



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE EDUCAÇÃO
LICENCIATURA EM PEDAGOGIA

MARIA CLARA SENA DA SILVA

PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES NOS ANOS INICIAIS DO
ENSINO FUNDAMENTAL

João Pessoa

2024

MARIA CLARA SENA DA SILVA

**PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES NOS ANOS INICIAIS DO
ENSINO FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Pedagogia da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Pedagogia.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Maria Alves de Azerêdo.

João Pessoa

2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586p Silva, Maria Clara Sena da.

Pesquisas sobre o ensino de frações nos anos
iniciais do ensino fundamental / Maria Clara Sena da
Silva. - João Pessoa, 2024.

65 f. : il.

Orientação: Maria Alves de Azerêdo.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em
Pedagogia) - UFPB/CE.

1. Ensino - matemática. 2. Ensino de frações. 3.
Ensino fundamental anos iniciais. 4. Pesquisas. I.
Azerêdo, Maria Alves de. II. Título.

UFPB/CE

CDU 37:51(043.2)

MARIA CLARA SENA DA SILVA

**PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES NOS ANOS INICIAIS DO
ENSINO FUNDAMENTAL**

APROVADO EM: 15/05/2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **MARIA ALVES DE AZEREDO**
Data: 05/06/2024 16:28:44-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof.^a Dr.^a Maria Alves de Azerêdo - DME/CE/UFPB
(Orientadora)**

Documento assinado digitalmente
 **VINICIUS MARTINS VARELLA**
Data: 06/06/2024 21:24:42-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Vinícius Martins Varella - DME/CE/UFPB
(Examinador)**

Documento assinado digitalmente
 **ALEXANDRE MACEDO PEREIRA**
Data: 05/06/2024 16:42:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Alexandre Macêdo - DHP /CE/UFPB
(Examinador)**

À Gabriel por me fazer verdadeiramente acreditar que todos são capazes de aprender Matemática. À Professora Tereza por ter acreditado em Gabriel.

AGRADECIMENTOS

Gonzaguinha me ensinou, em "Caminhos do Coração", "[...] que se depende sempre / De tanta, muita, diferente gente / Toda pessoa sempre é as marcas / Das lições diárias de outras tantas pessoas". Por isso, agradeço as pessoas que marcaram a minha vida, afinal, sem tais marcas, não seria possível que eu chegasse até aqui. Dedico, pois, este trabalho [...]

A Deus, meu Senhor, por me ensinar a não confiar na minha inteligência, mas nEle de todo o coração;

A Inês, minha mãe, por me ensinar o valor da educação e a importância de estudar desde pequena;

A Charles, meu pai, por me ensinar a honrar os compromissos assumidos;

A Caio, meu amor, por me ensinar que o ordinário da vida é belo;

A Heitor, meu irmão, por me ensinar a amar de forma singela;

A Amanda, minha irmã, por me ensinar que ser família vai além de laços sanguíneos;

A Fabiana, minha tia, por me ensinar que, através da fé, somos capazes de realizar sonhos inimagináveis;

A Beatriz, minha melhor amiga, por me ensinar que a fidelidade de uma amizade atravessa a distância e o tempo;

A Alane, Gesiel, Letícia e Stephane, meus amigos, por me ensinarem que a vida é bem melhor quando boas pessoas estão ao nosso lado;

A Roberto, meu primeiro líder, por me ensinar que a alegria e o cuidado são características da liderança;

A Inalda, minha diretora, por me ensinar que, às vezes, é preciso ser como um furacão para resolver situações;

A Dulce, Edla, Jefferson, Thaysa e Valéria, meus companheiros de trabalho, por me ensinarem que juntos somos mais fortes;

A professor Fernando, meu orientador do projeto de iniciação científica, por me ensinar sobre o rigor acadêmico;

A professora Catarina, minha orientadora do projeto de iniciação científica, por me ensinar a valorizar as minhas produções;

A professora Eleonora, minha professora nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, por me ensinar a amar a área de Matemática;

A professora Maria, minha orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso, por ser a minha maior referência em Educação Matemática;

A todos os professores que cruzaram a minha trajetória estudantil por me incentivarem a seguir pela Educação.

RESUMO

O ensino de Matemática tem sido abstrato, em muitos contextos, desinteressante e descontextualizado, sendo uma das causas da estigmatização e da defasagem nessa área do conhecimento. Reconhecendo as dificuldades vinculadas, sobretudo, ao processo de ensino e de aprendizagem do conteúdo de Frações nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, este trabalho possui o objetivo de analisar o ensino de Frações nessa etapa escolar. Realizamos uma pesquisa qualitativa de caráter bibliográfico e documental em artigos publicados em eventos científicos sobre Educação Matemática, de 2012 a 2023. Inicialmente, investigamos as orientações curriculares para o ensino de Frações nos Anos Iniciais. Depois, mapeamos os artigos sobre essa temática em anais, considerando os sete trabalhos que retratam intervenções pedagógicas. Analisamos, enfim, cada um baseado em Bertoni (2008), destacando estratégias e recursos. Concluimos que a preocupação em contextualizar, a variedade de estratégias e recursos e a coexistência de três modelos didáticos, encontradas na literatura científica da atualidade, apontam para a melhoria do ensino.

Palavras-chave: Matemática; Ensino de Frações; Ensino Fundamental Anos Iniciais; Pesquisas.

ABSTRACT

Mathematics teaching has been abstract, in many contexts, uninteresting and decontextualized, being one of the causes of stigmatization and lag in this area of knowledge. Recognizing the difficulties linked, above all, to the process of teaching and learning the content of Fractions in the Initial Years of Elementary School, this work aims to analyze the teaching of Fractions at this school stage. We carried out qualitative bibliographic and documentary research on articles published in scientific events on Mathematics Education, from 2012 to 2023. Initially, we investigated the curricular guidelines for teaching Fractions in the Early Years. Then, we mapped the articles on this topic in annals, considering the seven works that portray pedagogical interventions. Finally, we analyzed each one based on Bertoni (2008), highlighting strategies and resources. We conclude that the concern for contextualization, the variety of strategies and resources and the coexistence of three didactic models, found in current scientific literature, point to the improvement of teaching.

Keywords: Mathematics; Teaching Fractions; Elementary Education Early Years; Researches.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	09
2. AS FRAÇÕES, OS CONCEITOS E O SEU ENSINO	14
2.1 As Diretrizes para o Ensino de Frações encontradas nos Documentos Curriculares	20
2.2 Desafios para Ensinar e Aprender Frações	30
2.3 Compreendendo a Construção do Número Fracionário em Bertoni (2008)	34
3. METODOLOGIA DA PESQUISA	37
4. ANÁLISE DOS ARTIGOS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES ENCONTRADOS EM ANAIS DE EVENTOS NA ÁREA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	40
4.1 Análise do Artigo 01	41
4.2 Análise do Artigo 02	43
4.3 Análise do Artigo 03	45
4.4 Análise do Artigo 04	47
4.5 Análise do Artigo 05	49
4.6 Análise do Artigo 06	52
4.7 Análise do Artigo 07	54
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	58
6. REFERÊNCIAS	61

1. INTRODUÇÃO

A Matemática é reconhecida como um difícil componente curricular pela maioria dos estudantes da Educação Básica. Essa concepção foi arraigada no âmbito escolar, criando um bloqueio prévio em vários alunos frente a essa área do conhecimento.

Todos conhecem o medo da Matemática. Ele pode até ter diminuído, pois, com o mundo em mudança, o ensino naturalmente progride. Mas, mesmo hoje, a Matemática ensinada de maneira tradicional é a disciplina que apresenta o mais baixo desempenho dos alunos e é, ainda, a que mais reprova. Isso acontece no Brasil e no mundo inteiro! (Imenes e Lellis, 1997, p. 6).

Conforme o site “Agência Brasil¹”, os índices do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) esclarecem a situação brasileira em relação à aprendizagem de Matemática nas escolas: em 2022, menos de 50% dos alunos conseguiram o nível mínimo de aprendizado.

Pensa-se imediatamente na pandemia² ocasionada pelo coronavírus como fator determinante para esse alarmante resultado. Contudo, o site, ao mencionar o relatório emitido pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE), responsável pelo Pisa, afirma que as “[...] trajetórias educacionais foram bem negativas antes da pandemia chegar. Isso indica que as questões de longo prazo nos sistemas educativos também são culpadas pela queda no desempenho. Não se trata apenas de Covid-19”. Ainda destaca que em “[...] mais de duas décadas de testes globais do Pisa, a pontuação média não mudou drasticamente entre avaliações consecutivas”.

Já o Relatório de Resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) de 2021 discorre bastante sobre os expressivos impactos da pandemia na educação escolar do Brasil. Os dados revelaram que houve uma queda na aprendizagem no geral, com ênfase no 5º ano, interrompendo um ciclo progressivo que se observava nas últimas edições do SAEB, também que a área de Matemática foi aquela com maior oscilação negativa (Brasil, 2022).

¹ Agência pública de notícias criada em 1990, vinculada à Empresa Brasil de Comunicação. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2023-12/resultados-do-pisa-reforcam-gargalo-no-ensino-de-matematica-no-brasil>.

² Estado de calamidade sanitária que, como medida preventiva, obrigou pessoas do mundo inteiro a se isolarem em suas casas, no início de 2020, por tempo indeterminado. Várias instituições (como, por exemplo, a escola) foram fechadas, retomando as atividades só em 2021. A alternativa encontrada nesse período para que os estudos não fossem interrompidos foi o ensino remoto, realizado de modo *on-line* por intermédio das tecnologias digitais.

Para o 5º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais (EFAI), os resultados evidenciam uma queda na média de proficiência em Matemática de 5,1%. De 2,7% e 2,5% para o 9º ano do Ensino Fundamental Anos Finais (EFAF) e a 3ª série do Ensino Médio (EM) respectivamente.

Ficou claro que a pandemia trouxe danos à escolarização. Enquanto gerou algumas problemáticas, fortaleceu outras já existentes. Faz-se urgente, portanto, colocar as estatísticas sobre a aprendizagem em Matemática à luz da análise científica, assim, caminhos assertivos de superação poderão ser traçados, sobretudo para os Anos Iniciais da Educação Básica. Isso porque, além dos significativos prejuízos, reconhece-se a importância da construção de uma sólida aprendizagem nessa etapa, objetivando garantir uma progressão de série com qualidade. Lorenzato (2010) declara que o fracasso ou sucesso perante a Matemática estão relacionados com os primeiros anos escolares.

Uma pesquisa realizada a partir de duas avaliações de larga escala³ por Sousa *et al.* (2012), durante três edições aplicadas em São Paulo, com o 5º ano, observou a recorrência de baixos resultados em oito habilidades. Duas estão presentes no campo geométrico, três no campo das grandezas e medidas e três no campo numérico. Em seguida, professores avaliaram os conteúdos referentes às habilidades. Dos 24 entrevistados, 17 reconhecem “Unidades de Medidas de Comprimento e Massa” como o de maior complexidade, 12 indicam “Números Racionais”, e 11 indicaram “Unidades de Medida de Tempo” e “Figuras Tridimensionais”. Esses autores pontuaram que

[...] inicialmente os docentes identificaram algumas dificuldades relacionadas aos números decimais - predominantemente frações e números decimais -, conceitos estes interligados com um conteúdo mais amplo referente a números racionais (Sousa *et al.*, 2012, p. 211).

Cavalcanti e Santos (2006, p. 1) também verificaram que os “[...] professores identificam as frações como o tema mais complexo de ensinar e, por extensão, o que eles acham que as crianças têm mais dificuldades em aprender”.

Considerando que existe uma vasta produção de conhecimento, com pesquisas realizadas em diferentes âmbitos e divulgadas em eventos na área de Educação Matemática, compreende-se que precisa ser identificado e explorado para, então, ser contestado, discutido ou revisto. Efetivamente, sem considerá-

³ O SAEB e o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp).

lo não há como superar as dificuldades dos alunos (Sousa *et al.*, 2012), perguntamos: à luz da literatura científica, como, nos últimos anos, o ensino de Frações é desenvolvido no Ensino Fundamental dos Anos Iniciais (EFAI)? Para responder a essa indagação, o objetivo deste trabalho é analisar o ensino de Frações nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental através de artigos publicados em anais de eventos na área de Educação Matemática, no período de 2012 a 2023.

O interesse por esse tema surgiu a partir de experiências ao longo da minha vida estudantil. A Matemática sempre foi a minha disciplina favorita na Educação Básica. Amava encontrar soluções, ainda que fossem de problemas descontextualizados, por meio dos algoritmos matemáticos. Longe de querer parecer um “gênio”, não compreendia o porquê meus colegas não gostavam da disciplina.

Quando entrei no curso de Pedagogia, comecei a estagiar e a trabalhar em escolas. Ao me aproximar do campo que escolhi atuar, percebi como são muitas e grandes as dificuldades em relação à Matemática, sejam enfrentadas pelo aluno ou professor. Assustei-me mais ao observar o sentimento de conformismo que paira sobre essa realidade. Em um espaço que deveria contestá-la, ouvi “Se eu, que sou professora, erro, imagine vocês”.

Vivenciei episódios que, para mim, foram angustiantes: alunos que se negam a fazer qualquer tipo de atividade de Matemática; que, durante a realização das provas, ficam tão nervosos que erram; que não conseguem recuperar a nota abaixo da média; que decoram os procedimentos centrais da questão, mas não sabem interpretá-los, impedindo o alcance do resultado.

A pior situação ocorreu em um estágio no 4º ano. Quando comparada às outras turmas, essa obteve o menor rendimento em Matemática em uma das avaliações elaboradas pela Prefeitura de João Pessoa. Como medida de reparação, a educadora pediu que eu perguntasse a tabuada do oito e do nove para os alunos. As orientações dela para esse momento foram, na minha concepção, inadequadas. Virou-se para as crianças, afirmando que só poderiam errar uma vez e que deveriam falar rápido o produto, “sem pensar muito”, caso contrário, ficariam sem aula de Educação Física. Um momento de tensão foi desencadeado na turma a partir dessa fala. Afinal, todas as crianças esperam ansiosamente por essa aula. Não foi uma experiência agradável.

Elas estavam extremamente nervosas, uma, inclusive, chorou. Quando erravam uma multiplicação, já queriam desistir. A tristeza era notória em seus rostos. "Por que eu vou ficar sem a aula de tia [...]? Por quê?". Eu não podia descumprir a ordem da professora, só acolhi dentro do possível. Esperei-as pensarem, conversei para descontraí-las e abracei. Apenas quatro erraram uma vez, as outras erraram muito mais. Além disso, houve tentativas de colar e pedidos para que eu alterasse a quantidade de erros quando fosse registrar o desempenho.

Já conseguia ouvir as conversas e perceber a inquietação da turma em relação à aula de Educação Física, até que chegou a hora dessa aula. A professora chamou o nome dos que permaneceriam na sala para entregar um papel (era a maioria dos estudantes). As crianças ficaram inconformadas, pedindo uma segunda chance. Ela disse que escreveria uma atividade no quadro, quem terminasse, poderia ir à aula.

Com esse relato, eu quis enfatizar que a condução da situação pela educadora foi totalmente inapropriada. A turma possuía uma grande dificuldade em Matemática, provocar o medo do erro e associá-lo à punição, levou-me a questionar se existem chances de recuperar o prazer de estudar a disciplina. Nessa conjuntura, portanto, fica claro que a grande problemática não é o modo de ensinar o conteúdo, ainda que esse seja o aspecto primordialmente contestado neste trabalho, não há como negar que a forma de se relacionar com os alunos também influencia na aprendizagem. Zacarias (2008) remete a essa circunstância ao finalizar sua pesquisa ressaltando a importância da qualidade das relações firmadas na escola, porque elas podem contribuir tanto para o sucesso quanto para o fracasso do aluno.

Pensando, agora, sobre a forma de ensinar, a análise das intervenções pedagógicas relativas às Frações que este trabalho propõe é indispensável. Uma visão crítica da realidade atual, concretizada em uma espécie de diagnóstico, favorecerá o exercício docente ao pensar e elaborar aulas sobre Frações.

Para sistematizar o trabalho, elaboramos os objetivos específicos a seguir: 1) Mapear artigos sobre o Ensino de Frações nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em anais de três eventos na área de Educação Matemática, a nível estadual, nacional e internacional, no período de 2012 a 2023; 2) Identificar as

diretrizes sobre ensino de Frações nos documentos curriculares; 3) Analisar as intervenções pedagógicas com base em Bertoni (2008), pesquisadora renomada desta área, destacando as estratégias e os recursos que são indicados para o ensino de Frações.

Além desta introdução, o trabalho é organizado nas seções: As Frações, os conceitos e o seu ensino; As Diretrizes para o Ensino de Frações encontradas nos Documentos Curriculares; Desafios para Ensinar e Aprender Frações; Compreendendo a Construção do Número Fracionário em Bertoni (2008); Metodologia da Pesquisa; Análise dos artigos sobre o Ensino de Frações encontrados em anais de eventos na área de Educação Matemática; e Considerações Finais.

2. AS FRAÇÕES, OS CONCEITOS E O SEU ENSINO

Vamos começar a partir de uma situação-problema? Tente responder antes de seguir com a leitura!

O Sr. Manoel deixou uma fazenda de 65 hectares como herança para seus filhos, João, Eva, Inês e Carlos. De acordo com o testamento, as terras deverão ser divididas igualmente entre eles. Quantos hectares cada filho receberá? Para encontrar a solução, é necessário dividir o total de hectares, 65, pelo total de filhos do Sr. Manoel, 4.

$$\begin{array}{r}
 65 \overline{) 4} \\
 - 4 \\
 \hline
 25 \\
 - 24 \\
 \hline
 01 \text{ hectare}
 \end{array}$$

Fonte: Elaboração Própria (2024)

Assim, cada filho receberá 16 hectares e ainda sobrar 1 hectare. Contudo, nenhuma parte da fazenda poderá sobrar, tudo deverá ser partilhado. Agora, pense como um estudante do 3º ou 4º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais, que conhece apenas o conjunto dos Números Naturais⁴. Certamente, você se perguntará como dividir 1 hectare para 4 filhos.

Com base na necessidade de resolver problemas desse gênero, surgem os Números Racionais. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) confirmam ao indicar que explorando situações nas quais os Naturais não conseguem exprimir a medida de uma grandeza ou o resultado de uma divisão, os alunos identificam nos Racionais a possibilidade de resposta (Brasil, 1997).

Os Números Racionais são resultantes das divisões de dois Números Inteiros⁵, ou seja, podem ser negativos, positivos ou nulo (BERTONI, 2009). Eles são representados de maneira decimal ou fracionária.

⁴ Números positivos que representam quantidades inteiras e formam um conjunto infinito simbolizado graficamente por " $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ". "A preocupação em fazer contagens, em diversas situações do cotidiano, fez-se à necessidade de criarmos uma estrutura de elementos enumeráveis conhecido como o conjunto dos números naturais" (PONTES, 2017, p. 161).

⁵ Números naturais (+), seus opostos (-) e o zero integram o conjunto dos Números Inteiros, representado por " $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$ ". Com o surgimento de outras necessidades, como a medição de comprimento e peso, o cálculo de velocidade, entre outras grandezas, tal conjunto foi elaborado (Santos; Paulino, 2023).

Figura 1: Representação fracionária de um número racional

$$\boxed{p/q \quad \text{ou} \quad \frac{p}{q}}$$

Fonte: Elaboração Própria (2024)

A barra simboliza a divisão entre “p” e “q”. A fim de que tal número seja válido, o “q” precisa ser diferente de zero⁶.

Figura 2: Representação do conjunto dos números racionais

$$\boxed{Q = \{0, \pm 1, \pm 1/2, \dots, 2, \pm 2/3, \dots, 3, \pm 3/2, \dots\}}$$

Fonte: Elaboração Própria (2024)

Os números racionais positivos também são chamados de Números Fracionários, resultantes das divisões de dois números naturais. Bertoni (2009, p. 77) alega que

[...] podem ser identificados como parte do conjunto dos números racionais, isto é, como os números racionais positivos. O conjunto todo dos números racionais inclui outros números, que são os números racionais negativos. É como se o conjunto dos números racionais fosse formado pelos números fracionários, reunidos com o que poderíamos chamar seus opostos [...].

O conceito de “Fração” é o termo comumente usado tanto para designar certas partes de um todo, ou de uma unidade, quanto para designar uma representação numérica dessas partes. Esses usos estão consagrados (Bertoni, 2009). Conforme o site “Origem da Palavra”, tal vocábulo é proveniente do latim “*fractus*” e significa “partido”, “dividido” ou “quebrado”. Ao indagar o que é Fração, são comuns respostas do tipo: “é pedaço”, “é aquele negócio de dividir figuras”, “é cortar tiras” (Bertoni, 2009). Elas são compostas por um numerador e um denominador.

Figura 3: Termos de uma fração

$$\boxed{\begin{array}{l} p \longrightarrow \text{numerador} \\ \frac{\quad}{\quad} \\ q \longrightarrow \text{denominador} \end{array}}$$

Fonte: Elaboração Própria (2024)

⁶ Essa condição existe porque todo número dividido por zero resulta numa impossibilidade.

Ainda que essa seja a definição mais utilizada, as Frações possuem outras. São, assim, consideradas um grande conceito, construído por diferentes subconceitos (Lopes, 2008). Alguns deles são citados nos PCN (1998): 1. relação parte-todo; 2. quociente entre dois inteiros; 3. índice comparativo - razão; 4. operador que atua em uma situação e a modifica; etc. Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019) escrevem sobre mais dois: 5. número; 6. medida. É possível entender melhor os subconceitos citados nos PCN (1998) a partir das situações abaixo.

- a. Vinte colegas de trabalho resolveram fazer uma aposta e premiar aqueles que mais acertassem os resultados dos jogos de um campeonato de futebol. Sabendo que cada pessoa contribuiu com R\$30 e que os prêmios seriam distribuídos da seguinte forma:

- 1º colocado: $\frac{1}{2}$ do valor arrecadado;
 2º colocado: $\frac{1}{3}$ do valor arrecadado;
 3º colocado: recebe a quantia restante.

Quanto, respectivamente, cada participante premiado recebeu?

Nessa situação-problema, verifica-se facilmente o subconceito da relação parte-todo. “Relação parte-todo - a fração indicaria uma relação existente entre um número de partes e o total, levando-se em conta a natureza da unidade que represente o todo [...]” (Cavalcanti; Santos, 2006, p. 4).

As pessoas que mais acertarem os resultados dos jogos ganharão uma parte de um todo, que, nesse caso, é a quantia arrecadada entre os colegas. Portanto, se 20 pessoas estão envolvidas e cada uma deu R\$30, totaliza R\$600.

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 20 \\ \hline \text{R\$600} \end{array} \quad \text{ou}$$

$$30 \times 20 = \text{R\$600}$$

O primeiro colocado ganhará $\frac{1}{2}$ do valor total, ou seja, a metade de R\$600, que é R\$300.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{ de } 600 &= \\ \frac{1}{2} \times 600 &= \\ 600 / 2 &= \\ \text{R\$300} & \end{aligned}$$

ou

$$600 / 2 = R\$300$$

Já o segundo será premiado com $\frac{1}{3}$ de R\$600, o que corresponde a R\$200.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \text{ de } 600 &= \\ \frac{1}{3} \times 600 &= \\ 600 / 3 &= \\ R\$200 & \end{aligned}$$

ou

$$600 / 3 = R\$200$$

O terceiro ficará com o que restar. Como a quantia inicial era de R\$600 e, juntos, o primeiro e o segundo ganharam R\$500, sobrou R\$100. Esse, logo, é o valor que o terceiro ganhará!

$$\begin{array}{r} 300 \\ + 200 \\ \hline R\$500 \end{array}$$

ou

$$R\$300 + R\$200 = R\$500$$

$$\begin{array}{r} 600 \\ + 500 \\ \hline R\$100 \end{array}$$

ou

$$R\$600 - R\$500 = R\$100$$

- b. Beatriz precisou comprar cinco quilogramas de farinha para fazer mais pães em sua padaria. Sabendo que essa quantidade rende 25 pães, quanto de farinha é usado por pão?

Para descobrir quanta farinha é utilizada para cada um, é preciso dividir os cinco quilogramas pelo total de pães fabricados, 25. Após simplificar a fração, dividindo o numerador e o denominador por cinco (máximo divisor comum), resulta em um quinto do quilograma.

$$\frac{5}{25} \div 5 = \frac{1}{5} \text{ kg}$$

Aqui, a fração assume um caráter de quociente. Ela “[...] indica uma divisão e seu resultado. Nas situações de quociente, temos duas variáveis, sendo que uma variável corresponde ao numerador e a outra ao denominador” (Cavalcanti, Guimarães, 2008, p. 2).

- c. Para comemorar a eleição do prefeito, os seus apoiadores organizaram uma festa. Das pessoas presentes, 400 vieram de outras cidades e 1200 eram da própria cidade. Qual é a razão entre o total de convidados que vieram de outras cidades e o total de convidados?

$$1200 + 400 = 1600 \text{ convidados}$$

$$\frac{400}{1600} \div 100 = \frac{4}{16} \div 4 = \frac{1}{4}$$

A cada quatro convidados da festa, um era originário de outra cidade. A “[...] razão, significado atribuído à fração quando a mesma é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza (Brasil, 1997).

- d. Gesiel tinha 30 figurinhas. Como $\frac{2}{5}$ eram repetidas, deu como presente ao seu amigo Caio. Quantas figurinhas Gesiel ficou?

Nesse exemplo, a fração tem o significado de operador multiplicativo, que está diretamente associado ao papel de transformação, algo incide sobre um determinado contexto e o modifica (Amorim; Etcheverria; Oliveira, 2019). A transformação é claramente reconhecida através de um estado inicial (a quantidade de figurinhas que Gesiel possuía), uma ação realizada (a doação) e um estado final (a quantidade restante). Lembra Cavalcanti e Guimarães (2008) que, nessa concepção, a fração é um multiplicador de uma quantidade indicada.

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \text{ de } 30 &= \\ \frac{2}{5} \times 30 &= \\ 60 / 5 &= \\ 12 \text{ figurinhas} & \end{aligned}$$

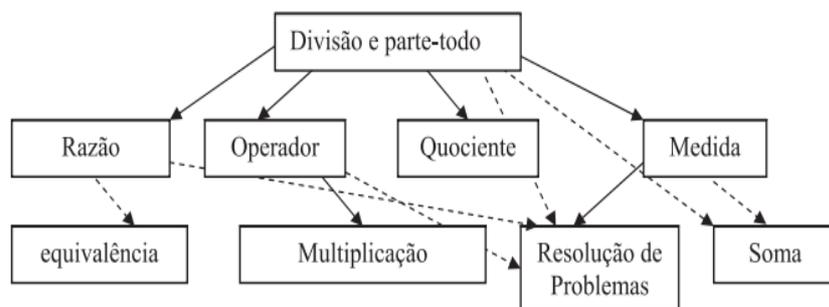
Se Gesiel deu 12 figurinhas a Caio, ele ficou com 18.

$$30 - 12 = 18 \text{ figurinhas}$$

Conforme Lopes (2008) não “[...] é possível isolar cada uma das ideias das frações e suas interpretações, algumas das ideias têm vínculos naturais [...], que não podem ser ignoradas” (p. 9). No primeiro problema, também existe o significado de Operador Multiplicativo. No segundo, o de Razão. No terceiro, o de Relação Parte-Todo.

A seguir, um notável esquema encontrado em Lopes (2008), mas organizado por Behr *et al.* (1983).

Figura 4: Esquema Criado Por Behr (1983)



Fonte: Lopes (2008)

Embora haja várias possibilidades de interpretá-las, o uso direto das Frações tende a se tornar cada vez mais raro. O visor do hodômetro dos automóveis resiste como um dos últimos do gênero onde se lê frações. A notação decimal ganhou a guerra da comunicação e da usabilidade (Lopes, 2008).

Lopes (2008) fez um mapeamento de situações nas quais elas são indispensáveis. Para sua surpresa, a maior parte se refere ao mundo do adulto, dificultando o trabalho pedagógico com adolescentes e crianças. Segundo tal pesquisador, as Frações são encontradas em: 1. capítulos da Constituição Federal e dos regimentos de parlamentos estaduais ou municipais; 2. problemas reais de partilha de bens; 3. cálculos de indenizações sem justa causa; 4. cálculos de 13º salário e férias proporcionais; 5. livros de receitas culinárias.

2.1 As Diretrizes para o Ensino de Frações encontradas nos Documentos Curriculares

Neste tópico, são retratadas as diretrizes para o ensino de Frações no EFAI, encontradas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na Proposta Curricular do Estado da Paraíba.

A BNCC, de acordo com seu próprio site, é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais para todos os alunos desenvolverem ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Seu principal objetivo é ser a balizadora da qualidade da educação no Brasil ao estabelecer um patamar de aprendizagem a que todos os estudantes possuem direito. Para tanto, ela deve nortear os currículos dos sistemas de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas de todas as escolas privadas ou públicas.

Tal documento é organizado em Textos Introdutórios; Competências Gerais; Competências Específicas; Direitos de Aprendizagem ou Habilidades, abrangendo a Educação Infantil, o Ensino Fundamental – Anos Iniciais e anos finais e o Ensino Médio. Especificamente sobre a Matemática para o ensino fundamental nos Anos Iniciais, apresenta unidades temáticas – objetos de conhecimento e habilidades.

Na parte destinada à Matemática, o destaque para a sua aplicação na sociedade e a sua contribuição no formar-se cidadão, caracterizam essa área como essencial à vida. No Ensino Fundamental, espera-se que os alunos desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilizar a Matemática no cotidiano (Brasil, 2018). Juntos, os campos da Aritmética, da Álgebra, da Geometria, da Estatística e da Probabilidade e Grandezas e Medidas devem garantir o alcance dessa finalidade. Todavia, só é possível alcançá-la quando adolescentes e crianças são, matematicamente, letrados. O Letramento Matemático assegura o reconhecimento da Matemática como essencial para a compreensão do mundo (Brasil, 2018). Nesse sentido, os Anos Iniciais do Ensino Fundamental merecem uma atenção especial, visto que é a etapa responsável por iniciar esse processo.

A BNCC também esclarece que há uma vinculação intrínseca entre o letramento e as formas de organização da aprendizagem. A Resolução de

Problemas, a Investigação, a Modelagem e o Desenvolvimento de Projetos são caminhos metodológicos apontados pelo documento. Por meio dessas metodologias, as ideias fundamentais dos campos matemáticos: Equivalência, Ordem, Proporcionalidade, Interdependência, Representação, Variação e Aproximação, precisam ser convertidas em objeto do conhecimento e ensinadas através das cinco unidades temáticas propostas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. As habilidades, inclusive, são distribuídas por cada unidade.

O trabalho com Frações está concentrado na unidade temática "Números", mas a construção do pensamento numérico não se completa apenas com objetos de estudos dessa unidade (Brasil, 2018). A expectativa para os Anos Iniciais é que

[...] os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. No tocante aos cálculos, espera-se que [...] desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras (Brasil, 2018, p. 268).

Espera-se, ainda que além da leitura, escrita e ordenação de números naturais e racionais, ocorra o aprofundamento da noção de número, colocando os estudantes

diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária (Brasil, 2018, p. 268-269).

Conforme a BNCC, as Frações devem ser ensinadas no 4º ano, entretanto, no 2º ano, as noções de metade e de terça parte já são trabalhadas. O conteúdo é expandido para o 3º ano com a quarta parte, quinta parte e a décima parte, conforme observamos no quadro 1.

Quadro 1: Conteúdos envolvendo Frações – 2º ao 4º Ano

UNIDADE TEMÁTICA: NÚMEROS		
SÉRIE	OBJETO DO CONHECIMENTO	HABILIDADE
2º Ano	Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte.	EF02MA08 - Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.
3º Ano	Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte.	EF03MA09 - Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.
4º Ano	Números Racionais: frações unitárias mais usuais.	EF04MA09 - Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/10$ e $1/100$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
	Números Racionais: representação decimal para escrever valores do sistema monetário brasileiro.	EF04MA10 - Reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro.

Fonte: Elaboração Própria a partir da BNCC (2018)

A predominância das Frações, contudo, está no 5º ano, afinal, são seis objetos do conhecimento e sete habilidades associadas, conforme observamos no quadro 2, a seguir:

Quadro 2: Conteúdos envolvendo Frações – 5º Ano

5º ANO	
UNIDADE TEMÁTICA: NÚMEROS	
OBJETO DO CONHECIMENTO	HABILIDADE
Números Racionais e sua representação decimal e na reta numérica.	EF05MA02 - Ler, escrever e ordenar números racionais na forma decimal com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição e a reta numérica.
Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento,	EF05MA03 - Ler, identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.

significados, leitura e representação na reta numérica.	
Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência.	EF05MA04 - Identificar frações equivalentes.
	EF05MA05 - Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
Cálculo de porcentagens e representação fracionária.	EF05MA06 - Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular Porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
Problemas: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita.	EF05MA07 - Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais.	EF05MA08 - Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Fonte: Elaboração Própria a partir da BNCC (2018)

Por fim, recomenda-se que a leitura dessas habilidades não seja feita de maneira fragmentada, pois são interdependentes. Como o processo de escolarização é dinâmico e múltiplo, certamente, existirão alunos que consolidaram determinadas habilidades e outros não, é fundamental adequá-las à realidade da turma.

Embora a BNCC seja um documento curricular mais atualizado, ressaltamos que os PCN constituem um referencial de consulta, uma vez que constam discussões e orientações ainda válidos, embora sejam de 1997. Este documento não configurou um modelo de currículo homogêneo e impositivo a fim de garantir que, respeitadas as diversidades culturais, étnicas, políticas, regionais e religiosas, a educação pudesse atuar no processo de construção da cidadania, possuindo como objetivo a igualdade de direitos entre os cidadãos (Brasil, 1997).

Os PCN foram organizados em uma coleção de dez volumes: um corresponde à introdução; seis volumes envolvendo as áreas de Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História, Geografia, Arte e Educação Física; e três volumes, dedicados aos Temas Transversais.

Logo no início, o texto cita aspectos que o professor do segundo ciclo (que é referente ao 4° e 5° ano do EFAI) deve considerar para favorecer a aprendizagem dos alunos.

[...] destaca-se a importância do conhecimento prévio [...] como ponto de partida [...], do trabalho com diferentes hipóteses e representações que as crianças produzem, da relação a ser estabelecida entre a linguagem matemática e a língua materna e do uso de recursos didáticos como suporte à ação reflexiva do aluno (Brasil, 1997, p. 55).

São relatadas brevemente, em seguida, as capacidades cognitivas de um estudante que está no 4° ou 5° ano. Baseados nelas, foram traçados 16 objetivos a serem atingidos, três, inclusive, mencionam os Números Racionais:

- 1) Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social;
- 2) Interpretar e produzir escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos números racionais na forma decimal;
- 3) Resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais.

Em outros objetivos, a aprendizagem dos Números Racionais não é o intuito central, mas a sua utilização está implícita, como no exemplo a seguir: Construir o significado das medidas, a partir de situações-problema que expressem seu uso no contexto social e em outras áreas do conhecimento e possibilitem a comparação de grandezas de mesma natureza (Brasil, 1997). Tais objetivos precisam ser o alvo dos conteúdos, explanados pelos PCN (1997).

Fica claro que problemas cujas soluções não se encontram no campo dos Números Naturais são apresentados aos estudantes, permitindo, assim, que se aproximem da noção de Número Racional, pela compreensão de alguns de seus significados (parte-todo, quociente, razão) e de suas representações (decimal e fracionária) (Brasil, 1997).

Os conteúdos nomeados de "Conceituais e Procedimentais" são divididos em 1. Números Naturais, Sistema de Numeração Decimal e Números Racionais; 2. Operações com Números Naturais e Racionais; 3. Espaço e Forma; 4. Grandezas e Medidas; e 5. Tratamento da Informação.

Em "Números Naturais, Sistema de Numeração Decimal e Números Racionais", existem 13 conteúdos, oito específicos sobre Frações:

- 1) Reconhecimento de números naturais e racionais no contexto diário;
- 2) Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso frequente;
- 3) Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária;
- 4) Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas;
- 5) Exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte-todo, quociente e razão;
- 6) Observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária;
- 7) Relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo número racional;
- 8) Reconhecimento do uso da porcentagem no contexto diário.

Em contrapartida, em "Operações com Números Naturais e Racionais", nada é descrito sobre operações com Frações, apenas com decimais (sem dúvidas porque se valem, basicamente, dos mesmos procedimentos que os números naturais). Os que, de certa forma, englobam as Frações são "Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números naturais e racionais" e "Cálculo simples de porcentagens" (Brasil, 1997, p. 59). No entanto, a ausência de detalhamento confirma, de fato, as operações com Frações não ser objeto de estudo dos Anos Iniciais.

Essa é uma constatação interessante, pois contrapõe as habilidades EF05MA07 e EF05MA08 da BNCC, as quais demandam a aprendizagem da resolução e da elaboração de problemas envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão de Frações até o final dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, como visto acima.

Mais adiante, os PCN discorrem sobre Conteúdos Atitudinais, Critérios de Avaliação e, por fim, Orientações Didáticas. Nesse último tópico, existem algumas orientações gerais e outras específicas com sugestões de atividades.

Quanto às orientações didáticas, a primeira é a importância de partir dos contextos significativos para os estudantes. Essa é uma recomendação essencial, pois contempla uma das indagações fundamentais na construção do currículo escolar (para quem?) e, certamente, facilita a aproximação com os números racionais, conceito que requer atenção por ser novo no segmento em análise (como já discutido). A aprendizagem de tais números, conforme os PCN (1997), supõe rupturas com as ideias construídas acerca dos números naturais, e, portanto, exige tempo e abordagem adequada.

Todavia, a dificuldade para encontrar contextos que envolvem as Frações é destacada. O "[...] contato com representações fracionárias é bem menos frequente; na vida cotidiana o uso de frações limita-se a metades, terços, quartos e mais pela via da linguagem oral do que das representações" (Brasil, 1997, p. 68). Por isso, é comum recorrer à divisão, em partes iguais, de um chocolate ou de uma pizza, caso que está implícito o significado de relação parte-todo. Esse e outros diferentes significados (quociente; razão; probabilidade; escalas; porcentagem; operador; etc.) são explicados pelo documento.

Encerra-se com as orientações sobre as Operações com Números Racionais, reduzidas ao comparar às dos Números Naturais e restritas aos decimais, o que deve acontecer pela mesma justificativa de não aparecer operações com Frações enquanto conteúdo para o 4º e 5º ano.

A promoção de uma aprendizagem significativa da Matemática para que as habilidades adquiridas sejam utilizadas em situações reais é comentada de maneira prolixa nos três documentos curriculares. Existe, de fato, a urgência de uma contextualização do ensino, almejando romper com o mecanicismo arraigado e, por consequência, com o ciclo de defasagem.

Na Proposta Curricular do Estado da Paraíba (2020, p. 230), a expressão “garantir o direito” chama atenção por empregar responsabilidade diretamente ao currículo da Matemática de proporcionar ao outro o que lhe cabe. Por isso, o ensino de Matemática **deve** garantir o direito à Educação ao fornecer estratégias e recursos para facilitar a atuação na sociedade; ao promover a sua importância

(letramento matemático); e ao contribuir para o aluno se reconhecer enquanto sujeito de direitos. É tarefa do professor ser o mediador desse processo.

Atualmente, valoriza-se o raciocínio e a compreensão do que se aprende, bem mais que a memorização e a repetição. O ensino não visa à formação de calculistas e sim, de cidadãos que usam e compreendam a Matemática, que percebam os conhecimentos matemáticos como úteis para entender e melhorar a atuação no mundo em que vivem (Paraíba, 2020, p. 231).

Portanto, trabalhar a matemática por meio de formulação, interpretação e resolução de situações-problema, materiais manipulativos; valorizar a oralidade, a leitura, a escrita e a experiência acumulada pelo aluno dentro e fora da escola; estimular o cálculo mental e estimativas; lidar com informações numéricas, além de fazer uso das tecnologias de comunicação e informação e conhecer a história da Matemática, são alguns avanços considerados fundamentais para uma nova maneira de ensinar e aprender matemática (Paraíba, 2020, p. 231).

As unidades temáticas - Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística - encontradas lá na BNCC, são brevemente comentadas. Depois, são enumerados os Direitos de Aprendizagem de Matemática para o Ensino Fundamental.

As Frações aparecem, em um quadro, como objeto do conhecimento, e as habilidades associadas também. Diferentemente da BNCC, existe um maior detalhamento com sugestões empíricas na Proposta Curricular do Estado da Paraíba, o que é igualmente identificado nos PCN.

Quadro 3: Sugestões Metodológicas para o 2º Ano

2º ANO		
UNIDADE TEMÁTICA: NÚMEROS		
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM/ HABILIDADES	CONTEÚDOS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS/ COMENTÁRIOS
EF02MA08	Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte.	Contagens, problemas, jogos e exploração de receitas simples são excelentes contextos para se explorar as ideias centrais desta habilidade. Em especial a proposição de situações que envolvem a divisão de grandezas discretas em partes iguais (duas ou três partes) com o suporte de materiais manipuláveis (p. 267).

Fonte: Elaboração Própria a partir da Proposta Curricular do Estado da Paraíba (2020)

Quadro 4: Sugestões Metodológicas para o 3º Ano

3º ANO		
UNIDADE TEMÁTICA: NÚMEROS		
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM/ HABILIDADES	CONTEÚDOS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS/ COMENTÁRIOS
EF03MA09	Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte.	Problemas nos quais os estudantes devam repartir algo entre si para descobrir qual parte cabe a cada um; investigações usando a divisão de uma fita ou barbante (p. 276).

Fonte: Elaboração Própria a partir da Proposta Curricular do Estado da Paraíba (2020)

Quadro 5: Sugestões Metodológicas para o 4º Ano

4º ANO		
UNIDADE TEMÁTICA: NÚMEROS		
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM/ HABILIDADES	CONTEÚDOS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS/ COMENTÁRIOS
EF04MA09	Números Racionais	A resolução de problemas e o recurso a materiais manipuláveis (p. 287).
EF04MA10	Números Racionais	Problemas com sistema monetário, representação de valores com notas e moedas e que envolvam medidas de comprimento nos quais os alunos precisam usar medidas envolvendo metros, centímetros e milímetros, além da calculadora e da reta numérica (p. 288).

Fonte: Elaboração Própria a partir da Proposta Curricular do Estado da Paraíba (2020)

Quadro 6: Sugestões Metodológicas para o 5º Ano

5º ANO		
UNIDADE TEMÁTICA: NÚMEROS		
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM/ HABILIDADES	CONTEÚDOS	SUGESTÕES METODOLÓGICAS/ COMENTÁRIOS
EF05MA03	Representação fracionária dos números racionais.	A sugestão é que ela seja desdobrada em três: uma que trata de frações como parte de um todo e divisão; outra que aborde as representações de frações maiores, menores ou iguais ao

		inteiro associadas às duas ideias e, finalmente, a representação das frações maiores, menores ou iguais ao inteiro na reta numérica (p. 297-298)
EF05MA04	Comparação e ordenação de números racionais.	Problemas com materiais manipulativos, tais como tiras de frações, Tangram, entre outros, são adequados para criar contextos de aprendizagem da habilidade (p. 298).
EF05MA05	Comparação e ordenação de números racionais.	A utilização de problemas relacionando frações com medidas são bons contextos (p. 299)
EF05MA06	Cálculo de porcentagens e representação fracionária.	Toda exploração deve ser realizada trazendo procedimentos de cálculo associados a frações e proporcionalidade e não à técnica da regra de três. Deve-se destacar o uso social da porcentagem, em especial em gráficos e situações apresentadas em diferentes textos de circulação ampla (p. 299)
EF05MA07	Problemas: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita.	A Resolução e elaboração de problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita (uma escrita decimal com um número finito de algarismos após a vírgula), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. É esperado que a adição e subtração com números naturais seja explorada com criptogramas e desafios numéricos. Problemas envolvendo cálculos com valores monetários e com medidas (p. 300).
EF05MA08	Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação	É relevante que se explore, em problemas de divisão, o papel do resto e a relação entre ele e a natureza daquilo que se está dividindo. Recomenda-se, ao longo do trabalho com a divisão, a

	decimal é finita por números naturais.	exploração de estimativa da ordem de grandeza do quociente (p. 301).
--	--	--

Fonte: Elaboração Própria a partir da Proposta Curricular do Estado da Paraíba (2020)

Finalizam-se as considerações sobre a área nesse documento com Possibilidades Metodológicas e Pensando o Processo de Avaliação em Matemática.

Para alcançar o objetivo de trazer significado às ações pedagógicas, consta em “Possibilidades Metodológicas”: “[...] o professor deve adotar novas metodologias que se complementam e naveguem em suas diferentes possibilidades (Paraíba, 2020, p. 285).

À vista disso, duas metodologias são ressaltadas, a de projetos e a de resolução de problemas. Outras sugestões aparecem, desta vez, de caráter mais prático, tais como ensinar por meio de aula demonstrativa e expositiva, relacionada ao cotidiano; usar aplicativos e sites, filmes e documentários, jogos, materiais, recursos da informática; incentivar pesquisas na internet, olimpíadas internas de Matemática, propostas que envolvem os temas transversais.

2.2 Desafios para Ensinar e Aprender Frações

Neste item, é abordado como as Frações são ensinadas nas escolas e os principais desafios enfrentados por docentes para ensiná-las e por discentes para aprendê-las.

Várias causas que podem explicar as dificuldades em Matemática são discutidas. Uma, de modo específico, desperta atenção por sua recorrência na literatura: o processo de ensino. Sánchez (2004, p. 174) pontua cinco dificuldades vinculadas à Matemática, dentre elas:

Dificuldade originada no ensino inadequado ou insuficiente seja porque a organização do mesmo não está bem sequenciada, ou não se proporcionam elementos de motivação suficientes; seja porque os conteúdos não se ajustam às necessidades e ao nível de desenvolvimento do aluno, ou não estão adequados ao nível de abstração, ou não se treinam as habilidades prévias; seja porque a metodologia é muito pouco motivadora e muito pouco eficaz.

Ainda, escrevem Neto e Santos (2023, p. 2) que “[...] chega-se à conclusão da existência de um obstáculo sólido, antigo, delicado e visível que são os problemas metodológicos e didáticos”.

Pensando acerca do ensino de Frações, segundo Cavalcanti e Santos (2006, p. 3), os professores

[...] justificam que sentem dificuldades na sua compreensão e que quando chega a hora de lecionar esse tema, são apresentadas algumas poucas instruções, reproduzindo-se os passos encontrados nos livros didáticos adotados.

Bertoni (2008) surpreende ao relatar que o tempo de vinte anos de pesquisas sobre essa temática se revela pequeno, considerando mais de um século de improdutividade e rigidez das metodologias que permeiam as escolas. Nessa mesma direção, Lopes (2008) ressalta que o ensino de Frações é marcado “[...] pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, ‘carroções’, cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas [...]” (Lopes, 2008, p. 20).

As Frações são geralmente introduzidas através do modelo parte-todo. Na maioria das vezes, apresentam-se figuras divididas em partes iguais, com algumas pintadas. Depois, são apresentados os termos "denominador" e "numerador", que, respectivamente, correspondem ao total das partes e ao total das partes destacadas, já operando com a representação a/b .

Conta-se e o resultado é associado a uma designação e a um símbolo para as partes, mas não claramente a uma quantificação. Também não é evidente a razão de trabalhar com aquelas figuras e atribuir-lhes nomes e símbolos numéricos (Bertoni, 2008).

As limitações dessa metodologia ainda aparecem quando o todo é sempre representado por uma unidade e as partes destacadas são menores do que ele. Tal “[...] ideia é confrontada com a definição de frações impróprias” (Lopes, 2008, p. 8).

A fim de potencializar a construção do número fracionário e evitar essas limitações, Bertoni (2008, p. 244) mostra vários caminhos, um deles é a divisão entre números naturais com resto. O fato de

[...] o resultado final envolver, muitas vezes, números naturais acompanhados de números fracionários menores do que a unidade, permite a compreensão mais ampla dos números fracionários do que aquela obtida pela relação parte-todo, a partir de uma única unidade

(com obstáculo posterior à aceitação de frações maiores do que a unidade).

Cavalcanti e Santos (2006) reforçam que essa apresentação exígua do conteúdo aparece nos livros didáticos, além de encorajar a utilização do procedimento de dupla contagem, provocando a falsa sensação de aprendizagem. Portanto, é fácil concluir que "[...] a relação parte-todo, como usualmente tratada, não gera ideias sobre o número fracionário [...]" (Bertoni, 2008, p. 233).

É verdade que os modos de ensinar estão, diretamente, vinculados à formação profissional. Logo, é indispensável buscar uma formação inicial de qualidade e dar continuidade nos estudos. Todavia, voltando-se para o curso de graduação em Pedagogia, a reduzida carga horária destinada à área de Matemática é um problema crônico (Pacheco; Andreis, 2018). Na Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Campus I, no curso de Pedagogia, por exemplo, só uma disciplina, chamada "Ensino de Matemática", é ofertada.

Também é necessário considerar a escolarização do pedagogo e suas consequências no exercício docente. Afinal, permitir a migração da Educação Básica para o Ensino Superior com dificuldade em Matemática, sem clara oportunidade de superação nessa etapa acadêmica, formará um profissional que retorna à escola e colabora para a manutenção de um verdadeiro ciclo de defasagem.

Além da falta de domínio conceitual da Matemática, os alunos que ingressaram nesses cursos trazem crenças que, muitas vezes, são negativas e preconceituosas em relação ao ensino dessa disciplina. Essas crenças estão ligadas ao seu fracasso escolar e à imagem de que a Matemática é difícil de ser compreendida. Quando esses problemas não são enfrentados no início, tem-se muitas implicações negativas na prática docente desses pedagogos (Pacheco; Andreis, 2018, p. 107).

Para desempenhar uma boa prática, é necessário tanto saber o conteúdo, quanto saber como ensiná-lo. O que ainda "[...] é difícil de aceitar é que, para ser professor, hoje não basta dominar os conteúdos; é preciso também utilizar estratégias e metodologias que favoreçam a aprendizagem" (Zacarias, 2008, p. 87).

Cavalcanti e Santos (2006) fizeram uma pesquisa com 41 professores do 4º e 5º ano de escolas municipais de Tupanatinga (PE), buscando identificar a compreensão deles sobre os diferentes significados de Fração. Os resultados

colhidos de um teste com oito questões anunciam que eles não identificaram a fração como um só número; associaram seus termos às operações aritméticas; não a reconheceram enquanto operador; e possuíram mais dificuldade em resolver situações abrangendo a relação parte-todo em unidades discretas⁷ quando não aparecem figuras.

Em contrapartida ao curso de Licenciatura em Pedagogia, o de Licenciatura em Matemática possui um currículo que, muitas vezes, não prioriza os conteúdos pedagógicos, focando mais nos específicos. Outra realidade comum é a atuação em escolas de pessoas não licenciadas (bacharéis ou, inclusive, formadas em outra área). Isso ocorre sobretudo em escolas privadas, nos segmentos do Ensino Final dos Anos Finais e do Ensino Médio, caracterizando-se mais um aspecto negativo.

Embora tais cursos precisem de uma reavaliação, é o espaço universitário que favorece o acesso a um mundo de conhecimento crítico e inovador (com mais facilidade nos projetos extraclasses, aqueles da tríade acadêmica - monitoria, pesquisa e extensão). Lá, a produção de conhecimento é fomentada constantemente. Conceitos, metodologias, recursos, que poderiam contribuir para a superação do grande fracasso em Matemática, são pensados, estudados e discutidos. No entanto, a impossibilidade de ingressar em projetos, que viabilizam o aprofundamento de temáticas importantes, devido à rotina de um estudante-trabalhador; e a não continuidade dos estudos por falta de interesse ou condições trabalhistas precárias são barreiras que restringem o conhecimento às paredes da universidade.

Não é só a forma de ensinar frações que dificulta a aprendizagem, mas também determinadas características dos próprios números fracionários. Almejando compreendê-los, é necessária a quebra de paradigmas construídos a respeito dos naturais, o que acentua a dificuldade.

Lopes (2008) destaca três obstáculos: os diferentes significados de Fração; a impossibilidade de isolá-los; e a notação, pois não é fácil reconhecer dois números inteiros separados por um traquinho como um número só. Os PCN (1998) trazem quatro desafios à luz:

⁷ “No caso das grandezas discretas, a medida se faz através da contagem e no caso das contínuas, através da comparação em relação a um determinado padrão” (MOURA, s/d, p. 8).

1. Cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, $1/3$, $2/6$, $3/9$ e $4/12$ são diferentes representações de um mesmo número;

2. A comparação entre racionais: acostumados com a relação $3 > 2$, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $1/3 < 1/2$;

3. Se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $1/2$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;

4. Se a sequência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois quaisquer é sempre possível encontrar outro.

Além desses desafios enfrentados pelos alunos, juntam-se a eles: somar frações como se fossem números inteiros; não fazer a comparação entre as partes; não dividir quando a operação for enunciada com uma fração; usar regras em operações muito simples. (Texto “Por que as crianças acham tão difícil entender frações?”).

A razão dessas dificuldades é que os alunos não conseguem fazer a passagem do concreto para o abstrato: ‘Falta a eles a relação de equivalência associada à representação gráfica, ou seja, a criança não consegue associar as partes pintadas de uma figura ao todo dessa figura’ [...]. ‘E, quando relacionam a parte com o todo, não levam em conta o principal conceito de fração, ou seja, que ela pressupõe a divisão em partes iguais’ [...] (Lagoa, p. 1, 1992).

Todo esse contexto promove a reprodução de um ensino abstrato, arcaico e descontextualizado. “O mundo evoluiu e a escola estacionou na forma de ensinar, na maneira de avaliar e no modo de olhar os alunos” (Zacarias, 2008, p. 18). Há urgência, como mencionado no início deste trabalho, em buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama (Brasil, 1997).

2.3 Compreendendo a Construção do Número Fracionário em Bertoni (2008)

Nilza Eigenheer Bertoni, após anos de pesquisas, propõe a construção do Número Fracionário baseada na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.

Em nossa proposta, procuramos a compreensão da entidade numérica fracionária anterior à representação escrita. Centramos a nossa proposta na construção de um número, explicitando o que vem a ser esse número e o que ele quantifica, bem como suas relações com os números naturais (Bertoni, 2008, p. 213).

A autora detalha todo o percurso até alcançar essa proposta didática. Várias outras foram elaboradas e executadas, todas com o

[...] objetivo conceitual de conseguir um conhecimento que se situa o aluno em relação a esses números como uma realidade matemática do mundo, capaz de relacioná-los e operar com eles com compreensão, fazendo relações mentais básicas, como ocorre com os números naturais (Bertoni, 2008, p. 214).

As primeiras propostas se apoiavam em materiais manipulativos (canudos e fichas, por exemplo) e figuras geométricas associadas às abstrações reflexivas. No entanto, a falta de ações com avaliação numérica de partes fracionárias efetuadas no cotidiano provocou a mudança do foco da pesquisa, que passou da concretização manipulativa à contextualização do mundo real.

A [...] didática produz um anteparo antes de o conceito de quantificador fracionário ser formado, propondo que o aluno entenda uma representação simbólica antes de ele saber o que está sendo representado, ou para que aquela representação servirá (Bertoni, 2008, p. 220).

Ao se deparar com limitações e resistências frente a tais metodologias, Bertoni (2008) se fundamenta nas ideias de Gérard Vergnaud para traçar um novo caminho. Vergnaud alega que um conceito é formado por meio das situações que demandam um sentido (referência), do conhecimento resultante da atuação sobre as situações (significado) e das suas representações simbólicas (significante). Moro e Starepravo (2005) mencionam que

[S]egundo Vergnaud (1979), é possível aprender muito mais sobre o significado que um conceito matemático tem para uma criança se for estudada a forma como ela, criança, lida com problemas que, para sua solução, necessitem deste conceito, do que estudando-se apenas o uso que ela faz de palavras e símbolos referentes ao conceito.

Investigando quais situações levariam ao surgimento do conceito de número fracionário, a pesquisadora conseguiu identificar três: a divisão entre números naturais com resto, as que envolvem as medidas e as denominadas “contagem estendida”. “Na contagem estendida, a emergência do número fracionário está associada à quantificação de coleções que não apresentam apenas objetos inteiros, contáveis pelos números naturais” (Bertoni, 2008, p. 222). O interessante das três situações é que números naturais e racionais aparecem inter-relacionados.

Os modos como o aluno atua nessas situações é chamado de esquema. Deles, emergem conhecimentos que irão orientar, muitas vezes implícitos, a ação dos estudantes, sendo chamados de conhecimento-em-ato que, por sua vez, incluem conceitos-em-ato e teoremas-em-ato. Foram constatados sete esquemas, que receberam o nome de: Números Conceituais; Comparativos; Equivalência em Ação; Variações e Permanência da quantidade representada; Esquemas Divisivos; Esquemas Comparativos mais elaborados; e Esquemas Operatórios.

As situações geram de modo natural o aparecimento de novas quantidades fracionárias, esquemas operatórios espontâneos e também representações linguísticas e não linguísticas. Elas permitem representar o conceito, suas propriedades, as situações que se aplicam e que devem suceder as ações. As representações número-simbólicas são introduzidas depois.

Foi observado o uso frequente de frações unitárias pelas crianças. Conforme Moro e Starepravo (2005, p. 45),

[N]o ensino, é essencial seguir as notações espontâneas das crianças para, a partir delas, provocar-lhes a produção de notações mais avançadas, sempre em relação à interpretação das próprias crianças e trabalhando-se primeiro, com os quantificadores de sua linguagem natural.

O conceito claramente formado que esses números quantificam conduz à várias percepções: de que há uma ampliação do que era suscetível de ser quantificado; de que é possível comparar, em termos de quantidade representada, esses números entre si e com os números naturais; do reconhecimento de que os novos números entremeiam-se entre os números naturais e do posicionamento dos mesmos na reta numérica - conhecimentos

que servem de suporte à exploração de outras funções desses números (Bertoni, 2008).

3. METODOLOGIA DA PESQUISA

Desejando analisar o Ensino de Frações nos Anos Iniciais, realizamos uma pesquisa qualitativa, de caráter bibliográfico e documental.

Taquete e Borges (2020) lembram que as abordagens qualitativas são pautadas por um conjunto de expressões e significados, têm a potencialidade de produzir evidências a partir das inferências do pesquisador. São os "[...] cinco grupos de atributos da pesquisa qualitativa: a) características gerais; b) coleta de dados; c) objeto de estudo; d) interpretação dos resultados; e) generalização" (GÜNTHER, 2006, p. 202).

No primeiro momento, investigamos as orientações para o ensino de Frações que constam nos documentos curriculares. Depois, procuramos artigos sobre Frações nos anais de três edições⁸ do Encontro Paraibano de Educação Matemática (EPBEM), Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), publicados de 2012 a 2023. Selecionamos tais eventos científicos pela referência em nível estadual, nacional e internacional na área. O recorte temporal é justificado pelo interesse em explorar as pesquisas mais recentes, a fim de entendermos como, de fato, as Frações são trabalhadas na atualidade.

As palavras-chave utilizadas foram "Número Racional", "Número Fracionário" e "Fração". Para realizar a busca nos anais do evento internacional, o SIPEM, também foram usadas "Numero Racional", "Rational Number", "Numero Fraccional", "Fractional Number", "Fracción" e "Fraction". Como resultado, encontramos quatro artigos no EPBEM, sessenta e três no ENEM e sete no SIPEM e separamos aqueles direcionados ao segmento escolar do Ensino Fundamental Anos Iniciais.

Na sequência, foram organizados nas categorias: relatos de práticas em sala de aula; propostas baseadas em revisão bibliográfica; discussões teóricas sobre o conceito; estudos da compreensão dos alunos ou professores acerca do assunto; análises de livro didático. Consideramos apenas os trabalhos que retratam uma intervenção pedagógica, seja executada ou planejada, totalizando sete artigos. Devido aos critérios estipulados, o ENEM se tornou o principal

⁸ Não foram edições subsequentes porque os sites dos anais do XIII ENEM de 2019 e do VI SIPEM de 2015 estavam indisponíveis.

banco de dados, pois não há artigos que se enquadrem no EPBEM e no SIPEM. Analisamos, enfim, cada um com base em Bertoni (2008), destacando as estratégias e os recursos que são indicados para ensinar Frações.

Os critérios da análise foram: O ensino é pautado na memorização de regras operatórias e na utilização de figuras geométricas divididas? As propostas ou práticas pedagógicas partem de situações de divisão entre números naturais com resto, contagem estendida ou medidas? Ou de outra situação contextualizada? Promove a aprendizagem por elaborações mentais, objetos reais ou desenhos que retratem a realidade? Trabalha inter-relacionando os números racionais e naturais? Com algoritmos verticalizados? Com frações unitárias e suas famílias (por exemplo: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$)? Utiliza a língua materna/natural? Os alunos apresentam algum dos esquemas citados ou outro? São capazes de elaborar estratégias alternativas? Quais as representações utilizadas? De qual tipo é? Elas serviram de base para as próximas ações do professor? Ou as representações numérico-simbólicas foram apresentadas a princípio, limitando as que poderiam surgir?

Quadro 7: Mapeamento de Artigos sobre o Ensino de Frações

ENEM				
Nº	ANO	EDIÇÃO	TÍTULO	AUTOR
1	2013	XI ENEM	O uso do Frac-Soma 235 no processo de ensino e aprendizagem de Frações para o Ensino Fundamental.	Wellington Araújo
2	2016	XII ENEM	Prática didática do professor do 5º ano: um estudo sobre o ensino de adições de Frações em uma escola municipal de Campo Grande, MS.	Danise Silva e Antônio Sales
3	2016	XII ENEM	Sequência Fedathi e Análise de Erros contribuindo para o Ensino de Frações atrelado ao jogo <i>Fraction Matcher</i> .	Virlane Pedrosa, <i>et al.</i>
4	2022	XIV ENEM	Dez fichas e seis estudantes, com quanto ficará para cada um? Análise de uma tarefa investigativa no Ensino de Frações.	Rúbia Vieira e Viviane da Silva

5	2022	XIV ENEM	Número Racionais nos Anos Iniciais – despertando para uma nova ideia de números.	Silvana Mandarino <i>et al.</i>
6	2022	XIV ENEM	O Trabalho com Jogos frente aos desafios do Ensino e da Aprendizagem de Frações.	Raylane Silva, <i>et al.</i>
7	2022	XIV ENEM	Tarefa Didática sobre Frações com o significado de Medida: diálogos e aproximações com as contribuições de Davydov.	Ebenezer Ferreira e Dilza Côco

Fonte: Elaboração Própria (2024)

A seguir, analisaremos esses artigos de forma individual, a partir dos critérios sinalizados.

4. ANÁLISE DOS ARTIGOS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES ENCONTRADOS EM ANAIS DE EVENTOS NA ÁREA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Ao analisar os artigos escolhidos, observa-se uma carência de pesquisas sobre Frações nos Anos Iniciais apresentadas em anais de eventos de Educação Matemática, ainda que a necessidade de discussão seja visível através do grau de complexidade do conteúdo de Frações, voltado a um segmento escolar com progressos comprometidos, como é aludido na introdução. A maior parte é vinculada aos Anos Finais, sobretudo ao 6° ano.

Considerando as edições avaliadas, de 223 trabalhos do EPBEM, um envolve Frações nos Anos Iniciais. De 3.008 do ENEM, dezoito trabalhos foram encontrados. De 611 do SIPEM, também um foi identificado. Isto é, comparado ao montante, representa apenas 0,5% das produções científicas. Dessas, sete retratam intervenções pedagógicas, constituintes do nosso objeto de estudo.

A seguir, ilustraremos os modelos de proposta através da análise de cada artigo.

4.1 Análise do Artigo 01

O artigo "O uso do Frac-Soma 235 no processo de ensino e aprendizagem de Frações para o Ensino Fundamental" (Araújo, 2013), relata a execução de uma oficina realizada no Segundo Encontro Científico e Cultural de Alagoas, ocorrido no ano de 2012 na Universidade Estadual de Alagoas (UNEAL).

Essa oficina buscava familiarizar seus participantes com o Frac-Soma 235, enfatizando sua construção e algumas possibilidades de aplicação no processo de ensino dos conceitos e das operações relativos às frações. Teve a participação de 20 discentes do Curso de Pedagogia da UNEAL e do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco (IFPE).

Inicialmente, o uso de materiais concretos no ensino de Matemática é reconhecido como uma Tendência Metodológica da Educação. Tais materiais devem ser manipulados e sentidos pelas crianças, e, preferencialmente, extraídos de seu cotidiano. Existe uma coerente preocupação com a contextualização dos objetos, o que averiguamos também em Bertoni (2008).

Araújo (2013) defende que os alunos podem estabelecer relações entre o que vivenciam com eles e a abstração dos conceitos matemáticos. Esses conceitos a serem formados não estão nos recursos de modo que precisem ser abstraídos empiricamente. Concordamos que o material não despertará o estudante 'magicamente'. É fundamental que as práticas docentes tenham intencionalidade pedagógica. Todavia, ao mesmo tempo que o autor é assertivo por escrever que a aprendizagem não é espontânea, seu texto carece de um olhar para o professor. Essa percepção só aparece no fim do texto quando Araújo (2013, p. 8) pontua: “[...] aplicado em uma aula bem planejada pode acrescentar e inovar o ensino [...]”. Trazer um objeto contextualizado à sala de aula, certamente, permitirá que o aluno faça conexões com mais facilidade, mas a ação do professor é essencial para mediar todo o processo.

O autor propõe o Frac-Soma 235, um jogo para trabalhar o que são as frações, as operações que as envolvem, a equivalência entre elas, etc (Araújo, 2013). O jogo consiste em barras com 60 cm de comprimento, que são divididas em peças congruentes entre si, cujos divisores são múltiplos de 2, 3 e 5. Esses números, que são os únicos números primos utilizados no jogo, estão associados as três cores primárias utilizadas no mesmo, o número 2 associado ao vermelho, o 3 ao amarelo e o número 5 associado ao azul.

No decorrer da oficina, é realizada uma breve introdução sobre a área da Matemática e o uso de materiais concretos em sala de aula. Depois, os discentes se organizaram em quatro grupos e construíram um Frac-Soma 235. Uma vez que essa etapa foi concluída, possibilidades de utilização desse recurso foram mostradas.

Partindo da soma entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, a atividade “Qual é a Soma?” foi iniciada. Alguns questionamentos norteadores foram “O que representa essa soma?” e “Como representá-la com o Frac-Soma?”. Comparando a representação numérica à peça do jogo, realizaram uma demonstração ao usar a equivalência entre frações.

Nesse instante pudemos realizar a soma, assim dando significado as operações realizadas, visto que ao realizar estas construções, através do toque, da manipulação e movimentação das peças pelos alunos se proporcionou algumas possibilidades de representação dos conceitos matemáticos ou das ideias exploradas (Araújo, 2013, p. 7-8).

Elementos concretos são importantes no processo de ensino e de aprendizagem, sobretudo de crianças dos primeiros anos do Ensino Fundamental. As cores, a quantidade de peças, a possibilidade de construí-lo, conferem, inicialmente, um status positivo ao Frac-Soma 235. Contudo, Bertoni (2008, p. 220) faz um alerta:

Na verdade, tanto o material manipulativo anteriormente usado [...], quanto as figuras geométricas associadas a abstrações reflexivas nos causavam certa inquietação, por parecerem de certo modo artificiais, sem uma articulação clara dos particionamentos de figuras, fichas, canudos com particionamentos reais encontrados no viver cotidiano (Bertoni, 2008, p. 220).

Também não ficou claro em que sentido o jogo contribuiu na resolução da operação. É mencionado apenas que ele atribui significado e ajuda na melhor compreensão dos alunos. Cabe perguntarmos: a adesão do Frac-Soma 235 realmente assegura uma aprendizagem com significado à vida? O próprio autor responde quando escreve que o conceito não está no objeto, é como o professor faz uso dele em sala que fará diferença. Embora Araújo (2013) defenda essa perspectiva logo no início, sugere uma restrita forma de aplicação do Frac-Soma 235 que, além de dificultar a nossa análise, confere uma falsa resposta positiva ao questionamento.

4.2 Análise do Artigo 02

O texto "Prática Didática do professor do 5º ano: um estudo sobre o ensino de Adição de Frações em uma Escola Municipal de Campo Grande (MS)" de Silva e Sales (2016) é o recorte de uma pesquisa de mestrado. Os autores, neste artigo, quiseram responder à pergunta: como o professor do 5º ano ensina a somar frações com denominadores diferentes?

A fundamentação teórica é pautada nos Modelos Docentes de Gascón (2011) e nos Momentos Didáticos da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999). Silva e Sales (2016) buscaram analisar a ênfase atribuída - tecnológica-teórica, tecnicista ou exploratória - nas tarefas planejadas pelo professor do 5º ano em consonância com Chevallard (1999), bem como o modelo de Gascón (2011) que ele se enquadra - clássico, empirista ou construtivista.

A metodologia da pesquisa tem enfoque qualitativo etnográfico. As fontes utilizadas foram: além do planejamento semanal do professor e da entrevista gravada e transcrita com ele, documentos oficiais que norteiam o ensino, como Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997); Referencial Curricular; Livro Didático; Caderno Promover.

Há, no início, uma discussão sobre as orientações para o ensino de frações nos documentos curriculares, depois, sobre a entrevista com o professor, juntamente da análise de seu planejamento.

Voltando-se à entrevista: ao perceber que seus alunos têm condições de ir além do trabalho da adição de Frações com denominadores iguais, o docente apresenta situações que envolvem denominadores diferentes, embora alguns documentos não empreguem tal conteúdo para o 5º ano. Essa visão é fundamental para quaisquer conteúdos. A BNCC pontua, conforme discutimos em seção anterior, que as habilidades são interdependentes. Logo, restringir o ensino para se adequar ao currículo, sabendo que a turma é capaz de ir além do estipulado, não é o ideal.

Somar $1/2 + 1/3$ foi a primeira indagação da entrevista. Segundo ele, é preciso encontrar o mínimo múltiplo comum entre os denominadores. Ao descobrir que é seis, pega "[...] o três e multiplica pelo numerador mais o próximo número, pega o seis e divide por três que dá dois, vezes um é igual a dois [...]" (Silva; Sales, 2016, p. 8).

Ao averiguarem o planejamento, Silva e Sales (2016) observaram duas maneiras de calcular $2/5 + 1/5$. A primeira era o algoritmo básico para somar uma fração e a regra "Conserva o Denominador" em destaque. A segunda usou retângulos divididos e pintados. Essas demonstrações serviriam de exemplo para a atividade subsequente, com muitos exercícios do tipo "Vamos calcular adições de Frações?". Depois, de acordo com o planejamento, seria a vez da resolução das seguintes problemáticas: 1) "Se você contribuiu com $3/7$ de um trabalho e Rafael contribuiu com $2/7$ do mesmo trabalho, que fração desse trabalho foi feita pelos dois alunos?"; 2) "Gilda leu $2/5$ de um livro em um dia. No dia seguinte, ela leu $1/5$ do livro. Qual fração do livro ela leu nos dois dias?". Em momento algum, é citado que os alunos ficarão livres para resolvê-las. Os autores constataram que, no geral, pouco tempo foi destinado às operações com frações. Citando Moreira e David (2005), Bertoni (2008) traz à tona que a

aquisição abstrata de número racional está associada a um longo processo de elaboração e reelaboração, quase que elemento a elemento.

Todas as observações, ainda, revelam aos pesquisadores que o docente não segue a orientação curricular de utilizar a compreensão de equivalência para ensinar a somar ou a subtrair os números racionais. Ou seja, ele tem uma perspectiva adequada ao considerar as potencialidades da turma, não restringindo a sua prática aos currículos, mas é necessário conhecê-los e ponderar acerca de suas diretrizes, absorvendo o que é essencial.

Existe outro distanciamento entre os documentos curriculares e o fazer do professor, também evidenciado por Silva e Sales (2016), no sentido de trabalhar as operações para dar significado ao conjunto dos números racionais. Bertoni (2008) concorda, afinal, a resolução não parte de uma situação-problema, que, nesse caso, poderia ser relacionada à medida ou à contagem estendida. A tentativa de contextualizar aparece depois, tornando claro que o ensino é pautado na memorização de regras operatórias e no uso de figuras geométricas. Uma vez que nenhum tempo é destinado à realização da atividade e as representações numérico-simbólicas são mostradas, dificultam o surgimento das alternativas e, por consequência, dos esquemas.

Não existe um trabalho que interrelaciona os números racionais com os naturais, como a verticalização do algoritmo de adição, ou que use as famílias de frações unitárias, o que facilitaria a aprendizagem para os Anos Iniciais.

Os autores, por fim, identificaram que a prática docente em análise é baseada no modelo clássico de Gascón (2011) e as tarefas nos modelos teorista e tecnicista de Chevallard (1999).

4.3 Análise do Artigo 03

O artigo “Sequência Fedathi e Análise de Erros contribuindo para o ensino de Frações atrelado ao jogo *Fraction Matcher*” de Pedrosa, *et al.* (2016), tem como objetivo fomentar reflexões e propor estratégias para o ensino de Frações por meio da utilização da ferramenta *Fraction Matcher* alinhada às propostas de intervenção pedagógica Sequência Fedathi e Análise de Erros, visando a promoção da autonomia discente. Constituiu-se através de uma pesquisa bibliográfica, envolvendo a análise de conceitos com base na leitura de teóricos pertinentes ao estudo.

A Sequência Fedathi é uma proposta teórico-metodológica desenvolvida por pesquisadores vinculados ao Laboratório de Pesquisa Multimeios da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará (UFC). Quatro etapas a estruturam: Tomada de Posição; Maturação; Solução; e Prova. Na primeira etapa, o professor apresenta uma situação-problema aos estudantes. Na segunda, o estudante organiza seus pensamentos, interpreta a questão e tenta encontrar, através de discussão em grupo sobre o tema, a melhor maneira de resolvê-la. A terceira é a exposição das resoluções, que podem ser representadas por desenhos, esquemas, gráficos, verbalizações, etc. Na última, ocorre a apresentação e formalização do conteúdo.

As semelhanças com Bertoni (2008) são perceptíveis em alguns aspectos. Entretanto, há uma ressalva: é mencionado que a Tomada de Posição acontece após a explanação do conteúdo. Ao ler o texto, não fica claro se é na primeira ou na última etapa, pois também é relatado que a apresentação do conteúdo é realizada nessa.

Se a explicação realmente ocorrer na primeira etapa, a Sequência Fedathi não potencializará o surgimento do número fracionário. Afinal, a criança utilizará os algoritmos instruídos para solucionar a questão, inibindo o desenvolvimento de estratégias espontâneas. Em contrapartida, é notório que a segunda e a terceira etapa, ao permitir que o aluno pense e elabore uma resposta e formas de representá-la, estão em conformidade com Bertoni (2008).

Na quarta etapa, ainda, destaca-se a necessidade de o professor fazer conexões entre as temáticas, assim, o “[...] aluno será capaz de responder a outros problemas daquele nível” (Pedrosa et al., 2016, p. 4). Isto é, não corre o risco da “[...] informação obtida tender a ficar restrita ao mesmo, não se transferindo para outras situações [...]” (Bertoni, 2008, p. 219), como no modelo das figuras divididas.

Desenvolvido pela Universidade do Colorado, o *Fraction Matcher* é um jogo voltado para o ensino de frações, que trabalha com algumas noções básicas. Infelizmente, o software não é detalhado ao longo do texto. Os autores só mencionam que ele serve como apoio metodológico. Inclusive, essa denominação empregada é assertiva, pois remete à ideia de que a construção do número fracionário não ocorre necessariamente através desse recurso, caracterizando-o, assim, enquanto suporte para algum momento do processo de

ensino e de aprendizagem. Lembramos, ainda, que não é possível afirmar com certeza, uma vez que, devido à restrição de informação, não conhecemos o jogo.

A Análise de Erros é descrita em seguida. Elaborada por Cury (2007), que defende a necessidade do olhar crítico para o erro a fim de viabilizar o planejamento e a execução de estratégias eficientes de ensino. Afinal, o "[...] erro não significa que está tudo errado, não quer dizer que o aluno não saiba aquele conteúdo, assim como, se ele acerta, não quer dizer que domine aquele tema" (Pedrosa et al., 2016, p. 6). A Análise de Erros também possibilita que estudantes reflitam sobre e questionem suas resoluções, alcançando o resultado correto com autonomia.

O objetivo inicial do estudo foi articular duas metodologias e uma ferramenta para potencializar o ensino de frações. No entanto, percebemos que o foco está no quanto essa articulação promove a autonomia e o protagonismo estudantil. Existe um forte destaque nessa concepção, fazendo-nos questionar: tal articulação é favorável à aprendizagem de frações ou ao desenvolvimento de autonomia e protagonismo? Com essa pergunta, não queremos declarar que esses são caminhos que não se cruzam, mas enfatizar que a perspectiva adotada tangencia a temática central. A falta de um olhar mais direcionado, impediu que entendêssemos: Como é o jogo *Fraction Matcher*? Como adotar essa articulação ajudará na compreensão das Frações pelo aluno? Quais as dificuldades ela poderá atenuar?

Em contrapartida, compreendemos que os autores seguem por um bom caminho ao escolher a Sequência Fedathi, metodologia muito semelhante à proposta de Bertoni (2008).

4.4 Análise do Artigo 04

O artigo "Dez fichas e seis estudantes, com quanto ficará para cada um? Análise de uma tarefa investigativa no ensino de Frações" de Vieira e Silva (2022) traz a descrição e a análise de uma atividade executada em uma escola municipal de Blumenau (SC). Foi baseada na habilidade EF03MA09⁹ da BNCC

⁹ "Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes" (BRASIL, 2018, p. 287).

e objetiva explorar a noção parte-todo por meio do uso de materiais manipulativos para, depois, explorar o conceito e as denominações.

Optou-se pela Investigação Matemática como aporte metodológico. Ela pode ser desenvolvida em um processo que envolve três passos: 1. apresentação de uma tarefa para ser analisada pelos estudantes; 2. discussão e levantamento de conjecturas pelos estudantes em pequenos grupos, buscando encontrar uma solução viável; 3. socialização e análise das soluções obtidas em cada grupo. Ao final, a partir das soluções apresentadas, realiza-se a formalização do conteúdo estudado.

A atividade proposta foi adaptada e retirada do livro "Educação e Linguagem Matemática IV: frações e números fracionários" de Nilza Eigenheer Bertoni, ou seja, baseada na principal autora da fundamentação teórica deste trabalho. Aplicada em uma turma de 3º ano do Ensino Fundamental, os estudantes possuíam entre oito e nove anos de idade. Eles já realizavam tarefas simples que exploravam a concepção de parte de um todo.

Para iniciar, a turma se organizou em cinco grupos, quatro com seis alunos e um com quatro alunos. Dez fichas retangulares foram distribuídas para cada equipe. A missão era dividir igualmente as fichas entre todos os integrantes. Na sequência, relatar oralmente como fizeram essa divisão. Após as primeiras ideias serem expostas, não alcançaram a solução e, por isso, foi sugerido que pensassem em como dividir as fichas que sobravam. Então, começaram a perceber que elas deveriam ser cortadas! Dois grupos encontraram a resposta correta, porém com diferentes estratégias. Um deles, todavia, recortou as partes com tamanhos diferentes. Quando indagada, a equipe respondeu que todas eram iguais (por possuírem o mesmo comprimento). A professora, então, compreendeu que os integrantes não sabiam que, para serem iguais, precisariam do comprimento e da largura com o mesmo tamanho. Nesse momento, ela precisou intervir de forma acentuada e mostrar a solução.

É válido pontuar que um dos grupos distribuiu as fichas de modo que seus integrantes não ficassem com a mesma quantidade. No fim de sua apresentação, a professora questionou e, após as demais socializações, eles reavaliaram e consertaram o erro. Traços característicos da Análise de Erros de Cury (2007).

Para encerrar a atividade, houve um reforço da noção de divisão em partes iguais, de parte do todo e da noção intuitiva de fração, "[...] dizendo que quando dividimos em partes iguais estamos trabalhando com frações de um inteiro" (Vieira; Silva, 2022, p. 7).

Verificamos muitos aspectos positivos nessa proposta. Como ela é de Bertoni (2009), destacaremos, a seguir, os elementos favorecedores da construção do número fracionário à luz para reforçá-los:

A docente atua, por meio dos erros e das dificuldades que surgem, como uma verdadeira mediadora. Despertou a nossa atenção o fato dela só mostrar a solução após os estudantes terem encontrado. Configura-se, sem dúvidas, como uma metodologia que promove autonomia, determinação, protagonismo e trabalho em equipe com atribuição de tarefas, validando o que afirmamos na análise anterior: aprender sobre frações e desenvolver autonomia são trilhas que se cruzam! Nela, todas as hipóteses devem ser consideradas e analisadas pelo coletivo, o que descentraliza a figura docente e ressalta a possibilidade de aprender não exclusivamente com o professor, mas também com os pares.

As autoras destacam que

[N]essa metodologia é importante o professor sempre reforçar junto aos estudantes que todos do grupo devem ter voz e vez. Todas as possibilidades devem ser analisadas e depois, em conjunto, eles devem validar a que seja mais adequada. Pelo fato de as atividades serem desenvolvidas em grupo é importante o professor estar sempre atento ao comportamento dos estudantes, explorando que nesse tipo de trabalho devemos ouvir o que todos tem a dizer (Vieira; Silva, 2022, p. 5).

É tão verdade que Vieira e Silva (2022) consideram o ouvir uma ação fundamental, que são descritos relatos das discussões das equipes, mostrando escolhas, frustrações, opiniões, ou seja, trocas interpessoais.

Outro elemento importante: a situação-problema envolve a divisão entre números naturais com resto. Conseguimos identificar os esquemas dos alunos, que, devido à situação escolhida, existe uma predominância dos Esquemas Divisivos. No primeiro grupo, cada integrante ficou com dez partes. Já no segundo, cada um ficou com uma ficha inteira e duas partes menores.

Ainda, é pertinente ressaltar que o material manipulativo de fácil acesso (uma folha de papel) rompe com a ideia de que é preciso um recurso caro, como alguns jogos estruturados, para aprender frações.

4.5 Análise do Artigo 05

O artigo "Números Racionais nos Anos Iniciais: despertando para uma nova ideia de números" de Mandarino *et al.* (2022) é o estudo mais recente do projeto de pesquisa "Ambientes de Aprendizagem Matemática e a Docência nos Anos Iniciais e na Educação Infantil" com o objetivo de trazer à reflexão caminhos e recursos didáticos que podem favorecer a iniciação da ideia de número racional no princípio da escolarização.

Além de Behr *et al.* (1983), Skovsmose (2000) e D'Ambrósio (2019), apoia-se sobretudo nos estudos teóricos de Jean Piaget, que defende a necessidade de a criança realizar ações mentais que a levem a perceber condições essenciais na construção do conceito do número racional.

A pesquisa é qualitativa e exploratória. Quatro crianças foram investigadas em ambientes extraescolares (uma - 08 anos; uma - 07 anos; duas - 05 anos). Procuraram atividades que pudessem contemplar as habilidades referentes à iniciação do número racional em livros didáticos. Como não encontraram, criaram situações reais com materiais concretos presentes no dia a dia da criança: folhas de árvore, lápis de cor, peças de lego, palitos, pedrinhas, peças de material dourado, massinha de modelar. Onze atividades foram produzidas com foco no 2º e 3º ano do EF, vídeos foram criados e associados para completar a execução da atividade. Apenas três são descritas no artigo.

A proposta 01 é "Vamos dividir esse conjunto de folhas em duas partes iguais?" e explora o fracionamento de um conjunto discreto. A dinamizadora propõe a contagem das folhas de árvore que estão na mesa. Depois, pergunta se a criança consegue encontrar a metade de vinte, que é o total de folhas. A criança forma dois grupos, um com doze e outro com oito. É explicado que, a fim de encontrar a metade, é preciso dividir em dois grupos com a mesma quantidade de elementos. Começou, então, a distribuir as folhas uma a uma, alternando entre os grupos até se esgotarem e encontrou o resultado.

A proposta 02 é "Metade e Terça parte com barrinhas" e explora a ideia de fracionar um conjunto discreto para além da metade. Participaram duas crianças simultaneamente, uma de cinco e outra de oito anos. No primeiro momento, uma quantidade de barrinhas de um Material Dourado foi entregue. Em seguida, a de oito conta quantas estão em suas mãos. Ela erra e é sugerido que refaça a contagem. Ao acertar, a metade dessa quantidade é solicitada. A

criança, logo, separa as barrinhas em dois grupos, porém, finaliza e nota que possuem quantidades distintas. Imediatamente, retira as barrinhas em excesso de um grupo e coloca em outro. Com outra quantidade, a de cinco repete o que observou e também encontra a metade.

No segundo momento, doze barrinhas foram entregues para a criança de oito encontrar a terça parte. Ela não achou uma estratégia de solução e a dinamizadora falou o que deveria ser feito. O mesmo ocorreu com a de cinco, que usou a estratégia do exercício anterior e separou nove barrinhas em dois grupos. Também foi dito o que deveria ser feito. Relata-se que não ficou claro para a dinamizadora se a criança compreendeu a terça parte de fato, ela pede que a criança execute novamente o mesmo procedimento só que com outra quantidade, sob a justificativa de que "[...] é preciso vivenciar várias experiências desse tipo para interiorizar os princípios C e D" (Mandarino *et al.*, 2022, p. 8).

A proposta 03 é "Metades e Terças partes do contínuo" e propõe a divisão em metades e terças partes, apoiada na exploração do todo contínuo, um punhado de massinha de modelar. A criança de oito anos recebe um pouco de massa de modelar para encontrar a metade desse recurso. Ela prontamente a molda de tal forma que pareça um longo cilindro. Quando termina, parte a massa com suas mãos, originando dois pedaços. Depois, verifica se ambos estão com o mesmo tamanho ao colocar um ao lado do outro. Percebe que os dois pedaços tinham comprimentos diferentes, junta-os e repete o procedimento com êxito.

Em seguida, ela segue o procedimento de cortar a massa em três pedaços para encontrar a terça parte e já na primeira tentativa tem sucesso.

Mandarino *et al.* (2022, p. 4) começa alegando que precisaram criar situações, pois houve "[...] dificuldade de encontrar atividades de caráter investigativo voltadas à realidade [...]". Entretanto, a pretensa contextualização é limitada ao fato de usarem elementos concretos do cotidiano das crianças, como se fossem, sozinhos, suficientes para garantir a aprendizagem, problemática, esta, que levantamos na primeira análise. Esse pensamento não deve ser considerado, sobretudo quando o objetivo é a iniciação da ideia dos números racionais.

Confunde-se o significado de "mediação" com o de "prescrição". "Conte", "Encontre a metade", "Encontre a terça parte", "Divida em dois ou três grupos com a mesma quantidade". A dinamizadora falou o que deveriam fazer,

prescreveu algoritmos. A diferença foi a substituição da escrita ou do desenho geométrico pelos materiais concretos. Na verdade, as crianças não foram confrontadas, não foi gerada a necessidade de um novo número. Questionamos: por que, na segunda proposta, não sugerir uma partilha entre as duas crianças envolvidas para explorar o conceito de metade? Será que a criança de cinco anos realmente entendeu o conceito de terça parte ou decorou e repetiu o procedimento? Um aspecto mais preocupante: a aprendizagem foi confirmada porque ela conseguiu reproduzir um passo a passo.

Ainda, a utilização de expressões, como “terça parte” para crianças pequenas. Bertoni (2008) defende a língua materna ou natural nesses casos. Também não entendemos o porquê a proposta é para 2º e 3º ano do Ensino Fundamental e uma criança de cinco anos, que ainda está na Educação Infantil, participou da atividade.

Soma-se a tudo isso, não partir das três situações que Bertoni (2008) propõe, não interrelacionar números naturais e racionais; e não usar famílias das frações unitárias, nos revelando uma proposta mecanizada de ensino, embora com uso de materiais manipulativos.

4.6 Análise do Artigo 06

Assim como este estudo, “O Trabalho com Jogos frente aos desafios do ensino e da aprendizagem de Frações” de Silva *et al.* (2022) é uma pesquisa qualitativa de caráter bibliográfico que reúne quinze artigos disponíveis no *Google Acadêmico*, do período de 2016 a 2020, sobre o ensino de frações a partir dos jogos matemáticos.

Querendo responder à pergunta “Como as atividades com jogos se fazem presentes frente às problemáticas do ensino e da aprendizagem de Frações?”, Silva *et al.* (2022) objetiva descrever, analisar e discutir as propostas para o ensino de frações, focando nas que possuem a ludicidade enquanto característica.

Dentre os quinze estudos selecionados, os autores escolheram três com diferentes focos para detalhar ao longo do texto. O primeiro sobre uma prática em sala de aula, o segundo acerca de uma oficina para educadores e o terceiro é uma revisão bibliográfica. Todos mostram uma diversidade de jogos, que são evidenciados por meio de uma tabela construída por Silva *et al.* (2022).

Destacam-se Dominó de Frações; Jogo da Memória de Frações; Papa Todas de Frações; Tangram; e Baralho de Frações.

Há uma ênfase nos benefícios dos jogos para o aluno e o professor. Para o aluno, alega Silva *et al.* (2022), torna a transição das compreensões sobre os números naturais às frações mais leve, também contribui para desenvolver a atenção, a memória, a imitação, a imaginação, as áreas da personalidade, da motricidade, da inteligência, da sociabilidade e da criatividade. Capacidade de refletir, criar hipóteses e estratégias, testá-las e avaliá-las rumo à solução de um problema, tudo de maneira coletiva. Por isso, o uso de jogos traz o desenvolvimento em outras áreas, para além dos conteúdos matemáticos, à tona.

É fato que os jogos alinhados à Matemática estão em constante pesquisa na atualidade. Isso porque existe um intenso movimento de fuga do modelo tradicional de ensino e tais recursos são vislumbrados como intermédio nesse processo. Afinal, interligam a aprendizagem à brincadeira. Entretanto, para construir a concepção de número fracionário, é preciso ter cuidado em sua utilização. Pensando nos jogos trazidos por Silva *et al.* (2022), o Dominó e o Jogo da Memória de Frações objetivam a associação entre fração ou a operação com fração com as figuras geométricas divididas e pintadas, comparação, esta, bastante discutida neste estudo. A leitura quantitativa de materiais representando partes da unidade, que usam em jogos, encontra um fraco mapeamento em situações do cotidiano infantil (Bertoni, 2008).

Essa restrição às figuras geométricas dificultam a interpretação quando os desenhos são mais fidedignos à realidade; a atribuição de um significado quantitativo real às frações, conduzindo-as sempre a uma representação; a compreensão de grandezas contínuas.

O desenvolvimento que dá sequência a esses modelos, na aprendizagem usual dos números fracionários, envolve relações e operações entre eles, os quais permanecem centrados nos materiais e figuras, criando um universo próprio para a existência das frações, desvinculado da realidade. Uma segunda etapa é a da apresentação dos algoritmos, articulados, de modo rarefeito, às figuras (Bertoni, 2008, p. 220).

Jogos são opções divertidas sim, mas também, por vezes, descontextualizadas que, com a premissa da ludicidade, difundem um ensino mecânico implicitamente. Com essa perspectiva, não queremos afirmar que

todos são iguais ou que nunca devem ser usados no momento de ensinar o conteúdo em evidência e outros, porém que sejam refletidos. São múltiplos jogos para múltiplas formas de uso. Ao invés de introduzir o trabalho com as frações, ser utilizado em uma revisão por exemplo.

Observando as imagens dispostas por Silva *et al.* (2022), o Tangram parece uma ótima opção. Não apresenta seções convencionais, além de conter famílias de frações unitárias, interligando à Arte, à Geometria e à História, sendo possível contextualizar com os mosaicos.

Em suma, é indispensável que o educador estude bastante o material manipulativo com antecedência, garantindo, assim, uma atuação com intencionalidade pedagógica, afinal, não é brincar por brincar. A própria estrutura do artigo é uma vitrine de jogos, não cabe ao professor apenas escolher e aplicar, esse, inclusive, é um alerta feito pelos autores. Outras orientações são feitas, tais como diversificar os jogos para ampliar as próprias referências e explorar habilidades distintas nos estudantes, além de sugerir a confecção do recurso, trabalhando mais habilidades ainda. Fica, por fim, o convite para o professor também usar de sua criatividade e confeccionar jogos.

4.7 Análise do Artigo 07

O artigo “Tarefa Didática sobre Frações com o significado de Medida: diálogos e aproximações com as contribuições de Davydov” de Ferreira e Côco, (2022) objetiva evidenciar as contribuições da Teoria do Ensino Desenvolvimental de Vasili Davydov para a organização do trabalho pedagógico sobre Frações nos Anos Iniciais. Foi, portanto, organizada uma situação didática a fim de explorar o significado de medida das frações, no Laboratório de Educação Matemática (LEM) do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES). Participaram alunos do 5º ano de uma escola municipal de Vitória (ES).

A atividade recebeu o nome de “Reinventando a Unidade de Medida”. Essa informação já remete a uma das três situações geradoras do número fracionário citadas por Bertoni (2008), caracterizando-se como um aspecto positivo. “Os três tipos de situações - contagem estendida, divisão e medida - são situações significativas que tornam o surgimento das frações como números, útil e necessário” (Bertoni, 2008, p. 226). No dia da atividade, estavam dezoito alunos, uma professora regente e duas estagiárias que acompanhavam a turma.

Todos se acomodaram em uma grande mesa. Ferreira e Côco (2022) escrevem que há intencionalidade pedagógica até nisso, na disposição espacial dos alunos. Esse fato nos surpreendeu e nos fez pensar sobre os detalhes que impactam na avaliação no decorrer de uma proposta didática - Quero observar a ação coletiva dos alunos? Como posso mobilizá-la de forma mais evidente?

Foi planejado um momento para a ambientação, a verificação do conhecimento prévio, o ensino de duas tarefas, a resolução e o registro. A partir de uma corda, Ferreira e Côco (2022) narraram um pouco a história da invenção da unidade de medida pelos egípcios. Sugeriram, depois, a realização de medições semelhante a que ocorria no Egito Antigo. Logo, fizeram um nó no meio da corda e a distância entre uma extremidade até o nó foi considerada uma unidade de medida, denominada pela turma de “medidor de tamanho”. As crianças mediram a mesa que estavam sentadas. Também identificaram e estabeleceram relações de “igual a”, “mais que”, “menos que”, “maior que”, “menor que” em relação à unidade de medida padronizada. Essas associações formam um esquema constatado por Bertoni (2008), que é o Esquema Comparativo.

Os mediadores e autores deste trabalho iniciaram a contação de história (segundo eles, movimento lógico-histórico do conceito), que é real e, possivelmente, inédita para os estudantes, assegurando a contextualização, a interdisciplinaridade com História e a atenção deles. Em seguida, os convidam a participar daquela história ao sugestionar que façam tal qual seus personagens, o que, de certa forma, contempla a imaginação. Além dessa série de elementos que enriquecem o ato de ensinar, um objeto simples (uma corda) tem sua função ressignificada, o que amplia a visão sobre ele e concede um status de novidade à proposta. Assim, o aluno é “[...] estimulado a pensar com autonomia, apoiado nos objetos reais descritos pela situação [...]” (Bertoni, 2008, p. 221).

Afirma-se que a medição da mesa é, para Davydov, a primeira ação, pois os elementos da relação universal foram revelados. Isto é, para Bertoni (2008), essa seria a referência, o contexto favorecedor de um conhecimento-em-ato. Na sequência, a corda foi esticada e a medida padrão desenhada no quadro. Perguntaram qual número era adequado para marcar a extremidade inicial da reta que ali se formara e responderam corretamente ao falar “zero”, mas tiveram

dificuldade para marcar a extremidade final. Conseguiram após breve intervenção dos mediadores.

Eles pediram, em seguida, que a largura do armário fosse mensurada. Foi obtida, então, uma medida menor do que a estipulada. Novamente esticaram a corda e marcaram o segmento de reta encontrado. “Seria necessário encontrar uma unidade de medida intermediária que subdividisse o medidor e com a qual pudéssemos medir aquele comprimento” (Ferreira; Côco, 2022, p. 5). A expressão “seria necessário” foi primordial, pois um novo número surge aí. Os naturais não são suficientes! “Começa a emergir um objeto com característica quantificadora essencial, portanto, um número” (Bertoni, 2008, p. 223).

As crianças não souberam responder prontamente. A intervenção se deu por solicitar a marcação de um ponto médio e efetuar “dobras” a partir dele, indagando quanto representaria aquelas partes do segmento. A representação simbólica é apresentada após as crianças entenderem o quê e para quê está sendo representado, configurando-se um verdadeiro ensino com significado.

“Desta forma, ao elevarmos ao modelo gráfico o experimento objetal (a medida da largura do armário), a relação universal do conceito de fração, a unidade de medida básica e a unidade de medida intermediária foram reveladas” (Ferreira; Côco, 2022, p. 5). Essa é a segunda ação de Davydov, a modelação na forma objetal, gráfica e literal da relação universal, conforme Ferreira e Côco (2022).

Já a terceira ação, que é a transformação dessa relação encontrada permitindo o estudo de suas propriedades gerais, foi relacionada à avaliação da compreensão dos alunos, ao apagarem as marcações na reta e realizarem subdivisões simétricas a partir do ponto médio.

A resolução e o registro, última parte do planejamento também vinculada à avaliação da aprendizagem das relações e propriedades, ocorreram através de uma tarefa impressa com questões que não possuíam apenas frações unitárias e denominadores múltiplos de dois. Todavia, as soluções se relacionavam com o que foi explorado (Ferreira; Côco, 2022). Ainda que tenham justificado o uso não exclusivo das frações unitárias nessa parte, tê-las mencionado revela o saber e a preocupação de utilizá-las nos Anos Iniciais. A quarta ação de estudo consiste na dedução e na construção de um determinado sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas em um procedimento

único (Davydov, 1988 apud Ferreira; Côco, 2022). Essa concepção de um procedimento único que pode ser usado para várias situações nos lembrou dos conceitos-em-ato e teoremas-em-ato advindos dos esquemas.

Os autores concluem que a configuração da aula somada à estrutura do LEM permitiu o interesse e o engajamento dos estudantes, além, é claro, de muito aprendizado sobre frações.

Gostaríamos de saber o desempenho dos alunos na tarefa impressa, mas os próprios pesquisadores relatam da posterioridade dessa análise. Ainda evidenciamos que se as ideias de Davydov estivessem melhor explicadas antes da descrição da atividade facilitaria o entendimento do texto. Confessamos, enfim, o quão difícil foi resumir esse trabalho. Cada parte descrita é rica em significado e não pôde ser desconsiderada. Desse modo, não ousamos ao declarar que não há melhor proposta para findarmos a seção de análise de artigos.

Como síntese de nossa análise, observamos que os relatos de práticas didáticas são escassos e, geralmente, com autoria de quem está na academia. Infelizmente, existe uma ausência de pedagogos atuantes nos Anos Iniciais que encarem a sala de aula como objeto de estudo e publiquem o que por ali passara em artigos.

Relativo à estruturação das publicações, a quantidade média de páginas é de 10 a 12. As fundamentações teóricas são reduzidas, o que, por vezes, atrapalha a compreensão, porém há diálogo com teóricos notáveis como Helena Cury, Jean Piaget, Nilza Bertoni, Vasili Davydov, Yves Chevallard, etc. No geral, os autores começam relatando a grande dificuldade de alunos e professores que existe para ensinar e aprender Frações.

Já em relação ao conteúdo, verifica-se propostas de outros teóricos semelhantes à de Bertoni (2008); predominância do conceito de Fração enquanto parte-todo; preocupação com a contextualização do ensino; sugestão/utilização de materiais manipulativos, apenas um recomenda o uso de tecnologia digital; associação do uso dos materiais à contextualização.

Identificamos, em poucos artigos, uma variedade de estratégias e recursos, que converge em três modelos de proposta: 1) a baseada na repetição e memorização de regras operatórias, além da utilização de figuras geométricas para solucionar os problemas matemáticos, caracterizando o modelo tradicional

de ensino, representado pelo segundo artigo; 2) a que, por fazer uso de algum material manipulativo, é reconhecida por empregar significado à intervenção pedagógica. Todavia, na realidade, difunde um ensino operatório de forma implícita. É constatada no primeiro, quinto e sexto artigos; 3) a que promove a aprendizagem por meio de práticas adequadas à realidade dos alunos, colocando-os na posição de protagonistas ao valorizar suas representações e permitir compartilhá-las. O professor é mediador desse processo, agindo a partir das dificuldades, das dúvidas, dos erros de seus estudantes, sem entregar-lhes respostas prontas, como no terceiro, quarto e sétimo artigo.

A seguir, apresentaremos nossas considerações finais e algumas sínteses possíveis.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo de analisar o Ensino de Frações nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental foi traçado para responder a seguinte indagação: à luz da literatura científica, como, nos últimos anos, o ensino de Frações é desenvolvido nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental? Almejando respondê-la, procuramos artigos sobre Frações nessa etapa escolar nos anais de três edições do EPBEM, ENEM e SIPEM, publicados de 2012 a 2023. Na sequência, organizamos em categorias: relatos de práticas em sala de aula; propostas baseadas em revisão bibliográfica; discussões teóricas sobre o conceito; estudos da compreensão dos alunos ou professores acerca do assunto; e análises de livro didático. Consideramos apenas os trabalhos que retratavam uma intervenção pedagógica, seja executada ou planejada, totalizando sete. Analisamos, enfim, cada um com base em Bertoni (2008), indicando estratégias e recursos para ensinar Frações.

O modelo tradicional de ensinar Matemática é baseado na repetição e na memorização de algoritmos. Não existe, no geral, uma explicação do porquê ou para que servem. O ensino se torna, portanto, abstrato, desinteressante e descontextualizado, sendo uma das principais causas da estigmatização e da defasagem que circunda essa área do conhecimento. Reconhecendo esse cenário, tanto nos documentos curriculares quanto nos artigos estudados, identificamos uma preocupação intensa no sentido de ensinar Matemática de forma significativa à vida, sob a justificativa de sua utilização em situações cotidianas com mais naturalidade. A expressão “Letramento Matemático” vem à tona enquanto objetivo desse ensino.

Nessa pretensão, observamos que os materiais manipulativos são propostos recorrentemente (seis dos setes artigos relatam, pelo menos, um tipo) com o intuito de assegurar a contextualização da intervenção pedagógica. Por vezes, menciona-se que o recurso é proveniente do cotidiano da turma para enfatizar essa ideia. Entretanto, constatamos que a incorporação de um recurso nas aulas garantirá a sua dinamicidade, mas não obrigatoriamente a sua contextualização.

Segundo o dicionário *on-line* Michaelis, “Dinamizar” é dar caráter dinâmico e “Contextualizar” é dotar de contexto. Contextualizar deve ser uma

ação pétrea em qualquer situação didática, já dinamizar não. Todavia, a coexistência de ambas, certamente, enriquecerá o processo de aprendizagem. O primeiro, o quinto e o sexto artigos se voltam mais para uma dinamização, o que faz todo sentido a responsável por desenvolver as ações do quinto ser intitulada de “dinamizadora”.

Concluimos que não se trata de qual material é¹⁰, porém de como ele é incorporado. Mesmo que seja óbvio, essa percepção nos lembrou do quanto o trabalho do professor é indispensável, afinal, o **como** é de sua responsabilidade. Tal profissional necessita selecionar e estudar o material (com foco na intencionalidade pedagógica), conhecer a realidade de sua turma, saber o conteúdo e como ensiná-lo a fim de elaborar um bom planejamento. No entanto, ele só irá desempenhar essas funções com excelência se tiver qualificação profissional.

Logo, reafirmamos a necessidade de uma formação contínua. Almejamos por um curso de graduação em Pedagogia que rompa com bloqueios e preconceitos arraigados durante a escolarização, assim como mais oportunidades de aprender Matemática (pelo menos em atividades extras, como projetos de iniciação científica). Além disso, programas de incentivo à continuidade dos estudos, que tragam pedagogos, sobretudo aqueles com anos de atuação, de volta à universidade. Um ótimo exemplo é o curso de formação voltado para pedagogos da Educação Infantil da Rede Municipal de João Pessoa, ofertado pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB) e coordenado pela Profa. Dra. Nádia Jane de Sousa. Nele, os profissionais podem discutir temáticas relacionadas à Educação Infantil, refletir acerca de suas práticas e melhorá-las.

Desse modo, a transposição de conhecimentos entre a universidade e a escola e, conseqüentemente, a transição entre as propostas constatadas nos artigos, das que promovem um ensino mecânico até as que possibilitam a construção do número fracionário, serão potencializadas.

A preocupação em contextualizar, a variedade de estratégias e recursos e a coexistência de três modelos didáticos, encontradas na literatura científica

¹⁰ Vale ressaltar que, no quarto e no sétimo artigo, os estudantes manusearam corda e papel, objetos simples e de fácil acesso, que auxiliaram na construção do número fracionário por serem utilizados com assertividade.

da atualidade, apontam para um caminho que enche o coração de esperança: a melhoria do ensino. A “[...] melhoria do ensino de Matemática envolve, assim, um processo de diversificação metodológica, porém tendo uma coerência [...]” (D’Ambrósio, 1989, p. 6).

Acusada no início de nossa pesquisa e confirmada em seu fim, o modo de ensinar, a atuação docente, é o que faz diferença nesse caminhar. O nosso anseio é que o ensino deixe de ser uma causa da defasagem e se torne fonte de aprendizagem de uma Matemática para além de, simplesmente, aprendê-la. No mais, sentimos uma imensa alegria em poder afirmar: estamos no caminho.

Além desses resultados, por meio da pesquisa, entendi que o meu aprendizado sobre Frações é limitado. Nos artigos lidos, muitos, diante dos problemas matemáticos, não colocavam as respostas, sendo um convite à resolução para o leitor. Peguei-me, na maioria das vezes, recorrendo aos retângulos divididos para conseguir resolver. Embora tenha estudado bastante sobre as Frações, preciso, ainda, desconstruir muitas concepções operatórias para conseguir enxergá-las como números e, assim, contribuir para que meus alunos as enxerguem também.

6. REFERÊNCIAS

Agência Brasil. **Pisa**: menos de 50% dos alunos sabem o básico em matemática e ciências. Agência Brasil, 2023. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2023-12/menos-de%2050%25-dos-alunos-sabem-o-b%C3%A1sico-em-matem%C3%A1tica-e-ci%C3%A2ncias>. Acesso em: 10 de fev. de 2024.

AMORIM, M. É.; ETCHEVERRIA, T. C.; OLIVEIRA, M. R. S. Fração com o Significado de Operador Multiplicativo: aprendizagem e ensino. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, [S. l.], v. 12, n. 2, p. 199-206, 2019.

ARAÚJO, W. A. O uso do Frac-Soma 235 no processo de ensino e aprendizagem de Frações para o Ensino Fundamental. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013, p. 01-10.

BEHR, M. J. *et al.* **Rational Number Concepts in Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. Lesh, R. e Landau, M. (ed.) New York: Academic Press. 1983.

BERTONI, N. E. A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionário. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 209-237, 2008.

BERTONI, N. E. **Educação e Linguagem Matemática IV**: frações e números fracionários. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Ministério da Educação: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Ministério da Educação: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Relatório de Resultados do SAEB 2011**. Brasília, 2023.

CAVALCANTI, E. M. S.; GUIMARÃES, G. L. Os significados de Fração em livros didáticos das Séries iniciais. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2008, Recife. **Anais [...]**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2008. p. 01-12.

CAVALCANTI, J.; SANTOS, M. A compreensão de professores das Séries Iniciais do Ensino Fundamental sobre os diferentes significados das Frações: o caso do município de Tupanatinga. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2006, Recife. **Anais [...]**. Recife:

Programa de Pós-Graduação em Educação - Centro de Educação - Universidade Federal de Pernambuco, 2006, p. 01-14.

CONTEXTUALIZAR. In: Michaelis. Disponível em: <<https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/contextualizar%20/>>. Acesso em: 10 de fev. 2024.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**, Brasília, v. 2, n. 2, p. 15-19, 1989.

DINAMIZAR. In: Michaelis. Disponível em: <<https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/DINAMIZAR/>>. Acesso em: 10 de fev. 2024.

FERREIRA, E. L.; CÔCO, D. Tarefa Didática sobre Frações com o significado de Medida: diálogos e aproximações com as contribuições de Davydov. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2022, Edição *On-line*. **Anais** [...]. Recife: Even3 Editora, 2022, p. 01-08.

GÜNTHER, H. Pesquisa Qualitativa Versus Pesquisa Quantitativa: esta é a questão? **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, Brasília, v. 22, n. 2, p. 201-210, 2006.

IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. **Matemática**. São Paulo: Scipione, 1997.

LAGOA, Ana. Por que as crianças acham difícil entender frações. *Nova Escola*, outubro/1992, pág. 46-49.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre Frações, quando tentamos lhes ensinar Frações. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 01-22, 2008.

LORENZATO, S. **Para Aprender Matemática**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

MANDARINO, S. P. F. *et al.* Número Racionais nos Anos Iniciais – despertando para uma nova ideia de números. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2022, Edição *On-line*. **Anais** [...]. Recife: Even3 Editora, 2022, p. 01-11.

MORO, M.L.F; STAREPRAVO, A. R. As crianças e suas notações na solução de problemas de multiplicação. In: MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C. (org.). **Desenhos, Palavras e Números: as marcas da matemática na escola**. Curitiba: Editora UFPR, 2005. p. 107-142.

MOURA, L. O. G. **O Discreto e o Contínuo no Ensino de Matemática**. Disponível em: <https://www.nilsonjosemachado.net/lca15.pdf>. Acesso em: 10 de fev. de 2024.

NETO, E. S. G; SANTOS, R. T. Dificuldades de Aprendizagem Matemática: a influência da formação do professor e as consequências dessa formação nos estudantes. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 9., 2023, João Pessoa. **Anais** [...]. João Pessoa: Editora Realize, 2023, p. 01-14.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. S. L. Causas das Dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. **Revista Principia**, João Pessoa, v. 1, n. 38, p. 105-119, 2018.

PARAÍBA. **Proposta Curricular do Estado da Paraíba**. Secretaria de Estado da Educação da Paraíba, 2006.

PEDROSA, V. N. M. Sequência Fedathi e Análise de Erros contribuindo para o Ensino de Frações atrelado ao jogo *Fraction Matcher*. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]** São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016, p. 01-10.

PONTES, E. A. S. Os Números Naturais no Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática através do lúdico. **Diversitas Journal**, [S. l.], v. 2, n. 1, p. 160-170, 2017.

SÁNCHEZ, J. N. G. **Dificuldades de aprendizagem e intervenção psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SILVA, D. R. R; SALES, A. Prática didática do professor do 5º ano: um estudo sobre o ensino de adições de Frações em uma escola municipal de Campo Grande, MS. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016, p. 01-12.

SILVA, R. R. *et al.* O Trabalho com Jogos frente aos desafios do Ensino e da Aprendizagem de Frações. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2022, Edição *On-line*. **Anais [...]**. Recife: Even3 Editora, 2022, p. 01-11.

SOUSA, C. P. *et al.* Dificuldades recorrentes dos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental em Matemática. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 23, n. 53, p. 198-221, 2012.

TAQUETE, S. R.; BORGES, L. **Pesquisa Qualitativa para Todos**. Petrópolis: Vozes, 2020.

VERGNAUD, G. Au fon de l'action, la conceptualisation. In : BARBIER, J.M. (Dir.). **Savoirs théoriques et savoirs d'action**. Paris: PUF, 1996. p. 275-292.

VIEIRA, R. P.; SILVA, V. C. Dez fichas e seis estudantes, com quanto ficará para cada um? Análise de uma tarefa investigativa no Ensino de Frações. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2022, Edição *On-line*. **Anais [...]**. Recife: Even3 Editora, 2022, p. 01-08.

ZACARIAS, S. M. Z. **A Matemática e o Fracasso Escolar: medo, mito ou dificuldade**. 2008. 112p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Oeste Paulista. Presidente Prudente, 2008.

Sites dos Anais

ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2018, Cajazeiras. **Anais** [...]. Cajazeiras: Editora Realize, 2018. Disponível em: <<https://editorarealize.com.br/edicao/detalhes/anais-x-epbem-e-v-ecmat>>. Acesso em: 10 de fev. de 2024.

ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2021, Edição *On-line*. **Anais** [...]. Tema: Interfaces entre a educação básica e o ensino superior na formação docente. Disponível em: <<https://www.even3.com.br/anais/xiepbem/>>. Acesso em: 10 de fev. de 2024.

ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2023, João Pessoa. **Anais** [...]. João Pessoa: Even3 Editora, 2023. Tema: Desenvolvimento profissional e prática educativa do professor que ensina matemática: olhares, tensões e evidências. Disponível em: <<https://www.even3.com.br/anais/xiiepbem/>>. Acesso em: 10 de fev. de 2024.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013. Tema: Educação Matemática: Retrospectiva e Perspectivas. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/trabalhos_1.html>. Acesso em: 10 de fev. de 2024.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Tema: A Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. Disponível em: <<https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/comunicacoes-cientificas-1.html>>. Acesso em: 10 de fev. de 2024.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2022, Edição *On-line*. **Anais** [...]. Tema: Educação Matemática, Escola e Docência: o que nos trouxe Ubiratan D'Ambrósio. Disponível em: <<https://www.even3.com.br/anais/xivenem2022/>>. Acesso em: 10 de fev. de 2024.

SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Petrópolis. **Anais** [...]. Petrópolis: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2012. Tema: Questões Epistemológicas, Teóricas e Práticas da Pesquisa em Educação Matemática. Disponível em: <https://sbembrasil.org.br/files/v_sipem/?page=publications&subpage=search&language=br>. Acesso em: 10 de fev. de 2024.

SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2018, Foz do Iguaçu. **Anais** [...]. Foz do Iguaçu: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. Tema: Justiça Social e Educação Matemática. Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/schedConf/presentations>. Acesso em: 10 de fev. de 2024.

SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2021, Edição *On-line*. **Anais** [...]. Tema: Educação Matemática, pandemia, pós-pandemia e a atualidade: implicações na pesquisa e nas práticas de ensinar e aprender. Disponível em: <<https://www.even3.com.br/anais/viiisipemvs2021/>>. Acesso em: 10 de fev. de 2024.