Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Problemas Elípticos Não Lineares de Quarta Ordem e Aplicações a Sistemas Hamiltonianos

por

Maria do Desterro Azevedo da Silva

João Pessoa

2023

Problemas Elípticos Não Lineares de Quarta Ordem e Aplicações a Sistemas Hamiltonianos

por

Maria do Desterro Azevedo da Silva

sob orientação da

Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

e coorientação do

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática do CCEN/UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

João Pessoa

2023

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586p Silva, Maria do Desterro Azevedo da.
Problemas elípticos não lineares de quarta ordem e aplicações a sistemas hamiltonianos / Maria do Desterro Azevedo da Silva. - João Pessoa, 2023.
92 f.

Orientação: Elisandra de Fátima Gloss de Moraes.
Coorientação: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Equações elípticas não lineares. 2. Equações de quarta ordem. 3. Sistemas hamiltonianos. 4. Espaços de Orlicz. 5. Métodos variacionais. I. Moraes, Elisandra de Fátima Gloss de. II. Ribeiro, Bruno Henrique Carvalho. III. Título.

UFPB/BC CDU 517.9(043)

Elaborado por WALQUELINE DA SILVA ARAUJO - CRB-15/514

Maria do Desterro Azevedo da Silva

Problemas Elípticos Não Lineares de Quarta Ordem e Aplicações a Sistemas Hamiltonianos

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 27 de julho de 2023

Banca examinadora:

Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes (UFPB)
Orientadora

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro (UFPB)
Coorientador

Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho (UFG)

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (UFSCar)

Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto (UEMA)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo (UFPB)

João Pessoa

2023

Resumo

Nesta tese, é demonstrada a existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos não lineares de quarta ordem, com e sem parâmetro, definidos em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$. Esses problemas estão fundamentados em espaços de Orlicz e podem ser associados a sistemas hamiltonianos quando se utiliza o método de redução por inversão sobre eles. É relevante ressaltar que, para dimensões $N \geq 3$, a análise é realizada em espaços reflexivos, ao contrário da dimensão dois onde o espaço base não possui reflexividade.

Palavras-chave: Equações elípticas não lineares de quarta ordem; Sistemas hamiltonianos; Espaços de Orlicz; Métodos variacionais.

Abstract

In this thesis, the existence and multiplicity of solutions are demonstrated for fourth order nonlinear elliptic problems, with and without parameter, defined in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, with $N \geq 2$. These problems are based on Orlicz spaces and can be associated with Hamiltonian systems when the inversion reduction method is applied to them. It is relevant to note that, for dimensions $N \geq 3$, the analysis is conducted in reflexive spaces, unlike in dimension two where the base space lacks reflexivity.

Keywords: Nonlinear fourth order elliptic equations; Hamiltonian systems; Orlicz spaces; Variational methods.

Agradecimentos

Nas trajetórias da vida, há *soluções* a buscar.
Na tese que se revela, vitórias a alcançar.
Agradeço a orientação, sábia e diligente,
De Elisandra e Bruno, que me guiaram firmemente.

Elisandra, nessa jornada, com firmeza e doçura,
Além de paciência e zelo, foi uma bússola segura.
Na representatividade feminina, encanta com candura.
Sua presença inspira, é luz que perdura.

Aos membros da banca, respeito e gratidão,
Por avaliarem nossa pesquisa com dedicação.
Com questionamentos instigantes, o debate enriqueceu
E, assim, a luz do conhecimento se estendeu.

Aos familiares e amigos, meu afeto profundo.
A Mário, meu amor, o elo mais fecundo,
Agradeço o apoio, sempre sem cessar,
Nos múltiplos desafios que me foi preciso enfrentar.

Ao fim destas palavras, cheias de apreço e emoção,
Um brinde a todos que compartilharam desta celebração.
Irei continuar a jornada em busca do saber,
Descobrindo na *existência* a beleza de viver.

Sumário

Introdução 1

1 Sobre os Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev **11**

1.1 Espaços de Orlicz 11

1.2 Espaços de Orlicz-Sobolev 14

1.3 Imersões em Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev 15

1.4 Resultados Auxiliares 17

2 Existência e Multiplicidade de Soluções Fracas para Problemas de Quarta Ordem com e sem a Condição de Ambrosetti-Rabinowitz **23**

2.1 Preliminares, Hipóteses e Principais Teoremas 24

2.2 Estrutura Variacional 29

2.3 Existência e Multiplicidade de Soluções Fracas com a Condição de Ambrosetti–Rabinowitz 31

2.3.1 A Geometria do Passo da Montanha 31

2.3.2 A Condição de Compacidade de Palais-Smale 34

2.3.3 Prova Completa dos Teorema 2.1.5 e 2.1.6 36

2.4 Existência de Solução Fraca sem a Condição de Ambrosetti–Rabinowitz 37

2.4.1 A Condição de Compacidade de Cerami 38

2.4.2 Prova Completa do Teorema 2.1.7 41

2.5 Análise do Operador ϕ-biharmônico em Comparação com outras Pesquisas 42

3 Existência de Solução Fraca para Problemas de Quarta Ordem com Parâmetro **46**

3.1 Preliminares e Estrutura Variacional 47

3.2 Existência de Solução Fraca 50

4 Existência e Multiplicidade de Soluções para Sistemas Hamiltonianos em Dimensão Dois com Não Linearidades do Tipo Exponencial 55

4.1 Preliminares, Hipóteses e Principais Teoremas 56

4.2 Estrutura Variacional 61

4.3 Existência de Solução Fraca para o Problema de Quarta Ordem 63

4.3.1 A Geometria do Funcional Associado 63

4.3.2 A Condição de Compacidade de Cerami 66

4.3.3 Prova Completo dos Teoremas 4.1.2 e 4.1.3 73

4.4 Multiplicidade de Soluções Fracas 74

4.5 Regularidade da Solução Fraca 76

Referências Bibliográficas 78

Notação e Terminologia

Nesta tese, são empregadas as seguintes notações e terminologias:

A^c complemento do conjunto A;

X^* espaço dual topológico de X;

$B_X(x_0, r) = \{x \in X; \|x - x_0\|_X < r\}$. Quando $X = \mathbb{R}^N$, $B_X(x_0, r)$ é denotado por $B(x_0, r)$;

$B_X[x_0, r] = \{x \in X; \|x - x_0\|_X \leq r\}$. Quando $X = \mathbb{R}^N$, $B_X[x_0, r]$ é denotado por $B[x_0, r]$;

$\operatorname{dist}(x_0, A) = \inf\{\|x_0 - y\|; y \in A\}$, em que $\|\cdot\|$ é uma norma arbitrária;

$[f = \beta] = \{x; f(x) = \beta\}$, com $\beta \in \mathbb{R}$, podendo ser aplicada também para desigualdades, estritas ou não;

$\operatorname{supp}(f)$ suporte de um função f;

$\overline{A}^{\|\cdot\|}$ fecho do conjunto A com relação à norma $\|\cdot\|$;

$|A|$ medida de Lebesgue de um conjunto mensurável A;

$|\cdot|$ norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$;

$\widetilde{p} = \dfrac{p}{p-1}$, com $p > 1$;

q.t.p. quase todo ponto;

multi-índice vetor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, no qual α_i é um número inteiro não negativo para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$. O valor absoluto de um multi-índice α é definido por $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$;

$\mathcal{X}_A$ função característica do conjunto A;

sgn função sinal de $\mathbb{R}$;

$t_n^{\pm} \nearrow t$ $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de números reais positivos ou negativos que converge para o valor t;

$\to$, $\rightharpoonup$ convergência forte e fraca, respectivamente;

$f = o(g)$ quando $t \to t_0$, se $\lim\limits_{t\to t_0} \left|\dfrac{f(t)}{g(t)}\right| = 0$;

$f(t) = O(g(t))$ quando $t \to \infty$, se $\limsup\limits_{t\to\infty} \left|\dfrac{f(t)}{g(t)}\right| < \infty$;

$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$, com multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$;

$\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ laplaciano de u;

$C^1(X, \mathbb{R})$ espaços das funções continuamente diferenciáveis em X segundo a definição de Fréchet;

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$;

$\partial\Omega$ fronteira de Ω;

$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ é mensurável}; \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty\right\}$, com $p \in [1, \infty)$;

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ é mensurável}; \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty \text{ q.t.p. em } \Omega\}$;

$C_c(\Omega)$ espaço das funções contínuas com suporte compacto em Ω;

$C_0\left(\overline{\Omega}\right)$ espaço das funções contínuas em $\overline{\Omega}$ que se anulam sobre $\partial\Omega$;

$C^n(\Omega)$ espaço das funções n vezes continuamente diferenciáveis em Ω, com $n \geq 0$;

$C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{n\geq 1} C^n(\Omega)$;

$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$;

$C^n\left(\overline{\Omega}\right)$ espaço das funções em $C^n(\Omega)$ tais que para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq n$, a função $x \mapsto D^\alpha u(x)$ admite extensão contínua para $\overline{\Omega}$;

$C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{u \in C\left(\overline{\Omega}\right); \sup\limits_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty\right\}$, com $0 < \gamma \leq 1$;

$C^{n,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{u \in C^n\left(\overline{\Omega}\right); D^\alpha u \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| = n\right\}$;

$H_0^1(\Omega), H^2(\Omega), W^{n,p}(\Omega)$ espaços de Sobolev.

Introdução

Os problemas não lineares de quarta ordem desempenham um papel fundamental no estudo de fenômenos físicos e matemáticos complexos. Sua estreita conexão com sistemas hamiltonianos, por meio do método de redução por inversão, reforça ainda mais sua importância, especialmente quando considera-se as diversas aplicações desses sistemas em diferentes áreas. Nesse contexto, esta tese dedica-se à investigação de problemas não lineares de quarta ordem, com e sem parâmetro, fundamentados em espaços de Orlicz. Além disso, busca-se aprimorar os conhecimentos e obter soluções para um conjunto particular de sistemas hamiltonianos a partir do problema de quarta ordem correspondente.

Esta pesquisa concentra-se em problemas de quarta ordem com condição de fronteira de Navier da forma

$$\begin{cases} \Delta\left(\phi(\Delta u)\right) = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

no qual $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, é um conjunto aberto e limitado com fronteira suave, e a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a derivada de uma $\mathcal{N}$-função Φ que define o espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$. O operador $\Delta(\phi(\Delta(\cdot)))$ é denominado ϕ-biharmônico. Além disso, nesta pesquisa, pretende-se introduzir um parâmetro positivo, denotado por λ, na primeira expressão de (1) e explorar esse cenário.

Ao longo dos anos, a literatura tem sido enriquecida por diversas variantes de operadores de quarta ordem, merecendo destaque os operadores do tipo Leray-Lions, assim nomeados em homenagem aos matemáticos que os introduziram, conforme documentado em [41]. Certos operadores de quarta ordem do tipo Leray-Lions são definidos por $\Delta(\mathfrak{a}(x, \Delta(\cdot)))$, em que $N \geq 1$ e $\mathfrak{a} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory

que cumpre algumas hipóteses técnicas. É recomendado consultar, por exemplo, [9, 38, 44], nos quais é possível observar uma característica notável desses operadores: a capacidade de lidar com diversas classes de operadores do tipo potência, variáveis ou não, fundamentados nos espaços de Lebesgue generalizados. Um exemplo de tais classes é a dos operadores $p(\cdot)$-biharmônicos, amplamente discutido na literatura, veja [5, 7, 10, 28, 39] e suas referências. Nesse contexto, é relevante salientar que as condições requeridas para a função $\mathfrak{a}$ não incluem a classe de problemas em foco nesta tese.

Em particular, a investigação de diversos problemas de quarta ordem com operadores do tipo potência é motivada pela aplicação do método de redução por inversão em sistemas hamiltonianos, como discutido em [16, 24, 26, 27, 31, 36]. O uso do método de inversão, cujas raízes remontam, pelo menos, à pesquisa de P.-L. Lions [42], destaca-se devido à sua capacidade de estabelecer uma correspondência entre o sistema hamiltoniano original e um problema escalar de quarta ordem. Formalmente, considerando o sistema hamiltoniano dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = g(v) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

em que, por exemplo, g seja uma função invertível e $g(0) = 0$, o método de inversão consiste em isolar a função v, escrevendo $v = g^{-1}(-\Delta u)$, e substituir essa expressão na segunda equação do sistema. Isso resulta no seguinte problema de quarta ordem com condições de fronteira de Navier:

$$\begin{cases} -\Delta\left(g^{-1}(-\Delta u)\right) = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma estrutura natural para o sistema (2) são os espaços de Sobolev, que fornecem, na maioria dos casos, uma resposta adequada sobre o "crescimento máximo" de f e g, de forma que o problema possa ser tratado variacionalmente. Em especial, quando $N \geq 3$, $g(t) = \operatorname{sgn}(t)|t|^p$ e $f(t) = O\left(|t|^q\right)$ quando $t \to \infty$, com $p, q > 0$, é bem estabelecido desde os anos 90' que o sistema (2) pode ser abordado por meio de métodos variacionais quando o par (p, q) estiver abaixo da chamada "hipérbole crítica". Essa hipérbole é dada por

$$\frac{1}{r+1} + \frac{1}{s+1} = 1 - \frac{2}{N}. \tag{3}$$

Para obter informações mais detalhadas e aprofundadas, é altamente recomendado consultar [22, 23, 37].

Em pesquisas recentes, fundamentadas em espaços de Sobolev, o uso do método de redução por inversão tem se destacado como uma abordagem promissora na avaliação de sistemas hamiltonianos diversos. Dentre elas, nesta tese é dado destaque às pesquisas em [26, 36], publicadas em 2021 e 2023, respectivamente. Em [26], utilizando o método de inversão, J. M. do Ó et al. (2021) asseguraram a existência de solução para (2) quando $g(t) = \operatorname{sgn}(t)|t|^p$ com $p = 2/(N-2)$, ou seja, a não linearidade possui crescimento polinomial sobre a assíntota da hipérbole crítica, enquanto que f possui crescimento exponencial crítico ou subcrítico. Até então, em [49] (publicado em 2006), apenas havia sido estabelecido que esse problema específico poderia ser abordado por meio de técnicas variacionais quando $N \geq 3$. Além disso, quando $N = 3$ e a não linearidade f possui um crescimento subcrítico relacionado ao comportamento exponencial, foi inferida a existência de solução usando o método direto.

No estudo conduzido por A. Guimarães e E. M. dos Santos em [36], inspirados pelos resultados clássicos de H. Brézis e L. Nirenberg em [11], foram exploradas perturbações de ordem inferior do sistema crítico com respeito à hipérbole dada em (3). Aplicando o método de inversão, eles encontraram uma solução positiva em dimensões $N \geq 4$. No entanto, na dimensão crítica $N = 3$, identificaram um fenômeno novo que não havia sido observado em problemas escalares. Especificamente, há partes na hipérbole crítica onde existem soluções para todas as perturbações homogêneas de grau 1 ou superlinear subcrítica, e partes onde não se têm soluções para algumas dessas perturbações. Além das pesquisas citadas, utilizando também o método de inversão, esta tese destaca um avanço no estudo de sistemas hamiltonianos em dimensão dois quando uma das não linearidades é do tipo exponencial.

Embora aparentemente menos frequentes, também são investigados problemas de quarta ordem associados a sistemas hamiltonianos e apoiados em espaços de Orlicz, como abordado em [16, 31]. Ao lidar com funções que não se enquadram exclusivamente nas restrições das funções de Lebesgue, os espaços de Orlicz assumem uma importância significativa, pois ampliam o escopo de análise das funções, englobando uma variedade mais abrangente de comportamentos do que aqueles representados apenas por potências puras. Vale ressaltar que as pesquisas sobre equações de segunda ordem envolvendo o

operador ϕ-laplaciano, dado por $\Delta_\phi u := \operatorname{div}\left(\frac{\phi(|\nabla(u)|)}{|\nabla(u)|}\nabla(u)\right)$, em que $\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)\, ds$ é uma $\mathcal{N}$-função, têm sido amplamente abordadas na literatura. Alguns estudos relevantes desse cenário incluem as referências [4, 17, 18, 32, 33], além de outros artigos mencionados nessas publicações.

Com o intuito de compreender e explorar novos aspectos e fenômenos relacionados a problemas de quarta ordem apoiados em espaços de Orlicz, esta pesquisa se dedica à investigação do problema (1), com e sem parâmetro, em que a função ϕ satisfaz:

(ϕ_1) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, crescente e contínua, $\phi(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$.

A hipótese (ϕ_1), em particular, é suficiente para estabelecer que ϕ é a derivada de uma $\mathcal{N}$-função, como pode ser confirmado em [47]. Contudo, para estabelecer uma estrutura adequada aos espaços de Orlicz de interesse, também são exigidas outras hipóteses. Nesse sentido, é fundamental ter um amplo conhecimento desses espaços, o que justifica a atenção especial dedicada à sua explanação no primeiro capítulo desta tese.

No Capítulo 1, são apresentados os espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev, onde são exploradas diversas propriedades e resultados fundamentais desses espaços. Essa análise desempenha um papel crucial nas argumentações desenvolvidas nos capítulos subsequentes, fornecendo uma base sólida para as discussões posteriores.

A fim de assegurar uma apresentação clara e coerente com a estrutura dos capítulos desta tese, a discussão a seguir é organizada em duas partes distintas: o caso de dimensão dois e o caso de dimensões superiores. Devido à complexidade da pesquisa em cenários de dimensão dois, especialmente considerando que o espaço de Orlicz associado não é reflexivo, a abordagem inicial foca em dimensões superiores, na qual a reflexividade está presente.

No Capítulo 2, considerando $N \geq 3$ e inspirados em [16, 31], além da hipótese (ϕ_1), também assume-se que

(ϕ_2) $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dada por $\Phi(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} \phi(s)\, ds$, satisfaz

$$1 < l_\phi := \inf_{s>0} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} \leq \sup_{s>0} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} =: m_\phi < \frac{N}{2}.$$

Essa hipótese assegura, em particular, a reflexividade do espaço reduzido de Orlicz-Sobolev apropriado para a abordagem variacional de (1). Em [31], além de exigir (ϕ_1)

e (ϕ_2), adicionalmente, também é suposto que $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ e que

$$0 < \inf_{s>0} \frac{s\phi'(s)}{\phi(s)} \leq \sup_{s>0} \frac{s\phi'(s)}{\phi(s)} < \infty,$$

permitindo inferir que $1 < l_\phi \leq m_\phi < \infty$. Dispensar esses requisitos adicionais exigidos em [31] é uma das melhorias a serem destacadas ao concluir a existência de uma solução para (1) nesta tese.

Ao associar um sistema hamiltoniano ao problema de quarta ordem (1), também observa-se uma diferença em relação a [16], onde se requer que tanto f quanto g, presentes no sistema, sejam funções ímpares, invertíveis e derivadas de $\mathcal{N}$-funções. No entanto, nesta tese, adota-se uma abordagem parcialmente distinta, exigido-se que apenas g possua tais características. Quanto a f, são impostas restrições em relação ao seu comportamento na origem e crescimento no infinito, expressas nas seguintes hipóteses:

(AR) Existem constantes $\theta > m_\phi$ e $t_0 > 0$ tais que

$$0 < \theta F(t) \leq tf(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| > t_0,$$

para $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\,ds$;

(f_0) $f(t) = o\left(|t|^{m_\phi - 1}\right)$ quando $t \to 0$;

(f_1) existem uma constante $C > 0$ e uma $\mathcal{N}$-função $\Psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dada por

$$\Psi(t) = \int_0^{|t|} \psi(s)\,ds,$$

tais que

$$|f(t)| \leq C[1 + \psi(|t|)], \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

com $\Psi \prec\prec Q_2$, na qual Q_2 é a $\mathcal{N}$-função limite que assegura a imersão compacta $W^2 L_\Phi(\Omega) \cap W_0^1 L_\Phi(\Omega) \hookrightarrow L_\Psi(\Omega)$, e tem-se

(ψ_1) $\quad 1 < l_\psi := \displaystyle\inf_{t>0} \frac{t\psi(t)}{\Psi(t)} \leq \sup_{t>0} \frac{t\psi(t)}{\Psi(t)} =: m_\psi < \infty.$

Dadas as hipóteses sobre ϕ e f mencionadas anteriormente, a existência de uma solução não trivial para (1), no contexto de pontos críticos, é estabelecida no Capítulo 2. O desenvolvimento desse resultado, que é apresentado a seguir, é alcançado por meio da aplicação do teorema abstrato do Passo da Montanha.

Teorema 0.0.1 (Teorema 2.1.5) *Assuma* (ϕ_1) *e* (ϕ_2)*, e que* $f \in C(\mathbb{R})$ *atenda às condições* (AR)*,* (f_0) *e* (f_1)*, com* $l_\psi > m_\phi$*. Então, existe pelo menos uma solução fraca não trivial para o problema* (1)*.*

Ao adicionar a restrição de que f seja uma função ímpar às hipóteses desse teorema, utilizando o Teorema do Passo da Montanha Simétrico, é possível concluir que existem infinitas soluções fracas.

O principal papel da hipótese (AR), chamada condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz, é assegurar a compacidade de Palais-Smale. No entanto, diferentemente do que é abordado em [31] e influenciado pelas análises em [13, 45], esta pesquisa também explora condições mais amplas que podem ser impostas à função f em relação ao seu comportamento no infinito, como é detalhado a seguir.

(f_A) Existe uma $\mathcal{N}$-função Γ, dada por $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} \gamma(s)\, ds$, tal que

(γ_1) $\quad \dfrac{N}{2l_\phi} < l_\gamma := \inf_{t>0} \dfrac{t\gamma(t)}{\Gamma(t)} \leq \sup_{t>0} \dfrac{t\gamma(t)}{\Gamma(t)} =: m_\gamma < \infty$

e

$$\Gamma\left(\frac{F(t)}{|t|^{l_\phi}}\right) \leq \overline{C}\,\overline{F}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| \geq R, \tag{4}$$

em que $\overline{C}$ e R são constantes positivas, e

$$\overline{F}(t) := tf(t) - m_\phi F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

(f_B) $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{\operatorname{sgn}(t) f(t)}{|t|^{m_\phi - 1}} = \infty.$

Ao substituir a condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz por essas hipóteses, também se assegura, por meio de uma versão do Teorema do Passo da Montanha, a existência de solução fraca para (1).

No Capítulo 3, é introduzido um parâmetro real positivo λ à equação (1), resultando no seguinte problema de quarta ordem:

$$\begin{cases} -\Delta\left(\phi(-\Delta u)\right) = \lambda f(u) & \text{em } \Omega, \\ \qquad u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

em que ϕ cumpre as condições (ϕ_1) e (ϕ_2). Em [24], inspirados pelo método de inversão aplicado ao sistema hamiltoniano (2) e fundamentados nos espaços de Sobolev,

investiga-se o problema de quarta ordem quando g é assintoticamente uma potência pura. Diferentemente, a pesquisa conduzida nesta tese, fundamentada nos espaços de Orlicz-Sobolev, permite a investigação de não linearidades mais abrangentes, pois considera que

$$\widetilde{\Phi}(1)\min\left\{t^{\frac{1}{l_\phi-1}},,t^{\frac{1}{m_\phi-1}},\right\}\leq g(t)\leq\frac{l_\phi}{l_\phi-1}\widetilde{\Phi}(1)\max\left\{t^{\frac{1}{l_\phi-1}},t^{\frac{1}{m_\phi-1}},\right\},\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Apesar de apresentar semelhanças com o problema de quarta ordem sem parâmetro, discutido no Capítulo 2, a existência de solução para (5) é estabelecida por meio de teoremas abstratos de pontos críticos recentemente estabelecidos por B. Ricerri e G. Bonanno. Com esse propósito, existem duas combinações de hipóteses para a função f a serem consideradas: (AR) e (f_1), ou a combinação de (f_1) e

(f_2) $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{\Phi(t)}=\infty.$

Utilizando um resultado de B. Ricerri (ver [48, Teorema 6]), demonstra-se o seguinte teorema:

Teorema 0.0.2 (Teorema 3.1.2) *Assuma (ϕ_1), (ϕ_2) e que $f\in C(\mathbb{R})$ atenda às condições (AR) e (f_1). Então, para cada $r>0$, existe uma constante positiva $\Lambda(r)$ tal que o problema* (3.1) *admite pelo menos duas soluções fracas para cada $\lambda\in(0,\Lambda(r))$, em que uma delas tem norma estritamente menor que* $\max\left\{r^{\frac{1}{l_\phi}},r^{\frac{1}{m_\phi}}\right\}$.

Ao impor a condição (f_2) em vez de (AR), é possível inferir, a partir do Teorema 2.3 de G. Bonanno em [8], a existência de, pelo menos, uma solução fraca não trivial para (3.1). Essa afirmação é formalizada no Teorema 3.1.3.

No Capítulo 4, motivado pelas discussões anteriores, é aplicado o método de inversão para avaliar o sistema hamiltoniano

$$\begin{cases}-\Delta v=f(u) & \text{em }\Omega,\\ -\Delta u=g(v) & \text{em }\Omega,\\ u=v=0 & \text{sobre }\partial\Omega,\end{cases}\tag{6}$$

em que $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e limitado, e uma das não linearidades, por exemplo g, apresenta crescimento assintótico exponencial. Recentemente, em 2021, os autores em [26] identificaram um crescimento limitante do tipo "duplo exponencial" para a função f, o qual é crucial para aplicar a técnica empregada por eles na obtenção

de soluções de (6). A abordagem adotada em [26] envolve o produto direto de espaços de Orlicz-Sobolev, e as condições de crescimento impostas a f decorrem dos teoremas de imersão aplicados aos espaços de Orlicz-Sobolev estabelecidos em [15].

Diferentemente de [26], nesta tese, o sistema (6) é reduzido inicialmente a um problema escalar de quarta ordem semelhante a (1). Em seguida, com o intuito de apoiar-se nos espaços de Orlicz, é apresentada uma função "modelo" dada por $g(t) = \operatorname{sng}(t)e^{|t|} - 1$, cuja inversa, denotada por $m = g^{-1}$, satisfaz a condição (ϕ_1). Para lidar com diferentes $\mathcal{N}$-funções equivalentes a $M(t) = \int_0^{|t|} m(s)\,ds$, são requeridas as seguintes hipóteses, além de (ϕ_1):

$\left(\widehat{\phi_2}\right)$ existem constantes positivas a e b tais que, para todo $t > 0$,

$$\Phi(t) \leq M(at) \quad \text{e} \quad M(t) \leq \Phi(bt);$$

(ϕ_3) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t\phi(t)}{\Phi(t)} = 1.$

A hipótese $\left(\widehat{\phi_2}\right)$ implica que

$$1 = \inf_{s>0} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} < \sup_{s>0} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} =: m_\phi < \infty$$

e, além disso, que o espaço de Orlicz-Sobolev associado à $\mathcal{N}$-função Φ não é reflexivo. No entanto, a imposição de $\left(\widehat{\phi_2}\right)$ assegura que o espaço de funções reduzido, escolhido adequadamente, está imerso em $L^\infty(\Omega)$. Isso flexibiliza as condições de crescimento exigidas em f para a utilização de métodos variacionais. Essa melhoria é especialmente relevante e algo que não se percebe em dimensões superiores, pois não há distinção nas restrições de crescimento ao se aplicar uma abordagem direta com produtos de espaços Orlicz-Sobolev (ou Lorentz-Sobolev), conforme descrito em [49], ou ao se utilizar o método de redução por inversão, conforme exposto em [25].

Ao contrário das hipóteses relacionadas à função ϕ, onde todas elas são requeridas, cada uma das proposições do Capítulo 4 considera que a não linearidade $f \in C(\mathbb{R})$ satisfaz um subconjunto específico das condições (f_0), (f_2) e

$\left(\widehat{AR}\right)$ existem constantes $\theta > 1$ e $t_0 > 0$ tais que

$$0 < \theta F(t) \leq tf(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| > t_0, ;$$

(f_3) $\max\limits_{t\in[-1,1]} F(t) \leq \dfrac{1}{|\Omega|}\min\left\{\dfrac{4\pi}{\hat{C}}, \left(\dfrac{4\pi}{\hat{C}}\right)^{m_\phi}\right\}$;

(f_4) $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{F(t)}{t} = 0.$

A constante positiva $\hat{C}$ é definida em maior detalhe ao longo do Capítulo 4.

Dependendo do conjunto de hipóteses assumidas sobre f, a existência de uma solução não trivial é estabelecida por meio do Teorema do Passo da Montanha ou pela combinação do princípio Variacional de Ekeland com a técnica de minimização local. O primeiro teorema estabelece que

Teorema 0.0.3 (Teorema 4.1.2) *Assuma* (ϕ_1), $\left(\widehat{\phi_2}\right)$ *e* (ϕ_3), *e que* $f \in C(\mathbb{R})$ *atenda às condições* $\left(\widehat{AR}\right)$ *e* (f_0). *Então, existe pelo menos uma solução fraca não trivial para o problema* (1).

Os demais teoremas estabelecem a existência de uma solução fraca sem a condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz. Isso ocorre ao impor as hipóteses (f_2) e (f_4), ou (f_2) e (f_3). No último caso, nenhuma condição no infinito é exigida sobre f.

A introdução de um parâmetro real positivo à primeira equação do sistema hamiltoniano também representa uma contribuição inovadora nesta tese, enriquecendo a discussão sobre a multiplicidade de soluções e distinguindo-a dos resultados mencionados anteriormente. Nessa situação, ao restringir o parâmetro a um valor suficientemente pequeno, a existência de solução é obtida apenas com a exigência de $\left(\widehat{AR}\right)$ ou (f_2), e a combinação dessas hipóteses resulta em múltiplas soluções.

Por fim, na Seção 4.5, é demonstrado que, sob hipóteses de regularidade mais fortes sobre f e ϕ, as soluções fracas do problema de quarta ordem são, de fato, soluções clássicas do sistema hamiltoniano. Isso é alcançado a partir de argumentos que seguem a mesma linha de raciocínio apresentada em [50]. Essa análise confirma a relação entre as soluções fracas e as soluções clássicas desejadas para o sistema, reforçando a eficácia do método utilizado.

Com o intuito de evitar recorrer constantemente à Introdução e manter a autonomia de cada capítulo, as hipóteses sobre ϕ e f são reiteradas em cada um deles. Também é necessário esclarecer que, ao longo do texto, a constante C, com ou sem subíndice, assume diferentes valores positivos. Além disso, ao escolher subsequências

de determinadas sequências, elas recebem novamente o rótulo da sequência original. Essa prática é adotada com o objetivo de reduzir notações desnecessárias.

Capítulo 1

Sobre os Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev

A abordagem adotada nos próximos capítulos fundamenta-se nos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev, sendo este o motivo pelo qual neste capítulo são apresentadas definições básicas e fundamentais, bem como informações cruciais sobre tais espaços. A fim de proporcionar uma leitura concisa, completa e independente deste texto, são omitidas as demonstrações de algumas proposições clássicas; no entanto, estas demonstrações podem ser encontradas em [33, 40, 43, 47, 51]. Além disso, implicitamente, ao longo do texto, considera-se que o conjunto Ω é aberto e limitado e, quando necessário, possui fronteira suave.

1.1 Espaços de Orlicz

Uma função $K : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ é dita uma $\mathcal{N}$-função quando é convexa, par, e atende às seguintes propriedades: $K(t) = 0$ se e somente se $t = 0$, e

$$\lim_{t\to 0} \frac{K(t)}{t} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{K(t)}{t} = \infty.$$

Cada $\mathcal{N}$-função K pode ser caracterizada pela seguinte expressão:

$$K(t) = \int_0^{|t|} k(s)\, ds,$$

em que $k : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uma função contínua à direita, não decrescente, que cumpre $k(s) = 0$ se e somente se $s = 0$, e $\lim_{s\to\infty} k(s) = \infty$. É possível definir

uma $\mathcal{N}$-função a partir de K, chamada $\mathcal{N}$-função complementar a K, dada por $\widetilde{K}(t) = \int_0^{|t|} k^{-1}(s), ds$, em que $k^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ caracteriza uma espécie de inversa à direita de k e é definida por

$$k^{-1}(s) = \sup \{t \in [0, \infty); k(t) \leq s\} .$$

Ao longo deste capítulo, a função K é sempre uma $\mathcal{N}$-função.

A classe de Orlicz de K, denotada por $\mathcal{L}_K(\Omega)$, é definida como o conjunto de todas as funções mensuráveis $w : \Omega \to \mathbb{R}$ para as quais $\displaystyle\int_\Omega K(w)\, dx < \infty$. Embora a classe de Orlicz não defina, em geral, um espaço vetorial, é amplamente conhecido que o conjunto

$$L_K(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ é mensurável}; \exists \alpha > 0 \text{ tal que } \int_\Omega K\left(\frac{u}{\alpha}\right) dx < \infty \right\},$$

chamado espaço de Orlicz, é o menor espaço vetorial que a contém. Para encurtar a notação, escreve-se $L_K = L_K(\Omega)$.

A aplicação $\| \cdot \|_{L_K} : L_K \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|u\|_{L_K} = \sup \left\{ \left| \int_\Omega uv\, dx \right| ; v \in L_{\widetilde{K}} \text{ e } \int_\Omega \widetilde{K}(v)\, dx \leq 1 \right\}, \quad u \in L_K,$$

estabelece uma norma em L_K, chamada de norma de Orlicz. O espaço $(L_K, \| \cdot \|_{L_K})$ é um espaço de Banach. Outra norma amplamente conhecida é a norma de Luxemburgo, definida como:

$$\|u\|_{L_{(K)}} = \inf \left\{ \alpha > 0; \int_\Omega K\left(\frac{u}{\alpha}\right) dx \leq 1 \right\}, \quad u \in L_K.$$

Essa norma é equivalente à norma de Orlicz, e essa equivalência é expressa pela seguinte relação:

$$\|u\|_{L_{(K)}} \leq \|u\|_{L_K} \leq 2\|u\|_{L_{(K)}}.$$

Uma propriedade fundamental de $\widetilde{K}$ é que o seu espaço de Orlicz, $L_{\widetilde{K}}$, se relaciona com L_K de maneira semelhante à interação dos espaços conjugados de Lebesgue $L^p(\Omega)$ e $L^q(\Omega)$, com $p, q > 1$ e $1/p + 1/q = 1$. Por exemplo, nos espaços de Orlicz surgem variações das desigualdades clássicas nos espaços de Sobolev, tais como a desigualdade de Young e a desigualdade de Hölder. A desigualdade de Young é estabelecida pela relação:

$$ts \leq K(t) + \widetilde{K}(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

e a igualdade é válida se $s = k(t)$, com $t > 0$. Além disso, para quaisquer $u \in L_K$ e $v \in L_{\widetilde{K}}$, tem-se $uv \in L^1(\Omega)$ e a seguinte estimativa é satisfeita:

$$\left| \int_\Omega uv \, dx \right| \leq \|u\|_{L_K} \|v\|_{L_{\widetilde{K}}},$$

conhecida como desigualdade de Hölder. Essas desigualdades desempenham um papel fundamental, permitindo, por exemplo, o controle de normas e a obtenção de resultados teóricos. Por exemplo, para ilustrar, ao se definir a função linear $H_v : L_K \to \mathbb{R}$ para cada $v \in L_{\widetilde{K}}$, com a expressão

$$H_v(u) = \int_\Omega uv \, dx, \tag{1.2}$$

conclui-se que $H_v \in (L_K)^*$.

Observação 1.1.1 *Seja $K : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definida por*

$$K(t) = \frac{|t|^p}{p},$$

com $p \in (1, \infty)$. Percebe-se que o espaço de Orlicz L_K é igual ao espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$, e a norma correspondente no espaço de Orlicz é dada por $\|\cdot\|_{L_{(K)}} = p^{-\frac{1}{p}} \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, em que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ é a norma usual em $L^p(\Omega)$.

Em geral, os espaços de Orlicz não são separáveis. Portanto, é de suma importância definir o espaço

$$E_K := \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L_{(K)}}}, \tag{1.3}$$

que corresponde ao fecho em L_K do conjunto de funções essencialmente limitadas em $\mathbb{R}$ usando a norma de Luxemburgo, conforme sugere a notação. É sabido que E_K é separável e é o maior espaço vetorial contido na classe de Orlicz $\mathcal{L}_K(\Omega)$, o que significa que

$$E_K \subset \mathcal{L}_K(\Omega) \subset L_K. \tag{1.4}$$

No entanto, sob condições específicas atendidas por algumas $\mathcal{N}$-funções, a inclusão reversa também é satisfeita, resultando na igualdade desses conjuntos. Essa condição é abordada a seguir. Em resumo, escreve-se $(E_K)^* = L_{\widetilde{K}}$.

Uma característica relevante que uma $\mathcal{N}$-função pode ou não possuir é a condição Δ_2. Uma $\mathcal{N}$-função K satisfaz a condição Δ_2 quando existem constantes $C_K > 0$ e $s_0 \geq 0$ tais que

$$K(2s) \leq C_K K(s), \quad \forall s \geq s_0.$$

No caso em que $s_0 = 0$, desejando-se ressaltar essa particularidade, a condição é denominada como Δ_2 global (ou globalmente Δ_2). Quando tanto K quanto $\widetilde{K}$ satisfazem a condição Δ_2, diz-se que K é Δ-regular (ou Δ-regular global). Além disso, esse é o caso se, e somente se,

$$1 < \liminf_{s\to\infty} \frac{sk(s)}{K(s)} \leq \limsup_{s\to\infty} \frac{sk(s)}{K(s)} < \infty.$$

Observação 1.1.2 *Dada uma $\mathcal{N}$-função K que satisfaz a condição Δ_2, existem constantes positivas C e r tais que*

$$K(s) \leq Cs^r,$$

para valores suficientemente grandes de s. Portanto, a função K cresce, no máximo, como uma função polinomial. No entanto, a recíproca desse fato não é verdadeira.

Existem várias proposições na literatura acerca dos espaços de Orlicz quando a $\mathcal{N}$-função satisfaz a condição Δ_2. Essas proposições são essenciais para a compreensão e análise das propriedades desses espaços. Por exemplo, é conhecido que o espaço $L^\infty(\Omega)$ é denso em L_K, o que implica que $L_K = \mathcal{L}_K(\Omega) = E_K$, se, e somente se, K satisfaz a condição Δ_2. Essa é a única situação em que L_K é um espaço separável. Outras proposições relevantes referem-se à convergência em norma e ao dual topológico, incluindo o fato de que $(L_K)^* = L_{\widetilde{K}}$ quando K satisfaz a condição Δ_2, e a seguinte equivalência de convergência para uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em L_K:

$$\|u_n\|_{L_K} \to 0 \iff \int_\Omega K(u_n)\,dx \to 0.$$

1.2 Espaços de Orlicz-Sobolev

Considerando que o espaço de Orlicz é uma generalização do espaço de Lebesgue, é natural estender essa abordagem para a definição do espaço de Orlicz-Sobolev. Nesse contexto, o espaço de Orlicz-Sobolev combina as propriedades do espaço de Orlicz com a noção de derivadas distribucionais presente no espaço de Sobolev. Sendo assim, o espaço vetorial de Orlicz-Sobolev $W^nL_K(\Omega)$, com $n \in \mathbb{N}$, consiste no conjunto das funções mensuráveis $u \in L_K$ cujas derivadas distribucionais $D^\alpha u$ pertencem a L_K para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, com $|\alpha| \leq n$. Para encurtar a notação, escreve-se $W^nL_K = W^nL_K(\Omega)$. Nesse espaço, uma das normas estabelecidas é dada por:

$$\|u\|_{W^nL_K} := \max_{0\leq|\alpha|\leq n} \|D^\alpha u\|_{L_K}.$$

O espaço $(W^n L_K, \|\cdot\|_{W^n L_K})$ é um espaço de Banach. Além disso, se a $\mathcal{N}$-função K satisfaz a condição Δ_2, o espaço $(W^n L_K, \|\cdot\|_{W^n L_K})$ torna-se separável, enquanto, quando K é Δ-regular, ele é reflexivo.

Assim como nos espaços de Sobolev ordinários, $W_0^1 L_K(\Omega)$ é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em relação à norma usual de $W^1 L_K$. O espaço $W_0^1 L_K(\Omega)$ também é um espaço de Banach. Por simplicidade, denota-se apenas $W_0^1 L_K$.

A partir dos espaços previamente citados, supondo que K seja Δ-regular global, considera-se $E = W^2 L_K \cap W_0^1 L_K$. De acordo com o Lema 4.1 em [16], é possível equipar o espaço E com a norma

$$\|u\|_E = \|\Delta u\|_{L_{(K)}}, \quad u \in E,$$

que é equivalente à norma usual em $W^2 L_K$. Os estudos dos próximos capítulos estão diretamente relacionados ao espaço $(E, \|\cdot\|_E)$, escolhido para atender às necessidades das equações.

1.3 Imersões em Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Nesta seção, são apresentadas algumas imersões dos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev, restringindo-se ao necessário para o escopo desta pesquisa. Essas imersões desempenham um papel fundamental na abordagem variacional das equações, pois impõem restrições de crescimento a funções específicas.

A primeira imersão a ser apresentada é a imersão contínua dos espaços de Orlicz em $L^1(\Omega)$, que é amplamente reconhecida. Antes de apresentar outras imersões, é necessário introduzir algumas definições ou estabelecer certas hipóteses. Sejam K_1 e K_2 duas $\mathcal{N}$-funções. Diz-se que K_1 domina K_2, o que é denotado por $K_2 \prec K_1$, quando existem constantes positivas α e s_0 tais que

$$K_2(s) \leq K_1(\alpha s), \quad \forall s \geq s_0.$$

Nessa situação, é válida a imersão contínua

$$L_{K_1} \hookrightarrow L_{K_2}.$$

Diz-se que K_1 e K_2 são equivalentes quando $K_2 \prec K_1$ e $K_1 \prec K_2$.

Uma noção mais forte também é considerada. Diz-se que K_2 cresce estritamente mais lentamente que K_1, o que é denotado por $K_2 \prec\prec K_1$, quando

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K_2(rt)}{K_1(t)} = 0, \quad \forall r > 0.$$

É evidente que se $K_2 \prec\prec K_1$, então $K_2 \prec K_1$.

Seja K uma $\mathcal{N}$-função que satisfaça as seguintes condições:

$$\int_0^1 \frac{K^{-1}(s)}{s^{\frac{N+1}{N}}}\, ds < \infty \tag{1.5}$$

e

$$\int_1^\infty \frac{K^{-1}(s)}{s^{\frac{N+1}{N}}}\, ds = \infty. \tag{1.6}$$

Nesse contexto, a função $Q^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por

$$Q^{-1}(t) \;=\; \int_0^t \frac{K^{-1}(s)}{s^{\frac{N+1}{N}}}\, ds, \quad t > 0, \tag{1.7}$$

é uma função bijetiva. Além disso, sua função inversa Q, estendida para toda a reta de forma que Q seja uma função par, é uma $\mathcal{N}$-função.

De posse da $\mathcal{N}$-função Q, ao impor as condições (1.5) e (1.6) sobre Q^{-1}, é possível definir a $\mathcal{N}$-função Q_2 a partir de $Q_1 := Q$. A função $Q_2^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é dada por

$$Q_2^{-1}(t) \;=\; \int_0^t \frac{Q_1^{-1}(s)}{s^{\frac{N+1}{N}}}\, ds, \quad t > 0. \tag{1.8}$$

Segundo [2, Teorema 8.43], se a $\mathcal{N}$-função é tal que $P \prec\prec Q_2$, então a imersão

$$W^2 L_K \hookrightarrow L_P$$

é compacta e a imersão

$$W^2 L_K \hookrightarrow L_{Q_2}$$

é contínua.

Observação 1.3.1 *Na literatura, é frequentemente utilizada a notação $Q = K_*$ devido à propriedade da $\mathcal{N}$-função K_* ser a função limite para obter a imersão compacta $W^1 L_K \hookrightarrow L_P$ quando a função $\mathcal{N}$-função P cresce estritamente mais lentamente que K_*. Para evitar confusões, opta-se por não usar essa notação ao definir Q_2 e lidar com a imersão compacta $W^2 L_K \hookrightarrow L_P$ quando $P \prec\prec Q_2$.*

1.4 Resultados Auxiliares

Nesta seção, são apresentadas e demonstradas algumas proposições relevantes relacionadas aos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev, as quais são amplamente utilizadas ao longo do texto. Se o leitor desejar uma análise mais detalhada dos argumentos a seguir, é recomendável consultar as referências mencionadas ao longo do texto.

Para maior simplicidade, o lema a seguir é uma síntese dos aspectos do Lema 1 em [35] e do Lema A.5 em [16] que são relevantes para esta discussão.

Lema 1.4.1 *Seja* $K : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *uma* $\mathcal{N}$*-função dada por* $K(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} k(s)\, ds$. *Considerando a extensão ímpar de* k *sobre* $\mathbb{R}$*, ou seja,* $k(t) = -k(-t)$ *para todo* $t < 0$*, tem-se:*

(i) o operador de Nemytskii $\mathfrak{N}_k : \mathcal{L}_K \to \mathcal{L}_{\widetilde{K}}$ *dado por* $\mathfrak{N}_k(v) = k \circ v$ *está bem definido quando* K *satisfaz a condição* Δ_2*;*

(ii) $\mathfrak{N}_k$ *preserva a limitação dos conjuntos, ou seja, transforma um conjunto limitado em* L_K *em outro conjunto limitado em* $L_{\widetilde{K}}$*, quando* K *satisfaz a condição* Δ_2*;*

(iii) $\mathfrak{N}_k$ *é contínuo quando* K *é* Δ*-regular.*

Parte dos próximos três lemas estão presentes em [33].

Lema 1.4.2 *Seja* $K : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *uma* $\mathcal{N}$*-função dada por* $K(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} k(s)\, ds$ *e tal que*

$$1 \leq l_k := \inf_{s>0} \frac{sk(s)}{K(s)} \leq \sup_{s>0} \frac{sk(s)}{K(s)} =: m_k < \infty. \tag{1.9}$$

Então,

$$\min\left\{s^{l_k}, s^{m_k}\right\} K(\alpha) \leq K(\alpha s) \leq \max\left\{s^{l_k}, s^{m_k}\right\} K(\alpha), \quad \alpha, s > 0, \tag{1.10}$$

e

$$\min\left\{\|u\|_{L_{(K)}}^{l_k}, \|u\|_{L_{(K)}}^{m_k}\right\} \leq \int_\Omega K(u)\, dx \leq \max\left\{\|u\|_{L_{(K)}}^{l_k}, \|u\|_{L_{(K)}}^{m_k}\right\}, \quad u \in L_K. \tag{1.11}$$

Demonstração. Ao aplicar, nessa ordem, as propriedades de monotonicidade da integral e da função logarítmica às desigualdades em (1.9), obtém-se imediatamente (1.10). Em seguida, usando novamente a monotonicidade da função logarítmica e, em sequência, a definição da norma de Luxemburgo em (1.10), conclui-se as desigualdades em (1.11). ∎

Lema 1.4.3 *Seja $\widetilde{K}$ a $\mathcal{N}$-função complementar à $\mathcal{N}$-função $K : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada por $K(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} k(s)\, ds$ e tal que*

$$1 < l_k := \inf_{s>0} \frac{sk(s)}{K(s)} \leq \sup_{s>0} \frac{sk(s)}{K(s)} =: m_k < \infty.$$

Então, definindo $\widetilde{p} := p/(p-1)$, com $p > 1$, tem-se

$$\min\left\{s^{\widetilde{l_k}}, s^{\widetilde{m_k}}\right\} \widetilde{K}(\alpha) \leq \widetilde{K}(\alpha s) \leq \max\left\{s^{\widetilde{l_k}}, s^{\widetilde{m_k}}\right\} \widetilde{K}(\alpha), \quad \alpha, s > 0,$$

e

$$\min\left\{\|u\|^{\widetilde{l_k}}_{L_{(\widetilde{K})}}, \|u\|^{\widetilde{m_k}}_{L_{(\widetilde{K})}}\right\} \leq \int_\Omega \widetilde{K}(u)\, dx \leq \max\left\{\|u\|^{\widetilde{l_k}}_{L_{(\widetilde{K})}}, \|u\|^{\widetilde{m_k}}_{L_{(\widetilde{K})}}\right\}, \quad u \in L_{\widetilde{K}}.$$

Demonstração. A fim de simplificar os argumentos a seguir, assume-se que k seja uma função crescente. Para obter mais detalhes sobre o caso em que k é não decrescente, recomenda-se consultar [43]. Dado que

$$l_k \leq \frac{sk(s)}{K(s)} \leq m_k, \quad s > 0,$$

para $s = k^{-1}(t)$, tem-se

$$l_k \leq \frac{tk^{-1}(t)}{K\left(k^{-1}(t)\right)} \leq m_k, \quad t > 0.$$

Logo,

$$l_k K\left(k^{-1}(t)\right) \leq tk^{-1}(t) \leq m_k K\left(k^{-1}(t)\right), \quad t > 0.$$

Ao utilizar a relação $tk^{-1}(t) = K\left(k^{-1}(t)\right) + \widetilde{K}(t)$ para todo $t > 0$, dada ao apresentar (1.1), obtém-se que

$$\frac{m_k}{m_k - 1} \leq \frac{tk^{-1}(t)}{\widetilde{K}(t)} \leq \frac{l_k}{l_k - 1}, \quad t > 0.$$

Por fim, ao aplicar o Lema 1.4.2, a demonstração desse lema é concluída. ∎

Com o propósito de simplificar os argumentos nos próximos capítulos, é dada uma versão do Lema 2.2 em [33] aplicada à $\mathcal{N}$-função Q_2 definida na seção anterior.

Lema 1.4.4 *Sejam $N \geq 3$ e $K : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dada por $K(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} k(s)\, ds$, uma $\mathcal{N}$-função na qual $k : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é crescente e tal que*

$$1 < l_k := \inf_{s>0} \frac{sk(s)}{K(s)} \leq \sup_{s>0} \frac{sk(s)}{K(s)} =: m_k < \frac{N}{2}.$$

Então,

$$\min\left\{s^{l_k^{**}}, s^{m_k^{**}}\right\} Q_2(\alpha) \leq Q_2(\alpha s) \leq \max\left\{s^{l_k^{**}}, s^{m_k^{**}}\right\} Q_2(\alpha), \quad \alpha, s > 0,$$

e

$$\max\left\{\|u\|_{L_{(Q_2)}}^{l_k^{**}}, \|u\|_{L_{(Q_2)}}^{m_k^{**}}\right\} \leq \int_\Omega Q_2(u)\,dx \leq \max\left\{\|u\|_{L_{(Q_2)}}^{l_k^{**}}, \|u\|_{L_{(Q_2)}}^{m_k^{**}}\right\}, \quad u \in L_{Q_2},$$

no qual $l_k^{**} := \dfrac{l_k N}{N - 2l_k}$ *e* $m_k^{**} := \dfrac{m_k N}{N - 2m_k}$.

Demonstração. Seja K^{-1} a função inversa de $K|_{[0,\infty)}$. De acordo com o Lema 1.4.2, sabe-se que

$$\min\left\{t^{l_k}, t^{m_k}\right\} K(\sigma) \leq K(\sigma t) \leq \max\left\{t^{l_k}, t^{m_k}\right\} K(\sigma), \quad \sigma, t > 0,$$

ou equivalentemente,

$$K\left(\min\left\{s^{\frac{1}{l_k}}, s^{\frac{1}{m_k}}\right\} K^{-1}(\alpha)\right) \leq \alpha s \leq K\left(\max\left\{s^{\frac{1}{l_k}}, s^{\frac{1}{m_k}}\right\} K^{-1}(\alpha)\right), \quad \alpha, s > 0.$$

Logo, é possível inferir que

$$\min\left\{s^{\frac{1}{l_k}}, s^{\frac{1}{m_k}}\right\} K^{-1}(\alpha) \leq K^{-1}(\alpha s) \leq \max\left\{s^{\frac{1}{l_k}}, s^{\frac{1}{m_k}}\right\} K^{-1}(\alpha), \quad \alpha, s > 0.$$

Dado que, em particular, $m_k < N$, torna-se factível definir Q^{-1} em (1.7). Uma análise mais minuciosa dessa questão encontra-se disponível em [43, 51]. Assim, a partir da definição de Q e da monotonicidade da integral, é sabido que

$$\min\left\{s^{\frac{l_k N}{N-l_k}}, s^{\frac{m_k N}{N-m_k}}\right\} Q(\alpha) \leq Q(\alpha s) \leq \max\left\{s^{\frac{l_k N}{N-l_k}}, s^{\frac{m_k N}{N-m_k}}\right\} Q(\alpha), \quad \alpha, s > 0.$$

Repetindo os argumentos anteriores, agora levando em consideração que $m_k < N/2$, pode-se definir Q_2 e estabelecer que

$$\min\left\{s^{\frac{l_k N}{N-2l_k}}, s^{\frac{m_k N}{N-2m_k}}\right\} Q_2(\alpha) \leq Q_2(\alpha s) \leq \max\left\{s^{\frac{l_k N}{N-2l_k}}, s^{\frac{m_k N}{N-2m_k}}\right\} Q_2(\alpha), \quad \alpha, s > 0.$$

Por último, a conclusão desse lema pode ser deduzida diretamente da monotonicidade da função logarítmica e da definição da norma de Luxemburgo em (1.10). ∎

Observação 1.4.5 *Por simplicidade, denota-se* $l^{**} = l_k^{**}$ *e* $m^{**} = m_k^{**}$. *Além disso, é relevante mencionar que essa escolha de notação é feita para evitar confusão com expoentes* $l^* := \frac{l_k N}{N-l_k}$ *e* $m^* := \frac{m_k N}{N-m_k}$, *comumente utilizados na literatura.*

A demonstração do próximo lema faz uso de alguns argumentos presentes no Lema 6 em [20].

Lema 1.4.6 *Sejam $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e crescente, e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e v uma coleção de funções mensuráveis de Ω em $\mathbb{R}$. Então, é válida a seguinte implicação em relação à convergência pontual quase sempre em Ω:*

$$[k(v_n(x)) - k(v(x))]\,[v_n(x) - v(x)] \to 0 \quad \Rightarrow \quad v_n(x) \to v(x).$$

Demonstração. A partir da suposição de

$$[k(v_n(x)) - k(v(x))]\,[v_n(x) - v(x)] \to 0 \tag{1.12}$$

quase sempre em Ω, sabe-se que existe um subconjunto $\Omega' \subset \Omega$ tal que $|\Omega - \Omega'| = 0$ e a convergência em (1.12) é válida para cada $x \in \Omega'$. Fixado $x \in \Omega'$, assume-se, por contradição, que $v_n(x) \not\to v(x)$. Assim, existem $\delta > 0$ e uma subsequência $\{v_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tais que

$$|v_{n_j}(x) - v(x)| \geq \delta.$$

Sejam $t_j(x) = \delta \left|v_{n_j}(x) - v(x)\right|^{-1}$ e $\eta_j(x) = t_j v_{n_j}(x) + (1 - t_j)v(x)$. Por simplicidade, para cada $j \in \mathbb{N}$, escreve-se apenas t_j, η_j e v_j. Em razão de

$$|\eta_j| \leq |\eta_j - v(x)| + |v(x)| = \delta + |v(x)|,$$

existe $\eta(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\eta_j \to \eta(x)$. Logo,

$$|\eta(x) - v(x)| = \lim_{j\to\infty} |\eta_j - v(x)| = \delta > 0,$$

o que implica que $\eta(x) \neq v(x)$. Dado que k é uma função crescente e $t_j \in (0, 1]$ para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}
[k(v_j(x)) - k(v(x))]\,[v_j(x) - v(x)] &= [k(v_j(x)) - k(\eta_j)]\,[v_j(x) - v(x)] \\
&\quad + [k(\eta_j) - k(v(x))]\,[v_j(x) - v(x)] \\
&\geq [k(\eta_j) - k(v(x))]\,[v_j(x) - v(x)] \\
&\geq [k(\eta_j) - k(v(x))]\,[\eta_j - v(x)] \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, usando (1.12), pode-se concluir que

$$\lim_{j\to 0} [k(\eta_j) - k(v(x))]\,[\eta_j - v(x)] = [k(\eta) - k(v(x))]\,[\eta(x) - v(x)] = 0.$$

No entanto, há uma contradição, pois k é uma função crescente e $\eta(x) \neq v(x)$. Consequentemente, $v_n(x) \to v(x)$ para todo $x \in \Omega'$. ∎

Lema 1.4.7 *Seja K uma $\mathcal{N}$-função globalmente Δ-regular dada por $K(t) = \int_0^{|t|} k(s)\,ds$. Assuma que a função k é crescente e contínua, e considere sua extensão ímpar para $\mathbb{R}$. Sejam $E := W^2L_K \cap W_0^1L_K$ e $\mathcal{G} : E \to E^*$ dada por*

$$\mathcal{G}(u)(v) = \int_\Omega k(\Delta u)\Delta v\,dx.$$

Então, $\mathcal{G}$ é do tipo S^+, ou seja, dadas uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e u em E tais que

$$u_n \rightharpoonup u \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} \mathcal{G}(u_n)(u_n - u) \leq 0,$$

tem-se $u_n \to u$ em E.

Demonstração. Sejam u e uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em E tais que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} \mathcal{G}(u_n)(u_n - u) \leq 0.$$

Em razão de $\mathcal{G}(u) \in E^*$, tem-se

$$\mathcal{G}(u)(u_n - u) \to 0. \tag{1.13}$$

Assim, em virtude da monotonicidade de k, obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega [k(\Delta u_n) - k(\Delta u)]\,(\Delta u_n - \Delta u)\,dx = \liminf_{n\to\infty} [\mathcal{G}(u_n) - \mathcal{G}(u)]\,(u_n - u) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} [\mathcal{G}(u_n) - \mathcal{G}(u)]\,(u_n - u) = \limsup_{n\to\infty} \mathcal{G}(u_n)(u_n - u) \leq 0. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} [\mathcal{G}(u_n) - \mathcal{G}(u)]\,(u_n - u) = 0. \tag{1.14}$$

Considerando uma subsequência arbitrária de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e a convergência em (1.14), pode-se afirmar que existe uma subsequência sua, que recebe o mesmo rótulo da sequência original, tal que

$$[k(\Delta u_n(x)) - k(\Delta u(x))]\,(\Delta u_n(x) - \Delta u(x)) \to 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

De acordo com o Lema 1.4.6, $\Delta u_n(x) \to \Delta u(x)$ quase sempre em Ω. No cenário da subsequência $\{\Delta u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em que as convergências anteriores são constatadas, é possível estabelecer a existência de uma subsequência da mesma de modo que $\Delta u_n \to \Delta u$ em L_K. Para alcançar esse resultado, é suficiente demonstrar que

$$\int_\Omega K(\Delta u_n - \Delta u)\,dx \to 0.$$

Essa convergência é assegurada pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. De fato, inicialmente, é imediato concluir que

$$K(\Delta u_n(x) - \Delta u(x)) \to 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \tag{1.15}$$

Além disso, sabe-se que $\widetilde{K}(k(t)) \leq K(2t) \leq C_K K(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente,

$$\widetilde{K}(k(\Delta u_n(x))) \leq C_K K(\Delta u_n(x)), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega. \tag{1.16}$$

A convergência $u_n \rightharpoonup u$ em E resulta que $\{\Delta u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em L_K. Assim, de acordo com o Lema 1.4.1, a sequência $\{k(\Delta u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L_{\widetilde{K}}$. Portanto, dado que o espaço $L_{\widetilde{K}}$ é reflexivo, existe $w \in L_{\widetilde{K}}$ tal que $k(\Delta u_n) \rightharpoonup w$ em $L_{\widetilde{K}}$. Pelo Lema de Mazur em [12], infere-se que $w = k(\Delta u)$ e, assim,

$$\int_\Omega k(\Delta u_n)\Delta u \, dx \to \int_\Omega k(\Delta u)\Delta u \, dx, \tag{1.17}$$

visto que $\Delta u \in L_K = \left(L_{\widetilde{K}}\right)^*$. Combinando as convergências (1.13), (1.14) e (1.17), tem-se

$$\int_\Omega k(\Delta u_n)\Delta u_n \, dx \to \int_\Omega k(\Delta u)\Delta u \, dx.$$

Pelo Lema de Brezis-Lieb, $k(\Delta u_n)\Delta u_n \to k(\Delta u)\Delta u$ em $L^1(\Omega)$. Logo, existe $h \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|k(\Delta u_n(x))\Delta u_n(x)| \leq h(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Finalmente, pode-se inferir que

$$\begin{aligned} K(\Delta u_n(x) - \Delta u(x)) &\leq K(2\max\{|\Delta u_n(x)|, |\Delta u(x)|\}) \\ &\leq C_K[\Delta u_n(x) k(\Delta u_n(x)) + K(\Delta u(x))] \\ &\leq C_K[h(x) + K(\Delta u(x))], \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

com $C_K[h + K(\Delta u)] \in L^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, tem-se

$$\int_\Omega K(\Delta u_n - \Delta u) \, dx \to 0.$$

Portanto, para qualquer subsequência da sequência original $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe uma subsequência sua tal que $u_n \to u$ em E. Consequentemente, a sequência original converge igualmente para u em E. ∎

Capítulo 2

Existência e Multiplicidade de Soluções Fracas para Problemas de Quarta Ordem com e sem a Condição de Ambrosetti-Rabinowitz

Neste capítulo, considere o problema com condição de fronteira de Navier

$$\begin{cases} \Delta\left(\phi(\Delta u)\right) = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

no qual $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$, é um conjunto aberto e limitado com fronteira suave, e a função ϕ é tal que

(ϕ_1) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, crescente e contínua, $\phi(0) = 0$ e $\lim\limits_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$.

Essa condição permite concluir, em particular, que ϕ é a derivada de uma $\mathcal{N}$-função. Além disso, assuma que

(ϕ_2) $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dada por $\Phi(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} \phi(s)\, ds$, satisfaz

$$1 < l_\phi := \inf_{s>0} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} \leq \sup_{s>0} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} =: m_\phi < \frac{N}{2}.$$

Sob as hipóteses (ϕ_1) e (ϕ_2), é adequado recorrer aos espaços Orlicz-Sobolev e adotar a abordagem variacional para analisar o problema de quarta ordem envolvendo o operador ϕ-biharmônico.

A seguir, são apresentados exemplos de funções que atendem às condições (ϕ_1) e (ϕ_2), com o intuito de familiarizar o leitor com algumas representações conhecidas. Variações sutis desses exemplos estão disponíveis em [51, 43], que incluem informações detalhadas não mencionadas neste capítulo por razões de brevidade. Esses exemplos são:

(i) $\Phi_1(t) = |t|^{p_0} + |t|^{p_1}$, com $1 < p_0 < p_1 < \frac{N}{2}$;

(ii) $\Phi_2(t) = (1 + t^2)^{\gamma} - 1$, com $\gamma \in \left(1, \frac{N}{2}\right)$;

(iii) $\Phi_3(t) = |t|^p \log(1 + |t|)$, com $1 < p < \frac{N-2}{2}$;

(iv) $\Phi_4(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} s^{1-\alpha} \left[\text{senh}^{-1}(s)\right]^{\beta} ds$, com $0 \leq \alpha \leq 1$ e $0 \leq \beta < \frac{N}{2} - 2 + \alpha$.

Neste capítulo, busca-se obter a existência e multiplicidade de soluções fracas para (2.1) por meio da aplicação de versões clássicas do Teorema do Passo da Montanha. Para isso, são utilizadas versões que contemplam tanto a condição de compacidade de Palais-Smale quanto a condição de Cerami.

Este capítulo é estruturado em quatro seções. Na primeira seção, é apresentado um conjunto de hipóteses sobre a não linearidade f, descreve-se o espaço adequado de funções e enunciam-se os principais teoremas a serem tratados. Na Seção 2.2, o funcional associado ao problema (2.1) é definido, e os teoremas abstratos a serem aplicados são mencionados. Nas duas seções seguintes, Seção 2.3 e 2.4, são discutidas as diferentes versões das características "geométricas" do Passo da Montanha e a condição de compacidade adequada a cada caso. Em seguida, é estabelecida a existência e multiplicidade de soluções fracas para (2.1). Na última seção, Seção 2.5, são realizadas comparações entre as hipóteses adotadas neste capítulo e aquelas empregadas em pesquisas relacionadas.

2.1 Preliminares, Hipóteses e Principais Teoremas

Cada um dos principais teoremas deste capítulo assume que a não linearidade f satisfaz um subconjunto específico das hipóteses a seguir, são elas:

(AR) existem constantes $\theta > m_\phi$ e $t_0 > 0$ tais que

$$0 < \theta F(t) \leq t f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| > t_0,$$

para $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$;

(f_0) $f(t) = o(|t|^{m_\phi - 1})$ quando $t \to 0$, no qual m_ϕ é dado em (ϕ_2);

(f_1) existem uma constante $C > 0$ e uma $\mathcal{N}$-função $\Psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dada por

$$\Psi(t) = \int_0^{|t|} \psi(s)\,ds,$$

tais que

$$|f(t)| \leq C[1 + \psi(|t|)], \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

com $\Psi \prec\prec Q_2$, para Q_2 definida de acordo com (1.8), e tem-se

(ψ_1) $1 < l_\psi := \inf_{t>0} \frac{t\psi(t)}{\Psi(t)} \leq \sup_{t>0} \frac{t\psi(t)}{\Psi(t)} =: m_\psi < \infty.$

Observação 2.1.1 *Para tratar simultaneamente das hipóteses (AR) e (f_1), é necessário que $m_\psi > m_\phi$. De fato, sabe-se que (AR) implica que*

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{F(t)}{|t|^{m_\phi}} = \infty$$

e, portanto,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C\left[|t| + \Psi(1)|t|^{m_\psi}\right]}{t^{m_\phi}} \geq \lim_{t\to\infty} \frac{C[|t| + \Psi(t)]}{t^{m_\phi}} \geq \lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t^{m_\phi}} = \infty.$$

Observação 2.1.2 *De acordo com os Lemas 1.4.2 e 1.4.4, sabe-se que*

$$\frac{\Psi(1)}{Q_2(r)} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{l^{**}-m_\psi}} \geq \lim_{t\to\infty} \frac{\Psi(t)}{Q_2(rt)} \geq \frac{\Psi(1)}{Q_2(r)} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{m^{**}-l_\psi}}. \tag{2.2}$$

Consequentemente, é possível inferir que a desigualdade $l_\psi < m^{**}$ está implícita em (ψ_1), pois, caso contrário, a $\mathcal{N}$-função Ψ não cresceria essencialmente mais lentamente que Q_2. Além disso, se é exigido que $m_\psi < l^{**}$, pode-se concluir que $\Psi \prec\prec Q_2$. Essa hipótese é considerada em [31], assim como em [13, 32], sendo estes últimos artigos dedicados à análise de equações de segunda ordem com o operador ϕ-laplaciano. Por outro lado, em [16] é introduzido

$$\overline{m}_\psi := \limsup_{t\to\infty} \frac{\log(\Psi(t))}{\log(t)},$$

e é estabelecida a relação $l_\psi \leq \overline{m}_\psi \leq m_\psi$. Ao supor que $\overline{m}_\psi < l^{**}$, também é possível inferir que $\Psi \prec\prec Q_2$. De fato, dado $0 < \varepsilon < l^{**} - \overline{m}_\psi$, existe $A > 0$ tal que

$$\frac{\log(\Psi(t))}{\log(t)} < \overline{m}_\psi + \varepsilon < l^{**}, \quad \forall t \geq A.$$

Portanto, $\Psi(t) \leq t^{\overline{m}_\psi+\varepsilon}$ *para todo* t *suficientemente grande. Dessa forma,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Psi(t)}{Q_2(rt)} \leq \frac{1}{Q_2(r)} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{l^{**}-(\overline{m}_\psi+\varepsilon)}} = 0, \quad \forall r > 0.$$

Diante disso, no contexto desta tese e à luz dessas afirmações, quando Ψ *não é uma potência pura, é possível contemplar cenários no quais* $m_\psi > l^{**}$ *ao mesmo tempo em que* $\Psi \prec\prec Q_2$. *Para ilustrar essa afirmação, a seguir, é avaliada a função* $\psi(t) = sgn(t)\left[\beta|t|^{\beta-1}\log(1+|t|) + |t|^\beta/(1+|t|)\right]$, *com* $1 < \beta < l^{**}$. *Essa função é a derivada da* $\mathcal{N}$*-função dada por*

$$\Psi(t) = |t|^\beta \log(1+|t|), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Inicialmente, observa-se que

$$\beta = \inf_{s>0} \frac{s\psi(s)}{\Psi(s)} < \sup_{s>0} \frac{s\psi(s)}{\Psi(s)} = \beta + 1.$$

Além disso, $\overline{m}_\psi = \beta$. *Logo, a partir do Lema 1.4.2, tem-se*

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\Psi(t)}{Q_2(rt)} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{t^\beta \log(1+t)}{Q_2(r)t^{l^{**}}} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{t^\beta \log(2t)}{Q_2(r)t^{l^{**}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(l^{**}-\beta)Q_2(r)t^{l^{**}-\beta}} = 0.$$

Ou seja, escolhendo $\beta > 1$ *no intervalo* $(l^{**}-1, l^{**})$, *verifica-se que* $\Psi \prec\prec Q_2$ *com* $m_\psi > l^{**}$.

A hipótese (AR), chamada condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz, resulta na superquadraticidade no infinito quando $m_\phi \geq 2$ e desempenha um papel fundamental na inferência da compacidade de Palais-Smale (ou Cerami). No entanto, é importante destacar que existem diversas funções que são superquadráticas no infinito, mas não satisfazem a condição (AR) para nenhum valor $\theta > 2$, como evidenciado em diversos artigos, incluindo referências como [13, 19, 45]. Adicionalmente, essas pesquisas também apresentam novas condições superquadráticas como alternativas à hipótese (AR). Por essa razão, em vez de se limitar à hipótese (AR), também se explora uma situação mais abrangente para a função f em relação ao seu comportamento no infinito, a qual inclui as seguintes condições:

(f_A) existe uma $\mathcal{N}$-função Γ, dada por $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} \gamma(s)\,ds$, tal que

(γ_1) $\quad \dfrac{N}{2l_\phi} < l_\gamma := \displaystyle\inf_{t>0} \frac{t\gamma(t)}{\Gamma(t)} \leq \sup_{t>0} \frac{t\gamma(t)}{\Gamma(t)} =: m_\gamma < \infty$

e

$$\Gamma\left(\frac{F(t)}{|t|^{l_\phi}}\right) \leq \overline{C}\,\overline{F}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| > R, \tag{2.3}$$

em que $\overline{C}$ e R são constantes positivas, e

$$\overline{F}(t) := tf(t) - m_\phi F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

(f_B) $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{\operatorname{sgn}(t) f(t)}{|t|^{m_\phi - 1}} = \infty.$

Observação 2.1.3 *É amplamente conferido que a condição (AR) resulta em (f_B). Além disso, inspirados em [13, Observação 1.3], também pode-se concluir que a condição (f_A) é satisfeita ao exigir-se (f_1) e (AR) com $\theta > \frac{N\left(m_\psi - l_\phi\right)}{2l_\phi}$. De fato, em virtude de (AR), existe uma constante positiva C_1 tal que*

$$\overline{F}(t) \geq (\theta - m_\phi)F(t) \geq C_1|t|^\theta, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| > t_0.$$

Por outro lado, dada a hipótese (f_1) e a desigualdade $|t|^{l_\psi}\Psi(1) \leq \Psi(t) \leq |t|^{m_\psi}\Psi(1)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| > 1$, pode-se concluir que

$$|F(t)| \leq C\left[|t| + \Psi(t)\right] \leq C\left[\frac{1}{\Psi(1)} + 1\right]\Psi(t) \leq C|t|^{m_\psi}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| > 1.$$

Ao escolher $\Gamma(t) = |t|^\kappa$ para todo $t \in \mathbb{R}$, com $\dfrac{N}{2l_\phi} < \kappa < \dfrac{\theta}{m_\psi - l_\phi}$, tem-se

$$\Gamma\left(\frac{F(t)}{|t|^{l_\phi}}\right) = \left|\frac{F(t)}{|t|^{l_\phi}}\right|^\kappa \leq C|t|^{\kappa(m_\psi - l_\phi)} \leq C|t|^\theta, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| > 1.$$

Portanto, ao escolher $R = \max\{1, t_0\}$, conclui-se que

$$\Gamma\left(\frac{F(t)}{|t|^{l_\phi}}\right) \leq C\overline{F}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| > 1.$$

Dado o conjunto de hipóteses estabelecidas para f e as observações anteriores, a atenção é direcionada para o espaço de funções no qual o funcional associado ao problema (2.1) será definido. Especificamente, sob as hipóteses (ϕ_1), (ϕ_2) e (f_1), considera-se o espaço de Banach reflexivo $E := W^2L_\Phi \cap W_0^1L_\Phi$ equipado com a norma

$$\|u\|_E := \|\Delta u\|_{L_{(\Phi)}},$$

a qual é equivalente à norma usual em W^2L_Φ. Alguns detalhes sobre o espaço E são apresentados na Seção 1.2. Por exemplo, menciona-se que $W^2L_\Phi \hookrightarrow L_{Q_2}$, e devido à relação $\Psi \prec\prec Q_2$ estabelecida em (f_1), infere-se que a imersão compacta $W^2L_\Phi \hookrightarrow L_\Psi$ é válida. Consequentemente, essas imersões são igualmente válidas para o espaço $(E, \|\cdot\|_E)$ e têm ampla aplicação neste capítulo.

Observação 2.1.4 *Decorre de* (f_1) *e do fato de que*

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{F(t)}{|t|^{m_\phi}} = \infty, \tag{2.4}$$

que o espaço E *também está imerso continuamente em* $L^{m_\phi}(\Omega)$*. De fato, é imediato que existe uma constante* $R_0 > 1$ *tal que* $F(t) > |t|^{m_\phi}$ *sempre que* $|t| \geq R_0$*. Por outro lado, devido à continuidade da função* $\beta : [1, R_0] \to \mathbb{R}$*, dada por* $\beta(t) = \dfrac{t^{m_\phi}}{\Phi(t)}$*, existe uma constante positiva* $C_0 = C_0(1, R_0)$ *tal que*

$$\frac{|t|^{m_\phi}}{\Phi(t)} \leq C_0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } 1 \leq |t| \leq R_0.$$

Além disso, de acordo com o Lema 1.4.2, quando $|t| < 1$*, observa-se que*

$$|t|^{m_\phi} = \min\left\{|t|^{l_\phi}, |t|^{m_\phi}\right\} \leq \frac{1}{\Phi(1)}\Phi(t).$$

Finalmente, ao reunir todas as afirmações anteriores, pode-se concluir que

$$|t|^{m_\phi} \leq C\Phi(t) + F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

o que implica, de acordo com (f_1)*, que*

$$|t|^{m_\phi} \leq C[|t| + \Psi(t) + \Phi(t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Portanto, dadas as imersões contínuas de E *em* $L^1(\Omega)$*,* L_Ψ *e* L_Φ*, se* $u \in E$*, então* $u \in L^{m_\phi}(\Omega)$*. Além disso, se uma dada sequência* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é tal que* $u_n \to u$ *em* E*, então essa convergência também ocorre em* $L^1(\Omega)$*,* L_Ψ *e* L_Φ*. Consequentemente, tem-se*

$$\int_\Omega \Phi(u_n - u)\, dx \to 0 \quad e \quad \int_\Omega \Psi(u_n - u)\, dx \to 0.$$

Finalmente, de posse de (2.5) *e das convergências mencionadas anteriormente, conclui-se que* $u_n \to u$ *em* $L^{m_\phi}(\Omega)$*. Isso permite inferir que o espaço* E *está imerso continuamente em* $L^{m_\phi}(\Omega)$*.*

É dito que $u \in E$ é uma solução fraca de (2.1) quando

$$\int_\Omega \phi(\Delta u)\Delta v\, dx = \int_\Omega f(u)v\, dx, \quad \forall v \in E.$$

A seguir, são apresentados os principais teoremas a serem abordados ao longo deste capítulo.

Teorema 2.1.5 *Assuma* (ϕ_1) *e* (ϕ_2)*, e que* $f \in C(\mathbb{R})$ *atenda às condições* (AR)*,* (f_0) *e* (f_1)*, com* $l_\psi > m_\phi$*. Então, existe pelo menos uma solução fraca não trivial para o problema* (2.1)*.*

Ao acrescentar ao teorema anterior que f é uma função ímpar, é possível concluir a existência de múltiplas soluções fracas para o problema (2.1). O próximo teorema estabelece esse resultado.

Teorema 2.1.6 *Assuma as hipóteses presentes no Teorema 2.1.5 e que f é uma função ímpar. Então, existem infinitas soluções fracas para o problema* (2.1).

Por último, enuncia-se o teorema que estabelece a existência de uma solução fraca sem exigir a condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz.

Teorema 2.1.7 *Assuma (ϕ_1) e (ϕ_2), e que $f \in C(\mathbb{R})$ atenda às condições (f_0), (f_1), (f_A) e (f_B), com $l_\psi > m_\phi$. Então, existe pelo menos uma solução fraca não trivial para o problema* (2.1).

É necessário esclarecer que, por simplicidade, as hipóteses (ϕ_1), (ϕ_2) e (f_1) não são mencionadas explicitamente em todas as proposições deste capítulo, embora sejam consideradas.

2.2 Estrutura Variacional

Nesta seção, é introduzido o funcional associado ao problema (2.1), juntamente com as versões do Teorema do Passo da Montanha que se aplicam a ele. Conhecendo a caracterização de uma solução fraca de (2.1), é definido o funcional

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{I}: & E & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \mathcal{I}(u) = \displaystyle\int_\Omega \Phi(\Delta u)dx - \int_\Omega F(u)\,dx, \end{array} \tag{2.6}$$

em que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\,ds$. Por meio de argumentos padrões, conclui-se que $\mathcal{I} \in C^1(E, \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$\mathcal{I}'(u)(v) = \int_\Omega \phi(\Delta u)\Delta v\,dx - \int_\Omega f(u)v\,dx, \quad \forall u, v \in E. \tag{2.7}$$

De posse dessa derivada, é possível afirmar que pontos críticos de $\mathcal{I}$ são soluções fracas para o problema (2.1).

Para obter a existência e multiplicidade de soluções fracas, conforme anunciado nos teoremas da seção anterior, são aplicadas diferentes versões do Teorema do Passo da Montanha, as quais consideram tanto a condição de compacidade de Palais-Smale

quanto a condição de Cerami, assim nomeados em homenagem aos matemáticos que as introduziram na literatura. A seguir, as condições de compacidade e os teoremas são apresentados em detalhes.

Sejam X um espaço de Banach real e $\mathcal{H} : X \to \mathbb{R}$ um funcional. Diz-se que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Palais-Smale de $\mathcal{H}$ no nível c se

$$\mathcal{H}(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \|\mathcal{H}'(u_n)\|_{X^*} \to 0. \tag{2.8}$$

O funcional $\mathcal{H}$ satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale no nível c se toda sequência de Palais-Smale nesse nível possui uma subsequência convergente. Por outro lado, é dito que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cerami de $\mathcal{H}$ no nível c se

$$\mathcal{H}(u_n) \to c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|_X)\,\|\mathcal{H}'(u_n)\|_{X^*} \to 0. \tag{2.9}$$

O funcional $\mathcal{H}$ satisfaz a condição de compacidade de Cerami no nível c se toda sequência de Cerami nesse nível possui uma subsequência convergente.

Para sintetizar, o teorema a seguir reúne ambas as versões do Teorema do Passo da Montanha com as diferentes condições de compacidade. Essas versões podem ser encontradas em [52].

Teorema 2.2.1 *Sejam X um espaço de Banach real e $\mathcal{H} \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que existam $e \in X\backslash\{0\}$ e $\rho \in (0, \|e\|_X)$ tais que*

$$\max\{\mathcal{H}(0), \mathcal{H}(e)\} < \inf_{\|u\|_X=\rho} \mathcal{H}(u).$$

Defina

$$c_{pm} := \inf_{\alpha\in\Gamma} \max_{u\in\alpha([0,1])} \mathcal{H}(u),$$

para

$$\Gamma = \{\alpha \in C([0,1], X); \alpha(0) = 0, \alpha(1) = e\}.$$

Além disso, assuma que $\mathcal{H}$ satisfaz a condição de Palais-Smale (ou Cerami) no nível c_{pm}. Então, existe um ponto crítico de $\mathcal{H}$ no nível c_{pm}, ou seja, existe $u_0 \in X$ tal que

$$\mathcal{H}'(u_0) = 0 \quad e \quad \mathcal{H}(u_0) = c_{pm}.$$

O próximo teorema, denominado Teorema do Passo da Montanha Simétrico (consulte o Teorema 9.12 em [46]), apresenta um resultado relacionado à multiplicidade de pontos críticos.

Teorema 2.2.2 *Seja $X = V \oplus W$ um espaço de Banach real tal que $dim(X) = \infty$ e $dim(V) < \infty$. Seja $\mathcal{H} \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional par que satisfaz a condição de Palais-Smale, $\mathcal{H}(0) = 0$ e*

(i) existem constantes positivas ρ e r tais que

$$\mathcal{H}\Big|_{\partial B_X(0,\rho)\cap W} \geq r;$$

(ii) para cada subespaço de dimensão finita $X_0 \subset X$, existe uma constante positiva R_0 tal que

$$\mathcal{H}\Big|_{X_0 - B_X(0,R_0)} \leq 0.$$

Então, $\mathcal{H}$ possui uma sequência ilimitada de valores críticos.

2.3 Existência e Multiplicidade de Soluções Fracas com a Condição de Ambrosetti–Rabinowitz

O objetivo desta seção é estabelecer a existência de pelo menos um ponto crítico não trivial para o funcional $\mathcal{I}$, definido em (2.6), quando a não linearidade f satisfaz a condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz. Devido à implicação da hipótese (AR) na expressão (2.4), em determinados momentos, enfatiza-se a sua aplicação, apesar de a premissa inicial ser a hipótese (AR).

2.3.1 A Geometria do Passo da Montanha

O propósito desta subseção é destacar algumas proposições acerca da "geometria" do funcional $\mathcal{I}$. A primeira delas é a seguinte:

Proposição 2.3.1 *O funcional $\mathcal{I} : E \to \mathbb{R}$ definido em (2.6) cumpre a geometria do Passo da Montanha. Mais especificamente, tem-se:*

(i) se (f_0) é satisfeita e (2.4) é válida, com $l_\psi > m_\phi$, então existem constantes positivas ρ e r tais que $\mathcal{I}(u) \geq r$ sempre que $u \in E$, com $\|u\|_E = \rho$;

(ii) se (AR) é satisfeita, então existe $e \in E$, com $\|e\|_E > \rho$, tal que $\mathcal{I}(e) \leq 0$.

Demonstração. Decorre de (f_0) que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(t)| \leq \varepsilon |t|^{m_\phi}, \quad \forall t \in (-\delta, \delta). \tag{2.10}$$

Além disso, de acordo com (f_1), sabe-se que

$$|F(t)| \leq C[|t| + \Psi(t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Devido à monotonicidade de $\Psi(s)s^{-1}$ para valores positivos de s e à natureza de Ψ como uma $\mathcal{N}$-função, pode-se deduzir a seguinte desigualdade:

$$|t| \leq \frac{\delta}{\Psi(\delta)}\Psi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| \geq \delta.$$

Com isso, ao utilizar a expressão (2.11), é possível inferir que

$$|F(t)| \leq C_\delta \Psi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| \geq \delta, \tag{2.12}$$

em que $C_\delta := C\left[\frac{\delta}{\Psi(\delta)} + 1\right]$. Finalmente, a partir das expressões (2.10) e (2.12), tem-se

$$|F(t)| \leq \varepsilon|t|^{m_\phi} + C_\delta \Psi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

De posse das imersões contínuas de E em L_Ψ e em $L^{m_\phi}(\Omega)$ (consulte a Observação 2.1.4), juntamente com o Lema 1.4.2 e a desigualdade (2.13), tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(u) &\geq \int_\Omega \Phi(\Delta u)dx - \varepsilon \int_\Omega |u|^{m_\phi}\, dx - C_\delta \int_\Omega \Psi(u)\, dx \\
&\geq \min\left\{\|u\|_E^{l_\phi}, \|u\|_E^{m_\phi}\right\} - \varepsilon\|u\|^{m_\phi}_{L^{m_\phi}(\Omega)} - C_\delta \max\left\{\|u\|^{l_\psi}_{L_{(\Psi)}}, \|u\|^{m_\psi}_{L_{(\Psi)}}\right\} \\
&\geq \min\left\{\|u\|_E^{l_\phi}, \|u\|_E^{m_\phi}\right\} - \varepsilon C\|u\|_E^{m_\phi} - C_\delta C \max\left\{\|u\|_E^{l_\psi}, \|u\|_E^{m_\psi}\right\}.
\end{aligned}$$

Assim, ao considerar $\|u\|_E \leq 1$, infere-se que

$$\mathcal{I}(u) \geq \|u\|_E^{m_\phi}\left[1 - \varepsilon C - C_\delta C\|u\|_E^{l_\psi - m_\phi}\right].$$

Portanto, dado que $l_\psi > m_\phi$, ao fixar $\varepsilon = (2C)^{-1}$ e escolher $\rho = \min\left\{1, (4C_\delta C)^{\frac{-1}{l_\psi - m_\phi}}\right\}$ e $\|u\|_E = \rho$, obtém-se que

$$\mathcal{I}(u) \geq \frac{\rho^{m_\phi}}{4} =: r > 0.$$

Isso confirma o item (i). A fim de assegurar a validade do item (ii), começa-se por utilizar a hipótese (AR) em conjunto com a continuidade de f para inferir a existência de constantes positivas C_0 e C_1 tais que

$$F(t) \geq C_0|t|^\theta - C_1, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Em seguida, considere $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ não nula. Para todo $t > 1$, ao empregar a desigualdade (2.14) e o Lema 1.4.2, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(t\varphi) &= \int_\Omega \Phi(t|\Delta\varphi|)\,dx - \int_\Omega F(t\varphi)\,dx \\ &\leq t^{m_\phi}\int_\Omega \Phi(|\Delta\varphi|)\,dx - C_0 t^\theta \int_\Omega |\varphi|^\theta\,dx + C_1|\Omega|.\end{aligned}$$

Consequentemente, constata-se que $\mathcal{I}(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, pois $\theta > m_\phi$. Isso confirma, finalmente, a validade da proposição. ∎

Proposição 2.3.2 *Assuma as hipóteses presentes no Teorema 2.1.5 e que f é uma função ímpar. Então, o funcional $\mathcal{I}$ é par e cumpre a geometria do Passo da Montanha Simétrico. Mais especificamente, tem-se:*

(i) se (f_0) e (f_B) são satisfeitas, com $l_\psi > m_\phi$, então existem constantes positivas ρ e r tais que $\mathcal{I}(u) \geq r$ sempre que $u \in E$, com $\|u\|_E = \rho$;

(ii) se (AR) é satisfeita, então para cada subespaço de dimensão finita $E_0 \subset E$, existe uma constante positiva R_0 tal que $\mathcal{I}(u) \leq 0$ para todo $u \in E_0 - B_E(0, R_0)$.

Demonstração. Como F e Φ são funções pares, sendo a última devido à definição de $\mathcal{N}$-função, é evidente que o funcional $\mathcal{I}$ também é par. Além disso, visto que (f_B) implica em (2.4), é imediato da proposição anterior que o item (i) é válido. Resta concluir que, para cada subespaço de dimensão finita $E_0 \subset E$, existe uma constante positiva R_0 tal que $\mathcal{I}(u) \leq 0$ para todo $u \in E_0 - B_E(0, R_0)$. É sabido que E está imerso continuamente em $L^{m_\phi}(\Omega)$ e que quaisquer duas normas em E_0 são equivalentes. Sendo assim, existe uma constante positiva C_{E_0} tal que

$$C_{E_0}\|u\|_E \leq \|u\|_{L^{m_\phi}(\Omega)}, \quad \forall u \in E_0.$$

Além disso, considerando que F é uma função contínua e que a hipótese (AR) implica em (2.4), pode-se concluir que, dada a constante $\frac{2}{(C_{E_0})^{m_\phi}}$, existe uma constante positiva D_{E_0} tal que

$$F(t) \geq \frac{2}{(C_{E_0})^{m_\phi}}|t|^{m_\phi} - D_{E_0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, ao aplicar o Lema 1.4.2 e combinar as duas últimas desigualdades anteriores, pode-se concluir, para todo $u \in E_0$ com $\|u\|_E > 1$, que

$$\mathcal{I}(u) \leq \|u\|_E^{m_\phi} - \frac{2}{(C_{E_0})^{m_\phi}}\|u\|_{L^{m_\phi}(\Omega)}^{m_\phi} + D_{E_0}|\Omega| \leq -\|u\|_E^{m_\phi} + D_{E_0}|\Omega|.$$

Consequentemente, dado $R > \max\left\{1, (D_{E_0})^{\frac{1}{m_\phi}} |\Omega|^{\frac{1}{m_\phi}}\right\}$, tem-se

$$\mathcal{I}(u) \leq 0, \quad \forall u \in E_0 - B_E(0, R).$$

Isso finalmente confirma a validade da proposição. ∎

2.3.2 A Condição de Compacidade de Palais-Smale

Nesta momento, é estabelecida a condição de compacidade de Palais-Smale associada ao funcional $\mathcal{I}$. Inicialmente, é demonstrado no seguinte lema que qualquer sequência de Palais-Smale de $\mathcal{I}$ é limitada em E.

Lema 2.3.3 *Assuma que $f \in C(\mathbb{R})$ atenda à condição (AR). Então, qualquer sequência de Palais-smale $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{I}$ é limitada em E.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Palais-Smale de $\mathcal{I}$ no nível c. Dado que ϕ é função ímpar e que atende à condição (ϕ_2), pode-se inferir que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(u_n) - \tfrac{1}{\theta}\mathcal{I}'(u_n)(u_n) &= \frac{1}{\theta}\int_\Omega [f(u_n)u_n - \theta F(u_n)]\,dx \\
&\quad + \int_\Omega \Phi(\Delta u_n)\,dx - \frac{1}{\theta}\int_\Omega \phi(|\Delta u_n|)\,|\Delta u_n|\,dx. \\
&\geq \frac{1}{\theta}\int_{\{|u_n|>t_0\}\cup\{|u_n|\leq t_0\}} [f(u_n)u_n - \theta F(u_n)]\,dx \\
&\quad + \left(1 - \frac{m_\phi}{\theta}\right)\int_\Omega \Phi(\Delta u_n)\,dx.
\end{aligned}$$

Logo, empregando a hipóteses (AR) e a continuidade de f, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(u_n) - \frac{1}{\theta}\mathcal{I}'(u_n)(u_n) &\geq \frac{1}{\theta}\int_{\{|u_n|\leq t_0\}} [f(u_n)u_n - \theta F(u_n)]\,dx \\
&\quad + \left(1 - \frac{m_\phi}{\theta}\right)\int_\Omega \Phi(\Delta u_n)\,dx \\
&\geq -C + \left(1 - \frac{m_\phi}{\theta}\right)\int_\Omega \Phi(\Delta u_n)\,dx. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Por outro lado, é imediato da definição de uma sequência de Palais-Smale que, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 + c + \frac{1}{\theta}\varepsilon\|u_n\|_E > \mathcal{I}(u_n) - \frac{1}{\theta}\mathcal{I}'(u_n)(u_n), \quad \forall n \geq n_0. \qquad (2.16)$$

Ao combinar as desigualdades (2.15) e (2.16), percebe-se que

$$1 + c + \frac{1}{\theta}\varepsilon\|u_n\|_E > -C + \left(1 - \frac{m_\phi}{\theta}\right)\int_\Omega \Phi(\Delta u_n)\,dx, \quad \forall n \geq n_0.$$

É evidente da definição da norma de Orlicz e da desigualdade de Young que

$$\|u_n\|_E \leq \|\Delta u_n\|_{L_\Phi} \leq \int_\Omega \Phi(\Delta u_n)\,dx + 1.$$

Portanto,

$$\left(1 - \frac{m_\phi}{\theta}\right)\|u_n\|_E - \frac{1}{\theta}\varepsilon\|u_n\|_E < C, \quad \forall n \geq n_0.$$

Assumindo $\varepsilon < \theta - m_\phi$, conclui-se a limitação em E da sequência de Palais-Smale $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ∎

A proposição a seguir estabelece a convergência de sequências de Palais-Smale (ou de Cerami) associadas ao funcional $\mathcal{I}$.

Proposição 2.3.4 *Assuma que $f \in C(\mathbb{R})$ e seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Palais-Smale (ou de Cerami) de $\mathcal{I}$ limitada em E. Então, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em E.*

Demonstração. Considere uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Palais-Smale de $\mathcal{I}$ limitada em E. Dada a reflexividade do espaço E, existe $u \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E. Conforme o Lema 1.4.7, a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente em E quando, além da convergência fraca mencionada, satisfaça:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \phi(\Delta u_n)(\Delta u_n - \Delta u)\,dx \leq 0. \tag{2.17}$$

Para concluir a expressão (2.17), faz-se uso, inicialmente, da hipótese (f_1) e do fato de que $\mathcal{I}'(u_n) \in E^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso resulta em

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \phi(\Delta u_n)(\Delta u_n - \Delta u)\,dx\right| &= \left|\mathcal{I}'(u_n)(u_n - u) + \int_\Omega f(u_n)(u_n - u)\,dx\right| \\ &\leq \|\mathcal{I}'(u_n)\|_{E^*}\|u_n - u\|_E + C\int_\Omega |u_n - u|\,dx \\ &\quad + C\int_\Omega \psi(|u_n|)|u_n - u|\,dx.\end{aligned}$$

Em seguida, utilizando a desigualdade de Hölder e a imersão contínua dos espaços de Orlicz em $L^1(\Omega)$, obtém-se a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \phi(\Delta u_n)(\Delta u_n - \Delta u)\,dx\right| &\leq \|\mathcal{I}'(u_n)\|_{E^*}\|u_n - u\|_E + \\ &\quad C\|u_n - u\|_{L_\Psi} + C\|\psi(|u_n|)\|_{L_{\tilde{\Psi}}}\|u_n - u\|_{L_\Psi}.\end{aligned}$$

Devido à imersão compacta $W^2L_\Phi \hookrightarrow L_\Psi$, sabe-se que $u_n \to u$ em L_Ψ, o que implica que a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ também é limitada em L_Ψ. Como o operador de Nemytskii $\mathfrak{N}_\psi$ mantém a limitação dos conjuntos, ver Lema 1.4.1, tem-se

$$\left|\int_\Omega \phi(\Delta u_n)(\Delta u_n - \Delta u)\,dx\right| \leq C\left[\|\mathcal{I}'(u_n)\|_{E^*} + \|u_n - u\|_{L_\Psi}\right].$$

Por fim, em virtude de $\|\mathcal{I}'(u_n)\|_{E^*} \to 0$ e $\|u_n - u\|_{L_\Psi} \to 0$, conclui-se que

$$\int_\Omega \phi(\Delta u_n)(\Delta u_n - \Delta u)\,dx \to 0.$$

Isso conclui a demonstração dessa proposição, graças ao Lema 1.4.7. ∎

2.3.3 Prova Completa dos Teorema 2.1.5 e 2.1.6

As proposições destacadas ao longo desta Seção 2.3 permitem a aplicação direta das versões apropriadas do Teorema do Passo da Montanha, em cada caso, o que resulta na existência de um ponto crítico não trivial para o funcional $\mathcal{I}$. A seguir, é demonstrado o Teorema 2.1.5.

Demonstração do Teorema 2.1.5. Devido à Proposição 2.3.1, existem $e \in E\backslash\{0\}$ e $\rho \in (0, \|e\|_E)$ tais que

$$0 = \max\{\mathcal{I}(0), \mathcal{I}(e)\} < \inf_{\|u\|_E=\rho} \mathcal{I}(u).$$

Consequentemente, o funcional $\mathcal{I}$ cumpre a geometria do Passo da Montanha, com

$$c_{pm} := \inf_{\alpha\in\Gamma} \max_{u\in\alpha([0,1])} \mathcal{I}(u) > 0,$$

para

$$\Gamma = \{\alpha \in C([0,1], E); \alpha(0) = 0, \alpha(1) = e\}.$$

Além disso, em virtude do Lema 2.3.3 e da Proposição 2.3.4, $\mathcal{I}$ satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale. Portanto, de acordo com o Teorema do Passo da Montanha, estabelecido no Teorema 2.2.1, existe um ponto crítico u_0 de $\mathcal{I}$ no nível c_{pm}. Em razão de $\mathcal{I}(0) = 0$, constata-se que u_0 é uma solução fraca não trivial para o problema (2.1). ∎

Finalmente, mediante a aplicação do Teorema do Passo da Montanha Simétrico, conclui-se a existência de múltiplas soluções fracas para o problema (2.1).

Demonstração do Teorema 2.1.6. As Proposições 2.3.2 e 2.3.4, juntamente com o Lema 2.3.3, conferem as hipóteses necessárias para a aplicação do Teorema do Passo da Montanha Simétrico, enunciado no Teorema 2.2.2. Portanto, o funcional $\mathcal{I}$ possui uma sequência ilimitada de valores críticos. ∎

2.4 Existência de Solução Fraca sem a Condição de Ambrosetti–Rabinowitz

Nesta seção, analisa-se o problema de quarta ordem (2.1) com a inclusão de hipóteses mais abrangentes para f, em comparação com a condição de Ambrosetti-Rabinowitz adotada anteriormente. A fim de facilitar a leitura, essas hipóteses são mencionadas novamente, são elas:

(f_A) existe uma $\mathcal{N}$-função Γ, dada por $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} \gamma(s)\,ds$, tal que

(γ_1) $\quad \dfrac{N}{2l_\phi} < l_\gamma := \inf\limits_{t>0} \dfrac{t\gamma(t)}{\Gamma(t)} \leq \sup\limits_{t>0} \dfrac{t\gamma(t)}{\Gamma(t)} =: m_\gamma < \infty$

e

$$\Gamma\left(\frac{F(t)}{|t|^{l_\phi}}\right) \leq \overline{C}\,\overline{F}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| > R,$$

em que $\overline{C}$ e R são constantes positivas, e

$$\overline{F}(t) := tf(t) - m_\phi F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

(f_B) $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{\operatorname{sgn}(t) f(t)}{|t|^{m_\phi - 1}} = \infty.$

Observação 2.4.1 *A hipótese (f_B) resulta em*

$$l_\phi \lim_{|t|\to\infty} \frac{F(t)}{|t|^{l_\phi}} = \lim_{|t|\to\infty} \frac{sgn(t) f(t)}{|t|^{l_\phi - 1}} = \infty.$$

Posto isso, a partir de (f_A) e do fato de Γ ser uma $\mathcal{N}$-função, decorre que

$$\lim_{|t|\to\infty} \Gamma\left(\frac{F(t)}{|t|^{l_\phi}}\right) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{|t|\to\infty} \overline{F}(t) = \infty.$$

A partir das hipóteses (f_0) e (f_B), é imediato concluir que o funcional $\mathcal{I}$ cumpre a geometria do Passo da Montanha, pois é possível reproduzir de maneira inteiramente análoga os argumentos apresentados na seção anterior. Por esse motivo, as considerações sobre as características geométricas do Passo da Montanha são apenas brevemente mencionadas no final deste capítulo.

2.4.1 A Condição de Compacidade de Cerami

Da mesma forma que na seção em que a condição de compacidade de Palais-Smale foi estabelecida, o primeiro passo a ser realizado nesta seção consiste na limitação em E de qualquer sequência de Cerami de $\mathcal{I}$. Essa afirmação é estabelecida no lema a seguir, cuja demonstração segue uma abordagem semelhante à apresentada no Lema 4.1 em [13].

Lema 2.4.2 *Assuma que $f \in C(\mathbb{R})$ atenda às condições (f_1), (f_A) e (f_B). Então, qualquer sequência de Cerami $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{I}$ é limitada em E.*

Demonstração. Por contradição, supõe-se que a sequência de Cerami $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{I}$ seja ilimitada em E. Sendo assim, é possível extrair uma subsequência dessa sequência de tal forma que

$$\|u_n\|_E \to \infty, \quad \mathcal{I}(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \|\mathcal{I}'(u_n)\|_{E^*}\,(1 + \|u_n\|_E) \to 0.$$

Sem perda de generalidade, para cada $n \in \mathbb{N}$, assuma que $\|u_n\|_E > 1$ e defina $v_n := \dfrac{u_n}{\|u_n\|_E}$. É sabido que $\|\Delta v_n\|_{L_{(\Phi)}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, dada a limitação da sequência $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em E, a menos de alguma subsequência, existe $v \in W^2L_\Phi$ tal que

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v \text{ em } E, \\ v_n \to v \text{ em } L_\Psi, \\ v_n(x) \to v(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \end{cases}$$

A convergência pontual anterior decorre da imersão contínua de L_Ψ em $L^1(\Omega)$, seguida pela aplicação do Teorema 4.9 em [12]. Os próximos argumentos consideram o conjunto $V = [v \neq 0]$ e os dois possíveis casos sobre sua medida de Lebesgue.

Primeiro caso: assuma que $|V| > 0$. Consequentemente,

$$|u_n(x)| = |v_n(x)| \cdot \|\Delta u_n\|_{L_{(\Phi)}} \to \infty, \quad \text{q.t.p. em } V.$$

Dado que $\overline{F}$ é contínua e $\overline{F}(t) \geq 0$ para $|t| > R$, pode-se inferir que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \overline{F}(u_n)\,dx &= \int_{\{v\neq 0\}\cup[\{v=0\}\cap\{|u_n|>R\}]\cup[\{v=0\}\cap\{|u_n|\leq R\}]} \overline{F}(u_n)\,dx \\ &\geq \int_{\{v\neq 0\}} \overline{F}(u_n)\,dx - C. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Além disso, utilizando a hipótese (ϕ_2), tem-se

$$m_\phi \mathcal{I}(u_n) - \mathcal{I}'(u_n)(u_n) \geq \int_\Omega [f(u_n)u_n - m_\phi F(u_n)]\, dx = \int_\Omega \overline{F}(u_n)\, dx. \tag{2.19}$$

Combinando (2.19) e (2.18), conclui-se que

$$m_\phi \mathcal{I}(u_n) - \mathcal{I}'(u_n)(u_n) \geq \int_{\{v\neq 0\}} \overline{F}(u_n)\, dx - C.$$

Em seguida, aplicando o Lema de Fatou, juntamente com a definição de uma sequência de Cerami e a desigualdade anterior, infere-se que

$$m_\phi c + C \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\{v\neq 0\}} \overline{F}(u_n)\, dx = \infty.$$

Isso resulta em uma contradição. Portanto, essa análise conclui o primeiro caso da prova.

Segundo caso: assuma que $|V| = 0$. Inicialmente, visto que $\|u_n\|_E > 1$, destaque que

$$\mathcal{I}(u_n) + \int_\Omega F(u_n)\, dx = \int_\Omega \Phi(\Delta u_n)\, dx \geq \|\Delta u_n\|^{l_\phi}_{L_{(\Phi)}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso implica que

$$1 \leq \frac{\mathcal{I}(u_n)}{\|\Delta u_n\|^{l_\phi}_{L_{(\Phi)}}} + \int_{\{|u_n|\leq R\}\cup\{|u_n|>R\}} \frac{F(u_n)}{\|\Delta u_n\|^{l_\phi}_{L_{(\Phi)}}}\, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.20}$$

Por outro lado, como a sequência $\{\mathcal{I}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$ e $\|u_n\|_E \to \infty$ quando $n \to \infty$, é imediato que

$$\frac{\mathcal{I}(u_n)}{\|\Delta u_n\|^{l_\phi}_{L_{(\Phi)}}} = o_n(1). \tag{2.21}$$

Além disso, como F é contínua, existe uma constante positiva C tal que

$$\int_{\{|u_n|\leq R\}} \frac{F(u_n)}{\|\Delta u_n\|^{l_\phi}_{L_{(\Phi)}}}\, dx \leq \frac{C}{\|\Delta u_n\|^{l_\phi}_{L_{(\Phi)}}} = o_n(1). \tag{2.22}$$

Por fim, para inferir que

$$\int_{\{|u_n|>R\}} \frac{F(u_n)}{\|\Delta u_n\|^{l_\phi}_{L_{(\Phi)}}}\, dx = o_n(1), \tag{2.23}$$

é prudente detalhar algumas afirmações. Inicialmente, percebe-se, por meio de (f_1) e (f_A), que

$$\begin{aligned}
\int_{\{|u_n|>R\}} \Gamma\left(\frac{F(u_n)}{|u_n|^{l_\phi}}\right) dx &\leq \int_{\{|u_n|>R\}} \overline{C}\,\overline{F}(u_n)\, dx \\
&\leq \int_{\{|u_n|>R\}} C\left[|u_n| + |u_n|\psi(|u_n|) + \Psi(u_n)\right] dx \\
&< \infty
\end{aligned}$$

e, assim, $\frac{F(u_n)}{|u_n|^{l_\phi}} \in L_\Gamma$. Também constata-se, pelo Lema 1.4.3, que

$$\begin{aligned}\int_{\{|u_n|>R\}} \widetilde{\Gamma}\big(|v_n|^{l_\phi}\big)\, dx &\leq \int_{\{|u_n|>R\}} \widetilde{\Gamma}(1)\max\left\{|v_n|^{l_\phi\widetilde{l_\gamma}}, |v_n|^{l_\phi\widetilde{m_\gamma}}\right\} dx \\ &\leq \widetilde{\Gamma}(1)\int_{\{|u_n|>R\}} \left(|v_n|^{l_\phi\widetilde{l_\gamma}} + |v_n|^{l_\phi\widetilde{m_\gamma}}\right) dx, \end{aligned} \tag{2.24}$$

em que $\widetilde{p} = p/(p-1)$, com $p > 1$. Tenha em mente que

$$l_\gamma > \frac{N}{2l_\phi} = \widetilde{\left(\frac{l^{**}}{l_\phi}\right)} \Longleftrightarrow \widetilde{l_\gamma} < \frac{l^{**}}{l_\phi}.$$

De maneira análoga ao que é abordado na Observação 2.1.2, considerando a $\mathcal{N}$-função $\mathcal{R}$ definida por $\mathcal{R}(t) = \frac{|t|^{l_\phi\widetilde{l_\gamma}}}{l_\phi\widetilde{l_\gamma}}$ para $t \in \mathbb{R}$, verifica-se que $\mathcal{R} \prec\prec Q_2$. Portanto, E está imerso compactamente em $L^{l_\phi\widetilde{l_\gamma}}(\Omega)$. Além disso, E está imerso compactamente em $L^{l_\phi\widetilde{m_\gamma}}(\Omega)$, pois $\widetilde{l_\gamma} \geq \widetilde{m_\gamma}$. Consequentemente, a partir de (2.24), vê-se que $|v_n|^{l_\phi} \in L_{\widetilde{\Gamma}}(\Omega)$. Em seguida, aplicando a desigualdade de Hölder, infere-se que

$$\begin{aligned}\int_{\{|u_n|>R\}} \frac{F(u_n)}{\|\Delta u_n\|^{l_\phi}_{L_\Phi}}\, dx &= \int_{\{|u_n|>R\}} \frac{F(u_n)}{|u_n|^{l_\phi}}|v_n|^{l_\phi}\, dx \\ &\leq \left\|\frac{F(u_n)}{|u_n|^{l_\phi}}\mathcal{X}_{\{|u_n|>R\}}\right\|_{L_\Gamma} \left\||v_n|^{l_\phi}\mathcal{X}_{\{|u_n|>R\}}\right\|_{L_{\widetilde{\Gamma}}}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{F(u_n)}{|u_n|^{l_\phi}}\mathcal{X}_{\{|u_n|>R\}}\right\|_{L_\Gamma} \leq\ & 2\max\left\{\left[\int_{\{|u_n|>R\}} \Gamma\left(\frac{F(u_n)}{|u_n|^{l_\phi}}\right) dx\right]^{\frac{1}{l_\gamma}}, \right. \\ & \left.\left[\int_{\{|u_n|>R\}} \Gamma\left(\frac{F(u_n)}{|u_n|^{l_\phi}}\right) dx\right]^{\frac{1}{m_\gamma}}\right\}. \end{aligned}$$

Dada a continuidade de $\overline{F}$, existe uma constante positiva C tal que

$$\left\|\frac{F(u_n)}{|u_n|^{l_\phi}}\mathcal{X}_{\{|u_n|>R\}}\right\|_{L_\Gamma} \leq C\max\left\{\left[\int_\Omega \left|\overline{F}(u_n)\right| dx\right]^{\frac{1}{l_\gamma}}, \left[\int_\Omega \left|\overline{F}(u_n)\right| dx\right]^{\frac{1}{m_\gamma}}\right\} + C.$$

Devido à limitação da sequência $\left\{\int_\Omega \overline{F}(u_n)\, dx\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, expressa em (2.19), conclui-se que

$$\left\{\left\|\frac{F(u_n)}{|u_n|^{l_\phi}}\mathcal{X}_{\{|u_n|>R\}}\right\|_{L_\Gamma}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. A última estimativa necessária para confirmar (2.23) é:

$$\left\||v_n|^{l_\phi}\mathcal{X}_{\{|u_n|>R\}}\right\|_{L_{\widetilde{\Gamma}}} = o_n(1). \tag{2.26}$$

Recorde-se que $|V| = 0$, e E está imerso compactamente em $L^{l_\phi \widetilde{l}_\gamma}(\Omega)$ e em $L^{l_\phi \widetilde{m}_\gamma}(\Omega)$, o que implica que $v_n \to 0$ em $L^{l_\phi \widetilde{l}_\gamma}(\Omega)$ e $L^{l_\phi \widetilde{m}_\gamma}(\Omega)$. Sendo assim, ao ver que

$$\int_{\{|u_n|>R\}} \widetilde{\Gamma}\left(|v_n|^{l_\phi}\right)\, dx \;\leq\; \widetilde{\Gamma}(1)\left(\int_{\{|u_n|>R\}} |v_n|^{l_\phi \widetilde{l}_\gamma}\, dx + \int_{\{|u_n|>R\}} |v_n|^{l_\phi \widetilde{m}_\gamma}\, dx\right),$$

é imediato que

$$\int_{\{|u_n|>R\}} \widetilde{\Gamma}\left(|v_n|^{l_\phi}\right)\, dx = o_n(1). \tag{2.27}$$

Ao lembrar que (2.27) implica em (2.26) e ao combinar isso com (2.25), a equação (2.23) é válida. Finalmente, a partir das equações (2.20), (2.21), (2.22) e (2.23), chega-se ao absurdo desejado nesse segundo caso. Portanto, a sequência de Cerami $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em E. ∎

Mediante a limitação em E das sequências de Cerami de $\mathcal{I}$ e a aplicação dos mesmos argumentos que permitiram a conclusão da Proposição 2.3.4, é possível inferir que o funcional $\mathcal{I}$ satisfaz a condição de compacidade de Cerami. Dado que se trata de um desdobramento evidente, essa constatação é brevemente mencionada na prova do Teorema 2.1.7 na subseção seguinte.

2.4.2 Prova Completa do Teorema 2.1.7

Neste momento, são compiladas algumas das proposições anteriores que culminam na apresentação da demonstração do Teorema 2.1.7.

Demonstração do Teorema 2.1.7. Inicialmente, a partir das hipóteses (f_0) e (f_B), com $l_\psi > m_\phi$, pode-se inferir o item (i) da Proposição 2.3.1. Além disso, é possível ajustar a demonstração do item (ii) dessa proposição, de forma a estabelecer que o funcional $\mathcal{I}$ cumpre a geometria do Passo da Montanha. De fato, a hipótese (f_B), juntamente com a continuidade de f, implica que, para qualquer $C > 0$, existe uma constante $A = A(C) > 0$ tal que

$$F(t) \geq C|t|^{m_\phi} - A, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.28}$$

Em seguida, considere uma função não nula e não negativa $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Para todo $t > 1$, ao empregar a desigualdade (2.28) e o Lema 1.4.2, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(t\varphi) &= \int_\Omega \Phi(t|\Delta\varphi|)\, dx - \int_\Omega F(t\varphi)\, dx \\ &\leq t^{m_\phi}\int_\Omega \Phi(|\Delta\varphi|)\, dx - Ct^{m_\phi}\int_\Omega |\varphi|^{m_\phi}\, dx + A|\Omega|.\end{aligned}$$

Escolhendo $C > \frac{\int_\Omega \Phi(|\Delta\varphi|)\,dx}{\int_\Omega |\varphi|^{m_\phi}\,dx}$, conclui-se que $\mathcal{I}(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Isso finalmente confirma o item (ii). Além disso, com a limitação de qualquer sequência de Cerami de $\mathcal{I}$, segundo o Lema 2.4.2, em conjunto com a Proposição 2.3.4, pode-se inferir que $\mathcal{I}$ atende à condição de compacidade de Cerami. Assim, de acordo com o Teorema do Passo da Montanha estabelecido no Teorema 2.2.1, conclui-se que existe um ponto crítico u_0 de $\mathcal{I}$ no nível

$$c_{pm} := \inf_{\alpha\in\Gamma} \max_{u\in\alpha([0,1])} \mathcal{I}(u) > 0,$$

para

$$\Gamma = \{\alpha \in C([0,1], E); \alpha(0) = 0, \alpha(1) = e\}.$$

Em virtude de $\mathcal{I}(0) = 0$, constata-se que u_0 é uma solução fraca não trivial para o problema (2.1). ∎

2.5 Análise do Operador ϕ-biharmônico em Comparação com outras Pesquisas

É instrutivo estabelecer comparações entre as hipóteses adotadas neste capítulo e em outras pesquisas relacionadas. Nessa perspectiva, a seguir, são apresentadas comparações tanto com o operador ϕ-biharmônico quanto com o sistema hamiltoniano associado a ele.

Considere o cenário em que $\phi(t) = t$, com $l_\phi = m_\phi = 2$. Neste caaso, o operador de quarta ordem é o biharmônico. Em [14], fundamentados no espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, a restrição de crescimento exigida sobre a não linearidade f é a seguinte:

$$|f(t)| \leq C(1 + |t|^p), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.29}$$

na qual C é uma constante positiva e $p \in \left(2, \frac{2N}{N-4}\right)$, sendo $\frac{2N}{N-4} = l^{**} = m^{**}$ o expoente crítico do espaço $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Dado que este capítulo é fundamentado nos espaços de Orlicz, é evidente que (2.29) é equivalente à hipótese (f_1). É natural que em (f_1) o crescimento esteja atrelado a uma $\mathcal{N}$-função Ψ tal que $\Psi \prec\prec Q_2$, na qual Q_2 representa a $\mathcal{N}$-função limite para alcançar a imersão compacta de E em L_Ψ. Essa comparação também pode ser estendida à função $\phi(t) = |t|^{p-2}t$, em que $p > 1$, ou seja, quando se faz referência à classe de operadores p-biharmônicos.

Por outro lado, resgatando que a investigação do problema de quarta ordem (2.1) foi instigado por um sistema hamiltoniano, torna-se pertinente associá-lo ao sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(v) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.30}$$

em que $g := \phi^{-1}$ e $v := \phi(-\Delta u)$. No que se refere às restrições referentes ao crescimento no infinito das não linearidades f e g, em [37] é exigido que $f(t) = O(|t|^r)$ e $g(t) = O(|t|^s)$ quando $|t| \to \infty$, com $r, s > 1$ e tais que

$$\frac{1}{r+1} + \frac{1}{s+1} > \frac{N-2}{N}.$$

Ou seja, é dito que o par ordenado (r, s) está abaixo da hipérbole crítica (3).

A seguir, são destacadas as restrições relacionadas ao crescimento de f e g exigidas neste capítulo. A partir das hipóteses (f_0), (ψ_1) e (ϕ_1), e dos Lemas 1.4.2 e 1.4.3, destaca-se que

$$|f(t)| \leq C\left[1 + |t|^p\right], \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

com $p = m_\psi - 1$, e

$$|g(t)| \leq C\left[1 + |t|^q\right], \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

com $q = \frac{1}{l_\phi - 1}$ e $m^{**} > l_\psi > m_\phi \geq l_\phi > 1$. No cenário em que $m_\psi < l^{**}$, que garante $\Psi \prec\prec Q_2$, é constatado que o par ordenado (p, q) está abaixo da hipérbole crítica. De fato, tem-se

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{1}{m_\psi} + \frac{l_\phi - 1}{l_\phi} > \frac{N - 2l_\phi}{l_\phi N} + \frac{l_\phi - 1}{l_\phi} = \frac{N-2}{N}.$$

Se fosse necessário supor que $m_\psi < l^{**}$, haveria uma notável semelhança entre os casos abordados em [37] e o conteúdo deste capítulo. No entanto, tal exigência não se faz presente. Além disso, diferentemente de [37], neste capítulo não é exigido sobre g a condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz. Também, são exploradas condições mais abrangentes em relação ao comportamento no infinito da função f quando se consideram as hipóteses (f_A) e (f_B), em vez de (AR).

Em [16], são investigados sistemas hamiltonianos utilizando o método de redução por inversão. Para obter existência de solução para o sistema, são exigidas que ambas as não linearidades f e g sejam funções ímpares, invertíveis e derivadas de $\mathcal{N}$-funções.

Por esse motivo, com o intuito de realizar comparações, é avaliado o caso em que $f(t) = \psi(t)$ em (2.30). Sob essa escolha, em [16], em vez de assumir que $(m_\psi, m_{\phi^{-1}})$ está abaixo da hipérbole crítica, como é requerido em [37], exige-se que o par ordenado

$$\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{\log(\Psi(t))}{\log(t)}, \limsup_{t\to\infty} \frac{\log\left(\widetilde{\Phi}(t)\right)}{\log(t)} \right)$$

esteja, o que torna essa hipótese menos restritiva, pois se sabe que

$$\overline{m}_\psi := \limsup_{t\to\infty} \frac{\log(\Psi(t))}{\log(t)} \leq m_\psi,$$

e o mesmo ocorre para $\widetilde{\Phi}$. Veja que, de maneira semelhante ao cenário em que $m_\psi < l^{**}$ é assumido para inferir que $\Psi \prec\prec Q_2$, também se verifica que o par ordenado $(\overline{m}_\psi, \overline{m}_{\phi^{-1}})$ está abaixo da hipérbole crítica quando se considera o caso particular: $\overline{m}_\psi < l^{**}$ e $\overline{m}_{\phi^{-1}} = m_{\phi^{-1}}$.

É relevante registrar que é possível exibir não linearidades f e g, ou seja, $\mathcal{N}$-funções Φ e Ψ, que satisfaçam certas restrições descritas neste capítulo e que o par ordenado $(\overline{m}_\psi, \overline{m}_{\phi^{-1}})$ esteja na hipérbole crítica, ou seja,

$$\frac{1}{\overline{m}_\psi} + \frac{1}{\overline{m}_{\phi^{-1}}} = \frac{N-2}{N}.$$

Isso pode conduzir à conclusão de que existe uma solução fraca para o sistema hamiltoniano em situações que não são consideradas em [16]. Por exemplo, sejam $\phi(t) = |t|^\gamma t$ e $\psi(t) = \dfrac{|t|^{\alpha-1}t}{\log(1+|t|)}$ para $t \in \mathbb{R}$, com $\gamma > 0$ e $\alpha > 1$. Verifica-se que

$$1 < l_\phi = \gamma + 1 = \overline{m}_\phi = m_\phi < \frac{N}{2}$$

e

$$1 < l_\psi = \alpha < \alpha + 1 = \overline{m}_\psi = m_\psi.$$

A fim de cumprir as demais hipóteses delineadas neste capítulo, escolha

$$\frac{N l_\phi}{N - 2l_\phi} - 1 = l^{**} - 1 = \alpha > \gamma + 1,$$

o que implica que $2\gamma^2 + 6\gamma + (4 - N) > 0$. Em última análise, por meio de cálculos simples, pode-se inferir que a escolha adequada para γ é:

$$\frac{N-2}{2} > \gamma > \max\left\{ \frac{-3 + \sqrt{1+2N}}{2}, 0 \right\}.$$

Além disso, é imediato que a não linearidade f cumpre (f_0) e (AR), com $\theta = \alpha$. Portanto, as não linearidades f e g cumprem as hipóteses do Teorema 2.1.6. No entanto, elas não satisfazem as condições em [16], uma vez que

$$\frac{1}{m_\psi} + \frac{1}{m_{\phi^{-1}}} = \frac{1}{\overline{m}_\psi} + \frac{1}{\overline{m}_{\phi^{-1}}} = \frac{N-2}{N}.$$

Isso é consequência da seguinte relação:

$$l^{**} - 1 = \alpha \Longleftrightarrow \frac{1}{\alpha+1} + \frac{\gamma}{\gamma+1} = \frac{N-2}{N}.$$

Capítulo 3

Existência de Solução Fraca para Problemas de Quarta Ordem com Parâmetro

Neste capítulo, considere o problema com condição de fronteira de Navier

$$\begin{cases} \Delta\left(\phi(\Delta u)\right) = \lambda f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que λ é um parâmetro real positivo e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$, é um conjunto aberto e limitado com fronteira suave. Assim como no Capítulo 2, a função ϕ é tal que

(ϕ_1) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, crescente e contínua, $\phi(0) = 0$ e $\lim\limits_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$;

(ϕ_2) $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dada por $\Phi(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} \phi(s)\, ds$, satisfaz

$$1 < l_\phi := \inf_{s>0} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} \leq \sup_{s>0} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} =: m_\phi < \frac{N}{2}.$$

Recomenda-se a leitura das Seções 2.1 e 2.2, pois o problema com parâmetro (3.1) apresenta semelhanças com o problema de quarta ordem explorado no capítulo anterior. Por exemplo, destaca-se que ambos compartilham o mesmo espaço de funções, $E := W^2 L_\Phi \cap W_0^1 L_\Phi$, em sua formulação e resolução por métodos variacionais. Nesse sentido, a fim de evitar repetições desnecessárias, sem comprometer a clareza do texto, neste capítulo são omitidos diversos detalhes relacionados a essas semelhanças.

Neste capítulo, busca-se obter soluções fracas não triviais para o problema (3.1) por meio da aplicação de teoremas abstratos de ponto crítico devido a B. Ricerri e de G. Bonanno. Para cumprir esses objetivos, o capítulo é estruturado da seguinte maneira: na primeira seção são apresentadas as hipóteses exigidas sobre f, a estrutura variacional e os principais teoremas relacionados à existência de solução fraca. Em seguida, para facilitar a referência, são apresentados os teoremas abstratos de pontos críticos de B. Ricerri e de G. Bonanno, respectivamente. Por fim, na última seção, é realizada a demonstração da existência de uma solução fraca não trivial.

3.1 Preliminares e Estrutura Variacional

Cada um dos principais teoremas deste capítulo assume que a não linearidade f satisfaz um subconjunto específico das hipóteses a seguir. Além disso, as restrições referentes ao parâmetro são estabelecidas no enunciado de cada teorema. Considera-se $f \in C(\mathbb{R})$ e

(AR) existem constantes $\theta > m_\phi$ e $t_0 > 0$ tais que

$$0 < \theta F(t) \leq tf(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| > t_0,$$

para $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\,ds$;

(f_1) existem uma constante $C > 0$ e uma $\mathcal{N}$-função $\Psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dada por

$$\Psi(t) = \int_0^{|t|} \psi(s)\,ds,$$

tais que

$$|f(t)| \leq C[1 + \psi(|t|)], \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

com $\Psi \prec\prec Q_2$, para Q_2 definida de acordo com (1.8), e

(ψ_1) $\quad 1 < l_\psi := \displaystyle\inf_{t>0} \frac{t\psi(t)}{\Psi(t)} \leq \sup_{t>0} \frac{t\psi(t)}{\Psi(t)} =: m_\psi < \infty$;

(f_2) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{\Phi(t)} = \infty.$

Observação 3.1.1 *Se $f(0) > 0$, então a hipótese (f_2) é automaticamente satisfeita.*

Considere o espaço $E := W^2L_\Phi \cap W_0^1 L_\Phi$ equipado com a norma

$$\|u\|_E = \|\Delta u\|_{L_{(\Phi)}}.$$

É dito que $u \in E$ é uma solução fraca de (3.1) se

$$\int_\Omega \phi(\Delta u)\Delta v\, dx = \lambda \int_\Omega f(u)v\, dx, \quad \forall v \in E. \tag{3.2}$$

Conhecendo a caracterização de uma solução fraca de (3.1), é definido o funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\lambda : \quad E &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \mathcal{I}_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(\Delta u)dx - \lambda \int_\Omega F(u)\, dx. \end{aligned}$$

Por simplicidade, também define-se $\mathcal{J}_\lambda := \frac{1}{\lambda}\mathcal{I}_\lambda$. Ao assumir as hipóteses (ϕ_1), (ϕ_2) e (f_1), conclui-se, por argumentos padrões, que os funcionais $\mathcal{I}_\lambda$ e $\mathcal{J}_\lambda$ pertencem ao espaço $C^1(E, \mathbb{R})$ para todo $\lambda > 0$. A derivada de $\mathcal{I}_\lambda$ é dada por

$$\mathcal{I}'_\lambda(u)(v) = \int_\Omega \phi(\Delta u)\Delta v\, dx - \lambda \int_\Omega f(u)v\, dx, \quad \forall u, v \in E, \tag{3.3}$$

e, de maneira imediata, $\mathcal{J}'_\lambda(u)(v) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{I}'(u)(v)$. De posse da derivada de Gâteaux dos funcionais $\mathcal{I}_\lambda$ e $\mathcal{J}_\lambda$, é imediato inferir que seus pontos críticos, quando existem, são soluções fracas para o problema (3.1).

A fim de simplificar a apresentação, são introduzidos os funcionais $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$ definidos no espaço E da seguinte maneira: dado $u \in E$,

$$\mathcal{G}(u) = \int_\Omega \Phi(\Delta(u))\, dx \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(u)\, dx.$$

São enunciados a seguir os principais teoremas deste capítulo.

Teorema 3.1.2 *Assuma (ϕ_1) e (ϕ_2), e que $f \in C(\mathbb{R})$ atenda às condições (AR) e (f_1). Então, para cada $r > 0$, existe uma constante positiva $\Lambda(r)$ tal que o problema (3.1) admite pelo menos duas soluções fracas para cada $\lambda \in (0, \Lambda(r))$, em que uma delas tem norma estritamente menor que $\max\left\{r^{\frac{1}{l_\phi}}, r^{\frac{1}{m_\phi}}\right\}$.*

Teorema 3.1.3 *Assuma (ϕ_1) e (ϕ_2), e que $f \in C(\mathbb{R})$ atenda às condições (f_1) e (f_2). Então, para cada*

$$\lambda \in \left(0, \frac{1}{\sup\limits_{u \in \mathcal{G}^{-1}\left((-\infty,1)\right)} \mathcal{F}(u)}\right),$$

o problema (3.1) admite pelo menos uma solução fraca não trivial, que é um ponto de mínimo de $\mathcal{I}_\lambda$ na bola aberta unitária em E.

A demonstração do Teorema 3.1.2 fundamenta-se na aplicação do Teorema 6 em [48], o qual é apresentado a seguir.

Teorema 3.1.4 *Sejam X um espaço de Banach real reflexivo e $\mathcal{K}, \mathcal{W} : X \to \mathbb{R}$ dois funcionais continuamente Gâteaux diferenciáveis tais que $\mathcal{K}$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente e coercivo, e $\mathcal{W}$ é sequencialmente fracamente contínuo. Além disso, assuma que, para cada $\gamma > 0$, o funcional $\mathcal{H}_\gamma := \gamma\mathcal{K} - \mathcal{W}$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Então, para cada $r > \inf_{u\in X} \mathcal{K}(u)$ e cada*

$$\gamma > \inf_{u\in\mathcal{K}^{-1}\left((-\infty,r)\right)} \frac{\sup\limits_{v\in\mathcal{K}^{-1}\left((-\infty,r)\right)} \mathcal{W}(v) - \mathcal{W}(u)}{r - \mathcal{K}(u)},$$

a seguinte alternativa vale: ou o funcional $\mathcal{H}_\gamma$ assume um mínimo global estrito em $\mathcal{K}^{-1}\big((-\infty, r)\big)$, ou $\mathcal{H}_\gamma$ possui pelo menos dois pontos críticos em que um deles pertence a $\mathcal{K}^{-1}\big((-\infty, r)\big)$.

Antes de apresentar o Teorema 2.3 enunciado em [8], o qual é crucial na conclusão do Teorema 3.1.3, é necessário definir a condição de compacidade descrita nele. Sejam X um espaço de Banach real e $\mathcal{K}, \mathcal{W} : X \to \mathbb{R}$ dois funcionais continuamente Gâteaux diferenciáveis. Dados $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, com $r_1 < r_2$, e o funcional $\mathcal{H} := \mathcal{K} - \mathcal{W}$, é dito que $\mathcal{H}$ verifica a condição de Palais-Smale cortada abaixo em r_1 e acima em r_2, quando qualquer sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Palais-Smale de $\mathcal{H}$ no nível c, com

$$r_1 < \mathcal{K}(u_n) < r_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

possui uma subsequência convergente. Ao escolher $r_1 = 0$, apenas é dito que $\mathcal{H}$ verifica a condição de Palais-Smale cortada acima em r_2.

Teorema 3.1.5 *Sejam X um espaço de Banach real e $\mathcal{K}, \mathcal{W} : X \to \mathbb{R}$ dois funcionais continuamente Gâteaux diferenciáveis com $\inf_{u\in X} \mathcal{K}(u) = \mathcal{K}(0) = \mathcal{W}(0) = 0$. Assuma que existam $r \in \mathbb{R}$ e $\breve{u} \in X$, com $0 < \mathcal{K}(\breve{u}) < r$, tais que*

$$\frac{\sup\limits_{u\in\mathcal{K}^{-1}\left((-\infty,r)\right)} \mathcal{W}(u)}{r} < \frac{\mathcal{W}(\breve{u})}{\mathcal{K}(\breve{u})}$$

e, para cada

$$\lambda \in \left(\frac{\mathcal{K}(\breve{u})}{\mathcal{W}(\breve{u})}, \frac{r}{\sup\limits_{u\in\mathcal{K}^{-1}\left((-\infty,r)\right)} \mathcal{W}(u)} \right),$$

o funcional $\mathcal{H}_\lambda := \mathcal{K} - \lambda\mathcal{W}$ *satisfaz a condição de Palais-Smale cortada acima em* r*. Então, para cada*

$$\lambda \in \left(\frac{\mathcal{K}(\breve{u})}{\mathcal{W}(\breve{u})}, \frac{r}{\sup\limits_{u \in \mathcal{K}^{-1}\left((-\infty,r)\right)} \mathcal{W}(u)} \right),$$

existe $u_\lambda \in \mathcal{K}^{-1}\big((0,r)\big)$ *tal que* $\mathcal{H}'_\lambda(u_\lambda) = 0$ *e*

$$\mathcal{H}_\lambda(u_\lambda) \leq \mathcal{H}_\lambda(v), \quad \forall v \in \mathcal{K}^{-1}\big((-\infty,r)\big).$$

3.2 Existência de Solução Fraca

Após as considerações apresentadas nas seções anteriores, está-se agora em posição de demonstrar os teoremas principais anunciados neste capítulo.

Demonstração do Teorema 3.1.2. De posse das hipóteses (f_1) e (AR), pode-se inferir, a partir do Lema 2.3.3 e da Proposição 2.3.4, que o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ atende à condição de compacidade de Palais-Smale. Por outro lado, em virtude do Lema 1.4.2, é imediato inferir que $\mathcal{G}$ é coercivo. Além disso, devido à convexidade e continuidade de $\mathcal{G}$, conclui-se que $\mathcal{G}$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente, conforme estabelecido no Corolário 3.9 em [12]. À luz da definição de $\mathcal{G}$, sabe-se que $\inf_{u\in E} \mathcal{G}(u) = 0$. Sendo assim, fixado $r > 0$, a seguir, avalia-se para quais valores de $\lambda > 0$ a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\frac{1}{\lambda} > \inf_{u \in \mathcal{G}^{-1}\left((-\infty,r)\right)} \frac{\sup\limits_{v \in \mathcal{G}^{-1}\left((-\infty,r)\right)} \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u)}{r - \mathcal{G}(u)} =: \iota_r. \tag{3.5}$$

Dado $v \in \mathcal{G}^{-1}\big((-\infty,r)\big)$, sabe-se, pelo Lema 1.4.2, que

$$r > \mathcal{G}(v) \geq \min\left\{ \|v\|_E^{l_\phi}, \|v\|_E^{m_\phi} \right\}.$$

Portanto, $\|v\|_E < \max\left\{ r^{\frac{1}{l_\phi}}, r^{\frac{1}{m_\phi}} \right\}$ sempre que $v \in \mathcal{G}^{-1}\big((-\infty,r)\big)$. Além disso, aplicando novamente o Lema 1.4.2, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v) &\leq C\left[\int_\Omega |v|\,dx + \int_\Omega \Psi(v)\,dx \right] \\ &\leq C\left[C_0\|v\|_E + \max\left\{ \|v\|_{L_{(\Psi)}}^{l_\psi}, \|v\|_{L_{(\Psi)}}^{m_\psi} \right\} \right], \quad \forall v \in \mathcal{G}^{-1}\big((-\infty,r)\big), \end{aligned}$$

na qual C_0 é a constante de imersão de E em $L^1(\Omega)$. Em seguida, dada a imersão contínua de E em L_Ψ, pode-se inferir que existe uma constante C_1 tal que

$$\mathcal{F}(v) \leq C\left[C_0\|v\|_E + C_1 \max\left\{\|v\|_E^{l_\psi}, \|v\|_E^{m_\psi}\right\}\right], \quad \forall v \in \mathcal{G}^{-1}\big((-\infty, r)\big).$$

Consequentemente,

$$\sup_{v\in\mathcal{G}^{-1}\left((-\infty,r)\right)} \mathcal{F}(v) \leq C\left[C_0 \max\left\{r^{\frac{1}{l_\phi}}, r^{\frac{1}{m_\phi}}\right\} + C_1 \max\left\{r^{\frac{l_\psi}{l_\phi}}, r^{\frac{l_\psi}{m_\phi}}, r^{\frac{m_\psi}{l_\phi}}, r^{\frac{m_\psi}{m_\phi}}\right\}\right]. \quad (3.6)$$

Em razão de $0 \in \mathcal{G}^{-1}\big((-\infty, r)\big)$, tem-se

$$\iota_r \leq \frac{\sup\limits_{v\in\mathcal{G}^{-1}\left((-\infty,r)\right)} \mathcal{F}(v)}{r},$$

o que implica, por (3.6), que

$$\iota_r \leq \frac{C\left[C_0 \max\left\{r^{\frac{1}{l_\phi}}, r^{\frac{1}{m_\phi}}\right\} + C_1 \max\left\{r^{\frac{l_\psi}{l_\phi}}, r^{\frac{l_\psi}{m_\phi}}, r^{\frac{m_\psi}{l_\phi}}, r^{\frac{m_\psi}{m_\phi}}\right\}\right]}{r}.$$

Nesse contexto, é relevante ressaltar que, quando $0 < \lambda < \Lambda(r)$, no qual $\Lambda(r)$ é definido como:

$$\Lambda(r) = \frac{r}{C\left[C_0 \max\left\{r^{\frac{1}{l_\phi}}, r^{\frac{1}{m_\phi}}\right\} + C_1 \max\left\{r^{\frac{l_\psi}{l_\phi}}, r^{\frac{l_\psi}{m_\phi}}, r^{\frac{m_\psi}{l_\phi}}, r^{\frac{m_\psi}{m_\phi}}\right\}\right]},$$

a desigualdade (3.5) é válida. Por fim, de acordo com o item (ii) da Proposição 2.3.1, o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ não apresenta um mínimo global. Em conformidade com o Teorema 3.1.4, ao fixar $r > 0$, é evidente que o problema (3.1) possui, no mínimo, duas soluções fracas para cada $\lambda \in (0, \Lambda(r))$. Sobretudo, uma dessas soluções tem a norma em E estritamente menor que $\max\left\{r^{\frac{1}{l_\phi}}, r^{\frac{1}{m_\phi}}\right\}$. ∎

Demonstração do Teorema 3.1.3. Inicialmente, a partir das definições dos funcionais $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$, é evidente que $\inf_{u\in E} \mathcal{G}(u) = \mathcal{G}(0) = \mathcal{F}(0) = 0$. Quanto ao funcional $\mathcal{I}_\lambda$, é possível inferir que ele satisfaz a condição de Palais-Smale cortada superiormente em $r > 0$ para cada $\lambda > 0$. De fato, considere uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Palais-Smale de $\mathcal{I}_\lambda$ satisfazendo (3.4), isto é,

$$\mathcal{G}(u_n) < r, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Perceba que a coercividade do funcional $\mathcal{G}$ implica automaticamente na limitação dessa sequência, o que permite empregar os mesmos argumentos presentes na demonstração da Proposição 2.3.4 para concluir a convergência em E de uma subsequência de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Portanto, para aplicar o Teorema 3.1.5, resta apenas exibir uma função $w \in E$ tal que

$$0 < \mathcal{G}(w) < 1 \quad \text{e} \quad \sup_{u\in\mathcal{G}^{-1}\left((-\infty,1)\right)} \mathcal{F}(u) < \frac{\mathcal{F}(w)}{\mathcal{G}(w)}. \tag{3.7}$$

Fixado $r = 1$, utilizando argumentos semelhantes à demonstração do Teorema 3.1.2, é possível afirmar que $\|u\|_E < 1$ para todo $u \in \mathcal{G}^{-1}\big((-\infty, 1)\big)$, o que implica na existência de uma constante positiva C tal que

$$\sup_{u\in\mathcal{G}^{-1}\left((-\infty,1)\right)} \mathcal{F}(u) \leq C. \tag{3.8}$$

Seja a *mollifier* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dada por

$$\eta(x) := \begin{cases} M \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

em que M é uma constante positiva tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \eta\, dx = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, é definida a função

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^N}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

cujo $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon\, dx = 1$. Escolha $x_0 \in \Omega$ tal que $D := \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ é positivo, e defina $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ como

$$v(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \backslash B\left(0, \frac{2D}{3}\right), \\ 1, & \text{se } x \in B\left(0, \frac{D}{3}\right), \\ \frac{3}{D}\left(2\frac{D}{3} - |x|\right), & \text{se } x \in B\left(0, \frac{2D}{3}\right) \backslash B\left(0, \frac{D}{3}\right). \end{cases}$$

Denota-se por $\eta_\varepsilon * v$ a convolução de η_ε por v, e, por simplicidade, escreve-se $v_\varepsilon = \eta_\varepsilon * v$. Na literatura, são encontradas diversas propriedades amplamente conhecidas sobre as convoluções, algumas das quais são aplicadas neste contexto. Uma referência relevante é o Teorema 7 nos apêndices em [30]. Por exemplo, é sabido que

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} * v\right)(x), \quad \forall x \in B(0, D-\varepsilon).$$

Com isso, percebe-se que

$$\begin{aligned}\Delta v_\varepsilon(x) &= (\Delta\eta_\varepsilon * v)(x)\\ &= \int_{B(0,D)} \eta_\varepsilon(x-y)\left[\left(\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right|^2-1\right)^{-4}\frac{4}{\varepsilon^2}\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right| + \right.\\ &\quad \left.\left(\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right|^2-1\right)^{-3}\frac{8}{\varepsilon^2}\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right| - \left(\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right|^2-1\right)^{-2}\frac{2N}{\varepsilon^2}\right] v(y)\,dy.\end{aligned}$$

A seguir, são feitas algumas observações para estimar o módulo de $\Delta v_\varepsilon(x)$ quando $x \in B(0, D-\varepsilon)$. Considere a função contínua $\beta_\varepsilon : [0,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\beta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^N} M\left(\left|\frac{t^2}{\varepsilon^2}-1\right|^{-4}\frac{4}{\varepsilon^2}\frac{t}{\varepsilon} + \left|\frac{t^2}{\varepsilon^2}-1\right|^{-3}\frac{8}{\varepsilon^2}\frac{t}{\varepsilon} + \left|\frac{t^2}{\varepsilon^2}-1\right|^{-2}\frac{2N}{\varepsilon^2}\right)\exp\left(\frac{1}{\frac{t^2}{\varepsilon^2}-1}\right).$$

Para confirmar a limitação dessa função, perceba que

$$\lim_{t\to\varepsilon^-}\beta_\varepsilon(t) = \lim_{s\to-\infty}\frac{1}{\varepsilon^N}M\exp(s)\left(|s|^4\frac{4}{\varepsilon^2}\sqrt{\frac{1}{s}+1} + |s|^3\frac{8}{\varepsilon^2}\sqrt{\frac{1}{s}+1} + |s|^2\frac{2N}{\varepsilon^2}\right),$$

no qual $s = \frac{1}{\frac{t^2}{\varepsilon^2}-1}$. Dado que, para qualquer $a \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{s\to-\infty}\frac{|s|^a}{\exp(-s)} = \lim_{s\to-\infty}\frac{a!}{(-1)^a\exp(-s)} = 0,$$

é imediato concluir que $\lim_{t\to\varepsilon^-}\beta_\varepsilon(t) = 0$. Consequentemente, existe uma constante positiva C_ε tal que $|\beta_\varepsilon| \le C_\varepsilon$ para todo $t \in [0,\varepsilon)$, e, portanto,

$$|\Delta v_\varepsilon(x)| \le \int_{B(0,D)} C_\varepsilon v(y)\,dy, \quad \forall x \in B(0, D-\varepsilon).$$

Defina $z(x) := v(x-x_0)$ e $z_\varepsilon(x) := v_\varepsilon(x-x_0)$. Em razão de z_ε ser apenas uma translação de v_ε, a estimativa anterior também é válida para $z_\varepsilon(x)$ quando $x \in B(x_0, D-\varepsilon)$. Neste momento, fixe $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, com $\varepsilon_0 < \frac{D}{6}$. Finalmente, defina $w := \varrho z_\varepsilon$, com

$$\varrho < \min\left\{\frac{1}{C_\varepsilon\,|B(0,D)|}, \frac{1}{C_\varepsilon\,|B(0,D)|\,[\Phi(1)|\Omega|]^{\frac{1}{l_\phi}}}\right\}.$$

Desse modo, dado que $0 \le v(x) \le 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, tem-se

$$|\Delta w(x)| = \varrho\,|\Delta v_\varepsilon(x-x_0)| \le \varrho\int_{B(0,D)} C_\varepsilon v(y)\,dy < 1, \quad \forall x \in B(x_0, D-\varepsilon),$$

e

$$\mathcal{G}(w) \le \int_\Omega \Phi(1)\,|\Delta w|^{l_\phi}\,dx \le \int_\Omega \Phi(1)\,[\varrho C_\varepsilon|B(0,D)|]^{l_\phi}\,dx < 1.$$

De acordo com (f_2), é evidente que $F(t) > 0$ para todo $0 < t < \delta$, com δ suficientemente pequeno. Sendo assim, para $\varrho < \delta$, tem-se

$$\frac{\mathcal{F}(w)}{\mathcal{G}(w)} \geq \frac{\displaystyle\int_{B(x_0,\varepsilon)} F(\varrho)\,dx}{\displaystyle\int_{B(0,D-\varepsilon)} \Phi(\varrho)|\Delta v_\varepsilon|^{l_\phi}\,dx} \geq \frac{|B(x_0,\varepsilon)|\,F(\varrho)}{|B(0,D-\varepsilon)|\cdot\left[C_\varepsilon\,|B(0,D)|\right]^{l_\phi}\Phi(\varrho)}.$$

Além disso,

$$\lim_{\varrho\to 0^+}\frac{\mathcal{F}(w)}{\mathcal{G}(w)} \geq \lim_{\varrho\to 0^+}\frac{|B(x_0,\varepsilon)|\,F(\varrho)}{|B(0,D-\varepsilon)|\cdot\left[C_\varepsilon\,|B(0,D)|\right]^{l_\phi}\Phi(\varrho)} = \infty.$$

Isso confirma que, para valores de ϱ suficientemente pequeno, a função w satisfaz as desigualdades em (3.7). Portanto, decorre do Teorema 3.1.5 que, para cada valor de λ pertencente ao intervalo

$$\left(0, \frac{1}{\displaystyle\sup_{u\in\mathcal{G}^{-1}(-\infty,1)}\mathcal{F}(u)}\right),$$

existe, pelo menos, uma solução fraca não trivial u_λ para o problema (3.1) cuja norma em E é estritamente menor que 1. Além disso,

$$\mathcal{I}_\lambda(u_\lambda) \leq \mathcal{I}_\lambda(v), \quad \forall v \in B_E(0,1).$$

Isso encerra a demonstração do teorema. ■

Capítulo 4

Existência e Multiplicidade de Soluções para Sistemas Hamiltonianos em Dimensão Dois com Não Linearidades do Tipo Exponencial

Neste capítulo, é explorado o sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} -\Delta v = f(u) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta u = g(v) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e limitado com fronteira suave, e uma das não linearidades, por exemplo g, apresenta crescimento assintótico exponencial, é invertível e $g(0) = 0$. Outras hipóteses sobre as não linearidades f e g são informadas posteriormente.

Utilizando o método de redução por inversão, o sistema (4.1) é transformado no problema de quarta ordem

$$\begin{cases} -\Delta\left(\phi(-\Delta u)\right) = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

no qual $\phi := g^{-1}$. Para abordar o problema (4.2) de forma variacional, é definido um funcional em um espaço adequado, relacionado a um espaço de Orlicz, sendo um dos principais desafios dessa abordagem a falta de reflexividade desse espaço de Orlicz.

Deseja-se também investigar o problema (4.1) ao incluir um parâmetro real positivo λ na primeira expressão do sistema hamiltoniano. Nesse contexto, e de maneira análoga ao que descreveu-se anteriormente, surge o seguinte problema de quarta ordem com parâmetro

$$\begin{cases} -\Delta\left(\phi(-\Delta u)\right) = \lambda f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

para o qual, a partir da abordagem variacional, é estabelecida a existência e a multiplicidade de soluções fracas.

Neste capítulo, busca-se obter soluções fracas não triviais para os problemas de quarta ordem por meio de uma versão do Teorema do Passo da Montanha, ou pela combinação do Princípio Variacional de Ekeland com a técnica de minimização local. Para atingir esses objetivos, este capítulo é organizado da seguinte maneira: a próxima seção introduz alguns espaços de funções, em especial, o ambiente adequado para aplicar os métodos variacionais. Em seguida, são apresentadas as hipóteses e os principais teoremas a serem demonstrados. Na Seção 4.2, são definidos os funcionais associados aos problemas (4.2) e (4.3), além de serem destacados os teoremas abstratos mencionados anteriormente. Na seção seguinte, demonstram-se as características geométricas destes funcionais e, posteriormente, são apresentados alguns lemas técnicos que ajudam a inferir a convergência das sequências de Cerami quando estas são limitadas. Finalmente, de posse das declarações anteriores, conclui-se a existência de uma solução fraca não trivial. Na Seção 4.4, aborda-se o problema de quarta ordem com parâmetro (4.3) e, com base nas discussões anteriores, conclui-se de forma sucinta a existência e multiplicidade de soluções fracas. Na última seção, é estabelecida a regularidade de uma solução fraca não trivial para os problemas de quarta ordem em destaque neste capítulo.

4.1 Preliminares, Hipóteses e Principais Teoremas

Ao considerar o crescimento assintótico de interesse neste capítulo, é apresentada a seguir uma $\mathcal{N}$-função que pode ser vista como um modelo "canônico" para essa análise. Seja $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $m(s) = \operatorname{sgn}(s)\log(|s|+1)$, cuja função inversa é dada por

$m^{-1}(s) = \operatorname{sgn}(s)\left(e^{|s|} - 1\right)$. A $\mathcal{N}$-função $M : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dada por

$$M(t) = \int_0^{|t|} m(s)\, ds = (|t| + 1)\log(|t| + 1) - |t|,$$

assume um papel central e essencial nesta investigação. Vale ressaltar que

$$\sup_{s>0} \frac{sm(s)}{M(s)} = 2 \quad \text{e} \quad \inf_{s>0} \frac{sm(s)}{M(s)} = 1,$$

o que assegura, nessa ordem, que a $\mathcal{N}$-função M satisfaz a condição Δ_2, enquanto $\widetilde{M}$ não a satisfaz.

É possível e conveniente realizar uma comparação entre o espaço de Orlicz L_M e o espaço Zygmund $L\log L(\Omega)$, ou de forma mais concisa, $L\log L$. Esse último conjunto consiste das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ para as quais a integral

$$\int_\Omega |u(x)| \log^+ |u(x)|\, dx$$

é finita, sendo $\log^+ s := \max\{\log s, 0\}$. O espaço $L\log L$ é dotado da norma

$$\|u\|_{L\log L} = \int_0^{|\Omega|} u^*(t)\left(\log \frac{|\Omega|}{t}\right) dt,$$

na qual u^* denota o *rearranjo decrescente* de u. Para detalhes adicionais, consulte [6].

Uma relação crucial entre o espaço de Orlicz L_M e o espaço de Zygmund $L\log L$ é expressa pela identidade $L_M = L\log L$. Nesse sentido, considerando que ambos, L_M e $L\log L$, são espaços de funções de Banach que correspondem ao mesmo conjunto de funções, o Corolário 1.9 em [6] assegura a equivalência de suas normas.

Diante do espaço de Orlicz L_M e suas características, é apropriado enfatizar as hipóteses requeridas sobre uma função $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dada por $\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)\, ds$, a fim de estabelecer uma $\mathcal{N}$-função equivalente a M. É relevante ressaltar que todas estas hipóteses, embora não sejam mencionadas explicitamente, são consideradas em todas as proposições deste capítulo, as quais incluem as seguintes:

(ϕ_1) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, crescente e contínua, $\phi(0) = 0$ e $\lim\limits_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$;

$\left(\widehat{\phi_2}\right)$ existem constantes positivas a e b tais que

$$\Phi(t) \leq M(at) \quad \text{e} \quad M(t) \leq \Phi(bt), \quad \forall t > 0;$$

(ϕ_3) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t\phi(t)}{\Phi(t)} = 1.$

Antes de prosseguir, é válido destacar algumas implicações acerca de cada hipótese. Por exemplo, (ϕ_1) permite concluir que Φ é uma $\mathcal{N}$-função e, quando combinada com a hipótese $\left(\widehat{\phi_2}\right)$, é equivalente a M. Portanto, a hipótese $\left(\widehat{\phi_2}\right)$ estabelece a relação $L_\Phi = L_M$, conectando assim os espaços L_Φ e $L\log L$. Além disso, é possível deduzir que Φ satisfaz a condição Δ_2 global, e que existem constantes positivas $\breve{C}$ e $\hat{C}$ tais que

$$\breve{C}\|u\|_{L_{(\Phi)}} \leq \|u\|_{L\log L} \leq \hat{C}\|u\|_{L_{(\Phi)}}. \tag{4.4}$$

A equivalência entre M e Φ também estabelece a equivalência entre suas respectivas $\mathcal{N}$-funções complementares $\widetilde{M}$ e $\widetilde{\Phi}$. Mais especificamente,

$$\widetilde{\Phi}(t) \leq \widetilde{M}(2bt) \quad \text{e} \quad \widetilde{M}(t) \leq \widetilde{\Phi}(2at), \quad \forall t > 0, \tag{4.5}$$

o que permite concluir que $\widetilde{\Phi}$ não satisfaz a condição Δ_2 global. Por último, também pode-se inferir que

$$1 = \inf_{s>0} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} < \sup_{s>0} \frac{s\phi(s)}{\Phi(s)} =: m_\phi < \infty. \tag{4.6}$$

Além das afirmações evidenciadas anteriormente, é também relevante destacar quais funções ϕ^{-1} (ou seja, g) estão sendo consideradas. O Corolário 3 em [47], a partir de (4.5), esclarece que

$$\frac{1}{4a} m^{-1}\left(\frac{1}{4a}t\right) \leq \phi^{-1}(t) \leq 4bm^{-1}\left(4bt\right), \quad \forall t > 0,$$

por isso,

$$\frac{1}{4a}\left(e^{\frac{1}{4a}t} - 1\right) \leq \phi^{-1}(t) \leq 4b\left(e^{4bt} - 1\right), \quad \forall t > 0.$$

Observação 4.1.1 *Em (ϕ_3), é suficiente exigir a existência do limite, pois, de acordo com [40, Teorema 4.3], é conhecido que ele deve ser igual a 1.*

Ao contrário das hipóteses sobre ϕ, cada uma das proposições deste capítulo considera que a não linearidade $f \in C(\mathbb{R})$ atende a um subconjunto específico das seguintes condições:

$\left(\widehat{AR}\right)$ existem constantes $t_0 > 0$ e $\theta > 1$ tais que

$$f(t)t \geq \theta F(t) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| > t_0,$$

para $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\,ds$;

(f_0) $f(t) = o\left(|t|^{m_\phi - 1}\right)$ quando $t \to 0$, no qual m_ϕ é dado em (4.6);

(f_2) $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{F(t)}{\Phi(t)} = \infty$;

(f_3) $\max\limits_{t \in [-1,1]} F(t) < \dfrac{1}{|\Omega|} \min\left\{ \dfrac{4\pi}{\hat{C}}, \left(\dfrac{4\pi}{\hat{C}} \right)^{m_\phi} \right\}$, no qual $\hat{C}$ é dado em (4.4);

(f_4) $\lim\limits_{|t| \to \infty} \dfrac{F(t)}{t} = 0.$

De acordo com a continuidade de f, as hipóteses atribuídas a ϕ e o estudo conduzido por Angela Alberico e Vincenzo Ferone em [3], é possível determinar um espaço de funções adequado para abordar variacionalmente o problema de quarta ordem com operador ϕ-biharmônico. A seguir, são apresentados detalhes que esclarecem essa escolha. Inicialmente, considera-se o conjunto

$$L(\log L)^{\frac{1}{2}}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ é mensurável}; \int_0^{|\Omega|} u^*(t) \left(\log \frac{|\Omega|}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \, dt < \infty \right\},$$

o qual é dotado de norma

$$\|u\|_{L(\log L)^{\frac{1}{2}}(\Omega)} = \int_0^{|\Omega|} u^*(t) \left(\log \frac{|\Omega|}{t} \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Para o problema dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = z & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.7}$$

em que $z \in L(\log L)^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, é demonstrado em [3, Teorema 2.2] a existência de uma única solução fraca u em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, nessa demonstração, é mencionado que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|z\|_{L(\log L)^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|z\|_{L \log L}, \tag{4.8}$$

sendo a última desigualdade válida devido à imersão $L \log L \hookrightarrow L(\log L)^{\frac{1}{2}}(\Omega)$. Portanto, dado que $L_\Phi = L \log L$, é definido o espaço vetorial

$$E = \left\{ u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L_\Phi \right\},$$

no qual $\Delta u \in L_\Phi$ expressa que u é uma solução fraca do Problema (4.7) com $z \in L_\Phi$. É evidente que $C_c^\infty(\Omega) \subset E$. A unicidade da solução permite definir a aplicação linear $T : L_\Phi \to E$ dada por $T(z) = u$. Evidentemente, T é sobrejetivo.

No escopo dessa análise, atribui-se ao espaço E a norma

$$\|u\|_E = \left\|T^{-1}(u)\right\|_{L_{(\Phi)}}, \quad u \in E,$$

assegurando que a aplicação T é uma isometria. Consequentemente, T é bijetiva e $(E, \|\cdot\|_E)$ é um espaço de Banach. Além disso, a partir de (4.4) e (4.8), pode-se inferir que E é continuamente imerso em $H_0^1(\Omega)$ e, segundo [3, Corolário 2.3], conclui-se que E também é continuamente imerso em $L^\infty(\Omega)$. Essa imersão é descrita pela desigualdade

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq (4\pi)^{-1} \left\|T^{-1}(u)\right\|_{L\log L} \leq (4\pi)^{-1}\hat{C} \left\|T^{-1}(u)\right\|_{L_{(\Phi)}}, \quad u \in E, \tag{4.9}$$

e desempenha um papel fundamental no desenvolvimento dos argumentos deste capítulo.

De posse do espaço de funções adequado E e suas propriedades, é dito que $u \in E$ é uma solução fraca de (4.3) quando

$$\int_\Omega \phi\big(T^{-1}(u)\big)\, T^{-1}(v)\, dx = \lambda \int_\Omega f(u)v\, dx, \quad \forall v \in E.$$

Neste momento, são apresentados os principais teoremas deste capítulo, que asseguram a existência e a multiplicidade de soluções fracas não triviais para (4.2), além de estabelecer a regularidade dessas soluções, resultando na existência de uma solução clássica para o sistema hamiltoniano. O primeiro deles afirma que

Teorema 4.1.2 *Assuma* (ϕ_1), $\left(\widehat{\phi_2}\right)$, (ϕ_3) *e que* $f \in C(\mathbb{R})$ *atenda às condições* $\left(\widehat{AR}\right)$ *e* (f_0). *Então, existe pelo menos uma solução fraca não trivial para o problema* (4.2).

Esse primeiro teorema explora a existência de uma solução fraca por meio do Teorema do Passo da Montanha aplicado ao funcional associado. É requerida uma condição de superlinearidade no infinito do tipo Ambrosetti-Rabinowitz para a função f. No entanto, é importante ressaltar que também se verificam resultados de existência de solução fraca que não requerem hipóteses de superlinearidade, conforme o teorema a seguir.

Teorema 4.1.3 *Assuma* (ϕ_1), $\left(\widehat{\phi_2}\right)$, (ϕ_3) *e que* $f \in C(\mathbb{R})$ *atenda à condição* (f_2), *além de satisfazer* (f_3) *ou* (f_4). *Então, existe pelo menos uma solução fraca não trivial para o problema* (4.2).

Ressalta-se que a combinação de (f_2) e (f_3) neste último teorema impõe restrições a f apenas na origem, sem nenhuma condição adicional no infinito.

Empregando alguns dos argumentos utilizados nas demonstrações dos teoremas anteriores, é possível estabelecer a existência e a multiplicidade de soluções fracas para o problema de quarta ordem com parâmetro (4.3), veja o resultado a seguir.

Teorema 4.1.4 *Assuma* (ϕ_1), $\left(\widehat{\phi_2}\right)$, (ϕ_3), *e que* $f \in C(\mathbb{R})$ *atenda às condições* $\left(\widehat{AR}\right)$ *ou* (f_2). *Então, existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que para qualquer* $\lambda \in (0, \lambda_0)$, *existe pelo menos uma solução fraca não trivial para o problema* (4.3). *Além disso, se* f *satisfaz* $\left(\widehat{AR}\right)$ *e* (f_2) *simultaneamente, então há pelo menos duas soluções fracas não triviais.*

Sob a imposição de condições de regularidade mais fortes sobre f e ϕ, estabelece-se a regularidade da solução fraca e, consequentemente, prova-se a existência de uma solução clássica para o sistema hamiltoniano (4.1). Este resultado é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 4.1.5 *Assuma* (ϕ_1), $\left(\widehat{\phi_2}\right)$ *e* (ϕ_3), *e defina* $g := \phi^{-1}$. *Suponha que* $f, g \in C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R})$ *e* Ω *é um domínio de classe* $C^{2,\gamma}$ *para algum* $0 < \gamma < 1$. *Se* $u \in E$ *é uma solução fraca de* (4.2) *(ou* (4.3)*) e* $v := \phi(T^{-1}(u))$, *então* $(u, v) \in C^{2,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) \times C^{2,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ *e* (u, v) *é uma solução clássica de* (4.1) *(ou do sistema hamiltoniano com parâmetro).*

4.2 Estrutura Variacional

Nesta seção, é apresentado o funcional de energia associado aos problemas (4.2) e (4.3), juntamente com os principais teoremas abstratos aplicáveis a ele.

Baseada na caracterização de uma solução fraca do problema (4.3), seu funcional associado, $\mathcal{I}_\lambda$, é definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{I}_\lambda : & E & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \mathcal{I}(u) = \displaystyle\int_\Omega \Phi\big(T^{-1}(u)\big)\,dx - \lambda \int_\Omega F(u)\,dx. \end{array} \tag{4.10}$$

Em relação ao funcional associado ao problema (4.2), observa-se que ele corresponde a um caso particular de $\mathcal{I}_\lambda$ com $\lambda = 1$, sendo denotado simplesmente por $\mathcal{I}$. Os principais teoremas abstratos que se aplicam a esses funcionais são discutidos posteriormente.

O funcional $\mathcal{I}_\lambda$ é contínuo e Gâteaux diferenciável, e sua derivada é dada por

$$\mathcal{I}'_\lambda(u)(v) = \int_\Omega \phi(T^{-1}(u))T^{-1}(v)\,dx - \lambda \int_\Omega f(u)v\,dx, \quad \forall u, v \in E. \tag{4.11}$$

De posse dessa igualdade, é imediato concluir que um ponto crítico de $\mathcal{I}_\lambda$ corresponde a uma solução fraca para o problema de quarta ordem. Além disso, verifica-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_\lambda : \quad E &\to E^* \\ u &\mapsto \mathcal{I}'_\lambda(u) \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua da topologia da norma em E para a topologia fraca estrela em E^*. Além disso, a função $\mathcal{J} : E \to E^*$, definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) : \quad E &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \mathcal{J}(u)(v) = \int_\Omega \phi\big(T^{-1}(u)\big)\, T^{-1}(v)\, dx. \end{aligned} \tag{4.12}$$

é injetiva.

Nas próximas seções, é assegurada a existência e multiplicidade de pontos críticos não triviais para os funcionais $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}_\lambda$ quando λ é suficientemente pequeno. Para isso, são aplicadas ferramentas da teoria dos pontos críticos: uma versão do Teorema do Passo da Montanha, o qual é enunciado no Teorema de Ghoussoub-Preiss em [29], e a combinação do Princípio Variacional de Ekeland com minimização local, dado no Teorema 4.1 em [21]. Para facilitar a leitura, são apresentados a seguir os teoremas correspondentes.

Teorema 4.2.1 *Sejam X um espaço de Banach real e $\mathcal{H} : X \to \mathbb{R}$ um funcional contínuo e Gâteaux diferenciável tal que $\mathcal{H}' : X \to X^*$ é contínuo da topologia da norma em X para a topologia fraca estrela em X^*. Sejam $u_1, u_2 \in X$ e defina*

$$c_{pm} := \inf_{\alpha\in\Gamma} \max_{u\in\alpha([0,1])} \mathcal{H}(u),$$

para

$$\Gamma = \{\alpha \in C([0,1], X); \alpha(0) = u_1, \alpha(1) = u_2\}.$$

Assuma que $\mathcal{H}$ satisfaz a condição de Cerami no nível c_{pm}, e que

$$c_{pm} > \max\{\mathcal{H}(u_1), \mathcal{H}(u_2)\}.$$

Então, existe um ponto crítico de $\mathcal{H}$ no nível c_{pm}, ou seja, existe $u_0 \in X$ tal que

$$\mathcal{H}'(u_0) = 0 \quad e \quad \mathcal{H}(u_0) = c_{pm}.$$

Teorema 4.2.2 *Considere (X, d) um espaço métrico completo e $\mathcal{H} : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, dado que $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in X$ tal que*

$$\mathcal{H}(u_\varepsilon) \le \inf_{u\in X} \mathcal{H}(u) + \varepsilon$$

e

$$\mathcal{H}(u_\varepsilon) < \mathcal{H}(u) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon), \quad \forall u \in X, \ \text{com } u \neq u_\varepsilon.$$

Antes de iniciar a próxima seção, cabe relembrar que as hipóteses (ϕ_1), $\left(\widehat{\phi_2}\right)$ e (ϕ_3) são consideradas em todas as proposições deste capítulo, mesmo que não sejam mencionadas explicitamente.

4.3 Existência de Solução Fraca para o Problema de Quarta Ordem

O objetivo desta seção é estabelecer a existência de pelo menos um ponto crítico não trivial para o funcional $\mathcal{I}$, o qual corresponde a uma solução fraca do problema de quarta ordem (4.2).

4.3.1 A Geometria do Funcional Associado

Nesta subseção, são apontadas e demonstradas as características geométricas do funcional $\mathcal{I}$ com base nas diferentes hipóteses assumidas sobre a não linearidade f nas proposições a seguir.

Proposição 4.3.1 *O funcional $\mathcal{I} : E \to \mathbb{R}$ definido em* (4.10) *cumpre a geometria do Passo da Montanha. Mais especificamente:*

(i) se (f_0) é satisfeita, então existem constantes positivas σ e ς tais que

$$\mathcal{I}(u) \geq \sigma, \ \forall u \in \{w \in E; \|w\|_E = \varsigma\};$$

(ii) se $\left(\widehat{AR}\right)$ é satisfeita, então existe $e \in E$ tal que $\|e\|_E > \varsigma$ e $\mathcal{I}(e) \leq 0$.

Demonstração. De acordo com a condição (f_0), dado $\varepsilon > 0$, existe um valor correspondente $\delta > 0$ tal que

$$|F(t)| \leq \frac{\varepsilon}{m_\phi}|t|^{m_\phi}, \quad \forall t \in (-\delta, \delta).$$

Conforme indicado em (4.9), tem-se

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\hat{C}}{4\pi}\|u\|_E < \delta,$$

para todo $u \in E$ com $\|u\|_E < 4\pi\delta\hat{C}^{-1}$. Portanto,

$$\left|\int_\Omega F(u)\,dx\right| \leq \int_\Omega \frac{\varepsilon}{m_\phi}\|u\|^{m_\phi}_{L^\infty(\Omega)}\,dx \leq \frac{\varepsilon|\Omega|\hat{C}^{m_\phi}}{m_\phi(4\pi)^{m_\phi}}\|u\|^{m_\phi}_E, \tag{4.13}$$

sempre que $\|u\|_E < 4\pi\delta\hat{C}^{-1}$. Finalmente, ao considerar $\|u\|_E < \min\left\{4\pi\delta\hat{C}^{-1}, 1\right\}$, conclui-se, com base no Lema 1.4.2 e na desigualdade (4.13), que

$$\mathcal{I}(u) \geq \|u\|_E^{m_\phi} - \frac{\varepsilon|\Omega|\hat{C}^{m_\phi}}{m_\phi(4\pi)^{m_\phi}}\|u\|_E^{m_\phi} = \|u\|_E^{m_\phi}\left[1 - \frac{\varepsilon|\Omega|\hat{C}^{m_\phi}}{m_\phi(4\pi)^{m_\phi}}\right].$$

Isso confirma o item (i), ao realizar uma escolha apropriada de ε. No intuito de comprovar o item (ii), são examinadas inicialmente algumas hipóteses. A partir de (ϕ_3), é possível afirmar que, dado $0 < \varepsilon < \theta - 1$, existe $A > 0$ tal que

$$\frac{t\phi(t)}{\Phi(t)} < 1 + \varepsilon =: \theta_0, \quad \forall t \geq A, \tag{4.14}$$

e, consequentemente,

$$\Phi(t) \leq \Phi(A)\frac{t^{\theta_0}}{A^{\theta_0}}, \quad \forall t \geq A. \tag{4.15}$$

Dado que Φ é uma função contínua e par, conclui-se que existe uma constante positiva C tal que

$$\Phi(t) \leq \Phi(A)\frac{|t|^{\theta_0}}{A^{\theta_0}} + C, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nesta etapa, é essencial a hipótese $\left(\widehat{AR}\right)$, pois permite inferir a existência de uma constante positiva C_0, para a qual vale a seguinte desigualdade:

$$F(t) \geq C_0|t|^\theta, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } |t| > t_0. \tag{4.16}$$

Agora, seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$, e existem $x_0 \in \Omega$ e uma vizinhança sua V_{x_0} contida em Ω, com $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in V_{x_0}$. Para cada $t > t_0$, é possível observar a partir de (4.15) e (4.16) que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(t\varphi) &\leq \int_\Omega \Phi\big(tT^{-1}(\varphi)\big)\, dx - \int_{V_{x_0}} F(t\varphi)\, dx - \int_{(V_{x_0})^c \cap \{|t\varphi(x)| \leq t_0\}} F(t\varphi)\, dx \\
&\leq \int_\Omega \left[\Phi(A)\frac{|t\Delta\varphi|^{\theta_0}}{A^{\theta_0}} + C\right] dx - \int_{V_{x_0}} F(t\varphi)\, dx + C_0 \\
&\leq C_1 t^{\theta_0} - C_2 t^\theta + C_3.
\end{aligned}$$

Portanto, é imediado que $\mathcal{I}(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, pois $\theta_0 < \theta$. Isso encerra a demonstração do item (ii). ∎

Proposição 4.3.2 *Assuma que $f \in C(\mathbb{R})$ atenda à condição (f_2). Então, para todo $r > 0$, tem-se*

$$i_r := \inf_{u \in B_E[0,r]} \mathcal{I}(u) < 0.$$

Demonstração. A partir de (4.9), com $r > 0$ fixado, vê-se que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq (4\pi)^{-1}\hat{C}r$ para todo $u \in B_E[0,r]$. Dado que Φ é não negativa e F é contínua, obtém-se que

$$\mathcal{I}(u) \geq -\int_\Omega |F(u)|\,dx \geq -|\Omega| \max_{|t|\leq(4\pi)^{-1}\hat{C}r} |F(t)|, \quad \forall u \in B_E[0,r].$$

Isso assegura que $\mathcal{I}\big|_{B_E[0,r]}$ é limitado inferiormente. O próximo passo é exibir uma função $w \in E$ tal que, para algum $0 < \delta_0 < 1$,

$$\mathcal{I}(\delta w) < 0, \quad \forall \delta \in (0, \delta_0)\,.$$

A escolha dessa função é realizada de maneira similar à presente na prova do Teorema 3.1.3 na Seção 3.2. Recomenda-se a leitura desse trecho para uma análise mais completa, pois diversos aspectos são omitidos a seguir para evitar repetições desnecessárias. Para cada $\varepsilon > 0$, escolha a função $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$\eta_\varepsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{M}{\varepsilon^2} \exp\left(\dfrac{1}{\left|\dfrac{x}{\varepsilon}\right|^2 - 1}\right), & \text{se } |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{se } |x| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

em que M é uma constante positiva tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon\,dx = 1$. Escolha $x_0 \in \Omega$ tal que $D := \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ é positiva, e defina $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$v(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^2 \backslash B\left(0, \frac{2D}{3}\right), \\ 1, & \text{se } x \in B\left(0, \frac{D}{3}\right), \\ \frac{3}{D}\left(2\frac{D}{3} - |x|\right), & \text{se } x \in B\left(0, \frac{2D}{3}\right) \backslash B\left(0, \frac{D}{3}\right). \end{cases}$$

Fixado $\varepsilon \in (0, D/6)$, é escolhida a convolução $\eta_\varepsilon * v$ e definido $w(x) := (\eta_\varepsilon * v)(x - x_0)$ para cada $x \in \Omega$. Finalmente, a partir de (f_2), conclui-se que

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{\mathcal{F}(\delta w)}{\mathcal{G}(\delta w)} = \infty.$$

Portanto, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{I}(\delta w) = \mathcal{G}(\delta w) - \mathcal{F}(\delta w) = \mathcal{F}(\delta w)\left[\frac{\mathcal{G}(\delta w)}{\mathcal{F}(\delta w)} - 1\right] < 0, \quad \forall \delta \in (0, \delta_0).$$

Isso finaliza a prova da proposição. ∎

Embora a proposição anterior assegure que o funcional $\mathcal{I}$ é limitado inferiormente quando restrito a qualquer bola fechada centrada na origem em E, é fundamental

concluir que, para algum raio específico $R > 0$, também se tenha $\mathcal{I}(u) > 0$ para todo $u \in \partial B_E[0, R]$. Isso é crucial para inferir, seguindo os passos da demonstração do Teorema 4.4 em [22], a existência de uma sequência de Cerami de $\mathcal{I}$ no nível i_R.

Proposição 4.3.3 *Assuma que $f \in C(\mathbb{R})$ atenda à condição (f_3) ou (f_4). Então, para algum $R > 0$, $\mathcal{I}(u) > 0$ para todo $u \in \partial B_E[0, R]$.*

Demonstração. Ao assumir a condição (f_3) e escolher $R = 4\pi\hat{C}^{-1}$, nota-se, a partir de (4.9), que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ para todo $u \in \partial B_E[0, R]$. Dessa forma, conclui-se que

$$\mathcal{I}(u) \geq \min\left\{\frac{4\pi}{\hat{C}}, \left(\frac{4\pi}{\hat{C}}\right)^{m_\phi}\right\} - \max_{t\in[-1,1]} F(t)|\Omega| > 0, \quad \forall u \in \partial B_E[0, R].$$

Por outro lado, ao adotar a condição (f_4) e considerar a continuidade de f, é possível assegurar que, para cada $\varepsilon > 0$ e $q \in (0, 1)$, existe uma constante positiva $C(\varepsilon, q)$, por simplicidade escreve-se C, tal que

$$|F(t)| \leq \varepsilon|t| + C|t|^q, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, para todo $u \in E$ com $\|u\|_E \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(u) &\geq \|T^{-1}(u)\|_{L_{(\Phi)}} - \varepsilon\|u\|_{L^1(\Omega)} - C\int_\Omega |u|^q\,dx \\
&\geq \|u\|_E - C_0\varepsilon\|u\|_E - C\|u\|^q_{L^\infty(\Omega)} \\
&\geq \|u\|_E - C_0\varepsilon\|u\|_E - C\|u\|^q_E,
\end{aligned}$$

em que C_0 é a constante de imersão de E em $L^1(\Omega)$. Por fim, fixado $0 < \varepsilon < (C_0)^{-1}$, escolha $R > \left(\frac{C}{1-C_0\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-q}}$ e observe que

$$\mathcal{I}(u) \geq \|u\|^q_E \left[(1 - C_0\varepsilon)\,\|u\|^{1-q}_E - C\right] > 0, \quad \forall u \in \partial B_E[0, R].$$

Isso encerra a demonstração da proposição. ∎

4.3.2 A Condição de Compacidade de Cerami

O objetivo desta subseção é justificar que, se uma sequência de Cerami para o funcional $\mathcal{I}$ é limitada em E, então ela possui uma subsequência convergente em E. No entanto, ao contrário dos casos em que o Princípio Variacional de Ekeland é aplicado e obtém-se uma sequência de Cerami já limitada, o Teorema 4.1.2 requer a demonstração da limitação em E dessas sequências. Nesse sentido, apresenta-se o seguinte lema.

Lema 4.3.4 *Assuma que $f \in C(\mathbb{R})$ atenda à condição $\left(\widehat{AR}\right)$. Então, qualquer sequência de Cerami $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{I}$ é limitada em E.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cerami de $\mathcal{I}$ no nível c. Para simplificar as expressões a seguir, escreva $h_n := T^{-1}(u_n)$. Dado que ϕ é uma função ímpar, nota-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(u_n) - \tfrac{1}{\theta}\mathcal{I}'(u_n)(u_n) = \frac{1}{\theta}\int_{\{|u_n|>t_0\}\cup\{|u_n|\leq t_0\}} [f(u_n)u_n - \theta F(u_n)]\,dx \\ + \frac{1}{\theta}\int_\Omega \left[\theta\Phi(|h_n|) - \phi(|h_n|)\,|h_n|\right]\,dx.\end{aligned}$$

Assim, ao empregar $\left(\widehat{AR}\right)$ e a continuidade de f, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(u_n) - \frac{1}{\theta}\mathcal{I}'(u_n)(u_n) &\geq \frac{1}{\theta}\int_{\{|u_n|\leq t_0\}} [f(u_n)u_n - \theta F(u_n)]\,dx \\ &\quad + \frac{1}{\theta}\int_\Omega \left[\theta\Phi(|h_n|) - \phi(|h_n|)\,|h_n|\right]\,dx \\ &\geq -C + \frac{1}{\theta}\int_\Omega \left[\theta\Phi(|h_n|) - \phi(|h_n|)\,|h_n|\right]\,dx.\end{aligned}$$

Continuando a análise da expressão anterior, utiliza-se a continuidade de ϕ e a equação (4.14) para concluir que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(u_n) - \frac{1}{\theta}\mathcal{I}'(u_n)(u_n) &\geq -C + \frac{1}{\theta}\int_{\{|h_n|>A\}} \left[\theta\Phi(|h_n|) - \phi(|h_n|)\,|h_n|\right]\,dx \\ &\geq -C + \frac{1}{\theta}(\theta-\theta_0)\int_{\{|h_n|>A\}} \Phi(|h_n|)\,dx.\end{aligned}$$

Em razão de Φ ser não negativa e $\theta_0 \in (1,\theta)$, é possível afirmar que

$$\mathcal{I}(u_n) - \frac{1}{\theta}\mathcal{I}'(u_n)(u_n) \geq -C + \frac{1}{\theta}(\theta-\theta_0)\int_\Omega \Phi(|h_n|)\,dx.$$

Combinando a equivalência da norma de Luxemburgo e de Orlicz, e a desigualdade de Young, observa-se que

$$\|u_n\|_E \leq 1 + \int_\Omega \Phi(h_n)\,dx.$$

Consequentemente, tem-se

$$\mathcal{I}(u_n) - \frac{1}{\theta}\mathcal{I}'(u_n)(u_n) \geq -C + \frac{1}{\theta}(\theta-\theta_0)\left(\|u_n\|_E - 1\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, a partir da definição de sequência de Cerami, é imediato verificar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$c+1 > \mathcal{I}(u_n) - \frac{1}{\theta}\mathcal{I}'(u_n)(u_n), \quad \forall n \geq n_0.$$

Portanto,

$$c+1 > -C + \frac{1}{\theta}(\theta-\theta_0)\left(\|u_n\|_E - 1\right), \quad \forall n \geq n_0,$$

e, finalmente, confirma-se que a sequência de Cerami $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em E. ∎

Apoiados na limitação da sequência de Cerami para $\mathcal{I}$, são obtidas várias convergências expressas no lema a seguir. Neste momento, é fundamental recordar a definição do espaço $E_{\widetilde{\Phi}}$ em (1.3), pois ele é útil quando a $\mathcal{N}$-função complementar $\widetilde{\Phi}$ não atende a condição Δ_2 (ou Δ_2 global).

Lema 4.3.5 *Assuma que $f \in C(\mathbb{R})$ e seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cerami de $\mathcal{I}$ limitada em E. Então, a menos de alguma subsequência, existe $u \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e, para $h_n = T^{-1}(u_n)$ e $h = T^{-1}(u) \in L_\Phi$, vale o seguinte:*

(i) $\displaystyle\int_\Omega h_n v\,dx \to \int_\Omega hv\,dx, \quad \forall v \in E_{\widetilde{\Phi}};$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega \phi(h_n)v\,dx \to \int_\Omega \phi(h)v\,dx, \quad \forall v \in L_\Phi;$

(iii) $\displaystyle\int_\Omega [\phi(h_n)-\phi(h)](h_n-h)\,dx \to 0.$

Demonstração. A partir de (4.8), é possível inferir que a limitação de uma sequência de Cerami $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em E implica na sua limitação em $H_0^1(\Omega)$. Sendo assim, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, a menos de alguma subsequência. Portanto, tem-se

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi\,dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\,dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.17}$$

Novamente, da limitação da sequência de Cerami, que equivale à limitação de $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em L_Φ, e do isomorfismo entre $[E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)]^*$ e L_Φ, conclui-se, a partir do Teorema 3.16 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) em [12], a existência de $h \in L_\Phi$ tal que

$$\int_\Omega h_n v\,dx \to \int_\Omega hv\,dx, \quad \forall v \in E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega). \tag{4.18}$$

Conhecendo a densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$, destaca-se que: para cada φ, existe uma sequência $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_k \to \varphi$ em $H_0^1(\Omega)$. Por outro lado, dado que u_n é uma solução para o problema (4.7), com $h_n := T^{-1}(u_n)$, sabe-se que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi_k\,dx = \int_\Omega h_n\varphi_k\,dx, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ao aplicar o limite quando $n \to \infty$, e as afirmações em (4.17) e (4.18), infere-se que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_k \, dx = \int_\Omega h \varphi_k \, dx, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

visto que $C_c^\infty(\Omega) \subset E_{\widetilde{\Phi}}$. De acordo com a definição de T,

$$\int_\Omega \nabla T(h) \nabla \varphi_k \, dx = \int_\Omega h \varphi_k \, dx, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, a convergência $\varphi_k \to \varphi$ em $H_0^1(\Omega)$ assegura que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \nabla T(h) \nabla \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

e, assim, $u = T(h) \in E$. Isso certifica o item (i). Para verificar o item (ii), são utilizados argumentos semelhantes aos presentes em [35, Seção 3.4]. Primeiramente, de acordo com o Lema 1.4.1, nota-se que a sequência $\{\phi(h_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L_{\widetilde{\Phi}}$. Em seguida, utilizando um argumento análogo ao empregado no início da prova do item (i) e levando em consideração que $L_{\widetilde{\Phi}} = (L_\Phi)^*$, pois Φ é Δ_2, conclui-se a existência de $q \in L_{\widetilde{\Phi}}$ tal que

$$\int_\Omega \phi(h_n) v \, dx \to \int_\Omega q v \, dx, \quad \forall v \in L_\Phi. \tag{4.19}$$

Resta inferir que $q = \phi(h)$. De fato, sabe-se que

$$|\mathcal{I}'(u_n)\varphi| \leq \|\mathcal{I}'(u_n)\|_{E^*} \|\varphi\|_E \leq (1 + \|\varphi\|_E) \|\mathcal{I}'(u_n)\|_{E^*}, \quad \forall \varphi \in E.$$

Como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cerami em E, tem-se

$$\mathcal{I}'(u_n)(u_n - u) \to 0, \tag{4.20}$$

no qual

$$\mathcal{I}'(u_n)(u_n - u) = \int_\Omega \phi(h_n)(h_n - h) \, dx - \int_\Omega f(u_n)(u_n - u) \, dx.$$

A convergência fraca $u \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ assegura que

$$\int_\Omega |u_n - u| \, dx \to 0.$$

Dado que f é contínua e, em virtude de (4.9), a sequência de Cerami também é limitada em $L^\infty(\Omega)$, tem-se

$$\int_\Omega f(u_n)(u_n - u) \, dx \to 0. \tag{4.21}$$

Portanto, é imediato de (4.20) e (4.21), que

$$\int_\Omega \phi(h_n)(h_n - h)\,dx = \mathcal{I}'(u_n)(u_n - u) + \int_\Omega f(u_n)(u_n - u)\,dx \to 0 \tag{4.22}$$

e, assim, por (4.19), conclui-se

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi(h_n)h_n\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi(h_n)h\,dx = \int_\Omega qh\,dx.$$

Como ϕ é crescente, sabe-se que

$$0 \leq \int_\Omega [\phi(h_n) - \phi(w)](h_n - w)\,dx, \quad \forall w \in L^\infty(\Omega). \tag{4.23}$$

Usando (4.18) e (4.23), ao aplicar o limite quando $n \to \infty$, tem-se

$$0 \;\leq\; \int_\Omega [q - \phi(w)](h - w)\,dx, \quad \forall w \in L^\infty(\Omega). \tag{4.24}$$

Para prosseguir, para cada $j \in \mathbb{N}$, define-se $\Omega_j := \{x \in \Omega; |h(x)| \leq j\}$ e $\mathcal{X}_j$ como a função característica de Ω_j. Fixado $w \in L^\infty(\Omega)$ e utilizando $\overline{w} = w\mathcal{X}_j - h\mathcal{X}_j + h\mathcal{X}_l$ em (4.24), com $l \geq j$, obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 \;&\leq\; \int_\Omega [q - \phi(\overline{w})](h - \overline{w})\,dx \\ &=\; \int_\Omega [q - \phi(\overline{w})]\,(h - h\mathcal{X}_l)\,dx + \int_\Omega [q - \phi(\overline{w})](h\mathcal{X}_j - w\mathcal{X}_j)\,dx. \end{aligned}$$

O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue assegura que

$$\int_\Omega [q - \phi(\overline{w})]\,(h - h\mathcal{X}_l)\,dx \to 0$$

quando $l \to \infty$, pois

$$[q(x) - \phi(\overline{w}(x))]\,[h(x) - h(x)\mathcal{X}_l(x)] \to 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

e

$$|[q(x) - \phi(\overline{w}(x))]\,[h(x) - h(x)\mathcal{X}_l(x)]| \leq |[q(x) - \phi(\overline{w}(x))]\,h(x)|\,, \quad \forall x \in \Omega, \forall l \in \mathbb{N},$$

com $(q - \phi(\overline{w}))\,h \in L^1(\Omega)$. Portanto, pode-se concluir que

$$\int_\Omega [q - \phi(\overline{w})](h\mathcal{X}_j - w\mathcal{X}_j)\,dx \geq 0, \quad \forall w \in L^\infty(\Omega),$$

e, consequentemente,

$$\int_{\Omega_j} [q - \phi(w)](h - w)\,dx = \int_\Omega [q - \phi(\overline{w})](h\mathcal{X}_j - w\mathcal{X}_j)\,dx \geq 0, \quad \forall w \in L^\infty(\Omega), \tag{4.25}$$

pois

$$\begin{cases} (h-w)\mathcal{X}_j = 0 \text{ em } [\Omega_j]^c, \\ \overline{w} = w\mathcal{X}_j = w \text{ em } \Omega_j. \end{cases}$$

Então, para qualquer $t \in [-1,1]$ e todo $z \in L^\infty(\Omega)$, aplica-se $w = (h+tz)\mathcal{X}_j$ na expressão (4.25) para obter que

$$0 \leq \int_{\Omega_j} [q - \phi(h+tz)][h-(h+tz)]\,dx = -t\int_{\Omega_j} [q-\phi(h+tz)]z\,dx.$$

Sendo assim,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_j} [q-\phi(h+tz)]z\,dx \leq 0, \text{ se } t \in [0,1], \\ \displaystyle\int_{\Omega_j} [q-\phi(h+tz)]z\,dx \geq 0, \text{ se } t \in [-1,0]. \end{cases}$$

Considerando as sequências $t_n^+ \nearrow 0$ e $t_n^- \nearrow 0$, e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, tem-se

$$\int_{\Omega_j} [q-\phi(h)]z\,dx = 0, \quad \forall z \in L^\infty(\Omega),$$

e, assim, $q = \phi(h)$ em Ω_j. Dado que j é um número natural arbitrário, conclui-se que $q = \phi(h)$ em Ω. Portanto, decorre de (4.19) que

$$\int_\Omega \phi(h_n)v\,dx \to \int_\Omega \phi(h)v\,dx, \quad \forall v \in L_\Phi.$$

Isso leva à conclusão do item (ii). Para demonstrar o último item do lema, são empregados argumentos semelhantes aos utilizados na prova de (4.22). Assim, lembrando que $\mathcal{I}'(u_n)(w) \to 0$, verifica-se que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \phi(h_n)T^{-1}(w)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(u_n)w\,dx = \int_\Omega f(u)w\,dx, \quad \forall w \in E.$$

Finalmente, a partir do item (ii) e da unicidade do limite, tem-se

$$\int_\Omega \phi(h)T^{-1}(w)\,dx = \int_\Omega f(u)w\,dx, \quad \forall w \in E,$$

ou seja, $\mathcal{I}'(u) = 0$. Resgatando a convergência em (4.20) e seguindo as ideias usadas para obter (4.21), conclui-se que

$$\int_\Omega [\phi(h_n)-\phi(h)]\,(h_n-h)\,dx = [\mathcal{I}'(u_n)-\mathcal{I}'(u)]\,(u_n-u) + \int_\Omega [f(u_n)-f(u)](u_n-u)\,dx \to 0,$$

o que encerra a demonstração do lema. ∎

A proposição a seguir certifica que o funcional $\mathcal{I}$ satisfaz a condição de compacidade de Cerami quando f satisfaz a condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz.

Proposição 4.3.6 *Assuma que $f \in C(\mathbb{R})$ e seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cerami de $\mathcal{I}$ limitada em E. Então, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em E.*

Demonstração. Considerando $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cerami de $\mathcal{I}$ limitada em E, seja $u \in E$ dado pelo Lema 4.3.5. Para concluir que existe uma subsequência de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente em E, é suficiente demonstrar que

$$\int_\Omega \Phi(h_n - h)\, dx \to 0,$$

sendo $h_n = T^{-1}(u_n)$ e $h = T^{-1}(u)$. Inicialmente, conforme estabelecido pelo item (iii) do Lema 4.3.5, observa-se que $[\phi(h_n) - \phi(h)](h_n - h)(x) \to 0$ quase sempre em Ω, em relação a alguma subsequência. O Lema 1.4.6 confirma que a sequência $\{h_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $h(x)$ quase sempre em Ω. Devido à continuidade de Φ, tem-se

$$\Phi(h_n(x) - h(x)) \to 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, dado que Φ é crescente e satisfaz a condição Δ_2, existe uma constante positiva C_Φ tal que

$$\begin{aligned}
\Phi(h_n(x) - h(x)) &\leq \Phi(2\max\{|h_n(x)|, |h(x)|\}) \\
&\leq C_\Phi\left[\Phi(|h_n(x)|) + \Phi(|h(x)|)\right] \\
&\leq C_\Phi\left[\phi\left(h_n(x)\right) h_n(x) + \Phi(|h(x)|)\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Recuperando da demonstração do Lema 4.3.5 o fato de que

$$\int_\Omega \phi(h_n)h_n\, dx \to \int_\Omega \phi(h)h\, dx,$$

pode-se concluir, a partir do Lema de Brezis-Lieb, que

$$\int_\Omega |\phi(h_n)h_n - \phi(h)h|\, dx \to 0.$$

Assim, o Teorema 4.9 em [12] assegura a existência de um elemento $w \in L^1(\Omega)$ tal que $\phi(h_n(x))h_n(x) \leq w(x)$ quase sempre em Ω. Então,

$$\Phi(h_n(x) - h(x)) \leq C_\Phi\left[w(x) + \Phi(h(x))\right], \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N},$$

no qual $C\left[w + \Phi(h)\right] \in L^1(\Omega)$. Finalmente, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue confirma que

$$\int_\Omega \Phi(h_n - h)\, dx \to 0,$$

concluindo a prova da proposição. ∎

4.3.3 Prova Completo dos Teoremas 4.1.2 e 4.1.3

Nesta subseção, são compiladas todas as proposições anteriores, resultando na apresentação das demonstrações que confirmam a existência de uma solução fraca não trivial para o problema de quarta ordem (4.2).

Demonstração do Teorema 4.1.2. Assumindo-se as hipóteses (f_0) e $\left(\widehat{AR}\right)$, a prova do Teorema 4.1.2 inicia-se com a aplicação da Proposição 4.3.1, que estabelece que o funcional $\mathcal{I}$ cumpre a geometria do Passo da Montanha, com

$$c_{pm} := \inf_{\alpha\in\Gamma}\max_{u\in\alpha([0,1])}\mathcal{I}(u) > \max\{\mathcal{I}(0),\mathcal{I}(e)\} = 0,$$

para

$$\Gamma = \{\alpha \in C([0,1],E); \alpha(0) = 0, \alpha(1) = e\}.$$

Na Subseção 4.3.2, após verificar alguns lemas técnicos, mostrou-se que $\mathcal{I}$ satisfaz a condição de compacidade de Cerami, conforme demonstrado na Proposição 4.3.6. Portanto, pelo Teorema 4.2.1, existe um ponto crítico u_0 de $\mathcal{I}$ no nível c_{pm}. Em razão de $\mathcal{I}(0) = 0$, conclui-se que $u_0 \in E$ é uma solução fraca não trivial para o problema (4.2), pois $\mathcal{I}(u_0) > 0$. ∎

Demonstração do Teorema 4.1.3. Assumindo-se as hipóteses (f_2) e (f_3), ou (f_2) e (f_4), a prova do Teorema 4.1.3 inicia-se aplicando a Proposição 4.3.2, a qual assegura que o funcional $\mathcal{I}\big|_{B_E[0,r]}$, que é semicontínuo inferiormente, possui ínfimo negativo para todo $r > 0$. Com isso, o Princípio Variacional de Ekeland assegura a existência de uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $B_E[0,r]$ tal que

$$\mathcal{I}(u_n) \to i_r$$

e

$$\mathcal{I}(u_n) < \mathcal{I}(u) + \frac{1}{n}d(u,u_n),\ \forall u \in B_E[0,r], \quad \text{com } u \neq u_n. \tag{4.26}$$

Para desfrutar melhor da relação (4.26), é essencial que os elementos da sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não pertençam à fronteira do conjunto $B_E[0,r]$. Isso se deve à Proposição 4.3.3, que estabelece a existência de uma constante $R > 0$ tal que $\mathcal{I}(u) > 0$ para todo $u \in \partial B_E[0,R]$. Consequentemente, apoiados na demonstração do Teorema 4.4 em [22], a relação (4.26) confere que

$$\|\mathcal{I}'(u_n)\|_{E^*} \to 0,$$

resultando que a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, limitada por natureza, é uma sequência de Cerami de $\mathcal{I}$ no nível i_R. Sendo assim, de acordo com a Proposição 4.3.6, existe $u_0 \in E$ tal que $u_n \to u_0$ em E, a menos de alguma subsequência. Portanto,

$$\mathcal{I}(u_n) \to \mathcal{I}(u) = \inf_{u\in B_E[0,R]} \mathcal{I}(u) < 0$$

e

$$\mathcal{I}'(u_n)(\varphi) \to \mathcal{I}'(u_0)(\varphi), \quad \forall \varphi \in E.$$

Por fim, u_0 é um ponto crítico de $\mathcal{I}$ em E, com $\mathcal{I}(u_0) < 0$. Isso implica na existência de, pelo menos, uma solução fraca não trivial para o problema (4.2). ∎

4.4 Multiplicidade de Soluções Fracas

Nesta seção, é considerado o problema de quarta ordem com parâmetro (4.3), cujo funcional associado, $\mathcal{I}_\lambda$, é definido em (4.10). No entanto, esta apresentação é mais sucinta, visto que parte dos resultados necessários nesta etapa são também detalhados na seção anterior e, por isso, são apenas mencionados aqui.

Na seção anterior, foram empregadas duas abordagens para obter, pelo menos, uma solução fraca não trivial: uma com energia positiva e outra com energia negativa, dependendo das hipóteses atribuídas à não linearidade f. Essas abordagens são novamente aplicadas nesta seção para assegurar a existência de, pelo menos, uma solução fraca não trivial para o problema com parâmetro (4.3). Além disso, é possível adotar uma abordagem unificada em que ambas são combinadas, resultando na multiplicidade de soluções fracas não triviais. A demonstração a seguir apresenta esse resultado, considerando que o parâmetro λ é suficientemente pequeno.

Observação 4.4.1 *Ao analisar o problema com parâmetro, não é necessário impor a condição (f_0), (f_3) ou (f_4). Ao invés disso, é imposta uma restrição ao parâmetro λ, a partir da qual pode-se concluir a existência de constantes positivas R e λ_0 tais que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$,*

$$\mathcal{I}_\lambda(u) > 0, \quad \forall u \in \partial B_E[0, R].$$

Demonstração do Teorema 4.1.4. Uma das condições, (f_2) ou $\left(\widehat{AR}\right)$ é assumida sobre f. Inicialmente, considere $\xi \in \left(0, m_\phi^{-1}\right)$,

$$\lambda_0 := \min\left\{1, \left(\frac{4\pi}{\hat{C}}\right)^{\frac{1}{\xi}}, \left[|\Omega| \max_{t\in[-1,1]} F(t)\right]^{\frac{-1}{1-\xi m_\phi}}\right\}$$

e $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Dado $u \in E$ com $\|u\|_E = \lambda^\xi$, obtém-se, a partir da desigualdade (4.9), que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Logo, por meio do Lema 1.4.2 e da continuidade de F, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi\big(T^{-1}(u)\big)\, dx - \lambda \int_\Omega F(u)\, dx \\
&\geq \lambda^{\xi m_\phi} - \lambda|\Omega| \max_{t\in[-1,1]} F(t) \\
&= \lambda^{\xi m_\phi}\left[1 - \lambda^{1-\xi m_\phi}|\Omega| \max_{t\in[-1,1]} F(t)\right] =: \vartheta_\lambda, \quad \forall u \in \partial B_E\left(0, \lambda^\xi\right), \quad (4.27)
\end{aligned}$$

com $\vartheta_\lambda > 0$ para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Com isso, quando a não linearidade f satisfaz $\left(\widehat{AR}\right)$, pode-se afirmar, com base no item (ii) da Proposição 4.3.1, que o funcional $\mathcal{I}_\lambda$ satisfaz as condições geométricas do Teorema 4.2.1 para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Além disso, pode-se inferir, do Lema 4.3.4 e da Proposição 4.3.6, que $\mathcal{I}_\lambda$ atende à condição de compacidade de Cerami. Portanto, de acordo com o Teorema 4.2.1, o funcional $\mathcal{I}_\lambda$ possui um ponto crítico u_λ tal que $\mathcal{I}_\lambda(u_\lambda) > 0$. Por outro lado, ao usar a condição (f_2), é evidente que a Proposição 4.3.2 também é válida para $\mathcal{I}_\lambda$. Sendo assim, com base em (4.27) e utilizando os mesmos argumentos apresentados na demonstração do Teorema 4.1.3, pode-se aplicar o Princípio Variacional de Ekeland em $B_E\left[0, \lambda^\xi\right]$ para concluir que existe um ponto crítico v_λ de $\mathcal{I}_\lambda$ tal que $\mathcal{I}_\lambda(v_\lambda) < 0$. Finalmente, quando as condições $\left(\widehat{AR}\right)$ e (f_2) são válidas simultaneamente, pode-se afirmar que existem pelo menos duas soluções fracas não triviais para o problema (4.3) quando $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

■

Observação 4.4.2 *De acordo com a demonstração anterior, como o ponto crítico v_λ pertence ao conjunto $B_E[0, \lambda^\xi]$, é evidente que $\|v_\lambda\|_E \to 0$ quando $\lambda \to 0$. Por outro lado, não é possível estimar a norma do ponto crítico u_λ em E. No entanto, se for adicionada uma condição de crescimento à função f, na forma:*

$$|f(t)| \leq C\left(|t|^{s-1} + 1\right), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

em que C é uma constante positiva e $s > 1$, então pode-se concluir que

$$\mathcal{I}_\lambda(u) \geq \min\left\{\|u\|_E, \|u\|_E^{m_\phi}\right\} - \lambda C\left(\|u\|_E^s + 1\right), \quad \forall u \in E.$$

Dessa maneira, se $\lambda \in (0, 1)$ e $\|u\|_E = \lambda^{-\kappa}$, com $\kappa \in (0, s^{-1})$, então

$$\mathcal{I}_\lambda(u) \geq \lambda^{-\kappa} - C\left(\lambda^{-\kappa s+1} + \lambda\right) := \sigma_\lambda,$$

no qual $\lim_{\lambda\to 0^+} \sigma_\lambda = \infty$. Em razão de c_λ, o nível do Passo da Montanha do funcional $\mathcal{I}_\lambda$, ser maior ou igual a σ_λ, tem-se

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \mathcal{I}_\lambda(u_\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+} c_\lambda = \infty.$$

Portanto, $\|u_\lambda\|_E \to \infty$ *quando* $\lambda \to 0^+$*, pois*

$$\mathcal{I}_\lambda(u) \leq \max\left\{\|u\|_E, \|u\|_E^{m_\phi}\right\} + C\left(\|u\|_E^s + 1\right), \quad \forall u \in E,$$

e, assim, $\mathcal{I}_\lambda$ *mantém a limitação dos conjuntos de forma uniforme em* $\lambda \in (0,1)$*.*

4.5 Regularidade da Solução Fraca

Nesta seção, é demonstrado que, sob hipóteses de regularidade mais fortes em f e ϕ, as soluções fracas do problema de quarta ordem são soluções clássicas do sistema hamiltoniano. Para tal, inicia-se provando a densidade do conjunto das funções $C^2\left(\overline{\Omega}\right) \cap C_0\left(\overline{\Omega}\right)$ em $(E, \|\cdot\|_E)$, conforme afirmado na seguinte proposição.

Proposição 4.5.1 *Seja* Ω *um domínio limitado de classe* C^2*. Então, o conjunto das funções em* $C^2\left(\overline{\Omega}\right) \cap C_0\left(\overline{\Omega}\right)$ *é denso em* $(E, \|\cdot\|_E)$*.*

Demonstração. Se u pertence ao conjunto das funções em $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ que se anulam sobre $\partial\Omega$, então $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\Delta u \in L_\Phi$. Isso implica que $u \in E$, concluindo que $C^2\left(\overline{\Omega}\right) \cap C_0\left(\overline{\Omega}\right) \subset E$. Por outro lado, se $u \in E$, então existe $z \in L_\Phi$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = z & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dada a densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ em L_Φ, existe uma sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $z_n \to z$ em L_Φ. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja u_n a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n = z_n & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

A regularidade elíptica afirma que, em particular, a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está no conjunto das funções em $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ que se anulam sobre $\partial\Omega$. Diante da convergência

$$\|u_n - u\|_E = \|z_n - z\|_{L_{(\Phi)}} \to 0,$$

chega-se à conclusão da demonstração. ∎

Por último, empregando argumentos análogos aos expostos em [50], é confirmada a conexão entre as soluções de natureza fraca do problema de quarta ordem e as soluções do sistema hamiltoniano.

Demonstração do Teorema 4.1.5. A fim de obter a regularidade das soluções, considere o problema auxiliar:

$$\begin{cases} -\Delta w = f(u) & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.28}$$

no qual $u \in E$ é uma solução fraca de (4.2). Em razão de $E \subset L^\infty(\Omega)$ e $f \in C(\mathbb{R})$, vê-se que $f(u) \in L^\infty(\Omega)$ e, portanto, $f(u) \in L^r(\Omega)$ para todo $r \geq 1$. Consequentemente, a regularidade elíptica dada em [34, Teorema 9.15] assegura a existência de uma única solução fraca w de (4.28) em $W^{2,r}(\Omega)$, para qualquer $r \geq 1$, o que, por sua vez, implica que $w \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ para todo $0 < \alpha < 1$. Fixada a solução w, considera-se outro problema auxiliar:

$$\begin{cases} -\Delta z = g(w) & \text{em } \Omega, \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.29}$$

em que $g = \phi^{-1}$. Dado que $g(w) \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, novamente, segue da regularidade elíptica que o problema anterior possui uma única solução z em $C^{2,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, ver [34, Teorema 6.13]. Agora, para toda $\varphi \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \cap C_0\left(\overline{\Omega}\right)$, é possível observar que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi\big(T^{-1}(z)\big)\,(-\Delta\varphi)\,dx &= \int_\Omega \phi(g(w))(-\Delta\varphi)\,dx = \int_\Omega w(-\Delta\varphi)\,dx \\ &= \int_\Omega f(u)\varphi\,dx = \int_\Omega \phi\big(T^{-1}(u)\big)\,(-\Delta\varphi)\,dx. \end{aligned}$$

A partir da Proposição 4.5.1, da igualdade anterior e da injetividade da função $\mathcal{J}$, definida em (4.12), conclui-se que $z = u$. Em particular, $u \in C^{2,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$. Ao retornar ao problema (4.28), observa-se que $f(u) \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, implicando que $w \in C^{2,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$. Além disso, definindo $v := \phi(T^{-1}(u)) = \phi(-\Delta u)$, devido a (4.29), tem-se

$$w = \phi(-\Delta z) = \phi(-\Delta u) = v.$$

Portanto, $(u, v) \in C^{2,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) \times C^{2,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ é, de fato, uma solução clássica de (4.1). Para a análise da solução fraca do problema de quarta ordem com parâmetro (4.3), inicialmente é considerado o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda f(u) & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Em seguida, procede-se de maneira inteiramente análoga ao caso anterior para completar a demonstração do teorema. ∎

Referências Bibliográficas

[1] AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H.. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of functional Analysis*, v. 14, n. 4, p. 349-381, 1973

[2] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J.. *Sobolev spaces*. Edição 2. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2003.

[3] ALBERICO, A.; FERONE, V.. Regularity properties of solutions of elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ in limit cases. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, v. 6, n. 4, p. 237-250, 1996.

[4] ALVES, C. O.; de HOLANDA, A. R. F.; SANTOS, J. A.. Existence of positive solutions for a class of semipositone quasilinear problems through Orlicz-Sobolev space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 147, n. 1, p. 285-299, 2019.

[5] AYOUJIL, A.; El AMROUSS, A. R.. On the spectrum of a fourth order elliptic equation with variable exponent. *Nonlinear analysis: theory, methods & applications*, v. 71, n. 10, p. 4916-4926, 2009.

[6] BENNETT, C.; SHARPLEY, R. C.. *Interpolation of operators*. Boston: Academic Press, 1988.

[7] BISCI, G. M.; REPOVŠ, D.. Multiple solutions of p-biharmonic equations with Navier boundary conditions. *Complex Variables and Elliptic Equations*, v. 59, n. 2, p. 271-284, 2014.

[8] BONANNO, G.. Relations between the Mountain Pass theorem and local minima. *Advances in Nonlinear Analysis*, v. 1, n. 3, p. 205-220, 2012.

[9] BOUREANU, M.-M.. Fourth-order problems with Leray-Lions type operators in variable exponent spaces. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series*, v. 12, n. 2, p. 231–243, 2019.

[10] BOUREANU, M.-M.; RĂDULESCU, V.; REPOVŠ, D.. On a $p(\cdot)$-biharmonic problem with no-flux boundary condition. *Computers & mathematics with applications*, v. 72, n. 9, p. 2505-2515, 2016.

[11] BRÉZIS, H.; NIRENBERG, L.. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Communications on pure and applied mathematics*, v. 36, n. 4, p. 437-477, 1983.

[12] BREZIS, H.. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Volume 2. New York: Springer, 2011.

[13] CARVALHO, M. L. M.; GONÇALVES, J. V. A.; da SILVA, E. D.. On quasilinear elliptic problems without the Ambrosetti-Rabinowitz condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 426, n. 1, p. 466-483, 2015.

[14] CAVALCANTE, T. R.. *Multiplicidade de soluções para classes de problemas elípticos de quarta ordem com condição de contorno de Navier*. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018.

[15] CIANCHI, A.. A Sharp Embedding Theorem for Orlicz-Sobolev Spaces. *Indiana University Mathematics Journal*, v. 45, n. 1, p. 39-65, 1996.

[16] CLÉMENT, P. et al. Existence of solutions to a semilinear elliptic system through Orlicz-Sobolev spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, v. 1, p. 241-267, 2004.

[17] CLÉMENT, Ph et al. Mountain Pass type solutions for quasilinear elliptic equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 11, n. 1, p. 33-62, 2000.

[18] COLASOUNNO, F.; PUCCI, P.; VARGA, C.. Multiple solutions for an eigenvalue problem involving p-Laplacian type operators. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 75, n. 12, p. 4496-4512, 2012.

[19] COSTA, D. G.; MAGALHÃES, C. A.. Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity. *Nonlinear Analysis*, v. 23, n. 11, p. 1401-1412, 1994.

[20] DAL MASO, G.; MURAT, F.. Almost everywhere convergence of gradients of solutions to nonlinear elliptic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 31, n. 3-4, p. 405-412, 1998.

[21] DE FIGUEIREDO, D. G.. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*. Volume 81. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[22] DE FIGUEIREDO, D. G.; DO Ó, J. M.; RUF, B.. Critical and subcritical elliptic systems in dimension two. *Indiana University mathematics journal*, v. 53, p. 1037-1054, 2004.

[23] DE FIGUEIREDO, D. G.; FELMER, P.. On superquadratic elliptic systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 343, p. 99-116, 1994.

[24] DO Ó, J. M.; UBILLA, P.. A multiplicity result for a class of superquadratic Hamiltonian systems. *Electronic Journal of Differential Equations*, v. 2003, n. 15, 2003.

[25] DO Ó, J. M.; MACEDO, A.; RIBEIRO, B.. Hamiltonian elliptic systems with critical polynomial-exponential growth. *Nonlinear Analysis*, v. 214, n. 112579, 2022.

[26] DO Ó, J. M.; RIBEIRO, B.; RUF, B.. Hamiltonian elliptic systems in dimension two with arbitrary and double exponential growth conditions. *Discrete & Continuous Dynamical Systems: Series A*, v. 41, n. 1, p. 277-296, 2021.

[27] DOS SANTOS, E. M.. Multiplicity of solutions for a fourth-order quasilinear nonhomogeneous equation. *Journal of mathematical analysis and applications*, v. 345, n. 1, p. 277–297, 2008.

[28] DRÁBEK, P.; ÔTANI, M.. Global bifurcation result for the p-biharmonic operator. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2001.

[29] EKELAND, I.. *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*. Volume 19. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[30] EVANS, L. C.. *Partial differential equations*. Edição 2. Volume 19. American Mathematical Society, 2010.

[31] FANG, F.; JI, C.. Nontrivial solutions for semilinear elliptic systems via Orlicz-Sobolev theory. *Complex Variables and Elliptic Equations*, v. 61, n. 4, p. 524-537, 2016.

[32] FANG, F.; TAN, Z.. Existence and multiplicity of solutions for a class of quasilinear elliptic equations: an Orlicz-Sobolev space setting. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 389, n. 1, p. 420-428, 2012.

[33] FUKAGAI, N.; ITO, M.; NARUKAWA, K.. Positive solutions of quasilinear elliptic equations with critical Orlicz-Sobolev nonlinearity on $\mathbb{R}^N$. *Funkcialaj Ekvacioj*, v. 49, n. 2, p. 235-267, 2006.

[34] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S.. *Elliptic partial differential equations of second order*. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[35] GOSSEZ, J. P.. Orlicz-Sobolev spaces and nonlinear elliptic boundary value problems. *Nonlinear analysis, function spaces and applications*, p. 59–94, 1979.

[36] GUIMARÃES, A.; DOS SANTOS, E. M.. On Hamiltonian systems with critical Sobolev exponents. *Journal of Differential Equations*, v. 360, p. 314-346, 2023.

[37] HULSHOF, J.; VANDERVORST, R.. Differential systems with strongly indefinite variational structure. *Journal of Functional analysis*, v. 114, n. 1, p. 32-58, 1993.

[38] KEFI, K.; REPOVŠ, D. D.; SAOUDI, K.. On weak solutions for fourth-order problems involving the Leray-Lions type operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 44, n. 17, p. 13060-13068, 2021.

[39] KONG, L.. Multiple solutions for fourth order elliptic problems with $p(x)$-biharmonic operators. *Opuscula Mathematica*, v. 36, n. 2, p. 253-264, 2016.

[40] KRASNOSEL'SKII, M. A. and RUTICKII, Ya. B.. *Convex functions and Orlicz spaces*. Groningen: Pieter Noordhoff, 1960.

[41] LERAY, J.; LIONS, J.-L.. Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, p. 97-107, 1965.

[42] LIONS, P.-L.. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II. *Revista matemática iberoamericana*, v. 1, n. 2, p. 145-201, 1985.

[43] MENESES, J. P. F.. *Existência de múltiplas soluções positivas para uma classe de problemas elípticos quaselineares*. Dissertação (Mestrado em Mátemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2016.

[44] MUSBAH, Z.; RAZANI, A.. Multiple solutions for a fourth order problem involving Leray-Lions type operator. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, v. 16, n. 2, p. 1343–1354, 2022.

[45] QIN, D.; TANG, X.; ZHANG, J.. Multiple solutions for semilinear elliptic equations with sign-changing potential and nonlinearity. *Electronic Journal of Differential Equations*, v. 207, n. 2013, 2013.

[46] RABINOWITZ, P. H.. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. Volume 65. Washington: Conference Board of the Mathematical Sciences, 1986.

[47] RAO, M. M.; REN, Z. D.. *Theory of Orlicz spaces*. New York: Marcel Dekker, 1991.

[48] RICERRI, B.. On a classical existence theorem for nonlinear elliptic equations. *Constructive, experimental, and nonlinear analysis*, p. 275-278, 2000.

[49] RUF, B.. Lorentz-Sobolev spaces and nonlinear elliptic systems. *Progress in Nonlinear Differential Equations*, v. 66, n. Y, p. 471-489, 2006.

[50] SANTOS, E.. Multiplicity of solutions for a fourth-order quasilinear nonhomogeneous equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* p. 277–297, 2008.

[51] SANTOS, J. A.. *Equações quasilineares multivalentes*. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2011.

[52] STUART, C. A.. Locating Cerami sequences in a Mountain Pass geometry. *Communications in Applied Analysis*, v. 15, n. 2-4, p. 569–588, 2011.