



Robson Alves Dantas

# Análise da energia de Casimir no cenário de violação de Lorentz do tipo éter com altas derivadas

João Pessoa - PB

2023

**Robson Alves Dantas**

**Análise da energia de Casimir no cenário de violação de  
Lorentz do tipo éter com altas derivadas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito para a conclusão do Curso de Mestrado em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Centro de Ciências Exatas e da Natureza – CCEN

Programa de Pós-graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello

João Pessoa - PB

2023

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

D192a Dantas, Robson Alves.

Análise da energia de Casimir no cenário de violação de Lorentz do tipo éter com altas derivadas / Robson Alves Dantas. - João Pessoa, 2023.  
80 f. : il.

Orientação: Eugênio Ramos Bezerra de Mello.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Efeito Casimir. 3. Violação de Lorentz. 4. Campo escalar. I. Mello, Eugênio Ramos Bezerra de. II. Título.

UFPB/BC

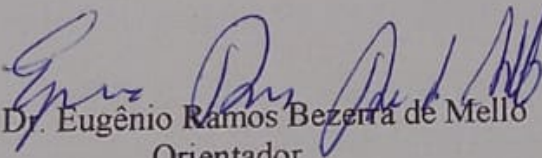
CDU 53(043)

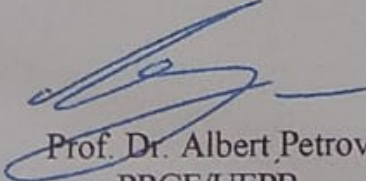


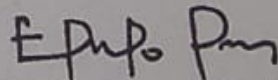
Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
**Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física**

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** do aluno **Robson Alves Dantas**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos vinte e seis dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e três, às 10:00, nas dependências do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Gravitação e Cosmologia, de **Robson Alves Dantas**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Eugênio Ramos Bezerra de Mello (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Albert Petrov (UFPB) e Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Eugênio Ramos Bezerra de Mello comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada "*Análise da energia de Casimir no cenário de violação de Lorentz do tipo éter com altas derivadas*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **26 de julho de 2023**.

  
Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello  
Orientador

  
Prof. Dr. Albert Petrov  
PPGF/UFPB

  
Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos  
UFCG

*Dedico esse trabalho a minha avó Maria Vieira de Oliveira (in memoriam).*

# Agradecimentos

Agradeço a minha mãe Francileide Vieira Dantas e meu pai Cicero Vieira Dantas pelo amor, carinho e educação que me deram durante todas as fases da minha vida, e por terem trabalhado duro para que eu pudesse seguir meu sonho de se tornar um cientista. Aos meus irmãos Romário Alves Dantas e Rodolfo Alves Dantas, meus avós, tios(as), primos(as) e todos os parentes que acreditaram em mim e me apoiaram. Amo todos vocês.

Agradeço aos meus amigos Crizam César, Matheus Jabes e Lameque Maciel, não só pelos momentos de descontração, mas também pelo alto estímulo intelectual e inspiração que me fornecem todos os dias.

Agradeço a pessoa que deu significado a minha existência, a melhor artista do mundo, minha namorada, melhor amiga e futura esposa, Nayara França. Nossos filhos serão lindos e inteligentes, como ela.

Agradeço ao meu orientador Eugênio Ramos Bezerra de Mello. Agradeço também aos professores Renato Geraldo Rubio, Herondy Francisco Santana Mota e todos os professores que passaram em minha vida acadêmica, que moldaram o profissional que sou hoje.

Agradeço a todos os trabalhadores(as) que de forma direta e indireta possibilitam que possamos contribuir ao avanço da ciência no Brasil.

Ao CNPQ, pelo suporte financeiro.

*“Somos feitos de poeira de estrelas. Nós somos uma maneira de o cosmos se  
autoconhecer.”*

(Carl Sagan)

# Resumo

Nessa Dissertação, estudamos o efeito Casimir associado a um campo quântico, escalar, real e massivo, confinado entre duas placas paralelas, em um cenário de quebra de simetria de Lorentz. A violação de Lorentz adotada é uma composição de dois procedimentos distintos de quebra de simetria. Uma, é a presença do vetor constante no contexto da violação do tipo éter, e a outra tem origem no modelo de Hořava-Lifshitz, onde há uma anisotropia no espaço-tempo, com altas derivadas no espaço. Adotamos que os campos satisfazem as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mistas, nas placas. Para cada condição, calculamos a energia de Casimir por unidade de área, admitindo que o vetor constante seja tipo espaço, sendo paralelo e perpendicular as placas. Mostramos que a modificação da energia de Casimir causada pela violação de Lorentz, depende das condições de contorno adotada, da direção do vetor constante e da ordem da derivada espacial.

**Palavras-chave:** Efeito Casimir. Violação de Lorentz. Campo Escalar.



# Abstract

In this Dissertation, we study the Casimir effect associated with a quantum, scalar, real and massive field, confined between two parallel plates, in a Lorentz symmetry breaking scenario. The adopted Lorentz violation is a combination of two different symmetry breaking procedures. One is the presence of the constant vector in the context of the aetherlike violation, and the other originates from the Hořava-Lifshitz model, where there is an anisotropy in space-time, with high derivatives in space. We assume that the fields obey the Dirichlet, Neumann and mixed boundary conditions on the plates. For each condition, we calculate the Casimir energy per unit area, assuming that the constant vector is space-like, being parallel and perpendicular to the plates. We show that the modification of the Casimir energy caused by the Lorentz violation depends on the adopted boundary conditions, the direction of the constant vector and the order of the spatial derivative.

**Keywords:** Casimir Effect. Lorentz Violation. Scalar Field.

# Lista de ilustrações

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Sistemas deslocando-se com velocidade $\mathbf{V}$ entre si. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                | 20 |
| Figura 2 – Interações entre partículas virtuais, onde as linhas retilíneas representam elétrons ou pósitrons virtuais e as linhas ondulatórias representam os fótons virtuais. . . . .                                                                                                                                                         | 28 |
| Figura 3 – Desenho esquemático do experimento de Sparnaay, realizado em 1958. .                                                                                                                                                                                                                                                                | 29 |
| Figura 4 – Duas placas paralelas de área $L^2$ separadas por uma distância $a \ll L$ . .                                                                                                                                                                                                                                                       | 30 |
| Figura 5 – A energia de Casimir por unidade de área multiplicada por $a^3$ como função de $ma$ , no caso $u^\mu = (0, 1, 0, 0)$ , e o campo obedecendo a condição de contorno de Dirichlet, para $\epsilon = 2$ no gráfico a esquerda, e $\epsilon = 3$ no gráfico a direita. Em ambos os gráficos consideramos $\frac{l}{a} = 0.01$ . . . . . | 50 |
| Figura 6 – A energia de Casimir por unidade de área multiplicada por $a^3$ como função de $ma$ , no caso $u^\mu = (0, 0, 0, 1)$ , e o campo obedecendo a condição de contorno de Dirichlet, para $\epsilon = 2$ no gráfico a esquerda, e $\epsilon = 3$ no gráfico a direita. Em ambos os gráficos consideramos $\frac{l}{a} = 0.01$ . . . . . | 55 |
| Figura 7 – A energia de Casimir por unidade de área multiplicada por $a^3$ como função de $ma$ , no caso $u^\mu = (0, 1, 0, 0)$ , e o campo obedecendo as condições de contorno mistas, para $\epsilon = 2$ no gráfico a esquerda, e $\epsilon = 3$ no gráfico a direita. Em ambos os gráficos consideramos $\frac{l}{a} = 0.01$ . . . . .     | 64 |
| Figura 8 – A energia de Casimir por unidade de área multiplicada por $a^3$ como função de $ma$ , no caso $u^\mu = (0, 0, 0, 1)$ , e o campo obedecendo as condições de contorno mistas, para $\epsilon = 2$ no gráfico a esquerda, e $\epsilon = 3$ no gráfico a direita. Em ambos os gráficos consideramos $\frac{l}{a} = 0.01$ . . . . .     | 68 |

# Lista de tabelas

|          |   |                                                                                                                                                                              |    |
|----------|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 | – | Conjunto das transformações de Lorentz. . . . .                                                                                                                              | 19 |
| Tabela 2 | – | Força de Casimir na preservação da simetria de Lorentz. O sinal positivo (+) se refere a uma força repulsiva, e o sinal negativo (−) se refere a uma força atrativa. . . . . | 70 |
| Tabela 3 | – | Força de Casimir da violação da simetria de Lorentz. O sinal positivo (+) se refere a uma força repulsiva, e o sinal negativo (−) se refere a uma força atrativa. . . . .    | 70 |

# Lista de Publicações

Um trabalho foi publicado durante o mestrado:

- Robson A. Dantas, Herondy F. Santana Mota and Eugênio R. Bezerra de Mello, Universe **9**, 241 (2023).

# Sumário

|       |                                                                              |    |
|-------|------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | INTRODUÇÃO . . . . .                                                         | 14 |
| 2     | EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON COM QUEBRA DE SIMETRIA DE<br>LORENTZ . . . . .       | 17 |
| 2.1   | Grupo de Lorentz . . . . .                                                   | 17 |
| 2.2   | Equação de Klein-Gordon . . . . .                                            | 20 |
| 2.3   | Violação da simetria de Lorentz . . . . .                                    | 23 |
| 2.3.1 | Modelo tipo éter . . . . .                                                   | 24 |
| 2.3.2 | Modelo de Hořava-Lifshtz . . . . .                                           | 24 |
| 2.4   | Equação de Klein-Gordon com violação de Lorentz . . . . .                    | 25 |
| 3     | O EFEITO CASIMIR . . . . .                                                   | 27 |
| 3.1   | Introdução . . . . .                                                         | 27 |
| 3.2   | Energia de Casimir para um campo escalar . . . . .                           | 29 |
| 3.2.1 | Condição de contorno de Dirichlet . . . . .                                  | 31 |
| 3.2.2 | Condição de contorno de Neumann . . . . .                                    | 38 |
| 3.2.3 | Condições de contorno mistas . . . . .                                       | 39 |
| 4     | INFLUÊNCIA DA VIOLAÇÃO DE LORENTZ NO EFEITO CASIMIR                          | 43 |
| 4.1   | Condição de contorno de Dirichlet . . . . .                                  | 43 |
| 4.1.1 | Vetor paralelo . . . . .                                                     | 44 |
| 4.1.2 | Vetor perpendicular . . . . .                                                | 50 |
| 4.2   | Condição de contorno de Neumann . . . . .                                    | 55 |
| 4.2.1 | Vetor paralelo . . . . .                                                     | 56 |
| 4.2.2 | Vetor perpendicular . . . . .                                                | 57 |
| 4.3   | Condições de contorno mistas . . . . .                                       | 59 |
| 4.3.1 | Vetor paralelo . . . . .                                                     | 59 |
| 4.3.2 | Vetor perpendicular . . . . .                                                | 63 |
| 5     | CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .                                               | 69 |
|       | APÊNDICE A – A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE PARA AL-<br>TAS DERIVADAS . . . . . | 71 |
|       | APÊNDICE B – O TENSOR ENERGIA-MOMENTO PARA ALTAS<br>DERIVADAS . . . . .      | 74 |

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| APÊNDICE C – CONTRIBUIÇÕES INFINITAS NA ENERGIA DO<br>VÁCUO . . . . . | 77 |
| REFERÊNCIAS . . . . .                                                 | 79 |

# 1 Introdução

A Natureza possui quatro interações fundamentais: a interação fraca, a forte, a eletromagnética e a gravitacional. As quantizações das três primeiras interações são muito bem estabelecidas e descritas no Modelo Padrão das partículas elementares (MP) [1]. O fundamento do MP é a Teoria Quântica de Campos (TQC) [2], que é a teoria que unifica a mecânica quântica e a relatividade restrita, quantizando os campos, os promovendo a operadores. Na TQC, as partículas elementares são excitações do vácuo quântico (energia do estado fundamental ou energia do ponto zero).

A teoria moderna da gravidade mais consistente com os dados experimentais é a Relatividade Geral de Albert Einstein [3], desenvolvida entre 1907 e 1915, ao caracterizar a intensidade da força gravitacional como sendo devido a distorção do espaço-tempo por corpos massivos ou altamente energéticos. Porém, apesar dessa teoria prever resultados significativos, como a precessão do periélio de mercúrio e as ondas gravitacionais [4], ela tem descrito a gravitação somente a níveis macroscópicos. O grande problema da tentativa de quantizar a gravidade, são os infinitos não renormalizáveis que surgem. Dos diversos modelos renormalizáveis que tentam quantizar essa interação fundamental, temos a teoria de cordas [5], em que surge um bóson escalar mediador da interação gravitacional, chamado de gráviton. Há também modelos que quebram a isotropia do espaço-tempo. A isotropia pode ser violada detectando que em altas escalas de energia o universo apresenta uma direção preferencial [6]. Uma outra forma de quebrar a isotropia do espaço-tempo é através de uma assimetria de reescalonamento entre espaço e tempo, proposto na teoria de Hořava-Lifshitz (HL) [7], como uma tentativa renormalizável da gravidade quântica. A novidade dessa abordagem do Petr Hořava é que ela se baseia de conceitos teóricos desenvolvidos em física da matéria condensada, em particular na teoria de fenômenos críticos quânticos. Muitos desses modelos de quantização de gravidade levam ao que chamamos de violação da simetria de Lorentz <sup>1</sup>, causando uma modificação na relação de dispersão, que resulta, por exemplo, em fótons viajando com velocidades diferentes a da luz ( $v \neq c$ ) [8]. Porém, os efeitos dessas teorias só apareceriam na escala de Planck, ou seja, uma energia da ordem de  $10^{19}$  GeV, inatingível para os aceleradores de partículas atuais. Se existir uma violação da simetria de Lorentz nessa escala de energia, os efeitos dessa quebra podem se manifestar em outras escalas de energia em diferentes modelos da TQC, como veremos, no efeito Casimir.

Com isso, a comunidade científica passou a ter maior interesse experimental na quebra da simetria de Lorentz. Atualmente, existem diversos experimentos modernos

---

<sup>1</sup> O modelo de HL é uma estrutura de violação forte da simetria de Lorentz, enquanto que em [6] é uma violação mais fraca.

capazes de obter resultados da TQC, com alto grau de precisão, como por exemplo a emissão espontânea proveniente de átomos, o desvio Lamb e o momento magnético anômalo do elétron. Um dos fenômenos mais bem conhecidos e com boa acurácia, é o efeito Casimir. Esse efeito, é uma das manifestações mais diretas de fenômenos puramente quânticos, as flutuações do vácuo quântico. Assim, o efeito Casimir é de grande interesse teórico e experimental para detectar possíveis vestígios de quebras de simetria de Lorentz [9][10][11][12][13].

O efeito Casimir foi previsto teoricamente por H. B. Casimir em 1948 [14]. Casimir obteve que, devido as flutuações quânticas do campo eletromagnético, duas placas planas, paralelas, condutoras e neutras, se atrairiam com uma força dada por:

$$F = -A \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} , \quad (1.1)$$

onde  $A$  é a área das placas e  $a$  é a distância entre elas. Em 1958, M. J. Sparnaay [15] provou o efeito experimentalmente, porém, apenas em 1997 foi confirmado com alto grau de precisão por S. K. Lamoreaux [16].

Esse efeito é causado por mudanças na energia do ponto zero, devido a presença de fronteiras impostas aos campos quânticos. A forma mais simples de se calcular tal efeito, é considerando a dinâmica de um campo escalar, confinado entre duas placas planas e paralelas. Como a energia do ponto zero de um oscilador harmônico quântico é não nulo, então, a energia do vácuo livre é um conjunto infinito (contínuo) de todos os comprimentos de ondas possíveis. Quando os campos são confinados entre as placas, somente comprimentos de ondas específicos são permitidos entre elas. Ao calcular a energia do vácuo de tal configuração, é obtido novamente outro infinito (discretizado). Para solucionar essa divergência e obter um valor mensurável, é necessário realizar um processo chamado de renormalização, o qual consiste na subtração dos infinitos, após o uso de um método de regularização. No nosso caso, usamos a fórmula de Abel-Plana [17] para números inteiros (nas condições de contorno de Dirichlet e Neumann) e a fórmula de Abel-Plana para números semi-inteiros (nas condições de contorno mistas). Com isso, podemos subtrair as energias e obter uma energia finita, a energia de Casimir.

Assim, levando em consideração uma quebra da simetria de Lorentz, podemos calcular a magnitude da violação no vácuo quântico, a partir da força de Casimir causada entre as placas. Analisamos, nessa dissertação, a modificação na energia de Casimir no cenário de violação de Lorentz. O modelo que adotamos é uma composição de violações de Lorentz, gerada pela presença de um vetor constante, no contexto do tipo éter [18], e de derivadas espaciais superiores, no contexto de HL.

Essa dissertação é dividida da seguinte forma: No capítulo 2 faremos uma breve revisão sobre os fundamentos matemáticos do grupo de Lorentz, estudaremos a equação de Klein-Gordon para uma partícula massiva e a quantização do seu campo, depois faremos



uma revisão sobre a violação da simetria de Lorentz, conheceremos as duas violações que utilizaremos como base nesse trabalho e, por fim, iremos formular nosso modelo de violação de Lorentz, para encontrar uma equação de Klein-Gordon modificada. No capítulo 3 será revisado o efeito Casimir e calcularemos a energia de Casimir por unidade de área para um campo escalar massivo. No capítulo 4, calcularemos a influência da violação de Lorentz, na energia de Casimir por unidade de área, para campos quânticos escalares entre duas placas paralelas, devido ao acoplamento direto entre o vetor constante, associado a violação do tipo éter, e a derivada espacial do campo em ordens elevadas, isto é,  $\epsilon \geq 2$ . Assumiremos que os campos obedecem às condições de contorno de Dirichlet, de Neumann e mistas. Para cada condição de contorno, tomaremos o vetor tipo éter sendo paralelo e posteriormente, perpendicular as placas, considerando diferentes ordens superiores nas derivadas dos campos, especificamente derivadas de quarta e sexta ordem, e calcularemos a influência para cada situação. Por fim, no capítulo 5 serão apresentadas as conclusões sobre os nossos resultados obtidos. No apêndice A, encontramos a equação de Euler-Lagrange para altas derivadas, através do princípio da mínima ação. No apêndice B, por indução, encontramos o tensor energia-momento para altas derivadas. No apêndice C, deduzimos os termos infinitos que serão subtraídos no processo de renormalização. Ao longo dessa Dissertação utilizaremos a notação das unidades naturais (ou também conhecida como unidades de Planck), onde se admite que  $\hbar = c = 1$ , onde  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$  e  $c$  é a velocidade da luz. A assinatura para o tensor métrico do espaço de Minkowski será  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ .

## 2 Equação de Klein-Gordon com quebra de simetria de Lorentz

Em 1905, Albert Einstein publicou o artigo inaugural da Relatividade Especial [19], intitulada de “Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento”, quebrando diversos paradigmas da ciência no século XX, partindo de dois simples postulados:

- (i) As leis da física são idênticas em quaisquer referenciais inerciais.
- (ii) A velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer referencial inercial.

A partir disso, foi possível derivar uma série de consequências, tais como a dilatação do tempo, a contração do comprimento, a equivalência entre massa e energia, dentre outros fenômenos. Essas consequências permitiram uma melhor compreensão de fenômenos da natureza, como a radiação eletromagnética e o comportamento das partículas subatômicas, fazendo assim, com que os físicos abandonassem as transformações de Galileu e passassem a utilizar das transformações de Lorentz nas construções de novas teorias físicas.

Uma das primeiras tentativas de se unificar a Mecânica Quântica com os princípios da Teoria da Relatividade Restrita, foi em 1926, com a equação de Klein-Gordon [20]. Essa equação do movimento, descreve uma partícula quântica, livre, relativística e escalar, ou seja, de spin nulo.

Neste capítulo, estudaremos o grupo de simetria a qual a relatividade restrita é construída, o grupo de Lorentz. Na seção seguinte, faremos uma revisão da primeira equação descoberta da mecânica quântica relativística, a equação de Klein-Gordon. Depois, veremos como se dá a violação da simetria de Lorentz e apresentaremos duas violações que utilizaremos como base, para combiná-las na construção de uma nova Lagrangeana e obter uma equação de Klein-Gordon modificada.

### 2.1 Grupo de Lorentz

Antes de definirmos o grupo de Lorentz, vejamos o que se caracteriza como um grupo. Seja um certo conjunto  $G$ , formados por elementos com uma tabela de multiplicação definida. Esse conjunto forma um grupo, se forem satisfeitas as quatro seguintes propriedades [21]:

- (i) Se  $a$  e  $b \in G$ , então  $a \cdot b \in G$ .
- (ii) Para todo  $a, b$  e  $c \in G$ , temos  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  (propriedade associativa).
- (iii) Existe um único elemento neutro (identidade)  $I \in G$ , tal que para todo  $a \in G$

temos  $a \cdot I = I \cdot a$ .

(iv) Para todo  $a \in G$ , existe um elemento inverso  $a^{-1} \in G$ , tal que  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = I$ .

Se, além disso, para todo  $a$  e  $b \in G$ , o produto  $a \cdot b = b \cdot a$  (comutam), o grupo é dito Abelian, e se  $a \cdot b \neq b \cdot a$  (não comutam), é dito Não-Abelian.

O espaço de Minkowski,  $\mathbf{M}_4$ , é um espaço pseudo-euclidiano quadridimensional de representação  $(1, 3)$ , ou seja, três dimensões espaciais e uma temporal. Nele, o quadrivetor coordenada é representado da seguinte forma

$$x^\mu = (ct, \mathbf{r}) \quad \text{e} \quad x_\mu = (ct, -\mathbf{r}) . \quad (2.1)$$

A relatividade restrita exige que as leis da Física sejam covariantes (invariância de forma) sob três tipos de transformações, em  $\mathbf{M}_4$ : as transformações no espaço e no tempo, as rotações no espaço tridimensional, e as transformações de Lorentz. As três transformações juntas formam o grupo de Poincaré ou grupo de Lorentz não homogêneo, que podem ser definidas como [22]

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu , \quad (2.2)$$

satisfazendo a condição

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\lambda \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\lambda} . \quad (2.3)$$

Quando as translações no espaço e no tempo são desconsideradas, ou seja,  $a^\mu = 0$ , as duas transformações restantes formam o grupo de Lorentz homogêneo ou, simplesmente, grupo de Lorentz.

A relação (2.3), na forma matricial, fica

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta , \quad (2.4)$$

tomando o determinante

$$\begin{aligned} \det(\eta) &= \det(\Lambda^T \eta \Lambda) \\ &= \det(\Lambda^T \Lambda \eta) \\ &= \det(\Lambda^T \Lambda) \det(\eta) \\ &= \det(\Lambda)^2 \det(\eta) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Portanto, obtemos que

$$\det(\Lambda) = \pm 1 , \quad (2.6)$$

onde as transformações de Lorentz são ditas **próprias** se  $\det(\Lambda) = 1$  e **impróprias** se  $\det(\Lambda) = -1$ .

Podemos também, escrever a relação (2.3) como

$$\Lambda^0_\rho \Lambda^0_\lambda - \Lambda^i_\rho \Lambda^i_\lambda = \eta_{\rho\lambda} . \quad (2.7)$$

Tomando  $\rho = \lambda = 0$ , ficamos com

$$\left(\Lambda^0_0\right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \left(\Lambda^i_0\right)^2 . \quad (2.8)$$

Como as componentes de  $x^\mu$  e  $x'^\mu$  são quantidades reais, os elementos da matriz  $\Lambda$  também devem ser. Então

$$\left(\Lambda^0_0\right)^2 \geq 1 . \quad (2.9)$$

Assim,

$$\Lambda^0_0 \geq 1 \quad \text{ou} \quad \Lambda^0_0 \leq -1 , \quad (2.10)$$

onde as transformações de Lorentz são ditas **ortócronas** se  $\Lambda^0_0 \geq 1$  e **não-ortócronas** se  $\Lambda^0_0 \leq -1$ .

As condições (2.6) e (2.10) nos permite dividir o grupo de Lorentz em quatro subgrupos disjuntos entre si, que podem ser denotados por  $L_+^\uparrow$ ,  $L_+^\downarrow$ ,  $L_-^\uparrow$  e  $L_-^\downarrow$ . Os índices  $+$  e  $-$  referem-se a  $\det(\Lambda)$ ; e as setas  $\uparrow\downarrow$ , a  $\Lambda^0_0 \geq 1$  e  $\Lambda^0_0 \leq -1$ , respectivamente. Apenas o  $L_+^\uparrow$  forma um grupo invariante, é o chamado **subgrupo próprio ortócrono**. A tabela 1 resume o que foi dito.

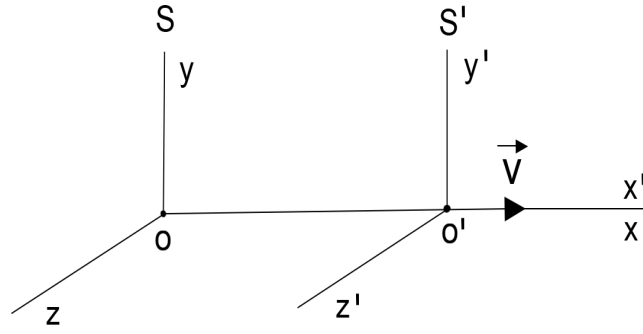
|                 | $L_+^\uparrow$ | $L_-^\uparrow$ | $L_-^\downarrow$ | $L_+^\downarrow$ |
|-----------------|----------------|----------------|------------------|------------------|
| $\det(\Lambda)$ | +1             | -1             | -1               | +1               |
| $\Lambda^0_0$   | $\geq 1$       | $\geq 1$       | $\leq -1$        | $\leq -1$        |

Tabela 1 – Conjunto das transformações de Lorentz.

Seja uma partícula em repouso no sistema S, e S' outro sistema inercial de referência que se move com velocidade constante em relação a S, como representado na figura 1.

A matriz que produz a transformação relacionada a esse caso é

$$\Lambda(V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{-V/c}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-V/c}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.11)$$

Figura 1 – Sistemas deslocando-se com velocidade  $\mathbf{V}$  entre si.

Com isso, de (2.2), considerando  $a^\mu = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z . \end{aligned} \quad (2.12)$$

A transformação gerada pela matriz (2.11), isto é, com  $\mathbf{V} \neq 0$  e sem rotações, é chamada de boost, e o conjunto de equações dado por (2.12) são as conhecidas transformações de Lorentz.

Em  $\mathbf{M}_4$ , o quadrimomento é representado como

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad \text{e} \quad p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right) , \quad (2.13)$$

onde

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (2.14)$$

Assim, podemos obter o invariante de Lorentz

$$p^\mu p_\mu = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 , \quad (2.15)$$

em unidades naturais

$$p^\mu p_\mu = m^2 . \quad (2.16)$$

## 2.2 Equação de Klein-Gordon

De acordo com a mecânica quântica não-relativística [23], a equação que governa a evolução temporal de um sistema quântico é a equação de Schrödinger, que é expressa por:

$$i \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \phi(\mathbf{x}, t) . \quad (2.17)$$

Essa equação corresponde ao operador energia na forma:

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) , \quad (2.18)$$

onde

$$\hat{E} = i \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \hat{p} = -i \nabla . \quad (2.19)$$

Agora, nosso objetivo é obter uma equação de onda que descreva a evolução temporal de um sistema quântico e relativístico [20]. Promovendo o quadrimomento  $p^\mu$  (2.13) a um operador, na forma

$$\hat{p}^\mu = i \partial^\mu = i \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) . \quad (2.20)$$

Com isso, aplicando o invariante de Lorentz obtido em (2.16), em uma função de onda  $\phi(x)$

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \phi(x) = m^2 \phi(x) , \quad (2.21)$$

obtemos

$$\left[ \square + m^2 \right] \phi(x) = 0 , \quad (2.22)$$

onde  $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$  é o operador d'Alembertiano.

A equação (2.22) é a famosa equação de Klein-Gordon, ou também conhecida como equação de Klein-Gordon-Fock, proposta em 1926, independentemente pelo físico sueco Oskar Benjamin Klein, o físico alemão Walter Gordon e o físico soviético Vladimir Aleksandrovich Fock. É a equação de onda que descreve a dinâmica de partículas de spin nulo.

Notemos que, como  $\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu$  é um invariante de Lorentz, a equação de Klein-Gordon também é um invariante de Lorentz.

A densidade Lagrangeana para o campo escalar e real, ou seja, para partículas de spin nulo e eletricamente neutras, é escrita como [22]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2 \right] , \quad (2.23)$$

e o momento conjugado é

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(x) . \quad (2.24)$$

Para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ , a equação de Euler-Lagrange é da forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 . \quad (2.25)$$

Usando (2.23) em (2.25), obtemos a equação do movimento

$$\left[ \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right] \phi(x) = 0 , \quad (2.26)$$

que é a equação de Klein-Gordon obtida em (2.22).

## Quantização do campo escalar

O procedimento de segunda quantização [2], consiste em quantizar os campos, os promovendo a operadores hermitianos, isto é,  $\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}$ , satisfazendo a seguinte álgebra de comutação

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)] &= [\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

A solução da equação (2.22) pode ser obtida fazendo uma expansão em modos normais, considerando soluções de ondas estacionárias com energias positivas e negativas <sup>2</sup>

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}^+ + \hat{\phi}^-, \quad (2.28)$$

onde

$$\hat{\phi}^+ = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \hat{a}(\mathbf{k}) e^{-ikx}, \quad (2.29)$$

e

$$\hat{\phi}^- = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}, \quad (2.30)$$

Sendo  $\hat{a}(\mathbf{k})$  e  $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$  os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, em que  $\hat{a}(\mathbf{k})$  aniquila uma partícula com momento  $\mathbf{k}$ , e  $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$  cria uma partícula com momento  $\mathbf{k}$ . Esses operadores obedecem a seguinte álgebra de comutação:

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ [\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}(\mathbf{k}')] &= [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Assim, o operador campo é dado por

$$\hat{\phi} = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} [\hat{a}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}], \quad (2.32)$$

sendo  $kx \equiv \omega_{\mathbf{k}}t - k_x x - k_y y - k_z z$ .

Substituindo (2.32) na equação de Klein-Gordon (2.22), obtemos a relação de dispersão

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (2.33)$$

Para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ , o tensor energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.34)$$

<sup>2</sup> Estamos utilizando a normalização das funções de onda livre em uma caixa cúbica de volume  $V$ .

Usando a densidade Lagrangeana (2.23) em (2.34) e tomando as componentes  $\mu = \nu = 0$ , obtemos a densidade Hamiltoniana

$$T^{00} = \mathcal{H} = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L} . \quad (2.35)$$

Portanto, o Hamiltoniano do campo de Klein-Gordon será

$$H = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[ \dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right] . \quad (2.36)$$

Substituindo o operador de campo, (2.32), em (2.36), obtemos:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left[ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) + 1/2 \right] . \quad (2.37)$$

A energia do vácuo, ou energia do ponto zero, é obtida tomando o valor esperado do Hamiltoniano no vácuo:

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} , \quad (2.38)$$

onde usamos que  $\hat{a}(\mathbf{k}) | 0 \rangle = 0$ .

Dessa forma, podemos inferir que, uma vez que o campo quântico livre pode ser interpretado como um conjunto infinito de osciladores harmônicos, então a energia do vácuo é divergente. No entanto, na prática experimental, as observações físicas se baseiam apenas em diferenças de energia, e não em valores absolutos de energia. Portanto, podemos, em muitos casos, realizar um procedimento de regularização e renormalização, para obter valores finitos e mensuráveis de energias.

## 2.3 Violação da simetria de Lorentz

Apesar do grande triunfo da relatividade restrita, a invariância da simetria de Lorentz vem sofrendo cautelosos questionamentos nas últimas décadas, principalmente se o princípio da constância da velocidade da luz é válido em todas as escalas de energia. V. A. Kostelecký e S. Samuel, descobriram em 1989 [6], um mecanismo na teoria de cordas que permite a violação da simetria de Lorentz, na escala da energia de Planck. Essa violação ocorre através de tensores com valores esperados no vácuo diferente de zero, que causam uma anisotropia no espaço-tempo. Diversos outros trabalhos também indicam uma possível quebra de simetria de Lorentz, como em teoria de campos não-comutativas [24], variação das constantes de acoplamento [25] e teorias de gravitação quântica [26].

Em [27], é analisado como ocorre a violação de Lorentz ao se descrever a rotação e o impulso de um sistema dado por um elétron em um campo de fundo constante, usando um capacitor de placas paralelas. Nesse trabalho, é demonstrado que o alcance percorrido



pelo elétron é maior no caso da transformação de observador, do que a transformação de partícula. Assim, a presença do campo de fundo faz com que as transformações não descrevam situações físicas equivalentes.

Abaixo, elencaremos dois dos principais modelos adotado na TQC, onde apresentam violação da simetria de Lorentz.

### 2.3.1 Modelo tipo éter

Em 2008, Sean M. Carroll e Heywood Tam propuseram [18] a existência de campos tensoriais, que violam a simetria de Lorentz, chamados de "éter", com valores esperados não nulos, em uma dimensão extra compactada em um círculo de raio  $R$ . Eles mostraram que as interações com o éter, modificam a relação de dispersão dos campos.

Entretanto, um estudo conduzido por Albert Yu. Petrov e colaboradores em 2010 [28], mostraram que as ações de quebra da simetria de Lorentz do tipo éter através da operação de transformação CPT-par (que envolve a inversão de carga elétrica (C), inversão de paridade (P) e reversão temporal (T)), para os campos escalar e eletromagnético, são geradas por meio de seu acoplamento apropriado de quebra de Lorentz para campos spinoriais, em três, quatro e cinco dimensões espaço-temporais.

Como a relação de dispersão é modificada devido a presença do vetor tipo éter, Messias B. Cruz e colaboradores calcularam, em  $\mathbf{M}_4$ , a modificação na energia de Casimir por unidade de área, entre duas placas paralelas, devido a essa violação de Lorentz, para o campo escalar massivo [9] e suas correções térmicas [10], e para o campo fermiônico massivo [11].

### 2.3.2 Modelo de Hořava-Lifshitz

O modelo do físico tcheco Petr Hořava [7] consiste em admitir uma assimetria de reescalonamento entre as coordenadas espaciais e temporais, da seguinte forma:  $x^i \rightarrow bx^i$  e  $t \rightarrow b^\epsilon t$ , onde  $\epsilon$  é o expoente crítico dinâmico que mede o grau de anisotropia entre espaço e tempo. Essa transformação é uma reminiscência dos campos escalares de Lifshitz na física da matéria condensada [29], por essa razão a gravidade de Hořava também é chamada de teoria de Hořava-Lifshitz (HL). Para curtas distâncias, essa teoria descreve grávitons não-relativísticos em interação e, portanto, é uma teoria renormalizável da gravidade quântica em quatro dimensões.

De forma similar ao feito no caso da violação do tipo éter, é possível calcular a modificação na energia de Casimir por unidade de área, no contexto da teoria de Hořava-Lifshitz, para o campo escalar [12] e fermiônico [13], confinado entre duas placas paralelas, e identificar que essa violação também interfere na estrutura do vácuo quântico.

## 2.4 Equação de Klein-Gordon com violação de Lorentz

Agora, baseado nos trabalhos citados nas subseções anteriores, iremos analisar um modelo composto por um campo quântico, escalar, real e massivo, em um cenário de violação de simetria de Lorentz, introduzido por um vetor constante tipo éter, acoplado a altas derivadas espaciais, baseado na metodologia de HL. A densidade Lagrangeana desse modelo proposto é dada por [30]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - l^{2(\epsilon-1)} (-1)^\epsilon [(u^\mu \partial_\mu)^\epsilon \phi]^2 - m^2 \phi^2 \right], \quad (2.39)$$

onde o parâmetro  $l$  é da ordem do inverso da escala de energia onde a simetria de Lorentz é quebrada,  $\epsilon$  é um número inteiro positivo,  $u^\mu$  é o vetor constante tipo éter, que está associado a uma direção preferencial, e  $m$  é a massa do campo bosônico  $\phi$ .

A dimensão do operador que viola Lorentz é de momento elevado a quarta potência para  $\epsilon = 2$ , e sexta potência para  $\epsilon = 3$ . Portanto, à medida que a ordem do operador que viola Lorentz aumenta, as divergências UV tendem a desaparecer.

Podemos reescrever a densidade Lagrangeana (2.39) na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - l^{2(\epsilon-1)} (-1)^\epsilon [u^{\mu_1} \dots u^{\mu_\epsilon} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi] [u^{\nu_1} \dots u^{\nu_\epsilon} \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi] - m^2 \phi^2 \right]. \quad (2.40)$$

No apêndice A, mostramos que, usando o princípio da mínima ação, a equação de Euler-Lagrange para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi, \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)$ , é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) + (-1)^\epsilon \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \right) \\ + (-1)^\epsilon \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Substituindo a densidade Lagrangeana (2.40), em (2.41), obtemos a equação do movimento

$$\left[ \square + l^{2(\epsilon-1)} (u^\mu \partial_\mu)^{2\epsilon} + m^2 \right] \phi = 0. \quad (2.42)$$

A equação (2.42) é a equação de Klein-Gordon modificada no cenário da violação tipo éter com altas derivadas no espaço. No capítulo 4 iremos calcular a influência que essa violação causa no efeito Casimir.

Como queremos avaliar a modificação que as altas derivadas causam nesse fenômeno quântico, iremos considerar  $\epsilon \geq 2$ . E para não obtermos problemas de não-causalidade, iremos assumir que o vetor constante  $u^\mu$  seja tipo-espaço.

No apêndice B, mostramos que para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)$ , o tensor energia-momento obtido é:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial_\mu \phi)} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial^\nu \phi \\
&- \partial_{\mu_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial_\mu \phi)} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial^\nu \phi + \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial_\mu \phi)} \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial^\nu \phi + \dots \\
&+ (-1)^{\epsilon-1} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} .
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Substituindo a densidade Lagrangeana (2.39) em (2.43), encontramos

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) + \epsilon! l^{2(\epsilon-1)} u^\mu \left\{ [(u \cdot \partial)^{2\epsilon-1} \phi] (\partial^\nu \phi) - [(u \cdot \partial)^{2\epsilon-2} \phi] (u \cdot \partial)(\partial^\nu \phi) \right. \\
&+ [(u \cdot \partial)^{2\epsilon-3} \phi] (u \cdot \partial)^2 (\partial^\nu \phi) + \dots - (-1)^\epsilon [(u \cdot \partial)^\epsilon \phi] (u \cdot \partial)^{\epsilon-1} (\partial^\nu \phi) \left. \right\} \\
&- \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} .
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Podemos notar que:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 . \tag{2.45}$$

Entretanto, o tensor energia-momento (2.44) não é simétrico. A parte anti-simétrica é dada por

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} &= \epsilon! l^{2(\epsilon-1)} \left\{ [(u \cdot \partial)^{2\epsilon-1} \phi] - [(u \cdot \partial)^{2\epsilon-2} \phi] (u \cdot \partial) \right. \\
&+ [(u \cdot \partial)^{2\epsilon-3} \phi] (u \cdot \partial)^2 + \dots - (-1)^\epsilon [(u \cdot \partial)^\epsilon \phi] (u \cdot \partial)^{\epsilon-1} \left. \right\} \\
&\times [u^\mu (\partial^\nu \phi) - u^\nu (\partial^\mu \phi)] .
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Essa propriedade de anti-simetria é comumente observada em teorias que violam a simetria de Lorentz.

## 3 O efeito Casimir

Nesse capítulo, faremos uma breve revisão histórica da descoberta do efeito Casimir, os experimentos que corroboraram esse fenômeno e por fim faremos os cálculos da energia de Casimir, na preservação da simetria de Lorentz, para o campo escalar massivo confinado entre duas placas paralelas, impondo as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mistas.

### 3.1 Introdução

Um dos fenômenos da TQC mais bem conhecido, testado e amplamente estudado pelos físicos, é o efeito Casimir, devido ao seu leque de aplicações [31], e fundamentalmente, pela capacidade de explorar as propriedades do vácuo quântico. A magnitude desse efeito pode ser modificada por uma variedade de fatores, incluindo os materiais utilizados, por exemplo: Diferentes tipos de metais, dielétricos, grafeno [32], isolantes topológicos [33], etc. Além disso, o efeito pode depender das condições externas, como temperatura, potencial químico e campo magnético, bem como também da forma dos limites dos materiais, sendo eles placas, esferas, cilindros ou até hélices [34]. Como resultado, a força de Casimir pode ter diferentes valores e sinais. Com isso, o efeito Casimir tem demonstrado sua importância em uma ampla gama de áreas do conhecimento, desde TQC, cosmologia, até nanotecnologia [35], química [36] e biofísica [37].

Nos anos de 1940, os físicos holandeses Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909-2000) e Dirk Polder (1919-2001) trabalhavam nos laboratórios da empresa de tecnologia Philips, quando surgiu o seguinte problema [38]: Os resultados experimentais obtidos sugeriam que a interação entre suspensões<sup>3</sup> de pó de quartzo poderia diminuir de intensidade para grandes distâncias mais rapidamente do que se pensava, e portanto, a teoria vigente na época poderia não estar totalmente correta. Motivados por essa inconsistência entre teoria e experimento, Casimir e Polder, em 1948 [39], consideraram em seus cálculos perturbativos a influência do retardamento na força de van der Waals e mostraram que devido a velocidade finita de propagação do campo eletromagnético, a energia de interação interatômica diminuía com o inverso da sexta potência da distância entre os átomos quando estavam bem próximos e com o inverso da sétima potência quando a grandes distâncias.

Ao conversar com o físico dinamarquês Niels Bohr sobre a solução desse problema, Casimir recebeu a sugestão de levar em consideração as flutuações quânticas do vácuo

---

<sup>3</sup> Suspensões são sistemas formados por grandes agregados de átomos, íons ou moléculas que formam "partículas" de tamanho superior a 100 nanômetros dispersas em uma outra substância, por exemplo água.

eletromagnético. Flutuações ou oscilações do vácuo quântico está relacionado a uma contínua criação e aniquilação de partículas/antipartículas virtuais, que são partículas que não podem ser medidas diretamente por detectores, devido ao tempo de vida muito curto. Por exemplo, elétrons e pósitrons virtuais podem absorver e emitir fótons virtuais, fótons virtuais podem se aniquilar em pares elétron-pósitron virtuais e pares elétron-pósitron virtuais podem se aniquilar em fótons virtuais, como mostra a figura 2.

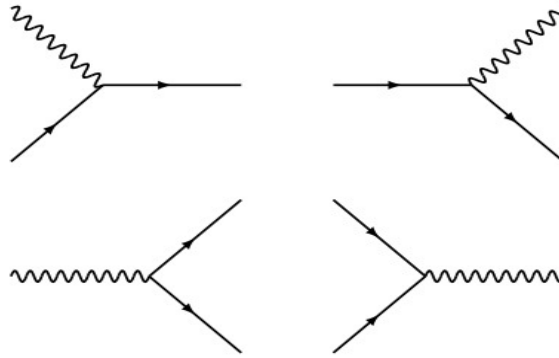


Figura 2 – Interações entre partículas virtuais, onde as linhas retilíneas representam elétrons ou pósitrons virtuais e as linhas ondulatórias representam os fótons virtuais.

Assim, considerando a energia do ponto zero do campo eletromagnético entre duas placas planas, paralelas, metálicas e eletricamente neutras, Casimir obteve os mesmos resultados encontrados com Polder e mostrou que as placas devem se atrair com uma força inversamente proporcional a quarta potência da distância entre elas, dada por [14]:

$$F = -A \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} , \quad (3.1)$$

onde  $A$  é a área das placas e  $a$  é a distância entre elas. Essa é a força de Casimir, ou seja, é a força entre corpos neutros devido a alteração na energia do ponto zero do campo, causada pela presença desses corpos. A novidade desse resultado não estava no fato de dois corpos neutros se atraírem, mas sim no método utilizado, o de atribuir essa atração entre as placas como uma consequência das flutuações do vácuo quântico.

Para placas de um centímetro quadrado de área, separados pela distância de um micrômetro, Casimir previu que essa força seria igual a  $0,013 dyn$ <sup>4</sup>. Vale ressaltar que nesse caso, a força gravitacional é desprezível, portanto, não interfere no resultado da força sentida entre as placas.

Em 1958, 10 anos depois da publicação do artigo de Casimir, o físico holandês Marcus Johannes Sparnaay [15] provou o efeito experimentalmente, com um baixo grau de precisão, a partir de um aparato composto por duas placas paralelas de metal colocadas a uma distância de 0,5 a  $2 \mu m$  uma da outra. Uma placa foi fixada a um braço de alumínio  $L$ ,

<sup>4</sup> O dina é definido como:  $1 dyn = 10^{-5} N$ .

e a outra a um dispositivo mecânico  $K$  que permite que ela seja deslocada paralelamente, como mostra a figura 3. A força de Casimir exerce um torque no braço  $L$  que é compensado pela força de atração da mola  $S$  e em parte pelo contrapeso  $W$ . O capacitor  $C$  permite encontrar o deslocamento do braço em micrômetros. Determinando desta forma a distância entre as placas, pode-se usar a constante elástica conhecida da mola  $S$  e a massa do contrapeso  $W$  para encontrar a força que anula a força de Casimir e, portanto, a própria força de Casimir. Porém, a incerteza na medida da separação das placas implicava demais na precisão para o valor final da força.

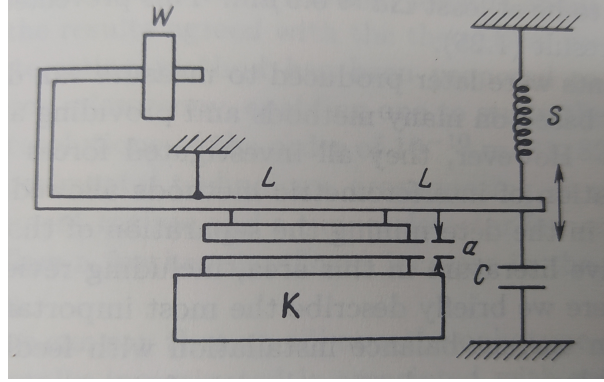


Figura 3 – Desenho esquemático do experimento de Sparnaay, realizado em 1958.

Apenas em 1997 o efeito Casimir foi confirmado com alto grau de precisão pelo físico americano Steve Keith Lamoreaux [16], no departamento de física da Universidade de Washington, com um erro experimental de 5%, através de aparelhos mais sofisticados que os utilizados por Sparnaay. Esse experimento usou uma balança baseada no pêndulo de torção para medir a força de Casimir entre uma lente esférica revestida de ouro e uma placa plana, colocadas a uma distância na faixa de 0,6 a 6  $\mu m$ . No ano seguinte, os físicos indianos Umar Mohideen e Anushree Roy fizeram medidas mais precisas da força de Casimir, na faixa de 0,1 a 0,9  $\mu m$ , com um erro experimental de 1% [40].

### 3.2 Energia de Casimir para um campo escalar

Agora, iremos calcular a energia de Casimir por unidade de área, no cenário de preservação da simetria de Lorentz, para um campo quântico, escalar, real e massivo, confinado entre duas placas neutras, perfeitamente condutoras, planas, paralelas entre si e quadradas, de área  $L^2$ , separadas por uma distância  $a$ , onde  $a \ll L$  e com as superfícies das placas perpendiculares ao eixo  $Z$ , como mostra a figura 4.

Como vimos na seção 2.2, a densidade Lagrangeana de um campo escalar, real e massivo é dado pela equação (2.23)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2] , \quad (3.2)$$

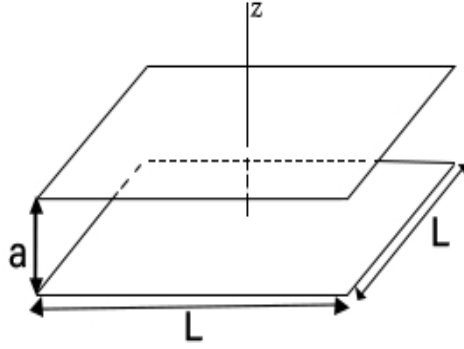


Figura 4 – Duas placas paralelas de área  $L^2$  separadas por uma distância  $a \ll L$ .

que através da equação de Euler-Lagrange, leva a equação de Klein-Gordon (2.22)

$$\left[\square + m^2\right] \phi(x) = 0 . \quad (3.3)$$

Supondo uma solução de (3.3) que possa ser escrita como

$$\phi(x) = X(x)Y(y)Z(z)e^{-i\omega t} . \quad (3.4)$$

Então, a equação (3.3) fica

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ X(x)Y(y)Z(z)e^{-i\omega t} \right] - \nabla^2 \left[ X(x)Y(y)Z(z)e^{-i\omega t} \right] + m^2 X(x)Y(y)Z(z)e^{-i\omega t} = 0 . \quad (3.5)$$

Dividindo tudo por  $X(x)Y(y)Z(z)e^{-i\omega t}$ , obtemos

$$-\omega^2 + \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + m^2 = 0 . \quad (3.6)$$

Como  $\omega^2$  e  $m^2$  são constantes e cada um dos outros três termos da equação depende de uma variável independente, para que a equação seja válida para todo  $x, y$  e  $z$ , cada termo deve ser também constante. Portanto, ficamos com três EDOs independentes:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k_x^2 , \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -k_y^2 \quad (3.8)$$

e

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k_z^2 . \quad (3.9)$$

Com isso, obtemos a relação

$$\omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2 . \quad (3.10)$$

O efeito Casimir que iremos obter, resultará na alteração do espectro de energia do campo  $\phi(x)$ , devido a imposição da condição de contorno, pela presença das fronteiras das placas metálicas. Nas próximas subseções, iremos obter a solução da equação (3.3) e as energias de Casimir por unidade de área, impondo três condições de contorno comumente usadas para o campo escalar, as condições de contorno de Dirichlet, de Neumann e as mistas. Essas condições implicam que o fluxo de partículas através das placas seja nulo, dessa maneira teremos as partículas confinadas na região entre as placas.

### 3.2.1 Condição de contorno de Dirichlet

Impor a condição de contorno de Dirichlet, significa que a solução da equação de Klein-Gordon (3.3) deve satisfazer:

$$\phi(t, x, y, 0) = \phi(t, x, y, a) = 0 , \quad (3.11)$$

nas placas, que restringe apenas a solução da EDO referente a  $z$ . Então, as soluções de  $X(x)$  e  $Y(y)$  são dadas por

$$X(x) = C_{1x} e^{ik_x x} \quad (3.12)$$

e

$$Y(y) = C_{1y} e^{ik_y y} . \quad (3.13)$$

A condição de contorno indica uma solução periódica, então

$$Z(z) = C_{1z} \sin(k_z z) + C_{2z} \cos(k_z z) . \quad (3.14)$$

- Para  $Z(0) = 0$ :

$$C_{2z} = 0 , \quad (3.15)$$

então

$$Z(z) = C_{1z} \sin(k_z z) . \quad (3.16)$$

- Para  $Z(a) = 0$ :

$$k_z = \frac{n\pi}{a} , \quad (3.17)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ , então

$$Z(z) = C_z \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) . \quad (3.18)$$



Assim, ficamos com a solução

$$\phi_\sigma(\mathbf{x}, t) = C \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y)} , \quad (3.19)$$

onde  $\sigma = \{k_x, k_y, n\}$ ,  $C = C_{1x}C_{1y}C_z$  e  $n = 1, 2, 3, \dots$

Para encontrar a constante  $C$ , vamos impor a condição de normalização [20]

$$i \int d^3\mathbf{x} (\phi'^* \partial_t \phi - \partial_t \phi'^* \phi) = \delta_{n,n'} \delta(k_x - k_{x'}) \delta(k_y - k_{y'}) . \quad (3.20)$$

Com isso, encontramos que a constante de normalização é

$$C = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \omega_{\mathbf{k},n} a}} . \quad (3.21)$$

Portanto, considerando a parte de frequência positiva e negativa, a solução geral da equação (3.3), para a condição de contorno de Dirichlet é dada por

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int dk_x dk_y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \omega_{\mathbf{k},n} a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \\ &\times \left[ e^{-i(\omega_{\mathbf{k},n}t - k_x x - k_y y)} + e^{i(\omega_{\mathbf{k},n}t - k_x x - k_y y)} \right] , \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $\omega_{\mathbf{k},n}$  obedece a relação de dispersão

$$\omega_{\mathbf{k},n} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2} . \quad (3.23)$$

Promovendo  $\phi(x)$  a um operador, obtemos

$$\hat{\phi}(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(2\pi)^2 \omega_{\mathbf{k},n} a]^{1/2}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) [\hat{a}_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger e^{ikx}] , \quad (3.24)$$

onde  $kx = \omega_{\mathbf{k},n}t - k_x x - k_y y$  e  $\hat{a}_{\mathbf{k},n}$  e  $\hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger$  os operadores de aniquilação e criação, respectivamente.

Como vimos na seção 2.2, o operador Hamiltoniano do campo de Klein-Gordon é dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[ \dot{\hat{\phi}}^2 + (\nabla \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right] , \quad (3.25)$$

substituindo o operador campo (3.24) nessa expressão, obtemos, após algumas manipulações algébricas, o operador  $\hat{H}$  na forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k},n} \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},n} \right] . \quad (3.26)$$

Para esse caso, temos que os momentos das partículas paralelos as placas são contínuos, entretanto os momentos perpendiculares as placas são discretos. Dessa forma, a nova relação de comutação fica

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},n}, \hat{a}_{\mathbf{k}',n'}^\dagger] = \delta_{n,n'} \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}') . \quad (3.27)$$

Então, para  $n = n'$  e  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ , segue que

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},n}, \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger] = \delta^2(0) , \quad (3.28)$$

logo,

$$\hat{a}_{\mathbf{k},n} \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},n} = 2\hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},n} + \delta^2(0) . \quad (3.29)$$

Sabendo que a delta de Dirac é definido como

$$\delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} , \quad (3.30)$$

para  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ , obtemos

$$\delta^2(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{x} = \frac{L^2}{(2\pi)^2} , \quad (3.31)$$

onde  $L^2$  é a área das placas.

Assim, ficamos com

$$\hat{a}_{\mathbf{k},n} \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},n} = 2\hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} . \quad (3.32)$$

Usando esse resultado em (3.26), finalmente obtemos o operador Hamiltoniano na forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[ 2\hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right] . \quad (3.33)$$

Para encontrar a energia de Casimir, primeiramente precisamos encontrar a energia do vácuo, que é obtida tomando o valor esperado do operador Hamiltoniano  $\hat{H}$  no vácuo, ou seja

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[ 2 \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},n} | 0 \rangle + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \langle 0 | 0 \rangle \right] . \quad (3.34)$$

Mas, como o vácuo é definido a partir dos operadores de criação e aniquilação na forma

$$\hat{a}_{\mathbf{k},n} | 0 \rangle = 0 , \quad (3.35)$$

e o seu correspondente dual

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger = 0 . \quad (3.36)$$

Então, a energia do vácuo na condição de contorno de Dirichlet fica

$$E_0 = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} , \quad (3.37)$$

onde a relação de dispersão correspondente é dada por

$$\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2. \quad (3.38)$$

Logo, podemos escrever a energia do vácuo como

$$E_0 = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.39)$$

Fazendo uma mudança de coordenadas do plano  $k_x k_y$  para as coordenadas polares, encontramos que

$$E_0 = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^{\infty} k dk \sum_{n=1}^{\infty} \left[ k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.40)$$

Notemos que o resultado acima é divergente, portanto, precisamos realizar uma renormalização, a partir de um método de regularização. A regularização que iremos utilizar é a conhecida fórmula de Abel-Plana para números inteiros [17]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \frac{1}{2}F(0) + \int_0^{\infty} F(t)dt + i \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [F(it) - F(-it)], \quad (3.41)$$

que foi obtida independentemente, pelo matemático norueguês Niels Henrik Abel, em 1823, e pelo astrônomo e matemático italiano Giovanni Antonio Amedeo Plana, em 1920. O primeiro a usar essa fórmula para o efeito Casimir foi o físico Mamayev e colaboradores em 1976 [41].

Podemos escrever que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n), \quad (3.42)$$

substituindo em (3.41), ficamos com

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = -\frac{1}{2}F(0) + \int_0^{\infty} F(t)dt + i \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [F(it) - F(-it)]. \quad (3.43)$$

Com isso, a equação (3.40) pode ser reescrita como

$$E_0 = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^{\infty} k dk \left\{ -\frac{1}{2}F(0) + \int_0^{\infty} F(t)dt + i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt \right\}, \quad (3.44)$$

onde

$$F(n) = \left[ k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.45)$$

Notemos que o primeiro termo da equação (3.44) representa a energia do vácuo na presença de apenas uma placa, enquanto o segundo termo representa a energia do vácuo

na ausência de placas, como demonstrado no Apêndice C. Portanto, renormalizar significa subtrair ou desconsiderar esses termos, restando apenas o termo que representa a energia do vácuo devido a presença das duas placas, ou seja, a energia de Casimir, dada por

$$E_C = i \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty dt \frac{[k^2 + (\frac{it\pi}{a})^2 + m^2]^{1/2} - [k^2 + (\frac{-it\pi}{a})^2 + m^2]^{1/2}}{e^{2\pi t} - 1}. \quad (3.46)$$

Fazendo uma mudança de variável  $u = \frac{\pi t}{a}$ , obtemos

$$E_C = i \frac{L^2 a}{4\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty du \frac{[k^2 + (iu)^2 + m^2]^{1/2} - [k^2 + (-iu)^2 + m^2]^{1/2}}{e^{2au} - 1}. \quad (3.47)$$

Dividindo a integral em duas partes

$$\begin{aligned} E_C &= i \frac{L^2 a}{4\pi^2} \int_0^\infty k dk \left\{ \int_0^{\sqrt{k^2+m^2}} du \frac{[k^2 + (iu)^2 + m^2]^{1/2} - [k^2 + (-iu)^2 + m^2]^{1/2}}{e^{2au} - 1} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\sqrt{k^2+m^2}}^\infty du \frac{[k^2 + (iu)^2 + m^2]^{1/2} - [k^2 + (-iu)^2 + m^2]^{1/2}}{e^{2au} - 1} \right\}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde os termos no integrando podem ser reescritos como

- Para  $[k^2 + m^2]^{1/2} > u$ :

$$[k^2 + m^2 + (\pm iu)^2]^{1/2} = [k^2 + m^2 - u^2]^{1/2}. \quad (3.49)$$

- Para  $[k^2 + m^2]^{1/2} < u$ :

Como

$$e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm i, \quad (3.50)$$

então,

$$\begin{aligned} [k^2 + m^2 + (\pm iu)^2]^{1/2} &= [k^2 + m^2 + (e^{\pm i\frac{\pi}{2}} u)^2]^{1/2} \\ &= [k^2 + m^2 + e^{\pm i\pi} u^2]^{1/2} \\ &= \left\{ e^{\pm i\pi} [u^2 + e^{\mp i\pi} (k^2 + m^2)] \right\}^{1/2} \\ &= e^{\pm i\frac{\pi}{2}} [u^2 + e^{\mp i\pi} (k^2 + m^2)]^{1/2} \\ &= \pm i [u^2 - (k^2 + m^2)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

De (3.49), temos que a primeira integral em (3.48) se anula. Assim, substituindo (3.51) em (3.48), ficamos com

$$\begin{aligned} E_C &= i \frac{L^2 a}{4\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_{\sqrt{k^2+m^2}}^\infty du \frac{i [u^2 - (k^2 + m^2)]^{1/2} - (-i) [u^2 - (k^2 + m^2)]^{1/2}}{e^{2au} - 1} \\ &= - \frac{L^2 a}{2\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_{\sqrt{k^2+m^2}}^\infty du \frac{[u^2 - (k^2 + m^2)]^{1/2}}{e^{2au} - 1}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Fazendo uma mudança de variável  $\rho^2 = u^2 - (k^2 + m^2)$ , encontramos

$$E_C = -\frac{L^2 a}{2\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^2}{(\rho^2 + k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \left[ e^{2a(\rho^2 + k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right]}. \quad (3.53)$$

Agora, realizando uma mudança de coordenadas do plano  $(k, \rho)$  para o plano polar  $(\sigma, \theta)$ , onde  $\theta$  varia no intervalo  $[0, \pi/2]$ , obtemos

$$E_C = -\frac{L^2 a}{6\pi^2} \int_0^\infty d\sigma \frac{\sigma^4}{(\sigma^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \left[ e^{2a(\sigma^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right]}. \quad (3.54)$$

Essa integral não pode ser calculada explicitamente, então iremos considerar o limite assintótico. Para isso, façamos a mudança de variável  $\xi^2 = \sigma^2 + m^2$ , que resulta em

$$E_C = -\frac{L^2 a}{6\pi^2} \int_m^\infty d\xi \frac{(\xi^2 - m^2)^{\frac{3}{2}}}{e^{2a\xi} - 1}. \quad (3.55)$$

E tomando  $\xi = mv$ , teremos

$$\frac{E_C}{L^2} = -\frac{am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty dv \frac{(v^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{e^{2amv} - 1}. \quad (3.56)$$

Sabendo que a série geométrica pode ser representada como

$$\frac{1}{e^{2amv} - 1} = \sum_{j=1}^\infty e^{-2amvj}, \quad (3.57)$$

então,

$$\frac{E_C}{L^2} = -\frac{am^4}{6\pi^2} \sum_{j=1}^\infty \int_1^\infty dv (v^2 - 1)^{\frac{3}{2}} e^{-2amvj}. \quad (3.58)$$

A representação integral da função de Bessel modificada é dada por [42]

$$K_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_1^\infty dt (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-xt}. \quad (3.59)$$

Portanto, obtemos que

$$K_2(2amj) = \frac{4a^2 m^2 j^2}{3} \int_1^\infty dt (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} e^{-2amjt}. \quad (3.60)$$

Com isso, a equação (3.100) fica da forma

$$\frac{E_C}{L^2} = -\frac{m^2}{8\pi^2 a} \sum_{j=1}^\infty \frac{K_2(2amj)}{j^2}. \quad (3.61)$$

Vamos agora avaliar a energia de Casimir por unidade de área nos seguintes limites assintóticos:

(i) Para  $am \gg 1$ :

A função de Bessel modificada para grandes argumentos é dada por [42]

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} , \quad (3.62)$$

então, teremos que

$$K_2(2amj) \approx \sqrt{\frac{\pi}{4amj}} e^{-2amj} . \quad (3.63)$$

Logo, a equação (3.61) ficará na forma

$$\frac{E_C}{L^2} \approx -\frac{m^2}{8\pi^2 a} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-2amj}}{j^2} \sqrt{\frac{\pi}{4amj}} . \quad (3.64)$$

Tomando o termo dominante  $j = 1$ :

$$\frac{E_C}{L^2} \approx -\frac{1}{16} \left( \frac{m}{\pi a} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-2am} , \quad (3.65)$$

ou seja, a energia de Casimir decai exponencialmente com o aumento de  $am$ .

(ii) Para  $am \ll 1$ :

Para obtermos uma expressão aproximada de (3.56), teremos que realizar uma expansão no integrando. Primeiro, fazendo a seguinte manipulação algébrica:

$$(v^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = \left[ v^2 \left( 1 - \frac{1}{v^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}} = v^3 \left( 1 - \frac{1}{v^2} \right)^{\frac{3}{2}} . \quad (3.66)$$

Sabendo que a expansão binomial é dada por

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots , \quad (3.67)$$

então, obtemos

$$(v^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = v^3 \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{v^2} + \dots \right) \approx v^3 - \frac{3}{2} v , \quad (3.68)$$

com isso, a equação (3.56) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{E_C}{L^2} &\approx -\frac{am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty dv \frac{v^3 - \left(\frac{3}{2}\right)v}{e^{2amv} - 1} \\ &\approx -\frac{1}{1440\pi^2 a^3} \left[ \pi^4 - 15\pi^2(am)^2 + 140(am)^3 - 60(am)^4 \right] . \end{aligned} \quad (3.69)$$

Portanto, a energia de Casimir por unidade de área entre duas placas paralelas na condição de contorno de Dirichlet é dada pela expressão (3.69). Sabemos que a força é definida como  $\mathbf{F} = -\nabla E$ , então a força de Casimir por unidade de área é dada por

$$\frac{\mathbf{F}_C}{L^2} \approx -\frac{1}{480\pi^2 a^4} \left[ \pi^4 - 5\pi^2(am)^2 + 20(am)^4 \right] , \quad (3.70)$$

ou seja, essa é uma força atrativa. Sabendo que a pressão é a força dividida pela área, então podemos escrever que a pressão de Casimir é:

$$\mathbf{P}_C \approx -\frac{1}{480\pi^2 a^4} \left[ \pi^4 - 5\pi^2(am)^2 + 20(am)^4 \right] . \quad (3.71)$$

### 3.2.2 Condição de contorno de Neumann

Impor a condição de contorno de Neumann, significa que a solução da equação de Klein-Gordon (3.3) deve satisfazer:

$$\frac{\partial \phi(t, x, y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \phi(t, x, y, a)}{\partial z} = 0 , \quad (3.72)$$

nas placas, que também restringe apenas a solução da EDO referente ao eixo -  $z$ . Assim, resolvendo da mesma forma que no caso da condição de contorno de Dirichlet, obtemos o operador campo:

$$\hat{\phi}(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) [\hat{a}_{\mathbf{k},n}e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger e^{ikx}] , \quad (3.73)$$

onde

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^2 a} \omega_{\mathbf{k},n}} & \text{para } n = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 a} \omega_{\mathbf{k},n}} & \text{para } n \geq 1. \end{cases} \quad (3.74)$$

e  $\omega_{\mathbf{k},n}$  obedece a relação de dispersão

$$\omega_{\mathbf{k},n} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2} . \quad (3.75)$$

O operador Hamiltoniano, nesse caso, fica na forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[ 2\hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right] . \quad (3.76)$$

Tomando o valor esperado do operador Hamiltoniano  $\hat{H}$  no vácuo, obtemos

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} . \quad (3.77)$$

Essa energia também é infinita. Então realizando o mesmo procedimento feito no caso da condição de contorno de Dirichlet, ou seja, regularizando usando a fórmula de

Abel-Plana (3.41) e depois renormalizando, a energia de Casimir por unidade de área é dada por:

$$\frac{E_C}{L^2} = -\frac{am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty dv \frac{(v^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{e^{2amv} - 1} . \quad (3.78)$$

Essa integral é a mesma obtida anteriormente e não pode ser calculada explicitamente, então vamos novamente considerar os seus limites assintóticos.

(i) Para  $am \gg 1$ :

$$\frac{E_C}{L^2} \approx -\frac{1}{16} \left( \frac{m}{\pi a} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-2am} , \quad (3.79)$$

ou seja, aqui a energia de Casimir também decai exponencialmente com o aumento de  $am$ .

(ii) Para  $am \ll 1$ :

$$\frac{E_C}{L^2} \approx -\frac{1}{1440\pi^2 a^3} \left[ \pi^4 - 15\pi^2(am)^2 + 140(am)^3 - 60(am)^4 \right] . \quad (3.80)$$

Então, a pressão de Casimir terá a mesma magnitude e sentido (atrativo) que no caso da condição de contorno de Dirichlet, dada por

$$\mathbf{P}_C \approx -\frac{1}{480\pi^2 a^4} \left[ \pi^4 - 5\pi^2(am)^2 + 20(am)^4 \right] . \quad (3.81)$$

Notemos que os resultados obtidos considerando a condição de contorno de Neumann coincidem com os resultados obtidos no caso da condição de contorno de Dirichlet. Isso ocorre, porque mesmo o operador de campo sendo diferente nos dois casos, os operadores Hamiltonianos e as relações de dispersão coincidem para ambas as condições de contorno.

### 3.2.3 Condições de contorno mistas

Para o caso das condições de contorno mistas, nós temos duas possibilidades:

(i) Primeira configuração:

$$\phi(t, x, y, 0) = \frac{\partial \phi(t, x, y, a)}{\partial z} = 0 . \quad (3.82)$$

(ii) Segunda configuração:

$$\frac{\partial \phi(t, x, y, 0)}{\partial z} = \phi(t, x, y, a) = 0 . \quad (3.83)$$

Para a primeira configuração, obtemos o operador do campo:

$$\hat{\phi}_{(i)}(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 a \omega_{\mathbf{k},n}}} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} z \right] \left[ \hat{a}_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger e^{ikx} \right] . \quad (3.84)$$



Para a segunda configuração, obtemos o operador do campo:

$$\hat{\phi}_{(ii)}(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 a \omega_{\mathbf{k},n}}} \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} z \right] \left[ \hat{a}_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k},n}^{\dagger} e^{ikx} \right] . \quad (3.85)$$

Para ambos os operadores campos  $\hat{\phi}_{(i)}(x)$  e  $\hat{\phi}_{(ii)}(x)$ , obtemos o mesmo operador Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[ 2\hat{a}_{\mathbf{k},n}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right] , \quad (3.86)$$

onde a relação de dispersão correspondente é dada por

$$\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^2 + m^2 . \quad (3.87)$$

Assim, a energia do vácuo nos dois casos é expressa como

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} . \quad (3.88)$$

Trabalhando com as coordenadas polares no plano  $k_x k_y$ , a energia do vácuo é reescrita como

$$E_0 = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^{\infty} k dk \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ k^2 + \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^2 + m^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \quad (3.89)$$

Novamente obtemos uma soma divergente, porém, agora devemos usar a fórmula de regularização de Abel-Plana para números semi-inteiros [17], dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} F(t) dt - i \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1} [F(it) - F(-it)] . \quad (3.90)$$

Assim, equação (3.89) se tornará

$$E_0 = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^{\infty} k dk \left\{ \int_0^{\infty} F(t) dt - i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} + 1} dt \right\} , \quad (3.91)$$

onde

$$F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left\{ k^2 + \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^2 + m^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \quad (3.92)$$

O primeiro termo da equação (3.91) refere-se a anergia do vácuo livre, ou seja, a energia do vácuo na ausência das placas. Portanto, renormalizando, ficamos com o segundo termo, que está associado a energia do vácuo devido a presença das duas placas, isto é, a energia de Casimir:

$$E_C = -i \frac{L^2}{4\pi} \int_0^{\infty} k dk \int_0^{\infty} dt \frac{[k^2 + (\frac{it\pi}{a})^2 + m^2]^{1/2} - [k^2 + (\frac{-it\pi}{a})^2 + m^2]^{1/2}}{e^{2\pi t} + 1} . \quad (3.93)$$

Realizando novamente a mudança de variável  $u = \frac{\pi t}{a}$  e como vimos no caso da condição de contorno de Dirichlet, a integral no intervalo  $u : [0, \sqrt{k^2 + m^2}]$  se anula, então a energia de Casimir fica da forma

$$E_C = \frac{L^2 a}{2\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_{\sqrt{k^2 + m^2}}^\infty du \frac{[u^2 - (k^2 + m^2)]^{1/2}}{e^{2au} + 1} . \quad (3.94)$$

Fazendo uma mudança de variável  $\rho^2 = u^2 - (k^2 + m^2)$ , obtemos que

$$E_C = \frac{L^2 a}{2\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^2}{(\rho^2 + k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \left[ e^{2a(\rho^2 + k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}} + 1 \right]} . \quad (3.95)$$

Realizando uma mudança de coordenadas do plano  $(k, \rho)$  para o plano polar  $(\sigma, \theta)$ , onde  $\theta$  varia no intervalo  $[0, \pi/2]$ , encontramos

$$E_C = \frac{L^2 a}{6\pi^2} \int_0^\infty d\sigma \frac{\sigma^4}{(\sigma^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \left[ e^{2a(\sigma^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}} + 1 \right]} . \quad (3.96)$$

Novamente, essa integral não pode ser calculada explicitamente, então iremos adotar o procedimento abaixo. Façamos a seguinte mudança de variável  $\xi^2 = \sigma^2 + m^2$ :

$$E_C = \frac{L^2 a}{6\pi^2} \int_m^\infty d\xi \frac{(\xi^2 - m^2)^{\frac{3}{2}}}{e^{2a\xi} + 1} . \quad (3.97)$$

Agora, fazendo uma mudança de variável  $\xi = mv$ , obtemos

$$\frac{E_C}{L^2} = \frac{am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty dv \frac{(v^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{e^{2amv} + 1} . \quad (3.98)$$

A série geométrica pode ser representada como

$$\frac{1}{e^{2amv} + 1} = \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j+1} e^{-2amvj} , \quad (3.99)$$

então,

$$\frac{E_C}{L^2} = \frac{am^4}{6\pi^2} \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j+1} \int_1^\infty dv (v^2 - 1)^{\frac{3}{2}} e^{-2amvj} . \quad (3.100)$$

Usando novamente a representação integral da função de Bessel modificada (3.59), ficamos com

$$\frac{E_C}{L^2} = \frac{m^2}{8\pi^2 a} \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j+1} K_2(2amj)}{j^2} . \quad (3.101)$$

Vamos agora avaliar a energia de Casimir por unidade de área nos seguintes limites assintóticos:

(i) Para  $am \gg 1$ :

Como vimos, a função de Bessel modificada para grandes argumentos é dada pela expressão (3.62), conseqüentemente o termo dominante,  $j = 1$ , fornece

$$\frac{E_C}{L^2} \approx \frac{1}{16} \left( \frac{m}{\pi a} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-2am}, \quad (3.102)$$

ou seja, a energia de Casimir também decai exponencialmente com o aumento de  $am$ , porém, com o sinal trocado.

(ii) Para  $am \ll 1$ :

Fazendo uma expansão na equação (3.98), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{E_C}{L^2} &\approx \frac{am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty dv \frac{v^3 - \left(\frac{3}{2}\right)v}{e^{2amv} + 1} \\ &\approx \frac{1}{11520\pi^2 a^3} \left[ 7\pi^4 - 60\pi^2(am)^2 + 480(am)^4 \right]. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Assim, a energia de Casimir por unidade de área entre duas placas paralelas nas condições de contorno mistas é dada pela expressão (3.103). Como  $\mathbf{F} = -\nabla E$ , então a força de Casimir por unidade de área é dada por

$$\frac{\mathbf{F}_C}{L^2} \approx \frac{1}{3840\pi^2 a^4} \left[ 7\pi^4 - 20\pi^2(am)^2 - 160(am)^4 \right], \quad (3.104)$$

logo, a pressão de Casimir é escrita como

$$\mathbf{P}_C \approx \frac{1}{3840\pi^2 a^4} \left[ 7\pi^4 - 20\pi^2(am)^2 - 160(am)^4 \right]. \quad (3.105)$$

Ou seja, diferentemente das condições de contorno de Dirichlet e Neumann, a força de Casimir sob as condições de contorno mistas nas placas, não só tem sua magnitude alterada, bem como o sentido, passando a ser agora uma força repulsiva.

## 4 Influência da violação de Lorentz no Efeito Casimir

Nesse capítulo, que corresponde a nossa contribuição pessoal acerca do assunto, iremos realizar o mesmo procedimento de calcular o efeito Casimir que fizemos no capítulo anterior, dessa vez com a violação da simetria de Lorentz abordada na seção 2.4. Portanto, veremos que a presença do vetor constante tipo éter, acoplado a altas derivadas espaciais irá modificar a força de Casimir sentida entre as placas paralelas. Iremos impor as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mistas. Para cada condição, vamos considerar dois arranjos para o vetor constante: paralelo e perpendicular as placas. Para cada situação, consideraremos a influência da ordem da derivada espacial, especificamente tomaremos  $\epsilon = 2$  e  $\epsilon = 3$ .

Como vimos na seção 2.4, a equação do movimento que descreve a dinâmica de uma partícula quântica, relativística, escalar, real, massiva e com o termo da quebra de simetria de Lorentz, é dada pela equação de Klein-Gordon modificada (2.42):

$$\left[ \square + l^{2(\epsilon-1)} (u^\mu \partial_\mu)^{2\epsilon} + m^2 \right] \phi = 0 . \quad (4.1)$$

### 4.1 Condição de contorno de Dirichlet

Impondo a condição de contorno de Dirichlet nas placas, ou seja

$$\phi(x)_{z=0} = \phi(x)_{z=a} = 0 , \quad (4.2)$$

a solução geral da equação (4.1), é dada por

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int dk_x dk_y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \omega_{\mathbf{k},n} a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \\ &\times \left[ e^{-i(\omega_{\mathbf{k},n} t - k_x x - k_y y)} + e^{i(\omega_{\mathbf{k},n} t - k_x x - k_y y)} \right] , \end{aligned} \quad (4.3)$$

Promovendo o campo escalar  $\phi(x)$  a operador, temos que

$$\hat{\phi}(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(2\pi)^2 a \omega_{\mathbf{k},n}]^{1/2}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) [\hat{a}_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger e^{ikx}] , \quad (4.4)$$

onde  $kx \equiv \omega_{\mathbf{k},n} t - k_x x - k_y y - k_z z$  e  $\hat{a}_{\mathbf{k},n}$  e  $\hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger$  correspondem aos operadores de aniquilação e criação, respectivamente. Esses operadores satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k},n}, \hat{a}_{\mathbf{k}',n'}^\dagger] &= \delta_{n,n'} \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [\hat{a}_{\mathbf{k},n}, \hat{a}_{\mathbf{k}',n'}] &= [\hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}',n'}^\dagger] = 0 . \end{aligned} \quad (4.5)$$

### 4.1.1 Vetor paralelo

O 4-vetor tipo espaço,  $u^\mu$ , pode ter três diferentes direções, paralelo as placas  $u^\mu = (0, 1, 0, 0)$  e  $u^\mu = (0, 0, 1, 0)$ , e perpendicular as placas,  $u^\mu = (0, 0, 0, 1)$ . As relações de dispersão associados aos dois primeiros vetores são iguais. Nessa subseção vamos considerar o vetor paralelo as placas como sendo

$$u^\mu = (0, 1, 0, 0) . \quad (4.6)$$

Assim, a equação da Klein-Gordon modificada (4.1) fica da forma

$$\left[ \square + l^{2(\epsilon-1)} (\partial_x)^{2\epsilon} + m^2 \right] \phi = 0 , \quad (4.7)$$

com isso, a relação de dispersão associada ao operador campo (4.4) é dada por

$$\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + l^{2(\epsilon-1)} (-1)^\epsilon k_x^{2\epsilon} + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 . \quad (4.8)$$

A partir do mesmo procedimento realizado no capítulo anterior, obtemos o operador Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[ 2\hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right] . \quad (4.9)$$

Queremos encontrar a energia do vácuo, portanto, tomemos o valor esperado do vácuo do operador Hamiltoniano (4.9):

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} . \quad (4.10)$$

Fazendo uma mudança das coordenadas cartesianas  $(k_x, k_y)$  para a coordenadas polares  $(k, \theta)$ , ficamos com

$$E_0 = \frac{L^2}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty k dk \sum_{n=1}^{\infty} \left[ k^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 + l^{2(\epsilon-1)} (-1)^\epsilon k^{2\epsilon} \cos^{2\epsilon} \theta \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (4.11)$$

Realizando a mudança de variável  $u = ak$ , obtemos

$$E_0 = \frac{L^2}{8\pi^2 a^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty u du \sum_{n=1}^{\infty} \left[ u^2 + (n\pi)^2 + (ma)^2 + \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} (-1)^\epsilon u^{2\epsilon} \cos^{2\epsilon} \theta \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

Como é de nosso interesse investigar a correção da violação de Lorentz na energia de Casimir devido ao termo da derivada espacial de ordem superior, consideraremos  $\epsilon \geq 2$ . Embora para este caso a integral sobre a variável  $u$  possa ser avaliada, o resultado não é muito esclarecedor. Além disso, não encontramos na literatura a integral sobre  $\theta$  para valores gerais de  $\epsilon$ , mesmo para  $\epsilon = 2$ . Assim, a fim de fornecer algum resultado quantitativo

para a correção da energia de Casimir causada pelo termo violador de Lorentz, faremos uma expansão no parâmetro associado à violação de Lorentz,  $\frac{l}{a} \ll 1$ , até a primeira ordem. Com isso, a expressão (4.12) pode ser escrita como

$$E_0 \approx \frac{L^2}{8\pi^2 a^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty u du \sum_{n=1}^\infty \left\{ \left[ u^2 + (n\pi)^2 + (ma)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} (-1)^\epsilon u^{2\epsilon} \cos^{2\epsilon} \theta \left[ u^2 + (n\pi)^2 + (ma)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}. \quad (4.13)$$

Notemos que o primeiro termo dessa equação é exatamente a expressão que obtemos da energia do vácuo sem a violação da simetria de Lorentz. Portanto, a energia do vácuo devido a violação de Lorentz é dada por

$$\tilde{E}_0 = \frac{L^2 (-1)^\epsilon}{16\pi^2 a^3} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^{2\pi} \cos^{2\epsilon} \theta d\theta \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \sum_{n=1}^\infty \left[ u^2 + (n\pi)^2 + (ma)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.14)$$

A integral na coordenada angular é obtida de [43]

$$\int_0^{2\pi} (a \sin \theta + b \cos \theta)^{2\epsilon} d\theta = \frac{(2\epsilon - 1)!!}{(2\epsilon)!!} 2\pi (a^2 + b^2)^\epsilon, \quad (4.15)$$

então, para  $a = 0$  e  $b = 1$ :

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2\epsilon} \theta d\theta = \frac{(2\epsilon - 1)!!}{(2\epsilon)!!} 2\pi. \quad (4.16)$$

Assim, a equação (4.14) fica da forma

$$\tilde{E}_0 = \frac{L^2}{8\pi a^3} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon - 1)!!}{(2\epsilon)!!} \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \sum_{n=1}^\infty \left[ u^2 + (n\pi)^2 + (ma)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.17)$$

Novamente, obtemos uma expressão divergente da energia. Como fizemos no caso em que a simetria de Lorentz é preservada, para renormalizar e encontrar a energia de Casimir devido a violação de Lorentz, iremos regularizar usando a fórmula de Abel-Plana para números inteiros [17]:

$$\sum_{n=0}^\infty F(n) = \frac{1}{2} F(0) + \int_0^\infty F(t) dt + i \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [F(it) - F(-it)]. \quad (4.18)$$

Logo, a equação (4.17) se torna

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0 &= \frac{L^2}{8\pi a^3} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon - 1)!!}{(2\epsilon)!!} \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \left\{ -\frac{1}{2} F(0) + \int_0^\infty F(t) dt \right. \\ &\quad \left. + i \int_0^\infty \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt \right\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde

$$F(n) = \left[ u^2 + (n\pi)^2 + (ma)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.20)$$

Mais uma vez vemos que o primeiro termo da equação (4.19) refere-se a energia do vácuo devido a presença de apenas uma placa, enquanto o segundo termo refere-se a energia do vácuo na ausência das placas. Assim, subtraindo esses termos, obtemos a contribuição da violação de Lorentz na energia de Casimir por unidade de área, dada por

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &= \frac{i}{8\pi a^3} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon-1)!!}{(2\epsilon)!!} \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \\ &\times \int_0^\infty dt \frac{[u^2 + (it\pi)^2 + (ma)^2]^{-1/2} - [u^2 + (-it\pi)^2 + (ma)^2]^{-1/2}}{e^{2\pi t} - 1}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Fazendo uma mudança de variável  $t\pi = v$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &= \frac{i}{8\pi^2 a^3} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon-1)!!}{(2\epsilon)!!} \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \\ &\times \int_0^\infty dv \frac{[u^2 + (ma)^2 + (iv)^2]^{-1/2} - [u^2 + (ma)^2 + (-iv)^2]^{-1/2}}{e^{2v} - 1}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A integral sobre a variável  $v$  deve ser considerada em dois casos, para  $[u^2 + (ma)^2]^{1/2} > v$  e  $[u^2 + (ma)^2]^{1/2} < v$ .

- Para o caso  $[u^2 + (ma)^2]^{1/2} > v$ :

$$[u^2 + (ma)^2 + (\pm iv)^2]^{-1/2} = [u^2 + (ma)^2 - v^2]^{-1/2}. \quad (4.23)$$

- Para o caso  $[u^2 + (ma)^2]^{1/2} < v$ :

$$[u^2 + (ma)^2 + (\pm iv)^2]^{-1/2} = \mp i \left[ v^2 - (u^2 + (ma)^2) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.24)$$

Assim, a integral em  $[0, (u^2 + (ma)^2)^{1/2}]$  se anula e ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &= \frac{1}{4\pi^2 a^3} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon-1)!!}{(2\epsilon)!!} \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \\ &\times \int_{[u^2 + (ma)^2]^{1/2}}^\infty dv \frac{[v^2 - (u^2 + (ma)^2)]^{-1/2}}{e^{2v} - 1}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável  $\rho^2 = v^2 - (u^2 + (ma)^2)$ , encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &= \frac{1}{4\pi^2 a^3} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon-1)!!}{(2\epsilon)!!} \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \\ &\times \int_0^\infty \frac{d\rho}{[\rho^2 + u^2 + (ma)^2]^{\frac{1}{2}} \left[ e^{2(\rho^2 + u^2 + (ma)^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right]}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Agora, realizando uma mudança de coordenadas do plano  $(u, \rho)$  para o plano polar  $(\sigma, \theta)$ , obtemos

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon}{(2\epsilon+1)} \int_0^\infty \frac{\sigma^{2(\epsilon+1)} d\sigma}{[\sigma^2 + (ma)^2]^{\frac{1}{2}} \left[ e^{2(\sigma^2 + (ma)^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right]} . \quad (4.27)$$

Para o campo sem massa, isto é,  $m = 0$ , a integral se torna

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon}{(2\epsilon+1)} \int_0^\infty \frac{\sigma^{2\epsilon+1} d\sigma}{e^{2\sigma} - 1} . \quad (4.28)$$

Usando o resultado da integral encontrado em [43]

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{e^{\mu x} - 1} = \frac{1}{\mu^\nu} \Gamma(\nu) \zeta(\nu) , \quad (4.29)$$

onde  $\Gamma(\nu)$  e  $\zeta(\nu)$  correspondem a função Gamma e a função zeta de Riemann [42], respectivamente. Então, para o nosso caso:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2\epsilon+1} dx}{e^{2\sigma} - 1} = \frac{\Gamma(2\epsilon+2) \zeta(2\epsilon+2)}{2^{(2\epsilon+2)}} , \quad (4.30)$$

logo,

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon}{(2\epsilon+1)} \frac{\Gamma(2\epsilon+2) \zeta(2\epsilon+2)}{2^{(2\epsilon+2)}} . \quad (4.31)$$

Assim, temos que

- Para  $\epsilon = 2$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \frac{\Gamma(6) \zeta(6)}{320} , \quad (4.32)$$

sabendo que  $\Gamma(6) = 120$  e  $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ , então

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{\pi^4}{10080 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 . \quad (4.33)$$

- Para  $\epsilon = 3$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \frac{\Gamma(8) \zeta(8)}{1792} , \quad (4.34)$$

sabendo que  $\Gamma(8) = 5040$  e  $\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$ , então

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{\pi^6}{13440 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 . \quad (4.35)$$



Para o campo massivo, a equação (4.27) só pode ser dada em termos de uma soma infinita das funções de Bessel modificadas como faremos abaixo, então vamos avaliar seus limites assintóticos para valores pequenos e grandes do parâmetro adimensional  $ma$ . Para isso, façamos a seguinte mudança de variável  $\xi^2 = \sigma^2 + (ma)^2$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon}{(2\epsilon+1)} \int_{ma}^{\infty} \frac{(\xi^2 - (ma)^2)^{\frac{2\epsilon+1}{2}} dv}{e^{2\xi} - 1}. \quad (4.36)$$

Agora, fazendo a mudança de variável  $\xi = mav$ , ficamos com

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon}{(2\epsilon+1)} \int_1^{\infty} \frac{(v^2 - 1)^{\epsilon+\frac{1}{2}} dv}{e^{2amv} - 1}. \quad (4.37)$$

Sabendo que a série geométrica pode ser representada como

$$\frac{1}{e^{2amv} - 1} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2amvj}, \quad (4.38)$$

obtemos

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon}{(2\epsilon+1)} \sum_{j=1}^{\infty} \int_1^{\infty} (v^2 - 1)^{\epsilon+\frac{1}{2}} e^{-2amvj} dv. \quad (4.39)$$

A representação integral da função de Bessel modificada é dada por [42]

$$K_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_1^{\infty} dt (t^2 - 1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-xt}. \quad (4.40)$$

Portanto, obtemos que

$$K_{\epsilon+1}(2amj) = \frac{(amj)^{\epsilon+1} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\epsilon + \frac{3}{2}\right)} \int_1^{\infty} dt (t^2 - 1)^{\epsilon+\frac{1}{2}} e^{-2amjt}. \quad (4.41)$$

Com isso, a equação (4.39) fica da forma

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^{\epsilon+1} \Gamma\left(\epsilon + \frac{3}{2}\right) (-1)^\epsilon}{4(\pi)^{\frac{5}{2}} a^3 (2\epsilon+1)} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_{\epsilon+1}(2amj)}{j^{\epsilon+1}}. \quad (4.42)$$

Vamos agora avaliar a energia de Casimir por unidade de área nos seguintes limites assintóticos:

(i) Para  $am \gg 1$ :

A função de Bessel modificada para grandes argumentos é dada por [42]

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad (4.43)$$

então, teremos que

$$K_{\epsilon+1}(2amj) \approx \sqrt{\frac{\pi}{4amj}} e^{-2amj} . \quad (4.44)$$

Logo, a equação (4.42) ficará na forma

$$\frac{E_C}{L^2} \approx \frac{(am)^{\epsilon+1} \Gamma\left(\epsilon + \frac{3}{2}\right) (-1)^\epsilon}{4(\pi)^{\frac{5}{2}} a^3 (2\epsilon + 1)} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\epsilon+1}} \sqrt{\frac{\pi}{4amj}} e^{-2am} . \quad (4.45)$$

Tomando o termo dominante  $j = 1$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx \frac{(am)^{\epsilon+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\epsilon + \frac{3}{2}\right) (-1)^\epsilon}{8\pi^2 a^3 (2\epsilon + 1)} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} e^{-2am} , \quad (4.46)$$

ou seja, a energia de Casimir decai exponencialmente com o aumento do parâmetro  $am$ .

(ii) Para  $am \ll 1$ , é melhor considerar a equação (4.37):

- No caso  $\epsilon = 2$ , a expressão (4.37) se torna

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^6}{20\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \int_1^\infty \frac{(v^2 - 1)^{\frac{5}{2}} dv}{e^{2amv} - 1} . \quad (4.47)$$

Fazendo uma expansão no integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &\approx \frac{(am)^6}{20\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \int_1^\infty \frac{\left(v^5 - \frac{5}{2}v^3 + \frac{15}{8}v\right) dv}{e^{2amv} - 1} \\ &\approx \frac{1}{10080\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[ \pi^6 - \frac{21}{4}\pi^4(am)^2 + \frac{315}{8}\pi^2(am)^4 \right] . \end{aligned} \quad (4.48)$$

Como vimos, a pressão de Casimir é obtida tomando

$$\tilde{P}_C(a) = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial \tilde{E}_C}{\partial a} , \quad (4.49)$$

com isso, obtemos

$$\tilde{P}_C(a) = \frac{1}{80640a^4} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[ 40\pi^4 - 126\pi^2(am)^2 + 315(am)^4 \right] . \quad (4.50)$$

Ou seja, a força de Casimir para esse caso é repulsiva.

- No caso  $\epsilon = 3$ , a expressão (4.37) se torna:

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{(am)^8}{28\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \int_1^\infty \frac{(v^2 - 1)^{\frac{7}{2}} dv}{e^{2amv} - 1} . \quad (4.51)$$

Realizando uma expansão no integrando, obtemos

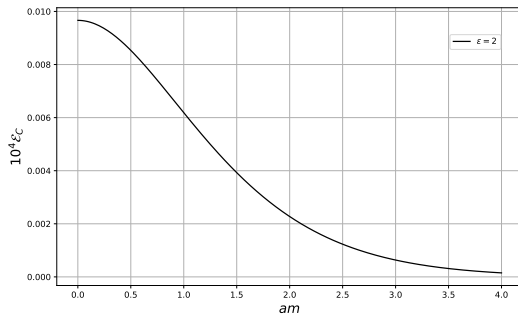
$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{(am)^8}{28\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \int_1^\infty \frac{\left(v^7 - \frac{7}{2}v^5 + \frac{35}{8}v^3 - \frac{35}{16}v\right) dv}{e^{2amv} - 1} \\ &\approx -\frac{1}{13440\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \left[ \pi^8 - \frac{10}{3}\pi^6(am)^2 + \frac{35}{4}\pi^4(am)^4 \right] . \end{aligned} \quad (4.52)$$

Usando (4.49), a pressão de Casimir fica da forma

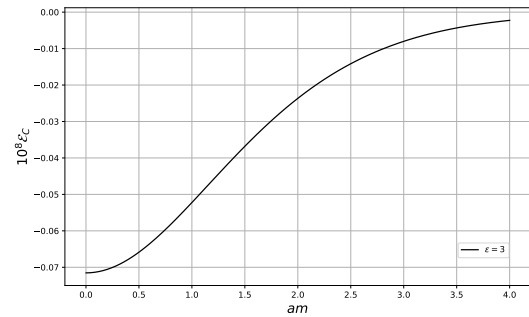
$$\tilde{P}_C(a) = -\frac{1}{161280a^4} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \left[ 84\pi^6 - 200\pi^4(am)^2 + 315\pi^2(am)^4 \right] . \quad (4.53)$$

Ou seja, a força de Casimir para esse caso é atrativa.

Na figura 5 apresentamos o comportamento da energia de Casimir por unidade de área multiplicada por  $a^3$ ,  $\varepsilon_c = \frac{\tilde{E}_C}{L^2} a^3$ , como uma função de  $ma$ , considerando apenas como um exemplo ilustrativo  $\frac{l}{a} = 0.01$ , para dois valores distintos de  $\epsilon$ . No gráfico a esquerda, consideramos  $\epsilon = 2$ , enquanto no gráfico a direita, consideramos  $\epsilon = 3$ .



(a) Para  $\epsilon = 2$



(b) Para  $\epsilon = 3$

Figura 5 – A energia de Casimir por unidade de área multiplicada por  $a^3$  como função de  $ma$ , no caso  $u^\mu = (0, 1, 0, 0)$ , e o campo obedecendo a condição de contorno de Dirichlet, para  $\epsilon = 2$  no gráfico a esquerda, e  $\epsilon = 3$  no gráfico a direita. Em ambos os gráficos consideramos  $\frac{l}{a} = 0.01$ .

### 4.1.2 Vetor perpendicular

Agora, vamos considerar o 4-vetor constante  $u^\mu$  sendo perpendicular as placas, ou seja,

$$u^\mu = (0, 0, 0, 1) . \quad (4.54)$$

Assim, a equação da Klein-Gordon modificada (4.1) fica da forma

$$\left[ \square + l^{2(\epsilon-1)} (\partial_z)^{2\epsilon} + m^2 \right] \phi = 0 , \quad (4.55)$$

com isso, a relação de dispersão associada ao operador campo (4.4) se torna

$$\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + l^{2(\epsilon-1)} (-1)^\epsilon \left( \frac{n\pi}{a} \right)^{2\epsilon} + m^2 . \quad (4.56)$$

O operador Hamiltoniano correspondente será

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[ 2\hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right] . \quad (4.57)$$

Então, a energia do vácuo obtida é dada por

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} . \quad (4.58)$$

Mudando as coordenadas do plano  $(k_x, k_y)$  para o plano polar, ficamos com

$$E_0 = \frac{L^2}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty k dk \sum_{n=1}^{\infty} \left[ k^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + l^{2(\epsilon-1)} (-1)^\epsilon \left( \frac{n\pi}{a} \right)^{2\epsilon} + m^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (4.59)$$

Fazendo uma mudança de variável  $u = ak$ , obtemos

$$E_0 = \frac{L^2}{8\pi^2 a^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty u du \sum_{n=1}^{\infty} \left[ u^2 + (n\pi)^2 + (ma)^2 + \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} (-1)^\epsilon (n\pi)^{2\epsilon} \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (4.60)$$

Para este caso a integral sobre a variável angular é trivial. Porém, para obter a energia de Casimir temos que desenvolver o somatório em  $n$ . Nesse sentido, usando a fórmula de Abel-Plana (3.41), não encontramos na literatura um resultado muito esclarecedor para a integral sobre a variável  $t$ , para qualquer valor de  $\epsilon$ . Assim, como fizemos na subseção anterior, realizaremos uma expansão até a primeira ordem no parâmetro  $\frac{l}{a} \ll 1$ . Com isso, a expressão (4.60) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} E_0 \approx & \frac{L^2}{8\pi^2 a^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty u du \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ u^2 + (n\pi)^2 + (ma)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} (-1)^\epsilon (n\pi)^{2\epsilon} \left[ u^2 + (n\pi)^2 + (ma)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} . \end{aligned} \quad (4.61)$$

Novamente, o primeiro termo está associado a energia sem a violação de Lorentz. Assim, calculando a integral sobre a coordenada angular, o segundo termo se torna

$$\tilde{E}_0 = \frac{L^2 (-1)^\epsilon}{8\pi a^3} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty u du \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^{2\epsilon} \left[ u^2 + (n\pi)^2 + (ma)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} . \quad (4.62)$$

Usando a fórmula de Abel-Plana para números inteiros (3.41), ficamos com

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0 &= \frac{L^2(-1)^\epsilon}{8\pi a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty u du \left\{ -\frac{1}{2}F(0) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty F(t)dt + i \int_0^\infty \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt \right\}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

onde

$$F(n) = (n\pi)^{2\epsilon} [u^2 + (n\pi)^2 + (ma)^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.64)$$

Descartando os dois primeiros termos divergentes, a energia da Casimir por unidade de área fica da forma

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &= \frac{i}{8\pi a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty u du \int_0^\infty dt \\ &\quad (t\pi)^{2\epsilon} \left\{ [u^2 + (it\pi)^2 + (ma)^2]^{-1/2} - [u^2 + (-it\pi)^2 + (ma)^2]^{-1/2} \right\} \\ &\quad \times \frac{1}{e^{2t\pi} - 1}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Fazendo a mudança de variável  $t\pi = v$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &= \frac{i}{8\pi a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty u du \\ &\quad \times \int_0^\infty dv \frac{v^{2\epsilon} \left\{ [u^2 + (iv)^2 + (ma)^2]^{-1/2} - [u^2 + (-iv)^2 + (ma)^2]^{-1/2} \right\}}{e^{2v} - 1}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Novamente, analisando a integral na variável  $v$  sobre os dois intervalos  $v < [u^2 + (ma)^2]^{1/2}$  e  $v > [u^2 + (ma)^2]^{1/2}$ , encontramos que

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty u du \int_{[u^2 + (ma)^2]^{1/2}}^\infty dv \frac{v^{2\epsilon} [v^2 - (u^2 + (ma)^2)]^{-1/2}}{e^{2v} - 1}. \quad (4.67)$$

Agora, fazendo a mudança de variável  $\rho^2 = v^2 - (u^2 + (ma)^2)$  e também a mudança de coordenadas do plano  $(u, \rho)$  para o plano polar  $(\sigma, \theta)$ , a equação (4.67) fica da forma

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty \frac{[\sigma^2 + (ma)^2]^{\epsilon-\frac{1}{2}} \sigma^2 d\sigma}{e^{2(\sigma^2 + (ma)^2)^{\frac{1}{2}}} - 1}. \quad (4.68)$$

Para o campo escalar sem massa, temos que

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty \frac{\sigma^{2\epsilon+1} d\sigma}{e^{2\sigma} - 1}. \quad (4.69)$$

De novo, usando (4.29), ficamos com

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{\Gamma(2\epsilon+2)\zeta(2\epsilon+2)}{2^{(2\epsilon+2)}}. \quad (4.70)$$

- Para  $\epsilon = 2$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{\pi^4}{2016a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 . \quad (4.71)$$

- Para  $\epsilon = 3$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{\pi^6}{1920a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 . \quad (4.72)$$

A integral em (4.68) pode ser expressa em termos de uma série infinita de funções de Bessel modificada para  $m \neq 0$ , então vamos avaliar seus limites assintóticos. Para isso, fazendo as seguintes mudanças de variável  $\xi^2 = \sigma^2 + (ma)^2$  e  $\xi = mav$ , obtemos

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_1^\infty \frac{v^{2\epsilon} (v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dv}{e^{2amv} - 1} . \quad (4.73)$$

Escrevendo o denominador em termos de uma série geométrica, dado por (4.38), podemos reescrever a equação (4.73) como

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \sum_{j=1}^\infty \int_1^\infty v^{2\epsilon} (v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{-2amvj} dv . \quad (4.74)$$

Sabendo que

$$\frac{1}{(2mj)^{2\epsilon}} \frac{d^{2\epsilon} (e^{-2amvj})}{da^{2\epsilon}} = v^{2\epsilon} e^{-2amvj} , \quad (4.75)$$

podemos escrever a equação (4.74) na forma

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{1}{(2m)^{2\epsilon}} \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^{2\epsilon}} \frac{d^{2\epsilon}}{da^{2\epsilon}} \int_1^\infty (v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{-2amvj} dv . \quad (4.76)$$

Novamente, usando a representação integral da função de Bessel modificada (3.59), encontramos que

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{1}{(2m)^{2\epsilon+1}} \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^{2\epsilon+1}} \frac{d^{2\epsilon}}{da^{2\epsilon}} \left( \frac{K_1(2amj)}{a} \right) . \quad (4.77)$$

Vamos agora avaliar a energia de Casimir por unidade de área nos seguintes limites assintóticos:

- (i) Para  $am \gg 1$ :

Usando a expressão da função de Bessel para grandes argumentos (3.62) e tomando o termo dominante  $j = 1$ , obtemos

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx \frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{8(\pi)^{\frac{3}{2}} a^3 m^{\frac{1}{2}} (2m)^{2\epsilon+1}} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{d^{2\epsilon}}{da^{2\epsilon}} \left(\frac{e^{-2am}}{a^{\frac{3}{2}}}\right). \quad (4.78)$$

Assim, nós temos que

- Para o caso  $\epsilon = 2$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx \frac{(am)^{\frac{9}{2}}}{16(\pi)^{\frac{3}{2}} a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 e^{-2am}. \quad (4.79)$$

- Para o caso  $\epsilon = 3$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx \frac{(am)^{\frac{13}{2}}}{16(\pi)^{\frac{3}{2}} a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 e^{-2am}. \quad (4.80)$$

Em ambos os casos, a energia de Casimir decai exponencialmente com o aumento do parâmetro  $am$ .

(ii) Para  $am \ll 1$ , é melhor considerar a equação (4.73):

- No caso  $\epsilon = 2$ , a expressão (4.73) se torna

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^6}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \int_1^\infty \frac{v^4 (v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dv}{e^{2amv} - 1}. \quad (4.81)$$

Fazendo uma expansão no integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &\approx \frac{(am)^6}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \int_1^\infty \frac{\left(v^5 - \frac{1}{2}v^3 - \frac{1}{8}v\right) dv}{e^{2amv} - 1} \\ &\approx \frac{1}{2016\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[\pi^6 - \frac{21}{20}\pi^4(am)^2 - \frac{21}{8}\pi^2(am)^4\right]. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Com isso, a pressão de Casimir fica da forma

$$\tilde{P}_C(a) = \frac{1}{80640a^4} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[200\pi^4 - 126\pi^2(am)^2 + 105(am)^4\right]. \quad (4.83)$$

Ou seja, a força de Casimir para esse caso é repulsiva.

- No caso  $\epsilon = 3$ , a expressão (4.73) se torna:

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^8}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \int_1^\infty \frac{v^6 (v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dv}{e^{2amv} - 1} . \quad (4.84)$$

Fazendo a expansão, obtemos

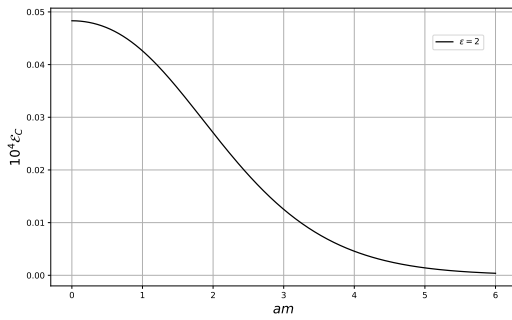
$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &\approx \frac{(am)^8}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \int_1^\infty \frac{\left(v^7 - \frac{1}{2}v^5 - \frac{1}{8}v^3 - \frac{1}{16}v\right) dv}{e^{2amv} - 1} \\ &\approx \frac{1}{1920\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \left[ \pi^8 - \frac{10}{21}\pi^6(am)^2 - \frac{1}{4}\pi^4(am)^4 \right] . \end{aligned} \quad (4.85)$$

Portanto, a pressão de Casimir será

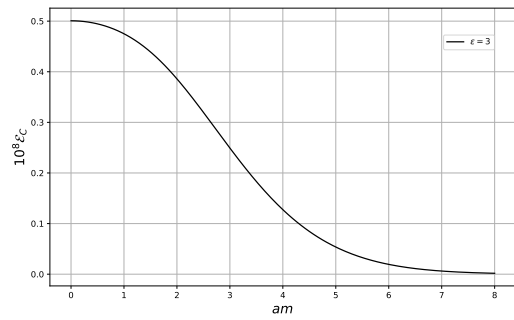
$$\tilde{P}_C(a) = \frac{1}{161280a^4} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \left[ 588\pi^6 - 200\pi^4(am)^2 + 63\pi^2(am)^4 \right] . \quad (4.86)$$

Ou seja, a força de Casimir para esse caso é também repulsiva.

Na figura 6 apresentamos o comportamento da energia de Casimir por unidade de área multiplicada por  $a^3$ ,  $\varepsilon_c = \frac{\tilde{E}_C}{L^2} a^3$ , como uma função de  $ma$ , considerando apenas como um exemplo ilustrativo  $\frac{l}{a} = 0.01$ , para dois valores distintos de  $\epsilon$ . No gráfico a esquerda, consideramos  $\epsilon = 2$ , enquanto no gráfico a direita, consideramos  $\epsilon = 3$ .



(a) Para  $\epsilon = 2$



(b) Para  $\epsilon = 3$

Figura 6 – A energia de Casimir por unidade de área multiplicada por  $a^3$  como função de  $ma$ , no caso  $u^\mu = (0, 0, 0, 1)$ , e o campo obedecendo a condição de contorno de Dirichlet, para  $\epsilon = 2$  no gráfico a esquerda, e  $\epsilon = 3$  no gráfico a direita. Em ambos os gráficos consideramos  $\frac{l}{a} = 0.01$ .

## 4.2 Condição de contorno de Neumann

Impondo a condição de contorno de Neumann nas placas, ou seja

$$\left. \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial z} \right|_{z=a} = 0 , \quad (4.87)$$



encontramos que o operador campo é escrito como

$$\hat{\phi}(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) [\hat{a}_{\mathbf{k},n}e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k},n}^{\dagger}e^{ikx}] , \quad (4.88)$$

onde

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^2a \omega_{\mathbf{k},n}}} & \text{for } n = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2a \omega_{\mathbf{k},n}}} & \text{for } n \geq 1. \end{cases} \quad (4.89)$$

### 4.2.1 Vetor paralelo

Considerando o vetor sendo paralelo as placas

$$u^{\mu} = (0, 1, 0, 0) . \quad (4.90)$$

Com isso, a equação da Klein-Gordon modificada (4.1) fica da forma

$$\left[ \square + l^{2(\epsilon-1)}(\partial_x)^{2\epsilon} + m^2 \right] \phi = 0 , \quad (4.91)$$

logo, a relação de dispersão associada ao operador campo (4.88) é dada por

$$\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + l^{2(\epsilon-1)}(-1)^{\epsilon}k_x^{2\epsilon} + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2 . \quad (4.92)$$

O operador Hamiltoniano obtido é escrito como

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[ 2\hat{a}_{\mathbf{k},n}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right] . \quad (4.93)$$

Portanto, a energia do vácuo será

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} . \quad (4.94)$$

Essa energia também é infinita. Então realizando o mesmo procedimento feito no caso da condição de contorno de Dirichlet, a energia de Casimir por unidade de área é dada por:

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^{\epsilon}}{(2\epsilon+1)} \int_1^{\infty} \frac{(v^2-1)^{\epsilon+\frac{1}{2}} dv}{e^{2amv}-1} . \quad (4.95)$$

Essa integral é a mesma obtida anteriormente e não pode ser calculada explicitamente, então vamos novamente considerar os seus limites assintóticos.

(i) Para  $am \gg 1$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx \frac{(am)^{\epsilon+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\epsilon+\frac{3}{2}\right) (-1)^{\epsilon}}{8\pi^2a^3(2\epsilon+1)} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} e^{-2am} . \quad (4.96)$$

(ii) Para  $am \ll 1$ :

- No caso  $\epsilon = 2$ , obtemos

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx \frac{1}{10080\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[ \pi^6 - \frac{21}{4}\pi^4(am)^2 + \frac{315}{8}\pi^2(am)^4 \right]. \quad (4.97)$$

Então, a pressão de Casimir fica da forma

$$\tilde{P}_C(a) = \frac{1}{80640a^4} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[ 40\pi^4 - 126\pi^2(am)^2 + 315(am)^4 \right]. \quad (4.98)$$

- No caso  $\epsilon = 3$ , obtemos

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx -\frac{1}{13440\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \left[ \pi^8 - \frac{10}{3}\pi^6(am)^2 + \frac{35}{4}\pi^4(am)^4 \right]. \quad (4.99)$$

A pressão de Casimir será

$$\tilde{P}_C(a) = -\frac{1}{161280a^4} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \left[ 84\pi^6 - 200\pi^4(am)^2 + 315\pi^2(am)^4 \right]. \quad (4.100)$$

## 4.2.2 Vetor perpendicular

Agora, considerando o vetor sendo perpendicular as placas

$$u^\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (4.101)$$

A equação da Klein-Gordon modificada (4.1) fica da forma

$$\left[ \square + l^{2(\epsilon-1)}(\partial_z)^{2\epsilon} + m^2 \right] \phi = 0, \quad (4.102)$$

logo, a relação de dispersão associada ao operador campo (4.88) é dada por

$$\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + l^{2(\epsilon-1)}(-1)^\epsilon \left(\frac{n\pi}{a}\right)^{2\epsilon} + m^2. \quad (4.103)$$

O operador Hamiltoniano torna-se

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[ 2\hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right]. \quad (4.104)$$

Portanto, a energia do vácuo será

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}. \quad (4.105)$$

Novamente, essa energia também é infinita. Realizando o mesmo procedimento, a energia de Casimir por unidade de área fica da forma

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_1^\infty \frac{v^{2\epsilon} (v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dv}{e^{2amv} - 1}. \quad (4.106)$$

Essa integral é a mesma obtida na condição de contorno de Dirichlet, assim, seus limites assintóticos são dados por

(i) Para  $am \gg 1$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx \frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{8(\pi)^{\frac{3}{2}} a^3 m^{\frac{1}{2}} (2m)^{2\epsilon+1}} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{d^{2\epsilon}}{da^{2\epsilon}} \left(\frac{e^{-2am}}{a^{\frac{3}{2}}}\right). \quad (4.107)$$

- Para o caso  $\epsilon = 2$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx \frac{(am)^{\frac{9}{2}}}{16(\pi)^{\frac{3}{2}} a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 e^{-2am}. \quad (4.108)$$

- Para o caso  $\epsilon = 3$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx \frac{(am)^{\frac{13}{2}}}{16(\pi)^{\frac{3}{2}} a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 e^{-2am}. \quad (4.109)$$

(ii) Para  $am \ll 1$ :

- No caso  $\epsilon = 2$ , obtemos

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx \frac{1}{2016\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[ \pi^6 - \frac{21}{20} \pi^4 (am)^2 - \frac{21}{8} \pi^2 (am)^4 \right]. \quad (4.110)$$

Então, a pressão de Casimir fica da forma

$$\tilde{P}_C(a) = \frac{1}{80640a^4} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[ 200\pi^4 - 126\pi^2 (am)^2 + 105(am)^4 \right]. \quad (4.111)$$

- No caso  $\epsilon = 3$ , obtemos

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx \frac{1}{1920\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \left[ \pi^8 - \frac{10}{21} \pi^6 (am)^2 - \frac{1}{4} \pi^4 (am)^4 \right]. \quad (4.112)$$

A pressão de Casimir será

$$\tilde{P}_C(a) = \frac{1}{161280a^4} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \left[ 588\pi^6 - 200\pi^4 (am)^2 + 63\pi^2 (am)^4 \right]. \quad (4.113)$$

Notemos que para os diferentes casos considerados para o quadrivetor constante (paralelo ou perpendicular as placas), os resultados obtidos quando consideramos a condição de contorno de Neumann coincidem com os resultados obtidos no caso da condição de contorno de Dirichlet. Isso ocorre, porque mesmo o operador de campo sendo diferente nos dois casos, os operadores Hamiltonianos e as relações de dispersão coincidem para ambas as condições de contorno.

### 4.3 Condições de contorno mistas

Impondo as condições de contorno mistas nas placas, temos duas configurações possíveis:

- Primeira configuração:

$$\phi(z=0) = \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z}\bigg|_{z=a} = 0 . \quad (4.114)$$

- Segunda configuração:

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \phi(z=a) = 0 . \quad (4.115)$$

Com isso, o operador campo obtido é dado por

$$\hat{\phi}_{(i)}(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 a} \omega_{\mathbf{k},n}} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} z\right] \left[\hat{a}_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k},n}^{\dagger} e^{ikx}\right] \quad (4.116)$$

para a primeira configuração e

$$\hat{\phi}_{(ii)}(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 a} \omega_{\mathbf{k},n}} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} z\right] \left[\hat{a}_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k},n}^{\dagger} e^{ikx}\right] , \quad (4.117)$$

para a segunda configuração. Porém, os operadores de campos  $\hat{\phi}_1$  e  $\hat{\phi}_2$  nos fornecem o mesmo operador Hamiltoniano e relação de dispersão.

#### 4.3.1 Vetor paralelo

Considerando o vetor sendo paralelo as placas

$$u^{\mu} = (0, 1, 0, 0) . \quad (4.118)$$

A relação de dispersão correspondente é dada por

$$\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + l^{2(\epsilon-1)} (-1)^{\epsilon} k_x^{2\epsilon} + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a}\right]^2 + m^2 . \quad (4.119)$$

Como dito anteriormente,  $\hat{\phi}_{(i)}(x)$  e  $\hat{\phi}_{(ii)}(x)$ , fornecem o mesmo operador Hamiltoniano, ou seja,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[ 2\hat{a}_{\mathbf{k},n}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right] . \quad (4.120)$$

Consequentemente, a energia do vácuo torna-se

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} . \quad (4.121)$$

Realizando uma mudança de coordenadas do plano  $(k_x, k_y)$  para o plano polar, fazendo uma mudança de variável  $u = ak$  e tomando a expansão até a primeira ordem no parâmetro adimensional  $\frac{l}{a} \ll 1$ , obtemos que

$$E_0 \approx \frac{L^2}{8\pi^2 a^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty u du \sum_{n=0}^\infty \left\{ \left[ u^2 + \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2 + (ma)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} (-1)^\epsilon u^{2\epsilon} \cos^{2\epsilon} \theta \left[ u^2 + \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2 + (ma)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}. \quad (4.122)$$

Novamente, o primeiro termo dessa integral está associado a energia do vácuo sem a violação de Lorentz. Portanto, realizando a integral sobre a coordenada angular, o segundo termo fica da forma

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0 &= \frac{L^2}{8\pi a^3} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon-1)!!}{(2\epsilon)!!} \\ &\times \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \sum_{n=0}^\infty \left[ u^2 + \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2 + (ma)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Para renormalizar, usemos a fórmula de regularização de Abel-Plana para números semi-inteiros (3.90):

$$\sum_{n=0}^\infty F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty F(t) dt - i \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1} [F(it) - F(-it)]. \quad (4.124)$$

Assim, a expressão (4.123) se torna

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0 &= \frac{L^2}{8\pi a^3} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon-1)!!}{(2\epsilon)!!} \\ &\times \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \left\{ \int_0^\infty F(t) dt - i \int_0^\infty \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} + 1} dt \right\}, \end{aligned} \quad (4.125)$$

onde

$$F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left[ u^2 + \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2 + (ma)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.126)$$

O primeiro termo da equação (4.125) se refere a energia do vácuo livre, portanto o descartamos no processo de renormalização. Assim, ficamos com o termo da energia de Casimir por unidade de área devido a violação da Lorentz, dado por

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &= -\frac{i}{8\pi a^3} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon-1)!!}{(2\epsilon)!!} \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \\ &\times \int_0^\infty dt \frac{[u^2 + (it\pi)^2 + (ma)^2]^{-1/2} - [u^2 + (-it\pi)^2 + (ma)^2]^{-1/2}}{e^{2\pi t} + 1}. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Fazendo uma mudança de variável  $t\pi = v$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &= -\frac{i}{8\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon-1)!!}{(2\epsilon)!!} \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \\ &\times \int_0^\infty dv \frac{[u^2 + (ma)^2 + (iv)^2]^{-1/2} - [u^2 + (ma)^2 + (-iv)^2]^{-1/2}}{e^{2v} + 1}. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Agora, realizando a mesma análise feita nos casos anteriores, para o intervalo de  $v$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &= -\frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon-1)!!}{(2\epsilon)!!} \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \\ &\times \int_{[u^2+(ma)^2]^{\frac{1}{2}}}^\infty dv \frac{[v^2 - (u^2 + (ma)^2)]^{-1/2}}{e^{2v} + 1}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Tomando a mudança de variável  $\rho^2 = v^2 - (u^2 + (ma)^2)$ , encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &= -\frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon (2\epsilon-1)!!}{(2\epsilon)!!} \int_0^\infty u^{(2\epsilon+1)} du \\ &\times \int_0^\infty \frac{d\rho}{[\rho^2 + u^2 + (ma)^2]^{\frac{1}{2}} \left[ e^{2(\rho^2 + u^2 + (ma)^2)^{\frac{1}{2}}} + 1 \right]}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

Fazendo uma mudança de coordenadas do plano  $(u, \rho)$  para o plano polar  $(\sigma, \theta)$ , obtemos

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon}{(2\epsilon+1)} \int_0^\infty \frac{\sigma^{2(\epsilon+1)} d\sigma}{[\sigma^2 + (ma)^2]^{\frac{1}{2}} \left[ e^{2(\sigma^2 + (ma)^2)^{\frac{1}{2}}} + 1 \right]}. \quad (4.131)$$

Para o campo sem massa, ou seja  $m = 0$ , a equação (4.131) é expressa por

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon}{(2\epsilon+1)} \int_0^\infty \frac{\sigma^{2\epsilon+1} d\sigma}{e^{2\sigma} + 1}. \quad (4.132)$$

Usando o resultado da integral encontrado em [43]:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{e^{\mu x} + 1} = \frac{1}{\mu^\nu} (1 - 2^{1-\nu}) \Gamma(\nu) \zeta(\nu), \quad (4.133)$$

onde  $\Gamma(\nu)$  corresponde a função Gamma e  $\zeta(\nu)$  a função zeta de Riemann, obtemos que

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon}{(2\epsilon+1)} \frac{(1 - 2^{-(2\epsilon+1)}) \Gamma(2\epsilon+2) \zeta(2\epsilon+2)}{2^{(2\epsilon+2)}}. \quad (4.134)$$

- Para  $\epsilon = 2$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{31\pi^4}{322560a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2. \quad (4.135)$$

- Para  $\epsilon = 3$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{127\pi^6}{1720320a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4. \quad (4.136)$$

Como a integral em (4.131) não pode ser expressa em termos de funções elementares, então vamos avaliar seus limites assintóticos. Para isso, façamos as seguintes mudanças de variáveis  $\xi^2 = \sigma^2 + (ma)^2$  e  $\xi = mav$ . Assim, encontramos que

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon}{(2\epsilon+1)} \int_1^\infty \frac{(v^2-1)^{\epsilon+\frac{1}{2}} dv}{e^{2amv} + 1}. \quad (4.137)$$

Sabendo que a série geométrica pode ser representada como

$$\frac{1}{e^{2amv} + 1} = \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j+1} e^{-2amvj}, \quad (4.138)$$

então podemos reescrever a equação (4.137) da forma

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(-1)^\epsilon}{(2\epsilon+1)} \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j+1} \int_1^\infty (v^2-1)^{\epsilon+\frac{1}{2}} e^{-2amvj} dv. \quad (4.139)$$

Por fim, usando a representação integral da função de Bessel modificada (3.59), ficamos com

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{(am)^{\epsilon+1} \Gamma\left(\epsilon + \frac{3}{2}\right) (-1)^\epsilon}{4(\pi)^{\frac{5}{2}} a^3 (2\epsilon+1)} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j+1}}{j^{\epsilon+1}} K_{\epsilon+1}(2amj). \quad (4.140)$$

Vamos agora avaliar a energia de Casimir por unidade de área nos seguintes limites assintóticos:

- (i) Para  $am \gg 1$ :

Para grandes argumentos, a função de Bessel modificada pode ser expressa na forma exponencial, como vimos em (3.62), então tomando o termo dominante  $j = 1$ , obtemos

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx -\frac{(am)^{\epsilon+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\epsilon + \frac{3}{2}\right) (-1)^\epsilon}{8\pi^2 a^3 (2\epsilon+1)} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} e^{-2am}. \quad (4.141)$$

- (ii) Para  $am \ll 1$ , é melhor considerar a equação (4.137):

- No caso  $\epsilon = 2$ , a expressão (4.137) se torna

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{(am)^6}{20\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \int_1^\infty \frac{(v^2-1)^{\frac{5}{2}} dv}{e^{2amv} + 1}. \quad (4.142)$$

Fazendo uma expansão no integrando, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{(am)^6}{20\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \int_1^\infty \frac{\left(v^5 - \frac{5}{2}v^3 + \frac{15}{8}v\right) dv}{e^{2amv} + 1} \\ &\approx -\frac{31}{322560\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[\pi^6 - \frac{147}{31}\pi^4(am)^2 + \frac{630}{31}\pi^2(am)^4\right].\end{aligned}\quad (4.143)$$

Nesse caso, a pressão de Casimir é expressa por

$$\tilde{P}_C(a) = -\frac{1}{322560a^4} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[155\pi^4 - 441\pi^2(am)^2 + 630(am)^4\right]. \quad (4.144)$$

Ou seja, a força de Casimir para esse caso é atrativa.

- No caso  $\epsilon = 3$ , a expressão (4.137) se torna

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = \frac{(am)^8}{28\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \int_1^\infty \frac{(v^2 - 1)^{\frac{7}{2}} dv}{e^{2amv} + 1}. \quad (4.145)$$

Fazendo uma expansão no integrando, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{E}_C}{L^2} &\approx \frac{(am)^8}{28\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \int_1^\infty \frac{\left(v^7 - \frac{7}{2}v^5 + \frac{35}{8}v^3 - \frac{35}{16}v\right) dv}{e^{2amv} + 1} \\ &\approx \frac{127}{1720320\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \left[\pi^8 - \frac{1240}{381}\pi^6(am)^2 + \frac{980}{127}\pi^4(am)^4\right].\end{aligned}\quad (4.146)$$

Assim, a pressão de Casimir será

$$\tilde{P}_C(a) = \frac{1}{5160960a^4} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \left[2667\pi^6 - 6200\pi^4(am)^2 + 8820\pi^2(am)^4\right]. \quad (4.147)$$

Ou seja, a força de Casimir para esse caso é repulsiva.

Na figura 7 apresentamos o comportamento da energia de Casimir por unidade de área multiplicada por  $a^3$ ,  $\varepsilon_c = \frac{\tilde{E}_C}{L^2} a^3$ , como uma função de  $ma$ , considerando apenas como um exemplo ilustrativo  $\frac{l}{a} = 0.01$ , para dois valores distintos de  $\epsilon$ . No gráfico a esquerda, consideramos  $\epsilon = 2$ , enquanto no gráfico a direita, consideramos  $\epsilon = 3$ .

### 4.3.2 Vetor perpendicular

Considerando o vetor sendo perpendicular as placas

$$u^\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (4.148)$$



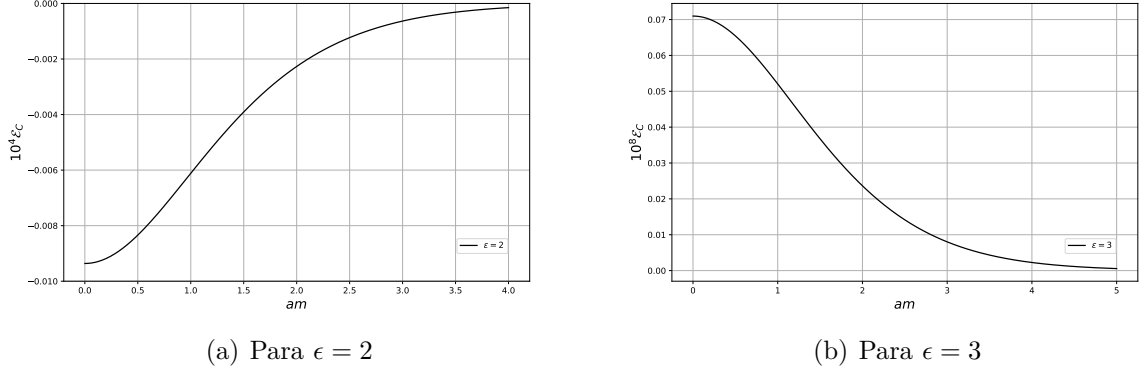


Figura 7 – A energia de Casimir por unidade de área multiplicada por  $a^3$  como função de  $ma$ , no caso  $u^\mu = (0, 1, 0, 0)$ , e o campo obedecendo as condições de contorno mistas, para  $\epsilon = 2$  no gráfico a esquerda, e  $\epsilon = 3$  no gráfico a direita. Em ambos os gráficos consideramos  $\frac{l}{a} = 0.01$ .

Para esse caso, relação de dispersão correspondente é dada por

$$\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^2 + l^{2(\epsilon-1)} (-1)^\epsilon \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^{2\epsilon} + m^2. \quad (4.149)$$

Assim, o operador Hamiltoniano é expresso por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[ 2\hat{a}_{\mathbf{k},n}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right]. \quad (4.150)$$

Consequentemente, a energia do vácuo torna-se

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}. \quad (4.151)$$

Realizando uma mudança de coordenadas do plano  $(k_x, k_y)$  para o plano polar, fazendo uma mudança de variável  $u = ak$  e tomando a expansão até a primeira ordem no parâmetro adimensional  $\frac{l}{a} \ll 1$ , obtemos,

$$E_0 \approx \frac{L^2}{8\pi^2 a^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty u du \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ u^2 + \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2 + (ma)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{(-1)^\epsilon}{2} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^{2\epsilon} \left[ u^2 + \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2 + (ma)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}. \quad (4.152)$$

O primeiro termo dessa integral está associado a energia do vácuo sem a violação de Lorentz. Portanto, realizando a integral sobre a coordenada angular, o segundo termo fica da forma

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0 &= \frac{L^2 (-1)^\epsilon}{8\pi a^3} \left( \frac{l}{a} \right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty u du \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^{2\epsilon} \\ &\times \left[ u^2 + \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2 + (ma)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.153)$$

Usando de novo a fórmula de Abel-Plana para números semi-inteiros (3.90), encontramos que

$$\tilde{E}_0 = \frac{L^2(-1)^\epsilon}{8\pi a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty u du \left\{ \int_0^\infty F(t) dt - i \int_0^\infty \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} + 1} dt \right\}, \quad (4.154)$$

onde

$$F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^{2\epsilon} \left[u^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2 + (ma)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.155)$$

O primeiro termo da integral (4.154) é a contribuição da energia do vácuo livre, então, renormalizando e fazendo uma mudança de variável  $t\pi = v$ , a energia de Casimir por unidade de área devido a violação de Lorentz será:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &= -\frac{i}{8\pi a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty u du \\ &\times \int_0^\infty dt \frac{v^{2\epsilon} \left\{ [u^2 + (iv)^2 + (ma)^2]^{-1/2} - [u^2 + (-iv)^2 + (ma)^2]^{-1/2} \right\}}{e^{2v} + 1}. \end{aligned} \quad (4.156)$$

Novamente, analisando a integral na variável  $v$ , encontramos que

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty u du \int_{[u^2 + (ma)^2]^{\frac{1}{2}}}^\infty dv \frac{v^{2\epsilon} [v^2 - (u^2 + (ma)^2)]^{-1/2}}{e^{2v} + 1}. \quad (4.157)$$

Fazendo uma mudança de variável  $\rho^2 = v^2 - (u^2 + (ma)^2)$ , e transformando as coordenadas do plano  $(u, \rho)$  para o plano polar  $(\sigma, \theta)$ , obtemos

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty \frac{[\sigma^2 + (ma)^2]^{\epsilon-\frac{1}{2}} \sigma^2 d\sigma}{e^{2(\sigma^2 + (ma)^2)^{\frac{1}{2}}} + 1}. \quad (4.158)$$

Para o campo sem massa, tomando  $m = 0$ , a integral fica da forma

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_0^\infty \frac{\sigma^{2\epsilon+1} d\sigma}{e^{2\sigma} + 1}. \quad (4.159)$$

Usando a equação (4.133), encontramos que

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{1}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{(1 - 2^{-(2\epsilon+1)}) \Gamma(2\epsilon+2) \zeta(2\epsilon+2)}{2^{(2\epsilon+2)}}. \quad (4.160)$$

- Para  $\epsilon = 2$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{31\pi^4}{64512a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2. \quad (4.161)$$

- Para  $\epsilon = 3$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{127\pi^6}{245760a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4. \quad (4.162)$$

Novamente, vamos avaliar os limites assintóticos de (4.158). Para isso, façamos as seguintes mudanças de variáveis:  $\xi^2 = \sigma^2 + (ma)^2$  e  $\xi = mav$ . Assim, obtemos que

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \int_1^\infty \frac{v^{2\epsilon} (v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dv}{e^{2amv} + 1}. \quad (4.163)$$

Reescrevendo o denominador usando a série geométrica (4.138):

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j+1} \int_1^\infty v^{2\epsilon} (v^2 - 1)^{\epsilon+\frac{1}{2}} e^{-2amvj} dv. \quad (4.164)$$

Usando a identidade

$$\frac{1}{(2mj)^{2\epsilon}} \frac{d^{2\epsilon} (e^{-2amvj})}{da^{2\epsilon}} = v^{2\epsilon} e^{-2amvj}, \quad (4.165)$$

a energia de Casimir por unidade de área devido a violação de Lorentz pode ser expressa como

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{1}{(2m)^{2\epsilon}} \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j+1}}{j^{2\epsilon}} \frac{d^{2\epsilon}}{da^{2\epsilon}} \int_1^\infty (v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{-2amvj} dv. \quad (4.166)$$

Usando a representação integral da função de Bessel modificada (3.59), ficamos com

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{1}{(2m)^{2\epsilon+1}} \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j+1}}{j^{2\epsilon+1}} \frac{d^{2\epsilon}}{da^{2\epsilon}} \left( \frac{K_1(2amj)}{a} \right). \quad (4.167)$$

Vamos agora avaliar a energia de Casimir por unidade de área nos seguintes limites assintóticos:

- (i) Para  $am \gg 1$ :

Usando a expressão da função de Bessel modificada para grandes argumentos (3.62), e tomando o termo dominante  $j = 1$ , obtemos

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx -\frac{(am)^{2(\epsilon+1)}}{8(\pi)^{\frac{3}{2}} a^3 m^{\frac{1}{2}} (2m)^{2\epsilon+1}} \left(\frac{l}{a}\right)^{2(\epsilon-1)} \frac{d^{2\epsilon}}{da^{2\epsilon}} \left( \frac{e^{-2am}}{a^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (4.168)$$

- Para o caso  $\epsilon = 2$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx -\frac{(am)^{\frac{9}{2}}}{16(\pi)^{\frac{3}{2}} a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 e^{-2am}. \quad (4.169)$$

- Para o caso  $\epsilon = 3$ :

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} \approx -\frac{(am)^{\frac{13}{2}}}{16(\pi)^{\frac{3}{2}}a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 e^{-2am} . \quad (4.170)$$

(ii) Para  $am \ll 1$ :

- No caso  $\epsilon = 2$ , a expressão (4.163) se torna:

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{(am)^6}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \int_1^\infty \frac{v^4 (v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dv}{e^{2amv} + 1} . \quad (4.171)$$

Fazendo uma expansão no integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{(am)^6}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \int_1^\infty \frac{(v^5 - \frac{1}{2}v^3 - \frac{1}{8}v) dv}{e^{2amv} + 1} \\ &\approx -\frac{31}{64512\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[ \pi^6 - \frac{147}{155}\pi^4(am)^2 - \frac{42}{31}\pi^2(am)^4 \right] . \end{aligned} \quad (4.172)$$

Com isso, a pressão de Casimir obtida é

$$\tilde{P}_C(a) = -\frac{1}{322560a^4} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[ 775\pi^4 - 441\pi^2(am)^2 - 210(am)^4 \right] . \quad (4.173)$$

Ou seja, a força de Casimir para esse caso é atrativa.

- No caso  $\epsilon = 3$ , a expressão (4.163) se torna:

$$\frac{\tilde{E}_C}{L^2} = -\frac{(am)^8}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \int_1^\infty \frac{v^6 (v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dv}{e^{2amv} + 1} . \quad (4.174)$$

A expansão em série desse caso nos fornece

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{(am)^8}{4\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \int_1^\infty \frac{(v^7 - \frac{1}{2}v^5 - \frac{1}{8}v^3 - \frac{1}{16}v) dv}{e^{2amv} + 1} \\ &\approx -\frac{127}{245760\pi^2 a^3} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \left[ \pi^8 - \frac{1240}{2667}\pi^6(am)^2 - \frac{28}{127}\pi^4(am)^4 \right] . \end{aligned} \quad (4.175)$$

Logo, a pressão de Casimir é dada por

$$\tilde{P}_C(a) = -\frac{1}{5160960a^4} \left(\frac{l}{a}\right)^4 \left[ 18669\pi^6 - 6200\pi^4(am)^2 - 1764\pi^2(am)^4 \right] \quad (4.176)$$

Ou seja, a força de Casimir para esse caso é também atrativa.

Na figura 8 apresentamos o comportamento da energia de Casimir por unidade de área multiplicada por  $a^3$ ,  $\varepsilon_c = \frac{\tilde{E}_C}{L^2} a^3$ , como uma função de  $ma$ , considerando apenas como um exemplo ilustrativo  $\frac{l}{a} = 0.01$ , para dois valores distintos de  $\epsilon$ . No gráfico a esquerda, consideramos  $\epsilon = 2$ , enquanto no gráfico a direita, consideramos  $\epsilon = 3$ .

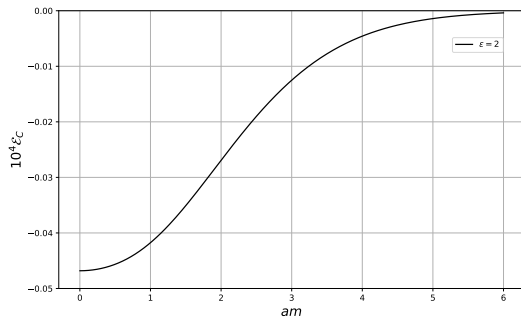
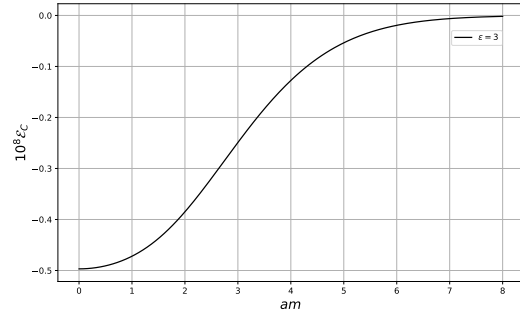
(a) Para  $\epsilon = 2$ (b) Para  $\epsilon = 3$ 

Figura 8 – A energia de Casimir por unidade de área multiplicada por  $a^3$  como função de  $ma$ , no caso  $u^\mu = (0, 0, 0, 1)$ , e o campo obedecendo as condições de contorno mistas, para  $\epsilon = 2$  no gráfico a esquerda, e  $\epsilon = 3$  no gráfico a direita. Em ambos os gráficos consideramos  $\frac{l}{a} = 0.01$ .

## 5 Considerações finais

O objetivo central dessa dissertação foi investigar a influência da violação da simetria de Lorentz na energia de Casimir associada a um campo quântico, escalar, real e de massa  $m$ , confinado entre duas placas planas, paralelas, quadradas, de área  $L^2$ , condutoras e eletricamente neutras, e assumindo que o campo obedece às condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mistas nas placas, separadas por uma distância  $a$ , onde  $a \ll L$ .

A violação de simetria de Lorentz proposta se dá através do acoplamento direto entre um 4-vetor tipo éter constante,  $u^\mu$ , com derivadas espaciais de ordem superior do campo, representada por  $l^{2(\epsilon-1)}(u\partial)^{2\epsilon}\phi(x)$ , conforme exibido na equação de Klein-Gordon modificada (2.42), sendo  $\epsilon$  um número inteiro maior ou igual a 2, e  $l$  é um parâmetro de ordem inversa à escala de energia onde a simetria de Lorentz é quebrada. Consideramos duas direções distintas para o 4-vetor tipo espaço: o vetor paralelo às placas e o vetor perpendicular a elas. Verificamos que as modificações na dinâmica do campo produzem pequenas correções nas relações de dispersão correspondentes e, conseqüentemente, nas energias de Casimir. Para obtermos sucesso na renormalização, adotamos a fórmula de regularização de Abel-Plana para números inteiros (3.41), e semi-inteiros (3.90). Nas condições de Dirichlet e Neumann, vimos que essa soma tem três contribuições: a contribuição da energia do vácuo na presença de apenas uma placa, a contribuição da energia do vácuo livre, e por fim a contribuição da energia do vácuo na presença das duas placas. Já para as condições mistas, vimos que a soma tem duas contribuições: a contribuição da energia do vácuo livre e a contribuição da energia do vácuo na presença das duas placas. Em nossa análise, a energia de Casimir foi expressa em termos de uma representação integral para o campo massivo. Assim, para fornecer algumas informações quantitativas sobre essa energia, avaliamos suas expressões assintóticas para  $am \gg 1$  e  $am \ll 1$ . No primeiro caso, a energia de Casimir decai exponencialmente como  $e^{-2am}$ , enquanto no limite oposto apresenta um termo que corresponde ao caso sem massa com correções adicionais proporcionais às potências do produto  $am$ .

Como sabido, no cenário de preservação da simetria de Lorentz, a força de Casimir para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann são iguais e diferem, em magnitude e sentido, da força para as condições mistas. Na tabela 2 apresentamos os sentidos das forças de Casimir na preservação da simetria de Lorentz obtido para cada condição de contorno. No cenário de violação da simetria de Lorentz, vimos que a força de Casimir sofre pequenas correções que dependem não só das condições de contorno, bem como também do parâmetro  $\epsilon$  (a força é menor para maior valor de  $\epsilon$ ), e também dependem se o vetor constante,  $u^\mu$ , for paralelo ou perpendicular as placas. Na tabela 3 apresentamos

os sentidos das forças de Casimir obtido para cada situação.

|           | Força de Casimir |
|-----------|------------------|
| Dirichlet | —                |
| Neumann   | —                |
| Mistas    | +                |

Tabela 2 – Força de Casimir na preservação da simetria de Lorentz. O sinal positivo (+) se refere a uma força repulsiva, e o sinal negativo (—) se refere a uma força atrativa.

|           | Vetor paralelo |                | Vetor perpendicular |                |
|-----------|----------------|----------------|---------------------|----------------|
|           | $\epsilon = 2$ | $\epsilon = 3$ | $\epsilon = 2$      | $\epsilon = 3$ |
| Dirichlet | +              | —              | +                   | +              |
| Neumann   | +              | —              | +                   | +              |
| Mistas    | —              | +              | —                   | —              |

Tabela 3 – Força de Casimir da violação da simetria de Lorentz. O sinal positivo (+) se refere a uma força repulsiva, e o sinal negativo (—) se refere a uma força atrativa.

Como podemos observar na tabela 3, quando o vetor é paralelo às placas, as forças de Casimir da violação de Lorentz tem sentidos opostos para  $\epsilon = 2$  e  $\epsilon = 3$ . Quando o vetor é perpendicular às placas, as forças de Casimir da violação de Lorentz tem sentidos iguais para  $\epsilon = 2$  e  $\epsilon = 3$ . Notemos também que as forças de Casimir nas condições de contorno mistas tem sentidos contrários às condições de contorno de Dirichlet e Neumann.

Aceitando que a violação de Lorentz faz parte do erro experimental de 1%, é possível inferir um limite superior para o parâmetro  $l$ . Considerando que a distância  $a$  entre as placas paralelas é da ordem de  $10^{-8}m$ , o limite para  $l$  é da ordem de  $10^{-9}m$  para o caso de  $\epsilon = 2$  e da ordem de  $10^{-8}m$  para o caso de  $\epsilon = 3$ .

Portanto, podemos concluir que a quebra da simetria de Lorentz modifica a relação de dispersão do campo, e essa modificação gera uma pequena mudança na força de Casimir, no sentido de aumentar ou diminuir a mesma. Outro ponto que gostaríamos de salientar é que essa força depende crucialmente da condição de contorno imposta ao campo, como também dos parâmetros associados a violação da simetria de Lorentz, tais como a direção do vetor constante e da ordem da derivada.

Finalizamos essa dissertação mencionando possíveis perspectivas futuras. Podemos alencar duas:

- (i) Incluir correções da temperatura no cálculo da força de Casimir.
- (ii) Aplicar esse formalismo para campos fermiônicos.

# APÊNDICE A – A equação de Euler-Lagrange para altas derivadas

Nesse apêndice, usando o princípio da mínima ação, iremos obter a equação de Euler-Lagrange para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi, \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)$ .

Utilizando o princípio variacional  $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi$ , em que  $\phi$  minimiza a ação, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi, \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi) \\
 &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \delta\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \delta\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi \right\} \\
 &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \delta\phi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \delta\phi \right\}. \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta\phi, \tag{A.2}$$

e da mesma forma

$$\begin{aligned}
 \partial_{\mu_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \delta\phi \right] &= \partial_{\mu_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \right) \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \delta\phi \\
 &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \delta\phi \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \partial_{\nu_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \delta\phi \right] &= \partial_{\nu_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \right) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \delta\phi \\
 &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \delta\phi. \tag{A.4}
 \end{aligned}$$



Então, ficamos com

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right. \\ & + \partial_{\mu_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \delta \phi \right] - \partial_{\mu_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \right) \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \delta \phi \\ & \left. + \partial_{\nu_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \delta \phi \right] - \partial_{\nu_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \right) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \delta \phi \right\}. \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

Como as variações  $\delta \phi$  se anulam nos extremos, os termos das derivadas totais vão a zero. Com isso, obtemos que

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi - \partial_{\mu_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \right) \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \delta \phi \right. \\ & \left. - \partial_{\nu_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \right) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \delta \phi \right\}. \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

Novamente, usando que

$$\begin{aligned} \partial_{\mu_2} \left[ \partial_{\mu_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \delta \phi \right] &= \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \right) \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \delta \phi \\ &+ \partial_{\mu_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \delta \phi \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

e de forma semelhante

$$\begin{aligned} \partial_{\nu_2} \left[ \partial_{\nu_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \delta \phi \right] &= \partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \right) \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \delta \phi \\ &+ \partial_{\nu_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \delta \phi, \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

assim, encontramos que

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \right) \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \delta \phi \right. \\ & \left. + \partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \right) \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \delta \phi \right\}. \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

Realizando esse procedimento  $\epsilon$  vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + (-1)^\epsilon \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \right) \delta \phi \right. \\ & \left. + (-1)^\epsilon \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \right) \delta \phi \right\} \\ = & \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) + (-1)^\epsilon \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)} \right) \right. \\ & \left. + (-1)^\epsilon \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \phi)} \right) \right\} \delta \phi = 0. \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

Logo, a equação de Euler-Lagrange fica da forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &- \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) + (-1)^\epsilon \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon})} \right) \\ &+ (-1)^\epsilon \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_\epsilon})} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

## APÊNDICE B – O tensor energia-momento para altas derivadas

- Para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ :

Baseado no procedimento realizado em [44], primeiramente tomemos a derivada total de  $\mathcal{L}$  com relação a  $x_\nu$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \partial_\mu \phi . \quad (\text{B.1})$$

Da equação de Euler-Lagrange, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) . \quad (\text{B.2})$$

Então, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dx_\nu} &= \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \partial_\mu \phi \\ &= \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi \right) . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Combinando as derivadas totais, encontramos o resultado abaixo

$$\frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0 , \quad (\text{B.4})$$

ou seja,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 , \quad (\text{B.5})$$

onde o tensor energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (\text{B.6})$$

- Para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \partial_\rho \phi)$ , que corresponde a  $\epsilon = 2$ :

Realizando a derivada total de  $\mathcal{L}$  com relação a  $x_\nu$ , obtemos

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\rho \phi)} \partial^\nu \partial_\mu \partial_\rho \phi . \quad (\text{B.7})$$

A equação de Euler-Lagrange para esse caso é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \partial_\mu \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \phi)} . \quad (\text{B.8})$$

Com isso, após algumas manipulações algébricas, encontramos que

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \phi)} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \phi)} \partial_\rho \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0 . \quad (\text{B.9})$$

Logo, o tensor energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \phi)} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \phi)} \partial_\rho \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (\text{B.10})$$

- Para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \phi)$ , que corresponde a  $\epsilon = 3$ :

Realizando a derivada total de  $\mathcal{L}$  com relação a  $x_\nu$ , obtemos

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \phi)} \partial^\nu \partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \phi . \quad (\text{B.11})$$

A equação de Euler-Lagrange para esse caso é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) + \partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \phi)} . \quad (\text{B.12})$$

Com isso, após algumas manipulações algébricas, encontramos que o tensor energia-momento é dado por

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \partial_\rho \partial_\theta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \phi)} \partial^\nu \phi - \partial_\theta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \phi)} \partial_\rho \partial^\nu \phi \\ &+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \phi)} \partial_\rho \partial_\theta \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} . \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

- Para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \partial_\lambda \phi)$ , que corresponde a  $\epsilon = 4$ :

Realizando a derivada total de  $\mathcal{L}$  com relação a  $x_\nu$ , obtemos

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \partial_\lambda \phi)} \partial^\nu \partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \partial_\lambda \phi . \quad (\text{B.14})$$

A equação de Euler-Lagrange para esse caso é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \partial_\lambda \phi)} . \quad (\text{B.15})$$

Com isso, encontramos que o tensor energia-momento é dado por

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \partial_\rho \partial_\theta \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \partial_\lambda \phi)} \partial^\nu \phi + \partial_\theta \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \partial_\lambda \phi)} \partial_\rho \partial^\nu \phi \\
&- \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \partial_\lambda \phi)} \partial_\rho \partial_\theta \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\rho \partial_\theta \partial_\lambda \phi)} \partial_\rho \partial_\theta \partial_\lambda \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (B.16)
\end{aligned}$$

Portanto, por indução, para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\epsilon} \phi)$ , o tensor energia-momento é dado por

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial_\mu \phi)} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial^\nu \phi \\
&- \partial_{\mu_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial_\mu \phi)} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial^\nu \phi + \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial_\mu \phi)} \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial^\nu \phi + \dots \\
&+ (-1)^{\epsilon-1} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\epsilon-1}} \partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (B.17)
\end{aligned}$$

# APÊNDICE C – Contribuições infinitas na energia do vácuo

Como obtido em (3.44), a energia do vácuo na condição de contorno de Dirichlet pode ser reescrita, através da fórmula de Abel-Plana para números inteiros (3.41), da seguinte maneira

$$E_0 = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \left\{ -\frac{1}{2}F(0) + \int_0^\infty F(t)dt + i \int_0^\infty \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt \right\}, \quad (C.1)$$

onde

$$F(n) = \left[ k^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (C.2)$$

Provaremos nesse apêndice que o primeiro termo se refere a energia do vácuo na presença de apenas uma placa, e o segundo termo se refere a energia do vácuo livre.

- O primeiro termo  $E_I$ :

$$\begin{aligned} E_I &= -\frac{L^2}{8\pi} \int_0^\infty k dk F(0) \\ &= -\frac{L^2}{8\pi} \int_0^\infty k \left( k^2 + m^2 \right)^{\frac{1}{2}} dk. \end{aligned} \quad (C.3)$$

Então, a energia por unidade de área é dada por

$$\frac{E_I}{L^2} = -\frac{1}{8\pi} \int_0^\infty k \left( k^2 + m^2 \right)^{\frac{1}{2}} dk. \quad (C.4)$$

Como podemos notar, essa energia não depende da distância  $a$  que separa as placas, portanto refere-se a energia do vácuo na presença de apenas uma placa.

- O segundo termo  $E_{II}$ :

$$\begin{aligned} E_{II} &= \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty F(t) dt \\ &= \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty \left[ k^2 + \left( \frac{t\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned} \quad (C.5)$$

Realizando a mudança de variável  $u = \frac{t\pi}{a}$ , ficamos com

$$E_{II} = \frac{L^2 a}{4\pi} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty (k^2 + u^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} du . \quad (C.6)$$

Fazendo a mudança de variável para as coordenadas polares, onde  $k = K \sin(\theta)$  e  $u = K \cos(\theta)$ , obtemos que

$$\frac{E_{II}}{V} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty K^2 (K^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} dK , \quad (C.7)$$

onde  $V = L^2 a$  é o volume da região delimitada pelas placas.

Mostraremos abaixo que a expressão (C.7) refere-se a energia do vácuo livre, ou seja, a energia do vácuo na ausência de placas.

Sabemos que o operador Hamiltoniano do campo escalar livre é dada por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}] , \quad (C.8)$$

onde

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2} , \quad (C.9)$$

ou seja, nesse caso não temos nenhum momento discretizado, já que o campo não está confinado, então a relação de comutação é escrita como

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') . \quad (C.10)$$

Assim, o operador Hamiltoniano fica da forma

$$\hat{H} = \int_V d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \right] , \quad (C.11)$$

A energia do vácuo é obtida tomando o valor esperado do Hamiltoniano no vácuo, então

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int_V d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} . \quad (C.12)$$

Por fim, mudando as coordenadas dos planos  $(k_x, k_y, k_z)$  para as coordenadas esféricas, onde  $d^3\mathbf{k} = K^2 \sin(\phi) dK d\theta d\phi$  e  $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2} \rightarrow \omega = (K^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ , encontramos que

$$\frac{E_0}{V} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty K^2 (K^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} dK . \quad (C.13)$$

Portanto, a energia dada por (C.7) representa a energia do vácuo livre, como queríamos demonstrar.

Para o caso das condições de contorno mistas, a expressão para  $E_0$  não contém o termo  $E_I$ . A demonstração do termo  $E_{II}$  para as condições de contorno de Neumann e mistas é igual a que foi feita acima.

# Referências

- [1] D. Griffiths; *Introduction to Elementary Particle*; Wiley, 2th ed., 2008.
- [2] F. Mandl e S. Shaw; *Quantum Field Theory*; Wiley, 2th ed., 2010.
- [3] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler; *Gravitation*; W. H. Freeman and Company, 1th ed., 1973.
- [4] B. P. Abbott et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016)
- [5] M. B. Green, J. H. Schwarz e E. Witten; *Superstring Theory*; cambridge University Press, 1th ed., 1987.
- [6] V. A. Kostelecký and S. Samuel, Phys. Rev. **D 39**, 683 (1989).
- [7] P. Hořava, Phys. Rev. **D 79**, 084008 (2009)
- [8] D. Sudarsky, L. Urrutia e H. Vucetich, Phys. Rev. Lett. **89**, 231301 (2002)
- [9] M. B. Cruz, E. R. Bezerra de Mello and A. Yu. Petrov, Phys. Rev. **D 96**, 045019 (2017).
- [10] M. B. Cruz, E. R. Bezerra de Mello and A. Yu. Petrov, Mod. Phys. Lett. **A 20**, 1850115 (2018).
- [11] M. B. Cruz, E. R. Bezerra de Mello and A. Yu. Petrov, Phys. Rev. **D 99**, 085012 (2019).
- [12] A. F. Ferrari et al., Mod. Phys. Lett. **A 28**, 1350052 (2013); I. J. Morales Ulion, E. R. Bezerra de Mello and A. Yu. Petrov, Int. J. Mod. Phys. **A 30**, 1550220 (2015).
- [13] Dêivid R. da Silva, M. B. Cruz and E. R. Bezerra de Mello, Int. J. Mod. Phys. **A 34**, 1950107 (2019).
- [14] H. G. B. Casimir; Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [15] M. J. Sparnaay; Physica **24**, 751 (1958).
- [16] S. K. Lamoreaux; Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).
- [17] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko; *Advances in the Casimir Effect*; Oxford Science Publications (2009).
- [18] S. M. Carroll, H. Tam, Phys. Rev. **D 78**, 044047 (2008).



- 
- [19] L. Landau e M. Lifshitz; *Teoria do campo*; MIR, 1th ed., 1970.
- [20] W. Greiner; *Relativistic Quantum Mechanics*; Springer, 2th ed., 1997.
- [21] G. B. Arfken e H. J. Webber; *Mathematical Methods for Physicists*; Elsevier, 6th ed., 2005.
- [22] J. B. Neto; *Teoria de Campos e a Natureza*; Livraria da Física, 1th ed., 2017.
- [23] E. Merzbacher; *Quantum Mechanics*; John Wiley & Sons, 2th ed., 1970.
- [24] S. M. Carroll et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001); A. Anisimov et al., Phys. Rev. **D 65**, 085032 (2002); C. E. Carlson et al., Phys. Lett. **B 518**, 201 (2001); J. L. Hewett, F. J. Petriello, T. G. Rizzo, Phys. Rev. **D 64**, 075012 (2001); O. Bertolami and L. Guisado, JHEP **12**, 013 (2003).
- [25] V. A. Kostelecký, R. Lehnert and M. Perry, Phys. Rev. **D 68**, 123511 (2003); O. Bertolami et al., Phys. Rev. **D 69**, 083513 (2004); O. Bertolami, Class. Quant. Grav. **14**, 2785 (1997).
- [26] J. Alfaro et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 2318 (2000); J. Alfaro et al., Phys. Rev. **D 65**, 103509 (2002).
- [27] H. Belich et al., Revista Brasileira do Ensino de Física **29**, 1 (2007).
- [28] M. Gomes et al., Phys. Rev. **D 81**, 045018 (2010).
- [29] E.M. Lifshitz, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **11**, 255 (1941); E.M. Lifshitz, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **11**, 269 (1941).
- [30] Robson A. Dantas, Herondy F. Santana Mota and Eugênio R. Bezerra de Mello, Universe **9**, 241 (2023).
- [31] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov; *The Casimir Effect and its Applications*; Clarendon Press, 1th ed., 1997.
- [32] M. Bordag et al., Phys. Rev. **B 80**, 245406 (2009).
- [33] Adolfo G. Grushin and Alberto Cortijo, Phys. Rev. Lett. **106**, 20403 (2011).
- [34] Chao-Jun Feng and Xin-Zhou Li, J. Phys. Lett. **B 691**, 167 (2010); Giulia Aleixo and Herondy F. Santana Mota, Phys. Rev. **D 104**, 045012 (2021).
- [35] F. Serry, D. Walliser and G.J. Maclay, J. Appl. Phys. **84**, 2501 (1998); E. Buks and M.L. Roukes, Phys. Rev. **B 63**, 033402 (2001).
- [36] D. P. Sheehan, J. Chem. Phys. **131**, 104706 (2009).

- [37] Benjamin B. Machta, Sarah L. Veatch, and James P. Sethna, Phys. Rev. Lett. **109**, 138101 (2012).
- [38] Marcus Venicius Cougo-Pinto, Carlos Farina and Alexandre Tort, Rev. Bras. Ens. Fis. **22**, 122 (2000).
- [39] H.B.G. Casimir and D. Polder, Phys. Rev. **73**, 360 (1948).
- [40] U. Mohideen and Anushree Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998).
- [41] S. G. Mamayev, V. M. Mostepanenko and A. A. Starobinsky, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **70**, 1577 (1976).
- [42] M. Abramowitz and A. Stegun; *Handbook of Mathematical functions*; Dover Publications, 9th ed., 1965.
- [43] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik; *Table of Integrals, Series, and Products*; Elsevier, 7th ed., 2007.
- [44] H. Goldstein; *Classical mechanics*; Addison-Wesley, 2th ed., 1980.