



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

CORREÇÕES DA ESTATÍSTICA DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇAS EM
MODELOS DE REGRESSÃO BETA PRIME

Joaquim de Souza Campos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, da Universidade Federal da Paraíba, UFPB, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientadores: Tarciana Liberal Pereira
Tatiene Correia de Souza

João Pessoa
Agosto de 2023

Ata da Sessão Pública de Defesa de Dissertação de Mestrado de **JOAQUIM DE SOUZA CAMPOS**, candidato ao título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional, realizada no dia 29 de agosto de 2023.

1 Aos vinte e nove dias do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e três, às 14h, via
2 videoconferência, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para julgar o
3 Trabalho Final do discente JOAQUIM DE SOUZA CAMPOS, vinculado a Universidade
4 Federal da Paraíba sob a matrícula nº 20211000857, candidato ao grau de Mestre em
5 “*Modelagem Matemática e Computacional*”, na linha de pesquisa “*Modelagem*
6 *Probabilística*”, do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e
7 Computacional. A comissão examinadora foi composta pelos professores Tarciana Liberal
8 Pereira de Araujo, Orientadora e Presidente da Banca; Tatiene Correia de Souza,
9 Coorientadora; Rodrigo Bernardo da Silva, Examinador Interno ao Programa; e Manoel
10 Ferreira dos Santos Neto, Examinador Externo à Instituição. Dando início aos trabalhos, a
11 Presidente da Banca cumprimentou os presentes, comunicou a finalidade da reunião e passou a
12 palavra ao candidato para que fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação
13 intitulado “*CORREÇÕES DA ESTATÍSTICA DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇAS EM*
14 *MODELOS DE REGRESSÃO BETA PRIME*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido
15 pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: “*aprovado*”. Do ocorrido, eu, Gean
16 Paulo P. M. de Barros, secretário do Programa de Pós-Graduação em Modelagem
17 Matemática e Computacional (PPGMMC), lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e
18 pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 29 de agosto de 2023.

Gean Paulo Pereira Maurício de Barros
Secretário do PPGMMC
SIAPE 2326476


Prof^ª. Dr^ª. Tarciana Liberal Pereira de Araujo
Orientadora (PPGMMC)

Prof^ª. Dr^ª. Tatiene Correia de Souza
Coorientadora (PPGMMC)


Prof. Dr. Rodrigo Bernardo da Silva
Examinador Interno ao Programa (PPGMMC)

Prof. Dr. Manoel Ferreira dos Santos Neto
Examinador Externo à Instituição (UFCG)


Documento assinado digitalmente

 TARCIANA LIBERAL PEREIRA DE ARAUJO
Data: 31/08/2023 08:29:14-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Documento assinado digitalmente

 TATIENE CORREIA DE SOUZA
Data: 06/09/2023 16:02:34-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Documento assinado digitalmente

 RODRIGO BERNARDO DA SILVA
Data: 05/09/2023 20:29:06-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Documento assinado digitalmente

 MANOEL FERREIRA DOS SANTOS NETO
Data: 03/09/2023 17:08:38-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

CORREÇÕES DA ESTATÍSTICA DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇAS EM
MODELOS DE REGRESSÃO BETA PRIME

Joaquim de Souza Campos

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
(PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:

Prof. Tarciana Liberal Pereira, D.Sc.

Prof. Rodrigo Bernardo da Silva, D.Sc.

Prof. Tatiene Correia de Souza, D.Sc.

Prof. Manoel Santos Neto, D.Sc.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL
AGOSTO DE 2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C198c Campos, Joaquim de Souza.

Correções da estatística da razão de verossimilhanças em modelos de regressão beta prime / Joaquim de Souza Campos. - João Pessoa, 2023.
60 f. : il.

Orientação: Tarciana Liberal Pereira.
Coorientação: Tatiene Correia de Souza.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI.

1. Modelagem matemática e computacional. 2. Correção de Skovgaard. 3. Modelo de regressão beta prime. 4. Teste da razão de verossimilhanças. I. Pereira, Tarciana Liberal. II. Souza, Tatiene Correia de. III. Título.

UFPB/BC

CDU 519.6(043)

*Dedico este trabalho aos meus
pais, irmãos e, em especial, à
minha esposa e filho.*

Agradecimentos

Em tudo o que fizeste, coloque Deus à frente e não esqueças de agradecer quando der certo. É com esta frase inicial que quero, primeiramente, agradecer a Deus por ter me dado a oportunidade de concluir este mestrado. Sem Ele, jamais teria chegado onde já cheguei.

Aos meus amigos Rafael, Erissandro e Wenes, que juntos formamos uma equipe intitulada "União". Conseguimos caminhar juntos, ajudando um ao outro. Obrigado, meus amigos.

Em nome da coordenadora Erenice e do orientador Tadeu, estendo meus agradecimentos aos demais amigos e colegas de trabalho da Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação (CREDE 16 - Iguatu-CE), que durante esses dois anos e seis meses me deram apoio incondicional para que eu pudesse focar nos estudos.

À minha esposa Thais Lima e ao meu filho Pietro Campos, que durante esse período me apoiaram e deram forças para que eu continuasse firme nos estudos. Vocês foram essenciais. Amo-vos!

E às minhas orientadoras excepcionais Tarciana e Tatiene, meu muito obrigado por tudo o que fizeram por mim. Pelas sugestões, cobranças, diálogos enriquecedores, parceria, fortaleza e, acima de tudo, por não desistirem de mim. Meu muito obrigado.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC), pela contribuição durante os momentos de aprendizagem. Viva o professor!

Aos membros da banca examinadora, agradeço pelas contribuições que enriqueceram o trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CORREÇÕES DA ESTATÍSTICA DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇAS EM MODELOS DE REGRESSÃO BETA PRIME

Joaquim de Souza Campos

Agosto/2023

Orientadores: Tarciana Liberal Pereira
Tatiene Correia de Souza

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

A presente dissertação trata da correção de Skovgaard para a estatística da razão de verossimilhanças aplicada ao modelo de regressão beta prime reparametrizado em μ e ϕ por [BOURGUIGNON *et al.* \(2018\)](#). Para testar hipóteses sobre parâmetros de um modelo de regressão, o teste da razão de Verossimilhanças é um dos mais utilizados, por sua simplicidade. O modelo de regressão Beta Prime é conveniente para modelar dados assimétricos, e é uma alternativa aos Modelos Lineares Generalizados (MLG) quando os dados apresentam assimetria. O teste pode ser significativamente distorcido caso a amostra não seja suficientemente grande. Além disso, é importante ressaltar que a distribuição qui-quadrado, χ^2 , pode não ser uma boa aproximação para a distribuição nula exata da estatística de razão de verossimilhanças em amostras de tamanho pequeno ou moderado. Para melhorar essa aproximação, a estratégia usual é substituir a estatística de razão de verossimilhanças por suas versões corrigidas. Para avaliar o desempenho da estatística corrigida foram realizadas simulações de Monte Carlo. Por fim, são apresentadas duas aplicações a dados reais.

Palavras-chave: Correção de Skovgaard; modelo de regressão Beta Prime; teste da Razão de Verossimilhanças.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

CORRECTIONS OF LIKELIHOOD RATIO STATISTICS IN BETA PRIME
REGRESSION MODELS

Joaquim de Souza Campos

August/2023

Advisors: Tarciana Liberal Pereira
Tatiene Correia de Souza

Program: Computational Mathematical Modelling

This dissertation deals with Skovgaard's correction for the likelihood ratio statistic applied to the reparametrized beta prime regression model in terms of μ and ϕ by [BOURGUIGNON *et al.* \(2018\)](#). The likelihood ratio test is one of the most commonly used methods for testing hypotheses about parameters in a regression model due to its simplicity. The Beta Prime regression model is convenient for modeling asymmetric data and serves as an alternative to Generalized Linear Models (GLM) when dealing with skewed data. However, the test can be significantly distorted when the sample size is not large enough. Additionally, it is essential to note that the chi-squared distribution, χ^2 , may not be a good approximation for the exact null distribution of the likelihood ratio statistic in samples of small or moderate sizes. To improve this approximation, the usual strategy is to replace the likelihood ratio statistic with its corrected versions. Monte Carlo simulations were conducted to evaluate the performance of the corrected statistic. Finally, two applications to real data are presented.

Keywords: Skovgaard's correction; Beta Prime regression model; likelihood ratio test.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
1.1 Introdução	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Organização da Dissertação	3
2 Modelo de Regressão	4
2.1 Distribuição Beta Prime	4
2.2 Modelo de Regressão Beta Prime	5
3 Correção de Skovgaard Para a Estatística da Razão de Verossimi- lhanças	9
3.1 Teste da Razão de Verossimilhanças	9
3.2 Correção Para a Estatística da Razão de Verossimilhanças no Modelo de Regressão Beta Prime	10
4 Simulações	16
4.1 Tamanho do Teste	16
4.2 Poder do Teste	18
5 Aplicações	22
5.1 Dados do Milho	22
5.2 Dados da Cerveja	24
6 Conclusões	27
Referências Bibliográficas	29
A Obtenção das Quantidades Propostas por Skovgaard Para a Classe de Modelos de Regressão Beta Prime	31

A.1	Vetor Score	31
A.2	Obtenção de q e Υ	32
B	Script	37

Lista de Figuras

- 5.1 Envelope simulado dos resíduos quantílicos para os dados do milho. . 23
- 5.2 Envelope simulado dos resíduos quantílicos para os dados da cerveja. 26

Lista de Tabelas

4.1	Tamanhos dos testes (%), cenário I, submodelo da média.	17
4.2	Tamanhos dos testes (%), cenário II, submodelo da média.	17
4.3	Tamanhos dos testes (%), cenário III, submodelo da precisão.	18
4.4	Tamanhos dos testes (%), cenário IV, submodelo da precisão.	18
4.5	Poder dos testes da razão de verossimilhanças ajustados (%), cenário I, submodelo da média.	19
4.6	Poder dos testes da razão de verossimilhanças ajustados (%), cenário II, submodelo da média.	20
4.7	Poder dos testes da razão de verossimilhanças ajustados (%), cenário III, submodelo da precisão.	21
4.8	Poder dos testes da razão de verossimilhanças ajustados (%), cenário IV, submodelo da precisão.	21
5.1	Estimativas dos parâmetros para os dados do milho.	23
5.2	Estimativas dos parâmetros para os dados da cerveja: modelo I	24
5.3	Estimativas dos parâmetros para os dados da cerveja: modelo II. . . .	25

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

Entre as distribuições contínuas, a Beta Prime (BP), também conhecida como Beta do segundo tipo, possui suporte nos reais positivos. Esta distribuição foi inicialmente proposta por [KEEPING \(1962\)](#) e [MCDONALD \(1984\)](#) em termos de parâmetros de forma. [BOURGUIGNON *et al.* \(2018\)](#) propuseram uma nova parametrização para a distribuição BP em termos da sua média, μ , e de um parâmetro de precisão, ϕ . Ela caracteriza-se como uma distribuição da razão de chances em que a variável aleatória segue uma distribuição beta. Em outras palavras, a distribuição BP está relacionada à distribuição beta e também possui uma forte conexão com a distribuição F .

Os modelos de regressão são amplamente utilizados para explicar a relação funcional entre uma variável de interesse (variável resposta) e uma variável preditora (explicativa). Normalmente é interessante realizar testes de hipóteses sobre os parâmetros do modelo. O teste de razão de verossimilhanças (TRV) é um dos testes mais utilizados na prática pela sua simplicidade. Este teste é baseado na teoria assintótica de primeira ordem, ou seja, utiliza valores críticos provenientes de aproximações válidas em grandes amostras.

A estatística da razão de verossimilhança (RV) sob a hipótese nula e em problemas regulares possui distribuição qui-quadrado. O TRV tende a apresentar distorção na probabilidade do erro tipo I, denominada de tamanho do teste, em amostras de tamanho pequeno ou moderado.

Com o intuito de obter uma melhor aproximação da distribuição da estatística do teste pela distribuição qui-quadrado de referência, várias correções para a estatística da RV foram propostas na literatura. Inicialmente, a estratégia usual era substituir a estatística da RV por sua versão corrigida de Bartlett ([LAWLEY, 1956](#)). Contudo, as correções de Bartlett necessitam da obtenção de alguns cumulantes de derivadas da log-verossimilhança que são mais trabalhosas para a maioria dos modelos bem

como da exigência de ortogonalidade entre parâmetros de interesse e perturbação. [SKOVGAARD \(2001\)](#) estendeu a correção [SKOVGAARD \(1996\)](#) para a estatística da RV sinalizada, que é útil quando o parâmetro de interesse é escalar, para o caso em que o parâmetro de interesse é multidimensional. O ajuste de Skovgaard tem ampla aplicabilidade e vem sendo utilizado para corrigir a estatística da RV em diversas classes de modelos. Este ajuste não exige que os parâmetros sejam ortogonais e pode ser aplicado diretamente à estatística da razão de verossimilhanças.

[FERRARI e CYSNEIROS \(2008\)](#) utilizaram o resultado de Skovgaard para obter uma estatística de RV ajustada para modelos não lineares de família exponencial. [FERRARI e PINHEIRO \(2011\)](#) derivaram ajustes para a estatística usual da RV na classe de modelos de regressão valor extremo. [PEREIRA e CRIBARI-NETO \(2014\)](#) realizaram ajustes, baseados na correção de Skovgaard, para as estatísticas da RV usual e sinalizada na classe de modelos de regressão beta inflacionados com dispersão variável. [BARROS \(2017\)](#) comparou o desempenho de treze testes, incluindo o TRV ajustada via Skovgaard. [PERETTE \(2019\)](#) aplicou a correção de Skovgaard para a estatística da RV no desenvolvimento de um pacote no software estatístico R (`devtools::install_github("aperette/generalReg")`) com implementação de estimadores em modelos de regressão normal. [SANTOS \(2020\)](#) utilizou os desenvolvimentos dos ajustes para a estatística da RV com base nos trabalhos de Skovgaard para modelos lineares gaussianos com repetições.

Dessa forma, a obtenção da correção de Skovgaard nos modelos de regressão BP representa um avanço importante na análise estatística, oferecendo uma abordagem mais confiável e precisa para realizar inferências sobre os parâmetros de interesse. Sua utilização em futuros trabalhos pode contribuir para resultados mais robustos e conclusões mais sólidas na área de modelagem de regressão.

Para avaliar o desempenho da correção proposta, utilizamos o *software* R, que é uma linguagem de código aberto amplamente reconhecida por sua capacidade de análise estatística e visualização de dados. É importante ressaltar que o R é uma ferramenta gratuita, disponível para *download* em [R Project](#). Para uma compreensão mais aprofundada e abrangente desta linguagem, recomendamos a consulta ao manual oficial desenvolvido pelo R ([CORE TEAM, 2022](#)).

1.2 Objetivos

Considerando o grande uso do teste da RV em modelos de regressão e a grande acurácia e facilidade de derivação da correção de Skovgaard, o objetivo deste trabalho é obter a correção de Skovgaard para a estatística da RV no modelo de regressão BP reparametrizado na média μ e na precisão ϕ proposto por [BOURGUIGNON et al. \(2018\)](#).

1.3 Organização da Dissertação

Este trabalho é composto por seis capítulos, incluindo a introdução, e são divididos da seguinte forma:

- No capítulo 2 apresentamos a distribuição e o modelo de regressão BP;
- O capítulo 3 organizamos em duas seções: O TRV e a correção para a estatística da razão de verossimilhanças no modelo de regressão Beta Prime;
- No capítulo 4 apresentamos simulações de Monte Carlo;
- No capítulo 5 apresentamos aplicações a dados reais com resultados e discussões;
- E no capítulo 6 apresentamos as conclusões.

Capítulo 2

Modelo de Regressão

Os modelos de regressão são amplamente utilizados para explicar uma variável de interesse através de uma relação funcional entre a média de uma variável de interesse (variável resposta) e variáveis preditoras.

Nesse sentido, [BOURGUIGNON *et al.* \(2018\)](#) propuseram o modelo de regressão BP usando uma nova parametrização dessa distribuição, que é indexada pelos parâmetros da média e precisão. O modelo de regressão proposto é conveniente para modelar dados assimétricos, e é uma alternativa aos Modelos Lineares Generalizados quando os dados apresentam assimetria.

Na seção [2.1](#), apresentamos a distribuição BP, abordando o seu surgimento e aplicações. Já na seção [2.2](#), apresentamos o Modelo de Regressão BP.

2.1 Distribuição Beta Prime

A distribuição BP, também conhecida como distribuição beta invertida ou beta do tipo II, é uma distribuição absolutamente contínua. [MCDONALD \(1987\)](#) discutiu algumas propriedades dessa distribuição, assim como, obteve os estimadores de máxima verossimilhança (EMV). Modelos de regressão baseados nessa distribuição foram propostos por [MCCULLAGH e TIBSHIRANI \(1990\)](#) e [TULUPYEV *et al.* \(2013\)](#).

Seja Y uma variável aleatória que segue distribuição BP com parâmetros α e β , a função densidade de probabilidade (F.D.P.) de Y é dada por:

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} y^{\alpha-1} (1+y)^{-(\alpha+\beta)},$$

em que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são parâmetros de forma, $y > 0$ e $B(\alpha, \beta)$ é a função beta dada por:

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (1+t)^{-(\alpha+\beta)} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

em que a função gama, $\Gamma(\cdot)$, é definida por:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\lambda-1} du.$$

A função de distribuição acumulada (f.d.a) da distribuição BP é dada por:

$$F(y; \alpha, \beta) = I_{\frac{y}{1+y}}(\alpha, \beta),$$

sendo que $I_y(\alpha, \beta) = \frac{I_y(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)}$ é a função beta incompleta regularizada com:

$$B(y; \alpha, \beta) = \int_0^y t^{\alpha-1} (1+t)^{-(\alpha+\beta)} dt, \quad y > 0.$$

Ao calcular o valor esperado e a variância da distribuição BP, obtemos:

$$E[Y] = \frac{\alpha}{\beta - 1},$$

e

$$\text{Var}[Y] = \frac{\alpha(\alpha + \beta - 1)}{(\beta - 2)(\beta - 1)^2}.$$

[BOURGUIGNON et al. \(2018\)](#) introduziram uma nova parametrização da distribuição BP em termos da média e precisão. A vantagem de usar essa parametrização é que podemos introduzir estruturas de regressão para o parâmetro de média e o de precisão, sendo assim mais atrativa a nível de modelos de regressão uma vez que a interpretação dos coeficientes de regressão é direta, como nos MLG.

Considerando $\mu = \frac{\alpha}{(\beta-1)}$ e $\phi = \beta - 2$, com $\alpha = \mu(1 + \phi)$ e $\beta = 2 + \phi$, o valor esperado e a variância são dados por:

$$E[Y] = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}[Y] = \frac{\mu(1+\mu)}{\phi}.$$

Dessa forma, a distribuição BP, reparametrizada em μ e ϕ será denotada por $Y \sim BP(\mu, \phi)$. Nesse caso, a função densidade de probabilidade(f.d.p) é dada por:

$$f(y|\mu, \phi) = \frac{y^{\mu(\phi+1)-1} (1+y)^{-[\mu(\phi+1)+\phi+2]}}{B(\mu(1+\phi), \phi+2)}, \quad (2.1)$$

com $y > 0$, $\mu > 0$ e $\phi > 0$.

2.2 Modelo de Regressão Beta Prime

[BOURGUIGNON et al. \(2018\)](#) apresentaram o modelo de regressão BP da seguinte forma. Sejam $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes, em que cada Y_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, segue a função densidade de probabilidade dada em (2.1) com

média μ_i e precisão ϕ_i . Suponha que a média e o parâmetro de precisão de Y_i satisfaçam as seguintes relações funcionais.

$$g_1(\mu_i) = x_i^\top \beta = \eta_{1i}, \quad (2.2)$$

e

$$g_2(\phi_i) = z_i^\top \nu = \eta_{2i}, \quad (2.3)$$

em que $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ e $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_q)^\top$ são vetores de coeficientes de regressão desconhecidos que são assumidos serem independentes, onde $\beta \in \mathbb{R}^p$ e $\nu \in \mathbb{R}^q$ com $p+q < n$, η_{1i} e η_{2i} são os preditores lineares, e $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^\top$ e $z_i = (z_{i1}, \dots, z_{iq})^\top$ são observações sobre p e q regressores conhecidos. Dessa forma, as matrizes de covariáveis $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ e $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_n)^\top$ tem posto p e q , respectivamente. As funções de ligação $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ devem ser estritamente monótonas, positiva e ao menos duas vezes diferenciáveis, tal que $\mu_i = g_1^{-1}(x_i^\top \beta)$ e $\phi_i = g_2^{-1}(z_i^\top \nu)$ com $g_1^{-1}(\cdot)$ e $g_2^{-1}(\cdot)$ sendo a função inversa das funções $g_1(\cdot)$ e $g_2(\cdot)$, respectivamente.

A função de log-verossimilhança é dada por:

$$\ell(\beta, \nu) = \sum_{i=1}^n \ell(\mu_i, \phi_i) \quad (2.4)$$

em que

$$\begin{aligned} \ell(\mu_i, \phi_i) &= [\mu_i(1 + \phi_i) - 1]y_i^\circ - [\mu_i(1 + \phi_i) + \phi_i + 2]y_i^\dagger - \log[\Gamma(\mu_i(1 + \phi_i))] \\ &\quad - \log[\Gamma(\phi_i + 2)] + \log[\Gamma(\mu_i(1 + \phi_i) + \phi_i + 2)], \end{aligned}$$

em que $y_i^\circ = \log y_i$ e $y_i^\dagger = \log(1 + y_i)$.

Os vetores escores em notação matricial, obtidos pela diferenciação da função log-verossimilhança, em relação aos componentes β e ν são dados, respectivamente, por:

$$\mathcal{U}_\beta = \mathbf{X}^\top \Phi^\circ \mathbf{D}_1 [(\mathbf{y}^\circ - \boldsymbol{\mu}^\circ) - (\mathbf{y}^\dagger - \boldsymbol{\mu}^\dagger)] \quad (2.5)$$

e

$$\mathcal{U}_\nu = \mathbf{Z}^\top \mathbf{D}_2 [\mathbf{M}(\mathbf{y}^\circ - \boldsymbol{\mu}^\circ) - \mathbf{M}^\circ(\mathbf{y}^\dagger - \boldsymbol{\mu}^\dagger)] \quad (2.6)$$

sendo que $\mathbf{D}_1 = \text{diag} \left[\frac{\partial \mu_1}{\partial \eta_{11}}, \dots, \frac{\partial \mu_n}{\partial \eta_{1n}} \right]$, $\mathbf{D}_2 = \text{diag} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta_{21}}, \dots, \frac{\partial \phi_n}{\partial \eta_{2n}} \right]$, $\mathbf{y}^\circ = (y_1^\circ, \dots, y_n^\circ)^\top$, $\mathbf{y}^\dagger = (y_1^\dagger, \dots, y_n^\dagger)^\top$, $\boldsymbol{\mu}^\circ = (\mu_1^\circ, \dots, \mu_n^\circ)^\top$ em que $\mu_i^\circ = \Psi(\mu_i(1 + \phi_i)) - \Psi(\phi_i + 2)$ e $\boldsymbol{\mu}^\dagger = (\mu_1^\dagger, \dots, \mu_n^\dagger)^\top$ em que $\mu_i^\dagger = (\Psi(\mu_i(1 + \phi_i) + \phi_i + 2) - \Psi(\phi_i + 2))$, $\mathbf{M} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ e $\mathbf{M}^\circ = \text{diag}[(1 + \mu_1), \dots, (1 + \mu_n)]$, para mais detalhes ver (A.2).

A matriz de informação observada é encontrada calculando a segunda derivada da log-verossimilhança em relação aos parâmetros do modelo. Logo,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\beta\beta} & \mathbf{J}_{\beta\nu} \\ \mathbf{J}_{\nu\beta} & \mathbf{J}_{\nu\nu} \end{bmatrix},$$

em que $\mathbf{J}_{\beta\beta} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}_3 \mathbf{X}$, $\mathbf{J}_{\beta\nu} = (\mathbf{J}_{\nu\beta})^\top = \mathbf{Z}^\top \mathbf{D}_5 \mathbf{X}$ e $\mathbf{J}_{\nu\nu} = \mathbf{Z}^\top \mathbf{D}_4 \mathbf{Z}$. O termo geral das matrizes diagonais \mathbf{D}_3 , \mathbf{D}_4 e \mathbf{D}_5 são, respectivamente

$$d_{3i} = [-(1 + \phi_i)^2 [\Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i)) - \Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i) + \phi_i + 2)] a_{1i}^2 \\ + [(1 + \phi_i) [(y^\circ - \mu^\circ) - (y^\dagger - \mu^\dagger)]] a_{2i} a_{1i},$$

$$d_{4i} = [-\mu_i^2 \Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i)) + (1 + \mu_i)^2 \Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i) + \phi_i + 2) - \Psi^{(1)}(\phi_i + 2) b_i^2] \\ + [\mu_i [(y^\circ - \mu^\circ)] - (1 + \mu_i) [(y^\dagger - \mu^\dagger)]] b_i' b_i$$

e

$$d_{5i} = \left\{ (y_i^\circ - \mu_i^\circ) - (y_i^\dagger - \mu_i^\dagger) + (1 + \phi_i) [\mu_i (\Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i) + \phi_i + 2)) \right. \\ \left. - \Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i))] + \Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i) + \phi_i + 2) \right\} a_{1i} b_{1i}$$

em que $a_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_{1i}}$, $a_i' = \frac{\partial a_i}{\partial \mu_i}$, $b_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_{2i}}$ e $b_i' = \frac{\partial b_i}{\partial \phi_i}$.

A matriz de informação de Fisher é dada por:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\beta\beta} & \mathbf{I}_{\beta\nu} \\ \mathbf{I}_{\nu\beta} & \mathbf{I}_{\nu\nu} \end{bmatrix},$$

em que $\mathbf{I}_{\beta\beta} = \mathbf{X}^\top \mathbf{E}_3 \mathbf{X}$, $\mathbf{I}_{\beta\nu} = (\mathbf{I}_{\nu\beta})^\top = \mathbf{Z}^\top \mathbf{E}_5 \mathbf{X}$ e $\mathbf{I}_{\nu\nu} = \mathbf{Z}^\top \mathbf{E}_4 \mathbf{Z}$. Em que o termo geral das matrizes diagonais \mathbf{E}_3 , \mathbf{E}_4 e \mathbf{E}_5 são, respectivamente

$$e_{3i} = (1 + \phi_i)^2 [\Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i)) - \Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i) + \phi_i + 2)] a_i^2,$$

$$e_{4i} = [\mu_i^2 \Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i)) - (1 + \mu_i)^2 \Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i) + \phi_i + 2) + \Psi^{(1)}(\phi_i + 2)] b_i^2$$

e

$$e_{5i} = -(1 + \phi_i) [\mu_i (\Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i) + \phi_i + 2)) \\ - \Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \mu_i))] + \Psi^{(1)}(\mu_i(1 + \phi_i) + \phi_i + 2)] a_i b_i.$$

Encontrar estimadores, às vezes, não é missão trivial. [SILVA \(2014\)](#) relata que em muitos problemas de estimação por máxima verossimilhança, pode ser difícil ou até impossível encontrar expressões analíticas de forma fechada para os estimadores. Os EMV não apresentam forma fechada e são obtidos através de métodos iterativos

de otimização não-linear. [SANTOS \(2021\)](#) ressalta que as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão BP podem ser obtidas por meio do pacote [GAMLSS](#) disponível no *software* R ([CORE TEAM, 2022](#)).

Capítulo 3

Correção de Skovgaard Para a Estatística da Razão de Verossimilhanças

O Teste da Razão de Verossimilhanças é uma das mais antigas abordagens clássicas de teste de hipóteses, juntamente com o teste do multiplicador de Lagrange e o teste de Wald. Foi proposto por [NEYMAN e PEARSON \(1928\)](#) e, pela sua simplicidade, é um dos testes mais utilizados para testar hipóteses sobre os parâmetros de um modelo de regressão.

Na seção [3.1](#) apresentamos maiores detalhes sobre o teste da razão de verossimilhanças e em [3.2](#) são apresentados ajustes para essa estatística de acordo com a correção de Skovgaard.

3.1 Teste da Razão de Verossimilhanças

Apesar de ser uma técnica antiga, se comparada as demais, a mesma possui boas aproximações, principalmente, pela sua otimalidade. O TRV é baseado na teoria assintótica de primeira ordem, ou seja, utiliza valores críticos provenientes de aproximações válidas em grandes amostras. Dessa forma, o TRV tende a apresentar distorção na probabilidade do erro tipo I, denominada de tamanho do teste, em amostras de tamanho pequeno ou moderado.

Em modelos com parâmetros de perturbação é prática comum realizar inferências baseando-se em uma pseudo-verossimilhança, denominada verossimilhança perfilada. A função de verossimilhança perfilada é obtida da verossimilhança original substituindo os parâmetros de perturbação por seus estimadores de máxima verossimilhança ([PEREIRA, 2010](#)). Adicionalmente, [CRIBARI-NETO e QUEIROZ \(2014\)](#) relatam que algumas propriedades básicas da função de verossimilhança não

valem para a função de verossimilhança perfilada. Por exemplo, o valor esperado da função escore não é necessariamente zero e a informação de Fisher pode apresentar viés. Adicionalmente, a distribuição qui-quadrado, χ^2 , pode não ser uma boa aproximação para a distribuição nula de estatísticas de testes provenientes da verossimilhança perfilada, caso haja muitos parâmetros de perturbação relativamente ao tamanho amostral.

Considere o espaço paramétrico Θ e as hipóteses $H_0 : \theta = \theta^{(0)}$ versus $H_1 : \theta \neq \theta^{(0)}$. A estatística da RV é dada por:

$$\frac{L(\theta, y)}{L(\theta^{(0)}, y)},$$

em que a RV é limitada entre zero e um, e mede o quanto as evidências estatísticas colaboram com valores para o vetor de parâmetros diferentes dos especificados na hipótese nula, ou seja, valores grandes da razão de verossimilhanças não apoiam a plausibilidade da hipótese nula.

Desta forma, a estatística do TRV, λ_{RV} , é expressa como uma diferença entre os logaritmos das verossimilhanças.

$$\lambda_{RV} = 2[\ell(\hat{\theta}) - \ell(\theta^{(0)})],$$

em que $\ell(\hat{\theta})$ é o logaritmo da função de verossimilhança avaliada em $\hat{\theta}$ e $\ell(\theta^{(0)})$ o logaritmo da função de verossimilhança obtido sob a imposição da hipótese nula. Sob condições usuais de regularidade e sob a hipótese nula, a distribuição da estatística λ_{RV} pode ser aproximada pela distribuição χ_r^2 , em que r é o número de restrições impostas em H_0 . Assim, o teste da RV pode ser realizado usando valor crítico aproximado obtido como quantil da distribuição qui-quadrado com r graus de liberdade.

Na próxima seção, 3.2, apresentamos a correção da estatística da RV, baseada em [SKOVGAARD \(2001\)](#), derivada para o modelo de regressão BP reparametrizado em μ e ϕ proposto por [BOURGUIGNON et al. \(2018\)](#).

3.2 Correção Para a Estatística da Razão de Verossimilhanças no Modelo de Regressão Beta Prime

Sendo $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$, um vetor contendo n observações independentes, cada y_i , em que $i = 1, 2, \dots, n$, segue a função densidade definida em (3.1). Seja $\boldsymbol{\theta} = (\beta^\top, \nu^\top)^\top$ o vetor de parâmetros desconhecidos que indexam o modelo de regressão

beta prime, que pode ser escrito como $\boldsymbol{\theta} = (\vartheta^\top, \boldsymbol{\tau}^\top)^\top$, onde $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r)^\top$ é o vetor de parâmetros de interesse e $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s)^\top$ é o vetor de parâmetros de perturbação.

Considere a hipótese nula

$$H_0 : \boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}_0$$

versus a hipótese alternativa

$$H_1 : \boldsymbol{\vartheta} \neq \boldsymbol{\vartheta}_0$$

em que $\boldsymbol{\vartheta}_0$ é um vetor de constantes especificados de dimensão r .

Escrevemos a estatística de RV para testar H_0 da seguinte forma:

$$RV = 2 \left\{ \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \right\},$$

em que $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^\top, \hat{\boldsymbol{\tau}}^\top)^\top$ é o estimador de máxima verossimilhança irrestrito de $\boldsymbol{\theta}$ e $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\vartheta}_0^\top, \tilde{\boldsymbol{\tau}}^\top)^\top$ é o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$ obtido pela imposição da hipótese nula, ou seja, o estimador de máxima verossimilhança restrito [PEREIRA e CRIBARI-NETO \(2014\)](#).

Contudo, sabe-se que o TRV pode ter tamanho substancialmente distorcido se o tamanho da amostra não for suficientemente grande para garantir uma boa aproximação da distribuição nula da estatística da RV pela distribuição χ^2 de referência. Inicialmente, correções foram propostas para a estatística da RV sinalizada, que é uma extensão da estatística da RV no caso em que o parâmetro de interesse é um escalar, e é dada por:

$$R = \text{sign}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}} - \boldsymbol{\vartheta}_0) \sqrt{RV},$$

em que sign é o sinal. De acordo com [PEREIRA e CRIBARI-NETO \(2014\)](#), sob a hipótese nula, a distribuição da estatística da RV sinalizada pode ser aproximada pela distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$ com erro de ordem $n^{-1/2}$.

Assim como TRV, em amostras finitas, em geral, o teste da RV sinalizada pode ter tamanho distorcido, uma vez que seus valores críticos são obtidos a partir de aproximações válidas em grandes amostras. Para corrigir esta falha, [BARNDORFF-NIELSEN \(1983\)](#) propuseram a estatística da RV sinalizada modificada, $R1$, em que:

$$R1 = R - \frac{1}{R} \log \epsilon,$$

sendo

$$\epsilon = \frac{\{|\hat{\boldsymbol{J}}|^{1/2} |\tilde{\boldsymbol{U}}|^{-1} |\tilde{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}}|^{1/2} R\}}{\left[(\hat{\boldsymbol{\ell}} - \tilde{\boldsymbol{\ell}})^\top (\tilde{\boldsymbol{U}}')^{-1} \right]_{\boldsymbol{\vartheta}}} \quad (3.1)$$

em que o \mathbf{J} é a matriz de informação de Fisher e \mathbf{U} é a função escore total. Sendo $\hat{\mathbf{J}}$ a matriz de informação observada $s \times s$ correspondente ao vetor $\boldsymbol{\tau}$ e $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ é o elemento do vetor (3.1) correspondente ao parâmetro de interesse que nesse caso é um escalar. Sob a hipótese nula, R_1 segue distribuição normal padrão com erro de ordem $n^{-3/2}$. Devido ao nível de dificuldade em relação as derivadas, SKOVGAARD (1996) conferiu aproximações explícitas para as quantidades

$$(\hat{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\tau}})^\top \cong \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{I}}^{-1} \hat{\mathbf{J}},$$

e

$$\tilde{\mathbf{U}}' \cong \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{I}}^{-1} \hat{\mathbf{J}},$$

em que \mathbf{I} é a informação (esperada) de Fisher e as quantidades $\hat{\mathbf{q}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ são encontradas da seguinte forma:

$$\mathbf{q} = E_{\theta_1}[U(\theta_1)(\ell(\theta_1) - \ell(\theta))], \quad (3.2)$$

e

$$\boldsymbol{\Upsilon} = E_{\theta_1}[U(\theta_1) U^\top(\theta)], \quad (3.3)$$

substituindo θ_1 por $\hat{\theta}$ e θ por $\tilde{\theta}$ após os valores esperados serem computados. Dessa forma, a estatística da RV sinalizada pode ser reescrita como

$$RV_1 = R - \frac{1}{R} \log \bar{\epsilon}$$

em que

$$\bar{\epsilon} = |\hat{\mathbf{J}}|^{-1/2} |\hat{\mathbf{I}}| |\hat{\mathbf{Y}}|^{-1} |\tilde{\mathbf{J}}_{\tau\tau}|^{1/2} \frac{R}{\left[\hat{\mathbf{Y}}^{-1} \hat{\mathbf{q}} \right]_{\hat{\theta}}}$$

Apesar da melhora nos resultados, CRIBARI-NETO e QUEIROZ (2014) ressaltam que a desvantagem do uso desta estatística é sua difícil derivação e a exigência da ortogonalidade entre os parâmetros de interesse e de perturbação. Desta forma, SKOVGAARD (1996) propôs modificações na forma sinalizada proposta por BARNDORFF-NIELSEN (1983).

SKOVGAARD (2001) apresentou uma generalização para esta estatística de grande aplicabilidade, pois contempla o caso em que o parâmetro de interesse é multidimensional. Adicionalmente, este ajuste não exige que os parâmetros sejam ortogonais e pode ser aplicado diretamente à estatística da RV. Dessa forma, o autor apresentou a seguinte correção

$$RV_1^c = RV - 2 \log \xi,$$

em que RV_1^c é estatística da razão de verossimilhança corrigida. Uma outra forma de reescrevê-la é dada por:

$$RV_2^c = RV \left(1 - \frac{1}{RV} \log \xi \right)^2,$$

sendo RV_2^c uma versão assintoticamente equivalente. O valor de

$$\xi = \frac{\left\{ |\tilde{\mathbf{I}}| |\hat{\mathbf{I}}| |\tilde{\mathbf{J}}_{\Psi\Psi}| \right\}^{1/2}}{|\tilde{\mathbf{Y}}| \left[\tilde{\mathbf{I}} \tilde{\mathbf{Y}}^{-1} \hat{\mathbf{J}} \hat{\mathbf{I}}^{-1} \tilde{\mathbf{Y}} \right]_{\Psi\Psi}^{1/2}} \frac{\left\{ \tilde{\mathbf{U}}^\top \tilde{\mathbf{Y}}^{-1} \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{J}}^{-1} \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{I}}^{-1} \tilde{\mathbf{U}} \right\}^{r/2}}{RV^{r/2-1} \tilde{\mathbf{U}}^\top \tilde{\mathbf{Y}}^{-1} \bar{\mathbf{q}}},$$

em que \mathbf{I} é a matriz de informação de Fisher e $\mathbf{J}_{\Psi\Psi}$ é a matriz observada.

BOURGUIGNON *et al.* (2018) apresentaram o modelo de regressão BP reparametrizado em μ e ϕ . O nosso objetivo é melhorar os resultados obtidos para esse modelo aplicando a correção de Skovgaard a estatística de RV.

Considerando o modelo de regressão BP definido por (2.2) e (2.3), vamos derivar as quantidades necessárias para obtenção das correções propostas. A forma matricial para a função de verossimilhança é dada da seguinte forma:

$$\ell(\theta) = [\mathbf{M}\Phi - P] (\mathbf{y}^\circ - \boldsymbol{\mu}^\circ) - [\mathbf{M}\Phi + \Phi^*] (\mathbf{y}^\dagger - \boldsymbol{\mu}^\dagger) + \mathbf{a}^\top,$$

em que $\mathbf{y}^\circ = (y_1^\circ, y_2^\circ, \dots, y_n^\circ)^\top$, $\boldsymbol{\mu}^\circ = (\mu_1^\circ, \mu_2^\circ, \dots, \mu_n^\circ)^\top$, $\mathbf{y}^\dagger = (y_1^\dagger, y_2^\dagger, \dots, y_n^\dagger)^\top$, $\boldsymbol{\mu}^\dagger = (\mu_1^\dagger, \mu_2^\dagger, \dots, \mu_n^\dagger)^\top$, $\Phi = \text{diag}[(1 + \phi_1), (1 + \phi_2), \dots, (1 + \phi_n)]$, $\Phi^* = \text{diag}[(\phi_1 + 2), (\phi_2 + 2), \dots, (\phi_n + 2)]$, $\mathbf{M} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, P é a indicadora com coluna de uns na diagonal principal e $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)^\top$, com

$$a_i = \log[\Gamma(\mu_i(1 + \phi_i) + \phi_i + 2)] - \log[\Gamma(\mu_i(1 + \phi_i))] - \log[\Gamma(\phi_i + 2)].$$

Uma vez que a distribuição BP tem representação canônica na família exponencial de dimensão 3 de posto completo é possível obter os momentos de y° e y^\dagger .

Sendo que

- $\mu^\circ = E(y^\circ) = \Psi(\mu(1 + \phi)) - \Psi(\phi + 2)$,
- $\mu^\dagger = E(y^\dagger) = \Psi(\mu(1 + \phi) + \phi + 2) - \Psi(\phi + 2)$,
- $v^\circ = \text{Var}(y^\circ) = \Psi'(\mu(\phi + 1)) - \Psi'(\phi + 2)$,
- $v^\dagger = \text{Var}(y^\dagger) = \Psi'(\phi + 2) - \Psi'(\mu(\phi + 1) + \phi + 2)$,
- $c^{\circ\dagger} = \text{Cov}(y^\circ, y^\dagger) = \Psi'(\phi + 2)$.

Os valores esperados que aparecem nas quantidades em q e γ podem ser obtidos em função dos dois primeiros momentos de y_i° e y_i^\dagger , para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. A obtenção detalhada dos resultados é apresentada a seguir.

Seguem as quantidades acima citadas:

$$\begin{aligned}
E_{\theta_1}[\mathbf{U}_\beta(\theta_1)\ell(\theta_1)] - E_{\theta_1}[\mathbf{U}_\beta(\theta_1)\ell(\theta)] &= \mathbf{X}^\top \Phi^{(1)} \mathbf{D}_1^{(1)} \left\{ \mathbf{V}^{\circ(1)} (\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} - \mathbf{M} \Phi^\circ) \right. \\
&\quad - \mathbf{C}^{\circ(1)} [(2\mathbf{M}^{(1)} \Phi^\circ + \Phi^{*(1)}) - (2\mathbf{M} \Phi^\circ + \Phi^*)] \\
&\quad \left. + \mathbf{V}^{\dagger(1)} [(\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) - (\mathbf{M} \Phi^\circ + \Phi^*)] \right\} \boldsymbol{\iota} \\
&= \mathbf{X}^\top \Phi^{(1)} \mathbf{D}_1^{(1)} \left\{ \mathbf{V}^{\circ(1)} (\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} - \mathbf{M} \Phi^\circ) \right. \\
&\quad - \mathbf{C}^{\circ(1)} [(2\mathbf{M}^{(1)} \Phi^\circ + \Phi^{*(1)}) - (2\mathbf{M} \Phi^\circ + \Phi^*)] \\
&\quad \left. + \mathbf{V}^{\dagger(1)} [(\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) - (\mathbf{M} \Phi^\circ + \Phi^*)] \right\} \boldsymbol{\iota}.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
E_{\theta_1}[\mathbf{U}_\nu(\theta_1)\ell(\theta_1)] - E_{\theta_1}[\mathbf{U}_\nu(\theta_1)\ell(\theta)] &= \mathbf{Z}^\top \mathbf{D}_2^{(1)} \left\{ \mathbf{M}^{(1)} \mathbf{V}^{\circ(1)} (\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} - \mathbf{M} \Phi^\circ) \right. \\
&\quad - \mathbf{C}^{(1)} [\mathbf{M}^{(1)} (\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)} - (\mathbf{M} \Phi^\circ + \Phi^*)) \\
&\quad \left. + \mathbf{M}^{\circ(1)} (\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} - \mathbf{M} \Phi^\circ)] \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{M}^{\circ(1)} \mathbf{V}^{\dagger(1)} [(\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) - (\mathbf{M} \Phi^\circ + \Phi^*)] \right\} \boldsymbol{\iota} \\
&= \mathbf{Z}^\top \mathbf{D}_2^{(1)} \left\{ \mathbf{M}^{(1)} \mathbf{V}^{\circ(1)} (\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} - \mathbf{M} \Phi^\circ) \right. \\
&\quad - \mathbf{C}^{(1)} [\mathbf{M}^{(1)} (\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)} - (\mathbf{M} \Phi^\circ + \Phi^*)) \\
&\quad \left. + \mathbf{M}^{\circ(1)} (\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} - \mathbf{M} \Phi^\circ)] \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{M}^{\circ(1)} \mathbf{V}^{\dagger(1)} [(\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) - (\mathbf{M} \Phi^\circ + \Phi^*)] \right\} \boldsymbol{\iota}
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{V}^\circ = \text{diag}[(v_1^\circ, \dots, v_n^\circ)]$, $\mathbf{C} = \text{diag}[(c_1^{\circ\dagger}, \dots, c_n^{\circ\dagger})]$, $\mathbf{V}^\dagger = \text{diag}[(v_1^\dagger, \dots, v_n^\dagger)]$ e $\boldsymbol{\iota}$ é um vetor coluna de uns de dimensão n .

Logo, o valor do vetor \mathbf{q} é dado por:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{X}^\top \Phi^{\circ(1)} \mathbf{D}_1^{(1)} \left\{ \mathbf{V}^{\circ(1)} \mathbf{K}_1 - \mathbf{C}^{(1)} \mathbf{K}_2 + \mathbf{V}^{\dagger(1)} \mathbf{K}_3 \right\} \boldsymbol{\iota} \\ \mathbf{Z}^\top \mathbf{D}_2^{(1)} \left\{ \mathbf{M}^{(1)} \mathbf{V}^{\circ(1)} \mathbf{K}_1 - \mathbf{C}^{(1)} (\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{K}_3 + \mathbf{M}^{*(1)} \mathbf{K}_1) + \mathbf{M}^{*(1)} \mathbf{V}^{\dagger(1)} \mathbf{K}_3 \right\} \boldsymbol{\iota} \end{array} \right],$$

em que,

$$\mathbf{K}_1 = (\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} - \mathbf{M} \Phi^\circ),$$

$$\mathbf{K}_2 = [(2\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) - (2\mathbf{M} \Phi^\circ + \Phi^*)],$$

$$\mathbf{K}_3 = [(\mathbf{M}^{(1)} \Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) - (\mathbf{M} \Phi^\circ + \Phi^*)].$$

E a matriz $\boldsymbol{\Upsilon}$ é encontrada de acordo com:

$$\left[\begin{array}{cc} E_{\theta_1}[\mathbf{u}_\beta(\theta_1)\mathbf{u}_\beta^\top(\theta)] & E_{\theta_1}[\mathbf{u}_\beta(\theta_1)\mathbf{u}_\nu^\top(\theta)] \\ E_{\theta_1}[\mathbf{u}_\nu(\theta_1)\mathbf{u}_\beta^\top(\theta)] & E_{\theta_1}[\mathbf{u}_\nu(\theta_1)\mathbf{u}_\nu^\top(\theta)] \end{array} \right].$$

Sendo que

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_\beta \theta_1 &= \mathbf{X}^\top \Phi^{(1)} \mathbf{D}_1^{(1)} [(\mathbf{y}^\circ - \boldsymbol{\mu}^{\circ(1)}) - (\mathbf{y}^\dagger - \boldsymbol{\mu}^{\dagger(1)})], \\ \mathbf{u}_\beta^\top \theta &= \mathbf{X}^\top \Phi \mathbf{D}_1 [(\mathbf{y}^\circ - \boldsymbol{\mu}^\circ)^\top - (\mathbf{y}^\dagger - \boldsymbol{\mu}^\dagger)^\top], \\ \mathbf{u}_\nu(\theta_1) &= \mathbf{Z}^\top \mathbf{D}_2^{(1)} [M^{(1)} (\mathbf{y}^\circ - \boldsymbol{\mu}^{\circ(1)}) - M^* (\mathbf{y}^\dagger - \boldsymbol{\mu}^{\dagger(1)})], \\ \mathbf{u}_\nu^\top(\theta) &= \mathbf{Z} \mathbf{D}_2 [M (\mathbf{y}^\circ - \boldsymbol{\mu}^\circ)^\top - M^* (\mathbf{y}^\dagger - \boldsymbol{\mu}^\dagger)^\top].\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos a seguinte quantidade:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^\top \Phi^{(1)} \mathbf{D}_1^{(1)} \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1 \Phi \mathbf{X} & \mathbf{X}^\top \Phi^{(1)} \mathbf{D}_1^{(1)} \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^\top \mathbf{D}_2^{(1)} \mathbf{L}_3 \mathbf{D}_1 \Phi \mathbf{X} & \mathbf{Z}^\top \mathbf{D}_2^{(1)} \mathbf{L}_4 \mathbf{D}_2 \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_1 &= [V^{\circ(1)} - 2C^{(1)} + V^{\dagger(1)}], \\ \mathbf{L}_2 &= [M V^{\circ(1)} - C^{(1)} (M^* + M) + M^* V^{\dagger(1)}], \\ \mathbf{L}_3 &= [M^{(1)} V^{\circ(1)} - C^{(1)} (M^{(1)} + M^{*(1)}) + M^{*(1)} V^{\dagger(1)}], \\ \mathbf{L}_4 &= [M^{(1)} V^{\circ(1)} M - C^{(1)} (M^{(1)} M^* + M^{*(1)} M) + M^{*(1)} V^{\dagger(1)} M^*].\end{aligned}$$

Vale ressaltar aqui que a obtenção detalhada dos resultados apresentados nesta Seção 3.2 encontra-se no apêndice A.2.

Capítulo 4

Simulações

Este capítulo apresenta os resultados da simulação de Monte Carlo na qual foram avaliados o TRV usual e o teste da razão de verossimilhanças corrigido por Skovgaard, utilizando amostras de tamanho pequeno e moderado. Foram consideradas 10.000 réplicas, testes bilaterais e uma restrição imposta na hipótese nula $r = 1$ (número de restrições impostas na hipótese nula).

Na Seção 4.1, é apresentada a simulação de tamanho, que avalia a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando esta é verdadeira. Já na seção 4.2, é apresentada a simulação de poder, que avalia a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando esta é falsa.

São considerados quatro cenários com base no modelo de regressão BP. O primeiro e o terceiro cenário, denominados Cenário I e III, possui média baixa e precisão baixa. Já o segundo e quarto cenário, denominados Cenário II e IV, possui média alta e precisão alta. Nos quatro cenários foram considerados os seguintes tamanhos amostrais, $n = 25$, $n = 30$ e $n = 40$.

4.1 Tamanho do Teste

A simulação de tamanho estima a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira. Em outras palavras, busca-se avaliar qual é a chance de detectar um efeito ou diferença existente entre as populações em estudo. A variável resposta é gerada sem erro de especificação.

O modelo BP considerado é dado por:

$$\begin{aligned}g_1(\mu_i) &= \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2}, \\g_2(\phi_i) &= \gamma_0 + \gamma_1 z_{i1}, \quad i = 1, \dots, 30.\end{aligned}$$

Na Tabela 4.1 encontra-se o cenário I, sendo os verdadeiros valores dos parâmetros: $\beta_0 = 2.4$, $\beta_1 = -1.4$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_0 = 3.5$ e $\gamma_1 = 2.0$. Os valores das covariáveis

Tabela 4.1: Tamanhos dos testes (%), cenário I, submodelo da média.

Estatística	$n = 25$			$n = 30$			$n = 40$		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
RV1	15.84	9.06	2.53	15.14	8.48	2.35	13.68	7.45	1.76
RV2	11.15	5.64	1.08	10.59	5.23	1.08	10.20	5.03	0.99
RV3	12.28	6.62	1.84	11.60	6.08	1.72	10.89	5.61	1.44

foram gerados a partir da distribuição $\mathcal{U}(0, 1)$. As simulações foram baseadas em tamanhos amostrais 25, 30 e 40 e níveis nominais de 10%, 5% e 1%.

Algumas conclusões podem ser extraídas a partir dos resultados apresentados na Tabela 4.1. Observamos que o TRV, para este cenário, é notavelmente liberal para amostras de tamanho pequeno ou moderado. Já os testes corrigidos apresentam bom desempenho. Por exemplo, para $n = 30$, e ao nível nominal de 5%, as taxas de rejeição da hipótese nula baseados nos testes RV1, RV2 e RV3 são, respectivamente, 8.48%, 5.23% e 6.08%. Ao ponto que o RV1 é quase que o dobro do nível nominal selecionado, as versões corrigidas propostas apresentaram tamanhos estimados mais próximos dos níveis nominais.

Na Tabela 4.2, ao analisarmos o cenário II e considerando os verdadeiros valores dos parâmetros $\beta_0 = 4.1$, $\beta_1 = -2.0$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_0 = 3.5$ e $\gamma_1 = 2.0$ (média e precisão alta), observamos que as versões corrigidas continuam fornecendo tamanhos estimados mais próximos dos níveis nominais. Por exemplo, para $n = 40$ e ao nível nominal de 5%, as taxas de rejeição da hipótese nula baseadas nos testes RV1, RV2 e RV3 são, respectivamente, 7.32%, 5.16% e 5.88%. Não observamos diferenças significativas devido ao aumento da média e precisão.

Tabela 4.2: Tamanhos dos testes (%), cenário II, submodelo da média.

Estatística	$n = 25$			$n = 30$			$n = 40$		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
RV1	16.06	9.16	2.61	14.63	8.59	2.21	13.59	7.32	1.9
RV2	11.19	5.71	1.17	10.72	5.7	1.18	9.98	5.16	1.05
RV3	12.33	6.66	1.87	11.75	6.66	1.91	10.83	5.88	1.64

Vamos agora considerar testes nos parâmetros que indexam o submodelo de precisão. O modelo de regressão BP usado em nossas simulações é

$$g_1(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2},$$

$$g_2(\phi_i) = \gamma_0 + \gamma_1 z_{i1} + \gamma_2 z_{i2}, \quad i = 1, \dots, 30.$$

Na Tabela 4.3, ao analisarmos o cenário III e considerando os verdadeiros valores dos parâmetros $\beta_0 = 1.8$, $\beta_1 = -1.1$, $\beta_2 = 0.4$, $\gamma_0 = 3.5$, $\gamma_1 = 2$ e $\gamma_2 = 0$ (média e precisão baixa), observamos que as versões corrigidas continuam fornecendo tamanhos estimados mais próximos dos níveis nominais. Por exemplo, para $n = 40$ e ao

nível nominal de 5%, as taxas de rejeição da hipótese nula baseadas nos testes RV1, RV2 e RV3 são, respectivamente, 7.89%, 5.56% e 6.92%.

Tabela 4.3: Tamanhos dos testes (%), cenário III, submodelo da precisão.

Estatística	$n = 25$			$n = 30$			$n = 40$		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
RV1	19.03	11.53	3.87	17.83	10.34	3.04	14.36	7.89	1.81
RV2	12.55	6.92	1.35	12.57	6.43	1.37	10.78	5.56	1.0
RV3	14.98	8.86	2.85	14.34	7.94	2.58	12.3	6.92	2.1

Na Tabela 4.4, ao analisarmos o cenário IV e considerando os verdadeiros valores dos parâmetros $\beta_0 = 4.3$, $\beta_1 = -2.4$, $\beta_2 = 1.2$, $\gamma_0 = 3.1$, $\gamma_1 = 1.2$ e $\gamma_2 = 0$ (média e precisão alta), observamos que as versões corrigidas continuam fornecendo tamanhos estimados mais próximos dos níveis nominais. Por exemplo, para $n = 30$ e ao nível nominal de 5%, as taxas de rejeição da hipótese nula baseadas nos testes RV1, RV2 e RV3 são, respectivamente, 10%, 6.09% e 7.65%.

Tabela 4.4: Tamanhos dos testes (%), cenário IV, submodelo da precisão.

Estatística	$n = 25$			$n = 30$			$n = 40$		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
RV1	19.58	11.74	3.53	16.93	10.0	2.90	15.26	8.49	2.26
RV2	12.69	6.45	1.56	12.05	6.09	1.30	11.39	5.79	1.01
RV3	15.12	8.47	3.12	13.92	7.65	2.44	12.71	6.98	1.89

Nos quatro cenários, percebemos que RV2 teve um desempenho superior em relação aos demais testes. Além disso, é importante ressaltar que RV3 apresentou um comportamento um pouco mais liberal do que RV2.

4.2 Poder do Teste

A simulação de poder envolve a geração de dados simulados com base em um modelo estatístico gerado sob hipótese alternativa, que nesse caso é $H_1 : \beta_2 = \delta$ com $\delta = -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 . Ao contrário da simulação de tamanho, a variável resposta é gerada com um erro de especificação. Avaliamos quantas vezes a hipótese nula foi rejeitada aos níveis nominais selecionados. Para os verdadeiros valores dos parâmetros mantivemos os mesmos valores das simulações de tamanho com exceção de $\beta_2 = \delta$.

Na Tabela 4.5, encontram-se as taxas de rejeição não nulas (poder do teste) dos testes ajustados para o cenário I (média e precisão baixa) considerando $n = 25$, $n = 30$, $n = 40$, $\delta = -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 e as estatísticas ajustadas. Devido à sua tendência significativamente liberal, a estatística

RV1 não foi incluída na análise. Podemos observar que ambas as avaliações corrigidas mostram resultados semelhantes em relação ao seu poder estatístico, sendo que o teste fundamentado em RV2 é ligeiramente mais eficaz. Vale salientar que os testes tornam-se mais poderosos à medida que o δ se afasta de zero, por exemplo para $n = 25$, $\delta = 0.4$ e ao nível nominal de 5% as taxas de rejeição da hipótese alternativa baseadas nos testes RV2 e RV3 são, respectivamente, 99.62 e 99.58.

Tabela 4.5: Poder dos testes da razão de verossimilhanças ajustados (%), cenário I, submodelo da média.

δ	Estatística	$n = 25$			$n = 30$			$n = 40$		
		10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
-0.5	RV2	99.99	99.99	99.77	100	100	100	100	100	100
	RV3	99.99	99.99	99.16	100	100	100	100	100	100
-0.4	RV2	99.79	99.32	95.84	99.98	99.96	99.80	100	99.99	99.88
	RV3	99.76	99.24	92.00	99.98	99.96	99.40	100	99.98	99.77
-0.3	RV2	96.30	92.52	76.63	99.35	98.18	91.86	99.91	99.67	98.03
	RV3	96.07	92.05	65.35	99.28	98.08	85.68	99.90	99.64	96.12
-0.2	RV2	75.99	63.01	36.17	93.78	87.71	67.24	94.31	89.21	72.00
	RV3	75.13	61.92	26.19	93.50	87.20	55.79	93.83	88.53	61.59
-0.1	RV2	32.38	21.61	7.48	40.25	28.08	11.15	43.63	30.71	12.38
	RV3	32.06	21.42	4.90	39.75	27.48	7.39	42.68	29.89	7.84
0.1	RV2	32.73	21.42	7.44	45.87	32.52	13.47	43.43	30.66	12.45
	RV3	32.42	21.34	4.74	45.02	31.66	8.89	42.50	29.88	8.08
0.2	RV2	77.33	65.25	38.12	95.68	90.95	71.88	89.33	81.74	59.07
	RV3	76.53	64.07	27.51	95.48	90.40	60.45	88.56	80.59	47.38
0.3	RV2	97.24	93.69	79.32	98.88	97.19	87.6	99.99	99.93	99.33
	RV3	96.97	93.36	69.25	98.80	97.00	79.84	99.97	99.89	98.53
0.4	RV2	99.92	99.62	97.24	99.96	99.92	99.21	100	100	100
	RV3	99.90	99.58	94.09	99.96	99.92	98.26	100	100	100
0.5	RV2	99.98	99.98	99.86	100	100	100	100	100	100
	RV3	99.98	99.98	99.49	100	100	100	100	100	100

Na Tabela 4.6, encontra-se as taxas de rejeição dos testes ajustados para o cenário II. Assim como no cenário I, no cenário II, os resultados dos dois testes, RV2 e RV3, são semelhantes, sendo o teste RV2 levemente mais poderoso. Observamos poderes um pouco maiores quando os valores da precisão aumentam, bem como à medida que δ se distancia da hipótese nula.

Na Tabela 4.7, encontram-se as taxas de rejeição não nulas (poder do teste) dos testes ajustados para o cenário III (média e precisão baixa) considerando $n = 25$, $n = 30$, $n = 40$, $\delta = -4.0, -3.0, -2.0, 2.0, 3.0, 4.0$, e as estatísticas ajustadas. Devido à sua tendência significativamente liberal, a estatística RV1 não foi incluída na análise. Podemos observar que ambas as avaliações corrigidas mostram resultados semelhantes em relação ao seu poder estatístico, sendo que o teste fundamentado em RV2 é ligeiramente mais eficaz. Vale salientar que os testes tornam-se mais poderosos à medida que o δ se afasta de zero, por exemplo para $n = 30$, $\delta = 4.0$

Tabela 4.6: Poder dos testes da razão de verossimilhanças ajustados (%), cenário II, submodelo da média.

δ	Estatística	$n = 25$			$n = 30$			$n = 40$		
		10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
-0.5	RV2	99.98	99.98	99.96	100	100	100	100	100	100
	RV3	99.98	99.98	99.77	100	100	99.98	100	100	100
-0.4	RV2	99.97	99.87	98.42	99.87	99.71	97.90	100	100	100
	RV3	99.97	99.83	96.21	99.86	99.70	95.88	100	100	99.99
-0.3	RV2	98.19	95.98	84.18	99.44	98.59	93.29	99.66	99.46	97.32
	RV3	98.04	95.53	75.63	99.40	98.49	88.20	99.63	99.42	94.43
-0.2	RV2	81.90	71.12	43.84	89.68	82.08	59.18	95.31	90.86	74.17
	RV3	81.21	69.94	32.33	88.96	81.10	47.30	94.92	90.15	63.49
-0.1	RV2	36.30	24.42	8.67	40.86	28.36	11.00	55.22	41.91	19.82
	RV3	35.84	24.08	5.74	40.06	27.66	6.93	54.15	40.65	13.25
0.1	RV2	36.41	24.29	8.78	46.17	32.53	13.46	47.59	34.84	14.81
	RV3	35.91	23.67	5.67	45.32	31.77	8.51	46.61	34.00	9.61
0.2	RV2	81.70	71.50	44.67	93.93	88.75	70.05	98.37	96.20	86.11
	RV3	81.00	70.36	32.84	93.62	88.18	58.99	98.23	95.86	77.98
0.3	RV2	98.55	96.20	84.77	99.55	98.84	93.70	99.96	99.9	99.21
	RV3	98.37	95.90	76.10	99.52	98.70	88.78	99.96	99.89	98.20
0.4	RV2	99.96	99.86	98.68	100	100	99.87	100	100	99.99
	RV3	99.96	99.80	96.70	100	100	99.85	100	100	99.97
0.5	RV2	99.99	99.99	99.94	100	100	100	100	100	100
	RV3	99.99	99.99	99.76	100	100	100	100	100	100

e ao nível nominal de 5% as taxas de rejeição da hipótese alternativa baseadas nos testes RV2 e RV3 são, respectivamente, 98.17 e 98.11.

Na Tabela 4.8, encontra-se as taxas de rejeição dos testes ajustados para o cenário IV. Assim como no cenário III, no cenário IV, os resultados dos dois testes, RV2 e RV3, são semelhantes, sendo o teste RV2 levemente mais poderoso. Observamos poderes um pouco maiores quando os valores da precisão aumentam, bem como à medida que δ se distancia da hipótese nula.

Em resumo, as simulações realizadas para o modelo de regressão BP, com a estatística RV1 e as estatísticas ajustadas RV2 e RV3, levaram-nos a conclusões significativas sobre o comportamento dos testes em amostras de tamanho pequeno/moderado. Observou-se que o TRV não é recomendado devido à sua tendência de ser excessivamente permissivo em amostras de tamanho pequeno. Portanto, é fortemente recomendado o uso das estatísticas corrigidas, em especial a estatística RV2 em aplicações práticas.

Tabela 4.7: Poder dos testes da razão de verossimilhanças ajustados (%), cenário III, submodelo da precisão.

δ	Estatística	$n = 25$			$n = 30$			$n = 40$		
		10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
-4.0	RV2	94.17	89.14	72.30	94.69	89.98	73.15	95.05	90.94	77.13
	RV3	93.83	88.67	62.23	94.37	89.42	63.21	94.96	90.77	68.92
-3.0	RV2	80.87	69.74	43.78	81.51	72.05	50.03	93.27	88.48	74.59
	RV3	80.14	68.78	32.64	80.87	71.12	39.12	92.93	87.84	65.90
-2.0	RV2	52.70	39.14	17.12	59.81	47.40	24.52	68.97	56.63	31.83
	RV3	51.87	38.18	11.05	58.96	46.45	17.16	67.98	55.18	22.91
2.0	RV2	61.91	49.58	27.40	65.95	53.65	31.07	76.51	65.82	41.91
	RV3	60.99	48.02	19.61	64.99	52.65	22.33	75.25	64.46	31.24
3.0	RV2	86.44	78.76	58.80	93.21	88.69	74.00	96.58	93.17	80.53
	RV3	85.60	77.55	49.20	92.71	87.90	64.46	96.31	92.53	71.23
4.0	RV2	96.68	94.11	85.26	99.13	98.17	93.74	99.18	98.34	93.67
	RV3	96.46	93.62	78.91	99.07	98.11	90.49	99.15	98.18	89.88

Tabela 4.8: Poder dos testes da razão de verossimilhanças ajustados (%), cenário IV, submodelo da precisão.

δ	Estatística	$n = 25$			$n = 30$			$n = 40$		
		10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
-4.0	RV2	94.25	89.31	72.28	97.03	94.20	83.83	99.63	99.32	97.03
	RV3	93.95	88.79	62.42	96.82	93.95	76.54	99.63	99.22	95.02
-3.0	RV2	80.85	69.75	43.86	82.54	73.21	51.11	94.45	90.11	74.80
	RV3	80.13	68.48	32.61	81.76	72.19	40.52	94.19	89.63	65.63
-2.0	RV2	52.93	39.16	17.00	55.34	41.63	18.76	76.14	65.13	41.06
	RV3	52.11	38.05	10.84	54.17	40.52	12.37	75.09	63.80	31.19
2.0	RV2	60.28	47.83	26.17	73.76	62.15	38.23	69.93	58.57	35.04
	RV3	59.12	46.47	18.34	72.52	60.66	28.48	68.81	57.05	25.79
3.0	RV2	86.23	78.81	58.80	89.71	81.69	58.02	97.60	95.50	85.65
	RV3	85.49	77.66	48.97	89.13	80.53	45.95	97.42	95.14	78.41
4.0	RV2	96.82	94.21	85.37	99.24	98.38	94.46	99.76	99.41	97.48
	RV3	96.61	93.72	79.09	99.16	98.21	91.50	99.70	99.34	95.57

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo, utilizamos o TRV e suas versões corrigidas em duas aplicações práticas com dados reais. Na Seção 5.1, exploramos o conjunto de dados do milho, enquanto na Seção 5.2, analisamos o conjunto de dados da cerveja.

5.1 Dados do Milho

Nesta seção aplicamos os testes abordados nesse trabalho aos resultados do experimento descrito por [GRIFFITHS *et al.* \(1993\)](#) e que foi apresentado por [BOURGUIGNON *et al.* \(2018\)](#). A variável resposta y é a produtividade do milho (libras/acre) dada a combinação de nitrogênio (x_{1i}) e fosfato (x_{2i}) correspondente à i -ésima condição experimental. O modelo de regressão BP que estimamos é

$$\log(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(x_{1i}) + \beta_2 \log(x_{2i}),$$

e

$$\log(\phi_i) = \nu_0 + \nu_1 x_{2i}, \quad i = 1, \dots, 30.$$

A Tabela 5.1 apresenta as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros. Pode-se afirmar que os coeficientes apresentam significância estatística, indicando que há uma relação estatisticamente significativa entre as variáveis em análise. Foi observada uma associação positiva entre a variável resposta e os níveis de nitrogênio, bem como os níveis de fosfato.

Inicialmente, testamos a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ a um nível nominal de 5%. A estatística RV1 é igual a 26.5551 (p -valor = 2.5612×10^{-7}). Ao nível nominal de 5%, fica evidente que a hipótese nula é rejeitada. No entanto, devido ao tamanho pequeno da amostra, é importante calcular as estatísticas ajustadas, RV2 e RV3. Desse modo, obtemos RV2 igual a 23.9793 (p -valor = 9.7376×10^{-7}) e RV3 igual a 24.0417 (p -valor = 9.4268×10^{-7}). Observe que os resultados dos testes ajustados corroboram com a conclusão de que \mathcal{H}_0 deve ser rejeitada ao nível de significância

selecionado.

Tabela 5.1: Estimativas dos parâmetros para os dados do milho.

Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	p-valor
Submodelo para μ			
β_0	0.5207	0.2788	0.0739
β_1	0.3506	0.0330	9.3×10^{-11}
β_2	0.3990	0.0423	1.0×10^{-9}
Submodelo para ϕ			
ν_0	2.7027	0.6650	0.0004
ν_1	0.0072	0.0034	0.0432

Após realizar os testes, procedemos com a análise dos resíduos do modelo selecionado. A Figura 5.1 apresenta o envelope simulado de DUNN e SMYTH (1996) para o resíduo quantílico. Todos os resíduos encontram-se dentro dos limites estabelecidos pelo envelope. Dessa forma, não existem indícios de uma especificação inadequada do modelo.

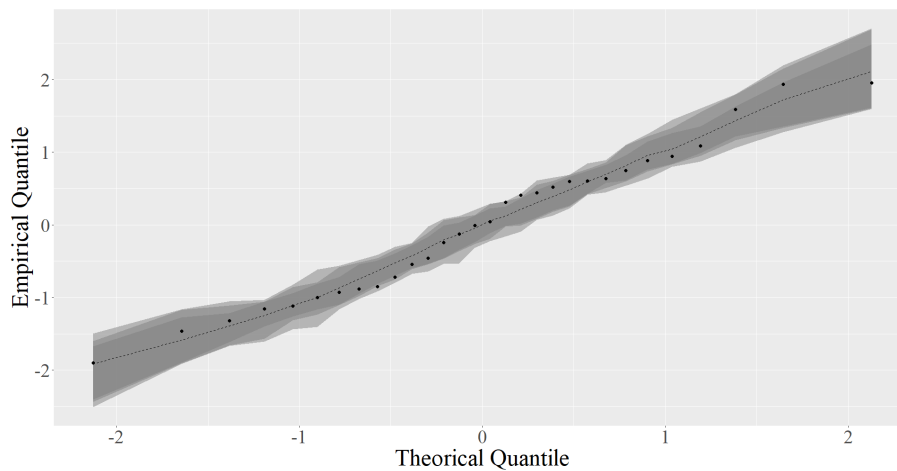


Figura 5.1: Envelope simulado dos resíduos quantílicos para os dados do milho.

Aplicamos o teste RESET de especificação correta do modelo, proposto para o modelo de regressão BP por SANTOS (2021). O teste consiste em verificar se a especificação do modelo de regressão BP está correta, ou seja, se o modelo estimado está de acordo com o processo de geração dos dados. Ao nível de significância de 5%, obtivemos um p -valor de 0.9261, e assim, não há evidências suficientes para rejeitar a hipótese nula, de que o modelo está bem especificado. Vale ressaltar que o modelo considerado aqui é o mesmo utilizado por BOURGUIGNON *et al.* (2018) e considerado por SANTOS (2021) evidenciando a aplicabilidade dos testes propostos.

5.2 Dados da Cerveja

A segunda aplicação também foi apresentada por [GRIFFITHS *et al.* \(1993\)](#) para explicar a demanda da cerveja de uma família americana selecionada aleatoriamente em uma grande cidade nos Estados Unidos da América(EUA). As informações da amostra consistem em 30 valores anuais e as variáveis coletadas foram a quantidade de cerveja demandada em litros (Lt), que é a variável resposta, o preço da cerveja (Pb), o preço de outras bebidas (Pl), o preço de outros bens e serviços (Pr) e a renda (Sa).

O modelo inicial, que chamamos de modelo I, tem o componente sistemático da média dado por:

$$\log(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 Pb_i + \beta_2 Pr_i + \beta_3 \log(Sa)_i,$$

e especificação da precisão dada por

$$\log(\phi_i) = \nu_0 + \nu_1 Pb_i + \nu_2 Pr_i, \quad i = 1, \dots, 30.$$

A função de ligação utilizada foi a logarítmica. A Tabela 5.1 apresenta as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo I.

É possível concluir que os coeficientes demonstram relevância estatística, sugerindo que existe uma associação estatisticamente relevante entre as variáveis que estão sendo estudadas.

Tabela 5.2: Estimativas dos parâmetros para os dados da cerveja: modelo I

Parâmetro	Estimativas	Erro padrão	p-valor
Submodelo para μ			
β_0	-3.4983	3.7206	0.3557
β_1	-0.4505	0.0760	2.97×10^{-6}
β_2	0.2512	0.0596	0.0002
β_3	0.8272	0.3829	0.0401
Submodelo para ϕ			
ν_0	9.69×10^0	1.90×10^0	2.24×10^{-5}
ν_1	-1.22×10^{-4}	5.80×10^{-5}	0.0442

Inicialmente, testamos a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$ a um nível de significância nominal de 5%. A estatística RV1 é igual a 4.2917 (p -valor = 0.0382). Portanto, de acordo com o TRV usual, rejeitamos a hipótese nula no nível de significância estabelecido e devemos manter $\log(Sa)$. No entanto, devido ao tamanho pequeno da amostra, o TRV pode apresentar distorção na probabilidade do erro tipo I. Nesse sentido, testes ajustados são extremamente importantes em aplicações como esta.

Ao aplicar os testes ajustado para o modelo I, obtemos RV2 igual a 3.3829 (p -

valor = 0.0658) e RV3 igual a 3.4310 (p -valor = 0.0639). Dessa forma, de acordo com os resultados dos testes corrigidos, a hipótese nula não é rejeitada e $\log(Sa)$ não é significativa para explicar a quantidade de cerveja.

Dessa forma, o modelo II, agora tem o componente sistemático da média dado por:

$$\log(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 Pb_i + \beta_2 Pr_i,$$

e especificação da precisão dada por

$$\log(\phi_i) = \nu_0 + \nu_1 Pb_i, \quad i = 1, \dots, 30.$$

A Tabela 5.3 apresenta as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo II. É possível concluir que os coeficientes demonstram relevância estatística, sugerindo que existe uma associação estatisticamente relevante entre as variáveis que estão sendo estudadas.

Agora, vamos testar a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ a um nível de significância nominal de 5%. A estatística RV1 é igual a 12.2206 (p -valor = 0.0004). Ao aplicar os testes ajustado para o modelo II, obtemos RV2 igual a 10.6216 (p -valor = 0.0011) e RV3 igual a 10.6739 (p -valor = 0.0010).

Nesse caso, tanto o TRV quanto os testes ajustados rejeitaram a hipótese nula, assim permanecemos com o modelo II sendo o melhor ajuste.

Tabela 5.3: Estimativas dos parâmetros para os dados da cerveja: modelo II.

Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	p-valor
Submodelo para μ			
β_0	4.5377	0.0528	2.00×10^{-16}
β_1	-0.2929	0.0284	1.70×10^{-10}
β_2	0.3045	0.0586	1.00×10^{-9}
Submodelo para ϕ			
ν_0	9.29×10^0	1.78×10^0	2.18×10^{-5}
ν_1	-1.14×10^{-4}	5.41×10^{-5}	0.0447

Agora, avaliamos se o modelo reduzido apresenta um bom grau de ajuste aplicando o envelope simulado. Todos os resíduos encontram-se dentro dos limites estabelecidos pelo envelope. Conforme pode ser visto na Figura 5.2. Dessa forma, não existem indícios evidentes de uma especificação inadequada do modelo.

Ao aplicar o teste RESET, SANTOS (2021). Ao nível de significância de 5%, obtivemos um p -valor de 0.0744. Portanto, não há evidências suficientes para rejeitar a hipótese nula, o que indica que o modelo II ajustado é aceitável.

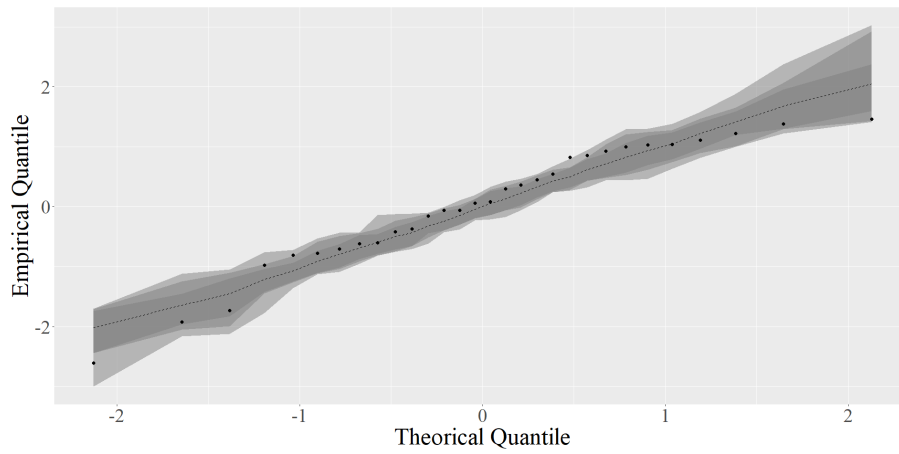


Figura 5.2: Envelope simulado dos resíduos quantílicos para os dados da cerveja.

Capítulo 6

Conclusões

O modelo de regressão BP é utilizado para modelar variáveis respostas contínuas positivas. Esse modelo é útil em situações em que os dados possuem assimetria e caudas pesadas, o que é comum em muitos contextos, como modelos financeiros, econometria e análise de dados de saúde, por exemplo. A inferência realizada nesses modelos geralmente se apoia na teoria assintótica, a qual pode ser imprecisa quando lidamos com amostras pequenas. Uma estratégia para resolver esta situação é buscar ajustes da estatística da razão de verossimilhanças usual, a fim de obter uma boa aproximação entre a distribuição da estatística do teste e a distribuição qui-quadrado de referência. Neste trabalho, propomos duas correções da estatística da RV seguindo a correção de [SKOVGAARD \(2001\)](#).

Aqui estão as principais contribuições deste trabalho resumidas nos seguintes itens:

1. Consideramos o modelo de regressão BP proposto por [BOURGUIGNON *et al.* \(2018\)](#) que utilizaram uma nova parametrização para essa distribuição, que é indexada pelos parâmetros de média e precisão. Para facilitar os cálculos, expressamos a log-verossimilhança na forma matricial, colocamos a densidade na família exponencial e a partir das estatísticas suficientes, obtivemos a função escore, matriz de informação observada, matriz de informação de Fisher e derivamos as quantidades necessárias para os cálculos das estatísticas da RV corrigidas por Skovgaard (RV2 e RV3) para o modelo de regressão BP.
2. Realizamos as simulações de Monte Carlo implementadas na linguagem de programação *R*, para avaliar o tamanho e poder das correções propostas e comparar com os resultados obtidos para o teste de RV usual. Os resultados das simulações mostraram que o TRV pode ser consideravelmente liberal quando a amostra é de tamanho pequeno a moderado. Nas simulações de tamanho verificamos que as estatísticas corrigidas propostas nesse trabalho tem

distribuição, sob a hipótese nula, melhor aproximadas pela distribuição qui-quadrado de referência, indicando que os testes ajustados são mais confiáveis do que o teste da RV usual em termos de controle da probabilidade do erro tipo I (tamanho do teste). O teste da RV2 apresentou uma pequena vantagem pois as taxas de rejeição nula ficaram mais próximas dos níveis nominais. Adicionalmente, nas simulações de poder, o teste baseado na estatística RV2 mostrou-se levemente mais poderoso do que o teste baseado na estatística RV3.

3. Nas duas aplicações apresentadas, conclusões significativas foram obtidas a partir de resultados numéricos uma vez que alterações inferenciais podem ocorrer dependendo do teste utilizado. É recomendável que quando o p -valor do teste da RV for mais próximo do nível nominal utilizado, os testes baseados nas estatísticas corrigidas sejam utilizados, principalmente se as amostras forem de tamanho pequeno a moderado.

Em resumo, apesar da pequena diferença entre os testes ajustados RV2 e RV3, recomendamos o uso do teste baseado na estatística corrigida RV2, devido ao seu melhor desempenho tanto em simulações quanto em aplicações realizadas.

Referências Bibliográficas

- BARNDORFF-NIELSEN, O., 1983, “On a formula for the distribution of the maximum likelihood estimator”, *Biometrika*, v. 70, n. 2, pp. 343–365.
- BARROS, F. U., 2017, *Refinamentos assintóticos em modelos lineares generalizados heteroscedáticos*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo.
- BOURGUIGNON, M., SANTOS-NETO, M., DE CASTRO, M., 2018, “A new regression model for positive data”, *arXiv preprint arXiv:1804.07734*.
- CORE TEAM, R. C., 2022, “A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.” <http://www.r-project.org/index.html>.
- CRIBARI-NETO, F., QUEIROZ, M. P., 2014, “On testing inference in beta regressions”, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 84, n. 1, pp. 186–203.
- DUNN, P. K., SMYTH, G. K., 1996, “Randomized quantile residuals”, *Journal of Computational and graphical statistics*, v. 5, n. 3, pp. 236–244.
- FERRARI, S. L., CYSNEIROS, A. H., 2008, “Skovgaard’s adjustment to likelihood ratio tests in exponential family nonlinear models”, *Statistics & probability letters*, v. 78, n. 17, pp. 3047–3055.
- FERRARI, S. L., PINHEIRO, E. C., 2011, “Improved likelihood inference in beta regression”, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 81, n. 4, pp. 431–443.
- GAMLSS. “gamlss”. Disponível em: <https://www.gamlss.com/>.
- GRIFFITHS, W. E., HILL, R. C., JUDGE, G. G., 1993, “Learning and practicing econometrics”, .
- KEEPING, E., 1962, “Chap. 12”, *Introduction to Statistical Inference*.

- LAWLEY, D. N., 1956, “A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria”, *Biometrika*, v. 43, n. 3/4, pp. 295–303.
- MCCULLAGH, P., TIBSHIRANI, R., 1990, “A simple method for the adjustment of profile likelihoods”, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 52, n. 2, pp. 325–344.
- MCDONALD, J. B., 1984, “Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income”, *Econometrica*, v. 52, n. 3, pp. 647–665.
- MCDONALD, J. B., 1987, “Model selection: some generalized distributions”, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v. 16, n. 4, pp. 1049–1074.
- NEYMAN, J., PEARSON, E. S., 1928, “On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference: Part I”, *Biometrika*, pp. 175–240.
- PEREIRA, T., 2010, “Regressão beta inflacionada: Inferência e aplicações”, .
- PEREIRA, T. L., CRIBARI-NETO, F., 2014, “Modified likelihood ratio statistics for inflated beta regressions”, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 84, n. 5, pp. 982–998.
- PERETTE, A. C., 2019, *Implementação no software estatístico R de modelos de regressão normal com parametrização geral*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo.
- SANTOS, K. H. D., 2021, “Teste de especificação correta em modelos de regressão Beta Prime”, .
- SANTOS, R. G. D., 2020, “Refinamento para testes de hipóteses em modelos espaciais lineares Gaussianos com repetições”, .
- SILVA, C. M., 2014, “Estimação de Máxima Verossimilhança Utilizando Métodos Iterativos”, *Outubro*, v. 1, pp. 15.
- SKOVGAARD, I. M., 1996, “An explicit large-deviation approximation to one-parameter tests”, *Bernoulli*, v. 2, n. 2, pp. 145–165.
- SKOVGAARD, I. M., 2001, “Likelihood asymptotics”, *Scandinavian Journal of Statistics*, v. 28, n. 1, pp. 3–32.
- TULUPYEV, A., SUVOROVA, A., SOUSA, J., et al., 2013, “Beta prime regression with application to risky behavior frequency screening”, *Statistics in medicine*, v. 32, n. 23, pp. 4044–4056.

Apêndice A

Obtenção das Quantidades Propostas por Skovgaard Para a Classe de Modelos de Regressão Beta Prime

A.1 Vetor Score

Nesta seção, serão apresentados os detalhes fundamentais para a obtenção do vetor score.

Inicialmente, vamos derivar $\ell(\beta, \nu) = \sum_{t=1}^n l(\mu_i, \phi_i)$ com relação a $\beta_{ij}, j = 1, \dots, p$. Temos que:

$$\begin{aligned} U_j &= \frac{\partial \ell(\beta, \nu)}{\partial \beta_j} = \sum_{t=1}^n \frac{\partial \ell(\mu_i, \phi_i)}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_{1i}} x_{ij} \\ &= (1 + \phi)y^\circ - (1 + \phi)y^\dagger - \psi(\mu(1 + \phi))(1 + \phi) + \psi(\mu(1 + \phi) + \phi + 2)(1 + \phi) \\ &= (1 + \phi)[y^\circ - y^\dagger - \psi(\mu(1 + \phi)) + \psi(\mu(1 + \phi) + \phi + 2)] \\ &= (1 + \phi)[y^\circ - y^\dagger - \psi(\mu(1 + \phi)) + \psi(\phi + 2) - \psi(\phi + 2) + \psi(\mu(1 + \phi) + \phi + 2)] \\ &= (1 + \phi) \{ y^\circ - (\psi(\mu(1 + \phi)) - \psi(\phi + 2)) - [y^\dagger - (\psi(\mu(1 + \phi) + \phi + 2) - \psi(\phi + 2))] \} \\ &= (1 + \phi) \{ [y^\circ - \mu^\circ] - [y^\dagger - \mu^\dagger] \} \\ &= \sum_{i=1}^n (1 + \phi_i) \left\{ [y_i^\circ - \mu_i^\circ] - [y_i^\dagger - \mu_i^\dagger] \right\} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_{1i}} x_{ij}. \end{aligned}$$

Sendo a sua forma matricial dada por:

$$U_\beta(\beta, \nu) = X^\top \Phi^\circ D_1 [(y^\circ - \mu^\circ) - (y^\dagger - \mu^\dagger)]$$

com,

$$D_1 = \text{diag} \left\{ \frac{\partial \mu_1}{\partial \eta_{11}}, \dots, \frac{\partial \mu_n}{\partial \eta_{1n}} \right\}.$$

Agora, vamos derivar $\ell(\beta, \nu)$ com relação a ν_r , temos que:

$$U_r = \frac{\partial \ell(\beta, \nu)}{\partial \nu_r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell(\mu_i, \phi_i)}{\partial \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_{2i}} z_{ir}, r = 1, \dots, q.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mu_i, \phi_i)}{\partial \phi_i} &= \mu \log y - (\mu + 1) \log(1 + y) - \psi(\mu(1 + \phi))\mu - \psi(\phi + 2) \\ &\quad + \psi(\mu(1 + \phi) + \phi + 2)(\mu + 1) \\ &= \mu y^\circ - \psi(\mu(1 + \phi))\mu + \psi(\phi + 2)\mu - \psi(\phi + 2)\mu - (\mu + 1)y^\dagger \\ &\quad + \psi(\mu(1 + \phi) + \phi + 2)(\mu + 1) - \psi(\phi + 2) \\ &= \mu[y^\circ - (\psi(\mu(1 + \phi)) - \psi(\phi + 2))] - (\mu + 1)[y^\dagger - (\psi(\mu(1 + \phi) + \phi + 2) - \psi(\phi + 2))] \\ &= \mu_i[y_i^\circ - \mu_i^\circ] - (\mu_i + 1)[y_i^\dagger - \mu_i^\dagger] \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \mu_i [y_i^\circ - \mu_i^\circ] - (\mu_i + 1) [y_i^\dagger - \mu_i^\dagger] \right\} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_{2i}} z_{ir}. \end{aligned}$$

Sua forma matricial é expressa como:

$$U_\nu(\beta, \nu) = Z^\top D_2 [M [y^\circ - \mu^\circ] - M^\circ [y^\dagger - \mu^\dagger]]$$

em que

$$D_2 = \text{diag} \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta_{21}}, \dots, \frac{\partial \phi_\eta}{\partial \eta_{2n}} \right\}$$

sendo

$$M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$$

e

$$M^\circ = \text{diag}[(1 + \mu_1), \dots, (1 + \mu_m)].$$

A.2 Obtenção de q e Υ

Nesta seção, serão apresentados os detalhes essenciais para a obtenção dos valores q e Υ .

A quantidade (3.1) pode ser escrita como:

$$q = E_{\theta_1}[U(\theta_1)(\ell(\theta_1) - \ell(\theta))]$$

sendo,

$$q = \begin{bmatrix} E_{\theta_1}[U_\beta(\theta_1)\ell(\theta_1)] - E_{\theta_1}[U_\beta(\theta_1)\ell(\theta)] \\ E_{\theta_1}[U_\nu(\theta_1)\ell(\theta_1)] - E_{\theta_1}[U_\nu(\theta_1)\ell(\theta)] \end{bmatrix}.$$

Para facilitar os cálculos, vamos dividir a matriz em duas equações, que chamaremos de q_1 e q_2 .

- q_1

Por (2.4) e (2.5) e lembrando que $\mu^\circ = E_\theta(y^\circ)$ e $\theta = (\beta^\top, \nu^\top)$, temos que:

$$E_\theta[U_\beta(\theta)\ell(\theta)] = E_\theta \left\{ X^\top \Phi^\circ D_1 [(y^\circ - \mu^\circ) - (y^\dagger - \mu^\dagger)] \right. \\ \left. [(y^\circ - \mu^\circ)^\top (M\Phi^\circ - P)(y^\dagger - \mu^\dagger)^\top (M\Phi^\circ + \Phi^*) + a^\top] \right\}$$

aplicando o valor esperado, obtemos

$$\begin{aligned} &= X^\top \Phi^\circ D_1 \left\{ E_\theta [(y^\circ - \mu^\circ)(y^\circ - \mu^\circ)^\top (M\Phi^\circ - P) - (y^\circ - \mu^\circ)(y^\dagger - \mu^\dagger)^\top (M\Phi^\circ + \Phi^*) \right. \\ &\quad + (y^\circ - \mu^\circ)a^\top - (y^\dagger - \mu^\dagger)(y^\circ - \mu^\circ)^\top (M\Phi^\circ - P) \\ &\quad \left. + (y^\dagger - \mu^\dagger)(y^\dagger - \mu^\dagger)^\top (M\Phi^\circ + \Phi^*) - (y^\dagger - \mu^\dagger)a^\top] \right\} \iota \\ &= X^\top \Phi^\circ D_1 \left\{ E_\theta [(y^\circ - \mu^\circ)(y^\circ - \mu^\circ)^\top (M\Phi^\circ - P) - E_\theta(y^\circ - \mu^\circ)(y^\dagger - \mu^\dagger)^\top (M\Phi^\circ + \Phi^*) \right. \\ &\quad + E_\theta(y^\circ - \mu^\circ)a^\top - E_\theta(y^\dagger - \mu^\dagger)(y^\circ - \mu^\circ)^\top (M\Phi^\circ - P) \\ &\quad \left. + E_\theta(y^\dagger - \mu^\dagger)(y^\dagger - \mu^\dagger)^\top (M\Phi^\circ + \Phi^*) - E_\theta(y^\dagger - \mu^\dagger)a^\top] \right\} \iota \\ &= X^\top \Phi^\circ D_1 \left\{ V^\circ(M\Phi^\circ - P) - C(M\Phi^\circ + \Phi^*) + 0 - C(M\Phi^\circ - P) + V^\dagger(M\Phi^\circ + \Phi^*) - 0 \right\} \iota \\ &= X^\top \Phi^\circ D_1 \left\{ V^\circ(M\Phi^\circ - P) - C(M\Phi^\circ + \Phi^*) - C(M\Phi^\circ - P) + V^\dagger(M\Phi^\circ + \Phi^*) \right\} \iota \\ &= X^\top \Phi^\circ D_1 \left\{ V^\circ(M\Phi^\circ - P) - C[(M\Phi^\circ + \Phi^*) + (M\Phi^\circ - P)] + V^\dagger(M\Phi^\circ + \Phi^*) \right\} \iota \end{aligned}$$

pois se $i \neq u$, y_i é diferente de y_u , temos que

$$E_{\theta_1} \left\{ (y_i^\circ - \mu_i^{\circ(1)})(y_u - \mu_u^\circ) \right\} = E_{\theta_1} \left\{ y_i^\circ - \mu_i^{\circ(1)} \right\} E_{\theta_1} \left\{ y_u - \mu_u^\circ \right\}$$

e

$$E_{\theta_1} \left\{ y_i^\circ - \mu_i^{\circ(1)} \right\} = 0.$$

Ainda

$$\begin{aligned} E_{\theta_1} \left\{ (y_i^\circ - \mu_i^{\circ(1)})(y_i - \mu_i^\circ) \right\} &= E_{\theta_1} \left\{ (y_i^\circ - \mu_i^{\circ(1)})(y_i - \mu_i^{\circ(1)} + \mu_i^{\circ(1)} - \mu_i^\circ) \right\} \\ &= E_{\theta_1} \left\{ (y_i^\circ - \mu_i^{\circ(1)})(y_i - \mu_i^{\circ(1)}) \right\} + E_{\theta_1} \left\{ (y_i^\circ - \mu_i^{\circ(1)}) \right\} (\mu_i^{\circ(1)} - \mu_i^\circ) \\ &= E_{\theta_1} \left\{ (y_i^\circ - \mu_i^{\circ(1)})^2 \right\} = v_i^{\circ(1)} \end{aligned}$$

pois

- $E_{\theta_1}[U_\beta(\theta_1)\ell(\theta_1)] = X^\top D_1^{(1)} \Phi^{(1)} \left\{ V^{\circ(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)}) - C^{(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) \right. \\ \left. - C^{(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} - P) + V^{\dagger(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) \right\} \iota$

- $E_{\theta_1}[U_\beta(\theta_1)\ell(\theta)] = X^\top D_1^{(1)}\Phi^{(1)}\{V^{\circ(1)}(M\Phi^\circ) - C^{(1)}(M\Phi^\circ + \Phi^*) - C^{(1)}(M\Phi^\circ - P) + V^\dagger(M\Phi^\circ + \Phi^*)\}\iota$

Portanto, q_1 é:

$$\begin{aligned} & E_{\theta_1}[U_\beta(\theta_1)\ell(\theta_1)] - E_{\theta_1}[U_\beta(\theta_1)\ell(\theta)] \\ &= X^\top \Phi^{(1)} D_1^{(1)} \{V^{\circ(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} - M\Phi^\circ) - C^{\circ(1)}[M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)} - (M\Phi^\circ + \Phi^*)] \\ &\quad - C^{(1)}(M^{(1)}\Phi^{(1)} - M\Phi^\circ) + V^{\dagger(1)}[M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)} - (M\Phi^\circ + \Phi^*)]\}\iota \\ &= X^\top \Phi^{(1)} D_1^{(1)} \{V^{\circ(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} - M\Phi^\circ) - C^{\circ(1)}[(2M^{(1)}\Phi^\circ + \Phi^{*(1)}) - (2M\Phi^\circ + \Phi^*)] \\ &\quad + V^{\dagger(1)}[(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) - (M\Phi^\circ + \Phi^*)]\}\iota. \end{aligned}$$

- q_2

Por (2.4) e (2.6) temos que

$$\begin{aligned} E_\theta[U_\nu(\theta)\ell(\theta)] &= E_\theta \{Z^\top D_2[M(y^\circ - \mu^\circ) - M^\circ(y^\dagger - \mu^\dagger)][(y^\circ - \mu^\circ)^\top(M\Phi^\circ - P) \\ &\quad - (y^\dagger - \mu^\dagger)^\top(M\Phi^\circ + \Phi^*) + a^\top]\iota\} \end{aligned}$$

aplicando o valor esperado, obtemos

$$\begin{aligned} &= E_\theta \{Z^\top D_2[M(y^\circ - \mu^\circ)(y^\circ - \mu^\circ)^\top(M\Phi^\circ - P) - M(y^\circ - \mu^\circ)(y^\dagger - \mu^\dagger)^\top(M\Phi^\circ + \Phi^*) \\ &\quad - M^\circ(y^\dagger - \mu^\dagger)(y^\circ - \mu^\circ)^\top(M\Phi^\circ - P) + M^\circ(y^\dagger - \mu^\dagger)(y^\dagger - \mu^\dagger)^\top(M\Phi^\circ + \Phi^*) \\ &\quad + M(y^\circ - \mu^\circ)a^\top - M^\circ(y^\dagger - \mu^\dagger)a^\top]\iota\} \\ &= Z^\top D_2 \{ME_\theta[(y^\circ - \mu^\circ)(y^\circ - \mu^\circ)^\top](M\Phi^\circ - I) - ME_\theta[(y^\circ - \mu^\circ)(y^\dagger - \mu^\dagger)^\top](M\Phi^\circ + \Phi^*) \\ &\quad - M^\circ E_\theta[(y^\dagger - \mu^\dagger)(y^\circ - \mu^\circ)^\top](M\Phi^\circ - P) + M^\circ E_\theta[(y^\dagger - \mu^\dagger)(y^\dagger - \mu^\dagger)^\top](M\Phi^\circ + \Phi^*) \\ &\quad + M0 - M^\circ 0\}\iota \\ &= Z^\top D_2 \{MV^\circ(M\Phi^\circ - I) - MC(M\Phi^\circ + \Phi^*) \\ &\quad - M^\circ C(M\Phi^\circ - I) + M^\circ V^\dagger(M\Phi^\circ + \Phi^*)\}\iota. \end{aligned}$$

Então,

- $E_{\theta_1}[U_\nu(\theta_1)\ell(\theta_1)] = Z^\top D_2^{(1)}\{M^{(1)}V^{\circ(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} - P) - M^{(1)}C^{(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) - M^{\circ(1)}C^{(1)}(M^{(1)}\Phi^{*(1)} - P) + M^{\circ(1)}V^{\dagger(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)})\}\iota$
- $E_{\theta_1}[U_\nu(\theta_1)\ell(\theta)] = Z^\top D_2^{(1)}\{M^{(1)}V^{\circ(1)}(M\Phi^\circ - P) - M^{(1)}C^{(1)}(M\Phi^\circ + \Phi^*) - M^{\circ(1)}C^{(1)}(M\Phi^* - P) + M^{\circ(1)}V^{\dagger(1)}(M\Phi^\circ + \Phi^*)\}\iota$

portanto, q_2 é:

$$\begin{aligned}
& E_{\theta_1}[U_\nu(\theta_1)\ell(\theta_1)] - E_{\theta_1}[U_\nu(\theta_1)\ell(\theta)] \\
&= Z^\top D_2^{(1)} \{ M^{(1)}V^{\circ(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} - M\Phi^\circ) - M^{(1)}C^{(1)}[(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) - (M\Phi^\circ + \Phi^*)] \\
&\quad - M^{\circ(1)}C^{(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} - M\Phi^\circ) + M^{\circ(1)}V^{\dagger(1)}[(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) - (M\Phi^\circ + \Phi^*)] \} \iota \\
&= Z^\top D_2^{(1)} \{ M^{(1)}V^{\circ(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} - M\Phi^\circ) \\
&\quad - C^{(1)}[M^{(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)} - (M\Phi^\circ + \Phi^*)) + M^{\circ(1)}(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} - M\Phi^\circ)] \\
&\quad + M^{\circ(1)}V^{\dagger(1)}[(M^{(1)}\Phi^{\circ(1)} + \Phi^{*(1)}) - (M\Phi^\circ + \Phi^*)] \} \iota.
\end{aligned}$$

A quantidade (3.2) pode ser escrita como:

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} E_{\theta_1}[U_\beta(\theta_1)U_\beta^\top(\theta)] & E_{\theta_1}[U_\beta(\theta_1)U_\nu(\theta)] \\ E_{\theta_1}[U_\nu(\theta_1)U_\beta^\top(\theta)] & E_{\theta_1}[U_\nu(\theta_1)U_\nu^\top(\theta)] \end{bmatrix}$$

por (2.5) temos que

$$\begin{aligned}
& E_{\theta_1}[U_\beta(\theta_1)U_\beta^\top(\theta)] \\
&= E_{\theta_1} \left\{ [X^\top \Phi^{\circ(1)} D_1^{(1)} [(y^\circ - \mu^{\circ(1)}) - (y^\dagger - \mu^{\dagger(1)})]] [(y^\circ - \mu^\circ)^\top - (y^\dagger - \mu^\dagger)^\top] D_1 \Phi^\circ X \right\} \\
&= X^\top \Phi^{\circ(1)} D_1^{(1)} [V^{\circ(1)} - C^{(1)} - C^{(1)} + V^{\dagger(1)}] D_1 \Phi^\circ X \\
&= X^\top \Phi^{\circ(1)} D_1^{(1)} [V^{\circ(1)} - 2C^{(1)} + V^{\dagger(1)}] D_1 \Phi^\circ X
\end{aligned}$$

por (2.6) temos que

$$\begin{aligned}
& E_{\theta_1}[U_\beta(\theta_1)U_\nu^\top(\theta)] \\
&= E_{\theta_1} \left\{ [X^\top \Phi^{\circ(1)} D_1^{(1)} [(y^\circ - \mu^{\circ(1)}) - (y^\dagger - \mu^{\dagger(1)})]] [(y^\circ - \mu^\circ)^\top M - (y^\dagger - \mu^\dagger)^\top M^\circ] D_2 Z \right\} \\
&= X^\top \Phi^{\circ(1)} D_1^{(1)} [V^{\circ(1)} M - C^{(1)} M^\circ - C^{(1)} M + V^{\dagger(1)} M^\circ] D_2 Z \\
&= X^\top \Phi^{\circ(1)} D_1^{(1)} [V^{\circ(1)} M - C^{(1)} (M^\circ + M) + V^{\dagger(1)} M^\circ] D_2 Z
\end{aligned}$$

por (2.5) e (2.6) temos que

$$\begin{aligned}
& E_{\theta_1}[U_\nu(\theta_1)U_\beta^\top(\theta)] \\
&= E_{\theta_1} \left\{ Z^\top D_2^{(1)} [M^{(1)}(y^\circ - \mu^{\circ(1)}) - M^{\circ(1)}(y^\dagger - \mu^{\dagger(1)})] [(y^\circ - \mu^\circ)^\top - (y^\dagger - \mu^\dagger)^\top] D_1 \Phi^\circ X \right\} \\
&= Z^\top D_2^{(1)} [M^{(1)}V^{\circ(1)} - M^{(1)} - M^{\circ(1)}C^{(1)} + M^{\circ(1)}V^{\dagger(1)}] D_1 \Phi^\circ X \\
&= Z^\top D_2^{(1)} [M^{(1)}V^{\circ(1)} - C^{(1)}(M^{(1)} + M^{\circ(1)}) + M^{\circ(1)}V^{\dagger(1)}] D_1 \Phi^\circ X
\end{aligned}$$

e por fim

$$\begin{aligned}
& E_{\theta_1}[U_\nu(\theta_1)U_\nu^\top(\theta)] \\
&= E_{\theta_1} \left\{ Z^\top D_2^{(1)} [M^{(1)}(y^\circ - \mu^{\circ(1)}) - M^{\circ(1)}(y^\dagger - \mu^{\dagger(1)})] [(y^\circ - \mu^\circ)^\top M - (y^\dagger - \mu^\dagger)^\top M^\circ] D_2 Z \right\} \\
&= Z^\top D_2^{(1)} [M^{(1)}V^{\circ(1)}M - M^{(1)}C^{(1)}M^\circ - M^{\circ(1)}C^{(1)}M + M^{\circ(1)}V^{\dagger(1)}M^\circ] D_2 Z \\
&= Z^\top D_2^{(1)} [M^{(1)}V^{\circ(1)}M - C^{(1)}(M^{(1)}M^\circ + M^{\circ(1)}M) + M^{\circ(1)}V^{\dagger(1)}M^\circ] D_2 Z.
\end{aligned}$$

Neste apêndice, optamos por omitir os valores, uma vez que eles estão claramente apresentados no corpo do texto. Nosso objetivo aqui é apenas demonstrar o processo pelo qual os cálculos foram realizados.

Apêndice B

Script

Apresentamos neste apêndice o programa desenvolvido na linguagem de programação R para gerar a Simulação de Monte Carlo. O código foi baseado no programa apresentado na tese de doutorado de (PEREIRA, 2010). Neste apêndice, apresentamos apenas a simulação com tamanhos amostrais de $n = 25, 30, 40$ e 50 , considerando o cenário específico.

```
#-----  
# PROGRAMA: Simulacao_Skovgard_MRBP.txt  
#  
# USO: Simulacao de tamanho dos testes da RV corrigidos no modelo  
#       de regressao beta prime.  
#  
# AUTOR: Joaquim Campos e Tarciana Liberal  
#  
# DATA: 18/04/2023  
#  
# VERSAO:1.2  
#  
# ULTIMA MODIFICACAO: 18/04/2023  
#-----# Pacotes  
  
# Bibliotecas  
library(gamlss)  
library(gamlss.dist)  
library(gamlss.data)  
library(splines)  
#devtools::install_github('santosneto/BPmodel')  
#library(BPmodel)  
source('C:/Users/Joaquim/OneDrive/ rea de Trabalho/Estimation.R')  
source('C:/Users/Joaquim/OneDrive/ rea de Trabalho/gamlss_BP.R')  
source('C:/Users/Joaquim/OneDrive/ rea de Trabalho/glmBP.R')  
library(Formula)  
library(LaplacesDemon)
```

```

library(ggplot2)
library(extraDistr)
library(gamlss)
library(vfcp)
library(nortest)
library(xtable)
#source("gamlss_BP.R")
#source("glmBP.R")
#source("Estimation.R")

# Simulacao do Tamanho


---


set.seed(33)

vn=c(25,30,40,50)

for(n in vn){

  NR=10000 # no de replicas de monte carlo

  r=1      # no de parametros a serem testados

  #VALORES INICIAIS DOS PARAMETROS

  beta=c(2.4,-1.4,0.0) #valores reais vetor beta

  x0=rep(1,n)          #intercepto
  x01=runif(n)          #gerando n valores de uma distribuicao
    uniforme [0,1]
  x02=runif(n)          #gerando n valores de uma distribuicao
    uniforme [0,1]

  X=cbind(x0,x01,x02) #matriz de regressores de mu
  X1=cbind(x0,x01)    #matriz de regressores de mu sob a hipotese
    nula
  eta1=X%*%beta        #preditor linear
  mu = exp(eta1)
  summary(mu)

  gamma=c(3.5,2.0)     #valores reais vetor gamma

  # VARIAVEIS Z
  z0=rep(1,n)          #intercepto
  z1=runif(n)          #gerando n valores de uma distribuicao
    uniforme [0,1]

```

```

Z=cbind(z0,z1)      #matriz de regressores de gamma
zeta=Z%*%gamma      #preditor linear
phi = exp(zeta)
summary(phi)

#Variância e fator de variacao
Vmu=mu*(1+mu)
vary= Vmu/phi      #Vari ncia dos dados simulados
summary(vary)

print(max(phi)/min(phi)) #imprima os resultados
print(max(vary)/min(vary))

#Zerando vetores para armazenar as estatisticas e quantidades
necessarias
epsilon=rep(0,NR)
rho=rep(0,NR)

#Vetores Estatistica da RV
RV1=rep(0,NR)
RV2=rep(0,NR)
RV3=rep(0,NR)

#Numero de colunas das matrizes de regressores
p=ncol(X)
q=ncol(Z)

#Zerando contadores de nao convergencias
contC=0
contC1=0
contC2=0
contC3=0

#Valores sob a hipotese nula
betazero=0

# INICIO LACO DE MONTE CARLO

# for(i in 1:NR) {

    i=1
    while(i <= NR) {

        y=rBP(n,mu,phi) #Gerando dados beta prime

        #Ajustando o modelo de regressao beta prime

```

```

fit <- gamlss(y~(x01+x02),sigma.formula=~(z1),family=BP,trace=F
)

#Ajustando o modelo de regress o beta prime sob a hipotese
nula
fit1 <- gamlss(y~(x01),sigma.formula=~(z1),family=BP,trace=F)

# Verificando Convergencia
if ((fit$conv==FALSE) || (fit1$conv==FALSE)){
  contC=contC+1
  next
}

#ESTADISTICAS RV1

lhat<-logLik(fit)
ltil<-logLik(fit1)
RV1[i]=2*(lhat[1]-ltil[1])
rv1=RV1[i]

#Descartando valores negativos da estatistica de teste
if (RV1[i] < 0){
  contC1=contC1+1
  next
}

rv1=RV1[i]

#OBTENCAO DE ALGUNS VETORES E MATRIZES

ycirc= as.vector(log(y)) #ok
Ycirc=diag(as.vector(ycirc))

ydagger= as.vector(log(1+y))#ok
Ydagger=diag(as.vector(ydagger))

#P=diag(as.vector(rep(1,n)))
uns=rep(1,n)

#ESTIMACAO SOB MAXIMA VEROSSIMILHANCA IRRESTRITA

betahat=c(fit$mu.coef)
etahat=X%*%betahat
muhat=exp(etahat)

```

```

muhat=as.vector(muhat)

gammahat=c(fit$sigma.coef)
zetahat=Z%%gammahat
phihat=exp(zetahat)
phihat=as.vector(phihat)

Muhat=diag(as.vector(muhat))#ok
mulhat=as.vector(1+muhat)#ok
Mulhat=diag(as.vector(mulhat))#ok
philhat=as.vector(1+phihat)#ok
Phi1hat=diag(as.vector(philhat))
phi2hat=as.vector(phihat+2)#ok
Phi2hat=diag(as.vector(phi2hat))#ok

#Derivadas
ahat=as.vector(exp(etahat))#ok
bhat=as.vector(exp(zetahat))#ok
D1hat <- diag(as.vector(ahat))#ok
D2hat <- diag(as.vector(bhat))#ok
alinhahat=as.vector(-1/(muhat^2))#ok
blinhahat=as.vector(-1/(phihat^2))#ok

#Momentos

psi1hat=as.vector(trigamma(muhat*(1+phihat)))#ok
psi2hat=as.vector(trigamma(muhat*(1+phihat)+phihat+2))#ok
psi3hat=as.vector(trigamma(phihat+2))#ok

mucirchat=as.vector(digamma(muhat*(1+phihat))-digamma(phihat+2))#ok
mudaggerhat=as.vector(digamma(muhat*(1+phihat)+phihat+2)-digamma(phihat+2))#ok
vcirchat=as.vector(psi1hat + psi3hat)#ok
Vcirchat=diag(as.vector(vcirchat))#ok
vdaggerhat=(as.vector(psi3hat-psi2hat))#ok
Vdaggerhat=diag(as.vector(vdaggerhat))#ok
chat=(as.vector(psi3hat))#ok
Chat=diag(as.vector(chat))#ok

# INFORMACAO DE FISHER OBSERVADA Irrestrita

d3hat=(philhat^2)*(psi1hat-psi2hat)*((ahat)^2)+(philhat)*((ycirc-mucirchat)-(ydagger-mudaggerhat))*alinhahat*((ahat)^3)#ok
d4hat=-((ycirc-mucirchat)-(ydagger-mudaggerhat)+(philhat)*(muhat*(psi2hat-psi1hat)+psi2hat))*ahat*bhat #ok

```

```

d5hat=((muhat^2)*psi1hat-(mulhat^2)*psi2hat+psi3hat)*((bhat)^2)
      +(muhat*(ycirc-mucirchat)-mulhat*(ydagger-mudaggerhat))*
      blinhahat*(bhat^3)#ok

J.bbhat=t(X)%*%diag(as.vector(d3hat))%*%X #ok
J.bghat=t(X)%*%diag(as.vector(d4hat))%*%Z #ok
J.gbhat=t(Z)%*%diag(as.vector(d4hat))%*%X #ok
J.gghat=t(Z)%*%diag(as.vector(d5hat))%*%Z #ok

bloc.sup.hat=cbind(J.bbhat,J.bghat) #ok
bloc.inf.hat=cbind(J.gbhat,J.gghat) #ok

Jhat=rbind(bloc.sup.hat,bloc.inf.hat) #ok

# INFORMACAO DE FISHER ESPERADA IRRESTRITA

e3hat=((philhat^2)*(psi1hat-psi2hat))*(ahat^2) #ok
e4hat=-(philhat*(muhat*(psi2hat-psi1hat)+psi2hat))*ahat*bhat #
      ok
e5hat=((muhat^2)*psi1hat-(mulhat^2)*psi2hat+psi3hat)*((bhat)^2)
      #ok

K.bbhat=t(X)%*%diag(as.vector(e3hat))%*%X #ok
K.bghat=t(X)%*%diag(as.vector(e4hat))%*%Z #ok
K.gbhat=t(Z)%*%diag(as.vector(e4hat))%*%X #ok
K.gghat=t(Z)%*%diag(as.vector(e5hat))%*%Z #ok

bloc.sup=cbind(K.bbhat,K.bghat)
bloc.inf=cbind(K.gbhat,K.gghat)

Ihat=rbind(bloc.sup,bloc.inf)

#ESTIMACAO SOB A HIPOTESE NULA - MAXIMA VEROSSIMILHANCA
  RESTRITA

zerox=rep(0,r)
betatil=c(fit1$mu.coef,zerox)
etatil=X%*%betatil
mutil=exp(etatil)
mutil=as.vector(mutil)

gammatil=c(fit1$sigma.coef)
zetatil=Z%*%gammatil
phitil=exp(zetatil)
phitil=as.vector(phitil)

```

```

Mutil=diag(as.vector(mutil))#ok
multil=as.vector(1+mutil)#ok
Mu1til=diag(as.vector(mu1til))#ok
phi1til=as.vector(1+phitil)#ok
Phi1til=diag(as.vector(phi1til))
phi2til=as.vector(phitil+2)#ok
Phi2til=diag(as.vector(phi2til))#ok

#Derivadas
atil=as.vector(exp(etatil))#ok
btil=as.vector(exp(zetatil))#ok
D1til <- diag(as.vector(atil))#ok
D2til <- diag(as.vector(btil))#ok
alinhatil=as.vector(-1/(mutil^2))#ok
blinhatil=as.vector(-1/(phitil^2))#ok

#Momentos
psi1til=as.vector(trigamma(mutil*(1+phitil)))#ok
psi2til=as.vector(trigamma(mutil*(1+phitil)+phitil+2))#ok
psi3til=as.vector(trigamma(phitil+2))#ok

mucirctil=as.vector(digamma(mutil*(1+phitil))-digamma(phitil+2))#ok
mudaggertil=as.vector(digamma(mutil*(1+phitil)+phitil+2)-digamma(phitil+2))#ok
vcirctil=as.vector(psi1til + psi3til)#ok
Vcirctil=diag(as.vector(vcirctil))#ok
vdaggertil=(as.vector(psi3til-psi2til))#ok
Vdaggertil=diag(as.vector(vdaggertil))#ok
ctil=(as.vector(psi3til))#ok
Ctil=diag(as.vector(ctil))#ok

#ESCORE Restrita
escorebetatil=t(X)%*%Phi1til%*%D1til%*%((ycirc-mucirctil)-(ydagger-mudaggertil))#ok
escoregammatil=t(Z)%*%D2til%*%(Mutil%*%(ycirc-mucirctil)-Multil%*%(ydagger-mudaggertil)) #ok

escoretil=rbind(escorebetatil ,escoregammatil)#ok

# INFORMACAO DE FISHER OBSERVADA RESTRITA

d3til=(phi1til^2)*(psi1til-psi2til)*((atil)^2)+(phi1til)*((ycirc-mucirctil)-(ydagger-mudaggertil))*alinhatil*((atil)

```

```

^3) #ok
d4til=-((ycirc-mucircartil)-(ydagger-mudaggertil)+(phi1til)*(
  mutil*(psi2til-psi1til)+psi2til))*atil*btil #ok
d5til=((mutil^2)*psi1til-(mu1til^2)*psi2til+psi3til)*((btil)^2)
  +(mutil*(ycirc-mucircartil)-mutil*(ydagger-mudaggertil))*
  blinhatil*(btil^3)#ok

J.bbtil=t(X)%*%diag(as.vector(d3til))%*%X #ok
J.bgtil=t(X)%*%diag(as.vector(d4til))%*%Z #ok
J.gbtil=t(Z)%*%diag(as.vector(d4til))%*%X #ok
J.ggtil=t(Z)%*%diag(as.vector(d5til))%*%Z #ok

bloc.sup.til=cbind(J.bbtil,J.bgtil) #ok
bloc.inf.til=cbind(J.gbtil,J.ggtil) #ok

Jtil=rbind(bloc.sup.til,bloc.inf.til) #ok

# INFORMACAO DE FISHER ESPERADA IRRESTRITA

e3til=((phi1til^2)*(psi1til-psi2til))*(atil^2) #ok
e4til=-((phi1til*(mutil*(psi2til-psi1til)+psi2til))*atil*btil #
  ok
e5til=((mutil^2)*psi1til-(mu1til^2)*psi2til+psi3til)*((btil)^2)
  #ok

K.bbtil=t(X)%*%diag(as.vector(e3til))%*%X #ok
K.bgtil=t(X)%*%diag(as.vector(e4til))%*%Z #ok
K.gbtil=t(Z)%*%diag(as.vector(e4til))%*%X #ok
K.ggtil=t(Z)%*%diag(as.vector(e5til))%*%Z #ok

bloc.sup=cbind(K.bbtil,K.bgtil)
bloc.inf=cbind(K.gbtil,K.ggtil)

Itil=rbind(bloc.sup,bloc.inf)

#qbar

qbarbeta=t(X)%*%Phi1hat%*%D1hat%*%(Vcirchat%*%(Muhat*Phi1hat-
  Mutil*Phi1til)-Chat%*%((2*Muhat*Phi1hat+Phi2hat)-(2*Mutil*
  Phi1til+Phi2til))+Vdaggerhat%*%((Muhat*Phi1hat+Phi2hat)-(
  Mutil*Phi1til+Phi2til))%*%uns
qbargamma=t(Z)%*%D2hat%*%(Muhat%*%Vcirchat%*%(Muhat*Phi1hat-
  Mutil*Phi1til)-Chat%*%Muhat%*%((Muhat*Phi1hat+Phi2hat)-(
  Mutil*Phi1til+Phi2til))-Chat%*%Mu1hat%*%(Muhat*Phi1hat-
  Mutil*Phi1til)+Mu1hat%*%Vdaggerhat%*%((Muhat*Phi1hat+
  Phi2hat)-(Mutil*Phi1til+Phi2til))%*%uns

```

```

qbar=rbind( qbarbeta ,qbargamma)

#Upsilonbar

Upsilonbb=t(X)%*%Phi1hat%*%D1hat%*%(Vcirchat-2*Chat+Vdaggerhat)
%*%D1til%*%Phi1til%*%X #ok
Upsilonbg=t(X)%*%Phi1hat%*%D1hat%*%(Vcirchat%*%Mutil-Chat%*%(
Mutil+Mutil)+Vdaggerhat%*%Mutil)%*%D2til%*%Z #ok

b11=cbind( Upsilonbb , Upsilonbg)

Upsilongb=t(Z)%*%D2hat%*%(Muhat%*%(Vcirchat-Chat)+Mutilhat%*%(
Vdaggerhat-Chat))%*%D1til%*%Phi1til%*%X #ok
Upsilongg=t(Z)%*%D2hat%*%(Muhat%*%Vcirchat%*%Mutil-Muhat%*%
Mutilhat%*%Chat-Mutilhat%*%Mutil%*%Chat+Mutilhat%*%Vdaggerhat%*%
Mutil)%*%D2til%*%Z #ok

b12=cbind( Upsilongb , Upsilongg)

Upsilonbar=rbind( b11 , b12)

#OBTENCAO DO EPSILON
Jtilpsi=Jtil[-3,-3]

Upsilonbarinv=solve( Upsilonbar)
Jhatinv=solve( Jhat)
Itilinv=solve( Itil)
Ihatinv=solve( Ihat)

aa=Itil%*%Upsilonbarinv%*%Jhat%*%Ihatinv%*%Upsilonbar
aapsi=aa[-3,-3]

epsilon[i]=((det(Itil))^(1/2))*((det(Ihat))^(1/2))*((det(
Upsilonbar))^(1/2))*((det(Jtilpsi))^(1/2))*((det(aapsi))
^(-1/2))*((t(escoretil)%*%Upsilonbarinv%*%Ihat%*%Jhatinv
%*%Upsilonbar%*%Itilinv%*%escoretil)^(r/2))/(((rv1)^(r/2-1)
)*t(escoretil))%*%Upsilonbarinv%*%qbar)
ep=epsilon[i]
quanttest<-(t(escoretil))%*%Upsilonbarinv%*%qbar

# ESTATISTICAS CORRIGIDAS DO TESTE DA RV

RV2[i]=rv1-(2*log(ep))

# #Descartando valores negativos da estatistica de teste
if (RV2[i] < 0){

```

```

    i=i-1
    contC2=contC2+1
    next
}

#Descartando valores negativos da estatística de teste
# if (RV2[i] < 0){
#   contC2=contC2+1
#   next
# }

RV3[i]=rv1*(1-(log(ep)/rv1))^2

# if (RV2[i] < 0){
#   contC2=contC2+1
#   next
# }

qchisq90=qchisq(0.90,r)
qchisq95=qchisq(0.95,r)
qchisq99=qchisq(0.99,r)

i=i+1

# FIM DO LACO DE MONTE CARLO

}

#IMPRIMINDO OS CONTADORES
print(contC)
print(contC1)
print(contC2)

cont90RV1=ifelse(RV1 > qchisq90,1,0)      # Quantas vezes o
  teste rejeitou a hip?tese nula
result_tam90RV1=((sum(cont90RV1))/NR)*100 # Percentual de vezes
  o teste rejeitou a hip?tese nula
cont95RV1=ifelse(RV1 > qchisq95,1,0)
result_tam95RV1=((sum(cont95RV1))/NR)*100
cont99RV1=ifelse(RV1 > qchisq99,1,0)
result_tam99RV1=((sum(cont99RV1))/NR)*100

cont90RV2=ifelse(RV2 > qchisq90,1,0)

```

```

result_tam90RV2=((sum(cont90RV2))/NR)*100
cont95RV2=ifelse(RV2 > qchisq95,1,0)
result_tam95RV2=((sum(cont95RV2))/NR)*100
cont99RV2=ifelse(RV2 > qchisq99,1,0)
result_tam99RV2=((sum(cont99RV2))/NR)*100

cont90RV3=ifelse(RV3 > qchisq90,1,0)
result_tam90RV3=((sum(cont90RV3))/NR)*100
cont95RV3=ifelse(RV3 > qchisq95,1,0)
result_tam95RV3=((sum(cont95RV3))/NR)*100
cont99RV3=ifelse(RV3 > qchisq99,1,0)
result_tam99RV3=((sum(cont99RV3))/NR)*100

print(c("n", n), quote = F)

# print("resultRV1")
# print(result_tam90RV1)
# print(result_tam95RV1)
# print(result_tam99RV1)

# print("resultRV2")
# print(result_tam90RV2)
# print(result_tam95RV2)
# print(result_tam99RV2)
#
# print("resultRV3")
# print(result_tam90RV3)
# print(result_tam95RV3)
# print(result_tam99RV3)

# QUANTIS ESTIMADOS

quantilRV1=quantile(RV1, probs=c(.90,.95,.99))
quantilRV2=quantile(RV2, probs=c(.90,.95,.99))
quantilRV3=quantile(RV3, probs=c(.90,.95,.99))

d<-date()
print(d)

resultRV1=cbind(result_tam90RV1, result_tam95RV1, result_tam99RV1)
resultRV2=cbind(result_tam90RV2, result_tam95RV2, result_tam99RV2)
resultRV3=cbind(result_tam90RV3, result_tam95RV3, result_tam99RV3)

print("RV1")
print(resultRV1)

```

```
print("RV2")
print(resultRV2)

print("RV3")
print(resultRV3)

} # fim laço n
```