cdot\rangle|^2}{\|x\|}, \text{ se } x \neq 0; \\ 0, \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

Note que para todos $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, com $x \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, temos

$$\Phi(\lambda\langle x, \cdot\rangle) = \Phi(\langle \lambda x, \cdot\rangle) = \frac{|\langle \lambda x, \cdot\rangle|^2}{\|\lambda x\|} = \frac{|\lambda|^2|\langle x, \cdot\rangle|^2}{|\lambda|\|x\|} = |\lambda|\frac{|\langle x, \cdot\rangle|^2}{\|x\|} = |\lambda|\Phi(\langle x, \cdot\rangle)$$

e claramente $\Phi(\lambda\langle 0, \cdot\rangle) = 0 = \lambda\Phi(\langle 0, \cdot\rangle)$, portanto Φ é absolutamente homogênea. Observe também que

$$|\langle x, \varphi\rangle| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\| \leq \|x\|,$$

para todos $x \in X$, com $x \neq 0$, e $\varphi \in B_{X^*}$. Sendo assim, para todo $x \in X$, com $x \neq 0$, temos $|\langle x, \cdot\rangle| \leq \|x\|$ e, consequentemente,

$$\frac{|\langle x, \cdot\rangle|^2}{\|x\|} \leq |\langle x, \cdot\rangle|. \tag{3.6}$$

Assim, se $T : X \to Y$ é um operador Φ-abstrato 1-somante, então existe uma constante $C > 0$ tal que, dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$ (podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_j \neq 0$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\| &\leq C \left\| \sum_{j=1}^{n} |\Phi(\langle x, \cdot\rangle)| \right\|_{C(B_{X^*})} = C \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{|\langle x_j, \cdot\rangle|^2}{\|x_j\|} \right\|_{C(B_{X^*})} \\ &\overset{(3.6)}{\leq} C \left\| \sum_{j=1}^{n} |\langle x_j, \cdot\rangle| \right\|_{C(B_{X^*})} = C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} |\langle x_j, \varphi\rangle| = C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.16, concluímos que T é absolutamente 1-somante. Isso nos diz que para essa escolha de aplicação homogênea Φ, a classe dos operadores lineares Φ-abstratos 1-somantes forma um subconjunto (mais ainda, um subespaço) da classe dos operadores lineares absolutamente 1-somantes.

Agora, vamos utilizar o Teorema 2.19 para encontrar uma dominação para os operadores lineares Φ-abstratos p-somantes.

Teorema 3.15. Um operador linear contínuo $T : X \to Y$ é Φ-abstrato p-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em B_{X^*} tais que para cada $x \in X$, tem-se

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\Phi(\langle x, \cdot \rangle)(\varphi)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{1/p}.$$

Demonstração. Sejam $E = X$, $\mathcal{H} = \mathcal{L}(X;Y)$, $G = \mathbb{R}$, $K = B_{X^*}$ munida com a topologia fraca*, $R : B_{X^*} \times X \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada por

$$R(\varphi, x, b) = |\Phi(\langle x, \cdot \rangle)(\varphi)|$$

e $S : \mathcal{L}(X;Y) \times X \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada por

$$S(f, x, b) = \|f(x)\|.$$

Assim, T é Φ-abstrato p-somante se, e somente se, T é R-S-abstrato p-somante. Além disso, uma vez fixados $x \in X$ e $b \in \mathbb{R}$, a função $R_{x,b}$ é contínua, pois $\Phi(\langle x, \cdot \rangle) \in C(B_{X^*})$. O resultado segue do Teorema 2.19. □

A seguir, vejamos mais um exemplo de subespaço do espaço dos operadores lineares absolutamente 1-somantes. Para isso, vamos fazer o uso da proposição anterior.

Exemplo 3.16. Fixado $\varphi_0 \in B_{X^*}$, $\|\varphi_0\| = 1$, seja $\Phi : \widehat{X} \to C(B_{X^*})$ a aplicação dada por

$$\Phi(\langle x, \cdot \rangle) = |\varphi_0(x)|^{1/2} |\langle x, \cdot \rangle|^{1/2}, \text{ para todo } x \in X.$$

Dados $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda\langle x, \cdot \rangle) = \Phi(\langle \lambda x, \cdot \rangle) &= |\varphi_0(\lambda x)|^{1/2} |\langle \lambda x, \cdot \rangle|^{1/2} = |\lambda|^{1/2} |\varphi_0(x)|^{1/2} |\lambda|^{1/2} |\langle x, \cdot \rangle|^{1/2} \\ &= |\lambda| |\varphi_0(x)|^{1/2} |\langle x, \cdot \rangle|^{1/2} = |\lambda| \Phi(\langle x, \cdot \rangle), \end{aligned}$$

e, daí, Φ é absolutamente homogênea. Além disso, lembramos que

$$(ab)^{1/2} \leq \frac{1}{2}(a + b), \text{ para todos } a, b \in \mathbb{R} \text{ (desigualdade das médias).} \tag{3.7}$$

Assim, se $T : X \to Y$ é um operador Φ-abstrato 1-somante, então pelo Teorema 3.15 existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em B_{X^*} tais que, para todo $x \in X$, tem-se

$$\|T(x)\| \leq C \int_{B_{X^*}} |\varphi_0(x)|^{1/2}|\varphi(x)|^{1/2}\, d\mu(\varphi) \overset{(3.7)}{\leq} C \int_{B_{X^*}} \frac{1}{2}\left(|\varphi_0(x)| + |\varphi(x)|\right) d\mu(\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}C\left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|\, d(\delta_{\varphi_0})(\varphi) + \int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|\, d\mu(\varphi)\right) = C \int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|\, d\left(\frac{\delta_{\varphi_0}+\mu}{2}\right)(\varphi),$$

onde δ_{φ_0} é o delta de Dirac associado a φ_0. Daí, note que $\delta_{\varphi_0}(B_{X^*}) = \delta_{\varphi_0}(\varphi_0) = 1$, ou seja, δ_{φ_0} é uma medida regular de probabilidade de Borel em B_{X^*}. Logo $\frac{\delta_{\varphi_0}+\mu}{2}$ é uma medida regular de probabilidade de Borel em B_{X^*}. Pelo Teorema 2.17, T é absolutamente 1-somante.

Apresentaremos agora um tipo de Fatoração de Pietsch para os operadores lineares Φ-abstratos p-somantes. Embora este seja o principal resultado dessa seção, vamos omitir sua demonstração, pois posteriormente apresentaremos uma classe de operadores multilineares que generaliza os operadores lineares Φ-abstratos p-somantes, e que possui um tipo de Fatoração de Pietsch.

Teorema 3.17. Se $\Phi : \widehat{X} \to C(B_{X^*})$ é absolutamente homogênea limitada, então um operador linear contínuo $T : X \to Y$ é Φ-abstrato p-somante se, e somente se, existem uma medida regular de probabilidade de Borel μ em B_{X^*}, um espaço de dominação $\widehat{X}_\Phi^{L_p(\mu)}$ associado a Φ e $L_p(\mu)$ e um operador linear contínuo $\widehat{T} : \widehat{X}_\Phi^{L_p(\mu)} \to Y$ tal que $T = \widehat{T} \circ I_{\widehat{X}_\Phi^{L_p(\mu)}} \circ I$, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad T \quad} & Y \\ {\scriptstyle I}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \widehat{T}} \\ \widehat{X} & \xrightarrow[I_{\widehat{X}_\Phi^{L_p(\mu)}}]{} & \widehat{X}_\Phi^{L_p(\mu)} \end{array}$$

é comutativo.

3.3 Operadores multilineares fortemente Φ-abstratos p-somantes

Nesta seção, apresentaremos a primeira classe de operadores multilineares deste trabalho, em um contexto abstrato, que generaliza os operadores lineares Φ-abstratos p-somantes.

Definição 3.18 (Operadores multilineares fortemente Φ-abstratos p-somantes)**.** Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_m$ e Y espaços de Banach, $1 \leq p < \infty$ e $\Phi : \widehat{V_m} \to C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$ uma aplicação absolutamente homogênea. Dizemos que um operador m-linear contínuo $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é *fortemente* Φ*-abstrato* p*-somante* (ver [1, Definition 3.1]) se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todos $n, d \in \mathbb{N}$ e $(x_j^{1,k}, \ldots, x_j^{m,k}) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, com $(j,k) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, d\}$, tem-se

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{d} T(x_j^{1,k}, \ldots, x_j^{m,k}) \right\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq C \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \Phi \left(\sum_{k=1}^{d} \langle x_j^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_j^{m,k}, \cdot \rangle \right) \right|^p \right)^{1/p} \right\|_{C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})} . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Note que quando $m = 1$, obtemos os operadores lineares Φ-abstratos p-somantes (ver Definição 3.13).

Exemplo 3.19. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_m$ e Y espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que um operador m-linear contínuo $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é *fortemente* p*-somante fatorável* (ver [23]) se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todos $n, d \in \mathbb{N}$ e $(x_j^{1,k}, \ldots, x_j^{m,k}) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, com $(j,k) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, d\}$, tem-se

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{d} T(x_j^{1,k}, \ldots, x_j^{m,k}) \right\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq C \sup_{\varphi \in B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{d} \varphi(x_j^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_j^{m,k}) \right|^p \right)^{1/p} . \end{aligned}$$

Os operadores fortemente p-somantes fatoráveis são fortemente $|\iota|$-abstratos p-somantes, onde $\iota : \widehat{V_m} \to C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$ é aplicação inclusão de $\widehat{V_m}$ em $C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$.

Proposição 3.20. Sejam $\Phi : \widehat{V_m} \to C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$ uma aplicação absolutamente homogênea e $1 \leq p < \infty$. Um operador m-linear contínuo $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é fortemente Φ-abstrato p-somante se, e somente se, sua linearização $T_L : X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m \to Y$ é Φ-abstrata p-somante.

Demonstração. Primeiramente denote por $X = X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ e observe que

$$\begin{aligned} \widehat{V_m} &= \left\{ \sum_{k=1}^{d} \langle x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k}, \cdot \rangle : x^{t,k} \in X_t, (t,k) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, d\} \right\} \\ &= \left\{ \left\langle \sum_{k=1}^{d} x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k}, \cdot \right\rangle : x^{t,k} \in X_t, (t,k) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, d\} \right\} = \widehat{X}, \end{aligned}$$

isto é, faz sentido falar que T e T_L são, respectivamente, fortemente Φ-abstrato p-somante e Φ-abstrato p-somante, para a mesma aplicação aboslutamente homogênea Φ. Daí,

$$\sum_{k=1}^{d} T(x^{1,k},\dots,x^{m,k}) = T_L\left(\sum_{k=1}^{d} x^1\otimes\cdots\otimes x^m\right),$$

para todos $d\in\mathbb{N}$, $(x^{1,k},\dots,x^{m,k})\in X_1\times\cdots\times X_m$, com $k\in\{1,\dots,d\}$. Sendo assim, a expressão (3.8) ocorre se, e somente se, a expressão

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|T_L\left(\sum_{k=1}^{d} x_j^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_j^{m,k}\right)\right\|^p\right)^{1/p}\\ &\leq C\left\|\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\Phi\left(\left\langle\sum_{k=1}^{d} x_j^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_j^{m,k},\cdot\right\rangle\right)\right|^p\right)^{1/p}\right\|_{C(B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})}\end{aligned}$$

ocorre. Isso conclui o resultado. □

Utilizando o Teorema 2.19 vamos encontrar um tipo de Dominação de Pietsch para os operadores multilineares fortemente Φ-abstratos p-somantes.

Teorema 3.21. Um operador m-linear contínuo $T: X_1\times\cdots\times X_m\to Y$ é fortemente Φ-abstrato p-somante se, e somente se, existem uma medida regular de probabilidade de Borel μ em $B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}$ e uma constante $C>0$ tais que, para cada $d\in\mathbb{N}$ e $(x^{1,k},\dots,x^{m,k})\in X_1\times\cdots\times X_m$, com $k\in\{1,\dots,d\}$, tem-se

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{k=1}^{d} T(x^{1,k},\dots,x^{m,k})\right\|\\ &\leq C\left(\int_{B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}}\left|\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x^{1,k}\otimes\cdots\otimes x^{m,k},\cdot\rangle\right)(\varphi)\right|^p d\mu(\varphi)\right)^{1/p}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Demonstração. Sejam $E=c_{00}(X_1\times\cdots\times X_m)$, $\mathcal{H}=\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;Y)$, $G=\mathbb{R}$, $K=B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}$ munida com a topologia fraca*, $R: B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}\times c_{00}(X_1\times\cdots\times X_m)\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$ dada por

$$R(\varphi,(x^{1,k},\dots,x^{m,k})_{k=1}^d,b) = \left|\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x^{1,k}\otimes\cdots\otimes x^{m,k},\cdot\rangle\right)(\varphi)\right|$$

e $S:\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;Y)\times c_{00}(X_1\times\cdots\times X_m)\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$ dada por

$$S(f,(x^{1,k},\dots,x^{m,k})_{k=1}^d,b) = \left\|\sum_{k=1}^{d} f(x^{1,k},\dots,x^{m,k})\right\|.$$

Note que T é fortemente Φ-abstrato p-somante se, e somente se, T é R-S abstrato p-somante. Além disso, uma vez fixados $d \in \mathbb{N}$, $(x^{1,k}, \dots, x^{m,k})_{k=1}^{d} \in c_{00}(X_1 \times \cdots \times X_m)$ e $b \in \mathbb{R}$, a função $R_{(x^{1,k},\dots,x^{m,k})_{k=1}^{d},b}$ é contínua, pois

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k}, \cdot\rangle\right) \in C(B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}).$$

O resultado segue do Teorema 2.19. □

Agora, utilizando ideias similares ao Teorema de Fatoração de Pietsch clássico (ver Teorema 2.27), utilizaremos a proposição anterior para obter um tipo de Fatoração de Pietsch para os operadores multilineares fortemente Φ-abstratos p-somantes.

Teorema 3.22. Se $\Phi : \widehat{V_m} \to C(B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$ é absolutamente homogênea limitada, então um operador m-linear contínuo $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é fortemente Φ-abstrato p-somante se, e somente se, existem uma medida regular de probabilidade de Borel μ em $B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}$, um espaço de dominação $(\widehat{V_m})_\Phi^{L_p(\mu)}$ associado a Φ e $L_p(\mu)$ e um operador linear contínuo $\widehat{T} : (\widehat{V_m})_\Phi^{L_p(\mu)} \to Y$ tais que $T = \widehat{T} \circ I_{(\widehat{V_m})_\Phi^{L_p(\mu)}} \circ I_m$, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \cdots \times X_m & \xrightarrow{\quad T \quad} & Y \\ {\scriptstyle I_m}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \widehat{T}} \\ \widehat{V_m} & \xrightarrow[I_{(\widehat{V_m})_\Phi^{L_p(\mu)}}]{} & (\widehat{V_m})_\Phi^{L_p(\mu)} \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração. Se T é fortemente Φ-abstrato p-somante então pelo Teorema 3.21 existem uma medida regular de probabilidade de Borel μ em $B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}$ e uma constante $C > 0$ tais que (3.9) é satisfeita. Associado a Φ e $L_p(\mu)$ e tomando $J = J_p^{X_1\times\cdots\times X_m}$ (ver Proposição 2.24 e Observação 2.26), podemos considerar o espaço de dominação $(\widehat{V_m})_\Phi^{L_p(\mu)}$ com a norma dada por

$$\|[\mathbf{x}]\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^{L_p(\mu)}} = \inf \sum_{i=1}^{r} \left(\int_{B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}} \left| \Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_i^{m,k}, \cdot\rangle\right)(\varphi)\right|^p d\mu(\varphi)\right)^{1/p},$$

onde o ínfimo é computado sobre todas as decomposições de $\mathbf{x}$ da forma

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_i^{m,k}, \cdot\rangle,$$

com $r \in \mathbb{N}$ e $(x_i^{1,k}, \dots, x_i^{m,k}) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, para $(i,k) \in \{1,\dots,r\} \times \{1,\dots,d\}$. Vamos

considerar agora o operador $\widehat{T_0} : \widehat{V_m}/N \to Y$ dado por

$$\widehat{T_0}([\mathbf{x}]) = \sum_{k=1}^{d} T(x^{1,k}, \ldots, x^{m,k}), \text{ para todo } \mathbf{x} \in \widehat{V_m}.$$

Primeiramente vamos mostrar que $\widehat{T_0}$ está bem definido. Para isso, sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \widehat{V_m}$ tais que $[\mathbf{x}] = [\mathbf{y}]$, logo

$$\|[\mathbf{x} - \mathbf{y}]\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^{Lp(\mu)}} = 0.$$

Escrevendo

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{d} \langle x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k}, \cdot \rangle \text{ e } \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{d} \langle y^{1,k} \otimes \cdots \otimes y^{m,k}, \cdot \rangle, \tag{3.10}$$

observe que ao considerar

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{2d} \langle z^{1,k} \otimes \cdots \otimes z^{m,k}, \cdot \rangle$$

dado por

$$(z^{1,k}, \ldots, z^{m,k}) = \begin{cases} (x^{1,k}, \ldots, x^{m,k}), \text{ se } k \in \{1, \ldots, d\} \\ (-y^{1,k-d}, y^{2,k-d}, \ldots, y^{m,k-d}), \text{ se } k \in \{d+1, \ldots, 2d\}, \end{cases} \tag{3.11}$$

temos

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \sum_{k=1}^{d} \langle z^{1,k} \otimes \cdots \otimes z^{m,k}, \cdot \rangle + \sum_{k=d+1}^{2d} \langle z^{1,k} \otimes \cdots \otimes z^{m,k}, \cdot \rangle \\ &\overset{(3.11)}{=} \sum_{k=1}^{d} \langle x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k}, \cdot \rangle - \sum_{k=1}^{d} \langle y^{1,k} \otimes \cdots \otimes y^{m,k}, \cdot \rangle = \mathbf{x} - \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Logo

$$\|[\mathbf{z}]\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^{Lp(\mu)}} = 0.$$

Então dado $\varepsilon > 0$, existe uma decomposição de $\mathbf{z}$ da forma

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{2d} \langle z_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes z_i^{m,k}, \cdot \rangle$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\int_{B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}} \left| \Phi \left(\sum_{k=1}^{2d} \langle z_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes z_i^{m,k}, \cdot \rangle \right) (\varphi) \right|^p d\mu(\varphi) \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{C}. \tag{3.12}$$

Além disso,

$$\widehat{T_0}([\mathbf{x}]) - \widehat{T_0}([\mathbf{y}]) = \sum_{k=1}^{d} T(x^{1,k},\dots,x^{m,k}) - \sum_{k=1}^{d} T(y^{1,k},\dots,y^{m,k})$$
$$\overset{(3.11)}{=} \sum_{k=1}^{d} T(z^{1,k},\dots,z^{m,k}) + \sum_{k=d+1}^{2d} T(z^{1,k},\dots,z^{m,k}) = \widehat{T_0}([\mathbf{z}]).$$

Daí,

$$\|\widehat{T_0}([\mathbf{x}]) - \widehat{T_0}([\mathbf{y}])\| = \|\widehat{T}([\mathbf{z}])\| = \left\|\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{2d} T(z_i^{1,k},\dots,z_i^{m,k})\right\| \leq \sum_{i=1}^{r}\left\|\sum_{k=1}^{2d} T(z_i^{1,k},\dots,z_i^{m,k})\right\|$$
$$\overset{(3.9)}{\leq} C\sum_{i=1}^{r}\left(\int\limits_{B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}} \left|\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle z_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes z_i^{m,k},\cdot\rangle\right)(\varphi)\right|^p d\mu(\varphi)\right)^{1/p} \overset{(3.12)}{<} \varepsilon.$$

Portanto $\widehat{T_0}([\mathbf{x}]) = \widehat{T_0}([\mathbf{y}])$, provando a boa definição de $\widehat{T_0}$. Agora, vamos mostrar que $\widehat{T_0}$ é linear e contínua. Para isso, sejam $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\widehat{V_m}$ como em (3.10), $\lambda\in\mathbb{K}$ e considere

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{2d}\langle w^{1,k}\otimes\cdots\otimes w^{m,k},\cdot\rangle$$

dado por

$$(w^{1,k},\dots,w^{m,k}) = \begin{cases}(x^{1,k},\dots,x^{m,k}),\ \text{se } k\in\{1,\dots,d\}\\ (\lambda y^{1,k-d}, y^{2,k-d},\dots,y^{m,k-d}),\ \text{se } k\in\{d+1,\dots,2d\}.\end{cases} \tag{3.13}$$

Segue daí que

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{d}\langle w^{1,k}\otimes\cdots\otimes w^{m,k},\cdot\rangle + \sum_{k=d+1}^{2d}\langle w^{1,k}\otimes\cdots\otimes w^{m,k},\cdot\rangle$$
$$\overset{(3.13)}{=} \sum_{k=1}^{d}\langle x^{1,k}\otimes\cdots\otimes x^{m,k},\cdot\rangle + \lambda\sum_{k=1}^{d}\langle y^{1,k}\otimes\cdots\otimes y^{m,k},\cdot\rangle = \mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}.$$

Logo

$$\widehat{T_0}([\mathbf{x}]+\lambda[\mathbf{y}]) = \widehat{T_0}([\mathbf{w}]) = \sum_{k=1}^{d} T(w^{1,k},\dots,w^{m,k}) + \sum_{k=d+1}^{2d} T(w^{1,k},\dots,w^{m,k})$$
$$\overset{(3.13)}{=} \sum_{k=1}^{d} T(x^{1,k},\dots,x^{m,k}) + \lambda\sum_{k=1}^{d} T(y^{1,k},\dots,y^{m,k}) = \widehat{T_0}([\mathbf{x}]) + \lambda\widehat{T_0}([\mathbf{y}]),$$

provando a linearidade de $\widehat{T_0}$. Para a continuidade de $\widehat{T_0}$, seja $\mathbf{x} \in \widehat{V_m}$ como em (3.10) e considere uma decomposição arbitrária para $\mathbf{x}$ da forma

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_i^{m,k}, \cdot\rangle.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\|\widehat{T_0}([\mathbf{x}])\| &= \left\|\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d} T(x_i^{1,k},\ldots,x_i^{m,k})\right\| \leq \sum_{i=1}^{r}\left\|\sum_{k=1}^{d} T(x_i^{1,k},\ldots,x_i^{m,k})\right\| \\ &\overset{(3.9)}{\leq} C\sum_{i=1}^{r}\left(\int_{B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}} \left|\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x_i^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_i^{m,k},\cdot\rangle\right)(\varphi)\right|^p d\mu(\varphi)\right)^{1/p},\end{aligned}$$

portanto $\|\widehat{T_0}([\mathbf{x}])\| \leq C\|[\mathbf{x}]\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^{Lp(\mu)}}$, provando a continuidade de $\widehat{T_0}$. Assim, considere a única extensão $\widehat{T} : (\widehat{V_m})_\Phi^{Lp(\mu)} \to Y$ de $\widehat{T_0}$ a $(\widehat{V_m})_\Phi^{Lp(\mu)}$. Desta forma, para todo $(x^1,\ldots,x^m) \in X_1\times\cdots\times X_m$, tem-se

$$\begin{aligned}\widehat{T}\circ I_{(\widehat{V_m})_\Phi^{Lp(\mu)}}\circ I_m(x^1,\ldots,x^m) &= \widehat{T}([\langle x^1\otimes\cdots\otimes x^m,\cdot\rangle]) \\ &= \widehat{T_0}([\langle x^1\otimes\cdots\otimes x^m,\cdot\rangle]) = T(x^1,\ldots,x^m).\end{aligned}$$

Reciprocamente, se $T = \widehat{T}\circ I_{(\widehat{V_m})_\Phi^{Lp(\mu)}}\circ I_m$, então para cada $d\in\mathbb{N}$ e $(x^{1,k},\ldots,x^{m,k}) \in X_1\times\cdots\times X_m$, com $k\in\{1,\ldots,d\}$, tem-se

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{k=1}^{d} T(x^{1,k},\ldots,x^{m,k})\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{d}\widehat{T}\circ I_{(\widehat{V_m})_\Phi^{Lp(\mu)}}\circ I_m(x^{1,k},\ldots,x^{m,k})\right\| \\ &= \left\|\sum_{k=1}^{d}\widehat{T}([\langle x^{1,k}\otimes\cdots\otimes x^{m,k},\cdot\rangle])\right\| = \|\widehat{T}([\mathbf{x}])\| \leq \|\widehat{T}\|\|([\mathbf{x}])\|_{(\widehat{V_m})_\Phi^{Lp(\mu)}} \\ &\leq \|\widehat{T}\|\left(\int_{B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}}\left|\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x^{1,k}\otimes\cdots\otimes x^{m,k},\cdot\rangle\right)(\varphi)\right|^p d\mu(\varphi)\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.21, segue que T é fortemente Φ-abstrato p-somante. □

Observação 3.23. Note que não é necessário que a aplicação absolutamente homogênea Φ seja limitada para existir tal fatoração. Essa hipótese é utilizada para garantir que os operadores presentes na fatoração sejam contínuos (ver Proposição (3.3) e Lema (3.10)).

Recordamos que os operadores lineares Φ-abstratos p-somantes são recuperados pelos operadores multilineares fortemente Φ-abstratos p-somantes. Assim, fica provado também o Teorema 3.17 ao considerar $m = 1$ no Teorema 3.22.

3.4 Operadores multilineares $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstratos $(p_1, \ldots, p_m)$-somantes

Nesta seção apresentaremos uma outra classe de operadores multilineares, em um contexto abstrato, que também generaliza os operadores lineares Φ-abstratos p-somantes.

Definição 3.24 (Operadores multilineares $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstratos $(p_1, \ldots, p_m)$-somantes)**.** Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_m$ e Y espaços de Banach, $1 \leq p, p_1, \ldots, p_m < \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}$ e $\Phi_t : \widehat{X_t} \to C(B_{X_t^*})$ uma aplicação absolutamente homogênea, para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$. Dizemos que um operador m-linear contínuo $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-*abstrato* $(p_1, \ldots, p_m)$-*somante* (ver [1, Definition 3.5]) se existe uma constante $C > 0$ tal que, para quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e $(x_k^1, \ldots, x_k^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, com $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|T(x_j^1, \ldots, x_j^m)\|^p\right)^{1/p} \leq C \prod_{t=1}^{m} \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} |\Phi_t(\langle x_j^t, \cdot\rangle)|^{p_t}\right)^{1/p_t} \right\|_{C(B_{X_t^*})}. \tag{3.14}$$

Note que quando $m = 1$, obtemos os operadores lineares Φ-abstratos p-somantes (ver Definição 3.13).

Exemplo 3.25. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_m$ e Y espaços de Banach e $1 \leq p, p_1, \ldots, p_m < \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}$. Dizemos que um operador m-linear contínuo $T : X_1, \ldots, X_m \to Y$ é $(p_1, \ldots, p_m)$-*dominado* (ver [17, Definition 3.1]) se existe uma constante $C > 0$ tal que para todos $n \in \mathbb{N}$ e $(x_j^1, \ldots, x_j^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, com $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j^1, \ldots, x_j^m)\|^p\right)^{1/p} \leq C \prod_{t=1}^{m} \sup_{\varphi \in B_{X_t^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j^t)|^{p_t}\right)^{1/p_t}.$$

Observe que operadores $(p_1, \ldots, p_m)$-dominados são $(|\iota_1|, \ldots, |\iota_m|)$-abstratos $(p_1, \ldots, p_m)$-somantes no caso particular em que $\Phi_t = |\iota_t| : \widehat{X_t} \to C(B_{X_t^*})$, onde $\iota_t : \widehat{X_t} \to C(B_{X_t^*})$ é a aplicação inclusão de $\widehat{X_t}$ em $C(B_{X_t^*})$, para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$.

Observação 3.26. Note que quando $m \neq 1$, as expressões (3.8) e (3.14) são distintas. Mais ainda, não é esperado que um operador seja, simultaneamente, fortemente Φ-abstrato p-somante e $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstrato $(p_1, \ldots, p_m)$-somante. Desta forma, os resultados que serão apresentados nesta seção não possuem a mesma natureza dos resultados obtidos na seção anterior.

Agora vamos utilizar o Teorema 2.22 para encontrar um tipo de Dominação de Pietsch para os operadores multilineares $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstratos $(p_1, \ldots, p_m)$-somantes.

Teorema 3.27. Um operador m-linear contínuo $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstrato $(p_1, \ldots, p_m)$-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ_t em $C(B_{X_t^*})$ tal que, para todo $x^t \in X_t$, com $t \in \{1, \ldots, m\}$, tem-se

$$\|T(x^1, \ldots, x^m)\| \leq C \prod_{t=1}^{m} \left(\int_{B_{X_t^*}} |\Phi_t(\langle x^t, \cdot \rangle)(\varphi)|^{p_t} \, d\mu_t(\varphi) \right)^{1/p_t}. \tag{3.15}$$

Demonstração. Sejam $k = 1$, $v = m$, $E_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{H} = \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$, $G_t = X_t$, $K_t = B_{X_t^*}$ munida com a topologia fraca*, $R_t : B_{X_t^*} \times \mathbb{R} \times X_t \to [0, \infty)$ dada por

$$R_t(\varphi, b, x^t) = |b||\Phi_t(\langle x^t, \cdot \rangle)(\varphi)|$$

para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$, e $S : \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y) \times \mathbb{R} \times X_1 \times \cdots \times X_m \to [0, \infty)$ dada por

$$S(f, b, x^1, \ldots, x^m) = |b|\|f(x^1, \ldots, x^m)\|.$$

Note que T é $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstrato $(p_1, \ldots, p_m)$-somante se, e somente se, T é $R_1, \ldots, R_m$-S-abstrato $p_1, \ldots, p_m$-somante. Além disso, uma vez dados $b \in \mathbb{R}$ e $x^t \in X_t$, a aplicação $(R_t)_{b,x^t}$ é contínua, pois $\Phi_t(\langle x^t, \cdot \rangle) \in C(B_{X_t^*})$, para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$. Além disso, dados $b \in \mathbb{R}$, $t \in \{1, \ldots, m\}$, $\varphi \in B_{X_t^*}$, $0 \leq \lambda_t, \alpha_t \leq 1$, $x^t \in X_t$, temos

$$\begin{cases} R_t(\varphi, b, \lambda_t x^t) = |\Phi_t(\langle \lambda_t x^t, \cdot \rangle(\varphi)| = \lambda_t R_t(\varphi, b, x^t) \\ S(T, b, \alpha_1 x^1, \ldots, \alpha_m, x^m) = \|T(\alpha_1 x^1, \ldots, \alpha_m x^m)\| = \alpha_1 \ldots \alpha_m S(T, b, x^1, \ldots, x^m). \end{cases}$$

O resultado segue do Teorema 2.22. □

A nossa tarefa agora é encontrar um teorema de fatoração para os operadores multilineares $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstratos $(p_1, \ldots, p_m)$-somantes. O lema técnico a seguir nos fornecerá uma expressão que será bastante útil para encontrar a fatoração requerida.

Lema 3.28. Para qualquer que seja o operador m-linear $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$, tem-se

$$\begin{aligned} &T(x^1, \ldots, x^m) - T(y^1, \ldots, y^m) \\ &= T(x^1 - y^1, x^2, \ldots, x^m) + \cdots + T(y^1, \ldots, y^{m-1}, x^m - y^m), \end{aligned}$$

para todos $(x^1, \ldots, x^m), (y^1, \ldots, y^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$.

Demonstração. O caso base é válido, pois se T é linear, então para todos $x^1, y^1 \in X_1$, tem-se

$$T(x^1) - T(y^1) = T(x^1 - y^1).$$

Suponha agora que o resultado é válido para algum $m \in \mathbb{N}$, sejam $X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}$ e Y espaços vetoriais e considere $T : X_1 \times \ldots X_m \times X_{m+1} \to Y$ um operador $(m+1)$-linear. Desta forma, dados $(x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}), (y^1, \ldots, y^m, y^{m+1}) \in X_1 \times \cdots \times X_m \times X_{m+1}$, denote por $y = (y^1, \ldots, y^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$ e defina $T_{x^{m+1}} : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ dado por

$$T_{x^{m+1}}(z^1, \ldots, z^m) = T(z^1, \ldots, z^m, x^{m+1}), \text{ para todo } (z^1, \ldots, z^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m,$$

e $T_y : X_{m+1} \to Y$ dado por

$$T_y(z^{m+1}) = T(y^1, \ldots, y^m, z^{m+1}), \text{ para todo } z^{m+1} \in X_{m+1}.$$

Claramente $T_{x^{m+1}}$ é m-linear e T_y é linear. Dados $(x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}), (y^1, \ldots, y^m, y^{m+1}) \in X_1 \times \cdots \times X_m \times X_{m+1}$, observamos que $T_{x^{m+1}}(y^1, \ldots, y^m) = T_y(x^{m+1})$. Além disso, utilizando a hipótese de indução para o operador m-linear $T_{x^{m+1}}$, obtemos

$$\begin{aligned} &T_{x^{m+1}}(x^1, \ldots, x^m) - T_{x^{m+1}}(y^1, \ldots, y^m) \\ &= T_{x^{m+1}}(x^1 - y^1, x^2, \ldots, x^m) + \cdots + T_{x^{m+1}}(y^1, \ldots, y^{m-1}, x^m - y^m). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Por outro lado, utilizando o caso base para o operador linear T_y, obtemos

$$T_y(x^{m+1}) - T_y(y^{m+1}) = T_y(x^{m+1} - y^{m+1}). \tag{3.17}$$

Daí,

$$\begin{aligned} &T(x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}) - T(y^1, \ldots, y^m, y^{m+1}) \\ &= T(x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}) - T_{x^{m+1}}(y^1, \ldots, y^m) + T_y(x^{m+1}) - T(y^1, \ldots, y^m, y^{m+1}) \\ &= T_{x^{m+1}}(x^1, \ldots, x^m) - T_{x^{m+1}}(y^1, \ldots, y^m) + T_y(x^{m+1}) - T_y(y^{m+1}) \\ &\overset{(3.16)}{=} T_{x^{m+1}}(x^1 - y^1, x^2, \ldots, x^m) + \cdots + T_{x^{m+1}}(y^1, \ldots, y^{m-1}, x^m - y^m) + T_y(x^{m+1}) - T_y(y^{m+1}) \\ &\overset{(3.17)}{=} T_{x^{m+1}}(x^1 - y^1, x^2, \ldots, x^m) + \cdots + T_{x^{m+1}}(y^1, \ldots, y^{m-1}, x^m - y^m) + T_y(x^{m+1} - y^{m+1}). \end{aligned}$$

Isso conclui o resultado. □

Observação 3.29. Para não haver confusão com o operador m-linear $I_m : X_1 \times \cdots \times X_m \to C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$ da Proposição 3.3, vamos denotar por $I^t : X_t \to \widehat{X_t}$ a isometria linear da Proposição 2.25, para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$.

Com as ferramentas e notações anteriores, vamos utilizar a Proposição 3.27 para obter um tipo de Fatoração de Pietsch para os operadores multilineares $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstratos $(p_1, \ldots, p_m)$-somantes.

Teorema 3.30. Um operador m-linear contínuo $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstrato $(p_1, \ldots, p_m)$-somante se, e somente se, para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$ existem um

espaço de Banach F_t, um operador Φ_t-abstrato p_t-somante $u_t : X_t \to F_t$ e um operador m-linear contínuo $\widehat{T} : F_1 \times \cdots \times F_m \to Y$ tais que $T = \widehat{T} \circ (u_1, \ldots, u_m)$.

Demonstração. Se T é $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstrato $(p_1, \ldots, p_m)$-somante então pelo Teorema 3.27 existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ_t em $C(B_{X_t^*})$, para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$, tais que (3.15) é satisfeita. Para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$, associado a Φ_t e $L_{p_t}(\mu_t)$ e tomando $J = J_p^{X_t}$, podemos considerar o espaço de dominação $F_t := (\widehat{X_t})_{\Phi_t}^{L_p(\mu)}$ com a norma dada por

$$\|[\langle x^t, \cdot \rangle]\|_{(\widehat{X_t})_{\Phi_t}^{L_p(\mu)}} = \inf \sum_{i=1}^{r} \left(\int_{B_{X_t^*}} |\Phi_t(\langle x_i^t, \cdot \rangle)(\varphi)|^{p_t} \, d\mu_t(\varphi) \right)^{1/p_t},$$

onde o ínfimo é computado sobre todas as decomposições de x^t da forma

$$x^t = \sum_{i=1}^{r} x_i^t,$$

com $r \in \mathbb{N}$ e $x_1^t, \ldots, x_r^t \in X$. Observe que para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$, considerando

$$u_t := I_{(\widehat{X_t})_{\Phi_t}^{L_{p_t}(\mu_t)}} \circ I^t : X_t \to (\widehat{X_t})_{\Phi_t}^{L_{p_t}(\mu_t)},$$

tem-se $u_t(X_t) = \widehat{X_t}/N_t$, onde

$$N_t = \{\langle x^t, \cdot \rangle \in \widehat{X_t} : \rho_{\Phi, L_{p_t}(\mu_t)}(\langle x^t, \cdot \rangle) = 0\}.$$

Além disso, para todo $x^t \in X_t$, tem-se

$$\|u_t(x^t)\|_{(\widehat{X_t})_{\Phi_t}^{L_{p_t}(\mu_t)}} = \|[\langle x^t, \cdot \rangle]\|_{(\widehat{X_t})_{\Phi_t}^{L_{p_t}(\mu_t)}} \leq \left(\int_{B_{X_t^*}} |\Phi_t(\langle x^t, \cdot \rangle)(\varphi))|^{p_j} \, d\mu_j(\varphi) \right)^{1/p_j}.$$

Pelo Teorema 3.15 segue que u_t é Φ_t-abstrato p_t-somante. Considere agora o operador $\widehat{T_0} : u_1(X_1) \times \ldots u_m(X_m) \to Y$ dado por

$$\widehat{T}(u_1(x^1), \ldots, u_m(x^m)) = T(x^1, \ldots, x^m), \text{ para todo } (x^1, \ldots, x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m.$$

Vamos mostrar que $\widehat{T_0}$ está bem definido. Para isso, sejam $(x^1, \ldots, x^m), (y^1, \ldots, y^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$ tais que $(u_1(x^1), \ldots, u_m(x^m)) = (u_1(y^1), \ldots, u_m(y^m))$. Então para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$, tem-se

$$[\langle x^t, \cdot \rangle] = u_t(x^t) = u_t(y^t) = [\langle y^t, \cdot \rangle]$$

e, consequentemente,

$$\|[\langle x^t - y^t, \cdot\rangle]\|_{(\widehat{X_t})_{\Phi_t}^{L_{p_t}(\mu_t)}} = 0.$$

Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$ e denotando por

$$A_t = \prod_{s=1}^{t-1} \left(\int_{B_{X_s^*}} |\Phi_s(\langle y^s, \cdot\rangle)(\varphi)|^{p_s}\, d\mu_s(\varphi) \right)^{1/p_s} \prod_{s=t+1}^{m} \left(\int_{B_{X_s^*}} |\Phi_s(\langle x^s, \cdot\rangle)(\varphi)|^{p_s}\, d\mu_s(\varphi) \right)^{1/p_s},$$

para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$, existe uma decomposição

$$x^t - y^t = \sum_{k_t=1}^{r} z_{k_t}^t \tag{3.18}$$

tal que

$$\sum_{k_t=1}^{r} \left(\int_{B_{X_t^*}} |\Phi(\langle z_{k_t}^t, \cdot\rangle)(\varphi)|^{p_t}\, d\mu_t(\varphi) \right)^{1/p_t} < \frac{\varepsilon}{CmA_t}. \tag{3.19}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{T_0}(u_1(x^1), \ldots, u_m(x^m)) - \widehat{T_0}(u_1(y^1), \ldots, u_m(y^m))\| = \|T(x^1, \ldots, x^m) - T(y^1, \ldots, y^m)\| \\
&= \|T(x^1 - y^1, x^2 \ldots, x^m) + \cdots + T(y^1, \ldots, y^{m-1}, x^m - y^m)\| \\
&\overset{(3.18)}{=} \left\| T\left(\sum_{k_1=1}^{r} z_{k_1}^1, x^2, \ldots, x^m \right) + \cdots + T\left(y^1, \ldots, y^{m-1}, \sum_{k_m=1}^{r} z_{k_m}^m \right) \right\| \\
&\leq \sum_{k_1=1}^{r} \|T(z_{k_1}^1, x^2, \ldots, x^m)\| + \cdots + \sum_{k_m=1}^{r} \|T(y^1, \ldots, y^{m-1}, z_{k_m}^m)\| \\
&\overset{(3.15)}{\leq} C \sum_{t=1}^{m} \sum_{k_t=1}^{r} \left(\int_{B_{X_t^*}} |\Phi(\langle z_{k_t}^t, \cdot\rangle)(\varphi)|^{p_t}\, d\mu_t(\varphi) \right)^{1/p_t} A_t \overset{(3.19)}{<} C \sum_{t=1}^{m} \frac{\varepsilon}{Cm} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto $\widehat{T_0}(u_1(x^1), \ldots, u_m(x^m)) = \widehat{T_0}(u_1(y^1), \ldots, u_m(y^m))$, provando a boa definição de $\widehat{T_0}$. Vamos mostrar agora que $\widehat{T_0}$ é m-linear e contínua. Com efeito, fixados $t \in \{1, \ldots, m\}$ e $(a^1, \ldots, a^{t-1}, a^{t+1}, \ldots, a^m) \in X_1 \times \cdots \times X_{t-1} \times X_{t+1} \times \cdots \times X_m$ e dados $x^t, y^t \in X^t$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
&\widehat{T_0}(u_1(a^1), \ldots, u_t(x^t) + \lambda u_t(y^t), \ldots, u_m(a^m)) = \widehat{T_0}(u_1(a^1), \ldots, u_t(x^t + \lambda y^t), \ldots, u_m(a^m)) \\
&= T(a^1, \ldots, x^t + \lambda y^t, \ldots, a^m) = T(a^1, \ldots, x^t, \ldots, a^m) + \lambda T(a^1, \ldots, y^t, \ldots, a^m) \\
&= \widehat{T_0}(u_1(a^1), \ldots, u_t(x^t), \ldots, u_m(a^m)) + \lambda \widehat{T_0}(u_1(a^1), \ldots, u_t(y^t), \ldots, u_m(a^m)),
\end{aligned}$$

portanto $\widehat{T_0}$ é m-linear. Para a continuidade, seja $(x^1, \ldots, x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$ e para

cada $t \in \{1,\dots,m\}$, considere uma decomposição arbitrária para x^t da forma

$$x^t = \sum_{k_t=1}^{r} x_{k_t}^t. \tag{3.20}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\|\widehat{T_0}(u_1(x^1),\dots,u_m(x^m)\| &= \|T(x^1,\dots,x^m)\| \overset{(3.20)}{=} \left\| T\left(\sum_{k_1=1}^{r} x_{k_1}^1,\dots,\sum_{k_m=1}^{r} x_{k_m}^m\right)\right\| \\
&\leq \sum_{k_m=1}^{r}\cdots\sum_{k_1=1}^{r} \|T(x_{k_1}^1,\dots,x_{k_m}^m)\| \\
&\overset{(3.15)}{\leq} C\sum_{k_m=1}^{r}\cdots\sum_{k_1=1}^{r}\prod_{t=1}^{m}\left(\int_{B_{X_t^*}} |\Phi_t(\langle x_{k_t}^t,\cdot\rangle)(\varphi)|^{p_t}\,d\mu_t(\varphi)\right)^{1/p_t},
\end{aligned}$$

portanto

$$\|\widehat{T_0}(u_1(x^1),\dots,u_m(x^m)\| \leq C\prod_{t=1}^{m}\|[\langle x^t,\cdot\rangle]\|_{(\widehat{X_t})_{\Phi_t}^{L_{p_t}(\mu_t)}} = \prod_{t=1}^{m}\|u_t(x^t)\|_{(\widehat{X_t})_{\Phi_t}^{L_{p_t}(\mu_t)}},$$

provando a continuidade de $\widehat{T_0}$. Sendo assim, podemos considerar a única extensão $\widehat{T}: F_1\times\cdots\times F_m \to Y$ de $\widehat{T_0}$ a $F_1\times\cdots\times F_m$. Desta forma, para todo $(x^1,\dots,x^m)\in X_1\times\cdots\times X_m$, tem-se

$$\begin{aligned}
\widehat{T}\circ(u_1,\dots,u_m)(x^1,\dots,x^m) &= \widehat{T}(u_1(x^1),\dots,u_m(x^m)) \\
&= \widehat{T_0}(u_1(x^1),\dots,u_m(x^m)) = T(x^1,\dots,x^m).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $T = \widehat{T}\circ(u_1,\dots,u_m)$. Como u_t é Φ_t-abstrato p_t-somante, segue do Teorema 3.15 que existe uma constante $C_t>0$ de modo que, para todo $x^t\in X_t$, tem-se

$$\|u_t(x^t)\|_{(\widehat{X_t})_{\Phi_t}^{L_{p_t}(\mu_t)}} \leq C_t\left(\int_{B_{X_t^*}} |\Phi_t(\langle x^t,\cdot\rangle)(\varphi)|^{p_t}\,d\mu_t(\varphi)\right)^{1/p_t}, \tag{3.21}$$

para todo $t\in\{1,\dots,m\}$. Assim, dado $(x^1,\dots,x^m)\in X_1\times\cdots\times X_m$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|T(x^1,\dots,x^m)\| = \|\widehat{T}(u_1(x^1),\dots,u_m(x^m))\| &\leq \|\widehat{T}\|\prod_{t=1}^{m}\|u_t(x^t)\|_{(\widehat{X_t})_{\Phi_t}^{L_{p_t}(\mu_t)}} \\
&\overset{(3.21)}{\leq} \|\widehat{T}\|\prod_{t=1}^{m} C_t\left(\int_{B_{X_t^*}} |\Phi_t(\langle x^t,\cdot\rangle)(\varphi)|^{p_t}\,d\mu_t(\varphi)\right)^{1/p_t} \\
&= C\prod_{t=1}^{m}\left(\int_{B_{X_t^*}} |\Phi_t(\langle x^t,\cdot\rangle)(\varphi)|^{p_t}\,d\mu_t(\varphi)\right)^{1/p_t},
\end{aligned}$$

em que

$$C = \|\widehat{T}\| \prod_{t=1}^{m} C_t.$$

Pelo Teorema 3.27, segue que T é $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstrato $(p_1, \ldots, p_m)$-somante. □

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, apresentaremos algumas classes de operadores estudadas na literatura. Veremos que cada uma delas está inserida num contexto abstrato apresentado anteriormente. Além disso, a(s) aplicação(ões) abstrata(s) que as define são absolutamente homogêneas limitadas. Assim, conseguiremos caracterizar esses operadores via um tipo de Dominação e Fatoração de Pietsch.

4.1 Operadores lineares absolutamente $(p;\sigma)$-contínuos

Sejam X e Y espaços de Banach, $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \sigma < 1$. Dizemos que um operador linear contínuo $T : X \to Y$ é *absolutamente* $(p;\sigma)$*-contínuo* (ver [1, 18]) se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(|\varphi(x_j)|^{1-\sigma}\|x_j\|^{\sigma}\right)^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}.$$

No caso particular em que $\sigma = 0$, obtemos os operadores lineares absolutamente p-somantes (ver Teorema 2.16).

Considere a aplicação $\Phi : \widehat{X} \to C(B_{X^*})$ dada por

$$\Phi(\langle x, \cdot\rangle) = |\langle x, \cdot\rangle|^{1-\sigma}\|x\|^{\sigma}, \text{ para todo } x \in X. \tag{4.1}$$

Dados $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda\langle x, \cdot\rangle) = \Phi(\langle \lambda x, \cdot\rangle) &= \|\lambda x\|^{\sigma}|\langle \lambda x, \cdot\rangle|^{1-\sigma} = |\lambda|^{\sigma}\|x\|^{\sigma}|\lambda|^{1-\sigma}|\langle x, \cdot\rangle|^{1-\sigma} \\ &= |\lambda|\|x\|^{\sigma}|\langle x, \cdot\rangle|^{1-\sigma} = |\lambda|\Phi(\langle x, \cdot\rangle),\end{aligned}$$

isto é, Φ é absolutamente homogênea. Além disso, para todo $x \in X$, segue do Teorema

de Hahn-Banach e da Proposição 2.25 que

$$\|\Phi(\langle x,\cdot\rangle)\|_{C(B_{X^*})} = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\varphi(x)|^{1-\sigma}\|x\|^{\sigma} \overset{\text{H-B}}{=} \|x\|^{1-\sigma}\|x\|^{\sigma} = \|x\| \overset{\text{Prop. 2.25}}{=} \|\langle x,\cdot\rangle\|_{C(B_{X^*})},$$

portanto Φ é limitada.

Proposição 4.1. Um operador $T : X \to Y$ é $(p;\sigma)$-absolutamente contínuo se, e somente se, T é Φ-abstrato q-somante, em que $q = \frac{p}{1-\sigma}$ e Φ é a aplicação absolutamente homogênea dada por (4.1).

O resultado anterior é facilmente verificado. Assim, podemos apresentar a seguinte caracterização para os operadores lineares absolutamente $(p;\sigma)$-contínuos.

Teorema 4.2. São equivalentes:

(i) Um operador linear $T : X \to Y$ é absolutamente $(p;\sigma)$-contínuo.

(ii) Existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ em B_{X^*} tais que

$$\|T(x)\| \leq C\left(\int_{B_{X^*}} \left(|\varphi(x_j)|^{1-\sigma}\|x_j\|^{\sigma}\right)^{\frac{p}{1-\sigma}}\, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1-\sigma}{p}},$$

para todo $x \in X$.

(iii) Existem uma medida regular de probabilidade de Borel μ em B_{X^*}, um espaço de dominação $\widehat{X}_{\Phi}^{L_p(\mu)}$ associado a Φ e $L_p(\mu)$ e um operador linear contínuo $\widehat{T} : \widehat{X}_{\Phi}^{L_p(\mu)} \to Y$ tal que $T = \widehat{T} \circ I_{\widehat{X}_{\Phi}^{L_p(\mu)}} \circ I$.

4.2 Operadores multilineares $(p_1,\ldots,p_m;\sigma)$-contínuos dominados

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1,\ldots,X_m$ e Y espaços de Banach, $1 \leq p, p_1,\ldots,p_m < \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}$ e $0 \leq \sigma < 1$. Dizemos que um operador m-linear contínuo $T : X_1,\ldots,X_m \to Y$ é $(p_1,\ldots,p_m;\sigma)$-*contínuo dominado* (ver [1] ou [10, Definition 2.1]) se existe uma constante $C > 0$ tal que para todos $n \in \mathbb{N}$ e $(x_j^1,\ldots,x_j^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, com $j \in \{1,\ldots,n\}$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j^1,\ldots,x_j^m)\|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \leq C\prod_{t=1}^{m}\sup_{\varphi\in B_{X_t^*}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(|\varphi(x_j^t)|^{1-\sigma}\|x_j^t\|^{\sigma}\right)^{\frac{p_t}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p_t}}.$$

No caso particular em que $\sigma = 0$, obtemos os operadores multilineares $(p_1, \ldots, p_m)$-dominados (ver Exemplo 3.25).

Considere, para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$, a aplicação $\Phi_t : \widehat{X_t} \to C(B_{X_t^*})$ dada por

$$\Phi_t(\langle x^t, \cdot \rangle) = |\langle x^t, \cdot \rangle|^{1-\sigma} \|x^t\|^\sigma, \text{ para todo } x^t \in X_t. \tag{4.2}$$

Analogamente ao caso dos operadores lineares $(p;\sigma)$-contínuos, verifica-se que Φ_t é uma aplicação absolutamente homogênea limitada, para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$.

Proposição 4.3. Um operador m-linear $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é $(p_1, \ldots, p_m; \sigma)$-contínuo dominado se, e somente se, T é $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$-abstrato $(q_1, \ldots, q_m)$-somante, em que, para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$, $q_t = \frac{p_t}{1-\sigma}$ e $\Phi_t : \widehat{X_t} \to C(B_{X_t^*})$ é a aplicação dada por (4.2)

Assim, podemos apresentar a seguinte caracterização para os operadores multilineares $(p_1, \ldots, p_m; \sigma)$-contínuo dominados.

Teorema 4.4. São equivalentes:

(i) Um operador m-linear $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é $(p_1, \ldots, p_m; \sigma)$-contínuo dominado.

(ii) Existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ_t em $C(B_{X_t^*})$, para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$, de modo que

$$\|T(x^1, \ldots, x^m)\| \leq C \prod_{t=1}^{m} \left(\int_{B_{X_t^*}} \left(|\varphi(x_j^t)|^{1-\sigma} \|x_j^t\|^\sigma \right)^{\frac{p_t}{1-\sigma}} d\mu_t(\varphi) \right)^{\frac{1-\sigma}{p_t}}$$

para todo $x^t \in X_t$, com $t \in \{1, \ldots, m\}$.

(iii) Existem um espaço de Banach F_t e um operador Φ_t-abstrato p_t-somante $u_t : X_t \to F_t$, para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$, e um operador m-linear contínuo $\widehat{T} : F_1 \times \cdots \times F_m \to Y$ tais que $T = \widehat{T} \circ (u_1, \ldots, u_m)$.

4.3 Operadores multilineares fortemente $(p;\sigma)$-contínuos fatoráveis

Dimant introduziu, em [12], o espaço dos operadores multilineares fortemente p-somantes, a fim de generalizar os operadores lineares absolutamente p-somantes. Observe a seguir.

Definição 4.5. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_m$ e Y espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que um operador m-linear contínuo $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é *fortemente p-somante* (ver

[1] ou [12, Definition 1.1]) se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $(x_j^1, \ldots, x_j^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, com $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j^1, \ldots, x_j^m)\|^p \right)^{1/p} \leq C \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K})}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j^1, \ldots, x_j^m)|^p \right)^{1/p}.$$

Quando $m = 1$, obtemos os operadores lineares absolutamente p-somantes (ver Teorema 2.16).

Embora se conheça um tipo de Dominação de Pietsch para os operadores multilineares fortemente p-somantes, ainda era desconhecida uma Fatoração de Pietsch para esses operadores. Além disso, nenhum esquema de fatoração é esperado ao tentar estender essa classe por meio de um procedimento de interpolação. A técnica de interpolação natural que estende os operadores multilineares fortemente p-somantes, que será apresentada a seguir, foi introduzida por Matter em [18].

Definição 4.6. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_m$ e Y espaços de Banach, $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \sigma < 1$. Dizemos que um operador m-linear $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é *fortemente* $(p;\sigma)$*-contínuo* (ver [1]) se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $(x_j^1, \ldots, x_j^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, com $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j^1, \ldots, x_j^m)\|^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}$$

$$\leq C \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K})}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(|\varphi(x_j^1, \ldots, x_j^m)|^{1-\sigma} \prod_{k=1}^{m} \|x_j^k\|^{\sigma} \right)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}.$$

No caso particular em que $\sigma = 0$, obtemos os operadores multilineares fortemente p-somantes.

Segundo Achour et al., em [1], Pellegrino, Rueda e Sanchéz-Pérez introduziram, em [23], a classe dos operadores multilineares fortemente p-somantes fatoráveis utilizando uma combinação de ideias apresentadas em [12, 27], a fim de herdar o espírito dos operadores lineares absolutamente p-somantes. Seguindo esse raciocínio, Achour et al., em [1], combinaram os operadores multilineares fortemente $(p;\sigma)$-contínuos com as ideias apresentadas em [27] para produzir uma classe a qual ocorre um tipo de Fatoração de Pietsch.

Definição 4.7. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_m$ e Y espaços de Banach, $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \sigma < 1$. Dizemos que um operador m-linear $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é *fortemente* $(p;\sigma)$*-contínuo fatorável* (ver [1]) se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todos $n, d \in \mathbb{N}$ e

$(x_j^{1,k},\dots,x_j^{m,k}) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, com $(j,k) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,d\}$, tem-se

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{d} T(x_j^{1,k},\dots,x_j^{m,k})\right\|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ &\leq C \sup_{\varphi\in\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;\mathbb{K})}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{d}|\varphi(x_j^{1,k},\dots,x_j^{m,k})|^{1-\sigma}\prod_{t=1}^{m}\|x_j^{t,k}\|^{\sigma}\right)^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

No caso particular em que $d = 1$, obtemos os operadores multilineares fortemente $(p;\sigma)$-contínuos.

Como de costume, vamos considerar a representação padrão dada em (3.3) para um elemento arbitrário $\mathbf{x} \in \widehat{V_m}$. Agora, considere a aplicação $\Phi : \widehat{V_m} \to C(B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$ dada por

$$\Phi(\mathbf{x}) := \inf \sum_{k=1}^{s} |\langle y^{1,k}\otimes\cdots\otimes y^{m,k},\cdot\rangle|^{1-\sigma}\prod_{t=1}^{m}\|y^{t,k}\|^{\sigma}, \text{ para todo } \mathbf{x}\in\widehat{V_m}, \tag{4.4}$$

onde o ínfimo é computado sobre todas as representações

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{s}\langle y^{1,k}\otimes\cdots\otimes y^{m,k},\cdot\rangle$$

de $\mathbf{x}$. Primeiramente vamos mostrar que Φ é absolutamente homogênea. Com efeito, dados $\mathbf{x} \in \widehat{V_m}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, se

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{s}\langle y^{1,k}\otimes\cdots\otimes y^{m,k},\cdot\rangle$$

é uma representação arbitrária para $\mathbf{x}$, então

$$\lambda\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{s}\langle(\lambda y^{1,k})\otimes y^{2,k}\otimes\cdots\otimes y^{m,k},\cdot\rangle$$

é uma representação para $\lambda\mathbf{x}$. Mais ainda, temos

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{s}|\langle(\lambda y^{1,k})\otimes y^{2,k}\otimes\cdots\otimes y^{m,k},\cdot\rangle|^{1-\sigma}\|\lambda y^{1,k}\|^{\sigma}\prod_{t=2}^{m}\|y^{t,k}\|^{\sigma} = \\ &= |\lambda|\sum_{k=1}^{s}|\langle y^{1,k}\otimes\cdots\otimes y^{m,k},\cdot\rangle|^{1-\sigma}\prod_{t=1}^{m}\|y^{t,k}\|^{\sigma}. \end{aligned}$$

Por outro lado, ao considerar uma representação arbitrária

$$\lambda\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{s}\langle w^{1,k}\otimes\cdots\otimes w^{m,k},\cdot\rangle$$

para $\lambda\mathbf{x}$, segue que

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{s} \langle (\gamma w^{1,k}) \otimes w^{2,k} \otimes \cdots \otimes w^{m,k}, \cdot \rangle$$

é uma representação para $\mathbf{x}$, com $\gamma = \frac{1}{\lambda}$. Além disso,

$$\sum_{k=1}^{s} |\langle w^{1,k} \otimes \cdots \otimes w^{m,k}, \cdot \rangle|^{1-\sigma} \prod_{t=1}^{m} \|w^{t,k}\|^{\sigma} =$$
$$= |\lambda| \sum_{k=1}^{s} |\langle (\gamma w^{1,k}) \otimes w^{2,k} \otimes \cdots \otimes w^{m,k}, \cdot \rangle|^{1-\sigma} \|\gamma w^{1,k}\|^{\sigma} \prod_{t=2}^{m} \|w^{t,k}\|^{\sigma}.$$

Essencialmente, o argumento acima nos diz que o conjunto o qual é tomado o ínfimo relativo a $\Phi(\lambda\mathbf{x})$ coincide com o conjunto o qual é tomado o ínfimo relativo a $|\lambda|\Phi(\mathbf{x})$, logo $\Phi(\lambda\mathbf{x}) = |\lambda|\Phi(\mathbf{x})$, portanto Φ é absolutamente homogênea. Vamos mostrar agora que Φ é limitada. Segue de (1.5) e do Teorema de Hahn-Banach que

$$\prod_{t=1}^{m} \|x^{t,k}\|^{\sigma} \overset{(1.5)}{=} \pi(x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k})^{\sigma} \overset{\text{H-B}}{=} \sup_{\varphi \in B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}} |\varphi(x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k})|^{\sigma},$$

para todo $k \in \{1, \ldots, k\}$. Assim, para todo $\psi \in B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}$, tem-se

$$\begin{aligned}
|\Phi(\mathbf{x})(\psi)| &\leq \sum_{k=1}^{d} |\psi(x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k})|^{1-\sigma} \prod_{t=1}^{m} \|x^{t,k}\|^{\sigma} \\
&= \sum_{k=1}^{d} |\psi(x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k})|^{1-\sigma} \sup_{\varphi \in B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}} |\varphi(x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k})|^{\sigma} \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}} \sum_{k=1}^{d} |\varphi(x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k})|^{1-\sigma} |\varphi(x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k})|^{\sigma} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}} \sum_{k=1}^{d} |\varphi(x^{1,k} \otimes \cdots \otimes x^{m,k})| = \|\mathbf{x}\|_{C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})},
\end{aligned}$$

portanto $\|\Phi(\mathbf{x})\|_{C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})} \leq \|\mathbf{x}\|_{C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})}$.

Proposição 4.8. Um operador m-linear contínuo $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ é fortemente $(p;\sigma)$-contínuo fatorável se, e somente se, T é fortemente Φ-abstrato q-somante, em que $q = \frac{p}{1-\sigma}$ e $\Phi : \widehat{V_m} \to C(B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \ldots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})$ é a aplicação dada por (4.4).

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \widehat{V_m}$ e considere, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, a representação padrão dada por (3.3)

$$\mathbf{x}_j = \sum_{k=1}^{d} \langle x_j^{1,k} \otimes \cdots \otimes x_j^{m,k}, \cdot \rangle$$

para $\mathbf{x}_j$. Suponha que T é fortemente Φ-abstrato q-somante, com $q = \frac{p}{1-\sigma}$. Segue daí e da Proposição 1.8 que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{d}T(x_j^{1,k},\ldots,x_j^{m,k})\right\|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{d}T(x_j^{1,k},\ldots,x_j^{m,k})\right\|^{q}\right)^{1/q}\\
&\overset{(3.8)}{\leq} C\left\|\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x_j^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_j^{m,k},\cdot\rangle\right)\right|^{q}\right)^{1/q}\right\|_{C(B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\ldots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*})}\\
&= C\sup_{\varphi\in B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\ldots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\Phi\left(\sum_{k=1}^{d}\langle x_j^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_j^{m,k},\cdot\rangle\right)(\varphi)\right|^{q}\right)^{1/q}\\
&\leq C\sup_{\varphi\in B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\ldots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{d}|\varphi(x_j^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_j^{m,k})|^{1-\sigma}\prod_{t=1}^{m}\|x_j^{t,k}\|^{\sigma}\right|^{q}\right)^{1/q}\\
&\overset{\text{Prop. 1.8}}{=} C\sup_{\varphi\in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K})}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{d}|\varphi(x_j^{1,k},\ldots,x_j^{m,k})|^{1-\sigma}\prod_{t=1}^{m}\|x_j^{t,k}\|^{\sigma}\right|^{q}\right)^{1/q}\\
&= C\sup_{\varphi\in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K})}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{d}|\varphi(x_j^{1,k},\ldots,x_j^{m,k})|^{1-\sigma}\prod_{t=1}^{m}\|x_j^{t,k}\|^{\sigma}\right|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto T é fortemente $(p;\sigma)$-contínuo fatorável. Reciprocamente, suponha que T é fortemente $(p;\sigma)$-contínuo fatorável, com $q = \frac{p}{1-\sigma}$ e note que, para qualquer que seja uma outra representação

$$\mathbf{x}_j = \sum_{k=1}^{s}\langle y_j^{1,k}\otimes\cdots\otimes y_j^{m,k},\cdot\rangle$$

para $\mathbf{x}_j$ dada arbitrariamente, com $j\in\{1,\ldots,n\}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{s}T(y_j^{1,k},\ldots,y_j^{m,k}) &= T_L\left(\sum_{k=1}^{s}y_j^{1,k}\otimes\cdots\otimes y_j^{m,k}\right)\\
&= T_L\left(\sum_{k=1}^{d}x_j^{1,k}\otimes\cdots\otimes x_j^{m,k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{d}T(x_j^{1,k},\ldots,x_j^{m,k}).
\end{aligned}$$

Desta forma, temos

$$\left\|\sum_{k=1}^{s}T(y_j^{1,k},\ldots,y_j^{m,k})\right\|^{\frac{p}{1-\sigma}} = \left\|\sum_{k=1}^{r}T(x_j^{1,k},\ldots,x_j^{m,k})\right\|^{\frac{p}{1-\sigma}}.$$

Segue daí e da Proposição 1.8 que

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{d}T(x_j^{1,k},\dots,x_j^{m,k})\right\|^q\right)^{1/q}=\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{d}T(x_j^{1,k},\dots,x_j^{m,k})\right\|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{s}T(y_j^{1,k},\dots,y_j^{m,k})\right\|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}$$

$$\overset{(4.3)}{\leq} C\sup_{\varphi\in\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;\mathbb{K})}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{s}|\varphi(y_j^{1,k},\dots,y_j^{m,k})|^{1-\sigma}\prod_{t=1}^{m}\|y_j^{t,k}\|^{\sigma}\right)^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \tag{4.5}$$

$$\overset{\text{Prop. 1.8}}{=} C\sup_{\varphi\in B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{s}|\varphi(y_j^{1,k}\otimes\dots\otimes y_j^{m,k})|^{1-\sigma}\prod_{t=1}^{m}\|y_j^{t,k}\|^{\sigma}\right|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}$$

$$=C\sup_{\varphi\in B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{s}|\varphi(y_j^{1,k}\otimes\dots\otimes y_j^{m,k})|^{1-\sigma}\prod_{t=1}^{m}\|y_j^{t,k}\|^{\sigma}\right|^{q}\right)^{1/q}.$$

Passando ao ínfimo, concluímos que T é fortemente Φ-abstrato q-somante. □

Assim, podemos apresentar a seguinte caracterização para os operadores multilineares fortemente $(p;\sigma)$-contínuos fatoráveis.

Teorema 4.9. São equivalentes:

(i) Um operador m-linear $T: X_1\times\dots\times X_m\to Y$ é fortemente $(p;\sigma)$-contínuo fatorável.

(ii) Existem uma constante $C>0$ e uma medida regular de probabilidade μ em $B_{(X_1\widehat{\otimes}_\pi\dots\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}=B_{\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;\mathbb{K})}$ tais que, para todos $n\in\mathbb{N}$ e $(x^{1,k},\dots,x^{m,k})\in X_1\times\dots\times X_m$, $k\in\{1,\dots,n\}$, tem-se

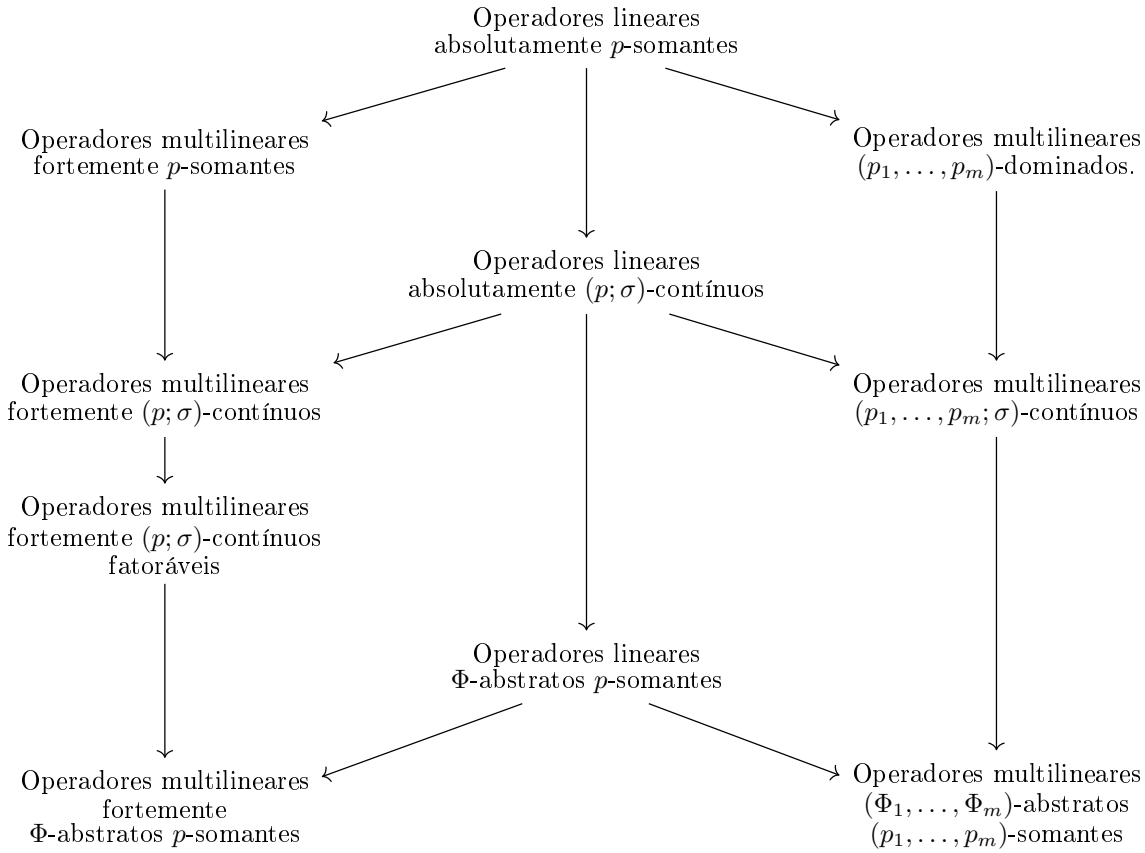
$$\left\|\sum_{k=1}^{d}T(x^{1,k},\dots,x^{m,k})\right\|$$
$$\leq\left(\int_{B_{\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;\mathbb{K})}}\left|\,|\varphi(x^{1,k},\dots,x^{m,k})|^{1-\sigma}\prod_{j=1}^{m}\|x^{j,k}\|^{\sigma}\right|^{\frac{p}{1-\sigma}}d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}.$$

(iii) Existem um espaço de dominação $(\widehat{V_m})_\Phi^{L_p(\mu)}$ e um operador linear $\widehat{T}:(\widehat{V_m})_\Phi^{L_p(\mu)}\to Y$ tais que $T=\widehat{T}\circ I_{(\widehat{V_m})_\Phi^{L_p(\mu)}}\circ I_m$.

Uma vez que os operadores fortemente p-somantes, introduzidos por Dimant em [12], são recuperados pelos operadores fortemente $(p;\sigma)$-contínuos fatoráveis, agora é conhecido um teorema do tipo Fatoração de Pietsch para esses operadores.

4.4 Considerações finais

Essencialmente, apresentamos algumas classes abstratas de operadores introduzidas por Achour et al., em [1], que satisfazem um tipo de Fatoração de Pietsch e que generalizam algumas classes de operadores lineares e multilineares estudados na literatura. O diagrama a seguir explicita de maneira mais suscinta para quais operadores encontramos um tipo de Fatoração de Pietsch:



(o símbolo $A \longrightarrow B$, no diagrama acima, significa que a classe de operadores B generaliza a classe de operadores A).

Apêndice A

Noções e resultados iniciais de Análise Funcional

Definição A.1. Seja E um espaço vetorial. Dizemos que uma função $\rho_E : E \to \mathbb{R}$ é uma *seminorma* em E quando ρ_E cumpre as seguintes condições:

(i) $\rho_E(x) \geq 0$, para todo $x \in E$.

(ii) $\rho_E(\lambda x) = |\lambda|\rho_E(x)$, para todos $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $\rho_E(x + y) \leq \rho_E(x) + \rho_E(y)$, para todos $x, y \in E$.

Quando não houver perigo de confusão, escreveremos apenas ρ ao invés de ρ_E para denotar uma seminorma em E. A propriedade (iii) acima é comumente chamada de desiguldade triangular.

Proposição A.2. Se ρ é uma seminorma em E, então valem as seguintes propriedades:

(i) $\rho(0) = 0$.

(ii) $\rho(-x) = \rho(x)$, para todo $x \in E$.

(iii) $|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y)$, para todos $x, y \in E$.

Definição A.3. Seja E um espaço vetorial. Dizemos que uma função $\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}$ é uma *norma* em E quando as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\|x\|_E \geq 0$, para todo $x \in E$ e $\|x\|_E = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\|_E = |\lambda|\|x\|_E$, para todos $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$, para todos $x, y \in X$.

Um *espaço vetorial normado*, ou simplesmente *espaço normado*, é um par $(E, \|\cdot\|_E)$, em que E é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_E$ é uma norma em E. Se F é um subespaço de E, então a restrição de $\|\cdot\|_E$ a F é chamada de *norma induzida*.

Quando não houver perigo de confusão, escreveremos apenas $\|\cdot\|$ ao invés de $\|\cdot\|_E$, e diremos apenas "espaço normado E", deixando subentendida a norma $\|\cdot\|$ de E. Se F é um subespaço de E, então sempre vamos considerar em F a norma induzida pela norma de E.

Se $\|\cdot\|$ é uma norma em E, então a função $d : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

é uma métrica em E. A métrica d definida acima é chamada de *métrica induzida* pela norma $\|\cdot\|$. Em outras palavras, todo espaço normado é um espaço métrico, portanto toda a Teoria dos Espaços Métricos se aplica aos espaços normados.

Definição A.4. Um espaço normado E é um *espaço de Banach* quando E é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Proposição A.5. Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço de E. Então F é um espaço de Banach se, e somente se, F é fechado em E.

Toda norma é uma seminorma (a principal diferença é que pode acontecer $\rho(x) = 0$, mesmo que $x \neq 0$). A fim de utilizar todo o arsenal oriundo da Teoria dos Espaços Métricos, é conveniente alterar a estrutura de um espaço que possui uma seminorma, com o intuito de gerar um espaço normado. Observe a seguir.

Se ρ é uma seminorma em um espaço vetorial E, então

$$x \sim y \Leftrightarrow \rho(x - y) = 0$$

define uma relação de equivalência em E. Considerando $N := \{x \in E : \rho(x) = 0\}$, verifica-se que N é um subespaço de E e que $x \sim y$ se, e somente se, $x - y \in N$. Desta forma, para cada $x \in E$, definimos por $[x] := \{y \in E : x - y \in N\}$ a *classe de equivalência* de x, de modo que podemos considerar o *espaço quociente* $E/N := \{[x] : x \in E\}$. Em E/N estão bem definidas as operações de soma e produto por escalar de classes, dadas por

$$[x] + [y] := [x + y] \text{ e } \lambda[x] := [\lambda x],$$

para todos $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, tornando, assim, E/N um espaço vetorial. Além disso, a expressão

$$\|[x]\|_{E/N} := \rho(x)$$

define uma norma em E/N.

Definição A.6. Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que uma função $f : A \to \mathbb{K}$ é *limitada* quando existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$, para todo $x \in A$. Denotamos por $\mathcal{B}(A)$ o conjunto formado pelas funções limitadas definidas em A.

O conjunto $\mathcal{B}(A)$, que é um espaço vetorial com as operações usuais de funções, é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in A} |f(x)|.$$

Desta forma, se E é um espaço normado e $K \subseteq E$ é um subconjunto compacto, então o conjunto das funções $f : K \to \mathbb{K}$ contínuas, denotado por $C(K)$, é um subespaço fechado de $\mathcal{B}(K)$. Portanto $C(K)$ é um espaço de Banach com a norma induzida

$$\|f\|_{C(K)} = \|f\|_\infty.$$

Definição A.7. Sejam $(E, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que uma função $\varphi : E \to \mathbb{K}$ é *p-integrável* quando

$$\int_E |\varphi(x)|^p \, d\mu(x) < \infty$$

Denotamos por $\mathcal{L}_p(\mu)$ o conjunto formado pelas funções p-integráveis definidas em E.

A expressão

$$\|\varphi\|_p := \left(\int_E |\varphi(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}$$

define uma seminorma em $\mathcal{L}_p(\mu)$. Assim, denotando por $N = \{\varphi \in \mathcal{L}_p(\mu) : \|\varphi\|_p = 0\}$, o espaço quociente $\mathcal{L}_p(\mu)/N$, que vamos denotar por $L_p(\mu)$, é um espaço normado com a norma dada por

$$\|[\varphi]\|_{L_p(\mu)} = \|\varphi\|_p.$$

Usualmente vamos denotar um elemento de $L_p(\mu)$ por φ ao invés de $[\varphi]$ e a norma de $L_p(\mu)$ por $\|\cdot\|_p$ ao invés de $\|\cdot\|_{L_p(\mu)}$.

Definição A.8. Sejam E um conjunto e μ uma medida definida numa σ-álgebra $\mathcal{B}$ de subconjuntos de E. Dizemos que μ é uma *medida regular* se

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A \text{ é compacto}\} = \inf\{\mu(V) : V \supseteq A \text{ é aberto}\},$$

para todo $A \in \mathcal{B}$.

Definição A.9. Sejam E e F espaços vetoriais. Dizemos que uma aplicação $T : E \to F$ é um *operador linear* se $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$, para todos $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. O conjunto formado pelos operadores lineares de E em F, denotado por $L(E; F)$, é um espaço vetorial. O espaço $E^\# := L(E; \mathbb{K})$ é chamado de *dual algébrico* de E e um elemento $\varphi \in E^\#$ é chamado de *funcional linear* de E.

Se $T : E \to F$ é uma bijeção linear, diz-se que T é um *isomorfismo* e que os espaços E e F são *isomorfos*. Neste caso, T^{-1} também é linear.

Definição A.10. Sejam E e F espaços normados. O conjunto formado pelos operadores lineares contínuos de E em F, denotado por $\mathcal{L}(E;F)$, é um espaço vetorial. O espaço $E^* = \mathcal{L}(E;\mathbb{K})$ é chamado de *dual topológico* de E. O espaço $E^{**} := (E^*)^* = \mathcal{L}(E^*;\mathbb{K})$ é chamado de *bidual topológico* de E.

Se E é um espaço normado, denotamos por $B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ a bola fechada unitária de E e por $S_E := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ a esfera unitária de E.

Proposição A.11. Sejam E e F espaços normados e $T : E \to F$ um operador linear. Então são equivalentes:

(i) T é contínuo.

(ii) T é contínuo na origem.

(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in E$.

(iv) $\sup\limits_{x \in B_E} \|T(x)\| < \infty$.

A expressão

$$\|T\| := \sup_{x \in B_E} \|T(x)\| \tag{A.1}$$

define uma norma em $\mathcal{L}(E;F)$. Além disso, tem-se

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|,$$

para todo $x \in E$. A norma dada pela expressão (A.1) é chamada de *norma do supremo* e é a norma usual considerada em $\mathcal{L}(E;F)$.

Se F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E;F)$ também é Banach. Em particular, E^* é Banach (consequentemente E^{**} também é Banach).

Teorema A.12 (Teorema de Hahn-Banach)**.** Sejam E um espaço normado. Então para todo $x \in E$, tem-se

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |\varphi(x)| = \max_{\varphi \in S_{E^*}} |\varphi(x)|.$$

Proposição A.13. Sejam E um espaço normado, G um espaço de Banach e F um subespaço de E. Se $T_0 : F \to G$ é um operador linear contínuo, então existe uma única extensão linear contínua $T : \overline{F} \to G$ de T_0 a $\overline{F}$.

Definição A.14. Sejam A e B conjuntos arbitrários e $f : A \to B$ uma aplicação. O gráfico de f é o conjunto

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B.$$

Se M e N são espaços métricos e $f : M \to N$ é uma aplicação contínua, então $G(f)$ é fechado em $M \times N$. Se E e F são espaços de Banach e $T : E \to F$ é um operador linear, então a recíproca é válida. Observe a seguir.

Teorema A.15 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um operador linear. Se $G(T)$ é fechado em $E \times F$, então T é contínuo.

Sejam M e N espaços métricos. Lembramos que uma aplicação $f : M \to N$ é uma isometria quando $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$, para todos $x, y \in M$. Toda isometria é injetiva e contínua. Se E e F são espaços normados, então um operador linear $T : E \to F$ é uma isometria quando $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in E$. Se, em adição, T é sobrejetivo, dizemos que T é um *isomorfismo isométrico* e que E e F são *isomorfos isometricamente*. Se F é subespaço de um espaço normado G, dizemos que G contém uma *cópia isométrica* de E. É comum identificar dois espaços isometricamente isomorfos como o mesmo espaço.

O operador linear $J_E : E \to E^{**}$ dado por

$$J_E(x)(\varphi) = \varphi(x), \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in E^*,$$

é uma isometria, chamado de *mergulho canônico* de E em E^{**}. Nos termos apresentados anteriormente, isso significa que E e $J_E(E)$ são isomorfos isometricamente, ou ainda, que E^{**} contém uma cópia isométrica de E.

Definição A.16. Seja E um espaço normado. Dizemos que um espaço de Banach G é um *completamento* de E quando G contém uma cópia isométrica densa de E.

Todo espaço normado possui um completamento, a saber, $\overline{J_E(E)}$. O completamento de um espaço normado E em geral não é único.

Definição A.17. Seja E um espaço normado. A *topologia fraca** em E^*, denotada por $\sigma(E^*, E)$, é a topologia gerada pela família de aplicações $\{J_E(x) : x \in E\}$, isto é, $\sigma(E^*, E)$ é a "menor" topologia de modo que $J_E(x) : E^* \to \mathbb{K}$ é contínua, para todo $x \in E$.

Se uma sequência $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ em E^* converge para $\varphi \in E^*$ na topologia fraca*, escrevemos $\varphi_j \xrightarrow{w^*} \varphi$.

Proposição A.18. Seja $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em E^*. Então $\varphi_j \xrightarrow{w^*} \varphi$ se, e somente se, $\varphi_j(x) \to \varphi(x)$, para todo $x \in E$.

Teorema A.19. Seja E um espaço normado. Então E possui dimensão finita se, e somente se, B_E é compacta com a topologia da norma.

Teorema A.20 (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** Se E é um espaço normado, então B_{E^*} munida com a topologia fraca* é compacta.

A Proposição A.19 diz que se $\dim E^* = \infty$, então B_{E^*} nunca é compacta com a topologia da norma de E^*. Entretanto, o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki garante que, munida com a topologia fraca*, a bola B_{E^*} é compacta.

Referências Bibliográficas

[1] D. Achour, E. Dahia, P. Rueda, E. A. Sánchez-Pérez, Domination spaces and factorization of linear and multilinear summing operators, *Quaestiones Mathematicae* **39** (2016), 1071–1092.

[2] T. R. Alves, Polinômios dominados entre espaços de Banach, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2011.

[3] R. Ash, Measure, Integration and Functional Analysis, Academic Press, Inc., 1972.

[4] R. Bartle, The Elements of Integration and Lebesgue Measure, John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[5] G. Botelho, M. Maia, D. Pellegrino, J. Santos, A Unified Factorization Theorem for Lipschitz Summing Operators, *The Quarterly Journal of Mathematics* **70** (2019) 1521–1533.

[6] G. Botelho, D. Pellegrino, P. Rueda, A unified Pietsch domination theorem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **365** (2010), 269–276.

[7] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, Fundamentos de Análise Funcional, Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[8] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2010.

[9] D. Carando, V. Dimant, On summability of bilinear operators, *Mathematische Nachrichten* **259** (2003), 3–11.

[10] E. Dahia, D. Achour, E. A. Sánchez-Pérez, Absolutely continuous multilinear operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **397** (2013), 205–224.

[11] A. Defant, K. Floret, Tensor Norms and Operator Ideals, Vol. 176, Elsevier, 1993.

[12] V. Dimant, Strongly p-summing multilinear operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **278** (2003), 182–193.

[13] L. Gomes, Formas Gerais do Teorema da Dominação de Pietsch, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 2016.

[14] A. Grothendieck, Résumé de la théorie métrique de produits tensoriels topologiques, *Boletim da Sociedade de Matemática De São Paulo* **8** (1953), 1–79.

[15] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 43, 1995.

[16] J. Lindenstrauss, A. Pelcyński, Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications, *Studia Mathematica* **29** (1968), 276–326.

[17] M. C. Matos, On multilinear mappings of nuclear type, *Revista Matemática Complutense* **6** (1993), 61–81.

[18] U. Matter, Absolute continuous operators and super-reflexivity, *Mathematische Nachrichten* **130** (1987), 193–216.

[19] B. Mitjagin, A. Pelcyński, Nuclear operators and approximative dimension, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (1966), 366–372.

[20] J. A. L. Molina, E. A. Sánchez-Pérez, Ideales de operadores absolutamente continuos, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **87** (1993), 349–378.

[21] D. Nogueira, Espaço de sequências vetoriais e ideais de operadores, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2016.

[22] D. Nogueira, Operadores multilineares somantes por blocos e definidos por transformações de sequências vetoriais: os casos isotrópico e anisotrópico, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2021.

[23] D. Pellegrino, P. Rueda, E.A. Sanchez Pérez, Surveying the spirit of absolute summability on multilinear operators and homogeneous polynomials, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **110** (2016), 285–302.

[24] D. Pellegrino, J. Santos, A general Pietsch Domination Theorem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **375** (2011), 371–374.

[25] D. Pellegrino, J. Santos, J. Seoane-Sepulveda, Some techniques on nonlinear analysis and applications, *Advances in Mathematics* **229** (2012), 1235–1265.

[26] A. Pietsch, Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumenm, *Studia Mathematica* **28** (1967), 333–353.

[27] P. Rueda, E. A. Sanchez-Pérez, Factorization of p-dominated polynomials through L_p-spaces, *Michigan Mathematical Journal* **63** (2014), 345–354.

[28] R. Ryan, Introduction to Tensor Products of Banach Spaces, Springer-Verlag, London, 2002.

[29] J. Santos, Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 2008.

[30] A. Silva, Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010.