

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre certas relações entre classes de operadores lineares e multilineares em espaços de Banach

Antonio Araújo do Nascimento

João Pessoa – PB
Dezembro de 2023

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre certas relações entre classes de operadores lineares e multilineares em espaços de Banach

por

Antonio Araújo do Nascimento ¹

sob a orientação do

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

João Pessoa – PB
Dezembro de 2023

¹O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (Capes) - Código de Financiamento 001.

Sobre certas relações entre classes de operadores lineares e multilineares em espaços de Banach

por

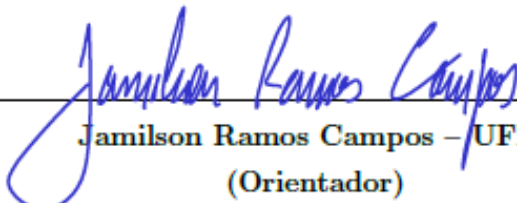
Antonio Araújo do Nascimento

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

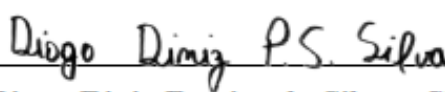
Área de Concentração: Análise

Aprovada em 19 de dezembro de 2023.

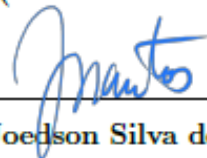
Banca Examinadora:



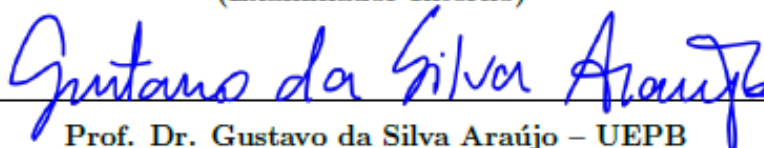
Jamilson Ramos Campos – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva – UFCG
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo – UEPB
(Examinador Externo)

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N244s Nascimento, Antonio Araújo do.

Sobre certas relações entre classes de operadores lineares e multilineares em espaços de Banach / Antonio Araújo do Nascimento. - João Pessoa, 2023.
75 f.

Orientação: Jamilson Ramos Campos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Espaços de Banach. 2. Teoria de operadores. 3. Operadores somantes. 4. Classes de sequências. 5. Normas tensoriais. I. Campos, Jamilson Ramos. II. Título.

UFPB/BC

CDU 517.982.22(043)

*Dedico este trabalho ao meu
filho Israel Nascimento e a
minha esposa Milena Nasci-
mento.*

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao DEUS de Abraão, Isaac e Israel por seu infinito amor e misericórdia pela minha vida.

Ao meu filho Israel e minha esposa Milena por todo carinho, sorrisos, beijos e abraços que sempre me deram forças para continuar lutando em buscas dos nossos objetivos.

Aos meus pais, Erinaldo Moura e Edilene Nascimento, e minha irmã Erielem Nascimento, que não me abandonaram mesmo eu tendo vivido diversos momentos infelizes durante o mestrado. Pelas diversas ligações que, mesmo distante, aproximava-me mais da minha terra natal.

A minha sogra, meu sogro e cunhada, Maria das Dores, José Macedo e Mikaely Cruz, meu muito obrigado por sempre poder contar com vocês. Agradeço a família da minha esposa, que é um refúgio para minha alma em dias tristes.

Meus agradecimentos aos meus amigos do mestrado, em especial a minha turma, por me ajudarem durante a pressão das disciplinas, pelos fortes laços de amizade que criamos e pelos cafezinhos que tomamos na copa.

Ao meu orientador, Jamilson Campos, que desde a graduação tem sido um grande companheiro no meu crescimento acadêmico, por seus ensinamentos e puxões de orelhas, pela sua amizade e pelo seu exemplo de luta e perseverança; meus agradecimentos.

Aos meus professores e amigos da graduação, Agnes Liliane, Cristiane Ângelo, Cristiane Souza, Alissá Grymuza, Janaina Botelho, Claudilene Gomes, Hélio Pires, José Laudelino, Cibelle de Fátima, Surama Ismael, Rafael Brito, Adriana Moura, Verônica de Oliveira, Arthur dos Santos, Milena Ferreira, Rodrigo Klynsmann e tantos outros, também ficam registrados meus agradecimentos.

Agradeço ao corpo docente do PGMat/UFPB, em especial aos professores Ottoniel Nogueira, Jacqueline Arancibia, Flank Bezerra, Allan Freitas, Weiller Barboza e Fágner Araruna pelas contribuições a minha formação nas disciplinas cursadas durante o mestrado.

Aos professores Joedson Santos, Diogo Diniz e Gustavo Araújo, membros da banca examinadora, por se disponibilizarem a participar da banca e contribuir para a minha dissertação.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar certas relações entre as teorias linear e multilinear de operadores em espaços de Banach, estabelecendo resultados a partir destas relações. Primeiramente, apresentamos uma classe de operadores lineares mid somantes e uma relação um tanto conveniente entre estes operadores e certas classes de operadores multilineares múltiplo somantes. Como consequência, estabelecemos resultados de inclusão e coincidência para a classe de operadores lineares apresentada. Em seguida apresentamos um resultado, de certa forma, na direção contrária do anterior, com o qual é possível caracterizar classes de aplicações n -lineares por meio da continuidade de operadores $(n - 1)$ -lineares. Neste caso, apresentamos aplicações do resultado para operadores bilineares.

Palavras-chave: Espaços de Banach, teoria de operadores, operadores somantes, classes de sequências, normas tensoriais.

Abstract

The goal of this work is to present certain relations between the linear and multilinear theories of operators in Banach spaces, establishing results based on these relations. First, we present a class of mid-summing linear operators and a somewhat convenient relationship between these operators and certain classes of multiple summing multilinear operators. As a consequence, we establish inclusions and coincidence results for the presented class of linear operators. Next, we present a result, in a certain way, in the opposite direction of the previous one, with which it is possible to characterize classes of n -linear applications through the continuity of $(n - 1)$ -linear operators. In this case we present applications of the result to bilinear operators.

Keywords: Banach spaces, operator theory, summing operators, sequence classes, tensor norms.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Espaços de sequências	3
1.2 Operadores lineares somantes	6
1.3 Operadores multilineares somantes	8
1.4 Classes de sequências	12
1.5 Ideais de operadores	15
1.6 O produto tensorial entre espaços de Banach	18
2 Operadores mid somantes	27
2.1 O espaço das sequências mid (q, p) -somáveis	27
2.2 Operadores mid somantes	39
2.3 Uma relação entre as teorias linear e multilinear	44
3 Normas tensoriais traçadas e operadores múltiplo somantes	48
3.1 Considerações iniciais	48
3.2 Operadores multilineares (γ, α, p) -somantes	50
3.3 Uma relação entre “níveis” de linearidade	51
3.4 Aplicações: operadores bilineares	58
Referências Bibliográficas	65

Notações

Abaixo, listamos algumas das notações utilizadas no decorrer deste trabalho.

- $\mathbb{K}$ denota o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos;
- As letras $E, E_1, \dots, E_n$ e F serão usadas para representar espaços vetoriais normados;
- B_E denota a bola unitária fechada de um espaço normado E ;
- E' denota o dual topológico de um espaço normado E ;
- $E^\#$ denota o dual algébrico de um espaço vetorial E ;
- $(x_j)_{j=k}^\infty$ denota a sequência $(0, 0, \dots, 0, x_k, x_{k+1}, \dots)$;
- $(x_j)_{j=1}^k$ denota a sequência $(x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$;
- e_k denota a sequência cujo k -ésimo termo é 1 e os demais termos são nulos;
- $x \cdot e_k$ denota a sequência cujo k -ésimo termo é x e os demais termos são nulos;
- $E \xhookrightarrow{1} F$ significa que $E \subseteq F$ e $\|x\|_F \leq \|x\|_E$ para todo $x \in E$;
- $E \stackrel{1}{=} F$ denota que E e F são isomorfos isometricamente;
- $L(E; F)$ denota o espaço de operadores lineares de E em F ;
- $\mathcal{L}(E; F)$ denota o espaço de operadores lineares contínuos de E em F ;
- $B(E, F; G)$ denota o espaço das aplicações bilineares de $E \times F$ em G ;
- $B(E, F)$ denota o espaço das formas bilineares de $E \times F$ em $\mathbb{K}$;

- $\Pi_{p,q}(E; F)$ denota o espaço dos operadores lineares de E em F que são absolutamente (p, q) -somantes;
- $L(E_1, \dots, E_n; F)$ denota o espaço dos operadores n -lineares de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F ;
- $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ denota o espaço de todos os operadores n -lineares contínuos de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F ;
- $\Pi_{p;q_1, \dots, q_n}(E_1, \dots, E_n; F)$ o espaço de todos os operadores n -lineares absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somantes de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F ;
- $\Pi_{q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n}^n(E_1, \dots, E_n; F)$ o espaço de todos os operadores n -lineares múltiplo $(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ -somantes de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F ;
- $\mathcal{F}(E_1, \dots, E_n; F)$ denota o espaço de todos os operadores do tipo finito de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F .
- BAN denota a classe de todos os espaços de Banach;
- NORM denota a classe de todos os espaços normados;
- FIN denota a classe de todos os espaços normados de dimensão finita;

Introdução

Em Teoria de Ideais de Operadores em Espaços de Banach, classes importantes de operadores lineares, bastante comuns em Análise Funcional, são definidos ou caracterizados por transformação de sequências a valores vetoriais. Um dos exemplos mais célebres de uma tal classe são os operadores absolutamente p -somantes, que transformam sequências fracamente p -somáveis em fortemente p -somáveis (veja [11, 12] e [16], por exemplo). Outro exemplo dessa teoria é a classe dos operadores Cohen fortemente p -somantes que transformam sequências fracamente p -somáveis em Cohen fortemente p -somáveis (ver [8, 10]). A título de informação, essa última classe caracteriza o adjunto de aplicações p -somantes.

A teoria de produtos tensoriais em espaços de Banach surge, acredita-se, em meados de 1930, nos trabalhos de Murray e John von Neumann, lidando com espaços de Hilbert. Um estudo mais sistemático é levado adiante por Schatten e culmina com aplicações a ideais de operadores em espaços de Hilbert. Com o célebre trabalho *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* [13], Grothendieck revoluciona a Análise Funcional e a Teoria de Operadores e dos Espaços de Banach demonstrando as enormes possibilidades de usos do produto tensorial. Todavia, esse trabalho foi considerado de difícil compreensão na época e somente com os trabalhos de Lindenstrauss e Pełczyński, em especial [15], que as ideias de Grothendieck sobre teoria de produtos tensoriais ganha mais atenção. Recomendamos os livros [11] e [19] para os interessados em estudar essa rica teoria e suas inúmeras aplicações, em particular à Teoria de Operadores.

Nos anos 1960, Pietsch desenvolve estudos sistemáticos do que hoje chamamos de Teoria de Ideais de Operadores. O interessante é que ele e sua escola o fizeram de uma maneira clássica, eficaz e simples, quando comparada ao estudo com base em produtos tensoriais. Como produto de seus estudos, Pietsch lança o seu livro [17], que se traduz numa verdadeira enciclopédia sobre ideais de operadores.

Com o movimento de generalização da Teoria de Operadores Lineares para aplicações não-lineares (veja [1, 2, 3, 4, 6] e [17] para exemplos disso), emerge um esforço em estabelecer resultados para ideais de aplicações multilineares, generalizando e avançando

conceitos e resultados existentes para os ideais de operadores lineares. Todavia, mesmo mostrando-se extremamente útil, a Teoria de Produtos Tensoriais não tem sido utilizada com frequência, como comentado nas introduções de [11, 20], muito pela natureza um tanto difícil de se entender e trabalhar a teoria, num primeiro momento.

A ideia e objetivo geral dessa dissertação é trabalhar a Teoria de Operadores em Espaços de Banach sob os dois pontos de vista acima comentados. Mais especificamente, vamos estudar trabalhos que lidam com a Teoria de Operadores Lineares e não-Lineares por meio de desigualdades de normas vetoriais (ao estilo de Pietsch) e também por produtos tensoriais. Para isso escolhemos dois trabalhos interessantes que incidem sobre nosso tema e estabelecem certas relações entre a teoria linear e não-linear de operadores. Os parágrafos abaixo esclarecem e detalham o nosso trabalho.

No artigo [14], A. Karn e D. Sinha introduzem e estudam os conceitos de conjuntos p -limitado, de p -compacidade e p -compacidade fraca. Estes conceitos são então trabalhados sob vários aspectos, como por exemplo sua relação com a Teoria de Operadores e a Propriedade de Dunford-Pettis. Em particular, esse estudo dá origem ao espaço das sequências *mid p -somáveis* que foi sujeito a uma investigação complementar e mais detalhada em [5]. Neste último, os autores trabalham sob o ponto de vista da teoria abstrata de Classes de Sequências, definida e estudada em [4], que generaliza classes de operadores caracterizados por transformações de sequências vetoriais, e estudam as chamadas Classes de Operadores Mid Somantes.

Tendo em vista nosso objetivo de relacionar a Teoria de Operadores Somantes Lineares e não-Lineares, a partir do trabalho [9], que generaliza o espaço das sequências *mid p -somáveis*, vamos apresentar um resultado que relaciona a Teoria Linear de Operadores Mid Somantes à Teoria Multilinear de Aplicações Absolutamente Somantes. Esse estudo, apresentado no Capítulo 2, nos leva a resultados de inclusão e coincidência apresentados em [9], mas que não se fazem presentes nos trabalhos anteriores acima citados.

Já no trabalho [20], usando uma abordagem de norma tensorial, os autores mostram que algumas classes de operadores somantes são caracterizadas por meio de um procedimento de “redução de ordem” para aplicações multilineares somantes. Em particular, estabelece uma relação entre os operadores n -lineares múltiplos somantes pela continuidade de operadores $(n - 1)$ -lineares. Este trabalho, seus resultados e consequências serão objetos de estudo do nosso Capítulo 3.

Mas antes dos estudos que faremos, citados nos dois parágrafos acima, apresentaremos em nosso Capítulo 1 um compilado de definições, resultados e exemplos que são indispensáveis ao suporte e entendimento da teoria objeto de estudo desta dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo apresentamos um breve resumo e resultados essenciais que nos servirá de base para os capítulos posteriores. Apresentamos o necessário sobre espaços de sequências, operadores lineares e multilineares, bem como à teoria de classes de sequências, ideais de operadores e produto tensorial. As referências utilizadas neste capítulo foram [1, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 14, 16, 17, 18] e [19]. Além disso, é importante mencionar que os resultados deste capítulo serão apresentados de maneira informal e sem demonstrações. Todavia, apontaremos as referências de resultados vistos como “muito importantes” no desenvolvimento deste trabalho. As demais demonstrações, de resultados não referenciados, em geral são resultados bem conhecidos e deixamos a cargo do leitor buscar/pesquisar nas referências supracitadas.

1.1 Espaços de sequências

Começamos apresentando as definições de alguns espaços de sequências à valores vetoriais e enunciamos algumas propriedades pertinentes e relações entre esses espaços.

No que segue, vamos considerar sempre E um espaço de Banach e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$.

Dois espaços de sequências bastante conhecidos na literatura de Análise Funcional são os espaços das sequências limitadas e p -somáveis de $\mathbb{K}$. Trataremos desses espaços onde as sequências estão num espaço de Banach E que não necessariamente é o corpo $\mathbb{K}$. O primeiro deles, o espaço das *sequências limitadas* em E , é definido por

$$\ell_\infty(E) = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : \sup_j \|x_j\| < \infty \right\}$$

e o segundo, o espaço das *sequências fortemente p -somáveis* (ou simplesmente p -

somáveis) em E , por

$$\ell_p(E) = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : \sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < \infty \right\}.$$

Esses conjuntos, com as operações usuais de seqüências, são espaços vetoriais assim como todos os demais que serão apresentados nesta seção.

Uma norma para o espaço das seqüências limitadas em E , tornando-o portanto normado, é dado pela função $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty(E) \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|.$$

É bem conhecido que com essa norma $\ell_\infty(E)$ é um espaço de Banach, já que estamos sempre considerando E um espaço de Banach. As mesmas considerações podem ser feitas para $\ell_p(E)$ com a norma $\|\cdot\| : \ell_p(E) \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Outro espaço bem comum em nosso contexto é o espaço das seqüências fracamente p -somáveis. Dizemos que uma seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é *fracamente p -somável* quando

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p < \infty, \quad \forall \varphi \in E'.$$

O espaço dessas seqüências é denotado por

$$\ell_p^w(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : \sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p < \infty, \forall \varphi \in E' \right\}$$

e a expressão $\|\cdot\|_{w,p} : \ell_p^w(E) \rightarrow [0, \infty)$ que a cada seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$ associa o número real não-negativo

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma completa em $\ell_p^w(E)$ para E espaço de Banach.

De resultados básicos de Análise Funcional, sabemos que um subespaço vetorial X de um espaço de Banach E é completo se, e somente se, X for fechado em E . Um

exemplo de uma aplicação, útil ao nosso contexto, desse resultado é: o espaço

$$\ell_p^u(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E) : \lim_k \|(x_j)_{j=k}^\infty\|_{w,p} = 0 \right\},$$

chamado de espaço das *sequências incondicionalmente p -somáveis* em E , é um subespaço fechado de $\ell_p^w(E)$ com a norma $\|\cdot\|_{w,p}$. Outro exemplo é o subespaço $c_0(E)$ de $\ell_\infty(E)$, chamado de espaço das sequências nulas, dado por

$$c_0(E) := \{(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E) : \|x_j\|_E \rightarrow 0\}.$$

Já o espaço das sequências *eventualmente nulas*

$$c_{00}(E) := \{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : \exists j_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_j = 0, \forall j > j_0\},$$

que é denso tanto em $\ell_p(E)$ com a norma $\|\cdot\|_p$ quanto em $c_0(E)$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$, não é completo por não ser fechado em $\ell_\infty(E)$.

O último espaço apresentado nesta seção é o espaço das sequências *mid p -somáveis*, introduzido no trabalho [14]. As sequências $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E que satisfazem

$$((\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty)_{n=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p), \quad \forall (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$$

são chamadas de *mid p -somáveis*. Em símbolos denotamos o espaço formado por estas sequências por

$$\ell_p^{\text{mid}}(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p < \infty, \quad \forall (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E') \right\}.$$

A função $\|\cdot\|_{p,\text{mid}} : \ell_p^{\text{mid}}(E) \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ que o torna um espaço de Banach.

Finalizando a seção vamos exibir algumas propriedades e relações entre os espaços apresentados:

- É imediato das definições que $\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^u(E) \subseteq \ell_p^w(E)$.
- Se $1 \leq p \leq q < \infty$, vale $\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_q(E)$ e $\ell_p^w(E) \xhookrightarrow{1} \ell_q^w(E)$ (ver [12, Chapter 1]).

- A igualdade $\ell_p(E) = \ell_p^w(E)$ só ocorre quando E tem dimensão finita (Teorema de Dvoretzky-Rogers [12, Theorem 2.18]).

- $c_{00}(E) \subseteq \ell_p(E) \xrightarrow{1} \ell_p^{\text{mid}}(E) \xrightarrow{1} \ell_p^w(E) \xrightarrow{1} \ell_\infty(E)$ (ver [5]).

- Os espaços $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ e $\ell_p^u(E)$ são incomparáveis por inclusões (ver [5, Example 1.7]).

1.2 Operadores lineares somantes

Na seção anterior, vimos que é sempre verdade a inclusão $\ell_p(E) \subseteq \ell_p^w(E)$, seja qual for o espaço de Banach E , e que a igualdade somente ocorre quando a dimensão de E é finita. Quando consideramos E um espaço de Banach de dimensão infinita, a inclusão própria entre $\ell_p(E)$ e $\ell_p^w(E)$ nos diz que o operador $\widehat{i} : \ell_p^w(E) \rightarrow \ell_p(E)$, $(x_j)_{j=1}^\infty \mapsto (i(x_j))_{j=1}^\infty$, induzido pela identidade $i : E \rightarrow E$, nunca está bem definido. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 1.1. Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach E e F . Dizemos que T é um operador *absolutamente* (p, q) -somante (ou simplesmente (p, q) -somante) quando

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \ell_q^w(E) &\longrightarrow \ell_p(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty, \end{aligned}$$

chamado de induzido por T , estiver bem definido.

A definição acima equivale à dizer que o operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ transforma sequências fracamente q -somáveis de E em fortemente p -somáveis de F , isto é, $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E)$.

Denotamos por $\Pi_{p,q}(E; F)$ o espaço de todos os operadores lineares contínuos de E em F que são absolutamente (p, q) -somantes. Quando $p = q$ recuperamos o caso dos operadores p -somantes, isto é, $\Pi_{p,p}(E; F) = \Pi_p(E; F)$.

Caracterizações para essa classe de operadores são dadas a seguir.

Proposição 1.1. Sejam E e F espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e $1 \leq p, q < \infty$. São equivalentes:

(i) T é absolutamente (p, q) -somante.

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $x_j \in E$, com $j \in \{1, \dots, n\}$.

(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$.

(iv) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$.

(v) $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$.

(vi) $\hat{T} \in \mathcal{L}(\ell_q^w(E); \ell_p(F))$ e, além disso, $\pi_{p,q}(T) := \|\hat{T}\| = \inf\{C > 0 : (iii) \text{ é satisfeito}\}$ define uma norma para T em $\Pi_{p,q}(E; F)$.

Ainda em [12, Theorem 10.4] é apresentado um resultado chamado de “Teorema da Inclusão”. Sob as hipóteses de que E e F são espaços de Banach, se $1 \leq q_j \leq p_j < \infty$ ($j = 1, 2$) satisfazem $p_1 \leq p_2$, $q_1 \leq q_2$ e $\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2}$, então

$$\Pi_{p_1, q_1}(E; F) \xhookrightarrow{1} \Pi_{p_2, q_2}(E; F).$$

Uma consequência imediata deste resultado é $\Pi_p(E; F) \xhookrightarrow{1} \Pi_q(E; F)$ sempre que $1 \leq p \leq q < \infty$.

Vamos finalizar esta seção apresentando o resultado [12, Theorem 2.12] que caracteriza os operadores absolutamente p -somantes por meio de desigualdade com integral.

Proposição 1.2. *Sejam E e F espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e $0 < p < \infty$. Tem-se que $T \in \Pi_p(E; F)$ se, e somente se, existem $C > 0$ e uma medida de Borel μ em $B_{E'}$*

(com a topologia fraca-estrela) tais que

$$\|T(x)\|_F \leq C \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $x \in E$.

1.3 Operadores multilineares somantes

Iniciamos a seção com o conceito de aplicações multilineares, veremos também alguns resultados clássicos associados ao conceito. É importante informar que usaremos os termos “aplicação” e “operador” para designar o mesmo objeto matemático e que o caso linear da teoria é recuperado em todos os resultados e definições tomando $n = 1$.

Definição 1.2. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $T : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ é *n-linear (multilinear)* quando é linear em cada variável, isto é, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, fixadas as $n - 1$ entradas restantes, o operador $T_i : E_i \rightarrow F$ definido por

$$T_i(y) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

é linear.

Denotamos por $L(E_1, \dots, E_n; F)$ o espaço vetorial (com as operações usuais de aplicações) de todos os operadores n -lineares. Se $F = \mathbb{K}$, denotamos $L(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$ por $L(E_1, \dots, E_n)$. Se tivermos $E_1 = \dots = E_n = E$, então a notação passa a ser $L^n E; F$ (o caso $n = 0$ convencionamos $L^0 E; F$ por F). Não é difícil perceber que $L^1 E; F := L(E; F)$.

Naturalmente sabemos $E_1 \times \dots \times E_n$ é um espaço vetorial que pode ser munido com várias normas, como por exemplo a norma $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_{E_i}$, ou ainda a norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Como a norma define uma topologia, faz sentido definirmos o conceito de continuidade para aplicações multilineares.

Definição 1.3. Considere $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ e F espaços normados. Dizemos que uma aplicação n -linear $T : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ é *contínua no ponto* $x_0 \in E_1 \times \dots \times E_n$

quando para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $x \in E_1 \times \cdots \times E_n$,

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon.$$

Caso T seja contínua em todo ponto de $E_1 \times \cdots \times E_n$, dizemos apenas que T é contínua.

Denotamos o conjunto de todas as aplicações n -lineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Quando $F = \mathbb{K}$, pomos $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$. Quando $E_1 = \cdots = E_n = E$, denotamos $\mathcal{L}(E, \dots, E; F)$ por $\mathcal{L}({}^n E; F)$. No caso em que $E_1 = \cdots = E_n = E$ e $F = \mathbb{K}$, então $\mathcal{L}({}^n E; \mathbb{K}) = \mathcal{L}({}^n E)$. Por fim, temos $\mathcal{L}({}^1 E; F) = \mathcal{L}(E; F)$.

Observação 1.1. O conjunto $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial normado, com as operações usuais entre aplicações e a norma $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E_1 \times \cdots \times E_n \text{ e } \|x\|_\infty \leq 1\}.$$

A seguir enunciamos equivalências de continuidade para aplicações multilineares.

Teorema 1.1 ([3, Teorema 1.2.2]). *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n, F$ espaços normados e $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. As afirmações abaixo são equivalentes:*

- (i) T é contínua;
- (ii) T é contínua na origem;
- (iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|T(x_1, \dots, x_n)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

para qualquer $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$;

- (iv) T é uniformemente contínua sobre limitados;
- (v) T é limitada em toda bola com raio finito;
- (vi) T é limitada em alguma bola;

Uma diferença desse teorema entre os casos lineares e multilineares é que a continuidade de um operador linear é equivalente a continuidade uniforme, enquanto que no caso multilinear só é equivalente quando estamos sobre limitados. Vale salientar que, assim como no caso linear, o número $\|T\|$ é o ínfimo das constantes que satisfazem o item (iii).

Uma curiosidade sobre as aplicações multilineares é que a continuidade em cada variável não implica a continuidade da aplicação. Todavia, sob as condições de que $E_1, \dots, E_n$ são espaços de Banach e F é normado, o operador $T \in L(E_1, \dots, E_n; F)$ é contínuo em cada variável se, e somente se, tem-se $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Ainda em relação à continuidade, também vale o

Teorema 1.2 ([3, Teorema 1.2.8]). *Se $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n, F$ são espaços de Banach e $T \in L(E_1, \dots, E_n; F)$ é uma aplicação de gráfico fechado, então T é contínua.*

O seguinte resultado é a extensão do Teorema da Limitação Uniforme linear para o caso multilinear.

Teorema 1.3 ([3, Teorema 1.2.9]). *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ são espaços de Banach, F espaço normado e $\{T_i\}_{i \in I}$ uma família de aplicações n -lineares contínuas de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F . Se*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x_1, \dots, x_n)\| < \infty,$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, então $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

Como exemplos de classes de aplicações multilineares, vamos apresentar os operadores absolutamente e múltiplos somantes. A definição abaixo tem essência no trabalho de Pietsch [18].

Definição 1.4. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $1 \leq p, q_1, \dots, q_n \leq \infty$, com

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \dots + \frac{1}{q_n}.$$

Dizemos que T é *absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somante* quando

$$(T(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}))_{j=1}^\infty \in \ell_p(F),$$

sempre que $(x_j^{(i)})_{j=1}^\infty \in \ell_{q_i}^w(E_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Denotamos por $\Pi_{p; q_1, \dots, q_n}(E_1, \dots, E_n; F)$ ao espaço de todos os operadores n -lineares absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somantes de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F . Esse conjunto é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Um caracterização para esses operadores é apresentada a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [2].

Proposição 1.3. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n, F$ espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. São equivalentes:*

- (i) $T \in \Pi_{p; q_1, \dots, q_n}(E_1, \dots, E_n; F)$.

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^n \|(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty}\|_{w, q_i},$$

sempre que $(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_i}(E_i)$, $i = 1, \dots, n$.

(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^m \|T(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^n \|(x_j^{(i)})_{j=1}^m\|_{w, q_i},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $x_j^{(i)} \in E_i$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Além disso, o ínfimo das constantes $C > 0$ que satisfazem o item (ii) define uma norma completa em $\Pi_{p; q_1, \dots, q_n}(E_1, \dots, E_n; F)$ que será denotada por $\|T\|_{\Pi_{p; q_1, \dots, q_n}}$.

Agora apresentamos a classe dos operadores múltiplo somantes.

Definição 1.5 ([1, Definition 5.1]). Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n, F$ espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $1 \leq p_i, q_i < \infty$, para todo $i = 1, \dots, n$. Dizemos que T é múltiplo $(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ -somante se existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_n=1}^{\infty} \left(\dots \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \|T(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_n}^{(n)})\|^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{q_n}{q_{n-1}}} \right)^{\frac{1}{q_n}} \leq C \prod_{i=1}^n \|(x_{j_i}^{(i)})_{j_i=1}^{\infty}\|_{w, p_i}, \quad (1.1)$$

para todo $(x_{j_i}^{(i)})_{j_i=1}^{\infty} \in \ell_{p_i}^w(E_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Denotamos o espaço de todos os operadores n -lineares múltiplo $(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ -somantes de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F por $\Pi_{q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n}^n(E_1, \dots, E_n; F)$, que é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Definimos a norma

$$\|T\|_{\Pi_{q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n}^n} := \inf \{C > 0 : (1.1) \text{ é satisfeita}\}$$

em $\Pi_{q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n}^n(E_1, \dots, E_n; F)$ que o torna espaço de Banach.

Como no caso multilinear, também vale uma caracterização para os operadores múltiplo somantes em função de seqüências finitas.

Proposição 1.4. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n, F$ espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. São equivalentes:

(i) $T \in \Pi_{q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n}^n(E_1, \dots, E_n; F)$.

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_n=1}^m \left(\dots \left(\sum_{j_1=1}^m \|T(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_n}^{(n)})\|^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{q_n}{q_{n-1}}} \right)^{\frac{1}{q_n}} \leq C \prod_{i=1}^n \|(x_{j_i}^{(i)})_{j_i=1}^m\|_{w, p_i},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e todos $x_{j_i}^{(i)} \in E_i$, $i = 1, \dots, n$, $j_i = 1, \dots, m$.

1.4 Classes de seqüências

Nesta seção vamos apresentar alguns elementos do ambiente abstrato definido no trabalho [4] que generaliza classes de operadores caracterizados por transformações de seqüências vetoriais.

Definição 1.6. Uma *classe de seqüências* $X(\cdot)$, ou apenas X , é uma regra que a cada espaço de Banach E associa um $X(E)$ espaço vetorial de seqüências que é Banach com uma norma denotada por $\|\cdot\|_{X(E)}$ e que satisfaz:

(i) $c_{00}(E) \subseteq X(E) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(E)$;

(ii) $\|x \cdot e_j\|_{X(E)} = \|x\|_E$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $x \in E$.

A penúltima relação de inclusões ao final da Seção 1.1, por exemplo, nos diz que $\ell_p(\cdot)$, $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$, $\ell_p^w(\cdot)$ e $\ell_\infty(\cdot)$ são classes de seqüências, com $1 \leq p < \infty$. Outros exemplos de classes de seqüências são $c_0(\cdot)$ e $\ell_p^u(\cdot)$.

Um propriedade importante para o nosso trabalho é apresentada a seguir.

Definição 1.7. Dizemos que uma classe de seqüências $X(\cdot)$ é *finitamente determinada* quando, para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$, vale

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E) \Leftrightarrow \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} < \infty,$$

e neste caso, tem-se

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}. \quad (1.2)$$

A propriedade de ser finitamente determinada diferencia, por exemplo, as classes $\ell_\infty(\cdot)$, $\ell_p(\cdot)$, $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ das classes $c_0(\cdot)$ e $\ell_p^u(\cdot)$, pois essas duas últimas não são classes de seqüência finitamente determinadas.

Duas observações importantes: a) O fato de $X(E) \xrightarrow{1} \ell_\infty(E)$ nos diz que convergência em $X(E)$ implica convergência coordenada a coordenada de suas sequências em E ; b) O fato de que $c_{00}(E) \subseteq X(E)$ dá sentido ao cálculo da norma $\|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}$, bem como a igualdade (1.2).

Os conceitos e resultados seguintes nos mostram como o ambiente de classes de sequências trabalha com relação a operadores e transformações de sequências vetoriais. No que se segue, o caso linear é obtido fazendo-se $n = 1$.

Definição 1.8. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Dizemos que T é $(X_1, \dots, X_n; Y)$ -somante quando $(T(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in Y(F)$ sempre que $(x_j^i)_{j=1}^\infty \in X_i(E_i)$, $i = 1, \dots, n$, isto é, o operador

$$\begin{aligned} \widehat{T} : X_1(E_1) \times \dots \times X_n(E_n) &\longrightarrow Y(F) \\ ((x_j^1)_{j=1}^\infty, \dots, (x_j^n)_{j=1}^\infty) &\longmapsto (T(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty, \end{aligned}$$

está bem definido. Neste caso, escrevemos $T \in \mathcal{L}_{X_1, \dots, X_n; Y}(E_1, \dots, E_n; F)$ e definimos a norma

$$\|T\|_{X_1, \dots, X_n; Y} := \|\widehat{T}\|_{\mathcal{L}(X_1(E_1), \dots, X_n(E_n); Y(F))}$$

para a classe $\mathcal{L}_{X_1, \dots, X_n; Y}(E_1, \dots, E_n; F)$. A notação $\|\widehat{T}\|_{\mathcal{L}(X_1(E_1), \dots, X_n(E_n); Y(F))}$ dando a entender que $\widehat{T} \in \mathcal{L}(X_1(E_1), \dots, X_n(E_n); Y(F))$ fará sentido na Proposição 1.5.

Definição 1.9. Uma classe de sequências $X(\cdot)$ é dita *linearmente estável* quando

$$\mathcal{L}_{X; X}(E; F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E; F)$$

para todos $E, F \in BAN$. Isto equivale a dizer que, para todo $T \in \mathcal{L}(E; F)$, vale $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in X(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ e que $\|T\|_{X; X} = \|T\|$.

São exemplos de classes de sequências linearmente estáveis: $c_0(\cdot)$, $\ell_p(\cdot)$, $\ell_p^w(\cdot)$, $\ell_\infty(\cdot)$ e $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$.

Para concluir esta introdução ao ambiente de classes de sequências, vamos apresentar dois resultados importantes para o nosso trabalho. Estes resultados serão usados para caracterizar classes de operadores ao longo de nosso trabalho.

Proposição 1.5 ([4, Proposition 2.4]). *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \dots, X_n, Y$ classes de sequências. As afirmações a seguir sobre um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ são equivalentes:*

(a) $(A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in Y(F)$, sempre que $(x_j^m)_{j=1}^\infty \in X_m(E_m)$, $m = 1, \dots, n$.

(b) *O operador induzido*

$$\begin{aligned}\widehat{A}: X_1(E_1) \times \cdots \times X_n(E_n) &\longrightarrow Y(F) \\ ((x_j^1)_{j=1}^\infty, \dots, (x_j^n)_{j=1}^\infty) &\longmapsto (A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty\end{aligned}$$

está bem definido, é n -linear e contínuo.

As condições acima implicam a condição abaixo, valendo a equivalência quando $X_1, \dots, X_n, Y$ são finitamente determinadas.

(c) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|(A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^k\|_{Y(F)} \leq C \cdot \prod_{m=1}^n \|(x_j^m)_{j=1}^k\|_{X_m(E_m)}, \quad (1.3)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x_j^m \in E_m$, $j = 1, \dots, k$, $m = 1, \dots, n$. Neste caso, $\|\widehat{A}\| := \inf\{C > 0 : (1.3) \text{ é satisfeito}\}$.

Antes de enunciar o último resultado desta seção, vamos apresentar uma outra definição.

Definição 1.10. Sejam X e Y classes de seqüências. Diremos que:

- $X < Y$ se, para todo espaço de Banach E , $X(E)$ é subespaço fechado de $Y(E)$ e, para cada $(x_j)_{j=1}^\infty \in Y(E)$, tem-se

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E) \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_j)_{j=k}^\infty\|_{Y(E)} = 0.$$

- $X \prec Y$ se, para todo espaço de Banach E , $X(E)$ é subespaço fechado de $Y(E)$ e, para cada $(x_j)_{j=1}^\infty \in Y(E)$, tem-se

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E) \Leftrightarrow \lim_{k, l \rightarrow \infty} \|(x_j)_{j=k}^l\|_{Y(E)} = 0.$$

A título de exemplos desse conceito temos $\ell_p^u(\cdot) < \ell_p^w(\cdot)$ e $c_0(\cdot) \prec \ell_\infty(\cdot)$.

Proposição 1.6 ([4, Corollary 2.6]). *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \dots, X_n, Y, Z_1, \dots, Z_n, W$ classes de seqüências tais que $Z_1, \dots, Z_n, W$ são finitamente determinadas. Suponha que uma das condições abaixo sejam satisfeitas:*

- (i) $X_m < Z_m$, para todo $m = 1, \dots, n$ e $Y < W$;
- (ii) $X_m \prec Z_m$, para todo $m = 1, \dots, n$ e $Y \prec W$;
- (iii) $X_m < Z_m$, para todo $m = 1, \dots, n$ e $Y \prec W$.

Então, para todos $E_1, \dots, E_n, F$ espaços de Banach, as seguintes condições são equivalentes para um operador n -linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$:

- (a) $(A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in Y(F)$, sempre que $(x_j^m)_{j=1}^\infty \in X_m(E_m)$, $m = 1, \dots, n$.
- (b) $(A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in W(F)$, sempre que $(x_j^m)_{j=1}^\infty \in Z_m(E_m)$, $m = 1, \dots, n$.

Neste caso, temos

$$\|\hat{A} : X_1(E_1) \times \dots \times X_n(E_n) \rightarrow Y(F)\| = \|\hat{A} : Z_1(E_1) \times \dots \times Z_n(E_n) \rightarrow W(F)\|.$$

1.5 Ideais de operadores

Apresentamos a partir dessa seção algumas noções da teoria de ideais de operadores lineares e multilineares, sendo a nossa referência principal o trabalho [17]. Para o caso linear basta tomar $n = 1$.

Definição 1.11. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n, F$ espaços normados e $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Dizemos que T é de *tipo finito* quando existem $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_i^{(j)} \in E_j'$ e $b_i \in F$ com $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ tais que

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m \varphi_i^{(1)}(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi_i^{(n)}(x_n) b_i.$$

Denotamos por $\mathcal{F}(E_1, \dots, E_n; F)$ o espaço de todos os operadores do tipo finito de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F . Quando $n = 1$ o espaço de operadores do tipo finito coincide com o de operadores de posto finito. Também é fato que $\mathcal{F}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ com as operações usuais de operadores.

Definição 1.12. Um *ideal de aplicações multilineares* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores multilineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach, as componentes $\mathcal{I}(E_1, \dots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \cap \mathcal{I}$ satisfazem:

- (i) $\mathcal{I}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ que contém $\mathcal{F}(E_1, \dots, E_n; F)$;
- (ii) A propriedade de ideal: se $T \in \mathcal{I}(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \dots, n$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$, então $v \circ T \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{I}(G_1, \dots, G_n; H)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo,

$$\mathcal{I}_n = \bigcup_{E_1, \dots, E_n, F \in BAN} \mathcal{I}(E_1, \dots, E_n; F)$$

é chamado de ideal de aplicações n -lineares.

Quando fazemos $n = 1$ temos o ideal de operadores lineares entre espaços de Banach. Assim, os resultados que apresentamos sobre ideais multilineares se aplicam a teoria de ideais de operadores lineares.

Definição 1.13. Um *ideal normado de aplicações multilineares* é um par $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$, onde $\mathcal{I}$ é um ideal e a aplicação $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)$ satisfaz:

- (i) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita a $\mathcal{I}(E_1, \dots, E_n; F)$ é uma norma, para quaisquer espaços de Banach $E_1, \dots, E_n, F$ e todo $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{I}} = 1$, onde $id_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ é dada por $id_{\mathbb{K}^n}(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) Se $T \in \mathcal{I}(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \dots, n$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|v \circ T \circ (u_1, \dots, u_n)\|_{\mathcal{I}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|u_1\| \dots \|u_n\|.$$

Quando $(\mathcal{I}(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ for espaço de Banach, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos os espaços de Banach $E_1, \dots, E_n, F$, então dizemos que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de Banach.

Se $\varphi_j \in E'_j$, $j = 1, \dots, n$ e $y \in F$, denotaremos o operador $T : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$, definido por $T(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)y$, por $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n y$. É claro que $T = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n y \in \mathcal{I}(E_1, \dots, E_n; F)$, pois é um operador do tipo finito, e que

$$\|T\|_{\mathcal{I}} = \|y\| \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_n\|.$$

O resultado a seguir nos dá condições para determinarmos quando um ideal normado de aplicações multilineares, caracterizado por transformações de seqüências vetoriais, é um ideal de Banach. Faremos uso da teoria de classes de seqüências apresentada anteriormente junto com suas notações.

Teorema 1.4 ([4, Theorem 3.6]). *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \dots, X_n, Y$ classes de seqüências linearmente estáveis tais que $X_1(\mathbb{K}) \dots X_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{1} Y(\mathbb{K})$. Então $(\mathcal{L}_{X_1, \dots, X_n; Y}, \|\cdot\|_{X_1, \dots, X_n; Y})$ é um ideal de Banach de operadores n -lineares.*

Para uso posterior, vamos definir a envoltória injetiva e a envoltória sobrejetiva de um ideal de operadores lineares.

Definição 1.14. Dizemos que um ideal $\mathcal{I}$ é *injetivo* quando dados um operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e uma injeção métrica $I \in \mathcal{L}(F; G)$ tais que $I \circ T \in \mathcal{I}(E; G)$, tem-se $T \in \mathcal{I}(E; F)$. Dizemos que $\mathcal{I}$ é *sobrejetivo* quando dados um operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e uma sobrejeção métrica $Q \in \mathcal{L}(G; E)$ tais que $T \circ Q \in \mathcal{I}(G; F)$, tem-se $T \in \mathcal{I}(E; F)$.

Definição 1.15 ([18, Section C.3.1]). Um espaço de Banach F possui a *propriedade de extensão métrica* se para cada injeção $J \in \mathcal{L}(E_0; E)$ e cada operador $S_0 \in \mathcal{L}(E_0; F)$, existe uma extensão $S \in \mathcal{L}(E; F)$ tal que $S_0 = S \circ J$ e $\|S\| = \|S_0\|$.

Como consequência do espaço $\ell_\infty(I)$ ter a propriedade de extensão métrica, para todo conjunto de indexação I , segue que todo operador $S \in \mathcal{L}(E, \ell_\infty(I))$ pode ser escrito na forma $S(x) := (\langle x, \varphi_i \rangle)$, onde $\varphi_i \in E'$ para todo $i \in I$ (ver [18, Section C.3.2, Section C.3.3]). Um caso particular é a injeção canônica $I_E : E \rightarrow \ell_\infty(B_{E'})$ dada por $I_E(x) = (\langle x, \varphi \rangle)$.

Definição 1.16 ([18, Section C.3.5]). Dizemos que um espaço de Banach E possui a *propriedade de elevação métrica* se para cada sobrejeção $Q \in \mathcal{L}(F; F_0)$ e cada operador $S_0 \in \mathcal{L}(E; F_0)$ existe uma elevação $S \in \mathcal{L}(E; F)$ tal que $S_0 = Q \circ S$.

De modo análogo, pelo fato de $\ell_1(I)$, com I um conjunto de indexação arbitrário, ter a propriedade de elevação métrica, segue que todo operador $S \in \mathcal{L}(\ell_1(I), F)$ tem a forma $S((x_i)_{i \in I}) = \sum_i x_i y_i$, onde $y_i \in F$ para todo $i \in I$. A sobrejeção canônica $Q_E : \ell_1(B_E) \rightarrow E$, por esse fato, é definida por $Q_E((\lambda_x)_{x \in B_E}) := \sum_{x \in B_E} \lambda_x x$.

Definição 1.17. Seja $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado. Denotamos por $\mathcal{I}^{\text{inj}}$ o menor ideal injetivo, que existe e é único (veja [11, Proposition 9.7]), que contém $\mathcal{I}$. Dados E, F espaços de Banach, se $I_F : F \rightarrow \ell_\infty(B_{F'})$ é a injeção canônica, então

$$\mathcal{I}^{\text{inj}}(E; F) := \{S \in \mathcal{L}(E; F) : I_F \circ S \in \mathcal{I}(E; \ell_\infty(B_{F'}))\}.$$

Além disso, $\|S\|_{\text{inj}} := \|I_F \circ S\|_{\mathcal{I}}$. O ideal normado $(\mathcal{I}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\text{inj}})$ é chamado de *envoltória injetiva* do ideal normado $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$.

Definição 1.18. Seja $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado. Denotamos por $\mathcal{I}^{\text{sur}}$ o menor ideal sobrejetivo, que existe e é único (veja [11, Proposition 9.8]), que contém $\mathcal{I}$. Se $Q_E : \ell_1(B_E) \rightarrow E$ é a sobrejeção canônica, então dados E, F espaços de Banach, temos

$$\mathcal{I}^{\text{sur}}(E; F) := \{S \in \mathcal{L}(E; F) : S \circ Q_E \in \mathcal{I}(\ell_1(B_E); F)\}.$$

Além disso, definimos $\|S\|_{\text{sur}} := \|S \circ Q_E\|_{\mathcal{I}}$. O ideal normado $(\mathcal{I}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\text{sur}})$ é chamado de *envoltória sobrejetiva* do ideal normado $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$.

Encerramos a seção com as definições de ideal maximal e de ideal dual.

Definição 1.19. A *envoltória maximal* de um ideal $\mathcal{I}$, denotada por $\mathcal{I}^{\text{max}}$, é o ideal que, para cada par (E, F) de espaços de Banach, tem-se $S \in \mathcal{I}^{\text{max}}(E; F)$ se, e somente se, $B \circ S \circ X \in \mathcal{I}(E_0; F_0)$, para todos operadores aproximáveis $B \in \mathcal{L}(F; F_0)$ e $X \in \mathcal{L}(E_0; E)$. Dizemos que um ideal $\mathcal{I}$ é *maximal* quando $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{max}}$.

Definição 1.20. Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores lineares. Definimos o *ideal dual*, que denotamos por $\mathcal{I}^{\text{dual}}$, em suas componentes por

$$\mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F) := \{T \in \mathcal{L}(E; F) : T' \in \mathcal{I}(F'; E')\}.$$

1.6 O produto tensorial entre espaços de Banach

Encerrando o capítulo, vamos apresentar algumas noções e resultados importantes e úteis sobre produto tensorial entre espaços de Banach. Indicamos [11] e [19] como referências fundamentais sobre o tema e alertamos ao leitor para o fato de que buscamos aqui apenas colecionar ferramentas para uso posterior em nosso trabalho.

Considere E, F espaços vetoriais, $x \in E$ e $y \in F$. Chamamos de *tensor elementar* a aplicação $x \otimes y : B(E, F) \rightarrow \mathbb{K}$ que a cada forma bilinear $A \in B(E, F)$ associa o escalar $(x \otimes y)(A) = A(x, y)$.

O tensor elementar $x \otimes y$ é uma aplicação linear e portanto um elemento do dual algébrico de $B(E, F)$. Definimos, então, o subespaço

$$E \otimes F = \text{span} \{x \otimes y : x \in E, y \in F\}$$

de $B(E, F)^{\#}$ gerado por todos os tensores elementares e o chamaremos de *produto tensorial* de E por F . Cada elemento $u \in E \otimes F$ será chamado de *tensor* e, sendo escrito como combinação linear de tensores elementares, é da forma

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i \otimes y_i),$$

com $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in E$ e $y_i \in F$ para todo $i = 1, \dots, n$. Além disso, escrito dessa forma, a ação de u em $A \in B(E, F)$ é dada por

$$u(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i A(x_i, y_i).$$

É claro que a representação de u acima não é única, entretanto a boa definição do espaço garante que o valor $u(A)$ não muda de acordo com a representação que for tomada, caso contrário não seria uma aplicação bem definida sobre as formas bilineares.

Considere E, F espaços vetoriais, $x, x_1, x_2 \in E$ e $y, y_1, y_2 \in F$. Os tensores elementares satisfazem:

i) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y;$

- ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$;
 iii) $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

A propriedade iii) é uma boa justificativa para a não unicidade de

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i \otimes y_i),$$

visto que outra representação seria $\sum_{i=1}^n z_i \otimes y_i$, onde $z_i = \lambda_i x_i$ (faremos uso dessa outra representação de u ao longo do texto). Além disso, decorre ainda dessa propriedade que $0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$ (basta tomar $\lambda = 0$).

O teorema abaixo nos diz que é possível identificar o espaço das aplicações bilineares com o espaço das aplicações lineares. Em particular, para todos E, F espaços vetoriais, temos $B(E, F) = (E \otimes F)^\#$.

Teorema 1.5 ([19, Proposition 1.4]). *Sejam E, F e G espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Para cada aplicação bilinear $A : E \times F \rightarrow G$ existe uma única aplicação linear $\tilde{A} : E \otimes F \rightarrow G$ tal que $A(x, y) = \tilde{A}(x \otimes y)$ para todos $x \in E, y \in F$. Além disso, a correspondência $A \longleftrightarrow \tilde{A}$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $B(E, F; G)$ e $L(E \otimes F; G)$. A aplicação $\tilde{A}$ é chamada de linearização de A .*

Algumas definições são importantes ao nosso trabalho. A primeira delas se refere a transposta de um tensor. Sejam E, F espaços vetoriais e $u \in E \otimes F$, com representação $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$. Definimos a *transposta* de u , denotada por u^t , como o vetor $\sum_{i=1}^n y_i \otimes x_i \in F \otimes E$.

Não é difícil verificar, utilizando o Teorema 1.5, que a aplicação $\tilde{A} : E \otimes F \rightarrow F \otimes E$ definida por $\tilde{A}(u) = u^t$ é um isomorfismo. Isto nos diz que a transposta é única e, portanto, independe da representação tomada para u .

Considere E, F, G, H espaços vetoriais, $S : E \rightarrow G$ e $T : F \rightarrow H$ aplicações lineares. Definimos o operador $S \otimes T : E \otimes F \rightarrow G \otimes H$, chamado *produto tensorial das aplicações lineares* S e T , como a linearização da aplicação bilinear $A : E \times F \rightarrow G \otimes H$ dada por $A(x, y) = S(x) \otimes T(y)$. Assim, temos $S(x) \otimes T(y) = S \otimes T(x \otimes y)$ para todo $(x, y) \in E \times F$.

Já vimos acima que podemos identificar o dual algébrico de $E \otimes F$ com as formas bilineares, cujo domínio é $E \times F$. Nessa mesma linha de raciocínio, por meio de identificações, temos $E \otimes F \subset B(E^\#, F^\#)$, $E \otimes F \subset L(E^\#; F)$ e $E \otimes F \subset L(F^\#; E)$, onde cada tensor $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ é identificado, respectivamente, com as

aplicações

$$B_u : E^\# \times F^\# \longrightarrow \mathbb{K} \text{ dada por } B_u(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \psi(y_i),$$

$$L_u : E^\# \longrightarrow F \text{ dada por } L_u(\varphi) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) y_i$$

e

$$R_u : F^\# \longrightarrow E \text{ dada por } R_u(\psi) = \sum_{i=1}^n \psi(y_i) x_i.$$

Quando consideramos espaços vetoriais que satisfazem $E^{\#\#} = E$, obtemos a inclusão $E^\# \otimes F \subset L(E; F)$ e os elementos de $L(E; F)$ que correspondem a tensores de $E^\# \otimes F$, sob a identificação $\varphi \otimes y : E \longrightarrow F$, dada por $\varphi \otimes y(x) = \varphi(x)y$, são as *aplicações lineares de posto finito*, isto é, aplicações cuja imagem é um subespaço de F de dimensão finita. Isto justifica a notação tão comum utilizada em Análise Funcional.

Até agora apresentamos fatos sobre estrutura algébrica do produto tensorial. A partir de agora vamos apresentar normas que agregam noções topológicas a esse tipo de espaço.

Duas normas bastante conhecidas da teoria de produto tensorial são a norma projetiva e a norma injetiva. Dados E, F espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$ e $u \in E \otimes F$, a *norma projetiva* de u é o número

$$\pi(u) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações de u . O produto tensorial $E \otimes F$ com a norma projetiva π é um espaço normado, denotado por $E \otimes_\pi F$, mas que em geral não é completo. O completamento desse espaço, denotado por $E \widehat{\otimes}_\pi F$, é chamado de *produto tensorial projetivo* dos espaços E e F .

Sabendo que a aplicação B_u , apresentada anteriormente, restrita à $E' \times F'$ é contínua, temos uma imersão topológica de $E \otimes F$ em $B(E'; F')$. Assim, definimos a *norma injetiva* de $u \in E \otimes F$ como o número

$$\varepsilon(u) := \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \psi(y_i) \right| : \varphi \in B_{E'}, \psi \in B_{F'} \right\} = \|B_u\|.$$

De modo análogo ao comentário sobre a norma projetiva, o espaço $E \otimes F$ normado com a norma injetiva, denotado por $E \otimes_\varepsilon F$, não é em geral completo. Assim, consideramos $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ o completamento de $E \otimes_\varepsilon F$, chamado de *produto tensorial injetivo* de E e F .

Dados E e F espaços de Banach, algumas relações são importantes de enunciarmos:

(a) $\varepsilon(x \otimes y) = \|x\|\|y\| = \pi(x \otimes y)$, para todo $x \otimes y \in E \otimes F$.

(b) $\varepsilon(u) \leq \pi(u)$, para todo $u \in E \otimes F$.

Agora vamos exibir dois casos particulares, e de interesse para o desenvolvimento de nosso trabalho, de normas sobre $\ell_p \otimes E$.

O primeiro: considere E um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. A aplicação $J : \ell_p \otimes E \rightarrow \ell_p(E)$ definida por

$$J \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right)_{k=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^n (a_{ik} x_i)_{k=1}^{\infty}$$

é bem definida, linear e injetiva, onde $a_i = (a_{ik})_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$, para todo $i = 1, \dots, n$. A partir desse fato é possível definir a seguinte norma em $\ell_p \otimes E$:

$$\Delta_p \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \right) := \left\| \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right)_{k=1}^{\infty} \right\|_p.$$

Um caso particular muito comum ocorre quando $a_i = e_i$, $i = 1, \dots, n$, e temos

$$\Delta_p \left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i \right) = \|(x_i)_{i=1}^n\|_p.$$

Usaremos $\ell_p \otimes_{\Delta_p} E$ para denotar o espaço normado $(\ell_p \otimes E, \Delta_p)$ e $\ell_p \widehat{\otimes}_{\Delta_p} E$ para o seu completamento.

A norma Δ_p em $\ell_p \otimes E$, onde E é um espaço de Banach, satisfaz (veja [11, Section 7.1]):

(a) $\Delta_1 = \pi$ em $\ell_1 \otimes E$.

(b) $\varepsilon \leq \Delta_p \leq \pi$ em $\ell_p \otimes E$.

O segundo: um fato no estudo da norma injetiva, geralmente apresentado antes a Teoria de Operadores Absolutamente Somantes (ver [11, Section 11]), dá conta de que ([11, Section 8.2])

$$\ell_p^u(E) \stackrel{1}{=} \ell_p \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E. \quad (1.4)$$

Denotaremos por $NORM$ a classe de todos os espaços normados, por BAN a classe de todos os espaços de Banach e por FIN a classe de todos os espaços normados de dimensão finita. Dada uma norma α no produto tensorial $E \otimes F$, denotaremos por

$\alpha(z)$ a norma do tensor $z \in E \otimes F$, mas também usaremos $\alpha(z; E, F)$ para denotar o mesmo objeto.

Definição 1.21. Uma norma α no produto tensorial sobre espaços da classe NORM é dita:

- i) *Razoável*, quando $\varepsilon \leq \alpha \leq \pi$.
- ii) *Uniforme*, quando satisfaz

$$\|T_1 \otimes T_2 : E_1 \otimes_\alpha E_2 \rightarrow F_1 \otimes_\alpha F_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|,$$

para todo $T_i \in \mathcal{L}(E_i; F_i)$, com $i = 1, 2$.

- iii) *Norma no produto tensorial* (apenas), quando for razoável e uniforme.

De modo análogo ao feito com as normas injetiva e projetiva, denota-se por $E \otimes_\alpha F$ e $\widehat{E \otimes_\alpha F}$ o espaço tensorial normado e seu completamento, respectivamente.

As normas que apresentaremos adiante são todas normas no produto tensorial.

Se α é uma norma no produto tensorial, então definimos a *norma transposta* α^t por

$$\alpha^t(z; E, F) := \alpha(z^t; F, E).$$

É imediato verificar que $\alpha^{tt} = \alpha$, $\varepsilon^t = \varepsilon$ e $\pi^t = \pi$.

Uma questão interessante nesse contexto surge quando se deseja generalizar uma norma α sobre a classe FIN para espaços de dimensão infinita, isto é, estender essa norma para NORM.

Considere E, F espaços normados, com $\text{FIN}(E) := \{M \subset E : M \in \text{FIN}\}$, e tomemos uma norma α na classe FIN. Defina para $z \in E \otimes F$, a seguinte norma

$$\overrightarrow{\alpha}(z; E, F) := \inf\{\alpha(z; M, N) : M \in \text{FIN}(E), N \in \text{FIN}(F), z \in M \otimes N\}.$$

A norma $\overrightarrow{\alpha}$ na classe NORM é chamada *envoltória finita* de α e possui as seguintes propriedades:

- a) $\overrightarrow{\alpha}$ é uma norma no produto tensorial;
- b) $\overrightarrow{\alpha}$ restrita a espaços normados de dimensão finita coincide com α ;
- c) Se α for definida em NORM, $\overrightarrow{\alpha} \geq \alpha$.

O item c) nos diz que existem envoltórias finitas que não coincidem com a norma α , mesmo estando α definida na classe NORM. As normas α definidas em NORM

que satisfazem $\overrightarrow{\alpha} = \alpha$ são chamadas de *finitamente geradas*. Em particular, ε e π são finitamente geradas.

Definição 1.22. Diremos que uma norma α na classe NORM é uma *norma tensorial* quando α é uma norma no produto tensorial finitamente gerada.

Para $1 \leq p, q \leq \infty$, com $1/p + 1/q \geq 1$, pegue o único $r \in [1, \infty]$ que satisfaz $1/r = 1/p + 1/q - 1$ (ou equivalentemente $1 = 1/r + 1/p' + 1/q'$, onde p' e q' são os conjugados de p e q , respectivamente) e defina para espaços normados E, F e $z \in E \otimes F$ a norma

$$\alpha_{p,q}(z; E, F) := \inf \left\{ \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_r \| (x_i)_{i=1}^n \|_{w,q'} \| (y_i)_{i=1}^n \|_{w,p'} : z = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i \right\}.$$

A norma $\alpha_{p,q}$ na classe NORM é um exemplo de norma tensorial, isto é, é razoável, uniforme e finitamente gerada. Além disso, satisfaz $\alpha_{1,1} = \pi$ e $\alpha_{p,q}^t = \alpha_{q,p}$.

É importante mencionar alguns outros casos particulares dessa norma quando damos valores aos parâmetros p e q . Por exemplo,

$$g_p(z; E, F) := \alpha_{p,1}(z; E, F) = \inf \left\{ \| (x_i)_i \|_p \| (y_i) \|_{w,p'} : z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}.$$

Outro exemplo,

$$d_p(z; E, F) := \alpha_{1,p}(z; E, F) = \inf \left\{ \| (x_i)_i \|_{w,p'} \| (y_i) \|_p : z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}.$$

Além disso, vale $g_p^t = d_p$ e $d_p^t = g_p$. As normas d_p e g_p são chamadas *normas de Chevet-Saphar*.

Comentamos mais acima que é possível identificar tensores com aplicações bilineares e lineares por meio de algumas imersões. Em [11, Section 15.2], são apresentadas as seguintes imersões, para uma norma no produto tensorial α definida em NORM:

$$E \otimes F \hookrightarrow (E' \otimes_{\varepsilon} F')' \hookrightarrow (E' \otimes_{\alpha} F')' \hookrightarrow (E' \otimes_{\pi} F')'. \quad (1.5)$$

Além disso, quando consideramos M, N espaços de dimensão finita, vale

$$M \otimes N = (M' \otimes_{\alpha} N')', \quad (1.6)$$

onde a igualdade é do ponto de vista algébrico.

Olhando agora para igualdade (1.6) e a imersão $E \otimes F \hookrightarrow (E' \otimes_{\alpha} F')'$ vista em (1.5), é razoável tentar obter uma norma α no produto tensorial, definida em NORM,

que satisfaça

$$M \otimes_{\alpha} N \stackrel{1}{=} (M' \otimes_{\beta} N')', \quad (1.7)$$

para M e N espaços de dimensão finita, sendo originalmente α definida em FIN. É o que mostramos a seguir.

Considere α um norma no produto tensorial definida em FIN. Então α' definida por

$$\alpha'(z; E, F) := \sup \{ |u(z)| : \alpha(u; M', N') \leq 1 \}$$

é uma norma no produto tensorial definida em FIN.

A envoltória finita $\overrightarrow{\alpha'}$ de α' será chamada de *norma tensorial dual* da norma α (definida em FIN ou NORM). De forma simplificada, nos referiremos simplesmente à norma tensorial α' definida em NORM, em vez de usar o símbolo $\overrightarrow{\alpha'}$. Essa é a norma α no produto tensorial que satisfaz a igualdade (1.7), isto é, $M \otimes_{\alpha'} N \stackrel{1}{=} (M' \otimes_{\alpha} N')'$.

Observação 1.2. Algumas propriedades sobre a norma tensorial dual são listadas abaixo:

- (a) Se $\alpha \leq c\beta$, então $\beta' \leq c\alpha'$, onde c é uma constante.
- (b) $\alpha = \alpha''$ em FIN e $\overrightarrow{\alpha} = \alpha''$.
- (c) $\alpha = \alpha''$ em NORM se, e somente se, α é finitamente gerada.
- (d) $(\alpha^t)' = (\alpha')^t$, se α é uma norma tensorial.
- (e) $\pi' = \varepsilon$ e $\varepsilon' = \pi$.

O item (d) da observação acima, permite a definição $\alpha^* := (\alpha^t)' = (\alpha')^t$. A norma α^* é chamada de *adjunta* ou *contragradiente* de α .

Definição 1.23. Uma norma tensorial α definida em NORM é dita *injetiva à direita* em NORM, se para toda injeção métrica $I : F \rightarrow G$ o operador $\text{id}_E \otimes I : E \otimes_{\alpha} F \rightarrow E \otimes_{\alpha} G$ é uma injeção métrica para $E, F, G \in \text{NORM}$.

Definição 1.24. Uma norma tensorial α definida em NORM é dita *projetiva à direita* em NORM se para toda sobrejeção métrica $Q : F \rightarrow G$ o operador $\text{id}_E \otimes Q : E \otimes_{\alpha} F \rightarrow E \otimes_{\alpha} G$ é uma sobrejeção métrica para $E, F, G \in \text{NORM}$.

Se α^t é injetiva à direita (respectivamente, projetiva à direita), então a norma tensorial α é chamada *injetiva à esquerda* (respectivamente, *projetiva à esquerda*). Se α é injetiva (projetiva) à esquerda e a direita, então é dita apenas *injetiva* (*projetiva*).

Vejamos alguns casos particulares:

- (i) ε é injetiva;
- (ii) π é projetiva;
- (iii) d_p é projetiva à direita;
- (iv) g_p é projetiva à esquerda.

Dada uma norma α definida em NORM, em [11, Section 20.6] é garantido a existência de uma única norma $\alpha/$ que é norma tensorial projetiva à direita, definida em NORM, e que satisfaz $\alpha/ \geq \alpha$. A norma $\alpha/$ é chamada de *norma projetiva à direita* associada a α , e satisfaz a seguinte propriedade: se $\beta \geq \alpha$ é projetiva à direita, então $\beta \geq \alpha/$. Além disso, $\backslash\alpha := ((\alpha^t)/)^t$ que é chamada *norma projetiva à esquerda* associada a α .

Se α é uma norma tensorial, então vale

$$\backslash(\alpha/) = (\backslash\alpha)/ =: \backslash\alpha/$$

e a norma $\backslash\alpha/$ é chamada de *norma projetiva* associada a α . Tem-se que $\backslash\alpha/$ é a menor norma tensorial projetiva $\geq \alpha$.

De modo análogo, como demonstrado em [11, Section 20.7], dada uma norma tensorial α definida em NORM, existe uma única norma tensorial $\alpha\backslash$ injetiva à direita que satisfaz $\alpha\backslash \leq \alpha$. Além disso, se β é uma norma tensorial injetiva à direita tal que $\beta \leq \alpha$, então $\beta \leq \alpha\backslash$. A norma $\alpha\backslash$ é chamada *injetiva à direita* associada a α .

A norma tensorial *injetiva à esquerda* associada a α é $/\alpha := ((\alpha^t)\backslash)^t$ e $/\alpha\backslash := (/ \alpha)\backslash = /(\alpha\backslash)$ é a *norma tensorial injetiva* associada de α .

Abaixo listamos algumas propriedades que as normas tensoriais citadas acima satisfazem:

- (1) $(\overrightarrow{\alpha})\backslash = \overrightarrow{\alpha\backslash}$ e $(\overrightarrow{\alpha})/ = \overrightarrow{\alpha/}$;
- (2) $(\alpha/)' = (\alpha')\backslash$ e $(\alpha\backslash)' = (\alpha')/$;
- (3) $(\alpha/)^* = /(\alpha^*)$ e $(\alpha\backslash)^* = \backslash(\alpha^*)$.

Por fim, vamos apresentar o Teorema de Representação para ideais maximais de operadores, mas antes definiremos o que significam ideal e uma norma no produto tensorial estarem associados.

Definição 1.25. Dizemos que uma norma no produto tensorial α definida em NORM e um ideal $(\mathcal{I}, \rho)$ maximal são *associados*, e denotamos por $(\mathcal{I}, \rho) \sim \alpha$, se para todo $M, N \in \text{FIN}$, vale $\mathcal{I}(M, N) \stackrel{1}{=} M' \otimes_{\alpha} N$.

Teorema 1.6 ([11, Representação para Ideais Maximais de operadores]). *Seja $(\mathcal{I}, \rho)$ um ideal normado maximal e α uma norma tensorial que estão associados entre si, isto é, $(\mathcal{I}, \rho) \sim \alpha$. Então para todos $E, F \in BAN$, as relações $\mathcal{I}(E, F') = (E \otimes_{\alpha'} F)'$ e $\mathcal{I}(E, F) = (E \otimes_{\alpha'} F')' \cap \mathcal{L}(E, F)$ valem isometricamente.*

Uma informação importante na demonstração do Teorema 1.6, que iremos utilizar posteriormente, é que o isomorfismo isométrico da igualdade $\mathcal{I}(E, F') = (E \otimes_{\alpha'} F)'$ é a aplicação

$$\psi : \mathcal{I}(E, F') \rightarrow (E \otimes_{\alpha'} F)' \quad (1.8)$$

que a cada operador $T \in \mathcal{I}(E, F')$ associa o funcional

$$\begin{aligned} \psi(T) : E \otimes_{\alpha'} F &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x \otimes y &\longmapsto \psi(T)(x \otimes y) := T(x)(y). \end{aligned}$$

Capítulo 2

Operadores mid somantes

Em [14], Karn e Sinha definem o espaço das sequências mid p -somáveis e este espaço e a teoria de operadores associada a ele são objetos de estudo mais detalhado em [5].

Mais recentemente, Campos e Santos [9] apresentam e estudam o espaço das sequências mid (q, p) -somáveis, que generaliza o espaço das sequências mid p -somáveis, sob a ótica da teoria de operadores. Nesse trabalho aparece uma relação interessante entre a teoria linear objeto de estudo e a teoria de operadores multilineares absolutamente somantes.

Assim, o objetivo do capítulo é o de apresentar o estudo sobre esse espaço das sequências mid (q, p) -somáveis, a sua teoria de operadores lineares mid (q, p) -somantes e apresentar a relação entre as teorias linear e multilinear citada acima. Como aplicações dessa relação, apresentamos alguns resultados de inclusões e coincidência.

2.1 O espaço das sequências mid (q, p) -somáveis

Considere E um espaço de Banach (durante todo este capítulo vamos sempre considerar E espaço de Banach), $1 \leq p, q < \infty$ números reais e $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$. Da identificação abaixo (veja [11, Section 8.2])

$$\ell_p^w(E') \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E; \ell_p) \quad (2.1)$$

por meio da aplicação $\varphi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E') \mapsto T_\varphi \in \mathcal{L}(E; \ell_p)$ definida por $T_\varphi(x) = (\varphi_n(x))_{n=1}^\infty$, temos $(\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty \in \ell_p$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$.

Uma questão pertinente neste ponto: o que acontece quando levarmos em conta os dois índices? Isto é, o que acontece com a sequência

$$(T_\varphi(x_j))_{j=1}^\infty = ((\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty?$$

Isto de fato levou os autores do trabalho [9] à definição de sequências mid (q, p) -somáveis enunciada abaixo.

Definição 2.1. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é *mid (q, p) -somável* quando $((\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_p)$ sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$. Isto é, quando

$$\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} < \infty \quad (2.2)$$

sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$.

Denotamos por $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$ o espaço das sequências em E que são mid (q, p) -somáveis e tem-se que $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$ é um subespaço vetorial do espaço das sequências $E^\mathbb{N}$. Com efeito, $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) \neq \emptyset$, pois a sequência identicamente nula em E é mid (q, p) -somável. Se $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$ e λ um escalar, então

$$\begin{aligned} ((\varphi_n(x_j + \lambda y_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty &= ((\varphi_n(x_j) + \lambda \varphi_n(y_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty \\ &= ((\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty + \lambda (\varphi_n(y_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty \\ &= ((\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty + \lambda ((\varphi_n(y_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_p), \end{aligned}$$

sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$. Isto nos diz que a sequência

$$(x_j)_{j=1}^\infty + \lambda (y_j)_{j=1}^\infty = (x_j + \lambda y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E).$$

Graças à identificação (2.1), temos a seguinte equivalência:

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) \text{ se, e somente se, } (T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_p), \quad (2.3)$$

para todo $T \in \mathcal{L}(E; \ell_p)$.

Observação 2.1. Quando fazemos $p = q$ em (2.2), podemos comutar as séries, visto que

$$\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right) = \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)$$

quando uma delas, e portanto ambas, é convergente. Isto, portanto, nos diz que podemos trocar $((\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty$ por $((\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty)_{n=1}^\infty$ e ainda vamos ter que

$$((\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty)_{n=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p),$$

sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$.

Essa observação garante que quando $p = q$, temos que $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) = \ell_p^{\text{mid}}(E)$ (veja a definição de $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ no Capítulo 1).

Lema 2.1. A função $\|\cdot\|_{q,p} : \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

está bem definida e define uma norma em $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$.

Demonstração. Com efeito, para cada $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$, o operador

$$\begin{aligned} T_x : \ell_p^w(E') &\longrightarrow \ell_q(\ell_p) \\ (\varphi_n)_{n=1}^\infty &\longmapsto ((\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty, \end{aligned}$$

está bem definido, pela definição de $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$, e, claramente é linear.

A igualdade

$$\|T_x\| = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

garante que $\|\cdot\|_{q,p}$ estará bem definida se, e somente se, $\|T_x\| < \infty$, isto é, T_x é contínua. Para mostrar a continuidade, usaremos o Teorema do Gráfico Fechado.

Seja $(\varphi^k, T_x(\varphi^k))_{k=1}^\infty$ uma sequência no gráfico de T_x que converge para o ponto $(\varphi, y) \in \ell_p^w(E') \times \ell_q(\ell_p)$. Isto é,

$$\varphi^k \xrightarrow{k} \varphi \text{ em } \ell_p^w(E') \tag{2.4}$$

e

$$T_x(\varphi^k) \xrightarrow{k} y \text{ em } \ell_q(\ell_p) \tag{2.5}$$

Sabendo que $\ell_p^w(E') \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(E')$, isto nos dá convergência coordenada a coordenada, assim (2.4) implica em

$$\varphi_n^k \xrightarrow{k} \varphi_n \text{ em } E', \tag{2.6}$$

para toda coordenada $n \in \mathbb{N}$, onde $\varphi^k = (\varphi_n^k)_{n=1}^\infty$ e $\varphi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$. Em particular, de

(2.6), vale

$$\varphi_n^k(x) \xrightarrow{k} \varphi_n(x) \quad (2.7)$$

para todo $x \in E$.

De modo análogo, de $\ell_q(\ell_p) \xrightarrow{1} \ell_\infty(\ell_p)$ e observando que $T_x((\varphi_n^k)_{n=1}^\infty) = ((\varphi_n^k(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty$, a expressão (2.5) implica em

$$(\varphi_n^k(x_j))_{n=1}^\infty \xrightarrow{k} y^j \text{ em } \ell_p \quad (2.8)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Novamente, por $\ell_p \xrightarrow{1} \ell_\infty$ e (2.8), obtemos

$$\varphi_n^k(x_j) \xrightarrow{k} y_n^j \text{ em } \mathbb{K} \quad (2.9)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $j \in \mathbb{N}$, onde $y = (y^j)_{j=1}^\infty = ((y_n^j)_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty$. Juntando (2.7), (2.9) e usando a unicidade de limite, temos

$$\varphi_n(x_j) = y_n^j \quad (2.10)$$

para todos $n, j \in \mathbb{N}$, donde por (2.10) obtemos

$$T_x(\varphi^k) = ((\varphi_n^k(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty = ((y_n^j)_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty = y.$$

Isto prova que o gráfico de T_x é fechado e, portanto, $\|\cdot\|_{q,p}$ está bem definida.

Vamos verificar as propriedades de norma na função $\|\cdot\|_{q,p}$. Para isso, considere $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Temos $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} \geq 0$, pois $|\varphi_n(x_j)| \geq 0$ para todo $n, j \in \mathbb{N}$. Se $x_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\varphi_n(x_j) = 0$ quaisquer que sejam $j \in \mathbb{N}$ e $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}$. Assim,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} = 0.$$

Reciprocamente,

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} = 0 &\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} = 0, \forall (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p = 0, \forall (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')} \text{ e } \forall j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi_n(x_j) &= 0, \forall (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')} \text{ e } \forall j \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow x_j &= 0, \forall j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

onde a última implicação segue do Teorema de Hahn-Banach e do fato que a sequência $\varphi \cdot e_1$, com $\varphi \in B_{E'}$, pertence a $B_{\ell_p^w(E')}$.

Temos ainda

$$\begin{aligned} \|\lambda(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} &= \|(\lambda x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(\lambda x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |\lambda| \cdot \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |\lambda| \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p}. \end{aligned}$$

A última propriedade a ser provada é a desigualdade triangular.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} &= \|(x_j + y_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j + y_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \|(\varphi_n(x_j + y_j))_{n=1}^\infty\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \|(\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty + (\varphi_n(y_j))_{n=1}^\infty\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty (\|(\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty\|_p + \|(\varphi_n(y_j))_{n=1}^\infty\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \|(\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} + \\ &\quad + \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \|(\varphi_n(y_j))_{n=1}^\infty\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} + \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $\|\cdot\|_{q,p}$ é uma norma em $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$. □

Como comentado inicialmente, neste capítulo, estamos sempre considerando E um espaço de Banach. Nessa condição, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1. $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{q,p}$.

Demonstração. Seja $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotamos $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} k, r \geq k_0 &\Rightarrow \|x^k - x^r\|_{q,p} < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \left\| (x_j^k - x_j^r)_{j=1}^\infty \right\|_{q,p} < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j^k - x_j^r)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j^k - x_j^r)|^p \right)^{\frac{q}{p}} < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^q, \forall (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j^k - x_j^r)|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p, \forall (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}, \forall j \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow |\varphi_n(x_j^k - x_j^r)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}, \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sabendo que $\ell_p^w(\cdot)$ é classe de sequência, temos $\|\varphi \cdot e_j\|_{w,p} = \|\varphi\|$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $\varphi \in E'$, ou seja, $\varphi \cdot e_j \in B_{\ell_p^w(E')}$. Assim, usando este fato, a implicação (2.12) e o Teorema de Hahn-Banach, obtemos

$$\begin{aligned} k, r \geq k_0 &\Rightarrow |\varphi(x_j^k - x_j^r)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall \varphi \in B_{E'}, \forall j \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \|x_j^k - x_j^r\|_E = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_j^k - x_j^r)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Segue que, para cada $j \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em E . Sendo E um espaço de Banach, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $x_j := \lim_k x_j^k \in E$.

Afirmção: $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$ e $x^k \rightarrow x$.

Fazendo $r \rightarrow \infty$ na implicação (2.11), obtemos

$$\|x^k - x\|_{q,p} = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j^k - x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad (2.13)$$

sempre que $k \geq k_0$ e, conseqüentemente, $x^k \rightarrow x$. Por outro lado, de (2.13) e $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$ ser espaço vetorial, segue

$$x = x^{k_0} - (x^{k_0} - x) = (x_j^{k_0})_{j=1}^\infty - (x_j^{k_0} - x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E).$$

Isto conclui nossa demonstração. $\square$

A partir de agora apresentamos resultados de inclusão e coincidência do espaço das sequências mid (q, p) -somáveis com alguns dos espaços de sequências apresentados no primeiro capítulo.

Proposição 2.2. *Se $q \leq r$, então $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_{r,p}^{\text{mid}}(E)$, para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Seja $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$. Por definição $((\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_p)$, para todo $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(E')$. De $q \leq r$, sabemos que

$$\ell_q(\ell_p) \xhookrightarrow{1} \ell_r(\ell_p)$$

e, consequentemente, $((\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_r(\ell_p)$, para todo $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(E')$. Isto é, $x \in \ell_{r,p}^{\text{mid}}(E)$. $\square$

Para a proposição seguinte, vamos definir o que seria um subconjunto normante.

Definição 2.2. Seja E um espaço de Banach. Um subconjunto N do dual E' é dito *normante* para E se

$$\|x\|_E = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in N, \|\varphi\| \leq 1\},$$

para todo $x \in E$.

Proposição 2.3. *Se $1 \leq p, q < \infty$, então*

$$\ell_q(E) \xhookrightarrow{1} \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_q^w(E)$$

Demonstração: Já vimos que $(\varphi, 0, 0, \dots) \in B_{\ell_p^w(E')}$ se φ estiver em $B_{E'}$. Assim, se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$, temos

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{(\varphi, 0, 0, \dots) \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p}. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_q^w(E)$.

Para a próxima inclusão vamos usar o seguinte fato: O conjunto $J_E(B_E)$ é normante de E'' e enxergando E como subconjunto de E'' , segue que

$$\|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w}^p = \sup_{x \in B_E} \sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x)|^p,$$

para todo $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$.

Então, se $(x_j)_{j=1}^\infty$ em $\ell_q(E)$, definindo o seguinte conjunto $J = \{j \in \mathbb{N} : x_j \neq 0\}$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j \in J} \left(\sum_{n=1}^\infty \left| \varphi_n \left(\frac{x_j}{\|x_j\|} \cdot \|x_j\| \right) \right|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{j \in J} \|x_j\|^q \cdot \left(\sum_{n=1}^\infty \left| \varphi_n \left(\frac{x_j}{\|x_j\|} \right) \right|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sum_{j \in J} \left(\|x_j\|^q \cdot \left(\sup_{x \in B_E} \sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sup_{x \in B_E} \sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j \in J} \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w} \cdot \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w} \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q, \end{aligned}$$

para todo $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$. Daí,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q$$

e com isso, fica provado que $\ell_q(E) \xhookrightarrow{1} \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$. □

Observação 2.2. Das inclusões exibidas ao final da Seção 1.1 e da Proposição 2.3, obtemos a cadeia

$$c_{00}(E) \subseteq \ell_q(E) \xhookrightarrow{1} \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_q^w(E) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(E)$$

donde se conclui, junto a todo o exposto na seção, que $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(\cdot)$ é uma classe de seqüências.

A próxima proposição estabelece condições de coincidência para os espaços na cadeia apresentada na observação acima.

Para o próximo resultado necessitaremos dos fatos apresentados na observação abaixo.

Observação 2.3. (a) Seja $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E)$. É imediato que o operador

$$\begin{aligned} \psi_x : E' &\longrightarrow \ell_q \\ \varphi &\longmapsto (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty, \end{aligned}$$

está bem definido, é linear e contínuo, com $\|\psi_x\| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q}$.

(b) Se $q \leq p$, a desigualdade de Minkowski garante que

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 2.1. *Seja $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E)$. Considere as seguintes afirmações:*

- (i) $x \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$;
- (ii) $\psi_x \in \Pi_p(E', \ell_q)$.

Então

(a) Se $q \leq p$, então (i) implica (ii) e $\pi_p(\psi_x) \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p}$.

(b) Se $q \geq p$, então (ii) implica (i) e $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} \leq \pi_p(\psi_x)$.

Quando $p = q$, (a) e (b) garantem que (i) é equivalente a (ii) e $\pi_p(\psi_x) = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p}$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $x \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$. Vamos mostrar que o operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{\psi_x} : \ell_p^w(E') &\longrightarrow \ell_p(\ell_q) \\ (\varphi_n)_{n=1}^\infty &\longmapsto ((\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty)_{n=1}^\infty, \end{aligned}$$

está bem definido. Com efeito, de $q \leq p$ e da Observação 2.3, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^\infty \|\psi_x(\varphi_n)\|_q^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \end{aligned}$$

sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$. Assim, $\widehat{\psi_x}$ está bem definido e, consequentemente, $\psi_x \in \Pi_p(E', \ell_q)$. De $\pi_p(\psi_x) = \|\widehat{\psi_x}\|$, segue novamente da Observação 2.3 que $\pi_p(\psi_x) \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Se $\psi_x \in \Pi_p(E', \ell_q)$, da Observação 2.3 e $q \geq p$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^\infty \|\psi_x(\varphi_n)\|_q^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \end{aligned}$$

para todo $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$. Segue da desigualdade acima que $x \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$ e

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p} \leq \pi_p(\psi_x).$$

□

Sendo $p \leq s$, temos (ver Seção 1.2)

$$\Pi_p(E; F) \xhookrightarrow{1} \Pi_s(E; F). \quad (2.14)$$

e usando essa inclusão e o Teorema 2.1, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Se $q \leq p \leq s \leq r$, então $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_{r,s}^{\text{mid}}(E)$. Em particular, $\ell_p^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_s^{\text{mid}}(E)$, sempre que $p \leq s$.*

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} x = (x_j)_{j=1}^\infty &\in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) \xrightarrow{2.1} \psi_x \in \Pi_p(E'; \ell_q) \\ &\xrightarrow{2.14} \psi_x \in \Pi_s(E'; \ell_q) \\ &\Rightarrow \psi_x \in \Pi_s(E'; \ell_r) \\ &\xrightarrow{2.1} x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{r,s}^{\text{mid}}(E). \end{aligned}$$

E, ainda do Teorema 2.1 e da inclusão (2.14), obtém-se

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{r,s} \leq \pi_s(\psi_x) \leq \pi_p(\psi_x) \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p}.$$

Isso finaliza nossa demonstração. □

É importante ressaltar que os argumentos e ferramentas construídos em [14] e em

[5] não davam conta da inclusão $\ell_p^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_s^{\text{mid}}(E)$, sempre que $p \leq s$. Aqui essa inclusão sai como caso particular das construções em [9].

Para a próxima proposição precisaremos do lema abaixo.

Lema 2.2. *Sejam E, F espaços de Banach, $(\psi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(F')$ e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então $(\psi_n \circ T)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$ e, mais ainda,*

$$\|(\psi_n \circ T)_{n=1}^\infty\|_{w,p} \leq \|T\| \cdot \|(\psi_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p}.$$

Demonstração: Seja $T' : F' \longrightarrow E'$ o operador adjunto de T . Sabendo que a classe de sequências $\ell_p^w(\cdot)$ é linearmente estável e $T' \in \mathcal{L}(F'; E')$, segue que o operador induzido $\widehat{T}' : \ell_p^w(F') \longrightarrow \ell_p^w(E')$ está bem definido (é linear) e portanto

$$(\psi_n \circ T)_{n=1}^\infty = (T'(\psi_n))_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E').$$

Além disso, por um argumento de gráfico fechado, o operador induzido $\widehat{T}' : \ell_p^w(F') \longrightarrow \ell_p^w(E')$ é contínuo e $\|\widehat{T}'\| = \|T'\| = \|T\|$. Assim,

$$\begin{aligned} \|(\psi_n \circ T)_{n=1}^\infty\|_{w,p} &= \|(T'(\psi_n))_{n=1}^\infty\|_{w,p} \\ &\leq \|\widehat{T}'\| \cdot \|(\psi_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p} = \|T\| \cdot \|(\psi_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p}. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.5. $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(\cdot)$ é uma classe de sequências finitamente determinada e linearmente estável.

Demonstração: A Observação 2.2 já nos disse que $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(\cdot)$ é uma classe de sequências. Vamos mostrar que ela é finitamente determinada.

Com efeito, se $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{q,p} &= \sup_k \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \sup_k \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

então $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$ se, e somente se, $\sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{q,p} < \infty$.

Vejamos agora que $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(\cdot)$ é linearmente estável.

Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$, $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(F')$, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Do Lema 2.2, vale

$$(T'(\varphi_n))_{n=1}^\infty = (\varphi_n \circ T)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E'),$$

para todo $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(F')$. Como $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$,

$$((\varphi_n(T(x_j)))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty = ((\varphi_n \circ T(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_p),$$

para todo $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(F')$. O que mostra que $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$, isto é, o operador induzido $\widehat{T} : \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) \rightarrow \ell_{q,p}^{\text{mid}}(F)$ está bem definido.

Para mostrar $\|\widehat{T}\| = \|T\|$, veja que de ser $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(\cdot)$ uma classe de seqüências, vale

$$\|(0, \dots, 0, x, 0, \dots)\|_{q,p} = \|x\|_E$$

para todo espaço de Banach E e todo $x \in E$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}\| &= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)}} \|\widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{q,p} \\ &= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)}} \|(T(x_j))_{j=1}^\infty\|_{q,p} \\ &\geq \sup_{x \in B_E} \|(0, \dots, 0, T(x), 0, \dots)\|_{q,p} \\ &= \sup_{x \in B_E} \|T(x)\| = \|T\|. \end{aligned}$$

Para a desigualdade contrária, observe que dado $(\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(F')}$, temos $(\psi_n \circ \frac{T}{\|T\|})_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}$. Com efeito, pelo Lema 2.2, temos

$$\left\| \left(\psi_n \circ \frac{T}{\|T\|} \right)_{n=1}^\infty \right\|_{w,p} = \frac{1}{\|T\|} \cdot \|(\psi_n \circ T)_{n=1}^\infty\|_{w,p} \leq \frac{1}{\|T\|} \cdot \|T\| \cdot \|(\psi_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p} \leq 1.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{q,p} &= \|(T(x_j))_{j=1}^\infty\|_{q,p} \\ &= \sup_{(\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(F')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\psi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{(\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(F')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |(\psi_n \circ T)(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|T\| \cdot \sup_{(\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(F')} } \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty \left| \left(\psi_n \circ \frac{T}{\|T\|} \right) (x_j) \right|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|T\| \cdot \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')} } \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|T\| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p},
\end{aligned}$$

o que implica em $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. □

2.2 Operadores mid somantes

Tendo em vista as inclusões estabelecidas na Proposição 2.3, apresentamos nesta seção extensões dos operadores mid e fraco mid somantes que aparecem originalmente em [5].

Para esta seção vamos considerar $1 \leq q, p, r < \infty$, E e F espaços de Banach.

Definição 2.3. Sejam $q \leq r$ e $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Dizemos que T é *absolutamente mid* $(r; q, p)$ -somante quando $(T(x_j)_{j=1}^\infty) \in \ell_r(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$.

Denotamos por $\Pi_{r;q,p}^{\text{mid}}(E; F)$ o espaço de todos os operadores absolutamente mid $(r; q, p)$ -somantes de E em F .

O resultado a seguir, obtido através da Proposição 1.5, oferece caracterizações para esses operadores.

Teorema 2.2. *As seguintes sentenças são equivalentes:*

(i) $T \in \Pi_{r;q,p}^{\text{mid}}(E, F)$.

(ii) *O operador induzido*

$$\begin{aligned}
\widehat{T} : \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) &\longrightarrow \ell_r(F) \\
(x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty
\end{aligned}$$

está bem definido é linear e contínuo.

(iii) *Existe uma constante $A > 0$ tal que $\|(T(x_j))_{j=1}^k\|_r \leq A \cdot \|(x_j)_{j=1}^k\|_{q,p}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x_j \in E$, $j = 1, \dots, k$.*

(iv) *Existe uma constante $A > 0$ tal que $\|(T(x_j))_{j=1}^\infty\|_r \leq A \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,p}$, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$.*

Além disso, $\|T\|_{\Pi_{r;q,p}^{\text{mid}}} := \|\widehat{T}\| = \inf \{A : (iii) \text{ é satisfeito}\}$ define uma norma para a classe $\Pi_{r;q,p}^{\text{mid}}(E; F)$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) De $T \in \Pi_{r;q,p}^{\text{mid}}(E; F)$, segue por definição

$$(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_r(F), \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E).$$

De (a) $\Rightarrow$ (b) na Proposição 1.5, com $n = 1$, segue que o operador $\widehat{T} : \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) \longrightarrow \ell_r(F)$ está bem definido, é linear e contínuo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Em nosso contexto, (ii) equivale à (b) e (iii) à (c) na Proposição 1.5, com $n = 1$. Como (b) implica (c) segue que (ii) implica (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Como $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(\cdot)$ e $\ell_r(\cdot)$ são finitamente determinadas, se (iii) acontece então

$$\begin{aligned} \left\| (T(x_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_r &= \sup_k \left\| (T(x_j))_{j=1}^k \right\|_r \\ &\leq A \cdot \sup_k \left\| (x_j)_{j=1}^k \right\|_{q,p} \\ &= A \cdot \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{q,p}, \end{aligned}$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Se vale (iv), então

$$\begin{aligned} (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E) &\Rightarrow \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{q,p} < \infty \\ &\Rightarrow \|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_r < \infty \\ &\Rightarrow (T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_r(F). \end{aligned}$$

Logo, $T \in \Pi_{r;q,p}^{\text{mid}}(E; F)$. □

Definição 2.4. Sejam $q \geq r$ e $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Dizemos que T é *fraco mid* $(q, p; r)$ -somante quando $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(E)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r^w(F)$.

O espaço de todos os operadores fraco mid $(q, p; r)$ -somantes de E em F será denotado por $W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E, F)$.

Como feito para os operadores absolutamente mid somantes, vamos apresentar algumas caracterizações para os operadores fraco mid somantes.

Teorema 2.3. *As seguintes sentenças são equivalentes:*

(i) $T \in W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E, F)$.

(ii) O operador induzido

$$\begin{aligned} \widetilde{T} : \ell_r^w(E) &\longrightarrow \ell_{q,p}^{\text{mid}}(F) \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto \widetilde{T}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (T(x_j))_{j=1}^{\infty} \end{aligned}$$

está bem definido, é linear e contínuo.

(iii) $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r^u(E)$.

(iv) O operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \ell_r^u(E) &\longrightarrow \ell_{q,p}^{\text{mid}}(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

está bem definido, é linear e contínuo.

(v) Existe uma constante $B > 0$ tal que $\|(T(x_j))_{j=1}^k\|_{q,p} \leq B \cdot \|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x_j \in E$, $j = 1, \dots, k$.

(vi) Existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq B \cdot \|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \cdot \|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, todo $x_j \in E$, $j = 1, \dots, k$, e todo $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(F')$.

(vii) Existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq B \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,r} \cdot \|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p},$$

para todo $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(E)$ e todo $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(F')$.

Além disso, $\|T\|_{W_{q,p;r}^{\text{mid}}} := \|\widetilde{T}\| = \|\widehat{T}\| = \inf \{B : (v) \text{ é satisfeito}\}$ define uma norma para a classe $W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E, F)$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Como $T \in W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E; F)$, então

$$(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(F), \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(E).$$

Isso equivale ao item (a) da Proposição 1.5, com $n = 1$, que por sua vez implica que o operador induzido $\widetilde{T} : \ell_r^w(E) \longrightarrow \ell_{q,p}^{\text{mid}}(F)$, está bem definido, é linear e contínuo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sabendo que $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(\cdot)$, $\ell_r^w(\cdot)$ são classes de seqüências finitamente determinadas, que $\ell_r^u(\cdot) < \ell_r^w(\cdot)$ e que (ii) implica $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(E)$, o item (b) da Proposição 1.6 é satisfeito e desse resultado obtém-se $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r^u(E)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Como feito em “(i) $\Rightarrow$ (ii)”, a implicação segue imediatamente da Proposição 1.5.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Segue da aplicação imediata de (b) $\Rightarrow$ (c) da Proposição 1.5

(v) $\Rightarrow$ (vi) Assumindo (v), temos

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} &= \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} \\
 &\cdot \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi_n}{\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}} (T(x_j)) \right|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} \\
 &\cdot \left(\sup_{(\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
 &= \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} \cdot \|(T(x_j))_{j=1}^k\|_{q,p} \\
 &\leq B \cdot \|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \cdot \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p},
 \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, todo $x_j \in E$, $j = 1, \dots, k$, e todo $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(F')$.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) Segue diretamente de $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(\cdot)$ e $\ell_r^w(\cdot)$ serem finitamente determinadas.

(vii) $\Rightarrow$ (i) Assumindo (vii), temos

$$\begin{aligned}
 (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r^w(E) &\Rightarrow \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,r} < \infty \\
 &\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad \forall (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E') \\
 &\Rightarrow (T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(F).
 \end{aligned}$$

Isso mostra que $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r^w(E)$, isto é, $T \in W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E; F)$. $\square$

Um cálculo elementar mostra que $\Pi_{r;q,p}^{\text{mid}}(E; F) = \{0\}$, quando $r < q$, e $W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E; F) = \{0\}$, quando $r > q$ (veja [4, Página 8]). Outro fato interessante é que $\Pi_{s;q,p}^{\text{mid}} \circ W_{q,p;r}^{\text{mid}} \subseteq \Pi_{s,r}$, na condição em que $1 \leq r \leq q \leq s < \infty$.

Observação 2.4. Como esperado, as classes acima recuperam as classes de operadores mid somantes definidas em [5] e [14], visto que $\Pi_{q;p,p}^{\text{mid}}(E; F) = \Pi_{q;p}^{\text{mid}}(E; F)$, $\Pi_{p;p,p}^{\text{mid}}(E; F) = \Pi_p^{\text{mid}}(E; F)$, $W_{q,q;p}^{\text{mid}}(E; F) = W_{q;p}^{\text{mid}}(E; F)$ e $W_{p,p;p}^{\text{mid}}(E; F) = W_p^{\text{mid}}(E; F)$.

As classes de operadores mid (q, p) -somantes formam ideais de Banach, como mostra

o seguinte resultado.

Teorema 2.4. *As classes $\left(\Pi_{r;q,p}^{\text{mid}}, \|\cdot\|_{\Pi_{r;q,p}^{\text{mid}}}\right)$ e $\left(W_{q,p;r}^{\text{mid}}, \|\cdot\|_{W_{q,p;r}^{\text{mid}}}\right)$ são ideais de Banach.*

Demonstração. Com efeito, sendo $\ell_{q,p}^{\text{mid}}(\cdot)$, $\ell_r(\cdot)$ linearmente estáveis e

$$\ell_{q,p}^{\text{mid}}(\mathbb{K}) = \ell_q(\mathbb{K}) = \ell_q \xrightarrow{1} \ell_r = \ell_r(\mathbb{K}),$$

pois $q \leq r$ por definição, segue do Teorema 1.4 que $\left(\Pi_{r;q,p}^{\text{mid}}, \|\cdot\|_{\Pi_{r;q,p}^{\text{mid}}}\right)$ é ideal de Banach.

Analogamente, de $\ell_r^w(\cdot)$ ser linearmente estável e

$$\ell_r^w(\mathbb{K}) = \ell_r^w = \ell_r \xrightarrow{1} \ell_q = \ell_q(\mathbb{K}) \xrightarrow{1} \ell_{q,p}^{\text{mid}}(\mathbb{K}),$$

pois na definição consideramos $q \geq r$, segue do Teorema 1.4 que $\left(W_{q,p;r}^{\text{mid}}, \|\cdot\|_{W_{q,p;r}^{\text{mid}}}\right)$ é também ideal de Banach. $\square$

Vamos encerrar esta seção com um resultado de inclusão de classes. Mais especificamente, vamos apresentar algumas relações entre classes de operadores absolutamente somantes, operadores Cohen fortemente somantes e a classe de operadores fraco mid (q, p) -somantes.

Teorema 2.5. *Seja $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Se o adjunto T' é absolutamente p -somante, isto é, $T' \in \Pi_p(F'; E')$, então $T \in W_{s,p;s}^{\text{mid}}(E; F)$ para todo $s \in [p, \infty)$. Isto equivale a $\Pi_p^{\text{dual}} \subseteq W_{s,p;s}^{\text{mid}}$, se $s \in [p, \infty)$.*

Demonstração. Sejam $k, l \in \mathbb{N}$. Para todo $x_j \in E$, com $j = 1, \dots, k$, e toda sequência $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(F')$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=1}^l |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{s}{p}} \right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=1}^l |T'(\varphi_n)(x_j)|^p \right)^{\frac{s}{p}} \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^l \left(\sum_{j=1}^k |T'(\varphi_n)(x_j)|^s \right)^{\frac{p}{s}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^l \|T'(\varphi_n)\|^p \left(\sum_{j=1}^k \left| \frac{T'(\varphi_n)}{\|T'(\varphi_n)\|}(x_j) \right|^s \right)^{\frac{p}{s}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|(T'(\varphi_n))_{n=1}^l\|_p \cdot \left(\left(\sup_{\psi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^k |\psi(x_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|(T'(\varphi_n))_{n=1}^l\|_p \cdot \|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,s} \\ &\leq \pi_p(T') \cdot \|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,s} \cdot \|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p}. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $l \rightarrow \infty$ obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{s}{p}} \right)^{\frac{1}{s}} \leq \pi_p(T') \cdot \|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,s} \cdot \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p},$$

sempre que $x_j \in E$ ($j = 1, \dots, k$) e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(F')$. O item (vi) do Teorema 2.3 garante que $T \in W_{s,p;s}^{\text{mid}}(E; F)$, para todo $s \in [p, \infty)$. $\square$

Abaixo, segue uma consequência desse teorema, que relaciona as classes de operadores Cohen fortemente somantes (indicamos [8] e [10] para um estudo detalhado sobre essa classe de operadores) com a classe dos operadores fraco mid somantes.

Corolário 2.1. *Considere $1 \leq p < \infty$ e p^* o seu conjugado, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Então, $\mathcal{D}_{p^*} \subseteq W_p^{\text{mid}}$*

Demonstração. Sabendo que $\mathcal{D}_{p^*} \stackrel{1}{=} \Pi_p^{\text{dual}}$ (veja [10, Theorem 2.2.2]), o Teorema 2.5 garante que

$$\mathcal{D}_{p^*} \stackrel{1}{=} \Pi_p^{\text{dual}} \subseteq W_{p,p;p}^{\text{mid}} = W_p^{\text{mid}}.$$

$\square$

2.3 Uma relação entre as teorias linear e multilinear

Nesta seção vamos mostrar uma relação entre a teoria linear de operadores mid somantes e a teoria de operadores múltiplo somantes. Para isso, vamos exibir uma aplicação bilinear que faz papel fundamental nesse processo.

Seja $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e considere

$$\begin{aligned} \Phi_T : F' \times E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\varphi, x) &\longmapsto \Phi_T(\varphi, x) = \varphi(T(x)) \end{aligned}$$

que está bem definida (claro), é bilinear e contínua. Com efeito,

$$\Phi_T(\varphi + \lambda\psi, x) = (\varphi + \lambda\psi)(T(x)) = \varphi(T(x)) + \lambda\psi(T(x)) = \Phi_T(\varphi, x) + \lambda\Phi_T(\psi, x),$$

para todos $\varphi, \psi \in F'$, $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Por outro lado,

$$\Phi_T(\varphi, x + \lambda y) = \varphi(T(x) + \lambda T(y)) = \varphi(T(x)) + \lambda\varphi(T(y)) = \Phi_T(\varphi, x) + \lambda\Phi_T(\varphi, y),$$

para todos $\varphi \in F'$, $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Portanto, Φ_T é bilinear. Da continuidade de T e de φ , segue que

$$|\varphi(T(x))| \leq \|\varphi\| \|T\| \|x\|,$$

para todo $(\varphi, x) \in F' \times E$, e a continuidade de Φ_T segue do Teorema 1.1. Assim, $\Phi_T \in \mathcal{L}(F', E; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(F', E)$.

Vejamos que esta aplicação bilinear estabelece a relação entre as teorias linear e multilinear que falamos.

Tendo em vista que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_T(\varphi_n, x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}},$$

juntando-se a Definição 1.5 e o Teorema 2.3 item (vii), obtemos imediatamente o

Teorema 2.6. *Considere $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Temos $T \in W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E; F)$ se, e somente se, $\Phi_T \in \Pi_{p,q;p,r}^2(F', E; \mathbb{K})$.*

Com este teorema, os resultados de inclusões e coincidência conhecidos entre classes de operadores múltiplo somantes podem ajudar na teoria de operadores mid somantes.

Corolário 2.2. *Sejam E e F espaços de Banach. Para uma escolha admissível de parâmetros q, q_1, p, p_1, r e r_1 , tem-se:*

- (a) $\Pi_{p,q;p,r}^2(F', E; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(F', E; \mathbb{K}) \Rightarrow W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E; F) = \mathcal{L}(E; F)$.
- (b) $\Pi_{p,q;p,r}^2(F', E; \mathbb{K}) \subseteq \Pi_{p_1,q_1;p_1,r_1}^2(F', E; \mathbb{K}) \Rightarrow W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E; F) \subseteq W_{q_1,p_1;r_1}^{\text{mid}}(E; F)$.

Demonstração. Com efeito, o item (a) segue de

$$\begin{aligned} T \in \mathcal{L}(E; F) &\Rightarrow \Phi_T \in \mathcal{L}(F', E; \mathbb{K}) = \Pi_{p,q;p,r}^2(F', E; \mathbb{K}) \\ &\Rightarrow T \in W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E; F), \end{aligned}$$

onde a segunda implicação segue do Teorema 2.6. Logo, $W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E; F) = \mathcal{L}(E; F)$.

A prova do item (b) segue de um argumento análogo da prova do item (a). □

Vamos às aplicações dos resultados acima. Para a primeira, precisamos de uma definição.

Definição 2.5. Dizemos que um espaço normado E tem *cotipo* $q \geq 2$ quando existe $C \geq 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x_1, \dots, x_n \in E$, temos

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde r_i 's são funções de Rademacher.

Corolário 2.3. *Sejam E e F espaços de Banach.*

- i) $1 \leq p \leq q < 2 \Rightarrow W_p^{\text{mid}}(E; F) \subset W_q^{\text{mid}}(E; F)$.
- ii) $1 \leq p, q < 2$ e E, F' têm cotipo 2 $\Rightarrow W_p^{\text{mid}}(E; F) = W_q^{\text{mid}}(E; F)$.
- iii) $1 \leq p \leq q < \infty$, E e F são $\mathcal{L}_\infty$ -espaços $\Rightarrow W_p^{\text{mid}}(E; F) \subset W_q^{\text{mid}}(E; F)$.
- iv) $1 \leq p \leq 2 \Rightarrow W_p^{\text{mid}}(\ell_1; c_0) = \mathcal{L}(\ell_1; c_0)$.

Demonstração. (i) Se $T \in W_p^{\text{mid}}(E; F)$, pelo Teorema 2.6, temos $\Phi_T \in \Pi_p^2(F', E; \mathbb{K})$. Por [21, Theorem 3.4], obtemos que $T \in \Pi_q^2(F', E; \mathbb{K})$ e usando novamente o Teorema 2.6 obtemos $T \in W_q^{\text{mid}}(E; F)$.

(ii) Combinando o Teorema 2.6 com o resultado em [6, Theorem 4.6], temos $W_q^{\text{mid}}(E; F) \subset W_p^{\text{mid}}(E; F)$.

(iii) Segue da combinação imediata de [6, Theorem 4.9] e do Teorema 2.6.

(iv) Se $T \in \mathcal{L}(\ell_1; c_0)$, então $\Phi_T \in \mathcal{L}(\ell_1, \ell_1; \mathbb{K})$. De [22, Theorem 3.4] segue que $\Phi_T \in \Pi_p^2(\ell_1, \ell_1; \mathbb{K})$. Com isso o Teorema 2.6 garante que $T \in W_p^{\text{mid}}(\ell_1; c_0)$ e assim $W_p^{\text{mid}}(\ell_1; c_0) = \mathcal{L}(\ell_1; c_0)$. $\square$

A título de curiosidade para o leitor, é fato que no próprio artigo [9], referência principal usada neste capítulo, é provado que o item (i) ainda é válido quando consideramos $1 \leq p \leq q < \infty$, porém neste caso é usado um argumento baseado no Teorema de Dominação de Pietsch.

A última proposição da seção não está diretamente associado à relação entre as teorias linear e multilinear como os resultados anteriores. Entretanto, deixamos-a nesta seção porque, de certa forma, ele complementa os resultados anteriores.

O resultado de inclusão é mais geral no sentido de “maior liberdade” aos parâmetros.

Proposição 2.6. *Se $1 \leq p, q, r, s, t < \infty$, com $r \leq q$, $s \leq t$ e $1/r - 1/q \leq 1/s - 1/t$, então $W_{q,p;r}^{\text{mid}} \xrightarrow{1} W_{t,p;s}^{\text{mid}}$.*

Demonstração. Sejam $\varphi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$, $T \in W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E; F)$ e considere o operador $R_{\varphi,T} : E \rightarrow \ell_p$ definido por $R_{\varphi,T}(x) = (\varphi_n(T(x)))_{n=1}^\infty$.

Como B_F , visto como subconjunto de F'' , é normante, então vale

$$\|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p}^p = \sup_{y \in B_F} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(y)|^p \right).$$

Assim, para todo $x \in E$ com $T(x) \neq 0$, temos

$$\|R_{\varphi,T}(x)\|_p^p = \|(\varphi_n(T(x)))_{n=1}^\infty\|_p^p$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(T(x))|^p \\
&= \|T(x)\|^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_n \left(\frac{T(x)}{\|T(x)\|} \right) \right|^p \\
&\leq \|T(x)\|^p \cdot \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}^p,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

e quando $T(x) = 0$ a desigualdade $\|R_{\varphi,T}(x)\|_p^p \leq \|T(x)\|^p \cdot \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}^p$ é trivialmente satisfeita. Isto prova que $R_{\varphi,T}$ está bem definida e é fácil mostrar que ela é linear.

Por (2.15), obtemos ainda

$$\|R_{\varphi,T}(x)\|_p \leq \|T\| \|x\| \|\varphi\|_{w,p}, \tag{2.16}$$

para todo $x \in E$ donde $\|R_{\varphi,T}\|_p \leq \|T\| \|\varphi\|_{w,p}$.

Note que $R_{\varphi,T} \in \Pi_{q;r}(E; \ell_p)$ se, e somente se, $T \in W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E; F)$, pois o induzido $\widehat{R_{\varphi,T}} : \ell_r^w(E) \rightarrow \ell_q(\ell_p)$ dado por $\widehat{R_{\varphi,T}}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = ((\varphi_n(T(x_j)))_{n=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}$ está bem definido se, e somente se, $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}^{\text{mid}}(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r^w(E)$. Assim, como por hipótese temos $T \in W_{q,p;r}^{\text{mid}}(E; F)$, obtemos $R_{\varphi,T} \in \Pi_{q;r}(E; \ell_p)$. Segue das hipóteses sobre os parâmetros que $\Pi_{q;r}(E; \ell_p) \xrightarrow{1} \Pi_{t,s}(E; \ell_p)$. Logo, $R_{\varphi,T} \in \Pi_{t,s}(E; \ell_p)$, com

$$\pi_{t,s}(R_{\varphi,T}) \leq \pi_{q,r}(R_{\varphi,T}) \leq \|T\|_{W_{q,p;r}^{\text{mid}}} \cdot \|\varphi\|_{w,p},$$

onde a última desigualdade decorre de (2.16). Daí temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{t}{p}} \right)^{\frac{1}{t}} &\leq \pi_{t,s}(R_{\varphi,T}) \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,s} \\
&\leq \|T\|_{W_{q,p;r}^{\text{mid}}} \cdot \|\varphi\|_{w,p} \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,s}
\end{aligned}$$

e isto nos diz que $T \in W_{t,p;s}^{\text{mid}}(E; F)$. □

Capítulo 3

Normas tensoriais traçadas e operadores múltiplo somantes

Nesse capítulo apresentaremos as classes dos operadores múltiplos somantes sob uma abordagem de produto tensorial, tendo como interesse a caracterização desses operadores por meio da continuidade de aplicações entre produtos tensoriais. Para ser mais específico, vamos apresentar uma relação, estabelecida no artigo [20] (nossa referência principal neste capítulo), entre operadores n -lineares múltiplo somantes e uma aplicação $(n - 1)$ -linear definida entre produtos tensoriais. Em seguida, apresentamos aplicações decorrentes dessa relação. As referências a definições de objetos e fatos complementares a este objetivo são [11] e [19].

3.1 Considerações iniciais

Sabemos também que $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é absolutamente p -somante equivale a existir uma constante $C > 0$ tal que, para toda sequência finita $(x_j)_{j=1}^n$ em E , tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p \right)^{1/p} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{1/p}.$$

Relembre, da Seção 1.6, que $\ell_p \otimes_{\Delta_p} F$ pode ser identificado como um subespaço de $\ell_p(F)$ e que $\ell_p^u(E) \stackrel{1}{=} \ell_p \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E$ (ver (1.4)). Usando essas identificações, em [11, Section 11.1] encontra-se a seguinte caracterização equivalente para operadores absolutamente p -somantes, em termos de produtos tensoriais: um operador contínuo $T : E \rightarrow F$ é absolutamente p -somante se, e somente, se a aplicação $\text{id}_{\ell_p} \otimes T : \ell_p \otimes_{\varepsilon} E \rightarrow \ell_p \otimes_{\Delta_p} F$ dada por

$$(\text{id}_{\ell_p} \otimes T) \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes T(x_i)$$

é contínua.

Apenas para a compreensão do leitor, e isso será importante mais a frente, é necessário notar a relação $\text{id}_{\ell_p} \otimes T : \ell_p \otimes_\varepsilon E \rightarrow \ell_p \otimes_{\Delta_p} F$ é contínuo com a caracterização da Proposição 1.1 item (v): $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^u(E)$, quando T é p -somante.

O conceito também pode ser posto da seguinte forma: pondo ℓ_0^p como o subespaço de ℓ_p das sequências que tem apenas um número finito de coordenadas não-nulas e identificando as sequências finitas $(x_j)_{j=1}^n$ em E por $\sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i \in \ell_0^p \otimes E$ (e vice-versa), obtemos que T é p -somante se, e somente, se a aplicação $\hat{T} : \ell_0^p \otimes_\varepsilon E \rightarrow \ell_p \otimes_{\Delta_p} F$ dada por

$$\hat{T} \left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i \right) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes T(x_i)$$

é contínua ($\hat{T}$ é a restrição de $\text{id}_{\ell_p} \otimes T$ à $\ell_0^p \otimes E$).

Vejam a definição de operadores múltiplo p -somantes, caso particular da Definição 1.5 em que todos os parâmetros p_i, q_i são iguais a p , e em seguida uma equivalência desta sob a ótica de produtos tensoriais.

Definição 3.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n, F$ espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que T é *múltiplo p -somante* se existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} \|T(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_n}^{(n)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^n \|(x_{j_i}^{(i)})_{j_i=1}^{m_i}\|_p,$$

para todo $x_{j_i}^{(i)} \in E_i$, com $j_i = 1, \dots, m_i$ e $i = 1, \dots, n$. Mantendo a notação da Definição 1.5, denotamos por $\Pi_p^n(E_1, \dots, E_n; F)$ o espaço de todos os operadores múltiplo p -somantes de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F e definimos $\|T\|_{\Pi_p^n}$ como o ínfimo das constantes $C > 0$ que satisfazem a desigualdade acima.

Em termos de produtos tensoriais, a seguinte definição equivalente para operadores múltiplo p -somantes é apresentada em [20, Página 5]:

Definição 3.2. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n, F$ espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $1 \leq p < \infty$. O operador T é *múltiplo p -somante* se o operador linear associado

$$\begin{aligned} \tilde{T} : (\ell_0^p \otimes_\varepsilon E_1) \times \cdots \times (\ell_0^p \otimes_\varepsilon E_n) &\longrightarrow (\ell_p \otimes_{\Delta_p} \cdots \otimes_{\Delta_p} \ell_p) \otimes_{\Delta_p} F \\ ((x_{i_1}^1)_{i_1=1}^{m_1}, \dots, (x_{i_n}^n)_{i_n=1}^{m_n}) &\longmapsto \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \otimes T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_n}^n) \end{aligned}$$

é contínuo.

Quando $n = 1$, não é difícil perceber que $\tilde{T}$ coincide com $\text{id}_{\ell_p} \otimes T$ e, portanto, T será absolutamente p -somante.

3.2 Operadores multilineares (γ, α, p) -somantes

A partir da Definição 3.2, apresentamos uma generalização do conceito para duas normas razoáveis quaisquer. Relembre que uma norma α em $E \otimes F$ é dita razoável quando satisfaz $\varepsilon \leq \alpha \leq \pi$, onde ε e π são as normas injetiva e projetiva, respectivamente, sobre o mesmo produto tensorial.

Definição 3.3. Sejam $n \in \mathbb{N}$, α e γ duas normas razoáveis. Um operador n -linear $T : E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$ é dito *múltiplo (γ, α, p) -somante* se o operador associado

$$\begin{aligned} \tilde{T} : (\ell_0^p \otimes_\gamma E_1) \times \cdots \times (\ell_0^p \otimes_\gamma E_n) &\longrightarrow (\ell_p \otimes_{\Delta_p} \cdots \otimes_{\Delta_p} \ell_p) \otimes_\alpha F \\ ((x_{i_1}^1)_{i_1=1}^{m_1}, \dots, (x_{i_n}^n)_{i_n=1}^{m_n}) &\longmapsto \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \otimes T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_n}^n) \end{aligned}$$

é contínuo.

Observação 3.1. A classe Π_p^n coincide com a classe dos operadores n -lineares múltiplo $(\varepsilon, \Delta_p, p)$ -somantes.

Exemplo 3.1. Vejamos mais um exemplo de como a definição acima se aplica. Um operador linear contínuo $T : E \rightarrow F$ é dito (q, p) -misto (ver [11, Proposition 32.4]) se satisfaz

$$\left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |\varphi_k(T(x_j))|^q \right)^{p/q} \right)^{1/p} \leq C \| (x_j)_{j=1}^m \|_{w,p} \cdot \| (\varphi_k)_{k=1}^n \|_q,$$

para algum $C > 0$, para todos $x_1, \dots, x_m \in E$ e $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in F'$. É mostrado em [11, Section 32.3], na simbologia lá usada, que T ser (q, p) -misto equivale a T ser múltiplo $(g_{p'}, \Delta_{q'}, q')$ -somante, onde p' e q' são os conjugados de p e q , respectivamente.

Mais exemplos serão apresentados nas aplicações do resultado principal do capítulo.

A propósito, vejamos uma construção que utilizaremos para estabelecer o resultado principal desse capítulo. Para mais informações sobre essa construção indicamos [11, Section 29].

Considere β e γ normas tensoriais em $E \otimes \ell_{p'}$ e $\ell_p \otimes F$, respectivamente. Defina $C : (E \otimes \ell_{p'}) \otimes (\ell_p \otimes F) \rightarrow E \otimes F$ por $C((a \otimes u) \otimes (v \otimes b)) = u(v)a \otimes b$, chamada de *contração tensorial*.

A *norma tensorial traçada* $\gamma \otimes_{\ell_p} \beta$ é por definição a norma quociente dada pelo produto tensorial projetivo, isto é, para cada $z \in E \otimes F$,

$$\gamma \otimes_{\ell_p} \beta(z) := \inf\{\pi(w) : w \in (E \otimes_{\beta} \ell_{p'}) \otimes_{\pi} (\ell_p \otimes_{\gamma} F), C(w) = z\}.$$

Em particular, quando as normas tensoriais são Δ_p e ε , tem-se $d_p = \Delta_p \otimes_{\ell_p} \varepsilon$ (ver [11, Proposition 1, Section 29.3]).

3.3 Uma relação entre “níveis” de linearidade

Agora apresentamos o resultado principal desse capítulo. Ele estabelece uma relação entre classes de operadores n -lineares (γ, α, p) -somantes pela continuidade de certos operadores $(n - 1)$ -lineares; uma espécie de procedimento de “redução de ordem de linearidade”.

Por simplicidade e sem perda de generalidade, todo o argumento abaixo será demonstrado no caso 3-linear e o resultado principal será posteriormente enunciado em sua versão n -linear, com $n \geq 2$. Além disso, fragmentaremos parte da demonstração presente em [20] em alguns lemas que são anunciados e provados a seguir.

Para os próximos resultados, observe que se

$$\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2} \in \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F',$$

então

$$\begin{aligned} \Delta_{p'} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2} \right) &= \Delta_{p'} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} e_{i_1} \otimes \left(\sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2} \right) \right) \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \Delta_{p'} \left(\sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2} \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \left(\sum_{i_2=1}^{m_2} \|\varphi_{i_1, i_2}\|^{p'} \right)^{\frac{p'}{p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \|\varphi_{i_1, i_2}\|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Lema 3.1. *Cada elemento $u \in \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F'$ pode ser escrito de maneira única*

por uma representação da forma

$$u = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2}.$$

Demonstração. Se

$$\sum_{i_1=1}^{m'_1} \sum_{i_2=1}^{m'_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \psi_{i_1, i_2}$$

é outra representação, completando com zeros se necessário, podemos supor que $m'_1 = m_1$ e $m'_2 = m_2$. Agora, para cada j_1, j_2 , com $1 \leq j_1 \leq m_1$ e $1 \leq j_2 \leq m_2$, e $y \in F$, podemos considerar

$$S_{j_1, j_2; y} := e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes y \in \ell_0^p \otimes \ell_0^p \otimes F$$

como um elemento no dual $\left(\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F' \right)'$, definindo-se

$$S_{j_1, j_2; y} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2} \right) := \varphi_{j_1, j_2}(y).$$

Com efeito, a boa definição de $S_{j_1, j_2; y}$ é óbvia. A aplicação é linear visto que, para $u = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \phi_{i_1, i_2}$, $v = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \gamma_{i_1, i_2} \in \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F'$ e λ escalar, tem-se

$$\begin{aligned} S_{j_1, j_2; y}(u + \lambda v) &= S_{j_1, j_2; y} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes (\phi_{i_1, i_2} + \lambda \gamma_{i_1, i_2}) \right) \\ &= (\phi_{j_1, j_2} + \lambda \gamma_{j_1, j_2})(y) \\ &= \phi_{j_1, j_2}(y) + \lambda \gamma_{j_1, j_2}(y) \\ &= S_{j_1, j_2; y}(u) + \lambda S_{j_1, j_2; y}(v). \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} |S_{j_1, j_2; y}(u)| &= |\varphi_{j_1, j_2}(y)| \\ &\leq \|\varphi_{j_1, j_2}\| \|y\| \\ &\leq \|y\| \cdot \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \|\varphi_{i_1, i_2}\|^{p'} \right)^{1/p'} \\ &= \|y\| \cdot \Delta_{p'}(u), \end{aligned}$$

o que nos diz que $S_{j_1, j_2; y}$ é contínuo. Por fim, como

$$0 = S_{j_1, j_2; y} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes (\varphi_{i_1, i_2} - \psi_{i_1, i_2}) \right) = (\varphi_{j_1, j_2} - \psi_{j_1, j_2})(y)$$

com $y \in F$ arbitrário, segue que $\varphi_{j_1, j_2} = \psi_{j_1, j_2}$ para todos $j_1 = 1, \dots, m_1$ e $j_2 = 1, \dots, m_2$. $\square$

Lema 3.2. *O elemento*

$$S := \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \sum_{j_3=1}^{m_3} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3) \in \ell_p \otimes \ell_p \otimes F$$

pode ser visto como um funcional em $(\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F')'$, definindo-se

$$S \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2} \right) := \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \varphi_{i_1, i_2} (T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3)).$$

Demonstração. A boa definição de S é óbvia e a linearidade pode ser mostrada como no lema anterior. A continuidade segue da desigualdade de Hölder, pois

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i_1, i_2=1}^{m_1, m_2} \varphi_{i_1, i_2} (T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3)) \right| &\leq \left| \sum_{i_1, i_2=1}^{m_1, m_2} \|\varphi_{i_1, i_2}\| \|T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3)\| \right| \\ &\leq \left(\sum_{i_1, i_2=1}^{m_1, m_2} \|\varphi_{i_1, i_2}\|^{p'} \right)^{1/p'} \left(\sum_{i_1, i_2=1}^{m_1, m_2} \|T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3)\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \Delta_{p'} \left(\sum_{i_1, i_2=1}^{m_1, m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2} \right) \|(T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3))_{i_1, i_2, i_3}\|_p \end{aligned}$$

e assim $\|S\| \leq \|(T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3))_{i_1, i_2, i_3}\|_p$. $\square$

Lema 3.3. *Para todos $(a_{i_k}^k)_{i_k=1}^{m_k} \in \ell_0^p \otimes E_k$, $k = 1, 2, 3$, e $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2, E_3; F)$, existe*

$$\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \in B_{\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F'}$$

satisfazendo

$$\Delta_p \left(\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} e_{i_1, i_2, i_3} \otimes T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3) \right) = \left| \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} \varphi_{i_1, i_2, i_3} (T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3)) \right|, \quad (3.2)$$

onde $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3}$ é denotado por e_{i_1, i_2, i_3} .

Demonstração. Note que a sequência

$$u = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} e_{i_1, i_2, i_3} \otimes T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3) \in \ell_0^p \otimes_{\Delta_p} \ell_0^p \otimes_{\Delta_p} F$$

é finita e pode, por uma nova indexação, ser associada a uma sequência $u = (T(a_j^1, a_j^2, a_j^3))_{j=1}^n$ no espaço $\ell_p^n(F) := \{F^n, \|\cdot\|_p\}$, para um certo $n \in \mathbb{N}$. Sabendo que $(\ell_p^n(F))' = \ell_{p'}^n(F')$, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi = (\varphi_j)_{j=1}^n$ de norma 1 em $\ell_{p'}^n(F')$ tal que $|\varphi(u)| = \|u\|_p$. Pelo que foi comentado acima, é fácil perceber que existe

$$\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \in B_{\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F'}$$

associada a φ e que

$$\begin{aligned} \Delta_p \left(\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} e_{i_1, i_2, i_3} \otimes T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3) \right) &= \left(\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} \|T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3)\|^p \right)^{1/p} \\ &= \|u\|_p = |\varphi(u)| \\ &= \left| \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} \varphi_{i_1, i_2, i_3}(T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3)) \right| \end{aligned}$$

□

Observação 3.2. a) Para uso no teorema a seguir, sendo γ uma norma tensorial, vamos escrever o significado da continuidade do operador $\tilde{T}$ na Definição 3.3 para o caso de um operador T (3-linear) múltiplo (γ, Δ_p, p) -somante:

- Um operador $T : E_1 \times E_2 \times E_3 \rightarrow F$ é múltiplo (γ, Δ_p, p) -somante se

$$\Delta_p \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=1}^{m_3} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3} \otimes T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3) \right) \leq \|\tilde{T}\| \prod_{k=1}^3 \gamma \left(\sum_{i_k=1}^{m_k} e_{i_k} \otimes a_{i_k}^k \right)$$

ou ainda

$$\|(T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3))_{i_1, i_2, i_3}\|_p \leq \|\tilde{T}\| \prod_{k=1}^3 \gamma \left(\sum_{i_k=1}^{m_k} e_{i_k} \otimes a_{i_k}^k \right).$$

b) Sendo $1 \leq p < \infty$ e γ uma norma tensorial, a norma traçada $\alpha = \gamma \otimes_{\ell_p} \Delta_{p'}^t$ assume a forma

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \gamma \otimes_{\ell_p} \Delta_{p'}^t(z) = \\ &= \inf \left\{ \Delta_{p'}^t \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes e_i \right) \gamma \left(\sum_{i=1}^m b_i \otimes e_i \right), C(w) = z \right\} \end{aligned}$$

onde $w = (\sum_{i=1}^n a_i \otimes e_i) \otimes (\sum_{i=1}^m e_i \otimes b_i) \in (E \otimes_{\Delta_p^t} \ell_{p'}) \otimes_{\pi} (\ell_p \otimes_{\gamma} F)$.

Apresentamos agora o teorema principal, em sua versão 3-linear.

Teorema 3.1. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e γ uma norma tensorial. Sendo $\alpha = \gamma \otimes_{\ell_p} \Delta_{p'}^t$ e $T : E_1 \times E_2 \times E_3 \rightarrow F$ um operador 3-linear, então são equivalentes:*

i) T é múltiplo (γ, Δ_p, p) -somante.

ii) A aplicação bilinear

$$\tilde{T}_3 : (\ell_0^p \otimes_{\gamma} E_1) \times (\ell_0^p \otimes_{\gamma} E_2) \rightarrow ((\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes_{\alpha} E_3)'$$

definida por

$$\begin{aligned} \tilde{T}_3((a_{i_1}^1)_{i_1=1}^{m_1}, (a_{i_2}^2)_{i_2=1}^{m_2}) & \left(\sum_{i_3=1}^{m_3} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \right) \otimes a_{i_3}^3 \right) \\ & := \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=1}^{m_3} \varphi_{i_1, i_2, i_3} (T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3)) \end{aligned}$$

está bem definida e é contínua.

Demonstração. Já sabemos, pelo Lema 3.1, que os elementos de $\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F'$ podem ser representados de maneira única por

$$\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2}.$$

Identificando $\ell_0^p \otimes E_j$ como um subespaço de $\ell_p(E_j)$, fixemos $(a_{i_j}^j)_{i_j=1}^{m_j} \in \ell_p(E_j)$, $j = 1, 2$, e ponhamos $\mathbf{a} = ((a_{i_1}^1)_{i_1=1}^{m_1}, (a_{i_2}^2)_{i_2=1}^{m_2})$.

Vejamos que $\tilde{T}_3(\mathbf{a})$ é um elemento em $((\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes_{\alpha} E_3)'$. Com efeito, a aplicação $B_{\tilde{T}_3(\mathbf{a})} : (\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \times E_3 \rightarrow \mathbb{K}$

$$\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2}, a^3 \right) \mapsto \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \varphi_{i_1, i_2} (T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a^3))$$

é uma forma bilinear, cuja linearização (que existe e é única pelo Teorema 1.5) coincide com $\tilde{T}_3(\mathbf{a})$. Portanto, $\tilde{T}_3(\mathbf{a})$ pertence ao dual algébrico de $(\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes E_3$.

Dado

$$\sum_{i_3=1}^{m_3} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \otimes a_{i_3}^3 \right) \in (\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes E_3,$$

usando o operador S do Lema 3.2, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left| \tilde{T}_3(\mathbf{a}) \left(\sum_{i_3=1}^{m_3} \left(\sum_{i_1, i_2=1}^{m_1, m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \otimes a_{i_3}^3 \right) \right) \right| = \left| \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} \varphi_{i_1, i_2, i_3} (T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3)) \right| = \\
 & = \left| S \left(\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \right) \right| \\
 & \leq \|S\| \cdot \Delta_{p'} \left(\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \right). \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

De $\|S\| \leq \|(T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3))_{i_1, i_2, i_3}\|_p$, fato provado no Lema 3.2, e como T é múltiplo (γ, Δ_p, p) -somante (ver Observação 3.2 item a)), obtemos

$$\begin{aligned}
 \|S\| & \leq \|(T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3))_{i_1, i_2, i_3}\|_p = \Delta_p \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=1}^{m_3} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3} \otimes T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3) \right) \\
 & \leq \|\tilde{T}\| \prod_{k=1}^3 \gamma \left(\sum_{i_k=1}^{m_k} e_{i_k} \otimes a_{i_k}^k \right). \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Pondo

$$z = \sum_{i_3=1}^{m_3} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \otimes a_{i_3}^3 \right)$$

e juntando (3.3) e (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
 |\tilde{T}_3(\mathbf{a})(z)| & \leq \|S\| \Delta_{p'} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=1}^{m_3} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \right) \\
 & \leq \|\tilde{T}\| \prod_{k=1}^3 \gamma \left(\sum_{i_k=1}^{m_k} e_{i_k} \otimes a_{i_k}^k \right) \Delta_{p'} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=1}^{m_3} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \right) \\
 & = \|\tilde{T}\| \prod_{k=1}^3 \gamma \left(\sum_{i_k=1}^{m_k} e_{i_k} \otimes a_{i_k}^k \right) \Delta_{p'} \left(\sum_{i_3=1}^{m_3} e_{i_3} \otimes \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \right) \right) \\
 & = \|\tilde{T}\| \prod_{k=1}^3 \gamma \left(\sum_{i_k=1}^{m_k} e_{i_k} \otimes a_{i_k}^k \right) \Delta_{p'}^t \left(\sum_{i_3=1}^{m_3} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \right) \otimes e_{i_3} \right) \\
 & = \|\tilde{T}\| \prod_{k=1}^2 \gamma \left(\sum_{i_k=1}^{m_k} e_{i_k} \otimes a_{i_k}^k \right) \\
 & \quad \cdot \gamma \left(\sum_{i_3=1}^{m_3} e_{i_3} \otimes a_{i_3}^3 \right) \Delta_{p'}^t \left(\sum_{i_3=1}^{m_3} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \right) \otimes e_{i_3} \right)
 \end{aligned}$$

o que implica em (ver a Observação 3.2 item b))

$$\left| \tilde{T}_3(\mathbf{a})(z) \right| \leq \|\tilde{T}\| \prod_{k=1}^2 \gamma \left(\sum_{i_k=1}^{m_k} e_{i_k} \otimes a_{i_k}^k \right) \alpha(z).$$

Disso e do Teorema 1.1 segue que $\tilde{T}_3(\mathbf{a}) \in \left((\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes_{\alpha} E_3 \right)'$ e, portanto, $\tilde{T}_3$ está bem definido. Além disso, vale

$$\|\tilde{T}_3(\mathbf{a})\| \leq \|\tilde{T}\| \prod_{k=1}^2 \gamma \left(\sum_{i_k=1}^{m_k} e_{i_k} \otimes a_{i_k}^k \right)$$

o que prova a continuidade de $\tilde{T}_3$ e $\|\tilde{T}_3\| \leq \|\tilde{T}\|$.

Reciprocamente, suponha que ii é válido. Fixemos $(a_{i_1}^1)_{i_1=1}^{m_1}$, $(a_{i_2}^2)_{i_2=1}^{m_2}$ e $(a_{i_3}^3)_{i_3=1}^{m_3}$ em seus respectivos espaços e denotemos $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3}$ por e_{i_1, i_2, i_3} . Pelo Lema 3.3, existe

$$\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \in B_{\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F'}$$

tal que

$$\Delta_p \left(\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} e_{i_1, i_2, i_3} \otimes T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3) \right) = \left| \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} \varphi_{i_1, i_2, i_3} (T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, a_{i_3}^3)) \right| = (*).$$

Disso e da continuidade de $\tilde{T}_3$, obtemos

$$\begin{aligned} (*) &= \left| \tilde{T}_3(\mathbf{a}) \left(\sum_{i_3=1}^{m_3} \left(\sum_{i_1, i_2=1}^{m_1, m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \otimes a_{i_3}^3 \right) \right) \right| \\ &\leq \|\tilde{T}_3(\mathbf{a})\| \cdot \alpha \left(\sum_{i_3=1}^{m_3} \left(\sum_{i_1, i_2=1}^{m_1, m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \otimes a_{i_3}^3 \right) \right) \\ &\leq \|\tilde{T}_3\| \prod_{k=1}^2 \gamma \left(\sum_{i_k=1}^{m_k} e_{i_k} \otimes a_{i_k}^k \right) \alpha \left(\sum_{i_3=1}^{m_3} \left(\sum_{i_1, i_2=1}^{m_1, m_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \right) \otimes a_{i_3}^3 \right) \\ &\leq \|\tilde{T}\| \prod_{k=1}^3 \gamma \left(\sum_{i_k=1}^{m_k} e_{i_k} \otimes a_{i_k}^k \right) \Delta_{p'} \left(\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{m_1, m_2, m_3} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \varphi_{i_1, i_2, i_3} \right) \\ &= \|\tilde{T}\| \prod_{k=1}^3 \gamma \left(\sum_{i_k=1}^{m_k} e_{i_k} \otimes a_{i_k}^k \right). \end{aligned}$$

Isto prova que T é múltiplo (γ, Δ_p, p) -somante. $\square$

Finalmente, exibimos o teorema principal acima demonstrado, em sua versão mais geral.

Teorema 3.2. *Sejam $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$ e γ uma norma tensorial. Ponha $\alpha = \gamma \otimes_{\ell_p} \Delta_p^t$. Se $T : E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$ é um operador n -linear então são equivalentes:*

i) T é múltiplo (γ, Δ_p, p) -somante.

ii) A aplicação $(n-1)$ -linear

$$\tilde{T}_n : (\ell_0^p \otimes_{\gamma} E_1) \times \cdots \times (\ell_0^p \otimes_{\gamma} E_{n-1}) \rightarrow \left((\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} \overset{n-1}{\cdot} \otimes_{\Delta_{p'}} \ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes_{\alpha} E_n \right)'$$

definida por

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n(\mathbf{a}) & \left(\sum_{i_n=1}^{m_n} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_{n-1}=1}^{m_{n-1}} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-1}} \otimes \varphi_{i_1, \dots, i_n} \right) \otimes a_{i_n} \right) \\ & := \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} \varphi_{i_1, \dots, i_n}(T(a_{i_1}^1, \dots, a_{i_n}^n)), \end{aligned}$$

onde $\mathbf{a} = \left((a_{i_1}^1)_{i_1=1}^{m_1}, \dots, (a_{i_{n-1}}^{n-1})_{i_{n-1}=1}^{m_{n-1}} \right)$, está bem definida e é contínua.

3.4 Aplicações: operadores bilineares

Tendo em vista o que fizemos no capítulo anterior de caracterizar as classes de operadores mid por meio de operadores bilineares, nessa seção queremos caracterizar certas classes de aplicações bilineares via operadores lineares sob a ótica do Teorema 3.2.

Considere $1 \leq p < \infty$ e E_1, E_2, F espaços de Banach. Relembre que um operador bilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ é múltiplo p -somante quando satisfaz as condições da Definição 3.1, isto é, quando existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \|T(x_j, y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \leq C \|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,p} \|(y_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \\ & = C \sup_{\varphi \in B_{E_1}, \psi \in B_{E_2}} \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |\varphi(x_j)\psi(y_i)|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

para todos $x_1, \dots, x_m \in E_1$ e $y_1, \dots, y_n \in E_2$. E sua norma $\|T\|_{\Pi_{p;p,p}^2}$, que vamos denotar simplesmente por $\|T\|_{\Pi_p^2}$, é o ínfimo de todas as constantes $C > 0$ que satisfazem a desigualdade acima. Além disso, comparando as Definições 3.2 e 3.3 segue que T é múltiplo p -somante se, e somente se, é múltiplo $(\varepsilon, \Delta_p, p)$ -somante.

O próximo resultado caracteriza essa classe de operadores por meio de um operador sequencial associado que apresentamos a seguir:

Dado $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$, definimos o operador

$$\widehat{T}_2 : \ell_p(E_1) \rightarrow \mathcal{L}(E_2; \ell_p(F)) \quad (3.5)$$

como o operador que associa $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p(E_1)$ a $\widehat{T}_2((x_i)_{i=1}^\infty) : E_2 \rightarrow \ell_p(F)$ dado por $\widehat{T}_2((x_i)_{i=1}^\infty)(y) = (T(x_i, y))_{i=1}^\infty$.

Para cada $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p(E_1)$ e todo $y \in E_2$, vale

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T(x_i, y)\|^p \right)^{1/p} \leq \|T\| \|y\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{1/p},$$

isto é, $\widehat{T}_2((x_i)_{i=1}^\infty)$ está bem definido, é linear (fácil) e contínuo, com

$$\|\widehat{T}_2((x_i)_{i=1}^\infty)\| \leq \|T\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

O cálculo acima mostra que $\widehat{T}_2$ está bem definido, é linear (fácil) e contínuo com $\|\widehat{T}_2\| \leq \|T\|$.

Vamos agora apresentar a nossa primeira aplicação do Teorema 3.2.

Corolário 3.1. *Seja $T : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ um operador bilinear contínuo. São equivalentes:*

- (i) *T é múltiplo p -somante, isto é, T é múltiplo $(\varepsilon, \Delta_p, p)$ -somante.*
- (ii) *$\widehat{T}_2$ mapeia $\ell_p^u(E_1)$ em $\Pi_p(E_2, \ell_p(F))$ continuamente.*

Além disso, $\|T\|_{\Pi_p^2} = \|\widehat{T}_2\|$.

Demonstração. Vamos dividir a demonstração desse resultado em três partes:

Parte 1:

Sabemos que, por definição, T é múltiplo $(\varepsilon, \Delta_p, p)$ -somante se

$$\widetilde{T} : (\ell_0^p \otimes_\varepsilon E_1) \times (\ell_0^p \otimes_\varepsilon E_2) \rightarrow (\ell_p \otimes_{\Delta_p} \ell_p) \otimes_{\Delta_p} F$$

é contínuo. Considere $\gamma = \varepsilon$. Em [11, Proposition 1, Section 29.3] é provado que

$$\alpha := \gamma \otimes_{\ell_p} \Delta_{p'}^t = \varepsilon \otimes_{\ell_p} \Delta_{p'}^t = g_{p'}.$$

O Teorema 3.2, para $n = 2$, garante a continuidade do operador

$$\widetilde{T}_2 : (\ell_0^p \otimes_\varepsilon E_1) \rightarrow \left((\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes_{g_{p'}} E_2 \right)'.$$

Usando agora o fato que g_p é uma norma tensorial e da Observação 1.2, obtemos a seguinte identificação:

$$\begin{aligned} \left((\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes_{g_{p'}} E_2 \right)' &= \left(\ell_0^{p'}(F') \otimes_{g_{p'}} E_2 \right)' = \left(E_2 \otimes_{(g_{p'})^t} \ell_0^{p'}(F') \right)' \\ &= \left(E_2 \otimes_{(g_{p'}^t)''} \ell_0^{p'}(F') \right)' = \left(E_2 \otimes_{((g_{p'}^t)')'} \ell_0^{p'}(F') \right)' \\ &= \left(E_2 \otimes_{(g_{p'}^*)'} \ell_0^{p'}(F') \right)' = \Pi_p \left(E_2, (\ell_0^{p'}(F'))' \right), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do Teorema 1.6 e [11, Section 17.12]. Concluimos então que

$$\tilde{T}_2 : (\ell_0^p \otimes_\varepsilon E_1) \rightarrow \Pi_p \left(E_2, (\ell_0^{p'}(F'))' \right) \quad (3.6)$$

é contínuo.

Parte 2:

Sabendo que $\ell_0^p \otimes E_1 \subset \ell_p(E_1)$, vamos mostrar que $\hat{T}_2 = \tilde{T}_2$ em $\ell_0^p \otimes E_1$. Seja $\mathbf{a} = (a_{i_1}^1)_{i_1=1}^{m_1} \in \ell_0^p \otimes E_1$. Sabemos que $\ell_p(F'') \stackrel{1}{=} (\ell_{p'}(F'))'$ e que temos $\ell_p(F) \subset \ell_p(F'')$ via imersão canônica $J_F : F \rightarrow F''$ e estabilidade linear de $\ell_p(\cdot)$.

Note que, pondo $\ell_{p',00}(F') := \{c_{00}(F'), \|\cdot\|_{p'}\}$, temos $\ell_{p',00}(F') = \ell_0^p \otimes_{\Delta_{p'}} F'$, isto é, as sequências finitas em $\ell_{p'}(F')$ estão identificadas com as sequências em $\ell_0^p \otimes_{\Delta_{p'}} F'$. Também temos $\ell_0^p \otimes_\varepsilon E_1 \subset \ell_p(E_1)$ já que trata-se de inclusão de sequências finitas.

Como

$$\tilde{T}_2 : (\ell_0^p \otimes_\varepsilon E_1) \rightarrow \Pi_p \left(E_2, (\ell_0^{p'}(F'))' \right) \subset \mathcal{L} \left(E_2, (\ell_0^{p'}(F'))' \right)$$

e, por definição,

$$\hat{T}_2 : \ell_p(E_1) \rightarrow \mathcal{L}(E_2; \ell_p(F)) \subset \mathcal{L}(E_2; (\ell_{p'}(F'))')$$

faz sentido considerar a ação de $\hat{T}_2(\mathbf{a})$ sobre elementos

$$u = \sum_{i_2=1}^{m_2} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} e_{i_1} \otimes \varphi_{i_1, i_2} \right) \otimes a_{i_2}^2 \in (\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes_{g_{p'}} E_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \hat{T}_2(\mathbf{a}) \left(\sum_{i_2=1}^{m_2} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} e_{i_1} \otimes \varphi_{i_1, i_2} \right) \otimes a_{i_2}^2 \right) &= \sum_{i_2=1}^{m_2} \hat{T}_2(\mathbf{a}) \left(\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} e_{i_1} \otimes \varphi_{i_1, i_2} \right) \otimes a_{i_2}^2 \right) \\ &= \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_1=1}^{m_1} \hat{T}_2(\mathbf{a})(a_{i_2}^2)(\varphi_{i_1, i_2}) \\ &= \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_1=1}^{m_1} \varphi_{i_1, i_2}(T(a_{i_1}^1, a_{i_1}^1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \varphi_{i_1, i_2}(T(a_{i_1}^1, a_{i_2}^1)) \\
 &= \tilde{T}_2(\mathbf{a}) \left(\sum_{i_2=1}^{m_2} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} e_{i_1} \otimes \varphi_{i_1, i_2} \right) \otimes a_{i_2}^2 \right),
 \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos a dualidade apresentada no Teorema 1.6 via aplicação ψ (relembre em (1.8)) e, na terceira igualdade, usamos a identificação pela imersão J_F e a definição da aplicação $\tilde{T}_2$. Da arbitrariedade de $u \in (\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes_{g_{p'}} E_2$ e de $\mathbf{a} \in \ell_0^p \otimes E_1$, segue a afirmação inicial.

Parte 3:

A igualdade $\widehat{T}_2 = \tilde{T}_2$ provada na Parte 2 faz com que o resultado da Parte 1, a saber

$$\text{“ } \tilde{T}_2 : (\ell_0^p \otimes_\varepsilon E_1) \rightarrow \Pi_p \left(E_2, (\ell_0^{p'}(F'))' \right) \text{ é contínuo”}$$

implique em

$$\widehat{T}_2 : (\ell_0^p \otimes_\varepsilon E_1) \subset \ell_p(E_1) \rightarrow \Pi_p \left(E_2, (\ell_0^{p'}(F'))' \right)$$

bem definido, linear e contínuo. Disso, por densidade e por extensão ao completamento, obtemos

$$\widehat{T}_2 : (\ell_p \widehat{\otimes}_\varepsilon E_1) = \ell_p^u(E_1) \rightarrow \Pi_p(E_2, \ell_0^p(F'')) \cap \mathcal{L}(E_2, \ell_p(F))$$

bem definido, linear e contínuo, onde a interseção pode ser tomada pois a avaliação de $\widehat{T}_2$ toma valores em $\ell_p(F)$ (ver (3.5)). A demonstração da igualdade de normas segue as mesmas ideias de demonstrações de caracterizações de classes de operadores por meio do produto tensorial e, portanto, será omitida. $\square$

Observação 3.3. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que a expressão no item (ii) das equivalências do Corolário 3.1 possui uma informação bem mais refinada que a informação contida em termos da continuidade em (3.6). Isto nos mostra que este corolário não trata de uma simples aplicação do Teorema 3.2 e também explica o esforço extra necessário a sua demonstração.

Vamos apresentar ainda mais duas aplicações do Teorema 3.2. Para isso precisamos de mais algumas definições.

Definição 3.4. Um operador $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ é *múltiplo* (d_q^*, Δ_p, p) -*somante* se existe uma constante $k > 0$ tal que para todas sequências finitas $(x_j)_{j=1}^m$ e $(y_i)_{i=1}^n$ em E_1 e E_2 , respectivamente, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \|T(x_j, y_i)\|^p \right)^{1/p} \leq k \cdot d_q^*((x_j)_{j=1}^m) \cdot d_q^*((y_i)_{i=1}^n). \quad (3.7)$$

Além disso, definimos a norma $\|T\|_{(d_q^*, \Delta_p, p)}$ como o ínfimo das constantes $k > 0$ que satisfazem (3.7).

Definição 3.5. Um operador $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ é *múltiplo (d_q', Δ_p, p) -somante* se existe uma constante $k > 0$ tal que para todas sequências finitas $(x_j)_{j=1}^m$ e $(y_i)_{i=1}^n$ em E_1 e E_2 , respectivamente, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \|T(x_j, y_i)\|^p \right)^{1/p} \leq k \cdot d_q'((x_j)_{j=1}^m) \cdot d_q'((y_i)_{i=1}^n). \quad (3.8)$$

Definimos a norma $\|T\|_{(d_q', \Delta_p, p)}$ como o ínfimo das constantes $k > 0$ que satisfazem (3.8).

Definição 3.6 ([11, Definition 17.10]). O ideal maximal de operadores associado à norma tensorial $\alpha_{p,q}$ (veja sobre essa norma na Seção 1.6) é o ideal $(\mathcal{L}_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ dos operadores (p, q) -fatoráveis. Sejam $1/p + 1/q \geq 1$, $1/r := 1/p + 1/q - 1$ e M, N espaços de dimensão finita. Se $T \in \mathcal{L}_{p,q}(M, N) \stackrel{1}{=} M' \otimes_{\alpha_{p,q}} N$, então $\|T\|_{p,q} = \alpha_{p,q}(z_T; M', N)$ e existe para $\varepsilon > 0$ uma representação

$$T = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k \otimes y_k,$$

com $\|(\lambda_k)_{k=1}^n\|_r \|(\varphi_k)_{k=1}^n\|_{w,q'} \| (y_k)_{k=1}^n \|_{w,p'} \leq \|T\|_{p,q} (1 + \varepsilon)$.

Pelo fato de ser um ideal maximal, o ideal $\mathcal{L}_{p,q}$ é determinado por suas componentes de dimensão finita [11, Page 224]. Além disso, em [11, Section 18.11] é provado que $T \in \mathcal{L}_{p,q}(E; F)$ é equivalente a existir uma medida finita μ e operadores $R \in \mathcal{L}(E; L_{q'}(\mu))$, $S \in \mathcal{L}(L_p(\mu); F'')$ tais que $J_F \circ T = S \circ I \circ R$, onde $J_F : F \rightarrow F''$ é a imersão canônica e $I : L_{q'}(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ é uma imersão. Daí o nome (p, q) -fatorável para o ideal $\mathcal{L}_{p,q}$.

Seguem então as duas aplicações que encerram o capítulo e o nosso trabalho.

Corolário 3.2. *Seja $T : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ um operador bilinear contínuo e $1 \leq p, q < \infty$. São equivalentes:*

- (i) T é múltiplo (d_q^*, Δ_p, p) -somante.
- (ii) $\widehat{T}_2$ mapeia $\ell_0^p \otimes_{d_q^*} E_1$ em $\mathcal{L}_{p,q}^{\text{inj}}(E_2, \ell_p(F))$ continuamente.

Além disso, $\|T\|_{(d_q^*, \Delta_p, p)} = \|\widehat{T}_2\|$.

Demonstração. A demonstração segue as mesmas três etapas usadas na demonstração do corolário anterior. Aqui essas etapas serão convertidas em uma demonstração resumida com as ideias já expostas.

Pela aplicação do Teorema 3.2, onde $\gamma = d_q^*$ e $\alpha := d_q^* \otimes_{\ell_p} \Delta_{p'}^t$, nos garante que

$$\tilde{T}_2 : (\ell_0^p \otimes_{d_q^*} E_1) \rightarrow \left((\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes_{\alpha} E_2 \right)'$$

é contínuo. Mais ainda, de [11, Proposition 29.9], temos:

(a) $\alpha := d_q^* \otimes_{\ell_p} \Delta_{p'}^t = \backslash \alpha_{p,q}^*$.

(b) $\alpha_{p,q} \backslash \sim \mathcal{L}_{p,q}^{\text{inj}}$.

Da igualdade $\backslash \alpha_{p,q}^* = (\alpha_{p,q} \backslash)^* = ((\alpha_{p,q} \backslash)')^t$ e do Teorema 1.6, segue que

$$\begin{aligned} \left((\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes_{\backslash \alpha_{p,q}^*} E_2 \right)' &= \left(\ell_0^{p'}(F') \otimes_{(\alpha_{p,q} \backslash)^*} E_2 \right)' \\ &= \left(\ell_0^{p'}(F') \otimes_{((\alpha_{p,q} \backslash)')^t} E_2 \right)' \\ &= \left(E_2 \otimes_{(\alpha_{p,q} \backslash)'} \ell_0^{p'}(F') \right)' \\ &= \mathcal{L}_{p,q}^{\text{inj}}(E_2; (\ell_0^{p'}(F'))'). \end{aligned}$$

Levando em conta que as avaliações $\widehat{T}_2 = \tilde{T}_2$ assumem valores em $\ell_p(F)$ (cálculos análogos aos feitos no Corolário 3.1), segue o resultado. $\square$

Para este último corolário uma observação se faz necessária: se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado, então denotamos $I^{\text{inj sur}} := (I^{\text{inj}})^{\text{sur}}$.

Corolário 3.3. *Seja $T : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ um operador bilinear contínuo e $1 \leq p, q < \infty$. São equivalentes:*

(i) T é múltiplo $(d_{q'}, \Delta_p, p)$ -somante.

(ii) $\widehat{T}_2$ mapeia $\ell_0^p \otimes_{d_{q'}} E_1$ em $\mathcal{L}_{p,q}^{\text{inj sur}}(E_2, \ell_0^p(F))$ continuamente.

Além disso, $\|T\|_{(d_{q'}, \Delta_p, p)} = \|\widehat{T}_2\|$.

Demonstração. Resumindo mais ainda a demonstração, temos os seguintes fatos:

(1) $\alpha := d_{q'} \otimes_{\ell_p} \Delta_{p'}^t = \backslash \alpha_{p,q}^*$ [11, Proposition 29.9];

(2) $\mathcal{L}_{p,q}^{\text{inj sur}} \sim / \alpha_{p,q} \backslash = (\backslash \alpha_{p,q}^*)^*$ [11, Section 29.9];

(3) $\backslash \alpha_{p,q}^* = (\backslash \alpha_{p,q}^*)''$, por ser uma norma tensorial.

Combinando esses fatos com o Teorema 1.6, obtemos

$$\left((\ell_0^{p'} \otimes_{\Delta_{p'}} F') \otimes_{\backslash \alpha_{p,q}^*} E_2 \right)' = \left(\ell_0^{p'}(F') \otimes_{\backslash \alpha_{p,q}^*} E_2 \right)'$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(E_2 \otimes_{(\backslash \alpha_{p,q}^* /'')^t} \ell_0^{p'}(F') \right)' \\
 &= \left(E_2 \otimes_{((\backslash \alpha_{p,q}^* /')^t)'} \ell_0^{p'}(F') \right)' \\
 &= \left(E_2 \otimes_{(\backslash \alpha_{p,q}^* /')'} \ell_0^{p'}(F') \right)' \\
 &= \left(E_2 \otimes_{(/ \alpha_{p,q} \backslash)'} \ell_0^{p'}(F') \right)' \\
 &= \mathcal{L}_{p,q}^{\text{inj sur}}(E_2; (\ell_0^{p'}(F'))')
 \end{aligned}$$

e o resultado segue como nos corolários anteriores. □

Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, G. *Some classical inequalities, summability of multilinear operators and strange functions*, Tese (Doutorado) - Universidade Federal da Paraíba, 2016.
- [2] BERNARDINO, A. T. L. *Contribuições à Teoria Multilinear de Operadores Absolutamente Somantes*, Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, 2011.
- [3] BERNARDINO, A. T. L. *Ideais de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach.*, Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, 2008.
- [4] BOTELHO, G.; CAMPOS, J. R. *On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators*, Monatsh. Math., **183**, 415–435, 2016.
- [5] BOTELHO, G.; CAMPOS, J. R.; SANTOS, J. *Operator ideals related to absolutely summing and Cohen strongly summing operators*, Pacific J. Math., **287**, 1–17, 2017.
- [6] BOTELHO, G.; MICHELS, C.; PELLEGRINO, D. *Complex interpolation and summability properties of multilinear operators*, Rev. Mat. Complut., **23**, 139–161, 2010.
- [7] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2^a Ed., 2015.
- [8] CAMPOS, J. R. *Contribuições à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes*, Tese de doutorado, UFPB, 2013.
- [9] CAMPOS, J. R.; SANTOS, J. *An anisotropic approach to mid summable sequences*, Colloq. Math., **161**, 35–49, 2020.
- [10] COHEN, J. S. *Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates*, Math. Ann., **201**, 177–200, 1973.

- [11] DEFANT, A.; FLORET, K. *Tensor Norms and Operator Ideals*, New York (NY): North Holland, 1993.
- [12] DIESTEL, J.; JARCHOW, H.; TONGE, A. *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [13] GROTHENDIECK, A. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bull. Braz. Math. Soc., **8**, 1–79, 1956.
- [14] KARN, A. K.; SINHA, D. P. *An operator summability of sequences in Banach spaces*, Glasg. Math. J., **56** (2), 427–437, 2014.
- [15] LINDENSTRAUSS, J.; PEŁCZYŃSKI, A. *Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications*, Studia Math., **29**, 276–326, 1968.
- [16] PIETSCH, A. *Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math., **28**, 333–353, 1967.
- [17] PIETSCH, A. *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, 185–199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.
- [18] PIETSCH, A. *Operator Ideals*, New York (NY): North Holland, 1980.
- [19] RYAN, R. *Introduction to tensor product of Banach spaces*, London: Springer-Verlag, 2002.
- [20] RUEDA, P.; SÁNCHEZ-PÉREZ, E. A.; TALLAB, A. *Traced tensor norms and multiple summing multilinear operators*, Linear Multilinear Algebra, 768–786, 2016.
- [21] SÁNCHEZ-PÉREZ, D. *The inclusion theorem for multiple summing operators*, Studia Math., **165** (3), 275–290, 2004.
- [22] SÁNCHEZ-PÉREZ, D.; VILLANUEVA, I. *Multiple summing operators on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **285**, 86–96, 2003.