Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Espaços Quase-Banach e Resultados Estruturantes

por

Evandio Demétrio Júnior

João Pessoa - PB
Julho de 2023

Espaços Quase-Banach e Resultados Estruturantes

por

Evandio Demétrio Júnior [1]

sob a orientação do

Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

João Pessoa - PB
Julho de 2023

[1]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

D377e Demétrio Júnior, Evandio.
Espaços quase-banach e resultados estruturantes / Evandio Demétrio Júnior. - João Pessoa, 2023.
115 f.

Orientação: Nacib Gurgel de Albuquerque.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Espaços vetoriais topológicos. 3. Espaços localmente convexos. 4. Aoki-Rolewicz. 5. F-norma. 6. Banach-Grunblum-Nikolskii. I. Albuquerque, Nacib Gurgel de. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por GRACILENE BARBOSA FIGUEIREDO - CRB-15/794

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise
Data de Aprovação: 25 de julho de 2023
Comissão Examinadora:

gov.br
Documento assinado digitalmente
NACIB ANDRE GURGEL E ALBUQUERQUE
Data: 28/07/2023 10:50:55-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque
Universidade Federal da Paraíba - Orientador

Firmado por SHELDON MIRIEL GIL DANTAS - NIF:****0365* el día 29/07/2023 con un certificado emitido por ACCVCA-120

Prof. Dr. Sheldon Miriel Gil Dantas
Universitat de València

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Vladimir Pestov
Data: 28/07/2023 11:13:36-0300
CPF: ***.231.711-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Vladimir Pestov
University of Ottawa

João Pessoa - PB
Julho de 2023

Agradecimentos

Agradeço profundamente à minha família pelo constante incentivo e apoio, em especial às duas pessoas mais importantes da minha vida: minha mãe e minha avó. Elas sempre se dedicaram incansavelmente aos meus estudos, fazendo tudo o que estava ao seu alcance para me ver prosperar. Sou imensamente grato por todo amor e dedicação que me proporcionaram ao longo do caminho. Vocês são a minha fonte de inspiração e força, e por isso, agradeço de todo coração.

Agradeço à minha namorada Thais Marya por todo carinho, cuidado e amor.

Ao meu orientador, Nacib Gurgel, pelos ensinamentos, empenho e dedicação na realização deste trabalho.

A todos os membros do PPGMAT, pelo conhecimento passado em várias disciplinas durante a minha trajetória no mestrado.

Aos respeitáveis membros da banca, Professores Vladimir Pestov e Sheldon Gil Dantas, expresso minha sincera gratidão pela disponibilidade e pelas valiosas contribuições oferecidas. Suas orientações foram fundamentais para a finalização deste trabalho.

Ao CNPq e a Capes pelo apoio financeiro.

Dedicatória

A minha mãe
Marcia Leite de Brito Demétrio

Página intencionalmente em branco

Resumo

Neste trabalho, dedicamo-nos ao estudo de conceitos e estruturas fundamentais em espaços vetoriais topológicos, com foco especial nos espaços localmente convexos e *quase-normados*. Este último possui estrutura similar aos espaços normados mas, em geral, não é um ambiente localmente convexo. Ao longo do texto exploramos os aspectos relevantes dos ambientes investigados e destacamos a importância desses através de resultados estruturantes. Investigamos os *F-espaços* sob diversas perspectivas, e apresentamos resultados clássicos da teoria dos espaços de Banach nesse contexto. Noções panorâmicas dos conceitos de *bases* em espaços vetoriais topológicos são estudadas. Em particular, a relação entre extensão de funcionais lineares e convexidade local, nominalmente conhecida como a Propriedade de Extensão de Hahn-Banach (HBEP).

Palavras-chave: espaços vetoriais topológicos, espaços localmente convexos, quase-norma, F-norma, Aoki-Rolewicz, Banach-Grunblum-Nikolskii, HBEP.

Página intencionalmente em branco

Abstract

This text studies fundamental concepts and structures in topological vector spaces, focusing on locally convex and *quasi-normed* spaces. The latter has a structure similar to normed spaces but generally is not a locally convex environment. Throughout the text, we explore the relevant aspects of the investigated environments and highlight their importance through structuring results. We investigate *F-spaces* from various perspectives and present classical results from the theory of Banach spaces in this context. Overview notions of the concepts of *bases* in topological vector spaces are studied, particularly the relationship between the extension of linear functionals and local convexity, usually known as the Hahn-Banach Extension Property (HBEP).

Keywords: topological vector spaces, locally convex spaces, quasi-norm, F-norm, Aoki-Rolewicz, Banach-Grunblum-Nikolskii, HBEP.

Página intencionalmente em branco

Sumário

Introdução **1**

1 Espaços Vetoriais Topológicos **5**
1.1 Noções Básicas 5
1.2 Espaços Localmente Limitados 12
1.3 Operadores Lineares Contínuos 14
1.4 Espaços Localmente Convexos 17
1.5 Seminormas e convexidade local 19
1.6 Teoremas de Hahn-Banach 29
1.7 Envoltória Convexa 32
1.8 Espaço Quociente 34
1.9 Topologias Fracas 35

2 F-espaços e Resultados Estruturantes **39**
2.1 Δ-Normas e F-Normas 39
2.2 Teorema de Aoki-Rolewicz 49
2.3 A Estrutura dos Espaços Quase-Normados 51
2.4 Teorema de Banach-Steinhaus 58
2.5 Teorema da Aplicação Aberta 60
2.6 Teorema do Gráfico Fechado 64
2.7 Pontos Extremais 65
2.8 Sistemas Duais e Topologia de Mackey 68

3 Bases em Espaços Vetorias Topológicos **77**
3.1 Sequências Básicas em F-espaços 86
3.2 Propriedades de Extensão de Hahn-Banach para F-espaços 95

Referências **105**

Introdução

A presente dissertação visa proporcionar uma abordagem sistemática sobre os espaços vetoriais topológicos, com o intuito de promover uma compreensão aprofundada desse campo de estudo. A leitura desse texto pressupõe a familiaridade prévia com os elementos de Topologia Geral, Álgebra Linear e Análise Funcional. Sugerimos as seguintes referências bibliográficas [8], [21] e [25] como leituras complementares que auxiliarão no entendimento consistente deste texto.

No capítulo 1, iniciamos nossa investigação acerca dos espaços vetoriais topológicos, introduzindo conceitos fundamentais e resultados preliminares dessa teoria. Posteriormente, estabelecemos a definição dos espaços localmente convexos e a sua relação com seminormas. Além disso, esse capítulo contém uma extensa lista de exemplos concretos, alguns conceitos gerais e uma série de fatos relevantes, dentre os quais se destaca o Teorema Hahn-Banach para espaços localmente convexos sobre extensões de funcionais em suas diversas versões (ver Teorema 1.41).

No segundo capítulo apresentamos espaços vetoriais dotados de estruturas semelhantes a normas. De maneira geral, dedicamos nosso estudo aos espaços F-normados, quase-normados, p-normados e Δ-normados. Neste contexto, ressaltamos o Teorema de Aoki-Rolewicz que estabelece a equivalência entre espaços quase-normados e espaços F-normados.

Definição (p-norma). *Sejam $0 < p < 1$ e X um espaço vetorial. Dizemos que uma aplicação $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, \infty)$ é uma $p-$norma em X quando satisfaz*

1. *$\|x\| > 0$, se $x \neq 0$.*

2. *$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in X$.*

3. *Para todo $x, y \in X$, vale que*

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p.$$

Teorema de Aoki-Rolewicz. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço quase-normado. Então existe uma constante $c > 0$ e uma p-norma $\|\cdot\|_1$ em X equivalente a quase-norma tal que,*

$$\frac{\|x\|}{c} \leq \|x\|_1 \leq \|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

O objetivo principal deste capítulo consiste em generalizar os teoremas clássicos da Análise F uncional, tais como: o Teorema da Aplicação Aberta, Teorema do Gráfico Fechado e o Princípio da Limitação Uniforme no ambiente de F-espaços (ver Teoremas 2.24, 2.28 e 2.31).

O capítulo 3 destina-se a abordar a teoria de bases em espaços vetoriais topológicos, com ênfase na análise de critérios para sequências básicas. Em particular, no contexto de espaços normados, o critério de Banach-Grunblum-Nikolskii é amplamente conhecido e desempenha um papel fundamental nessa análise. Enunciaremos a seguir esse critério cuja demonstração detalhada pode ser encontrada em [8].

Critério de Banach-Grunblum-Nikolskii. *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de vetores não nulos em um espaço de Banach E é básica se, e somente se, existe uma constante $K \geq 1$ tal que para toda sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,*

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \text{ sempre que } n \geq m.$$

No decorrer deste capítulo, serão investigadas versões desse resultado para espaços localmente convexos e F-espaços. Os Teoremas 3.2 e 3.6 são as primeiras caracterizações de sequências básicas para espaços localmente convexos, enquanto que, o Teorema 3.12 é a generalização natural para F-espaços do critério citado acima. Além disso, nesse capítulo serão aplicados diversos resultados previamente discutidos nos capítulos anteriores. Por fim, serão estudadas as propriedades de extensões para funcionais lineares definidos em F-espaços. O último resultado que apresentamos (ver Teorema 3.20) traz a equivalência entre a Propriedade de Extensão de Hanh-Banach (HBEP) e convexidade local, como indicado a seguir.

Propriedade da Extensão de Hahn-Banach. *Um F-espaço possui HBEP se, e somente se, for localmente convexo.*

Notação e Terminologia

$\mathbb{N}$	Inteiros positivos
$\mathbb{K}$	Denotará o do corpos dos escalares complexos $\mathbb{C}$ ou o dos reais $\mathbb{R}$
$\mathcal{U}_x$	O sistema de vizinhanças de x em um espaço topológico X
$\mathcal{B}_x$	Uma base de vizinhanças de x em um espaço topológico X
$\mathcal{L}(X,Y)$	Espaço vetorial formado por todos os operadores lineares contínuos de X em Y
X^*	Dual algébrico de um espaço vetorial X
$X^{'}$	Dual topológico de um espaço vetorial topológico X
$\mathcal{P}$	Uma família de seminormas no espaço vetorial X
$\|\cdot\|$	Indicará uma norma, quase-norma ou $\Delta-$norma em um espaço vetorial X
$\|\cdot\|_F$	F-norma de um espaço vetorial X
B_x	A bola unitária fechado do espaço normado X.
$\xrightarrow{\tau}$	Convergência na topologia τ
$\overline{A}^{\tau}$	O fecho de A com respeito a topologia τ
$m(X,X^{'})$	A topologia de Mackey em um espaço vetorial topológico X
$conv(A)$	A envoltória convexa de um subconjunto A em um espaço vetorial X.
$\overline{conv}(A)$	O fecho da envoltória convexa de A um subconjunto de um espaço vetorial topológico X

Página intencionalmente em branco

Capítulo 1

Espaços Vetoriais Topológicos

Neste capítulo, exploraremos conceitos e resultados fundamentais da teoria dos espaços vetoriais topológicos, com um enfoque especial nos espaços localmente convexos. Esses espaços desempenham um papel fundamental ao longo de todo o texto, e é importante compreender suas estruturas e propriedades. Esse capítulo foi baseado nas seguintes referências [6], [7], [14], [15], [16], [23], [27] e [33].

1.1 Noções Básicas

Definição 1.1. *Sejam X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e τ uma topologia em X. Dizemos que o par (X, τ) é um espaço vetorial topológico se as operações*

$$AD : E \times X \longrightarrow X, \;\; AD(x, y) = x + y$$

e

$$M : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X, \;\; M(a, y) = ay$$

forem contínuas com as respectivas topologicas produto em $X \times X$ e em $\mathbb{K} \times X$.

Exemplo 1.1. *Espaços normados são espaços vetoriais topológicos.*

Exemplo 1.2. *Considere X um espaço vetorial não trivial e a topologica caótica $\tau = \{\emptyset, X\}$. Então (X, τ) é um espaço vetorial topológico. Vejamos que X não é normado. Suponha que existe uma norma em X que induza a topologia. Assim, $B(0, 1)$ é um conjunto aberto e não vazio, logo teriamos $B(0, 1) = X$, o que é um absurdo pois subespaços normados são ilimitados enquanto $B(0, 1)$ é limitado.*

Exemplo 1.3. *Sejam X um espaço normado e $\sigma(X, X')$ a topologia fraca em X. Então $(X, \sigma(X, X'))$ é um espaço vetorial topológico. Sejam $(x_\lambda)_\lambda$ e $(y_\lambda)_\lambda$ redes em X tais que $x_\lambda \longrightarrow x$ e $y_\lambda \longrightarrow y$, então para todo funcional linear contínuo φ em X' temos $\varphi(x_\lambda) \longrightarrow \varphi(x)$ e $\varphi(y_\lambda) \longrightarrow \varphi(y)$ daí,*

$$\varphi(x_\lambda + y_\lambda) = \varphi(x_\lambda) + \varphi(y_\lambda) \longrightarrow \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y).$$

Concluímos assim que $x_\lambda + y_\lambda \xrightarrow{w} x + y$*, provando assim que a adição é contínua com relação a topologia fraca. De modo análogo prova-se que a multiplicação também é contínua, portanto,* $(X, \sigma(X, X'))$ *é um espaço vetorial topológico.*

Exemplo 1.4. *Para cada número* $0 < p < 1$*, definimos*

$$\ell_p = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty \right\}.$$

Vejamos que ℓ_p *é um espaço vetorial topológico. Primeiramente iremos verificar que* ℓ_p *é um espaço vetorial. Para tanto, fixe* $s \geq 0$ *e considere a função diferenciável*

$$f_s : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \;\; f_s(t) = s^p + t^p - (s+t)^p.$$

Assim,

$$f_s'(t) = pt^{p-1} - p(s+t)^{p-1}$$

e como $0 < p < 1$*, segue que* $0 < p - 1 < 0$*, então* $f_s'(t) \geq 0$ *para todo* $t \geq 0$*, portanto* f_s *é uma função monótona não decrescente em* $[0, +\infty]$*. Além disso,* $f_s(0) = 0$*, daí segue que* $f_s(t) \geq 0$ *para todo* $t \geq 0$*. Logo concluímos,*

$$(s+t)^p \leq s^p + t^p \text{ para todos } s, t \geq 0. \tag{1.1}$$

Isto nos diz que ℓ_p *é fechado com relação a operação de adição, e fechado também com relação a operação de multiplicação por escalar. Concluímos assim que* ℓ_p *é um espaço vetorial e a aplicação*

$$d_p : \ell_p \times \ell_p \longrightarrow \mathbb{R}\,, \;\; d_p((a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j - b_j|^p$$

define uma métrica em ℓ_p*.*

Vejamos agora que as operações algébricas em ℓ_p *são contínuas com a topologia induzida pela métrica* d_p*. Primeiramente, dados quaisquer* $x, y, z \in \ell_p$ *vale que,*

$$d_p(x + z, y + z) = d(x, y).$$

Nesse caso dizemos que a métrica d_p *é invariante por translações.*

Sejam $x, y \in \ell_p$ *e sequências* $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* ℓ_p *tais que* $x_n \longrightarrow x$ *e* $y_n \longrightarrow y$*.*

$$\begin{aligned} d_p(x_n + y_n, x + y) &= d_p(x_n + y_n - x, x + y - x) \\ &= d_p(x_n + y_n - x, y) \\ &= d_p(x_n - x, y - y_n) \\ &\leq d_p(x_n - x, 0) + d(0, y - y_n) \\ &= d_p(x_n, x) + d(y_n, y) \longrightarrow 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Isto nos diz que $x_n + y_n \longrightarrow x + y$*, portanto a adição é contínua. Para multiplicação, note inicialmente que as seguintes propriedades da métrica* d_p *são válidas,*

$$d_p(ax, ay) = |a|^p d_p(x, y) \text{ para todos } x, y \in \ell_p \text{ e } a \in \mathbb{K},$$

e

$$d_p(ax, bx) = |a - b|^p d_p(x, 0) \text{ para todos } x \in \ell_p \text{ e } a, b \in \mathbb{K}.$$

Assim, dados $x \in \ell_p$ *e* $a \in \mathbb{K}$ *e sequências* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* ℓ_p *e* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* $\mathbb{K}$ *tais que* $x_n \longrightarrow x$ *e* $a_n \longrightarrow a$*,*

$$\begin{aligned} d_p(a_n x_n, ax) &\leq d_p(a_n x_n, a x_n) + d_p(a x_n, ax) \\ &= |a_n - a|^p d_p(x_n, 0) + |a|^p d_p(x_n, x) \longrightarrow 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

pois $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$*. Isso prova que a multiplicação é contínua, portanto* (l_p, d_p) *é um espaço vetorial topológico metrizável.*

Definição 1.2. *Sejam* X *e* Y *espaços vetoriais topológicos. Um homeomorfismo linear* $T : X \longrightarrow Y$ *é dito isomorfismo entre* X *e* Y*. Neste caso, dizemos que os espaços vetoriais topológicos* X *e* Y *são isomorfos.*

Proposição 1.1. *Sejam* X *um espaço vetorial topológico,* $x_0 \in X$ *e* $a \in \mathbb{K}$*,* $a \neq 0$*, então as aplicações*

$$f : X \longrightarrow X \ f(x) = x + x_0$$

e

$$g : X \longrightarrow X \ , \ g(x) = ax$$

são homeomorfismos e g *é um isomorfismo.*

Demonstração. Note inicialmente que as funções f e g são bijetoras. Para a continuidade, a função f é uma composta das aplicações

$$x \in X \mapsto (x, x_0) \in X \times X \mapsto x + x_0 \in X,$$

e g é a composição das aplicações

$$x \in X \mapsto (a, x_0) \in \mathbb{K} \times X \mapsto ax \in X.$$

Como X é um espaço vetorial topológico as aplicações que envolvem adição e multiplicação por escalar são contínuas, e a continuidade das outras duas funções seguem da definição de topologia produto.

□

Sabemos que homeomorfismos entre espaços topológicos transformam abertos em conjuntos abertos. Assim, se $f : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo entre os espaços topológicos, então V é aberto em X se e somente se, $f(V)$ é aberto em Y. Assim, o corolário a seguir segue imediatamente da proposição anterior.

Corolário 1.2. *As seguintes afirmações são equivalentes para um subconjunto V do espaço vetorial topológico X:*

1. *V é uma vizinhança da origem em X.*
2. *$\lambda V = \{\lambda x : x \in V\}$ é uma vizinhança da origem em X para algum $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.*
3. *$\lambda V = \{\lambda x : x \in V\}$ é uma vizinhança da origem em X para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.*
4. *$x_0 + V = \{x_0 + x : x \in V\}$ é uma vizinhança de x_0 para algum $x_0 \in X$.*
5. *$x_0 + V = \{x_0 + x : x \in V\}$ é uma vizinhança de x_0 para todo $x_0 \in X$.*

Observação 1.1. *Seja V é uma vizinhança de x_0 em X, então do Corolário 1.2 existe uma vizinhança U da origem, tal que $V = x_0 + U$. Em outras palavras, as vizinhanças de um espaço vetorial topológico são translações de vizinhanças da origem. Dito isto, é suficiente estudar as propriedades topológicas em vizinhanças da origem.*

Observação 1.2. *Em particular, os conjuntos da forma $x_0 + V$ e λV são abertos quando V for aberto. Mais geralmente, se V é um aberto e $A \subseteq X$, então $V + A$ é um conjunto aberto, pois $A + V = \bigcup_{x \in A} (\{x\} + V)$.*

Definição 1.3. *Seja A um subconjunto do espaço vetorial X. Dizemos que A é:*

1. *absorvente, quando para cada $x \in X$, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| < \varepsilon$, então $\lambda x \in A$.*
2. *equilibrado, quando $\lambda A \subseteq A$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq 1$.*

Exemplo 1.5. *Toda bola fechada centrada na origem de um espaço normado é um conjunto equilibrado e absorvente.*

Sejam X um espaço vetorial topológico e $x \in X$, denotaremos por $\mathcal{U}_x$ a família de todas as vizinhanças de x, isto é, a coleção dos subconjuntos A de X que contém um aberto U contendo x,

$$x \in U \subseteq A.$$

Proposição 1.3. *Seja $\mathcal{U}_0$ a família de todas as vizinhanças da origem de um espaço vetorial topológico X. Se $U \in \mathcal{U}_0$, então*

1. *U é absorvente.*
2. *Existe $V \in \mathcal{U}_0$ tal que $V + V \subseteq U$.*
3. *Existe $V \in \mathcal{U}_0$, V equilibrado com $V \subseteq U$.*

Demonstração. (1). Seja $x_0 \in X$. Considere a aplicação

$$f : \mathbb{K} \longrightarrow X \ , \ f(\lambda) = \lambda x_0.$$

Notemos que f é contínua, pois é composta de funções contínuas. Como $U \in \mathcal{U}_0$ então $f^{-1}(U)$ é uma vizinhança da origem em $\mathbb{K}$, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(\lambda) \in U$ sempre que $|\lambda| < \varepsilon$, ou melhor,

$$\lambda x_0 \in U \text{ sempre que } |\lambda| < \varepsilon,$$

portanto U é absorvente.
(2). A aplicação $AD : X \times X \longrightarrow X$ é contínua, pois X é um espaço vetorial topológico. Como $U \in \mathcal{U}_0$ então $AD^{-1}(U)$ é uma vizinhança da origem em $X \times X$. Além disso, $AD(0,0) = 0$. Assim existe $V \in \mathcal{U}_0$ tal que $AD(V \times V) \subseteq U$, ou seja, $V + V \subseteq U$.
(3). Seja $\overline{\Delta} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$ o disco fechado em $\mathbb{K}$. Como a multiplicação $M : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$ é contínua e $MX(\lambda, 0) = \lambda.0 = 0$, para cada $\lambda \in \overline{\Delta}$ existem A_λ, vizinhança aberta de λ em $\mathbb{K}$, e $V_\lambda \in \mathcal{U}_0$ tais que $\mu x \in U$ sempre que $\mu \in A_\lambda$ e $x \in V_\lambda$. Logo,

$$\overline{\Delta} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \overline{\Delta}} A_\lambda.$$

Como $\overline{\Delta}$ é compacto, existem $\lambda_1, \cdots \lambda_n \in \overline{\Delta}$ tais que

$$\overline{\Delta} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}.$$

Considere $W = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\lambda_i} \in \mathcal{U}_0$ e vejamos que

$$\mu x \in U \text{ sempre que } \mu \in \overline{\Delta} \text{ e } x \in W.$$

Com efeito, se $\mu \in \overline{\Delta}$, então $\mu \in A_{\lambda_i}$ para algum $i \in \{1, \cdots, n\}$ e se $x \in W$, então $x \in V_{\lambda_i}$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Definindo

$$V = \{\mu x : x \in W \text{ e } \mu \in \overline{\Delta}\},$$

temos que V é equilibrado, pois $\alpha \in \overline{\Delta}$ implica $\alpha\mu \in \overline{\Delta}$ e $V \subseteq U$. Mais ainda, como $W \subseteq V$ segue que $V \in \mathcal{U}_0$.

□

Observação 1.3. *Se combinarmos os itens* (1) *e* (2) *da proposição anterior, segue que para cada vizinhança $U \in \mathcal{U}_0$ existe uma vizinhança equilibrada $V \in \mathcal{U}_0$, tal que $V + V \subseteq U$.*

Lema 1.4. *Se $A \subseteq \mathbb{K}$ é um conjunto equilibrado, então A é limitado ou $A = \mathbb{K}$.*

Demonstração. Note que $0 \in A$, pois A é equilibrado. Suponhamos que $A \neq \mathbb{K}$, assim existe $0 \neq z \in \mathbb{K} - A$, isto é $|z| > 0$. Se A fosse ilimitado, existiria $b \in A$, de modo que $|b| > |z|$, donde teriamos

$$\frac{|z|}{|b|} = \left|\frac{z}{b}\right| < 1,$$

sendo A equilibrado temos que $z = \frac{z}{b}b \in A$, o que é um absurdo, logo A é limitado.

□

Definição 1.4. *Seja X um espaço vetorial. Um subconjunto $C \subseteq X$ é dito convexo se para cada $x, y \in C$ o conjunto $[a, b] = \{ta + (1-t)b : t \in [0,1]\}$ está contido em C, ou equivalentemente, $tC + (1-t)C \subseteq C$ para todo $t \in [0,1]$.*

Na proposição a seguir veremos todas as propriedades sobre conjuntos convexos e equilibrados que usaremos ao longo do trabalho.

Proposição 1.5. *Seja X um espaço vetorial topológico.*

1. *Se C é convexo, então $int(C)$ e $\overline{C}$ são conjuntos convexos.*
2. *Se $A, B \subseteq X$ então $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A+B}$.*
3. *Se B é equilibrado, então $\overline{B}$ também é equilibrado e ainda, se $0 \in B$, então $int(B)$ é equilibrado.*
4. *Combinações lineares e interseções arbitrárias de conjuntos convexos e equilibrados são conjuntos convexos e equilibrados.*
5. *Sejam Y um espaço vetorial, $T : X \longrightarrow Y$ linear e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ conjuntos convexos e equilibrados. Então os conjuntos $T(A) \subseteq Y$ e $T^{-1}(B) \subseteq X$ são convexos e equilibrados.*

Demonstração. (1) Como $int(C) \subseteq C$ e C é convexo, então

$$t \cdot int(C) + (1-t) \cdot int(C) \subseteq C.$$

Como $int(C)$ é aberto então pela Observação 1.2 o conjunto $int(C) + (1-t) \cdot int(C)$ é um aberto contido em C, portanto está contido em $int(C)$.

Para a outra parte, primeiramente considere $x \in \overline{C}$ e $U \in \mathcal{U}_0$. Seja V uma vizinhança equilibrada da origem tal que $V \subseteq U$. Sabemos que $x + V$ é uma vizinhança de x, logo $(x+V) \cap C \neq 0$, digamos $x_U = x + y_U \in C$, assim $x - x_U \in V \cap C$ pois V é equilibrado, daí $x - x_U \in U$, portanto a rede $(x - x_U)_{U \in \mathcal{U}_0}$ com a relação de continência invertida, converge para zero.

Sejam $x, y \in \overline{C}$ e $t \in [0,1]$. Pelo comentado acima, existem redes $(x - x_U)_{U \in \mathcal{U}_0}$ e $(y - y_U)_{U \in \mathcal{U}_0}$ que convergem para zero, onde $x_U, y_U \in C$ para todo $U \in \mathcal{U}_0$. Como C é convexo então a rede $(x_U t + (1-t)y_U)_{U \in \mathcal{U}_0}$ está contida em C com $x_U t + (1-t)y_U \longrightarrow xt + (1-t)y$. Portanto $\overline{C}$ é convexo.

(2) Sejam $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$ e W uma vizinhança de $a + b$. Pela Corolário 1.2 tem-se que $W = a + b + W_0$, onde W_0 é uma vizinhança da origem. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $W_0 + W_0 \subseteq W_0$, logo $W_1 = a + W_0$ e $W_2 = b + W_0$ são vizinhanças de a e b respectivamente, com $W_1 + W_2 \subseteq W$. Existem $x \in A \cap W_1$ e $y \in B \cap W_2$. Então $x + y \in (A + B) \cap (W_1 + W_2)$, portanto $(A + B) \cap W \neq \emptyset$. Daí segue que $a + b \in \overline{A + B}$ e consequentemente, $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B}$.

(3) Seja $a \in \mathbb{K}$ é um escalar não nulo, a aplicação

$$g : X \longrightarrow X \ , \ g(x) = ax,$$

é um isomorfismo. Assim, se $0 < |a| \leq 1$ então

$$a\overline{B} = g(\overline{B}) = \overline{g(B)} = \overline{aB} \subseteq \overline{B},$$

onde a última continência segue do fato que B é equilibrado, assim $\overline{B}$ é equilibrado. Suponha agora que $0 \in B$. Seja $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| \leq 1$. Se $\alpha \neq 0$, então $\alpha \cdot int(B)$ é um aberto satisfazendo

$$\alpha \cdot int(B) \subseteq \alpha B \subseteq B,$$

logo

$$\alpha \cdot int(B) \subseteq int(B).$$

Se $\alpha = 0$ temos $\alpha \cdot int(B) = \{0\} \subseteq int(B)$.

Os itens (4) e (5) seguem imediatamente da definição de convexo e equilibrado.

□

Proposição 1.6. *Um espaço vetorial topológico X é um espaço de Hausdorff se e só se o conjunto $\{0\}$ é fechado.*

Demonstração. Suponha X um espaço de Hausdorff, veremos que $\{0\}$ é fechado, isto é, o conjunto $X - \{0\}$ é aberto. Com efeito, dado $x \neq 0$, então existem vizinhanças $U, V \in \mathcal{U}_0$, tais que $(x + U) \cap V = \emptyset$. Em particular $0 \notin x + U$, assim $x + U \subseteq X - \{0\}$. Concluímos assim que $\{0\}$ é fechado.

Suponhamos agora que $\{0\}$ é fechado. Sejam $x, y \in X$, com $x \neq y$, ou seja, $x - y \neq 0$. Sendo $X - \{0\}$ um conjunto aberto, existe uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_0$ tal que $0 \notin x - y + U$. Pela Proposição 1.3 existe uma vizinhança equilibrada da origem V, tal que $V + V \subseteq U$. Sabemos pelo Corolário 1.2 que $x + V$ é uma vizinhança de x e $y + V$ é uma vizinhança de y. Afirmamos que

$$(x + V) \cap (y + V) = \emptyset. \tag{1.2}$$

De fato, se existissem $s, t \in V$ tais que

$$x + s = y + t,$$

então teriamos que $-s \in V$, pois V é equilibrado, daí,

$$0 = (x - y) + (t - s) \in x - y + V + V \subseteq x - y + U,$$

o que é uma contradição. Portanto a relação em (1.2) é válida e, assim, concluímos que X é um espaço de Hausdorff.

□

Proposição 1.7. *Seja X um espaço vetorial topológico. Se $A \subseteq X$ então o fecho de A é a interseção de todas as somas de A com vizinhanças da origem, isto é,*

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} (A + U).$$

Demonstração. Sejam $x \in \overline{A}$ e $U \in \mathcal{U}_0$. Considere V uma vizinhança da origem equilibrada tal que $V \subseteq U$. Como $x + V$ é uma vizinhança de x, então $(x + V) \cap A \neq \emptyset$, assim existe $b \in V$ de modo que $x + b \in A$, como V é equilibrada então $x \in A + V \subseteq A + U$ e, portanto,

$$\overline{A} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} (A + U).$$

Reciprocamente, sejam $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} (A+U)$ e $x+U$ uma vizinhança de x, onde $U \in \mathcal{U}_0$. Considere V uma vizinhança da origem equilibrada com $V \subseteq U$, então $x \in A+V \subseteq A+U$, ou seja, existem $a \in A$ e $b \in B$ tal que $x = a + b$, donde segue que $x - b = a \in V$, pois V é equilibrada. Logo $(x + V) \cap A \neq \emptyset$, onde concluímos que $(x + U) \cap A \neq \emptyset$, logo $x \in \overline{A}$.

□

Corolário 1.8. *Um espaço vetorial topológico X é um espaço de Hausdorff se e só se a interseção de todas as vizinhanças da origem é $\{0\}$.*

Demonstração. Com efeito, se X é um espaço de Hausdorff então $\{0\}$ é um conjunto fechado, segue assim da proposição anterior que,

$$\overline{\{0\}} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} (\{0\} + U) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} U = \{0\}.$$

A recíproca é imediata também pela Proposição 1.7.

□

O Corolário 1.8 é uma excelente caracterização de espaços de Hausdorff que usaremos fortemente nos capítulos posteriores.

Corolário 1.9. *Em um espaço vetorial topológico X cada vizinhança de zero contém uma vizinhança equilibrada e fechada da origem.*

Demonstração. De fato, seja $U \in \mathcal{U}_0$, considere V uma vizinhança da origem equilibrada com $V + V \subseteq U$. Pela Proposição 1.5, $\overline{V}$ é também equilibrado e pela Proposição 1.7 temos,

$$\overline{V} = \bigcap_{W \in \mathcal{U}_0} V + W \subseteq V + V \subset U,$$

daí segue o resultado desejado. □

1.2 Espaços Localmente Limitados

Definição 1.5. *Um subconjunto B de um espaço vetorial topológico X é limitado se para cada vizinhança da origem U, existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B \subseteq n_0 U$.*

Exemplo 1.6. *Seja X um espaço vetorial normado. Se $r > 0$ denotemos a bola por $B_r = \{x \in E : \|x\| < r\}$ em X. Se U é uma vizinhança da origem em X, então existe um r' tal que $B_{r'} \subseteq U$.*

Em particular existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_r \subseteq n_0 B_{r'} \subseteq n_0 U.$$

Portanto, todas as bolas centradas na origem em um espaço normado são limitadas. Assim, se B é limitado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $B \subseteq n_0 B_1$, logo $\|x\| < n_0$ para todo $x \in X$. Logo a noção de limitação em um espaço vetorial topológico recupera com a definição usual de limitação em espaços normados.

Todo subconjunto de um conjunto limitado é limitado. A seguir veremos que o fecho de um conjunto limitado é também limitado.

Proposição 1.10. *Seja X um espaço vetorial topológico. Se $A \subseteq X$ é limitado, então $\overline{A}$ também o é.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança da origem. Pelo Corolário 1.9 existe uma vizinhança fechada W da origem com $W \subseteq U$. Sendo A limitado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq nW$, assim

$$\overline{A} \subseteq \overline{nW} = nW \subseteq nU,$$

logo $\overline{A}$ é limitado.

□

Teorema 1.11. *Seja X um espaço vetorial topológico. Se $K \subseteq X$ é compacto, então K é limitado.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança da origem. Considere $W \in \mathcal{U}_0$, equilibrada com $W \subseteq U$. Para cada $x \in K$, existe $r(x) > 0$ tal que $x \in r(x)W$, pois W é absorvente. Então,

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} r(x)W.$$

Sendo K compacto, existem $x_1, \cdots, x_n \in K$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} r(x_i)W$. Como W equilibrado, temos $\alpha W \subseteq \beta W$, para $0 < \alpha < \beta$. Assim, $K \subseteq tW$ para todo $t \in \mathbb{N}$ com $t > r_0 = \max\{r(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$. Portanto $K \subseteq tU$, logo K é limitado.

□

Teorema 1.12. *Seja V uma vizinhança da origem em um espaço vetorial topológico X. Se $0 < r_1 < r_2 < \cdots$ e $r_n \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$, então*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

Demonstração. Fixando $x \in X$. Como a aplicação $T : \mathbb{K} \longrightarrow X$, definida por $T(a) = ax$ é contínua, então $T^{-1}(V)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{K}$ contendo a origem. Assim, existe uma

vizinhança U da origem em $\mathbb{K}$, de modo que $T(U) \subseteq V$. Como $r_n \longrightarrow \infty$, então para n suficientemente grande, temos que $\frac{1}{r_n} \in U$, logo, $\frac{1}{r_n}x \in V$, daí segue que $x \in r_nV$.

□

Proposição 1.13. *Seja X é um espaço vetorial topológico. Se $z \in X$, A e B são conjuntos limitados em X, então os conjuntos $\{z\}, A \cup B$ e $A + B$ são limitados.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança da origem, então U é absorvente, assim $z \in n_0U$ para algum n_0 grande. Considere V uma vizinhança da origem equilibrada com $V + V \subseteq U$. Sendo A e B limitados, então $A \subseteq n_1V$ e $B \subseteq n_2V$, para alguns $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Portanto

$$A \cup B \subseteq n_0V$$

e

$$A + B \subseteq n_0V + n_0V \subseteq n_0U,$$

onde $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

□

Proposição 1.14. *Toda sequência convergente em um espaço topológico é limitada.*

Demonstração. Com efeito, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência convergente em um espaço topológico X, digamos $x_n \longrightarrow z$, pondo $y_n = x_n - z$ então $y_n \longrightarrow 0$. Seja U uma vizinhança da origem em X, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in U$ para cada $n > n_0$. O conjunto $A = \{y_1, y_2, \cdots, y_{n_0}\} = \bigcup_{i=1}^{n_0}\{y_i\}$ é limitado pela proposição anterior e $B = \{y_n : n > n_0\} \subseteq U$ é também limitado, assim $A \cup B$ é limitado e como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = z + (A \cup B)$, segue novamente da proposição anterior que a sequência é limitada.

□

Observação 1.4. *A convergência de redes em espaços topológicos não implica em limitação de redes. Por exemplo, sejam $I = \mathbb{R}$ um conjunto dirigido, equipado com a relação de ordem natural de $\mathbb{R}$ e $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede definida por $x_\alpha = e^{-\alpha}$. Temos que $x_\alpha \longrightarrow 0$, mas a rede não é limitada.*

Definição 1.6. *Um espaço vetorial topológico X é dito localmente limitado quando existir uma vizinhança da origem em X limitada.*

Exemplo 1.7. *Todo espaço normado X é localmente limitado, pois B_r é um conjunto limitado para qualquer $r > 0$.*

1.3 Operadores Lineares Contínuos

Definição 1.7. *Sejam X e Y espaços vetorias topológicos e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Dizemos que T é contínuo se para cada vizinhança da origem U de Y existe uma viznhança da origem V de X tal que $T(V) \subseteq U$.*

Definição 1.8. *Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ entre espaços vetoriais topológicos é dito limitado quando leva conjuntos limitados de X em conjuntos limitados de Y.*

Proposição 1.15. *Seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear contínuo entre espaços vetoriais topológicos. Então T é limitado.*

Demonstração. De fato, seja A um conjunto limitado da origem e U uma vizinhança da origem em Y, pela continuidade de T existe uma vizinhança da origem V de X tal que $T(V) \subseteq U$. Sendo A limitado, então $A \subseteq nV$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$T(nA) = nT(A) \subseteq T(V) \subseteq W,$$

portanto T é limitado. □

Observação 1.5. *A recíproca desse resultado nem sempre é verdadeira. Por exemplo, seja X um espaço de Banach de dimensão infinita, o operador identidade $i_d : (X, \sigma(X, X')) \longrightarrow X$ é limitado, pois sabemos da teoria dos espaços normados que os conjuntos limitados na norma são apenas aqueles fracamente limitados. Entretanto i_d não é contínua, uma vez que as topologias fracas e da norma coincidem apenas em dimensão finita.*

Em espaços metrizáveis, limitação implica em continuidade como veremos a seguir.

Proposição 1.16. *Seja X e Y espaços vetorias topológicos com X metrizável. Se $T : X \longrightarrow Y$ é um operador linear limitado, então T é contínuo.*

Demonstração. Suponhamos que T não seja contínuo, assim existe uma vizinhança da origem W de Y tal que $T^{-1}(W)$ não contém nenhuma vizinhança da origem em X. Sendo X metrizável, sabemos que a coleção dos conjuntos

$$B_n = \left\{ x \in X : d(x, 0) < \frac{1}{n} \right\}$$

forma uma base de vizinhanças da origem. Como T não é contínuo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_n$ tal que $x \notin T^{-1}(W)$. Assim a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para zero, em particular $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitada. Entretanto, segue por construção que $T(A)$ não está contido em nenhum conjunto da forma nW para algum $n \in \mathbb{N}$. Gerando uma contradição já que T é limitada. Portanto T é contínuo. □

O seguinte resultado é uma consequência imediata dessa proposição e da observação anterior.

Corolário 1.17. *Se X é um espaço normado de dimensão infinita, então a topologia fraca em X não é metrizável.*

Definição 1.9. *Uma função $T : E \longrightarrow F$ entre espaços vetoriais topológicos é dita uniformemente contínua se para toda vizinhança U da origem em F existe uma vizinhança V da origem em E tal que se $x, y \in E$ e $x - y \in V$ então $f(x) - f(y) \in F$.*

Proposição 1.18. *Se $T : E \longrightarrow F$ é um operador linear entre espaços vetoriais topológicos, então as seguintes condições são equivalentes.*

1. *T é contínuo*
2. *T é contínuo na origem*
3. *T é contínuo em algum ponto de E*
4. *T é uniformemente contínuo*

Demonstração. A implicação (1) $\Longrightarrow$ (2) é válida para quaisquer espaços topológicos. Vejamos que (2) $\Longrightarrow$ (3). Com efeito, dado $x \in E$ e U uma vizinhança da origem em F, então $T(x) + U$ é uma vizinhança de $T(x_0)$. Como T é contínua na origem, existe uma vizinhança V da origem em E de modo que $T(V) \subseteq U$. Assim, $x + V$ é uma vizinhança de x e,

$$T(x + V) = T(x) + T(V) \subseteq T(x) + U,$$

portanto, T é contínua em $x \in E$. Agora, suponha (3) e vejamos que T é uniformemente contínuo. Para isso seja $x \in E$ um ponto no qual T é contínuo. Considere U uma vizinhança da origem em F, logo $T(x) + F$ é uma vizinhança da origem em $T(x)$. Sendo T contínua em x, existe uma vizinhança V de x tal que $T(V) \subseteq T(x) + U$. Além disso, $-x + V$ é uma vizinhança da origem em E. Por fim, dados $x, y \in E$ com $x - y \in -x + V$, da linearidade de T temos

$$T(x) - T(y) = T(x - y) \in T(-x + V)$$

e

$$T(-x + V) = -T(x) + T(V) \subseteq -T(x) + T(x) + U = U.$$

Concluímos assim que T é uniformemente contínua. Notemos que uniformemente contínua implica em contínua.

□

Proposição 1.19. *As seguintes afirmações são equivalentes para um funcional linear $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ no espaço topológico E.*

1. *φ é contínuo.*
2. *$\ker(\varphi)$ é um conjunto fechado em E.*
3. *φ é limitado em alguma vizinhança da origem.*

Demonstração. A implicação (1) $\Longrightarrow$ (2) segue do fato de que $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ e $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{K}$. Provemos agora (2) $\Longrightarrow$ (1) Se $\ker(\varphi) = E$ então φ é limitada. Suponha $\ker(\varphi) \neq E$, assim o conjunto $V = E - \ker(\varphi)$ é aberto e não vazio de E pois $\ker(\varphi)$ é fechado. Em particular, V é uma vizinhança de cada um dos seus pontos. Dito isto, se $x \in V$ então $U = -x + V$ é uma vizinhança da origem. Assim podemos considerar uma vizinhança equilibrada W da origem com $W \subseteq U$. Assim,

$$W \subseteq U = -x + V,$$

logo $x + W \subseteq V$, e portanto

$$(x + W) \cap \ker(\varphi) = \emptyset. \tag{1.3}$$

Veremos que $\varphi(W)$ é limitada. Considere $x \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$, com $|\lambda| \leq 1$, segue da linearidade da φ que

$$\lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x) \in \varphi(W),$$

portanto $\varphi(W)$ é um subconjunto de $\mathbb{K}$ equilibrado. Assim, pelo Lema 1.4, $\varphi(W)$ é limitado ou $\varphi(W) = \mathbb{K}$. Suponhamos que $\varphi(W) = \mathbb{K}$. Neste caso existe $w \in W$ tal que $\varphi(w) = -\varphi(x)$, e daí $\varphi(x + w) = 0$. Por (1.3) sabemos que isso não ocorre, portanto $\varphi(W)$ é limitado. Finalmente provemos que (3) $\Longrightarrow$ (1) Por hipótese existem uma vizinhança da origem W em E e algum $K > 0$ tais que $|\varphi(x)| \leq k$ para todo $x \in W$. Dado $\varepsilon > 0$, se $x \in \frac{\varepsilon}{k}W$ temos que $|\varphi(x)| < \varepsilon$. Como $\frac{\varepsilon}{k}W$ é uma vizinhança da origem resulta que φ é contínua em 0 e pela Proposição 1.18 temos que φ é contínua. □

1.4 Espaços Localmente Convexos

Proposição 1.20. *Seja E um espaço vetorial topológico tal que $E' \neq \{0\}$. Então existe uma vizinhança convexa da origem $V \neq E$.*

Demonstração. Por hipótese existe $\varphi \in E'$ e $x_0 \in E$ tal que $\varphi(x_0) \neq 0$. Note que o conjunto

$$V = |\varphi|^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{|\varphi(x_0)|}{2}\right)\right) = \left\{x \in E : |\varphi(x)| < \frac{|\varphi(x_0)|}{2}\right\},$$

é aberto pois φ é contínua e contém a origem. Além disso, $V \neq E$ já que $x_0 \notin V$. Afirmamos que V é convexo. Para isso, considere $x, y \in V$ e $t \in [0, 1]$, logo

$$\begin{aligned} |\varphi(tx + (1-t)y)| &= |t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)| \\ &\leq t|\varphi(x)| + (1-t)|\varphi(y)| \\ &< t\frac{|\varphi(x_0)|}{2} + (1-t)\frac{|\varphi(x_0)|}{2} \\ &< \frac{|\varphi(x_0)|}{2}. \end{aligned}$$

Portanto $tx + (1-t)y \in V$, donde segue a convexidade de V.

□

Definição 1.10. *Um espaço vetorial topológico E é dito locamente convexo quando possuir uma base de vizinhanças da origem formada por conjuntos convexos.*

Exemplo 1.8. *Espaços normados são localmente convexos, uma vez que as bolas abertas $\{B(0, \varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ formam uma base de vizinhanças convexas da origem.*

Exemplo 1.9. *Seja X um espaço normado. Sabemos que os conjuntos da forma*

$$V_{J,\varepsilon} = \{x \in X : |\varphi_i(x)| < \varepsilon \text{ com } J \text{ finito e } i \in J\}$$

onde $\varepsilon > 0$ e $\varphi_i \in X'$ para cada $i \in J$ são bases de vizinhanças da origem na topologia fraca de X e claramente os conjuntos $V_{J,\varepsilon}$ são convexos. Portanto $(X, \sigma(X, X'))$ é um espaço localmente convexo.

Exemplo 1.10. *Já vimos que ℓ_p é um espaço vetorial topológico metrizável para $p \in (0,1)$. Veremos que ℓ_p não é um espaço localmente convexo. Para cada $r > 0$ afirmamos que a vizinhança da origem $B(0;r) = \{x \in \ell_p : d_p(x,0) < r\}$ não contém vizinhanças convexas da origem. De fato, seja V uma vizinhança convexa da origem tal que $V \subseteq B(0;r)$. Existe então $\varepsilon > 0$ com $B(0;\varepsilon) \subseteq V$. Escolha $0 < \delta < \varepsilon$ e considere a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ dos vetores canônicos em ℓ_p. Assim $d_p(\delta^{\frac{1}{p}} e_n, 0) = \delta < \varepsilon$, daí segue que $\delta^{\frac{1}{p}} e_n \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo V convexo, então*

$$\frac{\delta^{\frac{1}{p}}}{n} \sum_{j=1}^{n} e_j = \frac{\delta^{\frac{1}{p}}}{n} e_1 + \cdots + \frac{\delta^{\frac{1}{p}}}{n} e_n \in V,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Porém,

$$d_p\left(\frac{\delta^{\frac{1}{p}}}{n} \sum_{j=1}^{n} e_j, 0\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\delta^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{n^p} = \delta \frac{n}{n^p} = \delta n^{1-p} \longrightarrow \infty,$$

visto que $0 < p < 1$, isto nos diz que V é ilimitado, o que é um absurdo, uma vez que $V \subseteq B(0;r)$. Concluímos assim que ℓ_p não é um espaço localmente convexo. Em particular, ℓ_p não é um espaço normado.

Proposição 1.21. *Seja $\mathcal{U}_0$ a família de todas as vizinhanças da origem do espaço localmente convexo X. Se $U \in \mathcal{U}_0$ então existe $V_0 \in \mathcal{U}_0$, equilibrada, convexa e fechada, tal que $V_0 \subseteq U$.*

Demonstração. Seja U_1 uma vizinhança da origem fechada com $U_1 \subseteq U$. Sendo X localmente convexo, existe uma vizinhança U_2 convexa contida em U_1. Sabemos que existe uma vizinhança equilibrada W da origem contida em U_2. Estamos na seguinte situação,

$$W \subseteq U_2 \subseteq U_1 \subseteq U. \tag{1.4}$$

Para cada $s \in \mathbb{K}$ com $|s| = 1$, temos

$$sW \subseteq W \text{ e } s^{-1}W \subseteq W.$$

Assim,

$$W = (s^{-1})(sW) \subseteq s^{-1}W \text{ e } W = s(s^{-1}W) \subseteq sW,$$

e portanto

$$sW = W = s^{-1}W$$

para todo escalar s com módulo 1. Em particular,

$$s^{-1}W = W \subseteq U_2,$$

logo $W \subseteq sU_2$. Definamos

$$V = \bigcap_{|s|=1} sU_2,$$

então $W \subseteq V \subseteq U_2$, assim V é uma vizinhança da origem contida em U_2. Pela Proposição 1.5

os conjuntos sU_2 são convexos e assim V é convexa por ser interseção de convexos.

Vamos agora mostrar que V é equilibrada. Seja $t \in \mathbb{K}$ com $|t| \leq 1$. Se $v \in V$, então $v \in sU_2$ para todo escalar s com $|s| = 1$. Logo, para qualquer tal escalar s,

$$tv \in tsU_2 = s_1|t|U_2,$$

em que $s_1 = se^{i\theta}$ e $t = |t|e^{i\theta}$. Vejamos que

$$s_1|t|U_2 \subseteq s_1U_2.$$

Com efeito, se $u \in U_2$, então

$$s_1|t|u = |t|(s_1u) + (1 - |t|)0 \in s_1U_2,$$

uma vez que s_1U_2 é convexo contendo a origem e $s_1u \in s_1U_2$. Portanto $tv \in s_1U_2$. Quando s percorre todos os escalares de módulo 1, s_1 também percorre todos os escalares escalares, pois $|s_1| = |s|$, logo

$$tv \in \bigcap_{|s_1|=1} s_1U_2 = V.$$

Assim, encontramos uma vizinhança convexa e equilibrada de V da origem contida em U_2. Resulta da Proposição 1.5 que $\overline{V}$ é também uma vizinhança convexa e equilibrada da origem. Pondo $V_0 = V$, como U_1 é fechado, da relação de continência em (1.4) temos

$$V_0 \subseteq U_1 \subseteq U.$$

□

Da demonstração do resultado anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.22. *Seja X um espaço vetorial topológico. Se A é um subconjunto equilibrado em X, então $sA = A$ para todo $s \in \mathbb{K}$ com $|s| = 1$.*

Podemos concluir também da Proposição 1.21 que todo espaço localmente convexo admite uma base de vizinhanças formada por conjuntos equilibrados, convexos e fechados.

1.5 Seminormas e convexidade local

Definição 1.11. *Seja X um espaço vetorial. Uma seminorma em X é uma função $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. *$p(x) \geq 0$ para todos $a \in \mathbb{K}$ e $x \in X$;*

2. *$p(ax) = |a|p(x)$ para todos $a \in \mathbb{K}$ e $x \in X$;*

3. *$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para quaisquer $x, y \in X$.*

Seja $x \in X$, então $p(0) = p(0 \cdot x) = 0 \cdot p(x) = 0$ e também do item (3) segue facilmente que

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) \text{ para todos } x, y \in X.$$

Toda norma é uma seminorma. A aplicação $p(x, y) = |x|$ é um exemplo de uma seminorma sobre $\mathbb{R}^2$ que não é uma norma.

Exemplo 1.11. *Sejam X um espaço vetorial e φ um funcional linear em X. Então a aplicação $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $p(x) = |\varphi(x)|$ é uma seminorma em X.*

Seja $\mathcal{P}$ uma família de seminormas no espaço vetorial X. Dados $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $p_1, p_2, \cdots, p_n \in \mathcal{P}$, definimos

$$V(x_0, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon) = \{x \in X : p_i(x - x_0) < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\}.$$

Para cada $x \in X$, chamamos de $\mathcal{V}_x$ a coleção de todos os subconjuntos de X da forma $V(x, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon)$.

Proposição 1.23. *Sejam $p_1, \cdots, p_n$ seminormas no espaço vetorial X, $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$. Então*

$$V(x_0, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon) = x_0 + V(0, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon).$$

Demonstração. Dado $x \in V(x_0, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon)$, basta ver que $x = x_0 + (x - x_0)$ onde $x - x_0 \in V(x_0, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon)$, pois $p_i(x - x_0) < \varepsilon$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Para a inclusão contrária, suponha que $x \in x_0 + V(0, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon)$, existe assim $y \in V(0, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon)$ de modo que $x = x_0 + y$, logo $x - x_0 = y$ ou melhor, $x \in V(x_0, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon)$.

□

Antes de iniciar o próximo teorema, precisaremos de um resultado básico em topologia geral sobre como construir topologias a partir de coleções de conjuntos satisfazendo algumas condições. A demonstração da proposição a seguir pode ser encontrada em [23].

Proposição 1.24. *Seja X um espaço topológico e, para cada $x \in X$, seja $\mathcal{V}_x$ uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo:*

1. *Se $V \in \mathcal{V}_x$, então $x \in V$;*
2. *Se $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$, então existe $V_3 \in \mathcal{V}_x$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$;*
3. *Se $V \in \mathcal{V}_x$, então existe $V_0 \in \mathcal{V}_x$ tal que se $y \in p_0$, então existe $W \in \mathcal{V}_y$ com $W \subseteq V$.*

Então existe uma topologia em X na qual $\mathcal{V}_x$ é uma base de vizinhanças para cada $x \in X$.

Teorema 1.25. *Seja $\mathcal{P}$ uma família de seminormas no espaço vetorial X.*

1. *Existe uma topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ em X que, para cada $x \in X$, admite $\mathcal{V}_x$ como base de vizinhanças de x, isto é,*

$$\tau_{\mathcal{P}} = \{G \subseteq X : \text{ para cada } x \in G \text{ exite } U \in \mathcal{V}_x \text{ tal que } U \subseteq G\}.$$

2. $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ *é um espaço localmente convexo.*

3. *Cada seminorma* $p \in \mathcal{P}$ *é* $\tau_{\mathcal{P}}$*-contínua.*

4. $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ *é Hausdorff se e somente se para cada* $x \neq 0$ *em* X *existe uma seminorma* $p \in \mathcal{P}$ *tal que* $p(x) \neq 0$.

A topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ *será chamada de topologia determinada pela família de seminormas* $\mathcal{P}$.

Demonstração. (1) Dado $V = V(x_0, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon)$ é claro que $x_0 \in V$, pois $p_i(x_0 - x_0) = 0$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Considere $V_1 = V(x_0, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon_1), V_2 = V(x_0, \beta_1, \cdots, \beta_m; \varepsilon_2) \in \mathcal{V}_x$, então $V_3 = V(x_0, p_1, \cdots, p_n, \beta_1, \cdots, \beta_m; \varepsilon)$, onde $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ é tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$. O resultado segue diretamente da proposição anterior.

(2) Primeiramente vejamos que $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ é um espaço vetorial topológico. Para provar a continuidade da adição $AD : X \times X \longrightarrow X$, sejam $(x_0, y_0) \in X \times X$ e W uma vizinhança básica de $x_0 + y_0$, logo existem $p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{P}$ e $\varepsilon > 0$ tais que $W = V(x_0 + y_0, p_1, \cdots, p_n, \varepsilon)$. Então $V = V(0, p_1, \cdots, p_n, \frac{\varepsilon}{2})$ é uma vizinhança da origem em X e pela Proposição 1.23 $x_0 + V$ e $y_0 + V$ são vizinhanças de x_0 e y_0, respectivamente. Como $V + V \subseteq U$, então

$$\begin{aligned} AD((x_0 + V) \times (y_0 + V)) &= x_0 + V + y_0 + V = x_0 + y_0 + V + V \\ &\subseteq x_0 + y_0 + U = W, \end{aligned}$$

provando asssim a continuidade de adição.

Vamos verificar que $M : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$ é contínua. Para isso considere $(a_0, x_0) \in \mathbb{K} \times X$ e W uma vizinhança de $a_0 x_0$, pela Proposição 1.23, existe uma vizinhança da origem W_0 tal que $a_0 x_0 + W_0 = W$, em que $W_0 = V(0, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon)$. Para cada $j = 1, \cdots, n$ defina

$$\eta_j = \frac{\varepsilon}{2(p_j(x_0) + 1)}, \quad \eta = \min\{\eta_j, j = 1, \cdots, n\},$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(|a_0| + \eta)}, \quad A = \{a \in \mathbb{K} : |a| < \eta\} \text{ e } V = V(0, p_1, \cdots, p_n; \delta).$$

Como A é uma vizinhança da origem em $\mathbb{K}$, então $(a_0 + A) \times (x_0 + V)$ é um vizinhança de (a_0, x_0). Assim, basta verificar que

$$M((a_0 + A) \times (x_0 + V)) \subseteq W = a_0 x_0 + W_0.$$

Dados $j \in \{1, \cdots, n\}$, $a \in a_0 + A$ e $x \in x_0 + V$,

$$\begin{aligned} p_j(ax - a_0 x_0) &= p_j(ax - ax_0 + ax_0 - a_0 x_0) \leq p_j(ax - ax_0) + p_j(ax_0 - a_0 x_0) \\ &= |a| p_j(x - x_0) + |a - a_0| p_j(x_0) \leq |a|\delta + \eta p_j(x_0) \\ &\leq |a| \frac{\varepsilon}{2(|a_0| + \eta)} + \frac{\varepsilon}{2(p_j(x_0) + 1)} p_j(x_0) \\ &\leq (|a_0| + \eta) \frac{\varepsilon}{2(|a_0| + \eta)} + \frac{\varepsilon}{2(p_j(x_0) + 1)} p_j(x_0) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

assim $(ax - a_0x_0) \in W_0$ e como $ax = a_0x_0 + (ax - a_0x_0)$, então $ax \in W$.

Além disso, os conjuntos da forma $V(x, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon)$ são convexos. Então $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ é um espaço localmente convexo.

(3). Sejam $p \in \mathcal{P}$, $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$, considere o aberto $A = (p(x_0) - \varepsilon, p(x_0) + \varepsilon)$, tomando $V = V(x_0, p, \varepsilon)$, para cada $x \in V$, temos

$$|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0) < \varepsilon$$

assim $p(V) \subseteq A$, provando assim que p é contínuo.

(4) Suponha que X é um espaço de Hausdorff. Seja $x \in X$, com $x \neq 0$ então existe uma vizinhança básica $V = V(0, p_1, \cdots, p_n, \varepsilon)$ da origem que não contém x. Assim para algum $j \in \{1, \cdots, n\}$ temos

$$p_j(x) = p_j(x - 0) \geq \varepsilon > 0.$$

Reciprocamente, sejam $x, y \in X$, com $x \neq y$, então $x - y \neq 0$ assim existe uma seminorma $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x - y) > 0$. Portanto os conjuntos $V = V(x, p, \frac{p(x-y)}{2})$ e $W = V(y, p; \frac{p(x-y)}{2})$ são vizinhanças x e de y, respectivamente, com $V \cap W = \emptyset$. Portanto, $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ é um espaço de Hausdorff.

□

Exemplo 1.12. *Seja X um espaço normado, então a topologia fraca $\sigma(X, X')$ é gerada pela família de seminormas $p_\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $p_\varphi(x) = |\varphi(x)|$.*

Exemplo 1.13. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e seja $k \in \mathbb{K}$. Denotamos por $C^k(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que são de classse C^k. A topologia compacto-aberta de ordem k em $C^k(\Omega)$ é a topologia localmente convexa definida pela família de seminormas $p_K : C^k(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$p_K(f) = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \right|,$$

onde $K \subseteq \Omega$ compacto, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in N_0^n$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n$. Os conjuntos

$$V(0, p_K; \varepsilon) = U_{K,\varepsilon} = \left\{ f \in C^k(\Omega) : \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \right| < \varepsilon \right\},$$

com K compacto e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças da origem convexas e equilibradas.

Exemplo 1.14. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$, denotaremos por $H(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções holomorfas $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. A topologia compacto-aberto em $H(\Omega)$ é a topologia localmente convexa definida pela família de seminormas $p_K : H(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por*

$$p_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|,$$

em que $K \subseteq \Omega$ compacto. Os conjuntos,

$$V(0, p_K; \varepsilon) = U_{K,\varepsilon} = \left\{ f \in H(\Omega) : \sup_{z \in K} |f(z)| < \varepsilon \right\}$$

com K compacto e $\varepsilon > 0$ formam uma base de vizinhanças da origem que são convexas e equilibradas.

Proposição 1.26. *Sejam $\mathcal{P}$ uma família de seminormas que gera a topologia X e $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma rede em X. Então*

1. *$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge para zero em X se e somente se $p(x_\alpha) \longrightarrow 0$ para todo $p \in \mathcal{P}$.*
2. *Se $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ é uma rede de Cauchy então $(p(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ é também uma rede de Cauchy para todo $p \in \mathcal{P}$.*

Demonstração. (1) Se $p \in \mathcal{P}$ então p é $\tau_{\mathcal{P}}-$contínua, assim $p(x_\alpha) \longrightarrow 0$ quando $x_\alpha \longrightarrow 0$. Suponhamos agora que $p(x_\alpha) \longrightarrow 0$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Seja U uma vizinhança da origem em X, digamos $U = V(0, p_1, \cdots, p_n; \varepsilon)$ para alguns $p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{P}$ e $\varepsilon > 0$, assim para cada $i = 1, \cdots, n$ existe $\alpha_i \in A$ tal que

$$\alpha > \alpha_i \Longrightarrow |p_i(x_\alpha)| < \varepsilon.$$

Considerando $\alpha_0 \in A$ com $\alpha_0 > \alpha_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$, obtemos

$$\alpha > \alpha_0 \Longrightarrow |p_i(x_\alpha)| < \varepsilon \text{ para todo } i.$$

logo $x_\alpha \in U$ sempre que $\alpha > \alpha_0$.

(2) Análogo ao item anterior.

□

Observação 1.6. *Não é válido a recíproca do item* (2) *na proposição anterior. Considere por exemplo, X um espaço vetorial normado munido com a topologia fraca e $x_0 \neq 0$ em X. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência definida por $x_n = (-1)^n x_0$, então $p_\varphi(x_n) = |\varphi(x_0)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo a sequência $p_\varphi(x_n) \longrightarrow p_\varphi(x_0)$ assim a sequência $(p_\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy. Porém, como $x_0 \neq 0$, então existe $\varphi \in X^{'}$ com $\varphi(x_0) \neq 0$, portanto dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos*

$$|\varphi(x_n - x_m)| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| = |\varphi(x_0)|$$

não pertencendo assim a vizinhança da origem $U = V\left(0, \varphi; \frac{|\varphi(x_0)|}{2}\right)$, ou seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não é uma sequência de Cauchy.

Seja p uma seminorma em um espaço vetorial X. Veremos a seguir que o conjunto $\{x \in X : p(x) \leq 1\}$ é convexo, equilibrado e absorvente. Por outro lado, se A é um conjunto absorvente, definamos o funcional de Minkowski em A por

$$p_A : X \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}. \tag{1.5}$$

Como A é absorvente então p_A está bem definida, isto é, $p_A(x) < \infty$ para todo $x \in X$.

O nosso objetivo é mostrar que toda seminorma é um funcional de Minkowski para algum conjunto convexo, equilibrado e absorvente. Como consequência disso, provaremos que cada espaço localmente convexo tem sua topologia gerada por uma família de seminormas.

Proposição 1.27. *Seja $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma no espaço vetorial X. Então o conjunto $A = \{x \in X : p(x) < 1\}$ é convexo, equilibrado, absorvente e $p = p_A$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| \leq 1$. Se $x \in A$ então $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \leq p(x) < 1$, assim A é equilibrado. Sejam $x, y \in A$ e $t \in [0,1]$ então $p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y) < 1$, logo A é convexo. Por fim, se $x \in X$ e $s > p(x)$, então $p\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s}p(x) < 1$, assim $\frac{x}{s} \in A$, ou melhor $x \in sA$ para todo $s > p(x)$. Portanto A é absorvente.

Por fim, sendo A absorvente, podemos definir o funcional de Minkowski em A e assim $p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} = \inf\{\lambda > 0 : x\lambda^{-1} \in A\} = \inf\{\lambda > 0 : p(x) < t\} = p(x)$ para todo $x \in X$. □

Proposição 1.28. *Seja A um subconjunto convexo e absorvente de um espaço vetorial X.*

1. *$p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ para todos $x, y \in X$.*
2. *$p_A(tx) = tp_A(x)$ para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$.*
3. *Se A é equilibrado, então p_A é uma seminorma.*
4. *Se $B = \{x \in X : p_A(x) < 1\}$ e $C = \{x \in X : p_A(x) \leq 1\}$, então $B \subseteq A \subseteq C$.*

Demonstração. (1) Dados $x, y \in X$ e sejam $\lambda, \mu > 0$ tais que $x \in \lambda A$ e $y \in \mu A$ então $x + y \in \lambda A + \mu A$. Como A é convexo , $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \leq 1$, $\frac{\mu}{\lambda+\mu} \leq 1$ e $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} = 1$,

$$x + y \in (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda A + \mu A}{\lambda + \mu}\right) = (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda A}{\lambda + \mu} + \frac{\mu A}{\lambda + \mu}\right) \subseteq (\lambda + \mu)A.$$

Portanto $p_A(x + y) \leq \lambda + \mu$ e assim $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$.

(2) Se $t > 0$ então $\frac{tx}{s} \in A$ se e somente se $\frac{x}{s/t} \in A$ logo,

$$s \in \{\lambda > 0 : tx \in \lambda A\} \Longleftrightarrow s/t \in \{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}.$$

Deduzimos assim que $p_A(tx) = tp_A(x)$.

(3) Suponhamos que A seja equilibrado. Dados $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in X$, escrevamos $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, como A é equilibrado, então $e^{i\theta}A = A$, uma vez que $|e^{i\theta}| = 1$. Então $p_A(e^{i\theta}x) = p_A(x)$, usando o item (2) obtemos

$$p_A(\alpha x) = p_A(|\alpha|e^{i\theta}x) = |\alpha| p_A(e^{i\theta}x) = |\alpha| p_A(x),$$

logo p_A é uma seminorma em X.

(4) É imediato que se $x \in A$ então $p_A(x) \leq 1$, logo $x \in C$. Suponhamos agora que $x \in B$, então existe $\lambda > 0$ tal que $p_A(x) \leq \lambda < 1$ e $x \in \lambda A$. Então $x \in A$ pois A é equilibrado. Logo $B \subseteq A \subseteq C$.

□

Teorema 1.29. *Seja B_0 uma base de vizinhanças convexas e equilibradas da origem no espaço localmente convexo X. Então a topologia de X é gerada pela família de seminormas $\mathcal{P} = \{p_V\}_{V \in B_0}$.*

Demonstração. Como cada vizinhança $V \in B_0$ é absorvente, então pela proposição anterior, o funcional de Minkowski p_V em V é uma seminorma e,

$$\{x \in X : p(x) < 1\} \subseteq V \subseteq \{x \in X : p(x) \leq 1\}.$$

Disso resulta que, para todo $V \in B_0$ e $\varepsilon > 0$,

$$\{x \in X : p_V(x) < \varepsilon\} \subseteq \varepsilon V \subseteq \{x \in X : p_V(x) < 2\varepsilon\}. \tag{1.6}$$

Basta mostrar que os conjuntos da forma $\{x \in X : p_V(x) < \varepsilon\}$ com $V \in B_0$ e $\varepsilon > 0$ formam uma base de vizinhanças da origem na topologia $\tau_{\mathcal{P}}$, pois sendo isso verdade a equação 1.6 nos mostra que todo aberto na topologia de X é um aberto na topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ e vice e versa. Como $\{x \in X : p_V(x) < \varepsilon\} = p_V^{-1}(-\infty, \varepsilon)$ e pelo teorema 1.25 cada p_V é $\tau_{\mathcal{P}}-$contínua, então os conjuntos dessa forma são vizinhanças abertas da origem. Seja $0 \in U \in \tau_{\mathcal{P}}$, existem $\varepsilon > 0$, $V_1, \cdots, V_n \in B_0$ tais que $V(0, p_{V_1}, \cdots, p_{V_n}; \varepsilon) \subseteq U$. Sendo B_0 uma base de vizinhanças da origem, existe $V \in B_0$ tal que $V \subseteq V_1 \cap \cdots \cap V_n$. Da definição do funcional de Minkowski resulta que $P_{V_j} \leq p_V$ para todo $j = 1, \cdots, n$, assim

$$\{x \in X : p_V(x) < \varepsilon\} \subseteq V(0, p_{V_1}, \cdots, p_{V_n}; \varepsilon) \subseteq U,$$

concluindo assim a demonstração.

□

Combinando os Teoremas 1.29 e 1.25 obtemos o seguinte corolário

Corolário 1.30. *Um espaço vetorial topológico é um espaço localmente convexo se, e somente se, sua topologia é gerada por uma família de seminormas.*

Proposição 1.31. *Espaço vetorial topológico isomorfo a um espaço localmente convexo é também localmente convexo.*

Demonstração. Sejam X um espaço vetorial topológico, Y um espaço localmente convexo e $T : Y \longmapsto X$ um isomorfismo. Basta notar que se $(A_i)_{i \in I}$ é uma base de vizinhança convexa da origem em Y então pelo item (5) da Proposição 1.5 a coleção $(T(A_i))_{i \in I}$ é uma base de vizinhança convexa da origem em X.

□

Proposição 1.32. *Sejam X um espaço vetorial topológico sem vizinhanças convexas próprias da origem e Y um espaço localmente convexo de Hausdorff. Então o único operador linear contínuo de X em Y é o operador nulo.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U}$ uma base de vizinhanças convexas e equilibradas da origem de Y. Como Y é Hausdorff então $\{0\} = \bigcap_{A\in\mathcal{U}} A$. Se $T : X \longrightarrow Y$ é contínuo, então $T^{-1}(A)$ é uma vizinhança da origem convexa em X para cada $A \in \mathcal{U}$, logo por hipótese devemos ter $T^{-1}(A) = X$. Assim,

$$Ker(T) = T^{-1}(\{0\}) = T^{-1}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{U}} A\right) = \bigcap_{A\in\mathcal{U}} T^{-1}(A) = X,$$

provando assim que T é o operador nulo. □

Agora concentramos nossa atenção na teoria dos espaços L_p com $0 < p < 1$. Ao leitor não habituado com conceitos e resultados na teoria da medida e integração, indicamos a referência [4].

Exemplo 1.15. *Sejam $0 < p < 1$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Definamos por $L_p(X, \Sigma, \mu)$ como o conjunto das funções mensuráveis $f : (X, \Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$, com a convenção usual de identificar funções que são iguais $\mu-$quase sempre. A desigualdade 1.1 implica facilmente que $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de funções. A expressão*

$$d(f, g) = \int_X |f - g|^p d\mu$$

define uma métrica em $L_p(X, \Sigma, \mu)$. Vejamos que $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço vetorial topológico com a topologia induzida pela métrica d. Com efeito, sejam $f, g \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências em $L_p(X, \Sigma, \mu)$ com $f_n \longrightarrow f$ e $g_n \longrightarrow g$. Então

$$\begin{aligned} d(f_n + g_n, f + g) &= \int_X |f_n + g_n - f - g|^p d\mu \\ &\leq \int_X |f_n - f|^p d\mu + \int_X |g_n - g|^p d\mu \\ &= d(f_n, f) + d(g_n, g) \longrightarrow 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto a soma é contínua, e de maneira análoga vê-se que a multiplicação por escalar também é contínua. Logo $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço vetorial topológico. por fim, iremos verificar que esse espaço é completo. Para isso seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $L_p(X, \Sigma, \mu)$, então para cada $\varepsilon > 0$ temos

$$\begin{aligned} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\} &= \int_{\{x\in X:|f_n(x)-f_m(x)|>\varepsilon\}} 1 d\mu \\ &\leq \varepsilon^{-p} \int_{\{x\in X:|f_n(x)-f_m(x)|>\varepsilon\}} |f_n - f_m|^p d\mu \\ &\leq \varepsilon^{-p} \int_X |f_n - f_m|^p d\mu \\ &= \varepsilon^{-p} d(f_n, f_m). \end{aligned}$$

Assim a sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em medida. Logo existe uma função mensurável f para a qual $f_n \longrightarrow f$ em medida. Pela convergência em medida, existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ que

converge para f $\mu-$quase sempre. Dado $\varepsilon > 0$ considere $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_m, f_n) < \varepsilon$ sempre que $m, n \geq N_0$, então

$$\begin{aligned}\int_X |f_n - f|^p d\mu &= \int_X \lim_{j\to\infty} |f_{n_j}(x) - f(x)|^p d\mu \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \inf \int_X |f_{n_j}(x) - f(x)|^p d\mu \\ &= \lim_{j\to\infty} \inf d(f_{n_j}, f) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto $f = (f - f_{N_0}) + f_{N_0} \in L_p(X, \Sigma, \mu)$.

Encaminharemos no sentido de verificar que o espaço $L_p[0,1]$ não é localmente convexo. Antes disso precisaremos de alguns resultados e definições.

Definição 1.12. *Dizemos que uma função $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua, quando para cada $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, para toda sequência de intervalos disjuntos $\{(\alpha_i, \beta_i) : 1 \leq i \leq n\}$ de modo que $\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, tem-se $\sum_{i=1}^{n} |F(\beta_i) - F(\alpha_i)| < \varepsilon$.*

Obviamente toda função absolutamente contínua é uniformemente contínua, basta usar $n = 1$ na definição.

Teorema 1.33. *(Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Lebesgue). Seja $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *F é absolutamente contínua;*
2. *$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)$ para algum $f \in L_1[a,b]$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [15].

Proposição 1.34. *Seja $0 < p < 1$. Considere o espaço $L_p[0,1]$ como o conjunto das funções, tais que $\int_{[0,1]} |f|^p d_m < \infty$, onde m é a medida de Lebesgue em $[0,1]$. Então $L_p[0,1]$ não é localmente convexo.*

Demonstração. Vejamos que não existem vizinhanças convexas próprias da origem em $L_p[0,1]$. De fato, seja U uma vizinhança convexa da origem. Assim existe $\varepsilon > 0$ tal que,

$$B(0,\varepsilon) = \left\{ f \in L_p[0,1] : d(f,0) = \int_X |f|^p < \varepsilon \right\} \subseteq U.$$

Como $0 < p < 1$, então $1 - p > 0$, logo dado $f \in L_p[0,1]$, $f \neq 0$, podemos considerar $n \in \mathbb{N}$ de modo que $d(f,0) < n^{1-p} \cdot \varepsilon$. Definamos assim a função

$$F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; F(t) = \int_{[0,t)} |f|^p d_m.$$

Logo,

$$F(1) - F(0) = F(1) = \int_{[0,1)} |f|^p d_m \text{ em que } |f|^p \in L_1[0,1].$$

Assim do Teorema 1.33 segue que F é absolutamente contínua, em particular é contínua. Como a função F é monótona não-decrescente e não nula, pois $f \neq 0$ então $F(1) > 0$. Logo $F(0) = 0 < \dfrac{n-1}{n} \cdot F(1) < F(1)$. Do Teorema do Valor Intermediário podemos tomar $0 < t_{n-1} < t_n := 1$ tal que $F(t_{n-1}) = \dfrac{n-1}{n} \cdot F(1)$. Assim,

$$F(t_n) - F(t_{n-1}) = F(1) - \frac{n-1}{n} \cdot F(1) = \frac{1}{n}F(1).$$

E novamente, como $F(0) = 0 < \dfrac{n-2}{n} \cdot F(1) < \dfrac{n-1}{n} \cdot F(1) = F(t_{n-1})$, pelo Teorema do Valor Intermediário existe $0 < t_{n-2} < t_{n-1}$ tal que $F(t_{n-2}) = \dfrac{n-2}{n} \cdot F(1)$. Assim,

$$F(t_{n-1}) - F(t_{n-2}) = \frac{n-1}{n} \cdot F(1) - \frac{n-2}{n} \cdot F(1) = \frac{1}{n}F(1).$$

Chamando $t_0 = 0$, após n passos teremos construído uma partição $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ de $[0,1]$ tal que

$$\int_{[t_j, t_{j-1})} |f|^p d_m = F(t_j) - F(t_{j-1}) = \frac{1}{n}F(1) = \frac{1}{n}\int_{[0,1]} |f|^p d_m,$$

para todo $j = 1, \cdots, n$. Para cada $j = 1, \cdots, n$ considere a função característica $\mathcal{X}_{[t_{j-1}, t_j)} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\mathcal{X}_{[t_{j-1}, t_j)}(t) = 1$ se $t \in [t_{j-1}, t_j]$ e vale zero caso contrário. Definamos a função $f_j \in L_p[0,1]$ dada por

$$f_j(t) = nf(t)\mathcal{X}_{[t_{j-1}, t_j)}(t).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(f_j, 0) &= \int_{[0,1]} |nf\mathcal{X}_{[t_{j-1}, t_j)}|^p d_m \\ &= n^p \int_{[t_j, t_{j-1})} |f|^p d_m \\ &= n^p \cdot \frac{1}{n} \int_{[0,1]} |f|^p d_m \\ &= n^{p-1} \int_{[0,1]} |f|^p d_m \\ &= n^{p-1} d(f, 0) < \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \cdots, n$. Assim cada $f_j \in B(0, \varepsilon) \subseteq U$. Como

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} f_j = \frac{1}{n} f_1 + \cdots + \frac{1}{n} f_n = f\mathcal{X}_{[t_0, t_1)} + \cdots + f\mathcal{X}_{[t_{n-1}, t_n)} = f,$$

e U é convexo, segue assim que $f \in U$. Como f foi escolhido arbitrariamente, temos que $U = L_p[0,1]$. Provamos então que a única vizinhança convexa da origem é o próprio $L_p[0,1]$. Portanto $L_p[0,1]$ não é localmente convexo.

□

Corolário 1.35. *Se $0 < p < 1$. Então $L_p[0,1]' = \{0\}$*

Demonstração. Com efeito, se $L_p[0,1]' \neq \{0\}$, pela Proposição 1.20, existiria uma vizinhança da origem convexa $U \neq L_p[0,1]$. Contradizendo assim o teorema anterior. □

Mais geralmente, pelas Proposições 1.32 e 1.34 temos o seguinte resultado.

Corolário 1.36. *Para $0 < p < 1$, o único operador linear contínuo de $L_p[0,1]$ em qualquer espaço localmente convexo de Hausdorff é o operador nulo.*

Para mais detalhes sobre o espaço $L_p(X, \Sigma, \mu)$ com $0 < p < 1$, sugerimos as referências [11] e [13].

1.6 Teoremas de Hahn-Banach

Iniciaremos essa sessão enunciando os clássicos Teoremas de Hahn-Banach no caso real e complexo. A demonstração desses resultados podem ser encontradas em [9].

Teorema 1.37. *(Teorema de Hahn-Banach-caso real) Sejam X um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = ap(x) \text{ para todo } a > 0 \text{ e todo } x \in X$$

e

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in X.$$

Sejam M um subespaço vetorial de X e $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função linear tal que $|g(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Então existe uma função linear $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_M = g$ e $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.38. *(Teorema de Hahn-Banach-caso complexo) Sejam X um espaço vetorial sobre um corpo reais e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = |a|p(x) \text{ para todo } a \in \mathbb{K} \text{ e todo } x \in X$$

e

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in X.$$

Sejam M um subespaço vetorial de X e $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função linear tal que $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Então existe uma função linear $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_M = g$ e $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.39. *Sejam M um subespaço de um espaço vetorial X, p uma seminorma em M e $\varphi_0 : M \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear tal que $|\varphi_0(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$. Então existe um funcional linear $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$ que estende φ_0 e $|\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

Lema 1.40. *Seja X um espaço localmente convexo e $\mathcal{P}$ uma família de seminormas que gera a sua topologia. Uma aplicação linear $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínua se e somente se existem $p \in \mathcal{P}$ e $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq Mp(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Suponhamos que existem $p \in \mathcal{P}$ e $M > 0$ como no enunciado. Sendo f linear, para provar a continuidade de f é suficiente ver que f é contínua na origem. Com isso, seja U uma vizinhança da origem em $f(0) = 0$, digamos $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$. Assim tomando $V = V(0, p, \frac{\varepsilon}{M})$ e $x \in V$ então

$$|f(x)| \leq Mp(x) \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

logo $f(V) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Reciprocamente, suponhamos que f é contínua. Então $f^{-1}((-1,1))$ é uma vizinhança da origem em X, logo existem $p \in \mathcal{P}$ e $\delta > 0$ tal que $V = \{x \in X : p(x) < \delta\} \subseteq f^{-1}((-1,1))$. De outra forma, se $y \in X$ então $|f(y)| < 1$ sempre que $p(y) < \delta$. Sejam então $x \in X$ e $\alpha > 0$. Então o vetor $y = \dfrac{\delta}{\alpha + p(x)}x$ é tal que $p(y) < \delta$ e assim $\left|f\left(\dfrac{\delta}{\alpha + p(x)}x\right)\right| < 1$, fazendo $\alpha \longrightarrow 0^+$ e $M = \dfrac{1}{\delta}$ temos $|f(x)| \leq Mp(x)$ para todo $x \in X$. □

Teorema 1.41. *(Teorema de Hahn-Banach para espaços localmente convexos) Sejam X um espaço localmente convexo e M um subespaço vetorial de E. Então todo funcional contínuo $\varphi_0 \in M'$ pode ser estendido a X' preservando a linearidade e continuidade, isto é, existe $\varphi \in X'$ tal que $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ a família de seminormas que gera a topologia em X, como φ_0 é contínua em M, então pelo Lema 1.40 existe $p \in \mathcal{P}$ e $M > 0$ tal que $|\varphi_0(x)| \leq Mp(x)$ para todo $x \in M$. Assim, pelo Teorema 1.39 existe um funcional linear $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$ que estende φ_0 e $|\varphi(x)| \leq Mp(x)$ para todo $x \in X$, e novamente pelo Lema 1.40, φ é contínuo.

□

Lema 1.42. *Todo funcional linear não constante em um espaço vetorial topológico é aberto.*

Demonstração. Sejam X um espaço vetorial topológico e φ um funcional linear não constante, então $\varphi \neq 0$. Considere U uma vizinhança em X e $x_0 \in U$ fixo. Seja $\alpha = \varphi(x_0)$, como $\varphi \neq 0$ existe $x_1 \in X$ tal que $\varphi(x_1) = 1$. Sendo X um espaço vetorial topológico podemos considerar $\delta > 0$ de tal forma que $x_0 + tx_1 \in U$ quando $|t| < \delta$. Então temos

$$B(\alpha, \delta) := \{x \in \mathbb{K} : |x - \alpha| < \delta\} \subseteq \varphi(U).$$

De fato, se $|x - \alpha| < \delta$ segue que $x_0 + (x - \alpha)x_1 \in U$ e assim $\varphi(x_0 + (x - \alpha)x_1) = x$. Portanto $\varphi(U)$ é um aberto em $\mathbb{K}$.

□

Teorema 1.43. *Sejam X um espaço vetorial topológico e $A, B \subseteq X$ subconjuntos disjuntos, convexos e não vazios. Então*

1. *Se A é um aberto, existem $f \in X'$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que*

$$Ref(x) < \gamma \leq Ref(y) \text{ para todo } x \in A \text{ e todo } y \in B.$$

2. Se A é compacto, B fechado e X localmente convexo, existem $f \in X'$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$Ref(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < Ref(y) \text{ para todo } x \in A \text{ e todo } y \in B.$$

Demonstração. (1) Sejam $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$. Considere $x_0 = b_0 - a_0$ e $C = A - B + x_0$. Pela Observação 1.2 C é aberto e $0 \in C$. Portanto C é uma vizinhança aberta, em particular absorvente e convexa da origem. Seja $p_C : C \longrightarrow \mathbb{R}$ o fucional de Minkowski de C. Então p_C é uma seminorma tal que $C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}$. Como $A \cap B = \emptyset$, então $x_0 \notin C$, logo $p(x_0) \geq 1$. Considere a aplicação $g : span\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(tx_0) = t$. Assim, obtemos $g(tx_0) = t \leq tp_C(x_0) = p_C(tx_0)$ se $t > 0$ e $g(tx_0) = t < 0 < p_C(tx_0)$ se $t < 0$, logo $g(tx_0) \leq p_C(tx_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 1.37 existe um funcional linear $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende g e $f(x) \leq p_C(x)$ para todo $x \in X$. Em particular, $f(x) \leq 1$ para todo $x \in C$ e também, $f(x) \geq 1$ para todo $x \in -C$. Logo $|f| \leq 1$ na vizinhança da origem $C \cap (-C)$, logo pelo Teorema 1.19 segue que $f \in X'$. Sejam agora $a \in A$ e $b \in B$. Como $f(x_0) = g(x_0) = 1$, temos $f(a) - f(b) + 1 = f(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) < 1$ uma vez que $a - b + x_0 \in C$, assim $f(a) < f(b)$. Como A e B são convexos então $f(A)$ e $f(B)$ são subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$, isto é, intervalos, com $f(A)$ a esquerda de $f(B)$. Como f é não constante, do Lema 1.42 que f é aberta, assim $f(A)$ é um conjunto aberto. Tomando $\gamma = \sup f(A)$ obtemos

$$f(x) < \gamma \leq f(y) \text{ para todo } x \in A \text{ e todo } y \in B.$$

(2) Sejam A compacto, B fechado e X localmente convexo. Dado $x \in A$, então $x \notin \overline{B}$, logo existe uma vizinhança da origem V_x em X tal que $(x + V_x) \cap B = \emptyset$. Considere $U_x \in \mathcal{U}_0(X)$, convexa com $U_x + U_x \subseteq V_x$, assim

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} (x + U_x)$$

sendo A compacto, existe um número finito de pontos $x_1, \cdots, x_n \in A$ de modo que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U_{x_i})$. Seja $V = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$, então V é um aberto contendo a origem e $(A + V) \cap B = \emptyset$, pois se $x \in A + V$, então $x \in x_i + U_{x_i} + V$ para algum $i = 1, \cdots, n.$, logo $x \in x_i + U_{x_i} + U_{x_i} \subseteq x_i + V_{x_i}$, assim $x \notin B$.

Como A é convexo, temos que $A + V$ é aberto e convexo, uma vez que V é aberto e cada U_x é convexo. Pelo item (1) existe um funcional $f \in X'$ tal que $f(A+V)$ e $f(B)$ são disjuntos, com $f(A+V)$ um intervalo aberto a esquerda de $f(B)$. Como $f(A)$ é compacto e $f(A) \subseteq f(A+V)$, existem $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < f(y) \text{ para todo } x \in A \text{ e todo } y \in B.$$

□

Corolário 1.44. *Seja X um espaço localmente convexo, então X' separa pontos de X, isto é, dados $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe $f \in X'$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Demonstração. Basta usar o item (2) do teorema anterior com $A = \{x\}$ e $B = \{y\}$.

□

Corolário 1.45. *Seja X um espaço localmente convexo e M um subespaço fechado de X. Se $x_0 \in X - M$, então existe um funcional linear $f \in X'$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in M$ e $f(x_0) = 1$.*

Demonstração. Sejam $A = \{x_0\}$ e $B = \{M\}$, então pelo item (2) do Teorema 1.43 existem $f \in X', \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0) < \gamma_1 < \gamma_2 < f(x) \text{ para todo } x \in M.$$

Portanto $f(x_0) \neq f(x)$ para todo $x \in M$. Assim $f(M)$ é um subespaço próprio de $\mathbb{K}$, logo $f(M) = \{0\}$ e com isso $f(x_0) \neq 0$. Definindo se necessário $\tilde{f} = \dfrac{f}{f(x_0)}$ obtemos o funcional desejado. □

1.7 Envoltória Convexa

Definição 1.13. *Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X. Definimos a envoltória convexa de A, denotado por $conv(A)$ como sendo a interseção de todos os subconjuntos convexos de X que contém A.*

Como interseção de conjuntos convexos é convexo, segue imediatamente que $conv(A)$ é sempre um conjunto convexo.

Observação 1.7. *Suponha C um conjunto convexo de um espaço vetorial X. Sejam $x_1, x_2, x_3 \in C$ e $a_1, a_2, , a_3$ números reais positivos tais que $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$, então escrevendo*

$$\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = (a_1 + a_2)\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}x_1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2}x_2\right) + a_3 x_3$$

segue que $\sum_{i=1}^{3} a_i x_i \in C$, e procedendo esse argumento por indução, podemos provar que se C é um conjunto convexo então $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in C$ para quaisquer $x_1, x_2, \cdots, x_n \in C$ e $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$, satisfazendo $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. E reciprocamente, se um conjunto satisfaz essa propriedade claramente ele é convexo. Demonstramos assim a seguinte caracterização das envoltórias convexas.

Proposição 1.46. *Seja X um espaço vetorial, para qualquer $A \subseteq X$ temos*

$$conv(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_i x_i : \sum_{j=1}^{n} a_i = 1, \text{ com } a_i \geq 0, x_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Proposição 1.47. *Se A é um conjunto equilibrado em X, então $conv(A)$ também o é.*

Demonstração. Com efeito, dados $z = \sum_{j=1}^{n} a_i x_i \in con(A)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, com $|\lambda| \leq 1$ então,

$$\begin{aligned} \lambda z &= \lambda \sum_{j=1}^{n} a_i x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda a_i x_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_i(\lambda x_i) \in conv(A) \end{aligned}$$

pois A é equilibrado, portanto $conv(A)$ é equilibrado. □

Proposição 1.48. *Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos convexos compactos em um espaço vetorial topológico X. Então, a envoltória convexa $conv(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ é compacta.*

Demonstração. Denotemos por S o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^n$

$$S = \left\{ (s_1, s_2, \cdots, s_n) : s_i \geq 0, \text{ e } \sum_{i=1}^{n} s_i = 1 \right\}.$$

Pondo $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, definamos $f : S \times A \longrightarrow X$ dada por

$$f(s, x) = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \cdots + s_n x_n$$

e ponha $K = f(S \times A)$. Sendo f uma função contínua segue que K é compacto e claramente $K \subseteq conv(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$. Resta-nos verificar a inclusão contrária, para isso sejam (s, x) e $(t, y) \in S \times A$ e $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$, então

$$\begin{aligned} \alpha f(s, x) + \beta f(t, y) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha s_i x_i + \beta t_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha s_i + \beta t_i \frac{(\alpha s_i x_i + \beta t_i y_i)}{\alpha s_i + \beta t_i} \\ &= f(u, c), \end{aligned}$$

em que $u = \alpha s + \beta t \in S$ e $c \in A$, onde

$$c_i = \frac{\alpha s_i x_i + \beta t_i y_i}{\alpha s_i + \beta t_i}.$$

Como cada A_i é convexo, então $c_i \in A_i$, logo K é um conjunto convexo e $A_i \subseteq K$ para cada $i = 1, 2 \cdots n$, basta considerar $s_i = 1$ e $s_j = 0$ para todo $j \neq i$. Assim segue que $conv(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \subseteq K$, portanto $conv(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = K$ é convexo. □

Seja X um espaço vetorial topológico e $A \subseteq X$, denotamos o fecho da envoltória convexa de A por $\overline{conv}(A) = \overline{conv(A)}$. É possível provar que $\overline{conv}(A)$ é a interseção de todos os subconjuntos convexos e fechados de X que contém A. Em outras palavras, $\overline{conv}(A)$ é o menor conjunto convexo e fechado que contém A. O próximo resultado nos indica como podemos obter o fecho da envoltória convexa de um conjunto a partir de semi-espaços afins.

Teorema 1.49. *Seja X um espaço localmente convexo real. Então o fecho da envoltória convexa de um subconjunto não vazio A é a interseção de todos os semi-espaços fechados que contém A.*

Demonstração. Seja L a interseção de todos os semi-espaços fechados que contém A, como cada semi-espaço é convexo segue que L é fechado e convexo pois é interseção de conjuntos fechados e convexos, e como $A \subseteq L$, segue que $\overline{conv}(A) \subseteq L$. Para a desigualdade contrária, basta ver que $X/\overline{conv}(A) \subseteq X/L$. Seja $x \in X/\overline{conv}(A)$. Aplicando o Teorema de Separação de Hahn-Banach para os conjuntos $A = \{x\}$ e $B = \overline{conv}(A)$, existem $\varphi \in X^{'}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha(y) \text{ para todo } x \in B = \overline{conv}(A).$$

Seja $H = \{a \in X : \varphi(a) \geq \alpha_2\} = \varphi^{-1}\{[\alpha_2, \infty)\}$ então H é um semiespaço fechado com $\overline{conv}(A) \subseteq H$, assim $A \subseteq H$ e $x \notin H$. Como $H \subseteq L$ então temos que $x \in X/L$.

□

1.8 Espaço Quociente

Definição 1.14. *Seja M um subespaço de um espaço vetorial X. Para cada $x \in E$, seja $\pi(x)$ o conjunto que contém x, dado por*

$$\pi(x) = x + M.$$

Esses conjuntos constituem todos os elementos do espaço quociente E/M, chamado de espaço quociente de X módulo N, isto é,

$$X/M = \{\pi(x) : x \in E\} = \{x + M : x \in E\}.$$

X/M é um espaço vetorial quando munido com as operações

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y), \quad \alpha\pi(x) = \pi(\alpha x).$$

É importante mencionar que se $x, y \in E$ são tais que $\pi(x) = \pi(y)$, então $x - y \in M$. Com isso obtemos que se $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ e $\pi(y_1) = \pi(y_2)$, então

$$\pi(x_1 + y_1) = \pi(x_2 + y_2), \quad \alpha\pi(x_1) = \alpha\pi(x_2).$$

Portanto as operações no espaço quociente estão bem definidas.

Cada espaço vetorial X e um subespaço M induz a aplicação chamada quociente, definida por $\pi : X \longrightarrow E/M$, $\pi(x) = x + M$. Quando X for um espaço vetorial topológico, definimos a topologia no espaço quociente X/M como sendo a menor topologia que torna a aplicação π contínua.

Proposição 1.50. *Sejam X um espaço vetorial topológico e M um subespaço de X, então:*

1. *$\pi : X \longrightarrow X/M$ é contínua e aberta.*

2. *X/M é um espaço vetorial topológico.*

3. *X/M é Hausdorff se e só se M é fechado em E.*

4. *Se X é localmente convexo, então E/M é localmente convexo.*

5. *Se B_0 é uma base de vizinhanças da origem em X, então a família*

$$B = \{\pi(U) : U \in B_0\}$$

é uma base de vizinhanças da origem em X/M.

Demonstração. (1) Por definição, a aplicação π é contínua. Seja A um aberto em X, vejamos que $\pi(A)$ é aberto em E/M, o que equivale a dizer que $\pi^{-1}(\pi(A))$ é aberto. Basta notar que

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \{x \in X : \pi(x) \in x + A\} = A + M,$$

que é aberto, pois A é aberto em X.

(2) Vamos provar que a aplicação

$$+ : X/M \times E/M \longrightarrow X/M,\ +(x + M, y + M) = x + y + M$$

é contínua, para isso sejam $x, y \in X$ e W uma vizinhança aberta de $x + y + M$, então $\pi^{-1}(W)$ é uma vizinhança aberta de $x + y$ em X, pois π é contínua. Como X é um espaço vetorial topológico, existem vizinhanças abertas U_1 e V_1 em X de x e y respectivamente, tais que $U_1 + V_1 \subseteq \pi^{-1}(W)$. Como π é aberta, então $U = \pi(U_1)$ e $V = \pi(V_1)$ são abertos contendo $x + M$ e $y + M$ respectivamente e assim, $U + V \subseteq \pi^{-1}(\pi(W)) = W$, provando assim a continuidade da soma.

De maneira análoga vê-se que a operação de multiplicação por escalar em X/M é contínua, portanto X/M é um espaço vetorial topológico.

(3) Se X/M é um espaço de Hausdorff, então pela Proposição 1.6 o conjunto$\{0 + M\}$ é fechado, assim $\pi^{-1}(\{0 + M\}) = M$ é também fechado.

(4) Seja U uma vizinhança da origem em X/M. Então $\pi^{-1}(U)$ é uma vizinhança da origem em X. Como X é localmente convexo, existe uma vizinhança aberta e convexa da origem V, tal que $V \subseteq \pi^{-1}(U)$. Sendo π contínua e aberta, segue que $\pi(V)$ é uma vizinhança aberto e convexa em X/M com $\pi(V) \subseteq \pi(\pi^{-1}(U)) = U$, logo X/M é um espaço localmente convexo.

(5) Análogo a demonstração do item anterior.

□

1.9 Topologias Fracas

Sejam X um conjunto não vazio, $(Y_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $f_i : X \longrightarrow Y_i$ uma família de funções para cada $i \in I$. Definiremos sobre X a menor topologia que torna todas as funções f_i contínuas. Essa topologia deve conter todos os conjuntos da forma $\{f_i^{-1}(G) : G$ é um aberto em $Y_i\}$, assim esta família forma uma sub-base para a topologia inicial em X, isto significa que uma base para essa topologia é formada por interseção finita de elementos

da sub-base. Chamemos de τ essa topologia. Note que se cada Y_i é um espaço de Hausdorff e a família $(f_i)_{i\in I}$ separa pontos de X, então X é um espaço de Hausdorff. Com efeito, sejam $x, y \in X$, com $x \neq y$, assim para algum $i \in I$ temos $f_i(x) \neq f_i(y)$ em Y_i, logo existem vizinhanças disjuntas V e W de $f_i(x)$ e $f_i(y)$, respectivamente. Portanto, $f_i^{-1}(V)$ e $f_i^{-1}(W)$ são vizinhanças disjuntas em τ de x e y respectivamente. τ é usualmente chamada como topologia gerada pela família de funções $(f_i)_{i\in I}$.

Estamos interessados no caso em que X é um espaço vetorial, $Y_i = \mathbb{K}$ para todo $i \in I$ e a família $(f_i)_{i\in I}$ é a coleção de todos os funcionais lineares em X.

Lema 1.51. *Sejam X um espaço vetorial e $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funcionais lineares em X tais que $\bigcap_{i=1}^{n} Ker(\varphi_i) \subseteq Ker(\varphi)$. Então φ é uma combinação linear de $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$.*

Demonstração. Considere as transformações lineares

$$T : X \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad T(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x))$$

e

$$U : T(V) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad U(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)) = \varphi(x).$$

Note que U está bem definida, pois se $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \cdots, \varphi_n(y))$, então $(\varphi_1(x-y), \varphi_2(x-y), \cdots, \varphi_n(x-y)) = 0$, logo $x - y \in \cap_{i=1}^{n} Ker(\varphi_i) \subseteq Ker(\varphi)$ e assim $\varphi(x) = \varphi(y)$. Sendo U linear existe uma extensão linear $W : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ de U. Pelo Teorema de Riez em dimensão finita, existem escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tais que

$$W(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j z_j \text{ para todos } z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{K},$$

em particular,

$$\varphi(x) = U(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)) = W(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi(x),$$

para todo $x \in X$.

□

Teorema 1.52. *Seja X um espaço vetorial e seja Y o espaço vetorial de todos os funcionais lineares definidos em X que separa pontos. Dotamos X da topologia gerada pela família Y que iremos denotar por $\sigma(X, Y)$. Então X é um espaço localmente convexo cujo dual é Y.*

Demonstração. Para cada $\varphi \in Y$, defina $p_\varphi(x) = |\varphi(x)|$. Então p_φ é uma seminorma em X e a família $\mathcal{P} = \{p_\varphi : \varphi \in Y\}$ separa pontos de X pois Y separa pontos de X. Portanto essa família define uma topologia τ localmente convexa em X. Vamos ver que $\tau = \sigma(X, Y)$, cada p_φ é τ-contínua, e por definição da seminorma obtemos que $\varphi \in Y$ é τ-contínua. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ e $\varphi \in Y$, se tem $\{x \in X : p_\varphi(x) < \varepsilon\} = |\varphi|^{-1}\{(-\varepsilon, \varepsilon)\}$, logo as vizinhanças da origem em τ são vizinhanças da origem em $\sigma(X, Y)$. Segue facilmente também que $\sigma(X, Y)$ é

uma topologia de espaço vetorial topológico sobre X, tem-se assim que $\tau \subseteq \sigma(X,Y)$. E como vimos, todo φ é contínuo na topologia τ, logo $\sigma(X,Y) \subseteq \tau$, portanto $\sigma(X,Y) = \tau$.

Segue da definição de $\sigma(X,Y)$ que $Y \subseteq (X,\sigma(X,Y))^{'}$. Reciprocamente, consideremos um funcional linear contínuo $\varphi : (X,\sigma(X,Y)) \longrightarrow \mathbb{K}$. Como vimos, $\mathcal{P}$ gera a topologia $\sigma(X,Y)$, assim existem $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in Y$ e uma constante $M \in (0,\infty)$ de modo que

$$|\varphi(x)| \leq M \cdot \max_{i=1,\cdots,n} p_{\varphi_i}(x) = M \cdot \max_{i=1,\cdots,n} |\varphi_i(x)| \text{ para todo } x \in X.$$

Essa igualdade implica que $\bigcap_{i=1}^{n} Ker(\varphi_i) \subseteq Ker(\varphi)$ e segue assim do Lema 1.51 que φ é combinação linear de $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, portanto $\varphi \in Y$, pois Y é linear.

□

Definição 1.15. *Seja X um espaço vetorial topológico cujo dual $X^{'}$ separa pontos de X. Chamamos de topologia fraca de X denotada por $\sigma(X,X^{'})$, como sendo a topologia gerada por $X^{'}$.*

Pelo teorema anterior, a topologia $\sigma(X,X^{'})$ torna X um espaço localmente convexo e claramente essa topologia é mais fraca que a original. Denotamos a convergência de sequências em relação a topologia fraca por $x_n \xrightarrow{w} x$, é de fácil verificação que se $x_n \xrightarrow{w} x \Longleftrightarrow \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in X^{'}$. E novamente pelo teorema anterior, temos $(X,\sigma(X,X^{'}))^{'} = X^{'}$.

Exemplo 1.16. *Considere a sequência (e_n) dos vetores canônicos em ℓ_2 definida por*

$$e_n = (0,0,\cdots,1,0,\cdots).$$

Então $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para zero na topologia fraca, uma vez que se $\varphi = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in (\ell_2)^{'} = \ell_2$, obtemos que $\varphi(e_n) = y_n \longrightarrow 0$ uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 < \infty$. Porém como $\|e_n\|_2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ segue que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ não converge.

Seja A um subconjunto de um espaço vetorial topológico X, denotamos por $\overline{A}^{w}$ o fecho de A em relação a topologia fraca, também chamado de fecho fraco de A. O próximo resultado garante que para subconjuntos convexos de um espaço topológico, o fecho coincide com o fecho fraco.

Teorema 1.53. *(Mazur). Seja X um espaço localmente convexo e $A \subseteq X$. Então*

1. $\overline{conv(A)} = \overline{conv(A)}^{w}$;
2. *Se A é convexo, então $\overline{A} = \overline{A}^{w}$;*
3. *Se Y é um subespaço de X então $\overline{Y} = \overline{Y}^{w}$.*

Demonstração. Os itens (2) e (3) seguem imediatamente do item (1). Além disso, pelas observações anteriores vê-se que $\overline{conv(A)} \subseteq \overline{conv(A)}^{w}$. Para provar a inclusão contrária, pelo Teorema 1.49, $\overline{conv(A)}$ é a interseção de todos os semi-espaços fechados que contém A. Por definição cada semi-espaço fechado é fracamente fechado, logo $\overline{conv(A)}$ é fracamente fechado, e assim $\overline{conv(A)}^{w} \subseteq \overline{conv(A)}$. □

Corolário 1.54. *Seja X um espaço localmente convexo metrizável. Se $x_n \xrightarrow{w} x$, existem combinações convexas $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ do conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tais que $y_n \longrightarrow x$.*

Demonstração. Seja $A = \{x_n \in \mathbb{N}\}$, então $x \in \overline{A}^w$, logo $x \in \overline{conv(A)}^w$ e pelo teorema anterior $x \in \overline{conv(A)}$. Sendo X metrízável existe uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in conv(A)$ com $y_n \longrightarrow x$. □

Por meio das topologias fracas podemos obter um novo teorema de separação sem a necessidade de convexidade local, em contra partida, precisamos que os conjuntos A e B sejam compactos.

Teorema 1.55. *Seja X um espaço vetorial topológico cujo dual separa pontos. Sejam $A, B \subseteq X$ são conjuntos não vazios, disjuntos, convexos e compactos. Então existe um funcional $f \in X^{'}$ tal que*

$$\sup_{x \in A} Ref(x) < \inf_{x \in B} Ref(x).$$

Demonstração. Sabemos que $X_w = (X, \sigma(X, X^{'}))$ é localmente convexo. Como todo aberto na topologia fraca é um aberto em X, então os conjuntos A e B são compactos na topologia fraca e como obviamente X_w é um espaço de Hausdorff segue que A e B são fechados em X_w. Assim do Teorema 1.43 existe $f \in (X, \sigma(X, X^{'}))$ tal que

$$\sup_{x \in A} Ref(x) < \inf_{x \in B} Ref(x).$$

Segue assim o resultado desejado uma vez que $(X, \sigma(X, X^{'})) = X^{'}$.

□

Definição 1.16. *Seja X um espaço vetorial topológico cuja dual $X^{'}$ separa pontos de X. Definimos a topologia fraca estrela, denotada por $\sigma(X^{'}, X)$ como sendo a topologia gerada pela família de seminormas $\mathcal{P} = (P_x)_{x \in X}$ definidas por $P_x : X^{'} \longrightarrow X$, $P_x(\varphi) = |\varphi(x)|$.*

Nesse momento iremos definir o polar de um conjunto definido em um espaço vetorial topólogico com o intuito enunciar uma versão do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki. No próximo capítulo estudaremos esses conjuntos com mais detalhes.

Definição 1.17. *Seja X um espaço vetorial topológico e $A \subseteq X$. Definimos o polar de A o conjunto*

$$A^{\circ} = \{\varphi \in X^{'} : |\varphi(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in A\}.$$

Exemplo 1.17. *Seja X um espaço normado, se $\varphi \in B_X^{\circ}$, e logo $|\varphi(x)| \leq 1$ para todo $x \in B_X$, então $\varphi \in B_{X'}$. Por outro lado, se $\varphi \in B_{X'}$ e $x \in B_X$ temos $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\| \leq 1$, daí $\varphi \in B_X^{\circ}$. Portanto, $B_X^{\circ} = B_{X'}$.*

Teorema 1.56. *(Banach-Alaoglu-Bourbaki) Seja X um espaço vetorial topológico e V uma vizinhança da origem, então V° é compacto na topologia fraca estrela. Em particular, a bola unitária fechada $B_{X'}$ do dual de um espaço normado é fechada na topologia fraca estrela.*

Capítulo 2

F-espaços e Resultados Estruturantes

Na seção anterior vimos que no contexto de espaços localmente convexos o Teorema de Hahn-Banach permanece válido. Por outro lado, para o caso não convexo a situação é bem mais delicada, um resultado bastante profundo nos garante que se um espaço X metrizável, completo com uma métrica invariante por translação não localmente convexo, então X não tem a propriedade de extensão de Hahn-Banach, ou seja, existem um subconjunto fechado M de X e um funcional φ definido em M que não pode ser estendido para X. A partir disso iniciou-se o estudo de espaços vetorias munidos de uma estrutura semelhante a uma norma. Dentre esses espaços, o que mais se destacam são os espaços quase-Banach, cujo estudo sistemático só começou realmente no final dos anos 1950 e início dos anos 1960 com o trabalho de Klee, Peck, Rolewicz, Waelbroeck e Zelazko.

2.1 Δ-Normas e F-Normas

Começamos esse capítulo enunciando um resultado sobre topologias em espaços vetoriais topológicos.

Teorema 2.1. *(Teorema das bases de vizinhanças). Seja X um espaço vetorial topológico e U_0 uma base de vizinhanças da origem. Então;*

1. Para cada W e V em U_0 existe $U \in U_0$ tal que $U \subseteq W \cap V$;
2. Para cada $W \in U_0$ existe $V \in U_0$ tal que $V + V \subseteq W$;
3. Para cada $W \in U_0$, existe $V \in U_0$, com $\alpha V \subseteq W$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| \leq 1$;
4. Dados $W \in U_0$ e $x \in X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in nW$.

Reciprocamente, se a coleção de conjuntos U_0 satisfaz $(1) - (4)$, existe uma topologia τ em X que o torna um espaço topológico com U_0 sendo a base de vizinhanças da origem de X.

Definição 2.1. *Seja X um espaço vetorial. Uma $\Delta-$norma em X é uma aplicação $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, \infty)$ que satisfaz:*

1. $\|x\| > 0$, *se* $x \neq 0$;

2. $\|\alpha x\| \leq \|x\|$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *com* $|\alpha| \leq 1$ *e* $x \in X$;

3. $\lim_{\alpha \to 0} \|\alpha x\| = 0$, *para cada* $x \in X$;

4. *Existe uma constante* $c > 1$ *tal que*

$$\|x + y\| \leq c \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad \textit{para todo } x, y \in X.$$

Seja $\|\cdot\|$ uma $\Delta-$ norma em um espaço vetorial X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o conjunto

$$U_n := \left\{ x \in X : \|x\| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Veremos que a coleção $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forma uma base de vizinhança da origem de alguma topologia em X. Para isso utilizaremos o Teorema 2.1.

Seja $U_n, U_m \in U$, então pondo $j = \max\{n, m\}$ segue que $U_j \subseteq U_n \cap U_m$.

Dado $U_n \in U$, escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n_0 > cn$, onde $c > 1$ é a constante que satisfaz (4). Assim, se $x + y \in U_{n_0} + U_{n_0}$ então,

$$\|x + y\| \leq c \max\{\|x\|, \|y\|\} < \frac{c}{n_0} < \frac{1}{n},$$

donde segue que

$$U_{n_0} + U_{n_0} \subseteq U_n.$$

Segue imediatamente do item (2) na definição de $\Delta-$norma que $\alpha U_n \subseteq U_n$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| \leq 1$ e $n \in \mathbb{N}$.

Por fim, dados $x \in X$ e $U_n \in U$, sabemos pelo item (3) que

$$\lim_{m \to \infty} \left\| \frac{x}{m} \right\| = 0,$$

isto é, dado $\varepsilon = \frac{1}{n}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j \geq n_0 \Longrightarrow \left\| \frac{x}{j} \right\| < \frac{1}{n}.$$

isto nos diz que $\frac{x}{n_0} \in U_n$, portanto $x \in n_0 U_n$.

Concluímos assim que cada $\Delta-$norma induz uma topologia vetorial em X que tem como vizinhanças básicas os conjuntos da forma $U_n = \left\{ x \in X : \|x\| < \frac{1}{n} \right\}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.2. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico com uma base de vizinhanças da origem enumerável* $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tal que* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$, *cada* U_n *é equilibrado e* $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então a aplicação* $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, +\infty)$ *definida por*

$$\|x\| = \sup\{2^{-n} : x \notin U_n\},$$

defina uma $\Delta-$norma em X que induz a topologia original.

Demonstração. Primeiramente, vejamos que $\|\cdot\|$ satisfaz as condições de $\Delta-$norma;

1. Se $x \neq 0$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin U_{n_0}$, logo, $0 < 2^{-n_0} \leq \|x\|$.

2. Dado $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| \leq 1$ e $x \in X$. Então, se $\alpha x \notin U_n$ segue que $x \notin U_n$. De fato, pois se $x \in U_n$ teriamos que $\alpha x \in \alpha U_n \subseteq U_n$ já que U_n são vizinhanças equilibradas, logo $\alpha x \in U_n$. Portanto,
$$\{2^{-n} : \alpha x \notin U_n\} \subseteq \{2^{-n} : x \notin U_n\}$$
donde segue que
$$\|\alpha x\| \leq \|x\|.$$

3. Seja $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0} < \varepsilon$. Como $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$ e $0 \in U_{n+1}$, então $U_{n+1} \subseteq U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in X$, como U_{n_0} é absorvente pois é uma vizinhança da origem, existe $\delta > 0$ de tal forma que $x \in \delta U_{n_0}$. Iremos ver que se $|\alpha| < \dfrac{1}{\delta}$, então $\alpha x \in U_{n_0}$, isto equivale a dizer que $\delta\alpha x \in \delta U_{n_0}$. Como U_{n_0} é equilibrado e $|\delta\alpha| < 1$ então
$$x \in \delta U_{n_0} \Longrightarrow \delta\alpha x \in \delta U_{n_0}.$$
Logo $\alpha x \in U_{n_0}$ e assim $\|\alpha x\| \leq 2^{-n_0} < \varepsilon$ quando $|\alpha| \leq \frac{1}{\delta}$. Portanto, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \|\alpha x\| = 0$.

4. Sejam $x, y \in X$. Pela definição de supremo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x + y \notin U_{n_0}$ e
$$\|x + y\| - \varepsilon < 2^{-n_0}.$$
Como $U_{n_0+1} + U_{n_0+1} \subseteq U_{n_0}$, então $x, y \notin U_{n_0+1}$, logo temos
$$\|x + y\| - \varepsilon < 2^{-n_0} = 2 \cdot 2^{-(n_0+1)} \leq 2\|x\| \leq 2\max\{\|x\|, \|y\|\}.$$
Assim, fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ segue que
$$\|x + y\| \leq 2\max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Portanto $\|\cdot\|$ é uma $\Delta-$norma em X, logo a coleção $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ forma uma base de vizinhanças da origem para uma topologia em X, em que $\beta_n = \left\{x \in X : \|x\| < \frac{1}{n}\right\}$. Dada uma vizinhança básica da origem U_n, considere $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < 2^{-n}$, afirmamos que $\beta_{n_0} \subseteq U_n$. De fato, dado $x \in \beta_{n_0}$, se $x \notin U_n$ teriamos então que $2^{-n} \leq \|x\| < \frac{1}{n_0}$ gerando assim uma contradição. De maneira semelhante verifica-se que cada vizinhança β_n contém uma vizinhança básica da coleção $U = (U_n)_{n=1}^{\infty}$. Concluímos assim que a $\Delta-$norma induz a topologia original em X.

□

Proposição 2.3. *Sejam X um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ uma $F-$norma em X,*

1. *Se $0 < \alpha \leq \beta$, então $\|\alpha x\| \leq \|\beta x\|$ para todo $x \in X$.*

2. Se $0 < \alpha \leq n$, em que $n \in \mathbb{N}$, então $\|\alpha x\| \leq n\|x\|$ para todo $x \in X$.

Demonstração. (1) Por hipótese temos $\dfrac{\alpha}{\beta} \leq 1$. Se $x \in X$, então

$$\|\alpha x\| = \left\|\alpha \frac{\beta}{\beta} x\right\| \leq \|\beta x\|.$$

(2). Do item anterior temos $\|\alpha x\| \leq \|nx\|$ e segue da desigualdade triangular que $\|nx\| \leq n\|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $\|\alpha x\| \leq n\|x\|$.

□

Definição 2.2. *Uma $\Delta-$norma em um espaço vetorial X é chamada $F-$norma quando satisfaz a desigualdade triangular, ou seja,*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \text{ para todos } x, y \in E.$$

Se a aplicação $\|\cdot\|$ é uma F-norma em um espaço vetorial X, então $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica em X. Um dos nossos objetivos é mostrar a possiblidade de substituir qualquer $\Delta-$norma por uma $F-$norma em um espaço vetorial X. O lema seguinte é um resultado nessa direção.

Lema 2.4. *Seja $\|\cdot\|$ uma Δ-norma em X e c a constante que satisfaz a condição (4) da definição de $\Delta-$norma. Escolha $p \in \mathbb{R}$ tal que $2^{\frac{1}{p}} = c$. Então para quaisquer $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$, temos*

$$\|x_1 + x_2 + \cdots x_n\| \leq 4^{\frac{1}{p}} \left(\|x_1\|^p + \|x_2\|^p + \cdots \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar por indução que

$$\|x_1 + x_2 + \cdots x_n\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} c^k \|x_k\| \tag{2.2}$$

para todos $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$. Com efeito, se $n = 2$ temos

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2\| &\leq c \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} \\ &= \max\{c\|x_1\|, c\|x_2\|\} \\ &\leq \max\{c\|x_1\|, c^2\|x_2\|\}. \end{aligned}$$

Suponhamos que a fórmula seja válida para $n > 2$, então

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2 + \cdots x_n + x_{n+1}\| &\leq c \max\{\|x_1\|, \|x_2 + x_3 + \cdots x_{n+1}\} \\ &\leq c \max\{\|x_1\|, \max_{2 \leq k \leq n+1} c^k \|x_{k+1}\|\} \\ &= \max_{1 \leq k \leq n+1} c^k \|x_k\|. \end{aligned}$$

Definamos a função $H : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$H(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{p}}, & 2^{\frac{n-1}{p}} < \|x\| \leq 2^{\frac{n}{p}}, n \in \mathbb{N} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Note que se $x \in X$ é tal que $2^{\frac{n-1}{p}} < \|x\| \leq 2^{\frac{n}{p}}$, então,

$$H(x) = 2^{\frac{n}{p}} = 2^{\frac{n+1-1}{p}} = 2^{\frac{n-1}{p}} 2^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|x\|,$$

assim,

$$\|x\| \leq H(x) \leq 2^{\frac{1}{p}} \|x\|.$$

Para mostrar a desigualdade do Lema 2.1 é suficiente ver que

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(H(x_1)^p + H(x_2)^p + \cdots H(x_n)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $n = 1$, temos

$$2^{\frac{1}{p}} H(x_1) = 2^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{n}{p}} = 2^{\frac{n+1}{p}} \geq \|x_1\|.$$

Suponhamos o resultado válido para $n = m$ e sejam $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1} \in X$. Considere sem perda de generalidade que $\|x_1\| \geq \|x_2\| \geq \cdots \geq \|x_{m+1}\|$. Vamos considerar dois casos. No primeiro caso, suponha que o conjunto de valores $\{H(x_i) : 1 \leq i \leq m+1\}$ sejam todos distintos. Assim,

$$H(x_{j+1}) \leq 2^{\frac{1}{p}} \|x_{j+1}\| \leq 2^{\frac{1}{p}} \|x_j\| \leq 2^{\frac{1}{p}} H(x_j)$$

aplicando sucessivamente esse resultado, chegamos que

$$H(x_1) \geq 2^{\frac{1-i}{p}} H(x_i) \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots m.$$

Daí segue que,

$$\begin{aligned} c^i \|x_i\| &= \left(2^{\frac{1}{p}}\right)^i \|x_i\| \\ &\leq 2^{\frac{i}{p}} H(x_i) \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}} H(x_1) \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}} \left(H(x_1)^p + H(x_2)^p + \cdots H(x_n)^p\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2 \cdots m$, o resultado segue de (2.2). Suponhamos agora que $H(x_j) = H(x_{j+1})$ para algum $j \in \mathbb{N}$, segundo a definição da função H, deve existir $r \in \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$2^{\frac{r-1}{p}} \leq \|x_{j+1}\| \leq \|x_j\| \leq 2^{\frac{r}{p}}$$

e também,

$$\|x_j + x_{j+1}\| \leq c 2^{\frac{r}{p}} = 2^{\frac{r+1}{p}}.$$

Logo,

$$H(x_j + x_{j+1})^p \leq \left(2^{\frac{r+1}{p}}\right)^p = 2^{r+1} = H(x_j)^p + H(x_{j+1})^p.$$

Aplicando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}\|x_1 + x_2 + \cdots + x_m + 1\|^p &\leq 2\left(\sum_{i\neq j,j+1} H(x_i)^p + H(x_j + x_{j+1})^p\right)\\ &\leq 2\left(\sum_{i=1}^{m+1} H(x_i)^p\right)\end{aligned}$$

portanto,

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1}\| \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(H(x_1)^p + H(x_2)^p + \cdots H(x_{m+1})^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

e finalmente concluímos a demonstração. □

Teorema 2.5. *Sejam $\|\cdot\|$ uma $\Delta-$norma em X e $p \in \mathbb{R}$ tal que $2^{\frac{1}{p}} = c$. Então a aplicação*

$$\|x\|_F = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p : x = \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

define uma $F-$norma em X que induz a topologia original de X.

Demonstração. Seja $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, do Lema 2.4 segue que

$$\|x\|^p \leq 4\left(\|x_1\|^p + \|x_2\|^p + \cdots + \|x_n\|^p\right)$$

isto nos diz que $\frac{1}{4}\|x\|^p \leq \|x\|_F$ e como $\|x\|_F \leq \|x\|$, temos

$$\frac{1}{4}\|x\|^p \leq \|x\|_F \leq \|x\|^p \text{ para todo } x \in X. \tag{2.3}$$

Segue assim que a aplicação $\|\cdot\|_F$ satisfaz as condições (1), (2) e (3) na definição de $\Delta-$norma. Resta-nos verificar a desigualdade triangular. Dado $\varepsilon > 0$ existem $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ e $y = \sum_{i=1}^{m} y_i$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p < \|x\|_F + \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^p < \|y\|_F + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Note que $x + y = \sum_{j=1}^{n+m} z_i$, em que $z_i = x_i$ para $i = 1, \cdots, n$ e $z_{n+i} = y_i$ para $i = 1, \cdots, m$, portanto

$$\|x + y\|_F \leq \sum_{j=1}^{n+m} \|z_i\|^p = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p + \sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^p < \|x\|_F + \|y\|_F + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, obtemos

$$\|x + y\|_F \leq \|x\|_F + \|y\|_F.$$

Concluímos que a aplicação $\|\cdot\|_F$ define uma $F-$norma em X e a desigualdade (2.3) garante que toda vizinhança básica da origem relativa a $F-$norma é uma vizinhança básica da origem relativa a $\Delta-$norma e vice-versa, portanto possuem a mesma topologia.

□

Como uma primeira aplicação dessa teoria, daremos abaixo uma prova simples do clássico Teorema de Birkhoff-Kakutani, o qual tem uma demonstração longa e trabalhosa quando usado apenas os conceitos básicos da teoria de espaços vetoriais topológicos. Ao leitor interessado na demonstração, sugerimos a referência [27].

Corolário 2.6. *(Birkhoff-Kakutani). Seja X um espaço vetorial topológico Hausdorff com uma base de vizinhanças da origem enumerável. Então X é metrizável. Neste caso, existe uma métrica em X invariante sob translações, que define a topologia em X.*

Demonstração. Seja $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base de vizinhanças da origem. Como X é um espaço de Hausdorff, então pelo Corolário 1.8 temos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$. Podemos sempre supor que U_n é equilibrada e $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, pelo Lema 2.2 a aplicação

$$\|x\| = \sup\{2^{-n} : x \notin U_n\}$$

define uma $\Delta-$norma em X com

$$\|x + y\| \leq 2\max\{\|x\|, \|y\|\} \text{ para todo } x, y \in X.$$

Pelo Teorema 2.5 a aplicação

$$\|x\|_F = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 : x = \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

é uma $F-$norma em X e consequentemente induz a métrica invariante por translação $d(x, y) = \|x - y\|_F$ que gera a topologia em X.

□

Definição 2.3. *Um espaço vetorial topológico X é dito $F-$espaço quando for metrizável completo, com a métrica invariante por translação.*

Exemplo 2.1. *Todo espaço de Banach é um $F-$espaço.*

Exemplo 2.2. *Sejam $0 < p < 1$. Já vimos que ℓ_p é um espaço vetorial topológico, metrizável com a métrica invariante por translação*

$$d(x, y) = \|x - y\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p.$$

Vejamos agora que ℓ_p é completo. Para isso seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em ℓ_p,

digamos $x_n = (y_k^n)_{k=1}^{\infty}$. *Dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n > m \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\|^p < \varepsilon^p,$$

ou ainda,

$$\|x_n - x_m\|^p = \|(y_k^n - y_k^m)_{k=1}^{\infty}\|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^n - y_k^m|^p < \varepsilon^p. \tag{2.4}$$

Logo,

$$|y_k^n - y_k^m| < \varepsilon \text{ sempre que } n > m \geq n_0.$$

Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ *a sequência* $(y_k^n)_{n=1}^{\infty}$ *é de Cauchy em* $\mathbb{K}$, *daí temos* $y_k^n \longrightarrow y_k$ *quando* $n \longrightarrow \infty$. *Definindo* $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$, *fazendo* $n \longrightarrow \infty$ *na desigualdade* (2.4) *temos que* $\|y - x_m\|^p < \varepsilon^p$ *quando* $m \geq n_0$ *e assim,*

$$\|y\|^p \leq \|x_{n_0}\|^p + \|y - x_{n_0}\|^p < \infty.$$

Donde concluimos que $y \in \ell_p$ *e* $x_n \longrightarrow y$, *provando a completude do espaço.*

Entretanto o espaço ℓ_p não é localmente convexo, motivando assim a seguinte definição.

Definição 2.4. *Um espaço vetorial topológico* X *denomina-se espaço de Fréchet se for um* $F-$*espaço localmente convexo.*

Antes de prosseguir na teoria dos $F-$espaços, precisaremos do seguinte resultado útil em espaços métricos.

Teorema 2.7. *Um espaço métrico* (X, d) *é completo, se e somente se, cada sequência de conjuntos fechados encaixados, cujos diâmetros convergem para zero, tem interseção vazia. Recordemos que o diâmetro de um conjunto* $A \subseteq X$ *é definido por:*

$$diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [25].

Proposição 2.8. *Seja* Y *um subespaço de um espaço vetorial topológico Hausdorff* X. *Se* Y *é um* $F-$*espaço então* Y *é fechado em* X.

Demonstração. Seja d uma métrica invariante por translação em Y compatível com a topologia induzida por X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$B_{\frac{1}{n}} = \left\{ y \in Y : d(0, y) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Como $B_{\frac{1}{n}}$ é uma vizinhança da origem em Y, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma vizinhança da origem U_n em X tal que $Y \cap U_n = B_{\frac{1}{n}}$. Considere $V_n \in \mathcal{U}_0(X)$, equilibrada com $V_n + V_n \subseteq U_n$ e $V_{n+1} \subseteq V_n$. Seja $x \in \overline{Y}$ e defina

$$E_n = Y \cap (x + V_n) \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Então $E_n \neq \emptyset$ e se $y_1, y_2 \in E_n$, então existem $z_1, z_2 \in V_n$ com $y_1 = x + z_1$ e $y_2 = x + z_2$, assim,

$$y_1 - y_2 = z_1 - z_2 \in V_n + V_n \subseteq U_n,$$

e como $y_1 - y_2 \in Y$, logo $y_1 - y_2 \in B_{\frac{1}{n}}$ e logo $d(0, y_1 - y_2) \leq \frac{1}{n}$ quando $y_1, y_2 \in E_n$. Daí segue que $diam(E_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ e como $diam(E_n) = diam(\overline{E_n})$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} diam(\overline{E_n}) = 0.$$

Portanto, pelo teorema anterior

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} = \{y_0\}.$$

Seja W uma vizinhança da origem em X, ponha

$$F_n = Y \cap (x + (W \cap V_n)).$$

Usando o mesmo argumento é possível exibir $y_W \in \overline{F_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas como $F_n \subseteq E_n$, então $y_W = y_0$ e ainda $F_n \subseteq x + W$. Logo $y_0 \in \overline{x + W}^X$ para todo $W \in \mathcal{U}_0(X)$, em que $\overline{x + W}^X$ denota o fecho de $x + W$ na topologia de X. Como X é um espaço de Hausdorff, $x = y_0 \in Y$, logo $Y = \overline{Y}$.

□

Teorema 2.9. *Sejam M um subespaço denso de um espaço vetorial topológico X e Y um $F-$espaço. Se $f : M \longrightarrow Y$ é uma aplicação linear contínua, então existe uma aplicação linear contínua $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$ que estende f.*

Demonstração. Seja d a métrica invariante por translação em Y, como na proposição anterior considere o conjunto

$$B_n = \left\{ y \in Y : d(0, y) < \frac{1}{2^n} \right\}.$$

Sendo f contínua, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma vizinhança da origem U_n em M tal que $f(U_n) \subseteq B_{\frac{1}{n}}$. Assim é possível construir uma sequência de vizinhanças da origem em X equilibradas $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ com $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ e $f(V_n \cap M) \subseteq B_n$. Dado $x \in X$, como M é denso em X, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in (x + V_n) \cap M$. Vejamos que a sequência $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em Y. Com efeito, sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > m$ digamos $m = n + p$ daí,

$$d(f(x_n), f(x_{n+p})) \leq d(f(x_n), f(x_{n+1})) + d(f(x_{n+1}), f(x_{n+2})) + \cdots + d(f(x_{n+p-1}), f(x_{n+p})).$$

Como $x_n \in (x + V_n)$ e $x_{n+1} \in (x + V_{n+1})$, existem $z \in V_n$ e $W \in V_{n+1}$ de modo que $x_n = x + z$ e $x_{n+1} = x + w$ logo

$$x_n - x_{n+1} = z - w \in V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n.$$

Sendo d invariante por translação, obtemos

$$d(f(x_n), f(x_{n+1})) = d(0, f(x_n) - f(x_{n+1}) = d(0, f(x_n - x_{n+1})) < \frac{1}{2^n}.$$

Mais geralmente, $d(f(x_{n+k}), f(x_{n+k+1})) < \frac{1}{2^{n+k}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, então

$$d(f(x_n), f(x_{n+p})) < 2^{-n} + 2^{-n+1} + 2^{n+p-1} = 2^{-n} \cdot \frac{(1-2^{-1})^p}{1-2^{-1}} \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$, assim a sequência $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy e portanto convergente. Esse fato nos induz a definir a função $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$, $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Afirmamos que f está bem definida. De fato, dado $x \in X$, sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências com $x_n, y_n \in (x + V_n) \cap M$, existem $z, w \in Y$ de modo que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = z$ e $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = w$. Então

$$\begin{aligned} d(z,w) &= \lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(y_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(0, f(x_n - y_n)) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0, \end{aligned}$$

uma vez que $x_n - y_n \in V_{n-1}$. Além disso, $\tilde{f}$ é linear e estende f. Agora se U é uma vizinhança da origem em Y, então $B_n \subseteq U$ para algum $n \in \mathbb{N}$, em particular $f(V_n \cap M) \subseteq B_n$. Dado $x \in V_n$ e $x_n \in (x + V_n) \cap M$, então $x_n \in V_{n-1}$ e assim $f(x_n) \in f(V_{n-1} \cap M)$, e de modo semelhante ao feito anteriormente, vê-se que $d(0, \tilde{f}(x)) = 0$ e assim $\tilde{f}(V_n) \subseteq B_n$, portanto $\tilde{f}$ é contínua. □

Definição 2.5. *Uma quase-norma em um espaço vetorial X é uma $\Delta-$norma que satisfaz*

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \text{ para todos } x \in X \text{ e } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Exemplo 2.3. *Seja $X = \mathbb{R}^2$. Para cada $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ a aplicação*

$$\|z\| = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$$

define uma quase-norma em $\mathbb{R}^2$ que não é uma norma. Com efeito, seja $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, então

1. $\|z\| = 0 \iff \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2 = 0 \iff \sqrt{|x|} = \sqrt{|y|} = 0 \Longrightarrow x = y = 0 \iff z = 0.$

2. *Se $\alpha \in \mathbb{K}$, obtemos*

$$\|\alpha z\| = \|(\alpha x, \alpha y)\| = \left(\sqrt{|\alpha x|} + \sqrt{|\alpha y|}\right)^2 = |\alpha| \cdot \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2 = |\alpha|\|z\|.$$

3. *Considere $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, então*

$$\begin{aligned} &2(\|x\| + \|y\|) - \|x + y\| = 2\left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}\right)^2 + \left(\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}\right)^2 \\ &- \left(\sqrt{|x_1 + y_1|} + \sqrt{|x_2 + y_2|}\right)^2 = 2\left(|x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| + 2\sqrt{|x_1||x_2|} + 2\sqrt{|y_1||y_2|}\right) \\ &\quad - \left(|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + 2\sqrt{|x_1 + y_1||x_2 + y_2|}\right) \geq 2|x_1| + 2|x_2| + 2|y_1| + 2|y_2| \\ &\quad + 4\sqrt{|x_1||x_2|} + 4\sqrt{|y_1||y_2|} - |x_1| - |y_1| - |x_2| - |y_2| - 2\sqrt{|x_1 + y_1||x_2 - y_2|} \\ &\quad = |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| - 2\sqrt{|x_1 + y_1||x_2 - y_2} + 4\sqrt{|x_1||x_1|} + 4\sqrt{|y_1||y_2|}. \end{aligned}$$

Como

$$\left(\sqrt{|x_1|+|x_2|}-\sqrt{|y_1|+|y_2|}\right)^2 = |x_1|+|x_2|+|y_1|+|y_2|-2\sqrt{|x_1+y_1||x_2-y_2|},$$

temos que

$$2(\|x\|+\|y\|)-\|x+y\| = \left(\sqrt{|x_1|+|x_2|}-\sqrt{|y_1|+|y_2|}\right)^2 + 4\sqrt{|y_1||y_2|}+4\sqrt{|x_1||x_1|} \geq 0$$

portanto

$$\|x+y\| \leq 2\|x\|+\|y\|.$$

2.2 Teorema de Aoki-Rolewicz

Veremos agora que cada espaço localmente limitado induz uma quase-norma. Para isso, sejam X um espaço localmente limitado e B uma vizinhança da origem limitada e equilibrada. Pela Proposição 1.13 o conjunto $B+B$ é limitado, assim existe $\rho \geq 1$ tal que $B+B \subseteq \rho B$. Vamos definir uma $\Delta-$norma em X usando o funcional de Minkowski em B,

$$\|x\| = \inf\{\lambda > 0 : \lambda^{-1}x \in B\}.$$

Como toda vizinhança da origem é absorvente, então para cada $x \in X$, o conjunto $\{\lambda > 0 : \lambda^{-1}x \in B\}$ é não vazio. Iremos verificar apenas que

$$\|x+y\| \leq 2\rho \max\{\|x\|,\|y\|\} \text{ para todo } x,y \in X.$$

Com efeito, sejam $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ com $\lambda_1^{-1}x \in B$ e $\lambda_2^{-1}y \in B$, logo temos

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_1^{-1}x + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_2^{-1}y \in B+B \subseteq \rho B$$

uma vez que $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} < 1$ e B equilibrado. Portanto,

$$\frac{\lambda_1}{\rho\,(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^{-1}x + \frac{\lambda_2}{\rho\,(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_2^{-1}y \in B,$$

assim o vetor $z = \rho\,(\lambda_1+\lambda_2)$ é tal que $z^{-1}(x+y) \in B$, e temos finalmente que

$$\|x+y\| \leq \rho\,(\lambda_1+\lambda_2)$$

para cada $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, daí

$$\|x+y\| \leq \rho\,(\|x\|+\|y\|) \leq 2\rho \max\{\|x\|,\|y\|\}.$$

Além disso, já sabemos do capítulo anterior que sob essas condições o funcional de Minkowski

tem a propriedade

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \text{ para todos } x \in X \text{ e } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Portanto o funcional de Minkowski definido em 1.5 é uma quase-norma em X. Reciprocamente, se $\|\cdot\|$ é uma quase-norma no espaço vetorial X, então a vizinhança da origem $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ é um conjunto limitado. Com isso fica provada a seguinte proposição.

Proposição 2.10. *Um espaço vetorial topológico X é localmente limitado se e somente se sua topologia é gerada por uma quase-norma.*

Definição 2.6. *Seja $0 < p \leq 1$. Um subconjunto C de um espaço vetorial X é dito $p-$convexo se para quaisquer $x, y \in C$, $ax + by \in C$ sempre que $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \geq 0, b \geq 0$ e $a^p + b^p = 1$. O conjunto C é absolutamente $p-$convexo quando $ax + by \in C$, sempre que $x, y \in C$ e $a, b \in \mathbb{K}$ com $|a|^p + |b|^p \leq 1$.*

Exemplo 2.4. *Seja $0 < p \leq 1$. Veremos que o conjunto $B_{\ell_p} = \{x \in \ell_p : \|x\|^p \leq 1\}$ é absolutamente $p-$convexo em ℓ_p. Dados $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p}$ e $a, b \in \mathbb{K}$ com $|a|^p + |b|^p \leq 1$, então*

$$\begin{aligned}
\|af + bg\|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |ax_n + by_n|^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|ax_n| + |by_n|)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |ax_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |by_n|^p \\
&= |a|^p\|f\|^p + |b|^p\|g\|^p \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Definição 2.7. *Seja $0 < p < 1$. Uma $p-$norma em X é uma quase-norma satisfazendo a desigualdade*

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p \text{ para todos } x, y \in X.$$

Definição 2.8. *Um espaço X localmente limitado é localmente $p-$convexo, ou simplesmente $p-$convexo se possui uma vizinhança da origem limitada absolutamente $p-$convexa.*

Suponha que X seja um espaço $p-$convexo, digamos B a vizinhança da origem limitada absolutamente $p-$convexa, então o funcional de Minkowski em B satisfaz

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p \text{ para todos } x, y \in X. \tag{2.5}$$

Por outro lado, se uma quase-norma $\|\cdot\|$ satisfaz (2.5), o conjunto $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é absolutamente $p-$convexo.

Teorema 2.11. *(Aoki-Rolewicz). Se X é um espaço localmente limitado, então X é $p-$convexo para algum $p > 0$.*

Demonstração. Sendo X localmente limitado, então a sua topologia é gerada por uma quase norma $\|\cdot\|$. Segue do Teorema 2.5 que existe $0 < p \leq 1$, tal que a aplicação

$$\|x\|_F = \inf\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} : x = \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

é uma quase-norma equivalente a quase norma original. Além disso, $\|\cdot\|_F$ é uma $p-$norma, isto é,

$$\|x+y\|_F^p \leq \|x\|_F^p + \|y\|_F^p$$

para todo $x, y \in X$. Assim o conjunto $B = \{x \in X : \|x\|_F \leq 1\}$ é absolutamente $p-$convexo. □

Também é bastante comum, o Teorema de Aoki-Rolewicz ser apresentado na seguinte versão.

Teorema 2.12. *(Aoki-Rolewicz) Seja X um espaço munido de uma quase norma $\|\cdot\|$, então existe $p > 0$ e uma $p-$norma $\|\cdot\|_1$ em X satisfaz*

$$\frac{\|x\|}{C} \leq \|x\|_1 \leq \|x\| \text{ para todo } x \in X,$$

em que a $p-$norma é definida por

$$\|x\|_1 = \inf\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} : x = \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}.$$

2.3 A Estrutura dos Espaços Quase-Normados

O Teorema de Aoki-Rolewicz nos informa que toda quase-norma é equivalente à uma p-norma, para algum $p \in (0,1)$. Na seção anterior definimos uma quase-norma (ver definição 2.5), mas para comodidade do leitor e para a completude texto, apresentaremos uma versão mais completa dessa definição a seguir.

Definição 2.9. *Seja X um espaço vetorial. Uma quase-norma em X é uma aplicação $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0,\infty)$ que satisfaz*

1. *$\|x\| > 0$, se $x \neq 0$;*
2. *$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in X$;*
3. *Existe $c > 1$ tal que*

$$\|x+y\| \leq c\max\{\|x\|, \|y\|\}, \text{ para todo } x, y \in X.$$

Neste caso, dizemos que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço quase normado. Quando $c = 1$ obtemos uma norma. A quase-norma é chamada $p-$norma $(0 < p < 1)$ quando satisfaz

$$\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p \text{ para todo } x, y \in X.$$

Neste caso, a bola unitária de X é um conjunto absolutamente p-convexo. Uma quase-norma em X define uma topologia vetorial metrizável que tem como base de vizinhanças da origem os conjuntos $U_n = \{x \in X : \|x\| < \frac{1}{n}\}$. Quando X for completo, dizemos que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço quase-Banach. Se a quase-norma for uma $p-$norma dizemos simplesmente que X é um espaço p-convexo quase-Banach ou simplesmente p-Banach.

A condição (3) na definição de quase-norma pode ser substituída pela seguinte condição equivalente,

$$\|x + y\| \leq K\left(\|x\| + \|y\|\right) \quad \text{para todo } x, y \in E, \tag{2.6}$$

em que K é uma constante positiva maior ou igual a 1, chamada de módulo de concavidade. Alguns autores optam por definir uma quase-norma através dessa condição, como por exemplo, na referência [1].

Nessa seção iremos construir a teoria de operadores lineares limitados entre espaços quase-normados, a maioria dos resultados vistos anteriormente nos distanciaram um pouco da clássica teoria que é vista em um primeiro curso de Análise Funcional. O objetivo aqui é convencer o leitor de que mesmo quando munimos espaços vetoriais com uma estrutura mais fraca podemos obter resultados idênticos aqueles já conhecidos para espaços normados.

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço quase-normado, os conjuntos $U_n = \left\{x \in X : \|x\| < \frac{1}{n}\right\}$ formam uma base de vizinhanças da origem. Assim, se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência convergente, digamos $x_n \longrightarrow x \in X$, sendo X um espaço topológico, então $x_n - x \longrightarrow 0$. Dado $\varepsilon > 0$, considere $m \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{m} < \varepsilon$, da convergência da sequência existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com

$$x_n - x \in U_m \text{ para todo } n > n_0$$

isto equivale a dizer que

$$\|x_n - x\| < \frac{1}{m} < \varepsilon \text{ sempre que } n > n_0.$$

Esse cálculo simples nos mostra que a convergência de sequências em espaços quase-normados é igual a convergência de sequências em espaços normados, isto nos leva a seguinte definição.

Definição 2.10. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço quase-normado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X. Dizemos que $x_n \longrightarrow x \in X$ quando $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.*

Observação 2.1. *Sejam $0 < p < 1$ e $(X, \|\cdot\|)$ uma $p-$norma, então X é um espaço quase normado com $K = 2^{\frac{1}{p}}$. De fato, para cada $x, y \in X$, temos que*

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\leq (\|x\|^p + \|y\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq [(\|y\| + \|x\|)^p + (\|x\| + \|y\|)^p]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [2\left(\|x\| + \|y\|\right)^p]^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{\frac{1}{p}}\left(\|x\| + \|y\|\right), \end{aligned}$$

portanto,

$$\|x + y\| \leq K\left(\|x\| + \|y\|\right),$$

para todo $x, y \in X$.

Reciprocamente, segue do Teorema de Aoki-Rolewicz (Ver Teorema 2.12) que todo espaço quase-normado induz uma $p-$*norma que é equivalente a sua quase-norma original.*

Exemplo 2.5. *Seja* $0 < p < 1$. *O espaço* ℓ_p *é* $p-$*normado quando munido com a* $p-$*norma*

$$\|x\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, \text{ em que } x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p.$$

Portanto é um espaço quase-normado.

Definição 2.11. *Seja* X *um espaço quase-normado cuja quase-norma é, por simplicidade, uma* p*-norma para algum* $0 < p < 1$. *Então*

$$d(x, y) = \|x - y\|^p$$

define uma métrica invariante por translação em X. *O espaço quase-normado* X *é chamado de* $p-$*Banach ou quase-Banach se* X *é completo em relação a métrica induzida pela* $p-$*norma.*

Exemplo 2.6. *Seja* $0 < p < 1$. *O espaço* ℓ_p *é* $p-$*Banach pois é completo com a métrica*

$$d(x, y) = \|x - y\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p,$$

onde $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ *e* $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$.

Observação 2.2. *Como toda* p*-norma induz uma* F*-norma de maneira imediata através da correspondência* $\|x\| = \|x\|_1^p$, *em que* $\|\cdot\|_1$ *é uma* p*-norma, então todo espaço quase-normado tem a topologia induzida por uma* F*-norma, por meio da métrica invariante por translação* $d(x, y) = \|x - y\|$. *Assim segue o resultado abaixo.*

Proposição 2.13. *Todo espaço* $p-$*Banach é um* $F-$*espaço.*

O resultado abaixo é uma consequência importante do Teorema de Aoki-Rolewicz.

Corolário 2.14. *Cada* $F-$*espaço* X *está associado a uma* $F-$*norma* $\|\cdot\|_F$ *que induz a métrica em* X *por meio da função* $d(x, y) = \|x - y\|_F$.

Sabemos da demonstração do Lema 2.4 que se X é um espaço vetorial quase normado então

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \leq \max_{1 \leq j \leq n} c^j \|x_j\|$$

para quaisquer $x_1, x_2, \cdots x_n \in X$.

Lema 2.15. *Seja $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes em um espaço quase normado X. Então existe $K > 0$ tal que*

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n\| \leq K\left(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|\right)$$

para quaisquer escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

Definição 2.12. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ dois espaços quase-normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então T é dito limitado se existir $M > 0$ tal que*

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

Teorema 2.16. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ dois espaços quase-normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, T é limitado.*

Demonstração. Suponha que exista $M > 0$ com $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência com $x_n \longrightarrow x \in X$. Então,

$$\begin{aligned} \|T(x_n) - T(x)\| &= \|T(x_n - x)\| \\ &\leq M\|x_n - x\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Assim, $T(x_n) \longrightarrow T(x)$.

Reciprocamente, suponhamos que T é um operador linear contínuo. Suponhamos por absurdo que T não seja limitado. Existe então uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X com $\|T(x_n)\| > n\|x_n\|$. Como claramente $x_n \neq 0$ para todo n, podemos definir

$$y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}.$$

então,

$$\|y_n\| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

daí $y_n \longrightarrow 0$ e como T é contínua segue que $T(y_n) \longrightarrow T(0) = 0$, o que é um absurdo pois $\|T(y_n)\| > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Teorema 2.17. *Sejam X e Y espaços quase-normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Se dimensão de X é finita, então T é contínuo.*

Demonstração. Sejam $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ uma base para X. Dado $x \in X$ existem escalares $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ tais que $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \in X$. Logo

$$\|T(x)\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(x_j)\right\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{1\leq j\leq n} c^j \|\alpha_j T(x_j)\| \\ &= \max_{1\leq j\leq n} c^j |\alpha_j| \|T(x_j)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \max_{1\leq j\leq n} c^j \|T(x_j)\| \\ &\leq M \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \end{aligned}$$

onde $M = \max_{1\leq j\leq n} c^j \|T(x_j)\|$. Pelo Lema 2.15 existe $K > 0$ tal que

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\| \geq K \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|.$$

Portanto,

$$\|T(x)\| \leq \frac{M}{K} \|x\| \text{ para todo } x \in X,$$

assim T é limitado, em particular contínuo.

□

O Teorema 2.16 nos dá uma ótima sugestão de como definir uma quase-norma no espaço dos operadores lineares contínuos, já que se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, então existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$, isto nos diz que

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty.$$

Teorema 2.18. *Sejam X,Y espaços quase normados. Para cada $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ definamos*

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

Então $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ é um espaço quase-normado.

Demonstração. As condições (1) e (2) são imediatas pela definição. Iremos verificar (3), para isso sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$. Então

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\| &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|(T_1+T_2)(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|(T_1+T_2)(x)\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{x\neq 0} \frac{c\max\{\|T_1(x)\|, \|T_2(x)\|\}}{\|x\|} \\ &\leq c\max\left\{ \sup_{x\neq 0} \frac{\|T_1(x)\|}{\|x\|}, \sup_{x\neq 0} \frac{\|T_2(x)\|}{\|x\|} \right\} \\ &= c\max\{\|T_1\|, \|T_2\|\}. \end{aligned}$$

Provando assim que $\mathcal{L}(X,Y)$ é um espaço quase-normado.

□

Lema 2.19. *Sejam X um espaço quase normado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X tal que $x_n \longrightarrow x$, então*

$$\|x\| = \left\| \lim_{x\to\infty} x_n \right\| \leq K \lim_{n\to\infty} \|x_n\|,$$

em que K é o módulo de concavidade da quase norma.

Demonstração. Usando a desigualdade (2.6) temos,

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq K(\|x - x_n\| + \|x_n\|) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} K(\|x - x_n\| + \|x_n\|) \\ &\leq K \lim_{n\to\infty} \|x_n\|. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.20. *Sejam X,Y espaços quase-normados com Y completo. Então $\mathcal{L}(X,Y)$ é um espaço quase-normado completo.*

Demonstração. Já sabemos que $\mathcal{L}(X,Y)$ é um espaço quase-normado. Resta-nos provar que é completo. Considere $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy $\mathcal{L}(X,Y)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \text{ para todo } m, n \geq N.$$

Para cada $x \in X$ temos,

$$\|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|, \text{ sempre que } m, n \geq N. \tag{2.7}$$

Fixando $x \in X$ a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em Y, portanto convergente. Definimos assim o operador $T : X \longrightarrow Y$ dada por

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

Como claramente T é linear, é suficiente verificar que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $T_n \longrightarrow T$. Usando o Lema 2.19 junto com a desigualdade 2.7 obtemos,

$$\begin{aligned} \|T_n(x) - T(x)\| &= \|T_n(x) - \lim_{m\to\infty} T_m(x)\| \\ &= \left\| \lim_{m\to\infty} T_n(x) - T_m(x) \right\| \\ &\leq c \cdot \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \\ &\leq c \cdot \lim_{m\to\infty} \|T_n - T_m\|\|x\| \\ &\leq c\varepsilon\|x\|, \end{aligned}$$

para todo $n \geq N$ e $x \in X$. Sendo T_N contínua, então $T = (T - T_N) + T_N$ é também contínua e assim $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Por fim, como

$$\|T_n - T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T_n(x) - T(x)\|}{\|x\|} \leq c\varepsilon \text{ para todo } n > N,$$

segue que $T_n \longrightarrow T$ e assim $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço quase-normado completo.

□

Exemplo 2.7. *Seja $X = \mathbb{R}^2$ o espaço vetorial. Considere a quase norma dada por*

$$\|x\| = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}\right)^2 \quad \textit{em que } x = (x_1, x_2).$$

Sejam $a = (a_1, a_2)$ e $T : X \longrightarrow X$ o operador linear definido por

$$T(x) = \langle x, a\rangle = x_1a_1 + x_2a_2$$

então $f \in \mathcal{L}(X, X)$. De fato, basta notar que

$$\frac{|T(x)|}{\|x\|} = \frac{|x_1a_1 + x_2a_2|}{\left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}\right)^2} \leq \frac{|x_1a_1| + |x_2a_2|}{|x_1| + 2\sqrt{|x_1|}\sqrt{|x_2|} + |x_2|}$$

logo,

$$\frac{|T(x)|}{\|x\|} = \frac{|x_1a_1|}{|x_1| + 2\sqrt{|x_1|}\sqrt{|x_2|} + |x_2|} + \frac{|x_2a_2|}{|x_1| + 2\sqrt{|x_1|}\sqrt{|x_2|} + |x_2|}$$

donde segue que T é limitado pois,

$$\frac{|T(x)|}{\|x\|} \leq |a_1| + |a_2| \quad \textit{para todo } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Naturalmente surge a seguinte questão: quais serão as formas dos resultados fundamentais da análise funcional neste contexto? Nas próximas seções comentaremos alguns resultados centrais para espaços vetoriais topológicos satisfazendo algumas condições de metrizabilidade e convexidade. Como espaços quase normados não são em geral localmente convexo, como por exemplo ℓ_p com $0 < p < 1$, é natural imaginar que alguns teoremas não permaneçam válidos nesses ambientes. Apesar disso, citaremos a seguir sem demonstração dois resultados que permanecem idênticos quando alterado o contexto de espaços normados para espaços quase-normados.

Teorema 2.21. *Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas quase normas em um espaço X tal que $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ para todo $x \in X$. Se X for completo com relação as duas normas, então existe uma constante $C > 0$ tal que $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ para todo $x \in X$.*

Teorema 2.22. *(Banach-Steinhaus) Sejam X, Y espaços quase-Banach e $\{A_i\}_{i\in I}$ uma sequência de operadores lineares contínuos de X em Y. Se para cada $x \in X$, existe uma constante $c_x > 0$ tal que*

$$\sup_{i\in I} \|A_i(x)\| \leq c_x$$

então,

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|.$$

2.4 Teorema de Banach-Steinhaus

Definição 2.13. *Sejam X, Y espaços vetoriais topológicos e $\mathcal{F}$ uma família de aplicações lineares de X em Y. Dizemos que $\mathcal{F}$ é equicontínua, se para toda vizinhança da origem W em Y existir uma vizinhança da origem U em X de modo que $f(U) \subseteq Y$ para todo $f \in \mathcal{F}$.*

Definição 2.14. *Sejam X, Y espaços vetoriais topológicos e $\mathcal{F}$ uma família equicontínua de aplicações lineares de X em Y.*

1. *Diremos que $\mathcal{F}$ é pontualmente limitada quando para cada $x \in X$ o conjunto*

$$\mathcal{F}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$$

   for limitado em Y.

2. *Diremos que $\mathcal{F}$ é limitada nos limitados se para cada limitado $E \subseteq X$ o conjunto*

$$\mathcal{F}(E) = \{f(x) : f \in \mathcal{F}, x \in E\} = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(E)$$

   for limitado em Y.

Claramente cada elemento de uma família equicontínua de funções é em particular contínua, assim $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$. Se X e Y forem espaços normados e $\mathcal{F}$ uma família equicontínua de funções e $W = B(0; 1)$ a bola aberta centrada na origem de raio 1 em Y, então existe uma vizinhança V da origem em X tal que $f(V) \subseteq W$ para todo $f \in \mathcal{F}$, disto segue que $\{\|f\| : f \in \mathcal{F}\} < \infty$. Portanto, se $E \subseteq X$ é um conjunto limitado, então o conjunto $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(E)$ é também limitado, ou seja, $\mathcal{F}$ é limitada nos limitados. Veremos na proposição a seguir que toda família equicontínua é limitada nos limitados.

Proposição 2.23. *Sejam X, Y espaços vetoriais topológicos, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ uma família equicontínua. Então $\mathcal{F}$ é limitada nos limitados.*

Demonstração. Seja $E \subseteq X$ um conjunto limitado. Considere $V \in \mathcal{U}_0(Y)$ equilibrada em Y. Como $\mathcal{F}$ é equicontínua, existe $U \in \mathcal{U}_0(X)$ tal que $f(U) \subseteq V$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Como E é limitado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $E \subseteq n_0U$ assim,

$$\mathcal{F}(E) \subseteq \mathcal{F}(n_0U) = n_0\mathcal{F}(U) \subseteq n_0V.$$

Portanto, $\mathcal{F}(E)$ é limitado em Y.

□

Antes do próximo teorema, precisaremos definir os espaços de Baire.

Definição 2.15. *Dizemos quem um espaço topológico X é um espaço de Baire, se podemos escrever*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

em que cada A_n é fechado, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que o interior de A_{n_0} é não vazio.

A seguir iremos apresentar o princípio da limitação uniforme para espaços vetoriais topológicos de Baire. A versão desse teorema é totalmente topológica uma vez que não possuímos nenhuma estrutura de norma nesse espaço. O Teorema 2.22 é uma versão idêntica para espaços quase-normados ao caso já conhecido que apresentamos no Corolário 2.25. Entretanto, é importante salientar que mesmo em F-espaços não existe uma versão desse teorema envolvendo F-norma.

Teorema 2.24. *(Banach-Steinhaus). Sejam X um espaço vetorial topológico de Baire, Y um espaço vetorial topológico e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ uma família de funções. Se $\mathcal{F}$ é pontualmente limitada, então $\mathcal{F}$ é equicontínua.*

Demonstração. Considere $V \in \mathcal{U}_0(Y)$ e seja $V_1 \in \mathcal{U}_0(Y)$ com V_1 equilibrada e fechada tal que $V_1 + V_1 \subseteq V$. Como cada $f \in \mathcal{F}$ é contínua, então conjunto

$$A = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(V_1)$$

é fechado em X e $f(A) \subseteq V_1$ para cada $f \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é pontualmente limitada, para cada $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}(x) \subseteq nV_1$. Daí segue que se $f \in \mathcal{F}$ então $f(x) = nv$ para algum $v \in V_1$, ou melhor $f\left(\frac{x}{n}\right) \in V_1$. Assim $\frac{x}{n} \in A$, logo $x = n\frac{x}{n} \in nA$ e, portanto,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA.$$

Como X é um espaço de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n_0 A$ tem interior não vazio. Logo A tem interior não vazio. Seja U_1 um aberto em X com $U_1 \subseteq A$ e considere $U = U_1 - U_1$. Então U é uma vizinhança aberta da origem pois X é um espaço vetorial topológico e também $U \subseteq A - A$. Finalmente obtemos que

$$T(U) \subseteq T(A - A) = T(A) - T(A) \subseteq V_1 - V_1 \subseteq V_1 + V_1 \subseteq V.$$

Provando assim a equicontinuidade de $\mathcal{F}$.

□

Como todo espaço métrico completo é um espaço de Baire, o Teorema de Banach-Steinhaus continua sendo válido se supormos X um $F-$espaço.

Corolário 2.25. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ uma família de operadores pontualmente limitados, isto é, para cada $x \in E$,*

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T(x)\| < \infty$$

então

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty.$$

Demonstração. Sendo $\mathcal{F}$ pontualmente limitada, então pelo teorema de Banach-Steinhaus $\mathcal{F}$ é equicontínua, e como já comentamos anteriormente, isto implica que,

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty.$$

□

Corolário 2.26. *Sejam X um $F-$espaço e Y um espaço vetorial topológico de Hausdorff. Se $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$ existe para cada $x \in X$. Então $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Demonstração. Como cada T_n é linear, contínua e Y é Hausdorff, segue que T é linear. Para cada $x \in X$ a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente, logo pela Proposição 1.14 é limitada em F. Portanto do Teorema de Banach-Steinhaus segue que a sequência $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é equicontínua. Seja $V \in \mathcal{U}_0(Y)$, com V fechada, existe assim $U \in \mathcal{U}_0(X)$ tal que $T_n(U) \subseteq V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí temos

$$T(U) \subseteq \overline{T_n(U)} \subseteq \overline{V} = V$$

logo T é contínuo.

□

2.5 Teorema da Aplicação Aberta

Proposição 2.27. *Seja X um espaço vetorial topológico e M um subespaço fechado em X. Se X é um $F-$espaço, ou espaço de Fréchet, ou espaço de Banach então X/M também o é.*

Demonstração. Suponha que d é uma métrica invariante por translação em X compatível com a sua topologia τ. Definamos a função $\rho : E/M \times E/M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\rho(\pi(x),\pi(y)) = dist(x-y,M) = \inf\{d(x-y,a) : a \in M\}.$$

Vejamos que ρ é uma métrica em E/M.

Claro que $\rho(\pi(x),\pi(y)) \geq 0$ para todo $x, y \in X$. Agora se $x, y \in X$ são tais que $\rho(\pi(x),\pi(y)) = 0$ temos,

$$dist(x-y,M) = 0 \Longleftrightarrow x-y \in \overline{M} = M \Longleftrightarrow \pi(x) = \pi(y).$$

Sejam $x, y, z \in X$ e $a \in M$, como d é uma métrica invariante por translação então

$$\begin{aligned} d(x-y,a) &= d(x-y+(-z+y), a-(z+y) \\ &= d(x-z, a-(-z+y)) \\ &\leq d(x-z,-a) + d(-a, a+z-y), \end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned} d(-a, a+z-y) &= d(-a-z+y+a, a+z-y-z+y+a) \\ &= d(y-z, 2a), \end{aligned}$$

temos assim que

$$d(x-y, a) \leq d(x-z, -a) + d(y-z, 2a).$$

Aplicando o ínfimo nessa desigualdade, obtemos

$$\rho(\pi(x), \pi(y)) \leq \rho(\pi(x), \pi(z)) + \rho(\pi(z)\pi(y)).$$

e por fim, temos

$$\begin{aligned} \rho(\pi(x)+\pi(z), \pi(y)+\pi(z)) &= \rho(\pi(x+z), \rho(y+z)) \\ &= \inf\{d(x+z-(y+z), a) : a \in M\} \\ &= \inf\{d(x-y, a) : a \in M\} \\ &= \rho(\pi(x), \pi(y)). \end{aligned}$$

Portanto ρ defina uma métrica invariante por translação em X/M.

Agora note que a coleção $B_0 = (A_r)_{r>0}$ em que

$$A_r = \{x \in X : d(x, 0) < r\}$$

formam uma base de vizinhanças da origem em X, assim pelo item (5) da Proposição 1.50 a família $(\pi(A_r))_{r>0}$ forma uma base de vizinhanças da origem em X/M e como

$$\pi(A_r) = \{\pi(x) : \rho(\pi(x), 0) < r\}$$

segue que a métrica ρ é compatível com a topologia quociente em X/M. Resta provar que ρ é uma métrica completa.

Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em X/M. Dado $k \in \mathbb{N}$, podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(u_n, u_m) < 2^{-k}$ sempre que $m, n > n_0$. Logo, existe, $n_1 < n_2 < \ldots$ tais que

$$\rho(u_{n_k}, u_{n_{k+1}}) < 2^{-k} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Por indução, podemos escolher $x_k \in X$ tal que $\pi(x_k) = u_{n_k}$ e $d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-k}$. Como d é uma métrica completa e a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em X, então converge para algum $x \in X$. Como a aplicação π é contínua, temos $\pi(x_k) = u_{n_k} \longrightarrow \pi(x)$ quando $k \longrightarrow \infty$. Assim, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência de Cauchy, portanto a própria sequência converge.

Concluímos assim que X/M é um F-espaço sempre que X for um $F-$espaço, e como o quociente de um espaço localmente convexo é sempre localmente convexo, então segue também que X/M é um espaço de Fréchet quando X for um espaço de Fréchet. □

Definição 2.16. *Sejam X e Y espaços topológicos. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é dito aplicação aberta, quando $T(U)$ é uma vizinhança de Y sempre que U for uma vizinhança de X.*

Teorema 2.28. *(Aplicação Aberta). Sejam X um F-espaço, Y um espaço vetorial topológico de Baire e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear contínuo. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *T é sobrejetiva*
2. *$\overline{T(U)} \in \mathcal{U}_0(Y)$ para cada $U \in \mathcal{U}_0(X)$.*
3. *$T(U) \in \mathcal{U}_0(Y)$ para cada $U \in \mathcal{U}_0(X)$.*
4. *T é uma aplicação aberta.*

Se verificam estas condições, então Y é um F-espaço.

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2). Com efeito, dado $U \in \mathcal{U}_0(X)$, seja U_1 uma vizinhança da origem de X equilibrada com $U_1 + U_1 \subseteq U$. Pelo Teorema 1.12 e por T ser sobrejetiva, temos que

$$Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(U_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(U_1)}.$$

Sendo Y um espaço de Baire, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que o interior de $n_0\overline{T(U_1)}$ é não vazio e assim o interior de $\overline{T(U_1)}$ é também não vazio. Seja V_1 um aberto não vazio em Y contido em $\overline{T(U_1)}$. Defina $V = V_1 - V_1$, logo V é uma vizinhança da origem em Y e

$$V \subseteq \overline{T(U_1)} - \overline{T(U_1)} \subseteq \overline{T(U_1) - T(U_1)} \subseteq \overline{T(U)}.$$

Portanto, $\overline{T(U)} \in \mathcal{U}_0(Y)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Seja X um F-espaço e $\|\cdot\|$ uma F-norma associada a X. Sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ o conjunto

$$V(\varepsilon) = \{x \in X : \|x\| < \varepsilon\}$$

é uma vizinhança da origem. É suficiente ver que

$$\overline{T\left(V\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right)} \subseteq T(V(\varepsilon)).$$

Considere $y = y_1 \in \overline{T\left(V\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right)}$. Por indução, escolha $y_n \in \overline{T\left(V\left(2^{-n}\varepsilon\right)\right)}$ e $x_n \in V\left(2^{-n}\varepsilon\right)$. Suponhamos que y_n já tenha sido escolhido. Como por hipótese $\overline{T\left(V\left(2^{-n-1}\varepsilon\right)\right)}$ é uma vizinhança da origem em Y, então $y_n + \overline{T\left(V\left(2^{-n}\varepsilon\right)\right)}$ é uma vizinhança da y_n, logo

$$\left(y_n + \overline{T\left(V\left(2^{-n-1}\varepsilon\right)\right)}\right) \cap T\left(V\left(2^{-n}\varepsilon\right)\right) \neq \emptyset.$$

Assim, existe $x_n \in V\left(2^{-n}\varepsilon\right)$ tal que

$$y_n - T(x_n) \in \overline{T\left(V\left(2^{-n-1}\varepsilon\right)\right)}.$$

Seja $y_{n+1} = y_n - T(x_n)$. Portanto, $y_{n+1} \in \overline{T\left(V\left(2^{-(n+1)}\varepsilon\right)\right)}$ e continuamos o processo indefinidamente. A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfaz $\|x_n\| < 2^{-n}\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo

$$d(x_n, x_m) = \left\| \sum_{j=n}^{m} x_j \right\| \leq \sum_{j=n}^{m} \|x_j\| \leq \sum_{j=n}^{m} 2^{-j}\varepsilon \longrightarrow 0,$$

quando $m > n \longrightarrow \infty$. Daí a sequência $\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy no $F-$espaço X, logo convergente, digamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in X,$$

segue então que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_n \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \|x_n\| = \|x_1\| + \sum_{n=2}^{\infty} \|x_n\| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \sum_{n=2}^{\infty} \|x_n\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como T é contínuo, e como a série $\sum_{n=1}^{N}(y_n - y_{n+1})$ é telescópia, temos

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} T\left(\sum_{n=1}^{N} x_j\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} T(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (y_n - y_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} (y_1 - y_{n+1}) = y_1 - \lim_{n\to\infty} y_{n+1}. \end{aligned}$$

Por fim, sabemos que $y_{n+1} \in \overline{T\left(V\left(2^{-n-1}\varepsilon\right)\right)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere agora U uma vizinhança da origem em Y e seja W uma vizinhança fechada da origem em Y com $W \subseteq U$. Sendo T é contínua, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T\left(V\left(2^{-n_0}\varepsilon\right)\right) \subseteq W$, disto segue que $T\left(V\left(2^{-n}\varepsilon\right)\right) \subseteq W$ para todo $n > n_0$. Assim temos

$$y_n \in \overline{T\left(V\left(2^{-n}\varepsilon\right)\right)} \subseteq \overline{W} = W \subseteq U \text{ para todo } n > n_0.$$

portanto $y_n \longrightarrow 0$. Como consequência $T(x) = y_1 = y$, logo $\overline{T\left[V\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right]} \subseteq T(V(\varepsilon))$ provando assim o resultado.

(3) $\Longrightarrow$ (4). É imediato.

(4) $\Longrightarrow$ (1). Como X é aberto nele próprio, então $T(X)$ é um aberto contendo a origem em Y, logo absorvente. Temos assim que se $y \in Y$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $y \in \varepsilon T(X) = T(\varepsilon X) = T(X)$.

Por fim, se T satisfaz algumas destas condições equivalentes, digamos (1). Considere o subespaço fechado $M = Ker\, T$, então a aplicação $G : X/M \longrightarrow Y$ dada por $G(\pi(x)) = T(x)$ é um isomorfismo linear, daí $X/M = Y$ e pela Proposição 2.27 segue que Y é um F-espaço.

□

Corolário 2.29. *Sejam X, Y $F-$espaços e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear contínuo bijetor, então T é um isomorfismo.*

Corolário 2.30. *Sejam X um espaço vetorial e τ_1, τ_2 duas topologias em X que o tornam um $F-$espaço. Se $\tau_1 \subseteq \tau_2$, então $\tau_1 = \tau_2$.*

Demonstração. Como $\tau_1 \subseteq \tau_2$ então a aplicação identidade $i_d : (X, \tau_2) \longrightarrow (X, \tau_1)$ é uma bijeção linear contínua, logo pelo corolário anterior $i_d : (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_2)$ é também contínua, segue daí que $\tau_1 = \tau_2$.

□

2.6 Teorema do Gráfico Fechado

Teorema 2.31. *(Gráfico Fechado) Sejam X e Y F-espaços e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear de gráfico fechado. Então T é contínuo.*

Demonstração. Sejam d_X e d_Y duas métricas completas invariantes por translação sobre X e Y respectivamente. Então não é difícil ver que a função $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(x_1, x_2)$$

é uma métrica completa invariante por translação compatível com a topologia produto em $X \times Y$. Sendo T linear então $G(T)$ é um subespaço de $X \times Y$. Como por hipótese $G(T)$ é fechado, tal conjunto é completo com a métrica d, logo $G(T)$ é um $F-$espaço. Definindo as aplicações projeções

$$\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X,\ \pi_1(x, y) = x$$

e

$$\pi_2 : X \times Y \longrightarrow X,\ \pi_2(x, y) = y,$$

sabemos que π_1, π_2 são contínuas e se restringimos $G(T)$ a aplicação $\pi_1 : G(T) \longrightarrow X$ dada por, $\pi_1(x, T(x)) = x$, então π_1 é injetiva. Com efeito, se $x, y \in X$ são tais que $\pi_1(x, T(x)) = \pi_1(y, T(y))$, então $x = y$, daí $(x, T(x)) = (y, T(y))$. Claramente $\pi_1|_{G(T)}$ é sobrejetiva, logo uma bijeção linear contínua entre $F-$espaços, segue do Teorema da Aplicação Aberta que a inversa $\left(\pi_1|_{G(T)}\right)^{-1} : X \longrightarrow G(T)$ é também contínua, e como $T = \pi_2 \circ \left(\pi_1|_{G(T)}\right)^{-1}$, segue que T é contínua.

□

Corolário 2.32. *Sejam X e Y espaços de Fréchet. Se $T : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação linear fracamente contínua, então T é contínua.*

Demonstração. Pelo Teorema do Gráfico Fechado é suficiente que $G(T)$ seja um conjunto fechado. Para isso seja $(x_n, T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $G(T)$, com $x_n \longrightarrow 0$ e $T(x_n) \longrightarrow y$, então $x_n \xrightarrow{w} 0$ e $T(x_n) \xrightarrow{w} y$, como T é fracamente contínua segue que $T(x_n) \longrightarrow T(0) = 0$, da

unicidade do limite temos $y = 0$. Para o caso geral basta ver que se $x_n \longrightarrow x$ então $x_n - x \longrightarrow 0$. Portanto T é contínua.

□

2.7 Pontos Extremais

Relembremos que se X é um espaço vetorial e $a, b \in X$, o segmento fechado e o segmento aberto de extremos em a e b são definidos respectivamente, por $[a, b] = \{ta + (1-t)b : 0 \leq t \leq 1\}$ e $(a, b) = \{ta + (1-t)b : 0 < t < 1\}$.

Definição 2.17. *Sejam K um subconjunto de um espaço vetorial E e $S \subseteq K$. Dizemos que S é um subconjunto extremal de K se satisfaz a seguinte propriedade:*

$$a, b \in K \text{ e } (a, b) \cap S \neq \emptyset \Longrightarrow a, b \in S.$$

Um ponto $x_0 \in K$ é dito ponto extremal de K quando $\{x_0\}$ for um subconjunto extremal de K. Assim um ponto é extremal quando não está contido em nenhum segmento aberto em K. Denotaremos por $Ext(K)$ o conjunto de todos os pontos extremais de K.

Exemplo 2.8. *Seja $X = \mathbb{R}^2$ e $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Então cada lado do quadrado é um subconjunto extremal de K e além disso $Ext(K) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Agora se $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, então o conjunto dos pontos extremais de K é a circunferência centrada na origem de raio 1, ou melhor, $Ext(K) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.*

Mais geralmente, se X é um espaço normado então $Ext(B_X) \subseteq S_X$ onde, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. De fato, pois dado $x \in Ext(B_X)$, se $x \in B(0; 1)$, então $\|x\| < 1$ e $\dfrac{x}{\|x\|} \in S_X$, temos

$$\|x\| \frac{x}{\|x\|} + (1 - \|x\|)0 = x,$$

o que não pode acontecer pois x é um ponto extremal.

Lema 2.33. *Sejam X um espaço localmente convexo real, $K \subseteq X$ um conjunto compacto não vazio. Se f é um funcional linear contínuo em X, definindo*

$$\alpha = \sup_{x \in K} f(x),$$

então $A = \{x \in K : f(x) = \alpha\}$ é um subconjunto extremal não vazio de K.

Demonstração. Note que A é não vazio, pois K é compacto e f é contínua. Dados $a, b \in K$ tais que $(a, b) \cap A \neq \emptyset$, ou seja, existe $x = ta + (1 - t)b \in A$ para algum $t \in (0, 1)$. Vejamos que $a, b \in A$. Com efeito, suponhamos que $f(a) < f(b)$, então $f(a) < \alpha$, logo

$$f(x) = f(ta + (1-t)b) = tf(a) + (1-t)f(b) < t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha$$

o que é uma contradição já que $x \in A$. Portanto, A é um conjunto extremal de K.

□

O próximo teorema é um resultado clássico em Análise Convexa o qual indica como construir um conjunto compacto e convexo a partir de seus pontos extremais.

Teorema 2.34. *(Teorema de Krein-Milman) Seja K um subconjunto compacto de um espaço localmente convexo X. Então K está contido no fecho da envoltória convexa de seus pontos extremais, isto é, $K \subseteq \overline{conv}(Ext(K))$*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ a coleção de todos os subconjuntos compactos extremais contidos em K. Como K é um subconjunto extremal de K, então $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Considere sobre $\mathcal{P}$ a relação de ordem parcial $A \leq B \iff A \subseteq B$. Por outro lado, seja $\mathcal{S} = (S_i)_{i\in I}$ uma coleção de conjuntos em $\mathcal{P}$, vejamos que $L = \bigcap_{i\in I} S_i$ pertence a $\mathcal{P}$. Como cada conjunto compacto é fechado, segue que L é um subconjunto fechado de K, portanto compacto. Agora sejam $a, b \in K$ com $(a, b) \cap L \neq \emptyset$, logo para todo $i \in I$ temos $(a, b) \cap S_i \neq \emptyset$, como cada S_i é um conjunto extremal segue que $a, b \in S_i$ para todo $i \in I$, daí $a, b \in L$.

Para cada $S \in \mathcal{P}$ e $f \in X^{'}$ defina

$$S_f = \{x \in S : Re(f(x)) = \alpha\}$$

onde $Re(f(x))$ é a parte real do escalar $f(x)$ e $\alpha = \sup_{x\in S} Ref(x)$. Sabemos pelo lema anterior que S_f é um subconjunto extremal de K, como $S_f = S \cap Ref^{-1}(\{\alpha\}) \subseteq K$, então S_f é fechado por ser interseção de fechado, em particular compacto. Daí segue que $S_f \in \mathcal{P}$ para cada $S \in \mathcal{P}$ e $f \in X^{'}$.

Consideremos agora $S \in \mathcal{P}$ e seja $\mathcal{P}^{'} = \{T \in \mathcal{P} : T \subseteq S\}$. Como $S \in \mathcal{P}^{'}$, se tem que $\mathcal{P}^{'} \neq \emptyset$. O nosso objetivo é construir um elemento minimal em $\mathcal{P}^{'}$, para isso seja $\Omega = (T_i)_{i\in I}$ um conjunto totalmente ordenado em $\mathcal{P}^{'}$. Considere $N = \bigcap_{i\in I} T_i$. Como já vimos $N \in \mathcal{P}$ e $N \subseteq S$, pois $T_i \in \mathcal{P}^{'}$ para cada $i \in I$. Assim N é um elemento minimal de Ω. Logo pelo Lema de Zorn, existe um elemento $M \in \mathcal{P}^{'}$ minimal. Portanto nenhum subconjunto próprio de M pertence a $\mathcal{P}$, assim, para cada $f \in X^{'}$ devemos ter $M_f = M$, pois como já vimos $M_f \in \mathcal{P}$, disto segue que Ref é sempre constante. Vejamos que M é um conjunto unitário. De fato, sejam $a, b \in M$ com $a \neq b$, como X é localmente convexo, pelo Teorema 1.43 existe um funcional $f \in X^{'}$ de modo que $Ref(a) < Ref(b)$, contrariando assim o fato de Ref ser constante. Donde temos que M é um conjunto extremal unitário de K. Provamos assim que todo conjunto compacto K possui pelo menos um ponto extremal.

Por fim, considere $H = con(Ext(K))$, vamos provar que $K \subseteq \overline{H}$. Suponhamos que exista $x_0 \in K/\overline{H}$. Novamente pelo Teorema 1.43 existem $f \in X^{'}$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$Ref(x) < \alpha_1 < \alpha_2 < Ref(x_0) \text{ para todo } x \in \overline{H},$$

já que $\{x_0\}$ e $\overline{H}$ são conjuntos não vazios, fechados, convexos e $\{x_0\}$ compacto. Considere

$$K_f = \{y \in K : Ref(y) = \max_{x\in K} Ref(x)\}.$$

Como K_f é um subconjunto extremal compacto em K e $Ref(y) \geq Ref(x_0)$ para todo $y \in K_f$,

pois $x_0 \in K$, temos que $K_f \cap \overline{H} = \emptyset$. Sendo K_f compacto, então admite ao menos um ponto extremal, logo $K_f \cap Ext(K) \neq 0$, gerando assim uma contradição já que

$$Ext(K) \subseteq H \subseteq \overline{H}.$$

Concluímos finalmente que $K \subseteq \overline{H}$. □

No exemplo a seguir veremos que a hipótese de compacidade é essencial no Teorema de Krein-Milman.

Exemplo 2.9. *O espaço c_0 de todas as sequências que convergem para zero é um espaço de Banach quando munido com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Assim c_0 é em particular um espaço localmente convexo. Seja $B_{c_0} = \{x \in c_0 : \|x\|_\infty \leq 1\}$ a bola fechada em c_0. Como já sabemos, B_{c_0} é fechada, equilibrada e convexa. Vejamos que B_{c_0} não admite pontos extremais. Do Exemplo 2.8 sabemos que os possíveis pontos extremais de B_{c_0} estão localizados na esfera, considere assim $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in c_0$ com*

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 1.$$

Podemos então mudar as coordenadas de x de modo que $|x_k| < 1$. Ou de maneira alternativa, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $x_k - \varepsilon$ e $x_k + \varepsilon$ tem módulos menores que 1. Definindo assim as sequências $y = (x_n + \varepsilon)_{n=1}^\infty$ e $z = (x_n - \varepsilon)_{n=1}^\infty$, então $y, z \in B_{c_0}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$x_k = \frac{1}{2}(x_k + \varepsilon) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(x_k - \varepsilon),$$

daí segue que x está entre y e z, concluímos assim que B_{c_0} não admite ponto extremal.

Este exemplo não contradiz o Teorema de Krein-Milman pois B_{c_0} não é um conjunto compacto, uma vez que a dimensão de c_0 é infinita.

Determinar a não existência de pontos extremais nunca é uma tarefa fácil. O Teorema de Krein-Milman é também um teorema de existência no qual afirma que todo subconjunto compacto de um espaço localmente convexo admite pelo menos um ponto extremal. O matemático James W. Roberts em [31] construiu no espaço $L_p[0,1]$ com $0 < p < 1$ um conjunto compacto e convexo que não possui pontos extremais.

Corolário 2.35. *Seja K um subconjunto compacto e convexo de um espaço localmente convexo Hausdorff X. Então $K = \overline{conv}(Ext(K))$.*

Demonstração. Basta notar que como $Ext(K) \subseteq K$ então

$$conv(Ext(K)) \subseteq conv(K)$$

Assim,

$$\overline{conv}(Ext(K)) \subseteq \overline{conv}(K) = \overline{K} = K.$$

□

Teorema 2.36. *Seja K um subconjunto compacto de um espaço localmente convexo Hausdorff X tal que $C = \overline{conv}(K)$ é compacto. Então $Ext(C) \subseteq K$.*

Demonstração. Primeiramente basta verificar que todo ponto extremal de C é um ponto de $K + U$, onde U é uma vizinhança convexa equilibrada da origem em X. Com efeito, se U é tal vizinhança, então

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} (x + U),$$

sendo K compacto existem $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$ tais que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U)$. Consideremos assim o conjunto fechado $V_i = \overline{conv}(K \cap (x_i + U)$. Como claramente $V_i \subseteq C$ e C é um conjunto compacto, segue que cada V_i é um conjunto compacto e convexo (pois é o fecho de um conjunto convexo). Logo a união dos V_i ainda é um conjunto compacto, portanto $conv\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)$ é um conjunto compacto e convexo. Sendo K coberto pelos conjuntos da forma $x_i + U$, segue facilmente que $K \subseteq conv\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)$ e daí temos $conv(K) \subseteq conv\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)$, logo

$$C = \overline{conv}(K) \subseteq \overline{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) = conv\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right),$$

e como $K \cap (x_i + U) \subseteq K$ segue a continência contrária, logo $C = conv\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)$.

Por fim, se $x \in Ext(C)$ então $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ em que $v_i \in V_i$ e $\alpha_i \geq 0$ com $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Como x é um ponto extremal, então $x = v_i$ para algum $i = 1, 2, \cdots, n$. Portanto $x \in x_i + U \subseteq K + U$. □

2.8 Sistemas Duais e Topologia de Mackey

Definição 2.18. *Sejam X e Y espaços vetorias sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que (X, Y) é um sistema dual se existe uma forma bilinear*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$$

com as seguintes propriedades;

1. *$\langle x, y \rangle = 0$ para todo $X \in X$, então $y = 0$;*
2. *$\langle x, y \rangle = 0$ para todo $Y \in Y$, então $x = 0$.*

A condição (1) diz que a forma bilinear separa pontos de Y, enquanto que (2) diz que a forma bilinear separa pontos de X.

Exemplo 2.10. *Seja X um espaço normado. Então (X, X') é um sistema dual sob a forma bilinear*

$$\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x) \text{ para todo } x \in x \text{ e } \varphi \in X'.$$

É imediato que se $\langle x, \varphi\rangle = 0$ *para todo* $x \in X$ *então* $\varphi = 0$*, assim a forma bilinear separa pontos de* X'*. Suponhamos agora que* $\langle x, \varphi\rangle = 0$ *para todo* $\varphi \in X'$ *então* $\varphi(x) = 0$ *para todo* $\varphi \in X'$*, segue assim do Teorema de Hahn-Banach que* $x = 0$*.*

Mais geralmente, se X *é um espaço vetorial e* M *um subespaço de* X^* *que separa pontos de* X*, então* (X, M) *é um sistema dual sob a mesma forma bilinear*

$$\langle x, \varphi\rangle = \varphi(x) \text{ para todo } x \in x \text{ e } \varphi \in M.$$

Proposição 2.37. *Sejam* X *e* Y *espaços vetorias sobre* $\mathbb{K}$*. Se* (X, Y) *é um sistema dual, então* Y *é algebricamente isomorfo a um subespaço de* X^* *que separa pontos de* X*.*

Demonstração. Para cada $y \in Y$, seja $\widehat{y} \in X^*$ definida por

$$\widehat{y}(x) = \langle x, y\rangle \text{ para todo } x \in X.$$

Então a aplicação

$$J : F \longrightarrow X', \;\; J(y) = \widehat{y}$$

é linear e injetiva. Portanto F é isomorfo a $J(F) \subseteq X^*$. Vejamos agora que $J(F)$ separa pontos de X. Com efeito, sejam $x, y \in X$, com $x \neq y$, logo $x - y \neq 0$. Como (X, Y) é um sistema dual, existe $w \in Y$, tal que $\langle x - y, w\rangle = 0$, isto é, $\tilde{w}(x - y) \neq 0$ e assim $\tilde{w}(x) \neq \tilde{w}(y)$.

□

Exemplo 2.11. *Seja* (X, Y) *um sistema dual. Para cada subconjunto* $B \subseteq Y$ *finito a função* $p_B : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$p_B(x) = \sup_{y \in B} |\langle x, y\rangle|, \;\; x \in X$$

é uma seminorma. De fato, claro que $p_B(x) \geq 0$ *para todo* $x \in X$*. Agora se* $x \in X$ *e* $a \in \mathbb{K}$*, então*

$$p_B(ax) = \sup_{y \in B} |\langle ax, y\rangle| = \sup_{y \in B} |a||\langle x, y\rangle| = |a| p_B(x).$$

Se $x, z \in X$ *temos,*

$$p_B(x + y) = \sup_{y \in B} |\langle x + y, y\rangle| = \sup_{y \in B} |\langle x, y\rangle| + \langle z, y\rangle| \leq p_B(x) + p_B(z).$$

Assim p_B *é uma seminorma em* X*. Quando* $B = \{y\}$ *denotaremos* p_B *simplesmente por* p_y*.*

Definição 2.19. *Seja* (X, Y) *um sistema dual. Denotamores por* $\sigma(X, Y)$ *a topologia localmente convexa em* X *gerada pelas seminormas* $p_B : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *em que* $B \subseteq Y$ *é finito. A topologia* $\sigma(X, Y)$ *é chamada de topologia fraca em* X*.*

Proposição 2.38. *Seja* (X, Y) *um sistema dual.*

1. *Uma rede* $(x_\lambda)_{\lambda \in A}$ *converge para* $x \in X$ *na topologia* $\sigma(X, Y)$ *se e só se* $\langle x_\lambda, y\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$ *para todo* $y \in F$*.*

2. Um conjunto $A \subseteq X$ é $\sigma(X,Y)-$limitado se e só se $\sup_{x\in A}|\langle x,y\rangle| < \infty$ para cada $y \in Y$.

Demonstração. (1). Suponhamos primeiramente que a rede $(x_\lambda)_{\lambda\in A}$ converge para $x \in X$. Segue em particular que $p_y(x_\lambda)$ converge para $p_y(x)$ para cada $y \in Y$. Provando assim a primeira parte.

(2) Se A é $\sigma(X,Y)-$limitado, considere a vizinhança da origem $V = V(0,p_y;1)$ em que $y \in Y$. Assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq n_0V(0,p_y;1)$, seguindo assim que $p_B(x) \leq n_0$ para todo $x \in A$, logo $\sup_{x\in A}|\langle x,y\rangle| < \infty$. □

Sempre que (X,Y) for um sistema dual, então identificaremos $y \in Y$ com a sua imagem $\widehat{y} \in X^*$ definida da Proposição 2.37.

Teorema 2.39. *Seja (X,Y) um sistema dual.*

1. *$(X,\sigma(X,Y))$ é um espaço localmente convexo Hausdorff.*
2. *$(X,\sigma(X,Y))' = Y$.*
3. *$\sigma(X,Y)$ é a topologia mais fraca em X que torna $\widehat{y}$ contínuo em X para cada $y \in Y$.*

Demonstração. (1) Suponhamos $x \neq 0$ em X, se $p_y(x) = |\langle x,y\rangle| = 0$ para todo $y \in Y$, teriamos que $x = 0$, pois (X,Y) é um sistema dual. Assim existe $y \in Y$ tal que $p_y(x) \neq 0$, do Teorema 1.25 segue que X é um espaço de Hausdorff.

(2). Dado $y \in Y$, considere $\widehat{y} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ logo,

$$|\widehat{y}(x)| = |\langle x,y\rangle| = p_y(x) \text{ para todo } x \in X,$$

então $\widehat{y}$ é $\sigma(X,Y)-$contínuo. Reciprocamente, dado $\varphi \in (X,\sigma(X,Y))'$, pelo Lema 1.40 existem $B = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \subseteq F$ e $M \geq 0$ tais que $|\varphi(x)| \leq Mp_B(x)$ para todo $x \in X$. Assim,

$$|\varphi(x)| \leq M \sup_{1\leq i\leq n}|\langle x,y_j\rangle| = M \sup_{1\leq i\leq n}|\widehat{y_j}(x)| \text{ para todo } x \in X.$$

Em particular, obtemos

$$\bigcap_{j=1}^{n} Ker(\widehat{y_j}) \subseteq Ker\varphi.$$

Pelo Lema 1.51, existem $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\widehat{y_j}$. Portanto $\varphi = \widehat{y}$ em que $y = \sum_{j=1}^{n} y_j \in Y$.

□

Definição 2.20. *Seja (X,Y) um sistema dual. O polar de um conjunto $A \subseteq X$, é definido por*

$$A^\circ = \{y \in Y : |\langle x,y\rangle| \leq 1 \text{ para todo } x \in A\} \subseteq Y.$$

Definição 2.21. *Sejam X um espaço vetorial topológico e $A \subseteq X$. Denotaremos por $\Gamma(A)$ a envoltória convexa e equilibrada do conjunto A, ou melhor, a interseção de todos os conjuntos convexos equilibrados que contém A. Como apresentado na Observação 1.7, é possível provar que*

$$\Gamma(A) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in X : x_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ com } \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

Proposição 2.40. *Seja (X, Y) um sistema dual. Se $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ e $A_i \subseteq X$ para todo $i \in I$. Então, são válidas as seguintes afirmações.*

1. *Se $A \subseteq B$ então $B^\circ \subseteq A^\circ$.*
2. *$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$.*
3. *$A \subseteq A^{\circ\circ}$.*
4. *$A^\circ = A^{\circ\circ\circ}$.*
5. *$(\lambda A)^\circ = \lambda^{-1} A^\circ$ para todo $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$.*
6. *A° é convexo, equilibrado e $\sigma(Y, X)$-fechado.*
7. *A° é absorvente se e só se A é $\sigma(X, Y)-$limitado.*
8. *$A^\circ = \left(\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X,Y)}\right)^\circ$.*

Demonstração. (1) Se $y \in B^\circ$, então $|\langle x, y\rangle| \leq 1$ para todo $x \in B$, em particular para todo $x \in A$. Logo $y \in A^\circ$.

(2) Seja $y \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ$ se e somente se $|\langle x, y\rangle| \leq 1$ para todo $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, assim $y \in A_i$ para todo $i \in I$.

(3) Dado $x \in A$, então $|\langle x, y\rangle| \leq 1$ para todo $y \in A^\circ$, portanto $A \subseteq A^{\circ\circ}$.

(4) Do item (3) temos $A \subseteq A^{\circ\circ}$ e assim $A^{\circ\circ\circ} \subseteq A^\circ$. Por outro lado, novamente do item (3) temos $A^\circ \subseteq A^{\circ\circ\circ}$.

(5) Se $y \in (\lambda A)^\circ$, então $|\langle \lambda x, y\rangle| \leq 1$ para todo $x \in A$, logo $|\langle x, \lambda y\rangle \leq 1$ para todo $x \in A$, isto é, $\lambda y \in A^\circ$.

(6) Como (X, Y) é um sistema dual segue sem dificuldade que A° é convexo e equilibrado. Vejamos que A° é $\sigma(Y, X)-$fechado, seja $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em A° que converge para $y \in Y$. Como $|\langle x, y_\lambda\rangle| \leq 1$ para todo $x \in A$ e $\lambda \in \Lambda$. Assim pela Proposição 2.38 temos que $\langle x, y_\lambda\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$, portanto $|\langle x, y\rangle| \leq 1$ para todo $x \in A$, ou seja $y \in A^\circ$ e A° é fechado na topologia $\sigma(Y, X)$.

(7) É uma consequência da Proposição 2.38.

(8) Como $A \subseteq \Gamma(A) \subseteq \overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X,Y)}$, segue do item (1) que

$$\left(\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X,Y)}\right)^\circ \subseteq \Gamma(A)^\circ \subseteq A^\circ.$$

Vejamos primeiramente que $A^\circ \subseteq \Gamma(A)^\circ$. Para isso, seja $y \in A^\circ$ e $x \in \Gamma(A)$, digamos $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ em que $x_j \in A$ e $\lambda_j \in \mathbb{K}$ com $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \leq 1$. Assim

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle| &= \left|\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, y\rangle\right| \\ &= \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x_j, y\rangle\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j \langle x_j, y\rangle| \leq 1, \end{aligned}$$

portanto $y \in \Gamma(A)^\circ$.

Por fim, provaremos que $\Gamma(A)^\circ \subseteq \left(\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X,Y)}\right)^\circ$, sejam $y \in \Gamma(A)^\circ$ e $x \in \overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X,Y)}$. Existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em $\Gamma(A)$ que converge para x na topologia $\sigma(X,Y)$. Logo $|\langle x_\lambda, y\rangle| \leq 1$ para todo $\lambda \in \Lambda$ e pela Proposição 2.38 temos $\langle x_\lambda, y\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$ donde segue que $|\langle x, y\rangle| \leq 1$ daí $y \in \left(\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X,Y)}\right)^\circ$. Logo,

$$\left(\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X,Y)}\right)^\circ = \Gamma(A)^\circ = A^\circ.$$

□

Teorema 2.41. *(Teorema do Bipolar). Sejam (X,Y) um sistema dual e $A \subseteq X$ não vazio. Então $A^{\circ\circ} = \overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X,Y)}$.*

Demonstração. Pela proposição anterior temos $A \subseteq A^{\circ\circ}$ e $A^{\circ\circ}$ é convexo, equilibrado e fechado na topologia $\sigma(X,Y)$. Logo $\Gamma(A) \subseteq A^{\circ\circ}$ e assim,

$$\left(\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X,Y)}\right)^\circ \subseteq A^{\circ\circ}.$$

Para a inclusão contrária, seja $C = \overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X,Y)}$ e considere $x_0 \in X/C$. Como já sabemos $\Gamma(A)$ é um conjunto convexo e equilibrado, assim C é convexo, equilibrado e $\sigma(X,Y)-$fechado. Como $(X, \sigma(X,Y))$ é localmente convexo, então pelo Teorema 1.45 existe $\varphi \in (X, \sigma(X,Y))'$ tal que

$$|\varphi(x_0)| > 1 > \sup_{x\in C} |\varphi(x)|.$$

Segue do Teorema 2.39 que $\varphi = \widehat{y}$ para algum $y \in F$. Como $A \subseteq C$, temos

$$|\langle x_0, y\rangle| > 1 > \sup_{x\in C} |\langle x, y\rangle \geq \sup_{x\in A} |\langle x, y\rangle|.$$

Logo $y \in A^\circ$ e $x_0 \notin A^{\circ\circ}$. Como $x_0 \in X/C$, concluímos que $A^{\circ\circ} \subseteq C$.

□

Se (X,Y) é um sistema dual então a topologia $\tau(X,Y)$ é localmente convexa. O nosso objetivo agora é definir uma outra topologia nesse sistema dual que também é localmente convexa. Antes disso precisaremos da definição de filtros em espaços topológicos.

Definição 2.22. *Seja X um conjunto não vazio. Um filtro $\mathcal{F}$ é uma coleção não vazia de subconjuntos de X que possui as seguintes propriedades.*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. *Se* $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, *então* $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
3. *Se* $F \in \mathcal{F}$ *e* $F \subseteq G$, *então* $G \in \mathcal{F}$.

Uma subcoleção $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ é uma base para o filtro $\mathcal{F}$, se para cada $F \in \mathcal{F}$ existir $F_0 \in \mathcal{F}_0$ tal que $F_0 \subseteq F$.

Para mais detalhes sobre a teoria de filtros indicamos as referências [2] e [21].

Proposição 2.42. *Seja X um espaço vetorial e seja F uma base de filtro em X com as seguintes propriedades:*

1. *Cada $U \in \mathcal{F}$ é equilibrado e absorvente.*
2. *Dado $U \in \mathcal{F}$, existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V + V \subseteq U$. Seja*

$$\tau = \{A \subseteq X : \text{para cada } a \in A, \text{ existe } U \in \mathcal{F} \text{ com } a + U \in A\}.$$

Então τ é a unica topologia vetorial em X que admite $\mathcal{F}$ como base de vizinhanças da origem. A demonstração desse fato pode ser encontrada em [27].

Definição 2.23. *Sejam (X, Y) um sistema dual e $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos $\sigma(X, Y)-$limitados de X. Diremos que $\mathcal{A}$ é saturada se verifica as seguintes propriedades.*

1. *Dados $A, B \in \mathcal{A}$, existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $A \cup B \subseteq C$.*
2. *$\lambda A \in \mathcal{A}$ para todo $A \in \mathcal{A}$ e $\lambda > 0$.*

Sabemos da Proposição 2.40 que os conjuntos A° são convexos equilibrados e quando $A \in \mathcal{A}$ são também absorventes. Segue assim da Proposição 2.42 que a coleção

$$\{A^\circ : A \in \mathcal{A}\} \subseteq Y$$

forma uma base de vizinhanças da origem para uma única topologia localmente convexa em Y, que denotaremos por $\tau_{\mathcal{A}}$. Dizemos que $\tau_{\mathcal{A}}$ é a topologia da $\mathcal{A}-$convergência.

Exemplo 2.12. *Sejam (X, Y) um sistema dual e $\mathcal{A}$ a família de todos os conjuntos finitos de X. Vejamos que $\tau_{\mathcal{A}}$ coincide com a topologia fraca $\sigma(Y, X)$. Seja $A \subseteq E$ um conjunto finito e $\varepsilon > 0$, então $V = V(0, p_A : \varepsilon)$ é uma vizinhança da origem em F. Como $\varepsilon^{-1}A \in \mathcal{A}$, então pela Proposição 2.40 segue que $(\varepsilon^{-1}A)^\circ = \varepsilon A^\circ$ e claramente $\varepsilon A^\circ \subseteq V$. Por outro lado, dado $A \in \mathcal{A}$ e $0 < \varepsilon < 1$ então $V(0, p_A : \varepsilon) \subseteq A^\circ$.*

Proposição 2.43. *Sejam (X, Y) um sistema dual e $\mathcal{A}$ uma família saturada. Então uma rede $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge para y em $(F, \tau_{\mathcal{A}})$ se e só se*

$$\sup_{x \in A} |\langle x, y_\lambda - y \rangle| \longrightarrow 0 \text{ para cada } A \in \mathcal{A}.$$

Demonstração. Sendo $\mathcal{A}$ saturada então $\varepsilon^{-1}A \in \mathcal{A}$, com $(\varepsilon^{-1}A)^\circ = \varepsilon A^\circ$ para todo $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{A}$. Assim, $y_\lambda \longrightarrow y$ se e somente se dados $A \in \mathcal{A}$ e $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $y_\lambda - y \in \varepsilon A^\circ$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$ logo,

$$\sup_{x \in A} |\langle x, y_\lambda - y \rangle| \leq \varepsilon \text{ sempre que } \lambda \geq \lambda_0.$$

□

Definição 2.24. *Sejam (X, Y) um sistema dual e $\mathcal{A}$ a família de todos os subconjuntos de $\sigma(X, Y)-$limitados. Chamamos a topologia $\tau_\mathcal{A}$ de topologia forte, e denotamos por $\beta(Y, X)$. É de fácil verificação que $\sigma(Y, X) \subseteq \beta(Y, X)$.*

Definição 2.25. *Seja (X, Y) um sistema dual. Se $\mathcal{C}$ é a família de todos os subconjuntos convexos, equilibrados e $\sigma(Y, X)-$compactos de Y, então a topologia $\tau_\mathcal{C}$ é chamada de topologia de Mackey, e é denotada por $\tau(X, Y)$.*

Teorema 2.44. *Seja (X, Y) um sistema dual. Então, são válidas:*

1. *$\sigma(X, Y) \subseteq \tau(X, Y)$;*
2. *$(X, \tau(X, Y))' = Y$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ a família de todos os subconjuntos convexos,equilibrados e $\sigma(Y, X)-$compactos de Y.

(1) Sejam $\mathcal{A}$ a família de todos os subconjuntos finitos de Y e,

$$\mathcal{B} = \{A^{\circ\circ} : A \in \mathcal{A}\} \subseteq Y.$$

Assim $\mathcal{B}$ é claramente saturado e vimos no Exemplo 2.12 que $\sigma(X, Y) = \tau_\mathcal{A}$. Além disso, pela Proposição 2.40 temos $A^\circ = A^{\circ\circ\circ}$ para cada $A \in \mathcal{A}$, logo

$$\sigma(X, Y) = \tau_\mathcal{A} = \tau_\mathcal{B}. \tag{2.8}$$

Vamos verificar que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Seja $A^{\circ\circ} \in \mathcal{B}$, pela Proposição 2.40 $A^{\circ\circ}$ é convexo e equilibrado. Por outro lado, A° é uma vizinhança da origem em X na topologia $\tau_\mathcal{A}$, da igualdade (2.8) segue que A° é uma $\sigma(X, Y)-$vizinhança da origem. Como $(X, \sigma(X, Y))' = Y$, o Teorema 1.56 garante que $A^{\circ\circ}$ é $\sigma(Y, X)-$compacto. Portanto $A^{\circ\circ} \in \mathcal{C}$ e assim obtemos

$$\sigma(X, Y) = \tau_\mathcal{A} = \tau_\mathcal{B} \subseteq \tau_\mathcal{C} = \tau(X, Y).$$

(2) Combinando o Teorema 2.39 com o item anterior, temos

$$Y = (X, \sigma(X, Y))' \subseteq (X, \tau(X, Y))'.$$

Para a inclusão oposta, seja $\varphi \in (X, \tau(X, Y))'$. Pela continuidade existe $C \in \mathcal{C}$ tal que

$$C^\circ = \varphi^{-1}([-1, 1])$$

isto é,

$$|\varphi(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in C^{\circ}.$$

Denotaremos por C^p os polares dos conjuntos $C \in \mathcal{C}$ em relação ao sistema dual (X, X^*) isto é,

$$C^p = \{x \in X : |\psi(x)| \leq 1 \text{ para todo } \psi \in X^*\}.$$

Como $C \subseteq Y \subseteq E^*$, então $C^{\circ} = C^p$, logo

$$|\varphi(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in C^p.$$

Pelo Teorema do Bipolar (Teorema 2.41) segue que

$$\varphi \in C^{pp} = \overline{\Gamma(C)}^{\sigma(X^*,X)} = \overline{C}^{\sigma(X^*,X)},$$

onde a última dessas igualdades segue do fato que C é equilibrado e convexo. Além disso, C é $\sigma(Y,X)-$compacto e como a topologia $\sigma(Y,X)$ é a topologia induzida de $\sigma(X^*,X)$. Então C é $\sigma(X^*,X)-$compacto e portanto C é fechado, logo

$$\varphi \in \overline{C}^{\sigma(X^*,X)} = C \subseteq F$$

provando assim que $(X, \tau(X,Y))' = Y$. □

Teorema 2.45. *(Teorema de Mackey-Arens). Seja (X,Y) um sistema dual e τ uma topologia localmente convexa em X. Então as seguintes condições são equivalentes.*

1. $\sigma(X,Y) \subseteq \tau \subseteq \tau(X,Y)$.
2. $(X,\tau)' = Y$.
3. $\tau = \tau_{\mathcal{B}}$, *sendo $\mathcal{B}$ uma família saturada de subconjuntos equilibrados, convexos e $\sigma(Y,X)$-compactos de Y tal que $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\} = Y$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ a família e todos os subconjuntos convexos,equilibrados e $\sigma(X,Y)-$compactos de Y.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Segue dos Teoremas 2.44 e 2.39 que

$$Y = (X, \sigma(X,Y))' \subseteq (X,\tau)' \subseteq (X, \tau(X,Y))' = Y,$$

logo $(X,\tau)' = Y$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Seja $\mathcal{V}$ a família de todas as vizinhanças de zero em (X,τ) que são convexas, equilibradas e fechadas. Como $(X,\tau)' = Y$, segue do Teorema de Mazur (Teorema 1.53) que cada $V \in \mathcal{V}$ é $\sigma(E,F)-$fechada. Defina

$$\mathcal{B} = \{V^{\circ} : V \in \mathcal{V}\}.$$

Pela Proposição 2.40 sabemos que V° é convexo e equilibrado. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Teorema 1.56) segue também que V° é $\sigma(Y,X)$-compacto para cada $V \in \mathcal{V}$. Além

disso, o Teorema do Bipolar (2.41) garante que $V = V^{\circ\circ}$ para cada $V \in \mathcal{V}$, assim τ e $\tau_{\mathcal{B}}$ possuem a mesma vizinhança da origem $\mathcal{V}$, isto é, $\tau = \tau_{\mathcal{B}}$. Por fim, dado $\varphi \in (X,\tau)'$, então existe $V \in \mathcal{V}$ tal que

$$|\varphi(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in V,$$

assim, $\varphi \in V^{\circ}$ logo,

$$Y = (X,\tau)' = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1). Seja $\tau = \tau_{\mathcal{B}}$. Já sabemos que se $\mathcal{A}$ é a família de todos os subconjuntos finitos de Y, então $\sigma(X,Y) = \tau_{\mathcal{A}}$. Como $\mathcal{B}$ é saturada e

$$Y = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\},$$

então para cada $A \in \mathcal{A}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B$. Logo $B^{\circ} \subseteq A^{\circ}$, daí

$$\sigma(X,Y) = \tau_{\mathcal{A}} \subseteq \tau_{\mathcal{B}} = \tau.$$

Por outro lado, é claro que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ e, portanto,

$$\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau_{\mathcal{C}} = \tau(X,Y).$$

Concluímos assim que

$$\sigma(X,Y) \subseteq \tau \subseteq \tau(X,Y).$$

□

Observação 2.3. *Sejam X um espaço vetorial e Y um subespaço de X^*. Pelo Teorema de Mackey-Arens podemos também definir a topologia de Mackey como sendo a topologia mais forte localmente convexa em X tal que Y é o dual contínuo de X. Isto é, se τ é uma topologia localmente convexa em X com $(X,\tau)' = Y$, então $\tau \subseteq \tau(X,Y)$.*

Capítulo 3

Bases em Espaços Vetorias Topológicos

Neste capítulo estudaremos as noções de bases em espaços vetorias topológicos, com foco nos F-espaços e nos espaços localmente convexos. A noção de base empregada aqui é uma generalização da base de Hamel em dimensão finita. Para um espaço X de dimensão infinita, o conceito de base está intimamente relacionado com a convergência de séries. Um dos principais teoremas dessa seção nos dá condições suficientes e necessárias para que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ seja base de Schauder para o espaço $\overline{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Na última seção estudamos os espaços que possuem propriedades da extensão de funcionais lineares contínuos e a sua relação com a convexidade local. Nos baseamos nas referências [1], [26], [34], [35], [18], [20] e [32] para escrever esse capítulo.

Definição 3.1. *Sejam X um espaço vetorial topológico e $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X. Dizemos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base em X se para cada $x \in X$ existe uma única sequência de escalares $(\alpha_n(x))_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) e_n.$$

A unicidade da representação permite considerar os funcionais

$$e_n^* : X \longrightarrow \mathbb{K}, \quad e_n^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) e_j \right) = \alpha_n(x)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ que são chamados de funcionais coeficientes. Segue das propriedades básicas dos espaços vetoriais topológicos que cada e_n^* é linear. Além disso, para cada base em X definimos as somas parciais por:

$$S_n : X \longrightarrow X, \quad S_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) e_j,$$

também conhecidos como projeções canônicas associadas à base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Quando os funcionais e_n^* forem contínuos, dizemos que a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder.

Exemplo 3.1. *A sequência dos vetores canônicos unitários* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *em definida por*

$$e_n = (0, 0, \cdots, 1, 0, 0, \cdots)$$

é uma base de Schauder em ℓ_p *para todo* $p > 0$.

Exemplo 3.2. *Considere o seguinte sistema dual*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell_1 \times c_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ \langle a, b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* ℓ_1 *definida por* $x_1 = e_1$ *e* $x_n = (-1)^{n+1} e_1 + e_n$ *para todo* $n \geq 2$ *é uma base em* $(\ell_1, \sigma(\ell_1, c_0))$. *De fato, se* $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, *então*

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \text{ em que } \alpha_n = \begin{cases} y_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} y_{i+1}, & n = 1 \\ y_n, & n \geq 2. \end{cases}$$

e a unicidade da representação é imediata. Além disso, pela forma dos α_n *temos que os funcionais coordenados são da forma* $f_1 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + \cdots$ *e* $f_n = e_n$ *para todo* $n \geq 2$. *Entretando* $f_1 \notin c_0$ *e pelo Teorema 2.39 temos que* $c_0 = (\ell_1)^*$, *assim* f_1 *é descontínuo. Portanto* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *não é uma base de Schauder.*

Definição 3.2. *Uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *em um espaço vetorial topológico* X *é dita* $\omega-$*independente quando* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$ *implicar que* $a_i = 0$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$.

Pela linearidade dos funcionais coeficientes segue que toda base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é $\omega-$independente.

Teorema 3.1. *Seja* (X, τ) *um espaço vetorial topológico Hausdorff completo. Sejam* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência* $\omega-$*independente em* X *e* $X_C = \left\{ x \in X : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\}$. *Sejam também* $\mathcal{V} = \{V \subseteq X : V$ *é uma vizinhança da origem fechada e equilibrada*$\}$ *e* $\mathcal{V}^* = \{V^* : V \in \mathcal{V}\}$, *onde* $V^* = \left\{ x \in X_C : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in V \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ em que } x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\}$. *Então,*

1. (X_C, τ^*) *é um espaço vetorial topológico Hausdorff completo, em que* τ^* *tem* $\mathcal{V}^*$ *como uma base de vizinhanças da origem.*

2. *Se* X *é um espaço localmente convexo e* $\mathcal{V}$ *for a coleção de todas as vizinhanças da origem fechadas, convexas e equilibradas, então* (X_C, τ^*) *é um espaço localmente convexo Hausdorff completo.*

3. *Sejam* p_V *é o funcional de Minkowski para cada* $V \in \mathcal{V}$ *e* p_{V^*} *o funcional de Minkowski de* V^*, *então*

$$p_V(x) \leq p_{V^*}(x) \text{ para todo } x \in X_C.$$

Se $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ *então*

$$p_{V^*}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} p_V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right).$$

Demonstração. (1) Para construir uma topologia em X_C verificaremos que V^* satisfaz as condições $(i) - (iv)$ do Teorema 2.1.

(i) Dados $U^*, V^* \in \mathcal{V}^*$, então $U, V \in \mathcal{V}$ em particular $U \cap V \in \mathcal{V}$ e $(U \cap V)^* \subseteq U^* \cap V^*$.

(ii) Seja $U^* \in \mathcal{V}^*$, assim $U \in \mathcal{V}$, logo existe $V \in \mathcal{V}$ com $V + V \subseteq U$. Dado $x = y + z \in V^* + V^*$ com $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ e $z = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$, então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \in V \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in V + V \subseteq U$$

para todo n e, portanto, $V^* + V^* \subseteq U^*$.

(iii) Seja $U^* \in \mathcal{V}^*$, então existe $V \in \mathcal{V}$, tal que $V \subseteq U$, em particular $aV \subseteq U$ para todo $a \in \mathbb{K}$ com $|a| \leq 1$. Não é difícil ver que $\alpha V^* \subseteq U^*$.

(iv) Seja $V^* \in \mathcal{V}^*$ e $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X_C$. Assim $V \in \mathcal{V}$, logo existe $U \in \mathcal{V}$ com $U + U \subseteq V$. Como a sequência as somas parciais $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)_{i=1}^{n}$ converge para x, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in x + U \text{ sempre que } n \geq m.$$

Como U é absorvente e equilibrado podemos escolher $a \in \mathbb{K}$ com $|a|$ suficientemente pequeno de modo que $a\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in U, 1 \leq n \leq N, ax \in U$ e $aU \subseteq U$. Logo, se $n \leq N$, então $a\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in V$. Caso $n \geq N$, teremos

$$a\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in ax + aU \subseteq U + U \subseteq V.$$

Em ambos os casos, temos $a\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto $ax \in V^*$. Assim (X_C, τ^*) é um espaço vetorial topológico que tem $\mathcal{V}^*$ como uma base de vizinhanças da origem. Como cada $V \in \mathcal{V}$ é fechada, então $V^* \subseteq V$ para todo $V \in \mathcal{V}$. Sendo X um espaço de Hausdorff, pelo Corolário 1.8 temos que $\bigcap_{V\in\mathcal{V}} V = \{0\}$ e assim $\bigcap_{V^*\in\mathcal{V}^*} V^* = \{0\}$ e, novamente pelo Corolário 1.8, temos que X_C é um espaço de Hausdorff.

Resta-nos provar que (X_C, τ^*) é completo, para isso seja $(y_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma rede de Cauchy em

X_C. Então para $V \in \mathcal{V}$, existe $\alpha_0 \in A$ tal que

$$y_\alpha - y_\beta \in V^* \text{ sempre que } \alpha, \beta \geq \alpha_0.$$

Se $y_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^\alpha x_i$, então temos $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^\alpha - a_i^\beta) x_i \in V^*$, ou melhor,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^\alpha - a_i^\beta) x_i \in V \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

para cada n fixado a rede $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha x_i \right)_{\alpha \in A}$ é de Cauchy em X e portanto $(a_n^\alpha x_n)_{\alpha \in A}$ é também uma rede de Cauchy. Logo para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in \mathbb{K}$ com $\lim a_n^\alpha x_n = a_n x_n$.

Vamos mostrar agora que a sequência $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em X. Seja $V \in \mathcal{V}$, escolha $U \in \mathcal{V}$ e $W \in \mathcal{V}$ tais que $U + U \subseteq V$ e $W + W \subseteq U$. Como $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma rede de Cauchy em X_C, então existe $\alpha_1 \in A$ tal que se $\alpha, \beta \geq \alpha_1$ então $y_\alpha - y_\beta \in W^*$ e assim,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^\alpha - a_i^\beta) x_i \in W \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Passando o limite sobre β, para cada $n \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_1} x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) \in W. \tag{3.1}$$

Portanto, para cada $m, n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_1} x_i - \sum_{i=1}^{m} a_i^{\alpha_1} x_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_1} x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^{\alpha_1} x_i - \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right)$$

logo,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right) &\in \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_1} x_i - \sum_{i=1}^{m} a_i^{\alpha_1} x_i \right) + W + W \\ &\subseteq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_1} x_i - \sum_{i=1}^{m} a_i^{\alpha_1} x_i \right) + U. \end{aligned}$$

Como a série $y_{\alpha_1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\alpha_1} x_i$ converge pois $y_{\alpha_1} \in X_C$, então em particular é de Cauchy, logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq N$ então $\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_1} x_i - \sum_{i=1}^{m} a_i^{\alpha_1} x_i \in U$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \in U + U \subseteq V \text{ para } m, n \geq N.$$

Provamos assim que a sequência $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em X. Sendo X completo, existe $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ e assim $y \in X_C$. E finalmente, de (3.1) segue que que a rede $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge para y. Portanto (X_C, τ^*) é um espaço de Hausdorff completo.

(2) Pelo item anterior é suficiente verificar que cada conjunto $V^* \in \mathcal{V}^*$ é convexo. Com efeito, sejam $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ e $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i \in V^*$. Dados $t \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$ temos,

$$t \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + (1-t) \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (t a_i + (1-t) b_i) x_i \in V$$

pois V é convexo, assim $tx + (1-t)y \in V^*$. Concluindo assim o resultado.

(3) Para a primeira parte considere $V \in \mathcal{V}$ e $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X_C$. Como $V^* \subseteq V$, então $\{a > 0 : x \in aV^*\} \subseteq \{a > 0 : x \in aV\}$, segue assim que $p_V(x) \leq p_{V^*}(x)$.

Seja $a > 0$ tal que $x \in aV^*$, então $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in aV$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos assim que $\sup_{n \in \mathbb{N}} p_v \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq a$, logo $\sup_{n \in \mathbb{N}} p_v \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq p_{V^*}(x)$.

Considere agora $a = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_v \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \neq 0$, pela Proposição 1.28 temos que

$$p_v \left(\frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \frac{1}{a} p_v \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in V$ e assim $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in aV$ logo $x \in V^*$. Portanto $p_{V^*}(x) \leq a = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_v \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$. Por fim, se $\sup_{n \in \mathbb{N}} p_v \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = 0$, então $p_V \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $a > 0$ temos que $p_V \left(\frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = 0$ e novamente pela Proposição 1.28 segue $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in aV$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $x \in aV^*$ para todo $a > 0$. Portanto $p_{V^*}(x) = 0$. Concluímos finalmente que

$$p_{V^*}(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_v \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right).$$

□

Teorema 3.2. *Sejam (X, τ) um espaço localmente convexo Hausdorff completo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $X = \overline{span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Seja Γ é a coleção de todas as seminormas contínuas que gera a topologia τ. Se para cada $\rho \in \Gamma$ existirem $\sigma \in \Gamma$ e*

$K > 0$ tal que

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq K\sigma\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right), \tag{3.2}$$

para quaisquer $m \geq n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1, a_2, \cdots a_m$. Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base em X.

Demonstração. Seja $X_C = \left\{x \in X : x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\}$. Se $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo e $\rho \in \Gamma$ existe $\sigma \in \Gamma$ e $K > 0$ tal que

$$\rho(a_n x_n) \leq K\sigma\left(\sum_{i=1}^{j} a_i x_i\right) \text{ para todo } j \geq n,$$

fazendo $j \longrightarrow \infty$ segue que $\rho(a_n x_n) = 0$ para todo $\rho \in \Gamma$. Como X é um espaço de Hausdorff, segue do Teorema 1.25 que $a_n x_n = 0$, assim $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é $\omega-$independente.

Para cada $\rho \in \Gamma$ seja $V_\rho = \{x \in X : \rho(x) \leq 1\}$. Da Proposição 1.27 temos que ρ é o funcional de Minkowski de V_ρ, ou seja, $\rho = p_{V_\rho}$. Denotemos por $\mathcal{V}$ a família de todas as multiplicações de escalares positivos por conjuntos da forma $V_\rho, \rho \in \Gamma$, ou melhor,

$$\mathcal{V} = \{\varepsilon V_\rho : \varepsilon > 0 \text{ e } \rho \in \Gamma\}.$$

Sabemos da demonstração do Teorema 1.29 que $\mathcal{V}$ é uma base de vizinhanças da origem na topologia τ. Segue assim do Teorema 3.1 que (X_C, τ^*) é um espaço localmente convexo Hausdorff completo, em que $\mathcal{V}^*$ é uma base de vizinhanças da origem em τ^*. Vamos mostrar agora que X_C é fechado em (X, τ).

Seja $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma rede em X_C convergindo para $x \in X$. Para cada $\alpha \in A$, temos $y_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^\alpha x_i$. Do Teorema 3.1 e da desigualdade (3.2) segue que para cada $\rho \in \Gamma$ existem $\sigma \in \Gamma$ e $k > 0$ tal que

$$p_{V_\rho^*}(y_\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_{V_\rho}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha x_i\right) \leq k\sigma(y_\alpha).$$

A sequência $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ é de Cauchy em (X_C, τ^*), assim existe $x_0 \in X_c$ tal que $x_\alpha \longrightarrow x_0$ em τ^*. Já vimos que $V^* \subseteq V$ para todo $V \in \mathcal{V}$, isto é, a topologia τ^* é mais forte que a topologia τ em X_C. Então $x_\alpha \longrightarrow x_0$ na topologia τ, como X é um espaço de Hausdorff, logo $x = x_0 \in X_C$. Portanto X_C é fechado em (X, τ) e como $span\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X_C$, então $X = \overline{span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq X_C$, daí segue $X = X_C$. A unicidade da representação $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ em X segue imediatamente, pois $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência $\omega-$independente. Portanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base em X.

□

Definição 3.3. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente convexo. Um conjunto $A \subseteq X$ é chamado de tonel quando for equilibrado, absorvente, convexo e fechado. Dizemos que X é tonelado quando todo tonel A em X for uma vizinhança da origem.*

Teorema 3.3. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente convexo. Se X é um espaço de Baire então X é tonelado.*

Demonstração. Sejam A um tonel em X, r e $s \in \mathbb{N}$ com $0 < r < s$. Então $\frac{r}{s} < 1$, sendo A equilibrado temos,

$$rA = s\left(\frac{r}{s}\right)A \subseteq sA,$$

Afirmamos que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA.$$

Com efeito, dado $x \in X$, como A é absorvente existe $c > 0$ tal que $x \in cA$, assim $x \in n_0 A$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 > c$. Cada conjunto nA é fechado, sendo X um espaço de Baire, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(nA) \neq \emptyset$ ou ainda, $\text{int}(A) \neq \emptyset$. Considere $y \in \text{int}(A) \subseteq A$, então $-y \in A$ pois novamente A é equilibrado, sendo também convexo segue que $0 = \frac{y}{2} + \frac{-y}{2} \in \text{int}(A)$. Portanto X é tonelado.

□

Corolário 3.4. *Espaços de Banach e espaços de Fréchet são tonelados.*

Os espaços tonelados são uma classe importante de espaços localmente convexos. A dissertação [10] é uma boa referência em português sobre o assunto, enquanto que [36] é uma referência clássica acerca do tema.

Teorema 3.5. *(Teorema de Banach-Steinhaus). Sejam X e Y espaços tonelados e $\mathcal{F}$ uma família de aplicações linear contínuas em $\mathcal{L}(X,Y)$. Se $\mathcal{F}$ é pontualmente limitada (ver Definição 2.14) então $\mathcal{F}$ é equicontínua.*

A demonstração desse Teorema pode ser encontrada em [36].

Teorema 3.6. *Seja (X,τ) um espaço tonelado e Γ a coleção de todas as seminormas que geram a topologia τ. Se a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base em X, então para cada $\rho \in \Gamma$ existem $\sigma \in \Gamma$ e $K = K(\rho) > 0$ tal que*

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq K\sigma\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right), \tag{3.3}$$

para todo $n \leq m$ e $a_1, a_2, \cdots a_m \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Pela demonstração do Teorema 3.2 sabemos que a coleção

$$\mathcal{V} = \{\varepsilon V_\rho : \varepsilon > 0 \text{ e } \rho \in \Gamma\},$$

onde $V_\rho = \{x \in X : \rho(x) \leq 1\}$, forma uma base de vizinhança da origem em X. Usando a mesma notação do Teorema 3.1 iremos verificar que cada conjunto $(\varepsilon V_\rho)^*$ é um tonel em X. Vejamos inicialmente que $(V_\rho)^*$ é equilibrado e convexo. Sejam $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_i x_i \in (V_\rho)^*$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| \leq 1$,

como V_ρ é equilibrado pois ρ é uma seminorma, segue que

$$\alpha \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \in V_\rho \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

logo $\alpha x \in (V_\rho)^*$.

A convexidade de $(V_\rho)^*$ segue de maneira idêntica. Assim pela Proposição 1.5 temos $(\varepsilon V_\rho)^*$ é equilibrado e convexo para cada $\varepsilon > 0$ e $\rho \in \Gamma$. Pelo item (1) do Teorema 3.1 os conjuntos $(\varepsilon V_\rho)^*$ formam uma base de vizinhanças da origem para uma topologia em X, logo são absorventes.

Verificaremos que $(\varepsilon V_\rho)^*$ é fechado. Inicialmente considere as funções somas parciais

$$S_n : X \longrightarrow X,\ S_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Para cada $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ e $\rho \in \Gamma$ a sequência $\rho\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)_{n=1}^{\infty}$ é limitada. Assim se V_ρ é uma vizinhança da origem, tomando $\varepsilon = \sup_{n\in\mathbb{N}} \rho\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$, temos que

$$\{S_n(x) : n \in \mathbb{N}\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \varepsilon V_\rho.$$

Logo a família $\mathcal{F} = \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ é pontualmente limitada e pelo Teorema 3.5 segue que $\mathcal{F}$ é equicontínua, em particular cada função S_n é contínua. Portanto $\rho \circ S_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma seminorma contínua para cada $n \in \mathbb{N}$, logo (εV_ρ) é fechado pois,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon V_\rho)^* &= \left\{x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in \varepsilon V_\rho \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= \left\{x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X : (\rho \circ S_n)(x) \leq \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} (\rho \circ S_n)^{-1}(-\infty, \varepsilon].
\end{aligned}$$

Assim para cada $\varepsilon > 0$ e $\rho \in \Gamma$ o conjunto $(\varepsilon V_\rho)^*$ é um tonel em X, logo é uma $\tau-$ vizinhança da origem, pois X é tonelado.

Por fim, se $p \in \Gamma$, como $(V_\rho)^*$ é uma vizinhança da origem, existem $\varepsilon = \varepsilon(\rho) > 0$ e $\sigma \in \Gamma$ tal que

$$S_n(\varepsilon V_\sigma) \subseteq (V_\rho)^* \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sejam m com $n \leq m$ e $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{K}$. Considerando o vetor

$$x = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon a_i x_i}{\sigma\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right)},$$

então $\sigma(x) \leq \varepsilon$, logo $x \in \varepsilon V_\sigma$. Como $S_m(\varepsilon V_\sigma) \subseteq (V_\rho)^*$, obtemos

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon a_i x_i}{\sigma\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right)}\right) \leq 1 \text{ para todo } n \leq m$$

temos finalmente que

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq K\sigma\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right),$$

com $K(\rho) = \frac{1}{\varepsilon} > 0$.

□

Definição 3.4. *Uma sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço vetorial topológico X é dita sequência básica, se for uma base para $\overline{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Como todo espaço de Banach é localmente convexo com a topologia gerada pela norma, combinando os Teoremas 3.2 e 3.6 obteremos o seguinte resultado.

Teorema 3.7. *(Critério de Banach-Grunblum) Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de vetores não nulos em um espaço de Banach E é basica se, e somente se, existe uma constante $K \geq 1$ tal que para toda sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,*

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \text{ sempre que } n \geq m.$$

A seguir construíremos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ linearmente independente em um $F-$espaço que não é uma base de Schauder para $\overline{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exemplo 3.3. *Seja $1 \leq p < \infty$. Considere a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em ℓ_p definida por*

$$x_1 = e_1, \text{ e } x_j = -\frac{1}{j-1}e_{j-1} + \frac{1}{j}e_j \text{ para } j \geq 2.$$

Os vetores $x_1, x_2, \ldots$ são linermente independentes. Com efeito, considere $a_1, \alpha_2 \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = 0$$

então

$$\left(a_1 - a_2, \frac{a_2}{n} - \frac{a_3}{n}, \cdots, \frac{a_n}{n}\right) = 0.$$

Isto nos diz que $a_1 = a_2 = \cdots a_n = 0$, logo a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é linearmente independente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| = \frac{1}{n}.$$

Logo não existe $K \geq 1$ que satisfaz a desigualdade do Teorema 3.7, assim a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não é básica.

3.1 Sequências Básicas em F-espaços

Vimos no segunda capítulo que um $F-$espaço é um espaço vetorial topológico metrizável completo com a métrica invariante por translação. Sabemos que se X é um $F-$espaço, existe uma métrica d em X tal que a função $\|x\| = d(x,0)$ é uma $F-$norma, satisfazendo.

1. $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$, e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\alpha x\| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| \leq 1$.
3. $\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{x}{n}\right\| = 0$ para cada $x \in X$;
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.
5. a métrica $d(x,y) = \|x-y\|$ é completa.

Denotaremos por $(X, \|\cdot\|)$ o par, em que X é um $F-$espaço e $\|\cdot\|$ uma $F-$norma em X satisfazendo as condições acima.

Teorema 3.8. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um F-espaço e $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base. Então*

$$\|x\|_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n(x)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) e_j \right\|$$

define uma F-norma em X equivalente a $\|\cdot\|$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) e_j \right\| \leq \|x\|_1$$

logo,

$$\|x\| \leq \|x\|_1 \text{ para todo } x \in X. \tag{3.4}$$

Assim segue que $\|x\|_1 \geq 0$ para todo $x \in X$, e $\|x\|_1 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. Considere agora $x \in X$ e $\beta \in \mathbb{K}$ com $|\beta| \leq 1$, então

$$\|\beta x\|_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta\alpha_j(x) e_j \right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) e_j \right\| = \|x\|_1.$$

Sejam $x, y \in X$ então,

$$\begin{aligned} \|x+y\|_1 &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j(x) e_j + \alpha_j(y) e_j) \right\| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) e_j \right\| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y) e_j \right\| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1. \end{aligned}$$

Iremos verificar a condição (3) de $F-$norma. Para isso seja $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)e_j \in X$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{k=M}^{L} \alpha_k(x)e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

sempre que $L > M > N$. Em particular, obtemos

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{L} \alpha_k(x)e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } L > N,$$

assim,

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k(x)e_k \right\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definindo $y = \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k(x)e_k$, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\frac{1}{n}y = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{n}e_k = \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k\left(\frac{x}{n}\right)e_k.$$

Como $\|\cdot\|_1$ satisfaz a condição (2) temos

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k\left(\frac{x}{n}\right)e_k \right\|_1 \leq \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k(x)e_k \right\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

logo,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{x}{n}\right\|_1 &= \left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\left(\frac{x}{n}\right)e_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k\left(\frac{x}{n}\right)e_k \right\|_1 \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\left(\frac{x}{n}\right)e_k \right\|_1 + \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k\left(\frac{x}{n}\right)e_k \right\|_1 \\ &< \left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\left(\frac{x}{n}\right)e_k \right\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\|\cdot\|$ é uma $F-$norma então $\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{x}{n}\right\| = 0$ daí para cada $M \leq N$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos

$$\left\| \sum_{k=1}^{M} \alpha_k\left(\frac{x}{n}\right)e_k \right\| = \left\| n^{-1} \sum_{k=1}^{M} \alpha_k\left(x\right)e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\left(\frac{x}{n}\right)e_k \right\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

e, consequentemente

$$\left\|\frac{x}{n}\right\|_1 < \varepsilon, \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Assim $\|\cdot\|_1$ é uma $F-$norma em X. Vejamos agora que X é completo com essa norma. Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $(X, \|\cdot\|_1)$ da desigualdade (3.4) a sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $(X, \|\cdot\|)$, portanto convergente, digamos $\|u_n - u\| \longrightarrow 0$ para algum $u \in X$. Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\|S_k(u_n)\| \leq \|u_n\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto a sequência $(S_k(u_n))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy. Restringindo os funcionais coeficientes e_k^* no subespaço de dimensão finita $S_k(X)$, então cada e_k^* é contínua pois é linear daí $(e_k^*(S_k(u_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$, em particular convergente. Digamos

$$\lim_{n\to\infty} e_k^*(S_k(u_n) = \alpha_k \text{ para cada } k \in \mathbb{N},$$

e também existe $x_k \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} S_k(u_n) = x_k. \tag{3.5}$$

Donde segue que se $j \leq k$ então,

$$e_j^*(x_k) = e_j^*\left(\lim_{n\to\infty} S_k(u_n)\right) = \lim_{n\to\infty} e_j^*(S_k(u_n)) = \alpha_j$$

e como $e_j^*(S_k(u_n)) = 0$ quando $j > k$, então

$$\lim_{n\to\infty} S_k(u_n) = x_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i.$$

Juntando essa igualdade com a desigualdade (3.5) obtemos

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| S_k(u_n) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \right\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

A sequência $\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\right)_{k=1}^{\infty}$ converge em $\|\cdot\|$ para $u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, com $x_k = S_k(u)$, ou melhor,

$$\lim_{n\to\infty} S_k(u_n) = S_k(u)$$

e finalmente obtemos,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| S_k(u_n) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \right\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|S_k(u_n - u)\| = \|u_n - u\|_1 \longrightarrow 0.$$

Portanto, a sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente, logo $(X, \|\cdot\|_1)$ é um $F-$espaço.

Por fim, note que a aplicação identidade $id : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$ é contínua, uma vez que

$\|\cdot\|_1 \geq \|x\|$ para todo $x \in X$. Segue do Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 2.29) aberta que id é um isomorfismo, portanto as $F-$normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ são equivalentes em X.

□

A $F-$norma $\|\cdot\|_1$ definida no teorema anterior tem a seguinte propriedade imediata:

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)e_j\right\|_1 \leq \|x\|_1 \text{ para todo } x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)e_j \in X \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Mais geralmente ainda vale

$$\left\|\sum_{j=k}^{l} \alpha_j(x)e_j\right\|_1 \leq \|x\|_1 \text{ para todo } x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)e_j \in X \text{ e } 0 \leq k \leq l. \tag{3.6}$$

Corolário 3.9. *Seja X um $F-$espaço. Se $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base em X, então a família das somas parciais $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é equicontínua.*

Demonstração. Considere X munido com a $F-$norma,

$$\|x\|_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n(x)\|.$$

Para cada $x \in X$, a sequência $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é limitada, uma vez que pela desigualdade (3.6) temos

$$\|S_n(x)\|_1 \leq \|x\|_1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como X é um $F-$espaço e cada S_n é linear, segue do Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 2.24) que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma família equicontínua de operadores lineares e como as $F-$normas são equivalentes, segue que a família $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é equicontínua com relação a $F-$norma original.

□

Corolário 3.10. *Toda base em um $F-$espaço é uma base de Schauder.*

Demonstração. De fato, seja X um $F-$espaço e $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base em X. Assim para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in X$ e $j \in \mathbb{N}$ temos,

$$e_j^*(x)e_j = S_j(x) - S_{j-1}(x).$$

Pelo corolário anterior cada S_j é contínua pois a família $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é equicontínua.

□

Teorema 3.11. *Sejam X um $F-$espaço e $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base em X. Denotemos por X_1 o seguinte espaço vetorial,*

$$X_1 := \left\{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \text{ converge}\right\}.$$

Então a aplicação

$$\|(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j\right\|$$

é uma $F-$norma em X_1 e $(X_1, \|\cdot\|_1)$ é um $F-$espaço. Além disso, a aplicação

$$T : X_1 \longrightarrow X, \ , \ T((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n,$$

é um isomorfismo.

Demonstração. A verificação de que $\|\cdot\|_1$ é uma $F-$norma é análoga a feita no Teorema 3.8. Vejamos que X_1 é um $F-$espaço.

Seja $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em X_1, digamos $y_k = (\alpha_n^k)_{n=1}^{\infty}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existem $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, k > m_0 \Longrightarrow \|y^m - y^k\|_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i^m - \alpha_i^k)e_i\right\| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\|(\alpha_n^m - \alpha_n^k)e_n\| &= \left\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i^m - \alpha_i^k)e_i - \sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_i^m - \alpha_i^k)e_i\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i^m - \alpha_i^k)e_i\right\| + \left\|\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_i^m - \alpha_i^k)e_i\right\| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,\end{aligned}$$

quando $m, k > n_0$. Assim a sequência $(\alpha_n^k e_n)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em X. Como os funcionais e_n^* são contínuos então a sequência de escalares $(\alpha_n^k)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy para cada $n \in \mathbb{N}$. Considere

$$\alpha_n = \lim_{k\to\infty}\alpha_n^k,$$

fazendo $k \longrightarrow \infty$ em (3.7), obtemos

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i^m - \alpha_i)e_i\right\| < \varepsilon \text{ quando } m > m_0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$S_n^m = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^m e_i \text{ e } S_n = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, \tag{3.8}$$

daí temos

$$\begin{aligned}\|s_r - s_n\| &\leq \|s_r - s_r^m\| + \|s_n - s_n^m\| + \|s_r^m - s_n^m\| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \|s_r^m - s_n^m\|\end{aligned}$$

$$= \|s_r^m - s_n^m\| + 2\varepsilon$$

para qualquer $m > m_0$ e $r, n \in \mathbb{N}$. Por construção e pela própria definição da $F-$norma, segue que para cada $m_1 > m_0$ fixado, a sequência $(S_n^{m_1})$ é de Cauchy, assim existem $n, r > n_0$ de modo que

$$\|s_n^{m_1} - s_r^{m_1}\| < \varepsilon$$

e, portanto, para $n, r > n_0$ temos

$$\|s_r - s_n\| < 3\varepsilon.$$

Logo a sequência $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy no $F-$espaço X, em particular $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in X_1$ e pela desigualdade (3.8) concluímos que X_1 é um $F-$espaço.

Por fim, como $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base em X, então a função $T : X_1 \longrightarrow X$, , $T((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, é bijetora e linear. A continuidade de T segue de

$$\|T((\alpha_n)_{n=1}^{\infty})\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right\| = \|(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\|_1.$$

Portanto, pelo Teorema da Aplicação Aberta para $F-$espaços (Corolário 2.29) temos que X e X_1 são isomorfos.

□

Observação 3.1. *Como toda $F-$norma $\|\cdot\|$ em X está associado a uma métrica $d(x, y) = \|x - y\|$, então naturalmente segue que $\|-x\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Juntando esse fato com a desigualdade triangular, obtemos*

$$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\|| \text{ para todo } x, y \in X.$$

Em particular, se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência convergindo para x, então

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \left\|\lim_{n\to\infty} x_n\right\|.$$

Teorema 3.12. *(Critério de Banach-Grunblum-Nikolskii) Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de vetores não nulos de um $F-$espaço $(X, \|\cdot\|)$. Se existe uma constante $M \geq 1$ tal que para toda sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,*

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \text{ sempre que } n \geq m. \tag{3.9}$$

então a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é básica.

Demonstração. Suponhamos que a desigualdade seja satisfeita. Considere $Y = span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ defina a função,

$$T_n : Y \longrightarrow \overline{Y},\ T_n\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

pondo se necessário $a_{k+1} = \cdots a_n = 0$. Por (3.9), temos

$$\left\| T_n\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq M \left\|\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right)\right\|,$$

para todo $x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \in Y$. Portanto o operador linear T_n é contínuo.

Como $\overline{Y}$ é um subespaço fechado de um F-espaço, então $\overline{Y}$ é também um $F-$espaço. Pelo Teorema 2.9 cada T_n admite uma extensão linear e contínua $S_n : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Y}$. Se $x \in \overline{Y}$ então existe uma sequência $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ em Y com $y_k \longrightarrow x$, em que $y_k = \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i$, e assim segue que $\lim_{k\to\infty} S_n(y_k) = S_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Novamente pela desigualdade (3.9), obtemos

$$\|S_n(y_k)\| \leq M\|y_k\|,$$

pela Observação 3.1 temos,

$$\|S_n(x)\| \leq M\|x\|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in \overline{Y}. \tag{3.10}$$

Escolhidos arbitrariamente $x \in \overline{Y}$ e $\varepsilon > 0$, existe $y = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \in Y$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$ assim para cada $n \geq m$ temos,

$$\begin{aligned}
\|S_n(x) - x\| &\leq \|S_n(x) - S_n(y)\| + \|x - y\| + \|S_n(y) - y\| \\
&< \|S_n(x - y)\| + \varepsilon + \|y - y\| \\
&\leq M\|x - y\| + \varepsilon \\
&< (M + 1)\varepsilon,
\end{aligned}$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = x.$$

Finalmente, vamos definir $f_i : \overline{Y} \longrightarrow \mathbb{K}$, por $f_i(x)x_i = (S_i - S_{i-1})(x)$, como cada P_n é contínuo temos que f_i é um funcional linear contínuo. Além disso,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i = \sum_{i=1}^{n}(S_n - S_{n-1})(x) = S_n(x).$$

Portanto,

$$x = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)x_i.$$

Para a unicidade da representação basta ver que a sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ é $\omega-$independente.

Segue imediatamente da desigualdade (3.10) que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$ implica que $a_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim a sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ é básica.

□

Observação 3.2. *No Teorema 3.12 (Critério de Banach-Grunblum-Nikolskii), provamos que a desigualdade* (3.9) *é uma condição suficiente para que uma sequência seja básica em um F-espaço. Em* [20, Teorema 5.1.8 p.67]*, prova-se que a recíproca também é válida.*

Critérios para determinar sequências básicas em F-espaços são raros de se encontrar na literatura. Enunciaremos a seguir um resultado devido aos matemáticos Paley e Wiener que trata de outro critério para determinação de bases.

Teorema 3.13. *(Paley-Wiener) Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base no F-espaço X. Se $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em X e $\alpha \in (0,1)$ de tal modo que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - y_i) \right\| \leq \alpha \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$$

para quaisquer escalares $a_1, \cdots a_n$, então

1. *$(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base para X;*
2. *Existe um isomorfismo $T : X \longrightarrow X$ tal que $y_i = T(x_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e*

$$(1-\alpha)\|x\| \leq \|T(x)\| \text{ para todo } x \in X.$$

A demonstração desse fato pode ser encontrada em [26].

Definição 3.5. *Sejam X,Y $F-$espaços, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base em X e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base em Y. Dizemos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é equivalente a $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ convergente se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ convergente.*

Teorema 3.14. *Sejam X e Y $F-$espaços com bases $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ respectivamente. Se $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é equivalente a $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, então X e Y são isomorfos.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos o operador

$$T_n : X \longrightarrow Y, \;\; T_n(x) = T_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j f_j.$$

Claramente cada T_n é linear e pelo Corolário 3.10 segue que T_n é contínuo. Sendo $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ equivalentes então $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j \in Y$, para cada $x \in X$. Considere assim a função $T : X \longrightarrow Y$, dada por $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Do Corolário 2.26 temos que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Segue sem dificuldade das equivalências entre as bases que T é uma bijeção e assim do Teorema da Aplicação Aberta (Corolário 2.29) temos que X e Y são isomorfos. Além disso, a aplicação T satisfaz $T(e_n) = f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Proposição 3.15. *Sejam $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base em um $F-$espaço X, $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos, $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de escalares, e*

$$f_k = \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_j e_j \neq 0 \quad \textit{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Então $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência básica.

Demonstração. Pelo Teorema 3.8 podemos considerar uma $F-$norma $\|\cdot\|$ em X que satisfaz (3.6). Suponha que $x \in N := \overline{span\{f_k : k \in \mathbb{N}\}}$, então existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em N tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, onde

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{n,k} f_k,$$

em que para cada n, $\beta_{n,k} = 0$ exceto para um número finito de k. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (\beta_{m,k} - \beta_{n,k}) f_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (\beta_{m,k} - \beta_{n,k}) . \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_j e_j \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} (\beta_{m,k} - \beta_{n,k}) \alpha_j e_j \right\|. \end{aligned}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ fixo de (3.6) temos

$$\|x_n - x_m\| \geq \left\| \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} (\beta_{m,k} - \beta_{n,k}) \alpha_j e_j \right\| = \|(\beta_{m,k} - \beta_{n,k}) f_k\|.$$

Definindo $M_k : span\{f_k\} \longrightarrow \mathbb{K}$ por $M_k(\alpha f_k) = \alpha$, então cada M_k é contínua, pois é linear definida em um espaço de dimensão finita, em particular, pela Proposição 1.18 é uniformemente contínua. Como a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, segue que $(\beta_{n,k})_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy para cada $k \in \mathbb{K}$. Seja assim

$$\beta_k = \lim_{n\to\infty} \beta_{n,k} \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Suponha $n_k + 1 \leq j \leq n_{k+1}$. Então,

$$e_j^*(x_n) = e_j^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_{n,k} f_k \right) = e_j^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_{n,k} . \left(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_n e_n \right) \right)$$

$$\begin{aligned} &= e_j^*(\beta_{n,k} f_k) \\ &= \beta_{n,k} e_j^*(f_k) \\ &= \beta_{n,k}\alpha_j \end{aligned}$$

Sabemos que os funcionais linear e_j^* são funcionais e $x_n \longrightarrow x$, então

$$e_j^*(x) = \lim_{n\to\infty} e_j^*(x_n) = \lim_{n\to\infty} \beta_{n,k} e_j^*(f_k) = \beta_k e_j^*(f_k),$$

segue assim que

$$\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} e_j^*(x) e_j = \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \beta_k \alpha_j e_j = \beta_k \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_j e_j = \beta_k f_k. \tag{3.11}$$

Sendo $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base em X então, $x = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(x) e_j$, pela igualdade (3.11) obtemos $x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k f_k$.

Para provar a unicidade da escolha dos escalares β_k é suficiente verificar que se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k = 0$ então $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para isso basta notar que para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$0 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k \right\| \geq \|a_j f_j\|$$

logo $a_j = 0$ e assim $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência básica.

□

3.2 Propriedades de Extensão de Hahn-Banach para F-espaços

Dizemos que um espaço vetorial topológico possui a Propriedade de Extensão de Hahn-Banach quando todo funcional linear definido em um subespaço fechado pode ser estendido linear e continuamente para o espaço todo. Por conveniência, usaremos a já consagrada sigla em inglês. Assim quando um espaço X possuir tal propriedade, diremos simplesmente que X possui HBEP (Hahn-Banach Extension Property). Vimos no primeiro capítulo que o Teorema de extensão Hahn-Banach é válido em espaços localmente convexos, o que implica que esses espaços naturalmente possuem a HBEP.

Exemplo 3.4. *Todo espaço localmente convexo possui HBEP.*

A busca por espaços que não possuem HBEP é um trabalho árduo e sutil. O matemático N. Peck provou em [29] que o espaço ℓ_p com $0 < p < 1$ não possui HBEP.

Exemplo 3.5. *Seja $0 < p < 1$ e D o disco unitário centrado na origem do plano complexo. O espaço de Hardy, denotado por $H^p(D)$ é o conjunto de todas as funções analíticas $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$*

satisfazendo a condição

$$\|f\|_p = \sup_{0\leq r\leq 1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Em [18] *verifica-se que a aplicação* $\|\cdot\|_p^p$ *é uma* $F-$*norma que torna* $H^p(D)$ *um* F*-espaço não localmente convexo que não possui HBEP.*

Os espaços $H^p(D)$ e ℓ_p têm muito em comum, ambos são $F-$espaços não localmente convexos. O nosso objetivo é demonstrar que em F-espaços a propriedade de extensão está intrisicamente relacionado à convexidade local. Para isso utilizaremos fortemente a topologia de Mackey, uma vez que essa possui os mesmos funcionais lineares contínuos da topologia original. O próximo resultado é uma caracterização importante dessa topologia em função das suas bases de vizinhanças.

Proposição 3.16. *Seja* X *um* $F-$*espaço e denotemos por* $V_n := conv\left\{x \in X : \|x\| < \frac{1}{n}\right\}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Então a coleção* $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ *forma uma base de vizinhanças da origem na topologia de Mackey* $m(X, X')$*. Por tanto, a topologia de Mackey é mais fraca que a topologia original.*

A demonstração desse fato pode ser encontrada em [35].

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = \left\{x \in X : \|x\| < \frac{1}{n}\right\}$. Se $x \in A_n$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| \leq 1$, então

$$\|\alpha x\| \leq \|x\| < \frac{1}{n}.$$

Assim cada conjunto A_n é equilibrado, em particular cada V_n também o é. Denotando por p_n o funcional de Minkowski em V_n segue da Proposição 1.28 que p_n é uma seminorma para cada $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, do Teorema de Birkhoff-Kakutani (Corolário 2.6), a topologia de Mackey nesse caso é metrizável.

Lema 3.17. *Sejam* $(X, \|\cdot\|)$ *um* $F-$*espaço com* $\|\cdot\|$ *satisfazendo* (3.6) *e* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma base. Então para cada* $n \in \mathbb{N}$ *o funcional de Minkowski* p_n *em* V_n *também satisfaz* (3.6)*, isto é,*

$$p_n\left(\sum_{j=k}^{l} e_j^*(x)e_j\right) \leq p_n(x) \text{ para todo } 0 \leq k \leq l \text{ e } x = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(x)e_j.$$

Demonstração. Com efeito, sejam $x = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(x)e_j \in X$, $0 \leq k \leq l$ e $p = p_n$. Se $\alpha > p(x)$, então $p(\alpha^{-1}x) < 1$ e pela Proposição 1.28 temos $\alpha^{-1}x \in V_n$, logo

$$\alpha^{-1}x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i,$$

onde $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ e $\|x_i\| < \frac{1}{n}$ para todo $i = 1, \cdots, N$. Note que

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(x)e_j\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{-1} e_j^*(x)e_j \\
&= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(x_i)e_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_j^*(x_i)\right) e_j,
\end{aligned}$$

pela unicidade da representação de uma vetor em uma base, segue que $\alpha^{-1}e_j^*(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_j^*(x_i)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}\sum_{j=k}^{l} e_j^*(x)e_j &= \sum_{j=k}^{l}\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_j^*(x_i)e_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(\sum_{j=k}^{l} e_j^*(x_i)e_j\right).
\end{aligned}$$

Como a $F-$norma $\|\cdot\|$ satisfaz (3.6), obtemos

$$\left\|\sum_{j=k}^{l} e_j^*(x_i)e_j\right\| \leq \|x_i\| < \frac{1}{n} \text{ com } i = 1, 2, \cdots, n.$$

Isto nos diz que $\alpha^{-1}\sum_{j=k}^{l} e_j^*(x)e_j$ é uma combinação convexa de elementos de A_n, logo $\alpha^{-1}\sum_{j=k}^{l} e_j^*(x)e_j \in V_n$. Novamente pela Proposição 1.28 devemos ter

$$p\left(\sum_{j=k}^{l} e_j^*(x)e_j\right) < \alpha.$$

Como a escolha de $\alpha \in \mathbb{R}$ foi arbitrária, segue que

$$p\left(\sum_{j=k}^{l} e_j^*(x)e_j\right) \leq p(x).$$

□

A proposição subsequente estabelece as condições nas quais funcionais lineares contínuos não

podem ser estendidos na topologia de Mackey e, por conseguinte, na topologia usual. Porém antes disso, precisamos da seguinte noção.

Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções definidas em um espaço vetorial topológico X. A notação $f(x) = O(g(x))$, significa que existe $M > 0$ e $x_0 \in X$ tal que

$$|f(x)| \leq Mg(x) \text{ para todo } x \geq x_0.$$

Isto significa dizer que f cresce no máximo a proporção de g.

Proposição 3.18. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um $F-$espaço e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência básica. Suponha que*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = \delta > 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ em } m(X, X').$$

Então existe um funcional linear contínuo $f : \overline{span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} \longrightarrow \mathbb{K}$ que não pode ser estendido para X.

Demonstração. Seja $Y = \overline{span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Se $x \in Y$, então $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)x_n$, em que φ_n é o funcional coordenado definido sobre a base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em Y. Vamos provar que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$ para todo $x \in Y$. Caso contrário, deve existir um número inteiro $N > 0$ e uma subsequência $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$|\varphi_{n_k}(x)| > \frac{1}{N} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Seja $\|\cdot\|_1$ uma $F-$norma em N equivalente a $\|\cdot\|$ satisfazendo (3.6) relativo a base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Assim, para cada $k \leq n_k \leq l$ temos

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=k}^{l} \varphi_i(x)x_i\right\|_1 &\geq \|\varphi_{n_k}(x)x_{n_k}\|_1 \\
&\geq \left\|\frac{1}{\varphi_{n_k}(x)N} \cdot \varphi_{n_k}(x)x_{n_k}\right\|_1 \\
&= \left\|\frac{1}{N}x_{n_k}\right\|_1,
\end{aligned}$$

A segunda dessas desigualdades é uma consequência de que

$$\frac{1}{|\varphi_{n_k}(x)|N} < 1, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Segue da Proposição 2.3 que,

$$\|x_{n_k}\|_1 = \left\|N\frac{1}{N}x_{n_k}\right\|_1 \leq N\left\|\frac{1}{N}x_{n_k}\right\|_1$$

ou ainda,

$$\frac{1}{N}\|x_{n_k}\|_1 \leq \left\|\frac{1}{N}x_{n_k}\right\|_1$$

portanto,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=k}^{l}\varphi_i(x)x_i\right\|_1 &\geq \left\|\frac{1}{N}x_{n_k}\right\|_1 \\ &\geq \frac{1}{N}\|x_{n_k}\|_1 \geq \frac{1}{N}\delta_1\end{aligned}$$

em que $\delta_1 = \inf_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|_1 > 0$. Concluímos assim que a sequência $\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)x_i\right)_{n=1}^{\infty}$ não é de Cauchy, gerando uma contradição, pois $x = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)x_n$, portanto $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = 0$.

Sejam $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots$ a base local para a topologia de Mackey $m(X, X')$ descrita na Proposição 3.16 e p_n o respectivo funcional de Minkowski do conjunto V_n. Então $p_1 \leq p_2 \leq \cdots$, e pela Proposição 3.16 os conjuntos $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ forma uma base de vizinhança da origem equilibrada e convexa em $\tau(X, X')$. E assim, pelo Teorema 1.29 a topologia de Mackey é gerada pela família de seminormas $\mathcal{P} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em particular, p_n é contínua para cada $n \in \mathbb{N}$. Como por hipótese $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (em $\tau(X, X')$) segue que

$$\lim_{n\to\infty} p_k(x_n) = 0 \text{ para cada } k \in \mathbb{N},$$

assim existe uma subsequência $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} p_k(x_{n_k}) = 0.$$

A partir disso, podemos construir uma sequência $\alpha_k \in \ell_1$ tal que,

$$|\lambda_{n_k}| \neq O(p_k(f_{n_k})) \qquad (k \longrightarrow \infty). \tag{3.12}$$

Para cada n considere a função

$$f_n : N \longrightarrow \mathbb{K}, \;\; f_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i(x).$$

Cada f_n é um funcional linear contínuo uma vez que φ_n é linear e contínua. Além disso, como $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = 0$ segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(x)$ converge para cada $x \in N$. Definindo assim a função $f : N \longrightarrow \mathbb{K}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(x)$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ para cada } x \in N.$$

Pelo Princípio da Limitação Uniforme (Corolário 2.26) concluímos que f é um funcional linear contínuo.

Suponhamos que existe uma extensão $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ de f na topologia gerada pela $F-$norma.

Sabemos da Proposição 3.16 que a topologia de Mackey é mais fraca que a topologia original, então $\tilde{f}$ é um funcional linear contínua em $m(X, X')$. Pelo Lema 1.40 existe $N \in \mathbb{N}$ e uma constante $M > 0$ tal que

$$|\tilde{f}(x)| \leq M p_N(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Isto é,

$$\tilde{f}(x) = O(p_N(x)).$$

Em particular,

$$\tilde{f}(x_n) = f(x_n) = \lambda_n = O(p_N(x_n)),$$

para $k \geq N$ temos $p_k \geq p_N$ e assim $\lambda_n = O(p_k(x_n))$ logo,

$$\lambda_{n_k} = O(p_k(x_{n_k})),$$

o que contradiz (3.12), portanto f não admite uma extensão linear e contínua para X. □

Teorema 3.19. *Se X é um $F-$espaço não localmente convexo com uma base, então X não tem HBEP.*

Demonstração. Sejam $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base em X e $\|\cdot\|$ uma $F-$norma em X que satisfaz (3.6). Sabemos da Proposição 3.16 que a topologia de Mackey $m = m(X, X')$ além de ser metrizável é mais fraca que a topologia original τ em X. Primeiramente vamos mostrar que existe uma sequência de escalares $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que a sequência $\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right)_{n=1}^{\infty}$ é $m-$Cauchy mas não é $\tau-$Cauchy.

Suponhamos que tal sequência não existe. Afirmamos que (X, m) é completo. Com efeito, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência $m-$Cauchy, como os funcionais coordenados são $\tau-$contínuos, então também são $m-$contínuos. Assim para cada $j \in \mathbb{N}$ a sequência $(e_j^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, logo existe uma sequência de escalares $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} e_j^*(x_n) = \alpha_j \text{ para cada } j \in \mathbb{N}.$$

Seja $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de seminormas que gera a topologia de Mackey, para cada $p = p_c$, com $c \in \mathbb{N}$ temos,

$$\begin{aligned}
p\left(\sum_{i=k}^{l} \alpha_i e_i\right) &= p\left(\sum_{i=k}^{l} \alpha_i e_i - e_i^*(x_n)e_i + e_i^*(x_n)e_i\right) \\
&\leq p\left(\sum_{i=k}^{l} [\alpha_i - e_i^*(x_n)]e_i\right) + p\left(\sum_{i=k}^{l} e_i^*(x_n)e_i\right) \\
&= p\left(\sum_{i=k}^{l} [\lim_{m\to\infty} e_i^*(x_m) - e_i^*(x_n)]e_i\right) + p\left(\sum_{i=k}^{l} e_i^*(x_n)e_i\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} p\left(\sum_{i=k}^{l} [e_i^*(x_m) - e_i^*(x_n)]e_i\right) + p\left(\sum_{i=k}^{l} e_i^*(x_n)e_i\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} p\left(x_m - x_n\right) + p\left(\sum_{i=k}^{l} e_i^*(x_n)e_i\right),$$

onde, a ultima desigualdade segue do Lema 3.17. Como a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é $m-$Cauchy então $\lim_{m,n\to\infty} p(x_m - x_n) = 0$. Por outro lado, a série $\sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x_n)e_i$ converge para x_n em (X,τ), em particular também converge em (X,m). Portanto, a sequência $\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(x_n)e_i\right)_{n=1}^{\infty}$ é $m-$Cauchy. Assim, podemos escolher k,l suficientemente grandes tais que $p\left(\sum_{i=k}^{l} e_i^*(x_n)e_i\right) \longrightarrow 0$. Concluímos assim que a sequência $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)_{n=1}^{\infty}$ é $m-$Cauchy. Pela hipótese feita no ínicio, a sequência $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)_{n=1}^{\infty}$ é também $\tau-$Cauchy. Logo existe $x \in X$ de tal forma que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = x$ em ambas topologias. Pelo Lema 3.17 temos que

$$\sup_{k,l>0} p\left(\sum_{i=k}^{l} [\alpha_j - e_j^*(x_n)]e_j\right) \leq p(x - x_n)$$

e ainda, se $\lambda > 0$ é tal que $\lambda^{-1}(x - x_n) \in V_c$, então por argumento similar ao feito no Lema 3.17 é possível concluir que $\lambda^{-1}\sum_{i=k}^{l}[\alpha_j - e_j^*(x_n)]e_j \in V_c$ para todo $k,l > 0$. Donde segue assim que

$$\begin{aligned} p(x - x_n) &= \sup_{k,l>0} p\left(\sum_{i=k}^{l}[\alpha_j - e_j^*(x_n)]e_j\right) \\ &= p\left(\sum_{i=k}^{l} \lim_{m\to\infty}[e_j^*(x_m) - e_j^*(x_n)]e_j\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{k,l>0} p\left(\sum_{i=k}^{l}[e_j^*(x_m) - e_j^*(x_n)]e_j\right) \\ &\leq \lim_{m\to\infty} p(x_m - x_n), \end{aligned}$$

e como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência $m-$Cauchy, então fazendo $n \longrightarrow \infty$ segue que $p(x - x_n) \longrightarrow 0$, logo pela Proposição 1.26 temos que $x_n \longrightarrow x$ na topologia de Mackey. Provando assim que (X,m) é completo. Do Teorema da Aplicação Aberta segue que a identidade $i : (X,\tau) \longrightarrow (X,m)$ é um isomorfismo, gerando assim uma contradição, pois m é uma topologia localmente convexa em X enquanto que τ não o é.

Portanto existe uma sequência $S_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ que é $m-$Cauchy mas não é de Cauchy em τ. Logo, existe $\varepsilon > 0$, de modo que, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, existem $m > n > n_0$ com $\|S_m - S_n\| \geq \varepsilon$, ou melhor,

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \beta_j e_j - \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \beta_j e_j \right\| \geq \varepsilon.$$

Com efeito, para $n_0 = 1$ existem $n_2 > n_1 > n_0$, de modo que,

$$\left\| \sum_{j=n_1}^{n_2} \beta_j e_j \right\| \geq \varepsilon.$$

Mais geralmente, para cada $n_0 = k \in \mathbb{N}$ existem $n_{k+1} > n_k > k$, com

$$\left\| \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}} \beta_j e_j \right\| \geq \varepsilon.$$

Construímos assim uma sequência crescente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de inteiros, e definindo

$$f_k = \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}} \beta_j e_j,$$

temos que $f_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e pela Proposição 3.15 a sequência $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ é básica em X. Como $\|f_k\| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\| \geq \varepsilon > 0.$$

Por outro lado, seja V uma vizinhança da origem na topologia de Mackey. Como $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n > n_0 \Longrightarrow S_m - S_n = \sum_{j=n+1}^{m} \beta_j e_j \in V,$$

existe $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n_{k+1} > n_k > n_0$, logo

$$\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}} \beta_j e_j = f_k \in V.$$

Portanto $f_k \overset{m(X,X')}{\longrightarrow} 0$. Pela Proposição 3.18 existe um funcional linear contínuo na topologia original $f : \overline{span}\{f_k : k \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{K}$ que não pode ser estendido para o espaço todo. Logo X não possui HBEP.

□

Em 1973, o matemático N. J. Kalton também utilizando a topologia de Mackey removeu a exigência de que o F-espaço possuísse uma base de Schauder, chegando assim ao seguinte teorema.

Teorema 3.20 (Propriedade da Extensão de Hahn-Banach)**.** *Um F-espaço possui HBEP se e*

somente se for localmente convexo.

A demonstração deste fato pode ser encontrada em [17] e [18].

Referências

[1] F. Albiac and N. Kalton, *Lipschitz structure of quasi-Banach spaces*, Israel Journal of Mathematics **170** (2009), no. 1, 317–335.

[2] N. G. Albuquerque, *Convergência em Espaços Topológicos: Redes e Filtros*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2012.

[3] T. Aoki, *117. Locally Bounded Linear Topological Spaces*, Vol. 18, The Japan Academy, 1942.

[4] R. Bartle, *Elements of integration*, 1st ed., Wiley-Interscience, 1995.

[5] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces And Their Geometry*, 68, North-Holland, 1982.

[6] L. Bernal-González and T. D. Bernavides, *Espacios vectoriales topológicos y espacios funcionales*, Notas de Aula, 2013.

[7] V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov, *Topological Vector Spaces and Their Applications*, 1st ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer International Publishing, 2017.

[8] G. Botelho, D. Pellegrino, and E. Teixeira, *Fundamentos de análise funcional*, SBM, 2012.

[9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 1st ed., Universitext, Springer-Verlag New York, 2010.

[10] W.V. Cavalcante, *Espaços Vetoriais Topológicos*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2015.

[11] K. Conrad, *L_p-spaces for $0 < p < 1$* (2012).

[12] W. Cuellar, *Um espaço de Banach não isomorfo ao conjugado complexo*, Dissertação de Mestrado, USP, 2011.

[13] M. M. Day, *The spaces L^p with $0 < p < 1$*, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 816–823.

[14] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, 1st ed., CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag New York, 2011.

[15] G. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, Vol. 40, John Wiley & Sons, 1999.

[16] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, 1st ed., Mathematische Leitfäden, Vieweg+Teubner Verlag, 1981.

[17] N. J. Kalton, *Basic sequences in F-spaces and their applications*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **19** (1974), no. 2, 151–167.

[18] N. Kalton, N. Peck, and J. Roberts, *An F-space sampler*, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 89, Cambridge University Press, Cambridge. London Mathematical Society, London, 1984 (English).

[19] P. K. Kamthan and M. Gupta, *Sequence spaces and series*, Vol. 65, Marcel Dekker Incorporated, 1981.

[20] ———, *Theory of bases and cones*, Pitman Publishing, 1985.

[21] J. L. Kelley, *General topology*, Graduate texts in mathematics 27, Springer-Verlag, 1975.

[22] S. M. Khaleelulla, *Counterexamples in topological vector spaces*, Vol. 936, Springer, 2006.

[23] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, 2nd ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1969.

[24] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Vol. 17, John Wiley & Sons, 1991.

[25] E. L. Lima, *Espaços Métricos, Projeto Euclides*, Vol. 954, 1977.

[26] J. T. Marti, *Introduction to the Theory of Bases*, 1st ed., Springer Tracts in Natural Philosophy 18, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1969.

[27] J. Mujica, *Espaços Vetoriais Topológicos*, Notas de Aula, IMECC-UNICAMP, 2001.

[28] M. Pavlović, *Function classes on the unit disc: an introduction*, Vol. 52, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2019.

[29] N. T. Peck, *On non locally convex spaces*, Vol. 161, Springer, 1965.

[30] G. Rano and T. Bag, *Bounded linear operators in quasi-normed linear space*, Journal of the Egyptian Mathematical Society **23** (2015), no. 2, 303–308.

[31] J. Roberts, *A compact convex set with no extreme points*, Studia Mathematica **60** (1977), no. 3, 255–266.

[32] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, 1st ed., Mathematics and its applications, Springer, 1985.

[33] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd ed, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, 1991.

[34] J. R. Retherford and C. W. McArthur, *Some remarks on bases in linear topological spaces*, Mathematische Annalen **164** (1966), no. 1, 38–41.

[35] J. H. Shapiro, *Extension of linear functionals on F-spaces with bases*, Duke Math. J. 37 (1970), 639–645.

[36] H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1971.