Janiely Maria da Silva

Sobre a desigualdade de kahane–salem–zygmund e resultados afins

João Pessoa-PB
2023

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Janiely Maria da Silva

Sobre a desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund e resultados afins

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMat) da UFPB como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

Este exemplar corresponde a versão final da tese defendida pela aluna Janiely Maria da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Daniel Marinho Pellegrino
(Orientador)

Anselmo Baganha Raposo Júnior
Anselmo Baganha Raposo Júnior
(Coorientador)

Jãoo Pessoa–PBB
2023

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586s Silva, Janiely Maria da.
Sobre a desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund e resultados afins / Janiely Maria da Silva. - João Pessoa, 2023.
66 f. : il.

Orientação: Daniel Marinho Pellegrino.
Coorientação: Anselmo Baganha Raposo Júnior.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática - Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund. 2. Métodos determinísticos. 3. Jogo das luzes desbalanceadas de Gale-Berlekamp. 4. Teorema de Macphail. 5. Teorema de Dvoretzky-Rogers. I. Pellegrino, Daniel Marinho. II. Raposo Júnior, Anselmo Baganha. III. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por WALQUELINE DA SILVA ARAUJO - CRB-15/514

Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMat) da UFPB como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática.
Área de Concentração: Análise
Aprovada em: 20 de abril de 2023

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino
Orientador
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior
Coorientador
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Daniel Núñez Alarcón
Universidad Nacional de Colombia

Profa. Dra. Diana Marcela Serrano Rodríguez
Universidad Nacional de Colombia

Prof. Dr. Fernando Vieira Costa Júnior
Avignon Université

João Pessoa-PB
2023

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Aos meus queridos pais, Gilson e Givaneide.

Agradecimentos

A Deus pela dádiva da vida e por sua infinita bondade.

Aos meus pais, Gilson e Givaneide, pelos valores ensinados, pela educação, pelo amor e cuidado de sempre. Amo muito vocês.

As minhas queridas irmãs, Janaína e Janeide, por sempre acreditarem na minha capacidade.

Ao meu amado e maravilhoso esposo, Pedro Henrique, por todo apoio, incentivo, admiração, amor e carinho. Obrigada por ser colo quando eu sempre preciso.

A minha amiga e irmã Lindinês (Linda), por todo o seu companheirismo desde o curso de verão em 2016 na UFAL–Maceió. Tenho certeza de que a minha trajetória na pós-graduação ficou mais leve por ter você para partilhar muitos momentos.

Ao professor e orientador Daniel Pellegrino, por quem tenho grande admiração. Obrigada por todo conhecimento compartilhado, pelas dicas, conselhos e pela paciência durante todo esse processo.

A todos os professores do PPGMAT–UFPB pelo excelente trabalho, em especial ao professor Nacib Gurgel por sua ajuda com as orientações no mestrado e doutorado.

Ao professor Anselmo pela suas valorosas contribuições como coorientador.

À banca examinadora formada pelos professores Damião, Daniel, Diana e Fernando, por terem aceitado o convite para avaliar essa tese.

Aos meus queridos amigos de turma: Anselmo, Ginaldo, André, Danilo e Elizabeth. Obrigada galerinha por todos os nossos momentos, em especial os de descontração. Com toda certeza, eu tive a melhor turma de doutorado.

Aos amigos que fiz em Jampa e levo no coração: Camila, Hector Allan, Jonathas e Lisiane.

Ao amigo Fernando, pelas inúmeras ajudas, dentre elas, a imagem para ilustrar a versão contínua do jogo das luzes desbalanceadas.

Ao meu amigo Djair, por sempre estar presente, pelo suporte lendo a tese e pelos ótimos conselhos.

Agradeço ao Michel, um amigo maravilhoso que ganhei do IFPB. Obrigada pelo seu companheirismo e por sua amizade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos e todas que direta ou indiretamente contribuíram e me ajudaram ao longo da minha trajetória acadêmica.

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Resumo

Neste trabalho, revisitamos e exploramos os seguintes resultados clássicos: a desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund (por simplicidade, KSZ), o jogo das luzes desbalanceadas de Gale–Berlekamp e o Teorema de Dvoretzky–Rogers. A princípio, apresentamos uma versão multilinear estendida da KSZ, com a qual obtivemos as estimativas assintóticas ótimas para os expoentes em casos não contemplados pelas versões anteriores. Em particular, provamos que uma conjectura proposta por Albuquerque e Rezende é falsa. Em seguida, inspirados por um antigo resultado de Bohnenblust e Hille, investigamos como certas matrizes de escalares complexos podem ser usadas para substituir os coeficientes ± 1, para obter variantes da KSZ com melhores propriedades. Nessa direção, propusemos uma versão contínua para o famoso jogo das luzes desbalanceadas de Gale–Berlekamp, com boas estimativas. Finalmente, usando a mesma classe de matrizes, obtivemos uma prova construtiva para o Teorema de Dvoretzky–Rogers em espaços de sequências com escalares complexos. Mais precisamente, dado $p \in [1, 2]$, fornecemos exemplos de uma série $(x^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ incondicionalmente somável em $\ell_p(\mathbb{C})$ com $\sum_{j=1}^{\infty} \|x^{(j)}\|^{2-\varepsilon} = \infty$, para todo $\varepsilon > 0$. Usando ainda o "Sistema de Walsh", apresentamos uma construção similar para o caso de espaços de sequências com escalares reais.

Palavras-chave: desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund, métodos determinísticos, jogo das luzes desbalanceadas de Gale–Berlekamp, Teorema de Macphail, Teorema de Dvoretzky–Rogers.

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Abstract

In this work, we explore some classic results that are at the intersection of probability theory and functional analysis, namely: the Kahane–Salem–Zygmund inequality (for simplicity, KSZ), the Gale–Berlekamp unbalanced light game and the Dvoretzky–Rogers Theorem. Our investigation took place, mainly, from the analytical point of view. At first, we present an extended multilinear version of the KSZ, with which we obtain optimal asymptotic estimates for the exponents in cases not covered by previous versions. In particular, we prove that a conjecture proposed by Albuquerque and Rezende is false. Then, inspired by an old result by Bohnenblust and Hille, we investigate how certain matrices of complex scalars can be used to replace the coefficients ± 1, to obtain KSZ variants with better properties. In this direction, we propose a continuous version for the famous game of unbalanced lights by Gale–Berlekamp, with good estimates. Finally, using the same class of matrices, we obtained a constructive proof for the Dvoretzky–Rogers Theorem on sequence spaces with complex scalars. More precisely, given $p \in [1, \infty]$, we provide examples of a series $(x^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ unconditionally summable in $\ell_p(\mathbb{C})$ with $\sum_{j=1}^{\infty} \|x^{(j)}\|^{2-\varepsilon} = \infty$, for all $\varepsilon > 0$. Still using the "Walsh System", we obtained a similar construction for the case of sequence spaces with real scalars.

Key-words: Kahane–Salem–Zygmund inequality, deterministic methods, game of unbalanced lights by Gale–Berlekamp, Macphail theorem, Dvoretzky–Rogers theorem.

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Sumário

Notações e terminologias **1**

Introdução **4**

1 A desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund **9**
1.1 Uma versão estendida da KSZ 10
1.2 Versões complexas da KSZ 14

2 Uma versão contínua para o jogo das luzes desbalanceadas **25**
2.1 O caso bidimensional 27
2.2 O jogo em dimensões altas 31

3 O Teorema de Dvoretzky–Rogers **37**
3.1 Uma abordagem construtiva em $\ell_p(\mathbb{C})$ 38
3.2 Uma abordagem construtiva em $\ell_p(\mathbb{R})$ 42

A Desigualdade múltipla de Khinchin para variáveis de Steinhaus **46**

Referências Bibliográficas **49**

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Notações e terminologias

Aqui, vamos destacar algumas notações e terminologias básicas de Análise Funcional que aparecerão no decorrer do nosso trabalho.

As letras minúsculas m e n denotarão números inteiros positivos. Já as letras maiúsculas com índices, C_m, D_m, K_m, $C_{p,q}$, representarão constantes positivas que dependem de m, p e q, respectivamente.

Em todo o trabalho, o símbolo $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) ou o corpo dos números complexos ($\mathbb{C}$) (quando houver necessidade, enfatizaremos o corpo considerado). Para $p \in [1, \infty]$, ℓ_p^n representará o espaço $\mathbb{K}^n$ com a ℓ_p-norma definida por

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \max_j |x_j|, & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Vale lembrar que a monotonicidade das normas ℓ_p nos garante que

$$\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q,$$

sempre que $p \leq q$.

Quando $p \in [1, \infty]$, p^* indicará o conjugado de p, isto é, o único elemento de $[1, \infty]$ que satisfaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1.$$

Como de costume, a bola unitária fechada de um espaço de Banach E será representada por B_E.

O símbolo E^* representará o *espaço dual* de E. Nesse caso, quando $E = \ell_p^n$, é bem conhecido que temos o seguinte isomorfismo isométrico

$$\begin{array}{ccc} \ell_p^n & \longrightarrow & \left(\ell_{p^*}^n\right)^* \\ (a_j)_{j=1}^n & \longmapsto & \varphi, \end{array}$$

com $\varphi : \ell_{p^*}^n \to \mathbb{C}$ definido por

$$\varphi\left((x_j)_{j=1}^n\right) = \sum_{j=1}^n a_j x_j.$$

Seja E um espaço de Banach. Quando $1 \leq p < \infty$, o espaço das *sequências absolutamente p-somáveis* em E será denotado por $\ell_p(E)$ e estará munido com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $E = \mathbb{K}$, usaremos simplesmente ℓ_p (ou $\ell_p(\mathbb{R})$ ou $\ell_p(\mathbb{C})$, quando for necessário especificar o corpo dos escalares).

Sempre que estiver claro de que norma estamos falando, usaremos a notação simples $\|\cdot\|$.

No que se refere a séries, recordemos que: uma série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ é *incondicionalmente convergente* se converge para qualquer rearranjo de seus termos. Enquanto que, uma série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ é *absolutamente convergente* se

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty.$$

Lembremos que uma aplicação $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é dita *multilinear* (ou *m-linear*) se é linear separadamente em cada coordenada, isto é, se para quaisquer $x_1 \in E_1, \ldots, x_m \in E_m$ e $i = 1, \ldots, m$, os operadores

$$A_{(x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,x_m)} : E_i \longrightarrow F,$$

definidos por $A_{(x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,x_m)}(x) = A(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_m)$, são lineares. Nesse caso, quando os espaços $E_1, \ldots, E_m$ são normados e A é contínua, a norma de A é definida por

$$\|A\| = \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_m)\|;\ x_j \in B_{E_j},\ j = 1, \ldots, m\}$$

Quando $F = \mathbb{K}$, uma aplicação multilinear $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathbb{K}$ será chamada de *forma multilinear ou m-linear.*

Usaremos a notação $(a_{j_1\cdots j_m})_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n_1,\ldots,n_m}$ para representar uma matriz de *dimensão m* com $n_1 \times \cdots \times n_m$ entradas tais que

$$|a_{j_1\cdots j_m}| = 1.$$

A notação

$$\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n_1,\ldots,n_m}$$

representará o somatório múltiplo

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m}.$$

Para $j \in \mathbb{N}$, a j-ésima *função de Rademacher* é a função $r_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $r_j(t) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}(2^j \pi t))$, onde $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

é a função sinal. Obviamente, temos

$$\int_0^1 r_i(t)r_j(t)dt = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Outras notações, definições e terminologias serão apresentadas ao longo do texto, conforme a necessidade.

Introdução

A solução de uma variedade de problemas em Análise requer a existência de matrizes quadradas $n \times n$ com entradas ± 1 que satisfazem certas propriedades, veja, por exemplo, as referências [10], [15] e [32]. Em alguns casos, especialmente para valores grandes de n, a construção de matrizes adequadas é acompanhada por enormes dificuldades combinatórias e métodos probabilísticos entram em jogo. Por um lado, as abordagens probabilísticas são uma ferramenta profunda da matemática moderna que nos permitem evitar problemas combinatórios extremamente difíceis, mas, por outro lado, elas apenas revelam a existência de certos objetos e, além disso, a forma como os argumentos são concebidos, às vezes, leva a estimativas abaixo do ideal. A famosa desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund (por simplicidade, KSZ), por exemplo, é um dos resultados que ilustra as virtudes e deficiências desses métodos.

Com origem nos estudos de R. Salem, A. Zygmund e J. P. Kahane (veja [50] e [26]) sobre desigualdades aleatórias para polinômios trigonométricos em várias variáveis, a KSZ é uma ferramenta probabilística poderosa que foi trazida para a versão multilinear por H. Boas em [13]. Nesse contexto, ela assegura que para inteiros positivos m, n e para $p_1, \ldots, p_m \in [2, \infty]$, existem uma constante universal C_m e uma forma m-linear $A_{m,n} : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_{m,n}\left(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}\right) = \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \pm z_{j_1}^{(1)} \cdots z_{j_m}^{(m)}$$

tais que

$$\|A_{m,n}\| \leq C_m n^{\frac{m+1}{2} - \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}\right)}, \tag{1}$$

com

$$C_m = \sqrt{32m \log(6m)}\sqrt{m!}.$$

Um argumento de interpolação mostra que se $p_1, \ldots, p_m \in [1, 2]$, então existem uma constante $C_m > 0$ e uma forma m-linear $A_{m,n}$ como acima tais que

$$\|A_{m,n}\| \leq C_m n^{1 - \frac{1}{\max\{p_1,\ldots,p_m\}}}. \tag{2}$$

A estimativa (2) aparece em essência no trabalho de Bayart [7]. No que diz respeito aos expoentes, as desigualdades (1) e (2) fornecem as estimativas assintóticas ótimas para as menores normas possíveis de $A_{m,n}$ quando $\{p_1, \ldots, p_m\} \subset [2, \infty)$ e $\{p_1, \ldots, p_m\} \subset [1, 2)$,

respectivamente. Isso significa que os expoentes de n, nesses casos, não podem ser melhorados, ou seja, mesmo se multiplicarmos o segundo membro das desigualdades por uma constante positiva, eles não podem ser substituídos por expoentes menores.

Ambas as versões multilinear e polinomial da KSZ desempenham um papel fundamental na Análise moderna. Diversas aplicações e estudos surgiram desde então, veja, por exemplo, os trabalhos [2], [9], [12], [35], [38], [51] e as referências neles citadas.

Para formas bilineares, G. Bennett, independentemente, e usando argumentos probabilísticos semelhantes, provou um resultado ainda mais completo do que a KSZ (ver [10], e também o trabalho de Bennett, Goodman e Newman [11] para um lema probabilístico crucial usado em [10]). Ele mostrou que, para quaisquer $p, q \geq 1$ e quaisquer inteiros positivos n_1, n_2, existem uma constante $C_{p,q} > 0$ e uma foma bilinear $A_{n_1,n_2} : \ell_p^{n_1} \times \ell_q^{n_2} \to \mathbb{R}$ com coeficientes ± 1 satisfazendo

$$\|A_{n_1,n_2}\| \leq C_{p,q} \max\left\{ {n_2}^{1/q^*} {n_1}^{\max\{1/2-1/p,\ 0\}}, {n_1}^{1/p*} {n_2}^{\max\{1/q^*-1/2,\ 0\}} \right\}.$$

Como acontece com a KSZ, a constante $C_{p,q}$ depende de argumentos probabilísticos e no artigo de Bennett não há menção ao seu valor.

Recentemente, revisitando as técnicas de Boas, N. Albuquerque e L. Rezende provaram uma versão multilinear da KSZ em um ambiente mais geral, condizente com a abordagem de Bennett. Mais precisamente, a desigualdade provada em [1, Theorem 2.4] afirma que, para inteiros positivos $m, n_1, \ldots, n_m$ e para $p_1, \ldots, p_m \in [1, \infty]$, existem uma constante $D_m > 0$ e uma forma m-linear $A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \to \mathbb{K}$ do tipo

$$A\left(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}\right) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \pm z_{j_1}^{(1)} \cdots z_{j_m}^{(m)},$$

tais que

$$\|A\| \leq D_m \left(\sum_{k=1}^{m} n_k \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p_k},\ 0\right\}}, \tag{3}$$

com $\gamma := \min\{2, \max\{p_k : p_k \leq 2\}\}$, onde D_m se comporta essencialmente como C_m.

A estimativa acima é ótima quando $p_1, \ldots, p_m \in [2, \infty]$ (ver [1, Theorem 3.1]). Além disso, um cálculo direto mostra que (3) recupera (1) e (2) quando $n_1 = \cdots = n_m := n$. No entanto, apesar de ser uma versão multilinear ligeiramente mais completa, o resultado não fornece a otimalidade dos expoentes nos casos que não são contemplados por (1) e (2), ou seja, quando $p_1, \ldots, p_m$ interceptam tanto $[1, 2)$ quanto $(2, \infty]$.

Os argumentos probabilísticos usados em (1), (2) e (3), em geral, são suficientes para fornecer expoentes ótimos, mas as constantes envolvidas estão longe de serem as melhores estimativas para as normas. Um estudo recente realizado por D. Pellegrino e A. Raposo Jr. em [38] e [39], mostra, com construções determinísticas, que em alguns casos essas constantes são dominadas assintoticamente por 1 e universalmente por $(8/5)^{1/2}$.

No Capítulo 1, exploramos a KSZ sob dois pontos de vista: otimalidade dos expoentes e estimativas para constantes em variantes complexas. Na Seção 1, apresentamos uma versão estendida da KSZ com a qual obtivemos os expoentes ótimos em casos que não eram fornecidos pelas versões em (1), (2) e (3). Em termos mais precisos, mostramos que, se $m, n_1, n_2, \ldots, n_m$ são inteiros positivos e $p_1, \ldots, p_m \in [1, \infty]$, então existem uma

constante universal $C > 0$ (dependendo apenas de m e se comportando como C_m e D_m) e uma forma m-linear $A_{m,n} : \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \longrightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_{m,n}\left(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}\right) = \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n_1,\ldots,n_m} \pm z_{j_1}^{(1)} \cdots z_{j_m}^{(m)},$$

tais que

$$\|A\| \leq C \left(\sum_{k=1}^{m} n_k\right)^{\frac{1}{\rho}} \prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},\, 0\right\}},$$

com $\rho := \min\{\max\{2, p_k^*\}\}$. Além disso, quando ocorre $n_1 = \cdots = n_m := n$, o expoente $1/\min\{\max\{2, p_k^*\}\} + \sum_{k=1}^{m} \max\{1/2 - 1/p_k, 0\}$ é ótimo.

Na Seção 2, inspirados por um resultado do artigo [14], investigamos como certas matrizes de escalares complexos, que datam dos trabalhos de Toeplitz [49], podem ser usadas para substituir as entradas ± 1, para obter variantes da KSZ com melhores propriedades no que diz respeito às constantes. Dentre outros resultados, para $p_1, p_2 \geq 2$, construímos uma forma bilinear $A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \to \mathbb{C}$ definida por

$$A\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) = \sum_{i_1,i_2=1}^{n_1,n_2} a_{i_1 i_2} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)},$$

com $|a_{i_1 i_2}| = 1$, cuja norma satisfaz

$$\|A\| \leq n^{\frac{1}{2}} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}},$$

onde $n = \max\{n_1, n_2\}$. Com isso, respondemos a um problema apresentado em [1]. Mostramos ainda que, em alguns casos multilineares, o mesmo tipo de dominação ocorre. Os principais resultados deste capítulo estão presentes nos trabalhos:

> *D. Pellegrino, D. Serrano-Rodríguez, J. Silva, On unimodular multilinear forms with small norms on sequence spaces, Lin. Algebra Appl.* ***595*** *(2020), 24–32.*
>
> *D. Pellegrino, J. Silva, E. Teixeira. On a continuous Gale–Berlekamp switching game, to appear in An. Acad. Brasil. Ciênc.*

Os métodos de natureza determinística, utilizados na Seção 2 do Capítulo 1, permitiram que propuséssemos uma versão contínua para o famoso jogo das luzes desbalanceadas de Gale-Berlekamp (que é, em certo sentido, equivalente a um caso particular da KSZ). Apresentamos essa nova variante no Capítulo 2.

Projetado de maneira independente por D. Gale e E. Berlekamp na década de 1960, o jogo das luzes desbalanceadas consiste em uma matriz quadrada $n \times n$ de lâmpadas acesas e apagadas dispostas em uma configuração inicial de luzes Θ_n. O objetivo é desligar o máximo possível de luzes usando n interruptores "de linhas" e n interruptores "de colunas", que invertem o estado de cada lâmpada (acesa para apagada e apagada para acesa) na linha ou coluna correspondente.

Às vezes, esse problema de otimização é proposto como encontrar o máximo da diferença entre o número de luzes que estão acesas e o número de luzes que estão apagadas, pois ambos os problemas são equivalentes. Nesse contexto, a abordagem matemática natural para modelar o jogo é associando uma configuração de luzes Θ_n a uma matriz $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ cujos elementos a_{ij} são $+1$ ou -1, de modo que $+1$ é identificado com uma lâmpada quando acesa e -1 representa a lâmpada apagada. Assim, a tarefa é estimar o

$$G_n = \min\left\{ \max_{x_i,y_j\in\{-1,+1\}} \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \right| : a_{ij} = -1 \text{ ou } +1 \right\},$$

onde x_i e y_j denotam os interruptores da linha i e da coluna j, respectivamente. Várias questões relacionadas ao problema original foram investigadas em profundidade (veja [16, 17, 22, 52]), em particular a dificuldade de resolver o jogo foi estudada em [45]. Resultados recentes de [39, Theorem 5.2] melhoraram as estimativas do jogo para $n = 15, 17, 18, 19$ e os autores forneceram a seguinte estimativa universal

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{G_n}{n^{3/2}} \leq 1,07.$$

Em nossa generalização para uma versão contínua, obtivemos dominação superior por 1. Substituímos as lâmpadas por vetores do plano ($\mathbb{R}^2$) e os interruptores por botões de direção. Nesse caso, o novo problema consiste em maximizar a norma euclidiana da soma de todos os vetores usando os botões que mudam a direção dos vetores.

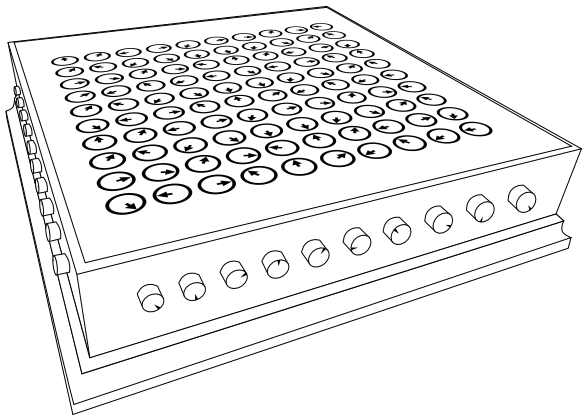

Figura 1. Ilustração do jogo contínuo para $n = 10$.

Estudamos também uma versão ponderada deste novo jogo contínuo e permitimos tabuleiros não necessariamente quadrados e em dimensões superiores a dois. Mostramos ainda que em alguns casos especiais as estimativas obtidas são ótimas. O conteúdo desse capítulo se encontra no trabalho:

> *D. Pellegrino, J. Silva, E. Teixeira. On a continuous Gale–Berlekamp switching game, to appear in An. Acad. Brasil. Ciênc.*

Finalmente, para ilustrar o alcance da abordagem com as matrizes complexas utilizadas no Capítulo 1, o terceiro e último capítulo foi reservado a um importante teorema devido a A. Dvoretzky e C. A. Rogers. Em 1947, M. S. Macphail ([33]) construiu uma série em ℓ_1 que converge incondicionalmente, mas não converge absolutamente. De acordo com a literatura ([20]), este resultado ajudou Dvoretzky e Rogers a finalmente responderem a um problema de longa data da teoria dos espaços de Banach, mostrando que em todos os espaços de Banach de dimensão infinita existe uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável. Esse foi o ponto de partida para a investigação e construção de uma teoria grandiosa de operadores absolutamente somantes, àqueles que levam sequências incondicionalmente somáveis em sequências absolutamente somáveis. O conceito iniciou-se por volta dos anos 50 com A. Grothendieck ([24]) e, posteriormente, foi reformulado e ampliado por vários matemáticos importantes como, por exemplo, J. Lindenstrauss, A. Pelczynski, R. Alencar e M. Matos (veja [3], [31] e [36]). Em termos mais precisos, o Teorema de Dvoretzky-Rogers afirma que em todo espaço de Banach E de dimensão infinita existe uma série incondicionalmente convergente $(x^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x^{(j)}|^{2-\varepsilon} = \infty$$

para todo $\varepsilon > 0$. Sua prova é não construtiva e o resultado de Macphail para $E = \ell_1$ fornece uma demostração determinística apenas para $\varepsilon \geq 1$. Algumas provas alternativas do resultado de Macphail e do Teorema de Dvoretzky–Rogers apareceram mais tarde, mas não eram construtivas (veja [29, página 145], [6, 53, 23, 47] e as referências contidas). Também referimos ao leitor [8] para uma abordagem em ℓ_1 usando a KSZ. Aqui, apresentamos uma prova construtiva para o Teorema de Dvoretzky–Rogers em espaços de sequências com escalares complexos que funciona para todo $\varepsilon > 0$. Além disso, usando o "Sistema de Walsh" obtivemos uma construção similar para o caso de espaços de sequências com escalares reais. Esses resultados foram publicados no nosso artigo:

> *D. Pellegrino, J. Silva. Macphail's theorem revisited. Archiv der Mathematik, v.* ***117****, p. 647-656, 2021.*

Capítulo 1

A desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund

A desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund é um resultado probabilístico que garante a existência de matrizes especiais com entradas ± 1 gerando formas m-lineares unimodulares com normas relativamente pequenas. Essa desigualdade (no contexto multilinear formulado por Boas em [13]), assegura que para inteiros positivos m, n e para $p_1, \ldots, p_m \in [2, \infty]$, existem uma constante universal $C_m > 0$ e uma forma m-linear $A_{m,n} : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_{m,n}\left(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}\right) = \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \pm z_{j_1}^{(1)} \cdots z_{j_m}^{(m)}$$

tais que

$$\|A_{m,n}\| \leq C_m n^{\frac{m+1}{2} - \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}\right)}. \tag{1.1}$$

Quando $p_1, \ldots, p_m \in [1, 2]$, um argumento de interpolação, que aparece no trabalho de Bayart [8], mostra que existem uma constante $C_m > 0$ e uma forma m-linear $A_{m,n}$ como acima satisfazendo

$$\|A_{m,n}\| \leq C_m n^{1 - \frac{1}{\max\{p_1, \ldots, p_m\}}}. \tag{1.2}$$

Para formas bilineares, Bennett, (ver [10]), apresenta um resultado ainda mais completo. Ele provou que, para quaisquer $p, q \geq 1$ e quaisquer inteiros positivos n_1, n_2, existem uma constante $C_{p,q} > 0$ e uma foma bilinear $A_{n_1,n_2} : \ell_p^{n_1} \times \ell_q^{n_2} \to \mathbb{R}$ com coeficientes ± 1 satisfazendo

$$\|A_{n_1,n_2}\| \leq C_{p,q} \max\left\{ {n_2}^{1/q^*} {n_1}^{\max\{1/2 - 1/p,\ 0\}}, {n_1}^{1/p*} {n_2}^{\max\{1/q^* - 1/2,\ 0\}} \right\}.$$

Em todos os casos acima, as desigualdades são ótimas no que se refere aos expoentes. No entanto, os argumentos probabilísticos empregados na demonstração não fornecem boas constantes. No caso de $C_{p,q}$, por exemplo, no artigo de Bennett sequer temos uma pista do seu valor.

Recentemente, Albuquerque e Rezende ([1]) apresentaram uma versão multilinear seguindo o tratamento mais geral de Bennett. Eles mostraram que, para inteiros positivos $m, n_1, \ldots, n_m$ e para $p_1, \ldots, p_m \in [1, \infty]$, existem uma constante $D_m > 0$ e uma forma m-linear $A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \to \mathbb{K}$ do tipo

$$A\left(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}\right) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \pm z_{j_1}^{(1)} \cdots z_{j_m}^{(m)},$$

tais que

$$\|A\| \leq D_m \left(\sum_{k=1}^{m} n_k\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p_k},\, 0\right\}}, \tag{1.3}$$

com $\gamma := \min\{2, \max\{p_k : p_k \leq 2\}\}$.

A estimativa (1.3) recupera as desigualdades (1.1) e (1.2) quando $n_1 = \cdots = n_m := n$ e D_m se comporta essencialmente como C_m. Além disso, a desigualdade é ótima quando $p_1, \ldots, p_m \in [2, \infty]$ (ver [1, Theorem 3.1]). Entretanto, apesar de ser uma versão multilinear ligeiramente mais completa, o resultado não fornece a otimalidade dos expoentes nos casos que não são contemplados por (1.1) e (1.2).

Neste capítulo, seguindo esse ambiente mais geral, apresentamos uma versão estendida da KSZ onde obtivemos as estimativas assintóticas ótimas para o caso que as desigualdades acima não fornecem, ou seja, quando $\{p_1, \ldots, p_m\}$ intercepta tanto $[2, \infty]$ quanto $[1, 2)$, em particular provamos que uma conjectura proposta por Albuquerque e Rezende em [1] é falsa. Por último, inspirados por um resultado do artigo [14], investigamos como certas matrizes de escalares complexos, que datam dos trabalhos de Toeplitz [49], podem ser usadas para substituir os coeficientes ± 1, para obter versões da KSZ com melhores propriedades. Nessa direção, respondemos a um problema apresentado em [1]. De antemão, destacamos que os principais resultados que serão apresentados aqui estão presentes nos trabalhos:

> *D. Pellegrino, D. Serrano-Rodríguez, J. Silva, On unimodular multilinear forms with small norms on sequence spaces, Lin. Algebra Appl.* ***595*** *(2020), 24–32.*
>
> *D. Pellegrino, J. Silva, E. Teixeira. On a continuous Gale–Berlekamp switching game, to appear in An. Acad. Brasil. Ciênc.*

1.1 Uma versão estendida da KSZ

Nossa proposta para esta seção é apresentar uma versão estendida da KSZ, com a qual obtivemos as estimativas assintóticas ótimas para os expoentes que não são obtidas em (1.1) e (1.2). Por razões didáticas, relembremos o enunciado do seguinte resultado de [1]:

Teorema 1.1 *Sejam $m, n_1, \ldots, n_m$ inteiros positivos e $p_1, \ldots, p_m \in [1, \infty]$. Então existe uma forma m-linear $A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \to \mathbb{K}$ do tipo*

$$A\left(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}\right) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \pm z_{j_1}^{(1)} \cdots z_{j_m}^{(m)},$$

tal que

$$\|A\| \leq C_m \prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},\, 0\right\}} \left(\sum_{k=1}^{m} n_k\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

com $C_m = 8(d!)^{1-\max\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{p}\right\}}\sqrt{\log(1+4m)}$ e $p := \max\{p_1, \ldots, p_m\}$.

Os expoentes em (1.4) são ótimos quando $p_1, \ldots, p_m \in [2, \infty]$ (ver [1, Theorem 3.1]). Seguindo o ambiente mais geral do Teorema 1.1, provamos o seguinte resultado:

Teorema 1.2 *Sejam $m, n_1, n_2, \ldots, n_m$ inteiros positivos e $p_1, \ldots, p_m \in [1, \infty]$. Então existem uma constante universal C (dependendo apenas de m) e uma forma m-linear $A_{m,n} : \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \longrightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A_{m,n}\left(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}\right) = \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n_1,\ldots,n_m} \pm z_{j_1}^{(1)} \cdots z_{j_m}^{(m)},$$

tais que

$$\|A_{m,n}\| \leq C \left(\sum_{k=1}^{m} n_k\right)^{\frac{1}{\rho}} \prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},\, 0\right\}}. \tag{1.5}$$

com

$$\rho := \min_k \{\max\{2, p_k^*\}\}.$$

Além disso, quando $n_1 = \cdots = n_m$, o expoente $\frac{1}{\min\left\{\max\{2,p_k^*\}\right\}} + \sum_{k=1}^{m} \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\right\}$ é ótimo.

Observação 1.3 *É importante comentar que nosso resultado, apesar de ser provado com técnicas distintas, resgata as estimativas assintóticas ótimas, quando $n_1 = \cdots = n_m$, que foram obtidas nos Teoremas 1.1 e 1.2 de [34].*

Demonstração: [Demonstração do Teorema 1.2] Se $p_k \geq 2$, para todo $k = 1, \ldots, m$, nossa estimativa coincide com a do Teorema 1.1. O mesmo acontece quando $p_k < 2$ para todo $k = 1, \ldots, m$.

Finalmente, vamos supor (sem perda de generalidade) que $1 \leq d < m$, e $p_k \geq 2$, para todo $k = 1, \ldots, d$ e $p_k < 2$ para $k = d+1, \ldots, m$. Note que nesse caso

$$\rho := \min_k \{\max\{2, p_k^*\}\} = 2.$$

O Teorema 1.1 garante a existência de uma forma m-linear $A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_d}^{n_d} \times \ell_2^{n_{d+1}} \times \cdots \times \ell_2^{n_m} \to \mathbb{K}$ tal que

$$\|A\|_{\mathcal{L}\left(\ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_d}^{n_d} \times \ell_2^{n_{d+1}} \times \cdots \times \ell_2^{n_m}; \mathbb{K}\right)} \leq C \left(\sum_{k=1}^{m} n_k\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},\, 0\right\}}.$$

Por outro lado, para cada $k \notin \{1, \ldots, d\}$, pela monotonicidade das normas ℓ_p, a restrição dessa forma para $\ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_d}^{n_d} \times \ell_{p_{d+1}}^{n_{d+1}} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m}$ tem norma

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathcal{L}\left(\ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_d}^{n_d} \times \ell_{p_{d+1}}^{n_{d+1}} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m}; \mathbb{K}\right)} &\leq \|A\|_{\mathcal{L}\left(\ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_d}^{n_d} \times \ell_2^{n_{d+1}} \times \cdots \times \ell_2^{n_m};\, \mathbb{K}\right)} \\ &\leq C \left(\sum_{k=1}^{m} n_k\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},\, 0\right\}}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Agora, provaremos a otimalidade dos expoentes quando $n_1 = \cdots = n_m := n$. A otimalidade do caso $p_k \geq 2$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$ é conhecida (é uma consequência das desigualdades de Hardy–Littlewood) e a constante envolvida não depende de $p_1, \ldots, p_m$. Mais precisamente, para toda forma unimodular temos

$$\|A\| \geq \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{m-1}} n^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_m}\right)}.$$

Resta apenas provarmos a otimalidade dos expoentes no caso em que pelo menos um dos p_k é menor do que 2. Dividiremos a prova em três casos:

- Primeiro caso: $p_k < 2$, para todo $k = 1, \ldots, m$.
- Segundo caso: $p_k \geq 2$, para apenas um $k \in \{1, \ldots, m\}$.
- Terceiro caso: o complementar dos casos anteriores.

A otimalidade do primeiro caso parece ser folclore, mas por uma questão de integridade, forneceremos uma prova. Nesse caso, o expoente de n é

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\min\limits_k \{\max\{2, p_k^*\}\}} = \frac{p_j - 1}{p_j},$$

onde

$$p_j := \max_k \{p_k\}.$$

Não existe perda de generalidade em supormos $j = m$. No segundo caso (também podemos supor $k = m$), o expoente de n é também $(p_m - 1)/p_m$. Para toda forma m-linear $A : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$, temos

$$\sup_{j_1,\ldots,j_{m-1}} \left(\sum_{j_m=1}^{n} \left| A\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}\right) \right|^{\frac{p_m}{p_m-1}} \right)^{\frac{p_m-1}{p_m}} \leq \|A\| \sup_{\varphi \in B_{(\ell_{p_m}^n)^*}} \left(\sum_{j_m=1}^{n} \left| \varphi\left(e_{j_m}\right) \right|^{\frac{p_m}{p_m-1}} \right)^{\frac{p_m-1}{p_m}}. \tag{1.7}$$

Logo,

$$\sup_{j_1,\ldots,j_{m-1}} \left(\sum_{j_m=1}^{n} \left| A\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}\right) \right|^{\frac{p_m}{p_m-1}} \right)^{\frac{p_m-1}{p_m}} \leq \|A\|.$$

Daí, para toda forma m-linear unimodular $A : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$, temos

$$\|A\| \geq n^{\frac{p_m-1}{p_m}},$$

e isso garante a otimalidade do expoente para o primeiro e o segundo caso.

Observe que os itens já provados garantem o resultado para todas as formas bilineares. Assim, resta provar o terceiro caso para toda forma m-linear $A : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$, com $m \geq 3$, ou seja, quando ao menos dois elementos de $\{p_1, \ldots, p_m\}$ pertencem ao intervalo $[2, \infty]$ e, ao mesmo tempo, pelo menos um está em $[1, 2)$.

Procederemos por indução em m. Para toda forma trilinear $A : \ell_{p_1}^n \times \ell_{p_2}^n \times \ell_{p_3}^n \to \mathbb{K}$ temos

$$\|A\| \geq \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}+\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_3}\right)}.$$

Com efeito, supondo que $p_3 \in [1,2)$, decorre das formas bilineares que

$$\begin{aligned}\|A\| &\geq \sup\left\{\left|A\left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, (1,0,\ldots,0)\right)\right| : \sum_{j_k=1}^{n}\left|x_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k} \leq 1\right\} \\ &\geq \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{2}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},0\right\}} \\ &= \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{3}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},0\right\}}.\end{aligned}$$

Considerando que o resultado seja válido para formas $(m-1)$-lineares, o provaremos para formas m-lineares. Dessa maneira, nossa hipótese de indução é que para todo $p_i \in [1,\infty]$ e $i = 1,\ldots,m-1$ temos

$$\|A\| \geq D_{m-1} n^{\frac{1}{\min\left\{\max\left\{2,p_1^*\right\},\ldots,\max\left\{2,p_{m-1}^*\right\}\right\}}+\sum_{k=1}^{m-1}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},\,0\right\}},$$

para toda forma unimodular $A : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_{m-1}}^n \to \mathbb{K}$; e queremos provar que temos

$$\|A\| \geq D_{m-1} n^{\frac{1}{\min\left\{\max\left\{2,p_1^*\right\},\ldots,\max\left\{2,p_m^*\right\}\right\}}+\sum_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},\,0\right\}},$$

para toda forma unimodular $A : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$. Note que, nesse caso

$$\min_k \{\max\{2,p_k^*\}\} = 2.$$

Assim, provaremos que para toda forma m-linear unimodular $A : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ (quando ao menos dois $p_i \in [2,\infty]$ e, ao mesmo, tempo um $p_i \in [1,2)$ temos

$$\|A\| \geq D_m n^{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},\,0\right\}}.$$

Podemos supor que $p_m \in [1,2)$. Nesse caso, para qualquer forma m-linear unimodular

$$A : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K},$$

pela hipótese de indução, para todo $1 \leq k \leq m-1$ temos

$$\begin{aligned}\|A\| &\geq \sup\left\{\left|A\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_{m-1}}^{(m-1)},(1,0,\ldots,0)\right)\right| : \sum_{j_k=1}^{n}\left|x_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k} \leq 1\right\} \\ &\geq D_{m-1} n^{\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},0\right\}} \\ &= D_{m-1} n^{\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},0\right\}},\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

■

Em particular, com a estimativa (1.6) provamos que a seguinte conjectura, proposta por Albuquerque e Rezende (ver [1, Conjecture 3.3]), é falsa:

Conjectura 1.4 *Sejam $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$. Existem $B_m, C_m > 0$ (dependendo apenas de m) tais que*

$$B_m \leq \inf \frac{\|A\|}{\left(\sum_{k=1}^m n_k^{1-\frac{1}{\gamma}}\right) \cdot \prod_{k=1}^m n_k^{\max\left\{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p_k}, 0\right\}}} \leq C_m, \tag{1.8}$$

com $\gamma := \min\{2, \max\{p_k : p_k \leq 2\}\}$, e o ínfimo é calculado sobre todas as formas m-lineares unimodulares $A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \to \mathbb{K}$ e os expoentes envolvidos são ótimos.

Demonstração: De fato, a conjectura é falsa. Para fins de ilustração, escolhamos $m = 3$, $p_1 = 3/2$ e $p_2 = p_3 = 3$. Por (1.6), existe uma constante universal C tal que, para quaisquer n_1, n_2, n_3, existe uma forma trilinear unimodular $A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \times \ell_{p_3}^{n_3} \to \mathbb{K}$ satisfazendo

$$\|A\| \leq C\,(n_1 + n_2 + n_3)^{1/2}\, n_2^{1/6} n_3^{1/6}.$$

Daí, se (1.8) fosse válida, deveríamos ter

$$B_m \leq \frac{C\,(n_1 + n_2 + n_3)^{1/2}\, n_2^{1/6} n_3^{1/6}}{\left(n_1^{1/3} + n_2^{1/3} + n_3^{1/3}\right) n_2^{1/3} n_3^{1/3}}$$

para todos n_1, n_2, n_3. Tomando $n_1 = n_2 = n_3 := n$, por exemplo, obteríamos

$$B_m \leq \frac{\sqrt{3}}{3n^{1/6}},$$

para todo n, o que é impossível.

■

1.2 Versões complexas da KSZ

Nesta seção, exploramos versões da KSZ no corpo dos escalares complexos e resolvemos um problema proposto em [1, Problem 3.6]. Diferentemente do que é feito nas KSZ's clássicas, usamos uma abordagem determinística para explicitar a forma multilinear unimodular e mostramos que, em alguns casos, sua norma é limitada superiormente por 1. Essas técnicas permitiram que propuséssemos uma variante para o famoso jogo das luzes desbalanceadas de Gale-Berlekamp (que, num certo sentido, equivale à KSZ) com boas estimativas assintóticas, como será visto no próximo capítulo.

Em [1, Theorem 3.1], Albuquerque e Rezende mostraram que, para $p_1, \dots, p_m \in [2, \infty]$, temos

$$\frac{1}{m\sqrt{2}^{(m-1)}} \leq \inf \frac{\|A\|}{\left(n_1^{\frac{1}{2}} + \cdots + n_m^{\frac{1}{2}}\right) \prod_{k=1}^m n_k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k}}} \leq K_m, \tag{1.9}$$

onde

$$K_m = 8(m!)^{1-\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\max\{p_1,\dots,p_m\}}\right\}} \sqrt{\log(1+4m)}$$

e o ínfimo é calculado sobre todas as formas unimodulares $A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \to \mathbb{K}$. A constante K_m foi obtida através de uma abordagem não-determinística, seguindo as direções do trabalho de Boas, que garante a existência (sem explicitar) de uma forma multilinear $A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \to \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 satisfazendo

$$\|A\| \leq K_m \left(n_1^{\frac{1}{2}} + \cdots + n_m^{\frac{1}{2}}\right) \prod_{k=1}^{m} n_k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k}}.$$

No Problem 3.6 em [1], os autores perguntam o que acontece com os valores das constantes envolvidas ao considerarmos versões da KSZ em um ambiente complexo, ou seja, quando os coeficientes ± 1 são substituídos por números complexos com módulo 1. Um antigo resultado nessa conjuntura aparece no célebre trabalho de Bohnenblust e Hille (ver [14]). Considerando, para cada inteiro positivo n, uma matriz quadrada $(a_{rs})_{r,s=1}^{n}$, cujas entradas são dadas por $a_{rs} = e^{2\pi i \frac{rs}{n}}$, e definindo uma forma m-linear $A : \ell_\infty^n \times \cdots \times \ell_\infty^n \to \mathbb{C}$ por

$$A\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_m}^{n} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{m-1} i_m} x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_m}^{(m)},$$

eles mostraram que

$$\|A\| \leq n^{\frac{m+1}{2}}.$$

Isso garante que, quando $p_1 = \cdots = p_m = \infty$ e $n_1 = \cdots = n_m := n$, a constante K_m em (1.9) pode ser substituída por 1.

Observação 1.5 *Recentemente, Pellegrino e Raposo Jr., em [38], usando técnicas construtivas, evidenciaram as deficiências do método não-determinístico usado em (1.9) ao provarem que, para qualquer $\varepsilon > 0$ e todo inteiro positivo m, quando*

$$p_1 = \cdots = p_m = \infty,$$

temos

$$\inf \frac{\|A\|}{\left(n_1^{\frac{1}{2}} + \cdots + n_m^{\frac{1}{2}}\right) \prod_{k=1}^{m} n_k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k}}} \leq 1 + \varepsilon, \tag{1.10}$$

onde o ínfimo é calculado sobre todas as formas unimodulares.

Adaptando as técnicas de Bohnenblust e Hille, nosso primeiro resultado mostra que, no cenário proposto em [1, Problem 3.6], para formas bilineares, também podemos substituir a constante K_m por 1. Ressaltamos que, diferente do que acontece na desigualdade (1.10), nosso resultado fornece dominação universal por 1, tanto no caso bilinear quanto no caso multilinear, como será visto mais adiante.

Teorema 1.6 *Sejam $p_1, p_2 \geq 2$ e inteiros positivos n_1, n_2. Seja n tal que $n = \max\{n_1, n_2\}$. Considere uma matriz (a_{rs}) de ordem n dada por*

$$a_{rs} = e^{2\pi i \frac{rs}{n}}.$$

A forma bilinear $A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$A\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) = \sum_{i_1,i_2=1}^{n_1,n_2} a_{i_1 i_2} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)}.$$

é unimodular e tem norma

$$\|A\| \leq n^{\frac{1}{2}} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}.$$

Demonstração: Inicialmente, perceba que para cada inteiro positivo n, considerando a matriz $(a_{rs}^{(n)})$ de ordem $n \times n$ cujos elementos são $a_{rs}^{(n)} = e^{2\pi i \frac{rs}{n}}$; é óbvio que $|a_{rs}^{(n)}| = 1$. Além disso, podemos verificar que

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs}^{(n)} \overline{a_{ts}^{(n)}} = n\delta_{rt}, \tag{1.11}$$

onde δ_{rt} denota o delta de Kronecker. Para provar (1.11) note que

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs}^{(n)} \overline{a_{ts}^{(n)}} = \sum_{s=1}^{n} e^{2\pi i \frac{rs}{n}} \cdot e^{-2\pi i \frac{ts}{n}} = \sum_{s=1}^{n} e^{2\pi i \frac{(r-t)s}{n}}.$$

Se $r = t$, é claro que $\sum_{s=1}^{n} a_{rs}^{(n)} \overline{a_{ts}^{(n)}} = n$. Por outro lado, se $r \neq t$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{2\pi i \frac{(r-t)}{n}}}{1 - e^{2\pi i \frac{(r-t)}{n}}} \left[\sum_{s=1}^{n} e^{2\pi i \frac{(r-t)s}{n}}\right] &= \frac{e^{2\pi i \frac{(r-t)}{n}} - e^{2\pi i \frac{(r-t)(n+1)}{n}}}{1 - e^{2\pi i \frac{(r-t)}{n}}} \\ &= \frac{e^{2\pi i \frac{(r-t)}{n}} - e^{(2(r-t)\pi i)} \cdot e^{2\pi i \frac{(r-t)}{n}}}{1 - e^{2\pi i \frac{(r-t)}{n}}} \end{aligned}$$

e, lembrando que $e^{2\pi i} = 1$, um cálculo simples nos fornece

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs}^{(n)} \overline{a_{ts}^{(n)}} = 0.$$

Sejam $x^{(1)} \in B_{\ell_{p_1}^{n_1}}$ e $x^{(2)} \in B_{\ell_{p_2}^{n_2}}$. Então, completando com zeros, se necessário, considere $y^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, 0, \ldots, 0)$ e $y^{(2)} = (x_1^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}, 0, \ldots, 0)$ em $B_{\ell_{p_1}^{n}}$ e $B_{\ell_{p_2}^{n}}$, respectivamente. Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \left|A\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)\right| &\leq \sum_{i_2=1}^{n} \left|\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 i_2} y_{i_1}^{(1)}\right| \left|y_{i_2}^{(2)}\right| \\ &\leq \left(\sum_{i_2=1}^{n} |y_{i_2}^{(2)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_2=1}^{n} \left|\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 i_2} y_{i_1}^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i_2=1}^{n_2} \left|x_{i_2}^{(2)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_2=1}^{n} \left|\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 i_2} y_{i_1}^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{i_2=1}^{n_2} |1|\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{i_2=1}^{n_2} \left|x_{i_2}^{(2)}\right|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{i_2=1}^{n} \left|\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 i_2} y_{i_1}^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{i_2=1}^{n} \left|\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 i_2} y_{i_1}^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Visto que

$$\left(\sum_{i_2=1}^{n} \left|\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 i_2} y_{i_1}^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i_2=1}^{n} \sum_{\substack{i_1=1 \\ j_1=1}}^{n} y_{i_1}^{(1)} \overline{y_{j_1}^{(1)}} a_{i_1 i_2} \overline{a_{j_1 i_2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\substack{i_1=1 \\ j_1=1}}^{n} y_{i_1}^{1} \overline{y_{j_1}^{(1)}} \underbrace{\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1 i_2} \overline{a_{j_1 i_2}}}_{n\delta_{i_1 j_1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

temos

$$\begin{aligned}
\left|A\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)\right| &\leq n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{\substack{i_1=1 \\ j_1=1}}^{n} y_{i_1}^{(1)} \overline{y_{j_1}^{(1)}} n\delta_{i_1 j_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= n^{\frac{1}{2}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{i_1=1}^{n} \left|y_{i_1}^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= n^{\frac{1}{2}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left|x_{i_1}^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq n^{\frac{1}{2}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} |1|\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left|x_{i_1}^{(1)}\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq n^{\frac{1}{2}} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|A\| \leq n^{\frac{1}{2}} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \leq \left(n_1^{\frac{1}{2}} + n_2^{\frac{1}{2}}\right) n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}.$$

■

Em [1] é provado que

$$\inf \frac{\|A\|}{\left(n_1^{\frac{1}{2}} + n_2^{\frac{1}{2}}\right) n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}} \leq 8\sqrt{2\ln 9} \approx 16.8,$$

para o caso complexo, nosso resultado mostra que

$$\inf \frac{\|A\|}{\left(n_1^{\frac{1}{2}} + n_2^{\frac{1}{2}}\right) n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}} \leq \inf \frac{\|A\|}{(\max\{n_1, n_2\})^{\frac{1}{2}} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}} \leq 1,$$

onde o ínfimo é avaliado sobre todas as formas bilineares unimodulares $A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Vale ainda salientar que, a constante 1 que acabamos de obter é ótima no seguinte sentido: se fixarmos, por exemplo, $n_1 = 1$, então é simples ver que o ínfimo no lado direito é precisamente 1, uma vez que

$$\|A\| = n_2^{1-\frac{1}{p_2}}.$$

Observação 1.7 *Para o contexto multilinear, a determinação de uma desigualdade determinística completa, como a do Teorema 1.6, ainda é um problema em aberto. Entretanto, avançamos positivamente em casos particulares. Fomos capazes de construir, ainda seguindo os argumentos de [14, Theorem II, página 608], algumas versões da KSZ com melhores propriedades.*

Para os próximos resultados, vamos supor, sem perda de generalidade, que $n_1 \leq \cdots \leq n_m$, e vamos considerar, para todo $k = 1, \ldots, m-1$, uma matriz $(a_{rs}^{(k)})$ de ordem n_{k+1} com

$$a_{rs}^{(k)} = e^{2\pi i \frac{rs}{n_{k+1}}}.$$

Um cálculo similar ao feito na demonstração do teorema anterior mostra que

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{n_2} a_{rt}^{(1)} \overline{a_{st}^{(1)}} = n_2 \delta_{rs}. \\ |a_{rs}^{(1)}| = 1. \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{n_m} a_{rt}^{(m-1)} \overline{a_{st}^{(m-1)}} = n_m \delta_{rs}. \\ |a_{rs}^{(m-1)}| = 1. \end{cases}$$

Além disso, todas as matrizes são completadas com zero (se necessário) de forma a obter uma matriz quadrada $n_m \times n_m$. Obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 1.8 *Sejam inteiros positivos $m, n_1, \ldots, n_m$. Defina*

$$A : \ell_\infty^{n_1} \times \cdots \times \ell_\infty^{n_m} \to \mathbb{C}$$

por

$$A\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\right) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n_1, \ldots, n_m} a_{i_1 i_2}^{(1)} a_{i_2 i_3}^{(2)} \cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_m}^{(m)}.$$

Então

$$\|A\| \leq n_m^{\frac{1}{2}} \left(n_m^{\frac{1}{2}} \cdots n_1^{\frac{1}{2}} \right).$$

Demonstração: Inicialmente, uma vez que $n_1 \leq \cdots \leq n_m$, observe que os coeficientes

$$a_{i_1 i_2}^{(1)} a_{i_2 i_3}^{(2)} \cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)},$$

para todos os monômios $x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_m}^{(m)}$ com $i_k \in \{1, \ldots, n_k\}$, são unimodulares. Para $x^{(1)} \in B_{\ell_\infty^{n_1}}, \ldots, x^{(m)} \in B_{\ell_\infty^{n_m}}$, considere $y^{(1)} \in B_{\ell_\infty^{n_m}}, \ldots, y^{(m)} \in B_{\ell_\infty^{n_m}}$ definidos por

$$y^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, 0, \ldots, 0 \right),$$

$$y^{(2)} = \left(x_2^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}, 0, \ldots, 0\right),$$

$$y^{(3)} = \left(x_1^{(3)}, \ldots, x_{n_3}^{(3)}, 0, \ldots, 0\right)$$

e assim por diante. Daí, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
&\left|A\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n_m} a_{i_1 i_2}^{(1)} a_{i_2 i_3}^{(2)} \cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} y_{i_1}^{(1)} \cdots y_{i_m}^{(m)}\right| \\
&\leq \sum_{i_m=1}^{n_m} \left|\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n_m} a_{i_1 i_2}^{(1)} a_{i_2 i_3}^{(2)} \cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} y_{i_1}^{(1)} \cdots y_{i_{m-1}}^{(m-1)}\right| |y_{i_m}^{(m)}| \\
&\leq \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} |y_{i_m}^{(m)}|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left|\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n_m} a_{i_1 i_2}^{(1)} a_{i_2 i_3}^{(2)} \cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} y_{i_1}^{(1)} \cdots y_{i_{m-1}}^{(m-1)}\right|^2\right)^{1/2} \\
&\leq n_m^{1/2} \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-1}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-1}=1}}^{n_m} a_{i_1 i_2}^{(1)} \overline{a_{j_1 j_2}^{(1)}} \cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} \overline{a_{j_{m-1} i_m}^{(m-1)}} y_{i_1}^{(1)} \overline{y_{j_1}^{(1)}} \cdots y_{i_{m-1}}^{(m-1)} \overline{y_{j_{m-1}}^{(m-1)}}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
&\left|A\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\right)\right| \\
&\leq n_m^{1/2} \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-1}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-1}=1}}^{n_m} a_{i_1 i_2}^{(1)} \overline{a_{j_1 j_2}^{(1)}} \cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} \overline{a_{j_{m-1} i_m}^{(m-1)}} y_{i_1}^{(1)} \overline{y_{j_1}^{(1)}} \cdots y_{i_{m-1}}^{(m-1)} \overline{y_{j_{m-1}}^{(m-1)}}\right)^{1/2} \\
&\leq n_m^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-1}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-2} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}}\right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}}\right) \sum_{i_m=1}^{n_m} a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} \overline{a_{j_{m-1} i_m}^{(m-1)}}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i_m=1}^{n_m} a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} \overline{a_{j_{m-1} i_m}^{(m-1)}} = n_m \delta_{i_{m-1} j_{m-1}},$$

encontramos

$$\begin{aligned}
&\left|A\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\right)\right| \\
&\leq n_m^{1/2} \left(\sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-2}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-2} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}}\right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}}\right) y_{i_{m-1}}^{(m-1)} \overline{y_{i_{m-1}}^{(m-1)}} n_m\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$= n_m \left(\sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-2}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-2} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \left| y_{i_{m-1}}^{(m-1)} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq n_m \left(\sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-2}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-2} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \right)^{1/2}$$

$$\leq n_m \left(\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-2}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} a_{i_{m-2} i_{m-1}}^{(m-2)} \overline{a_{j_{m-2} i_{m-1}}^{(m-2)}} \right)^{1/2}.$$

Assim

$$\left| A\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\right) \right|$$

$$\leq n_m \left(\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-2}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} a_{i_{m-2} i_{m-1}}^{(m-2)} \overline{a_{j_{m-2} i_{m-1}}^{(m-2)}} \right)^{1/2}.$$

Uma vez que

$$\left(\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-2}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} a_{i_{m-2} i_{m-1}}^{(m-2)} \overline{a_{j_{m-2} i_{m-1}}^{(m-2)}} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-2}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) n_{m-1} \delta_{i_{m-2} j_{m-2}} \right)^{1/2}$$

$$= n_{m-1}^{1/2} \left(\sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-3}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-3} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) |y_{i_{m-2}}^{(m-2)}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq n_{m-1}^{1/2} \left(\sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-3}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-3} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \right)^{1/2},$$

concluímos que

$$\left| A\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\right) \right|$$

$$\leq n_m n_{m-1}^{1/2} \left(\sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-3}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \cdot \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-3} y_{i_s}^{(s)} \cdot \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \right)^{1/2}$$

e, repetindo este procedimento, finalmente obtemos

$$\begin{aligned}\left|A\left(x^{(1)},\ldots,x^{(m)}\right)\right| &\leq n_m n_{m-1}^{\frac{1}{2}}\cdots n_2^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i_1=1}^{n_m} y_{i_1}^{(1)}\overline{y_{i_1}^{(1)}}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= n_m^{\frac{1}{2}} n_m^{\frac{1}{2}}\cdots n_2^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i_1=1}^{n_1}|x_{i_1}^{(1)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq n_m^{\frac{1}{2}}\left(n_m^{\frac{1}{2}}\cdots n_1^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|A\| \leq n_m^{\frac{1}{2}}\left(n_m^{\frac{1}{2}}\cdots n_1^{\frac{1}{2}}\right).$$

■

Com algumas imposições a respeito das dimensões dos espaços, conseguimos obter uma versão do resultado acima para uma forma unimodular definida no cartesiano envolvendo espaços ℓ_p^n, com $p \in [2,\infty)$.

Teorema 1.9 *Sejam* $n_m = \max\{n_1,\ldots,n_m\}$, $n_1 = \min\{n_1,\ldots,n_m\}$ *e* $p_1, p_2 \in [2,\infty]$. *Então a forma m-linear unimodular*

$$A : \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \times \cdots \times \ell_\infty^{n_{m-1}} \times \ell_{p_2}^{n_m} \to \mathbb{C}$$

definida como no Teorema 1.8 tem norma

$$\|A\| \leq n_m^{\frac{1}{2}}\left(n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}}\cdots n_2^{\frac{1}{2}} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}}\right).$$

A prova do Teorema 1.9, a menos de adaptações, é semelhante a do teorema anterior, mesmo assim, por uma questão de completude, decidimos apresentá-la.

Demonstração: Para $x^{(1)} \in B_{\ell_{p_1}^{n_1}}, x^{(2)} \in B_{\ell_\infty^{n_2}}, \ldots, x^{(m-1)} \in B_{\ell_\infty^{n_{m-1}}}, x^{(m)} \in B_{\ell_{p_2}^{n_m}}$, considere $y^{(1)} \in B_{\ell_{p_1}^{n_m}}, y^{(2)} \in B_{\ell_\infty^{n_m}}, \ldots, y^{(m-1)} \in B_{\ell_\infty^{n_m}}, y^{(m)} \in B_{\ell_{p_2}^{n_m}}$ definidos por

$$y^{(1)} = \left(x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)},0,\ldots,0\right),$$

$$y^{(2)} = \left(x_2^{(1)},\ldots,x_{n_2}^{(2)},0,\ldots,0\right)$$

e assim por diante. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}&\left|A\left(x^{(1)},\ldots,x^{(m)}\right)\right|\\ &= \left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n_m} a_{i_1 i_2}^{(1)} a_{i_2 i_3}^{(2)}\cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} y_{i_1}^{(1)}\cdots y_{i_m}^{(m)}\right|\\ &\leq \sum_{i_m=1}^{n_m}\left|\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n_m} a_{i_1 i_2}^{(1)} a_{i_2 i_3}^{(2)}\cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} y_{i_1}^{(1)}\cdots y_{i_{m-1}}^{(m-1)}\right| |y_{i_m}^m|\end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} |y_{i_m}^{(m)}|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n_m} a_{i_1 i_2}^{(1)} a_{i_2 i_3}^{(2)} \cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} y_{i_1}^{(1)} \cdots y_{i_{m-1}}^{(m-1)} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{i_1=1}^{n_m} 1\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} |y_{i_m}^{(m)}|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \cdot \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n_m} a_{i_1 i_2}^{(1)} a_{i_2 i_3}^{(2)} \cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} y_{i_1}^{(1)} \cdots y_{i_{m-1}}^{(m-1)} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-1}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-1}=1}}^{n_m} a_{i_1 i_2}^{(1)} \overline{a_{j_1 j_2}^{(1)}} \cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} \overline{a_{j_{m-1} i_m}^{(m-1)}} y_{i_1}^{(1)} \overline{y_{j_1}^{(1)}} \cdots y_{i_{m-1}}^{(m-1)} \overline{y_{j_{m-1}}^{(m-1)}} \right)^{1/2}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
&\left|A\left(x^{(1)},\ldots,x^{(m)}\right)\right| \\
&\leq n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-1}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-1}=1}}^{n_m} a_{i_1 i_2}^{(1)} \overline{a_{j_1 j_2}^{(1)}} \cdots a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} \overline{a_{j_{m-1} i_m}^{(m-1)}} y_{i_1}^{(1)} \overline{y_{j_1}^{(1)}} \cdots y_{i_{m-1}}^{(m-1)} \overline{y_{j_{m-1}}^{(m-1)}} \right)^{1/2} \\
&= n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-1}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-2} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_m=1}^{n_m} a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} \overline{a_{j_{m-1} i_m}^{(m-1)}} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\sum_{i_m=1}^{n_m} a_{i_{m-1} i_m}^{(m-1)} \overline{a_{j_{m-1} i_m}^{(m-1)}} = n_m \delta_{i_{m-1} j_{m-1}},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|A\left(x^{(1)},\ldots,x^{(m)}\right)\right| \\
&\leq n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-2}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-2} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) y_{i_{m-1}}^{(m-1)} \overline{y_{i_{m-1}}^{(m-1)}} n_m \right)^{1/2} \\
&= n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} n_m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-2}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-2} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \left| y_{i_{m-1}}^{(m-1)} \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} n_m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-2}=1 \\ j_1,\ldots,j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-2} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$= n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} n_m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m-3}=1 \\ j_1,\dots,j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} a_{i_{m-2} i_{m-1}}^{(m-2)} \overline{a_{j_{m-2} i_{m-1}}^{(m-2)}} \right)^{1/2}.$$

Assim

$$\left|A\left(x^{(1)},\dots,x^{(m)}\right)\right|$$
$$\leq n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} n_m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m-3}=1 \\ j_1,\dots,j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} a_{i_{m-2} i_{m-1}}^{(m-2)} \overline{a_{j_{m-2} i_{m-1}}^{(m-2)}} \right)^{1/2}.$$

Como

$$\left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m-3}=1 \\ j_1,\dots,j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} a_{i_{m-2} i_{m-1}}^{(m-2)} \overline{a_{j_{m-2} i_{m-1}}^{(m-2)}} \right)^{1/2}$$
$$= \left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m-3}=1 \\ j_1,\dots,j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) n_{m-1} \delta_{i_{m-2} j_{m-2}} \right)^{1/2}$$
$$= n_{m-1}^{1/2} \left(\sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m-3}=1 \\ j_1,\dots,j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-3} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) |y_{i_{m-2}}^{(m-2)}|^2 \right)^{1/2}$$
$$\leq n_{m-1}^{1/2} \left(\sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m-3}=1 \\ j_1,\dots,j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-3} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \right)^{1/2},$$

concluímos que

$$\left|A\left(x^{(1)},\dots,x^{(m)}\right)\right|$$
$$\leq n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} n_m^{\frac{1}{2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m-3}=1 \\ j_1,\dots,j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=1}^{m-3} a_{i_r i_{r+1}}^{(r)} \overline{a_{j_r j_{r+1}}^{(r)}} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-3} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \right)^{1/2}.$$

Repetindo o procedimento, finalmente obtemos

$$\left|A\left(x^{(1)},\dots,x^{(m)}\right)\right| \leq n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} n_m^{\frac{1}{2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}} \cdots n_2^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_1=1}^{n_m} y_{i_1}^{(1)} \overline{y_{i_1}^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} n_m^{\frac{1}{2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}} \cdots n_2^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} |x_{i_1}^{(1)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\left|A\left(x^{(1)},\ldots,x^{(m)}\right)\right| &\leq n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} n_m^{\frac{1}{2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}} \cdots n_2^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} 1\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} |x_{i_1}^{(1)}|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &\leq n_m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} n_m^{\frac{1}{2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}} \cdots n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}},\end{aligned}$$

e a prova está feita.

■

Nesses dois últimos resultados, assim como acontece no Teorema 1.6, a constante 1 não pode ser melhorada sem particularizarmos os valores de $n_1,\ldots,n_m$.

Capítulo 2

Uma versão contínua para o jogo das luzes desbalanceadas

Projetado independentemente por D. Gale e E. Berlekamp na década de 1960, o jogo das luzes desbalanceadas (também conhecido como o problema dos interruptores de Gale–Berlekamp) representa um clássico no campo da combinatória e suas aplicações, com profundas conexões com a ciência da computação teórica. Este jogo, para um jogador, consiste em uma matriz quadrada $n \times n$ de lâmpadas acesas e apagadas dispostas em uma configuração inicial de luzes Θ_n. O objetivo é desligar o máximo possível de luzes usando n interruptores "de linhas" e n interruptores "de colunas", que invertem o estado de cada lâmpada (acesa para apagada e apagada para acesa) na linha ou coluna correspondente. Denotando por $i(\Theta_n)$ o menor número final de luzes acesas alcançáveis pelos interruptores das linhas e colunas iniciando de Θ_n, o objetivo é encontrar o valor R_n de $i(\Theta_n^{(0)})$ quando $\Theta_n^{(0)}$ é (um dos) o pior padrão inicial, i.e., $i(\Theta_n^{(0)}) \geq i(\Theta_n)$ para todo Θ_n. Daí

$$R_n := \max\{i(\Theta_n) : \Theta_n \text{ é uma configuração inicial de } n^2 \text{ lâmpadas}\}.$$

Um resultado de 1971 por T. Brown e J. Spencer (ver [15]) estabelece que, do ponto de vista assintótico,

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n^{3/2}}{2} + o(n^{3/2}) \leq R(n) \leq \frac{n^2}{2} - \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} + o(n^{3/2}). \tag{2.1}$$

Às vezes, esse problema de otimização é proposto como encontrar o máximo da diferença entre o número de luzes que estão acesas e o número de luzes que estão apagadas, geralmente denotado por G_n. É simples verificar que ambos os problemas são equivalentes, pois

$$R_n = \frac{1}{2}\left(n^2 - G_n\right). \tag{2.2}$$

Assim, de (2.1) e (2.2) segue

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} + o(1) \leq \frac{G_n}{n^{3/2}} \leq 1 + o(1).$$

O problema original introduzido por Berlekamp pergunta o valor exato de R_{10} e foi provado em [17] que $R_{10} = 35$ (e daí $G_{10} = 30$). O valor exato de R_n para $n = 1, \ldots, 12$ foi

obtido por Carlson e Stolarski ([17]; veja também [22]). Várias questões relacionadas ao problema original foram investigadas em profundidade, veja, por exemplo, [16, 17, 22, 52], em particular a dificuldade de resolver o jogo foi estudada em [45].

A abordagem matemática natural para modelar o jogo das luzes desbalanceadas é associando uma configuração de luzes Θ_n a uma matriz $(a_{ij})_{i,j=1}^n$, cujos elementos a_{ij} são $+1$ ou -1. Nesse contexto, $+1$ é identificado com uma lâmpada quando acesa e -1 representa a lâmpada apagada. Assim

$$G_n = \min\left\{ \max_{x_i,y_j\in\{-1,+1\}} \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \right| : a_{ij} = -1 \text{ ou } +1 \right\},$$

onde x_i e y_j denotam os interruptores da linha i e da coluna j, respectivamente.

Observe que qualquer configuração $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ pode ser vista como uma forma bilinear real $T_A : \ell_\infty^n \times \ell_\infty^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$T_A(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j.$$

Definindo, como é de praxe,

$$\|T_A\| = \max_{\|x\|,\|y\|\leq 1} \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \right|, \tag{2.3}$$

devemos lembrar que o Teorema de Krein-Milman assegura que o máximo em (2.3) é atingido em um certo $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$, onde $x^{(0)}$ e $y^{(0)}$ são pontos extremos da bola unitária fechada $B_{\ell_\infty^n}$ de ℓ_∞^n, e isso significa que as coordenadas de $x^{(0)}$ e $y^{(0)}$ têm módulo 1; portanto,

$$\|T_A\| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i^{(0)}y_j^{(0)} \right|. \tag{2.4}$$

Observando que a expressão em (2.4) é precisamente o módulo da diferença entre o número de luzes acesas e apagadas, concluímos que

$$G_n = \inf\{\|T\| : a_{ij} = \pm 1\},$$

onde o ínfimo é calculado sobre todas as formas bilineares $T : \ell_\infty^n \times \ell_\infty^n \to \mathbb{R}$ com coeficientes unimodulares.

Seguindo essa direção, recentemente, Pellegrino e Raposo Jr. (ver [39, Theorem 5.2]), usando argumentos determinísticos, melhoraram os resultados para $n = 15, 17, 18, 19$ e apresentaram a seguinte estimativa universal

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{G_n}{n^{3/2}} \leq 1,07.$$

Neste capítulo, propomos uma versão contínua para o jogo das luzes desbalanceadas. Estamos interessados em uma versão em que os vetores substituem as lâmpadas e os botões de direção substituem os interruptores discretos, usados para inverter o estado

das lâmpadas no problema original. Utilizamos os métodos, de natureza determinística, apresentados na Seção 1.2 do Capítulo 1, com os quais obtivemos boas estimativas para essa nova versão, em alguns casos especiais essas estimativas obtidas são ótimas. Também permitimos tabuleiros de jogo não quadrados e estudamos uma versão ponderada deste novo jogo contínuo. Nossos principais resultados estão presentes no trabalho:

> *D. Pellegrino, J. Silva, E. Teixeira. On a continuous Gale–Berlekamp switching game, to appear in An. Acad. Brasil. Ciênc.*

2.1 O caso bidimensional

O novo problema de otimização aqui proposto envolve uma matriz (a_{ij}) com n_1 linhas e n_2 colunas cujos elementos são vetores unitários do plano, $\mathbb{R}^2$. O padrão de direção inicial de cada $n_1 n_2$ vetores é configurado no início do jogo. Para cada linha i e cada coluna j existem botões x_i e y_j, respectivamente. Girando o botão x_i por um ângulo θ_i, afeta todos os vetores a_{ij} da linha i. Analogamente, quando o botão y_j é girado por um ângulo θ_j, o mesmo acontece com todos os vetores a_{ij} da coluna j (ver Figura 2.).

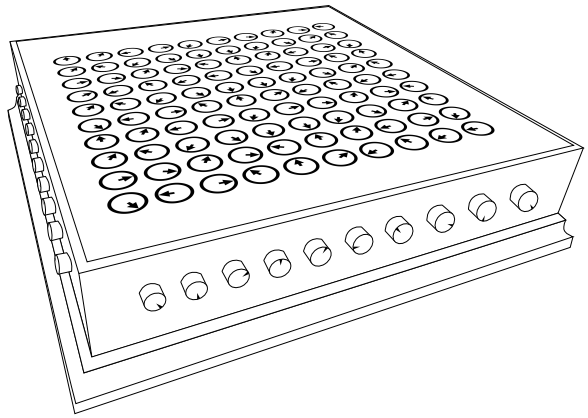

Figura 2. Jogo contínuo para $n = 10$.

O jogo consiste em maximizar a norma euclidiana da soma de todos os vetores na etapa final. Mais precisamente, para um padrão inicial Θ de vetores unitários, seja $s(\Theta)$ o supremo das normas (euclidianas) das somas de todos os $n_1 n_2$ vetores alcançáveis por ajustes de linha e coluna. O problema extremo, isto é, que se dá quando alguém começa com o pior padrão de direção inicial possível, é determinar

$$G^{(1)}_{n_1 n_2} := \min\{s(\Theta) : \Theta \text{ é uma configuração inicial de } n_1 \times n_2 \text{ vetores}\}.$$

Nosso principal resultado fornece uma boa estimativa para $G^{(1)}_{n_1 n_2}$ conforme indicado no seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Para inteiros positivos n_1, n_2, temos*

$$0,886 \leq \frac{G^{(1)}_{n_1 n_2}}{\sqrt{n_1 n_2}\max\{\sqrt{n_1}, \sqrt{n_2}\}} \leq 1. \tag{2.5}$$

Inicialmente, é mais conveniente conceber os vetores do jogo como números complexos a_{ij} com módulo 1, que representam os elementos da matriz $(a_{ij})_{i,j=1}^{n_1,n_2}$. Nesse caso, quando o jogador gira um botão, a ação é modelada pela multiplicação por números complexos unimodulares.

Demonstração: Uma consequência do Teorema de Krein–Milman assegura que, assim como acontece no caso de escalares reais, para toda forma bilinear $A\colon \ell_\infty^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \to \mathbb{C}$, vale

$$\|A\| = \sup_{\left|x_{j_1}^{(1)}\right|=\left|x_{j_2}^{(2)}\right|=1} \left| \sum_{j_1,j_2=1}^{n_1,n_2} a_{j_1 j_2} x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(2)} \right|$$

e daí,

$$G_{n_1 n_2}^{(1)} = \inf \left\{ \|A\| : |a_{j_1 j_2}| = 1 \right\}.$$

Nossa tarefa é, então, estimar o ínfimo de $\{\|A\| : |a_{j_1 j_2}| = 1\}$ sobre toda forma bilinear $A : \ell_\infty^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \to \mathbb{C}$ com coeficientes unimodulares.

Uma vez que o problema foi descrito como acima, o limite superior no Teorema 2.1 pode ser obtido por meio do Teorema 1.6, fazendo $p_1 = p_2 = \infty$.

Quanto à estimativa inferior, faremos uso da desigualdade de Khinchin para variáveis de Steinhaus (para mais detalhes veja o Apêndice A e as referências nele citadas). Para uma forma bilinear $A : \ell_\infty^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \to \mathbb{C}$ definida por

$$A\left(e_{j_1}, e_{j_2}\right) = a_{j_1 j_2}$$

com

$$|a_{j_1 j_2}| = 1,$$

temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \left| A\left(e_{j_1}, e_{j_2}\right) \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n_1} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j_1=1}^{n_1} A\left(e_{j_1}, e_{j_2}\right) e^{i t_{j_1}^{(1)}} \right| dt_{j_1}^{(1)} \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n_1} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left| A\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} e^{i t_{j_1}^{(1)}} e_{j_1}, e_{j_2} \right) \right| dt_{j_1}^{(1)}.
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \sum_{j_2=1}^{n_2} \left| A\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} e^{i t_{j_1}^{(1)}} e_{j_1}, e_{j_2} \right) \right| dt_{j_1}^{(1)} \\
&\leq (2\pi)^{n_1} \max_{t_{j_1}^{(1)} \in [0,2\pi]} \sum_{j_2=1}^{n_2} \left| A\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} e^{i t_{j_1}^{(1)}} e_{j_1}, e_{j_2} \right) \right|,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\sum_{j_2=1}^{n_2} \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \left| A\left(e_{j_1}, e_{j_2}\right) \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n_1}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\sum_{j_2=1}^{n_2}\left|A\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}e^{it_{j_1}^{(1)}}e_{j_1},e_{j_2}\right)\right|dt_{j_1}^{(1)}\\
&\leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\max_{t_{j_1}^{(1)}\in[0,2\pi]}\sum_{j_2=1}^{n_2}\left|A\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}e^{it_{j_1}^{(1)}}e_{j_1},e_{j_2}\right)\right|\\
&\leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\|A\|\sup_{\varphi\in B_{(\ell_\infty^n)^*}}\sum_{j_2=1}^{n_2}|\varphi(e_{j_2})|\\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\|A\|,
\end{aligned}
$$

onde na última desigualdade usamos o isomorfismo isométrico

$$
\begin{array}{ccc}
\ell_1^n & \longrightarrow & (\ell_\infty^n)^*\\
(a_j)_{j=1}^n & \longmapsto & \varphi,
\end{array}
$$

com $\varphi:\ell_\infty^n\to\mathbb{C}$ definido por

$$\varphi\left((x_j)_{j=1}^n\right)=\sum_{j=1}^n a_jx_j.$$

Finalmente, desde que $|A(e_{j_1},e_{j_2})|=1$, concluímos que

$$\|A\|\geq\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)n_2n_1^{\frac{1}{2}}.$$

Daí

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\leq\frac{G_{n_1n_2}^{(1)}}{\sqrt{n_1n_2}\max\{\sqrt{n_1},\sqrt{n_2}\}}.$$

■

Também estamos interessados em uma versão ponderada do problema acima. Mais precisamente, queremos entender as estimativas de crescimento quando os botões nas n_2 colunas podem ser usados não apenas para girar os vetores da coluna j, mas também multiplicar os vetores a_{ij} por uma escolha de números reais b_j verificando

$$\sum_{j=1}^{n_2}b_j^2=1.$$

Novamente, o jogo consiste em maximizar a norma euclidiana da soma de todos os vetores. Em outras palavras, para um padrão inicial Θ de vetores unitários, seja $s(\Theta)$ o supremo das normas euclidianas das somas de todos os n_1n_2 vetores alcançáveis por ajustes de linhas e de colunas. O problema extremo, começando pelo pior padrão inicial possível, é determinar

$$G_{n_1n_2}^{(2)}:=\min\{s(\Theta):\Theta\text{ é uma configuração inicial de }n_1\times n_2\text{ vetores}\}.$$

A característica ponderada do segundo jogo oferece uma liberdade diferente para o jogador. Surpreendentemente, para esse variante, obteremos uma solução definitiva e construtiva para o problema. Na verdade, o segundo resultado que provamos nesta seção é:

Teorema 2.2 *Para inteiros positivos $n_1, n_2 \geq 2$, com $n_2 \geq n_1$, temos*

$$\frac{G^{(2)}_{n_1 n_2}}{\sqrt{n_1 n_2}} = 1. \tag{2.6}$$

Neste jogo ponderado, a ação de girar e multiplicar os vetores por números reais b_j, com $\sum_{j=1}^{n_2} b_j^2 = 1$, será então modelada como multiplicação por certos números complexos com módulo menor do que ou igual a 1.

Demonstração: Para a estimativa superior, considere $n_2 \geq n_1$ e tome $p_1 = \infty$ e $p_2 = 2$ no Teorema 1.6. Dessa forma,

$$\frac{G^{(2)}_{n_1 n_2}}{\sqrt{n_1}\sqrt{n_2}} \leq 1.$$

Quanto à estimativa inferior, vamos provar que para todas as formas bilineares $A : \ell_\infty^{n_1} \times \ell_2^{n_2} \longrightarrow \mathbb{C}$ com coeficientes unimodulares temos

$$\|A\| \geq n_2^{1/2} n_1^{1/2}.$$

De fato, pela ortogonalidade das funções de Rademacher $r_i : [0,1] \longrightarrow \{-1, 1\}$, para toda forma bilinear $A : \ell_\infty^{n_1} \times \ell_2^{n_2} \longrightarrow \mathbb{C}$, com

$$|A(e_i, e_j)| = 1,$$

temos

$$\begin{aligned}
n_2^{1/2} n_1^{1/2} &= \left(\sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{n_1} |A(e_i, e_j)|^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n_2} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n_1} r_i(t) A(e_i, e_j) \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_0^1 \sum_{j=1}^{n_2} \left| A\left(\sum_{i=1}^{n_1} r_i(t) e_i, e_j \right) \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \sup_{t \in [0,1]} \left(\sum_{j=1}^{n_2} \left| A\left(\sum_{i=1}^{n_1} r_i(t) e_i, e_j \right) \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \|A\| \sup_{\|\varphi\|_{\ell_2^{n_2}} \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{n_2} |\varphi(e_j)|^2 \right)^{1/2} \\
&= \|A\|,
\end{aligned}$$

como queríamos provar.

■

Observação 2.3 *Uma resposta construtiva e definitiva para o caso em que $n_1 > n_2$ é ainda um problema em aberto. O comportamento de crescimento assintótico correto de $G^{(2)}_{n_1 n_2}$, nesse caso, parece uma questão teórica interessante.*

2.2 O jogo em dimensões altas

O jogo das luzes de Gale–Berlekamp tem uma extensão natural para dimensões superiores. Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo e seja $(a_{j_1\dots j_m})$ uma matriz $n\times\cdots\times n$ de luzes ligadas ($a_{j_1\dots j_m}=1$) ou desligadas ($a_{j_1\dots j_m}=-1$). Suponhamos também que para cada j_k existe um interruptor $x_{j_k}^{(k)}$ de forma que se o interruptor for acionado ($x_{j_k}^{(k)}=-1$) o estado de todas as luzes relacionadas é alterado: ligada para desligada ou desligada para ligada. O objetivo é maximizar a diferença entre o número de luzes acesas e apagadas. Como no caso bidimensional, maximizar a diferença entre o número de luzes acesas e apagadas é equivalente a estimar

$$\max_{x_{j_1}^{(1)},\dots,x_{j_m}^{(m)}\in\{-1,1\}}\left|\sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n} a_{j_1\dots j_m}x_{j_1}^{(1)}\cdots x_{j_m}^{(m)}\right|$$

e o problema extremo consiste em estimar

$$S_n=\min\left\{\max_{x_{j_1}^{(1)},\dots,x_{j_m}^{(m)}\in\{-1,1\}}\left|\sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n} a_{j_1\dots j_m}x_{j_1}^{(1)}\cdots x_{j_m}^{(m)}\right| : a_{j_1\dots j_m}=-1 \text{ ou } 1\right\}.$$

Como no caso bilinear,

$$S_n=\min\left\|A:\ell_\infty^n\times\cdots\times\ell_\infty^n\to\mathbb{R}\right\|,$$

com

$$A\left(x^{(1)},\dots,x^{(m)}\right)=\sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n} a_{j_1\dots j_m}x_{j_1}^{(1)}\cdots x_{j_m}^{(m)}.$$

O caso anisotrópico permite uma matriz de ordem $n_1\times\cdots\times n_m$, ou seja, não necessariamente uma matriz quadrada e, neste caso, escrevemos

$$S_{n_1\dots n_m}=\min\left\{\max_{x_{j_1}^{(1)},\dots,x_{j_m}^{(m)}\in\{-1,1\}}\left|\sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n_1,\dots,n_m} a_{j_1\dots j_m}x_{j_1}^{(1)}\cdots x_{j_m}^{(m)}\right| : a_{j_1\dots j_m}=1 \text{ ou } -1\right\}.$$

Combinando a desigualdade (1.10) com o [1, Theorem 3.1], podemos facilmente obter

$$\frac{1}{m\left(\sqrt{2}\right)^{m-1}}\leq\frac{S_{n_1\dots n_m}}{\sqrt{n_1\dots n_m}\max\{\sqrt{n_1},\dots,\sqrt{n_m}\}}\leq 1+o(1). \tag{2.7}$$

Seguindo a notação de [5], seja $m\geq 2$ um inteiro positivo e $(a_{i_1\cdots i_m})$ uma matriz $n\times\cdots\times n$ de escalares complexos tais que $|a_{i_1\dots i_m}|=1$. Para $p\in(1,\infty]$, seja

$$g_{m,n}^{\mathbb{C}}(p)=\max\left|\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} a_{i_1\dots i_m}x_{i_1}^{(1)}\cdots x_{i_m}^{(m)}\right|,$$

onde o máximo é avaliado sobre todos $x_{i_j}^{(j)}\in\mathbb{C}$ tais que $\|(x_{i_j}^{(j)})_{i_j=1}^n\|_p=1$, para todo j. Não é difícil provar que

$$g_{m,n}^{\mathbb{C}}(p)=\left\|A:\ell_p^n\times\cdots\times\ell_p^n\to\mathbb{C}\right\|,$$

com

$$A\left(x^{(1)},\ldots,x^{(m)}\right)=\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}a_{i_1\ldots i_m}x_{i_1}^{(1)}\cdots x_{i_m}^{(m)}.$$

Denotando

$$G_{m,n}(p)=\min g_{m,n}^{\mathbb{C}}(p),$$

onde o mínimo é avaliado sobre toda forma m-linear $A:\ell_p^n\times\cdots\times\ell_p^n\to\mathbb{C}$, as melhores informações que podemos coletar (combinando os resultados de [5, 1]) são

$$\frac{1}{1,3m^{0,365}}\leq\frac{G_{m,n}(p)}{n^{\frac{mp+p-2m}{2p}}}\leq 8\sqrt{m!}\sqrt{\log(1+4m)},\tag{2.8}$$

para todo $p\in[2,\infty)$. Para $p\in[1,2)$, os autores em [5] observaram que

$$\frac{G_{m,n}(p)}{n^{1-\frac{1}{p}}}\leq C_m,\tag{2.9}$$

onde C_m é obtida por interpolação (via o Teorema de Riesz–Thorin) da constante 1 (a constante quando $p=1$) e $8\sqrt{m!}\sqrt{\log(1+4m)}$ (a constante quando $p=2$), mas não encontraram o limite inferior.

Em [5, Conjecture 2.7], conjectura-se que, em (2.9), o expoente $(p-1)/p$ é ótimo, ou seja, que há uma constante positiva como limite inferior para (2.9). De fato, um argumento simples, usado na demonstração da otimalidade no Teorema 1.2, mostra que a conjectura é verdadeira: tomando, $p_1=\cdots=p_m=p$ em (1.7), para toda forma m-linear unimodular $A:\ell_p^n\times\cdots\times\ell_p^n\to\mathbb{K}$ temos

$$n^{1-\frac{1}{p}}=\sup_{i_1,\ldots,i_{m-1}}\left(\sum_{i_m=1}^{n}\left|A\left(e_{i_1},...,e_{i_m}\right)\right|^{p^*}\right)^{1/p^*}\leq\|T\|\sup_{\varphi\in B_{\ell_{p^*}^n}}\left(\sum_{i_m=1}^{n}\left|\varphi(e_{i_m})\right|^{p^*}\right)^{1/p^*}=\|A\|$$

e, portanto,

$$1\leq\frac{G_{m,n}(p)}{n^{1-\frac{1}{p}}}\leq C_m.\tag{2.10}$$

Além disso, definindo

$$g_{m,n}^{\mathbb{C}}(p_1,\ldots,p_m)=\left\|A:\ell_{p_1}^n\times\cdots\times\ell_{p_m}^n\to\mathbb{C}\right\|$$

e

$$G_{m,n}(p_1,\ldots,p_m)=\min g_{m,n}^{\mathbb{C}}(p_1,\ldots,p_m),$$

o Teorema 1.2 assegura que

$$D_m\leq\frac{G_{m,n}(p_1,\ldots,p_m)}{n^{\frac{1}{\min\left\{\max\{2,p_k^*\}\right\}}+\sum_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},\,0\right\}}}\leq K_m,$$

onde D_m e K_m comportam-se essencialmente como as constantes de (2.8) e (2.10).

Nossa proposta do jogo contínuo em dimensões altas é a seguinte: consideramos uma matriz $(a_{j_1\ldots j_m})_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n_1,\ldots,n_m}$ cujos elementos são vetores unitários do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^2$ e configuramos o padrão de direção inicial de cada $n_1\cdots n_m$ vetores o no início do jogo.

Para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, temos n_k botões de rotação $x_1^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$. Então, quando o botão $x_{j_k}^{(k)}$ é rotacionado por um ângulo $\theta_{j_k}^{(k)}$, o mesmo acontece com todos os vetores $a_{j_1 \ldots j_m}$ com j_k fixado (ver Figura 3). Definindo Θ e $s(\Theta)$ como no caso bidimensional, o problema extremo é determinar

$$G_{n_1 \ldots n_m}^{(1)} := \min\{s(\Theta) : \Theta \text{ é uma configuração inicial de } n_1 \times \cdots \times n_m \text{ vetores}\}.$$

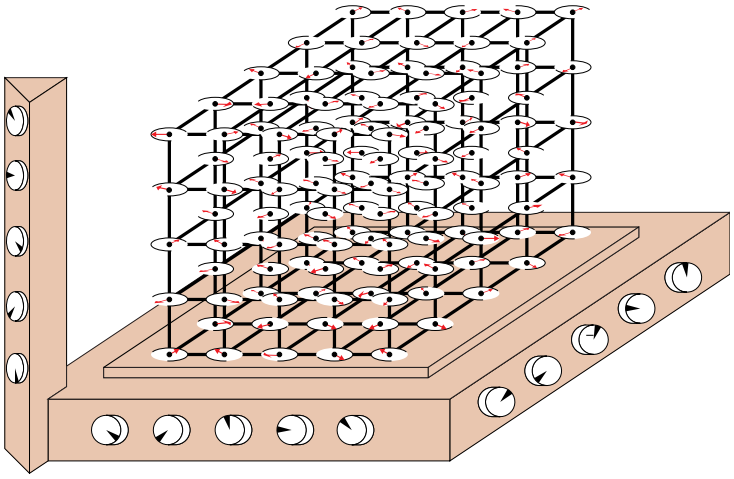

Figura 3. Jogo contínuo tridimensional para $n = 5$.

Provamos o seguinte:

Teorema 2.4 *Para todos inteiros positivos $m \geq 2$, $n_1, \ldots, n_m \geq 1$, temos*

$$(0,886)^{m-1} \simeq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-1} \leq \frac{G_{n_1 \ldots n_m}^{(1)}}{\sqrt{n_1 \cdots n_m}\max\{\sqrt{n_1}, \ldots, \sqrt{n_m}\}} \leq 1.$$

Além disso, o limite superior universal 1 *não pode ser melhorado.*

Demonstração: Nossa tarefa, assim como no caso bidimensional, é estimar o ínfimo de $\{\|A\| : |a_{j_1 \ldots j_m}| = 1\}$ sobre todas as formas m-lineares $A : \ell_\infty^{n_1} \times \cdots \times \ell_\infty^{n_m} \to \mathbb{C}$ com coeficientes unimodulares.

O limite superior é consequência imediata do Teorema 1.8, daí

$$\frac{G_{n_1 \ldots n_m}^{(1)}}{\sqrt{n_1 \cdots n_m}\max\{\sqrt{n_1}, \ldots, \sqrt{n_m}\}} \leq 1.$$

O argumento usado na estimativa inferior está essencialmente contido em [9], mas forneceremos os detalhes para fins de completude. Para isso, usaremos a desigualdade múltipla de Khinchin para as variáveis de Steinhaus (veja o Apêndice A para uma abordagem detalhada).

Considere uma forma m-linear $A : \ell_\infty^{n_1} \times \cdots \times \ell_\infty^{n_m} \to \mathbb{C}$ dada por

$$A\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}\right) = a_{j_1 \ldots j_m},$$

com

$$|a_{j_1\ldots j_m}| = 1.$$

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $n_m = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$. Denotando

$$dt := dt_1^{(1)} \cdots dt_{n_1}^{(1)} \cdots dt_1^{(m-1)} \cdots dt_{n_{m-1}}^{(m-1)},$$

temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}=1}^{n_1,\ldots,n_{m-1}} \left|A\left(e_{j_1,\ldots,e_{j_m}}\right)\right|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n_1+\cdots+n_{m-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left|\sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}=1}^{n_1,\ldots,n_{m-1}} A\left(e_{j_1,\ldots,e_{j_m}}\right) e^{it_{j_1}^{(1)}} \cdots e^{it_{j_{m-1}}^{(m-1)}}\right| dt \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n_1+\cdots+n_{m-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left|A\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} e^{it_{j_1}^{(1)}} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_{m-1}=1}^{n_{m-1}} e^{it_{j_{m-1}}^{(m-1)}} e_{j_{m-1}}, e_{j_m}\right)\right| dt.
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}=1}^{n_1,\ldots,n_{m-1}} A\left(e_{j_1,\ldots,e_{j_m}}\right) e^{it_{j_1}^{(1)}} \cdots e^{it_{j_{m-1}}^{(m-1)}} = A\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} e^{it_{j_1}^{(1)}} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_{m-1}=1}^{n_{m-1}} e^{it_{j_{m-1}}^{(m-1)}} e_{j_{m-1}}, e_{j_m}\right)$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \sum_{j_m=1}^{n_m} \left|A\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} e^{it_{j_1}^{(1)}} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_{m-1}=1}^{n_{m-1}} e^{it_{j_{m-1}}^{(m-1)}} e_{j_{m-1}}, e_{j_m}\right)\right| dt \\
&\leq (2\pi)^{n_1+\cdots+n_{m-1}} \max_{t_{j_k}^{(k)} \in [0,2\pi]} \sum_{j_m=1}^{n_m} \left|A\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} e^{it_{j_1}^{(1)}} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_{m-1}=1}^{n_{m-1}} e^{it_{j_{m-1}}^{(m-1)}} e_{j_{m-1}}, e_{j_m}\right)\right|,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_m=1}^{n_m} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}=1}^{n_1,\ldots,n_{m-1}} \left|A\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_m}\right)\right|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \max_{t_{j_k}^{(k)} \in [0,2\pi]} \sum_{j_m=1}^{n_m} \left|A\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} e^{it_{j_1}^{(1)}} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_{m-1}=1}^{n_{m-1}} e^{it_{j_{m-1}}^{(m-1)}} e_{j_{m-1}}, e_{j_m}\right)\right| \\
&\leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \|A\| \sup_{\varphi \in B_{(\ell_\infty^{n_m})^*}} \sum_{j_m=1}^{n_m} \left|\varphi\left(e_{j_m}\right)\right| \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \|A\|.
\end{aligned}$$

Finalmente, como $|A(e_{j_1},\dots,e_{j_m})|=1$, concluímos que

$$\|A\| \geq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-1} n_m n_1^{\frac{1}{2}} \cdots n_{m-1}^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-1} \leq \frac{G^{(1)}_{n_1\dots n_m}}{\sqrt{n_1\dots n_m}\max\{\sqrt{n_1},\dots,\sqrt{n_m}\}}.$$

A prova de que, em geral, o limite superior 1 não pode ser melhorado é simples — apenas considere $n_2=\cdots=n_m=1$ e note que neste caso

$$G^{(1)}_{n_1\dots n_m} = n_1 = \sqrt{n_1\cdots n_m}\max\{\sqrt{n_1},\dots,\sqrt{n_m}\}.$$

■

Também fornecemos uma versão em dimensões altas para o jogo ponderado.

Novamente, começando com uma matriz $(a_{j_1\dots j_m})_{j_1,\dots,j_m=1}^{n_1,\dots,n_m}$ cujos elementos são vetores unitários em $\mathbb{R}^2$. O padrão de direção inicial de cada $n_1\cdots n_m$ vetores é configurado no início do jogo. Para cada $k\in\{1,\dots,m\}$, temos n_k botões $x_1^{(k)},\dots,x_{n_k}^{(k)}$. Quando o botão $x_{j_k}^{(k)}$ é rotacionado por um ângulo $\theta_{j_k}^{(k)}$, o mesmo acontece com todos os vetores $a_{j_1\dots j_m}$ com j_k fixado. Entretanto, no caso $k=m$, os respectivos vetores $a_{j_1\dots j_m}$, além de serem rotacionados, também são multiplicados por um número real b_{j_m}, com

$$\sum_{j_m=1}^{n_m} b_{j_m}^2 = 1.$$

Definindo Θ e $s(\Theta)$ como no caso bidimensional, o problema extremo é determinar

$$G^{(2)}_{n_1\dots n_m} := \min\{s(\Theta) : \Theta \text{ é uma configuração inicial de } n_1\times\cdots\times n_m \text{ vetores}\}.$$

Provamos o seguinte:

Teorema 2.5 *Para todos inteiros positivos $m,n_1,\dots,n_m\geq 2$, com $n_m\geq\max\{n_1,\dots,n_{m-1}\}$, temos*

$$\frac{G^{(2)}_{n_1\dots n_m}}{\sqrt{n_1}\cdots\sqrt{n_m}} = 1.$$

Demonstração: O Teorema 1.9, quando $p_1=\infty$ e $p_2=2$, assegura que

$$\frac{G^{(2)}_{n_1\dots n_m}}{\sqrt{n_1}\cdots\sqrt{n_m}} \leq 1.$$

A estimativa inferior é uma adaptação do argumento usado na prova do Teorema 2.2 para somas múltiplas. Assim, para toda forma m-linear $A:\ell_\infty^{n_1}\times\cdots\times\ell_\infty^{n_{m-1}}\times\ell_2^{n_m}\to\mathbb{K}$, onde $A(e_{i_1},\dots,e_{i_m})=a_{i_1,\dots,i_m}$ com

$$|a_{i_1,\dots,i_m}|=1,$$

temos

$$\left(\sum_{i_m=1}^{n_m}\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}}^{n_1,\ldots,n_{m-1}}|a_{i_1,\ldots,i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{i_m=1}^{n_m}\int_{[0,1]^{m-1}}\left|\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n_1,\ldots,n_{m-1}} r_1(t_1)\cdots r_{i_{m-1}}(t_{m-1})A\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}\right)\right|^2 dt_1\cdots dt_{m-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{[0,1]^{m-1}}\sum_{i_m=1}^{n_m}\left|A\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} r_1(t_1)e_{i_1},\ldots,\sum_{i_{m-1}}^{n_{m-1}} r_{i_{m-1}}(t_{m-1})e_{i_{m-1}},e_{i_m}\right)\right|^2 dt_1\cdots dt_{m-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sup_{t_1,\ldots,t_{m-1}[0,1]}\left\|A\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} r_1(t_1)e_{i_1},\ldots,\sum_{i_{m-1}}^{n_{m-1}} r_{i_{m-1}}(t_{m-1})e_{i_{m-1}},\cdot\right)\right\|\sup_{\varphi\in\ell_2^{n_m}}\left(\sum_{i_m=1}^{n_m}|\varphi(e_{i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|A\|.$$

Como

$$n_1^{\frac{1}{2}}\cdots n_m^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i_m=1}^{n_m}\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}}^{n_1,\ldots,n_{m-1}}|a_{i_1,\ldots,i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

a prova está feita.

■

Capítulo 3

O Teorema de Dvoretzky–Rogers

Uma série em um espaço de Banach é considerada incondicionalmente convergente se todos os rearranjos dessa série convergirem para o mesmo vetor. Um resultado antigo devido a Dirichlet (1829) afirma que, para escalares reais ou complexos, as séries incondicionalmente convergentes são precisamente as absolutamente convergentes, ou seja, aquelas séries $\sum x^{(n)}$ tais que $\sum \left\|x^{(n)}\right\|$ converge. A mesma caracterização vale para espaços de Banach de dimensão finita, veja, por exemplo, [25, Teorema 1.3.5]. Em uma estrutura de dimensão infinita, parece que as séries incondicionalmente convergentes foram investigadas pela primeira vez por Orlicz cerca de 100 anos depois de Dirichlet. O assunto atraiu a atenção de Banach, Mazur e outros, que propuseram o seguinte problema (ver [37, Problem 122] e também [44] para mais detalhes):

> *Em um espaço de Banach de dimensão infinita arbitrário, existe uma série incondicionalmente convergente que não converge absolutamente?*

Na maioria dos espaços de Banach clássicos, exemplos de séries incondicionalmente convergentes que não convergem absolutamente foram facilmente obtidos. Por exemplo, a sequência $(j^{-1}e_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável em ℓ_2, porém não é absolutamente somável. O mesmo exemplo funciona para todos os espaços ℓ_p para qualquer $p > 1$, mas é inútil para ℓ_1. Em 1947, Macphail ([33]) provou que a resposta também era positiva em ℓ_1. A abordagem de Macphail mostrou que ℓ_1 é essencialmente o caso crítico para todos os espaços de Banach de dimensão infinita; isso se torna bastante claro, por exemplo, na abordagem descrita em [46, §2 e Lema 1] e, de acordo com [20, páginas 2 e 20], inspirou Dvoretzky e Rogers em 1950 ([21]) a transplantar de uma forma altamente não trivial a construção de Macphail para qualquer espaço de Banach de dimensão infinita e obter uma solução definitiva para o problema.

Para um espaço de Banach E e para uma sequência finita S de vetores $x_1, \ldots, x_n$ em E, Macphail definiu

$$G(S) = \frac{\sup_\sigma \left\|\sum_{i\in\sigma} x_i\right\|}{\sum_{i=1}^n \|x_i\|},$$

onde o supremo é calculado sobre todos os subconjuntos $\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\}$, e

$$\mu(E) = \inf G(S),$$

sendo o ínfimo calculado sobre todas as sequências finitas $S \subset E$. O parâmetro $\mu(E)$ agora é conhecido como constante de Macphail de E. Em seu artigo, é primeiro observado que se $\mu(E) = 0$, então a convergência incondicional não implica convergência absoluta em E. O resultado principal de [33] mostra que $\mu(\ell_1) = 0$.

Algumas provas alternativas do resultado de Macphail e do Teorema de Dvoretzky–Rogers apareceram mais tarde, mas não eram construtivas (ver, por exemplo, [29, página 145] e [6, 53], e as referências contidas) . Também referimos o leitor interessado a [8] para uma abordagem não construtiva em ℓ_1 usando a KSZ e [23, 47] para o comportamento assintótico de $\mu(\ell_p^n)$.

O resultado impressionante de Dvoretzky e Rogers, mostrando que $\mu(E) = 0$ para todos os espaços de Banach de dimensão infinita, atraiu a atenção de Grothendieck, que se referiu ao Teorema de Dvoretzky–Rogers como o único resultado decisivo para a teoria dos espaços de Banach gerais conhecidos na época (ver [20, página 20]). Além disso, o resultado responde muito mais do que o que é perguntado no problema original da escola de Banach. Em termos mais precisos, se E é um espaço de Banach de dimensão infinita, o Teorema de Dvoretzky–Rogers garante a existência de uma série $\sum x^{(j)}$ incondicionalmente convergente em E tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|x^{(j)}\right\|^{2-\varepsilon} = \infty, \tag{3.1}$$

para todo $\varepsilon > 0$. No entanto, a prova do teorema não oferece uma construção explícita dessa sequência e o resultado de Macphail para $E = \ell_1$ fornece uma prova construtiva apenas para $\varepsilon \geq 1$.

Neste capítulo, revisitamos o artigo de Macphail e apresentamos duas construções alternativas que funcionam para todo $\varepsilon > 0$. Os principais resultados estão presentes em:

> *D. Pellegrino, J. Silva, Macphail's theorem revisited. Archiv der Mathematik, v.* ***117****, p. 647-656, 2021.*

3.1 Uma abordagem construtiva em $\ell_p(\mathbb{C})$

Nesta seção, baseando-se nas propriedades das matrizes apresentadas na Seção 1.2, fornecemos uma construção alternativa de uma sequência em $\ell_p(\mathbb{C})$, para todo $p \in [1, 2]$ (o caso $p > 2$ é óbvio e por este motivo não o consideramos) que, ao contrário da abordagem de Macphail, satisfaz completamente a afirmação do Teorema de Dvoretzky–Rogers.

Teorema 3.1 *Sejam $p \in [1, 2]$ e $\alpha > 1$ um inteiro positivo. Para cada inteiro positivo j, seja*

$$A_j := \left[1/2 + \sqrt{1/4 + \log_\alpha\left((j+1)/2\right)}, 1/2 + \sqrt{1/4 + \log_\alpha j}\right] \cap \mathbb{N}.$$

A sequência $(x^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ definida por

$$x^{(j)} = \alpha^{\frac{(1-k_j)(k_j(2+p)+2p)}{2p}} \cdot \sum_{s=1}^{\alpha^{k_j(k_j-1)}} \left(\exp\left(\left[j\alpha^{k_j(1-k_j)} + \alpha^{k_j(1-k_j)} - 1\right] 2\pi s i\right) \cdot e_{\alpha^{k_j(k_j-1)}+s-1}\right)$$

se $A_j \neq \emptyset$, *onde* k_j *é o único elemento de* A_j, *e* $x^{(j)} = 0$ *caso contrário, é incondicionalemente somável em* ℓ_p *e*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|x^{(j)}\right\|^{2-\varepsilon} = \infty,$$

para todo $\varepsilon > 0$.

A declaração pode parecer um tanto complicada à primeira vista, mas a construção é bastante simples. Devemos primeiro observar que o intervalo

$$\left[1/2 + \sqrt{1/4 + \log_\alpha\left((j+1)/2\right)},\ 1/2 + \sqrt{1/4 + \log_\alpha j}\right]$$

tem tamanho menor do que ou igual a 1 e daí A_j é, de fato, ou vazio ou formado por um único inteiro positivo. Com efeito, uma vez que $\alpha > 1$, segue

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{4} + \log_\alpha j} - \sqrt{\frac{1}{4} + \log_\alpha\left(\frac{j+1}{\alpha}\right)} &\leq \sqrt{\frac{1}{4} + \log_\alpha(j+1)} - \sqrt{\frac{1}{4} + \log_\alpha\left(\frac{j+1}{2}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4} + \log_\alpha(j+1)} - \sqrt{\frac{1}{4} + \log_\alpha(j+1) - \log_\alpha 2} \\
&\leq \sqrt{\frac{1}{4} + \log_\alpha(j+1) - \left(\frac{1}{4} + \log_\alpha(j+1) - \log_\alpha 2\right)} \\
&= \sqrt{\log_\alpha 2} \\
&\leq \sqrt{\log_2 2} = 1.
\end{aligned}$$

Acima, usamos o fato de que se a e b são números reais tais que $0 \leq b \leq a$, então $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$.

Um cálculo simples mostra que se

$$j \in \left\{\alpha^{k(k-1)}, \alpha^{k(k-1)} + 1, \ldots, 2\alpha^{k(k-1)} - 1\right\}$$

para um certo inteiro positivo k, temos $A_j = \{k\}$; do contrário A_j é vazio. De fato, se $j \in \{j_k, \ldots, 2j_k - 1\}$, onde $j_k := \alpha^{k(k-1)}$, então

$$\alpha^{k(k-1)} \leq j \leq 2\alpha^{k(k-1)} - 1. \tag{3.2}$$

Uma vez que $\alpha > 1$, da primeira desigualdade de (3.2), segue que $k(k-1) \leq \log_\alpha j$, donde $k^2 - k - \log_\alpha j \leq 0$. Logo,

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 4\log_\alpha j}}{2} \leq k \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4\log_\alpha j}}{2}. \tag{3.3}$$

Por outro lado, da desigualdade no lado direito em (3.2), obtemos $(j+1)/2 \leq \alpha^{k(k-1)}$, o que implica $\log_\alpha(j+1)/2 \leq k(k-1)$, de onde segue que $0 \leq k^2 - k - \log_\alpha(j+1)/2$. Portanto,

$$k \leq \frac{1 - \sqrt{1 + 4\log_\alpha\left((j+1)/2\right)}}{2} \quad \text{ou} \quad k \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 4\log_\alpha\left((j+1)/2\right)}}{2}. \tag{3.4}$$

Os resultados em (3.3) e (3.4) asseguram que

$$\frac{1-\sqrt{1+4\log_\alpha((j+1)/2)}}{2} \leq k \leq \frac{1+\sqrt{1+4\log_\alpha j}}{2}.$$

Portanto, $k \in A_j$.

Agora, tomemos $k \in A_j$, para um certo inteiro positivo j. Então

$$1/2+\sqrt{1/4+\log_\alpha\left((j+1)/2\right)} \leq k \tag{3.5}$$

e

$$k \leq 1/2+\sqrt{1/4+\log_\alpha j}. \tag{3.6}$$

De (3.5), segue que $1/4+\log_\alpha\left((j+1)/2\right) \leq (k-1/2)^2$, ou seja, $\log_\alpha\left((j+1)/2\right) \leq k(k-1)$. Então, $(j+1)/2 \leq \alpha^{k(k-1)}$, o que implica em

$$j \leq 2\alpha^{k(k-1)}-1. \tag{3.7}$$

Por outro lado, de (3.6), temos $(k-1/2)^2 \leq 1/4+\log_\alpha j$, donde $k(k-1) \leq \log_\alpha j$. Assim

$$\alpha^{k(k-1)} \leq j. \tag{3.8}$$

Por (3.7) e (3.8), obtemos

$$j \in \{\alpha^{k(k-1)}, \ldots, 2\alpha^{k(k-1)}-1\}.$$

Demonstração: [Demonstração do Teorema 3.1] Inicialmente, relembre que, para vetores unitários $\varphi \in \ell_{p^*}^n$ e $\psi \in \ell_\infty^n$, o Teorema 1.6 assegura que

$$\left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \psi_i\varphi_j a_{i,j}^{(n)}\right| \leq n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}},$$

com $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ e $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_n)$, donde

$$\sup_{\|\varphi\|_{p^*}\leq 1}\sum_{r=1}^n\left|\sum_{s=1}^n \varphi_s a_{rs}^{(n)}\right| = \sup_{\|\varphi\|_{p^*}\leq 1}\sup_{\|\psi\|_\infty\leq 1}\left|\sum_{r,s=1}^n \psi_r\varphi_s a_{rs}^{(n)}\right| \leq n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}. \tag{3.9}$$

Seja $j_k := \alpha^{k(k-1)}$ para todo inteiro positivo k. Defina a sequência $(x^{(j)})_{j=1}^\infty$ como segue: se $j \in \{j_k,\ldots,2j_k-1\}$, para um certo inteiro positivo k, considere

$$x^{(j)} = j_k^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)}\left(\sum_{s=1}^{j_k} a_{rs}^{(j_k)} e_{j_k+s-1}\right),$$

onde $r=j-j_k+1$; do contrário considere $x^{(j)}=0$. Para todo $\varphi \in (\ell_p)^*$, não é difícil observar que

$$\sup_{\|\varphi\|_{p^*}\leq 1}\sum_{j=1}^\infty \left|\varphi\left(x^{(j)}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^\infty\left(\sup_{\|\varphi\|_{p^*}\leq 1}\sum_{j=j_k}^{2j_k-1}\left|\varphi\left(x^{(j)}\right)\right|\right). \tag{3.10}$$

Pela definição de $x^{(j)} := (x_m^{(j)})_{m=1}^{\infty}$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=j_k}^{2j_k-1}\left|\varphi\left(x^{(j)}\right)\right| &= \sum_{j=j_k}^{2j_k-1}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m x_m^{(j)}\right| \\ &= \sum_{j=j_k}^{2j_k-1}\left|j_k^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)}\sum_{m=j_k}^{2j_k-1}\varphi_m a^{(j_k)}_{[j-j_k+1][m-j_k+1]}\right|\end{aligned} \tag{3.11}$$

para todo inteiro positivo k. Observe que podemos atribuir novos índices às somas $\sum_{j=j_k}^{2j_k-1}$ e $\sum_{m=j_k}^{2j_k-1}$ como segue:

$$\begin{aligned}\sum_{j=j_k}^{2j_k-1}\left|j_k^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)}\sum_{m=j_k}^{2j_k-1}\varphi_m a^{(j_k)}_{[j-j_k+1][m-j_k+1]}\right| &= \sum_{r=1}^{j_k}\left|j_k^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)}\sum_{s=1}^{j_k}\varphi_{(j_k+s-1)}a_{rs}^{(j_k)}\right| \\ &= j_k^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)}\sum_{r=1}^{j_k}\left|\sum_{s=1}^{j_k}\varphi_{(j_k+s-1)}a_{rs}^{(j_k)}\right|.\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 2$, por (3.9) e (3.11), temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\sup_{\|\varphi\|_{p^*}\leq 1}\sum_{j=j_k}^{2j_k-1}\left|\varphi\left(x^{(j)}\right)\right|\right) &= \sum_{k=n}^{\infty}\left(\sup_{\|\varphi\|_{p^*}\leq 1}\sum_{j=j_k}^{2j_k-1}\left|j_k^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)}\sum_{m=j_k}^{2j_k-1}\varphi_m a^{(j_k)}_{[j-j_k+1][m-j_k+1]}\right|\right) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty}\left(\sup_{\|\varphi\|_{p^*}\leq 1} j_k^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)}\sum_{r=1}^{j_k}\left|\sum_{s=1}^{j_k}\varphi_{(j_k+s-1)}a_{rs}^{(j_k)}\right|\right) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty}\left(j_k^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)}\sup_{\|\varphi\|_{p^*}\leq 1}\sum_{r=1}^{j_k}\left|\sum_{s=1}^{j_k}\varphi_{(j_k+s-1)}a_{rs}^{(j_k)}\right|\right) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty}\left(j_k^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)}j_k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\right) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty}\alpha^{1-k} < \infty.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Uma condição necessária e suficiente bem conhecida para uma série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ ser incondicionalemente somável (ver [20, Theorem 1.5]) é que, dado $\delta > 0$, deve existir $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\sum_{n\in M} y_n\right\| < \delta,$$

sempre que M é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ com $\min M > n_\delta$.

Combinando (3.10) e (3.12), obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\|\varphi\|_{p^*}\leq 1}\sum_{j=n}^{\infty}\left|\varphi\left(x^{(j)}\right)\right| = 0.$$

Consequentemente, dado $\delta > 0$, existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_\delta$ implica

$$\sup_{\|\varphi\|_{p^*} \leq 1} \sum_{j=n}^{\infty} \left|\varphi\left(x^{(j)}\right)\right| < \delta.$$

Então, para todo conjunto finito $M \subset \mathbb{N}$ tal que $M \subset \{n_\delta, n_\delta + 1, \ldots\}$, segue que

$$\left\|\sum_{j\in M} x^{(j)}\right\| \leq \sup_{\|\varphi\|_{p^*}\leq 1} \sum_{j\in M} |\varphi(x^{(j)})| \leq \sup_{\|\varphi\|_{p^*}\leq 1} \sum_{j=n}^{\infty} |\varphi(x^{(j)})| < \delta.$$

Portanto, $(x^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável.

Por outro lado, quando $j \in \{j_k, \ldots, 2j_k - 1\}$, para um certo inteiro positivo k, temos

$$\left\|x^{(j)}\right\| = \left(j_k \cdot \left(j_k^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{k}\right)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = j_k^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)};$$

do contrário $\|x^{(j)}\| = 0$. Então, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|x^{(j)}\right\|^r = \sum_{k=1}^{\infty} j_k \cdot \left(j_k^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)}\right)^r = \sum_{k=1}^{\infty} j_k^{1-\frac{r}{2}-\frac{r}{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k(k-1)\left(1-\frac{r}{2}-\frac{r}{k}\right)},$$

que diverge para todo $r < 2$, pois $\lim_{k\to\infty} \alpha^{k(k-1)\left(1-\frac{r}{2}-\frac{r}{k}\right)} \neq 0$ sempre que $r < 2$.

Note que, considerando, para todo inteiro positivo j,

$$A_j := \left[1/2 + \sqrt{1/4 + \log_\alpha\left((j+1)/2\right)}, 1/2 + \sqrt{1/4 + \log_\alpha j}\right] \cap \mathbb{N},$$

cada $x^{(j)}$ é precisamente

$$x^{(j)} = \alpha^{\frac{(1-k_j)(k_j(2+p)+2p)}{2p}} \cdot \sum_{s=1}^{\alpha^{k_j(k_j-1)}} \left(\exp\left(\left[j\alpha^{k_j(1-k_j)} + \alpha^{k_j(1-k_j)} - 1\right] 2\pi s i\right) \cdot e_{\alpha^{k_j(k_j-1)}+s-1}\right)$$

quando $A_j \neq \emptyset$, onde k_j é único elemento de A_j, e $x^{(j)} = 0$ caso contrário. Isso conclui a prova.

■

3.2 Uma abordagem construtiva em $\ell_p(\mathbb{R})$

Seguindo as linhas da prova do Teorema 3.1, nesta seção, tomamos emprestado um argumento creditado a Pelczynski para adaptar a construção anterior ao campo dos escalares reais. De fato, essa segunda abordagem é válida tanto para o corpo dos escalares reais quanto complexos. O cerne da prova repousa nas propriedades do sistema de funções de Walsh (ver [17, página 8] para mais detalhes), que é o conjunto ortogonal completo formado pelas seguintes funções:

$$f_0(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

$$f_2^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4} < x \le 1 \\ -1, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \end{cases}$$

$$f_2^{(2)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}, \\ -1, & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4} < x \le 1, \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$f_{n+1}^{(2k-1)}(x) = \begin{cases} f_n^{(k)}(2x), & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ (-1)^{k+1} f_n^{(k)}(2x-1), & \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

$$f_{n+1}^{(2k)}(x) = \begin{cases} f_n^{(k)}(2x), & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ (-1)^{k} f_n^{(k)}(2x-1), & \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$.

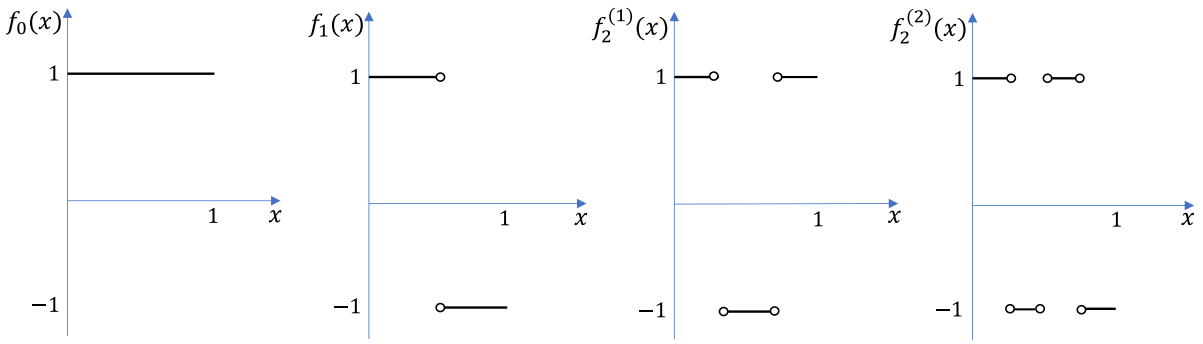

Figura 3: Gráficos das quatro primeiras funções de Walsh.

Para o que se segue, vamos considerar m um inteiro positivo e denotar por $g_1, \ldots, g_{2^m}$ as primeiras 2^m funções do sistema de Walsh. Nesse caso, $g_1 = f_0$, $g_2 = f_1$, $g_3 = f_2^{(1)}$, $g_4 = f_2^{(2)}$, e assim por diante. Nosso resultado desta seção é:

Teorema 3.2 *Sejam m um inteiro positivo e $n := 2^m$. Para $i, j = 1, \ldots, n$, considere $a_{ij}^{(n)}$ o valor que cada g_j assume no intervalo $((i-1)/n, i/n)$. Seja $p \in [1, 2]$. Para todo inteiro positivo j, seja*

$$A_j := \left[1/2 + \sqrt{1/4 + \log_2\left((j+1)/2\right)}, 1/2 + \sqrt{1/4 + \log_2 j}\right] \cap \mathbb{N}.$$

A sequência $(x^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ definida por

$$x^{(j)} = 2^{\frac{(1-k_j)(k_j(2+p)+2p)}{2p}} \cdot \sum_{s=1}^{2^{k_j(k_j-1)}} \left(a_{rs}^{(2^{k_j(k_j-1)})} \cdot e_{2^{k_j(k_j-1)}+s-1}\right)$$

se $A_j \neq \emptyset$, onde $r = j - 2^{k_j(k_j-1)} + 1$ e k_j é o único elemento de A_j, e $x^{(j)} = 0$ caso contrário, é incondicionalmente somável em ℓ_p e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|x^{(j)}\right\|^{2-\varepsilon} = \infty,$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Como observado nas páginas 35 e 36 da Seção 3.1, o intervalo

$$\left[1/2 + \sqrt{1/4 + \log_2\left((j+1)/2\right)},\ 1/2 + \sqrt{1/4 + \log_2 j}\right]$$

tem tamanho menor do que 1 e, portanto, A_j é, de fato, vazio ou formado por um único inteiro. Analogamente, mostra-se que quando $j \in \left\{2^{k(k-1)}, 2^{k(k-1)} + 1, \ldots, 2 \cdot 2^{k(k-1)} - 1\right\}$ para um certo inteiro positivo k, temos $A_j = \{k\}$; do contrário A_j é vazio, basta considerar $\alpha = 2$ na demostração apresentada na Seção 3.1.

Demonstração: Para todo vetor unitário $\varphi \in \ell_{p^*}^n$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j a_{ij}^{(n)} \right| \leq n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}, \tag{3.13}$$

onde $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. De fato, para cada $1 = 1, \ldots, n$, pela definição de g_i no intervalo $((i-1)/n, i/n)$, obtemos

$$\int_{(i-1)/n}^{i/n} \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j g_j(t) \right| dt = \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j a_{i,j}^{(n)} \right|,$$

isto é,

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j a_{i,j}^{(n)} \right| = n \int_{(i-1)/n}^{i/n} \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j g_j(t) \right| dt, \tag{3.14}$$

Consequentemente, por (3.14),

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j a_{ij}^{(n)} \right| = n \sum_{i=1}^{n} \int_{(i-1)/n}^{i/n} \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j g_j(t) \right| dt = n \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j g_j(t) \right| dt. \tag{3.15}$$

Por (3.15) e pela monotonicidade das L_p-normas, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j a_{i,j}^{(n)} \right| = n \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j g_j(t) \right| dt \leq n \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j g_j(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.16}$$

Uma vez que $\int_0^1 g_j(t) g_k(t) dt = \delta_{jk}$, para $j, k = 1, \ldots, n_1$, temos

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j g_j(t) \right|^2 dt = \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j|^2, \tag{3.17}$$

pois

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^n \varphi_j g_j(t)\right|^2 dt &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \varphi_j g_j(t)\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^n \varphi_j g_j(t)\right) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j,k=1}^n \varphi_j\varphi_k g_j(t)g_k(t)dt \\ &= \sum_{j,k=1}^n \varphi_j\varphi_k \textstyle\int_0^1 g_j(t)g_k(t)dt \\ &= \sum_{j=1}^n |\varphi_j|^2 \textstyle\int_0^1 g_j^2(t)dt \\ &= \sum_{j=1}^n |\varphi_j|^2.\end{aligned}$$

Combinando (3.16) e (3.17), conseguimos

$$\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n \varphi_j a_{ij}^{(n)}\right| \leq n\left(\sum_{j=1}^n |\varphi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.18}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder, usando que $\|\varphi\|_{p^*} \leq 1$, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^n |\varphi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n 1\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p^*}}\cdot\left(\sum_{j=1}^n |\varphi_j|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p^*}}. \tag{3.19}$$

Portanto, por (3.18) e (3.19), temos

$$\sup_{\|\varphi\|_{p^*}\leq 1}\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n \varphi_j a_{i,j}^{(n)}\right| \leq n\left(\sum_{j=1}^n |\varphi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq n\cdot n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p^*}} = n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}.$$

O resto da demonstração segue as linhas da prova do Teorema 3.1. Basta considerar $\alpha = 2$ na definição de j_k e trocar os elementos da matriz complexa pelos elementos do sistema de Walsh. Isso conclui a prova.

■

Observe que essa segunda abordagem fornece um resultado que generaliza o Teorema de Macphail, uma vez que apresenta uma prova construtiva completa para o teorema de Dvoretzky–Rogers.

Vale ainda ressaltar que, recentemente, Katiuscia B. Teixeira ([48]) apresentou uma prova alternativa do teorema de Macphail usando a teoria das matrizes de Hadamard que inclui as abordagens desse capítulo unificando ambas as construções.

Apêndice A

Desigualdade múltipla de Khinchin para variáveis de Steinhaus

A clássica desigualdade de Khinchin, provada em 1923 por Aleksandr Khinchin em [27], é uma importante ferramenta probabilística com várias aplicações na Análise Moderna. Vamos motivar o resultado da seguinte maneira: suponha que temos n números reais $a_1, \ldots, a_n$ e uma moeda justa. Quando lançamos a moeda, se der cara, você escolhe $\beta_1 = a_1$, e se der coroa, você escolhe $\beta_1 = -a_1$. Quando jogamos pela segunda vez, se der cara, você escolhe $\beta_2 = \beta_1 + a_2$ e, se der coroa, você escolhe $\beta_2 = \beta_1 - a_2$. Repetindo o processo, depois de jogar a moeda k vezes, temos

$$\beta_{k+1} := \beta_k + a_{k+1},$$

se der cara e

$$\beta_{k+1} := \beta_k - a_{k+1},$$

se der coroa. Após n etapas, qual deve ser o valor esperado de

$$|\beta_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \pm a_k\right|?$$

A desigualdade de Khinchin mostra que a "média"

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in D_n} \left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j\right|,$$

onde $D_n = \{-1, 1\}^n$ e $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, a menos de constantes, se comporta como a ℓ_2-norma de $(a_j)_{j=1}^n$. Mais precisamente, ela afirma que, para qualquer $p > 0$, existem constantes $A_p, B_p > 0$ tais que

$$A_p \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in D_n} \left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

para toda sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^n$ e todo inteiro positivo n. A contrapartida natural para a média $\frac{1}{2^n}\sum\limits_{\varepsilon\in D_n}\left|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j a_j\right|$ na estrutura complexa é

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=1}^n a_j e^{it_j}\right| dt_1\cdots dt_n.$$

É bem sabido que neste novo contexto também temos uma desigualdade do tipo Khinchin, chamada desigualdade de Khinchin para variáveis de Steinhaus, a qual afirma que existem constantes $\widetilde{A_p}$ e $\widetilde{B_p}$ tais que

$$\widetilde{A_p}\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=1}^n a_j e^{it_j}\right|^p dt_1\cdots dt_n\right)^{\frac{1}{p}} \leq \widetilde{B_p}\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.1}$$

para todo inteiro positivo n e todos escalares $a_1,\ldots,a_n$. Para os nossos propósitos, estamos interessados no caso $p=1$ e apenas no lado esquerdo de (A.1). Em König (2014) foi provado que $\widetilde{A_1}=\sqrt{\pi}/2$.

A desigualdade (A.1) pode ser adaptada, por indução, para somas múltiplas como segue:

Teorema A.1 (Desigualdade múltipla de Khinchin para variáveis de Steinhaus) *Sejam $m,n_1,\ldots,n_m$ inteiros positivos e seja $(a_{i_1,\ldots,i_m})_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n_1,\ldots,n_m}$ uma matriz de escalares. Então*

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n_1,\ldots,n_m} |a_{j_1\ldots j_m}|^2\right)^{1/2} \tag{A.2}$$
$$\leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n_1+\cdots+n_m} \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n_1,\ldots,n_m} a_{j_1\ldots j_m} e^{it_{j_1}^{(1)}}\cdots e^{it_{j_m}^{(m)}}\right| dt_{j_1}^{(1)}\cdots dt_{j_m}^{(m)}.$$

A desigualdade acima desempenha um papel crucial para melhorar as estimativas das constantes na desigualdade de Bohnenblust–Hille para escalares complexos (ver [8]).

Por uma questão de simplicidade, vamos considerar

$$\mathbb{E}_m\left|\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n_1,\ldots,n_m} a_{j_1\ldots j_m}\varepsilon_{j_1}^{(1)}\cdots\varepsilon_{j_m}^{(m)}\right| = \tag{A.3}$$
$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n_1+\cdots+n_m} \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n_1,\ldots,n_m} a_{j_1\ldots j_m} e^{it_{j_1}^{(1)}}\cdot\ldots\cdot e^{it_{j_m}^{(m)}}\right| dt_{j_1}^{(1)}\ldots dt_{j_m}^{(m)}.$$

Abaixo, damos uma prova elementar para o Teorema A.1:

Demonstração: Vamos começar a prova por indução em m. O caso $m=1$ é exatamente a desigualdade de Khinchin para variáveis de Steinhaus. Suponha que, indutivamente, o resultado seja válido para $m-1$, então

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{(m-1)}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n_1,\ldots,n_m}|a_{i_1\ldots i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{(m-1)} \left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n_2,\ldots,n_m} |a_{i_1\ldots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.4}$$

$$\leq \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left(\mathbb{E}_{m-1} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n_2,\ldots,n_m} a_{i_1\ldots i_m} \varepsilon_{i_2}^{(2)} \cdots \varepsilon_{i_m}^{(m)} \right| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando a desigualdade de Minkowski para integrais, obtemos

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left(\mathbb{E}_{m-1} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n_2,\ldots,n_m} a_{i_1\ldots i_m} \varepsilon_{i_2}^{(2)} \cdots \varepsilon_{i_m}^{(m)} \right| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.5}$$

$$\leq \left[\mathbb{E}_{m-1} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n_2,\ldots,n_m} a_{i_1\ldots i_m} \varepsilon_{i_2}^{(2)} \cdots \varepsilon_{i_m}^{(m)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

De (A.4) e (A.5), temos

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{(m-1)} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n_2,\ldots,n_m} |a_{i_1\ldots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.6}$$

$$\leq \left[\mathbb{E}_{m-1} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n_2,\ldots,n_m} a_{i_1\ldots i_m} \varepsilon_{i_2}^{(2)} \cdots \varepsilon_{i_m}^{(m)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Agora, aplicando a desigualdade de Khinchin, obtemos

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n_2,\ldots,n_m} a_{i_1\ldots i_m} \varepsilon_{i_2}^{(2)} \cdots \varepsilon_{i_m}^{(m)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.7}$$

$$\leq \mathbb{E}_1 \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n_1,\ldots,n_m} a_{i_1\ldots i_m} \varepsilon_{i_1}^{(1)} \cdots \varepsilon_{i_m}^{(m)} \right|,$$

assim, por (A.6) e (A.7),

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{(m-1)} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n_2,\ldots,n_m} |a_{i_1\ldots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\mathbb{E}_{m-1} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n_2,\ldots,n_m} a_{i_1\ldots i_m} \varepsilon_{i_2}^{(2)} \cdots \varepsilon_{i_m}^{(m)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \mathbb{E}_{m-1} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n_2,\ldots,n_m} a_{i_1\ldots i_m} \varepsilon_{i_2}^{(2)} \cdots \varepsilon_{i_m}^{(m)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\mathbb{E}_{m-1}\left(\mathbb{E}_1\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n_1,\ldots,n_m} a_{i_1\ldots i_m}\varepsilon_{i_1}^{(1)}\cdots\varepsilon_{i_m}^{(m)}\right|\right)$$

e, pelo Teorema de Fubini, obtemos

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^m\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n_1,\ldots,n_m}|a_{i_1\ldots i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\mathbb{E}_m\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n_1,\ldots,n_m} a_{i_1\ldots i_m}\varepsilon_{i_1}^{(1)}\cdots\varepsilon_{i_m}^{(m)}\right|.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] N. Albuquerque, L. Rezende, Asymptotic estimates for unimodular multilinear forms with small norms on sequence spaces. Bull. Braz. Math. Soc. **52** (2021), 23–39.

[2] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino, J. Seoane-Sepúlveda, Optimal Hardy–Littlewood type inequalities for polynomials and multilinear operators. Israel J. Math. **211** (2016), no. 1, 197–220.

[3] R. Alencar, M. C. Matos, Some classes of multilinear mappings between Banach spaces. Publicaciones Departamento Análisis Matematico, Universidad Complutense Madrid 1989.

[4] N. Alon, J. Spencer, The Probabilistic Method. Wiley, 1992. (Second Edition, 2000, Third Edition 2008).

[5] G. Araújo, D. Pellegrino, A Gale– permutation-switching problem in higher dimensions. European J. Combin. **77** (2019), 17–30.

[6] G. Araújo, J. Santos, On the Maurey–Pisier and Dvoretzky–Rogers Theorems. Bull. Braz. Math. Soc. **51** (2020), 1–9.

[7] F. Bayart, Maximum modulus of random polynomials. Q. J. Math. **63** (2012), no. 1, 21–39.

[8] F. Bayart, D. Pellegrino, P. Rueda, On coincidence results for summing multilinear operators: interpolation, ℓ_1-spaces and cotype. Collect. Math. **71** (2020), no. 2, 301–318.

[9] F. Bayart, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, The Bohr radius of the n-dimensional polydisk is equivalent to $\sqrt{(\log n)/n}$. Adv. Math. **264** (2014), 726–746.

[10] G. Bennett, Schur multipliers. Duke Math. J. **44** (1977), no. 3, 603–639.

[11] G. Bennett, V. Goodman, C. M. Newman, Norms of random matrices. Pacific J. Math. **59** (1975), no. 2, 359–365.

[12] H. P. Boas, D. Khavinson, Bohr's power series theorem in several variables. Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 10, 2975–2979.

[13] H. P. Boas, Majorant series. Several complex variables (Seoul, 1998). J. Korean Math. Soc. **37** (2000), no. 2, 321–337.

[14] H. F. Bohnenblust, E. Hille, On absolute convergence of Dirichlet series. Ann. of Math. (2), **32** (1931), 600–622.

[15] T. Brown, J. Spencer, Minimization of ± 1 matrices under line shifts. Colloq. Math., **23** (1971), 165–171.

[16] R. A. Brualdi, S. A. Meyer, Gale–Berlekamp permutation-switching problem. European J. Combin. **44** (2015), part A, 43–56.

[17] J. Carlson, D. Stolarski, The correct solution to Berlekamp's switching game. Discrete Math. **287** (2004), 145–150.

[18] A. Defant, D. García, M. Maestre, Bohr's power series theorem and local Banach space theory. J. Reine Angew. Math. **557** (2003), 173–197.

[19] A. Defant, D. García, M. Maestre, Maximum moduli of unimodular polynomials. Satellite Conference on Infinite Dimensional Function Theory. J. Korean Math. Soc. **41**(1) (2004), 209–230.

[20] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators. Cambridge Stud. Adv. Math. **43** (1995).

[21] A. Dvoretzky, C. A. Rogers, Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **36** (1950), 192–197.

[22] P. C. Fishburn, N. J. A. Sloane, The solution to Berlekamp's switching game. Discrete Math. **74** (1989) 262–290.

[23] Y. Gordon, H. S. Witsenhausen, On extensions of the Gale-Berlekamp switching problem and constants of ℓ_p-spaces. Israel J. Math. **11** (1972), 216–229.

[24] A. Grothendieck, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, (French) [Summary of the metric theory of topological tensor products] Reprint of Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1953), 1–79. Resenhas **2** (1996), no. 4, 401–481.

[25] M. I. Kadets, V. M. Kadets, Series in Banach spaces. Conditional and unconditional convergence. Translated from the Russian by Andrei Iacob. Operator Theory: Advances and Applications, 94. Birkhauser Verlag, Basel, 1997. viii+156 pp. ISBN: 3-7643-5401-1.

[26] J. P. Kahane, Some random series of functions. 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 5, Cambridge University Press, Cambridge, (1985).

[27] A. Khintchine, Über dyadische brüche. (German) Math. Z. **18** (1923), no. 1, 109-116.

[28] H. König, On the best constants in the Khintchine inequality for Steinhaus variables. Israel J. Math. **203** (2014), 23–57.

[29] V. V. Kvaratskhelia, Unconditional convergence of functional series in problems of probability theory. Translated from Sovrem. Mat. Prilozh. no. 86 (2013). J. Math. Sci. (N.Y.) 200 (2014), no. 2, 143–294.

[30] S. Kwapien, Some remarks on (p,q)-absolutely summing operators in l_p-spaces, Studia Math. **29** (1968), 328–337.

[31] J. Lindenstrauss, A. Pelczyúski, Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications, Studia Math. **29** (1968), 275-324.

[32] J.E. Littlewood, On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. Q. J. Math, 1 (1), (1930), 164–174.

[33] M. S. Macphail, Absolute and unconditional convergence. Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 121–123.

[34] A. Mantero, A. Tonge, The Schur multiplication in tensor algebras. Studia Math. **68** (1980), no. 1, 1–24.

[35] M. Mastyło, R. Szwedek, Kahane–Salem–Zygmund polynomial inequalities via Rademacher processes. J. Funct. Anal. **272** (2017), no. 11, 4483–4512.

[36] M. C. Matos, Aplicações entre espaços de Banach que preservam convergência de séries, Minicuro, 50 Seminário Brasileiro de Análise, Novembro 2000.

[37] D. Mauldin (ed.), The Scottish Book. Birkhauser, Boston, 1981.

[38] D. Pellegrino, A. Raposo Jr., Constants of the Kahane–Salem–Zygmund inequality asymptotically bounded by 1. J. Funct. Anal. **282** (2022), 109293, 21pp.

[39] D. Pellegrino, A. Raposo Jr, Upper bounds for the constants of Bennett's inequality and the Gale-Berlekamp switching game, preprint (2022), 20 pp. arXiv:2111.00445v2.

[40] D. Pellegrino, D. Serrano-Rodríguez, J. Silva, On unimodular multilinear forms with small norms on sequence spaces. Linear Algebra Appl. **595** (2020) 24–32.

[41] D. Pellegrino, J. Silva, Macphail's theorem revisited, Arch. Math. 117 (2021) 647–656.

[42] D. Pellegrino, J. Silva, E. V. Teixeira, On a continuous Gale–Berlekamp switching game. An Acad. Bras. Ciênc. (2021), in press.

[43] D. Pellegrino, E. Teixeira, Towards sharp Bohnenblust-Hille constants. Commun. Contemp. Math. **20** (2018), no. 3, 1750029, 33 pp.

[44] A. Pietsch, History of Banach spaces and linear operators. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[45] R. M. Roth, K. Viswanathan, On the hardness of decoding the Gale-Berlekamp code. IEEE Trans. Inform. Theory. **54** (2008), no. 3, 1050–1060.

[46] D. Rutovitz, Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. Proc. Cambridge Philos. Soc. **58** (1962), 575–579.

[47] D. Rutovitz, Some parameters associated with finite-dimensional Banach spaces. J. London Math. Soc. **40** (1965), 241–255.

[48] K. B. Teixeira, Remarks on Hadamard matrices and a theorem of Macphail. Linear Algebra Appl. **640** (2022) 1–5.

[49] O. Toeplitz, Uber eine bei den Dirichletschen Reihen auftretende Aufgabe aus der Theorie der Potenzreihen vonunendlichvielen Veränderlichen, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göottingen, (1913), 417–432.

[50] R. Salem, A. Zygmund, Some properties of trigonometric series whose terms have random signs, Acta Math. **91** (1954), 245–301.

[51] J. Santos, T. Velanga, On the Bohnenblust-Hille inequality for multilinear forms. Results Math. **72** (2017), no. 1–2, 239–244.

[52] U. Schauz, Colorings and nowhere-zero flows of graphs in terms of Berlekamp's switching game. Electron. J. Combin. **18** (2011), no. 1, Paper 65, 33 pp.

[53] I. Singer, A proof of the Dvoretzky-Rogers theorem. Israel J. Math. (1964), no 2, 249–250.

[54] J. L. Walsh, A closed set of normal orthogonal functions. Amer. J. Math. **45** (1923), no. 1, 5–24.