



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETICULADAS GEOMETRICAMENTE
NÃO-LINEARES COM O USO DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL DE
ELEMENTOS FINITOS

John Williams Ferreira de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: José Miguel Aroztegui Massera

João Pessoa
Agosto de 2023

Ata da Sessão Pública de Defesa de Dissertação de Mestrado de **JOHN WILLIAMS FERREIRA DE SOUZA**, candidato ao título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional, realizada no dia 30 de agosto de 2023.

1 Aos trinta dias do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e três, às 10h, via
2 videoconferência, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para julgar o
3 Trabalho Final do discente JOHN WILLIAMS FERREIRA DE SOUZA, vinculado a
4 Universidade Federal da Paraíba sob a matrícula nº 20211000777, candidato ao grau de
5 Mestre em “*Modelagem Matemática e Computacional*”, na linha de pesquisa “*Modelagem e*
6 *Simulação de Sistemas*”, do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e
7 Computacional. A comissão examinadora foi composta pelos seguintes membros: José Miguel
8 Aroztegui Massera, Orientador e Presidente da Banca; Hugo Leonardo Davi de Souza
9 Cavalcante, Examinador Interno ao Programa; e Thiago José Machado, Examinador Interno
10 ao Programa. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca cumprimentou os presentes,
11 comunicou a finalidade da reunião e passou a palavra ao candidato para que fizesse,
12 oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado “*ANÁLISE DE ESTRUTURAS*
13 *RETICULADAS GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEARES COM O USO DA FORMULAÇÃO*
14 *CORROTACIONAL DE ELEMENTOS FINITOS*”. Concluída a exposição, o candidato foi
15 arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: “*aprovado*”. Do ocorrido, eu,
16 Gean Paulo P. M. de Barros, secretário do Programa de Pós-Graduação em Modelagem
17 Matemática e Computacional (PPGMMC), lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e
18 pelos membros da Banca Examinadora.

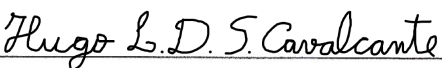
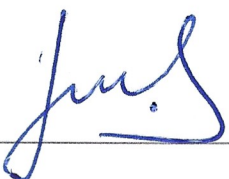
João Pessoa, 30 de agosto de 2023.

Gean Paulo Pereira Maurício de Barros
Secretário do PPGMMC
SIAPE 2326476

Prof. Dr. José Miguel Aroztegui Massera
Orientador (PPGMMC)

Prof. Dr. Hugo Leonardo Davi de S. Cavalcante
Examinador Interno ao Programa (PPGMMC)

Prof. Dr. Thiago José Machado
Examinador Interno ao Programa (PPGMMC)



Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S729a Souza, John Williams Ferreira de.

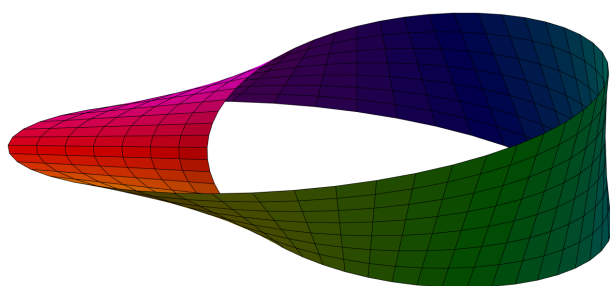
Análise de estruturas reticuladas geometricamente não-lineares com o uso da formulação corrotacional de elementos finitos / John Williams Ferreira de Souza. - João Pessoa, 2023.
135 f. : il.

Orientação: José Miguel Aroztegui Massera.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI.

1. Matemática computacional. 2. Método dos elementos finitos. 3. Estruturas reticuladas. 4. Não linearidade. 5. Formulação corrotacional. 6. Estabilidade estrutural. I. Massera, José Miguel Aroztegui. II. Título.

UFPB/BC

CDU 519.6(043)



Dedicatória.

Dedico meu trabalho à Deus que me sustentou em todos os momentos. Em especial, dedico esse trabalho à minha mãe (mulher da minha vida) que, mesmo estando lutando numa fase tão difícil da vida contra um câncer extremamente agressivo, conseguiu me incentivar como sempre a buscar alcançar tudo o que planejei. Te amo meu amor! Razão de todo meu esforço e dedicação.

Agradecimentos

À minha família, por sua capacidade de acreditar e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que me deram a esperança para seguir e ser sempre a minha melhor versão todos os dias. Pai, sua presença significou a certeza de que não estou sozinho nessa caminhada e que posso contar com você.

Aos colegas do PPGMMC que estiveram presentes durante todo o mestrado. Desejo uma vida repleta de realizações e perseverança para que atinjam todos os objetivos almejados.

À UFPB e aos professores do PPGMMC: Boness, José Miguel, Hugo, Ana Wyse, Eufrásio, Marcelo, Tarciana, Jairo Rocha, Pedro Rafael, os quais me deram aulas e forneceram uma base sólida para meu crescimento acadêmico. Sintam meus votos de agradecimento todo o corpo docente, direção, administração e funcionários de todos os setores, em especial, Gean, por ter sido sempre solícito quando precisei.

Ao meu orientador, Prof. Jóse Miguel Aroztegui Massera, por todo apoio na construção deste trabalho, proporcionando um ambiente satisfatório para a pesquisa e sem medir esforços para orientar. Aos membros da banca, Prof. Hugo Leonardo e Prof. Thiago Machado, muito obrigado pelos seus comentários e avaliações. Fico agradecido pela confiança e por todos os ensinamentos transmitidos.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Serei eternamente grato pela bolsa e pela abertura de novos horizontes na minha formação acadêmica e pessoal.

*“Procure sempre fazer as coisas
do modo mais simples que você puder.”*
— ALBERT EINSTEIN

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETICULADAS GEOMETRICAMENTE
NÃO-LINEARES COM O USO DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL DE
ELEMENTOS FINITOS

John Williams Ferreira de Souza

Agosto/2023

Orientador: José Miguel Aroztegui Massera

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

Há diversos trabalhos dedicados ao desenvolvimento de formulações de modelos de estruturas reticuladas que levam em consideração a posição deslocada da estrutura, bem como os diferentes comportamentos não lineares inerentes a essas estruturas. A tendência de utilizar estruturas mais esbeltas e com maior resistência faz com que a análise de estabilidade seja objeto de fundamental importância. O presente trabalho tem como objetivo possibilitar a análise estática não linear de estruturas reticuladas através de algoritmos desenvolvidos em linguagem Matlab[®], com os procedimentos necessários para realizar análises estáticas de modelos estruturais compostos por elementos finitos com não linearidade geométrica. Para isso, faz-se necessário o estudo de conceitos de estabilidade estrutural, do traçado das trajetórias de equilíbrio dessas estruturas, das características da formulação do método dos elementos finitos, dos conceitos de não linearidade geométrica e também o estudo da linguagem de programação escolhida. Os algoritmos desenvolvidos foram testados em situações distintas, com o intuito de comprovar a eficiência da formulação empregada. Sendo assim, foram analisados aplicações numéricas com treliças e pórticos planos em casos de comportamento não linear já consagrados na literatura.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ANALYSIS OF GEOMETRICALLY NONLINEAR RETICULATED
STRUCTURES USING THE CORROTATIONAL FINITE ELEMENT
FORMULATION

John Williams Ferreira de Souza

August/2023

Advisor: José Miguel Aroztegui Massera

Program: Computational Mathematical Modelling

There are several works dedicated to the development of model formulations of lattice structures that take into account the displaced position of the structure, as well as the different nonlinear behaviors inherent to these structures. The tendency to use more slender and stronger structures makes the subject of stability analysis of fundamental importance. This work aims to propose a static analysis and presents of structural models by finite elements, studied to carry out static studies of models structured by finite linear elements with non-linearity by finite elements. To do so, it is necessary to study the concepts of structural analysis, tracing the trajectories of designing the structures, the characteristics of the design of the finite element method, the concepts of non-linearity chosen and also the study of the programming language. The designed algorithms were tested in different situations, in order to control the designation used. Therefore, numerical applications with planar trusses and frames in cases of well-established nonlinear behavior in the literature were analyzed.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos	3
1.2.1 Objetivo Geral	3
1.2.2 Objetivos Específicos	3
1.3 Metodologia	4
1.3.1 Aspectos Computacionais	5
1.4 Organização do trabalho	6
2 Formulação MEF para Análise Não Linear Geométrica	8
2.1 Formulações Gerais para Abordagem Não-Linear Geométrica (NLG)	8
2.2 Geometria e Deslocamentos	10
2.3 Deformações e tensões	11
2.3.1 Equações de Equilíbrio	12
2.4 Matriz de Rigidez Tangente	14
2.5 Formulação Corrotacional para Análise Estática Não Linear Geométrica de Treliças Planas	14
2.5.1 Definições Geométricas para Treliças Planas	14
2.6 Formulação Corrotacional para Análise Estática Não Linear Geométrica de Pórticos Planos	16
2.6.1 Teorias de Vigas	16
2.6.2 Definições Geométricas para Pórticos Planos	20
2.7 Estabilidade Estrutural - Carga Crítica	28
3 Métodos de Solução da Análise Não Linear de Estruturas	30
3.1 Não Linearidade Geométrica	31
3.2 Método da Solução Não-Linear do Problema Estrutural	32
3.2.1 Método do Controle de Carga	36

3.2.2	Método do Comprimento de Arco	37
3.2.3	Técnica de Continuação Comprimento de Arco Linear	39
3.2.4	Problema Clássico - Barra sob tensão	41
4	Resultados e Discussões	48
4.1	Exemplos Numéricos - Treliças Planas	48
4.1.1	Barra Articulada 2D	48
4.1.2	Treliça Assimétrica	52
4.1.3	Treliça de von Mises	54
4.2	Exemplos Numéricos - Pórticos Planos	59
4.2.1	Pórtico Plano - Portal Frame	59
4.2.2	Pórtico de Múltiplos Andares	69
4.2.3	Aplicação - Edifício Residencial	78
5	Considerações Finais	98
5.1	Sugestões para trabalhos futuros	99
	Referências Bibliográficas	100
A	Revisão de Normas Técnicas	103
A.1	NBR 6123 (1988) – Forças devido ao vento em edificações	104
A.1.1	Velocidade Característica do Vento	105
A.1.2	Velocidade Básica do Vento	105
A.1.3	Fator Topográfico S_1	105
A.1.4	Fator S_2	106
A.1.5	Fator estatístico S_3	108
A.1.6	Coeficientes de arrasto C_a	109
A.2	NBR 6118 (2014) – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento	110
A.2.1	Ações a considerar	110
A.2.2	Classificação das ações	110
A.2.3	Ações permanentes	110
A.2.4	Ações permanentes diretas	110
A.2.5	Peso próprio	111
A.2.6	Peso dos elementos construtivos fixos e de instalações perma- nentes	111
A.2.7	Ações variáveis	111
B	Resultados dos Esforços	113
B.1	Pórtico de Múltiplos Andares	113
B.2	Aplicação - Edifício Residencial	119

Lista de Figuras

2.1	Corpo de volume V submetido a forças de corpo $\mathbf{b}$, cargas de superfícies $\mathbf{q}$, cargas pontuais $\mathbf{F}_j$.	12
2.2	Configurações inicial e atual do elemento de treliça	14
2.3	Elemento Finito de Viga 2D	17
2.4	Polinômios de Hermite	18
2.5	Esforços de Engastamento Perfeito	20
2.6	Elemento finito de pórtico plano	21
2.7	Matriz de Rigidez e Graus de Liberdade	21
2.8	a) Coordenadas no sistema local. b) Coordenadas no sistema global.	23
2.9	Configurações inicial e atual devido a deformações de flexão para uma viga.	24
2.10	Ponto crítico na trajetória de equilíbrio.	28
3.1	Tipos gerais de análises estruturais, (adaptado de CHAN & CHUI, 2000).	30
3.2	Mudança de forma da estrutura	32
3.3	Trajetoária de equilíbrio de um sistema [18].	35
3.4	a) Snap-through b) Snap-back e c) Bifurcação	36
3.5	Arco situado entre dois pontos de uma curva.	38
3.6	Barra sob tensão	41
3.7	Solução explícita com 3 incrementos	43
3.8	Solução explícita com 20 incrementos	43
3.9	Solução implícita com 3 incrementos	45
3.10	Solução implícita com 20 incrementos	45
3.11	Comparação da solução explícita e implícita com 3 incrementos	46
3.12	Comparação da solução explícita e implícita com 20 incrementos	46
4.1	Modelo Estrutural - Barra 2D.	49
4.2	Trajetoárias de Equilíbrio - Barra 2D (nó 2).	52
4.3	Treliça de Willems & Lucas (1978).	53
4.4	Trajetoária de Equilíbrio - Treliça Assimétrica (nó 2).	54

4.5	Modelo Esquemático da Treliça de Von Mises.	54
4.6	Decomposição e Equilíbrio de Forças - Treliça de Von Mises.	55
4.7	Dados do Problema de Von Mises.	57
4.8	Trajetórias de Equilíbrio - Treliça de von Mises (nó 2).	58
4.9	Esquema do Modelo Estrutural e Discretização MEF - Portal Frame.	59
4.10	Dados do Problema Numérico - Portal Frame.	59
4.11	Comparativo Deslocamento (ux) - Portal Frame Linear e Não Linear.	61
4.12	Comparativo Deslocamento (uy) - Portal Frame Linear e Não Linear.	61
4.13	Comparativo Rotação (rz) - Portal Frame Linear e Não Linear.	61
4.14	Diagramas de Esforço Normal - Portal Frame Linear.	62
4.15	Diagramas de Esforço Cortante - Portal Frame Linear.	63
4.16	Diagramas de Momento Fletor - Portal Frame Linear.	63
4.17	Esforço normal nos elementos - Portal Frame.	68
4.18	Esforço cortante nos elementos - Portal Frame.	68
4.19	Momento fletor no nó extremo direito de cada elemento - Portal Frame.	68
4.20	Modelo Estrutural do Pórtico de Múltiplos Andares.	69
4.21	Carregamento Estrutural do Pórtico de Múltiplos Andares.	70
4.22	Discretização do Pórtico de Múltiplos Andares.	70
4.23	Comparativo Deslocamento (ux) - Pórtico de Múltiplos Andares.	72
4.24	Comparativo Deslocamento (uy) - Pórtico de Múltiplos Andares.	72
4.25	Comparativo Rotação (rz) - Pórtico de Múltiplos Andares.	72
4.26	Deformada da Estrutura - Linear e Não-Linear (Fator de Escala = 25.0).	73
4.27	Diagramas de Esforço Normal - Pórtico Múltiplo - Linear.	74
4.28	Diagramas de Esforço Cortante - Pórtico Múltiplo - Linear.	75
4.29	Diagramas de Momento Fletor - Pórtico Múltiplo - Linear.	76
4.30	Esforço normal nos elementos - Pórtico de Múltiplo Andares.	77
4.31	Esforço cortante nos elementos - Pórtico de Múltiplo Andares.	77
4.32	Momento fletor nos elementos - Pórtico de Múltiplo Andares.	77
4.33	Projeto Arquitetônico - Planta do Subsolo.	78
4.34	Projeto Arquitetônico - Planta do Térreo.	79
4.35	Projeto Arquitetônico - Planta do Pavimento Tipo.	79
4.36	Projeto Arquitetônico - Planta da Cobertura.	80
4.37	Projeto Arquitetônico - Corte AA.	80
4.38	Projeto Arquitetônico - Corte BB.	81
4.39	Projeto Arquitetônico - Fachada Norte.	81
4.40	Projeto Arquitetônico - Fachada Leste.	82
4.41	Planta de Forma - Pavimento Tipo.	83
4.42	Planta de Forma - Cobertura.	84

4.43 Modelo Estrutural do Edifício Residencial (Pórtico 07).	86
4.44 Discretização do Pórtico Estrutural - Edifício Residencial.	87
4.45 Comparativo Deslocamento (ux) - Edifício Residencial.	92
4.46 Comparativo Deslocamento (uy) - Edifício Residencial.	92
4.47 Comparativo Rotação (rz) - Edifício Residencial.	92
4.48 Deformada da Estrutura - Pórtico Edifício Residencial - (fator de escala = 20.0)	93
4.49 Diagramas de Esforço Normal - Pórtico Edifício Residencial - Linear.	94
4.50 Diagramas de Esforço Cortante - Pórtico Edifício Residencial - Linear.	95
4.51 Diagramas de Momento Fletor - Pórtico Edifício Residencial - Linear.	96
4.52 Esforço normal nos elementos - Pórtico Edifício Residencial	97
4.53 Esforço cortante nos elementos - Pórtico Edifício Residencial.	97
4.54 Momento fletor no nó extremo direito de cada elemento - Pórtico Edifício Residencial.	97
B.1 Erro Relativo - Esforço Normal nos elementos - Pórtico de Múltiplos Andares.	116
B.2 Erro Relativo - Esforço Cortante nos elementos - Pórtico de Múltiplos Andares.	116
B.3 Erro Relativo - Momento Fletor (nó i) nos elementos - Pórtico de Múltiplos Andares.	117
B.4 Erro Relativo - Momento Fletor (nó j) nos elementos - Pórtico de Múltiplos Andares.	117
B.5 Erro Relativo - Esforço Normal nos elementos - Edifício Residencial.	122
B.6 Erro Relativo - Esforço Cortante nos elementos - Edifício Residencial.	122
B.7 Erro Relativo - Momento Fletor (nó i) nos elementos - Edifício Resi- dencial.	123
B.8 Erro Relativo - Momento Fletor (nó j) nos elementos - Edifício Resi- dencial.	123

Lista de Tabelas

3.1	Resumo dos resultados da análise explícita.	42
3.2	Resumo dos resultados da análise implícita.	44
4.1	Dados de Entrada - Barra Articulada 2D	51
4.2	Dados de Entrada - Trelça de Willems & Lucas	53
4.3	Dados de Entrada - Trelça de von Mises	57
4.4	Deslocamentos - Comparativo Linear e Não-Linear - Portal Frame.	60
4.5	Resumo dos Deslocamentos - Comparativo Linear e Não-Linear (nós 11 e 21).	60
4.6	Esforço Normal - Comparativo Linear e Não-Linear - Portal Frame.	64
4.7	Esforço Cortante - Comparativo Linear e Não-Linear - Portal Frame.	65
4.8	Esforço de Momento Fletor - Comparativo Linear e Não-Linear - Portal Frame.	66
4.9	Resumo - Esforço Normal (nós 11 e 21).	67
4.10	Resumo - Esforço Cortante (nós 11 e 21).	67
4.11	Resumo - Esforço de Momento Fletor (nós 11 e 21).	67
4.12	Deslocamentos - Comparativo Linear e Não-Linear - Pórtico de Múltiplos Andares.	71
4.13	Pórticos de Contraventamento da Estrutura.	85
4.14	Dimensões dos Pilares e Vigas da Estrutura.	85
4.15	Cargas verticais concentradas (kN).	89
4.16	Cálculo da Força de Arrasto.	89
4.17	Distribuição nas Lajes.	90
4.18	Deslocamentos - Comparativo Linear e Não-Linear - Edifício.	91
B.1	Esforço Normal - Linear e Não-Linear - Pórtico de Múltiplos Andares.	113
B.2	Esforço Cortante - Linear e Não-Linear - Pórtico de Múltiplos Andares.	114
B.3	Momento Fletor - Linear e Não-Linear - Pórtico de Múltiplos Andares.	115
B.4	Esforço Normal - Linear e Não-Linear - Edifício Residencial.	119
B.5	Esforço Cortante - Linear e Não-Linear - Edifício Residencial.	120
B.6	Momento Fletor - Linear e Não-Linear - Edifício Residencial.	121

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Um dos principais desafios da Engenharia Estrutural é a definição de projetos de edificações com relação peso/capacidade portante otimizados, reduzindo o consumo de materiais e o gasto financeiro sem comprometer a segurança e a durabilidade do sistema.

Na atualidade, presencia-se o aumento da utilização de estruturas cada vez mais esbeltas em várias áreas da engenharia, como por exemplo: edificações, pontes, cascos de navios, fuselagens de aviões, cúpulas de coberturas, plataformas *off-shore* e estruturas aeroespaciais (antenas, telescópios e painéis solares). Essa esbeltez é possível devido ao desenvolvimento e aplicação de materiais com alta resistência e baixo peso próprio, bem como técnicas construtivas e de design que possuem um papel relevante nesse fenômeno. No entanto, essas estruturas podem estar sujeitas a fenômenos de instabilidade de equilíbrio, que podem ocorrer localmente ou de maneira global [1].

O avanço tecnológico dos materiais de construção e das técnicas construtivas, aliado aos recursos computacionais atualmente disponíveis, permitem a análise de estruturas considerando diferentes tipos de não linearidades, tais como: efeitos de segunda ordem, inelasticidade do material e semirrigidez das ligações. Com o aumento da esbeltez, por exemplo, o elemento ou sistema estrutural torna-se mais suscetível a sofrer grandes deslocamentos e rotações (antes da ruptura física), que podem gerar instabilidade estrutural do sistema ou mesmo o seu colapso de forma repentina [23].

À medida que o elemento estrutural se torna mais esbelto, o efeito da não linearidade geométrica no mesmo se torna cada vez mais importante e dá origem a vários fenômenos, como por exemplo, a existência de múltiplas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis) e o surgimento de pontos críticos ou singulares ao

longo do caminho não linear de equilíbrio. A presença dessa não linearidade exige o desenvolvimento de técnicas de cálculo mais sofisticadas e um conhecimento cada vez mais profundo do comportamento estrutural.

O estudo do equilíbrio e estabilidade de estruturas permite a obtenção dos deslocamentos, deformações e esforços solicitantes, quando essas são submetidas a diferentes condições de contorno e carregamento externo.

A não linearidade geométrica ocorre quando uma estrutura sob a ação de forças aplicadas tem mudanças significativas de geometria, fazendo com que suas equações de equilíbrio passem a ser formuladas na configuração deformada [1]. Essa não linearidade está associada a:

1. equações de equilíbrio, que são escritas considerando a configuração deformada da estrutura; e
2. equações que relacionam a deformação e o deslocamento da estrutura considerada [24].

A análise da estabilidade de sistemas estruturais esbeltos através do Método dos Elementos Finitos (MEF) envolve invariavelmente a solução de um sistema de equações algébricas não lineares. As técnicas baseadas em relações de rigidez tangente e os esquemas que combinam procedimentos incrementais e iterativos, são atualmente considerados os mais eficientes e, portanto, serão utilizadas no presente trabalho. Assim, o sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural é solucionado por meio do procedimento incremental e iterativo de Newton-Raphson.

No contexto da análise não linear geométrica, há duas formulações comumente utilizadas: a Formulação Posicional de Elementos Finitos e a Formulação Corrotacional de Elementos Finitos. A Formulação Corrotacional utiliza sistemas de coordenadas locais para considerar os efeitos da curvatura em elementos finitos e pode ser encontrada com mais detalhes em [9], [12] e [29].

O desenvolvimento de elementos finitos para a análise não-linear de estruturas reticuladas, em especial de treliças e pórticos, é um tópico de grande interesse, uma vez que estruturas treliçadas e aporticadas são muito utilizadas na Engenharia. Um exemplo é o caso das estruturas de edifício, cujos principais elementos resistentes são os pórticos constituídos por vigas e pilares.

Por este motivo, a busca por ferramentas computacionais capazes de realizar análises que simulam o real comportamento estrutural tem se intensificado. Tais análises, estáticas ou dinâmicas, precisam ser capazes de resolver problemas não lineares. As estáticas, em particular, necessitam de estratégias ou metodologias numéricas que consigam encontrar o caminho de equilíbrio estrutural de forma completa, passando por pontos críticos ao longo desse caminho não linear. Destaca-se,

portanto, a necessidade de procedimentos numéricos para a solução de equações não lineares - compatíveis com a robustez das formulações disponíveis para essa classe de problemas - que, em conjunto, possam efetuar a análise de forma completa e eficiente [23].

Nas próximas seções serão abordados os principais objetivos desta pesquisa e fornecidos maiores detalhes a respeito dos aspectos computacionais propostos nesta dissertação.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Em linhas gerais, o objetivo desta pesquisa é realizar análises não lineares através da formulação corrotacional de Elementos Finitos, para o estudo numérico do comportamento estático não-linear geométrico de treliças e pórticos planos sujeitos a grandes deslocamentos (translações e rotações), mas pequenas deformações, permitindo a apresentação da formulação para aplicações numéricas das estruturas treliçadas de aço e de contraventamento de edifícios (2D) de concreto armado.

1.2.2 Objetivos Específicos

A pesquisa tem como objetivos específicos:

- Realizar uma breve revisão bibliográfica sobre as formulações e metodologias utilizadas para a realização da análise estrutural;
- Estudar, a partir de uma revisão nas literaturas técnicas, sobre os aspectos computacionais adotados na implementação computacional da análise estrutural;
- Desenvolver, em plataforma Matlab, um programa de elementos finitos para análise estática não-linear geométrica de treliças e pórticos planos com o uso de elemento de viga Euler-Bernoulli (TCV) corrotacional;
- Verificar a formulação dos algoritmos implementados por meio da solução de problemas clássicos fortemente não lineares presentes na literatura (*benchmarks*), confrontando as respostas numéricas com aquelas adquiridas por meio de um software comercial *Ftool(Two-dimensionalFrameAnalysisTool)* para a análise linear;

- Analisar uma estrutura de contraventamento exemplo formada por pórticos planos de concreto armado, avaliando a consideração da não linearidade geométrica.

Por fim, destaca-se que esta dissertação vai ao encontro dos objetivos do PPGMMC/UFPB e está relacionada com as seguintes linhas de pesquisa:

1. Modelagem e Simulação de Sistemas: que permite a geração de cenários, a partir dos quais pode-se orientar o processo de tomada de decisão, bem como proceder análises e avaliações de sistemas e propor soluções para a melhoria de performance.
2. Otimização e Mecânica Computacional: que objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas de engenharia estrutural.

1.3 Metodologia

A implementação computacional dos algoritmos, bem como as simulações de problemas estáticos de estruturas treliçadas e aporricadas com não linearidade geométrica, foram efetuadas com o software Matlab que possibilita a realização de análises matriciais.

A metodologia da análise estática não linear de treliças e pórticos planos tem como principal problema o traçado das trajetórias de equilíbrio dessas estruturas. Estas trajetórias são compostas de vários pontos de equilíbrio sequenciais, os quais são obtidos através do cálculo dos deslocamentos dos pontos nodais dos elementos que constituem as estruturas. Esses deslocamentos resultam de aplicações de carregamentos sequenciais nas estruturas.

A formulação de Elementos Finitos adotada neste trabalho foi a Formulação Corrotacional. Adota-se também um critério de convergência que servirá para a verificação da condição de equilíbrio da estrutura na configuração deformada. Essa condição de equilíbrio é dada pela relação entre a força interna e o carregamento aplicado. Enquanto essa relação não for atingida, deve ser utilizada uma estratégia iterativa com o objetivo de corrigir os deslocamentos e carregamentos, o que levará a estrutura deformada a uma configuração que esteja em equilíbrio.

Alcançado o critério de convergência, é definido um novo ponto de equilíbrio da estrutura, que será adicionado à trajetória de equilíbrio. Em seguida, são adotadas estratégias incrementais que servirão para a definição do próximo carregamento na estrutura, levando-se em consideração a intensidade da não linearidade da estrutura, assim como a capacidade de detecção de pontos limites de carregamento. Para isto, o sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural é solucionado por meio do procedimento incremental e iterativo de Newton-Raphson.

1.3.1 Aspectos Computacionais

A implementação computacional da análise estática não linear de treliças e pórticos é caracterizada por ciclos incrementais e iterativos, onde atualizações e correções são realizadas visando a minimização de erros, para que a trajetória de equilíbrio da estrutura se aproxime do seu comportamento real. Para tal, as etapas de desenvolvimento da solução não linear foram definidas criteriosamente, de modo a garantir que a implementação computacional esteja em acordo com a formulação teórica da solução não linear.

A geração do código computacional utilizado neste trabalho foi realizada visando uma abordagem didática que facilitasse a novos desenvolvedores a visualização da formulação teórica e das metodologias utilizadas. Por esse motivo foram utilizados conceitos computacionais simplificados em linguagem Matlab, onde as etapas da solução não linear são representadas em sua maioria por funções.

As principais etapas do código computacional desenvolvido para análise não linear geométrica de treliças e pórticos planos é apresentado a seguir:

- (i) Entrada de Dados (Pré-Processamento);
- (ii) Processamento dos Dados;
- (iii) Apresentação dos Resultados (Pós-Processamento).

Na primeira etapa, alguns cálculos para inicialização do problema são realizados e o usuário deve informar ao algoritmo os seguintes dados referentes a geometria e ao material dos elementos da estrutura a ser estudada:

- a) Matriz de coordenadas nodais;
- b) Matriz de conectividades;
- c) Matriz dos módulos de elasticidade de cada elemento;
- d) Matriz das áreas da seção transversal de cada elemento;
- e) Matriz dos momentos de inércia da seção transversal de cada elemento;
- f) Número de nós;
- g) Número de elementos;
- h) Número de graus de liberdade: número de elementos multiplicado por 3
- i) Vetor de forças externas, em coordenadas globais;
- j) Matriz de graus de liberdade restringidos (de acordo com os tipos de apoio de cada nó);
- k) Parâmetros para utilização do método de Newton-Raphson associado a técnica de comprimento de arco (número máximo de incrementos e de iterações, comprimento de arco inicial, comprimento de arco máximo e mínimo).

Na etapa de processamento dos dados, o código numérico através do método incremental e iterativo (método de Newton-Raphson associado a técnica de comprimento de arco) avalia a estrutura. Várias funções são executadas para calcular a matriz de rigidez para todos os elementos de barra, montar a matriz de rigidez global da estrutura, aplicar as condições de contorno para o problema, calcular as forças internas, os deslocamentos e os esforços internos, além de checar a convergência. Para isto, algumas etapas são:

- a) Cálculo do fator de carga;
- b) Tolerância;
- c) Incremento de força;
- d) Definição das coordenadas nodais dos elementos;
- e) Vetor de coordenadas globais
- f) Computa-se comprimento do elemento;
- g) Calcula-se o ângulo médio da rotação do elemento, inicialmente igual a zero.
- h) Determinação do comprimento do elemento na configuração atualizada em coordenadas locais;
- i) Definição da matriz de rotação;
- j) Vetor de forças internas;
- k) Computa-se os deslocamentos nodais em coordenadas globais;
- l) Computa-se os esforços internos: normal, cortante e momento fletor.

Na terceira etapa (pós-processamento), o código numérico apresenta os resultados obtidos na análise. Além disso, tendo em vista que a visualização de resultados gráficos é essencial para uma correta interpretação do analista, foi implementado algumas rotinas auxiliares para visualização das deformadas e gráficos para interpretações do modelo em estudo.

A próxima seção traz a descrição dos capítulos que compõem este trabalho.

1.4 Organização do trabalho

Contextualizados os objetivos e a metodologia desta dissertação, interessa especificar a organização da mesma com o intuito de facilitar a compreensão. Sendo assim, o capítulo 1 onde se insere esta seção, contém a introdução do trabalho, na qual são expostos a motivação que levou ao desenvolvimento do trabalho, a descrição do problema e sua justificação em relação à sua relevância de estudo para a engenharia e para a matemática aplicada, bem como a apresentação do objetivo geral e os objetivos específicos a serem alcançados e a metodologia para a consecução do trabalho.

No capítulo 2 é apresentada uma visão geral sobre as principais formulações

em termos de rigidez linear e geométrica para análise estrutural, dando destaque principal para a formulação corrotacional.

No capítulo 3 são detalhados os conceitos teóricos fundamentais da solução de sistemas não lineares. Essa metodologia de solução numérica é caracterizada por um sistema incremental e iterativo de solução de equações não lineares fundamentado no método de Newton-Raphson. São destacadas também as estratégias de incremento de carga e de iteração, e os critérios de convergência adotados.

No Capítulo 4 tem-se os resultados numéricos para aplicações de treliças e pórticos planos com nível de complexidade crescente. São apresentados o tipo de estrutura de contraventamento estudado, o detalhamento do processo de distribuição da carga horizontal de vento na estrutura de acordo com a NBR 6123:1988 e são aplicadas as cargas verticais conforme a NBR 6118:2014.

No Capítulo 5 são feitas considerações finais e sugestões para o desenvolvimento futuro na linha de pesquisa, com o objetivo de dar continuidade aos estudos aqui realizados.

O Apêndice A traz uma revisão das normas técnicas empregadas para a obtenção dos carregamentos estruturais. Sendo assim, mostra-se os conceitos, normas e métodos utilizados para a análise e o dimensionamento da estrutura de contraventamento para os problemas de pórticos, com o estudo da distribuição das cargas horizontais provenientes do vento.

Por fim, o Apêndice B apresenta os resultados dos esforços solicitantes nas estruturas estudadas nesta dissertação.

Capítulo 2

Formulação MEF para Análise Não Linear Geométrica

Existem na literatura diversas abordagens para formulação em termos de rigidez linear e geométrica para análise estrutural, destacando-se três abordagens clássicas: Formulação Lagrangeana Total, Atualizada e Corrotacional [4], [5], [6], [10].

Na seção seguinte será abordada uma visão geral sobre essas formulações existentes, dando destaque principal para a formulação corrotacional.

2.1 Formulações Gerais para Abordagem Não-Linear Geométrica (NLG)

A maioria das formulações de elementos finitos para análise de segunda ordem de estruturas encontradas na literatura é baseada em referenciais lagrangeanos, sendo que, na formulação Lagrangeana Total os deslocamentos decorrentes de um dado carregamento são medidos em relação à configuração inicial do sistema [19].

Devido aos eventuais deslocamentos de corpo rígido ocorridos durante o processo incremental, cujas influências não são perfeitamente consideradas, bem como devido à utilização de funções de interpolação simplificadas, a tendência é que os resultados obtidos na formulação Lagrangeana Total se afastem do comportamento real à medida que a configuração deformada se distancia da configuração original [11].

Na Formulação Lagrangeana Total, os deslocamentos são medidos a partir da configuração original da estrutura, enquanto a Lagrangeana Atualizada utiliza uma etapa anterior ao incremento de carga para configuração de referência. Neste caso, as rotações do corpo rígido são seccionadas em partes menores possibilitando aproximações mais exatas através das funções de interpolação [6].

A Formulação Corrotacional de Elementos Finitos foi originalmente introduzida nos anos de 1973 e 1977, baseando-se no pressuposto de que os elementos estruturais

sofrem grandes deslocamentos, afastando-se por isso significativamente da configuração inicial [5], [27].

Devido à sua esbeltez considerável, as amplitudes dos deslocamentos são elevadas, porém não ultrapassam o limite elástico do material, assim a formulação permite a utilização de relações cinemáticas envolvendo deformações infinitesimais e deslocamentos não lineares [7].

A formulação Corrotacional é válida sempre que a estrutura apresenta grandes deslocamentos/deflexões (e rotações), mas pequenas deformações, por existir relação entre coordenadas locais e globais. Além do que é relativamente fácil introduzir os efeitos geométricos não lineares para elementos planos, supondo tensões em níveis locais. Esta é a situação mais comum na prática, pois a maioria dos materiais utilizados em Engenharia não é capaz de sofrer grandes deformações sem entrar em ruptura.

A descrição da cinemática Corrotacional é uma das formulações mais atuais para a análise não linear geométrica, na qual derivam-se as matrizes de rigidez e vetores de carga utilizando coordenadas de sistema ligados ao elemento da estrutura. Sendo assim, é baseada na separação explícita dos movimentos de corpo rígido (rotações e translações) e dos movimentos oriundos das deformações do elemento, por meio da definição de um sistema de coordenadas que se move junto com o elemento [17].

Nesse sentido, procura-se separar os movimentos do corpo rígido das tensões produzidas ao nível do elemento local. Isto é conseguido anexando um quadro de referência de elemento local (ou sistema de coordenadas), que translada com o elemento de viga [29].

Quando o movimento de um elemento é medido tomando como base um sistema de coordenadas local que se move junto com o mesmo, de modo que em relação a este sistema os movimentos de corpo rígido são nulos, diz-se que a análise é realizada em um referencial corrotacional. Nesse tipo de análise, somente os movimentos que causam deformações estão presentes.

A seguir é apresentado o resumo das formulações para análise não linear geométrica, ilustrando-se também as principais diferenças entre elas:

- **Lagrangeana Total:** Os deslocamentos decorrentes de um carregamento dado são medidos em relação à configuração inicial do sistema.
- **Lagrangeana Atualizada:** Utiliza-se uma etapa anterior ao incremento de carga para configuração de referência e consequente determinação dos deslocamentos.
- **Corrotacional:** Os deslocamentos são medidos a partir de um novo referencial, matriz de rigidez tangente consistente (linear e geométrica) para a nova posição do corpo rígido.

2.2 Geometria e Deslocamentos

No MEF, a estrutura é dividida em um conjunto de elementos conectados através de nós. Os deslocamentos no interior de cada elemento são interpolados a partir dos deslocamentos de seus nós utilizando polinômios. As equações de equilíbrio da estrutura são obtidas utilizando princípios variacionais (trabalho virtual ou energia potencial) ou Métodos de Resíduos Ponderados (e.g. Galerkin).

Na formulação isoparamétrica do MEF a geometria dos elementos é descrita pelas mesmas funções utilizadas para aproximar os deslocamentos. Esta formulação é largamente utilizada, pois garante que as condições necessárias para a convergência do MEF para a solução exata do problema sejam automaticamente satisfeitas.

Uma vez que o MEF é usado, as funções de interpolação são primeiramente empregadas para modelar a geometria. Neste modelo, o campo de deslocamento é descrito considerando três componentes:

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}. \quad (2.1)$$

A geometria de cada elemento é dada por:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^n N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^n N_i z_i, \quad (2.2)$$

onde n é o número de nós, N_i são as funções de forma interpoladoras utilizadas e x_i , y_i e z_i são as coordenadas dos pontos de interpolação (nós da estrutura).

No MEF, as mesmas funções de forma são usadas para descrever a geometria e aproximar o campo de deslocamento (u, v, w) no interior do elemento. Assim, temos:

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^n N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad (2.3)$$

onde u_i , v_i e w_i são os deslocamentos correspondentes a cada nó. Matricialmente, temos:

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{N} \mathbf{u}, \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{u}$ é o vetor dos graus de liberdade do problema e a matriz $\mathbf{N}$ é dada por:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{N}_n], \quad (2.5)$$

onde a matriz de aproximação dos deslocamentos $\mathbf{N}$ é formada por uma série de submatrizes correspondentes a cada nó.

2.3 Deformações e tensões

As equações constitutivas são muito semelhantes às dos materiais isotrópicos, na qual as propriedades mecânicas e térmicas são as mesmas em todas direções. Para modelos 3D, a relação tensão-deformação pode ser obtida por meio da Lei de Hooke [9]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Esta equação pode ser reescrita de forma compacta como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.7)$$

No Estado Plano de Tensões (EPT), a relação constitutiva para um material isotrópico elástico linear submetido à processos isotérmicos e adiabáticos, é dada por:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

onde E e ν são o módulo de Young e a razão de Poisson e $\mathbf{C}$ é a matriz constitutiva.

Para problemas tridimensionais, o tensor de deformações na forma de vetor pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ u_{,z} + w_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

2.3.1 Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio do sólido no MEF podem ser obtidas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). De acordo com o PTV, o equilíbrio ocorre quando o trabalho virtual interno (δU) é igual ao trabalho virtual externo (δW_{ext}), qualquer que seja o campo de deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}$, desde que este seja pequeno e obedeça às condições de contorno essenciais do problema. Matematicamente [8], [9]:

$$\delta U = \delta W_{ext} \Rightarrow \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dS + \sum \delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{F}_j, \quad (2.10)$$

onde $\delta \mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos virtuais, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações virtuais, $\mathbf{q}$ são as forças de superfície, $\mathbf{b}$ são as forças de corpo e $\mathbf{F}_j$ são as cargas concentradas atuantes no corpo.

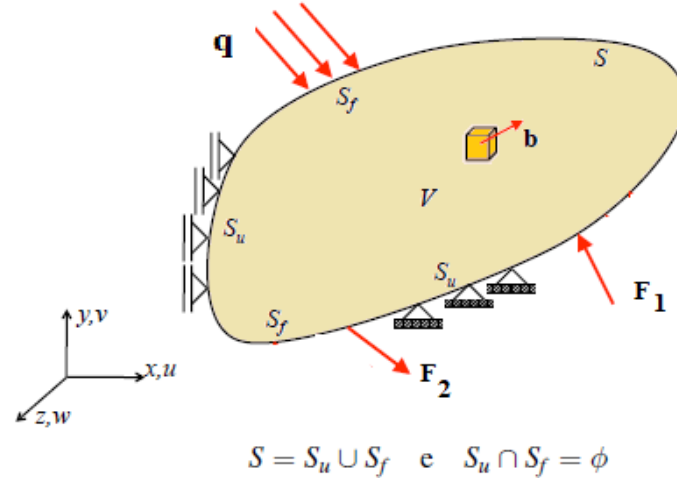


Figura 2.1: Corpo de volume V submetido a forças de corpo $\mathbf{b}$, cargas de superfícies $\mathbf{q}$, cargas pontuais $\mathbf{F}_j$.

A Equação (2.10) pode ser reescrita em termos das forças internas da estrutura ($\mathbf{g}$) e o vetor de cargas externas ($\mathbf{f}$). Para isso, utilizando a Equação (2.9) e considerando apenas pequenos deslocamentos, as deformações virtuais são dadas por:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \overline{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u}. \quad (2.11)$$

Assim, o trabalho virtual interno pode ser escrito como:

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}^T \int_V \overline{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g}. \quad (2.12)$$

O trabalho virtual externo pode ser escrito como:

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{u}^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \delta \mathbf{u}^T \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS + \delta \mathbf{u}^T \sum \mathbf{N}_j^T \mathbf{F}_j = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}. \quad (2.13)$$

Nesta expressão, a matriz $\mathbf{N}_j$ corresponde à matriz $\mathbf{N}$ avaliada no ponto de aplicação da força j .

As equações de equilíbrio do modelo discreto são obtidas substituindo as Equações (2.12) e (2.13) na expressão do trabalho virtual:

$$\delta U = \delta W_{ext} \Rightarrow \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}. \quad (2.14)$$

Como os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}^T$ são arbitrários, as equações de equilíbrio no MEF são dadas por:

$$\mathbf{g} = \mathbf{f}, \quad (2.15)$$

onde:

$$\mathbf{g} = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad \mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS + \sum \mathbf{N}_j^T \mathbf{F}_j. \quad (2.16)$$

É importante notar que esta equação é válida para problemas não lineares físicos e geométricos, independente de quais modelos constitutivos sejam utilizados para descrever o comportamento dos materiais.

Para o problema no Estado Plano de Tensões, o raciocínio é o mesmo usado para o cálculo do trabalho realizado pelos esforços internos (δU), em consequência de um campo de deformações virtuais gerado a partir de um campo de deslocamentos virtuais. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \epsilon_{xy}) \int dz dx dy, \\ &= -t \int (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \epsilon_{xy}) dx dy, \end{aligned} \quad (2.17)$$

para toda (qualquer) deformação virtual $\delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y$ e $\delta \epsilon_{xy}$. Na forma vetorizada, temos:

$$\delta U = \int_S \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx dy. \quad (2.18)$$

Pelo PTV, temos:

$$\delta U = \delta W_{ext} \Rightarrow \int_S \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx dy = \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dx dy + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dS + \sum \delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{F}_j. \quad (2.19)$$

2.4 Matriz de Rigidez Tangente

O problema não linear pode ser resolvido por uma abordagem incremental e iterativa, como o método de Newton-Raphson. Em cada passo, para um determinado deslocamento $\mathbf{u}_e$, a matriz de rigidez é dada pela diferenciação do vetor de forças internas:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G, \quad (2.20)$$

onde a matriz de rigidez do material $\mathbf{K}_E$ e a matriz de rigidez geométrica $\mathbf{K}_G$ são dadas por:

$$\mathbf{K}_E = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \mathbf{u}_e} dV = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} dV, \quad \mathbf{K}_G = \int_V \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (2.21)$$

2.5 Formulação Corrotacional para Análise Estática Não Linear Geométrica de Treliças Planas

2.5.1 Definições Geométricas para Treliças Planas

A estrutura da treliça pode sofrer grandes deslocamentos e rotações no nível global, mas pequenas deformações no nível local. Considere o elemento de treliça nas configurações inicial e atual como mostrado na Figura 2.2 abaixo:

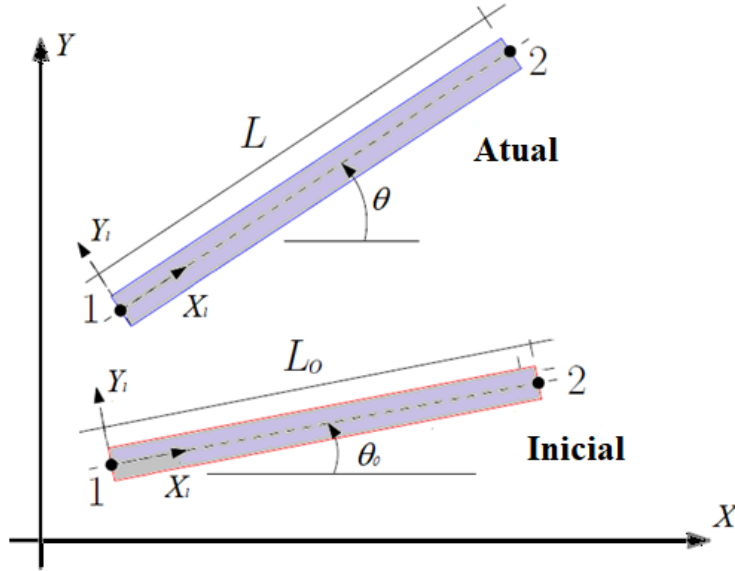


Figura 2.2: Configurações inicial e atual do elemento de treliça

Os comprimentos inicial L_0 e corrente L são determinados através do Teorema de Pitágoras, das coordenadas globais do elemento indeformado e dos deslocamentos após a deformação, conforme as equações:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}, \quad (2.22)$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2.23)$$

As coordenadas globais permanecem fixas na formulação corrotacional. O ângulo corrente do elemento corrotacionado com relação ao sistema de coordenadas globais é denotado por θ . Na formulação bidimensional, os valores do seno e cosseno diretores desse ângulo são determinados por, respectivamente [9], [29]:

$$c = \frac{(X_2 + u_2) - (X_1 + u_1)}{L}, \quad (2.24)$$

$$s = \frac{(Y_2 + v_2) - (Y_1 + v_1)}{L}, \quad (2.25)$$

onde $c = \cos(\theta)$ e $s = \sin(\theta)$. É interessante notar que o ângulo θ não precisa ser calculado, porque o seno e cosseno podem ser calculados diretamente a partir da geometria do elemento.

O vetor de força interna elementar $\mathbf{F}_{el}$ é avaliado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{F}_{el} = \frac{NL}{L_0} \mathbf{r}, \quad (2.26)$$

na qual $\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad c \quad s]^\top$ e N é a força axial interna local dada por:

$$N = AE\epsilon_G, \quad (2.27)$$

em que EA é a rigidez axial e ϵ_G é a deformação de Green-Lagrange. A matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_T$ é composta por dois termos:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G, \quad (2.28)$$

na qual $\mathbf{K}_E$ é a matriz de rigidez material e $\mathbf{K}_G$ é a matriz de rigidez geométrica, sendo determinadas por, respectivamente:

$$\mathbf{K}_E = \frac{AE}{2L_0} \left(3\frac{L^2}{L_0^2} - 1 \right) \mathbf{r}\mathbf{r}^\top \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_G = \frac{NL}{LL_0} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

em que $\mathbf{I}_2$ é a matriz identidade de ordem 2.

2.6 Formulação Corrotacional para Análise Estática Não Linear Geométrica de Pórticos Planos

2.6.1 Teorias de Vigas

As vigas são estruturas muito utilizadas na Engenharia, sendo caracterizadas por possuírem comprimento (L) muito maior que as outras dimensões, bem como carregamento e deflexão perpendiculares ao eixo. Além disso, os principais esforços são: momento fletor e força cortante.

Nas teorias de vigas, o objetivo é reduzir a dimensão da análise de sólidos de um problema 3D (x, y, z) para um problema 1D (x). Para isso, faz-se o uso de hipóteses simplificadoras que permitem escrever os deslocamentos (e deformações) de qualquer ponto da viga a partir dos deslocamentos do seu eixo: translações e rotações.

Diversas teorias de vigas foram propostas, tais como: Teoria Clássica de Vigas (TCV), Teoria de Timoshenko e Teorias de Alta Ordem.

Na TCV, também conhecida na literatura como Teoria de Bernoulli-Euler-Navier, utiliza-se as seguintes hipóteses simplificadoras estáticas e cinemáticas [17]:

- Os deslocamentos são pequenos em relação às dimensões da viga;
- Como as vigas são estreitas, suas faces laterais estão livres de tensões e todas as forças atuantes estão contidas no plano xy , o estado de tensões pode ser considerado plano. Assim, as tensões e deformações na direção y são desprezíveis ($\epsilon_y = \sigma_y = 0$);
- O efeito do coeficiente de Poisson pode ser desprezado (relação tensão-deformação unidimensional);
- Seções planas e perpendiculares ao eixo da viga permanecem planas e perpendiculares ao eixo após a deformação;
- As deformações de cisalhamento transversal são nulas;
- Adicionalmente, considera-se que não há acoplamento entre a deformação axial e a flexão.

Para formular o elemento finito faz-se o uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), na qual a energia interna de deformação é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \epsilon_x^2 dV = \frac{1}{2} \int_V E (-\kappa y)^2 dV = \frac{1}{2} \int_L E \kappa^2 \int_A y^2 dA dx. \quad (2.30)$$

A flexão nos planos xy e xz pode ser estudada independentemente. Considerando-se apenas o plano xy , a seção da viga sendo uniforme e ainda que

é válida a Lei de Hooke, a energia interna de deformação associada ao momento fletor da viga é dada por:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_L EI v_{,xx}^2 dx. \quad (2.31)$$

Não é possível utilizar uma interpolação linear para o deslocamento, pois isto resultaria em energia nula ($v_{,xx} = 0$). Sendo assim, para que a integral que representa a energia seja finita, a rotação $\theta = v_{,x}$ deve ser contínua entre dois elementos adjacentes (continuidade C^1).

O elemento de viga com seus graus de liberdade pode ser visto na Figura 2.3 abaixo:

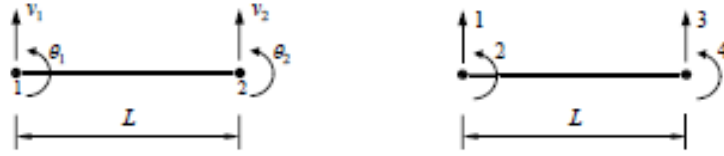


Figura 2.3: Elemento Finito de Viga 2D

Como se trata de um elemento linear com 4 graus de liberdade (gl), são utilizados os polinômios de Hermite para calcular as funções do deslocamento. São eles:

$$H_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}, \quad (2.32)$$

$$H_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, \quad (2.33)$$

$$H_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}, \quad (2.34)$$

$$H_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}. \quad (2.35)$$

A Figura 2.4 mostra os gráficos dos polinômios de Hermite.

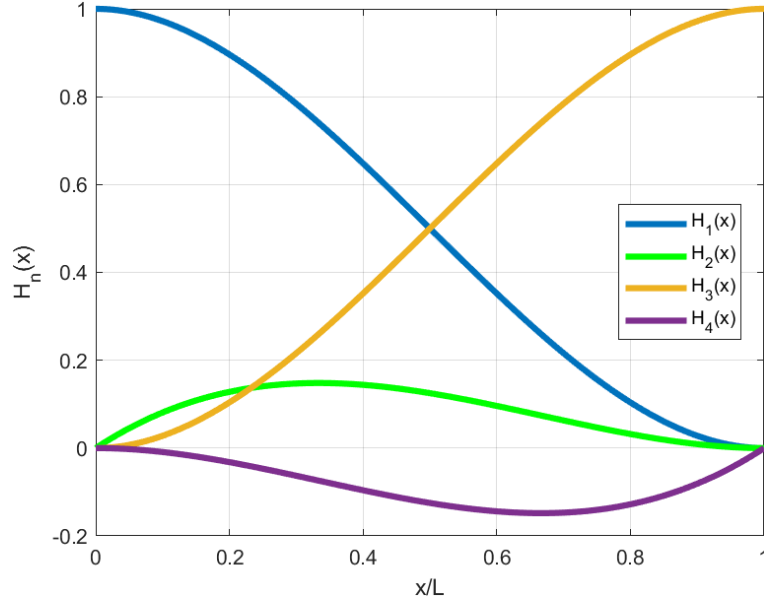


Figura 2.4: Polinômios de Hermite

As derivadas de segunda ordem dos polinômios de Hermite são dadas por:

$$H_{1,xx} = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}, \quad (2.36)$$

$$H_{2,xx} = -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}, \quad (2.37)$$

$$H_{3,xx} = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}, \quad (2.38)$$

$$H_{4,xx} = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}. \quad (2.39)$$

As funções de interpolação de Hermite e suas derivadas são utilizadas para a realização das aproximações dos deslocamentos nodais em relação aos deslocamentos em um ponto qualquer do elemento, bem como para a curvatura conforme mostra as Equações (2.40) e (2.41):

$$v(x) = H_1 v_1 + H_2 \theta_1 + H_3 v_2 + H_4 \theta_2, \quad (2.40)$$

$$\kappa(x) = v_{,xx} = H_{1,xx} v_1 + H_{2,xx} \theta_1 + H_{3,xx} v_2 + H_{4,xx} \theta_2. \quad (2.41)$$

Portanto, pode-se escrever o deslocamento e a curvatura matricialmente como:

$$v(x) = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{N}\mathbf{u}_e, \quad (2.42)$$

$$\kappa(x) = \begin{bmatrix} H_{1,xx} & H_{2,xx} & H_{3,xx} & H_{4,xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \kappa = \mathbf{B}\mathbf{u}_e. \quad (2.43)$$

Assim, a Energia Interna de Deformação é dada por:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L EI \kappa^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \kappa^T EI \kappa dx = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \int_0^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx \mathbf{u}_e, \quad (2.44)$$

onde a matriz de rigidez da viga é dada por:

$$\mathbf{K}_E = \int_0^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx. \quad (2.45)$$

Realizando os produtos e a integração que surgem na expressão da matriz de rigidez de cada elemento, e considerando a inércia (EI) constante, chega-se à seguinte expressão:

$$\mathbf{K}_E = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

A matriz de rigidez que contabiliza a parcela da energia de deformação elástica devida ao carregamento axial, pode ser obtida escrevendo a referida equação sob a forma matricial. Sendo assim, para uma viga de seção transversal uniforme, a matriz é dada por:

$$\mathbf{K}_E = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} EA dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

O elemento de viga contabiliza unicamente a energia de deformação associada à tração/compressão. O cálculo dessa energia depende apenas do deslocamento segundo o eixo x e cada nó do elemento. Diz-se que cada nó tem um grau de liberdade, uma vez que o elemento tem dois nós, tem um total de dois graus de liberdade. Por este fato o vetor de deslocamentos do elemento é um vetor 2×1 e a sua matriz de rigidez tem a dimensão 2×2 .

De um modo análogo, diz-se que cada nó do elemento de viga tem dois graus de liberdade e que esse elemento tem um total de quatro graus de liberdade.

Sabe-se que o vetor de cargas nodais equivale às cargas aplicadas nos nós e que isso pode ser dado por:

$$V_e = - \int_0^L v^\top q dx = -u_e^\top \int_0^L \mathbf{N}^\top q dx = -u_e^\top f_e. \quad (2.48)$$

Para uma carga distribuída uniformemente, temos que:

$$f_e = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Cabe ressaltar que esse processo é idêntico ao do Método dos Deslocamentos, obtido a partir dos esforços de engastamento perfeito, como mostrado na Figura 2.5 abaixo:

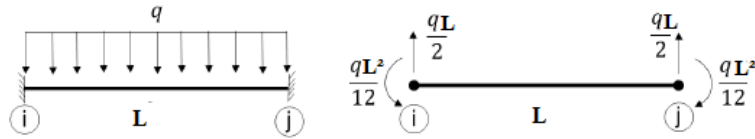


Figura 2.5: Esforços de Engastamento Perfeito

Portanto, a Energia Potencial Total (EPT) da viga será dada por:

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2} \int_0^L EI v_{,xx}^2 dx + \int_0^L q v dx, \quad (2.50)$$

onde $v(x)$ é o deslocamento transversal, $q(x) = v_{,x}$ é a rotação e $EI(x)$ é a rigidez à flexão da viga.

Para o caso em que se queira trabalhar com a inércia variável, é possível calcular a matriz de rigidez por integração numérica via Quadratura de Gauss, por exemplo. Como os termos da matriz B são lineares, o uso de 2 pontos de Gauss leva à matriz exata para EI constante ou linear. A integração numérica também pode ser utilizada para calcular o carregamento nodal equivalente f_e .

2.6.2 Definições Geométricas para Pórticos Planos

O elemento finito a ser adotado para pórticos planos é o elemento reticulado clássico de viga-coluna com seis graus de liberdade e limitado pelos pontos nodais

i e j , sendo que em cada ponto nodal de extremidade são considerados três graus de liberdade (deslocamento axial u , deslocamento transversal v e uma rotação θ) conforme ilustra a Figura 2.6 abaixo:

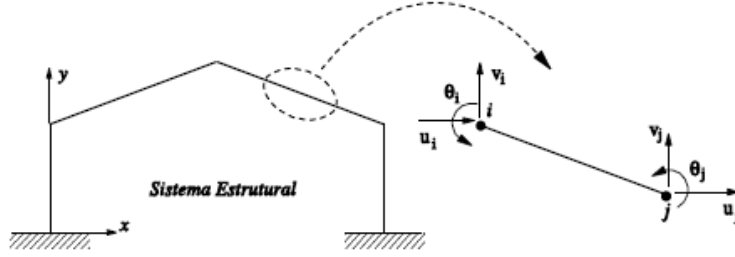


Figura 2.6: Elemento finito de pórtico plano

Na formulação de Elementos Finitos considerando a não linearidade geométrica, a matriz de rigidez do elemento de pórtico ($\mathbf{K}_{el}$) com seis graus de liberdade, obtida através da combinação das suas matrizes de rigidez enunciadas anteriormente, é dada pela seguinte expressão escrita no sistema de coordenadas locais [7]:

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G, \quad (2.51)$$

na qual $\mathbf{K}_E$ é a matriz de rigidez que contabiliza a parcela de energia de deformação elástica devida à flexão dada por:

$$K_E = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{EA}{L}} & 0 & 0 & \boxed{-\frac{EA}{L}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \boxed{-\frac{EA}{L}} & 0 & 0 & \boxed{\frac{EA}{L}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Figura 2.7: Matriz de Rigidez e Graus de Liberdade

Os termos delimitados no retângulo verde são os já encontrados coeficientes da viga e os demarcados em vermelho, a contribuição da carga axial.

É interessante notar que esta é a mesma expressão obtida pela forma clássica do Método da Rigidez Direta (MRD).

A matriz de rigidez geométrica $\mathbf{K}_G$ é dada por:

$$\mathbf{K}_G = N \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & -\frac{1}{10} & \frac{L}{30} \\ -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

É importante realçar que para obter-se uma matriz com 6×6 elementos, compatível com a matriz dada na Equação (2.7), acrescenta-se duas linhas e duas colunas, com zeros (momentos nulos) para os deslocamentos segundo x , sendo representada por:

$$\mathbf{K}_G = N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{L}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Nessas matrizes, L é o comprimento indeformado, I é o momento de inércia, A é a área da seção transversal, N é a força normal, e E é o módulo de elasticidade longitudinal. A matriz de rigidez elástica está relacionada a variação das deformações no elemento durante o processo de carregamento. Já a matriz de rigidez geométrica está relacionada as mudanças de direções das solicitações internas atuantes no elemento.

Após a definição das matrizes de rigidez referentes a cada elemento do pórtico, as mesmas devem ser rotacionadas para o sistema global de referência da estrutura. A informação contida em cada uma dessas matrizes será inserida em uma matriz de rigidez global, referente à toda a estrutura. Esta matriz conterá as informações de todas as matrizes de rigidez de cada elemento.

Na Formulação Lagrangeana, a matriz de rigidez ($\mathbf{K}_e$) e o vetor de força interna ($\mathbf{F}_e$) elementares no sistema de coordenadas globais são determinados por, respectivamente:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^\top \mathbf{K}_{el} \mathbf{T}, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{T} \mathbf{F}_{el}. \quad (2.55)$$

A matriz transformação é muito importante para tornar o sistema globalizado, ou seja, considerar que os elementos que compõem as estruturas estejam num mesmo sistema de eixos comum, de tal modo que seja possível realizar combinações vetoriais, conforme mostra a Figura 2.8:

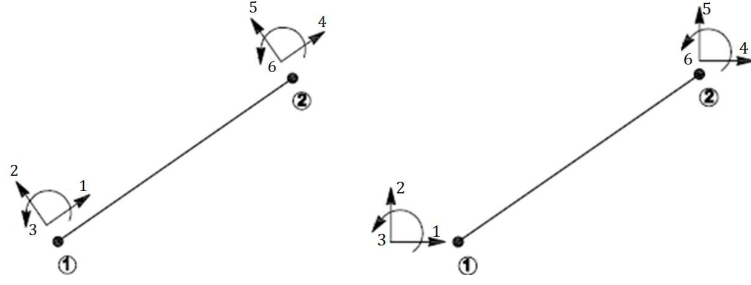


Figura 2.8: a) Coordenadas no sistema local. b) Coordenadas no sistema global.

Os vetores de forças e de deslocamentos podem ser transformados sistema local para o referencial global usando a matriz de transformação/rotação $\mathbf{T}$ representada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

onde $c = \cos(\theta)$ e $s = \sin(\theta)$. É interessante notar que o ângulo θ não precisa ser calculado, porque o seno e cosseno podem ser calculados diretamente a partir da geometria do elemento:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1, \\ \Delta y &= y_2 - y_1, \\ L &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \\ c &= \frac{\Delta x}{L}, \\ s &= \frac{\Delta y}{L}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são as coordenadas do nó inicial e final, respectivamente. A cada iteração k as coordenadas nos nós são atualizadas.

Na Formulação Corrotacional, a não linearidade geométrica é considerada por meio da descrição cinemática que visa separar de forma explícita os deslocamentos de corpo rígido das deformações sofridas pelo elemento, através da utilização de um sistema de coordenadas auxiliar que acompanha o elemento [9], [29]. A Figura 2.9 mostra isso para a configuração inicial e atual.

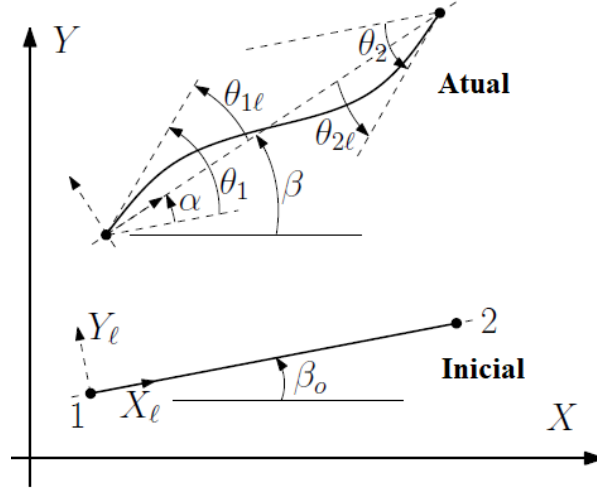


Figura 2.9: Configurações inicial e atual devido a deformações de flexão para uma viga.

É importante notar que há apenas três modos de deformação para o elemento de viga plano, sendo um modo associado à deformação axial do elemento (u) e dois associados às deformações de flexão (θ_1 e θ_2).

Para a Formulação Corrotacional de Elementos Finitos usando a viga 2D com dois nós e três graus de liberdade/nó, assume-se que não há deformação de cisalhamento na viga e, então, a seção transversal permanece plana e normal ao eixo da mesma, conforme as hipóteses da TCV. Na configuração inicial, as coordenadas dos nós 1 e 2 do elemento de viga no sistema global são (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , respectivamente. O comprimento original (indeformado) L_0 da viga é dado pela seguinte equação:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad (2.58)$$

Para o elemento de viga na sua configuração corrente, as coordenadas nodais globais são $(X_1 + u_1, Y_1 + v_1)$ para o nó 1 e $(X_2 + u_2, Y_2 + v_2)$ para o nó 2, em que u_i é o deslocamento do nó i na direção X e v_i é o deslocamento do nó i na direção Y , com $i = 1, 2$. O comprimento corrente L é:

$$L = \sqrt{(X_2 + u_2 - X_1 - u_1)^2 + (Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1)^2}. \quad (2.59)$$

O vetor de deslocamentos globais $\mathbf{p}$ do elemento i é dado por:

$$\mathbf{p}_i = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T, \quad (2.60)$$

em que u , v e θ são a translação horizontal, a translação vertical e a rotação, respectivamente, e os subscritos 1 e 2 definem os nós.

O deslocamento axial local (u_l) do elemento é calculado por:

$$u_l = L - L_0. \quad (2.61)$$

Entretanto, se a diferença entre L e L_0 for pequena, a Equação (2.61) fica mal condicionada para uso em uma configuração numérica. Portanto, propõe-se a multiplicação de u_l por $(L+L_0)/(L+L_0)$ o que resulta em um fórmula melhor condicionada [9], [13]:

$$u_l = \frac{(L - L_0)(L + L_0)}{L + L_0} = \frac{L^2 - L_0^2}{L + L_0}. \quad (2.62)$$

A deformação específica ϵ é assumida constante e é determinada por $\epsilon = \frac{u_l}{L_0}$.

Para um pórtico plano, sabe-se que os esforços atuantes em cada elemento são: esforço normal (N), esforço cortante (V), e momentos fletores (M_1) e (M_2). Sabendo que N e V são constantes ao longo do elemento e o momento fletor varia linearmente em função do comprimento da barra, calculam-se os esforços internos a partir das deformações e rotações.

A força axial (N) da viga é então dada por:

$$N = N_1 = N_2 = \frac{EAu_l}{L_0} = \frac{EA(L^2 - L_0^2)}{LL_0 + L_0^2} = \frac{EA \left(\left(\frac{L}{L_0} \right)^2 - 1 \right)}{\frac{L}{L_0} + 1}, \quad (2.63)$$

na qual A é a área da seção transversal e E é o módulo de Young. Usando a análise estrutural padrão, os momentos locais nas extremidades do elemento de viga ($\overline{M}_1$ e $\overline{M}_2$) são relacionados com as rotações nodais locais (θ_{1l} e θ_{2l}), e são dados por:

$$\begin{bmatrix} \overline{M}_1 \\ \overline{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L_0} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1l} \\ \theta_{2l} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

na qual I é o momento de inércia da seção transversal. As rotações nodais locais são computadas por:

$$\theta_{1l} = \arctan \left(\frac{\cos \beta \sin \beta_1 - \sin \beta \cos \beta_1}{\cos \beta \cos \beta_1 + \sin \beta \sin \beta_1} \right), \quad (2.65)$$

$$\theta_{2l} = \arctan \left(\frac{\cos \beta \sin \beta_2 - \sin \beta \cos \beta_2}{\cos \beta \cos \beta_2 + \sin \beta \sin \beta_2} \right), \quad (2.66)$$

na qual $\beta_1 = \theta_1 + \beta_0$ e $\beta_2 = \theta_2 + \beta_0$. Os ângulos θ_1 e θ_2 são as rotações nodais globais calculadas do sistema de equações globais, e as expressões para os ângulos inicial β_0 e corrente da barra β são, respectivamente:

$$\beta_0 = \arctan \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right), \quad (2.67)$$

$$\beta = \arctan \left(\frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1} \right), \quad (2.68)$$

Desenvolve-se a Matriz de Rigidez Global que relaciona o sistema local do elemento a um sistema global de eixos coordenados. Para estabelecer essa relação as coordenadas locais e globais devem estar no mesmo sistema de eixos. Essa orientação é realizada através da utilização de uma matriz de rotação $\mathbf{T}$, na qual:

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{T}^\top \mathbf{D} \mathbf{T}. \quad (2.69)$$

Ao considerar um material com comportamento linear-elástico, a matriz de rigidez no sistema local $\mathbf{D}$ é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 2r^2 \\ 0 & 2r^2 & 4r^2 \end{bmatrix} = \frac{E}{L_0} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 4I & 2I \\ 0 & 2I & 4I \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

sendo $r = \sqrt{I/A}$ o raio de giração, E é o módulo de Young, A é a área da seção transversal e I é o momento de inércia em relação ao eixo z .

A tarefa de desenvolver o elemento corrotacional consiste em transformar as matrizes e vetores definidos neste sistema local para o sistema global, no qual os elementos de uma malha podem ser combinados.

Na formulação corrotacional, a matriz de rotação $\mathbf{T}$ responsável pela transformação dos deslocamentos do sistema global para o local e vice-versa é representada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

onde $c = \cos(\beta)$ e $s = \sin(\beta)$. É interessante notar que o ângulo β não precisa ser calculado, porque o seno e cosseno podem ser calculados diretamente a partir da geometria do elemento, como mencionado anteriormente.

As expressões seguintes são utilizadas para calcular os valores do cosseno e seno do ângulo β , respectivamente:

$$\cos \beta = \frac{(X_2 + u_2) - (X_1 + u_1)}{L}, \quad (2.72)$$

$$\sin \beta = \frac{(Y_2 + v_2) - (Y_1 + v_1)}{L} . \quad (2.73)$$

A matriz de rigidez geométrica dos elementos de pórticos planos corrotacionais pode ser expressa como:

$$\mathbf{K}_G = \bar{N} \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^\top}{L} + (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \frac{1}{L^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^\top + \mathbf{z}\mathbf{r}^\top) . \quad (2.74)$$

Os vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{z}$ definidos anteriormente, são dados por:

$$\mathbf{r} = [\quad -c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0 \quad]^\top , \quad (2.75)$$

$$\mathbf{z} = [\quad s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0 \quad]^\top . \quad (2.76)$$

Para resolver o problema não linear, é necessário obter a matriz de rigidez tangente ($\mathbf{K}_T$) de cada elemento no sistema de coordenadas global, sendo dada por:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G = \mathbf{T}^\top \mathbf{D} \mathbf{T} + \bar{N} \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^\top}{L} + (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \frac{1}{L^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^\top + \mathbf{z}\mathbf{r}^\top) . \quad (2.77)$$

O vetor de forças internas elementar (F_{el}) é determinado por:

$$F_{el} = \mathbf{T}^\top [\quad \bar{N} \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2 \quad]^\top , \quad (2.78)$$

onde $\bar{N}$ representa a força axial conjugada ao deslocamento u_L , enquanto $\bar{M}_1$ e $\bar{M}_2$ correspondem aos momentos conjugados às rotações θ_{1l} e θ_{2l} , respectivamente.

Em problemas lineares elásticos e onde a deformação axial é constante ao longo do elemento, a força $\bar{N}$ é igual à força normal no elemento e os momentos $\bar{M}_1$ e $\bar{M}_2$ correspondem aos momentos fletores nos nós do elemento.

Desde que os deslocamentos transversais locais sejam nulos, as forças transversais locais de cisalhamento são calculadas com base em estáticas simples, uma vez que os momentos finais são conhecidos no sistema local. Supondo que nenhuma força seja aplicada entre os nós de uma viga e somando momentos em torno do nó 2, a força de cisalhamento no nó 1 é:

$$V_1 = \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L} = \frac{6EI}{LL_0} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1l} \\ \theta_{2l} \end{bmatrix} , \quad (2.79)$$

e para o nó 2, $V_2 = V_1$.

Importante destacar que esta correspondência não é válida quando a NLF é considerada. As forças internas são obtidas por integração numérica ao longo do comprimento, e os esforços internos também são calculados por integração das ten-

sões nas seções transversais correspondentes a estes pontos de integração. Neste caso, as forças internas não representam esforços internos nos nós.

2.7 Estabilidade Estrutural - Carga Crítica

Ao longo do caminho não-linear de equilíbrio, as configurações de equilíbrio podem sofrer mudanças de caráter qualitativo no que se refere a sua estabilidade. Essas mudanças estão associadas aos pontos críticos que podem ser pontos de bifurcação ou pontos limites. Nesses pontos, a tangente ao caminho não-linear de equilíbrio é nula, como mostra a Figura 2.10:

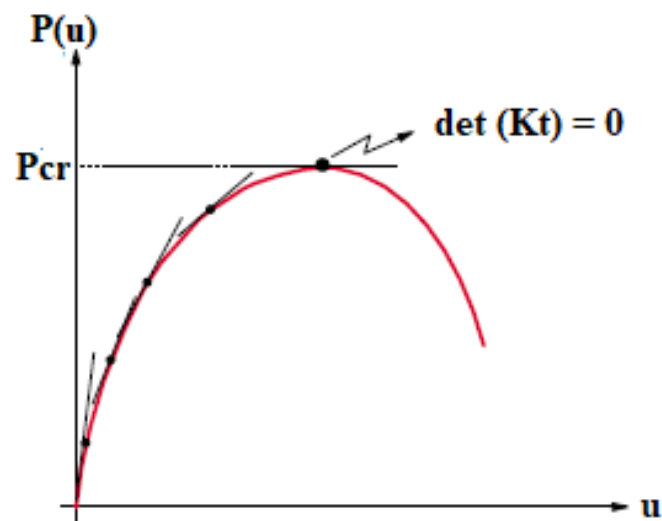


Figura 2.10: Ponto crítico na trajetória de equilíbrio.

A flambagem global é caracterizada por um fenômeno de instabilidade estrutural que eventualmente ocorre em elementos submetidos à compressão, e se manifesta pelo surgimento de deslocamentos transversais à sua direção axial. Na engenharia civil ocorre principalmente em pilares (pórticos planos) e em barras comprimidas, no caso de treliças planas e espaciais.

A carga crítica de uma estrutura é definida como sendo a carga axial máxima de compressão que um elemento pode suportar antes de ocorrer a flambagem. Qualquer carga adicional provocará flambagem na estrutura.

Neste contexto, a obtenção da carga crítica não necessita de uma análise estrutural completa, mas apenas da determinação dos valores de carga para os quais o determinante da matriz de rigidez se anula. Assim, a análise da instabilidade baseia-se na determinação do parâmetro de carga para o qual a estrutura perde a estabilidade devido a ocorrência de pontos de bifurcação na trajetória de equilíbrio [14].

O procedimento utilizado para o cálculo, consiste na redução do problema da análise estrutural em um problema de autovalor generalizado, mostrado a seguir:

$$(\mathbf{K}_E + \lambda \overline{\mathbf{K}}_G) \phi = \mathbf{0}, \quad (2.80)$$

$$\mathbf{K}_G = \lambda \overline{\mathbf{K}}_G, \quad (2.81)$$

em que ϕ são os modos de flambagem, representados pelos autovetores, e as cargas de flambagem são dadas pelos autovalores λ que é um parâmetro adimensional associado ao incremento das cargas aplicadas na estrutura e, conseqüentemente, aos esforços axiais em cada elemento para que a matriz de rigidez geométrica seja proporcional aos esforços aplicados na estrutura.

Matematicamente estamos na presença de um problema de valores e vetores próprios dado por:

$$\det(\mathbf{K}_E + \lambda \overline{\mathbf{K}}_G) = 0. \quad (2.82)$$

A equação característica é sempre um polinômio de grau igual ou inferior ao número de deslocamentos independentes. A carga crítica (λ_{cr}) é a menor raiz (parâmetro de carga) para o qual o determinante da matriz de rigidez total — soma da parcela elástica com a geométrica — se anula, situação na qual os deslocamentos podem aumentar descontroladamente.

Muitas vezes a carga crítica é definida como a carga que corresponde à menor carga de bifurcação de uma estrutura ideal, sem imperfeições geométricas e com barras submetidas à compressão simples até à ocorrência dessa bifurcação. A presente definição, baseada no determinante da matriz de rigidez, é mais simples, sendo equivalente no caso das estruturas perfeitas mas mais geral por também se aplicar a estruturas com imperfeições ou carregamentos gerais [22].

Capítulo 3

Métodos de Solução da Análise Não Linear de Estruturas

Anteriormente ao desenvolvimento das tecnologias computacionais, das técnicas e materiais construtivos e do melhor entendimento do comportamento estrutural, os projetos estruturais eram realizados desconsiderando os efeitos não lineares. O sistema estrutural, nesse caso, era considerado perfeito, e a análise era realizada em regime linear — com algumas hipóteses, como, por exemplo: equilíbrio do sistema obtido a partir da configuração indeformada; não interferência de pequenas deformações na resposta; material com comportamento elástico; e idealização das ligações entre os membros como sendo rotuladas ou rígidas.

Nesta pesquisa, a análise estrutural é feita, inicialmente, como linear elástica (primeira ordem) e em seguida não linear elástica (segunda ordem). A Figura 3.1 ilustra os difentes tipos de análises estruturais.

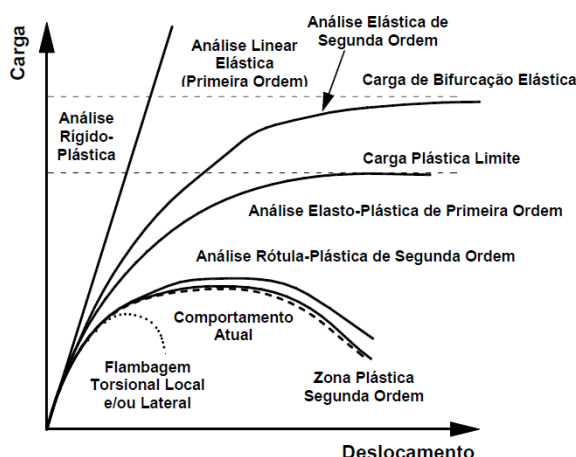


Figura 3.1: Tipos gerais de análises estruturais, (adaptado de CHAN & CHUI, 2000).

Após a fase linear e anterior ao colapso, a maioria das estruturas apresentam

comportamento não linear, tais como: elasticidade não linear, plasticidade, viscoelasticidade e fluência. Dentre esses materiais, pode-se citar: o concreto, o aço, o solo e o concreto betuminoso. Metais em alta temperatura, argila, borracha e polímeros apresentam viscoelasticidade [15].

O comportamento não-linear de uma estrutura, sob ação de um carregamento, pode ser classificado de acordo com seus efeitos em: geométrica, física e de contato.

A não-linearidade geométrica está relacionada à ideia que grandes deslocamentos e/ou deformações e rotações podem alterar a configuração inicial da estrutura ao longo do processo de deformação do corpo, nessa condição a estrutura deixa de expressar equilíbrio e compatibilidade

A não linearidade física é fruto das relações constitutivas do material, pelo fato, que a partir de um certo nível de carregamento, o material não se comporta de maneira linear (Lei de Hooke). Por sua vez, a não linearidade de contato está relacionada à variação nas condições iniciais (tempo) e de contorno (apoios e carregamentos) da estrutura.

A evolução do estudo da não linearidade é evidente ao longo dos anos, trazendo melhorias nas formulações teóricas, como nas rotinas computacionais com um potencial elevado, agilizando e possibilitando economia para o processamento dos dados e refletindo o real comportamento de estruturas menos comuns ou sob condições de carregamento não ordinárias ou, ainda, perto do colapso.

Como já mencionado, existem variadas fontes de não linearidade, mas neste trabalho será dado foco em estruturas geometricamente não-lineares que estão relacionadas com grandes deslocamentos e rotações, o que exige que se considere o equilíbrio do sistema estrutural na sua posição deformada.

3.1 Não Linearidade Geométrica

O comportamento não linear geométrico das estruturas é resultado das considerações das deformações de 2^a ordem, em que o equilíbrio é determinado numa posição deformada da estrutura, a partir do instante que a estrutura começa a sofrer grandes deslocamentos.

A análise não linear geométrica das estruturas é necessária em alguns casos, tais como: estruturas submetidas a grandes deformações, pois sofrem grandes alterações geométricas e estão sujeitas a grandes rotações. Para o caso dos pórticos, como mostrado na Figura 3.2, ocorre uma mudança de forma e a análise não-linear é feita na configuração deformada da estrutura.

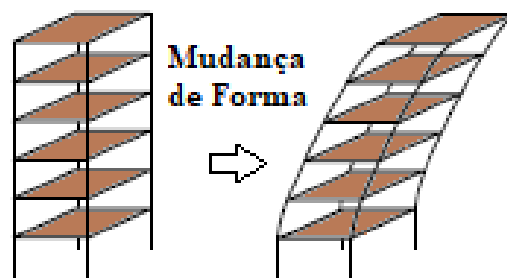


Figura 3.2: Mudança de forma da estrutura

A formulação para a análise não linear geométrica de estruturas tem seus fundamentos teóricos na teoria da elasticidade não linear, que faz parte da mecânica dos sólidos. A não linearidade geométrica aparece na teoria da elasticidade, tanto nas equações de equilíbrio, que são escritas utilizando-se as configurações deformadas do corpo, quanto nas relações deformação-deslocamento, que incluem termos não lineares nos deslocamentos e suas derivadas.

A principal diferença entre a análise linear e não linear geométrica deve-se que, na segunda, as condições de equilíbrio são condicionadas à configuração atual da estrutura, após ser submetida a uma parcela do carregamento.

3.2 Método da Solução Não-Linear do Problema Estrutural

Para que o comportamento real da estrutura seja simulado, são necessárias análises que considerem os efeitos não-lineares geométricos e do material. Esses efeitos, considerados pelas normas que regem o dimensionamento estrutural há algumas décadas, continuam presentes na maioria das normas técnicas atuais (Eurocode 2, 2004; ABNT NBR 8800, 2008; ABNT NBR 6118, 2014; AISC LRFD, 2016) — especialmente as baseadas no critério da resistência última. Tais diretrizes levam em conta esses efeitos e trazem prescrições para que os engenheiros projetistas os considerem em suas análises.

A solução de sistemas não lineares passa na condição de equilíbrio em que a diferença das forças externas e forças internas nodais seja igual à tolerância desejada. Com isso, a parte incremental da solução é empregada para prever os incrementos de deslocamento e a parte iterativa é utilizada para verificar o erro de equilíbrio [25].

A eficiência desse processo é ainda melhorada com a incorporação de vários métodos numéricos não lineares modificados, ligados à solução de Newton-Raphson. Na literatura existem inúmeros métodos numéricos capazes de resolver sistemas de equações não lineares, dentre eles: Newton-Raphson, Newton-Raphson Modificado,

Comprimento de Arco, Picard, etc.

Da Equação (2.15), é possível descrevermos a equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural com comportamento não linear geométrico como sendo [18]:

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \Rightarrow \mathbf{r}(u) = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(u), \quad (3.1)$$

em que $\mathbf{r}$ é o vetor de forças desequilibradoras ou resíduo, $\mathbf{F}_i$ é o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de deslocamentos totais $\mathbf{u}$ nos pontos nodais da estrutura), e λ é o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor $\mathbf{F}_r$, sendo este um vetor de referência e de magnitude arbitrária.

As forças externas são aquelas aplicadas na estrutura em estudo, as forças internas resistidas são determinadas através dos deslocamentos acumulados, e a diferença entre as forças externas e as forças internas é denominada forças não equilibradas.

A solução do sistema dado na Equação (3.1) é obtida por meio de um esquema iterativo e incremental. Para uma sequência do parâmetro de força λ , uma sequência do respectivo incremento de deslocamentos nodais $\mathbf{u}$ é calculado. Sendo assim, aplicando o esquema iterativo de Newton-Raphson, tem-se o problema estrutural não linear dado por:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} = \lambda^{(k)} \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}^{(k-1)}), \quad (3.2)$$

em que $\mathbf{K} = \mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}$ é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural (matriz Jacobiana) e $\delta \mathbf{u}^{(k)}$ é o subincremento de deslocamentos. O superíndice $(k-1)$ indica a iteração anterior e (k) indica a iteração corrente. Os parâmetros totais de força (λ) e do vetor de deslocamentos nodais ($\mathbf{u}$) no passo de força $t + \Delta t$ e iteração k são atualizados, respectivamente, por:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (3.4)$$

No método de Newton-Raphson admite-se que, para uma dada estimativa inicial para a raiz do sistema, a solução é obtida por meio de uma sequência de correções até que uma solução é obtida com a precisão desejada.

Com a combinação das Equações anteriores, chega-se à expressão para $\delta \mathbf{u}^{(k)}$ [9]:

$$\delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)}, \quad (3.5)$$

na qual $\delta \lambda^{(k)}$ é o subincremento do parâmetro de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo, e $\delta \mathbf{u}_g^{(k)}$ e $\delta \mathbf{u}_r^{(k)}$ são obtidos, respectivamente, por:

$$\delta \mathbf{u}_g^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)}, \quad (3.6)$$

$$\delta \mathbf{u}_r^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{F}_r. \quad (3.7)$$

Os parâmetros incrementais do parâmetro de força ($\Delta\lambda$) e do vetor de deslocamentos nodais ($\Delta\mathbf{u}$) no passo de força $t + \Delta t$ e iteração k são avaliados por, respectivamente:

$$\Delta\lambda^{(k)} = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}, \quad (3.8)$$

$$\Delta\mathbf{u}^{(k)} = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)}. \quad (3.9)$$

Problemas não lineares resultantes de não linearidades geométrica apresentam pontos críticos ao longo do caminho da solução, sendo pontos na trajetória de solução em que a estrutura perde estabilidade (por exemplo, flambagem) ou ocorre a bifurcação (a solução muda para dois ou mais caminhos). Os pontos limites de força ocorrem quando um valor máximo ou mínimo de força é alcançado na curva de deslocamento versus força. Uma tangente horizontal está presente nos pontos limite de força. Pontos limites de deslocamento ocorrem em tangentes verticais na curva da solução. Os pontos limites de deslocamento são comumente referenciados na literatura como pontos de *snapback* ou pontos de viragem.

Uma metodologia eficiente de solução de problemas com não linearidade física e/ou geométrica deve ser capaz de superar as dificuldades numéricas associadas ao comportamento não linear, traçando toda a trajetória de equilíbrio (caminhos primários e secundários) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos que possam existir, indicando trechos de ganho e perda de rigidez [16], [20], [26]. A Figura 3.3 abaixo apresenta a trajetória de equilíbrio:

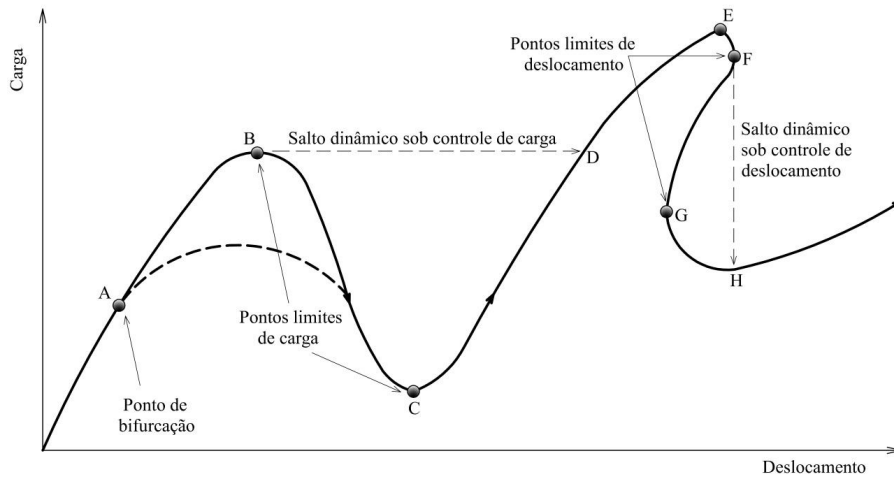


Figura 3.3: Trajetória de equilíbrio de um sistema [18].

Pode-se ver a resposta não linear de um sistema estrutural, em que um determinado componente de deslocamento pode incrementar ou sofrer decréscimos ao longo da trajetória. Nessa figura, estão identificados: o Ponto A (ponto de bifurcação); os Pontos B e C (pontos limites de carga); o Ponto D (referente ao salto dinâmico sob controle de carga); o Ponto E (ponto limite de carga); os Pontos F e G (pontos limites de deslocamento); e o ponto H (referente ao salto dinâmico sob controle de deslocamento).

A determinação da resposta do sistema após os pontos críticos (caminho pós-crítico) é essencial quando se deseja estudar o comportamento da estrutura no domínio de grandes deslocamentos ou mesmo na identificação do tipo de colapso estrutural. Para tal, utiliza-se um processo incremental-iterativo que consiste de duas etapas [16], [26]:

1) A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, seleciona-se um subincremento de força (definido como o subincremento de força inicial - $\delta\lambda^{(0)}$), que satisfaça alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção desse parâmetro, determina-se o incremento inicial do vetor de deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{u}^{(0)}$; e

2) na segunda etapa de solução, procura-se por meio de uma estratégia de continuação corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura. Se as iterações envolverem deslocamentos nodais ($\mathbf{u}$) e o parâmetro de força (λ), então uma equação adicional de restrição é requerida.

O formato dessa equação é o que distingue as várias estratégias de iteração, como pode ser visto na Figura 3.4 abaixo:

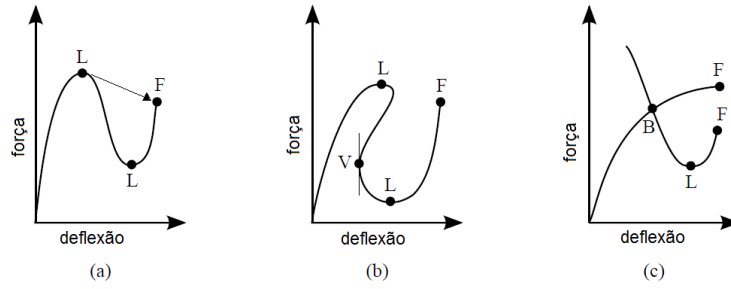


Figura 3.4: a) Snap-through b) Snap-back e c) Bifurcação

São definidos os seguintes tipos de pontos críticos: pontos limites de força (*snap-through*) e de deslocamento (*snap-back*); e ponto de bifurcação, a partir do qual derivam duas ou mais trajetórias [18].

Na Figura 3.4 (a), o fenômeno de *snap-through* ocorre quando, a partir do ponto limite L , a tangente de rigidez se torna negativa, cujo significado físico é a instabilidade da estrutura. Dessa forma, a estrutura se encontra no ponto limite L e é submetida a um pequeno acréscimo de carga, consistindo em uma “passagem dinâmica” da estrutura até o ponto de falha F , isto é, para uma configuração de equilíbrio afastada e estável.

Já na Figura 3.4 (b) observa-se o fenômeno de *snap-back*, caracterizado por uma volta no caminho de equilíbrio, passando pelo ponto de viragem V onde a tangente é vertical. O ponto de viragem tem mais importância computacional do que física, pois pode comprometer o pleno funcionamento de alguns métodos numéricos [15].

Por fim, na Figura 3.4 (c) nota-se a ocorrência do fenômeno de bifurcação, em que se cruzam dois ou mais caminhos de equilíbrio igualmente possíveis. Barras comprimidas sujeitas a flambagem apresentam esse comportamento.

3.2.1 Método do Controle de Carga

O Método do Controle de Carga trata-se de uma técnica usada em problemas não lineares, onde a análise pode ser realizada partindo-se da configuração inicial da estrutura e determinando os deslocamentos, tensões e esforços à medida que a carga é aumentada até um valor máximo, chamado de ponto limite de carga. Essa técnica aplica incrementos de carga definidos pelo analista, a fim de determinar o caminho de equilíbrio da estrutura. No entanto, esse método é incapaz de traçar o caminho de equilíbrio após o ponto limite de carga [9].

Muitas vezes a resposta da análise de uma estrutura antes de se alcançar pontos críticos (pontos limites ou pontos de bifurcação) é suficiente para os propósitos de projeto, mas a determinação da resposta no intervalo pós-crítico é essencial para estudar o comportamento da estrutura. Nesse caso, a implementação computacio-

nal deve ter a capacidade de detectar esses pontos críticos e seguir a trajetória de equilíbrio além desses pontos, o que chamamos de caminho pós-crítico [9].

Um dos métodos mais utilizados para traçar caminhos de equilíbrio não lineares até os pontos limites é resultado da combinação da técnica de Controle de Carga com as iterações de Newton-Raphson para resolver o sistema de equações lineares em cada incremento de carga. Pode ser utilizado tanto o método de Newton-Raphson Padrão (NRP) ou de Newton-Raphson Modificado (NRM), diferindo somente pelo fato de que no NRP, a matriz de rigidez tangente é atualizada a cada iteração e no NRM, a matriz de rigidez tangente é mantida constante durante todo o incremento [8], [9].

Apesar de sua larga utilização na solução de equações de equilíbrio não lineares, o Método do Controle de carga não é capaz de percorrer todo o caminho de equilíbrio em análise, pois não consegue identificar pontos singulares ou críticos que possam existir, ocasionando o fenômeno de salto dinâmico sob controle de carga (*snap-through*).

Devido à não linearidade da resposta, é necessária a utilização de métodos mais complexos que possam superar essa limitação, com destaque para os chamados métodos de Newton-Raphson com restrição, como o método do Controle de Deslocamento e o método do Comprimento de Arco, que serão discutidos na próxima seção.

Seguindo essa abordagem, uma alternativa para ultrapassar pontos limites de carga é o Método do Controle de Deslocamentos, contudo este método falha no caso de estruturas que apresentam pontos limite de deslocamentos (*snap-back*) [4].

Um método muito utilizado para análise não linear de estruturas é o Método do Comprimento de Arco, pois este método tem a capacidade de ultrapassar pontos limite de carga e deslocamento [9].

3.2.2 Método do Comprimento de Arco

O método de Newton-Raphson só fornece a solução de um simples ponto no caminho de equilíbrio. Para obter outros pontos, combina-se as iterações de Newton-Raphson com um procedimento incremental.

No método do comprimento de Arco, os incrementos de carga e deslocamento são variáveis ao longo das iterações, entretanto, a distância entre um ponto de equilíbrio e seu anterior é constante e correspondente ao comprimento de arco [21], [27].

Seja a curva não linear r ilustrada na Figura 3.5, em que l é um trecho da curva entre dois pontos quaisquer A e B ; Δu é um incremento de u ; e Δf é um incremento de f .

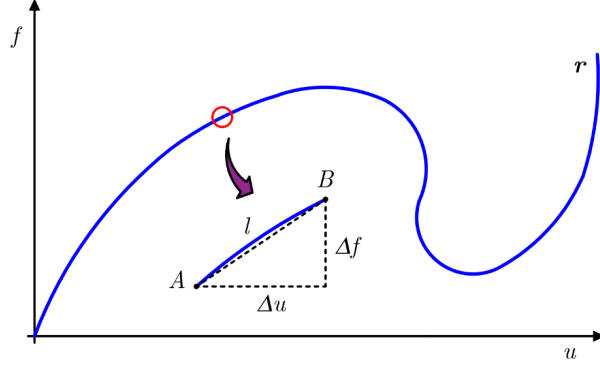


Figura 3.5: Arco situado entre dois pontos de uma curva.

O Método de Newton-Raphson com restrição soluciona o problema do sistema de equações, que possui $n + 1$ incógnitas e apenas n equações, adicionando uma nova equação ao sistema chamada de restrição. Esse método pode ser escrito como [9]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}, \lambda) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.10)$$

em que $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \lambda)$ é a equação de restrição e que varia nos diferentes métodos.

O propósito é determinar, ao final de cada passo, o valor do parâmetro de carga λ e do vetor de deslocamentos nodais $\mathbf{u}$. Esse sistema tem $(n + 1)$ incógnitas, que são o vetor $\mathbf{u}$ com n elementos e o parâmetro λ , mas somente n equações. Assim, uma equação de restrição é adicionada ao sistema:

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Aplicando a Regra da Cadeia ao sistema dado pelas Equações (3.1) e (3.11) chega-se a:

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u}^{(k+1)} + \frac{\partial \mathbf{g}^{(k)}}{\partial \lambda} \delta \lambda^{(k+1)} = \mathbf{K}^{(k)} \delta \mathbf{u}^{(k+1)} - \delta \lambda^{(k+1)} \mathbf{F}_{\mathbf{r}} = -\mathbf{r}^{(k)}, \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{c}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u}^{(k+1)} + \frac{\partial \mathbf{c}^{(k)}}{\partial \lambda} \delta \lambda^{(k+1)} = -\mathbf{c}^{(k)}, \quad (3.13)$$

com:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}^{(k+1)}, \quad (3.14)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda^{(k+1)}, \quad (3.15)$$

na qual $\mathbf{K} = \mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}$ é a matriz de rigidez representativa do sistema

estrutural (matriz Jacobiana) e $\delta\lambda^{(k+1)}$ é o subincremento do parâmetro de carga. O superíndice $(k+1)$ indica a iteração corrente e (k) indica a iteração anterior. Isolando o subincremento de deslocamentos $\delta\mathbf{u}^{(k+1)}$ na Equação (3.12) e supondo que $\mathbf{K}$ seja inversível, tem-se:

$$\mathbf{K}^{(k)}\delta\mathbf{u}^{(k+1)} - \delta\lambda^{(k+1)}\mathbf{F}_r = -\mathbf{r}^{(k)}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{K}^{(k)}\delta\mathbf{u}^{(k+1)} = \delta\lambda^{(k+1)}\mathbf{F}_r - \mathbf{r}^{(k)}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{K}^{(k)-1}\mathbf{K}^{(k)}\delta\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{K}^{(k)-1}\delta\lambda^{(k+1)}\mathbf{F}_r - \mathbf{K}^{(k)-1}\mathbf{r}^{(k)}, \quad (3.18)$$

$$\delta\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{K}^{(k)-1}\delta\lambda^{(k+1)}\mathbf{F}_r - \mathbf{K}^{(k)-1}\mathbf{r}^{(k)}, \quad (3.19)$$

$$\delta\mathbf{u}^{(k+1)} = \delta\lambda^{(k+1)}\delta\mathbf{u}_r^{(k)} + \delta\mathbf{u}_g^{(k)}, \quad (3.20)$$

na qual:

$$\delta\mathbf{u}_g^{(k)} = -\mathbf{K}^{(k)-1}\mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)}), \quad (3.21)$$

$$\delta\mathbf{u}_r^{(k)} = \mathbf{K}^{(k)-1}\mathbf{F}_r, \quad (3.22)$$

em que $\mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)}) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}^{(k)}) - \lambda^{(k)}\mathbf{F}_r$. Os incrementos de coordenadas nodais e de carga são determinados por, respectivamente:

$$\Delta\mathbf{u}^{(k+1)} = \Delta\mathbf{u}^{(k)} + \delta\mathbf{u}^{(k+1)}, \quad (3.23)$$

$$\Delta\lambda^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k)} + \delta\lambda^{(k+1)}. \quad (3.24)$$

O cálculo explícito pode ser evitado resolvendo-se o sistema de equações lineares via decomposição (por exemplo, fatoração LU ou fatoração de Cholesky), visto que uma única fatoração no início do ciclo iterativo é necessária.

3.2.3 Técnica de Continuação Comprimento de Arco Linear

Utilizando a técnica de continuação Comprimento de Arco Linear, a equação de restrição $\mathbf{c}(\mathbf{u}, \lambda)$ é dada por [21]:

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}, \lambda) = \delta\mathbf{u}^{(k+1)T}\Delta\mathbf{u}^{(0)} = 0. \quad (3.25)$$

Com a substituição do subincremento $\delta\mathbf{u}^{(k+1)}$ da Equação (3.20) na Equação (3.25), chega-se à expressão para o subincremento de carga $\delta\lambda^{(k+1)}$:

$$[\delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \lambda^{(k+1)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)}]^T \Delta \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad (3.26)$$

$$\delta \mathbf{u}_g^{(k)T} \Delta \mathbf{u}^{(0)} + \delta \lambda^{(k+1)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)T} \Delta \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad (3.27)$$

$$\delta \lambda^{(k+1)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)T} \Delta \mathbf{u}^{(0)} = -\delta \mathbf{u}_g^{(k)T} \Delta \mathbf{u}^{(0)}, \quad (3.28)$$

$$\delta \lambda^{(k+1)} = -\frac{\delta \mathbf{u}_g^{(k)T} \Delta \mathbf{u}^{(0)}}{\delta \mathbf{u}_r^{(k)T} \Delta \mathbf{u}^{(0)}}. \quad (3.29)$$

A expressão para o incremento inicial do parâmetro de força (solução predita) é dada por:

$$\Delta \lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta \mathbf{u}_r\|}, \quad (3.30)$$

na qual Δl representa o incremento de comprimento de arco. Esse incremento pode ser utilizado como um parâmetro de controle no passo de força corrente de acordo com a expressão:

$$\Delta l = \Delta l^{(0)} \left(\frac{Nd}{k_t} \right)^{1/2}, \quad (3.31)$$

em que $\Delta l^{(0)}$ é o incremento de comprimento de arco no passo de carga inicial, Nd é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente e k_t é o número de iterações que foi necessário para convergir no passo de carga anterior.

No início do passo de carga corrente, o tamanho do incremento do vetor coordenadas nodais é predito por $\Delta \mathbf{u}^{(0)} = \Delta \lambda^{(0)} \delta \mathbf{u}_r^{(0)}$, e impõe-se que os incrementos do vetor de coordenadas nodais sejam ortogonais ao da primeira iteração nas iterações subsequentes.

O sinal do incremento inicial do parâmetro carga ($\Delta \lambda^{(0)}$) pode ser positivo ou negativo. A escolha correta do sinal é de suma importância na definição das sequências de soluções $(\mathbf{u}, \lambda)$ que permitam o avanço contínuo na resposta força-deslocamento. O procedimento utilizado consiste na análise do produto interno entre o incremento de deslocamentos nodais obtido no passo de força anterior ($\Delta \mathbf{u}_t$) e o incremento de deslocamentos nodais corrente ($\delta \mathbf{u}_r$): se $\Delta \mathbf{u}_t^T \delta \mathbf{u}_r > 0$, então o preditor $\Delta \mathbf{u}^{(0)}$ tem o mesmo sentido de $\delta \mathbf{u}_r$; caso contrário, o preditor tem sentido contrário.

3.2.4 Problema Clássico - Barra sob tensão

O exemplo proposto por [28] trata-se de um problema estático não linear resolvido por meio da análise explícita e implícita. Em ambos os casos, um esquema de controle de carga incremental é usado. Cabe ressaltar que é um exemplo hipotético, construído para ilustrar uma variedade de conceitos que surgem em uma típica análise não linear de elementos finitos, fornecendo algumas ferramentas introdutórias que são úteis para problemas futuros que serão tratadas nessa dissertação.

Considere o caso de uma barra simples em tensão, conforme mostrado na Figura 3.6:

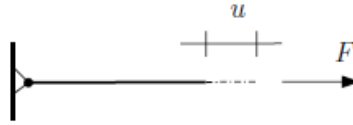


Figura 3.6: Barra sob tensão

Suponha que a força na barra é uma função não linear do deslocamento do tipo:

$$f(u) = u + \frac{u^3}{3}. \quad (3.32)$$

Da Equação (3.32), segue-se que a rigidez da barra é dada por:

$$k(u) = \frac{df}{du} = 1 + u^2. \quad (3.33)$$

Claramente, é possível traçar um gráfico de força (f) *versus* deslocamento (u) usando a Equação (3.32). No entanto, se a relação força não linear *versus* deslocamento for não conhecido, mas a rigidez é conhecida, é possível construir o gráfico de força *versus* deslocamento numericamente. Um método é usar um esquema de controle de carga explícito ou implícito incremental. Isso é ilustrado a seguir.

1. Análise Explícita

Para este exemplo, três incrementos de carga iguais (ou etapas) de $\Delta F = 1$ cada unidade é usada para carregar a barra de tensão. As variáveis usadas são u para deslocamento, f para força interna na barra, F para força externa aplicada à barra e k para rigidez. Deslocamentos ou forças incrementais aplicadas externamente são representados como u ou F , respectivamente. É feito uso da relação $F = k\Delta u$. A análise procede do seguinte modo:

(a) Etapa 1:

$$u_0 = 0.0, \Rightarrow k(u_0) = 1, \Delta F = 1, \Delta u_1 = \frac{\Delta F}{k(u_0)} = 1.0, \\ u_1 = u_0 + \Delta u_1 = 1.0.$$

(b) **Etapa 2:**

$$\Rightarrow k(u_1) = 1 + 1^2 = 2, \Delta F = 1, \Delta u_2 = \frac{\Delta F}{k(u_1)} = \frac{1}{2},$$

$$u_2 = u_1 + \Delta u_2 = 1.5 \text{ .}$$

(c) **Etapa 3:**

$$\Rightarrow k(u_2) = 1 + 1.5^2 = 3.25, \Delta F = 1, \Delta u_3 = \frac{\Delta F}{k(u_2)} = \frac{1}{3.25},$$

$$u_3 = u_2 + \Delta u_3 \cong 1.81 \text{ .}$$

Finalmente, a partir das três etapas, os seguintes resultados são obtidos:

$$F_{ext} = \Delta F + \Delta F + \Delta F = 3.0 \text{ ,}$$

$$f_{int} = u_3 + \frac{u_3^3}{3} = 1.81 + \frac{1.81^3}{3} \cong 3.79 \text{ .}$$

É evidente a partir dos resultados que as forças externas e internas NÃO estão em equilíbrio porque $F_{ext} \neq f_{int}$. A Tabela 3.1 resume os principais resultados da análise explícita.

Tabela 3.1: Resumo dos resultados da análise explícita.

Etapa i	ΔF_i	Δu_i	u_i	$(F_{ext})_i$	$(f_{int})_i$	$f_{int} - F_{ext} = R$
1	1.0	1.000	1.00	1.0	1.333	0.333
2	1.0	0.500	1.50	2.0	2.625	0.625
3	1.0	0.308	1.81	3.0	3.790	0.790

Fonte: Construção pelo autor.

Um gráfico dos resultados é mostrado na Figura 3.7 abaixo:

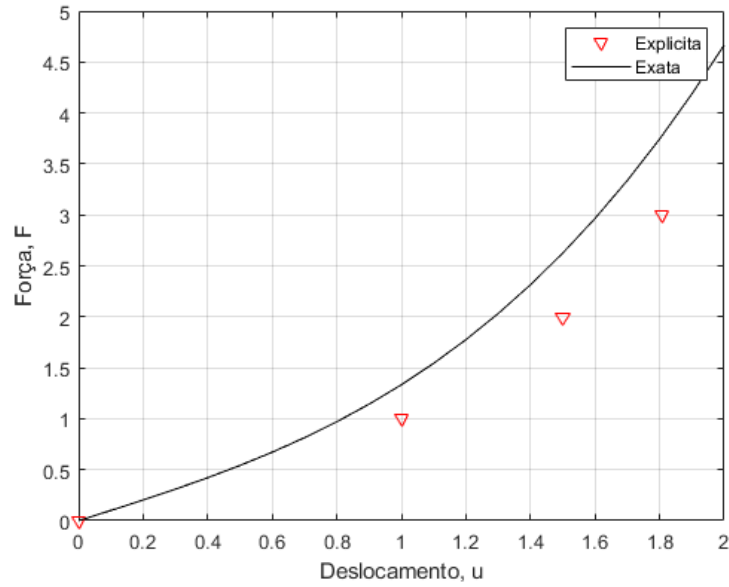


Figura 3.7: Solução explícita com 3 incrementos

A partir da leitura do gráfico, conclui-se que a análise explícita se desvia da solução exata. Para obtermos um melhor resultado, podemos aumentar o número de incrementos a serem analisados numericamente. Assim, se 20 incrementos forem usados, a análise explícita segue mais de perto a solução exata como mostrado na Figura 3.8.

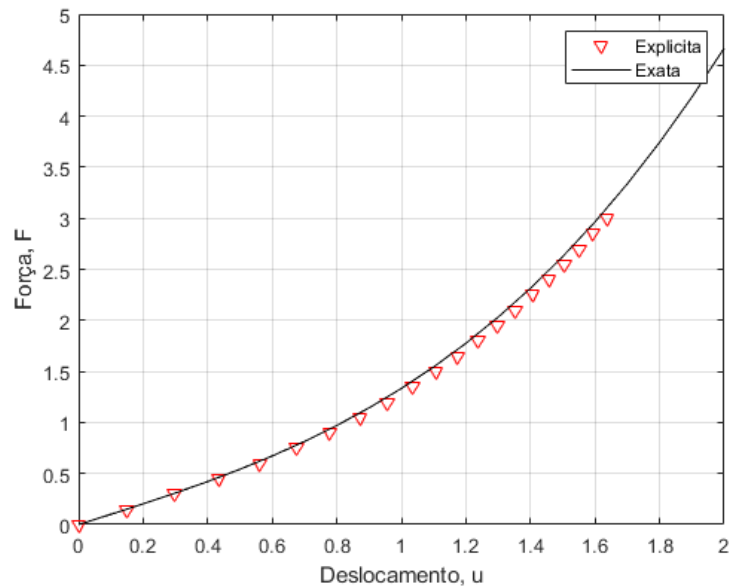


Figura 3.8: Solução explícita com 20 incrementos

No entanto, mesmo com mais incrementos a análise explícita ainda se desvia da solução exata. A derivada da solução exata ilustra a falta de equilíbrio

entre as forças internas e externas. Para melhorar a solução deste problema, é necessária uma análise implícita.

2. Análise Implícita

Uma análise implícita é igual à análise explícita, exceto que no final de cada etapa as iterações de Newton-Raphson são usadas para impor o equilíbrio antes de passar para a próxima etapa. Basicamente, uma força incremental é aplicada para avançar a solução no início de um passo. No entanto, as forças internas e externas não estarão em equilíbrio, a menos que a rigidez seja linear para a etapa dada. Portanto, para atingir o equilíbrio, as correções devem ser feitas para o deslocamento. Isso é feito usando iterações de Newton-Raphson para minimizar o resíduo, $R(u) = f_{int} - F_{ext}$. Expandindo o residual como uma série de Taylor sobre o deslocamento atual u^j , temos:

$$R^{j+1} = R^j(u^j) + \frac{dR(u^j)}{du} \delta u^{j+1} + \dots = R^j + k(u^j) \delta u^{j+1} + \dots \quad (3.34)$$

Ao negligenciar os termos de ordem superior na série, definindo $R^{j+1} = 0$ e resolvendo para δu^{j+1} a seguinte correção é obtida:

$$\delta u^{j+1} = -[k(u^j)]^{-1} R^j. \quad (3.35)$$

Os resultados da análise implícita estão resumidos na Tabela 3.2, sendo adotada uma tolerância de 10^{-2} .

Tabela 3.2: Resumo dos resultados da análise implícita.

Etapa i	ΔF_i	u_i	$(F_{ext})_i$	$(f_{int})_i$	$f_{int} - F_{ext} = R$
1	1.0	0.81785	1.0	1.000197	0.000197
2	1.0	1.29042	2.0	2.006630	0.006630
3	1.0	1.61000	3.0	3.001000	0.001000

Fonte: Construção pelo autor.

É evidente a partir da tabela que as forças externas e internas estão entrando em equilíbrio. Os resultados da análise implícita são mostrados nas Figuras 3.9 e 3.10.

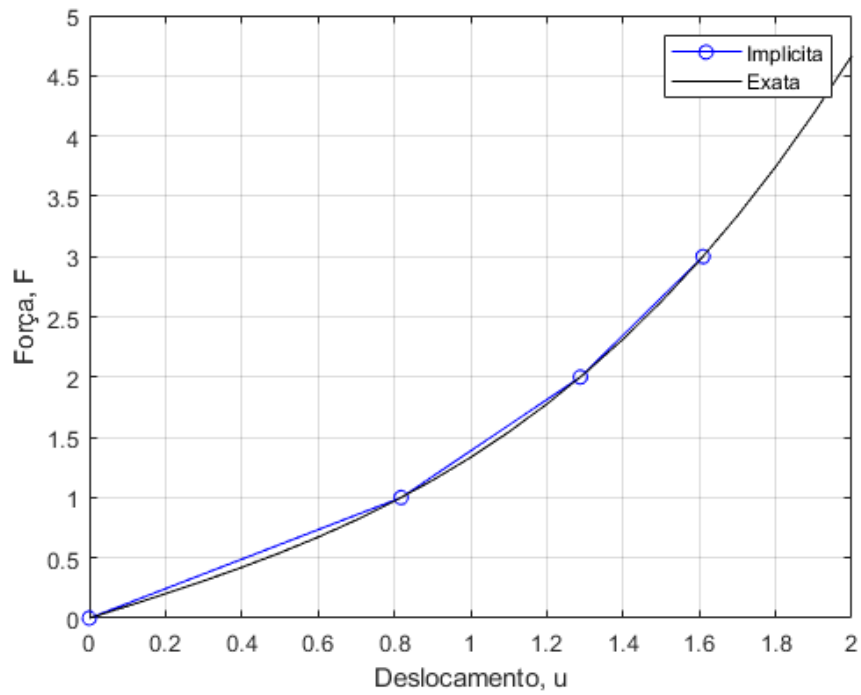


Figura 3.9: Solução implícita com 3 incrementos

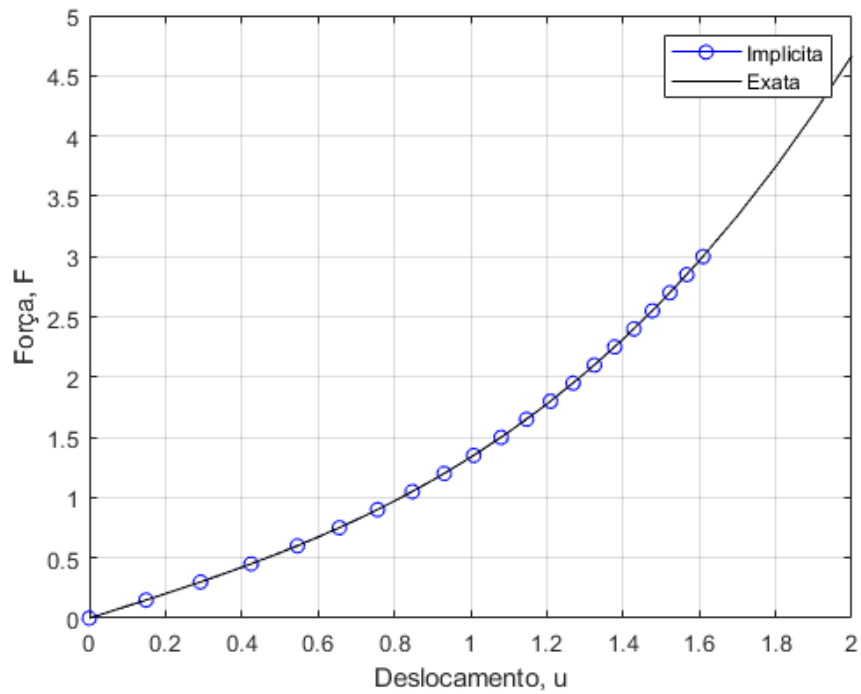


Figura 3.10: Solução implícita com 20 incrementos

As iterações de Newton-Raphson corrigem as etapas incrementais para que eles se aproximem da solução exata de acordo com a tolerância especificada.

As Figuras 3.11 e 3.12 mostram a comparação das soluções explícitas e implícitas para 3 e 20 incrementos, respectivamente.

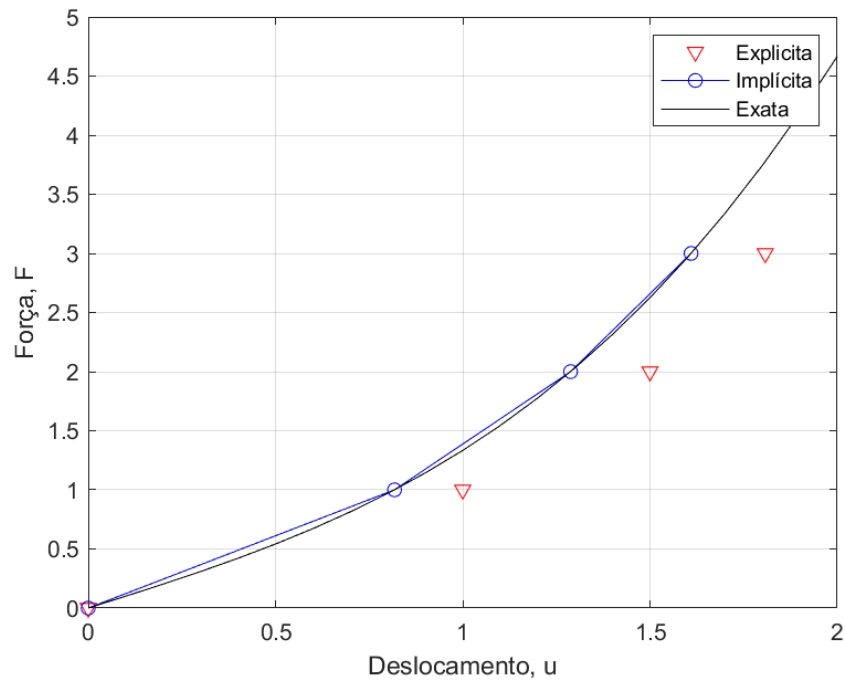


Figura 3.11: Comparação da solução explícita e implícita com 3 incrementos

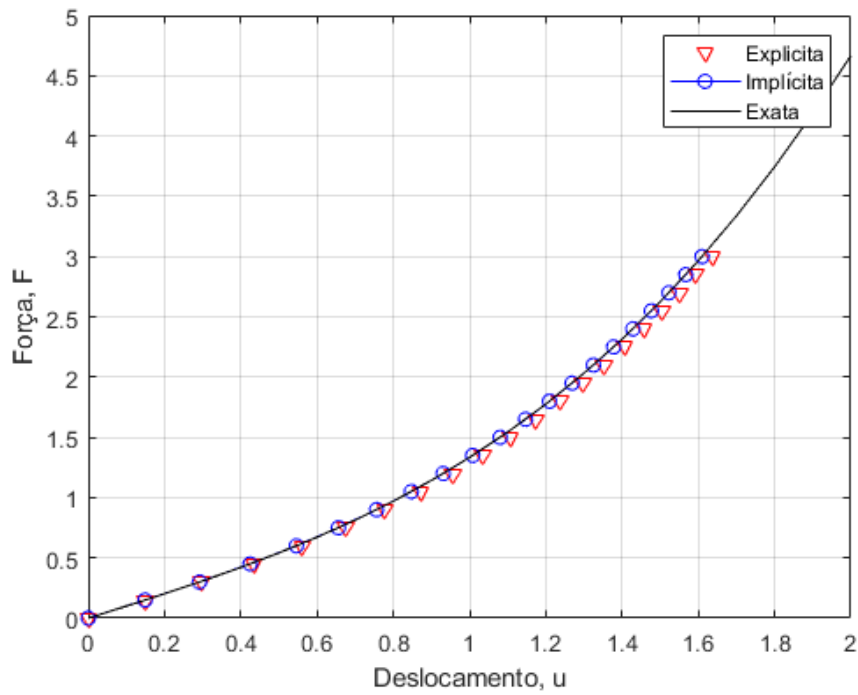


Figura 3.12: Comparação da solução explícita e implícita com 20 incrementos

Na prática, um critério de convergência mais sofisticado pode ser necessário ao

resolver estruturas complexas com muitos graus de liberdade. No entanto, para este exemplo de minimização da norma do resíduo é um critério suficiente. É importante observar como o incremento inicial devido à carga incremental avança a solução. Então se uma análise implícita é empregada, iterações de Newton-Raphson são usadas para fazer correções para o deslocamento para atingir o equilíbrio. Uma vez que o equilíbrio satisfatório seja alcançado, um novo incremento de carga é aplicado para avançar a solução e o processo é repetido.

Cabe destacar que uma expressão exata para força *versus* deslocamento nem sempre é conhecida e, portanto, faz-se necessário estudarmos métodos numéricos para buscar resolver problemas mais complexos.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

O presente capítulo apresenta a aplicação dos métodos estudados anteriormente na análise de sistemas estruturais. Inicialmente, ressalta-se que na descrição das aplicações subsequentes, dois tipos de análise estrutural são consideradas, a saber: a análise linear (com consideração apenas de efeitos de 1^a ordem) e a análise não-linear geométrica corrotacional (baseada na formulação desenvolvida no Cap. 3).

Dessa forma, são analisadas treliças e pórticos planos sujeitos a diferentes condições de carregamento. Além disso, é realizada uma aplicação de um edifício residencial em concreto armado usando uma estrutura de contraventamento exemplo formada por pórticos planos.

Inicialmente definem-se as propriedades geométricas (coordenadas e conectividades nodais, área da seção transversal e momento de inércia), módulo de elasticidade linear e carregamentos estruturais externos.

A máquina utilizada para processar todos os exemplos deste trabalho tem processador Intel(R) Core(TM) i5-4210U CPU @ 1.70GHz 2.40 GHz e 4GB de memória RAM.

4.1 Exemplos Numéricos - Treliças Planas

4.1.1 Barra Articulada 2D

O primeiro problema analisado nesta pesquisa trata-se de uma barra articulada 2D com um grau de liberdade, cujas características geométricas e mecânicas são apresentadas na Figura [4.1](#). Este problema foi estudado inicialmente por [\[9\]](#).

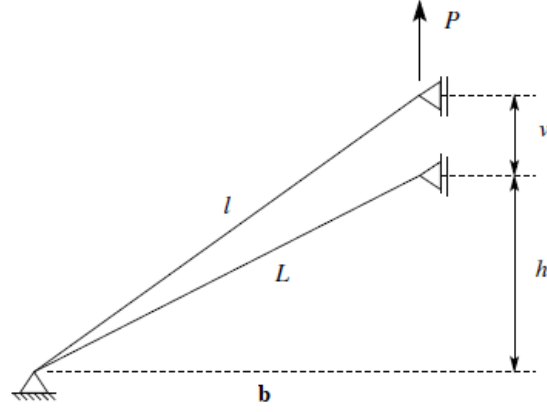


Figura 4.1: Modelo Estrutural - Barra 2D.

Analiticamente, podemos achar a expressão geral do comportamento da relação carga-deslocamento da treliça em questão. Assim, utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$l^2 = b^2 + (h + v)^2, \quad (4.1)$$

$$l^2 = L^2 + 2hv + v^2, \quad (4.2)$$

$$l = \sqrt{L^2 + 2hv + v^2}. \quad (4.3)$$

Utilizando a definição clássica, mas considerando o comprimento deformado ‘linear no deslocamento (ou de forma equivalente v e L pequeno) chega-se:

$$l = L \left(1 + 2 \frac{h}{L} \frac{v}{L} + \left(\frac{v}{L} \right)^2 \right)^{1/2} \approx L \left(1 + \frac{h}{L} \frac{v}{L} \right) = L + v \sin \theta. \quad (4.4)$$

A deformação vale então:

$$\epsilon = \frac{v \sin \theta}{L} \rightarrow \delta \epsilon = \frac{\delta v \sin \theta}{L}. \quad (4.5)$$

O procedimento a ser utilizado é aplicar o Princípio dos Trabalhos (Deslocamentos) Virtuais (PTV) com o trabalho externo igual a:

$$\delta W_{ext} = P \delta v. \quad (4.6)$$

O trabalho virtual interno pode ser calculado pela expressão:

$$\delta U = \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV. \quad (4.7)$$

Aplicando o PTV considerando o volume inicial, tem-se que o equilíbrio ocorre quando para qualquer deslocamento virtual:

$$\delta W_{ext} = \delta U, \quad (4.8)$$

sendo assim, temos:

$$P\delta v = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = A L \sigma \sin \theta \delta v. \quad (4.9)$$

Usando a Lei de Hooke com material linear elástico, $\sigma = E\epsilon$, tem-se então a curva carga-deslocamento:

$$P = \frac{EA \sin \theta}{L} v, \quad (4.10)$$

que é a expressão usual na Resistência dos Materiais.

Uma medida de deformação geral de grau n pode ser definida como:

$$\epsilon_n = \frac{l^n - L^n}{nL^n}, \quad (4.11)$$

onde $n = 1$ corresponde à deformação de engenharia, $n = 2$ corresponde à deformação de Green-Lagrange. Fazendo $n \rightarrow 0$, obtém-se deformação logarítmica.

Usando a deformação de engenharia ($n = 1$), temos:

$$\epsilon_E = \frac{l - L}{L}. \quad (4.12)$$

A variação da deformação de engenharia pode ser escrita como:

$$\delta \epsilon_E = \frac{\delta l}{L}. \quad (4.13)$$

O comprimento deformado l é uma função do deslocamento vertical v , sendo dado por:

$$l = \sqrt{L^2 + 2hv + v^2}. \quad (4.14)$$

A variação do comprimento final é obtida a partir de:

$$2l \delta l = 2h \delta v + 2v \delta v \Rightarrow \delta l = \left(\frac{h + v}{l} \right) \delta v, \quad (4.15)$$

e a variação de $\delta \epsilon_E$ fica:

$$\delta \epsilon_E = \left(\frac{h + v}{lL} \right) \delta v. \quad (4.16)$$

Retornando ao PTV deve-se ter:

$$P\delta v = \sigma_E A \left(\frac{h+v}{l} \right) \delta v \rightarrow P = \sigma_E A \left(\frac{h+v}{l} \right), \quad (4.17)$$

que é a equação de equilíbrio.

Para relacionar carga e deslocamento, parte-se de uma relação constitutiva linear da Lei de Hooke. Assim, temos:

$$P = \sigma_E A \epsilon \left(\frac{h+v}{l} \right) = EA \left(\frac{l-L}{L} \right) \left(\frac{h+v}{l} \right). \quad (4.18)$$

E a relação carga-deslocamento pode ser escrita como:

$$P_{(\text{Engenharia})} = \frac{EA}{L} (h+v) \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + 2hv + v^2}} \right). \quad (4.19)$$

Usando as medidas de deformação de Green-Lagrange e Logarítmica, obtemos as seguintes relações cargas-deslocamentos, respectivamente:

$$P_{(\text{Green-Lagrange})} = \frac{EA}{L^3} \left(h^2v + \frac{3}{2}hv^2 + \frac{1}{2}v^3 \right), \quad (4.20)$$

$$P_{(\text{Logarítmica})} = E\bar{A} \ln \left(\frac{l}{L} \right) \left(\frac{L}{l} \right)^{2\nu} \left(\frac{h+v}{l} \right), \quad (4.21)$$

onde $\bar{A} = A \left(\frac{L}{l} \right)^{2\nu}$.

Pode-se observar o caráter altamente não linear da curva carga-deslocamento $P(v)$. Computacionalmente, os parâmetros utilizados como dados de entrada no código numérico implementado podem ser vistos na Tabela 4.1 abaixo:

Tabela 4.1: Dados de Entrada - Barra Articulada 2D

Descrição	Valor
Área da Seção Transversal (A)	100 cm ²
Módulo de Elasticidade (E)	5×10^5 kN/cm ²
Dimensão (h)	25
Dimensão (b)	2500
Coefficiente de Poisson (ν_1)	0.3
Coefficiente de Poisson (ν_2)	0.5
Número máximo de incrementos (n_{max})	60
Número máximo de iterações (i_{max})	100
Tolerância de convergência (tol)	1×10^{-6}
Comprimento de arco inicial (Δl)	0.1
Número desejado de iterações para cada passo de carga (N_d)	5

Fonte: Construção pelo autor.

Na Figura 4.2 é apresentada a trajetória de equilíbrio para a direção vertical do nó 2 da estrutura, considerando o material elástico linear e utilizando a medida de deformação de Engenharia para a formulação corrotacional, bem como as demais deformações para as soluções analíticas do exemplo em questão.

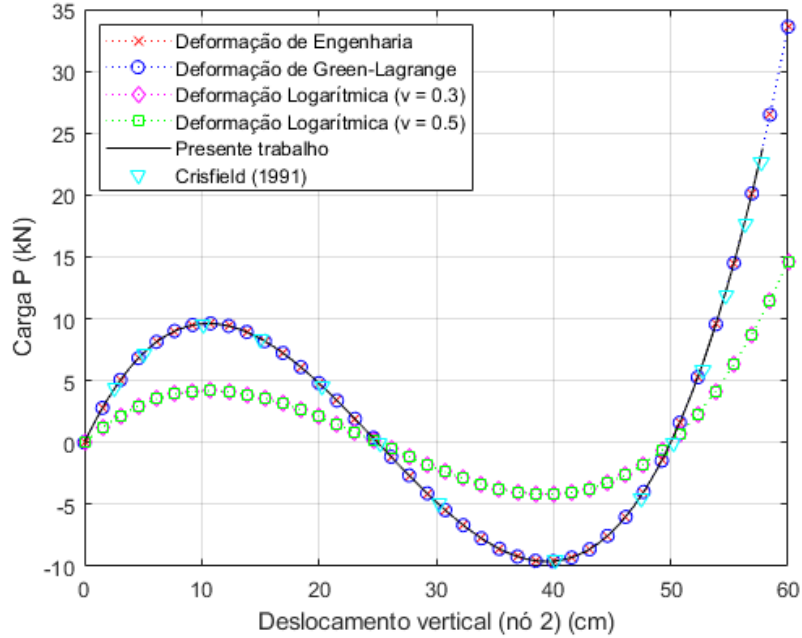


Figura 4.2: Trajetórias de Equilíbrio - Barra 2D (nó 2).

Essa curva representa a resposta não linear da estrutura, e cada ponto na trajetória representa uma configuração de equilíbrio estático da estrutura. Verifica-se que há dois pontos limites de força na trajetória, caracterizados por tangentes horizontais, ou seja, paralelas ao eixo de deslocamentos. O primeiro ponto limite representa a força máxima P (Carga Crítica) em que a estrutura pode suportar antes do *snap-through*. Nas posições intermediárias, a força P decresce e reverte de sinal duas vezes enquanto o deslocamento continua a crescer. Quando o efeito *snap-through* termina no segundo ponto limite, a estrutura começa a suportar valores adicionais de força.

Pode-se observar a coincidência entre os resultados obtidos por meio do código numérico e os resultados obtidos pelo autor de referência Crisfield (1991) e as soluções analíticas do problema com diferentes medidas de deformação, validando, assim, o código computacional implementado no software Matlab.

4.1.2 Treliça Assimétrica

Neste exemplo, estuda-se uma treliça composta por duas barras cuja geometria é apresentada na Figura 4.3, submetida a uma carga pontual $P = 150$ kN. O valor

da rigidez axial das barras é $EA = 1000$ kN, isto é, as barras da estrutura possuem área igual a 1 cm^2 e módulo de elasticidade igual a 1000 kN/cm^2 . Este problema é apresentado em Willems & Lucas (1978), Crisfield (1991) e Muñoz-Rojas e Filho (2001).

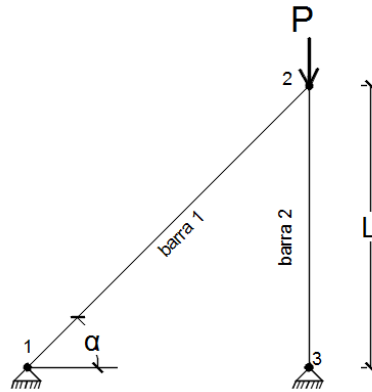


Figura 4.3: Treliça de Willems & Lucas (1978).

Computacionalmente, os parâmetros utilizados como dados de entrada no código numérico implementado podem ser vistos na Tabela 4.2 abaixo:

Tabela 4.2: Dados de Entrada - Treliça de Willems & Lucas

Descrição	Valor
Carga Pontual (P)	150 kN
Área da Seção Transversal (A)	1 cm^2
Módulo de Elasticidade (E)	1000 kN/cm^2
Dimensão (L)	25 cm
Número máximo de incrementos (n_{max})	40
Número máximo de iterações (i_{max})	100
Tolerância de convergência (tol)	1×10^{-6}
Comprimento de arco inicial (Δl)	0.1
Número desejado de iterações para cada passo de carga (N_d)	5

Fonte: Construção pelo autor.

Na Figura 4.4, é apresentada a trajetória de equilíbrio obtida na análise computacional. Os deslocamentos neste gráfico são medidos na direção vertical no nó 2.

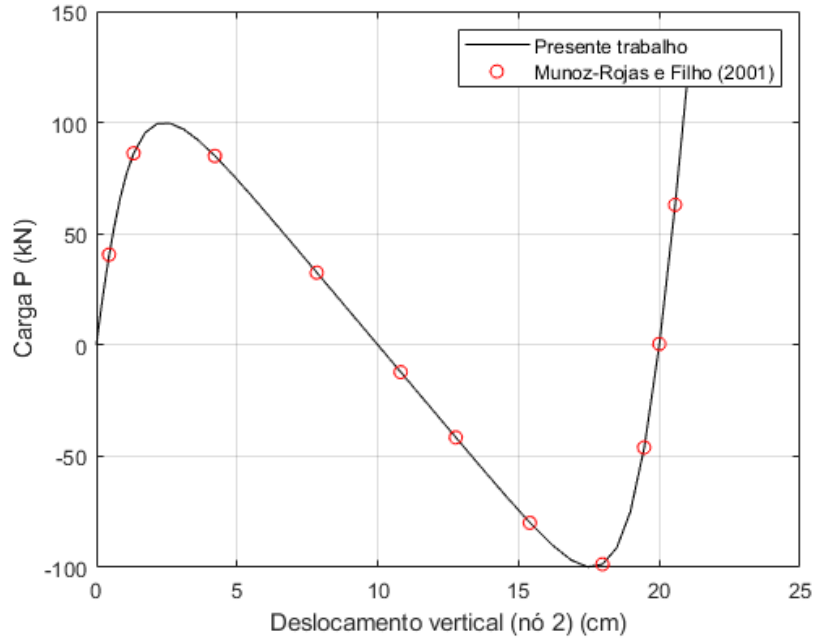


Figura 4.4: Trajetória de Equilíbrio - Treliça Assimétrica (nó 2).

Pode-se observar a coincidência entre os resultados obtidos por meio do código numérico e os resultados obtidos pelo autor de referência Munoz-Rojas e Filho (2001) com o programa ATENAS 2.0.

A solução proposta por Willems & Lucas (1978) para achar a carga crítica está descrita na equação abaixo:

$$P_{cr} = \frac{A_1 E \cos^2(\alpha) \sen(\alpha)}{1 + \left(\frac{A_1}{A_2}\right) \sen^2(\alpha)}. \quad (4.22)$$

4.1.3 Treliça de von Mises

O exemplo a seguir trata-se de uma treliça de duas barras simétricas articuladas em uma das extremidades e unidas pela outra extremidade, a qual é submetida a uma carga concentrada no nó central, conforme mostra a Figura 4.5.

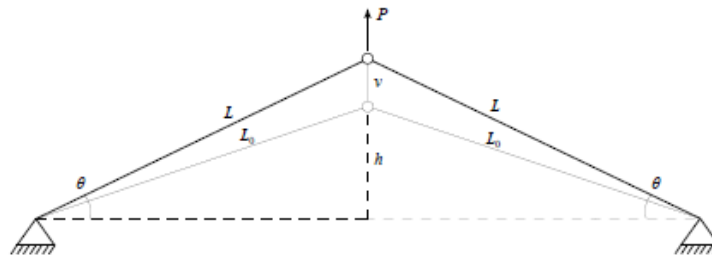


Figura 4.5: Modelo Esquemático da Treliça de Von Mises.

Devido à simplicidade do exemplo em questão (bidimensional com apenas duas barras), buscou-se desenvolver a solução analítica para diferentes medidas de deformação. Assim, para o desenvolvimento analítico da solução do problema, observa-se que há simetria geométrica na treliça, o que faz com que as reações nos nós 1 e 3 sejam iguais entre si. Por equilíbrio estático de forças, a soma das reações é igual a carga aplicada no nó 2.

A Figura 4.6 abaixo mostra a estrutura analisada em apenas uma das partes para facilitar a visualização do desenvolvimento analítico.

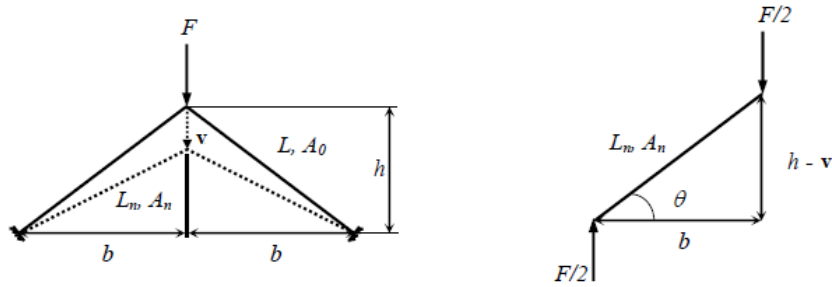


Figura 4.6: Decomposição e Equilíbrio de Forças - Treliça de Von Mises.

Por Pitágoras, tem-se que:

$$L^2 = b^2 + h^2, \quad (4.23)$$

$$L_n^2 = b^2 + (h - v)^2. \quad (4.24)$$

Considerando o volume constante, $A_0 L = A_n L_n$ ou coeficiente de Poisson $\nu = 0.5$, pelo equilíbrio temos:

$$\sigma A_n \sin \theta = \frac{P}{2}, \quad (4.25)$$

$$P = \frac{2\sigma A_0 L \sin \theta}{L_n}, \quad (4.26)$$

onde:

$$\sin \theta = \frac{h - v}{L_n}. \quad (4.27)$$

Assim, temos:

$$P = \frac{2\sigma A_0 L (h - v)}{L_n^2}. \quad (4.28)$$

Considerando o material constitutivo linear elástico, podemos usar a Lei de

Hooke ($\sigma = E\epsilon$). Portanto, chega-se a:

$$P = \frac{2EA_0L(h-v)}{L_n^2}\epsilon_\alpha. \quad (4.29)$$

Uma medida de deformação geral de grau α pode ser definida como:

$$\epsilon_\alpha = \frac{L_n^\alpha - L^\alpha}{\alpha L^\alpha} \rightarrow \begin{cases} \alpha \rightarrow 0, & \text{Deformação Logarítmica} \\ \alpha = 1, & \text{Deformação de Engenharia} \\ \alpha = 2, & \text{Deformação de Green-Lagrange} \end{cases} \quad (4.30)$$

Dessa forma, as curvas cargas-deslocamentos para as diferentes medidas de deformação são dadas por:

$$P_{\alpha=1} = \frac{2EA_0(h-v)(L_n - L)}{L_n^2}, \quad (4.31)$$

$$P_{\alpha=2} = \frac{EA_0(h-v)(L_n^2 - L^2)}{L_n^2}, \quad (4.32)$$

$$P_{\alpha \rightarrow 0} = \frac{2EA_0L(h-v) \ln\left(\frac{L_n}{L}\right)}{L_n^2}. \quad (4.33)$$

As soluções analíticas para este exemplo, considerando o caso geometricamente linear e não-linear, são obtidas pelo equilíbrio na configuração inicial e final, respectivamente. Por conseguinte, a força normal nas barras (P), assumindo o comportamento do material elástico linear, é dada por:

$$P \text{ (linear)} = -\frac{vEA}{L} \sin \left[\tan^{-1} \left(\frac{h}{b} \right) \right], \quad (4.34)$$

$$P \text{ (não-linear)} = -2EA \left\{ 1 - \frac{\cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{h}{b} \right) \right]}{\cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{h-v}{b} \right) \right]} \right\} \sin \left[\tan^{-1} \left(\frac{h-v}{b} \right) \right], \quad (4.35)$$

sendo v o deslocamento aplicado no nó central da treliça.

A Figura 4.7 apresenta a geometria da treliça com as dimensões em cm.

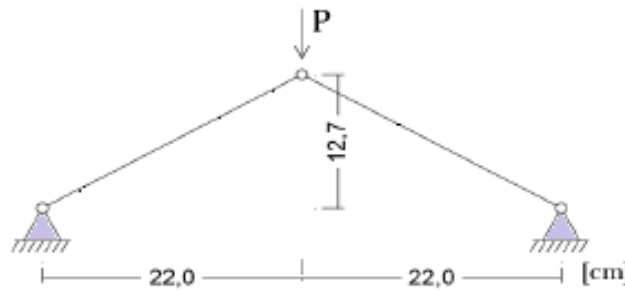


Figura 4.7: Dados do Problema de Von Mises.

Computacionalmente, os parâmetros utilizados como dados de entrada no código numérico implementado, bem como nas soluções analíticas para as diferentes medidas de deformação estudadas, foram:

Tabela 4.3: Dados de Entrada - Treliça de von Mises

Descrição	Valor
Força Externa (P)	1 kN
Área da Seção Transversal (A)	0,07 cm ²
Módulo de Elasticidade (E)	2100 kN/cm ²
Dimensão (h)	12.7 cm
Dimensão (b)	22 cm
Coefficiente de Poisson (ν)	0.5
Número máximo de incrementos (n_{max})	50
Número máximo de iterações (i_{max})	10
Tolerância de convergência (tol)	1×10^{-6}
Comprimento de arco inicial (Δl)	0.01
Número desejado de iterações para cada passo de carga (N_d)	3

Fonte: Construção pelo autor.

Na Figura 4.8 é apresentada a trajetória de equilíbrio para a direção vertical do nó 2 da estrutura, considerando o material elástico linear e utilizando diferentes medidas de deformação.

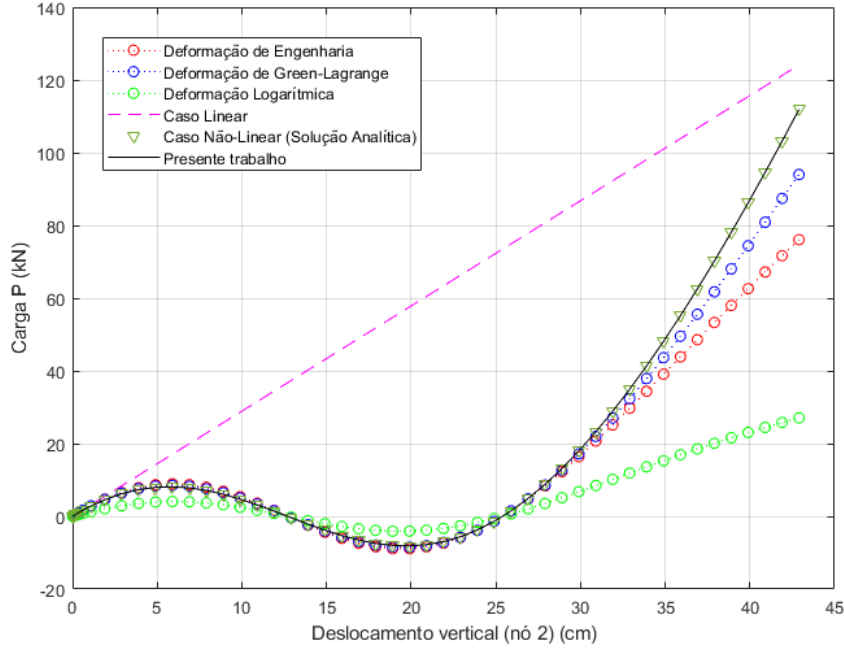


Figura 4.8: Trajetórias de Equilíbrio - Treliza de von Mises (nó 2).

Nota-se que há uma boa concordância entre a solução numérica e as soluções analíticas usando as deformações de Engenharia, Green-Lagrange e Logarítmica. Cabe destacar que a solução obtida com a deformação de Green-Lagrange foi a que mais se aproximou do resultado numérico desenvolvido com a Formulação Corrotacional de Elementos Finitos.

Observa-se no gráfico que, para pontos próximos da origem, o comportamento da solução se aproxima muito de um comportamento linear, mediante uma reta interpolada. Geralmente, quanto menores os deslocamentos, as deformações e as rotações, mais as hipóteses linear e não linear se assemelham em comportamento estrutural.

Importante mencionar que as curvas voltam a se aproximar para $P = 0$, isto é, quando o deslocamento vertical é igual à altura da treliza, e as barras atingem máxima compressão, sendo um ponto em comum em todas as trajetórias de equilíbrio não-lineares. Como o comportamento do material é linearmente elástico, e as barras estão sob compressão, o estado limite nessa treliza é a carga de flambagem de Euler, como segue:

$$P_{cr} = \frac{\pi^3 E r^4}{4L^2}. \quad (4.36)$$

Percebe-se também a presença de *snap-through*, sendo que para o comportamento perfeitamente elástico na formulação corrotacional, a carga crítica da estrutura é aproximadamente $P = 8,15$ kN.

4.2 Exemplos Numéricos - Pórticos Planos

4.2.1 Pórtico Plano - Portal Frame

O exemplo em estudo trata-se de um pórtico constituído por trinta elementos e trinta e um nós. A Figura 4.9 ilustra o modelo estrutural e sua discretização, sendo aplicada duas forças verticais F nos nós 11 e 21 e uma força horizontal P no nó 11.

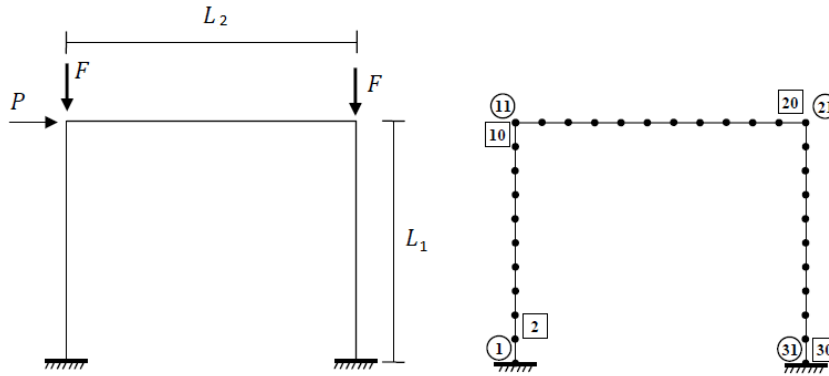


Figura 4.9: Esquema do Modelo Estrutural e Discretização MEF - Portal Frame.

A força P tem o intuito de provocar uma perturbação de modo a que a viga se comporte como o desejado, sendo $F = 37500$ kN e $P = 2000$ kN os respectivos valores para as cargas aplicadas e as dimensões L_1 e L_2 são, respectivamente, 3 e 4 m, como mostrado na Figura 4.10

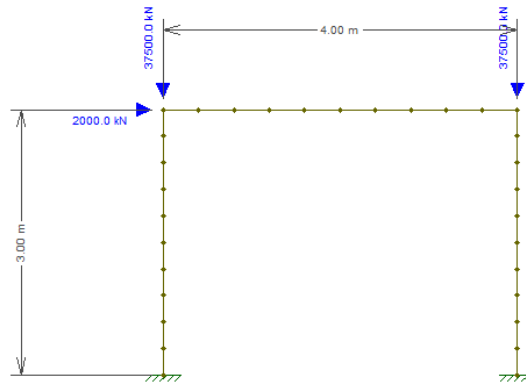


Figura 4.10: Dados do Problema Numérico - Portal Frame.

O perfil tanto da coluna quanto da viga utilizado para a construção do pórtico é retangular com dimensões iguais a $b = 0,15$ m e $h = 0,20$ m. Sendo assim, testaram-se as duas análises estruturais (linear e não-linear), na qual obtiveram-se os resultados dos deslocamentos apresentados na Tabela 4.4

Tabela 4.4: Deslocamentos - Comparativo Linear e Não-Linear - Portal Frame.

Nó	ux (m)			uy (m)			rz (rad)		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1,0671E-06	1,0677E-06	0,0581	-1,1710E-06	-1,1710E-06	0,0038	-6,9016E-06	-6,9058E-06	0,0608
3	4,0136E-06	4,0161E-06	0,0614	-2,3421E-06	-2,3421E-06	-0,0013	-1,2529E-05	-1,2538E-05	0,0682
4	8,4574E-06	8,4628E-06	0,0637	-3,5131E-06	-3,5131E-06	0,0004	-1,6884E-05	-1,6895E-05	0,0653
5	1,4016E-05	1,4026E-05	0,0684	-4,6841E-06	-4,6842E-06	0,0017	-1,9964E-05	-1,9978E-05	0,0703
6	2,0309E-05	2,0322E-05	0,0645	-5,8551E-06	-5,8553E-06	0,0026	-2,1771E-05	-2,1786E-05	0,0709
7	2,6952E-05	2,6970E-05	0,0665	-7,0262E-06	-7,0263E-06	0,0020	-2,2304E-05	-2,2320E-05	0,0723
8	3,3564E-05	3,3587E-05	0,0675	-8,1972E-06	-8,1974E-06	0,0027	-2,1564E-05	-2,1579E-05	0,0701
9	3,9763E-05	3,9790E-05	0,0676	-9,3682E-06	-9,3685E-06	0,0032	-1,9550E-05	-1,9563E-05	0,0685
10	4,5166E-05	4,5197E-05	0,0691	-1,0539E-05	-1,0540E-05	0,0053	-1,6262E-05	-1,6273E-05	0,0681
11	4,9392E-05	4,9426E-05	0,0693	-1,1710E-05	-1,1711E-05	0,0051	-1,1700E-05	-1,1708E-05	0,0713
12	4,9350E-05	4,9384E-05	0,0689	-1,5096E-05	-1,5099E-05	0,0201	-5,4607E-06	-5,4645E-06	0,0695
13	4,9308E-05	4,9342E-05	0,0686	-1,6263E-05	-1,6267E-05	0,0230	-6,0434E-07	-6,0474E-07	0,0665
14	4,9266E-05	4,9300E-05	0,0683	-1,5764E-05	-1,5767E-05	0,0214	2,8689E-06	2,8709E-06	0,0698
15	4,9224E-05	4,9257E-05	0,0679	-1,4153E-05	-1,4155E-05	0,0111	4,9590E-06	4,9624E-06	0,0692
16	4,9181E-05	4,9215E-05	0,0696	-1,1981E-05	-1,1982E-05	0,0082	5,6659E-06	5,6698E-06	0,0695
17	4,9139E-05	4,9173E-05	0,0692	-9,8043E-06	-9,8032E-06	-0,0107	4,9897E-06	4,9931E-06	0,0687
18	4,9097E-05	4,9131E-05	0,0689	-8,1742E-06	-8,1720E-06	-0,0266	2,9303E-06	2,9323E-06	0,0680
19	4,9055E-05	4,9089E-05	0,0685	-7,6445E-06	-7,6420E-06	-0,0332	-5,1227E-07	-5,1265E-07	0,0750
20	4,9013E-05	4,9046E-05	0,0682	-8,7684E-06	-8,7667E-06	-0,0194	-5,3380E-06	-5,3417E-06	0,0695
21	4,8970E-05	4,9004E-05	0,0698	-1,2099E-05	-1,2100E-05	0,0073	-1,1547E-05	-1,1555E-05	0,0681
22	4,4793E-05	4,4824E-05	0,0698	-1,0889E-05	-1,0890E-05	0,0084	-1,6089E-05	-1,6100E-05	0,0711
23	3,9443E-05	3,9471E-05	0,0701	-9,6794E-06	-9,6799E-06	0,0054	-1,9366E-05	-1,9379E-05	0,0683
24	3,3301E-05	3,3323E-05	0,0674	-8,4695E-06	-8,4699E-06	0,0049	-2,1376E-05	-2,1391E-05	0,0707
25	2,6745E-05	2,6763E-05	0,0663	-7,2596E-06	-7,2599E-06	0,0042	-2,2120E-05	-2,2136E-05	0,0722
26	2,0155E-05	2,0169E-05	0,0676	-6,0496E-06	-6,0499E-06	0,0049	-2,1598E-05	-2,1614E-05	0,0731
27	1,3912E-05	1,3921E-05	0,0663	-4,8397E-06	-4,8399E-06	0,0039	-1,9811E-05	-1,9825E-05	0,0685
28	8,3953E-06	8,4006E-06	0,0634	-3,6298E-06	-3,6299E-06	0,0027	-1,6757E-05	-1,6768E-05	0,0680
29	3,9844E-06	3,9869E-06	0,0627	-2,4199E-06	-2,4199E-06	0,0011	-1,2437E-05	-1,2445E-05	0,0679
30	1,0594E-06	1,0600E-06	0,0608	-1,2099E-06	-1,2100E-06	0,0060	-6,8517E-06	-6,8559E-06	0,0614
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Para comparar os resultados encontrados, escolheram-se dois nós que se apresentam como os mais relevantes pela sua posição na estrutura. Para os nós 11 e 21, tem-se na Tabela 4.5 os respectivos deslocamentos e erros relativos associados.

Tabela 4.5: Resumo dos Deslocamentos - Comparativo Linear e Não-Linear (nós 11 e 21).

Nó	ux (m)			uy (m)			rz (rad)		
	Linear	NL	Erro (%)	Linear	NL	Erro (%)	Linear	NL	Erro (%)
11	4,9392E-05	4,9426E-05	0,0693	-1,1710E-05	-1,1711E-05	0,0051	-1,1700E-05	-1,1708E-05	0,0713
21	4,8970E-05	4,9004E-05	0,0698	-1,2099E-05	-1,2100E-05	0,0073	-1,1547E-05	-1,1555E-05	0,0681

Observa-se que os valores dos deslocamentos foram bem pequenos, na ordem de 10^{-5} . Além disso, para uma melhor visualização dos resultados da análise linear e não-linear ao longo de toda a estrutura, traçou-se os gráficos abaixo relacionando os deslocamentos e rotações em relação ao número do nó.

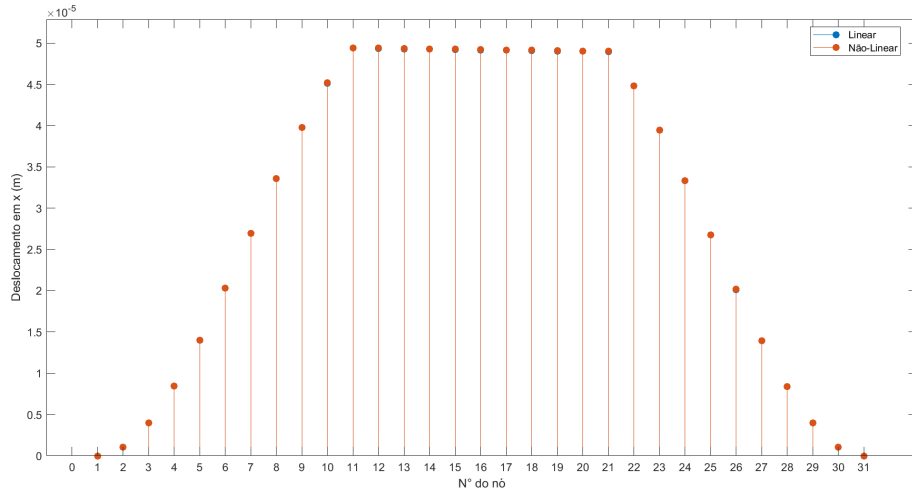


Figura 4.11: Comparativo Deslocamento (ux) - Portal Frame Linear e Não Linear.

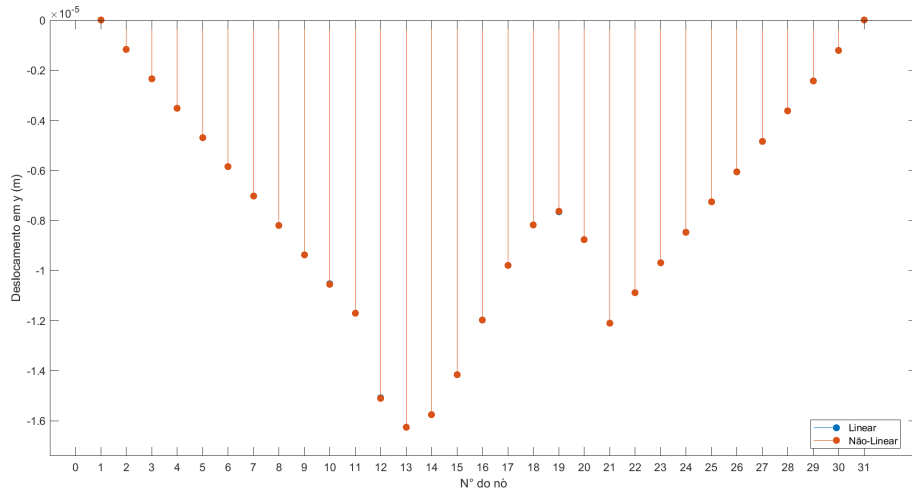


Figura 4.12: Comparativo Deslocamento (uy) - Portal Frame Linear e Não Linear.

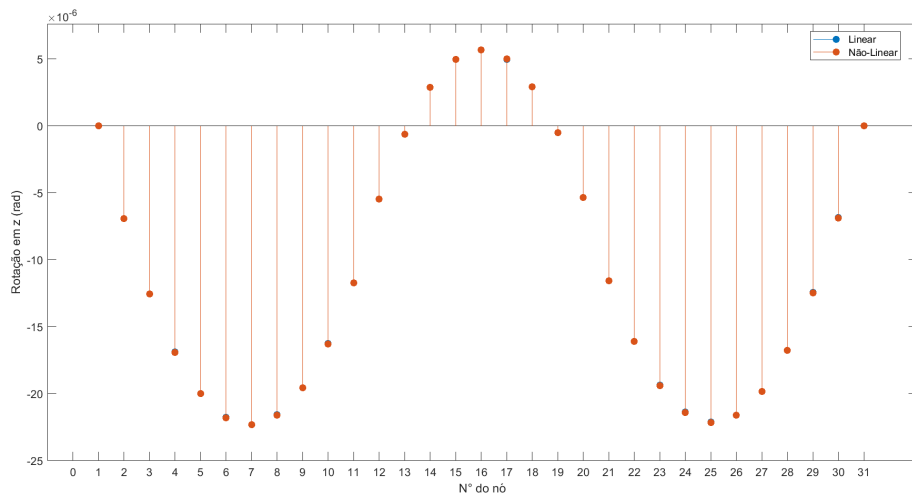


Figura 4.13: Comparativo Rotação (rz) - Portal Frame Linear e Não Linear.

Para estes resultados numéricos do pórtico simples supracitado, verifica-se que o algoritmo desenvolvido usando a formulação corrotacional não-linear de elementos finitos consegue obter as respostas dos deslocamentos da estrutura com boa precisão em comparação com a análise linear, o que fica evidenciando pela variação quase imperceptível dos erros relativos nos gráficos comparativos mostrados acima.

Nas Figuras 4.14, 4.15 e 4.16, mostram-se os diagramas correspondentes à resposta dos esforços normais, cortantes e momentos fletores dos elementos, respectivamente, obtida pela análise linear no Ftool, para o carregamento 100 % aplicado com $P = 2000$ kN e $F = 37500$ kN.



Figura 4.14: Diagramas de Esforço Normal - Portal Frame Linear.

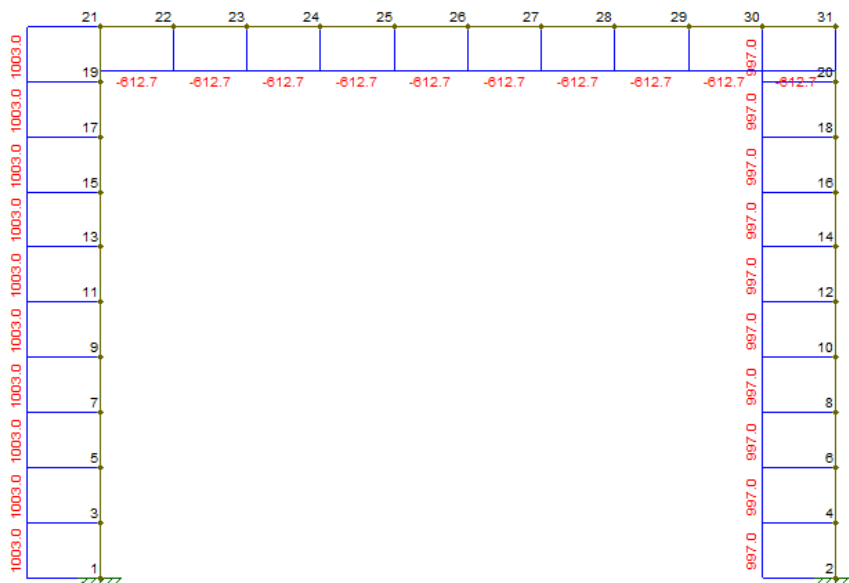


Figura 4.15: Diagramas de Esforço Cortante - Portal Frame Linear.

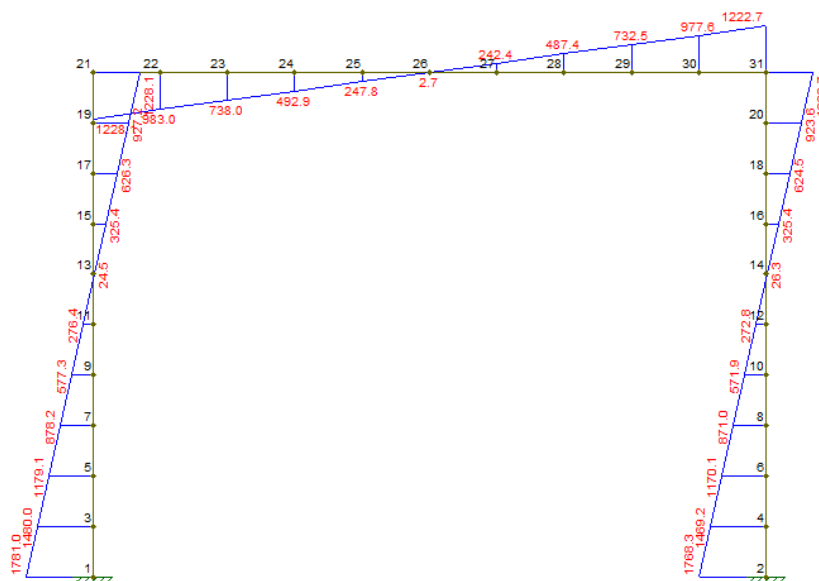


Figura 4.16: Diagramas de Momento Fletor - Portal Frame Linear.

Os dados numéricos referentes ao esforço normal, cortante e momento fletor, em todos os elementos da estrutura, podem ser verificados nas Tabelas [4.6](#), [4.7](#) e [4.8](#).

Tabela 4.6: Esforço Normal - Comparativo Linear e Não-Linear - Portal Frame.

Elem	N (nó i) kN			N (nó j) kN		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
1	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424
2	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424
3	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424
4	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424
5	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424
6	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424
7	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424
8	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424
9	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424
10	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424	-3,6887E+04	-3,6149E+04	-2,0424
11	-9,9700E+02	-9,7704E+02	-2,0429	-9,9700E+02	-9,7704E+02	-2,0429
12	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439
13	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439
14	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439
15	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439
16	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439
17	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439
18	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439
19	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439	-9,9700E+02	-9,7703E+02	-2,0439
20	-9,9700E+02	-9,7704E+02	-2,0429	-9,9700E+02	-9,7704E+02	-2,0429
21	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393
22	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393
23	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393
24	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393
25	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393
26	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393
27	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393
28	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393
29	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393
30	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393

Fonte: Construção pelo autor.

Tabela 4.7: Esforço Cortante - Comparativo Linear e Não-Linear - Portal Frame.

Elem	V (nó i) kN			V (nó j) kN		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
1	1,0030E+03	9,8310E+02	-2,0242	1,0030E+03	9,8310E+02	-2,0242
2	1,0030E+03	9,8332E+02	-2,0014	1,0030E+03	9,8332E+02	-2,0014
3	1,0030E+03	9,8350E+02	-1,9827	1,0030E+03	9,8350E+02	-1,9827
4	1,0030E+03	9,8364E+02	-1,9682	1,0030E+03	9,8364E+02	-1,9682
5	1,0030E+03	9,8373E+02	-1,9589	1,0030E+03	9,8373E+02	-1,9589
6	1,0030E+03	9,8377E+02	-1,9547	1,0030E+03	9,8377E+02	-1,9547
7	1,0030E+03	9,8377E+02	-1,9547	1,0030E+03	9,8377E+02	-1,9547
8	1,0030E+03	9,8372E+02	-1,9599	1,0030E+03	9,8372E+02	-1,9599
9	1,0030E+03	9,8362E+02	-1,9703	1,0030E+03	9,8362E+02	-1,9703
10	1,0030E+03	9,8348E+02	-1,9848	1,0030E+03	9,8348E+02	-1,9848
11	-6,1270E+02	-6,0084E+02	-1,9739	-6,1270E+02	-6,0084E+02	-1,9739
12	-6,1270E+02	-6,0084E+02	-1,9739	-6,1270E+02	-6,0084E+02	-1,9739
13	-6,1270E+02	-6,0085E+02	-1,9722	-6,1270E+02	-6,0085E+02	-1,9722
14	-6,1270E+02	-6,0085E+02	-1,9722	-6,1270E+02	-6,0085E+02	-1,9722
15	-6,1270E+02	-6,0085E+02	-1,9722	-6,1270E+02	-6,0085E+02	-1,9722
16	-6,1270E+02	-6,0085E+02	-1,9722	-6,1270E+02	-6,0085E+02	-1,9722
17	-6,1270E+02	-6,0085E+02	-1,9722	-6,1270E+02	-6,0085E+02	-1,9722
18	-6,1270E+02	-6,0085E+02	-1,9722	-6,1270E+02	-6,0085E+02	-1,9722
19	-6,1270E+02	-6,0084E+02	-1,9739	-6,1270E+02	-6,0084E+02	-1,9739
20	-6,1270E+02	-6,0084E+02	-1,9739	-6,1270E+02	-6,0084E+02	-1,9739
21	9,9700E+02	9,7755E+02	-1,9897	9,9700E+02	9,7755E+02	-1,9897
22	9,9700E+02	9,7770E+02	-1,9740	9,9700E+02	9,7770E+02	-1,9740
23	9,9700E+02	9,7780E+02	-1,9636	9,9700E+02	9,7780E+02	-1,9636
24	9,9700E+02	9,7785E+02	-1,9584	9,9700E+02	9,7785E+02	-1,9584
25	9,9700E+02	9,7785E+02	-1,9584	9,9700E+02	9,7785E+02	-1,9584
26	9,9700E+02	9,7781E+02	-1,9625	9,9700E+02	9,7781E+02	-1,9625
27	9,9700E+02	9,7772E+02	-1,9719	9,9700E+02	9,7772E+02	-1,9719
28	9,9700E+02	9,7758E+02	-1,9865	9,9700E+02	9,7758E+02	-1,9865
29	9,9700E+02	9,7740E+02	-2,0053	9,9700E+02	9,7740E+02	-2,0053
30	9,9700E+02	9,7716E+02	-2,0304	9,9700E+02	9,7716E+02	-2,0304

Fonte: Construção pelo autor.

Tabela 4.8: Esforço de Momento Fletor - Comparativo Linear e Não-Linear - Portal Frame.

Elem	M (nó i) kN.m			M (nó j) kN.m		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
1	-1,7810E+03	-1,7463E+03	-1,9871	-1,4800E+03	-1,4514E+03	-1,9705
2	-1,4800E+03	-1,4514E+03	-1,9705	-1,1791E+03	-1,1564E+03	-1,9630
3	-1,1791E+03	-1,1564E+03	-1,9630	-8,7820E+02	-8,6133E+02	-1,9586
4	-8,7820E+02	-8,6133E+02	-1,9586	-5,7730E+02	-5,6624E+02	-1,9532
5	-5,7730E+02	-5,6624E+02	-1,9532	-2,7640E+02	-2,7112E+02	-1,9475
6	-2,7640E+02	-2,7113E+02	-1,9437	2,4500E+01	2,4003E+01	-2,0706
7	2,4500E+01	2,3998E+01	-2,0918	3,2540E+02	3,1913E+02	-1,9647
8	3,2540E+02	3,1912E+02	-1,9679	-6,2630E+02	-6,1424E+02	-1,9634
9	6,2630E+02	6,1423E+02	-1,9651	9,2720E+02	9,0932E+02	-1,9663
10	9,2720E+02	9,0932E+02	-1,9663	1,2281E+03	1,2044E+03	-1,9678
11	1,2281E+03	1,2044E+03	-1,9678	9,8300E+02	9,6402E+02	-1,9688
12	9,8300E+02	9,6402E+02	-1,9688	7,3800E+02	7,2369E+02	-1,9774
13	7,3800E+02	7,2369E+02	-1,9774	4,9290E+02	4,8335E+02	-1,9758
14	4,9290E+02	4,8335E+02	-1,9758	2,4780E+02	2,4301E+02	-1,9711
15	2,4780E+02	2,4301E+02	-1,9711	2,7000E+00	2,6651E+00	-1,3095
16	2,7000E+00	2,6651E+00	-1,3095	-2,4240E+02	-2,3768E+02	-1,9859
17	-2,4240E+02	-2,3768E+02	-1,9859	-4,8740E+02	-4,7802E+02	-1,9623
18	-4,8740E+02	-4,7802E+02	-1,9623	-7,3250E+02	-7,1836E+02	-1,9684
19	-7,3250E+02	-7,1836E+02	-1,9684	-9,7760E+02	-9,5869E+02	-1,9725
20	-9,7760E+02	-9,5869E+02	-1,9725	-1,2227E+03	-1,1990E+03	-1,9766
21	1,2227E+03	1,1990E+03	-1,9766	9,2360E+02	9,0576E+02	-1,9696
22	9,2360E+02	9,0577E+02	-1,9685	6,2450E+02	6,1246E+02	-1,9658
23	6,2450E+02	6,1246E+02	-1,9658	3,2540E+02	3,1912E+02	-1,9679
24	3,2540E+02	3,1913E+02	-1,9647	2,6300E+01	2,5775E+01	-2,0369
25	2,6300E+01	2,5780E+01	-2,0171	-2,7280E+02	-2,6758E+02	-1,9508
26	-2,7280E+02	-2,6757E+02	-1,9546	-5,7190E+02	-5,6091E+02	-1,9593
27	-5,7190E+02	-5,6091E+02	-1,9593	-8,7100E+02	-8,5422E+02	-1,9644
28	-8,7100E+02	-8,5422E+02	-1,9644	-1,1701E+03	-1,1475E+03	-1,9695
29	-1,1701E+03	-1,1475E+03	-1,9695	-1,4692E+03	-1,4407E+03	-1,9782
30	-1,4692E+03	-1,4407E+03	-1,9782	-1,7683E+03	-1,7339E+03	-1,9840

Fonte: Construção pelo autor.

Em resumo, as tabelas [4.9](#), [4.10](#) e [4.11](#) contêm resultados encontrados por ambas as análises (linear e não-linear) utilizadas para os esforços normais, cortantes e momentos fletores, bem como o erro relativo entre elas para os nós 11 e 21.

Tabela 4.9: Resumo - Esforço Normal (nós 11 e 21).

Elem	N (nó i) kN			N (nó j) kN		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
11	-9,9700E+02	-9,7704E+02	-2,0429	-9,9700E+02	-9,7704E+02	-2,0429
21	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393	-3,8113E+04	-3,7351E+04	-2,0393

Fonte: Construção pelo autor.

Tabela 4.10: Resumo - Esforço Cortante (nós 11 e 21).

Elem	V (nó i) kN			V (nó j) kN		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
11	-6,1270E+02	-6,0084E+02	-1,9739	-6,1270E+02	-6,0084E+02	-1,9739
21	9,9700E+02	9,7755E+02	-1,9897	9,9700E+02	9,7755E+02	-1,9897

Fonte: Construção pelo autor.

Tabela 4.11: Resumo - Esforço de Momento Fletor (nós 11 e 21).

Elem	M (nó i) kN.m			M (nó j) kN.m		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
11	1,2281E+03	1,2044E+03	-1,9678	9,8300E+02	9,6402E+02	-1,9688
21	1,2227E+03	1,1990E+03	-1,9766	9,2360E+02	9,0576E+02	-1,9696

Fonte: Construção pelo autor.

Nota-se, de antemão, uma boa concordância entre os resultados, com erros relativos médios de aproximadamente -2,0 %.

Os valores para os esforços do nó final (nó j) de cada elemento são mostrados nos gráficos das Figuras [4.17](#), [4.18](#) e [4.19](#)

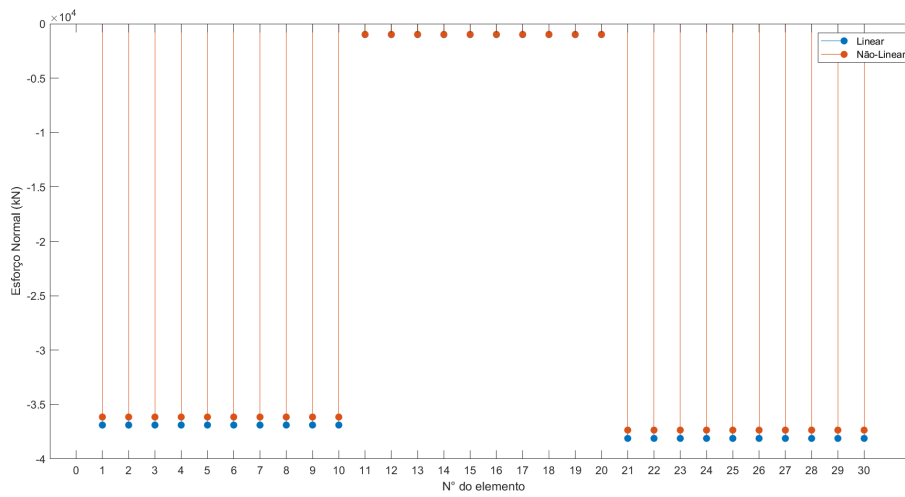


Figura 4.17: Esforço normal nos elementos - Portal Frame.

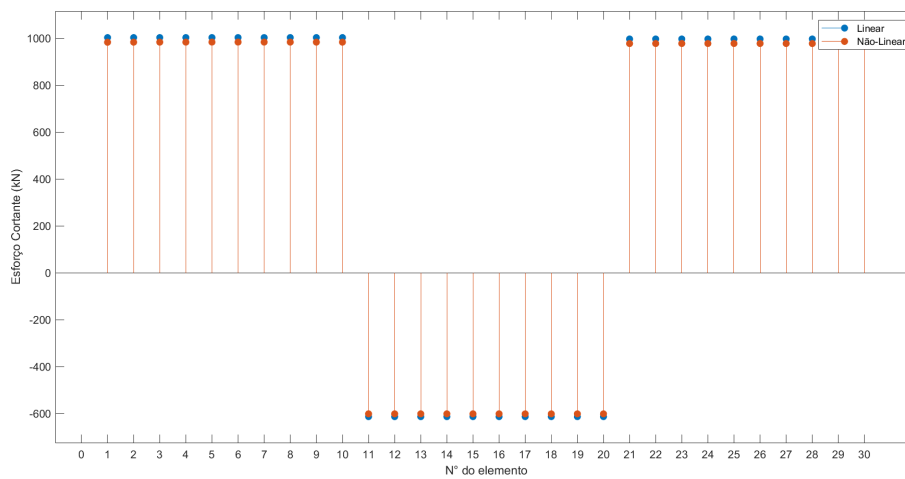


Figura 4.18: Esforço cortante nos elementos - Portal Frame.

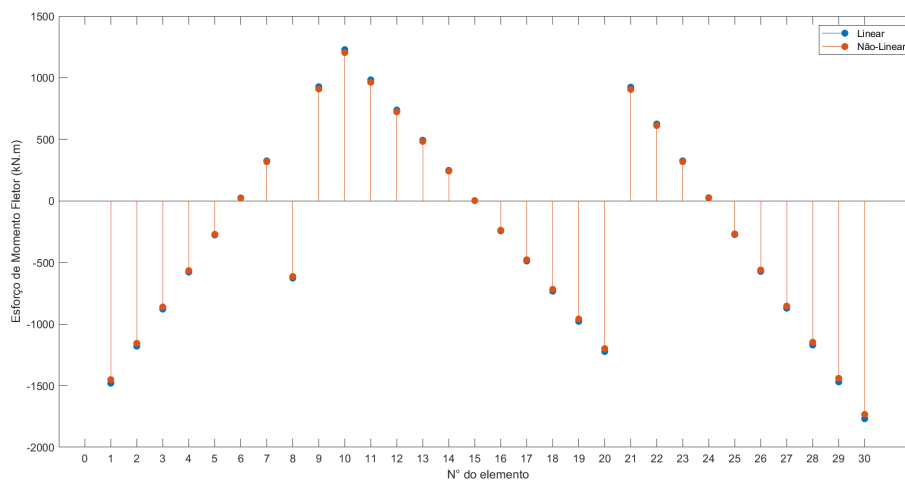


Figura 4.19: Momento fletor no nó extremo direito de cada elemento - Portal Frame.

Percebe-se que os valores dos esforços normais, cortantes e momentos fletores

obtidos através dos dois tipos de análise (linear e não-linear) foram muito próximos. Isso se deve ao fato destes esforços não sofrerem grandes alterações em decorrência dos deslocamentos horizontais no sistema estrutural.

4.2.2 Pórtico de Múltiplos Andares

O exemplo a seguir trata-se de um edifício de concreto armado de 10 andares (3,5 metros de altura por pavimento) com resistência característica do concreto com valor de $Fck = 25$ MPa, conforme mostrado na Figura 4.20.

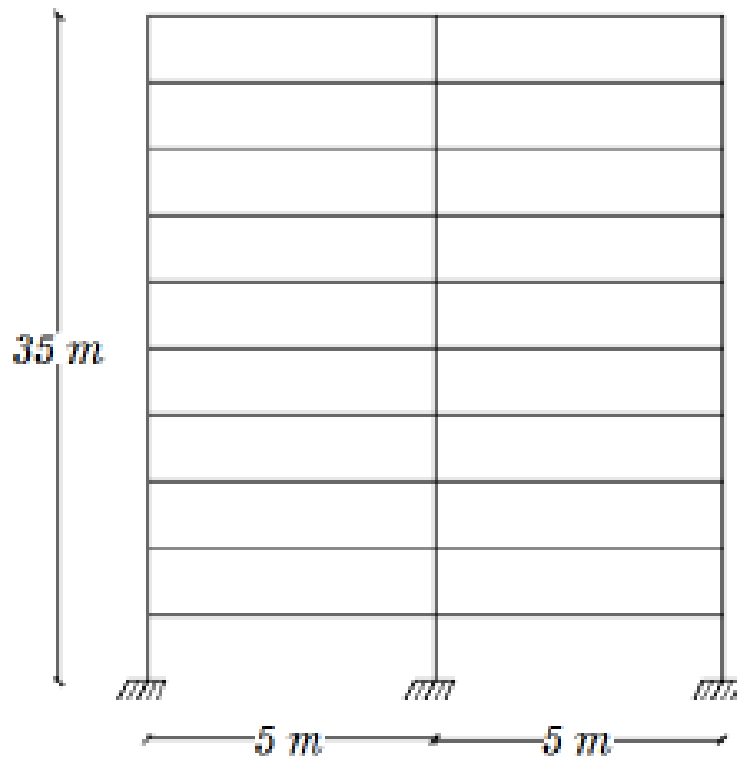


Figura 4.20: Modelo Estrutural do Pórtico de Múltiplos Andares.

Para as vigas e os pilares que compõem a estrutura do pórtico, adotou-se uma seção transversal retangular de $b_v = 12$ cm e $h_v = 30$ cm e $b_p = 20$ cm e $h_p = 20$ cm, respectivamente. O exemplo em estudo foi estudado no trabalho [10].

O carregamento proposto para o edifício é exibido na Figura 4.21.

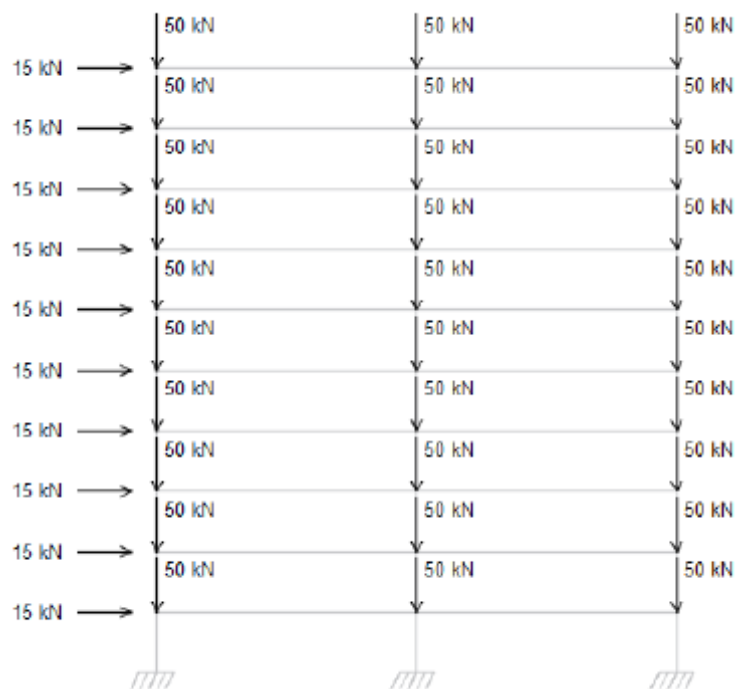


Figura 4.21: Carregamento Estrutural do Pórtico de Múltiplos Andares.

Para a utilização da formulação do MEF não-linear corrotacional desenvolvida, é necessário a discretização do pórtico em nós e elementos. Sendo assim, a estrutura ficou composta por 33 nós e 50 elementos, conforme ilustra a Figura 4.22.



Figura 4.22: Discretização do Pórtico de Múltiplos Andares.

Como podemos observar na figura acima, as forças aplicadas verticalmente para baixo ($F_v = 50 \text{ kN}$) encontram-se em todos nós da estrutura. Já as forças horizontais

($F_h = 15$ kN) são aplicadas apenas de um lado (esquerdo) do pórtico. Sendo assim, testaram-se as duas análises estruturais (linear e não-linear), na qual obtiveram-se os resultados dos deslocamentos apresentados na Tabela 4.12

Tabela 4.12: Deslocamentos - Comparativo Linear e Não-Linear - Pórtico de Múltiplos Andares.

Nó	ux (m)			uy (m)			rz (rad)		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	9,1716E-02	1,3039E-01	29,658	-7,6722E-04	-2,8737E-03	73,302	-2,7838E-02	-4,1083E-02	32,239
5	9,1691E-02	1,3036E-01	29,661	-1,5625E-03	-3,9836E-03	60,776	-1,9478E-02	-2,8860E-02	32,509
6	9,1649E-02	1,3029E-01	29,655	-2,3578E-03	-5,0964E-03	53,736	-2,7827E-02	-4,1102E-02	32,298
7	2,2380E-01	3,3240E-01	32,672	-1,5098E-03	-9,1893E-03	83,570	-2,8204E-02	-4,3490E-02	35,148
8	2,2375E-01	3,3237E-01	32,681	-2,9688E-03	-1,1212E-02	73,521	-2,1037E-02	-3,2281E-02	34,831
9	2,2374E-01	3,3238E-01	32,685	-4,4277E-03	-1,3256E-02	66,599	-2,8206E-02	-4,3527E-02	35,198
10	3,4817E-01	5,2206E-01	33,308	-2,2324E-03	-1,4867E-02	84,985	-2,5563E-02	-3,8266E-02	33,197
11	3,4812E-01	5,2202E-01	33,313	-4,2188E-03	-1,7593E-02	76,020	-1,9003E-02	-2,8445E-02	33,193
12	3,4810E-01	5,2203E-01	33,318	-6,2051E-03	-2,0352E-02	69,512	-2,5563E-02	-3,8278E-02	33,218
13	4,5836E-01	6,8297E-01	32,888	-2,9212E-03	-1,9134E-02	84,733	-2,2339E-02	-3,1768E-02	29,681
14	4,5831E-01	6,8293E-01	32,891	-5,3125E-03	-2,2380E-02	76,262	-1,6675E-02	-2,3726E-02	29,717
15	4,5830E-01	6,8293E-01	32,892	-7,7038E-03	-2,5667E-02	69,986	-2,2339E-02	-3,1777E-02	29,700
16	5,5340E-01	8,1439E-01	32,047	-3,5604E-03	-2,2165E-02	83,937	-1,9046E-02	-2,5624E-02	25,672
17	5,5335E-01	8,1434E-01	32,049	-6,2500E-03	-2,5780E-02	75,756	-1,4247E-02	-1,9191E-02	25,762
18	5,5333E-01	8,1434E-01	32,051	-8,9396E-03	-2,9442E-02	69,636	-1,9046E-02	-2,5630E-02	25,687
19	6,3308E-01	9,1868E-01	31,088	-4,1335E-03	-2,4248E-02	82,953	-1,5724E-02	-2,0055E-02	21,596
20	6,3303E-01	9,1864E-01	31,090	-7,0313E-03	-2,8112E-02	74,989	-1,1797E-02	-1,5077E-02	21,754
21	6,3301E-01	9,1863E-01	31,092	-9,9289E-03	-3,2026E-02	68,997	-1,5724E-02	-2,0059E-02	21,610
22	6,9734E-01	9,9854E-01	30,164	-4,6242E-03	-2,5627E-02	81,956	-1,2385E-02	-1,5039E-02	17,649
23	6,9729E-01	9,9849E-01	30,166	-7,6563E-03	-2,9647E-02	74,175	-9,3343E-03	-1,1370E-02	17,906
24	6,9727E-01	9,9848E-01	30,167	-1,0688E-02	-3,3717E-02	68,301	-1,2385E-02	-1,5042E-02	17,665
25	7,4615E-01	1,0564E+00	29,369	-5,0161E-03	-2,6487E-02	81,062	-9,0516E-03	-1,0529E-02	14,028
26	7,4610E-01	1,0564E+00	29,370	-8,1250E-03	-3,0593E-02	73,441	-6,8533E-03	-8,0145E-03	14,489
27	7,4608E-01	1,0563E+00	29,371	-1,1234E-02	-3,4750E-02	67,672	-9,0516E-03	-1,0531E-02	14,051
28	7,7956E-01	1,0945E+00	28,773	-5,2928E-03	-2,6967E-02	80,373	-5,7191E-03	-6,4513E-03	11,350
29	7,7951E-01	1,0944E+00	28,774	-8,4375E-03	-3,1112E-02	72,880	-4,4780E-03	-5,0917E-03	12,054
30	7,7949E-01	1,0944E+00	28,775	-1,1582E-02	-3,5308E-02	67,197	-5,7191E-03	-6,4535E-03	11,380
31	7,9838E-01	1,1154E+00	28,423	-5,4382E-03	-2,7174E-02	79,987	-3,0195E-03	-3,3998E-03	11,186
32	7,9833E-01	1,1154E+00	28,424	-8,5938E-03	-3,1331E-02	72,571	-2,0984E-03	-2,4196E-03	13,276
33	7,9831E-01	1,1153E+00	28,425	-1,1749E-02	-3,5539E-02	66,940	-3,0195E-03	-3,4054E-03	11,331

Fonte: Construção pelo autor.

De modo a facilitar a compreensão dos resultados das análises lineares e não-lineares, traçou-se os gráficos abaixo com os deslocamentos e rotações em relação ao número do nó.

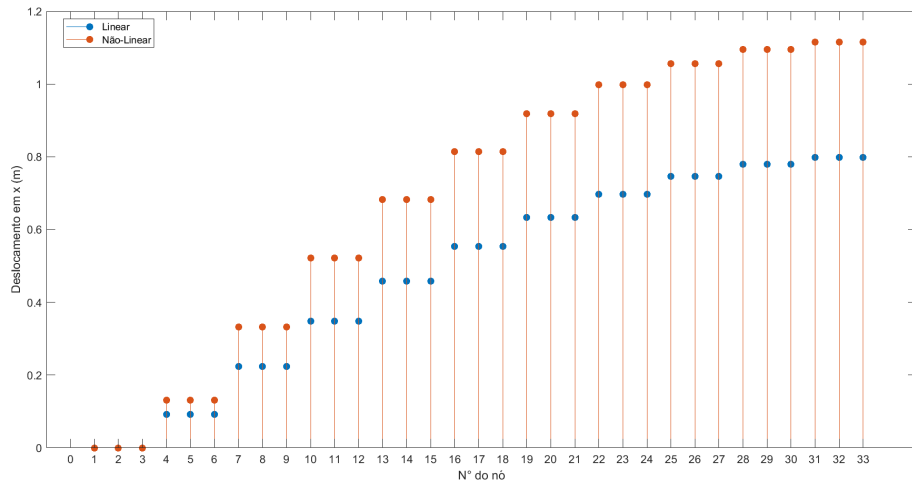


Figura 4.23: Comparativo Deslocamento (u_x) - Pórtico de Múltiplos Andares.

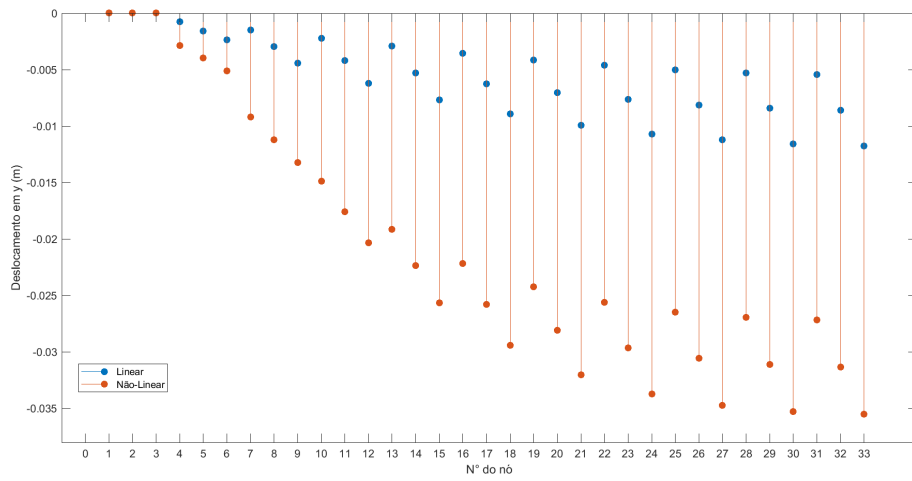


Figura 4.24: Comparativo Deslocamento (u_y) - Pórtico de Múltiplos Andares.

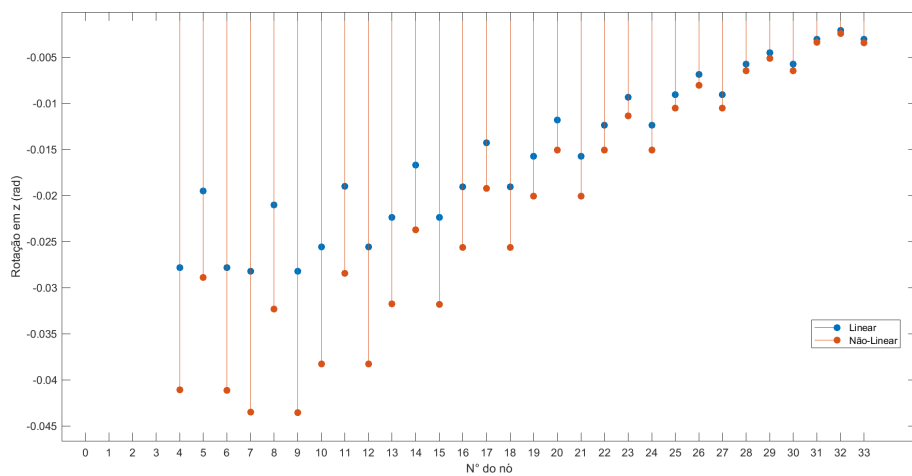


Figura 4.25: Comparativo Rotação (r_z) - Pórtico de Múltiplos Andares.

Para estes resultados numéricos do pórtico de múltiplos andares, verifica-se que

o algoritmo desenvolvido usando a formulação corrotacional não-linear de elementos finitos consegue obter as respostas dos deslocamentos da estrutura e apresenta erros relativos mais significativos em comparação com a análise linear.

Isso se deve ao fato destes deslocamentos e rotações sofrerem grandes alterações em decorrência da aplicação de forças horizontais e verticais em boa parte dos nós no sistema estrutural.

A Figura 4.26 abaixo apresenta os resultados dos deslocamentos de forma comparativa entre as análises linear e não-linear.

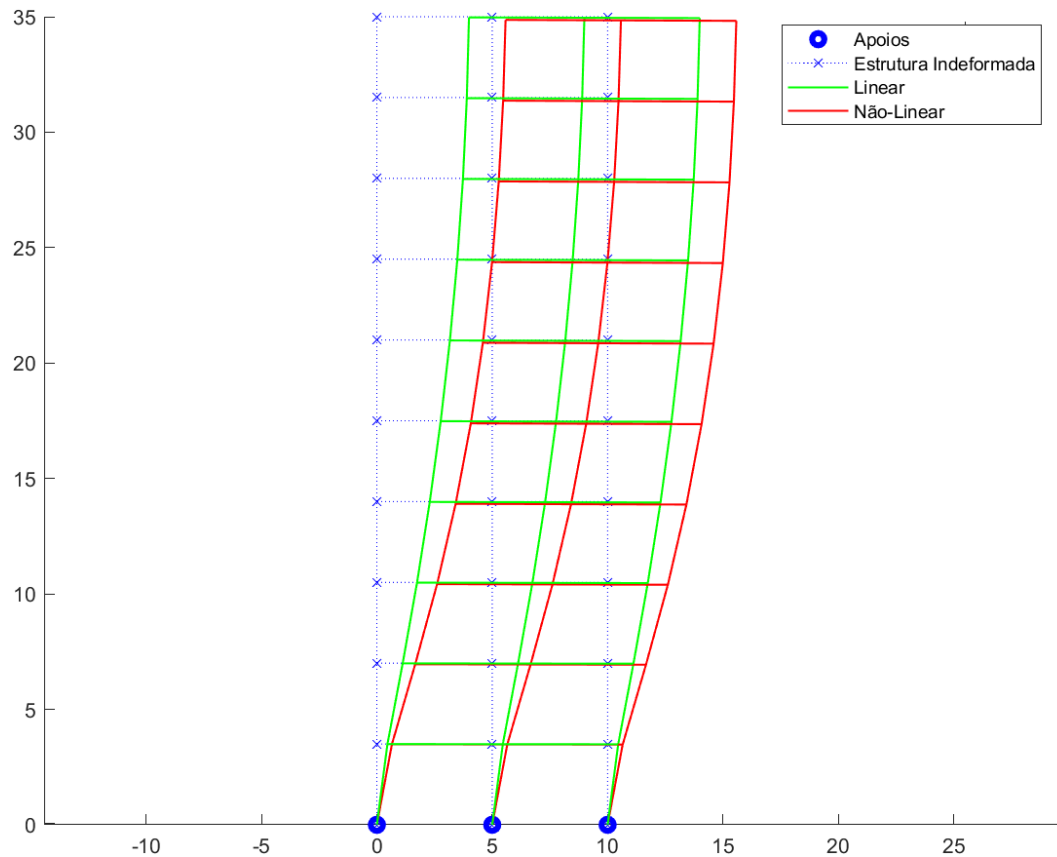


Figura 4.26: Deformada da Estrutura - Linear e Não-Linear (Fator de Escala = 25.0).

Percebe-se a importância de se considerar a não linearidade no dimensionamento estrutural, pois os resultados foram divergentes e a solução não-linear é a mais crítica e que precisa ser analisada na condição mais desfavorável.

Nas Figuras 4.27, 4.28, 4.29 mostram-se os diagramas correspondentes à resposta dos esforços normais, cortantes e momentos fletores dos elementos, respectivamente, obtida pela análise linear no Ftool.

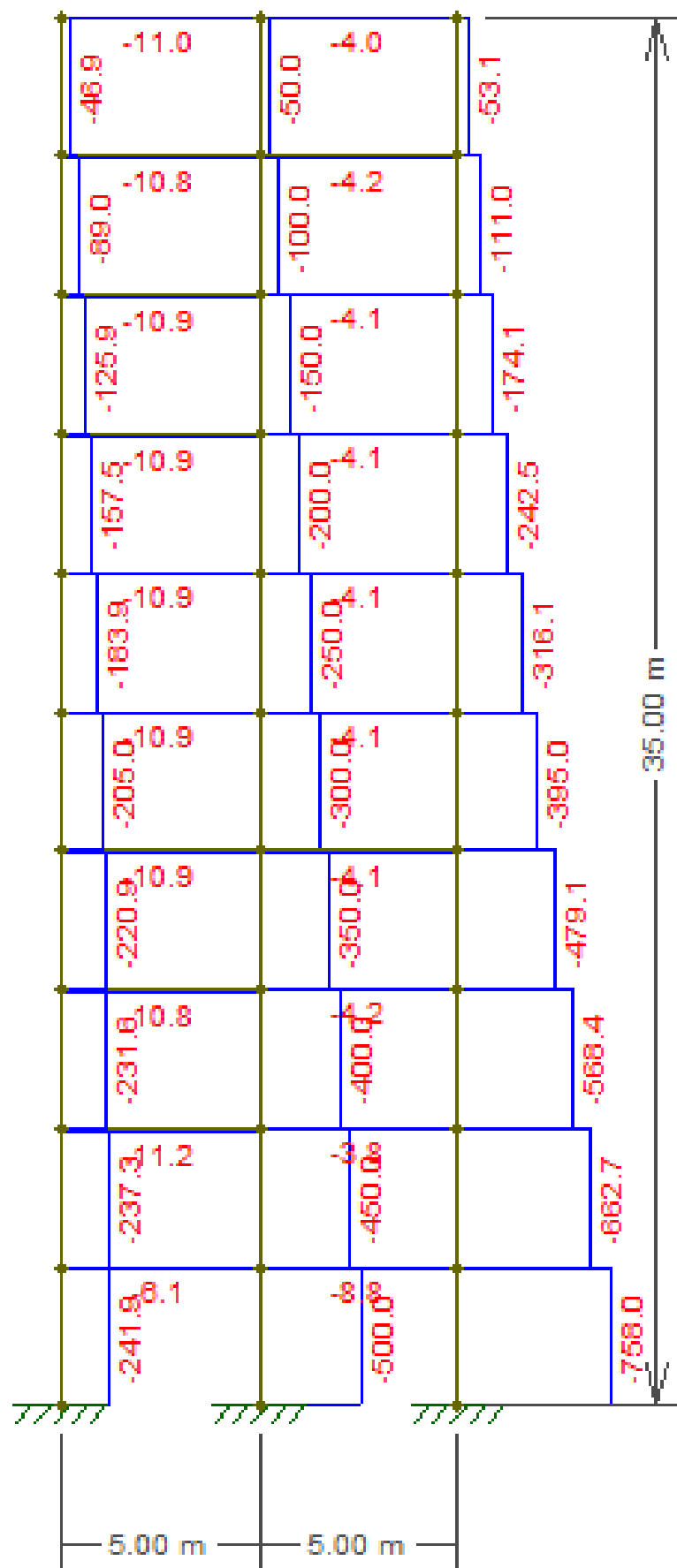


Figura 4.27: Diagramas de Esforço Normal - Pórtico Múltiplo - Linear.

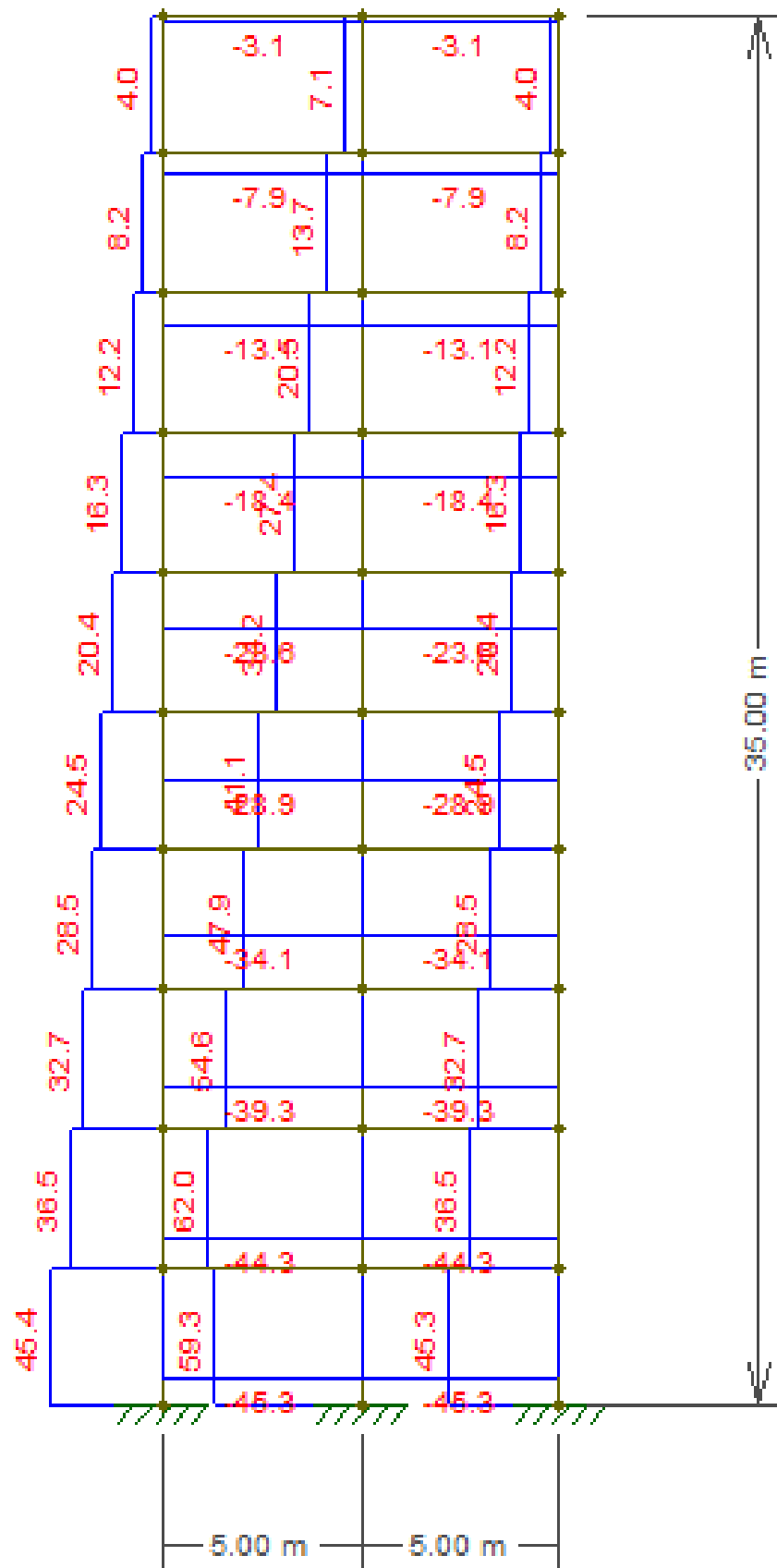


Figura 4.28: Diagramas de Esforço Cortante - Pórtico Múltiplo - Linear.

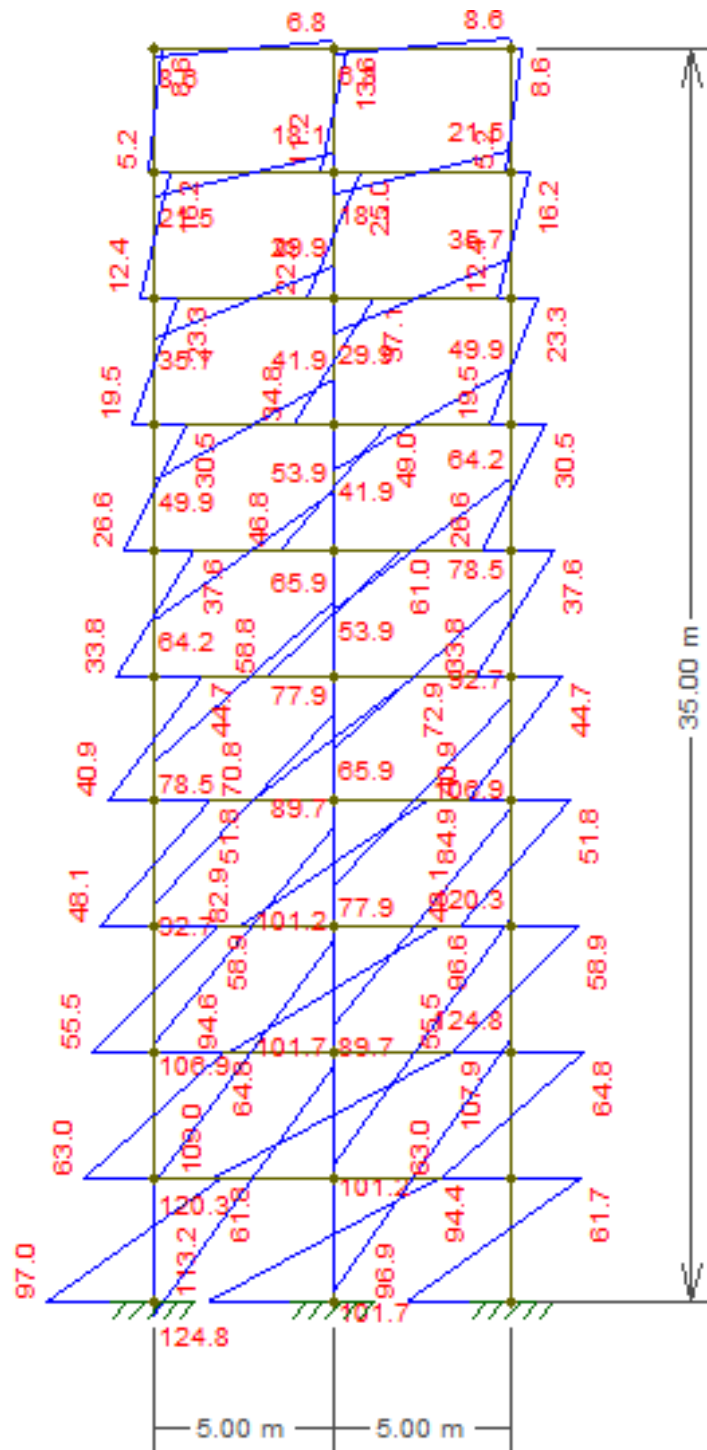


Figura 4.29: Diagramas de Momento Fletor - Pórtico Múltiplo - Linear.

Os dados numéricos referentes ao esforço normal, cortante e momento fletor, em todos os elementos da estrutura, podem ser verificados nas Tabelas [B.1](#), [B.2](#) e [B.3](#).

Os valores para os esforços do nó final (nó j) de cada elemento são mostrados nos gráficos das Figuras [4.30](#), [4.31](#) e [4.32](#).

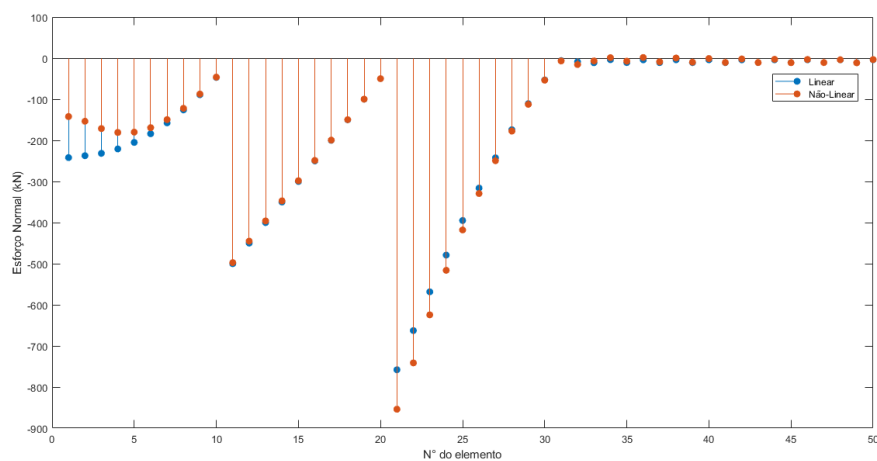


Figura 4.30: Esforço normal nos elementos - Pórtico de Múltiplo Andares.

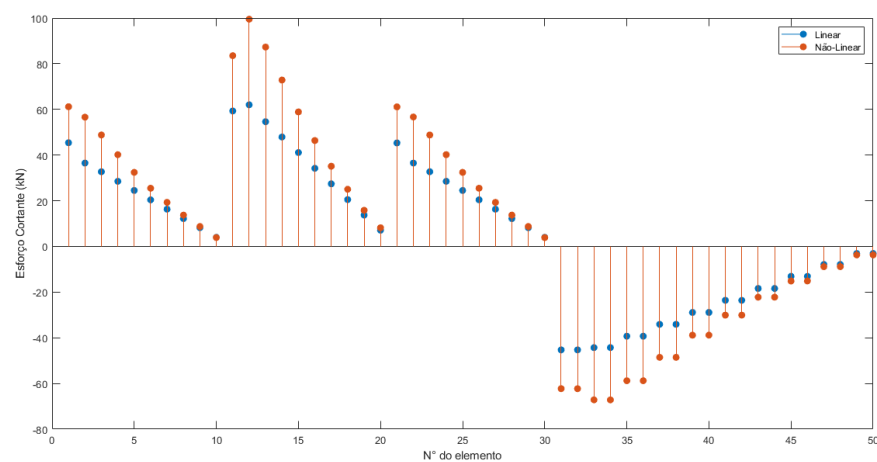


Figura 4.31: Esforço cortante nos elementos - Pórtico de Múltiplo Andares.

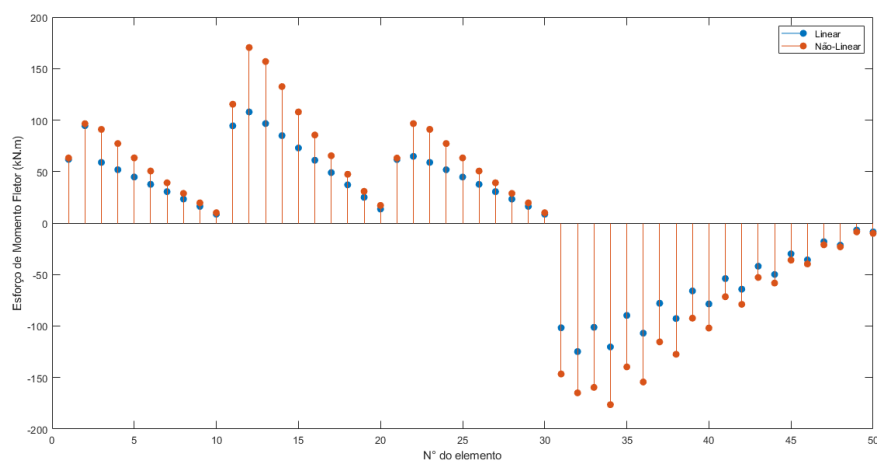


Figura 4.32: Momento fletor nos elementos - Pórtico de Múltiplo Andares.

4.2.3 Aplicação - Edifício Residencial

Este exemplo foi realizado com o intuito de se estudar a aplicabilidade dos procedimentos de análise, discutidos no presente trabalho, em sistemas estruturais de concreto armado com a inclusão das forças devidas ao vento de um edifício residencial. Para tanto, foram realizadas as análises linear e não-linear corrotacional do edifício residencial hipotético composto por 10 pavimentos, sendo 4 apartamentos por pavimento totalizando 40 unidades residenciais.

O projeto arquitetônico do subsolo (Figura 4.33), térreo (Figura 4.34), pavimento tipo (Figura 4.35), cobertura (Figura 4.36), cortes (Figuras 4.37 e 4.38) e fachadas (Figuras 4.39 e 4.40) do prédio podem ser visualizados abaixo.

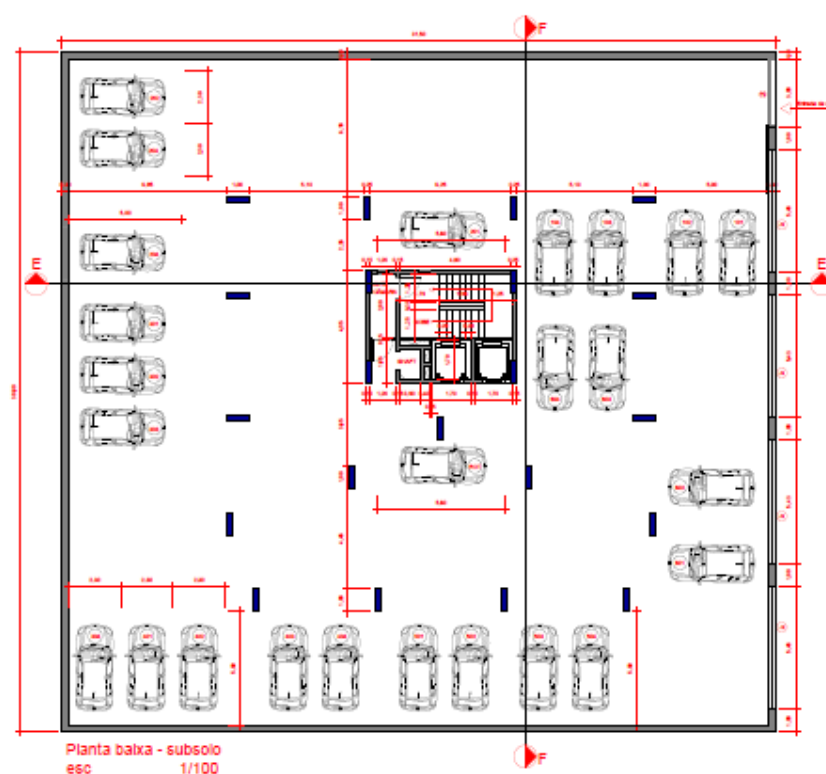


Figura 4.33: Projeto Arquitetônico - Planta do Subsolo.

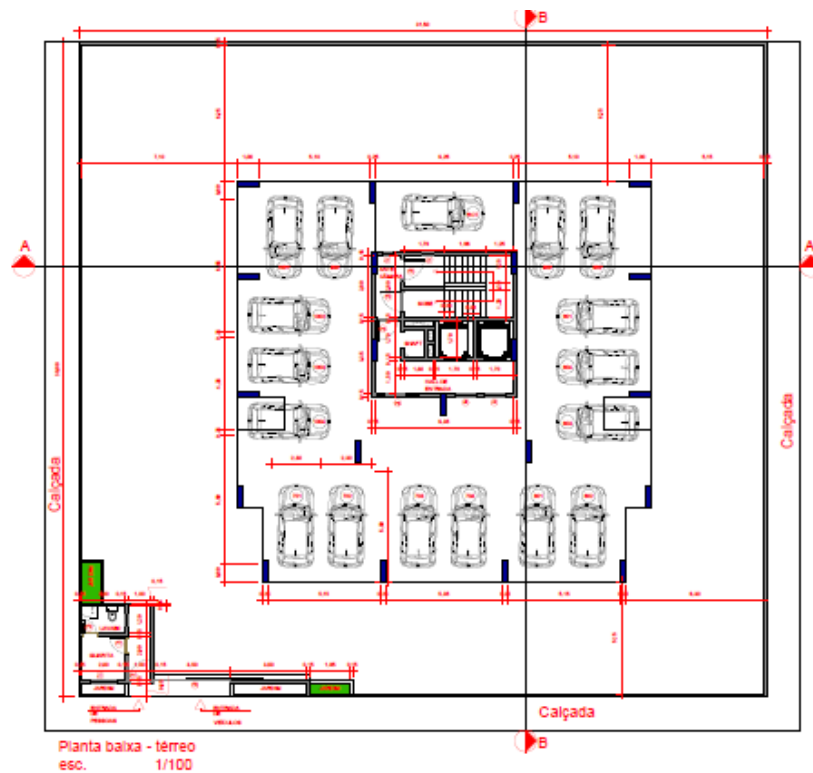


Figura 4.34: Projeto Arquitetônico - Planta do Térreo.

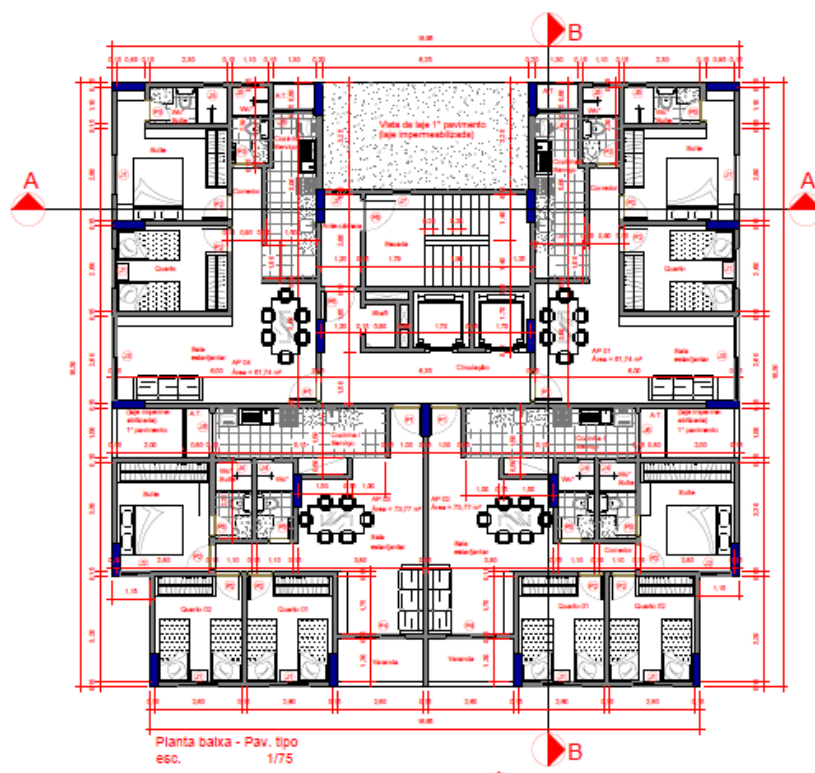


Figura 4.35: Projeto Arquitetônico - Planta do Pavimento Tipo.

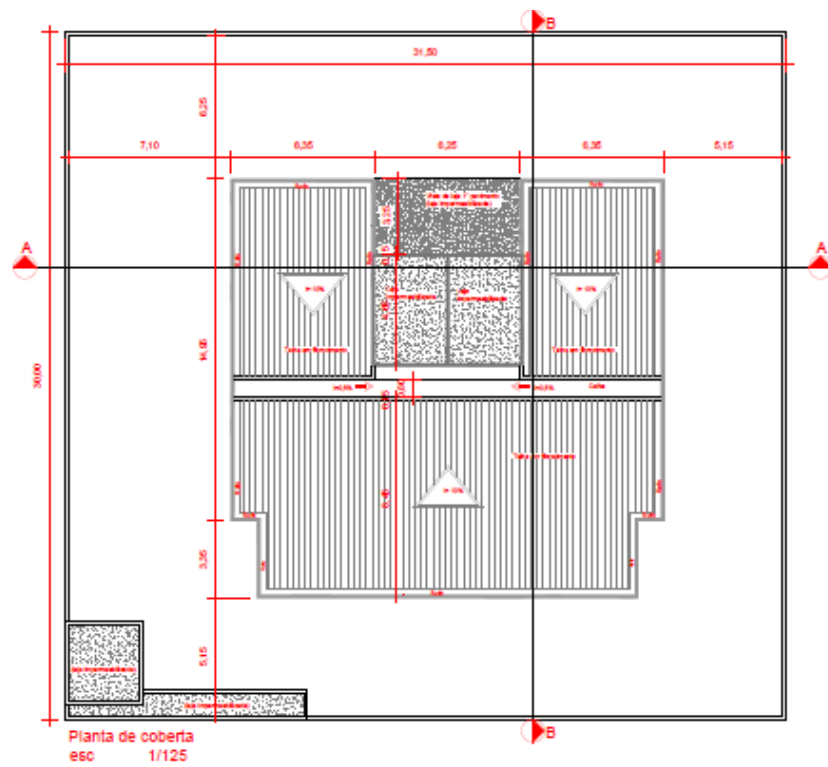


Figura 4.36: Projeto Arquitetônico - Planta da Cobertura.

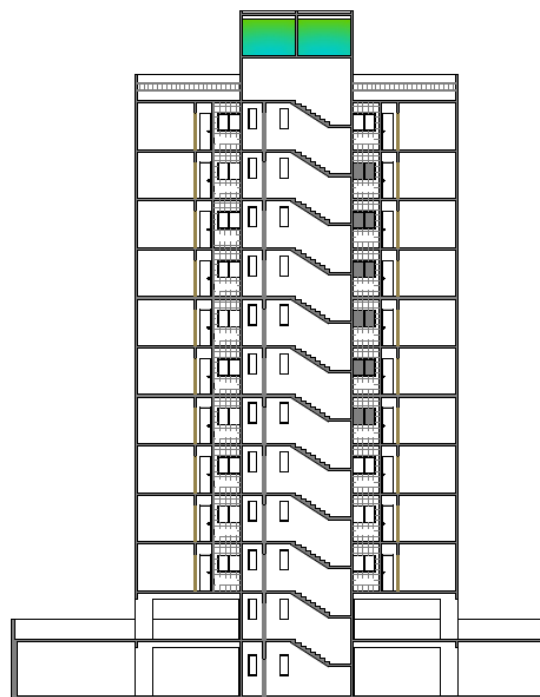


Figura 4.37: Projeto Arquitetônico - Corte AA.

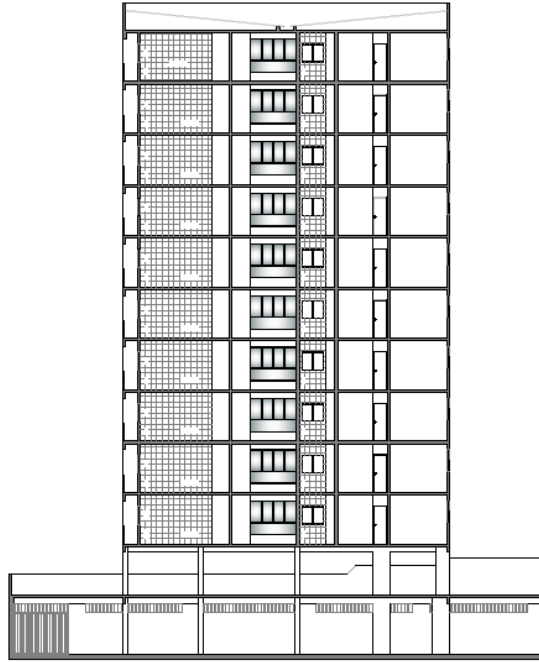


Figura 4.38: Projeto Arquitetônico - Corte BB.



Figura 4.39: Projeto Arquitetônico - Fachada Norte.

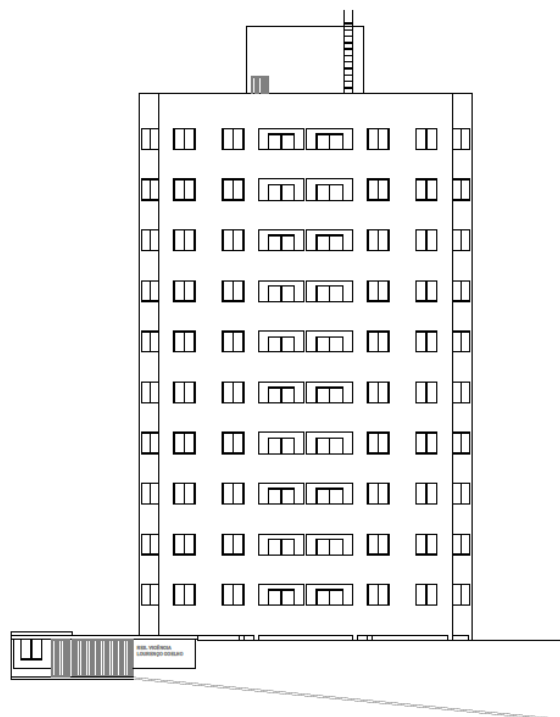


Figura 4.40: Projeto Arquitetônico - Fachada Leste.

Conforme mostrado nas figuras acima, o edifício tem por finalidade ser residencial e possui uma geometria retangular, com 18,95 m de fachada frontal e 18,30 m de fachada lateral. Além disso, possui 01 pavimento térreo, ao nível da rua com pé direito de 2,80 m, e mais 10 pavimentos tipo com um pé direito também de 2,80 m cada. Portanto, a altura total do empreendimento será de 33,95 m.

Para realizar a análise estrutural, é necessário primeiramente definir as características dos materiais que serão utilizados para a construção da edificação em estudo. De acordo com a ABNT NBR 6118 (2014) ABNT [2], a definição da resistência característica do concreto, f_{ck} , depende da classe de agressividade do ambiente onde será construído o edifício. Define-se a classe de agressividade ambiental de acordo com a tabela 6.1 da referida norma.

Como o projeto idealizado está previsto para ser construído em uma área urbana, pode-se considerar o ambiente com classe de agressividade CAA-II. Definida a classe de agressividade, obtém-se a relação água/cimento máxima e a resistência característica mínima do concreto com base no tipo de concreto e de acordo com a tabela 7.1 da ABNT NBR 6118 (2014) ABNT [2].

Como a estrutura será confeccionada utilizando o concreto armado convencional, tem-se um fator água/cimento mínimo de 0,60 e uma resistência característica mínima de 25 MPa. Foi utilizada uma armadura passiva de aço tipo CA-50 com resistência ao escoamento, f_{yk} , de 500 MPa.

Optou-se por um sistema estrutural formado por lajes nervuradas apoiadas em

vigas de seções retangulares, sendo estas apoiadas em pilares também de seções retangulares. Admitindo, portanto, que o contraventamento do edifício é feito exclusivamente por pórticos. Sendo assim, os layouts estruturais da estrutura de contraventamento do pavimento tipo e da planta de cobertura são apresentados nas Figuras 4.41 e 4.42.

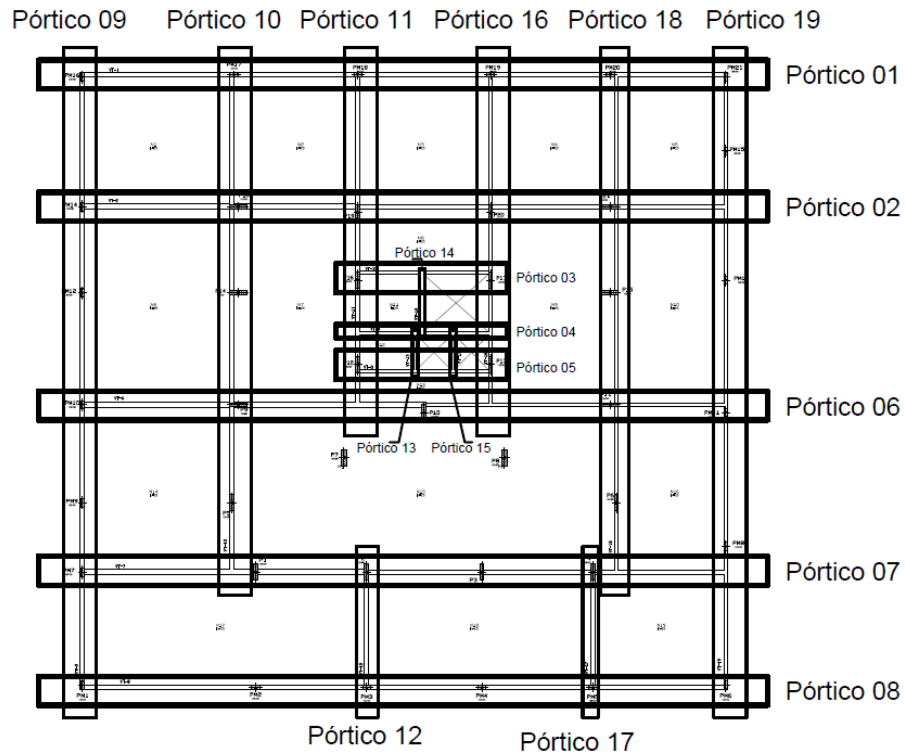


Figura 4.41: Planta de Forma - Pavimento Tipo.

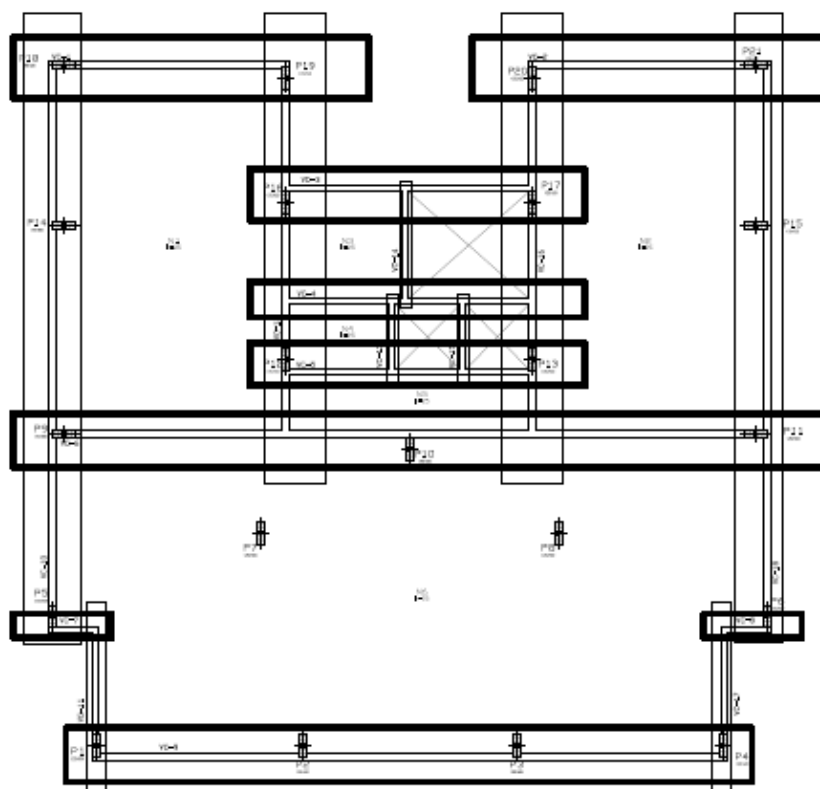


Figura 4.42: Planta de Forma - Cobertura.

A Figura 4.41 mostra os pórticos de contraventamento nas direções x e y que compõem a estrutura. Assim, pode-se observar que na direção x existem 08 pórticos de contraventamento, enquanto na direção y , temos 11 pórticos. A tabela 4.13 apresenta um resumo de todos os pórticos existentes na estrutura em análise, com os respectivos pilares e vigas que o constituem.

Tabela 4.13: Pórticos de Contraventamento da Estrutura.

Direção	Pórticos	Pilares						Vigas
x	1	PM16	PM17	PM18	PM19	PM20	PM21	VT-1
	2	PM14	P18	P19	P20	P21	-	VT-2
	3	P16	P17	-	-	-	-	VT-3
	4	-	-	-	-	-	-	VT-4
	5	P12	P13	-	-	-	-	VT-5
	6	PM10	P9	P10	P11	PM11	-	VT-6
	7	PM7	P1	P2	P3	P4	-	VT-7
	8	PM1	PM2	PM3	PM4	PM5	PM6	VT-8
y	9	PM1	PM7	PM9	PM10	PM14	PM16	VT-9
	10	P5	P9	P14	P18	PM17	-	VT-10
	11	P12	P16	P19	PM18	-	-	VT-11
	12	PM3	P2	-	-	-	-	VT-12
	13	-	-	-	-	-	-	VT-13
	14	-	-	-	-	-	-	VT-14
	15	-	-	-	-	-	-	VT-15
	16	P13	P17	P20	PM19	-	-	VT-16
	17	PM5	P4	-	-	-	-	VT-17
	18	P6	P11	P15	P21	PM20	-	VT-18
	19	PM6	PM8	PM11	PM13	PM15	PM21	VT-19

Fonte: Construção pelo autor.

Tabela 4.14: Dimensões dos Pilares e Vigas da Estrutura.

	Dimensões dos Elementos (cm)	
PM1 = PM2 = ... = PM21	20	40
P1 = P2 = ... = P21	20	80
P7 = P8	25	80
VT-3 = VT-4 = VT-5 = VT-13 = VT-14 = VT-15	15	50
VT-1 = VT-2 = ... = VT-19	20	50
VT-7	25	50

Fonte: Construção pelo autor.

Escolheu-se apenas um pórtico de contraventamento para ser analisado considerando a aplicação do carregamento de vento na direção X e Y . Assim, apresentaremos abaixo o modelo do pórtico escolhido para a análise estrutural (Figura 4.43).

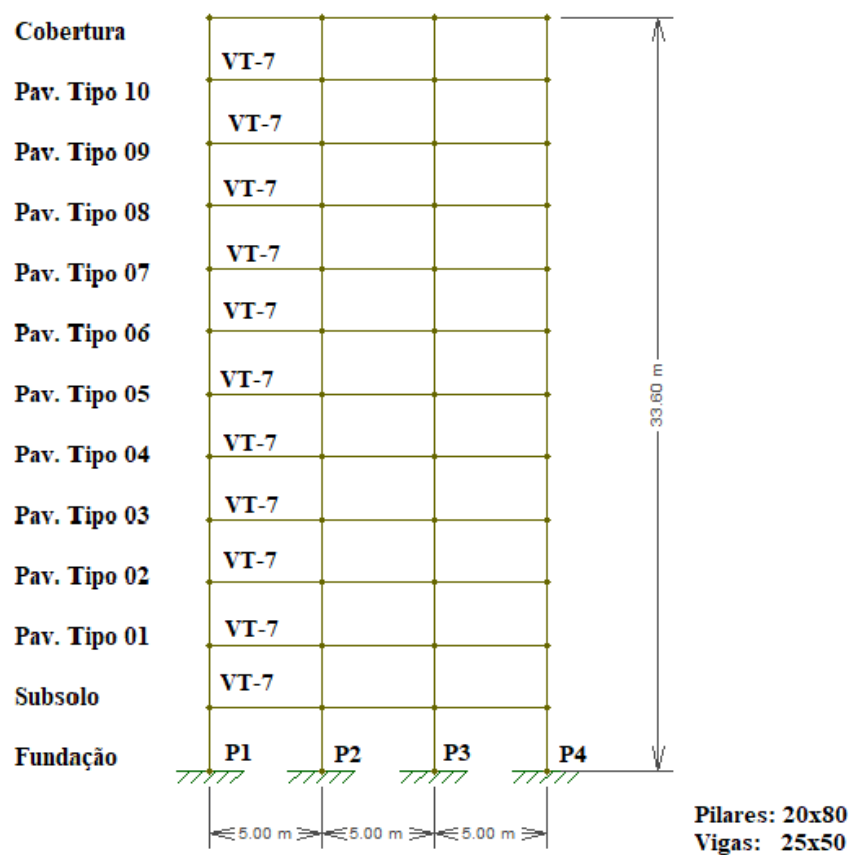


Figura 4.43: Modelo Estrutural do Edifício Residencial (Pórtico 07).

Em relação à análise não-linear por meio do MEF, o edifício foi discretizado em 84 elementos e 52 nós, como mostrado na Figura 4.44 abaixo.

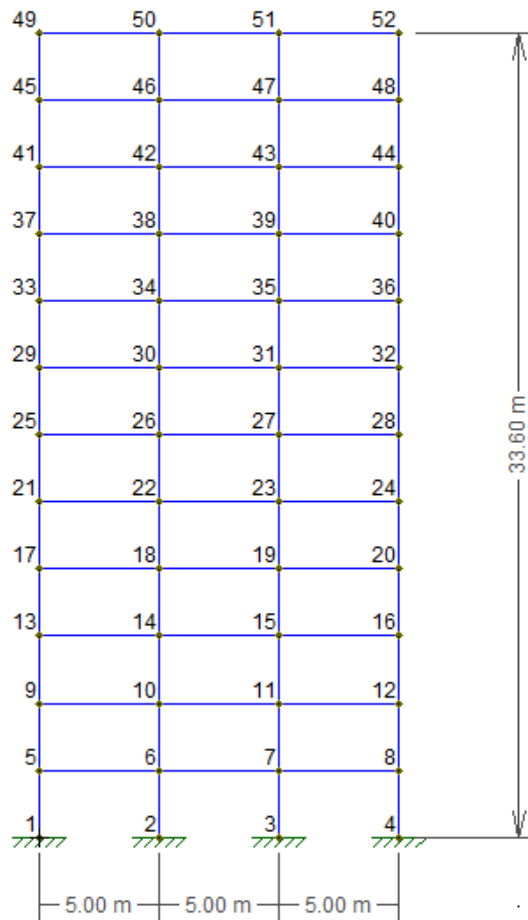


Figura 4.44: Discretização do Pórtico Estrutural - Edifício Residencial.

Para este projeto foram considerados os carregamentos descritos a seguir.

1. Cargas verticais:

(a) Peso próprio (PP)

- Em área:
 - laje: $2,5 \text{ kN/m}^2$;
- Linear:
 - viga (15×50): $0,15 \times 0,50 \times 25 = 1,875 \text{ kN/m}$;
 - viga (20×50): $0,20 \times 0,50 \times 25 = 2,5 \text{ kN/m}$;
 - viga (25×50): $0,25 \times 0,50 \times 25 = 3,125 \text{ kN/m}$;
 - pilar (20×40): $0,20 \times 0,40 \times 25 = 2,0 \text{ kN/m}$;
 - pilar (20×80): $0,20 \times 0,80 \times 25 = 4,0 \text{ kN/m}$;
 - pilar (25×80): $0,25 \times 0,80 \times 25 = 5,0 \text{ kN/m}$.

(b) Carga permanente (PERMANENTE)

- Em área:
 - pavimento tipo: 1 kN/m^2 ;
 - pavimento cobertura: $2,0 \text{ kN/m}^2$;
 - pavimento ático: $1,6 \text{ kN/m}^2$ (2 reservatórios de 2000 litros).
 - Linear:
 - alvenaria do pavimento tipo: $0,15 \times 2,60 \times 13 = 5,07 \text{ kN/m}$;
 - alvenaria do pavimento ático: $0,15 \times 2,15 \times 13 = 4,20 \text{ kN/m}$.
- Nota:
- sobre a cobertura não há alvenaria;
 - a carga de alvenaria se aplica a todas as vigas do tipo e do ático.
- (c) Carga acidental (ACIDENTAL) – ABNT NBR 6120 (1980)
- Sobrecarga de ocupação:
 - pavimento tipo: $2,0 \text{ kN/m}^2$ (apartamentos);
 - pavimento cobertura: $0,5 \text{ kN/m}^2$.

2. Força Horizontal:

(a) Vento

Para determinação das forças horizontais devidas à ação do vento segundo a ABNT NBR 6123 (1988) [3], foram utilizados os seguintes dados:

- Velocidade básica do vento: 30 m/s ;
- Fator topográfico: $S1 = 1,0$ (terreno plano ou fracamente acidentado);
- Fator estatístico: $S3 = 1,0$ (edifício residencial);
- Categoria: IV – Terrenos cobertos por obstáculos numerosos e pouco espaçados, em zona florestal, industrial ou urbanizada com cota média do topo desses obstáculos considerada igual a $10,0 \text{ m}$;
- Classe: B – Toda edificação ou parte de edificação para a qual a maior dimensão horizontal ou vertical da superfície frontal esteja entre 20 m e 50 m .

Os carregamentos no pórtico foram determinados de maneira aproximada, e são mostrados nas Tabelas 4.15 e 4.16.

Tabela 4.15: Cargas verticais concentradas (kN).

Nós	PP	Permanente	Acidental	Carga Pontual
1	5,60	0,00	0,00	5,60
2	5,60	0,00	0,00	5,60
3	5,60	0,00	0,00	5,60
4	5,60	0,00	0,00	5,60
5	58,95	42,50	25,00	126,45
6	58,95	42,50	25,00	126,45
7	58,95	42,50	25,00	126,45
8	58,95	42,50	25,00	126,45
9	58,95	42,50	25,00	126,45
10	58,95	42,50	25,00	126,45
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	58,95	42,50	25,00	126,45
21	58,95	42,50	25,00	126,45
22	58,95	42,50	25,00	126,45
23	58,95	42,50	25,00	126,45
24	58,95	42,50	25,00	126,45
25	58,95	42,50	25,00	126,45
26	58,95	42,50	25,00	126,45
27	58,95	42,50	25,00	126,45
28	58,95	42,50	25,00	126,45
29	58,95	42,50	25,00	126,45
30	58,95	42,50	25,00	126,45
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
40	58,95	42,50	25,00	126,45
41	58,95	42,50	25,00	126,45
42	58,95	42,50	25,00	126,45
43	58,95	42,50	25,00	126,45
44	58,95	42,50	25,00	126,45
45	58,95	42,50	25,00	126,45
46	58,95	42,50	25,00	126,45
47	58,95	42,50	25,00	126,45
48	58,95	42,50	25,00	126,45
49	25,45	22,50	0,00	47,95
50	25,45	22,50	0,00	47,95
51	25,45	22,50	0,00	47,95
52	25,45	22,50	0,00	47,95

Tabela 4.16: Cálculo da Força de Arrasto.

Pavimento	Cota z	Fator	Fator	Fator	Velocidade Básica (V0)	Velocidade Característica (Vk)	Pressão Dinâmica (q)	Ar	Ay	Força de Arrasto	
	m	S1	S2	S3	m/s	m/s	N/m²	m²	m²	Ca,x = 1,115 Fa,x (kN)	Ca,y = 1,09 Fa,y (kN)
Subsolo	2,80		0,710			21,314	278,473			16,946	15,998
1	2,80		0,710			21,314	278,473			16,946	15,998
2	5,60		0,775			23,243	331,162			20,152	19,024
3	8,40		0,815			24,451	366,491			22,302	21,054
4	11,20		0,845			25,347	393,820			23,965	22,624
5	14,00	1	0,869	1	30	26,063	416,414	54,576	52,704	25,340	23,922
6	16,80		0,889			26,664	435,833			26,521	25,037
7	19,60		0,906			27,183	452,957			27,563	26,021
8	22,40		0,921			27,641	468,333			28,499	26,905
9	25,20		0,935			28,051	482,329			29,351	27,709
10	28,00		0,947			28,422	495,202			30,134	28,448
Coberta	30,80		0,959			28,763	507,143			30,861	29,134

Fonte: Construção pelo autor.

Na combinação de cargas foi considerado o efeito de todos os carregamentos com seus valores característicos. Para simplificar a modelagem, as cargas de vento e o peso próprio dos pilares foram aplicados como forças pontuais nos nós da estrutura, como mostrado na Tabela 4.17 a seguir:

Tabela 4.17: Distribuição nas Lajes.

Nós	Fa,x (kN)	Fa,y (kN)
49	15,430	14,567
45	30,497	28,791
41	29,742	28,078
37	28,925	27,307
33	28,031	26,463
29	27,042	25,529
25	25,931	24,480
21	24,652	23,273
17	23,133	21,839
13	21,227	20,039
9	18,549	17,511
5	25,419	23,996

Fonte: Construção pelo autor.

Em relação às propriedades físicas, a resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}) é igual a 25 MPa e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. Em todas as análises foi considerado o módulo de elasticidade secante do concreto como prevê a ABNT NBR 6118 (2014) [2], sendo estimado pela equação a seguir:

$$E_c = 5600\sqrt{f_{ck}} = 5600\sqrt{25} = 28 \text{ GPa} . \quad (4.37)$$

Na realização da análise estrutural pelo MEF com a formulação corrotacional desenvolvida, o carregamento foi dividido em 100 passos de carga e a tolerância utilizada para verificação da convergência foi de 10^{-9} . Sendo assim, testaram-se as duas análises estruturais (linear e não-linear), na qual obtiveram-se os resultados dos deslocamentos apresentados na Tabela 4.18

Tabela 4.18: Deslocamentos - Comparativo Linear e Não-Linear - Edifício.

Nó	ux (m)			uy (m)			rz (rad)		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1.7100E-02	1.2069E-02	-41.685	-7.0000E-04	-6.9646E-04	-0.508	-6.5340E-03	-5.0052E-03	-30.544
6	1.7100E-02	1.1982E-02	-42.714	-9.0000E-04	-8.7726E-04	-2.592	-4.7700E-03	-3.8271E-03	-24.638
7	1.7000E-02	1.1872E-02	-43.194	-9.0000E-04	-9.2224E-04	2.412	-4.7670E-03	-3.8127E-03	-25.030
8	1.7000E-02	1.1723E-02	-45.014	-1.1000E-03	-1.1026E-03	0.236	-6.5220E-03	-4.9340E-03	-32.184
9	4.1900E-02	3.0433E-02	-37.679	-1.3000E-03	-1.3432E-03	3.216	-6.6850E-03	-5.4514E-03	-22.628
10	4.1900E-02	3.0265E-02	-38.444	-1.8000E-03	-1.6734E-03	-7.565	-5.1160E-03	-4.3746E-03	-16.948
11	4.1900E-02	3.0152E-02	-38.963	-1.7000E-03	-1.7677E-03	3.830	-5.1150E-03	-4.3745E-03	-16.928
12	4.1900E-02	3.0098E-02	-39.212	-2.1000E-03	-2.0976E-03	-0.114	-6.6810E-03	-5.4672E-03	-22.202
13	6.5400E-02	4.9061E-02	-33.303	-1.9000E-03	-1.9415E-03	2.138	-6.0850E-03	-5.3856E-03	-12.987
14	6.5400E-02	4.8873E-02	-33.816	-2.5000E-03	-2.3900E-03	-4.603	-4.6480E-03	-4.3354E-03	-7.211
15	6.5400E-02	4.8756E-02	-34.137	-2.4000E-03	-2.5347E-03	5.314	-4.6480E-03	-4.3340E-03	-7.245
16	6.5400E-02	4.8709E-02	-34.267	-3.0000E-03	-2.9831E-03	-0.567	-6.0860E-03	-5.3743E-03	-13.244
17	8.6400E-02	6.6901E-02	-29.146	-2.5000E-03	-2.4890E-03	-0.442	-5.3760E-03	-5.1349E-03	-4.696
18	8.6400E-02	6.6692E-02	-29.551	-3.2000E-03	-3.0282E-03	-5.673	-4.1100E-03	-4.1610E-03	1.225
19	8.6400E-02	6.6563E-02	-29.802	-3.1000E-03	-3.2220E-03	3.786	-4.1100E-03	-4.1587E-03	1.170
20	8.6400E-02	6.6515E-02	-29.896	-3.8000E-03	-3.7611E-03	-1.034	-5.3760E-03	-5.1264E-03	-4.870
21	1.0480E-01	8.3585E-02	-25.381	-3.0000E-03	-2.9831E-03	-0.567	-4.6720E-03	-4.8027E-03	2.721
22	1.0470E-01	8.3360E-02	-25.600	-3.8000E-03	-3.5887E-03	-5.888	-3.5710E-03	-3.9166E-03	8.824
23	1.0470E-01	8.3223E-02	-25.807	-3.7000E-03	-3.8287E-03	3.361	-3.5710E-03	-3.9151E-03	8.789
24	1.0470E-01	8.3173E-02	-25.882	-4.4000E-03	-4.4345E-03	0.778	-4.6730E-03	-4.7961E-03	2.566
25	1.2050E-01	9.8902E-02	-21.838	-3.4000E-03	-3.4206E-03	0.602	-3.9870E-03	-4.4095E-03	9.582
26	1.2050E-01	9.8664E-02	-22.132	-4.3000E-03	-4.0722E-03	-5.594	-3.0470E-03	-3.6216E-03	15.866
27	1.2050E-01	9.8520E-02	-22.310	-4.2000E-03	-4.3542E-03	3.541	-3.0470E-03	-3.6204E-03	15.838
28	1.2050E-01	9.8468E-02	-22.375	-5.0000E-03	-5.0063E-03	0.126	-3.9880E-03	-4.4040E-03	9.445
29	1.3380E-01	1.1269E-01	-18.733	-3.8000E-03	-3.7985E-03	-0.039	-3.3250E-03	-3.9659E-03	16.161
30	1.3380E-01	1.1244E-01	-18.997	-4.7000E-03	-4.4790E-03	-4.934	-2.5400E-03	-3.2841E-03	22.659
31	1.3380E-01	1.1229E-01	-19.156	-4.6000E-03	-4.7981E-03	4.129	-2.5410E-03	-3.2833E-03	22.607
32	1.3380E-01	1.1223E-01	-19.219	-5.5000E-03	-5.4795E-03	-0.374	-3.3260E-03	-3.9612E-03	16.035
33	1.4470E-01	1.2480E-01	-15.946	-4.1000E-03	-4.1134E-03	0.326	-2.6920E-03	-3.4802E-03	22.648
34	1.4470E-01	1.2454E-01	-16.188	-5.0000E-03	-4.8095E-03	-3.961	-2.0560E-03	-2.9108E-03	29.367
35	1.4470E-01	1.2438E-01	-16.337	-4.9000E-03	-5.1601E-03	5.041	-2.0560E-03	-2.9102E-03	29.352
36	1.4470E-01	1.2433E-01	-16.384	-5.9000E-03	-5.8574E-03	-0.727	-2.6930E-03	-3.4761E-03	22.528
37	1.5330E-01	1.3512E-01	-13.455	-4.4000E-03	-4.3622E-03	-0.867	-2.0920E-03	-2.9603E-03	29.333
38	1.5330E-01	1.3485E-01	-13.682	-5.3000E-03	-5.0637E-03	-4.667	-1.5970E-03	-2.5081E-03	36.327
39	1.5330E-01	1.3469E-01	-13.817	-5.2000E-03	-5.4401E-03	4.414	-1.5980E-03	-2.5074E-03	36.269
40	1.5330E-01	1.3463E-01	-13.868	-6.1000E-03	-6.1434E-03	0.706	-2.0920E-03	-2.9563E-03	29.237
41	1.5980E-01	1.4356E-01	-11.312	-4.5000E-03	-4.5415E-03	0.914	-1.5350E-03	-2.4186E-03	36.534
42	1.5980E-01	1.4328E-01	-11.530	-5.5000E-03	-5.2419E-03	-4.924	-1.1700E-03	-2.0818E-03	43.798
43	1.5980E-01	1.4311E-01	-11.662	-5.4000E-03	-5.6379E-03	4.220	-1.1700E-03	-2.0824E-03	43.814
44	1.5970E-01	1.4305E-01	-11.639	-6.3000E-03	-6.3407E-03	0.642	-1.5370E-03	-2.4133E-03	36.312
45	1.6430E-01	1.5005E-01	-9.497	-4.6000E-03	-4.6478E-03	1.028	-1.0210E-03	-1.8386E-03	44.470
46	1.6430E-01	1.4979E-01	-9.687	-5.6000E-03	-5.3442E-03	-4.786	-7.9090E-04	-1.6686E-03	52.601
47	1.6430E-01	1.4963E-01	-9.804	-5.5000E-03	-5.7535E-03	4.406	-7.9050E-04	-1.6787E-03	52.910
48	1.6430E-01	1.4956E-01	-9.856	-6.5000E-03	-6.4529E-03	-0.730	-1.0200E-03	-1.8758E-03	45.623
49	1.6700E-01	1.5471E-01	-7.944	-4.7000E-03	-4.6776E-03	-0.479	-6.1110E-04	-1.5257E-03	59.947
50	1.6700E-01	1.5454E-01	-8.063	-5.6000E-03	-5.3710E-03	-4.264	-3.8390E-04	-1.3094E-03	70.681
51	1.6700E-01	1.5444E-01	-8.133	-5.5000E-03	-5.7865E-03	4.951	-3.8340E-04	-1.3195E-03	70.943
52	1.6700E-01	1.5444E-01	-8.133	-6.5000E-03	-6.4833E-03	-0.258	-6.0700E-04	-1.5875E-03	61.765

Fonte: Construção pelo autor.

De modo a facilitar a compreensão dos resultados das análises lineares e não-lineares, traçou-se os gráficos abaixo com os deslocamentos e rotações em relação ao número do nó.

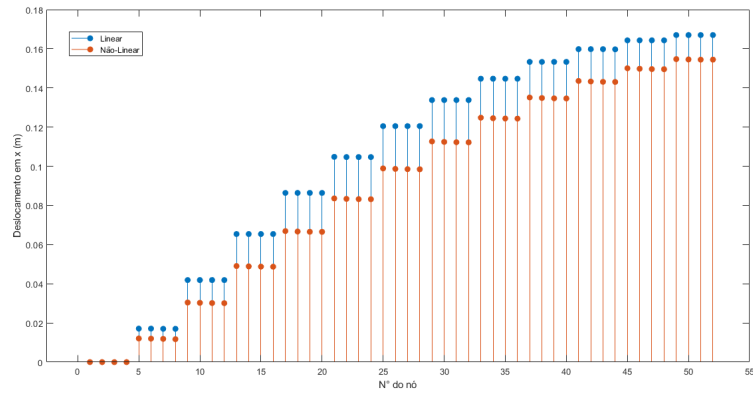


Figura 4.45: Comparativo Deslocamento (ux) - Edifício Residencial.

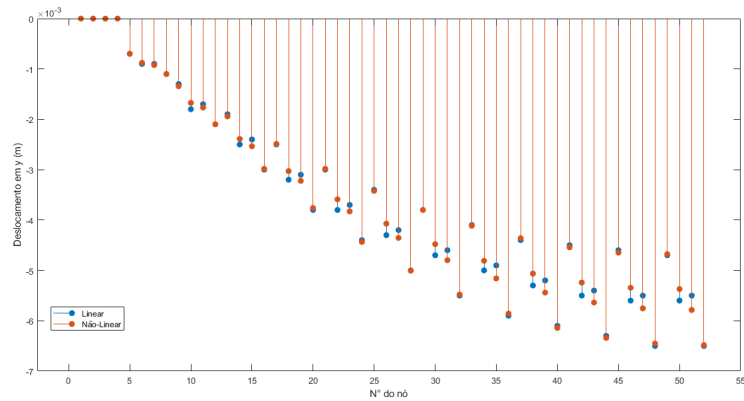


Figura 4.46: Comparativo Deslocamento (uy) - Edifício Residencial.

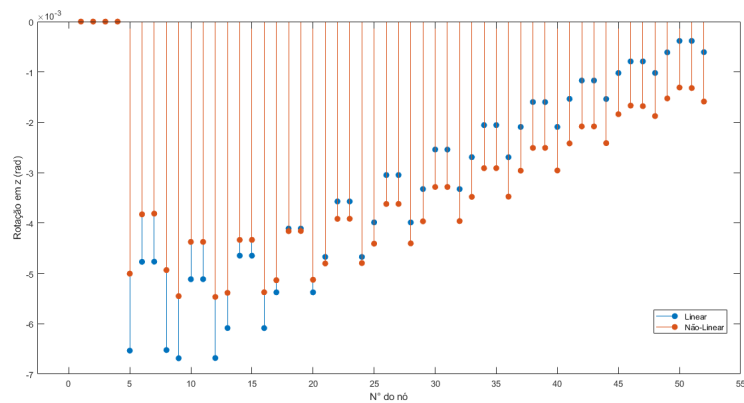


Figura 4.47: Comparativo Rotação (rz) - Edifício Residencial.

Para estes resultados numéricos do edifício em estudo, verifica-se que o algoritmo desenvolvido usando a formulação corrotacional não-linear de elementos finitos consegue obter as respostas dos deslocamentos na direção x com valores inferiores aos da análise linear. No entanto, para os deslocamentos na direção y e a rotação em z , observa-se que há uma variação mais visível entre as análises, sendo que para alguns nós da estrutura os valores dos deslocamentos e das rotações na análise linear são inferiores aos da análise não-linear.

A Figura 4.48 abaixo apresenta os resultados dos deslocamentos de forma comparativa entre as análises linear e não-linear.

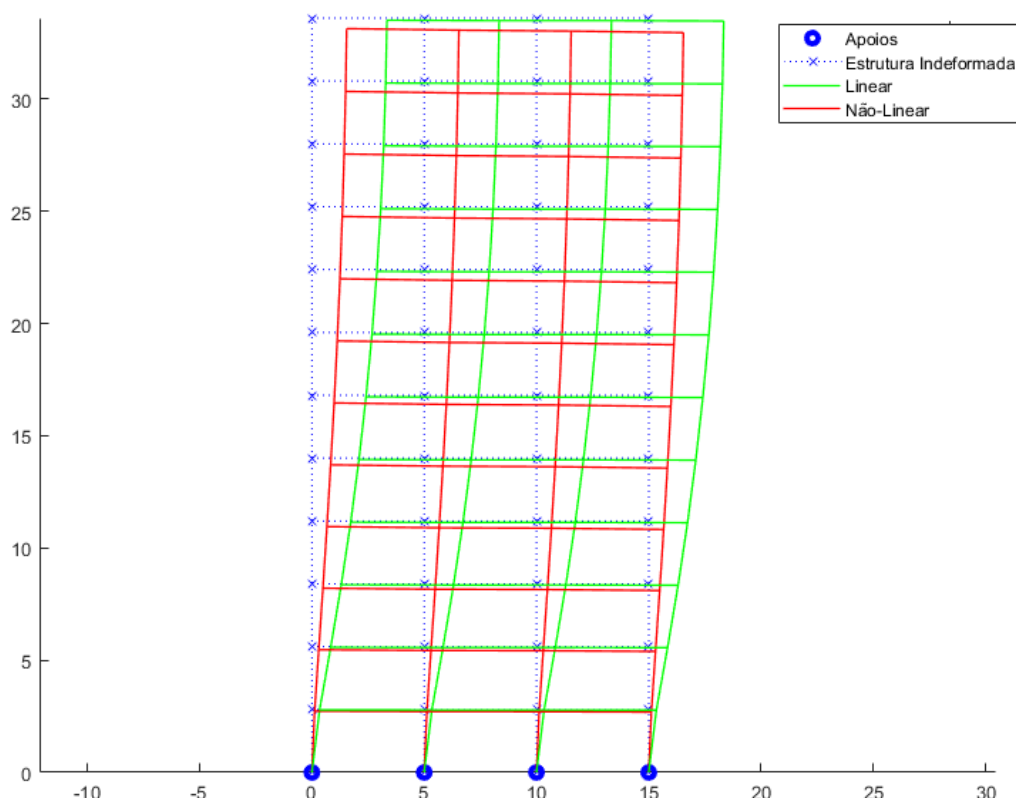


Figura 4.48: Deformada da Estrutura - Pórtico Edifício Residencial - (fator de escala = 20.0)

Os resultados numéricos referentes ao esforço normal, cortante e momento fletor, em todos os elementos da estrutura, podem ser verificados nas Tabelas B.4, B.5 e B.6.

Nas Figuras 4.49, 4.50, 4.51 mostram-se os diagramas correspondentes à resposta dos esforços normais, cortantes e momentos fletores dos elementos, respectivamente, obtida pela análise linear no Ftool e o vento na direção X . Cabe destacar que não se fez necessário uma análise com as forças de vento na direção Y por serem bem

próximas.

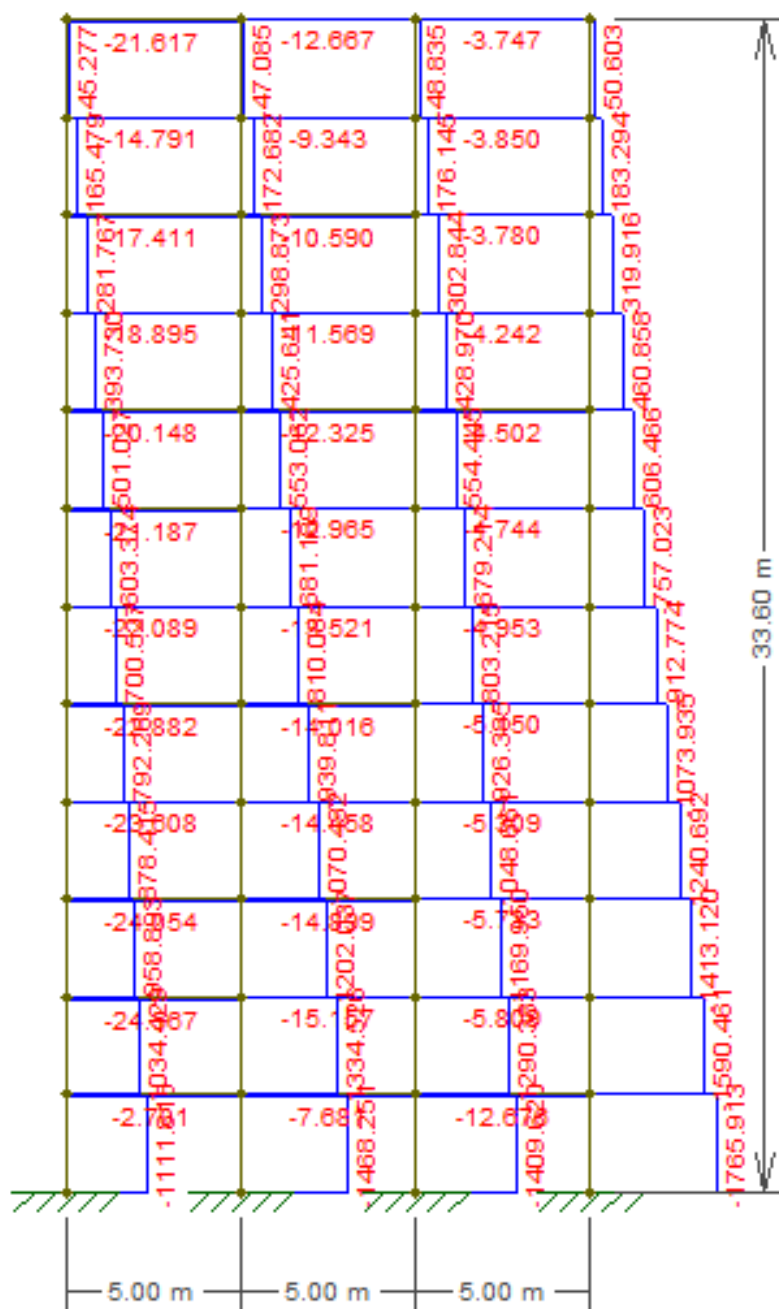


Figura 4.49: Diagramas de Esforço Normal - Pórtico Edifício Residencial - Linear.

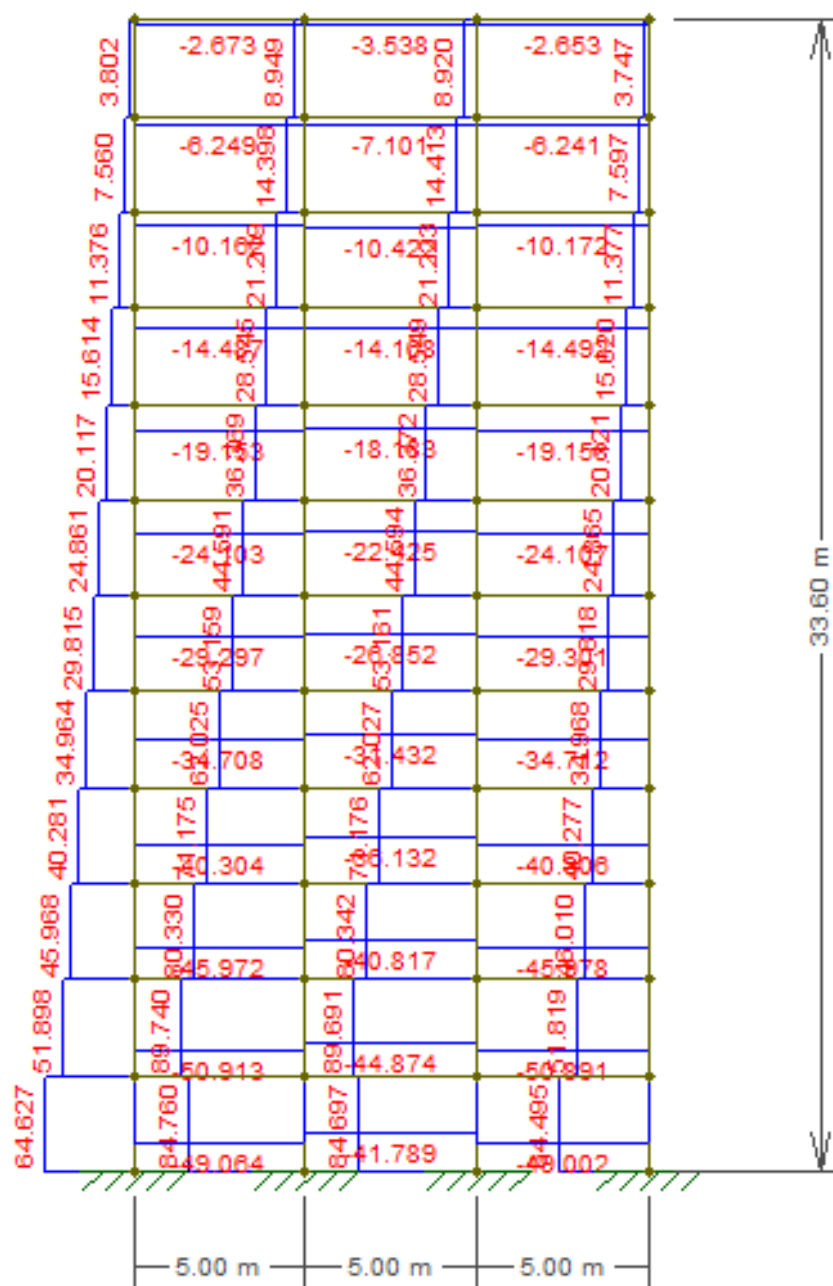


Figura 4.50: Diagramas de Esforço Cortante - Pórtico Edifício Residencial - Linear.

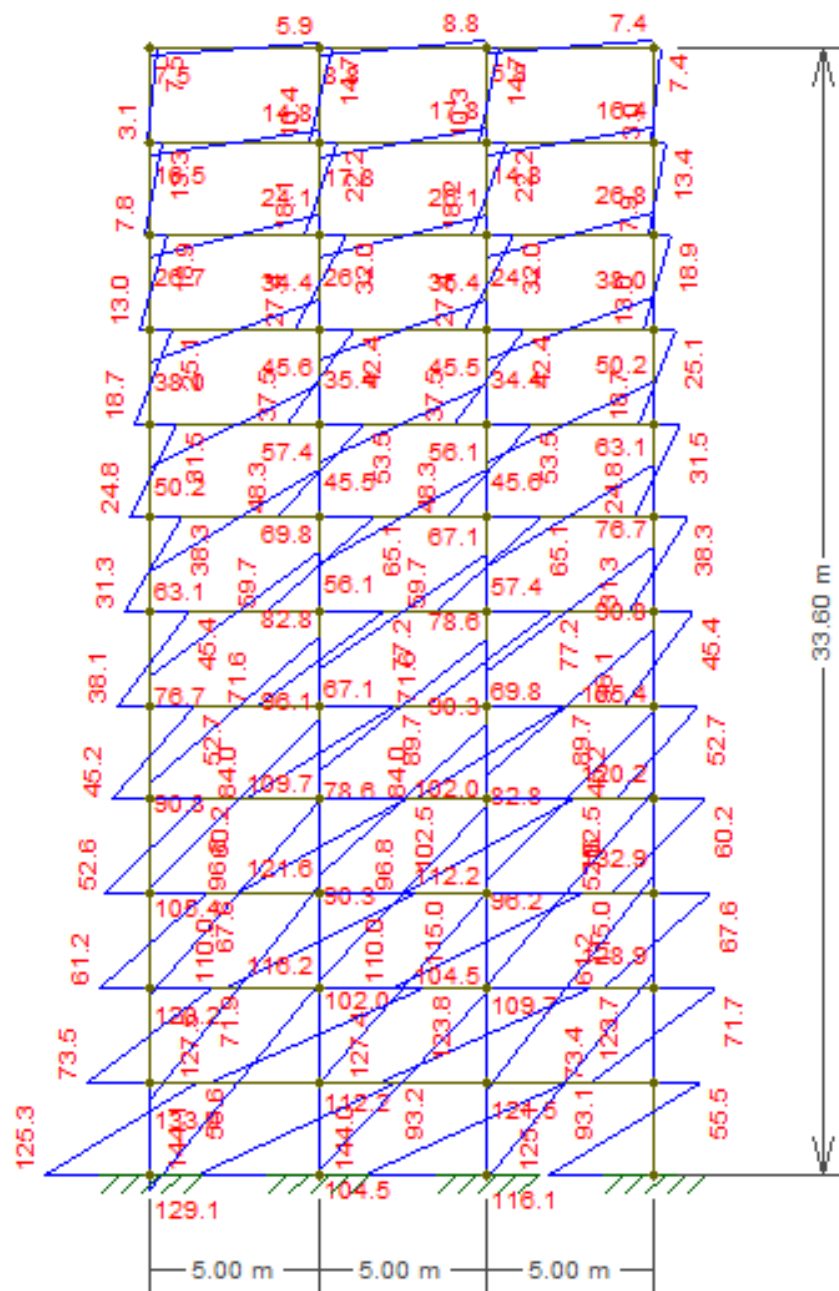


Figura 4.51: Diagramas de Momento Fletor - Pórtico Edifício Residencial - Linear.

Os valores para os esforços do nó final (nó j) de cada elemento são mostrados nos gráficos das Figuras [4.52](#), [4.53](#) e [4.54](#).

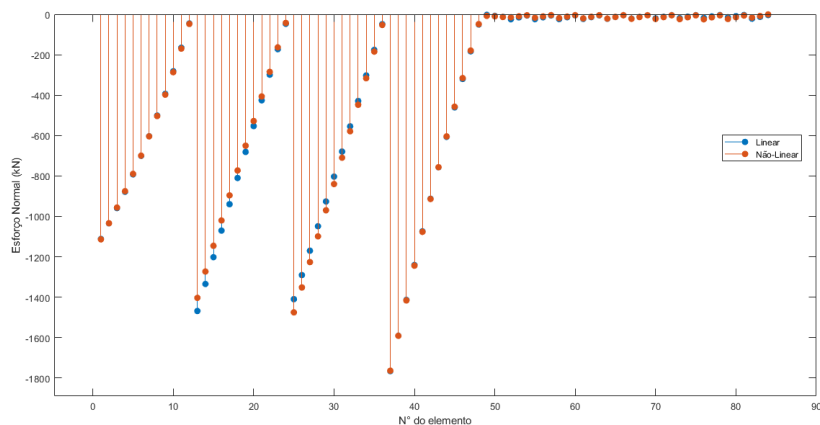


Figura 4.52: Esforço normal nos elementos - Pórtico Edifício Residencial

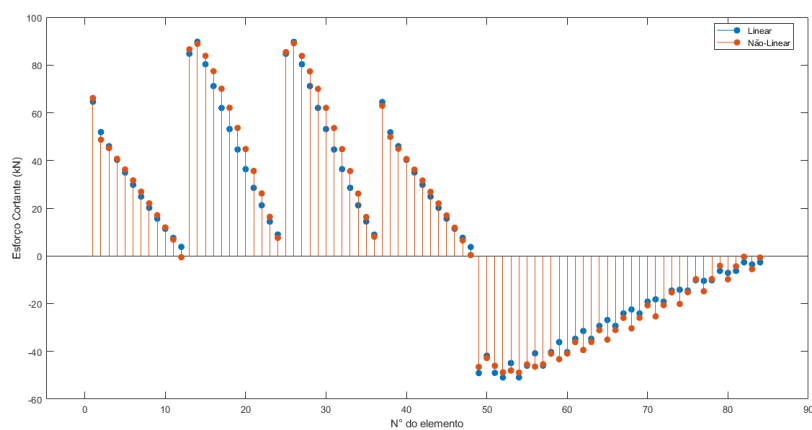


Figura 4.53: Esforço cortante nos elementos - Pórtico Edifício Residencial.

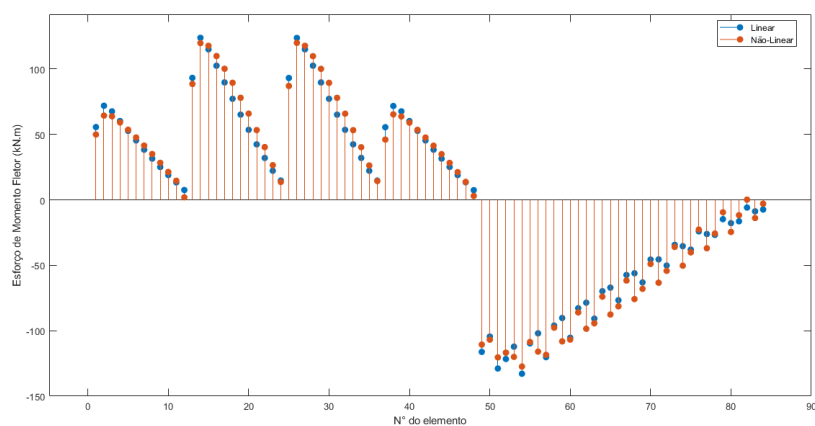


Figura 4.54: Momento fletor no nó extremo direito de cada elemento - Pórtico Edifício Residencial.

Capítulo 5

Considerações Finais

A partir dos exemplos numéricos, vimos a necessidade do uso de programas computacionais para análise de treliças e pórticos, principalmente quando apresentam muitos elementos e nós dispostos no espaço bi/tridimensional, ficando inviável a análise apenas analítica. Além disso, é de suma importância termos uma ferramenta que mostre os resultados gráficos das estruturas, tanto indeformada como deformada, nos dando oportunidade de podermos observar como a estrutura foi discretizada.

Nesse sentido, pode-se observar se a estrutura foi feita de forma correta e ao visualizá-la, o pesquisador ou projetista pode perceber inconformidades podendo estar atreladas a erros humanos na etapa de criação da malha.

As normas para projetos de estruturas, brasileiras ou estrangeiras, trazem consigo limitações quanto à deslocamentos e deformações admissíveis, almejando que a construção sempre esteja em regime linear ou próximo deste, seja para facilitar a análise ou manter a segurança e o conforto. Todavia, projetos complexos ou já implementados podem estar sujeitos a graus elevados de não linearidades, sejam eles da construção civil ou outras áreas, como a mecânica, aeroespacial e naval.

Cabe destacar que a consideração dos efeitos da não linearidade geométrica e as diferentes medidas de deformação na análise pode afetar significativamente o comportamento pré-crítico e a capacidade de carga da estrutura. Sendo assim, os exemplos de treliças planas estudados mostraram uma boa concordância entre os resultados obtidos e os da literatura no que tange à obtenção das trajetórias de equilíbrio, validando o código computacional desenvolvido.

O algoritmo implementado na linguagem de programação Matlab foi realizado por meio da formulação corrotacional, sendo utilizada como descrição cinemática para capturar o comportamento não linear geométrico de treliças e pórticos planos. Com isso, analisou-se várias treliças e pórticos planos clássicos na literatura. Algumas dessas estruturas apresentaram trajetórias de equilíbrio com múltiplos *snap-throughs* e *snap-backs*, permitindo a visualização do comportamento não-linear da estrutura analisada.

Diante das análises realizadas, foi possível observar diferenças significativas entre os modelos mesmo em uma modelagem simplificada. Notou-se a grande importância da consideração dos carregamentos verticais e horizontais, influenciando no sentido e magnitude dos esforços e amplificando os deslocamentos totais, tornando-se representativos para o dimensionamento dos elementos estruturais, tais como: lajes, vigas, pilares e sapatas.

É notável que a carga gerada pela incidência do vento sobre edifícios influencia diretamente nos esforços solitantes na estrutura, o que implica na quantidade de aço necessária para o alcance da estabilidade estrutural, sendo de suma importância que seja avaliada a intensidade e a maneira como incidem os ventos ao projetar-se uma obra.

Por fim, destaca-se que as formulações utilizadas neste trabalho apresentaram boa concordância com os apresentados em outros estudos realizados por outros pesquisadores de referência da área. Vale destacar também que, para alguns problemas, o algoritmo foi capaz de obter a resposta estrutural além daquelas encontrados em alguns trabalhos. Logo, a ferramenta implementada e utilizada para análise dos problemas foi validada e sua performance mostrou-se eficiente.

5.1 Sugestões para trabalhos futuros

A seguir mencionam-se algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Inclusão de formulações para análises estruturais que considerem a não-linearidade física do material através de prescrições normativas;
- Extensão dos processos não-lineares discutidos nesta pesquisa ao módulo de análise de estruturas espaciais (treliças e pórticos);
- Comparação das respostas obtidas com outras fornecidas por softwares comerciais – ANSYS, ABAQUS, SAP 2000 e Eberick, por exemplo.

Referências Bibliográficas

- [1] A., H. G., 2010, *Snap-Through Instability Patterns in Truss Structures*. Relatório Técnico 2383, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia.
- [2] ABNT, 2014, *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*. Rio de Janeiro.
- [3] ABNT, 1998, *NBR 6123: Forças devidas ao vento em edificações*. Rio de Janeiro.
- [4] BATOZ, J. L., DHATT, G., 1979, “Incremental displacement algorithms for nonlinear problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, pp. 1262–1267.
- [5] BELYTSCHKO, T., LIU, W. K., MORAN, B., et al., 2013, “Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures”, *Wiley*.
- [6] BORST, R. D. E. A., 2012, *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. 2nd ed ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley and Sons Ltd.
- [7] CARVALHO, M. F. M. S., 2010, *Formulação corrotacional para análise de vigas com elementos finitos*. Tese de Mestrado, Dissertação (Mestrado) - Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.
- [8] COOK, R., MALKUS, D., PLESHA, M., et al., 2002, *Concepts and applications of finite element analysis*. 4 ed. , John Wiley and Sons.
- [9] CRISFIELD, M. A., 1991, *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Volume 1: Essential ed. Chichester, UK, John Wiley and Sons.
- [10] CUNHA, P. F. D. L., 2017, *Rotinas computacionais para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas*. Tese de Mestrado, Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife.
- [11] GALVÃO, A. S., 2000, *Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Tese de

Mestrado, Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

- [12] GRECO, M., GESUALDO, F. A. R., VENTURINI, W. S., et al., 2006, “Non-linear positional formulation for space truss analysis”, *Finite Elements in Analysis and Design*.
- [13] HARRISON, H. B., 1973, *Computer Methods in Structural Analysis*. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, Estados Unidos.
- [14] KZAM, A. K. L., 2016, *Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio*. Tese de D.Sc., Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.
- [15] LACERDA, E. G. M., 2014, *Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional*. M.Sc. dissertação, UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN.
- [16] LEON, S. E., PAULINO, G. H., PEREIRA, A., et al., 2011, “A unified library of nonlinear solution schemes”, *Applied Mechanics Reviews*, v. 64, n. 4, pp. 040803.
- [17] LOURENÇO, P. B., 2006, *Aplicação da Descrição Cinemática Co-Rotacional na Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliças, Vigas e Cascas*. Tese (doutorado em estruturas e construção civil) - departamento de engenharia civil e ambiental, UnB - Universidade de Brasília, Brasília, DF.
- [18] MAXIMIANO, D. P., SILVA, A. R. D., SILVEIRA, R. A. M., 2014, “Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches”. In: *Rem: Revista Escola de Minas*, pp. v. 67, n. 2, p. 143–150.
- [19] PARASKI, N. V., 2012, *Análise Estática Não Linear de Pórticos Planos via Matlab*. M.Sc. dissertação, UFF - Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda.
- [20] PINHEIRO, L.; SILVEIRA, R. A. M., 2004, “Análise da estabilidade elástica de treliças espaciais”, *Revista Escola de Minas*, v. 57, n. 2, pp. 85–92.
- [21] RIKS, E., 1972, “The application of Newton’s method to the problem of elastic stability”. In: *Journal of Applied mechanics*, pp. v. 39, n. 4, p. 1060–1065.

- [22] RITTO CORRÊA, M., 2019, *Análise geometricamente não linear de pórticos*. 2019 - revisão de 2022 ed. , Texto de apoio disponibilizado no sistema fenix, IST.
- [23] ROCHA SEGUNDO, J. D. S., 2019, *Estratégias numéricas para otimização da solução não linear de problemas estruturais*. Tese de Mestrado, Dissertação (Mestrado) - UFPO - Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto.
- [24] RODRIGUES, P. F. N., VARELA, W. D., SOUZA, R. A., 2008, “Análise de Estratégias de Solução do Problema Não-linear”, *Revista de Ciência e Tecnologia*, v. 8, n. 2, pp. 36–49.
- [25] SO, A. K. W.; CHAN, S. L., 1991, *Buckling and Geometrically Nonlinear Analysis of Frames Using One Element*. Member. J. Construct. Steel Research.
- [26] SOUZA, L. A. F., CASTELANI, E. V., SHIRABAYASHI, W. V. I., et al., 2017, “Métodos iterativos de terceira e quarta ordem associados à técnica de comprimento de arco linear”, *Ciência e Engenharia*, v. 26, n. 1, pp. 39–49.
- [27] WEMPNER, G., 1969, “Finite Elements, Finite Rotations and Small Strains of Flexible Shells”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 5, pp. 117–153.
- [28] YAW, L. L., 2009, “Nonlinear Static - Explicit and Implicit Analysis Example”, *Walla Walla University*.
- [29] YAW, L. L., 2009, “2D Co-rotational Truss Formulation”, *Walla Walla University*.

Apêndice A

Revisão de Normas Técnicas

O conhecimento de todas as forças que atuam nas estruturas é imprescindível para o cálculo estrutural independente de qual for o tipo estrutura aplicada. É usual encontrar a adoção de diversas hipóteses que simplifiquem as ações atuantes nas edificações, devido à dificuldade na inclusão de cargas variáveis responsáveis por atender os requisitos referentes à ruína. Um exemplo disso é a força global do vento, que é a resultante de todas as forças exercidas pelo vento sobre uma edificação ou parte dela segundo.

Visto a dificuldade de avaliar essas ações importantes para a segurança e estabilidade da estrutura, a norma da ABNT: NBR 6123/1988 - Forças devidas ao vento em edificações - fixa condições exigíveis na consideração das forças devidas a ação estática e dinâmica do vento, para efeitos de cálculo de edificações, que foi desenvolvido neste trabalho.

As cargas ocasionadas ao vento resultam das forças exercidas pela energia cinética de uma massa de ar em movimento, esta que é capaz de produzir uma combinação de pressão direta, negativa ou de sucção, podendo também promover esforços sobre os edifícios e os demais obstáculos em seu caminho. De forma generalizada, entende-se que as cargas de vento estão aplicadas de forma normal, ou ortogonal, as superfícies afetadas da edificação.

Para efeitos da NBR-6123/1988 o barlavento é considerado como a região onde sopra o vento, em relação a edificação. O reticulado é considerado como toda estrutura constituída por barras retas. A sobrepressão é a pressão efetiva acima da pressão atmosférica de referência (sinal positivo). Já o sotavento é a região oposta àquela de onde sopra o vento, em relação à edificação. Considera-se ainda que a sucção a pressão efetiva abaixo da pressão atmosférica de referência (sinal negativo). Considera-se ainda a superfície frontal como a superfície definida pela projeção ortogonal da edificação, estrutura ou elemento estrutural sobre um plano perpendicular à direção do vento ("superfície de sombra").

Por último, a velocidade básica do vento V_0 é a velocidade de uma rajada de

3s, excedida em média uma vez em 50 anos, a 10m acima do terreno, em campo aberto e plano. O vento é uma massa de ar em movimento. As edificações e as demais estruturas representam obstáculos que desviam ou impedem a passagem do vento, transformando a energia cinética da massa de ar em movimento numa possível energia de pressão.

O tema surgiu devido a dificuldade de mensuração de cargas variáveis nas estruturas, trazendo à tona o uso indispensável da norma ABNT-NBR 6123/1988 que aborda as forças devidas ao vento em edificações no cálculo estrutural, independente dos materiais aplicados na edificação. O vento exerce efeitos de pressões e sucções nas estruturas, de formas variadas, contínuas ou intermitentes, e em consequência traz efeitos indesejáveis ao calculista.

A.1 NBR 6123 (1988) – Forças devido ao vento em edificações

Para a determinação das Ações do Vento nas estruturas de edifícios são adotadas prescrições da norma brasileira “NBR 6123 (1988) – Forças devido ao vento em edificações”, da ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas –, que regulamenta um procedimento de projeto para o cálculo das forças devido ao vento e seus efeitos nas estruturas de edifícios.

As pressões dinâmicas do vento são transformadas em forças estáticas, atuando na superfície perpendicular à direção do vento. Em termos de análise do efeito do vento em edifícios necessita-se conhecer a componente da força que atuante na direção do vento. Esta força é chamada de Força de Arrasto (F_a), sendo determinada a partir da equação 3.1, apresentada pela NBR 6123.

$$F_a = C_a q A, \quad (\text{A.1})$$

onde:

C_a = coeficiente de arrasto;

q = pressão de obstrução;

A = área da superfície perpendicular à direção do vento.

• Pressão de Obstrução do Vento

A pressão de obstrução (q_w) é determinada através da equação, apresentada pela NBR 6123, deduzida a partir do Teorema de Bernoulli.

$$q = 0,613 V_k^2, \quad (\text{A.2})$$

onde:

V_k = velocidade característica do vento (m/s);

q = pressão de obstrução;

A.1.1 Velocidade Característica do Vento

Denomina-se velocidade característica do vento a velocidade utilizada no cálculo da pressão dinâmica nas estruturas obtidas a partir da velocidade básica corrigida por fatores de ajuste que levam em consideração a topografia, a rugosidade do terreno, as dimensões da edificação e um fator estatístico, segundo a equação, apresentada pela NBR 6123 (1988).

$$V_k = S_1 S_2 S_3 V_0, \quad (\text{A.3})$$

onde:

S_1 : fator topográfico;

S_2 : depende da rugosidade do terreno, dimensões da edificação e altura sobre o terreno;

S_3 : fator estatístico;

V_0 : velocidade básica do vento.

A.1.2 Velocidade Básica do Vento

A velocidade básica do vento é, por definição, a velocidade de uma rajada com duração de três segundos, com probabilidade de ser superada uma vez a cada 50 anos, a 10 metros acima do terreno, em campo aberto e plano.

Os valores da velocidade básica são obtidos a partir do gráfico das isopletras, apresentado pela NBR 6123 (1988), o qual foi elaborado a partir do registro de diversas estações meteorológicas.

A.1.3 Fator Topográfico S_1

O fator S_1 leva em consideração a influência da topografia local na variação da velocidade do vento. Caso seja necessário um conhecimento mais preciso da influência do relevo, ou se a aplicação destas indicações tornar-se difícil pela complexidade do relevo, deve-se recorrer a ensaios de modelos topográficos em túnel de vento ou a medida anemométrica no próprio terreno onde será implantada a edificação.

Segundo o item 5.2 da NBR 6123, o fator topográfico é determinado como se segue:

- Terreno plano ou fracamente acidentado - $S_1 = 1,00$;

- Taludes e morros;
- Taludes e morros alongados nos quais pode ser admitido um fluxo de ar bidimensional.

Nos morros e taludes: $S_1 = 1,00$. Nos demais pontos (S_1 é uma função $S_1(z)$):

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_1(z) = 1.00, & \theta \leq 3 \\ S_1(z) = 1.00 + (2.5 - z/d)\text{tg}(\theta - 3) \geq 1.00, & 6 \leq \theta \leq 17 \\ S_1(z) = 1.00 + (2.5 - z/d)0,31 \geq 1.00, & \theta \geq 45 \\ \text{interpolar linearmente,} & 3 < \theta < 6 \text{ e } 17 < \theta < 45 \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

S_1 = fator topográfico;

z = altura medida a partir da superfície do terreno no ponto considerado;

d = diferença de nível entre a base e o topo do talude ou morro;

θ = inclinação média do talude ou encosta do morro.

A.1.4 Fator S_2

De acordo com a NBR 6123, o fator S_2 considera o efeito combinado da rugosidade do terreno, da variação da velocidade do vento com altura acima do terreno e das dimensões da edificação ou parte dela.

Em ventos fortes em estabilidade neutra a velocidade do vento aumenta com a altura acima do terreno. Este aumento depende da rugosidade do terreno e do intervalo de tempo considerado na determinação da velocidade do vento. Este intervalo de tempo está relacionado com as dimensões da edificação, pois edificações pequenas e elementos de edificações são mais afetadas por rajadas de curta duração do que grandes edificações. Para estas, é mais adequado considerar o vento médio calculado com um intervalo de tempo maior.

Rugosidade do terreno

A NBR 6123 classifica a rugosidade do terreno em cinco categorias que abrangem desde superfícies lisas de grandes dimensões a terrenos cobertos por obstáculos numerosos, grande, altos e pouco espaçados. A norma considera em seu item 5.5, os casos de transição de rugosidade.

Categorias de Rugosidade de Terreno

- Categoria I: Superfícies lisas de grandes dimensões, com mais de 5 km de extensão, na direção e sentido do vento incidente.
 - mar calmo; - lagos e rios; - pântano sem vegetação.

- Categoria II: Terrenos abertos em nível ou aproximadamente em nível, com poucos obstáculos isolados, tais como árvores e edificações baixas.

- zonas costeiras planas; - pântanos com vegetação rala; - campos de aviação; - pradarias e charnecas; - fazendas sem sebes ou muros.

A cota média do topo dos obstáculos é considerada inferior ou igual a 1 m.

- Categoria III: Terrenos planos ou ondulados com obstáculos, tais como sebes ou muros, poucos quebra-ventos de árvores, edificações baixas e escarpas.

- granjas e casas de campo (com exceção das partes com mato); - fazendas com sebes e/ou muros; - subúrbios a considerável distância do centro, com casas baixas e esparsas.

A cota média do topo dos obstáculos é considerada igual a 3 m.

- Categoria IV: Terrenos cobertos por obstáculos numerosos e pouco espaçados, em zona florestais, industriais ou urbanizados.

- zonas de parques ou bosques com muitas árvores; - cidades pequenas e seus arredores; - subúrbios densamente construídos em grandes cidades; - áreas industriais plena ou parcialmente desenvolvidas.

A cota média do topo dos obstáculos é considerada igual a 10 m.

- Categoria V: Terrenos cobertos por obstáculos numerosos, grandes, altos e pouco espaçados.

- florestas com árvores altas de copas isoladas; - centros de grandes cidades; - complexos industriais bem desenvolvidos.

A cota média do topo dos obstáculos é considerada igual ou superior a 10 m.

Dimensões da Edificação

A velocidade do vento varia continuamente e seu valor médio é calculado sobre qualquer intervalo de tempo. O mais curto desses intervalos é de três segundos e corresponde a rajadas capazes de envolver obstáculos com dimensão de até 20 m na direção do vento médio. Aumentando-se o intervalo de tempo para o cálculo da velocidade média, aumenta-se a distância abrangida pela rajada.

Para a definição das partes da edificação a considerar na determinação das ações do vento é necessário considerar características construtivas ou estruturais que originem pouca ou nenhuma continuidade estrutural ao longo da edificação, tais como:

- Edificações com juntas que separem a estrutura em duas ou mais partes estruturalmente independentes;

- Edificações com pouca rigidez na direção perpendicular à direção do vento e, por isso, com pouca capacidade de redistribuição de cargas.

A NBR 6123 divide as edificações e suas partes em três classes, com intervalos de tempo para o cálculo da velocidade média de 3, 5 e 10 segundos e dimensões máximas, vertical e horizontal, de 20, 50 e 80 metros. Nas edificações em que a maior dimensão ultrapasse 80 m, o intervalo de tempo é obtido das instruções fornecidas no anexo A da citada norma.

- Classe A: Todas as unidades de vedação, seus elementos de fixação e peças individuais de estrutura sem vedação. Toda edificação na qual a maior dimensão horizontal ou vertical não exceda 20 metros;
- Classe B: Toda edificação, ou parte de edificação, para a qual a maior dimensão horizontal ou vertical da superfície frontal esteja entre 20 e 50 metros;
- Classe C: Toda edificação, ou parte de edificação, para a qual a maior dimensão horizontal ou vertical da superfície frontal exceda 50 metros.

Altura Sobre o Terreno

O fator S_2 pode ser obtido a partir da equação A.5 ou através da tabela 2 da NBR 6123, sendo permitida a interpolação linear entre os valores apresentados. Na equação A.5, os parâmetros b , F_r e p são retirados da tabela 1 da NBR 6123.

$$S_2 = bF_r(z/10)^p, \quad (\text{A.5})$$

onde:

b = parâmetros meteorológicos;

F_r = fator de rajada, sendo sempre o correspondente à categoria II;

p = expoente da lei potencial de variação de S_2 ;

z = altura medida a partir da superfície do terreno no ponto considerado.

Os parâmetros b , F_r e p são chamados de parâmetros meteorológicos e a aplicação da equação é restringida pela altura z_g , que define o contorno superior da camada atmosférica. O fator de rajada deve ser tomado sempre o correspondente à categoria II.

A.1.5 Fator estatístico S_3

O fator S_3 , baseado em conceitos estatísticos, considera o grau de segurança requerido e a vida útil da edificação. O grau de segurança necessário é função da finalidade da edificação, que é classificada pela norma em cinco grupos dentro

desses critérios. O nível de probabilidade, 63%, e a vida útil, 50 anos, adotados são considerados adequados para edificações normais destinadas a moradias, hotéis, escritórios, etc. Na falta de uma norma específica sobre segurança nas edificações ou de indicações correspondentes na norma estrutural, os valores mínimos do fator S_3 são os indicados na tabela 3 da NBR 6123.

É possível também se obter S_3 para outros níveis de probabilidade e vida útil a partir da expressão A.6, observando-se que os valores encontrados não podem ser inferiores aos da tabela.

$$S_3 = 0.54 \left[-\frac{\ln(1 - P_m)}{m} \right]^{-0.157}, \quad (\text{A.6})$$

onde:

P_m = probabilidade de ocorrência;

m = período de retorno ou tempo de recorrência.

A.1.6 Coeficientes de arrasto C_a

Os coeficientes de arrasto indicados na norma NBR6123 são aplicáveis a corpos de seção constante ou fracamente variável.

Para a determinação do coeficiente de arrasto para vento incidindo perpendicularmente a cada uma das fachadas de uma edificação retangular em planta e assente no terreno, deve-se utilizar o gráfico da figura 4 da NBR 6123, para o caso de vento de baixa turbulência, ou o gráfico da figura 3 da NBR 6123, para vento de alta turbulência. Nestes gráficos, os coeficientes de arrasto são dados em função das relações h/l_1 e l_1/l_2 .

Onde:

h = altura da uma edificação acima do terreno, medida até o topo da platibanda ou nível do beiral;

l_1 = largura: dimensão horizontal de uma edificação perpendicular à direção do vento. Dimensão de referência na superfície frontal de uma edificação;

l_2 = profundidade: dimensão de uma edificação na direção do vento.

Uma edificação pode ser considerada em vento de alta turbulência quando sua altura não excede duas vezes a altura média das edificações nas vizinhanças, estendendo-se estas, na direção e no sentido do vento incidente, a uma distância mínima de:

- 500 m, para uma edificação de até 40 m de altura;
- 1000 m, para uma edificação de até 55 m de altura;
- 2000 m, para uma edificação de até 70 m de altura;

- 3000 m, para uma edificação de até 80 m de altura.

A.2 NBR 6118 (2014) – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento

Para a determinação das ações de cálculo nas lajes, vigas e pilares foi utilizado a Norma NBR 6118, que está descrita a seguir:

A.2.1 Ações a considerar

Na análise estrutural deve ser considerada a influência de todas as ações que possam produzir efeitos significativos para a segurança da estrutura em exame, levando-se em conta os possíveis estados limites últimos e os de serviço.

Os pórticos de contraventamento que compõem a estrutura do edifício em estudo estão submetidos a cargas ou ações. Os dimensionamentos dos elementos estruturais são realizados para que estes componentes em conjunto sejam capazes de suportar os carregamentos aplicados. A estrutura é calculada de acordo com as normas NBR 6118:2014, NBR 6120:1980 e NBR 6123:1988.

A.2.2 Classificação das ações

As ações a considerar classificam-se de acordo com a NBR 8681 em: permanentes, variáveis e excepcionais.

Para cada tipo de construção, as ações a considerar devem respeitar suas peculiaridades e as normas a ela aplicáveis.

A.2.3 Ações permanentes

Ações permanentes são as que ocorrem com valores praticamente constantes durante toda a vida da construção. As ações permanentes devem ser consideradas com seus valores representativos mais desfavoráveis à segurança.

A.2.4 Ações permanentes diretas

As ações permanentes são aquelas que possuem valores praticamente constantes ou tendem a um valor-limite constante ao longo de toda a vida útil da estrutura. E são subdivididas em ações permanentes diretas e indiretas.

As ações permanentes diretas são constituídas pelo peso próprio da estrutura, pelos pesos dos elementos construtivos fixos, das instalações permanentes e dos

empuxos permanentes. As ações permanentes indiretas são constituídas pelas deformações impostas por retração e fluência do concreto, deslocamentos de apoio, imperfeições geométricas e protensão (NBR 6118:2014).

A.2.5 Peso próprio

Nas construções correntes admite-se que o peso próprio da estrutura seja avaliado conforme descrito a seguir: Massa específica.

Esta Norma se aplica a concretos de massa específica normal que são aqueles que, depois de secos em estufa, têm massa específica (ρ_c) compreendida entre 2 000 kg/m³ e 2 800 kg/m³.

Em não se conhecendo a massa específica real, para efeito de cálculo, pode-se adotar para o concreto simples o valor 2 400 kg/m³ e para o concreto armado 2 500 kg/m³.

Quando se conhecer a massa específica do concreto utilizado, pode-se considerar para valor da massa específica do concreto armado, aquela do concreto simples acrescida de 100 kg/m³ a 150 kg/m³.

A.2.6 Peso dos elementos construtivos fixos e de instalações permanentes

As massas específicas dos materiais de construção correntes podem ser avaliadas com base nos valores indicados na NBR 6120.

De acordo com a NBR 6120:1980, os pesos específicos dos materiais que farão parte da estrutura são:

- Alvenaria de tijolo furado (paredes): 13 kN/m³;
- Concreto armado: 25 kN/m³.

Os pesos das instalações permanentes são considerados com os valores nominais indicados pelos respectivos fornecedores.

A.2.7 Ações variáveis

As ações variáveis, como o próprio nome já diz, são ações que podem variar ao longo da vida útil da estrutura. Essas também são subdivididas em ações variáveis diretas e indiretas.

Ações variáveis diretas

As ações variáveis diretas são constituídas pelas cargas acidentais previstas para o uso da construção, pela ação do vento e da chuva, devendo-se respeitar as prescrições feitas por normas brasileiras específicas.

As ações variáveis diretas estão relacionadas ao uso ou ocupação da estrutura, cargas de vento e esforços provocadas pela ação da água. As cargas provocadas pela utilização do edifício são chamadas de cargas acidentais e estão presentes na norma NBR 6120:1980, os esforços relativos à ação do vento devem ser calculados de acordo com a norma NBR 6123:1988. As ações variáveis indiretas são as cargas dinâmicas e os esforços provocados por variações uniformes ou não uniformes de temperatura.

Como a edificação em estudo é de uso residencial, adotou-se uma carga acidental $q = 2,00 \text{ kN/m}^2$, que está dentro dos limites recomendados pela NBR 6120:1980 para este tipo de edificação.

Cargas acidentais previstas para o uso da construção

As cargas acidentais devem ser dispostas nas posições mais desfavoráveis para o elemento estudado, ressalvadas as simplificações permitidas por normas brasileiras específicas e correspondem normalmente a:

- cargas verticais de uso da construção;
- cargas móveis, considerando o impacto vertical;
- impacto lateral;
- força longitudinal de frenação ou aceleração;
- força centrífuga.

Essas cargas devem ser dispostas nas posições mais desfavoráveis para o elemento estudado, ressalvadas as simplificações permitidas por normas específicas brasileiras.

Ação do vento

Além das cargas verticais, a estrutura em estudo também está submetida a cargas horizontais de vento e esses esforços são cada vez mais significativos à medida que se aumenta a esbeltez da estrutura, ou seja, quanto mais alta a edificação maior será a influência desse carregamento na sua estabilidade.

Os esforços devidos à ação do vento devem ser considerados e determinados de acordo com o prescrito pela NBR 6123 permitindo-se o emprego de regras simplificadas previstas em normas brasileiras específicas.

Apêndice B

Resultados dos Esforços

B.1 Pórtico de Múltiplos Andares

Tabela B.1: Esforço Normal - Linear e Não-Linear - Pórtico de Múltiplos Andares.

Elem	N (nó i) kN			N (nó j) kN		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
1	-2,4190E+02	-1,4206E+02	-70,2802	-2,4190E+02	-1,4206E+02	-70,2802
2	-2,3730E+02	-1,5351E+02	-54,5828	-2,3730E+02	-1,5351E+02	-54,5828
3	-2,3160E+02	-1,7129E+02	-35,2093	-2,3160E+02	-1,7129E+02	-35,2093
4	-2,2090E+02	-1,8083E+02	-22,1589	-2,2090E+02	-1,8083E+02	-22,1589
5	-2,0500E+02	-1,7996E+02	-13,9142	-2,0500E+02	-1,7996E+02	-13,9142
6	-1,8390E+02	-1,6923E+02	-8,6687	-1,8390E+02	-1,6923E+02	-8,6687
7	-1,5750E+02	-1,4962E+02	-5,2667	-1,5750E+02	-1,4962E+02	-5,2667
8	-1,2590E+02	-1,2204E+02	-3,1629	-1,2590E+02	-1,2204E+02	-3,1629
9	-8,9000E+01	-8,7310E+01	-1,9356	-8,9000E+01	-8,7310E+01	-1,9356
10	-4,6900E+01	-4,6244E+01	-1,4186	-4,6900E+01	-4,6244E+01	-1,4186
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	-5,0000E+01	-4,9972E+01	-0,0560	-5,0000E+01	-4,9972E+01	-0,0560
21	-7,5800E+02	-8,5397E+02	11,2381	-7,5800E+02	-8,5397E+02	11,2381
22	-6,6270E+02	-7,4132E+02	10,6054	-6,6270E+02	-7,4132E+02	10,6054
23	-5,6840E+02	-6,2444E+02	8,9744	-5,6840E+02	-6,2444E+02	8,9744
24	-4,7910E+02	-5,1608E+02	7,1656	-4,7910E+02	-5,1608E+02	7,1656
25	-3,9500E+02	-4,1790E+02	5,4798	-3,9500E+02	-4,1790E+02	5,4798
26	-3,1610E+02	-3,2936E+02	4,0260	-3,1610E+02	-3,2936E+02	4,0260
27	-2,4250E+02	-2,4952E+02	2,8134	-2,4250E+02	-2,4952E+02	2,8134
28	-1,7410E+02	-1,7749E+02	1,9100	-1,7410E+02	-1,7749E+02	1,9100
29	-1,1100E+02	-1,1247E+02	1,3070	-1,1100E+02	-1,1247E+02	1,3070
30	-5,3100E+01	-5,3692E+01	1,1026	-5,3100E+01	-5,3692E+01	1,1026
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
45	-1,0900E+01	-1,1098E+01	1,7841	-1,0900E+01	-1,1098E+01	1,7841
46	-4,1000E+00	-3,2832E+00	-24,8782	-4,1000E+00	-3,2832E+00	-24,8782
47	-1,0800E+01	-1,0831E+01	0,2862	-1,0800E+01	-1,0831E+01	0,2862
48	-4,2000E+00	-3,9596E+00	-6,0713	-4,2000E+00	-3,9596E+00	-6,0713
49	-1,1000E+01	-1,1401E+01	3,5172	-1,1000E+01	-1,1401E+01	3,5172
50	-4,0000E+00	-3,5458E+00	-12,8095	-4,0000E+00	-3,5458E+00	-12,8095

Tabela B.2: Esforço Cortante - Linear e Não-Linear - Pórtico de Múltiplos Andares.

Elem	V (nó i) kN			V (nó j) kN		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
1	4,5400E+01	6,1158E+01	25,7660	4,5400E+01	6,1158E+01	25,7660
2	3,6500E+01	5,6588E+01	35,4987	3,6500E+01	5,6588E+01	35,4987
3	3,2700E+01	4,8797E+01	32,9877	3,2700E+01	4,8797E+01	32,9877
4	2,8500E+01	4,0165E+01	29,0427	2,8500E+01	4,0165E+01	29,0427
5	2,4500E+01	3,2421E+01	24,4317	2,4500E+01	3,2421E+01	24,4317
6	2,0400E+01	2,5486E+01	19,9561	2,0400E+01	2,5486E+01	19,9561
7	1,6300E+01	1,9291E+01	15,5046	1,6300E+01	1,9291E+01	15,5046
8	1,2200E+01	1,3713E+01	11,0333	1,2200E+01	1,3713E+01	11,0333
9	8,2000E+00	8,7288E+00	6,0581	8,2000E+00	8,7288E+00	6,0581
10	4,0000E+00	3,8789E+00	-3,1220	4,0000E+00	3,8789E+00	-3,1220
11	5,9300E+01	8,3517E+01	28,9965	5,9300E+01	8,3517E+01	28,9965
12	6,2000E+01	9,9490E+01	37,6822	6,2000E+01	9,9490E+01	37,6822
13	5,4600E+01	8,7290E+01	37,4499	5,4600E+01	8,7290E+01	37,4499
14	4,7900E+01	7,2849E+01	34,2476	4,7900E+01	7,2849E+01	34,2476
15	4,1100E+01	5,8902E+01	30,2231	4,1100E+01	5,8902E+01	30,2231
16	3,4200E+01	4,6358E+01	26,2263	3,4200E+01	4,6358E+01	26,2263
17	2,7400E+01	3,5105E+01	21,9484	2,7400E+01	3,5105E+01	21,9484
18	2,0500E+01	2,5019E+01	18,0623	2,0500E+01	2,5019E+01	18,0623
19	1,3700E+01	1,5814E+01	13,3679	1,3700E+01	1,5814E+01	13,3679
20	7,1000E+00	8,1546E+00	12,9326	7,1000E+00	8,1546E+00	12,9326
21	4,5300E+01	6,1104E+01	25,8641	4,5300E+01	6,1104E+01	25,8641
22	3,6500E+01	5,6674E+01	35,5966	3,6500E+01	5,6674E+01	35,5966
23	3,2700E+01	4,8788E+01	32,9753	3,2700E+01	4,8788E+01	32,9753
24	2,8500E+01	4,0165E+01	29,0427	2,8500E+01	4,0165E+01	29,0427
25	2,4500E+01	3,2414E+01	24,4154	2,4500E+01	3,2414E+01	24,4154
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	4,0000E+00	3,8641E+00	-3,5170	4,0000E+00	3,8641E+00	-3,5170
31	-4,5300E+01	-6,2271E+01	27,2535	-4,5300E+01	-6,2271E+01	27,2535
32	-4,5300E+01	-6,2287E+01	27,2721	-4,5300E+01	-6,2287E+01	27,2721
33	-4,4300E+01	-6,7166E+01	34,0440	-4,4300E+01	-6,7166E+01	34,0440
34	-4,4300E+01	-6,7191E+01	34,0686	-4,4300E+01	-6,7191E+01	34,0686
35	-3,9300E+01	-5,8796E+01	33,1587	-3,9300E+01	-5,8796E+01	33,1587
36	-3,9300E+01	-5,8795E+01	33,1576	-3,9300E+01	-5,8795E+01	33,1576
37	-3,4100E+01	-4,8559E+01	29,7761	-3,4100E+01	-4,8559E+01	29,7761
38	-3,4100E+01	-4,8552E+01	29,7660	-3,4100E+01	-4,8552E+01	29,7660
39	-2,8900E+01	-3,8859E+01	25,6286	-2,8900E+01	-3,8859E+01	25,6286
40	-2,8900E+01	-3,8847E+01	25,6056	-2,8900E+01	-3,8847E+01	25,6056
41	-2,3600E+01	-3,0093E+01	21,5764	-2,3600E+01	-3,0093E+01	21,5764
42	-2,3600E+01	-3,0079E+01	21,5399	-2,3600E+01	-3,0079E+01	21,5399
43	-1,8400E+01	-2,2222E+01	17,1992	-1,8400E+01	-2,2222E+01	17,1992
44	-1,8400E+01	-2,2207E+01	17,1432	-1,8400E+01	-2,2207E+01	17,1432
45	-1,3100E+01	-1,5143E+01	13,4914	-1,3100E+01	-1,5143E+01	13,4914
46	-1,3100E+01	-1,5127E+01	13,3999	-1,3100E+01	-1,5127E+01	13,3999
47	-7,9000E+00	-8,8570E+00	10,8050	-7,9000E+00	-8,8570E+00	10,8050
48	-7,9000E+00	-8,8405E+00	10,6385	-7,9000E+00	-8,8405E+00	10,6385
49	-3,1000E+00	-3,7245E+00	16,7674	-3,1000E+00	-3,7245E+00	16,7674
50	-3,1000E+00	-3,7110E+00	16,4646	-3,1000E+00	-3,7110E+00	16,4646

Tabela B.3: Momento Fletor - Linear e Não-Linear - Pórtico de Múltiplos Andares.

Elem	M (nó i) kN			M (nó j) kN		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
1	-9,7000E+01	-1,5084E+02	35,6935	6,1800E+01	6,3207E+01	2,2260
2	-6,3000E+01	-1,0160E+02	37,9921	9,4600E+01	9,6461E+01	1,9293
3	-5,5500E+01	-7,9823E+01	30,4712	5,8900E+01	9,0967E+01	35,2512
4	-4,8100E+01	-6,3357E+01	24,0810	5,1800E+01	7,7220E+01	32,9189
5	-4,0900E+01	-5,0183E+01	18,4983	4,4700E+01	6,3290E+01	29,3727
6	-3,3800E+01	-3,8660E+01	12,5711	3,7600E+01	5,0541E+01	25,6050
7	-2,6600E+01	-2,8409E+01	6,3677	3,0500E+01	3,9109E+01	22,0128
8	-1,9500E+01	-1,9186E+01	-1,6366	2,3300E+01	2,8809E+01	19,1225
9	-1,2400E+01	-1,0926E+01	-13,4908	1,6200E+01	1,9625E+01	17,4522
10	-5,2000E+00	-3,5331E+00	-47,1795	8,6000E+00	1,0043E+01	14,3682
11	-1,1320E+02	-1,7694E+02	36,0235	9,4400E+01	1,1537E+02	18,1763
12	-1,0900E+02	-1,7776E+02	38,6814	1,0790E+02	1,7046E+02	36,7007
13	-6,4800E+01	-1,4867E+02	56,4135	9,6600E+01	1,5685E+02	38,4125
14	-8,2900E+01	-1,2245E+02	32,2989	8,4900E+01	1,3252E+02	35,9342
15	-7,0800E+01	-9,8241E+01	27,9323	7,2900E+01	1,0791E+02	32,4437
16	-5,8800E+01	-7,6738E+01	23,3756	6,1000E+01	8,5514E+01	28,6667
17	-4,6800E+01	-5,7480E+01	18,5804	4,9000E+01	6,5387E+01	25,0616
18	-3,4800E+01	-4,0204E+01	13,4414	3,7100E+01	4,7363E+01	21,6688
19	-2,2800E+01	-2,4556E+01	7,1510	2,5000E+01	3,0792E+01	18,8101
20	-1,1200E+01	-1,1420E+01	1,9264	1,3600E+01	1,7121E+01	20,5654
21	-9,6900E+01	-1,5077E+02	35,7299	6,1700E+01	6,3093E+01	2,2079
22	-9,4400E+01	-1,0177E+02	7,2418	6,4800E+01	9,6594E+01	32,9151
23	-5,5500E+01	-7,9780E+01	30,4337	5,8900E+01	9,0976E+01	35,2577
24	-4,8100E+01	-6,3353E+01	24,0762	5,1800E+01	7,7223E+01	32,9215
25	-4,0900E+01	-5,0168E+01	18,4739	4,4700E+01	6,3281E+01	29,3627
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	-5,2000E+00	-3,5108E+00	-48,1144	8,6000E+00	1,0014E+01	14,1202
31	1,2480E+02	1,6480E+02	24,2718	-1,0170E+02	-1,4655E+02	30,6039
32	1,0170E+02	1,4658E+02	30,6181	-1,2480E+02	-1,6486E+02	24,2994
33	1,2030E+02	1,7628E+02	31,7563	-1,0120E+02	-1,5954E+02	36,5676
34	1,0120E+02	1,5958E+02	36,5835	-1,2030E+02	-1,7637E+02	31,7911
35	1,0690E+02	1,5432E+02	30,7284	-8,9700E+01	-1,3966E+02	35,7726
36	8,9700E+01	1,3964E+02	35,7634	-1,0690E+02	-1,5433E+02	30,7328
37	9,2700E+01	1,2740E+02	27,2370	-7,7900E+01	-1,1539E+02	32,4898
38	7,7900E+01	1,1537E+02	32,4781	-9,2700E+01	-1,2739E+02	27,2313
39	7,8500E+01	1,0195E+02	23,0015	-6,5900E+01	-9,2343E+01	28,6356
40	6,5900E+01	9,2309E+01	28,6093	-7,8500E+01	-1,0192E+02	22,9788
41	6,4200E+01	7,8950E+01	18,6827	-5,3900E+01	-7,1516E+01	24,6323
42	5,3900E+01	7,1478E+01	24,5922	-6,4200E+01	-7,8917E+01	18,6487
43	4,9900E+01	5,8295E+01	14,4009	-4,1900E+01	-5,2816E+01	20,6680
44	4,1900E+01	5,2775E+01	20,6063	-4,9900E+01	-5,8259E+01	14,3480
45	3,5700E+01	3,9735E+01	10,1548	-2,9900E+01	-3,5981E+01	16,9006
46	2,9900E+01	3,5939E+01	16,8035	-3,5700E+01	-3,9697E+01	10,0688
47	2,1500E+01	2,3158E+01	7,1595	-1,8100E+01	-2,1127E+01	14,3276
48	1,8100E+01	2,1085E+01	14,1570	-2,1500E+01	-2,3118E+01	6,9989
49	8,6000E+01	1,0043E+01	-756,3178	-6,8000E+00	-8,5793E+00	20,7395
50	6,8000E+00	8,5415E+00	20,3887	-8,6000E+00	-1,0014E+01	14,1202

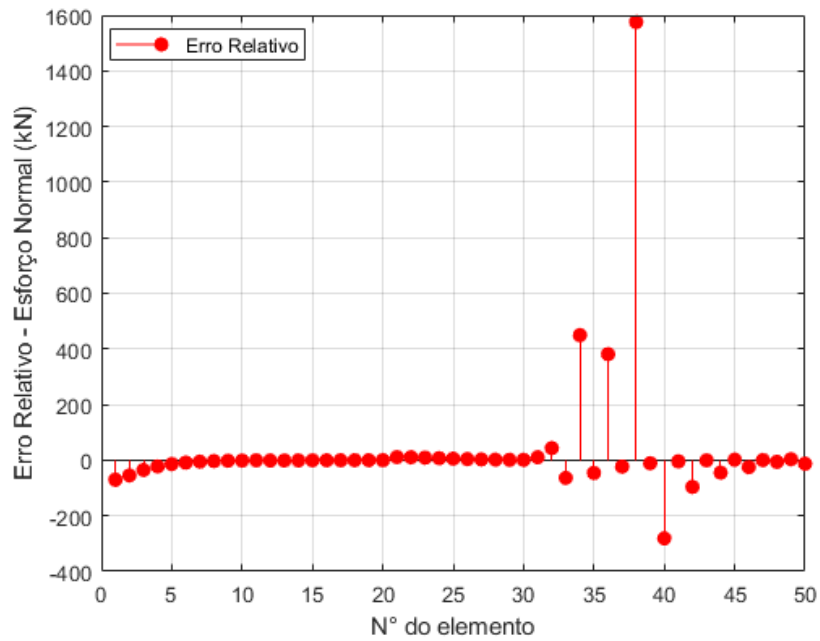


Figura B.1: Erro Relativo - Esforço Normal nos elementos - Pórtico de Múltiplos Andares.

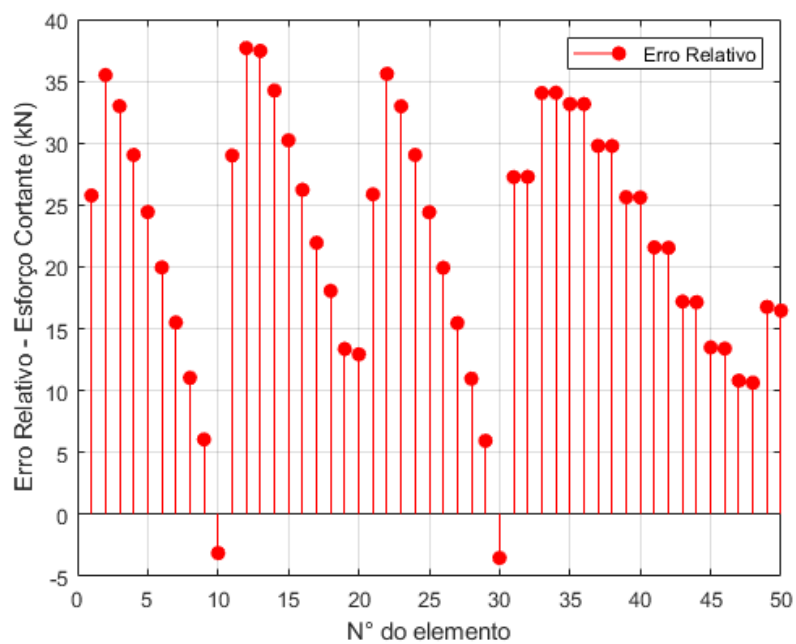


Figura B.2: Erro Relativo - Esforço Cortante nos elementos - Pórtico de Múltiplos Andares.

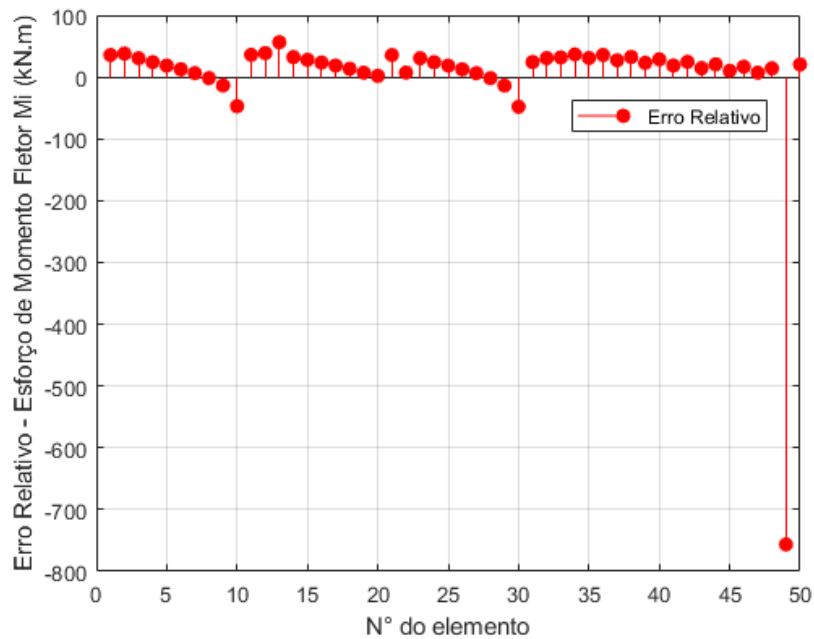


Figura B.3: Erro Relativo - Momento Fletor (nó i) nos elementos - Pórtico de Múltiplos Andares.

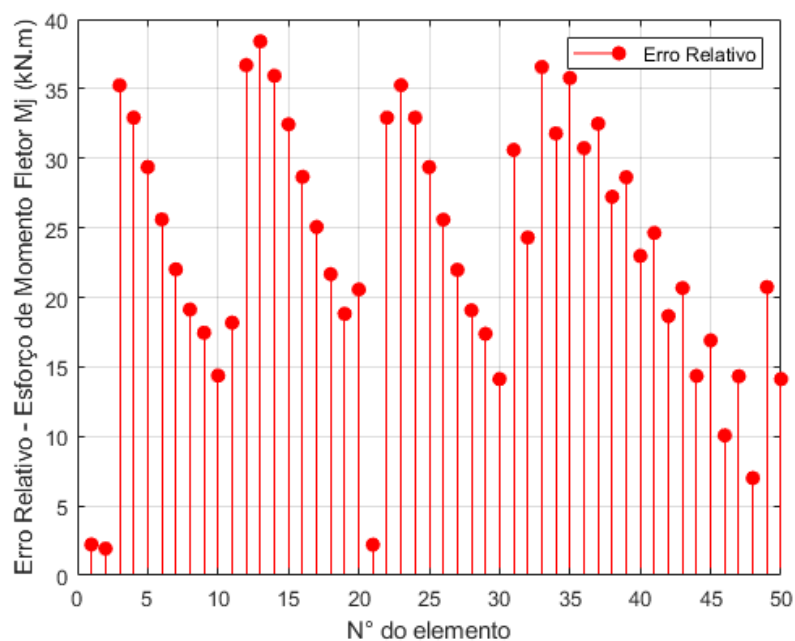


Figura B.4: Erro Relativo - Momento Fletor (nó j) nos elementos - Pórtico de Múltiplos Andares.

B.2 Aplicação - Edifício Residencial

Tabela B.4: Esforço Normal - Linear e Não-Linear - Edifício Residencial.

Elem	N (nó i) kN			N (nó j) kN		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
1	-1,1118E+03	-1,1138E+03	0,1782	-1,1118E+03	-1,1138E+03	0,1782
2	-1,0344E+03	-1,0339E+03	-0,0512	-1,0344E+03	-1,0339E+03	-0,0512
3	-9,5889E+02	-9,5619E+02	-0,2827	-9,5889E+02	-9,5619E+02	-0,2827
4	-8,7842E+02	-8,7520E+02	-0,3673	-8,7842E+02	-8,7520E+02	-0,3673
5	-7,9227E+02	-7,8969E+02	-0,3266	-7,9227E+02	-7,8969E+02	-0,3266
6	-7,0053E+02	-6,9936E+02	-0,1669	-7,0053E+02	-6,9936E+02	-0,1669
7	-6,0337E+02	-6,0402E+02	0,1070	-6,0337E+02	-6,0402E+02	0,1070
8	-5,0103E+02	-5,0354E+02	0,4991	-5,0103E+02	-5,0354E+02	0,4991
9	-3,9373E+02	-3,9778E+02	1,0182	-3,9373E+02	-3,9778E+02	1,0182
10	-2,8177E+02	-2,8661E+02	1,6898	-2,8177E+02	-2,8661E+02	1,6898
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	-5,5306E+02	-5,2831E+02	-4,6851	-5,5306E+02	-5,2831E+02	-4,6851
21	-4,2564E+02	-4,0652E+02	-4,7036	-4,2564E+02	-4,0652E+02	-4,7036
22	-2,9887E+02	-2,8493E+02	-4,8935	-2,9887E+02	-2,8493E+02	-4,8935
23	-1,7268E+02	-1,6354E+02	-5,5901	-1,7268E+02	-1,6354E+02	-5,5901
24	-4,7085E+01	-4,2759E+01	-10,1172	-4,7085E+01	-4,2759E+01	-10,1172
25	-1,4096E+03	-1,4750E+03	4,4325	-1,4096E+03	-1,4750E+03	4,4325
26	-1,2904E+03	-1,3518E+03	4,5433	-1,2904E+03	-1,3518E+03	4,5433
27	-1,1700E+03	-1,2262E+03	4,5873	-1,1700E+03	-1,2262E+03	4,5873
28	-1,0487E+03	-1,0988E+03	4,5631	-1,0487E+03	-1,0988E+03	4,5631
29	-9,2629E+02	-9,6993E+02	4,4998	-9,2629E+02	-9,6993E+02	4,4998
30	-8,0322E+02	-8,4014E+02	4,3951	-8,0322E+02	-8,4014E+02	4,3951
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
40	-1,2407E+03	-1,2439E+03	0,2579	-1,2407E+03	-1,2439E+03	0,2579
41	-1,0739E+03	-1,0766E+03	0,2475	-1,0739E+03	-1,0766E+03	0,2475
42	-9,1277E+02	-9,1412E+02	0,1472	-9,1277E+02	-9,1412E+02	0,1472
43	-7,5702E+02	-7,5662E+02	-0,0533	-7,5702E+02	-7,5662E+02	-0,0533
44	-6,0647E+02	-6,0426E+02	-0,3651	-6,0647E+02	-6,0426E+02	-0,3651
45	-4,6086E+02	-4,5718E+02	-0,8045	-4,6086E+02	-4,5718E+02	-0,8045
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
60	-5,3090E+00	-4,2900E+00	-23,7529	-5,3090E+00	-4,2900E+00	-23,7529
61	-2,2882E+01	-2,0149E+01	-13,5639	-2,2882E+01	-2,0149E+01	-13,5639
62	-1,4016E+01	-1,2297E+01	-13,9790	-1,4016E+01	-1,2297E+01	-13,9790
63	-5,1500E+00	-4,4567E+00	-15,5564	-5,1500E+00	-4,4567E+00	-15,5564
64	-2,2089E+01	-2,1287E+01	-3,7676	-2,2089E+01	-2,1287E+01	-3,7676
65	-1,3521E+01	-1,2943E+01	-4,4657	-1,3521E+01	-1,2943E+01	-4,4657
66	-4,9530E+00	-4,6095E+00	-7,4520	-4,9530E+00	-4,6095E+00	-7,4520
67	-2,1187E+01	-2,2260E+01	4,8203	-2,1187E+01	-2,2260E+01	4,8203
68	-1,2965E+01	-1,3506E+01	4,0056	-1,2965E+01	-1,3506E+01	4,0056
69	-4,7440E+00	-4,7595E+00	0,3257	-4,7440E+00	-4,7595E+00	0,3257
70	-2,0148E+01	-2,3106E+01	12,8019	-2,0148E+01	-2,3106E+01	12,8019
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
80	-9,3430E+00	-1,4314E+01	34,7282	-9,3430E+00	-1,4314E+01	34,7282
81	-3,8500E+00	-6,1031E+00	36,9173	-3,8500E+00	-6,1031E+00	36,9173
82	-2,1617E+01	-1,5978E+01	-35,2923	-2,1617E+01	-1,5978E+01	-35,2923
83	-1,2667E+01	-8,4208E+00	-50,4251	-1,2667E+01	-8,4208E+00	-50,4251
84	-3,7470E+00	-3,7508E-01	-898,9869	-3,7470E+00	-3,7508E-01	-898,9869

Tabela B.5: Esforço Cortante - Linear e Não-Linear - Edifício Residencial.

Elem	V (nó i) kN			V (nó j) kN		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
1	6,4627E+01	6,6143E+01	2,2920	6,4627E+01	6,6143E+01	2,2920
2	5,1898E+01	4,8704E+01	-6,5580	5,1898E+01	4,8704E+01	-6,5580
3	4,5968E+01	4,5190E+01	-1,7216	4,5968E+01	4,5190E+01	-1,7216
4	4,0281E+01	4,0692E+01	1,0100	4,0281E+01	4,0692E+01	1,0100
5	3,4964E+01	3,6236E+01	3,5103	3,4964E+01	3,6236E+01	3,5103
6	2,9815E+01	3,1641E+01	5,7710	2,9815E+01	3,1641E+01	5,7710
7	2,4861E+01	2,6908E+01	7,6074	2,4861E+01	2,6908E+01	7,6074
8	2,0177E+01	2,2042E+01	8,4611	2,0177E+01	2,2042E+01	8,4611
9	1,5614E+01	1,7044E+01	8,3900	1,5614E+01	1,7044E+01	8,3900
10	1,1376E+01	1,1898E+01	4,3873	1,1376E+01	1,1898E+01	4,3873
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	3,6369E+01	4,4798E+01	18,8156	3,6369E+01	4,4798E+01	18,8156
21	2,8545E+01	3,5618E+01	19,8579	2,8545E+01	3,5618E+01	19,8579
22	2,1219E+01	2,6191E+01	18,9836	2,1219E+01	2,6191E+01	18,9836
23	1,4398E+01	1,6391E+01	12,1591	1,4398E+01	1,6391E+01	12,1591
24	8,9490E+00	7,5650E+00	-18,2948	8,9490E+00	7,5650E+00	-18,2948
25	8,4697E+01	8,5384E+01	0,8046	8,4697E+01	8,5384E+01	0,8046
26	8,9691E+01	8,9123E+01	-0,6373	8,9691E+01	8,9123E+01	-0,6373
27	8,0342E+01	8,3814E+01	4,1425	8,0342E+01	8,3814E+01	4,1425
28	7,1176E+01	7,7349E+01	7,9807	7,1176E+01	7,7349E+01	7,9807
29	6,2027E+01	7,0008E+01	11,4001	6,2027E+01	7,0008E+01	11,4001
30	5,3161E+01	6,2046E+01	14,3200	5,3161E+01	6,2046E+01	14,3200
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
40	4,0277E+01	4,0619E+01	0,8420	4,0277E+01	4,0619E+01	0,8420
41	3,4968E+01	3,6183E+01	3,3579	3,4968E+01	3,6183E+01	3,3579
42	2,9818E+01	3,1589E+01	5,6064	2,9818E+01	3,1589E+01	5,6064
43	2,4865E+01	2,6856E+01	7,4136	2,4865E+01	2,6856E+01	7,4136
44	2,0121E+01	2,1989E+01	8,4952	2,0121E+01	2,1989E+01	8,4952
45	1,5620E+01	1,6990E+01	8,0636	1,5620E+01	1,6990E+01	8,0636
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
60	-4,0306E+01	-4,0877E+01	1,3969	-4,0306E+01	-4,0877E+01	1,3969
61	-3,4708E+01	-3,6108E+01	3,8773	-3,4708E+01	-3,6108E+01	3,8773
62	-3,1432E+01	-3,9405E+01	20,2335	-3,1432E+01	-3,9405E+01	20,2335
63	-3,4712E+01	-3,6057E+01	3,7302	-3,4712E+01	-3,6057E+01	3,7302
64	-2,9297E+01	-3,1108E+01	5,8217	-2,9297E+01	-3,1108E+01	5,8217
65	-2,6852E+01	-3,5059E+01	23,4091	-2,6852E+01	-3,5059E+01	23,4091
66	-2,9301E+01	-3,1058E+01	5,6572	-2,9301E+01	-3,1058E+01	5,6572
67	-2,4103E+01	-2,5965E+01	7,1712	-2,4103E+01	-2,5965E+01	7,1712
68	-2,2425E+01	-3,0340E+01	26,0877	-2,2425E+01	-3,0340E+01	26,0877
69	-2,4107E+01	-2,5913E+01	6,9695	-2,4107E+01	-2,5913E+01	6,9695
70	-1,9153E+01	-2,0683E+01	7,3974	-1,9153E+01	-2,0683E+01	7,3974
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
80	-7,1010E+00	-9,8074E+00	27,5955	-7,1010E+00	-9,8074E+00	27,5955
81	-6,2410E+00	-4,3395E+00	-43,8184	-6,2410E+00	-4,3395E+00	-43,8184
82	-2,6730E+00	-3,5194E-01	-659,5045	-2,6730E+00	-3,5194E-01	-659,5045
83	-3,5380E+00	-5,5435E+00	36,1775	-3,5380E+00	-5,5435E+00	36,1775
84	-2,6530E+00	-6,8628E-01	-286,5769	-2,6530E+00	-6,8628E-01	-286,5769

Tabela B.6: Momento Fletor - Linear e Não-Linear - Edifício Residencial.

Elem	M (nó i) kN.m			M (nó j) kN.m		
	Linear	NL	Erro(%)	Linear	NL	Erro(%)
1	-1,2530E+02	-1,3531E+02	7,3978	5,5600E+01	4,9892E+01	-11,4407
2	-7,3500E+01	-7,1993E+01	-2,0933	7,1900E+01	6,4378E+01	-11,6841
3	-6,1200E+01	-6,2704E+01	2,3986	6,7600E+01	6,3828E+01	-5,9096
4	-5,2600E+01	-5,4829E+01	4,0654	6,0200E+01	5,9107E+01	-1,8492
5	-4,5200E+01	-4,7895E+01	5,6269	5,2700E+01	5,3564E+01	1,6130
6	-3,8100E+01	-4,0942E+01	6,9415	4,5400E+01	4,7652E+01	4,7259
7	-3,1300E+01	-3,3885E+01	7,6287	3,8300E+01	4,1456E+01	7,6129
8	-2,4800E+01	-2,6714E+01	7,1648	3,1500E+01	3,5004E+01	10,0103
9	-1,8700E+01	-1,9425E+01	3,7323	2,5100E+01	2,8297E+01	11,2980
10	-1,3000E+01	-1,2034E+01	-8,0273	1,8900E+01	2,1279E+01	11,1800
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	-4,8300E+01	-5,9531E+01	18,8658	5,3500E+01	6,5903E+01	18,8201
21	-3,7500E+01	-4,6428E+01	19,2298	4,2400E+01	5,3301E+01	20,4518
22	-2,7400E+01	-3,3029E+01	17,0426	3,2000E+01	4,0305E+01	20,6054
23	-1,8100E+01	-1,9422E+01	6,8067	2,2200E+01	2,6474E+01	16,1441
24	-1,0400E+01	-7,5258E+00	-38,1913	1,4700E+01	1,3656E+01	-7,6450
25	-1,4400E+00	-1,5207E+02	99,0531	9,3100E+01	8,7006E+01	-7,0041
26	-1,2740E+02	-1,2957E+02	1,6748	1,2370E+02	1,1998E+02	-3,1005
27	-1,1000E+00	-1,1699E+02	99,0597	1,1500E+02	1,1769E+02	2,2857
28	-9,6800E+01	-1,0679E+02	9,3548	1,0250E+02	1,0979E+02	6,6399
29	-8,4000E+01	-9,5932E+01	12,4380	8,9700E+01	1,0009E+02	10,3807
30	-7,1600E+01	-8,4350E+01	15,1156	7,7200E+01	8,9380E+01	13,6272
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
40	-5,2600E+01	-5,4752E+01	3,9305	6,0200E+01	5,8982E+01	-2,0650
41	-4,5200E+01	-4,7837E+01	5,5125	5,2700E+01	5,3475E+01	1,4493
42	-3,8100E+01	-4,0879E+01	6,7981	4,5400E+01	4,7571E+01	4,5637
43	-3,1300E+01	-3,3820E+01	7,4512	3,8300E+01	4,1377E+01	7,4365
44	-2,4800E+01	-2,6645E+01	6,9244	3,1500E+01	3,4924E+01	9,8041
45	-1,8700E+01	-1,9351E+01	3,3642	2,5100E+01	2,8221E+01	11,0591
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
60	9,6200E+01	9,7569E+01	1,4031	-1,0540E+02	-1,0682E+02	1,3293
61	9,0800E+01	9,4505E+01	3,9204	-8,2800E+01	-8,6037E+01	3,7623
62	7,8600E+01	9,8520E+01	20,2192	-7,8600E+01	-9,8505E+01	20,2071
63	8,2800E+01	8,5932E+01	3,6447	-9,0800E+01	-9,4352E+01	3,7646
64	7,6700E+01	8,1536E+01	5,9311	-6,9800E+01	-7,4005E+01	5,6820
65	6,7100E+01	8,7653E+01	23,4481	-6,7100E+01	-8,7642E+01	23,4385
66	6,9800E+01	7,3900E+01	5,5480	-7,6700E+01	-8,1389E+01	5,7612
67	6,3100E+01	6,8170E+01	7,4373	-5,7400E+01	-6,1654E+01	6,8998
68	5,6100E+01	7,5855E+01	26,0431	-5,6100E+01	-7,5847E+01	26,0353
69	5,7400E+01	6,1543E+01	6,7319	-6,3100E+01	-6,8022E+01	7,2359
70	5,0200E+01	5,4429E+01	7,7698	-4,5600E+01	-4,8987E+01	6,9141
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
80	1,7800E+01	2,4470E+01	27,2579	-1,7800E+01	-2,4567E+01	27,5451
81	1,4800E+01	9,9069E+00	-49,3908	-1,6400E+01	-1,1791E+01	-39,0891
82	7,5000E+00	1,9138E+00	-291,8905	-5,9000E+00	1,5408E-01	3929,1796
83	8,8000E+00	1,3810E+01	36,2781	-8,8000E+00	-1,3907E+01	36,7225
84	5,8000E+00	4,3471E-01	-1234,2228	-7,4000E+00	-2,9967E+00	-146,9383

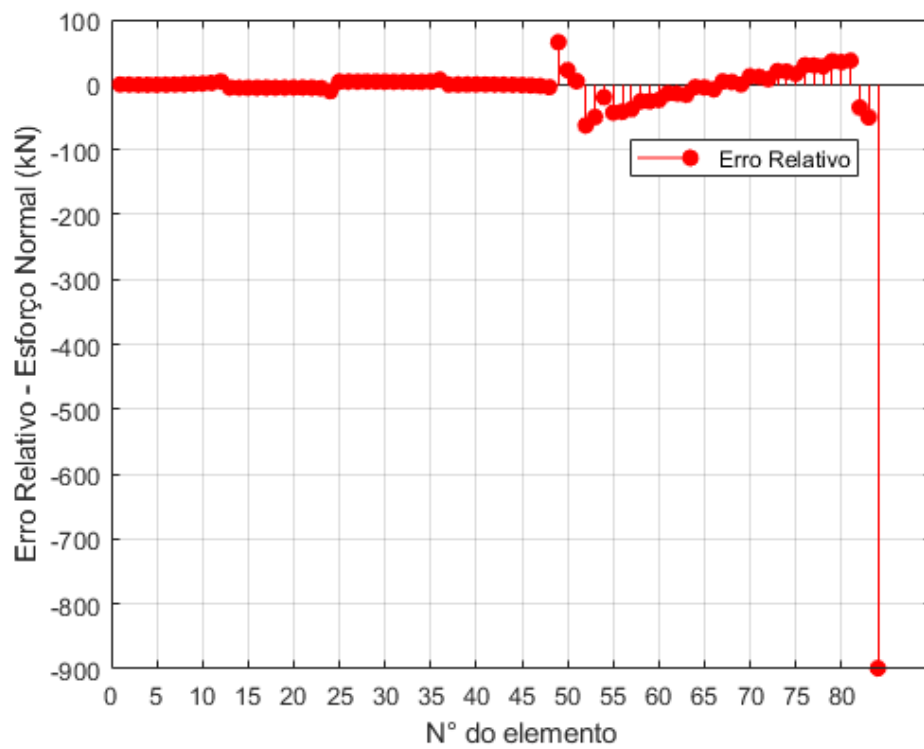


Figura B.5: Erro Relativo - Esforço Normal nos elementos - Edifício Residencial.

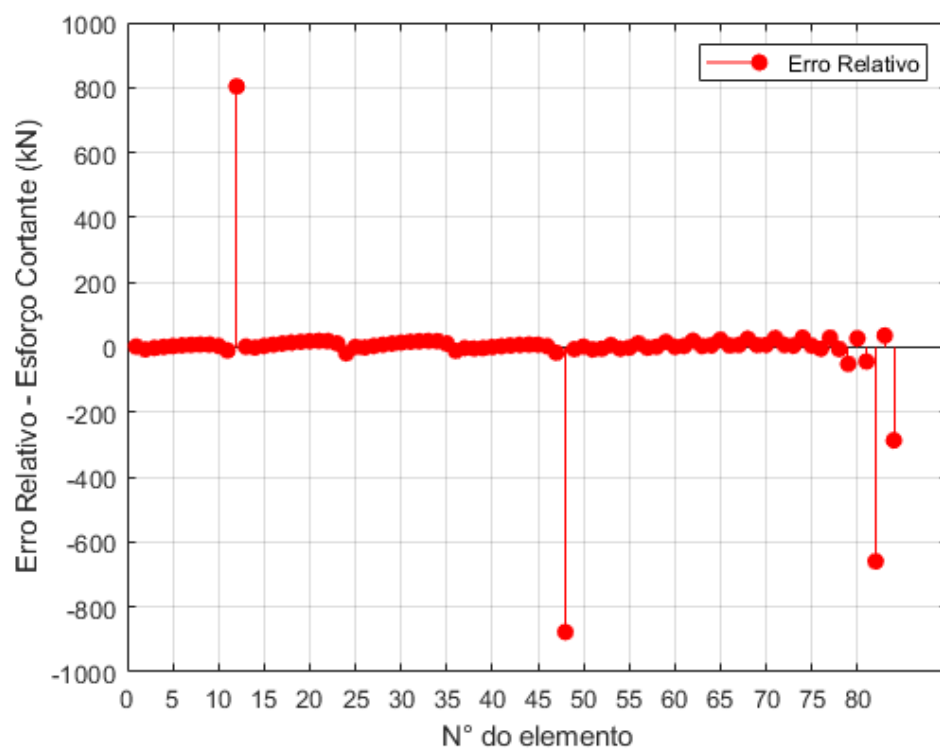


Figura B.6: Erro Relativo - Esforço Cortante nos elementos - Edifício Residencial.

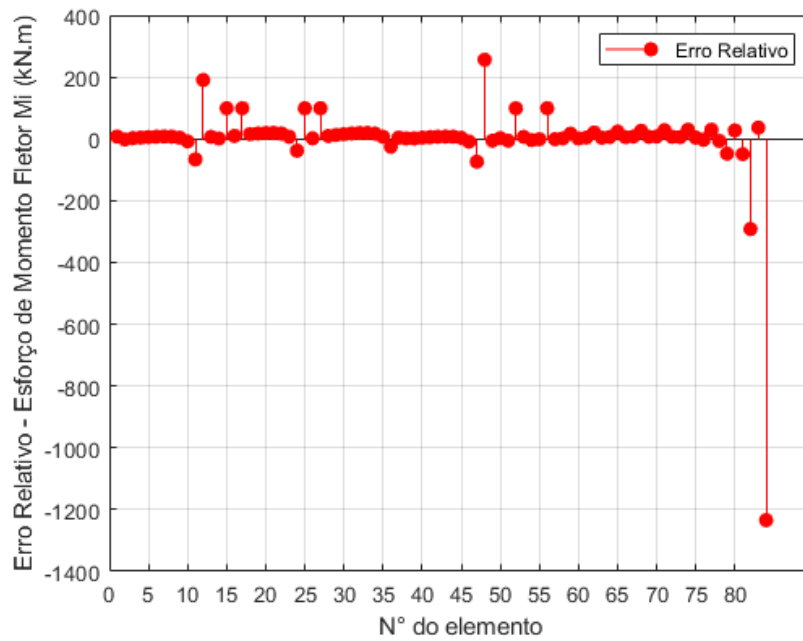


Figura B.7: Erro Relativo - Momento Fletor (nó i) nos elementos - Edifício Residencial.

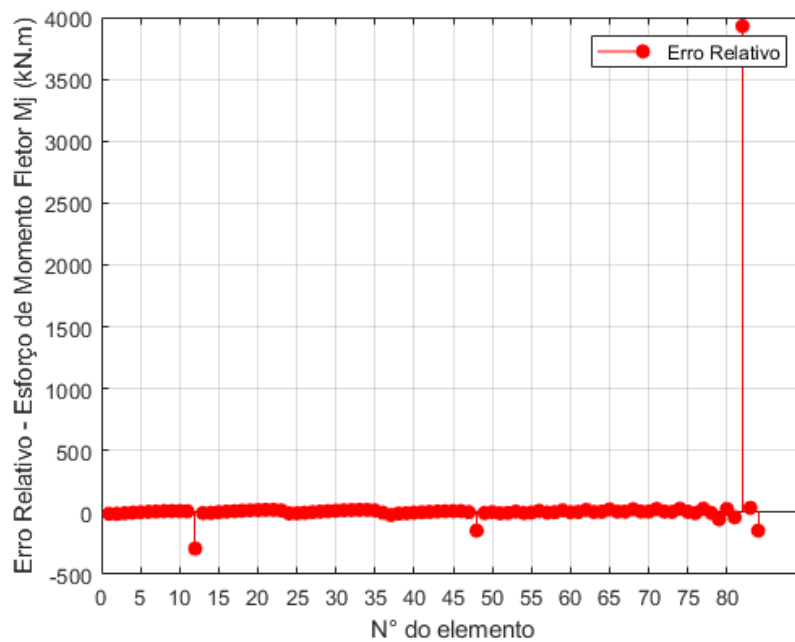


Figura B.8: Erro Relativo - Momento Fletor (nó j) nos elementos - Edifício Residencial.