Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O ideal jacobiano de um arranjo de hiperplanos

João Pedro Viana Correia Borges

João Pessoa – PB
Julho de 2023

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O ideal jacobiano de um arranjo de hiperplanos

por

João Pedro Viana Correia Borges

sob a orientação de

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo

João Pessoa – PB
Julho de 2023

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B732i Borges, João Pedro Viana Correia.
O ideal jacobiano de um arranjo de hiperplanos / João Pedro Viana Correia Borges. - João Pessoa, 2023.
73 f.

Orientação: Ricardo Burity Croccia Macedo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Derivações logarítmicas - Módulo. 2. Ideal jacobiano. 3. Arranjos de hiperplanos. 4. Teoria da redução de ideais. I. Macedo, Ricardo Burity Croccia. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por ANNA REGINA DA SILVA RIBEIRO - CRB-15/24

O ideal jacobiano de um arranjo de hiperplanos

por

João Pedro Viana Correia Borges [1]

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em: 28 de Julho de 2023

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
RICARDO BURITY CROCCIA MACEDO
Data: 28/07/2023 20:38:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo – UFPB
(Orientador)

Documento assinado digitalmente
ARON SIMIS
Data: 30/07/2023 12:05:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Aron Simis – UFPE
(Examinador Externo)

Documento assinado digitalmente
ZAQUEU ALVES RAMOS
Data: 30/07/2023 13:23:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos – UFS
(Examinador Externo)

[1] Este trabalho contou com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

à Nena, Regina e Yasmin

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por nos momentos mais difíceis me dar confiança e tranquilidade.

A minha mãe, Regina, e meu tio, Oscar, por sempre me ampararem nesta jornada, seja financeiramente ou emocionalmente, sempre demonstrando preocupação e cuidado. Em especial agradeço a minha mãe, por ser a melhor que eu poderia ter, tudo que eu faço é por você.

A minha namorada, Yasmin, pelo apoio incessante que me foi fornecido. Sem você, nada disso seria possível, obrigado por aturar os estresses e preocupações, bem como por confiar no meu trabalho. Você é a razão do empenho existente neste trabalho.

A Nena, por todo amor e carinho depositado, e pelos almoços sempre que precisava ir a Recife.

A minha tia, Madalena, e ao meu tio, Robson, pelo incansável apoio que me foi dado, sem vocês nada disso aconteceria. Obrigado por depositar, em mim, a honra de ser considerado um filho de vocês.

A minha tia, Glória, por sempre acreditar em mim, inclusive em situações onde não mereci. Obrigado por sempre aceitar conversar comigo, bem como por sempre demonstrar carinho e preocupação ao meu respeito. Não sei se mereço uma tia tão incrível.

A Edileuza, por sempre se preocupar e demonstrar cuidado comigo, obrigado, ainda, pelas maravilhosas marmitas e frutas que enviava. Continuo contando com elas no doutorado.

A Julio César pelo apoio dado e pela confiança no meu trabalho. Existem amigos mais chegados que irmãos e você é a prova disso. Obrigado por ser o melhor.

A Wellington, grande Well, por sempre estar presente e por me causar as risadas mais sinceras.

A José Soares e a tia Tati por serem, pra mim, uma segunda família. Soares, você faz uma falta inimaginável.

A Marina, por ser. Obrigado por estar sempre aqui, por permanecer, por ser a amiga que todo mundo deveria ter. Você é especial e dedico parte deste trabalho a você.

A Alexandre pelo apoio, café, e inúmeras risadas descontroladas. São esses episódios que trazem leveza à caminhada.

A Ginaldo Sá, por ser o irmão que a pós-graduação me deu. Saudade.

A Geivison, eterno GG, por ser um irmão, por aconselhar e se preocupar e, sem dúvidas, pelas risadas. Você é especial demais.

A André Dosea, por ser um amigo irmão, o qual sinto muita falta. João Pessoa não é a mesma sem você.

A Antônio Nascimento por ser um irmão que os cursos de verão me deram.

Aos amigos que herdei da saudosa Rural, aqui cito Hugo Henryque, Matheus Henrique e Túlio Santos.

Aos meus eternos amigos do fabuloso grupo Champis: André Queiroz e Fausto Sá, vocês são especiais.

Aos demais amigos que fui presentado pelo departamento de matemática da UFPB, aqui cito Aelson Sobral, Diego Gomes, Manoel Messias, Marcos Gabriel, Marta Menezes, Railane Silva, Renato Burity, Fábio Lima e Joyce Sindeaux.

Aos professores do departamento de matemática da UFPB, aqui cito Jacqueline Rojas e Otoniel Nogueira. Mestres na caminhada.

Ao meu orientador professor Ricardo Burity, pela paciência, cuidado e conselhos. Existem professores que marcam nossa caminhada, o senhor virou uma referência.

Aos membros da banca, professores Aron Simis e Zaqueu Alves, por contribuirem com este trabaho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estamos interessados em explorar propriedades do ideal jacobiano de uma forma f definida por um arranjo de hiperplanos $\mathcal{A}$ no espaço afim n-dimensional sobre um corpo de característica zero. Temos por objetivo apresentar dois principais resultados: o ideal jacobiano J_f como redução minimal do ideal $\mathbb{I}$, definido pelos $(m-1)$-produtos das formas lineares associadas a $\mathcal{A}$, quando este é um arranjo quase genérico, e o teorema de Rose-Terao-Yuzvinski, resultado que nos fornece a dimensão homológica do módulo de derivações logarítmicas da forma f, no caso em que $\mathcal{A}$ é genérico. Para este fim, introduzimos conceitos importantes da Álgebra Comutativa, tais como Álgebra de Rees, fibra especial e redução de um ideal I, assim como os relevantes invariantes algébricos: índice de saturação de um ideal e a regularidade de Castelnuovo-Mumford de um módulo.

Palavras-chave: Ideal jacobiano, arranjos de hiperplanos, módulo de derivações logarítmicas, redução de ideais, saturação.

Abstract

In this work, we are interested in exploring properties of the Jacobian ideal of a form f defined by a hyperplane arrangement $\mathcal{A}$ in n-dimensional affine space over a field of characteristic zero. We aim to present two main results: the Jacobian ideal J_f as a minimal reduction of the ideal $\mathbb{I}$, defined by the $(m-1)$-products of the linear forms defined by $\mathcal{A}$, when this is an almost generic arrangement, and the Rose-Terao-Yuzvinski theorem, a result which gives us the homological dimension of the module of logarithmic derivations of f, in the case where $\mathcal{A}$ is generic. To this end, we introduce important concepts from Commutative Algebra, such as Rees Algebra, special fiber, and reduction of an ideal I, as well as the relevant algebraic invariants: saturation index of an ideal and the Castelnuovo-Mumford regularity of a module.

Keywords: Jacobian ideal, hyperplane arrangements, module of logarithmic derivations, reduction of ideals, saturation.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $(R, \mathfrak{m})$ denota um anel noetheriano local que tem $\mathfrak{m}$ por ideal maximal;
- $(f_1, \ldots, f_m)$ denota o ideal gerado pelos elementos $f_1, \ldots, f_m$ do anel R;
- Spec(R) denota o conjunto dos ideais primos do anel R;
- $V(\ell_i)$ denota o conjunto de zeros da forma ℓ_i;
- $V(I)$ denota o conjunto dos ideais primos do anel que contém o ideal I;
- J_f denota o ideal jacobiano relacionado à forma f;
- $\mathbb{I}$ denota o ideal do anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ gerado pelos $(m-1)$-produtos das formas lineares que definem o arranjo de hiperplanos $\mathcal{A}$;
- $d(S)$ denota a profundidade do módulo S sobre o anel local $(R, \mathfrak{m})$;
- $\mathrm{ht}(I)$ denota a altura do ideal I;
- $\mathrm{Syz}(I)$ denota o módulo de sizigias do ideal I;
- $\mathrm{reg}(M)$ denota a regularidade de Castelnuovo-Mumford do módulo M;
- $\mathrm{sat}(I)$ denota o índice de saturação do ideal I;
- I^{sat} denota a saturação do ideal I;
- $\mathcal{R}(I)$ denota a álgebra de Rees do ideal I;
- $\mathrm{Sym}(I)$ denota a álgebra simétrica do ideal I;
- $\ell(I)$ denota o *analytic spread* do ideal I;
- $\mathcal{F}(I)$ denota a fibra especial do ideal I.

Introdução

A teoria de redução de ideais teve, como precursores, os matemáticos ingleses David Rees e Douglas Northcott, em 1954. Esta teoria foi estabelecida com conceitos importantes como redução minimal, número de redução, dentre outros. A relação conjuntista de redução entre dois ideais possibilita estabelecer associações algébricas e geométricas entre eles, no primeiro capítulo deste trabalho procuramos expor algumas propriedades iniciais desta teoria.

Por mais que, de certa forma, o conceito de redução seja algébrico, é possível explorá-lo geometricamente, tanto através das álgebras de Rees dos ideais em questão, quanto em especial, unindo este tópico à teoria dos arranjos de hiperplanos, um objeto que tem origem puramente geométrica. Algumas aplicações as noções aqui explanadas podem ser encontradas na Teoria de Singularidades e na Geometria Algébrica, para isto o leitor pode ver [8], [11], [13].

Das noções envolvidas nesta teoria, uma das mais importantes é a de *redução minimal*, nesta dissertação temos como primeiro objetivo demonstrar que, em um arranjo de hiperplanos quase genérico $\mathcal{A}$ no espaço afim n-dimensional, o ideal jacobiano do polinômio de definição do arranjo, usualmente denotado por J_f, é uma redução minimal do ideal $\mathbb{I}$, definido pelos $(m-1)$-produtos das formas lineares associadas a $\mathcal{A}$. Este fato é demonstrado no capítulo 2, que tem por meta principal introduzir as definições e resultados necessários para este objetivo.

O capítulo 3 é dedicado a cumprir o segundo objetivo do texto: demonstrar o teorema de Rose-Terao-Yuzvinski, resultado este que fornece a dimensão homológica do módulo de derivações logarítmicas da forma f, no caso em que $\mathcal{A}$ é genérico. Para isto, nos preocupamos em apresentar o módulo de derivações logarítmicas, e relacioná-lo com as sizigias do ideal jacobiano de f a fim de traduz o problema a estudar simplesmente a profundidade do anel residual A/J_f. Além disso, exploramos conceitos como saturação, índice de saturação, regularidade de Castelnuovo-Mumford, dentre outros.

A motivação principal deste trabalho é o artigo *"On the Jacobian ideal of an almost generic hyperplane arrangement"* [5], porém sua vasta teoria nos possibilita visitar objetos fundamentais da álgebra comutativa presentes em [2] e [7].

Capítulo 1

Álgebras de Rees e Reduções

Neste capítulo, iremos introduzir dois conceitos fundamentais em Álgebra Comutativa: as noções de Álgebra de Rees e redução de ideais. O primeiro objeto, comumente denominado Álgebra de *blow-up*, tem sua importância no meio geométrico, mais especificamente em Teoria de Singularidades, apresentando-se através de um processo de resolução de singularidades em determinadas aplicações.

A Teoria de Reduções estabelece conexões entre dois ideais diante de uma determinada relação conjuntista envolvendo potências ordinárias destes ideais. Dada uma redução entre dois ideais é possível relacionar seus radicais, alturas, dentre outros aspectos geométricos.

Em determinado momento deste texto será possível relacionar estes dois conceitos, explorando propriedades das Álgebras de Rees dos ideais de uma redução. Mais detalhes sobre as aplicações da teoria que será explanada neste capítulo podem ser encontrados em [8], [9], [13].

1.1 Álgebra de Rees

Sejam R um anel noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Considere $\{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto de geradores de M e seja ψ o homomorfismo natural de R-módulos dado por

$$\begin{array}{rccc} \psi: & R^n & \to & M \\ & (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i m_i \end{array}.$$

Esta construção é equivalente a seguinte sequência exata curta:

$$0 \to \operatorname{Ker}(\psi) \to R^n \to M \to 0.$$

Neste caso, $\mathrm{Ker}(\psi)$ é chamado de *módulo de relações* de M e é denotado por $\mathrm{Syz}(M)$. Explicitamente,

$$\mathrm{Syz}(M) = \left\{ (b_1, \dots, b_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n} b_i m_i = 0 \right\},$$

cada $(b_1, \dots, b_n) \in \mathrm{Syz}(M)$ é chamado *sizigia* de M.

Sendo R um anel noetheriano e $\mathrm{Syz}(M)$ submódulo de R^n, segue que $\mathrm{Syz}(M)$ é finitamente gerado, portanto é possível realizar uma construção análoga a anterior, desta vez para o submódulo $\mathrm{Syz}(M)$. Suponha que $\mathrm{Syz}(M)$ é gerado por k elementos. É possível, então, considerar a seguinte sequência exata curta:

$$0 \to \mathrm{Syz}(\mathrm{Syz}(M)) \to R^k \to \mathrm{Syz}(M) \to 0.$$

Das sequências exatas já construídas obtemos, por composição, a seguinte sequência exata

$$R^k \to R^n \to M \to 0,$$

esta é chamada *apresentação livre* de M, denotemos por L_M a matriz $n \times k$ que representa a aplicação R-linear $R^k \to R^n$. Uma vez construídas a apresentação livre de M e a matriz L_M, podemos definir um objeto relacionado ao módulo M em função das *sizigias* de M e dos coeficientes da matriz L_M. Este objeto será de suma importância no estudo de uma classe especial de ideais que será apresentada posteriormente, os ideais de *tipo linear*.

Definição 1.1.1. Sejam R um anel noetheriano e M um $R-$módulo finitamente gerado. Considere $\{m_1, \dots, m_n\}$ um conjunto de geradores de M e $t_1, \dots, t_n$ indeterminadas sobre R, a *álgebra simétrica* de M, denotada por $\mathrm{Sym}(M)$, é definida por

$$\mathrm{Sym}(M) := \frac{R[t_1, \dots, t_n]}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i t_i : (c_1, \dots, c_n) \in \mathrm{Syz}(M) \right)} = \frac{R[t_1, \dots, t_n]}{(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} t_i)}$$

onde $a_{i,j}$ são os coeficientes da matriz L_M apresentada anteriormente. Neste trabalho, com o objetivo de evitar uma sobrecarga nas notações no decorrer do texto, denotaremos o ideal $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i t_i : (c_1, \dots, c_n) \in \mathrm{Syz}(M) \right)$ por $\mathcal{I}$.

A álgebra simétrica pode ser apresentada de maneira mais geral, como um quociente da álgebra tensorial. Desta abordagem decorrem algumas propriedades universais deste objeto. Para mais detalhes sobre esta construção, o leitor pode consultar [9].

Agora iniciaremos a construção do principal ente desta seção, a Álgebra de Rees de um ideal, para isto seja I um ideal de R.

Definição 1.1.2. A *álgebra de Rees* de I, a qual denotaremos por $\mathcal{R}(I)$ ou $R[It]$ é

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n = R + It + \cdots + I^n t^n + \cdots \subseteq R[t],$$

onde t é uma indeterminada sobre o anel R.

Um caso fundamental é a álgebra de Rees de um ideal finitamente gerado de R, esta sitação será explorada a partir de agora. Seja I um ideal finitamente gerado, digamos $I = (f_1, \ldots, f_k)$, então $\mathcal{R}(I) = R[f_1 t, \ldots, f_k t]$, desde que a álgebra de Rees é gerada a partir dos elementos de grau 1 em t. Defina o seguinte homomorfismo de R-álgebras

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & R[t_1, \ldots, t_k] & \to & \mathcal{R}(I) \\ & t_i & \mapsto & f_i t. \end{array}$$

Claramente φ é sobrejetor e de forma natural tem-se a seguinte sequência exata

$$R[t_1, \ldots, t_k] \xrightarrow{\varphi} \mathcal{R}(I) \to 0.$$

O núcleo do homomorfismo φ é chamado de *ideal de apresentação* de $\mathcal{R}(I)$ com relação aos geradores $f_1, \ldots, f_k$ de I, aqui denotaremos o núcleo de φ por $\mathcal{J}$, note que este ideal é homogêneo, visto que é o núcleo de um mapa graduado.

Considerando agora o homomorfismo projeção de R-álgebras

$$\beta: \quad R[t_1, \ldots, t_k] \quad \to \quad \mathrm{Sym}(I)$$

e notando que $\mathcal{J} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ é homogêneo, portanto gerado por elementos homogêneos $F(t_1, \ldots, t_k)$ que satisfazem $F(f_1, \ldots, f_k) = 0$, é possível fatorar φ através do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} R[t_1, \ldots, t_k] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\beta"'] & R(I) \\ \mathrm{Sym}(I) \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd},$$

onde a aplicação α é definida da seguinte forma $\alpha(\overline{F(t_1, \ldots, t_k)}) = F(f_1 t, \ldots, f_k t)$. Vamos verificar a boa definição de α. Sejam $\overline{F(t_1, \ldots, t_k)} = \overline{G(t_1, \ldots, t_k)} \in \mathrm{Sym}(I)$, diante dessa igualdade segue $F - G \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Porém, $\mathrm{Ker}(\beta) = \mathcal{I}$, isto é, o ideal gerado por formas lineares $\sum_{i=1}^{k} a_i t_i$ tais que $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Syz}(I)$, logo, $F(f_1t, \ldots, f_kt) = G(f_1t, \ldots, f_kt)$ e logo α está bem definida.

A aplicação α definida anteriormente tem grande importância no andamento deste trabalho, pois permite a construção da célebre classe de ideais que foi citada no início, os ideais de *tipo linear*.

Definição 1.1.3. Sejam R um anel e I um ideal de R. Dizemos que I é de *tipo linear* se a aplicação α definida anteriormente é um isomorfismo.

Um dos ideais importantes que estudaremos em capítulos posteriores é o ideal gerado pelos $(m-1)$ produtos de formas lineares definidas por um arranjo de hiperplanos, denotado por ideal $\mathbb{I}$. Este ideal é de tipo linear como veremos mais adiante, esta característica nos traz propriedades extremamente relevantes e possibilita o uso de alguns resultados nas demonstrações que serão feitas, nos dando praticidade. Neste momento, dada a importância desta classe de ideais, é conveniente fornecer uma caracterização para estes, diante disso faz-se necessário o conceito de *módulos de torção*.

Definição 1.1.4. Sejam R um anel, M um R-módulo e Q o anel de frações de R, isto é, $Q = S^{-1}R$, onde S é o conjunto multiplicativo formado pelos elementos regulares de R (não divisores de zero de R). A *torção* de M com respeito a R é o conjunto

$$\mathcal{T}_R(M) = \{m \in M : \exists\ s \in S \text{ tal que } sm = 0\}.$$

Um R-módulo M é dito *livre de torção* se $\mathcal{T}_R(M) = 0$ e *de torção* se $\mathcal{T}_R(M) = M$.

Com o objetivo de familiarizar o leitor com esta definição, exploraremos alguns exemplos introdutórios.

Exemplo 1.1.5. Considere $R = \mathbb{Z}$ e $M = \mathbb{Q}$, o sistema multiplicativo S dos elementos regulares de $R = \mathbb{Z}$ é $S = \mathbb{Z}^*$. Assim, $\mathcal{T}_R(M) = \{m \in \mathbb{Q} : \exists\ s \in \mathbb{Z}^* \text{ tal que } sm = 0\} = \{0\}$, afinal $\mathbb{Q}$ é um domínio. Portanto $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre de torção.

Exemplo 1.1.6. Sejam $R = \mathbb{Z}$ e $M = \mathbb{Z}_3$, desta forma $S = \mathbb{Z}^*$. Para todo $\overline{m} \in \mathbb{Z}_3$ temos $3 \cdot \overline{m} = \overline{0}$, portanto $\mathcal{T}_R(\mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_3$, ou seja, $\mathbb{Z}_3$ é um $\mathbb{Z}$-módulo de torção.

Enunciaremos agora a caracterização para ideais de tipo linear que foi citada anteriormente. Antes disso, um ponto importante a ser salientado é que como submódulos de módulos livres de torção são livres de torção, uma vez que $R[t]$ é livre como R-módulo e $\mathcal{R}(I)$ é um submódulo de $R[t]$, segue que $\mathcal{R}(I)$ é livre de torção. Portanto, se I é de tipo linear, como $\mathrm{Sym}(I) \simeq \mathcal{R}(I)$, temos que $\mathrm{Sym}(I)$ é livre de torção.

Proposição 1.1.7. Sejam R um domínio noetheriano e $I \neq 0$ um ideal de R. São equivalentes as seguintes afirmações:

a) $\mathrm{Sym}(I)$ é um domínio;

b) $\mathrm{Sym}(I)$ é livre de torção;

c) I é de tipo linear.

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b) Segue do fato de que todo domínio é livre de torção.
b) $\Rightarrow$ c) Basta mostrar que $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathcal{T}_R(\mathrm{Sym}(I))$, pois $\mathcal{T}_R(\mathrm{Sym}(I)) = 0$ por hipótese e α é sobrejetora. Como R é noetheriano e I é um ideal de R, segue que I é finitamente gerado, digamos $I = (f_1, \ldots, f_n)$. Sendo $I \neq 0$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $f_n \neq 0$. Com base nas construções anteriores temos

$$\mathrm{Sym}(I) = \frac{R[t_1, \ldots, t_n]}{\mathcal{I}} \overset{\alpha}{\to} \frac{R[t_1, \ldots, t_n]}{\mathcal{J}} = \mathcal{R}(I),$$

onde $\mathcal{I} = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i t_i : (c_1, \ldots, c_n) \in \mathrm{Syz}(I) \right)$. Uma vez que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ segue $\mathrm{Ker}(\alpha) = \dfrac{\mathcal{J}}{\mathcal{I}}$, diante da igualdade anterior, é claro que $\mathcal{T}_R(\mathrm{sym}(I)) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha)$, para a inclusão contrária vamos mostrar que para todo $g \in \mathcal{J}$, existe $c \in R - \{0\}$ tal que $cg \in \mathcal{I}$. Como $\mathcal{J}$ é um ideal homogêneo, basta verificar para $g \in \mathcal{J}$ elemento homogêneo.
Vamos utilizar indução sobre o grau de g, seja m o grau em questão. Se $m = 1$, então g é uma forma linear tal que $g \in \mathcal{J}$ logo, pela definição de $\mathcal{J}$ segue que $g \in \mathcal{I}$, portanto basta considerar $c = 1_R$. Suponha agora que $m > 1$ e escreva

$$g(t_1, \ldots, t_n) = t_1 g_1(t_1, \ldots, t_n) + t_2 g_2(t_2, \ldots, t_n) + \cdots + t_n g_n(t_n)$$

onde g_i é um polinômio homogêneo de grau $m-1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Considere agora o seguinte polinômio homogêneo de grau 1:

$$h(t_1, \ldots, t_n) = t_1 g_1(f_1, \ldots, f_n) + t_2 g_2(f_2, \ldots, f_n) + \cdots + t_n g_n(f_n),$$

assim

$$h(f_1, \ldots, f_n) = f_1 g_1(f_1, \ldots, f_n) + f_2 g_2(f_2, \ldots, f_n) + \cdots + f_n g_n(f_n) = g(f_1, \ldots, f_n) = 0,$$

uma vez que $g \in \mathcal{J}$. Diante disso $h \in \mathcal{J}$ (pela definição de $\mathcal{J}$) e como h possui grau 1 segue que $h \in \mathcal{I}$. Além disso,

$$\begin{aligned} f_n^{m-1} g - t_n^{m-1} h &= t_1[f_n^{m-1} g_1(t_1, \ldots, t_n) - t_n^{m-1} g_1(f_1, \ldots, f_n)] + \cdots + \\ & \quad t_n[f_n^{m-1} g_n(t_n) - t_n^{m-1} g_n(f_n)] \end{aligned}$$

e uma vez que $g_n(t_n) = ut_n^{m-1}$, temos

$$t_n[f_n^{m-1}g_n(t_n) - t_n^{m-1}g_n(f_n)] = f_n^{m-1}t_n u t_n^{m-1} - t_n^m u f_n^{m-1} = 0,$$

pois $g_n(f_n) = uf_n^{m-1}$. Portanto,

$$f_n^{m-1}g - t_n^{m-1}h = t_1h_1(t_1, \ldots, t_n) + \cdots + t_{n-1}h_{n-1}(t_{n-1}, t_n),$$

com h_i polinômio homogêneo de grau $m-1$ que anula $f_1, \ldots, f_n$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, afinal $h_i \in \mathcal{J}$. Desse modo, utilizando a hipótese de indução, segue que para cada i existe $c_i \in R - \{0\}$ tal que $c_ih_i \in \mathcal{I}$. Diante disso

$$c_1 \cdots c_{n-1}(f_n^{m-1}g - t_n^{m-1}h) \in \mathcal{I},$$

e assim

$$(c_1 \cdots c_{n-1}f_n^{m-1})g = c_1 \cdots c_{n-1}(f_n^{m-1}g - t_n^{m-1}h) + c_1 \cdots c_{n-1}t_n^{m-1}h \in \mathcal{I}.$$

c) $\Rightarrow$ a) Sejam $x, y \in \mathrm{Sym}(I)$ de modo que $xy = 0$, uma vez que a aplicação α é um homomorfismo temos $\alpha(xy) = \alpha(x) \cdot \alpha(y) = 0$. Como $\alpha(x), \alpha(y) \in \mathcal{R}(I) \subseteq R[t]$ e $R[t]$ é um domínio segue que $\alpha(x) = 0$ ou $\alpha(y) = 0$, sem perda de generalidade podemos supor $\alpha(x) = 0$. Porém, I é de tipo linear, isto é, α é um isomorfismo, em particular é um homomorfismo injetor, portanto $x = 0$.

$\square$

O resultado que enunciaremos a seguir nos fornece a dimensão da álgebra de Rees, ele não será demonstrado, uma vez que acarretaria em uma tecnicalidade exacerbada, fugindo assim ao escopo do trabalho. O leitor interessado na demonstração pode checar [9].

Proposição 1.1.8. Sejam R um anel noetheriano e I ideal de R. Então $dim(R) < \infty$ se, e somente se, $dim(\mathcal{R}(I)) < \infty$. Além disso, se $dim(R) < \infty$, então

$$dim\left(\mathcal{R}(I)\right) = dim(R) + 1,$$

caso $I \not\subseteq P$ para algum ideal primo P com $dim\left(\dfrac{R}{P}\right) = dim(R)$. Do contrário, $dim\left(\mathcal{R}(I)\right) = dim(R)$.

Definição 1.1.9. Sejam R um anel e I um ideal de R, podemos considerar para cada $n \in \mathbb{N}$ o seguinte quociente $\dfrac{I^n}{I^{n+1}}$, o qual denotaremos por $gr_I^n(R)$. No caso em que $n = 0$

definimos $gr_I^0(R) = \dfrac{R}{I}$. Ao considerar a soma direta dos quocientes citados, $\bigoplus_{n\geq 0} \dfrac{I^n}{I^{n+1}}$, damos origem ao chamado *anel graduado associado de* I. Mais explicitamente, o *anel graduado associado de* I é

$$gr_I(R) := \frac{R}{I} \oplus \frac{I}{I^2} \oplus \frac{I^2}{I^3} \oplus \cdots = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{I^n}{I^{n+1}}.$$

Neste anel a multiplicação é dada da seguinte forma: se $x = a + I^{m+1} \in gr_I^m(R)$ e $y = b + I^{n+1} \in gr_I^n(R)$, onde $a \in I^m$ e $b \in I^n$, então $x \cdot y = ab + I^{m+n+1} \in gr_I^{n+m}(R)$.

Sob posse dos conceitos de anel graduado associado e álgebra de Rees de um ideal, podemos enunciar a seguinte

Proposição 1.1.10. Sejam R um anel e I um ideal de R, então

$$\frac{\mathcal{R}(I)}{I\mathcal{R}(I)} \simeq gr_I(R).$$

Demonstração. Seja

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{R}(I) & \to & gr_I(R) \\ & a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n & \mapsto & (a_0 + I, a_1 + I^2, \ldots, a_n + I^{n+1}) \end{array}$$

esta aplicação é claramente um homomorfismo sobrejetor, vamos verificar que seu núcleo é $I\mathcal{R}(I)$. De fato, se $a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \operatorname{Ker}(\psi)$, então $a_i \in I^{i+1}$ e assim $a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in I\mathcal{R}(I)$. Reciprocamente, se $p(t) \in I\mathcal{R}(I)$, então $p(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ com $a_i \in I$ e $g_i \in \mathcal{R}(I)$, portanto cada g_i é da forma $g_i = b_0^i + b_1^i t + \cdots + b_n^i t^n$, com $b_i^j \in I^i$, assim

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{i=1}^{n} a_i (b_0^i + b_1^i t + \ldots + b_n^i t^n);\ b_j^i \in I^j \\ &= a_1 b_0^1 + a_1 b_1^1 t + \ldots + a_1 b_n^1 t^n + \cdots + a_n b_0^n + a_n b_1^n t + \cdots + a_n b_n^n t^n \\ &= (a_1 b_0^1 + \cdots + a_n b_0^n) + (a_1 b_1^1 + \cdots + a_n b_1^n) t + \cdots + (a_1 b_n^1 + \cdots + a_n b_n^n) t^n \end{aligned}$$

consequentemente $\psi(p(t)) = 0$, como queríamos demonstrar. □

Definição 1.1.11. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e I um ideal de R. Definimos a *fibra especial* de I como

$$F_I(R) = \frac{\mathcal{R}(I)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)} \simeq \frac{R}{\mathfrak{m}} \oplus \frac{I}{\mathfrak{m}I} \oplus \frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2} \cdots$$

O isomorfismo em questão na definição anterior é dado por

$$\varphi(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = (a_0 + \mathfrak{m}, a_1 + \mathfrak{m}I, \ldots, a_n + \mathfrak{m}I^n).$$

Podemos ainda relacionar o anel graduado associado e a fibra especial de um ideal I através da seguinte proposição:

Proposição 1.1.12. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e I um ideal de R, então $F_I(R) \simeq \dfrac{gr_I(R)}{\mathfrak{m}gr_I(R)}$.

Demonstração. A aplicação canônica $\phi : \bigoplus_{n\geq 0} \dfrac{I^n}{I^{n+1}} \to \bigoplus_{n\geq 0} \dfrac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}$ induz o isomorfismo

$$F_I(R) = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n} \simeq \frac{\bigoplus_{n\geq 0} \frac{I^n}{I^{n+1}}}{\mathfrak{m}\left(\bigoplus_{n\geq 0} \frac{I^n}{I^{n+1}}\right)} = \frac{gr_I(R)}{\mathfrak{m}gr_I(R)},$$

basta definir $\phi(a_0 + I, \ldots, a_n + I^{n+1}) = (a_0 + \mathfrak{m}, \ldots, a_n + \mathfrak{m}I^n)$. □

A fibra especial é a soma direta de anéis quocientes, portanto possui a estrutura de anel. Sob posse disso, podemos calcular a dimensão de Krull da fibra especial, esta dimensão recebe o nome de *analytic spread* de I e é denotada por $\ell(I)$.

Podemos relacionar o *analytic spread* de I com a dimensão do anel graduado associado e a própria dimensão do anel ambiente através do próximo resultado.

Proposição 1.1.13. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e I um ideal de R. Então

$$\ell(I) = dim(F_I(R)) \leq dim(gr_I(R)) \leq dim(R) + 1.$$

Demonstração. Como $F_I(R) \simeq \dfrac{gr_I(R)}{\mathfrak{m}gr_I(R)}$, segue que

$$dim(F_I(R)) = \ell(I) = dim\left(\frac{gr_I(R)}{\mathfrak{m}gr_I(R)}\right) \leq dim(gr_I(R)) - ht(\mathfrak{m}gr_I(R)),$$

portanto $\ell(I) \leq \ell(I) + ht(\mathfrak{m}gr_I(R)) \leq dim(gr_I(R))$. Além disso, como

$$gr_I(R) \simeq \frac{\mathcal{R}(I)}{I\mathcal{R}(I)},$$

temos

$$dim(gr_I(R)) = dim\left(\frac{\mathcal{R}(I)}{I\mathcal{R}(I)}\right) \leq dim(\mathcal{R}(I)) - ht(I\mathcal{R}(I))$$

e assim

$$dim(gr_I(R)) + ht(I\mathcal{R}(I)) \leq dim(\mathcal{R}(I)) = dim(R) + 1,$$

o que conclui a demonstração. □

No resultado anterior, a dimensão do anel graduado associado é, de fato, igual a dimensão do anel R em questão. Este resultado pode ser encontrado em [9, Proposição 5.1.6].

1.2 Reduções

A Teoria de redução de ideais teve início com David Rees e Douglas Northcott. Um dos aspectos interessantes desta teoria é que, se dois ideais estão relacionados por meio de uma relação de redução, então as respectivas Álgebras de Rees determinam uma extensão inteira.

Definição 1.2.1. Sejam R um anel e I um ideal de R. Um elemento $b \in R$ é dito *integral sobre* I se existem $n \in \mathbb{Z}_+$ e elementos $a_i \in I^i, i \in \{1, \ldots, n\}$, tais que

$$b^n + a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + \cdots + a_{n-1} b + a_n = 0.$$

O conjunto de todos os elementos de R que são integrais sobre I é chamado de *fecho integral de* I e denotado por $\overline{I}$. É claro que para todo ideal I de R vale a inclusão $I \subseteq \overline{I}$, no caso em que ocorre também a inclusão contrária $\overline{I} \subseteq I$, o ideal I é dito *integralmente fechado* ou *completo*.

Exemplo 1.2.2. $a)$ Considere $R = \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}^*$ e $I = (a)$. Então a é integral sobre I, bem como a^n é integral sobre I, para todo $n > 0$. De fato, basta considerar, para cada $n > 0$, o polinômio $p(x) = x - a^n$.
$b)$ Ideais radicais são integralmente fechados. Seja I um ideal radical do anel R. Dado $x \in \overline{I}$, existe uma equação de dependência integral

$$a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n = 0,$$

com $a_i \in I^i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo $x^n = -a_n - a_{n-1}x - \cdots - a_1 x^{n-1} \in I$, afinal $a_i \in I^i \subseteq I$ para todo i. Portanto $x^n \in I$, isto é, $x \in \sqrt{I}$, mas $\sqrt{I} = I$ pois I é radical, diante disso $x \in I$.

As duas proposições seguintes auxiliam na construção de algumas propriedades nesta seção, omitiremos suas demonstrações por fugirem ao escopo deste trabalho, em todo caso o leitor interessado pode ver [9].

Proposição 1.2.3. Sejam R um anel e I um ideal de R. Se $b \in R$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) b é integral sobre I;

b) Existe um R-módulo finitamente gerado M, com $bM \subseteq IM$ obedecendo a seguinte condição: se $a \in R$ é tal que $aM = 0$, então $ab \in \sqrt{(0)}$.

Definição 1.2.4. Sejam R anel e I, J ideais de R tais que $J \subseteq I$. O ideal J é dito uma *redução* de I se existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $I^{n+1} = JI^n$.

Observação 1. Se J é uma redução de I, então existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $I^{n+1} = JI^n$. Assim, dado $m \in \mathbb{Z}_+$ temos

$$I^{m+n} = I^{n+1}I^{m-1} = JI^nI^{m-1} = JI^{n+1}I^{m-2} = JJI^nI^{m-2} = J^2I^{n+m-2} = \cdots = J^mI^n.$$

A proposição a seguir fornece uma caracterização importante para elementos integrais sobre o ideal I, relacionando os conceitos de integrabilidade e redução, a partir dela é possível concluir que um elemento $b \in R$ é integral sobre I se, e somente se, o ideal I é uma redução do ideal $I + (b)$.

Proposição 1.2.5. Se I é um ideal do anel R e $b \in R$, então b é integral sobre I se, e somente se, existe um inteiro positivo n tal que $(I + (b))^n = I(I + (b))^{n-1}$.

Vamos a algumas propriedades interessantes sobre redução que nos serão úteis durante o trabalho.

Proposição 1.2.6. Sejam R um anel e I, J, K ideais de R tais que $K \subseteq J \subseteq I$. Valem as seguintes propriedades:

a) Se K é uma redução de J e J é uma redução de I, então K é uma redução de I (propriedade transitiva de redução);

b) Se K é uma redução de I, então J é uma redução de I;

c) Se I é finitamente gerado, $J = K + (a_1, \ldots, a_k)$ e K é uma redução de I, então K é uma redução de J.

Demonstração. a) Se K é uma redução de J e J é uma redução de I, existem $m, n \in \mathbb{Z}_+$ tais que $J^{n+1} = KJ^n$ e $I^{m+1} = JI^m$. Pela Observação 1, $I^{m+n+1} = J^{n+1}I^m$, mas como K é uma redução de J segue que

$$I^{m+n+1} = J^{n+1}I^m = KJ^nI^m \subseteq KI^{m+n} \subseteq I^{m+n+1},$$

portanto $I^{m+n+1} = KI^{m+n}$ e assim K é uma redução de I.
b) Sendo K uma redução de I, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $I^{n+1} = KI^n$. Uma vez que $K \subseteq J$, segue $I^{n+1} = KI^n \subseteq JI^n$ e de $J \subseteq I$ temos $JI^n \subseteq I^{n+1}$. Logo $I^{n+1} = JI^n$ e assim J é uma redução de I.
c) Uma vez que K é uma redução de I, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $I^{n+1} = KI^n$. Pelo item anterior, como

$$K \subseteq K + (a_1, \dots, a_{i-1}), \tag{1.1}$$

para todo $i = 0, \dots, k$ e K é uma redução de I, segue que $K + (a_1, \dots, a_{i-1})$ é uma redução de I, com $(a_1, \dots, a_{i-1}) = 0$ para $i = 0$. É fato que $a_i I^n \subseteq KI^n$, afinal

$$I^{n+1} = KI^n \text{ e } a_i I^n \subseteq I^{n+1}. \tag{1.2}$$

Ainda, por (1.1), $KI^n \subseteq (K + (a_1, \dots, a_{i-1}))I^n$.
Afirmação: Se $a \in R$ é tal que $aI^n = 0$, então $aa_i \in \sqrt{(0)}$.
De fato, se $a \in R$ é tal que $aI^n = 0$, então em particular $aa_i^n = 0$, pois $a_i^n \in I^n$. Logo $(aa_i)^n = a^{n-1}aa_i^n = 0$, ou seja, $aa_i \in \sqrt{(0)}$.
Sendo I finitamente gerado, I^n é finitamente gerado, portanto, tomando $b = a_i$, $M = I^n$ na Proposição 1.2.3 e usando (1.2) juntamente com a afirmação, tem-se a_i integral sobre $K + (a_1, \dots a_{i-1})$ pois,

$$a_i I^n \subseteq I^{n+1} = KI^n \subseteq (K + (a_1, \dots, a_{i-1}))I^n.$$

Portanto a_i é integral sobre $K + (a_1, \dots, a_{i-1})$, e assim $K + (a_1, \dots a_{i-1})$ é uma redução de $K + (a_1, \dots, a_i)$ por fim, pelo item a), como $K \subseteq K + (a_1, \dots, a_k) = J$, este item segue por indução. □

Diante da proposição anterior obtemos um importante corolário que nos fornece uma caracterização para reduções, porém, com uma particularidade, solicitando que o ideal I seja finitamente gerado.

Corolário 1.2.7. Sejam R anel e J, I ideais de R tais que $J \subseteq I$, com I finitamente gerado. Então J é uma redução de I se, e somente se, $I \subseteq \overline{J}$.

Demonstração. Dado $a \in I$ temos $J \subseteq J + (a) \subseteq I$. Seja J redução de I, assim, pelo item c) da proposição anterior, J é uma redução de $J + (a)$, logo pela Proposição 1.2.5 $a \in \overline{J}$, ou seja, $I \subseteq \overline{J}$. Por outro lado, sendo $I = (a_1, \dots, a_k) \subseteq \overline{J}$ segue que, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, a_j é integral sobre J. Uma vez que $J \subseteq J + (a_1, \dots, a_{j-1})$, então cada a_j é integral sobre $J + (a_1, \ldots, a_{j-1})$. Consideremos agora a seguinte cadeia de inclusões

$$J \subseteq J + (a_1) \subseteq J + (a_1, a_2) \subseteq \cdots \subseteq J + (a_1, \ldots, a_k) = I$$

diante do que já foi exposto, cada inclusão desta cadeia é uma redução. Portanto, pela propriedade transitiva de redução, J é uma redução de I. $\square$

Proposição 1.2.8. Sejam R anel e J, I ideais de R tais que $J = (a_1, \ldots, a_k) \subseteq I$. Portanto, valem as seguintes afirmações:

a) Se J é uma redução de I, então qualquer que seja m inteiro positivo, $(a_1^m, \ldots, a_k^m)$ e J^m são reduções de I^m;

b) Se $(a_1^m, \ldots, a_k^m)$ ou J^m é uma redução de I^m para algum inteiro positivo m, então J é uma redução de I.

Demonstração.

a) Como J é uma redução de I, existe um inteiro positivo n tal que $I^{n+1} = JI^n$ portanto, pela Observação 1, $J^m I^n = I^{n+m}$ para todo $m \geq 1$. Da igualdade anterior temos

$$J^m I^n I^{mn-n} = J^m I^{mn} = J^m (I^n)^m = J^m I^n (I^n)^{m-1} = I^{n+m} I^{nm-n} = (I^m)^{n+1},$$

concluindo assim que J^m é uma redução de I^m. Resta mostrar que $(a_1^m, \ldots, a_k^m)$ é uma redução de I^m para todo $m \geq 1$. Inicialmente, é preciso verificar que dado m inteiro positivo tem-se:

$$(a_1^m, \ldots, a_k^m)(a_1, \ldots, a_k)^{(k-1)(m-1)} = (a_1, \ldots, a_k)^{(m-1)k+1}.$$

Como $(a_1^m, \ldots, a_k^m) \subseteq (a_1, \ldots, a_k)^m$, segue que

$$(a_1^m, \ldots, a_k^m)(a_1, \ldots, a_k)^{(k-1)(m-1)} \subseteq (a_1, \ldots, a_k)^{(m-1)k+1}.$$

Por outro lado, se $x \in (a_1, \ldots, a_k)^{(m-1)k+1}$ então x é escrito como soma finita de elementos da forma $a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$, com $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = (m-1)k + 1$. Suponha que $n_i < m$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, desse modo teríamos

$$(m-1)k + 1 = \sum_{i=1}^{k} n_i \leq (m-1)k,$$

afinal se $n_i < m$, então $n_i \leq m-1$ e somando com respeito a i, $\sum_{i=1}^{k} n_i \leq (m-1)k$, um absurdo pois $\sum_{i=1}^{k} n_i = (m-1)k+1$. Portanto existe $j \in \{1,\ldots,k\}$ de modo que $n_j \geq m$. Assim $a_j^{n_j} \in (a_j^m)$, ou seja, $x \in (a_1^m,\ldots,a_k^m)(a_1,\ldots,a_k)^{(k-1)(m-1)}$, concluindo a inclusão desejada. Diante da igualdade obtida segue

$$(a_1^m,\ldots,a_k^m)(a_1,\ldots,a_k)^{(k-1)(m-1)}J^{k-1} = (a_1,\ldots,a_k)^{(m-1)k+1}J^{k-1},$$

e assim

$$(a_1^m,\ldots,a_k^m)J^{(k-1)m} = J^{(m-1)k+1+k-1} = J^{km}.$$

Portanto $(a_1^m,\ldots,a_k^m)(J^m)^{k-1} = (J^m)^k$, isto é, $(a_1^m,\ldots,a_k^m)$ é uma redução de J^m. Como J^m é uma redução de I^m, segue pela propriedade transitiva de redução que $(a_1^m,\ldots,a_k^m)$ é uma redução de I^m.
b) Suponha que J^m é uma redução de I^m para algum inteiro positivo m, desse modo existe $n>0$ tal que $(I^m)^{n+1} = J^m I^{mn}$, assim $I^{mn+m} \subseteq JI^{mn+m-1} \subseteq I^{mn+m}$, portanto $I^{m(n+1)} = JI^{m(n+1)-1}$, o que significa que J é uma redução de I.
Por outro lado, se $(a_1^m,\ldots,a_k^m)$ é uma redução de I^m para algum inteiro positivo m, como $(a_1^m,\ldots,a_k^m) \subseteq J^m \subseteq I^m$ temos, pelo item *b*) da proposição 1.2.6, que J^m é uma redução de I^m, logo pelo parágrafo anterior J é uma redução de I.

□

O lema a seguir é de muita utilidade pois, segundo ele, mesmo que dois ideais não estejam relacionados, mas sejam reduções de outros dois ideais, então é possível relacioná-los com respeito a redução.

Lema 1.2.9. Sejam R um anel noetheriano, $\Re$ o radical de Jacobson de R e J, J', I ideais de R tais que $J, J' \subseteq I$ e L um ideal de R tal que $L \subseteq \Re I$. Se $J+L = J'+L$, então J é uma redução de I se, e somente se, J' é uma redução de I.

Demonstração. Suponha que J é uma redução de I, então existe um inteiro positivo n tal que $I^{n+1} = JI^n$. Porém,

$$I^{n+1} = JI^n \subseteq (J+L)I^n = (J'+L)I^n \subseteq (J'+\Re I)I^n \subseteq I^{n+1},$$

afinal $J' \subseteq I$ e $\Re I^{n+1} \subseteq I^{n+1}$, portanto $(J'+\Re I)I^n = I^{n+1}$, isto é, $J'I^n + \Re I^{n+1} = I^{n+1}$. Passando ao quociente módulo $J'I^n$ têm-se

$$\frac{I^{n+1}}{J'I^n} = \frac{\Re I^{n+1} + J'I^n}{J'I^n} = \Re \frac{I^{n+1}}{J'I^n},$$

e pelo Lema de Nakayama $\dfrac{I^{n+1}}{J'I^n} = 0$, ou seja, $I^{n+1} = J'I^n$. Reciprocamente, se J' é uma redução de I, existe um inteiro positivo m tal que $I^{m+1} = J'I^m$. Assim,

$$I^{m+1} = J'I^m \subseteq (J' + L)I^m = (J + L)I^m \subseteq (J' + \Re I)I^m \subseteq I^{m+1},$$

logo $I^{m+1} = JI^m + \Re I^{m+1}$ e novamente pelo Lema de Nakayama e por argumento análogo ao anterior, segue o resultado. □

1.3 Número de redução e redução minimal

O primeiro resultado desta seção fornece uma caracterização para reduções envolvendo álgebras de Rees, o objetivo desta proposição é relacionar o conceito de álgebra de Rees com a noção de redução de ideais.

Proposição 1.3.1. Sejam R um anel noetheriano e J, I ideais de R tais que $J \subseteq I$. Então J é uma redução de I se, e somente se, $\mathcal{R}(I)$ é um $\mathcal{R}(J)$-módulo finitamente gerado.

Demonstração. Seja J redução de I, então $I^{n+1} = JI^n$ para algum $n \in \mathbb{Z}_+$ assim, pela Observação 1, $I^{n+k} = J^kI^n$ para todo $k \geq 1$. Desse modo, vale a seguinte igualdade entre componentes homogêneas: $(\mathcal{R}(I))_{k+n} = I^nt^n(\mathcal{R}(J))_k$, afinal

$$I^nt^n(\mathcal{R}(J))_k = I^nt^nJ^kt^k = J^kI^nt^{n+k} = I^{n+k}t^{n+k} = (\mathcal{R}(I))_{n+k}.$$

Em adição, sendo R noetheriano, segue que I é finitamente gerado, logo I^i é um ideal finitamente gerado de R, implicando que I^i é um R-módulo noetheriano para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. Sejam, então, $s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}$ os geradores de I^i como R-módulo para $i \in \{0, \ldots, n\}$, isto é,

$$\mathcal{R}(I) = \sum s_{i_j}t^i\mathcal{R}(J),$$

diante disso $\mathcal{R}(I)$ é um $\mathcal{R}(J)$-módulo finitamente gerado. Por outro lado, se $\mathcal{R}(I)$ é finitamente gerado como $\mathcal{R}(J)$-módulo, como $\mathcal{R}(I)$ e $\mathcal{R}(J)$ são anéis $\mathbb{N}$-graduados, existe uma quantidade finita de elementos homogêneos que geram $\mathcal{R}(I)$ como $\mathcal{R}(J)$-módulo. Seja n o máximo entre os graus desses geradores. Diante dessa escolha, segue:

$$I^{n+1}t^{n+1} = (\mathcal{R}(I))_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1}(J^it^i)(I^{n+1-i}t^{n+1-i}) = JI^nt^{n+1} + \cdots + J^{n+1}t^{n+1} = JI^nt^{n+1}.$$

Portanto $I^{n+1} = JI^n$, ou seja, J é uma redução de I. □

Corolário 1.3.2. O menor inteiro n tal que $I^{n+1} = JI^n$ é o maior grau de um elemento em um conjunto minimal de geradores homogêneos de $\mathcal{R}(I)$ sobre $\mathcal{R}(J)$.

A seguir introduziremos dois invariantes a respeito de reduções, eles estarão presentes na maioria dos resultados que virão ao longo desta seção.

Definição 1.3.3. Sejam J, I ideais do anel R tais que J é uma redução de I. Uma redução é dita *minimal* se é minimal no sentido da inclusão, isto é, J é uma redução minimal de I se dada L redução de I tal que $L \subseteq J$, tem-se $J = L$. Um ideal que não possui reduções próprias é dito *ideal básico.*

Definição 1.3.4. Sejam $J \subseteq I$ ideais do anel R sendo J redução de I. O *número de redução de I com respeito a J* é o menor inteiro positivo n tal que $I^{n+1} = JI^n$, este invariante é denotado por $r_J(I)$. O *número de redução absoluto de I* é

$$min\{\ r_J(I) : J \text{ é uma redução minimal de } I\}.$$

Retornando ao caso local $(R, \mathfrak{m})$, a fibra especial de I, com I ideal de R, é $F_I(R) = \dfrac{\mathcal{R}(I)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)}$, isto nos permite enunciar a

Proposição 1.3.5. Sejam n um inteiro positivo, $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, J, I ideais de R tais que $J \subseteq I^n$ e B a subálgebra de $F_{I^n}(R)$ gerada por $\dfrac{J + \mathfrak{m}I^n}{\mathfrak{m}I^n}$ sobre o corpo residual $\dfrac{R}{\mathfrak{m}}$. Então, J é uma redução de I^n se, e somente se, $F_I(R) \supseteq B$ é um B-módulo finitamente gerado. Mais ainda, o número de redução de I^n com respeito a J é o maior grau de um elemento em um conjunto minimal de geradores homogêneos de $F_{I^n}(R)$ sobre B.

Demonstração. É suficiente verificar o caso em que $n = 1$. Seja J uma redução de I, segue da Proposição 1.3.1 que $\mathcal{R}(I)$ é finitamente gerado como $\mathcal{R}(J)$-módulo, logo $\mathcal{R}(J) \subseteq \mathcal{R}(I)$ é uma extensão inteira de anéis, assim

$$\frac{\mathcal{R}(J)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J)} \subseteq F_I(R),$$

e portanto $F_I(R)$ é um $\dfrac{\mathcal{R}(J)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J)}$-módulo finitamente gerado. Uma vez que

$$\frac{R}{\mathfrak{m}} \left(\frac{J + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I} \right) \simeq \frac{R}{\mathfrak{m}} \left(\frac{J}{J \cap \mathfrak{m}I} \right),$$

segue $\dfrac{\mathcal{R}(J)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J)} \simeq B$, logo $F_I(R)$ é um B-módulo finitamente gerado.
Por outro lado, se $F_I(R)$ é um B-módulo finitamente gerado, seja d o maior grau de um elemento homogêneo gerador de $F_I(R)$ como módulo sobre B. Diante disso,

$$\frac{I^{d+1}}{\mathfrak{m}I^{d+1}} \subseteq \left(\frac{J + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I} \right) \left(\frac{I^d}{\mathfrak{m}I^d} \right),$$

logo

$$I^{d+1} = JI^d + \mathfrak{m}I^{d+1},$$

afinal $J \subseteq I$ e $\mathfrak{m}I^{d+1} \subseteq I^{d+1}$. Passando ao quociente módulo JI^d segue:

$$\frac{I^{d+1}}{JI^d} = \frac{JI^d + \mathfrak{m}I^{d+1}}{JI^d} = \mathfrak{m}\left(\frac{I^{d+1}}{JI^d}\right).$$

Como R é local tendo $\mathfrak{m}$ por ideal maximal, utilizando o lema de Nakayama conclui-se $\dfrac{I^{d+1}}{JI^d} = 0$ e portanto $I^{d+1} = JI^d$. □

Corolário 1.3.6. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ anel noetheriano local e J, I ideais de R tais que J é uma redução de I, então $\mu(J) \geq \ell(I)$.

Demonstração. Sendo J uma redução de I, pela proposição anterior segue que $F_I(R) = \dfrac{\mathcal{R}(I)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)}$ é um $\dfrac{\mathcal{R}(J)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J)}$-módulo finitamente gerado. Sendo R noetheriano, I é finitamente gerado, logo pelo Corolário 1.2.7, $I \subseteq \overline{J}$, isto é, I é integral sobre J. Desse modo, $F_I(R) = \dfrac{\mathcal{R}(I)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)}$ é integral sobre $\dfrac{\mathcal{R}(J)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J)}$. Diante de todo o exposto, como a dimensão de $\dfrac{\mathcal{R}(J)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J)}$ é no máximo o número de geradores de J, segue que

$$\ell(I) = dim\left(\frac{\mathcal{R}(I)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)}\right) = dim\left(\frac{\mathcal{R}(J)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(I)}\right) \leq \mu(J).$$

□

Proposição 1.3.7. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e J, I ideais de R tais que J é uma redução minimal de I. Então:

a) $J \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$;

b) Para cada ideal K de R tal que $J \subseteq K \subseteq I$, todo conjunto minimal de geradores de J pode ser estendido a um conjunto minimal de geradores de K.

Demonstração. a) Sendo R anel noetheriano, I é finitamente gerado, diante disso, junto ao fato de R ser local, segue que está bem definido o número mínimo de geradores de I, $\mu(I) = dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}}\left(\dfrac{I}{\mathfrak{m}I}\right) = n < \infty$. Portanto, $\dfrac{I}{\mathfrak{m}I} \simeq \left(\dfrac{R}{\mathfrak{m}}\right)^n$. Pelo segundo teorema do isomorfismo temos

$$\frac{J}{J \cap \mathfrak{m}I} \simeq \frac{J + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I} \subseteq \frac{I}{\mathfrak{m}I},$$

diante disso segue

$$dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}}\left(\frac{J}{J \cap \mathfrak{m}I}\right) = dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}}\left(\frac{J + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}\right) \leq dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}}\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right) = n,$$

assim

$$\frac{J}{J \cap \mathfrak{m}I} \simeq \left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)^k, \tag{1.3}$$

para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$. Como $dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}}\left(\frac{J}{J \cap \mathfrak{m}I}\right) = k$, suponha que $\{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_k}\}$ seja uma base de $\frac{J}{J \cap \mathfrak{m}I}$ como espaço vetorial sobre o corpo residual $\frac{R}{\mathfrak{m}}$, diante do isomorfismo em (1.3) temos $J = (x_1, \ldots, x_k) + J \cap \mathfrak{m}I$. Como J é uma redução de I e $J \cap \mathfrak{m}I \subseteq \mathfrak{m}I$, segue, pelo Lema 1.2.9, tomando $L = J \cap \mathfrak{m}I$, que $(x_1, \ldots, x_k)$ é uma redução de I. Mas $(x_1, \ldots, x_k) \subseteq J$ e J é uma redução minimal de I, logo $(x_1, \ldots, x_k) = J$ e assim $k = \mu(J) = dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}}\left(\frac{J}{\mathfrak{m}J}\right)$. Portanto,

$$\frac{J}{\mathfrak{m}J} \simeq \left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)^k \simeq \frac{J}{J \cap \mathfrak{m}I},$$

e logo $J \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$.

b) Primeiro mostraremos que J é uma redução de K. Como R é noetheriano segue que K é finitamente gerado, digamos $K = (a_1, \ldots, a_n)$. Uma vez que

$$J \subseteq K = (a_1, \ldots, a_n) \subseteq I,$$

temos $J + (a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n)$, assim $J \subseteq J + (a_1, \ldots, a_n) \subseteq I$. Sendo I finitamente gerado, $K = J + (a_1, \ldots, a_n)$ e J uma redução de I segue, pela Proposição 1.2.6, item c), que J é uma redução de K.

Afirmação: J é uma redução minimal de K.

Suponha que existe $J_0 \subsetneq J$ tal que J_0 é redução de K. Como $J \subseteq K \subseteq I$ e J é uma redução de I temos, pela Proposição 1.2.6, item b), que K é uma redução de I. Assim, se $J_0 \subsetneq J$ é uma redução de K, temos $J_0 \subseteq K \subseteq I$ e pela propriedade transitiva de redução segue que J_0 é uma redução de I, o que é um absurdo pois J é redução minimal de I e $J_0 \subsetneq J$. Logo J é redução minimal de K.

Portanto, pelo item anterior, $J \cap \mathfrak{m}K = \mathfrak{m}J$, assim

$$\frac{J}{\mathfrak{m}J} = \frac{J}{J \cap \mathfrak{m}K} \simeq \frac{J + \mathfrak{m}K}{\mathfrak{m}K} \subseteq \frac{K}{\mathfrak{m}K},$$

o que nos permite concluir que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ formam parte de um conjunto minimal de geradores de K. $\square$

Proposição 1.3.8. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e J, I ideais de R. Se J é uma redução de I, então existe pelo menos um ideal $K \subseteq J$ tal que K é uma redução minimal de I.

Demonstração. Defina $\mathfrak{F} = \{K$ ideal de R : $K \subseteq J$ e K é redução de $I\}$. Uma vez que J é redução de I tem-se $\mathfrak{F} \neq \varnothing$. Sendo R noetheriano, $\dfrac{I}{\mathfrak{m}I}$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo residual $\dfrac{R}{\mathfrak{m}}$. Consideremos

$$G = \left\{ m \in \mathbb{N} : \exists\ K \in \mathfrak{F} : dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}}\left(\frac{K + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}\right) = m \right\},$$

é claro que $G \neq \varnothing$, pois como J é uma redução de I, segue que $J \in \mathfrak{F}$. Assim, de $J \subseteq I$, segue que $\dfrac{J + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I} \subseteq \dfrac{I}{\mathfrak{m}I}$, portanto

$$dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}}\left(\frac{J + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}\right) \leq dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}}\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right) < \infty,$$

o que garante $G \neq \varnothing$.
Pelo princípio da boa ordem, G possui um menor elemento, seja $n := min(G)$. Diante disso, existe $K \in \mathfrak{F}$ tal que $\dfrac{K + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}$ é o menor subespaço com relação à inclusão e $dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}}\left(\dfrac{K + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}\right) = n$. Sejam $k_1, \ldots, k_n \in K$ as pré-imagens de uma base de $\dfrac{K + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}$ e $K_0 = (k_1, \ldots, k_n)$.
Pela minimalidade de $\dfrac{K + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}$ segue que $\dfrac{K + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I} = \dfrac{K_0 + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}$, logo $K_0 + \mathfrak{m}I = K + \mathfrak{m}I$. Sendo assim, pelo Lema 1.2.9, como K é uma redução de I, segue que K_0 é uma redução de I. Sem perda de generalidade vamos supor $K = K_0$, assim $\dfrac{K}{\mathfrak{m}K}$ e $\dfrac{K + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}$ são $\dfrac{R}{\mathfrak{m}}$-espaços vetoriais de dimensão n. Desse modo a projeção canônica $\dfrac{K}{\mathfrak{m}K} \to \dfrac{K}{K \cap \mathfrak{m}I} \simeq \dfrac{K + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}$ é um isomorfismo e portanto

$$K \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}K. \tag{1.4}$$

Afirmação: K é uma redução minimal de I.
Se existir $L \subsetneq K$ tal que L é uma redução de I, então pela minimalidade de K, $K + \mathfrak{m}I = L + \mathfrak{m}I$. Assim $K \subseteq (L + \mathfrak{m}I) \cap K = L + (\mathfrak{m}I \cap K)$ e por (1.4) $K \subseteq L + \mathfrak{m}K$. Diante de todo o exposto, pelo Lema de Nakayama, $K = L$, isto é, K é uma redução minimal de I. $\square$

Corolário 1.3.9. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e J, I ideais de R tais que J é uma redução de I e $\mu(J) = \ell(I)$, então:

a) J é uma redução minimal de I;

b) $F_J(R)$ é isomorfa a subálgebra de $F_I(R)$ gerada por $\dfrac{J+\mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}$ sobre $\dfrac{R}{\mathfrak{m}}$, além disso também é isomorfa ao anel de polinômios em $\ell(I)$ indeterminadas sobre o corpo $\dfrac{R}{\mathfrak{m}}$;

c) Para todo $k > 0$ vale $J^k \cap \mathfrak{m}I^k = \mathfrak{m}J^k$.

Demonstração. a) Pelo resultado anterior existe $K \subseteq J$ tal que K é redução minimal de I. Pela Proposição 1.3.7 todo conjunto minimal de geradores de K pode ser estendido a um conjunto minimal de geradores de J, isto é, $\mu(K) \leq \mu(J)$. Porém, pelo Corolário 1.3.6, temos $\mu(K) \geq \ell(I) = \mu(J)$, logo $\mu(K) = \mu(J)$ e como $K \subseteq J$ segue que $K = J$, logo J é uma redução minimal de I.

b) Considere B a subálgebra de $F_I(R)$ gerada por $\dfrac{J+\mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}$ sobre $\dfrac{R}{\mathfrak{m}}$. Sendo J uma redução de I, segue da proposição 1.3.5 que $F_I(R) \supseteq B$ é um B-módulo finitamente gerado, logo $B \subseteq F_I(R)$ é uma extensão integral e assim

$$dim(B) = dim(F_I(R)) = \ell(I).$$

Como por hipótese J é gerado por $\ell(I)$ elementos, afinal $\mu(J) = \ell(I)$, segue que B é isomorfo canonicamente a um anel de polinômios com $\ell(I)$ indeterminadas sobre $\dfrac{R}{\mathfrak{m}}$. Defina a aplicação graduada canônica sobrejetora $F_J(R) \to B$. Sendo $F_J(R) = \dfrac{\mathcal{R}(J)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(J)}$ gerado sobre $\dfrac{R}{\mathfrak{m}}$ por $\mu(J) = \ell(I)$ elementos, tem-se que a aplicação definida acima é um isomorfismo.

c) Pelo item anterior, para todo $k > 0$ tem-se:

$$\frac{J^k}{\mathfrak{m}J^k} \simeq \frac{J^k + \mathfrak{m}I^k}{\mathfrak{m}I^k} \simeq \frac{J^k}{J^k \cap \mathfrak{m}I^k},$$

logo $\mathfrak{m}J^k = J^k \cap \mathfrak{m}I^k$.

□

O próximo resultado relaciona o analytic spread de um ideal I com suas reduções minimais, ele nos mostra que toda redução minimal de um ideal I em um anel noetheriano local é gerada minimamente por $\ell(I)$ elementos.

Proposição 1.3.10. [Northcott-Rees] Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, I um ideal de R e $\ell(I)$ o analytic spread de I. Então qualquer redução minimal de I é gerada minimamente por exatamente $\ell(I)$ elementos. Em particular, toda redução de I contém alguma redução gerada por $\ell(I)$ elementos.

Demonstração. Sejam J redução de I e B a $\dfrac{R}{\mathfrak{m}}$-subálgebra da fibra $F_I(R)$ gerada por $\dfrac{J+\mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}$. Pela proposição 1.3.5 temos que $F_I(R) \supseteq B$ é um B-módulo finitamente gerado, em particular $F_I(R) \supseteq B$ é uma extensão integral, logo

$$\dim(\mathrm{B}) = \dim(F_I(R)) = \ell(I).$$

Assim, pelo Teorema da Normalização de Noether graduado aplicado a álgebra B sobre $\dfrac{R}{\mathfrak{m}}$, existem $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{\ell(I)}} \in B_1 = \dfrac{J+\mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}$, algebricamente independentes sobre $\dfrac{R}{\mathfrak{m}}$, tais que $A = R/\mathfrak{m}[\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{\ell(I)}] \subseteq B$ é uma extensão integral. Assim, B é um A-módulo finitamente gerado, logo $F_I(R)$ é um A-módulo finitamente gerado. Considere o ideal $K = (a_1, \ldots, a_{\ell(I)}) \subseteq R$, onde $a_i \in J$ é tal que sua imagem em $\dfrac{J+\mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}$ é $\overline{a_i}$, para todo $i \in \{1, \ldots, \ell(I)\}$. Pela proposição 1.3.5 temos que K é uma redução de I tal que $\mu(K) = \ell(I)$, portanto, pelo corolário 1.3.9 K é uma redução minimal de I. Diante disso, toda redução minimal é gerada exatamente por $\ell(I)$ elementos. $\square$

Capítulo 2

Arranjos de hiperplanos e Reduções

O conceito de hiperplano é usualmente trabalhado nos cursos introdutórios de álgebra linear. Essa estrutura tem papel importante no desenvolvimento deste trabalho, neste capítulo uniremos o que foi exposto no capítulo anterior e aplicaremos ao estudo dos arranjos de hiperplanos. Mais especificamente, estaremos interessados em estudar dois ideais associados a um arranjo de hiperplanos: o ideal jacobiano do polinômio de definição do arranjo e o ideal gerado pelos produtos das formas linearem que definem o arranjo de hiperplanos em questão, tendo por objetivo principal mostrar que, em um arranjo central $(n-1)$-genérico, o ideal jacobiano é uma redução do ideal dos produtos.

Muitas noções e resultados deste capítulo recaem, levemente, sobre conceitos de álgebra linear, diante disso, exploraremos a teoria sob o aspecto algébrico, o que resulta em uma uniformidade na explanação teórica neste capítulo. A teoria por trás dos arranjos de hiperplanos pode ser encontrada, com mais detalhes, em [11].

2.1 Arranjos de Hiperplanos

Antes de darmos início a explanação teórica neste capítulo, é importante pontuar que, neste trabalho, estamos considerando o anel de polinômios nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ como um anel graduado munido de graduação padrão, onde cada indeterminada possui grau 1.

Embora a noção de hiperplano esteja relacionada a teoria dos espaços vetoriais, a definição de hiperplano que utilizaremos é a proveniente da geometria algébrica clássica: sejam $\mathbb{K}$ um corpo e n um inteiro positivo. Define-se o espaço afim n-dimensional $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ como sendo $\mathbb{K}^n$. Uma variedade algébrica afim $X \subseteq \mathbb{A}^n$ é definida como o conjunto solução de um sistema de equações polinomiais $f_1,\ldots,f_m \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Quando $m = 1$, então X é dita uma hipersuperfície. Neste contexto, definimos um hiperplano da seguinte forma:

Definição 2.1.1. Um *hiperplano* $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{A}^n$ é o conjunto de zeros de um polinômio de grau 1, isto é,

$$\mathcal{H} = V(f) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \, : f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}, \text{ com } f = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Definição 2.1.2. Um *arranjo de hiperplanos* é um conjunto finito $\mathcal{A}$ de hiperplanos em $\mathbb{A}^n$. Em adição, um arranjo de hiperplanos é dito *central* se os hiperplanos têm interseção não vazia, ou seja, se o arranjo em questão é formado pelos hiperplanos $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m$, então $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i \neq \varnothing$.

Definição 2.1.3. Dado um arranjo de hiperplanos $\mathcal{A} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m\}$, sendo $\mathcal{H}_i = V(\ell_i)$ para cada i, o *polinômio de definição* de $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} = \ell_1 \cdots \ell_m$$

Uma definição fundamental para o estudo dos arranjos de hiperplanos é a do *rank* (posto) de um arranjo $\mathcal{A}$.

Definição 2.1.4. Seja $\mathcal{A}$ um arranjo de hiperplanos no espaço afim n-dimensional. A *dimensão* do arranjo $\mathcal{A}$ é definida como a dimensão do espaço espaço afim ao qual o arranjo está sendo considerado, ou seja, $dim(\mathcal{A}) = n$. O *rank* de um arranjo é o número máximo de formas linearmente independentes sobre o corpo $\mathbb{K}$ que podemos coletar dentre as formas que definem o arranjo. Se $rank(\mathcal{A}) = dim(\mathcal{A})$, diremos que o arranjo $\mathcal{A}$ é *essencial*.

Exemplo 2.1.5. Seja $V = \mathbb{R}^2$, considere

$$\mathcal{H}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}, \, \mathcal{H}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\},$$

os conjuntos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são hiperplanos de $\mathbb{R}^2$. Ainda, $rank(\mathcal{A}) = 2$ pois as formas $x + y$ e x são linearmente independentes sobre $\mathbb{K}$ e $dim(\mathcal{A}) = 2$. Portanto o arranjo $\mathcal{A} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} = \{x + y, x\}$ é essencial.

A fim de evitar eventuais comportamentos patológicos, estaremos supondo que $\mathcal{A} = \{V(\ell_1), \ldots, V(\ell_m)\}$ é sempre um arranjo de hiperplanos em um espaço afim $\mathbb{K}^n$, sendo $n \geq 2$, $m \geq n$ e $\mathbb{K}$ um corpo de característica zero.

Definição 2.1.6. Um arranjo de hiperplanos $\mathcal{A}$ é dito *genérico* (respectivamente *r-genérico* com $r \leq n$) se ao tomarmos n (respectivamente r) formas, dentre as formas lineares que definem o arranjo, estas forem necessariamente $\mathbb{K}$-linearmente independentes. Um arranjo *quase genérico* é um arranjo $(n-1)$-genérico.

Exemplo 2.1.7. Se considerarmos $\mathcal{A} = \{x, y, z, z-y\}$ um arranjo associado ao espaço afim $\mathbb{K}^3$, obtemos um arranjo quase genérico.

Neste trabalho, uma ferramenta muito utilizada é a conhecida *relação de Euler*, ela nos diz, essencialmente, que se $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ é um polinômio homogêneo de grau m, então $mf = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i}$, onde f_{x_i} denota a derivada parcial de f em relação a variável x_i. Esta relação nos ajuda a simplificar o ideal jacobiano associado a uma forma homogênea linear, ente muito utilizado ao longo deste texto.

Definição 2.1.8. Sejam $\mathcal{A}$ um arranjo de hiperplanos e $f := \ell_1 \cdots \ell_m \in R$ o polinômio de definição. O ideal de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

é chamado de *ideal jacobiano* relacionado a forma f e é denotado por J_f.

Em geral, na definição de ideal jacobiano, a forma f é incluída como gerador, porém, desde que f é uma forma, pela relação de Euler, f é escrita como combinação de suas derivadas parciais, o que resulta na definição enunciada. Este ideal é um dos principais objetos deste trabalho, visto que os principais resultados desta dissertação o envolvem.

Finalizando esta sequência de definições, apresentamos o ideal $\mathbb{I}$ gerado pelos produtos distintos de $(m-1)$ formas lineares dentre $\ell_1, \ldots, \ell_m$, ou seja,

$$\mathbb{I} = (\ell_2\ell_3 \cdots \ell_m, \ell_1\ell_3 \cdots \ell_m, \ldots, \ell_1\ell_2 \cdots \ell_{m-1}).$$

De maneira mais prática podemos apresentar o ideal $\mathbb{I}$ da seguinte forma: denotando, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $L_i := \ell_1 \cdots \widehat{\ell_i} \cdots \ell_m \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, obtemos $\mathbb{I} = (L_1, L_2, \ldots, L_m)$.

Ao longo deste capítulo discutiremos alguns resultados do artigo [5]. O mesmo é pautado em algumas conjecturas envolvendo reduções, o ideal jacobiano e o ideal dos $(m-1)$-produtos, a principal delas será enunciada a seguir.

Conjectura 1. O ideal jacobiano J_f é uma redução minimal de $\mathbb{I}$ com número de redução no máximo $n-1$.

A conjectura 1 vale de maneira natural para $n = 2$, verificaremos isto ao longo deste capítulo. Neste capítulo demonstraremos alguns casos particulares da mesma.

Para o que segue, é importante apresentar a fibra especial de $\mathbb{I}$ através de sua apresentação homogênea dada pelo mapa $T_j \mapsto \ell_1 \cdots \widehat{\ell_j} \cdots \ell_m$, obtendo

$$\mathcal{F}(\mathbb{I}) \simeq \frac{\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_m]}{Q}.$$

Em [7], os autores exibem um isomorfismo entre a fibra especial de $\mathbb{I}$ e a álgebra de Orlik-Terao, um objeto muito importante do ponto de vista combinatório e muito utilizado na teoria dos arranjos de hiperplanos.

Para facilitar a notação utilizada no lema seguinte, defina $a_{i,j} := (\ell_j)_{x_i} := \dfrac{\partial \ell_j}{\partial x_i}$ o x_i-coeficiente de ℓ_j. Diante dessa construção, é possível enunciar o seguinte

Lema 2.1.9. No contexto já posto, são equivalentes:

a) J_f é uma redução minimal de $\mathbb{I}$;

b) $\left\{\sum_{j=1}^{m} a_{1,j}T_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}T_j\right\}$ é uma sequência $\mathcal{F}(\mathbb{I})$-regular;

c) O ideal $\left(\sum_{j=1}^{m} a_{1,j}T_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}T_j, Q\right) \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_m]$ é $(T_1, \ldots, T_m)$-primário.

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b) Note que, pelo mapa de apresentação, temos

$$\phi\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}T_j\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

portanto o item b) afirma que as derivadas parciais de f formam uma sequência regular em $\mathcal{F}(\mathbb{I})$, uma vez que o mapa de apresentação é um isomorfismo. Como J_f é uma redução minimal de $\mathbb{I}$, segue da proposição 1.3.10 juntamente com o corolário 1.3.9 que as derivadas parciais geram um anel polinomial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$. Uma vez que a fibra especial de $\mathbb{I}$ é Cohen-Macaulay [7, Remark 2.1, *ii)*], as derivadas parciais formam uma sequência regular em $\mathcal{F}(\mathbb{I})$, o que prova a implicação desejada.

b) $\Rightarrow$ c) Uma vez que $\left\{\sum_{j=1}^{m} a_{1,j}T_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}T_j\right\}$ é uma sequência regular em $\mathcal{F}(\mathbb{I})$, segue que $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$ é uma sequência regular em $\mathcal{F}(\mathbb{I})$. Porém, como $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = n$, segue que $\ell(\mathbb{I}) = n$ [7, Corollary 2.6]. É fato que

$$dim\left(\frac{\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_m]}{(\sum_{j=1}^{m} a_{1,j}T_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}T_j, Q)}\right) = dim\left(\frac{\mathcal{F}(\mathbb{I})}{J_f\mathcal{F}(\mathbb{I})}\right),$$

pois estes quocientes são isomorfos, afinal, denotando $(\sum_{j=1}^{m} a_{1,j}T_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}T_j, Q)$ por

K temos
$$\frac{\mathcal{F}(\mathbb{I})}{J_f\mathcal{F}(I)} \simeq \frac{\frac{\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m]}{Q}}{J_f\frac{\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m]}{Q}} \simeq \frac{\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m]}{K}.$$

Entretanto,
$$dim\left(\frac{\mathcal{F}(\mathbb{I})}{J_f\mathcal{F}(\mathbb{I})}\right) = dim(\mathcal{F}(\mathbb{I})) - ht(J_f\mathcal{F}(\mathbb{I}))$$

pois $\mathcal{F}(\mathbb{I})$ é Cohen-Macaulay [7, Corollary 2.6]. Ainda, $ht(J_f\mathcal{F}(\mathbb{I})) = n$, pois J_f é gerado por uma sequência regular de n elementos, portanto
$$dim\left(\frac{\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m]}{K}\right) = dim\left(\frac{\mathcal{F}(\mathbb{I})}{J_f\mathcal{F}(\mathbb{I})}\right) = n - n = 0.$$

Sendo $\mathbb{K}$ Cohen-Macaulay, o anel de polinômios $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m]$ também o é, logo, segue
$$dim\left(\frac{\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m]}{K}\right) = dim(\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m]) - ht(K) = 0,$$

assim
$$dim(\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m]) = ht(K) = m.$$

Porém, estamos no contexto *standard* graduado, ou seja, o ideal maximal de $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m]$ é $(T_1,\ldots,T_m)$, o qual também possui altura m. Desse modo, K é $(T_1,\ldots,T_m)$-primário.
$c) \Rightarrow a)$ Sendo K ideal $(T_1,\ldots,T_m)$-primário, existe $s > 0$ suficientemente grande tal que $T_i^s \in K$ para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$. Assim, passando ao mapa de apresentação, temos que existe uma potência s que mapeia os geradores de $\mathbb{I}$ como combinação linear dos geradores de $\mathbb{I}$ e J_f. Portanto $\mathbb{I}^{s+1} = J_f\mathbb{I}^s$.

□

A seguir demonstraremos dois casos particulares da conjectura 1, em seguida trabalharemos alguns resultados visando o principal teorema desta seção, o qual nos garante que, sob um corpo de característica zero, para um arranjo $(n-1)$-genérico, o ideal jacobiano J_f é uma redução minimal de $\mathbb{I}$ com número de redução menor ou igual a $n-1$.

Proposição 2.1.10. Seja $\mathcal{A} = \{\ell_1,\ldots,\ell_m\}$ um arranjo de hiperplanos tal que rank$(\mathcal{A})$ $= n$. Se $m \leq$ rank$(\mathcal{A}) + 1 = n+1$, então J_f é uma redução minimal de $\mathbb{I}$, onde $f := \ell_1\cdots\ell_m \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ é o polinômio de definição de $\mathcal{A}$.

Demonstração. Uma vez que $\mathcal{A}$ tem posto n, podemos efetuar uma mudança de variáveis pondo $\ell_i = x_i$ para $i \in \{1,\ldots,n\}$. Se $m = n$, temos
$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = (x_2\cdots x_n,\ldots,x_1\cdots x_{n-1}) = (\ell_2\cdots\ell_n,\ldots,\ell_1\cdots\ell_{n-1}) = \mathbb{I}.$$

Sendo assim, por [7, Corollary 2.6] e [13, Proposition 7.3.17] temos que J_f é uma redução minimal de $\mathbb{I}$. Se $m = n+1$, ponha $\ell_{n+1} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, diante do exposto temos

$$f := \ell_1 \cdots \ell_m = \ell_1 \cdots \ell_{n+1} = x_1 \cdots x_n \ell_{n+1} = x_1 \cdots x_n(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n).$$

Fazendo $f_i := \dfrac{f}{\ell_i}$ para $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ segue que

$$\begin{aligned} f_{x_i} &= x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) + x_1 \cdots x_n \alpha_i \\ &= \ell_1 \cdots \widehat{\ell_i} \cdots \ell_n \ell_{n+1} + f_{n+1}\alpha_i \\ &= f_i + f_{n+1}\alpha_i. \end{aligned}$$

Note que, neste caso, a igualdade $\ell_{n+1} = \alpha_1\ell_1 + \cdots + \alpha_n\ell_n$ define o único gerador da fibra especial de $\mathbb{I}$, suponha que $\alpha_{j+1} = \cdots = \alpha_n = 0$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_j \neq 0$. Este gerador é

$$Q = T_1 \cdots T_j - (\alpha_1 T_2 \cdots T_j T_{n+1} + \cdots + \alpha_j T_2 \cdots T_{j-1} T_{n+1}),$$

desse modo o ideal no item $c)$ do lema 2.1.9 é $(T_1 + \alpha_1 T_{n+1}, \ldots, T_j \alpha_j T_{n+1}, T_{j+1}, \ldots, T_n, Q)$ afinal

$$\sum_{j=1}^{m} a_{1,j} T_j = a_{1,1}T_1 + a_{1,2}T_2 + \cdots + a_{1,n+1}T_{n+1} + \cdots + a_{1,m}T_m,$$

mas

$$a_{1,1} := \frac{\partial \ell_1}{\partial x_1} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1, a_{1,2} = \frac{\partial \ell_2}{\partial x_1} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0, \ldots, a_{1,n} = \frac{\partial \ell_n}{\partial x_1} = \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = 0$$

e $a_{1,n+1} = \dfrac{\partial \ell_{n+1}}{\partial x_1} = \dfrac{\partial(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)}{\partial x_1} = \alpha_1$, portanto $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{1,j}T_j = T_1 + \alpha_1 T_{n+1}$. Prosseguindo, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{n,j}T_j = a_{n,n}T_n = 1.T_n = T_n$, assim, o ideal no item $c)$ do lema anterior é, de fato,

$$(T_1 + \alpha_1 T_{n+1}, \ldots, T_j + \alpha_j T_{n+1}, T_{j+1}, \ldots, T_n, (1 - (-1)^{j-1} j)\alpha_1 \cdots \alpha_j T_{n+1}^j).$$

Porém, este ideal é $(T_1, \ldots, T_{n+1})$- primário, afinal denotando-o por J temos $T_i \in \sqrt{J}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Portanto $(T_1, \ldots, T_{n+1}) \subseteq \sqrt{J}$, mas $(T_1, \ldots, T_{n+1})$ é maximal, o que implica $(T_1, \ldots, T_{n+1}) = \sqrt{J}$. Diante de todo o exposto, aplicando o lema 2.1.9, segue que J_f é uma redução minimal de $\mathbb{I}$. $\square$

A seguir demonstraremos um lema que está em uma vertente um pouco distinta do que fizemos até agora, nele utilizaremos o conceito de partição de um arranjo.

Seja $R := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s]$ o anel de polinômios em $r+s$ variáveis sobre um corpo $\mathbb{K}$. Considere o arranjo de hiperplanos $\mathcal{A}$ de $\mathbb{K}^{r+s}$, onde $\text{size}(\mathcal{A}) = m$. Suponha que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é uma 2-partição de $\mathcal{A}$, ou seja, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \varnothing$. Os arranjos $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ da 2-partição são arranjos de $\mathbb{K}^r$ e $\mathbb{K}^s$, respectivamente e possuem tamanho m_x e m_y

Vamos assumir que $m_x \geq r$ e $m_y \geq s$ e sejam f e g os polinômios de definição dos arranjos $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente, desse modo $F = fg$ é o polinômio de definição do arranjo $\mathcal{A}$.

Considere $\mathbb{I}_f \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ o ideal gerado pelos $m_x - 1$ produtos das formas que definem o arranjo $\mathcal{B}$ e, similarmente, defina $\mathbb{I}_g$ ideal de $\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_s]$ e $\mathbb{I}_F$ ideal de R. Por fim $J_f \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$ denota o ideal jacobiano de f e, analogamente, $J_g \subseteq \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_s]$ e $J_F \subseteq R$.

Lema 2.1.11. No contexto dos parágrafos anteriores temos $\mathbb{I}_F = (f\mathbb{I}_g; g\mathbb{I}_f)$ e $J_F = (fJ_g; gJ_f)$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B} = \{\ell_1, \ldots, \ell_{m_x}\}$ e $\mathcal{C} = \{h_1, \ldots, h_{m_y}\}$, assim $f = \ell_1 \cdots \ell_{m_x}$ e $g = h_1 \cdots h_{m_y}$ são os polinômios de definição dos arranjos $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente e $F = \ell_1 \cdots \ell_{m_x} \cdot h_1 \cdots h_{m_y}$, assim

$$\begin{aligned}
(f\mathbb{I}_g; g\mathbb{I}_f) &= (\ell_1 \cdots \ell_{m_x}(\widehat{h_1} \cdot h_2 \cdots h_{m_y}, \ldots, h_1 \cdots \widehat{h_{m_y}}); h_1 \cdots h_{m_y}(\widehat{\ell_1} \cdots \ell_{m_x}, \ldots, \ell_1 \cdots \widehat{\ell_{m_x}})) \\
&= \mathbb{I}_F.
\end{aligned}$$

Por fim, mostremos a igualdade envolvendo J_F.

$$\begin{aligned}
J_F &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_r}, \frac{\partial F}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial y_s}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_r}, \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_s} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial y_s}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot g, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r} \cdot g, f \cdot \frac{\partial g}{\partial y_1}, \ldots, f \cdot \frac{\partial g}{\partial y_s}\right) \\
&= (fJ_g; gJ_f).
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.12. Suponha que J_f (respectivamente, J_g) é uma redução de $\mathbb{I}_f$ com número de redução no máximo $r-1$ (respectivamente, de $\mathbb{I}_g$ com número de redução no máximo $s-1$). Então J_F é uma redução de $\mathbb{I}_F$ com número de redução no máximo $r+s-1$.

Demonstração. Amentemos que o número de redução de um ideal I com respeito a um ideal J é o menor inteiro positivo n tal que $I^{n+1} = JI^n$. Por hipótese, temos

$\mathbb{I}_f^r = J_f\mathbb{I}_f^{r-1}$ e $\mathbb{I}_g^s = J_g\mathbb{I}_g^{s-1}$. Vamos mostrar que $\mathbb{I}_F^{r+s-1} = J_F\mathbb{I}_F^{r+s-2}$, pois como o número de redução de $\mathbb{I}_F$ com respeito a J_F é o mínimo dentre os inteiros positivos m tais que $\mathbb{I}_F^m = J_F\mathbb{I}^{m-1}$, se a igualdade é válida para $r+s-1$, então o número de redução é menor ou igual a $r+s-1$.

Vale, em geral, que $J_F \subseteq \mathbb{I}_F$, ou seja, $J_F\mathbb{I}_F^{r+s-2} \subseteq \mathbb{I}_F^{r+s-1}$, dessa forma nos resta mostrar que $\mathbb{I}_F^{r+s-1} \subseteq J_F\mathbb{I}_F^{r+s-2}$. Pelo lema anterior e utilizando expansão binomial podemos concluir que o ideal $\mathbb{I}_F$ é gerado por ideais da forma

$$Q_t := f^{r+s-1-t}\mathbb{I}_g^{r+s-1-t}g^t\mathbb{I}_f^t,$$

com $t \in \{0,\ldots,r+s-1\}$.
Se $t < r$, então $t+1 \leq r$ e logo $t+s+1 \leq r+s$, ou seja, $s \leq r+s-t-1$. Assim, como o número de redução de $\mathbb{I}_g$ com respeito à J_g é menor ou igual a $s-1$, temos $\mathbb{I}_g^{r+s-t-1} = J_g\mathbb{I}_g^{r+s-t-2}$. Logo

$$\begin{aligned} Q_t &= f^{r+s-1-t}J_g\mathbb{I}_g^{r+s-t-2}g^t\mathbb{I}_f^t \\ &= (fJ_g)(f\mathbb{I}_g)^{r+s-2-t}g^t\mathbb{I}_f^t \\ &\subseteq J_F\mathbb{I}_F^{r+s-2-t}\mathbb{I}_F^t \end{aligned}$$

afinal $fJ_g \subseteq J_F$, $(f\mathbb{I}_g)^{r+s-2-t} \subseteq \mathbb{I}_F^{r+s-2-t}$ e $g^t\mathbb{I}_f^t \subseteq \mathbb{I}_F^t$, pois $F = fg$. Mas

$$J_F\mathbb{I}_F^{r+s-2-t}\mathbb{I}_F^t = J_F\mathbb{I}_F^{r+s-2},$$

e assim temos $\mathbb{I}_F^{r+s-1} \subseteq J_F\mathbb{I}_F^{r+s-2}$, o que nos permite concluir $\mathbb{I}_F^{r+s-1} = J_F\mathbb{I}_F^{r+s-2}$. Portanto J_F é uma redução de $\mathbb{I}_F$ com número de redução no máximo $r+s-1$. O caso $t \geq r$ ocorre de forma análoga. □

Visando bem estabelecer algumas notações para demonstração do próximo lema e do teorema que o procede, vamos convencionar algumas notações. Reiteramos que estas notações serão utilizadas apenas no lema e teorema em questão. Nos resultados citados consideraremos $\mathbb{K}$ um corpo de característica zero. Enunciemos, portanto, a seguinte

Observação 2. Até o final desta seção, $R := \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$, $L_i := \ell_1\cdots\widehat{\ell_i}\cdots\ell_m$, com $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_{x_j} = a_{1,j}\ell_2\cdots\ell_m + \cdots + a_{i,j}\ell_1\cdots\widehat{\ell_i}\cdots\ell_m + \cdots + a_{m,j}\ell_1\cdots\ell_{m-1} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\ell_1\cdots\widehat{\ell_i}\cdots\ell_m$ com $a_{i,j} := (\ell_i)_{x_j}$ para $i = 1,\ldots,m$ e por fim $\mathfrak{m} = (x_1,\ldots,x_n)$.

O lema a seguir nos auxiliará na demonstração do principal resultado deste capítulo, um dos principais deste trabalho.

Lema 2.1.13. Se $\mathcal{A}$ é um arranjo $(n-1)$-genérico, então $L_1L_2\cdots L_n \in J_f\mathbb{I}^{n-1}$.

Demonstração. Denote por

$$\begin{aligned} P &= L_1L_2\cdots L_n \\ &= (\ell_2\ell_3\cdots\ell_m)(\ell_1\ell_3\cdots\ell_m)\cdots(\ell_1\ell_2\cdots\ell_{n-1}\ell_{n+1}\cdots\ell_m) \\ &= (\ell_1\ell_2\cdots\ell_n)^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^n \end{aligned}$$

e $\mathcal{B} = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$. Vamos dividir a demonstração em dois casos: quando $\operatorname{rank}(\mathcal{B}) = n$ e quando $\operatorname{rank}(\mathcal{B}) = n-1$.

Caso 1: $\operatorname{rank}(\mathcal{B}) = n$

Sendo $f = \ell_1\cdots\ell_m$ segue que $P \in (f)$, afinal

$$\begin{aligned} P &= (\ell_1\ell_2\cdots\ell_n)\cdot(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)(\ell_1\ell_2\cdots\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1} \\ &= f\cdot(\ell_1\ell_2\cdots\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1} \in (f). \end{aligned}$$

Vamos denotar $(\ell_1\ell_2\cdots\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}$ por $\mathfrak{q}$, assim $P = f\cdot\mathfrak{q}$. Afirmamos que $\mathfrak{m}\mathfrak{q} \subseteq \mathbb{I}^{n-1}$. Uma vez que $\operatorname{rank}(\mathcal{B}) = n$, temos $\mathfrak{m} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$. Portanto, é suficiente mostrar que para $j \in \{1, \ldots, n\}$ temos $\ell_j\mathfrak{q} \in \mathbb{I}^{n-1}$, afinal $\mathfrak{m}$ é gerado pelos ℓ_j. Mas

$$\begin{aligned} L_1\cdots\widehat{L_j}\cdots L_n &= (\widehat{\ell_1}\ell_2\cdots\ell_j\cdots\ell_m)\cdots(\ell_1\cdots\widehat{\widehat{\ell_j}\cdots}\ell_m)\cdots(\ell_1\cdots\widehat{\ell_n}\cdots\ell_m) \\ &= \ell_j(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}(\ell_1\cdots\ell_n)^{n-2} \\ &= \ell_j\mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Em adição, $L_1\cdots\widehat{L_j}\cdots L_n \in (L_1, \ldots, L_n)^{n-1} \subseteq \mathbb{I}^{n-1}$, logo $\ell_j\mathfrak{q} \in \mathbb{I}^{n-1}$, o que prova a afirmação feita anteriormente. Sabemos que, pela relação de Euler, sendo $m = \deg(f)$, tem-se

$$mf = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i}$$

desse modo segue $mP = m(f\mathfrak{q}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i})\mathfrak{q} = x_1 f_{x_1}\mathfrak{q} + \ldots + x_n f_{x_n}\mathfrak{q} \in J_f\mathbb{I}^{n-1}$, portanto $P \in J_f\mathbb{I}^{n-1}$.

Caso 2: $rank(\mathcal{B}) = n-1$

Neste caso, a menos de uma reordenação, ℓ_n é uma combinação linear sobre $\mathbb{K}$ das formas $\{\ell_1, \ldots, \ell_{n-1}\}$, afinal o arranjo em questão é $(n-1)$-genérico. Considere a mudança de variáveis $\ell_i = x_i$ para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ e suponha que a combinação linear citada acima seja

$$\ell_n = a_1\ell_1 + \ldots + a_{n-1}\ell_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i\ell_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}].$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} P &= (\ell_1\ell_2\cdots\ell_{n-1}\ell_n)^{n-1} \cdot (\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^n \\ &= (x_1x_2\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^n \\ &= (x_1\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\ell_p\ell_{p+1}\cdots\ell_m)^n \end{aligned}$$

onde $p \geq n$ é tal que $\ell_n, \ldots, \ell_p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ e $\operatorname{rank}(\{\ell_1, \ldots, \ell_{n-1}, \ell_k\}) = n$ para $p+1 \leq k \leq m$. Note que esta mudança de variáveis preserva as hipóteses e a conclusão desejada. Agora, para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ temos

$$\begin{aligned} & f_{x_j} - x_1\cdots x_j\cdots x_{n-1}(a_{n,j}\ell_{n+1}\cdots\ell_m) - x_1\cdots x_j\cdots x_{n-1}\left(\sum_{s=n+1}^{m} a_{s,j}\ell_n\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m\right) \\ = \; & (a_{1,j}\widehat{\ell_1}\ell_2\cdots\ell_m + \ldots + a_{i,j}\ell_1\cdots\widehat{\ell_i}\cdots\ell_m + \ldots + a_{m,j}\ell_1\cdots\ell_{m-1}\widehat{\ell_m}) - x_1\cdots x_j\cdots x_{n-1}(a_{n,j} \\ & \ell_{n+1}\cdots\ell_m) - x_1\cdots x_j\cdots x_{n-1}(a_{n+1,j}\ell_n\widehat{\ell_{n+1}}\cdots\ell_m + \ldots + a_{m,j}\ell_n\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_m}) \\ = \; & (a_{1,j}\widehat{x_1}x_2\cdots x_{n-1}\ell_n\cdots\ell_m + \ldots + a_{j,j}x_1x_2\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n\cdots\ell_m + \ldots + a_{m,j}x_1\cdots x_{n-1}\ell_n \\ & \cdots\widehat{\ell_m}) - x_1\cdots x_j\cdots x_{n-1}(a_{n,j}\ell_{n+1}\cdots\ell_m) - x_1\cdots x_j\cdots x_{n-1}(a_{n+1,j}\ell_n\widehat{\ell_{n+1}}\cdots\ell_m + \ldots + \\ & a_{m,j}\ell_n\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_m}) \\ = \; & x_1x_2\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n\cdots\ell_m, \end{aligned}$$

afinal $a_{i,j} = (\ell_i)_{x_j}$ e $\ell_i = x_i$ para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, portanto, se $i \neq j$, segue que $a_{i,j} = 0$. Denotemos este último fator, $x_1x_2\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n\cdots\ell_m$, por Δ_j. Recordemos que

$$\begin{aligned} P &= (x_1\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\ell_p\ell_{p+1}\cdots\ell_m)^n \\ &= x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\ell_p\ell_{p+1}\cdots\ell_m)^n \\ &= x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_p\ell_{p+1}\cdots\ell_m)^{n-1}\Delta_j. \end{aligned}$$

Substituindo Δ_j temos:

$$\begin{aligned}
P &= x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}f_{x_j}\\
&- x_jx_j^{n-2}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}(x_1\cdots x_j\cdots x_{n-1}(a_{n,j}\ell_{n+1}\cdots\ell_m)\\
&- x_1\cdots x_j\cdots x_{n-1}\left(\sum_{s=n+1}^{m} a_{s,j}\ell_n\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m\right))\\
&= x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1})^{n-2}\ell_n^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}f_{x_j}\\
&- (x_1\cdots x_j\cdots x_{n-1})^{n-1}x_j(a_{n,j}\ell_n^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^n)\\
&- (x_1\cdots x_j\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}x_j\left(\sum_{s=n+1}^{p} a_{s,j}\ell_s^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)^n\right)\\
&- x_j^n(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}\left(\sum_{p+1}^{m} a_{s,j}\ell_s^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)^n\right).
\end{aligned}$$

Podemos reorganizar os cálculos anteriores obtendo

$$\begin{aligned}
P &= x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}f_{x_j}\\
&- (x_1\cdots\cdots x_{n-1})^{n-1}\ell_n^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^n(a_{n,j}x_j)\\
&- (x_1\cdots x_j\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}\left(\sum_{s=n+1}^{p} a_{s,j}x_j(\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)\right)\\
&- (x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}x_j^n\left(\sum_{s=p+1}^{m} a_{s,j}\ell_s^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)^n\right).
\end{aligned}$$

Efetuando o somatório $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}$ obtemos

$$\begin{aligned}
(n-1)P &= \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}f_{x_j}\\
&- (x_1\cdots x_{n-1})^{n-1}\ell_n^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^n\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j}x_j\right)\\
&- (x_1\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{s=n+1}^{p} a_{s,j}x_j\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m\right)\\
&- (x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j^n\left(\sum_{s=p+1}^{m} a_{s,j}\ell_s^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)^n\right)\right).
\end{aligned}$$

Escrevendo $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{s,j}x_j = \ell_s$ para cada $s \in \{n, n+1, \ldots, p\}$ podemos reescrever os cálculos anteriores da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
(n-1)P &= \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}f_{x_j}\\
&- (x_1\cdots x_{n-1})^{n-1}\ell_n^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^n\ell_n\\
&- (x_1\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}\\
&\quad\left(\sum_{j=1}^{n-1}(a_{n+1,j}x_j\widehat{\ell_{n+1}}\cdots\ell_m+\ldots+a_{p,j}x_j\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_p}\cdots\ell_m)\right)\\
&- (x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{s=p+1}^{m}a_{s,j}\ell_s^{n-1}(x_j\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)^n\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}f_{x_j}\\
&- P-(x_1\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}\\
&\quad\left(\sum_{j=1}^{n-1}(a_{n+1,j}x_j\widehat{\ell_{n+1}}\cdots\ell_m+\ldots+a_{p,j}x_j\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_p}\cdots\ell_m)\right)\\
&- (x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{s=p+1}^{m}a_{s,j}\ell_s^{n-1}(x_j\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)^n\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}f_{x_j}-P\\
&- (x_1\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}\\
&\quad\left(\sum_{j=1}^{n-1}(a_{n+1,j}x_j\widehat{\ell_{n+1}}\cdots\ell_m)+\ldots+\sum_{j=1}^{n-1}(a_{p,j}x_j\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_p}\cdots\ell_m)\right)\\
&- (x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{s=p+1}^{m}a_{s,j}\ell_s^{n-1}(x_j\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)^n\right).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
(n-1)P &= \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}f_{x_j}-P-(x_1\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}\\
&\quad(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}\Big((\ell_{n+1}\widehat{\ell_{n+1}}\cdots\ell_m)+\ldots+(\ell_p\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_p}\cdots\ell_m)\Big)\\
&- (x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{s=p+1}^{m}a_{s,j}\ell_s^{n-1}(x_j\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)^n\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}f_{x_j}-(p-n+1)P\\
&- (x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{s=p+1}^{m}a_{s,j}\ell_s^{n-1}(x_j\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)^n.\right)
\end{aligned}
$$

Diante de todos esses cálculos temos

$$\begin{aligned}(n-1)P+(p-n+1)P &= pP\\ &= \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1}f_{x_j}\\ &- (x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{s=p+1}^{m} a_{s,j}\ell_s^{n-1}(x_j\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)^n\right).\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}L_1\cdots\widehat{L_j}\cdots L_n &= (\widehat{x_1}x_2\cdots x_{n-1}\ell_n)(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)\cdots(x_1x_2\cdots x_{n-1}\widehat{\ell_n})(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)\\ &= x_j^{n-1}(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-2}(\ell_{n+1}\cdots\ell_m)^{n-1},\end{aligned}$$

logo

$$pP=\sum_{j=1}^{n-1}L_1\cdots\widehat{L_j}\cdots L_n f_{x_j}-(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{s=p+1}^{m} a_{s,j}\ell_s^{n-1}(x_j\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)^n\right).$$

Portanto, como assumimos que $\mathrm{char}(\mathbb{K})=0$, analisaremos apenas os somandos do segundo termo no lado direito da igualdade anterior, afinal se $\mathrm{char}(\mathbb{K})=p$, teríamos $pP=0$, e assim o lado direito da igualdade estaria, por definição, em $J_f\mathbb{I}^{n-1}$. Se estes somandos estiverem em $J_f\mathbb{I}^{n-1}$ temos o resultado desejado, estas parcelas tem a forma

$$(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_{n-1}\ell_n\ell_s)^{n-1}(x_j\ell_{n+1}\cdots\widehat{\ell_s}\cdots\ell_m)^n,$$

com $j\in\{1,\ldots,n-1\}$ e $s\in\{p+1,\ldots,m\}$ assim, substituindo x_j por ℓ_s em $X=\{x_1,\ldots,x_{n-1},\ell_n\}$, obtemos $X'=\{x_1,\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{n-1},\ell_n,\ell_s\}$, que é linearmente independente, pois em ℓ_n e em ℓ_s aparece a variável x_j e $\ell_n\in\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_{n-1}]$. Como a variável x_n aparece efetivamente em ℓ_s, temos $\mathrm{rank}(X')=n$ e o caso se encaixa no já demonstrado. □

Apresentaremos a seguir o principal resultado desta seção, na demonstração do mesmo utilizaremos o lema que foi demonstrado acima.

Teorema 2.1.14. Seja $\mathcal{A}$ um arranjo de hiperplanos central $(n-1)$-genérico. Então o ideal jacobiano $J_f\subseteq R:=\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ é uma redução minimal de $\mathbb{I}$ com número de redução no máximo $n-1$.

Demonstração. É fato que $\ell(\mathbb{I})=n$ [7, Corollary 2.6] e que $\mu(J_f)\le n$, pois $J_f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Para verificar a desigualdade contrária, suponha que $\mu(J_f)<n$, isto é, as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ formam um conjunto linearmente dependente.

Considerando o polinômio de definição do arranjo $\mathcal{A}$, $f = \ell_1 \cdots \ell_m$, temos

$$f_{x_i} = (\ell_1)_{x_i} L_1 + \ell_1 (L_1)_{x_i}.$$

Sendo $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ linearmente dependentes existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha_1 \neq 0$. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sum_{i=2}^{n} \widetilde{\alpha_i} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

com $\widetilde{\alpha_i} := \dfrac{\alpha_i}{\alpha_1}$, assim uma vez que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = (\ell_1)_{x_1} L_1 + \ell_1 (L_1)_{x_1}$ onde $L_1 = \widehat{\ell_1} \ell_2 \cdots \ell_m$, temos

$$(\ell_1)_{x_1} L_1 + \ell_1 (L_1)_{x_1} = \sum_{i=2}^{n} \widetilde{\alpha_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=2}^{n} \widetilde{\alpha_i} ((\ell_1)_{x_i} L_1 + \ell_1 (L_1)_{x_i}).$$

Portanto, segue que

$$((\ell_1)_{x_1} - \sum_{i=2}^{n} \widetilde{\alpha_i} (\ell_1)_{x_i}) L_1 = (\sum_{i=2}^{n} \widetilde{\alpha_i} (L_1)_{x_i} - (L_1)_{x_1}) \ell_1,$$

diante disso, temos duas possibilidades para o coeficiente do lado direito da igualdade anterior. Se este é não nulo, então ℓ_1 divide L_1, o que não pode ocorrer. Caso $\left(\sum_{i=2}^{n} \tilde{\alpha}_i (L_1)_{x_i} - (L_1)_{x_1} \right) = 0$ temos

$$\tilde{\alpha}_2 (L_1)_{x_2} + \cdots + \tilde{\alpha}_n (L_1)_{x_n} = (L_1)_{x_1},$$

notando que $(L_1)_{x_i} = \ell_2 (L_{1,2})_{x_i} + L_{1,2} (\ell_2)_{x_i}$, sendo $L_{1,2} := \ell_3 \cdots \ell_m$, assim

$$\sum_{i=2}^{n} \tilde{\alpha}_i (\ell_2 (L_{1,2})_{x_i} + L_{1,2} (\ell_2)_{x_i}) = \ell_2 (L_{1,2})_{x_1} + L_{1,2} (\ell_2)_{x_1},$$

portanto

$$\sum_{i=2}^{n} \tilde{\alpha}_i L_{1,2} (\ell_2)_{x_i} - L_{1,2} (\ell_2)_{x_1} = \ell_2 (L_{1,2})_{x_1} - \sum_{i=2}^{n} \tilde{\alpha}_i \ell_2 (L_{1,2})_{x_i} \in (\ell_2),$$

assim nosso problema é reduzido às formas $\ell_2, \ldots, \ell_m$. Procedendo recursivamente, encontramos a seguinte situação: ℓ_m divide L_m ou $\ell_m = 0$, o que gera também uma contradição. Diante de todo o exposto, temos $\mu(J_f) = n$, assim $\mu(J_f) = \ell(\mathbb{I})$.

Portanto, pelo corolário 1.3.9, se J_f for uma redução de $\mathbb{I}$, esta redução será minimal, desse modo é suficiente mostrar que $\mathbb{I}^n \subseteq J_f\mathbb{I}^{n-1}$.

Como já mencionado, temos $\mathbb{I} = (L_1, \ldots, L_m)$, onde $L_i := \ell_1 \cdots \widehat{\ell_i} \cdots \ell_m$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Os geradores canônicos de $\mathbb{I}^n$ tem a forma

$$P := L_{i_1}^{r_1} L_{i_2}^{r_2} \cdots L_{i_u}^{r_u},$$

com $1 \leq i_1 < \cdots < i_u \leq m$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_u = n$ e $r_j \geq 1 \forall j \in \{1, \ldots, u\}$, o conjunto $\{i_1, \ldots, i_u\}$ é chamado de suporte do gerador P. Queremos mostrar que $\mathbb{I}^n \subseteq J_f\mathbb{I}^{n-1}$, assim é suficiente mostrar que $P \in J_f\mathbb{I}^{n-1}$, para tal utilizaremos o processo de indução reversa em u, seja $v := n - u$, então $0 \leq v \leq n-1$.
Vamos ao caso inicial, ou seja, $v = 0$. Neste caso temos $n = u$ e assim

$$P = L_{i_1}^{r_1} L_{i_2}^{r_2} \cdots L_{i_n}^{r_n} = (L_{i_1} L_{i_2} \cdots L_{i_n})(L_{i_1}^{r_1-1} L_{i_2}^{r_2-1} \cdots L_{i_n}^{r_n-1}) \in J_f\mathbb{I}^{n-1},$$

pelo lema anterior. Prosseguindo ao passo indutivo seja $v \geq 1$ e suponha que o resultado é válido para $v - 1 = n - (u+1)$ em um arranjo $(n-1)$-genérico qualquer, desse modo todo gerador canônico cujo suporte possui cardinalidade $u+1$ está em $J_f\mathbb{I}^{n-1}$. Uma vez que $v \geq 1$ segue que $n - u \geq 1$ e assim $u \leq n-1$, portanto as formas lineares $\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_u}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{K}$, afinal o arranjo $\mathcal{A}$ em questão é $(n-1)$-genérico. Efetuando uma mudança de variáveis onde

$$x_1 \leftrightarrow \ell_{i_1}, \ldots, x_u \leftrightarrow \ell_{i_u},$$

assumiremos que $f = x_1 \cdots x_u \ell_{u+1} \cdots \ell_m$ para formas lineares adequadas $\ell_{u+1}, \ldots, \ell_m \in R$ e mesmo após efetuar esta mudança de variáveis o arranjo $\mathcal{A}$ permanece $(n-1)$-genérico. Ainda sob a mesma ótica temos

$$P = (\widehat{\ell_1} \cdots \ell_m)^{r_1} (\ell_1 \widehat{\ell_2} \cdots \ell_m)^{r_2} \cdots (\ell_1 \cdots \widehat{\ell_u} \cdots \ell_m)^{r_u} = \ell_1^{n-r_1} \ell_2^{n-r_2} \cdots \ell_u^{n-r_u} (\ell_{u+1} \cdots \ell_m)^n$$

e aplicando a mudança de variáveis ficamos com

$$P = x_1^{n-r_1} x_2^{n-r_2} \cdots x_u^{n-r_u} (\ell_{u+1} \cdots \ell_m)^n.$$

Como já citado $u \leq n-1$, assim pelo menos um dos expoentes r_j é tal que $r_j \geq 2$ pois se $r_j = 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, u\}$ temos $r_1 + \cdots + r_u = u \leq n-1 < n$, o que não pode ocorrer pela definição dos geradores standard de $\mathbb{I}^n$. Diante disso, existe $k \in \{1, \ldots, u\}$ tal que $r_k \geq 2$, ponha $P = L_{i_k} P'$, assim

$$P' = L_{i_1}^{r_1} L_{i_2}^{r_2} \cdots L_{i_k}^{r_k-1} \cdots L_{i_u}^{r_u} \in \mathbb{I}^{n-1},$$

afinal $r_1 + r_2 + \cdots + (r_k - 1) + \cdots + r_u = n - 1$. Por outro lado

$$f = (x_1 \cdots x_k \cdots x_u)(\ell_{u+1} \cdots \ell_m),$$

logo

$$\begin{aligned} f_{x_k} &= (x_1 \cdots x_k \cdots x_u)_{x_k}(\ell_{u+1} \cdots \ell_m) + (x_1 \cdots x_k \cdots x_u) \cdot (\ell_{u+1} \cdots \ell_m)_{x_k} \\ &= (x_1 \cdots \widehat{x_k} \cdots x_u)(\ell_{u+1} \cdots \ell_m) + (x_1 \cdots x_k \cdots x_u)[(\ell_{u+1})_{x_k}(\ell_{u+2} \cdots \ell_m) + \ldots + (\ell_m)_{x_k} \\ &\quad (\ell_{u+1} \cdots \ell_{m-1})] \\ &= L_{i_k} + \sum_{j \in \{u+1,\ldots,m\}} b_{k,j} L_j, \end{aligned}$$

onde $b_{k,j}$ é o coeficiente de x_k na expressão de ℓ_j, afinal $\ell_1, \ldots, \ell_m$ são formas lineares de grau 1. Assim

$$L_{i_k} = f_{x_k} - \sum_{j \in \{u+1,\ldots,m\}} b_{k,j} L_j$$

e logo $P = P' L_{i_k} = P' f_{x_k} - \sum_{j \notin \{i_1,\ldots,i_u\}} b_{k,j} P' L_j$. É claro que $f_{x_k} P' \in J_f \mathbb{I}^{n-1}$ pois $f_{x_k} \in J_f$ e $P' \in \mathbb{I}^{n-1}$, temos ainda que para cada $j \notin \{i_1, \ldots i_u\}$, como $r_k - 1 \geq 1$, pois $r_k \geq 2$, $P' L_j$ é um gerador canônico com suporte $\{i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_u, j\}$, afinal

$$P' L_j = L_{i_1}^{r_1} L_{i_2}^{r_2} \cdots L_{i_k}^{r_k - 1} \cdots L_{i_u}^{r_u} L_j.$$

Mas a cardinalidade desse suporte de $P' L_j$ é $u + 1$, portanto pela hipótese de indução $P' L_j \in J_f \mathbb{I}^{n-1}$ e assim $P \in J_f \mathbb{I}^{n-1}$. □

2.2 Sobre mudança de variáveis

Durante o nosso trabalho, na demonstração de diversos resultados, efetuamos uma mudança de variáveis, um questionamento natural a ser feito é se os ideais e o arranjo de hiperplanos em questão permanecem com as mesmas propriedades após executarmos esta mudança. Geometricamente falando, é natural que as propriedades estruturais do arranjo permaneçam as mesmas, nesta seção justificaremos algebricamente este fato.

Seja $\mathcal{A}$ um arranjo de hiperplanos cujo rank é n, considere ainda $f := \ell_1 \cdots \ell_m \in R := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ o polinômio de definição deste arranjo. Uma vez que $\text{rank}(\mathcal{A}) = n$, existe uma sequência de formas $\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_n}$ linearmente independentes sobre o corpo $\mathbb{K}$, uma simples reordenação dos índices nos permite convencionar que $i_1 = 1, \ldots, i_n = n$.

Diante da exposição feita no parágrafo anterior, existe uma única mudança de variáveis $\ell_1 \leftrightarrow y_1, \ldots, \ell_n \leftrightarrow y_n$ dada por $[x_1 \ldots x_n] \cdot M = [y_1 \ldots y_n]$ onde M é a matriz

$n \times n$ cujas colunas são os coeficientes das variáveis x_i nas formas $\ell_1, \ldots, \ell_n$. Mais precisamente, a entrada $a_{i,j}$ da matriz M é o coeficiente de x_i na forma ℓ_j. A matriz M é invertível, afinal suas colunas são linearmente independentes, logo de $[x_1 \ldots x_n] \cdot M = [y_1 \ldots y_n]$ temos $[x_1 \ldots x_n] = [y_1 \ldots y_n] \cdot M^{-1}$, portanto $x_1 = L_1, \ldots, x_n = L_n$ onde $L_1, \ldots, L_n$ são formas lineares em $S := \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$. Consideremos

$$G := f(L_1, \ldots, L_n) = y_1 \cdots y_n(\ell'_{n+1} \cdots \ell'_m) \in S := \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n],$$

podemos utilizar agora a regra da cadeia e teremos, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{\partial G}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(L_1, \ldots, L_n) \cdot \frac{\partial L_1}{\partial y_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(L_1, \ldots, L_n) \cdot \frac{\partial L_n}{\partial y_i}$$

Desse modo $[G_{y_1} \ldots G_{y_n}] = [f_{x_1}(L_1, \ldots, L_n) \ldots f_{x_n}(L_1, \ldots, L_n)] \cdot (M^{-1})^t$, onde t denota a transposição da matriz M^{-1}. Uma vez que $(M^{-1})^t$ é invertível, em termos dos ideais de $S := \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$ temos

$$J_G = (G_{y_1}, \ldots, G_{y_n}) = (f_{x_1}(L_1, \ldots, L_n), \ldots, f_{x_n}(L_1, \ldots, L_n))$$

afinal as entradas da matriz $(M^{-1})^t$ estão no corpo $\mathbb{K}$. Explicitamente, o que estamos fazendo é:

(a) Começamos com $J_f = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$ em $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$;

(b) Executamos uma mudança de variáveis dos x_i para y_j através de

$$x_1 \leftrightarrow L_1, \ldots, x_n \leftrightarrow L_n,$$

obtendo um ideal $\overline{J}$ de $S := \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$ gerado por $f_{x_1}(L_1, \ldots, L_n), \ldots, f_{x_n}(L_1, \ldots, L_n)$;

(c) O ideal $\overline{J}$ de S obtido em c) possui as mesma propriedades homológicas que o ideal J_f de R;

(d) Sabemos que $\overline{J} = J_G \subseteq S$. Portanto, podemos assumir que $\ell_1 = x_1, \ldots, \ell_n = x_n$.

Denote por $\overline{\mathbb{I}}$ o ideal gerado pelos $(m-1)$ produtos das formas $y_1, \ldots, y_n, \ell'_{n+1}, \ldots, \ell'_m$, suponha que $\overline{\mathbb{I}}^k \subseteq J_G\overline{\mathbb{I}}^{k-1}$, isto é, J_G é uma redução de $\overline{\mathbb{I}}$, vamos mostrar que J_f é uma redução de $\mathbb{I}$. Se efetuarmos a mudança de variáveis $y_1 \leftrightarrow \ell_1, \ldots, y_n \leftrightarrow \ell_n$ teremos que

$$J_G = (f_{x_1}(L_1, \ldots, L_n), \ldots, f_{x_n}(L_1, \ldots, L_n)) \to (f_{x_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{x_n}(x_1, \ldots, x_n)) = J_f,$$

pois $[x_1 \ldots x_n] \cdot M = [y_1 \ldots y_n]$ e $L_1 = x_1, \ldots, L_n = x_n$. Ainda, como

$$\overline{\mathbb{I}} = (y_2 \cdots y_n \ell'_{n+1} \cdots \ell'_m, \ldots, y_1 \cdots y_n \ell'_{n+1} \cdots \ell'_{m-1}),$$

temos $\bar{\mathbb{I}} \to (\ell_2 \cdots \ell_n \ell_{n+1} \cdots \ell_m, \ldots, \ell_1 \cdots \ell_n \ell_{n+1} \cdots \ell_{m-1}) = \mathbb{I}$. Portanto, se J_G é uma redução de $\bar{\mathbb{I}}$, então J_f é uma redução de $\mathbb{I}$. Este fato é de suma importância, afinal por muitas vezes durante o nosso trabalho ao nos depararmos com algo sobre redução do ideal jacobiano em relação ao ideal $\mathbb{I}$, optamos por utilizar mudança de variáveis e analisar a redução em relação a estes ideais após a mudança de variáveis.
A seguir explanaremos um exemplo envolvendo o que foi explicitado neste tópico sobre mudanças de variáveis.

Exemplo 2.2.1. Seja $R := \mathbb{K}[x_1, x_2]$ e considere o arranjo

$$\mathcal{A} = \{x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + 3x_2\},$$

denotemos $\ell_1 := x_1 + x_2, \ell_2 := 2x_1 + x_2, \ell_3 := x_1 - x_2$ e $\ell_4 := x_1 + 3x_2$. Desse modo, o polinômio de definição de $\mathcal{A}$ é $f := \ell_1\ell_2\ell_3\ell_4 = (x_1 + x_2)(2x_1 + x_2)(x_1 - x_2)(x_1 + 3x_2)$, a fim de efetuar a mudança de variáveis $\ell_i \leftrightarrow y_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, podemos escolher as formas ℓ_1, ℓ_2 como as formas linearmente independentes que dão origem a nossa matriz de mudança de variáveis, tal matriz é $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, assim a mudança de variáveis é dada por

$$[x_1, x_2] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = [y_1, y_2],$$

isto é,

$$[x_1, x_2] = [y_1, y_2] \cdot M^{-1} = [y_1, y_2] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Logo $[x_1, x_2] = [-y_1 + y_2, 2y_1 - y_2] := [L_1, L_2]$, como vimos anteriormente definimos $G := f(L_1, L_2) = f(-y_1 + y_2, 2y_1 - y_2)$. Portanto

$$\begin{aligned} G &:= f(-y_1 + y_2, 2y_1 - y_2) \\ &= y_1[2(-y_1 + y_2) + 2y_1 - y_2](-y_1 + y_2 - 2y_1 + y_2)(-y_1 + y_2 + 6y_1 - 3y_2) \\ &= y_1y_2(-3y_1 + 2y_2)(5y_1 - 2y_2) \in S := \mathbb{K}[y_1, y_2]. \end{aligned}$$

Por definição temos

$$J_f := (f_{x_1}, f_{x_2}) = (8x_1^3 + 21x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 - 7x_2^3, 7x_1^3 + 2x_1^2x_2 - 21x_1x_2^2 - 12x_2^3)$$

e

$$J_G = (G_{y_1}, G_{y_2}) = (-45y_1^2y_2 + 32y_1y_2^2 - 4y_2^3, -15y_1^3 + 32y_1^2y_2 - 12y_1y_2^2).$$

Diante dos cálculos feitos até aqui obtemos $f_{x_1}(L_1, L_2) = -30y_1^3 + 19y_1^2y_2 + 8y_1y_2^2 - 4y_2^3$

e $f_{x_2}(L_1, L_2) = -15y_1^3 - 13y_1^2y_2 + 20y_1y_2^2 - 4y_2^3$, o que nos fornece

$$\begin{aligned}
[f_{x_1}(L_1,L_2), f_{x_2}(L_1,L_2)] \cdot (M^{-1})^t &= [f_{x_1}(L_1,L_2), f_{x_2}(L_1,L_2)] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= [-30y_1^3 + 19y_1^2y_2 + 8y_1y_2^2 - 4y_2^3, -15y_1^3 - 13y_1^2y_2 + 20y_1y_2^2 \\
&\quad -4y_2^3] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= J_G
\end{aligned}$$

como havíamos verificado na construção que foi feita sobre mudanças de variáveis.

Capítulo 3

O teorema de Rose-Terao-Yuzvinsky

Neste momento introduziremos o *módulo de derivações logarítmicas* associado a uma forma $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ com o objetivo de apresentar uma decomposição para o mesmo em função do módulo de *sizigias* do ideal jacobiano relacionado a f, o qual denotamos por $\mathrm{Syz}(J_f)$. Este capítulo tem por principal propósito demonstrar o teorema de Rose-Terao-Yuzvinsky, resultado este que fornece a dimensão homológica do módulo de derivações logarítmicas associado à uma forma f bem como fornece a resolução livre graduada minimal do ideal jacobiano J_f.

No presente capítulo, a menos de menção contrária, A denota o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

3.1 Derivações

Seja $A := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ o anel dos polinômios nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ sobre o corpo $\mathbb{K}$. Pelo teorema da base de Hilbert, A é noetheriano e como já citado anteriormente local no sentido homogêneo. Para introduzirmos o módulo de derivações logarítmicas é necessário o conceito de derivação, para isto enunciemos a seguinte

Definição 3.1.1. Uma *derivação* em A é uma aplicação $d : A \to A$ que satisfaz:

i) $d(f+g) = d(f) + d(g)$ (aditividade);

ii) $d(fg) = d(f) \cdot g + f \cdot d(g)$ (regra do produto ou de Leibniz).

O conjunto das derivações em A é denotado por $\mathrm{Der}(A)$.

Proposição 3.1.2. $\mathrm{Der}(A)$ tem a estrutura de A-módulo.

Demonstração. Defina

$$\begin{array}{rccc} \mu : & A \times Der(A) & \to & \mathrm{Der}(A) \\ & (f, d) & \mapsto & fd \end{array},$$

onde fd é definida por

$$\begin{array}{rccc} fd: & A & \to & A \\ & g & \mapsto & (fd)(g) := fd(g) \end{array}.$$

Inicialmente, é preciso verificar que μ está bem definida, isto é, que $fd \in \mathrm{Der}(A)$. Com efeito, dados $g_1, g_2 \in A$ tem-se:

$$\begin{aligned} (fd)(g_1 + g_2) &= fd(g_1 + g_2) \\ &= fd(g_1) + fd(g_2) \\ &= (fd)(g_1) + (fd)(g_2). \end{aligned}$$

Ou seja, fd obedece a condição $i)$ da definição 3.1.1. Por fim, verificando a condição $ii)$:

$$\begin{aligned} (fd)(g_1g_2) &= fd(g_1g_2) \\ &= f(d(g_1)g_2 + g_1d(g_2)) \\ &= (fd)(g_1)g_2 + (fd)(g_2)g_1. \end{aligned}$$

Portanto, por fd cumpridas as condições da definição 3.1.1, segue que $fd \in \mathrm{Der}(A)$ e assim μ está bem definida. Agora, é necessário verificar que μ satisfaz os axiomas de A-módulo, com o objetivo de simplificar o texto denotaremos $\mu(f, d)$ por fd.

a) Sejam $f \in A$ e $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}(A)$. É necessário verificar que $f(d_1+d_2) = fd_1+fd_2$, para isto seja $g \in A$, dessa forma

$$(f(d_1 + d_2))(g) = f((d_1 + d_2)(g)) = f(d_1(g) + d_2(g)) = (fd_1 + fd_2)(g),$$

logo $f(d_1 + d_2) = fd_1 + fd_2$.

b) Sejam $f_1, f_2 \in A$ e $d \in \mathrm{Der}(A)$, vamos mostrar que $(f_1 + f_2)d = f_1d + f_2d$, para isto seja $g \in A$. Dessa forma,

$$((f_1 + f_2)d)(g) = (f_1 + f_2)d(g) = f_1d(g) + f_2d(g) = (f_1d + f_2d)(g),$$

assim $(f_1 + f_2)d = f_1d + f_2d$.

c) Considere $f_1, f_2 \in A$ e $d \in \mathrm{Der}(A)$, afirmamos que $(f_1f_2)d = f_1(f_2d)$. Com efeito, se $g \in A$, então $((f_1f_2)d)(g) = f_1f_2d(g) = f_1(f_2d)(g)$. Portanto $(f_1f_2)d = f_1(f_2d)$.

d) Por fim, é fato que $1d = d$.

Diante de todo o exposto, $\mathrm{Der}(A)$ é um A-módulo. □

Verificado que $\mathrm{Der}(A)$ é um módulo sobre $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, é possível definir o submódulo

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A) = \{d \in \mathrm{Der}(A) : d|_{\mathbb{K}} = 0\},$$

ou seja, $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ é formado pelas derivações em A que se anulam no corpo $\mathbb{K}$. Os elementos de $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ são chamados de $\mathbb{K}$-*derivações de* A. A propósito, as derivações parciais conhecidas do cálculo diferencial são $\mathbb{K}$-derivações de A, mais ainda, o conjunto formado por estas derivações é uma base para o A-módulo $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$, em outras palavras toda derivação d em A se escreve como

$$d = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $g_i \in A$ está unicamente determinado. Diante disso,

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} A \frac{\partial}{\partial x_i} \simeq A^n. \tag{3.1}$$

Definição 3.1.3. Seja $f \in A$. O conjunto

$$\mathrm{Derlog}(f) = \{d \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A) \, : d(f) \in (f)\}$$

é chamado de *módulo de derivações logarítmicas* associado à forma f ou *módulo de Saito* de f.

Proposição 3.1.4. Seja $f \in A$, então $\mathrm{Derlog}(f)$ é um submódulo de $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$.

Demonstração. Sejam $d_1, d_2 \in \mathrm{Derlog}(f)$ e $g \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$. Desse modo,

$$\begin{aligned} (gd_1 + d_2)(f) &= (gd_1)(f) + d_2(f) \\ &= gd_1(f) + d_2(f). \end{aligned}$$

Uma vez que $d_1, d_2 \in \mathrm{Derlog}(f)$, existem $g_1, g_2 \in A$ tais que $d_1(f) = g_1 f$ e $d_2(f) = g_2 f$, diante disso

$$\begin{aligned} (gd_1 + d_2)(f) &= (gd_1)(f) + d_2(f) \\ &= gd_1(f) + d_2(f) \\ &= gg_1 f + g_2 f \\ &= (gg_1 + g_2) f \in (f). \end{aligned}$$

Portanto $gd_1 + d_2 \in \mathrm{Derlog}(f)$, o que finaliza a demonstração. $\square$

Uma vez definido $\mathrm{Derlog}(f)$, um questionamento pertinente é se este submódulo contém elementos não-nulos. Diante disso, seja $f \in A$ um polinômio homogêneo de grau $m \geq 0$. Considerando a relação de Euler

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf.$$

Assim,

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathrm{Derlog}(f),$$

ou seja, $\mathrm{Derlog}(f) \neq 0$. Mais geralmente, em verdade, não é necessária a homogeneidade de f para garantir que $\mathrm{Derlog}(f) \neq 0$, pois $f\mathrm{Der}(A) \subseteq \mathrm{Derlog}(f)$.

Proposição 3.1.5. Seja $f \in A$ um polinômio homogêneo de grau $m \geq 0$, a sequência

$$0 \to \mathrm{Syz}(J_f) \to \mathrm{Derlog}(f) \xrightarrow{\varphi} A\varepsilon \to 0$$

é exata, com φ definida como segue

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathrm{Derlog}(f) & \to & A\varepsilon \\ & d & \mapsto & \varphi(d) := g_d \varepsilon \end{array},$$

onde $g_d \in A$ é tal que $d(f) = g_d f$ (g_d existe pois $d \in \mathrm{Derlog}(f)$).

Demonstração. É fato que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Syz}(J_f) & = & \left\{ (h_1, \ldots, h_n) \in A^n \ : \sum_{j=1}^{n} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \right\} \\ & = & \{ d \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A) \ : d(f) = 0 \}, \end{array}$$

afinal $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} A \frac{\partial}{\partial x_i} \simeq A^n$. A prova da exatidão de

$$0 \to \mathrm{Syz}(J_f) \to \mathrm{Derlog}(f) \to A\varepsilon \to 0$$

será dividida em partes:

a) φ está bem definida.

De fato, sejam $d_1, d_2 \in \mathrm{Derlog}(f)$ tais que $d_1 = d_2$. Uma vez que $d_1, d_2 \in \mathrm{Derlog}(f)$, existem $g_{d_1}, g_{d_2} \in A$ de modo que $d_1(f) = g_{d_1} f$ e $d_2(f) = g_{d_2} f$, como $d_1 = d_2$ então

$d_1(f) = d_2(f)$, ou seja, $g_{d_1} f = g_{d_2} f$, assim $g_{d_1} = g_{d_2}$. Desse modo

$$\varphi(d_1) = g_{d_1}\varepsilon = g_{d_2}\varepsilon = \varphi(d_2),$$

ou seja, φ está bem definida.
b) φ é A-linear.
Sejam $d_1, d_2 \in \mathrm{Derlog}(f)$ e $h \in A$, assim $\varphi(hd_1 + d_2) = g_{hd_1+d_2}\varepsilon$, onde $g_{hd_1+d_2}$ é tal que $(hd_1 + d_2)(f) = g_{hd_1+d_2} f$. Ainda, como $d_1, d_2 \in \mathrm{Derlog}(f)$, existem $g_{d_1}, g_{d_2} \in A$ tais que $d_1(f) = g_{d_1} f$ e $d_2(f) = g_{d_2} f$. Portanto,

$$(hd_1 + d_2)(f) = hd_1(f) + d_2(f) = hg_{d_1} f + g_{d_2} f = (hg_{d_1} + g_{d_2})f,$$

logo $hg_{d_1} + g_{d_2} = g_{hd_1+d_2}$ e diante disso, por fim,

$$\varphi(hd_1 + d_2) = g_{hd_1+d_2}\varepsilon = (hg_{d_1} + g_{d_2})\varepsilon = hg_{d_1}\varepsilon + g_{d_2}\varepsilon = h\varphi(d_1) + \varphi(d_2),$$

o que completa a demonstração do item b).
c) φ é sobrejetiva.
Seja $h\varepsilon \in A\varepsilon$, pela relação de Euler temos

$$f = \frac{x_1}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{x_n}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

assim

$$hf = \frac{x_1 h}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{x_n h}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

defina então

$$d_h = \frac{x_1 h}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{x_n h}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A).$$

É claro que $d_h(f) = hf$, ou seja, $\varphi(d_h) = h\varepsilon$, o que mostra a sobrejetividade de φ. Diante dos itens a), b) e c) conclui-se que $\mathrm{Derlog}(f) \xrightarrow{\varphi} A\varepsilon \to 0$ é exata. A este ponto, é suficente mostrar que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Syz}(J_f)$, o que nos permite enunciar o item:
d) $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Syz}(J_f)$.
Com efeito, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{d \in \mathrm{Derlog}(f) \ : \varphi(d) = 0\varepsilon\}$, mas dado $d \in \mathrm{Derlog}(f)$, existem $h_1, \ldots, h_n \in A$ tais que

$$d = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Diante do exposto, através de (3.1), identificando d por $d = (h_1, \ldots, h_n)$ temos

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{d \in \mathrm{Derlog}(f) \ : d(f) = 0\} = \left\{ d \in \mathrm{Derlog}(f) \ : \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \right\},$$

isto é, $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathrm{Syz}(J_f)$, ou seja, $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \mathrm{Syz}(J_f)$. Reciprocamente, se $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathrm{Syz}(J_f)$, então $\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$. Por (3.1) é possível identificar $(h_1, \ldots, h_n)$ por d, diante disso $\varphi(d) = g_d\varepsilon = 0\varepsilon$, e assim $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Syz}(J_f)$ e portanto

$$0 \to \mathrm{Syz}(J_f) \xrightarrow{i} \mathrm{Derlog}(f) \xrightarrow{\varphi} A\varepsilon \to 0$$

é exata. □

Como já citado, um dos objetivos desta seção é apresentar uma decomposição para $\mathrm{Derlog}(f)$ em função do módulo de sizigias do ideal jacobiano realacionado a f, J_f. Para isto, é necessário apresentar o conceito de sequência *cindida*, o que será feito a seguir.

Definição 3.1.6. Sejam R um anel e M, N e T R-módulos. Uma sequência exata

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} T \to 0$$

é dita *cindida* se existe $\psi : T \to M$ R-linear tal que $\varphi \circ \psi = Id_T$. No caso em que a sequência em questão é cindida, a aplicação ψ é chamada de *cisão*.

Observação 3. No contexto da definição anterior, se T é livre, então toda sequência exata $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} T \to 0$ é cindida.

Lema 3.1.7. No mesmo contexto, se $\psi : T \to M$ é uma cisão, então

$$M = N \oplus \psi(T), \text{ identificando } N = i(N).$$

Demonstração. Considere a aplicação $f : N \oplus T \to M$ dada por $f(n,t) = n + \psi(t)$, afirmamos que f é injetiva. De fato, sejam $(n_1, t_1), (n_2, t_2) \in N \oplus T$ tais que

$$f(n_1, t_1) = f(n_2, t_2).$$

Desse modo, $n_1 + \psi(t_1) = n_2 + \psi(t_2)$, logo $\psi(t_1 - t_2) = n_2 - n_1 \in N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Assim segue $\varphi(\psi(t_1 - t_2)) = t_1 - t_2 = 0$, isto é, $t_1 = t_2$, o que conclui a demonstração da injetividade de f. Por outro lado, dado $m \in M$, temos que $\varphi(m) = t \in T$, daí, $\varphi(m) = \varphi(\psi(t))$, logo, $\varphi(m - \psi(t)) = 0$, consequentemente, $m - \psi(t) = n \in N = \mathrm{Ker}(\varphi)$, portanto, obtemos o resultado. □

Uma observação importante a ser feita diante do lema anterior é a seguinte: uma vez que $i(N) \simeq N$ e $\psi(T) \simeq T$ (pois ψ é injetiva já que possui inversa à esquerda), tem-se $M \simeq N \oplus T$. A seguir enunciaremos a decomposição de $\mathrm{Derlog}(f)$ citada anteriormente.

Teorema 3.1.8. Seja $f \in A$ polinômio homogêneo, então

$$\mathrm{Derlog}(f) = \mathrm{Syz}(J_f) \oplus A\varepsilon.$$

Demonstração. Sendo $A\varepsilon$ livre, pela observação 3 a sequência

$$O \to \mathrm{Syz}(J_f) \to \mathrm{Derlog}(f) \to A\varepsilon \to 0$$

é cindida. Assim, utilizando o lema 3.1.7, $\mathrm{Derlog}(f) = \mathrm{Syz}(J_f) \oplus \psi(A\varepsilon)$. Exibindo a cisão em questão temos

$$\begin{array}{rccc} \psi : & A\varepsilon & \to & \mathrm{Derlog}(f) \\ & h\varepsilon & \mapsto & d_h \end{array},$$

onde $d_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i h}{m} \frac{\partial}{\partial x_i}$. É fato que $d_h \in \mathrm{Derlog}(f)$, afinal

$$\begin{aligned} d_h(f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i h}{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \frac{h}{m} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \frac{h}{m} m \cdot f \\ &= hf \in (f), \end{aligned}$$

onde $m = deg(f)$. Além disso, $\varphi \circ \psi = Id_{A\varepsilon}$, portanto ψ é uma cisão. Por fim, $Im(\psi) = \psi(A\varepsilon) = A\varepsilon$, o que nos permite concluir

$$\mathrm{Derlog}(f) = \mathrm{Syz}(J_f) \oplus \psi(A\varepsilon) = \mathrm{Syz}(J_f) \oplus A\varepsilon.$$

□

Agora retornemos ao objeto central de estudo, os arranjos de hiperplanos. Dado um arranjo $\mathcal{A}$, a partir deste é possível obter dois novos arranjos de hiperplanos, chamados de *eliminação* de $\mathcal{A}$ e *restrição* de $\mathcal{A}$. Vamos a definição formal destes objetos.

Definição 3.1.9. Seja $\mathcal{A}$ um arranjo de hiperplanos definido pelas formas lineares $\{\ell_1, \ldots, \ell_m\}$, onde $\ell_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. A *eliminação* de $\mathcal{A}$

com respeito ao hiperplano $V(\ell_i) := H_i$ é o arranjo

$$\mathcal{A} \setminus \{H_i\} := \{H_1, \ldots, H_{i-1}, \widehat{H_i}, H_{i+1}, \ldots, H_m\}.$$

Por sua vez, a *restrição* $\mathcal{A}^{H_i}$ de $\mathcal{A}$ com respeito ao hiperplano H_i é o arranjo definido pelas *formas residuais*

$$\frac{(\ell_i, \ell_j)}{(\ell_i)};\ i \neq j$$

no anel $\dfrac{A}{(\ell_i)}$.

Diante da definição anterior, um aspecto importante a ser relatado é que se $\mathcal{A}$ é um arranjo genérico, então a eliminação $\mathcal{A} \setminus \{H\}$ e a restrição $\mathcal{A}^H$ com respeito ao hiperplano H definem, ainda, arranjos genéricos.

Definição 3.1.10. Sejam $\mathcal{A}$ um arranjo de hiperplanos e $\mathrm{Syz}(J_f)$ o módulo de sizigias do ideal jacobiano J_f, onde f é o polinômio de definição do arranjo $\mathcal{A}$. O *grau inicial* de $\mathrm{Syz}(J_f)$ é

$$r(\mathcal{A}) := \mathrm{indeg}(\mathrm{Syz}(J_f)) = min\{r \in \mathbb{Z} :\ (\mathrm{Syz}(J_f))_r \neq 0\}.$$

O teorema a seguir é um resultado importante que relaciona as definições 3.1.9 e 3.1.10, com o objetivo de dar brevidade ao tópico não o demonstraremos, mas o leitor que tiver o interesse em consultar sua demonstração pode ver [1, Theorem 2.14]. Este teorema será utilizado na demonstração da proposição 3.1.12.

Teorema 3.1.11. Sejam $\mathcal{A}$ um arranjo de hiperplanos e $\ell = \ell_i$ uma das formas lineares que definem tal arranjo. Se $H = V(\ell)$ e $r(\mathcal{A} \setminus \{H\}) < r(A^H)$, então

$$r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A} \setminus \{H\}) + 1.$$

Proposição 3.1.12. Seja $\mathcal{A}$ um arranjo de hiperplanos genérico definido pelas m formas lineares $\ell_1, \ldots, \ell_m$ no anel polinomial $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, com $m \geq n = \mathrm{rank}(\mathcal{A})$. Então $r(\mathcal{A}) = m - n + 1$.

Demonstração. Uma vez que $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = n$, através de uma mudança de variáveis é possível supor que $\mathcal{A}$ é definido pelo conjunto $\{x_1, \ldots, x_n, \ell_1, \ldots, \ell_{m-n}\}$, em particular o polinômio de definição do arranjo $\mathcal{A}$ é

$$f = x_1 \cdots x_n \cdot \ell_1 \cdots \ell_{m-n}.$$

Esta demonstração será feita por indução sobre m. Se $m = n$, então $\mathcal{A} = \{x_1, \ldots, x_n\}$

e assim
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{x_i} = 0 \Longleftrightarrow \alpha_i = 0 \ \forall\ i \in \{1, \ldots, n\},$$
portanto J_f não admite sizigias de grau zero, ou seja, $r(\mathcal{A}) \geq 1$. Porém, note que $(x_1, -x_2, 0, \ldots, 0)$ é uma sizigia de grau 1 para J_f, logo $r(\mathcal{A}) = 1 = n-n+1 = m-n+1$. Diante disso, é pertinente considerar como caso inicial $m = n+1$. Se $m = n+1$, então $f = (x_1 \cdots x_n) \cdot \ell$, onde ℓ tem a forma $\ell = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ com $\alpha_i \neq 0$ para cada i, pois $\mathcal{A}$ é genérico. Assim,

$$f_{x_i} = (x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n) \cdot \ell + (x_1 \cdots x_n) \cdot \alpha_i = (x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n)(\ell + \alpha_i x_i). \tag{3.2}$$

Precisamos mostrar que $r(\mathcal{A}) = m - n + 1 = (n+1) - n + 1 = 2$. Note que é suficiente mostrar que $r(\mathcal{A}) \geq 2$, afinal $((\ell + \alpha_1 x_1)x_1, -(\ell + \alpha_2 x_2)x_2, 0, \ldots, 0)$ é uma sizigia de grau 2.

Afirmação 1: $\{f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\}$ é um conjunto linearmente independente sobre $\mathbb{K}$.

Caso contrário, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que
$$\lambda_1 f_{x_1} + \cdots \lambda_n f_{x_n} = 0,$$
com $\lambda_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, por (3.2),
$$\lambda_1(x_2 \cdots x_n \ell + \alpha_1 x_1 x_2 \cdots x_n) + \cdots + \lambda_n(x_1 \cdots x_{n-1}\ell + \alpha_n x_1 \cdots x_n) = 0.$$
Logo,
$$\alpha_1\lambda_1 x_1 \cdots x_n + \cdots + \alpha_n \lambda_n x_1 \cdots x_n = -(\lambda_1 \widehat{x_1} x_2 \cdots x_n \ell + \cdots + \lambda_n x_1 \cdots x_{n-1} \widehat{x_n \ell})$$
ou seja,
$$(\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n)(x_1 \cdots x_n) = -\ell \left(\sum_i \lambda_i x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n \right)$$
equivalentemente,
$$-(\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n)(x_1 \cdots x_n) = \ell \left(\sum_i \lambda_i x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n \right).$$
Definindo $\lambda := -(\alpha_1\lambda_1 + \cdots \alpha_n\lambda_n)$ segue
$$\lambda x_1 \cdots x_n = \ell \left(\sum_i \lambda_i x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n \right),$$

assim, se $\lambda = 0$, então
$$\sum_i \lambda_i x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n = 0,$$
mas $\lambda_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, logo
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n = \lambda_1 \widehat{x_1} \cdots x_n + \cdots + \lambda_i x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n + \cdots + \lambda_n x_1 \cdots \widehat{x_n} = 0,$$
assim temos
$$\lambda_1 \widehat{x_1} \cdots x_n + \cdots + \lambda_i x_1 \cdots \widehat{x_{i-1}} \cdots x_n + \lambda_i x_1 \cdots \widehat{x_{i+1}} \cdots x_n + \cdots + \lambda_n x_1 \cdots \widehat{x_n} = -\lambda_i x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n \in (x_i),$$
o que não pode ocorrer, portanto $\lambda \neq 0$. Seja $\lambda_i \neq 0$, uma vez que x_i divide o produto, segue que x_i divide ℓ, pois x_i não divide o somatório, mas isto contradiz a escolha anterior de ℓ, concluindo assim que $\{f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{K}$.
Afirmação 2: $\{f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\}$ não admite sizigias lineares.
Suponha que $G_1, \ldots, G_n$ são formas lineares em $A := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ com $G_j \neq 0$ para algum j e
$$G_1 f_{x_1} + \cdots + G_n f_{x_n} = 0.$$
Substituindo f_{x_i} na igualdade anterior temos, por (3.2),
$$G_1(\alpha_1 x_1 \cdots x_n + \widehat{x_1} x_2 \cdots x_n \ell) + \cdots + G_n(\alpha_n x_1 \cdots x_n + x_1 \cdots x_{n-1} \widehat{x_n} \ell) = 0.$$
Desse modo,
$$(G_1 \widehat{x_1} x_2 \cdots x_n \ell + \cdots G_n x_1 \cdots x_{n-1} \widehat{x_n} \ell) = (G_1 \widehat{x_1} x_2 \cdots x_n + \cdots + G_n x_1 \cdots x_{n-1} \widehat{x_n}) \ell,$$
mas
$$(G_1 \widehat{x_1} x_2 \cdots x_n + \cdots + G_n x_1 \cdots x_{n-1} \widehat{x_n}) \ell = -x_1 \cdots x_n (\alpha_1 G_1 + \cdots + \alpha_n G_n).$$

Caso 1: $\alpha_1 G_1 + \cdots \alpha_n G_n = 0$.
Neste caso $G_1 \widehat{x_1} x_2 \cdots x_n + \cdots + G_n x_1 \cdots x_{n-1} \widehat{x_n} = 0$, pois $\ell \neq 0$. Matricialmente, as sizigias de $x_1 \cdots x_n$ são dadas pela seguinte matriz de Hilbert-Burch:
$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots \\ -x_2 & x_2 & 0 & \cdots \\ 0 & -x_3 & x_3 & \cdots \\ 0 & 0 & -x_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

afinal de $(G_1\widehat{x_1}x_2\cdots x_n + \cdots + G_nx_1\cdots x_{n-1}\widehat{x_n})\ell = 0$, segue

$$G_1\widehat{x_1}x_2\cdots x_n + \cdots + G_nx_1\cdots x_{n-1}\widehat{x_n} = 0$$

e logo $G_1 = \beta_1x_1, G_2 = (-\beta_1+\beta_2)x_2, \ldots, G_n = -\beta_{n-1}x_n$. Substituindo $G_1, \ldots, G_n$ na igualdade $\alpha_1G_1 + \ldots + \alpha_nG_n = 0$ temos

$$\alpha_1\beta_1x_1 - \alpha_2(\beta_1-\beta_2)x_2 + \cdots + \alpha_{n-1}(\beta_{n-2}+\beta_{n-1})x_{n-1} - \alpha_n\beta_{n-1}x_n = 0.$$

Uma vez que $G_j \neq 0$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$, o coeficiente correspondente a G_j é não nulo. Mas $\alpha_i \neq 0$ para todo i, portanto obtemos uma relação $\mathbb{K}$-linear de dependência para as variáveis, o que não pode ocorrer.
Caso 2: $L := \alpha_1G_1 + \cdots + \alpha_nG_n \neq 0$
Uma vez que

$$(L_1\widehat{x_1}x_2\cdots x_n + \cdots + L_nx_1\cdots x_{n-1}\widehat{x_n})\ell = -x_1\cdots x_n(\alpha_1L_1 + \cdots \alpha_nL_n) = -x_1\cdots x_nL, \tag{3.3}$$

então $L|(G_1\widehat{x_1}x_2\cdots x_n + \cdots + G_nx_1\cdots x_{n-1}\widehat{x_n})$ ou $L|\ell$. Se a primeira situação ocorre tem-se

$$G_1\widehat{x_1}x_2\cdots x_n + \cdots + G_nx_1\cdots x_{n-1}\widehat{x_n} = Lg,$$

para algum $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e assim, por (3.3), temos

$$Lg\ell = -x_1\cdots x_nL,$$

portanto, $L(-x_1\cdots x_n - g\ell) = 0$ e logo $-g\ell = x_1\cdots x_n$. Porém, como x_i não divide ℓ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos uma contradição. Diante disso, a segunda situação dentre as duas mencionadas acima precisa ocorrer, isto é, $L|\ell$, ou seja, $L = \beta\ell$ para algum $\beta \neq 0$ em $\mathbb{K}$. Assim, por (3.3),

$$(G_1\widehat{x_1}x_2\cdots x_n + \cdots + G_nx_1\cdots x_{n-1}\widehat{x_n})\ell = -x_1\cdots x_n\beta\ell$$

e portanto

$$G_1\widehat{x_1}x_2\cdots x_n + \cdots + G_nx_1\cdots x_{n-1}\widehat{x_n} = -\beta x_1\cdots x_n,$$

afinal $\ell \neq 0$ e $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ é um domínio. Desse modo, $G_i = \beta_ix_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, com $\beta_i \in \mathbb{K}$. Assim, substituindo $G_i = \beta_ix_i$ na igualdade anterior, ficamos com

$$\beta_1x_1x_2\cdots x_n + \cdots \beta_nx_1\cdots x_{n-1}x_n = -\beta x_1\cdots x_n,$$

e novamente por $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ser um domínio, temos $\beta_1+\cdots+\beta_n = -\beta$. Pela definição de L, tem-se

$$\alpha_1\beta_1x_1 + \cdots + \alpha_n\beta_nx_n = \alpha_1G_1 + \cdots + \alpha_nG_n = L = \beta\ell.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\alpha_1(\beta-\beta_1)x_1 + \cdots + \alpha_n(\beta-\beta_n)x_n &= -(\alpha_1\beta_1x_1 + \cdots + \alpha_n\beta_nx_n) + \beta\alpha_1x_1 + \cdots + \beta\alpha_nx_n \\ &= -(\beta\ell) + \beta\ell \\ &= 0.\end{aligned}$$

Uma vez que $\alpha_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é linearmente independente, segue que $\beta_i = \beta$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e assim $G_i = \beta_ix_i = \beta x_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Diante do exposto temos

$$\begin{aligned}G_1f_{x_1} + \cdots + G_nf_{x_n} &= \beta x_1f_{x_1} + \cdots + \beta x_nf_{x_n} \\ &= \beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_if_{x_i}\right) \\ &= \beta mf \\ &= 0\end{aligned}$$

onde m é o grau de f. Logo $\beta = 0$ e então $G_i = \beta x_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, o que é uma contradição e isto finaliza a demonstração do caso inicial de indução.

Passo indutivo: $m \geq n + 2$.

É de nosso conhecimento que a eliminação e a restrição de $\mathcal{A}$ com respeito a $H = V(\ell' = x_1)$ forma, ainda, arranjos genéricos. Assim, utilizando a hipótese de indução, temos

$$r(\mathcal{A} \setminus \{H\}) = (m-1) - n + 1 = m - n,$$

afinal $\mathcal{A} \setminus \{H\}$ é composto por $m - 1$ formas. O polinômio de definição da restrição $\mathcal{A}^H$ é $\tilde{f} = x_2 \cdots x_n\tilde{\ell_1} \cdots \tilde{\ell_{m-n}}$, com $\tilde{\ell_i} = \ell_i|_{x_1=0}$. Dessa forma, pela hipótese de indução, tem-se

$$r(\mathcal{A}^H) = (m-1) - (n-1) + 1 = m - n + 1,$$

portanto $r(\mathcal{A} \setminus \{H\}) = m - n < m - n + 1 = r(\mathcal{A}^H)$ e por fim, pelo teorema 3.1.11, temos

$$r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A} \setminus \{H\}) + 1 = m - n + 1.$$

$\square$

3.2 Saturação do ideal jacobiano

Nesta seção, introduziremos alguns invariante algébricos muito importantes para o andamento do trabalho, como índice de saturação e a regularidade de Castelnuovo-Mumford de um módulo M. Aqui, por praticidade, elencaremos apenas os resultados necessários para o nosso objetivo, o leitor interessado em algo a mais relacionado à esta teoria deve consultar [2].

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local graduado. Considere M um R-módulo graduado finitamente gerado com geradores homogêneos $m_1, \ldots, m_r$ onde $\deg(m_i) = a_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Diante disso, existe um homomorfismo sobrejetor de R-módulos

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F_0 = R^r & \to & M \\ & e_i & \mapsto & m_i \end{array}.$$

Pondo $\deg(e_i) = a_i$, φ torna-se um homomorfismo graduado de R-módulos. Assim, $F_0 \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} R(-a_i)$ e portanto obtemos a sequência exata

$$0 \to U \to \bigoplus_j R^{\beta_{0,j}}(-j) \xrightarrow{\psi_0} M \to 0,$$

onde $\beta_{0,j} = |\{i : a_i = j\}|$ e $U = \operatorname{Ker}(\psi_0)$. Sendo U submódulo de $\bigoplus_j R^{\beta_{0,j}}(-j) = F_0$, segue que U é finitamente gerado e assim é possível construir um homomorfismo

$$\psi_1 : \bigoplus_j R^{\beta_{1,j}}(-j) \to U.$$

Compondo ψ_1 com a inclusão $i : U \to \bigoplus_j R^{\beta_{1,j}}(-j)$ obtemos a sequência exata

$$\bigoplus_j R^{\beta_{1,j}}(-j) \to \bigoplus_j R^{\beta_{0,j}}(-j) \to M \to 0$$

de R-módulos graduados. Neste caminho, constrói-se se sequência exata longa

$$\cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

formada por R-módulos graduados onde

$$F_i := \bigoplus_j R^{\beta_{i,j}}(-j),$$

tal sequência é chamada *resolução livre graduada* de M.

Definição 3.2.1. Uma resolução livre graduada de M é dita *minimal* se a imagem de $\psi_{i+1} : F_{i+1} \to F_i$, $\mathrm{Im}(\psi_{i+1})$, é tal que $\mathrm{Im}(\psi_{i+1}) \subseteq \mathfrak{m}F_i$, para todo i.

O número $\sum_j \beta_{i,j} = \mathrm{rank}(F_i) = \mu(F_i)$, onde $\mu(F_i)$ denota o número mínimo de geradores de F_i, é chamado de *número de Betti* de M. No mesmo contexto, considerando ainda $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, seja $M = \bigoplus_i M_i$ um A-módulo graduado finitamente gerado. Para cada $i \geq 0$ defina

$$t_i^A(M) = max\{j : \beta_{i,j}(M) \neq 0\},$$

onde $\beta_{i,j}(M)$ é o i, j-número de Betti de M como A-módulo.

Definição 3.2.2. A *regularidade de Castelnuovo-Mumford* de M é

$$\mathrm{reg}(M) = sup\{t_i^A(M) - i;\ i \in \mathbb{Z}\}$$

Com o objetivo de familiarizar o leitor com a regularidade de Castelnuovo-Mumford, é interessante apresentar algumas propriedades básicas da mesma através do seguinte resultado:

Proposição 3.2.3. Sejam $M = \bigoplus_i M_i$ um A-módulo não nulo graduado finitamente gerado e $\{m_1, \ldots, m_r\}$ um conjunto minimal homogêneo de geradores de M. As seguintes propriedades são válidas:

a) $\mathrm{indeg}(M) = \min\{\deg(m_i);\ i \in \{1, \ldots, r\}\}$;

b) $\mathrm{reg}(M) \geq \deg(m_i)\ \forall\ i \in \{1, \ldots, r\}$;

c) $\mathrm{reg}(M) \geq \mathrm{indeg}(M)$.

Demonstração. a) Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ temos, pela homogeneidade dos geradores, $m_i \neq 0$ e $m_i \in M_{\deg(m_i)}$. Assim, uma vez que $m_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, segue

$$\mathrm{indeg}(M) = \inf\{i\ :\ M_i \neq 0\} \leq \deg(m_i)\ \forall\ i.$$

Diante disso, $\mathrm{indeg}(M) \leq \min\{\deg(m_i)\,;\ i \in \{1, \ldots, r\}\}$. Suponha que

$$s = \mathrm{indeg}(M) < \min\{\deg(m_i);\ i \in \{1, \ldots, r\}\}, \tag{3.4}$$

da definição de $\operatorname{indeg}(M)$ segue que existe um elemento homogêneo não nulo $m \in M_s$ e sendo $\{m_1, \ldots, m_r\}$ um conjunto de geradores de M temos

$$m = \left(\sum_{i=0}^{n_1} f_{i,1}\right) m_1 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{n_r} f_{i,r}\right) m_r,$$

com $f_{i,j} \in A_i$, onde A_i é a componente de grau i na graduação de $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Mas, por (3.4), $\deg\left(\left(\sum_{i=0}^{n_j} f_{i,j}\right) m_i\right) > s$, o que contradiz o fato de $m \in M_s$, diante disso $\operatorname{indeg}(M) = \min\{\deg(m_i)\,;\ i \in \{1, \ldots, r\}\}$.
b) Seja $\deg(m_j) = d_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, assim $\beta_{0,d_j}(M) \neq 0$. Da definição 3.2.2 temos $\operatorname{reg}(M) = \max\{j - i\ :\ \beta_{i,j}(M) \neq 0\}$, mas $d_j \in \{j - i\ :\ \beta_{i,j}(M) \neq 0\}$, basta considerar $\beta_{0,j}(M)$. Assim

$$\operatorname{reg}(M) = max\{j - i\ :\ \beta_{i,j}(M) \neq 0\} \geq d_j = \deg(m_j),$$

para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$.
c) Pelo item b) temos

$$\operatorname{reg}(M) \geq \deg(m_i)\, \forall\, i \in \{1, \ldots, r\},$$

mas por a) vale $\operatorname{indeg}(M) = \min\{\deg(m_i)\,;\, i \in \{1, \ldots, r\}\}$, portanto

$$\operatorname{reg}(M) \geq \deg(m_i) \geq \min\{\deg(m_i)\,;\, i \in \{1, \ldots, r\})\} = \operatorname{indeg}(M).$$

□

Uma propriedade importante envolvendo resoluções livres será apresentada a seguir, tal propriedade não será demonstrada por envolver a teoria de cohomologia local, o que foge ao escopo deste trabalho, contudo, o leitor que possuir interesse em consultar mais detalhes sobre a mesma, pode ver [10, Corollary 9].

Proposição 3.2.4. Sejam $S := \dfrac{A}{I}$, onde $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e I é um ideal homogêneo. Se S é não regular, então $\operatorname{reg}(S) = i(S) - 1$ se, e somente se, S possui resolução livre graduada minimal da forma

$$0 \to A^{b_r} \xrightarrow{\phi_r} A^{b_{r-1}} \to \cdots \to A^{b_1} \xrightarrow{\phi_1} A \to S \to 0,$$

onde $i(S) = \min\{t :\ I_t \neq 0\}$, $\deg(\phi_1) = i(S)$ e $\deg(\phi_j) = 1$ para cada $j \geq 2$.

A partir de agora, nosso objetivo é relacionar a saturação do ideal jacobiano com o ideal $\mathbb{I}$ e calcular, sob determinadas condições, a regularidade de Castelnuovo-

Mumford do ideal jacobiano. Para prosseguirmos é importante enunciar as seguintes definições:

Definição 3.2.5. Seja I um ideal homogêneo do anel $A := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Definimos a *saturação* I^{sat} de I como o conjunto

$$I^{\text{sat}} := \{s \in A : \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\ \exists\, m > 0 \mid x_i^m s \in I\} = \bigcup_{t \geq 0} (I : \mathfrak{m}^t).$$

O ideal I é dito *saturado* se $I^{\text{sat}} = I$.

Uma observação importante a respeito da definição anterior é que a saturação de um ideal é ainda um ideal.

Definição 3.2.6. Seja I um ideal homogêneo do anel A. O *índice de saturação* de I, $\text{sat}(I)$, é definido por:

$$\min \left\{ r \geq 0 : \left(\frac{I^{\text{sat}}}{I} \right)_s = 0\ \forall\, s \geq r \right\}.$$

Observação 4. É importante observar que o índice de saturação de um ideal homogêneo I definido anteriormente está bem definido. De fato, note que $I^{\text{sat}}\mathfrak{m}^r \subseteq I$. Diante disso, existe k suficientemente grande tal que $(I^{\text{sat}})_k \subseteq \mathfrak{m}^r$, logo $(I^{\text{sat}})_k \cdot I^{\text{sat}} \subseteq I^{\text{sat}}\mathfrak{m}^r \subseteq I$. Portanto, existe um número suficientemente grande, tal que $(I^{\text{sat}})_{k+1} \subseteq I$.

Enunciaremos agora uma série de lemas que irão nos auxiliar na demonstração dos últimos resultados, os teoremas 3.2.10 e 3.2.11

Lema 3.2.7. Seja $f = \ell_1 \cdots \ell_m$ o polinômio de definição do arranjo genérico central $\mathcal{A}$ em A, com $m \geq n$. Denotamos por $\mathbb{I}_{m-n}$ o ideal gerado pelos $(m-n)$-produtos dentre as formas lineares $\ell_1, \ldots, \ell_m$. Nesse contexto, $\mathbb{I}_{m-n} = \mathfrak{m}^{m-n}$, onde $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Demonstração. Utilizaremos indução sobre m. O caso $m = n$ é claro, portanto consideremos $m \geq n+1$. Definindo $\mathcal{A}_i := \mathcal{A} \setminus \ell_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ temos, pela hipótese indutiva, que:

$$\mathbb{I}_{m-1-n}(\mathcal{A}_i) = \mathfrak{m}^{m-1-n},$$

afinal $\mathcal{A}_i = \{\ell_1, \ldots, \widehat{\ell_i}, \ldots, \ell_n\}$. Assim, para cada i, vale

$$\ell_i \mathfrak{m}^{m-1-n} = \ell_i \mathbb{I}_{m-1-n}(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathbb{I}_{m-n}(\mathcal{A}).$$

Sendo $\mathcal{A}$ um arranjo genérico, as formas $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ são linearmente independentes, logo ocorre a igualdade $(\ell_1, \ldots, \ell_n) = \mathfrak{m}$, portanto

$$\mathfrak{m}^{m-n} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)\mathfrak{m}^{m-1-n} \subseteq \mathbb{I}_{m-n}(\mathcal{A}).$$

□

Lema 3.2.8. [3, Proposition 2.1] Seja I um ideal não saturado de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e considere $(I : \mathfrak{m}) = (h_1, \dots, h_r)$, onde $h_1, \dots, h_r$ são polinômios homogêneos. Então

$$\operatorname{sat}(I) = \max\{\deg(h_i)\,;\, h_i \notin I\} + 1.$$

Demonstração. Seja $\Omega := \{m \in \mathbb{Z}_+ : s \geq m \implies I_s = (I : \mathfrak{m})_s\}$, afirmamos que $\Omega \neq \varnothing$. De fato,

$$\frac{(I : \mathfrak{m})_{\operatorname{sat}(I)}}{I_{\operatorname{sat}(I)}} \subseteq \frac{I^{\operatorname{sat}}_{\operatorname{sat}(I)}}{I_{\operatorname{sat}(I)}} \simeq \left(\frac{I^{\operatorname{sat}}}{I}\right)_{\operatorname{sat}(I)} = 0.$$

Ou seja, $\operatorname{sat}(I) \in \Omega$, portanto pelo Princípio da Boa Ordem Ω possui um menor elemento, digamos m_0. Vamos mostrar que $\operatorname{sat}(I) = m_0$. Uma vez que $\operatorname{sat}(I) \in \Omega$ temos $m_0 \leq \operatorname{sat}(I)$, considere agora um polinômio homogêneo $g \in I^{\operatorname{sat}}$ tal que

$$\deg(g) = \operatorname{sat}(I) - 1,$$

com $g \notin I$. Note que esta escolha é possível pois I não é saturado. Como $g \in (I : \mathfrak{m})$, afirmamos que $\operatorname{sat}(I) - 1 < m_0$, isto ocorre pois $I_{\operatorname{sat}(I)-1} \neq (I : \mathfrak{m})_{\operatorname{sat}(I)-1}$, afinal $g \notin I$. Portanto, diante de todo o exposto, $\operatorname{sat}(I) \leq m_0$. Sendo $\operatorname{sat}(I) = m_0$ temos

$$m_0 = \operatorname{sat}(I) \geq \max_{1 \leq i \leq r}\{\deg(h_i);\, h_i \notin I\} + 1. \tag{3.5}$$

Desta forma, por (3.5), o resultado segue se mostrarmos que existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que $h_i \notin I$ e $\deg(h_i) = \operatorname{sat}(I) - 1$. Para isto, seja $h \in (I : \mathfrak{m}) \setminus I$ polinômio homogêneo de grau $\operatorname{sat}(I) - 1$. De $h \in (I : \mathfrak{m})$, existem $q_1, \dots, q_r \in A$ tais que

$$h = q_1 h_1 + \cdots + q_r h_r,$$

com $\deg(q_i) = \deg(h) - \deg(h_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.
Afirmação: Existe $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $q_j \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $h_i \notin I$.
Caso contrário, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, teríamos uma das possibilidades $q_i = 0$, $\deg(q_i) \geq 1$ ou $h_i \in I$. Analisemos cada caso. Se $q_i = 0$, então $h = 0$ e logo $h \in I$, o que não pode ocorrer. Caso $\deg(q_i) \geq 1$, então $q_i h_i \in I$ e logo $h \in I$. Por fim, se $h_i \in I$ então, novamente, $h \in I$. Ou seja, em todo caso, obtemos uma contradição, portanto a afirmação está provada e obtemos o resultado. □

Lema 3.2.9. Seja R um domínio de fatoração única, então todo ideal primo que possui altura igual a 1 é principal.

Demonstração. Seja P ideal primo de altura 1, assim $P \neq (0)$ e logo existe $x \in P$

não nulo. Sendo R um domínio de fatoração única, existem elementos irredutível $y_1, \ldots, y_n \in R$ tais que

$$x = \prod y_i.$$

Como $x \in P$ e P é ideal primo, então algum $y_j \in P$. Sendo R um domínio de fatoração única, (y_j) é um ideal primo. Assim, $(y_j) \subseteq P$ e $ht(y_j) = ht(P) = 1$, portanto $(y_j) = P$. □

Teorema 3.2.10. Seja $f = \ell_1 \cdots \ell_m$ o polinômio de definição de um arranjo genérico central $\mathcal{A}$ em $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ com $m \geq n \geq 2$. Valem as seguintes afirmações:

a) $[\mathbb{I}]_{2m-n-1} = [J_f]_{2m-n-1}$;

b) Se $n \geq 3$, então $(J_f)^{\text{sat}} = \mathbb{I}$;

c) $\text{reg}(J_f) = 2m - n - 1$ e se $m \geq n + 1$, então $\text{reg}(J_f) = \text{sat}(J_f)$.

Demonstração. Seja $\mathbb{I} = (\ell_2 \cdots \ell_m, \ldots, \ell_1 \cdots \ell_{m-1})$. Os primos minimais de $\mathbb{I}$ são (ℓ_i, ℓ_j), com $i \neq j$ e $i \in \{1, \ldots, m\}$ (pois $\mathbb{I} = \cap(\ell_i, \ell_j)$), logo $\text{ht}(\mathbb{I}) = 2$. Além disso, como $J_f \subseteq (\ell_i, \ell_j)$ segue que $\text{ht}(J_f) \leq 2$. Porém, se $ht(J_f) = 1$, como estamos em um domínio de fatoração única, segue pelo lema anterior que J_f é principal, o que não pode ocorrer, portanto $ht(J_f) = 2$.
a) Em virtude de $J_f \subseteq \mathbb{I}$, segue $[J_f]_{2m-n-1} \subseteq [\mathbb{I}]_{2m-n-1}$. Para a inclusão contrária, considere $P \in \mathbb{I}$ tal que $\deg(P) = 2m - n - 1$. Do fato de $P \in \mathbb{I}$ e $\deg(P) = 2m - n - 1$ podemos escrever

$$P = (\ell_2 \cdots \ell_m)P_1 + \cdots + (\ell_1 \cdots \ell_{m-1})P_m,$$

onde $P_i \in [\mathfrak{m}^{m-n}]_{m-n}$, com $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$. Pelo lema 3.2.7, para cada $i \in \{1, \ldots m\}$, tem-se

$$P_i = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{m-n} \leq m} c^i_{j_1, \ldots, j_{m-n}} \ell_{j_1} \cdots \ell_{j_{m-n}},$$

$c^i_{j_1, \ldots, j_{m-n}} \in \mathbb{K}$. Na soma acima, fixado i, se um termo envolve a forma ℓ_i, então seu produto com $\ell_1 \cdots \widehat{\ell_i} \cdots \ell_m$ é um mútiplo de $f = \ell_1 \cdots \ell_m$ e logo, pela relação de Euler, este termo pertence a J_f. Diante disso, precisamos lidar apenas com o caso dos termos do somatório que não envolvem ℓ_i. Não há perda de generalidade em considerar, por praticidade, $i = m$ e assumir que P_m tem um termo que não é múltiplo de ℓ_m. Isto gera, em P, um termo de grau $2m - n - 1$ da forma

$$\Delta = (\ell_1 \cdots \ell_{m-n})^2 \ell_{m-n+1} \cdots \ell_{m-1}.$$

Afirmamos que $\Delta \in J_f$ e vamos verificar isto por indução em m. Para $m = n$ a afirmação é óbvia pois, como já mencionado, $\mathbb{I} = J_f$. Considere então $m \geq n + 1$,

escrevamos
$$\Delta = \ell_1^2(\ell_2\cdots\ell_m)^2\ell_{m-n+1}\cdots\ell_{m-1} = \ell_1^2\Delta',$$
por hipótese de indução $\Delta' \in J_{f'}$, onde $f' = \ell_2\cdots\ell_m$. Uma vez que $\Delta' \in J_{f'} = (f'_{x_1},\ldots,f'_{x_n})$, existem $Q_1,\ldots,Q_n \in A$ tais que
$$\Delta' = Q_1f'_{x_1} + \cdots + Q_nf'_{x_n}$$
porém, para $i \in \{1,\ldots,n\}$ temos
$$f_{x_i} = (\ell_1)_{x_i}f' + \ell_1f'_{x_i},$$
portanto
$$\ell_1^2f'_{x_i} = \ell_1f_{x_i} - (\ell_1)_{x_i}\ell_1f' = \ell_1f_{x_i} - (\ell_1)_{x_i}f \in J_f,$$
para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Diante de todo o exposto concluímos que
$$\Delta = \ell_1^2\Delta' = Q_1\ell_1^2f'_{x_1} + \cdots + Q_n\ell_1^2f'_{x_n} \in J_f.$$

b) Dado $g \in [\mathfrak{m}^{m-n}]_{m-n}$ temos
$$g\cdot\frac{f}{\ell_i} \in [\mathbb{I}]_{2m-n-1},$$
pois $\deg(g) = m-n, \deg\left(\frac{f}{\ell_i}\right) = m-1$ e, por a), $[J_f]_{2m-n-1} = [\mathbb{I}]_{2m-n-1}$. Logo $\ell_1\cdots\widehat{\ell_i}\cdots\ell_mx_i^{m-n} \in [\mathbb{I}]_{2m-n-1} = [J_f]_{2m-n-1}$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, portanto $\mathbb{I} \subseteq (J_f)^{\text{sat}}$. Reciprocamente, afirmamos que $\mathbb{I}$ é um ideal saturado. De fato, seja $g \in \mathbb{I}^{\text{sat}}$, assim existe $t \geq 0$ tal que $g \in (\mathbb{I} : \mathfrak{m}^t)$. Logo
$$g\mathfrak{m}^t \subseteq \mathbb{I} = \bigcap_{i\neq j}(\ell_i,\ell_j),$$
ou seja, $g\mathfrak{m}^t \subseteq (\ell_i,\ell_j)$ para todo $i \neq j$. Sendo (ℓ_i,ℓ_j) ideal primo, segue que $g \in (\ell_i,\ell_j)$ ou $\mathfrak{m}^t \subseteq (\ell_i,\ell_j)$. Se $\mathfrak{m}^t \subseteq (\ell_i,\ell_j)$, então $\mathfrak{m}^t \subseteq (\ell_i,\ell_j)$, isto é, $\mathfrak{m} = (\ell_i,\ell_j)$, o que é um absurdo pois $ht(\mathfrak{m}) = n \geq 3$ e $ht(\ell_i,\ell_j) = 2$. Portanto $g \in (\ell_i,\ell_j)$ para todo $i \neq j$, ou seja, $g \in \mathbb{I}$.
c) Se $m = n$ o resultado é claro pois $J_f = \mathbb{I}$, e assim $\text{reg}(J_f) = n-1 = 2n-n-1 = 2m-n-1$ [7, Lemma 3.1]. Assim, considere $m \geq n+1$. Vamos mostrar que $\text{reg}(J_f) = \text{sat}(J_f)$. Utilizando uma abordagem homológica, mostra-se a seguinte

fórmula (ver [3]):

$$\text{reg}(J_f) = max\{\text{sat}(J_f), \text{reg}(J_f^{\text{sat}})\},$$

pela proposição 3.1.12 temos $\text{reg}(J_f) \geq 2m - n - 1$, mas $2m - n - 1 > m - 1$, logo $\text{reg}(J_f) > m-1$. Agora, considere $n \geq 3$. Pelo item *b*) temos $J_f^{\text{sat}} = \mathbb{I}$, assim $\text{reg}(J_f^{\text{sat}}) = \text{reg}(\mathbb{I})$. Porém, sendo $\mathbb{I}$ um ideal perfeito de altura 2 linearmente apresentável [7, Lemma 3.1], segue que $\text{reg}(\mathbb{I}) = m - 1$. Entretanto,

$$\text{reg}(J_f) > m - 1 = \text{reg}(\mathbb{I}) = \text{reg}(J_f^{\text{sat}}),$$

logo $\text{reg}(J_f) = \text{sat}(J_f)$, concluindo assim o caso $n \geq 3$. Se $n = 2$, segue que

$$\text{Ass}(J_f) = \{(x_1, x_2)\} = \{\mathfrak{m}\},$$

ou seja, J_f é um ideal $\mathfrak{m}$-primário, diante disso, $1 \in J_f^{\text{sat}}$, ou seja, $J_f^{\text{sat}} = (1)$. Diante de todo o exposto, $\text{reg}(J_f^{\text{sat}}) = \text{reg}((1)) = 0$.

Afirmamos que $\text{sat}(J_f) \leq 2m - n - 1$. De fato, se $\text{sat}(J_f) > 2m - n - 1$, então $\text{sat}(J_f) \geq 2m - n$. Desse modo, pelo lema 3.2.8, existe um gerador h de $(J_f : \mathfrak{m})$, com $h \notin J_f$, tal que $\deg(h) := d = \text{sat}(J_f) - 1$. Assim, $d = \text{sat}(J_f) - 1 \geq 2m - n - 1$, mas pela definição de J_f^{sat} temos $(J_f : \mathfrak{m}) \subseteq J_f^{\text{sat}}$ e, pelo item *b*), sabemos que $J_f^{\text{sat}} = \mathbb{I}$. Portanto $h \in \mathbb{I}$ e logo existem $P_1, \ldots, P_m \in A$ tais que

$$h = (\ell_2 \cdots \ell_m)P_1 + \cdots + (\ell_1 \cdots \ell_{m-1})P_m,$$

com $\deg(P_i) = d - m + 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, afinal $\deg(h) = d$. Diante disso, cada P_i é uma combinação polinômial de monômios de grau $m - n$. Uma vez que $P_j \in \mathfrak{m}^{m-n}$, segue $h \in \mathbb{I} \cdot \mathbb{I}^{m-n} = \mathbb{I}^{m-n+1}$. Mas, pelo teorema 2.1.14, $\mathbb{I}^r = J_f\mathbb{I}^{r-1}$, com $r \leq n-1$. Diante disso, se $m-n+1 < r$, então $m-n+1 < n-1$, logo $m < 2n-2 = 2$, o que não pode ocorrer. Portanto $m - n + 1 \geq r$ e assim

$$h \in \mathbb{I}^{m-n+1} \subseteq \mathbb{I}^{m-n+1-r} = J_f\mathbb{I}^{m-n-r} \subseteq J_f,$$

o que é uma contradição. Logo

$$2m - n - 1 \leq \text{reg}(J_f) = \text{sat}(J_f) \leq 2m - n - 1,$$

no caso em que $m \geq n + 1$. Portanto $\text{reg}(J_f) = 2m - n - 1$.

□

Enunciaremos agora o principal resultado deste capítulo, o teorema de Rose-

Terao-Yuzvinski [12],[14], que nos fornece a dimensão homológica do módulo de derivações logarítmicas da forma f. O resultado seguinte garante que a dimensão homológica do módulo $\dfrac{A}{J_f}$ é n, mas através da sequência exata estrutural $0 \to J_f \to A \to \dfrac{A}{J_f} \to 0$, segue que $dh\left(\dfrac{A}{J_f}\right) = n$ se, e somente se, $dh(J_f) = n-1$. Entretanto, uma vez que $dh(J_f) = n-1$, temos $dh(\mathrm{Syz}(J_f)) = n-2$. Por fim, calculada a dimensão homológica do módulo de sizigias de J_f, conclui-se, através da decomposição exposta no teorema 3.1.8, que $dh(\mathrm{Derlog}(f)) = n-2$.

Teorema 3.2.11. Seja $f = \ell_1 \cdots \ell_m$ o polinômio de definição de um arranjo genérico central em $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ com $m \geq n+1 \geq 3$. Valem as seguintes afirmações:

a) $dh\left(\dfrac{A}{J_f}\right) = n$, onde $dh(S)$ denota a dimensão homológica do módulo S;

b) A resolução livre graduada minimal de J_f é da seguinte forma

$$0 \to A^{b_n}(-(2m-1)) \to A^{b_{n-1}}(-(2m-2)) \to \cdots \to A^{b_1}(-(2m-n)) \to A^n(-(m-1)).$$

Demonstração. a) Se $n = 2$ o resultado é claro pois sabemos que, neste caso, J_f é um ideal $\mathfrak{m}$-primário, assim a profundidade $d\left(\dfrac{A}{J_f}\right) = 0$ e pela igualdade de Auslander-Buchsbaum obtemos o resultado. Diante disso, seja $n \geq 3$ e recordemos que $\mathrm{ht}(J_f) = 2$, considere a seguinte decomposição primária reduzida de J_f :

$$J_f = J_f^{\mathrm{un}} \cap \left(\bigcap_i N_i\right),$$

onde J_f^{un} é a parte *unmixed* na decomposição de J_f, isto é, a interseção das componentes primárias associadas aos primos minimais de altura mínima e cada N_i é uma componente primária de altura $\mathrm{ht}(N_i) \geq 3$. Vamos iniciar a demonstração verificando que $d\left(\dfrac{A}{J_f}\right) = 0$. Se $d\left(\dfrac{A}{J_f}\right) > 0$, então $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}\left(\dfrac{A}{J_f}\right)$, logo $3 \leq \mathrm{ht}(N_i) < n$ para cada i. Portanto, pelo teorema 3.2.10 item b), temos

$$\mathbb{I} = J_f^{\mathrm{sat}} = \bigcup_{t\geq 0}(J_f : \mathfrak{m}^t) = \bigcup_{t\geq 0}(J_f^{\mathrm{un}} : \mathfrak{m}^t) \bigcap \left(\bigcup_{t\geq 0}\bigcap_i (N_i : \mathfrak{m}^t)\right) = J_f^{\mathrm{un}} \bigcap \left(\bigcap_i N_i\right) = J_f \ (\star),$$

afinal $\bigcup\limits_{t\geq 0}\left(J_f^{\mathrm{un}} : \mathfrak{m}^t\right) = J_f^{\mathrm{un}}$ pois dado $g \in \bigcup\limits_{t\geq 0}\left(J_f^{\mathrm{un}} : \mathfrak{m}^t\right)$, existe $t_k \geq 0$ tal que $g\mathfrak{m}^{t_k} \subseteq J_f^{\mathrm{un}}$. Assim, $g \in J_f^{\mathrm{un}}$ pois se $\mathfrak{m}^{t_k} \subseteq J_f^{\mathrm{un}}$, então $\mathfrak{m} = \sqrt{J_f^{\mathrm{un}}}$, ou seja,

$$ht(\mathfrak{m}) = n = ht(J_f^{\mathrm{un}}) = 2,$$

o que não pode ocorrer. Analogamente, mostra-se que $\bigcup_{t\geq 0}\bigcap_{i}(N_i : \mathfrak{m}^t) = \bigcap_{i} N_i$. Retornando a $(\star)$, obtemos um absurdo, afinal $\mu(\mathbb{I}) \geq m \geq n+1$ e $\mu(J_f) \leq n$, o que conclui $d\left(\dfrac{A}{J_f}\right) = 0$, diante disso, pela igualdade de Auslander-Buchsbaum, $dh\left(\dfrac{A}{J_f}\right) = n$.

b) Por definição, a regularidade de Castelnuovo-Mumford de J_f é o máximo dentre os valores $\beta_k - k$ onde β_k é o *shift* máximo na etapa k da resolução livre graduada minimal de J_f. Pela proposição 3.1.12, o *shift* mínimo na etapa $k = 1$ da resolução é $r(\mathcal{A})+(m-1) = 2m-n$, mas pelo item c) do teorema 3.2.10 temos $2m-n = \mathrm{reg}(J_f)+1$. Porém, pela proposição 3.2.4, o *shift* máximo em cada etapa da resolução deve aumentar em, no mínimo, 1, o que conclui a demonstração. □

Referências Bibliográficas

[1] Takuro Abe, Alexandru Dimca e Gabriel Sticlaru, *Addition-deletion results for the minimal degree of logarithmic derivations of hyperplane arrangements and maximal Tjurina line arrangements*, J. Algebraic Combin., 2021.

[2] A. Akbar Yazdan Pour, *Resolutions and Castelnuovo-Mumford Regularity*, l'Universite de Grenoble et l'Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, 2006.

[3] I. Bermejo e P. Gimenez, *Saturation and Castelnuovo-Mumford regularity*, Journal of Algebra, 2005.

[4] W. Bruns e J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge studies in advanced mathematics, 1997.

[5] R. Burity, A. Simis e S. O. Tohaneanu, *On the Jacobian ideal of an almost generic hyperplane arrangement*, Proceedings of the American Mathematical Society, 2022.

[6] D. Eisenbud, *The geometry of syzygies: A second course in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer, 2002.

[7] M. Garrousian, A. Simis e S. O. Tohaneanu, *A blowup algebra of hyperplane arragements*, Algebra e Number Theory, 2018.

[8] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer, 1977.

[9] C. Huneke e I. Swanson, *Integral closure of ideals, rings and modules*, Cambridge University Press, 2006.

[10] A. Oishi, *Castelnuovo's regularity of graded rings and modules*, Hiroshima Math. J, 1982.

[11] P. Orlik e H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.

[12] L. Rose e H. Terao, *Free resolution of the module of logarithmic forms of a generic arrangement*, J. Algebra, 1991.

[13] A. Simis, *Commutative algebra*, De Gruyter, 2020.

[13] Vasconcelos, W., *Integral Closure, Rees Algebras, Multiplicities, Algorithms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2005.

[14] S. Yuzvinsky, *A free resolution of the module of derivations for generic arrangements*, J. Algebra, 1991.