Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O Quinto Cone de Whitney de Uma Curva Analítica Complexa

Matheus Felipe Santos da Penha

João Pessoa – PB
Dezembro de 2023

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O Quinto Cone de Whitney de Uma Curva Analítica Complexa

por

Matheus Felipe Santos da Penha

sob a orientação do

Prof. Dr. Otoniel Nogueira da Silva

João Pessoa – PB
Dezembro de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CAMPUS I – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DE MESTRADO JUNTO AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, REALIZADA NO DIA 08 DE DEZEMBRO DE 2023.

Ao oitavo dia de dezembro de dois mil e vinte e três, às 14:00 horas, no Auditório do Departamento de Matemática/CCEN da Universidade Federal da Paraíba e por meio da plataforma virtual *Google Meet*, através do link: https://meet.google.com/qwi-ikdy-ebq, em conformidade com o parágrafo único do Art. 80 da Resolução CONSEPE nº 79/2013, que regulamenta a defesa de trabalho final por videoconferência, foi aberta a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada "**O quinto cone de Whitney para de uma curva analítica complexa**", do aluno **Matheus Felipe Santos da Penha**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, na área de **Geometria e Topologia**, sob a orientação do Prof. Dr. Otoniel Nogueira da Silva. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, foi composta pelos professores: Dr. Otoniel Nogueira da Silva (Orientador), Dr. Juan José Nuño Ballesteros (membro interno), Dr. Jawad Snoussi (membro externo/UNAM) e Dr. José Edson Sampaio (membro externo/UFC). O professor Otoniel Nogueira da Silva, em virtude da sua condição de orientador, presidiu os trabalhos e, depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo da dissertação. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela banca examinadora que, em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido ao candidato a menção: APROVADO. E, para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 08 de dezembro de 2023.

Otoniel Nogueira da Silva _____

Juan José Nuño Ballesteros _____

Jawad Snoussi _____

José Edson Sampaio _____

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P399q Penha, Matheus Felipe Santos da.
O quinto cone de Whitney de uma curva analítica complexa / Matheus Felipe Santos da Penha. - João Pessoa, 2023.
85 f. : il.

Orientação: Otoniel Nogueira da Silva.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Curvas analíticas complexas. 3. Quinto cone de Whitney. 4. Invariantes bi-Lipschitz. I. Silva, Otoniel Nogueira da. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por ANNA REGINA DA SILVA RIBEIRO - CRB-15/24

O Quinto Cone de Whitney de Uma Curva Analítica Complexa

por

Matheus Felipe Santos da Penha [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria/Topologia

Aprovada em 08 de Dezembro de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Otoniel Nogueira da Silva – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. José Edson Sampaio – UFC
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Jawad Snoussi – UNAM
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Juan José Nuño Ballesteros – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Agradecimentos

Quero e devo agradecer à minha mãe, Dalva, e ao meu pai, Amadeu. Apesar das dificuldades que uma família do interior enfrenta, meus pais sempre lutaram muito para me proporcionar condições favoráveis para os meus estudos. Seja com apoio financeiro, permitindo que eu fosse à escola todos os dias, seja com incentivos e conselhos para me tornar um aluno esforçado.

Gostaria de agradecer também ao meu orientador, o Prof. Otoniel. Primeiramente, por me acolher como seu orientando, e em segundo lugar, por ter sido (e ainda ser) um orientador excelente, que me incentivou ainda mais a estudar matemática, em especial a teoria das singularidades. Como minha graduação é licenciatura em matemática, obtive pouco contato com algumas disciplinas específicas de matemática, das quais muitas delas são pré-requisitos para estudar a teoria das singularidades. Por isso, agradeço novamente ao professor Otoniel por sua assistência e compreensão no momento de me apresentar novos conceitos essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Gostaria também de mencionar meus amigos e colegas de mestrado, que tornaram mais fácil enfrentar o desafio de ser aprovado nas disciplinas obrigatórias do início do curso. Além disso, foram eles que foram pacientes comigo quanto precisei de ajuda em algumas questões das disciplinas ou em alguma parte da pesquisa.

Resumo

Em 1965, na tentativa de definir um conjunto "tangente" a um espaço analítico em um ponto singular, Whitney propôs seis modelos que hoje são conhecidos na literatura como os cones tangentes de Whitney. Posteriormente, em 1980, Briançon, Galligo e Granger provaram que o quinto cone de Whitney de uma curva complexa reduzida e singular é uma união finita de planos de dimensão 2. Em seguida, Krasiński, e de maneira independente Giles-Flores, Silva e Snoussi, desenvolveram um algoritmo para descrever esta união como um conjunto. Assim, nosso principal objetivo neste trabalho foi estudar este procedimento que descreve o cone C_5 como um conjunto utilizando apenas parametrizações apropriadas dos ramos irredutíveis da curva. No desenvolvimento deste algoritmo também estudamos sequências ordenadas de multiplicidades que determinam e são determinadas pelo tipo Lipschitz da curva singular. Por meio destas sequências, também verificamos que o número de planos do cone C_5 de uma curva singular não é um invariante bi-Lipschitz. Por fim, criamos uma família de exemplos de curvas que possuem em seu cone C_5 uma quantidade pré-estabelecida de planos, e apresentamos algumas conjecturas sobre o assunto.

Palavras-chave: Curvas analíticas complexas. Quinto cone de Whitney. Invariantes bi-Lipschitz.

Abstract

In 1965, in an attempt to define a "tangent" set for an analytic space at a singular point, Whitney proposed six objects that are now known in the literature as Whitney's tangent cones. Subsequently, in 1980, Briançon, Galligo, and Granger proved that the fifth Whitney cone of a reduced singular complex curve is a finite union of 2-dimensional planes. Following that, Krasiński, and independently Giles-Flores, Silva, and Snoussi, developed an algorithm to describe this union as a set. Therefore, our main goal in this work was to study this procedure that describes the C_5 cone as a set using only appropriate parametrizations of the irreducible branches of the curve. In the development of this algorithm, we also studied ordered sequences of multiplicities that determine and are determined by the Lipschitz type of the singular curve. Through these sequences, we also verified that the number of planes in the C_5 cone of a singular curve is not a bi-Lipschitz invariant. However, we created a family of curve examples that have a pre-established number of planes in their C_5 cone and presented some conjectures on this subject.

Keywords: Complex analytic curves. Whitney's fifth cone. Bi-Lipschitz invariants.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **4**

1.1 Polinômios ciclotômicos 4

1.2 Variedades analíticas 6

1.3 Parametrizações de curvas analíticas 9

2 O C_5 de uma curva analítica **12**

2.1 Os cones C_3, C_4 e C_5 de Whitney 12

2.2 Curvas e multiplicidades auxiliares 24

2.3 O cone C_5 como um conjunto 28

3 Multiplicidades auxiliares como invariantes bi-Lipschitz **42**

3.1 Curvas planas e seus invariantes 42

3.2 Projeções genéricas de curvas espaciais em $\mathbb{C}^2$ 49

3.3 Curvas bi-Lipschitz equivalentes 52

4 O número de planos do cone C_5 **55**

4.1 Cotas superiores 55

4.2 O número de planos do cone C_5 é um invariante bi-Lipschitz? 61

A Problemas **64**

B Ordem natural no anel $\mathbb{C}\{s\}$ **72**

Referências Bibliográficas **75**

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\text{mdc}\{a,b\}$ denota máximo divisor comum entre os inteiros a e b.
- $\text{mmc}\{a,b\}$ denota mínimo múltiplo comum entre os inteiros a e b.
- $\text{Sing}(X)$ denota o conjunto dos pontos singulares de X.
- $\text{Reg}(X)$ denota o conjunto dos pontos regulares de X.
- $G_m = \{\theta \in \mathbb{C};\ \theta^m = 1\}$ denota o grupo cíclico das raízes m-ésimas da unidade.
- T_pX denota o espaço tangente de um conjunto X no ponto p.
- $m(X^{(i)},0)$ denota a multiplicidade do ramo $(X^{(i)},0)$.
- $E(X^{(i)},0)$ denota o conjunto dos expoentes característicos do ramo $(X^{(i)},0)$.
- $i(X^{(i)},X^{(j)},0)$ denota a multiplicidade interseção entre os ramos $(X^{(i)},0)$ e $(X^{(j)},0)$.
- $irred(\mathcal{V})$ denota o conjunto de componentes irredutíveis de uma variedade $\mathcal{V}$.
- $V(f_1,\dots,f_k)$ denota o conjunto de zeros dos polinômios $f_1,\dots,f_k$.
- $\langle f_1,\dots,f_k\rangle$ denota o ideal gerado pelos elementos $f_1,\dots,f_k$.
- $[w_1,\dots,w_k]$ denota o espaço vetorial gerado pelos vetores $w_1,\dots,w_k \in \mathbb{C}^n$.
- $\overline{w} = [a_1 : \dots : a_n] = \{\lambda w; \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}$ denota a classe de equivalência de $w = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$.
- $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ denota o anel dos polinômios nas variáveis $x_1,\dots,x_n$.
- $\mathbb{K}[[x_1,\dots,x_n]]$ denota o anel das séries formais nas variáveis $x_1,\dots,x_n$.
- $\mathbb{K}\{x_1,\dots,x_n\}$ denota o anel de séries formais convergentes nas variáveis $x_1,\dots,x_n$, em uma vizinhança da origem.

- $\sqrt{I}$ denota o ideal radical do ideal I.
- $\mathrm{o}(\theta)$ denota a ordem do elemento θ no grupo G_m.
- $ord_0(p)$ denota a ordem da série convergente $p \in \mathbb{C}\{t\}$.

Introdução

Na matemática moderna, as singularidades desempenham um papel fundamental em diversas áreas, desde a geometria até a análise e física teórica. Uma singularidade é um ponto de interesse especial, onde uma função, uma equação ou uma estrutura matemática apresenta um comportamento excepcional e desafiador. O estudo das singularidades nos permite compreender fenômenos complexos e explorar a natureza intrínseca de muitas estruturas matemáticas. Basicamente, uma singularidade ocorre quando o comportamento de uma função se desvia drasticamente do esperado. Esses pontos especiais podem revelar informações valiosas sobre a função ou a estrutura subjacente, e sua análise contribui para o desenvolvimento de novas teorias e abordagens matemáticas.

Além disso, a teoria de singularidades possui fortes conexões com diversas áreas da matemática moderna, construindo relações muito interessantes entre geometria algébrica, análise complexa, topologia, álgebra comutativa e vários outros campos, como também inúmeras aplicações na natureza e em outras áreas do conhecimento específico.

Dentro da geometria diferencial, sempre que uma superfície é regular, existe uma noção de espaço tangente. Por outro lado, na presença de singularidades, as definições tradicionais da geometria diferencial falham na construção de um objeto que possa ser considerado "tangente" à uma superfície em um ponto singular. Em 1965, o matemático estadunidense Hassler Whitney [21], propôs seis modelos de espaços tangentes para uma variedade analítica em um ponto singular, que hoje são conhecidos como *os cones tangentes de Whitney*. Basicamente, dado um conjunto analítico $X \subset \mathbb{C}^n$ e um ponto $p \in X$, Whitney definiu seis tipos de cones $C_1(X,p), \ldots, C_6(X,p)$ todos eles tendo o ponto p como vértice. Um fato bem conhecido na literatura é que se $I \subset \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ então somos capazes de determinar $f_1, \ldots, f_k$ geradores de I tais que suas formas iniciais são geradores do ideal que define o cone $C_3(X,0)$, este processo dá ao cone C_3 uma estrutura algébrica. O cone C_3 é amplamente conhecido na literatura como o cone tangente de Zariski, veja [4, pag. 79]. Também em [21], Whitney provou que os cones C_4 e C_5 são variedades algébricas. No entanto, ainda não se conhece um método padrão para se determinar equações que definam estes cones em todas as dimensões.

Nesta dissertação, nosso principal objetivo é analisar uma forma de caracterizar e determinar o quinto cone de Whitney de uma curva analítica complexa (como um conjunto). Em 1972, Stutz mostrou, em [18], que se (X,p) é um germe de curva analítica singular em $(\mathbb{C}^n,p)$ então o cone $C_5(X,p)$ tem dimensão complexa 2. Alguns anos depois, logo no começo da década de 80, Briançon, Galligo e Granger em [1] mostraram que o cone $C_5(X,p)$ é uma união finita de planos cada um deles contendo uma reta do cone $C_3(X,p)$. Em adição, Krasiński determinou uma maneira de descrever o cone $C_5(X,p)$ como um conjunto, em função das parametrizações dos ramos irredutíveis de (X,p).

A partir do que já se foi produzido a respeito do cone C_5 de uma curva singular complexa ficamos ainda com as seguintes questões: *Como descrever um procedimento para determinar o cone $C_5(X,p)$? Qual o número máximo e mínimo de planos em $C_5(X,p)$? O número de planos em $C_5(X,p)$ é um invariante topológico ? Mais que isso, é um invariante bi-Lipschitz? O tipo topológico da singularidade da curva determina a quantidade planos do quinto cone de Whitney?*

A respeito do procedimento de determinação dos planos no quinto cone de Whitney de uma curva analítica singular complexa, Giles-Flores, Silva e Snoussi, com base nos trabalhos de Briançon, Galligo e Granger, publicaram em 2022 [6], uma maneira mais construtiva de se determinar o cone $C_5(X,p)$ exibindo como podemos determinar cada plano da união. Este método foi denominado de "$C_5-procedure$". Além disso, contribuindo com respostas para o número de componentes irredutíveis de $C_5(X,p)$, Krasiński mostrou que o número de planos gerados por dois ramos irredutíveis é limitado superiormente pelo máximo divisor comum entre as multiplicidades dos ramos, como veremos em detalhes no Corolário 4.2. Nesta mesma linha, Giles-Flores, Silva e Snoussi ainda em [6], aprimoraram estas cotas, como veremos na Seção 4.1.

Dados (X,p) e (Y,q) dois germes de conjuntos subanalíticos bi-Lipschitz equivalentes em $\mathbb{C}^n$, Sampaio provou em [16], que os cones $C_3(X,p)$ e $C_3(Y,q)$ também são bi-Lipschitz equivalentes. Em particular, se X e Y são curvas, teremos que o seus respectivos cones C_3 tem o mesmo número de componentes irredutíveis. Em contrapartida, o mesmo não acontece com o cone C_5, como veremos claramente no Exemplo 4.5.

Nosso trabalho neste texto, é apresentar o $C_5-procedure$ publicado em [6] e construir exemplos a respeito de alguns resultados que foram provados, como também exibir uma demonstração do $C_5-procedure$. Outra contribuição importante feita em [6] que também abordaremos, será a definição das multiplicidades e curvas auxiliares, que fornecem informações de caráter crucial para o entendimento do comportamento da união finita de planos do quinto cone de Whitney de uma curva singular complexa,

acrescentando ainda, o fato de que as multiplicidades auxiliares caracterizam e são caracterizadas pelo tipo Lipschitz da curva. Por fim, responderemos a pergunta inversa sobre o cone C_5: dado um feixe de planos em $\mathbb{C}^n$ é possível construir uma curva reduzida parametrizada X, tal que o cone $C_5(X,p)$ coincida com esse feixe ? Com algumas hipóteses conseguimos mostrar que sim, e deixaremos os passos para construção desta curva nas Proposições A.1 e A.2.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos discorrer sobre conceitos e resultados importantes para a compreensão e desenvolvimento da dissertação.

1.1 Polinômios ciclotômicos

No Capítulo 3, vamos apresentar um algoritmo para determinação de um dos cones de Whitney, o cone C_5. Em todo o desenvolvimento desse algoritmo, vamos tratar sobre raízes da unidade, e para isso, será necessário o emprego de algumas ferramentas matemáticas. Os polinômios ciclotômicos, por sua vez, desempenham um papel crucial na compreensão das m-raízes da unidade, pois as suas raízes são exatamente as raízes m-ésimas primitivas da unidade.

Definição 1.1. Seja m um número inteiro positivo e $\theta \in \mathbb{C}$. Dizemos que θ é uma raíz m-ésima da unidade se $\theta^m = 1$. Além disso, dizemos que θ é *primitiva* se, em adição, $\theta^k \neq 1$ para todo $k = 1, ..., m-1$. Em outras palavras, se considerarmos $\theta \in G_m := \{z \in \mathbb{C};\ z^m = 1\}$, o grupo cíclico das m-ésimas raízes das unidade, temos que θ é primitiva quando $\mathrm{o}(\theta) = m$, onde $\mathrm{o}(\theta)$ denota a ordem de θ em G_m.

Note que podemos determinar o número de raízes primitivas em G_m, através da função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de Euler que conta a quantidade números inteiros entre 1 e $m-1$ que são coprimos com m, como segue,

$$\begin{aligned} \#\{z \in G_m; \mathrm{o}(z) = m\} &= \#\{z \in G_m; z^k \neq 1 \text{ para todo } 1 \leq k \leq m-1\} \\ &= \#\{z \in G_m; \mathrm{mdc}\{k, m\} = 1 \text{ para todo } 1 \leq k \leq m-1\} \\ &= \varphi(m) \end{aligned}$$

Definição 1.2. O polinômio ciclotômico $\phi_n \in \mathbb{C}[z]$ é definido como sendo o polinômio

mônico cujo suas raízes são as raízes n-ésimas primitivas da unidade, ou seja,

$$\phi_n(z) = \prod_{j=1}^{\varphi(n)} (z - \theta_j)$$

onde, $\theta_1, ..., \theta_{\varphi(n)}$ são n-ésimas raízes primitivas da unidade.

Uma peculiaridade sobre os polinômios ciclotômicos é que estes são polinômios mômicos com coeficientes inteiros irredutíveis sobre $\mathbb{Q}[z]$. Outra observação importante a ser considerada acerca desta classe de polinômios, é a sua utilidade para caracterizar as raízes da unidade. Note que $\theta \in G_m$ se $\theta^m = 1$, ou seja, considerando o polinômio $z^m - 1$, temos,

$$z^m - 1 = \prod_{k=0}^{m-1} (z - \theta_k) = \prod_{d|m} \phi_d(z) \tag{1.1}$$

onde θ_k é uma raiz m-ésima qualquer da unidade.

Exemplo 1.1. Seja $m = 6$, então consideramos o grupo

$$G_6 = \{\theta_k \in \mathbb{C}; \theta_k = e^{\frac{k\pi}{3}i}, \text{ com } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

O conjunto dos divisores de 6 é $\{1, 2, 3, 6\}$, daí

$$\phi_1(z) = z - \theta_0;\ \phi_2(z) = z - \theta_3;\ \phi_3(z) = (z - \theta_2)(z - \theta_4);\ \phi_6(z) = (z - \theta_1)(z - \theta_5)$$

isto é,

$$\phi_1(z) = z - 1;\ \phi_2(z) = z + 1;\ \phi_3(z) = z^2 - z + 1;\ \phi_6(z) = z^2 + z + 1$$

donde podemos verificar que,

$$\phi_1(z)\phi_2(z)\phi_3(z)\phi_6(z) = (z - 1)(z + 1)(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1) = z^6 - 1$$

Observação 1.1. Fazer essa observação é interessante para a nosso estudo, pois, se θ é raiz de algum polinômio cliclotômico ϕ_d, para algum d inteiro positivo, então θ também será raiz do polinômio $z^m - 1$ para todo m múltiplo inteiro positivo de d.

Além disso, se consideramos $a, b \in \mathbb{C}$, não nulos com $a \neq b$, pela equação (1.1), teremos

$$\frac{a^m - b^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m - 1 = \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{a}{b} - \theta_k\right) = \frac{1}{b^m} \cdot \prod_{k=0}^{m-1} (a - \theta_k b),$$

ou seja,

$$a^m - b^m = \prod_{k=0}^{m-1} (a - \theta_k b) \tag{1.2}$$

1.2 Variedades analíticas

Podemos encontrar no livro de Chirka [4] e no livro de Greuel, Losssen e Shustin [8] uma apresentação da definição geral do que é um conjunto analítico complexo. Com base, nas definições apresentadas em [4, pag. 13] e também em [8, pag. 35], segue,

Definição 1.3. Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$. Uma função complexa $f : U \to \mathbb{C}$ é chamada *analítica* ou *holomorfa* se para todo $p = (p_1, ..., p_n) \in U$ existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p e uma série de potências $\overline{f} \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$ definida por

$$\overline{f}(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1,...,i_n}^{\infty} a_{i_1,...,i_n} (x_1 - p_1)^{i_1} \cdot ... \cdot (x_n - p_n)^{i_n}$$

que converge em V para $f|_V$.

Neste sentido, uma aplicação $f = (f_1, ..., f_m) : U \to \mathbb{C}^m$ será dita analítica ou holomorfa se todas as funções coordenadas f_i tem essa propriedade. Além disso, uma aplicação holomorfa $f : U \to V \subset \mathbb{C}^m$ será dita *biholomorfa* quando for bijeção e sua inversa $f^{-1} : V \to U$ também for holomorfa. E pelo Teorema da Função Inversa (Veja [8, Th. 1.21]) temos necessariamente que $n = m$.

Definição 1.4. Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$. Então um subconjunto $A \subset D$ é dito analítico em $p \in D$ se existem uma vizinhança aberta $U \subset D$ de p e funções holomorfas $f_1, ..., f_k \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$ que convergem em U tais que

$$A \cap U = V(f_1, ..., f_k) := \{a \in \mathbb{C}^n; f_1(a) = 0, \ ... \ , f_k(a) = 0\}$$

A será dito um subconjunto analítico de D se A é analítico para todo $p \in D$.

Visto o que é uma função analítica, um dos objetivos deste texto, é estudar localmente estes objetos. Para isso, introduzimos uma relação de equivalência no conjunto das funções analíticas do tipo $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, onde U é um conjunto aberto contendo a origem, da seguinte forma: Sejam f, g funções analíticas definidas em U, temos que $f \sim g$ se, e somente se, existe $V \subset U$, contendo a origem tal que $f|_V = g|_V$. As classes de equivalências são chamadas de *germes de função*, denotadas por $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, f(0))$ ou, simplesmente f. A coleção de todos esses germes de funções é denotada por $\mathcal{O}_n$. É importante notar que $\mathcal{O}_n$ é um anel noetheriano local cujo o seu ideal maximal é

dado por $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n;\ f(0) = 0\}$. Similarmente, definimos *germe de aplicação*, $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, f(0))$, e o conjunto de todas os germes de aplicação de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $\mathbb{C}^p$ é denotado por $\mathcal{O}_{n,p}$.

Um dos aspectos centrais da Teoria de Singularidades, está no estudo local de conjuntos analíticos, isto é, o estudo do comportamento de pontos próximos a um ponto singular p de um conjunto analítico X. O que geralmente ocorre é que se Y é um outro conjunto analítico tal que $p \in Y$, e se existe uma vizinhança U de p tal que os pontos de X que estão na vizinhança U coincidem com os pontos de Y que estão na mesma vizinhança U, então podemos pensar $X \cap U$ e $Y \cap U$ como um mesmo objeto a ser estudado. Além disso, pode ser mais fácil entender o comportamento dos pontos de Y, ao invés de X. Essa ideia conceitua a definição de *germes de conjuntos analíticos*. Mais formalmente temos:

Definição 1.5. Sejam X, Y dois conjuntos analíticos em $\mathbb{C}^n$ e suponha que exista $p \in X \cap Y$. Dizemos que X se relaciona com Y em torno de p se, e somente se, existe uma vizinhança aberta U de p em $\mathbb{C}^n$ tal que $X \cap U = Y \cap U$. Quando isso ocorre, dizemos que X é equivalente a Y em p e denotamos por $X \sim Y$. Chamamos a coleção de todos os conjuntos analíticos que se relacionam com X em p de *germe* de X em p e denotamos por $(X, p) = \{Y \subset \mathbb{C}^n; X \sim Y\}$.

Por simplicidade, vamos tratar apenas com germes de conjuntos em torno na origem, pois os resultados podem ser facilmente estendidos através de um movimento rígido.

A Figura 1.1 ilustra o comportamento de dois conjuntos analíticos X e Y em torno da origem.

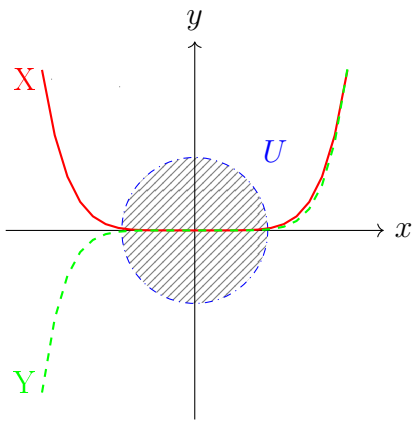


Figura 1.1: Noção geométrica de germe

Se $f \in \mathcal{O}_n$ a classe de equivalência do conjunto $\{x \in \mathbb{C}^n; f(x) = 0\}$, onde f é um representante do germe $f \in \mathcal{O}_n$, é denotado por $V(f)$. Além disso, se f_1 e f_2 são

representantes de um mesmo germe de função em $\mathcal{O}_n$ então $V(f_1) = V(f_2)$. Um germe de conjunto analítico $(X,0)$ é um conjunto do tipo $X = V(f_1,...,f_k) = V(f_1)\cap\cdots\cap V(f_k)$ para alguns germes de funções $f_1,...,f_k \in \mathcal{O}_n$.

Definimos o ideal de um germe de conjunto analítico $(X,0)$ por $\mathcal{I}(X) = \{f \in \mathcal{O}_n; X \subset f^{-1}(0)\}$. Dizemos que um germe de conjunto analítico $(X,0)$ é irredutível quando para quaisquer germes $(X_1,0)$ e $(X_2,0)$ tais que $(X,0) = (X_1 \cup X_2,0)$ então $(X,0) = (X_1,0)$ ou $(X,0) = (X_2,0)$. Quando $(X,0)$ não é irredutível, podemos reescreve-lo da forma $(X,0) = (X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)},0)$, onde $(X^{(i)},0)$ é um germe de conjunto irredutível, e será chamada de *componente irredutível* ou *ramo* de $(X,0)$. Sabemos que essa decomposição sempre existe e é unicamente determinada, veja [9, pag. 89].

Sendo $X = V(f_1,...,f_k)$ uma variedade irredutível em $\mathbb{C}^n$, definimos a sua dimensão como sendo

$$dimX = n - \max_{x\in X}\left\{posto\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{n\times k}\right\},$$

sendo $x = (x_1,...,x_n)$. No caso em que X não é irredutível, seja $X = X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)}$ a decomposição de X em componentes irredutíveis, então definimos a dimensão de X por

$$dimX = \max_{i\in I_r} dimX^{(i)}.$$

Quando todas as componentes $X^{(i)}$ tem a mesma dimensão dizemos que X é *equidimensional*.

Definição 1.6. Dizemos que um germe $X = V(f_1,...,f_k)$ é reduzido se a $\mathbb{C}$-álgebra local

$$\mathcal{A} := \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1,...,f_k\rangle}$$

não possuir elementos nilpotentes, ou seja, para todo $\mathbf{g} \in \mathcal{A}$, com $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, tem-se que $\mathbf{g} \notin \sqrt{\{\mathbf{0}\}}$, onde $\{\mathbf{0}\}$ é o ideal nulo de $\mathcal{A}$.

Ainda não está claro a partir dessas definições sobre o que é uma singularidade de um conjunto analítico complexo de $\mathbb{C}^n$. Os pontos de um conjunto analítico de $\mathbb{C}^n$ são convenientemente divididos em duas classes: os pontos regulares e os pontos singulares.

Definição 1.7. O ponto p de um conjunto analítico $X \subset \mathbb{C}^n$ será chamado de *regular* se existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{C}^n$ de p tal que $X\cap U$ é uma variedade complexa suave. O conjunto de todos os pontos regulares de X será denotado por $\mathrm{Reg}(X)$. Também definimos o conjunto $\mathrm{Sing}(X) := X - \mathrm{Reg}(X)$ como sendo o conjunto dos pontos singulares de X. Ou seja, um ponto p é um ponto *singular* de X se p não é regular.

1.3 Parametrizações de curvas analíticas

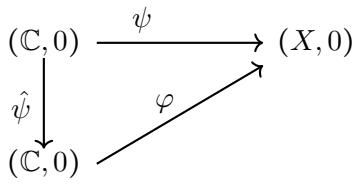
Neste texto, diremos que um germe de conjunto analítico $(X,0)$ em $(\mathbb{C}^n,0)$ é uma curva quando $(X,0)$ é um conjunto analítico equidimensional de dimensão 1. Também, quando nos referimos a curva reduzida complexa, por simplicidade, escreveremos apenas curva, exceto os casos quando especificado.

Definição 1.8. Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de uma curva irredutível $X \subset \mathbb{C}^n$. Uma parametrização de $(X,0)$ é uma aplicação holomorfa finita

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^n,0) \\ & t & \longmapsto & (\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t)) \end{array}$$

com $\varphi(\mathbb{C},0) = (X,0)$.

Diremos que φ é uma parametrização *primitiva* de $(X,0)$ se para todo germe de parametrização ψ de $(X,0)$, existe $\hat{\psi} : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$, um único germe de função holomorfa tal que $\psi = \varphi \circ \hat{\psi}$.



Além disso, definimos a multiplicidade do germe de curva $(X,0)$, por:

$$m := m(X,0) := \inf\{ord\varphi_j;\ \varphi \text{ é uma parametrização de } (X,0) \text{ e } j \in I_n\}.$$

É fácil perceber que se φ é uma parametrização primitiva de $(X,0)$, então a multiplicidade m de $(X,0)$ é igual a $\min_j ord\varphi_j$.

Se $(X,0)$ não é irredutível, considere $(X,0) = (X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)},0)$, a sua decomposição em componentes irredutíveis, então uma parametrização de X é um sistema de parametrizações $\{\varphi^{(1)},...,\varphi^{(r)}\}$, onde $\varphi^{(i)}$ é uma parametrização para o ramo irredutível $(X^{(i)},0)$.

Exemplo 1.2. Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$, onde $X = V(y^2 - x^3)$. Então o germe de aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (X,0) \\ & t & \longmapsto & (t^2,t^3) \end{array}$$

define uma parametrização primitiva de $(X,0)$. Contudo, o germe de aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi: & (\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (X,0) \\ & t & \longmapsto & (t^4,t^6) \end{array}$$

apesar de parametrizar $(X,0)$, não define uma parametrização primitiva, pois, considerando $\hat{\psi}:(\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$, $\hat{\psi}(t)=t^2$, temos $\psi=\varphi\circ\hat{\psi}$.

Definição 1.9. Seja $(X,0)$ um germe de uma curva irredutível em $(\mathbb{C}^n,0)$, com multiplicidade m. Dizemos que uma parametrização primitiva $\varphi:(\mathbb{C},0)\to(X,0)$ é uma parametrização de *Puiseux* de $(X,0)$, se φ assume a seguinte forma:

$$\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t))=\left(\sum_{i\geq m}a_{1,i}t^i,...,\sum_{i\geq m}a_{j-1,i}t^i,t^m,\sum_{i\geq m}a_{j+1,i}t^i,...,\sum_{i\geq m}a_{n,i}t^i\right)$$

Chamamos a j-ésima coordenada do vetor $\varphi(u)$, a saber, $\varphi_j(t)=t^m$, de *coordenada especial*.

Em muitas situações, por conveniência de escrita, vamos tomar um germe de parametrização de Puiseux de um germe de curva irredutível $(X,0)$, com a coordenada especial na primeira entrada do vetor $\varphi(t)$, ou seja,

$$\varphi(t)=\left(t^m,\sum_{i\geq m}a_{2,i}t^i,...,\sum_{i\geq m}a_{n,i}t^i\right)$$

Se $(X,0)=(X^{(1)}\cup\cdots\cup X^{(r)},0)$ então uma parametrização de Puiseux de X é um sistema de parametrizações de Puiseux $\{\varphi^{(1)},...,\varphi^{(r)}\}$, onde $\varphi^{(i)}$ é uma parametrização de Puiseux do ramo irredutível $(X^{(i)},0)$. Além disso, dizemos que um sistema de parametrizações de Puiseux $\{\varphi^{(1)},...,\varphi^{(r)}\}$, é *compatível* quando para cada par (i,j) tal que $X^{(i)}$ é tangente $X^{(j)}$ as respectivas parametrizações primitivas de Puiseux tem pelo menos uma coordenada especial em comum (não necessariamente com a mesma multiplicidade m). Em outras palavras, dado um par de ramos tangentes, com parametrizações

$$\begin{cases} \varphi^{(i)}(\mathbb{C},0)=(X^{(i)},0) \\ \varphi^{(i)}(t)=(\varphi_1^{(i)}(t),...,\varphi_n^{(i)}(t)) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \varphi^{(j)}(\mathbb{C},0)=(X^{(j)},0) \\ \varphi^{(j)}(t)=(\varphi_1^{(j)}(t),...,\varphi_n^{(j)}(t)) \end{cases}$$

O sistema de parametrizações é compatível se existe $l\in\{1,...,n\}$ tal que $\varphi_l^{(i)}(t)=t^m$ e $\varphi_l^{(j)}(t)=t^{\tilde{m}}$, onde os inteiros m e $\tilde{m}$ são respectivamente as ordens mais baixas entre as funções coordenadas de $\varphi^{(i)}$ e $\varphi^{(j)}$. O índice l é uma coordenada especial comum para $\varphi^{(i)}$ e $\varphi^{(j)}$.

Exemplo 1.3. Seja $(W,0) = (X^{(1)} \cup X^{(2)},0)$ um germe de curva complexa em $(\mathbb{C}^2,0)$, onde $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$ são germes de curvas irredutíveis. Tendo como sistema de parametrização $\{\varphi^{(1)},\varphi^{(2)}\}$, definido por,

$$\begin{cases} \varphi^{(1)}(\mathbb{C},0) = (X^{(1)},0) \\ \varphi^{(1)}(t) = (t^6, t^6 - t^8) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \varphi^{(2)}(\mathbb{C},0) = (X^{(2)},0) \\ \varphi^{(2)}(t) = (t^4 + t^5, t^4) \end{cases}$$

Observe que $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$ possuem a mesma tangente que é a reta gerada pelo vetor $(1,1)$, contudo, temos que a coordenada especial de $\varphi^{(1)}$ é a primeira, enquanto a coordenada especial de $\varphi^{(2)}$ é a segunda. Logo, o sistema $\{\varphi^{(1)},\varphi^{(2)}\}$ não define sistema de parametrizações de Puiseux compatível.

Exemplo 1.4. Seja $(W,0) = (X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup X^{(3)},0)$ um germe de curva complexa em $(\mathbb{C}^3,0)$, onde $(X^{(i)},0)$ é um germe de curva irredutível, para cada $i = 1,2,3$. Tendo como sistema de parametrização $\{\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\varphi^{(3)}\}$, definido por,

$$\begin{cases} \varphi^{(1)}(\mathbb{C},0) = (X^{(1)},0) \\ \varphi^{(1)}(t) = (t^6, t^6 + t^9, t^6 - t^8) \end{cases} ; \begin{cases} \varphi^{(2)}(\mathbb{C},0) = (X^{(2)},0) \\ \varphi^{(2)}(t) = (t^4, t^4 + t^5, t^4 + t^6) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \varphi^{(3)}(\mathbb{C},0) = (X^{(3)},0) \\ \varphi^{(3)}(t) = (t^5, t^6, t^7) \end{cases}$$

Observe que $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$ possuem a mesma tangente que é a reta gerada pelo vetor $(1,1,1)$ e tem a primeira entrada do vetor parametrização como a coordenada especial, a saber, $\varphi_1^{(1)}(t) = t^6$ e $\varphi_1^{(2)}(t) = t^4$, observamos que a tangente do ramo $(X^{(3)},0)$, é a reta gerada pelo vetor $(1,0,0)$, logo não é tangente à $(X^{(1)},0)$ e nem à $(X^{(2)},0)$. Portanto, o sistema $\{\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\varphi^{(3)}\}$ define um sistema de parametrizações de Puiseux compatível.

Sabemos, através de [8, pag. 163], que se $(X,0)$ é irredutível e que dado uma parametrização primitiva de $(X,0)$ então existe um isomorfismo analítico $\xi : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ tal que $\varphi \circ \xi$ é uma parametrização de Puiseux de $(X,0)$. Portanto, dado um germe de curva $(X,0)$ podemos escolher para cada ramo irredutível de $(X,0)$ uma parametrização de Puiseux. Além disso, não é difícil mostrar que um sistema compatível de parametrizações de Puiseux para uma curva sempre existe.

Capítulo 2

O C_5 de uma curva analítica

Neste parte do trabalho, iremos nos preocupar em desenvolver técnicas para se determinar o quinto cone de Whitney de uma curva analítica de $\mathbb{C}^n$.

2.1 Os cones C_3, C_4 e C_5 de Whitney

Ao longo desse seção, vamos nos desbruçar sobre os cones de Whitney, com enfâse no terceiro, quarto e quinto cones. Iniciamos trazendo a definição dos objetos que serão usados neste trabalho, que foram inicialmente propostas por Whitney em [21], e também podemos encontrar uma exposição, de maneira mais detalhada no livro [4, pag. 91].

Definição 2.1. Seja $(X,0)$ um germe de conjunto analítico em $(\mathbb{C}^n,0)$.

C_3. Dizemos que $v \in C_3(X,0)$ se existem $(w_s)_s$ uma sequência de pontos em X e $(\lambda_s)_s$ uma sequência de escalares no corpo $\mathbb{C}$ tais que $w_s \to 0$ e $\lambda_s w_s \to v$, quando $s \to \infty$.

C_4. Dizemos que $v \in C_4(X,0)$ se existem $(w_s)_s$ uma sequência de pontos na parte regular de X e $(v_s)_s$ uma sequência de vetores, onde $v_s \in T_{w_s}X$ para todo $s \in \mathbb{N}$, tais que $w_s \to 0$ e $v_s \to v$, quando $s \to \infty$.

C_5. Dizemos que $v \in C_5(X,0)$ se existem $(w_s)_s$ e $(\tilde{w}_s)_s$ duas sequências distintas de pontos em X e $(\lambda_s)_s$ uma sequência de escalares no corpo $\mathbb{C}$ tais que $w_s, \tilde{w}_s \to 0$ e $\lambda_s(w_s - \tilde{w}_s) \to v$, quando $s \to \infty$.

Observação 2.1. Vale realçar algumas observações sobre cada cone definido acima.

1. O cone $C_3(X,0)$ é constituído pelos vetores que são limite de secantes $\overline{w_s - 0}$, quando $(w_s)_s$ é uma sequência de pontos de $(X,0)$. Podemos notar o que ocorre

geometricamente, para o caso particular de uma curva irredutível, na Figura 2.2 do Exemplo 2.1. O cone $C_3(X,0)$ é muitas vezes chamado de *Cone Tangente de Zariski*, ou simplesmente cone tangente de X em 0. Em [4, Ch. 2] encontra-se uma exposição detalhada sobre esse cone.

2. O cone $C_4(X,0)$ trata-se da união de todos os vetores $v \in \mathbb{C}^n$ que são limite de alguma sequência $(v_s)_s$ tal que $v_s \in T_{w_s}X$, sendo $(w_s)_s$ uma sequência de pontos regulares de $(X,0)$, que converge para 0. Na Figura 2.2 do Exemplo 2.1, podemos ver a dinâmica destas sequências de vetores para o caso particular de uma curva singular irredutível.

3. O cone $C_5(X,0)$ é constituído de vetores que são limite de secantes $\overline{w_s - \tilde{w}_s}$, quando $(w_s)_s$ e $(\tilde{w}_s)_s$ são sequências de pontos convergindo para 0 em $(X,0)$. Basicamente, o cone C_5 é um caso mais geral para o cone C_3, e dessa observação, concluímos que $C_3(X,0) \subset C_5(X,0)$.

A proposição a seguir, apresenta um resultado bastante conhecido dentro da literatura sobre o cone tangente de Zariski que será essencial para nosso estudo sobre o cone C_5 de uma curva. A Proposição 2.1 é importante porque, ela caracteriza o cone C_3 de curvas. Para mais detalhes sobre a demonstração veja [4, pag. 80].

Proposição 2.1. Seja $(X,0)$ um germe de curva em $(\mathbb{C}^n,0)$, então o cone $C_3(X,0)$ é uma união finita de retas complexas. Além disso, o número de retas não excede o número de ramos irredutíveis de $(X,0)$.

Lembrando que, dentro do nosso contexto, entende-se por curva uma união finita de curvas irredutíveis. O fato de que o número de retas do cone C_3 de uma curva não excede o número de ramos irredutíveis da curva, nos permite concluir que sendo $(X,0)$ um germe de curva irredutível então $C_3(X,0)$ é apenas uma reta gerada por algum vetor não nulo que satisfaz a definição de C_3. Isto ficará mais claro posteriormente na primeira parte do Exemplo 2.1.

Proposição 2.2. Seja $(X,0)$ um germe de um conjunto analítico em $(\mathbb{C}^n,0)$. Se $w \in C_3(X,0)$, com $w \neq 0$ então $[w] \subset C_3(X,0)$.

Demonstração. Como $w \in C_3(X,0)$ então existem $w_s \to 0$ em $(X,0)$ e $(\lambda_s)_s$ uma sequência de escalares tais que

$$\lim_{s\to\infty} \lambda_s w_s = w.$$

Assim, seja $a \in \mathbb{C}$, temos que

$$\lim_{s\to\infty} (a\lambda_s) w_s = a \lim_{s\to\infty} \lambda_s w_s = aw.$$

Portanto, $aw \in C_3(X,0)$, para todo $a \in \mathbb{C}$. Isto é, $[w] \subset C_3(X,0)$. ∎

Observação 2.2. No caso particular, em que $(X,0)$ é um germe de curva irredutível a Proposição 2.2, juntamente com a Proposição 2.1, nos diz que se encontrado um vetor w não nulo em $C_3(X,0)$, então teremos $C_3(X,0) = [w]$. Em termos simples, podemos dizer que o cone C_3 de uma curva irredutível é formado por uma única direção. Dessa maneira, sendo φ uma parametrização de $(X,0)$, como na Definição 1.8, podemos simplificar o processo de determinação do C_3 calculando o seguinte limite

$$\overline{w} = \lim_{t\to 0}[\varphi_1(t) : \ldots : \varphi_n(t)].$$

Neste caso, $\overline{w}$ não depende da sequência $(w_s)_s$, pois já sabemos que $C_3(X,0)$ tem apenas uma única direção.

No exemplo seguinte, podemos observar uma forma de se encontrar os cones C_3, C_4 e C_5 para a cúspide, como também as relações entre eles.

Exemplo 2.1. Considere $X = V(x^3 - y^2)$ em $\mathbb{C}^2$, que também pode ser visto como a imagem da parametrização,

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{C} & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & (t^2, t^3) \end{array}$$

Tendo como gráfico, a Figura 2.1.

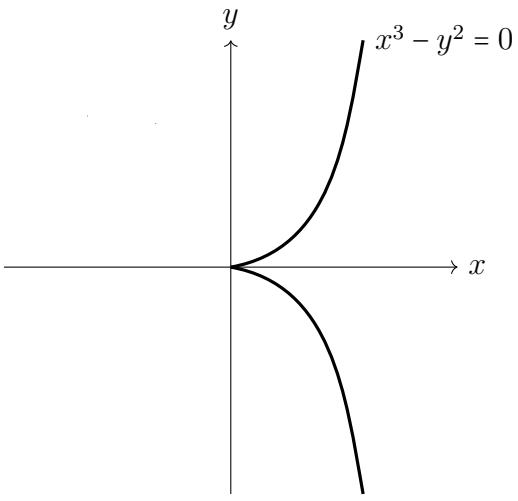


Figura 2.1: Pontos reais da Cúspide

Vamos mostrar que $C_3(X,0) = V(y)$. Primeiramente, observe que X é irredutível.

Então pela Observação 2.2, temos

$$\lim_{t\to 0}\left[t^2 : t^3\right] = \lim_{t\to 0}\left[t^2 : t^2\ t\right] = \lim_{t\to 0}[1 : t] = [1 : 0],$$

isto é, $C_3(X,0) = [(1,0)] = V(y)$. No lado A da Figura 2.2, ilustra o comportamento de retas convergindo para a reta que tem a mesma direção do vetor $(1,0)$.

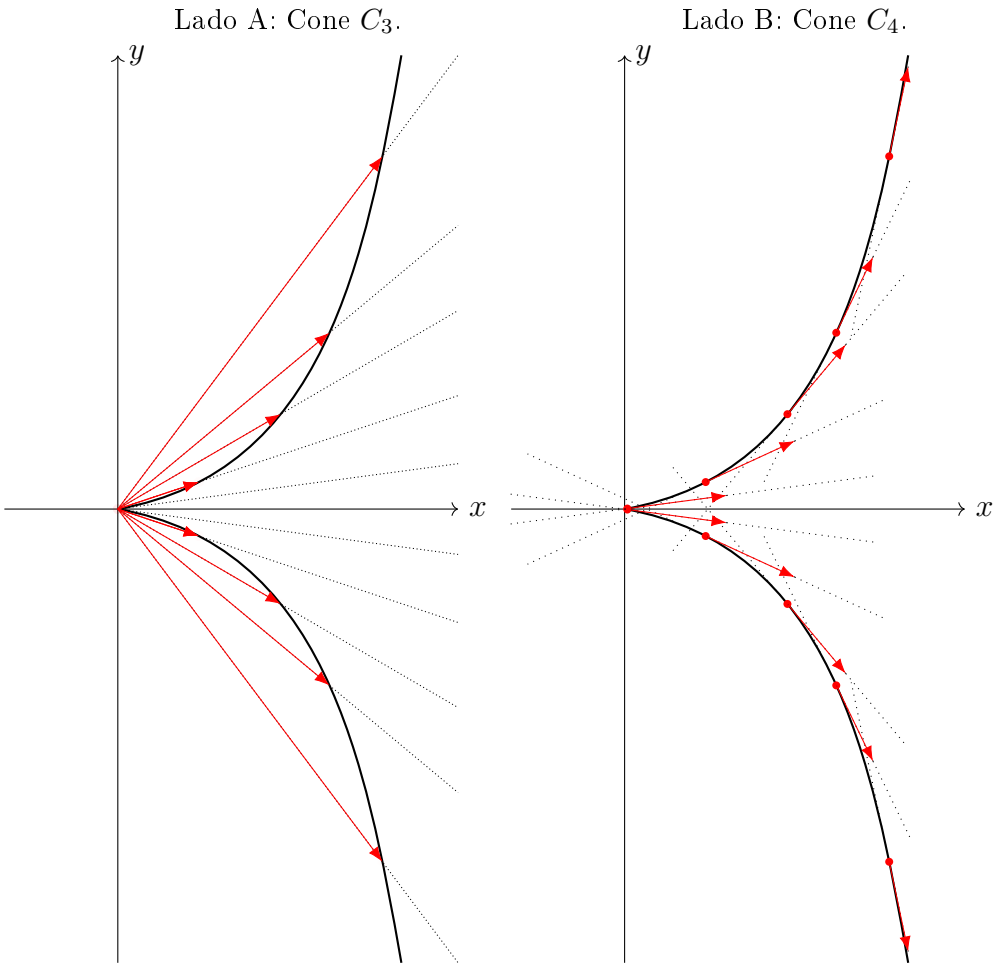


Figura 2.2: Desenvolvimento dos cones C_3 e C_4 da Cúspide

Vejamos que $C_4(X,0) = V(y) = [(1,0)]$. De fato, como diz a definição de C_4, vamos tomar uma sequência $(w_s)_s$ em Reg$X$, com $w_s \to 0$. Como X é uma curva irredutível o espaço tangente $T_{w_s}X$ tem uma única direção, que é gerada pelo vetor velocidade de φ no ponto $t_s := \varphi^{-1}(w_s)$, ou seja, $T_{w_s}X = [\varphi'(t_s)]$. Dado $a \in \mathbb{C}$, então consideramos a sequência de vetores tangentes $(v_s)_s$, definida por,

$$v_s := \left(a, \frac{3at_s}{2}\right) = \frac{a}{2t_s}(2t_s, 3t_s^2) = \frac{a}{2t_s}\varphi'(t_s) \in T_{w_s}X$$

então, quando $s \to \infty$, temos $v_s \to (a,0)$. Ou seja, $[(1,0)] \subset C_4(X,0)$. Agora, seja $\tilde{v} \in C_4(X,0)$, então existem $(\tilde{w}_s)_s$ na parte regular de X tal que

$$\alpha_s \varphi'(\tilde{t}_s) \to \tilde{v},$$

com $\tilde{t}_s := \varphi^{-1}(\tilde{w}_s)$ e para alguma sequência de escalares $(\alpha_s)_s$. Logo,

$$\alpha_s \varphi'(\tilde{t}_s) = \alpha_s 2\tilde{t}_s \ \left(1, 3\tilde{t}_s\right).$$

Portanto, segue que $\tilde{v} \in [(1,0)]$, daí temos, $C_4(X,0) \subset [(1,0)]$. Observe que encontramos

$$C_3(X,0) = C_4(X,0),$$

em geral, no caso que $(X,0)$ é um germe de curva, essa igualdade sempre ocorre. Veremos a prova em detalhes na Proposição 2.4.

Antes de tentarmos determinar o cone C_5 para o germe de curva $(X,0)$ do Exemplo 2.1, vamos enunciar e demonstrar algumas proposições importantes sobre os cones de Whitney.

Proposição 2.3. Sejam $(X,0)$ e $(Y,0)$ germes de conjuntos analíticos de $(\mathbb{C}^n,0)$. Então

$$C_l(X,0) \cup C_l(Y,0) = C_l(X \cup Y,0), \quad l = 3,4$$

E, além disso,

$$C_5(X,0) \cup C_5(Y,0) \subsetneq C_5(X \cup Y,0)$$

Demonstração. Para mostrar que vale $C_l(X,0) \cup C_l(Y,0) \subset C_l(X \cup Y,0)$ para $l = 3,4,5$. Note que tomar uma sequência em X é o mesmo que tomar uma sequência em $X \cup Y$, o mesmo vale para sequências em Y.

Para a outra inclusão, considere o caso $l = 3$. Seja $v \in C_3(X \cup Y,0)$ então existem $w_s \to 0$ em $X \cup Y$ e $(\lambda_s)_s$ em $\mathbb{C}$ tais que $\lambda_s w_s \to v$. Como $0 \in X \cup Y$ então podemos extrair uma subsequência $(w_{s_k})_k$ de $(w_s)_s$ tal que ou $(w_{s_k})_k$ está inteiramente em $X - Y$ ou $(w_{s_k})_k$ está inteiramente em $Y - X$. No primeiro caso, temos $w_{s_k} \to 0$ em X e $\lambda_{s_k} w_{s_k} \to v$, isto é, $v \in C_3(X,0)$. Analogamente, ocorre que $v \in C_3(Y,0)$, quando considerando o segundo caso.

Para o caso $l = 4$. Seja $v \in C_4(X \cup Y,0)$ então existem $(w_s)_s$ uma sequência de pontos regulares de $X \cup Y$ e $(v_s)_s$ uma sequência de vetores tais que $v_s \in T_{w_s}(X \cup Y)$, $w_s \to 0$ e $v_s \to v$ quando $s \to \infty$. Com uma análise semelhante a que foi realizado para o cone C_3 considere uma subsequência $(w_{s_k})_k$ de $(w_s)_s$ tal que $(w_{s_k})_k$ está inteiramente contida em $X - Y$, então segue que $w_{s_k} \to 0$, $v_{s_k} \in T_{w_{s_k}}(X \cup Y) = T_{w_{s_k}} X$ e $v_{s_k} \to v$. ∎

Para ilustrar novamente o fato que a inclusão para o cone C_5 realmente é própria, veja os Exemplos 2.2 e 2.3.

Exemplo 2.2. Sejam $(X,0),(Y,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$, onde $X = V(y)$ e $Y = V(y-x^2)$, ou seja, $X \cup Y = V(y^2 - x^2y)$. Temos o seguinte contexto geométrico na Figura 2.3.

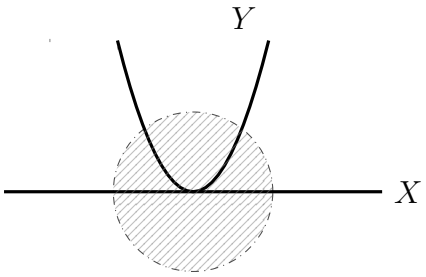


Figura 2.3: Pontos reais do conjunto algébrico $V(y^2 - x^2y)$.

Por serem ramos não singulares, notamos que $C_5(X,0) = C_5(Y,0) = V(y) = X$. Contudo, temos que o vetor $(0,1) \in C_5(X \cup Y,0)$. De fato, tome $\varphi,\psi : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ parametrizações para $(X,0)$ e $(Y,0)$, respectivamente, dadas por, $\varphi(t) = (t,0)$ e $\psi(t) = (t,t^2)$. Agora, tome $(t_s)_s$ uma sequência em $\mathbb{C}$ tal que $(t_s)_s$ não é identicamente nula e $t_s \to 0$ quando $s \to \infty$. Logo, $\varphi(t_s), \psi(t_s) \to 0$ e

$$\lambda_s(\psi(t_s) - \varphi(t_s)) = t_s^{-2}(0,t_s^2) = (0,1),$$

com $\lambda_s = t_s^{-2}$. Posteriormente, no Lema 2.11, veremos que qualquer vetor $v \in \mathbb{C}^2$ é tal que $v \in C_5(X \cup Y,0)$, isto é, $C_5(X \cup Y,0) = \mathbb{C}^2$.

Exemplo 2.3. Sejam $\varphi,\psi : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^3,0)$ germes de parametrizações de curvas irredutíveis, dadas por

$$\varphi(t) = (t^3,t^4,t^5) \quad \text{e} \quad \psi(t) = (t^3,t^4,t^7),$$

então considere $(X,0) = \varphi(\mathbb{C},0)$ e $(Y,0) = \psi(\mathbb{C},0)$. Posteriormente veremos através do processo de parametrizações auxiliares e pelo Teorema 2.14 que $C_5(X,0) = C_5(Y,0) = V(z)$. Contudo, conseguimos verificar que $C_5(X \cup Y,0) \supset V(z) \cup V(y)$. E posteriormente, no Teorema 2.14, mostraremos que fato vale a igualdade,(veja a Figura 2.4).

Proposição 2.4. Seja $(X,0)$ um germe de curva analítica em $(\mathbb{C}^n,0)$. Então $C_3(X,0) = C_4(X,0)$.

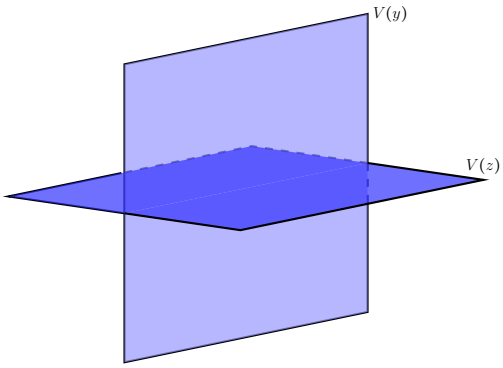


Figura 2.4: Cone C_5 da curva do Exemplo 2.3.

Demonstração. Primeiro faremos o caso em que $(X,0)$ é irredutível. Considere a parametrização de Puiseux $\varphi:(\mathbb{C},0)\to(X,0)$, dada por

$$\varphi(t)=\left(t^m,\sum_{i\geq m}a_{2,i}t^i,\dots,\sum_{i\geq m}a_{n,i}t^i\right).$$

Então,

$$\lim_{t\to 0}\left[t^m:\sum_{i\geq m}a_{2,i}t^i:\dots:\sum_{i\geq m}a_{n,i}t^i\right]=\lim_{t\to 0}\left[1:a_{2,m}+\sum_{i>m}a_{2,i}t^{i-m}:\dots:a_{n,m}+\sum_{i>m}a_{n,i}t^{i-m}\right].$$

Assim,

$$\lim_{t\to 0}\overline{\varphi(t)}=[1:a_{2,m}:\dots:a_{n,m}]=\overline{w}$$

Isto é, temos que $C_3(X,0)=[w]$. Agora, vamos mostrar que $C_4(X,0)=[w]$. Com efeito, temos que

$$\varphi'(t)=\left(mt^{m-1},\sum_{i\geq m}ia_{2,i}t^{i-1},\dots,\sum_{i\geq m}ia_{n,i}t^{i-1}\right).$$

Como se trata da diferencial da parametrização de uma curva irredutível, sabemos que o vetor $\varphi'(t)$ fornece uma única direção, então

$$\begin{aligned}\overline{\varphi'(t)} &= \left[mt^{m-1}:\sum_{i\geq m}ia_{2,i}t^{i-1}:\dots:\sum_{i\geq m}ia_{n,i}t^{i-1}\right]\\ &= \left[1:a_{2,m}+\sum_{i>m}\frac{i}{m}a_{2,i}t^{i-m}:\dots:a_{n,m}+\sum_{i>m}\frac{i}{m}a_{n,i}t^{i-m}\right],\end{aligned}$$

e daí, $\lim_{t\to 0}\overline{\varphi'(t)}=\overline{w}$. Isto, nos diz que tomada qualquer sequência de vetores tangentes convergente $(v_s)_s$, como na Definição 2.1, temos que o limite dela terá a direção de w. Logo, $C_4(X,0)\subset[w]$, e consquêntemente, $C_4(X,0)=[w]$. O caso não irredutível é resolvido usando a Proposição 2.3. ∎

Proposição 2.5. Seja (X,p) um germe de conjunto analítico em $(\mathbb{C}^n,p)$. Para os cones de Whitney verificamos que:

1. Se $p \in \mathrm{Reg}(X)$ então $C_l(X,p) = T_pX$, para todo $l = 1,...,6$.
2. São invariantes por aplicações biholomorfas, isto é, seja f um biholomorfismo e $f'(p)$ é a transformação linear tangente de f, no ponto p então

$$f'(p) : C_l(X,p) \longrightarrow C_l(f(X), f(p)),$$

é uma bijeção, para todo $l = 1,...,6$.

A ideia da prova dos itens 1 e 2 estão apresentadas em [4, pag. 92], onde usa-se fortemente o fato que para toda $A : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ aplicação holomorfa, temos

$$A(z) - A(p) = A'(p)(z-p) + R_A(z-p) \quad \text{com} \quad \lim_{z\to p} \frac{R_A(z-p)}{|z-p|} = 0 \tag{2.1}$$

onde $A'(p) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é a aplicação tangente linear no ponto p.

Proposição 2.6. Seja $(X,0)$ um germe de conjunto analítico em $(\mathbb{C}^n,0)$. Então $C_3(X,0) \subset C_4(X,0) \subset C_5(X,0)$.

Demonstração. Já sabemos que se 0 é um ponto regular então $C_3(X,0) = C_4(X,0) = C_5(X,0) = T_0X$. Considere 0 um ponto singular de X e $v \in C_3(X,0)$. Através da Proposição 8.5 apresentada por Chirka em [4, pag. 86] existe $\hat{X} \subset X$ uma curva analítica irredutível tal que $\{0\} = \hat{X} \cap \mathrm{Sing}(X)$ e $v \in C_3(\hat{X},0)$. Segue da Proposição 2.4 que $v \in C_4(\hat{X},0)$ então existem $(w_s)_s$ uma sequência de pontos regulares de $\hat{X}$ e $(v_s)_s$ uma sequência de vetores tais que $v_s \in T_{w_s}\hat{X}$, $w_s \to 0$ e $v_s \to v$. Como $w_s \in \mathrm{Reg}(\hat{X}) \subset \mathrm{Reg}(X)$ e $v_s \in T_{w_s}\hat{X} \subset T_{w_s}X$, segue que, $v \in C_4(X,0)$.

Seja $v \in C_4(X,0)$ então existem $(w_s)_s$ uma sequência de pontos regulares de X e $(v_s)_s$ uma sequência de vetores tais que $v_s \in T_{w_s}X$, $w_s \to 0$ e $v_s \to v$. Por definição de v_s, temos que para cada $s \in \mathbb{N}$, existem $(w_s^k)_k$ uma sequência de pontos de X e $(\lambda_s^k)_k$ uma sequência de escalares tais que $w_s^k \to w_s$ e $\lambda_s^k(w_s^k - w_s) \to v_s$ quando $k \to \infty$. Logo,

$$\forall s \in \mathbb{N},\ \exists k_s \in \mathbb{N} \text{ tal que para } k \geq k_s \Rightarrow |w_s^k - w_s| < \frac{1}{s} \text{ e } |\lambda_s^k(w_s^k - w_s) - v_s| < \frac{1}{s}$$

em particular,

$$|w_s^{k_s} - w_s| < \frac{1}{s} \text{ e } |\lambda_s^{k_s}(w_s^{k_s} - w_s) - v_s| < \frac{1}{s} \Rightarrow \lim_{s\to\infty} w_s^{k_s} - w_s = 0 \text{ e } \lim_{s\to\infty} \lambda_s^{k_s}(w_s^{k_s} - w_s) - v_s = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to\infty} w_s^{k_s} = 0 \text{ e } \lim_{s\to\infty} \lambda_s^{k_s}(w_s^{k_s} - w_s) = v$$

Ou seja, $v \in C_5(X,0)$. ∎

Exemplo 2.4. Voltando ao Exemplo 2.1, vamos para a determinação do cone C_5 da cúspide. Já sabemos que

$$C_3(X,0) = C_4(X,0) = V(y),$$

então através da Proposição 2.6 verificamos que $V(y) \subset C_5(X,0)$. No entanto, diferente do C_3 e do C_4, agora, conseguimos encontrar uma direção diferente de $\overline{w} = [1:0]$. Com efeito, considere a sequência de escalares $(t_s)_s$ tal que $t_s \to 0$, com $(t_s)_s$ não identicamente nula, então podemos considerar $w_s := \varphi(t_s)$ e $\tilde{w}_s := \varphi(-t_s)$ (lembrando que φ é a parametrização dada no Exemplo 2.1), então escolhendo $\lambda_s = \frac{1}{t_s^3}$, temos

$$\lambda_s(w_s - \tilde{w}_s) = \frac{1}{t_s^3}\left(\left(t_s^2, t_s^3\right) - \left(t_s^2, -t_s^3\right)\right) = \frac{1}{t_s^3}\left(0, 2t_s^3\right) = (0,2),$$

portanto, o vetor $(0,2)$ está contido no cone $C_5(X,0)$ e melhorando a escolha do escalar λ_s conseguimos mostrar que $V(x) = [(0,2)] \subset C_5(X,0)$, como podemos perceber na ilustração geométrica no lado A da Figura 2.5.

Podemos ainda verificar que dado qualquer vetor $v = (a,b) \in \mathbb{C}^2$, então $v \in C_5(X,0)$. Fazemos isso, melhorando a escolha das sequências $(w_s)_s$ e $(\tilde{w}_s)_s$. De fato, sejam $(\alpha_s)_s$ e $(\beta_s)_s$ duas sequências de escalares, definidas por, $\alpha_s = \sqrt{b}t_s + at_s^2$ e $\beta_s = -\sqrt{b}t_s$, lembrando que $t_s \to 0$ em $\mathbb{C}$. Tome agora,

$$\begin{cases} w_s := \varphi(\alpha_s) = (bt_s^2 + 2a\sqrt{b}t_s^3 + a^2t_s^4, \sqrt{b^3}t_s^3 + 3abt_s^4 + 3a^2\sqrt{b}t_s^5 + a^3t_s^6) \\ \tilde{w}_s := \varphi(\beta_s) = (bt_s^2, -\sqrt{b^3}t_s^3) \end{cases}$$

assim, temos que

$$\begin{aligned} w_s - \tilde{w}_s &= (2a\sqrt{b}t_s^3 + a^2t_s^4, 2\sqrt{b^3}t_s^3 + 3abt_s^4 + 3a^2\sqrt{b}t_s^5 + a^3t_s^6) \\ &= t_s^3(2a\sqrt{b} + a^2t_s, 2\sqrt{b^3} + 3ab^2t_s + 3a^2\sqrt{b}t_s^2 + a^3t_s^3) \end{aligned}$$

então escolhendo $\lambda_s = \dfrac{1}{2\sqrt{b}t_s^3}$, segue

$$\lambda_s(w_s - \tilde{w}_s) = \frac{1}{2\sqrt{b}}(2a\sqrt{b} + a^2t_s, 2\sqrt{b^3} + 3abt_s + 3a^2\sqrt{b}t_s^2 + a^3t_s^3) \longrightarrow (a,b),$$

podemos observar a ideia geométrica disse limite no lado B da Figura 2.5. Portanto, o cone $C_5(X,0)$ é o próprio plano $\mathbb{C}^2$.

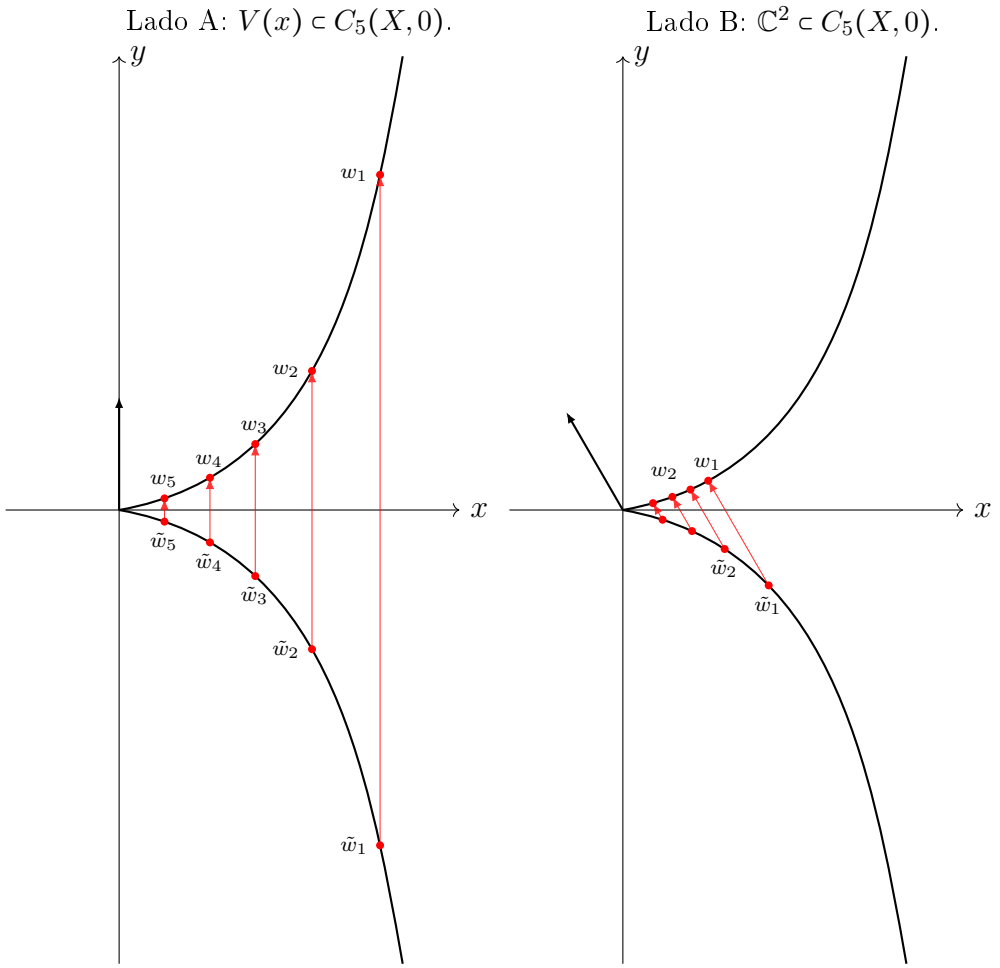


Figura 2.5: Desenvolvimento do cone C_5 da Cúspide

Esse resultado final para o cone $C_5(X,0)$ da cúspide no Exemplo 2.4 é bastante curioso, pois não é fácil perceber, de maneira intuitiva, que é possível obter todas as direções apenas fazendo escolhas de sequências dentro de $(X,0)$. Isto é interessante, pois nos leva a tratar de uma consequência do principal resultado dessa dissertação que será apresentado no Teorema 2.14.

Um outro resultado clássico bastante conhecido dentro da literatura é *Lema da Seleção da Curva*. Este resultado é fundamental quanto a caracterização de conjuntos semi-algébricos. Ele foi enunciado e demonstrado por Milnor em [12, Lemma 3.1], mas surgiram outras versões anteriores a esta nos traballhos de Bruhat e Cartan em [3], e também nos trabalhos de Wallace em [20], veja também [13] para mais detalhes.

Seja $V = V(f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto algébrico, onde $f_1, \dots, f_k$ são polinômios em $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto definido por um número finito de desigualdades polinominais, isto é,

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n; g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0\}, \quad \text{com} \quad g_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n], \ \forall i = 1, \dots, l.$$

Então dizemos que o conjunto $V \cap U$ definido por inequações e equações é um conjunto semi-algébrico.

Lema 2.7 (Lema da Seleção da Curva)**.** Se $V \cap U$ possui pontos arbitrariamente próximos de $p \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $p \in \overline{V \cap U}$. Então existe uma curva real analítica $\gamma : [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(t) \in V \cap U$ para todo $t > 0$ em $\mathbb{R}$.

Uma ideia da prova do Lema 2.7, baseada na prova feita por Milnor, pode ser encontrada em [13].

Agora veremos a prova feita por Whitney de que o cone C_5 de uma variedade analítica em $\mathbb{C}^n$ é um conjunto algébrico de $\mathbb{C}^n$.

Teorema 2.8. *([21, Th. 5.6]). Seja W uma variedade analítica no conjunto aberto $U \subset \mathbb{C}^n$. Então o cone $C_5(W, 0)$ é um conjunto algébrico de $\mathbb{C}^n$.*

Demonstração. Faremos a prova utilizando o método de Whitney em [21, pag. 218]. Pelo Teorema de Chow em [15], é suficiente provar que o cone $C_5(W, 0)$ é um conjunto analítico. Defina as seguintes funções: $\alpha_{j,k} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, com

$$\alpha_{j,k}(x, y, v) := \begin{vmatrix} y_j - x_j & y_k - x_k \\ v_j & v_k \end{vmatrix}, \quad \forall j, k = 1, \dots, n$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$. Temos que uma terna (x, y, v) anula simultaneamente todas as funções $\alpha_{j,k}$ se, e somente se, $x = y$ ou v é um múltiplo de $y - x$. Considere o conjunto

$$B := \{(x, y, v);\ x, y \in U,\ \alpha_{j,k}(x, y, v) = 0\ \forall j, k = 1, \dots, n\}$$

Então B é um conjunto analítico de $U \times U \times \mathbb{C}^n$. Assim, o seguinte conjunto também é

$$B' := B \cap (W \times W \times \mathbb{C}^n)$$

Considere $D := \{(x, x);\ x \in W\} \subset U \times U$ é também um conjunto analítico. Por isso, temos que

$$B'' := \overline{B' - (D \times \mathbb{C}^n)} \cap (U \times U \times \mathbb{C}^n)$$

é um conjunto analítico de $U \times U \times \mathbb{C}^n$. Com isso, vemos que o conjunto

$$C_5'(W) := B'' \cap (\{(0, 0)\} \times \mathbb{C}^n)$$

é um conjunto analítico em $U \times U \times \mathbb{C}^n$. Note que $v \in C_5(W, 0)$ se, e somente se, $(0, 0, v) \in C_5'(W)$. De fato, se $(0, 0, v) \in C_5'(W)$ então $(0, 0, v) \in \overline{B' - (D \times \mathbb{C}^n)}$ e $(0, 0, v) \in D \times \mathbb{C}^n$,

logo, existe $(\Gamma_s)_s := ((x_s, y_s, v_s))_s$ uma sequência de pontos em $B' - (D \times \mathbb{C}^n)$ tal que $\Gamma_s \to (0,0,v)$, daí segue que $x_s, y_s \to 0$ e $v_s \to v$. Além disso, $v_s = \lambda_s(y_s - x_s)$ para todo s, e com isso,

$$\lim_{s\to\infty} \lambda_s(y_s - x_s) = \lim_{s\to\infty} v_s = v$$

e então $v \in C_5(W,0)$. E voltando o argumento mostramos que a recíproca é verdadeira. Portanto, o cone $C_5(W,0)$ é algébrico. ∎

O resultado seguinte é uma consequência da prova que o cone C_5 é algébrico e do Lema da Seleção da Curva.

Lema 2.9. ([11, Prop. 2.4]). Seja W uma variedade analítica no conjunto aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ tal que $\dim(W,0) = m > 0$. Então para qualquer vetor $v \in C_5(W,0)$ não nulo existe uma curva analítica $\mathcal{W} \subset W \times W$ tendo como parametrização $\gamma := (\alpha, \beta) : (\mathbb{C},0) \to (W \times W, (0,0))$ tal que

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)(\beta(t) - \alpha(t)) = v$$

para alguma função $\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, não identicamente nula.

Demonstração. Considere o conjunto analítico B'' definido na demonstração do teorema anterior. Assim, temos que $(0,0,v) \in B''$, ou seja, $(0,0,v) \in \overline{B' - (D \times \mathbb{C}^n)}$. Então pelo Lema 2.7 existe

$$\tilde{\gamma} := (\alpha, \beta, \mathtt{v}) : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, (0,0,v)),$$

tal que, $\alpha(t) \neq \beta(t)$, $\mathtt{v}(t) = \lambda(t)(\beta(t) - \alpha(t))$ e $\tilde{\gamma}(0,0,0) = (0,0,v)$ para alguma função $\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Portanto,

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)(\beta(t) - \alpha(t)) = v \text{ e } \gamma = (\alpha, \beta)$$

∎

Lema 2.10. Seja $(X,0) = (X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)}, 0)$ um germe de curva singular em $(\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $(X^{(i)}, 0)$ é um germe de curva irredutível com multiplicidade $m^{(i)}$, para todo $i = 1, ..., r$. Considerando $\{\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(r)}\}$ um sistema de parametrizações de Puiseux compatível de $(X,0)$. Então para todo $v \in C_5(X,0)$ não nulo, existem germes de funções analíticas $f, g : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ tais que

$$\lim_{s\to 0} \lambda(s)(\varphi^{(i)}(g(s)) - \varphi^{(j)}(f(s))) = v$$

para alguns i e j.

Demonstração. Pelo Lema 2.9, existem α e β curvas analíticas tais que $\alpha(\mathbb{C},0), \beta(\mathbb{C},0) \subset (X,0)$ e

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)(\beta(t)-\alpha(t)) = v$$

daí podemos supor que $\alpha(\mathbb{C},0) \subset (X^{(i)},0)$ e $\beta(\mathbb{C},0) \subset (X^{(j)},0)$(podendo ser $i = j$). Concluímos, então que existem $f, g : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$, tais que $\alpha(s) = \varphi^{(i)}(f(s))$ e $\beta(s) = \varphi^{(j)}(g(s))$. ∎

2.2 Curvas e multiplicidades auxiliares

Nesta seção seremos capazes de apresentar uma série de definições que foram introduzidas por Giles-Flores, Silva e Snoussi em [6]. Lembrando que dado um germe de aplicação analítica finita $f : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^n,0)$, é conhecido que a sua imagem $f(\mathbb{C},0)$ é um conjunto analítico. Além disso, podemos considerar várias estruturas analíticas na imagem de f. Nas próximas definições construímos algumas curvas como imagens de aplicações finitas e vamos considerar uma estrutura reduzida para estas imagens.

Definição 2.2. Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de uma curva tal que $(X,0) = (X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)},0)$, onde $(X^{(i)},0)$ são germes de curvas irredutíveis, definimos os seguintes conjuntos:

- $S(X)$ o conjunto dos índices dos ramos singulares, isto é, $i \in S(X)$ se, e somente se, $(X^{(i)},0)$ é singular.
- $T(X)$ é o conjunto dos pares de índices dos ramos tangentes, isto é, $(i,j) \in T(X)$, com $i < j$, se, e somente se, $(X^{(i)},0)$ é tangente a $(X^{(j)},0)$.
- $NT(X)$ é o conjunto dos pares de índices dos ramos não tangentes, isto é, $(i,j) \in NT(X)$, com $i < j$, quando $(X^{(i)},0)$ não é tangente a $(X^{(j)},0)$.

Exemplo 2.5. Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^3,0)$ um germe de curva irredutível, dada pela parametrização de Puiseux

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^3,0) \\ & t & \longmapsto & (t^4,t^6,t^7) \end{array},$$

Dado $(t_s)_s$ uma sequência de escalares, não identicamente nula, em $\mathbb{C}$ tal que $t_s \to 0$, temos que $\varphi(t_s) \to \varphi(0) = 0$ então segue, pela Proposição 2.1, que $C_3(X,0) = [(1,0,0)]$. Além disso, considerando as sequências $(\varphi(it_s))_s$, $(\varphi(-t_s))_s$ e $(\varphi(-it_s))_s$, onde $i^2 = -1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\lambda_s(\varphi(t_s)-\varphi(it_s)) &= \lambda_s(0,2t_s^6,(1+i)t_s^7) \longrightarrow (0,1,0), \text{para } \lambda_s=(2t_s^6)^{-1}\\
\lambda_s(\varphi(t_s)-\varphi(-t_s)) &= \lambda_s(0,0,2t_s^7) \longrightarrow (0,0,1), \text{para } \lambda_s=(2t_s^7)^{-1}\\
\lambda_s(\varphi(t_s)-\varphi(-it_s)) &= \lambda_s(0,2t_s^6,(1+i)t_s^7) \longrightarrow (0,1,0), \text{para } \lambda_s=(2t_s^6)^{-1}
\end{aligned}$$

Com isso, ainda somos capazes de verificar que os planos $H_1=[(1,0,0),(0,1,0)]=V(z)$ e $H_2=[(1,0,0),(0,0,1)]=V(y)$ estão contidos em $C_5(X,0)$.

Notemos que no processo para encontrar uma nova direção criamos uma nova curva, a determinada por $\varphi(t)-\varphi(\theta t)$, onde $\theta^4=1$ com $\theta\neq 1$, e em seguida, encontramos um vetor que está no cone C_3 desta nova curva. Visando formalizar esse processo introduzimos a seguinte definição:

Definição 2.3. Seja $(X,0)$ um germe de curva irredutível em $(\mathbb{C}^n,0)$, com multiplicidade m. Seja φ uma parametrização de Puiseux de $(X,0)$, então para cada raíz m-ésima da unidade $\theta\in G_m-\{1\}$, vamos definir as seguintes noções:

- A aplicação
$$\begin{array}{rccc}\Phi_\theta: & (\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^n,0)\\ & t & \longmapsto & \varphi(t)-\varphi(\theta t)\end{array},$$
que será chamada de *parametrização característica auxiliar associada* a $(X,0)$. A imagem de Φ_θ é chamada de *curva característica auxiliar associada* a $(X,0)$ e será denotada por $(A_\theta(X),0)$.

- O espaço vetorial H_θ como sendo o espaço vetorial gerado por vetores não nulos de $C_3(X,0)$ e de $C_3(A_\theta(X),0)$.

- A multiplicidade de $A_\theta(X)$ é definida por $m_\theta:=\min_j[\text{ord}(\Phi_{\theta,j}(t))]$, onde
$$\Phi_{\theta,j}(t)=\varphi_j(t)-\varphi_j(\theta t).$$
O conjunto $ChAM(X,0)=\{m\}\cup\{m_\theta;\theta\in G_m-\{1\}\}$, é chamado o conjunto das *multiplicidades características auxiliares* associadas a $(X,0)$.

No capítulo 3, ficará mais evidente o porquê da terminologia utilizada nestas definições. Observe que no caso em que a curva X é irredutível podemos facilmente analisá-la através da Definição 2.3. Contudo, em situações mais gerais lidamos com curvas redutíveis, com dois ou mais ramos irredutíveis, a Definição 2.3 já não é mais suficiente. Neste contexto, as interações entre os ramos podem originar mais direções

diferentes daquelas já determinadas pelo processo em cada ramo da Definição 2.3. Foi observado nos Exemplos 2.2 e 2.3, que a união dos cones C_5 dos ramos irredutíveis pode estar propriamente contida no cone C_5 da curva original. Com isso, usando apenas a Definição 2.3 não somos capazes de encontrar todas as direções contidas no C_5 da curva em questão, como veremos com detalhes no Exemplo 2.6 a seguir.

Exemplo 2.6. Seja $(X,0)$ um germe de curva analítica em $(\mathbb{C}^3,0)$, tal que $(X,0) = (X^{(1)} \cup X^{(2)},0)$ com $(X^{(1)},0),(X^{(2)},0) \subset (\mathbb{C}^3,0)$ germes de curvas irredutíveis, dadas pelas parametrizações

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{(1)}: & (\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (X^{(1)},0) \\ & t & \longmapsto & (t^9,t^6,t^8) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \varphi^{(2)}: & (\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (X^{(2)},0) \\ & t & \longmapsto & (t^{12},t^9,t^{13}) \end{array}$$

Observamos que $\{\varphi^{(1)},\varphi^{(2)}\}$ é sistema de parametrizações de Puiseux compatível com a coordenada especial sendo a segunda e

$$C_3(X^{(1)},0) = C_3(X^{(2)},0) = [(0,1,0)].$$

Analisando cada ramo irredutível (como feito no Exemplo 2.5), temos a seguinte disposição, na Tabela 2.1. Então pela Proposição 2.3 os planos $H_1 = V(z)$ e $H_2 = V(x)$ estão contidos em $C_5(X,0)$. Ademais, considerando $(t_s)_s$ uma sequência de escalares, não identicamente nula, em $\mathbb{C}$ tal que $t_s \to 0$, vamos usar as sequências $(\varphi^{(1)}(t_s^3))_s$ e $(\varphi^{(2)}(\theta^2 t_s^2))_s$, onde $\theta \in G_{18}$(visto que mmc$\{6,9\} = 18$). Note que,

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(t^3) - \varphi^{(2)}(\theta^2 t^2) &= (t^{27},t^{18},t^{24}) - (\theta^{24}t^{24},\theta^{18}t^{18},\theta^{26}t^{26}) \\ &= (t^{27},t^{18},t^{24}) - (\theta^6 t^{24},t^{18},\theta^8 t^{26}) \\ &= (t^{27}-\theta^6 t^{24},0,t^{24}-\theta^8 t^{26}) \end{aligned}$$

E então,

$$\lambda_s(\varphi^{(1)}(t_s^3) - \varphi^{(2)}(\theta^2 t_s^2)) = (t_s^3 - \theta^6, 0, 1-\theta^8 t_s^2) \longrightarrow (-\theta^6,0,1), \quad \text{para} \quad \lambda_s = \frac{1}{t_s^{24}},$$

isto é, como $-\theta^6 \neq 0$ para todo $\theta \in G_{18}$, encontramos uma direção diferente das encontradas anteriormente na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Direções do cone C_5 dos ramos irredutíveis do Exemplo 2.6

l	$C_3(X^{(l)},0)$	$m^{(l)}$	$\theta \in G_{m^{(l)}}$	$C_3(A_\theta(X^{(l)}),0)$
1	$(0,1,0)$	6	$e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{5\pi i}{3}}$	$(0,0,1)$
			$e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$	$(0,0,1)$
			$e^{\frac{3\pi i}{3}}$	$(1,0,0)$
2	$(0,1,0)$	9	$e^{\frac{2k\pi i}{9}}$ com $k=1,2,4,5,7,8$	$(1,0,0)$
			$e^{\frac{2k\pi i}{9}}$ com $k=3,6$	$(0,0,1)$

Tendo isso, introduzimos a definição a seguir que trata justamente do caso de curvas constituídas por r ramos irredutíveis.

Definição 2.4. Seja $(X,0) = (X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)},0)$ um germe de curva analítica, onde $(X^{(i)},0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de uma curva irredutível em $(\mathbb{C}^n,0)$, com multiplicidade $m^{(i)}$ para todo $i = 1,\dots,r$. Considerando um sistema parametrizações de Puiseux compatível $\{\varphi^{(1)},\dots,\varphi^{(r)}\}$ tal que $\varphi^{(i)}(\mathbb{C},0) = (X^{(i)},0)$, para todo $i = 1,\dots,r$. Para cada par de índices (i,j), com $i<j$, considere $m^{(i,j)} = \text{mmc}\{m^{(i)},m^{(j)}\}$ e tome $\theta \in G_{m^{(i,j)}}$. Com isso, definimos os seguintes conceitos:

- A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Phi_\theta^{(i,j)}: & (\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^n,0) \\ & t & \longmapsto & \varphi^{(i)}(t^{q^{(j)}}) - \varphi^{(j)}((\theta t)^{q^{(i)}}) \end{array}$$

  onde $q^{(i)},q^{(j)} \in \mathbb{Z}$ são tais que $m^{(i)}q^{(i)} = m^{(j)}q^{(j)} = m^{(i,j)}$. Chamamos de *parametrização de contato auxiliar associado* a $(X^{(i)},0)$ e $(X^{(j)},0)$ e a imagem de $\Phi_\theta^{(i,j)}$ é chamada de *curva de contato auxiliar associada* ao par (i,j) e será denotado por $(A_\theta^{(i,j)}(X),0)$.

- Sejam $w^{(i)}$, $w^{(j)}$ e $w^{(i,j)}$ vetores não nulos em $C_3(X^{(i)},0)$, $C_3(X^{(j)},0)$ e $C_3(A_\theta^{(i,j)}(X),0)$, respectivamente. Para cada $\theta \in G_{m^{(i,j)}}$ denotamos por $H_\theta^{(i,j)} := [w^{(i)},w^{(j)},w^{(i,j)}]$.

- Para cada $\theta_l \in G_{m^{(i,j)}}$, a multiplicidade de $A_{\theta_l}^{(i,j)}(X)$ é dada por

$$m_{\theta_l}^{(i,j)} = \min_k \left[\text{ord}(\Phi_{\theta_l,k}^{(i,j)}(t))\right],$$

  onde $\Phi_{\theta_l,k}^{(i,j)}(t) = \varphi_k^{(i)}(t^{q^{(j)}}) - \varphi_k^{(j)}((\theta_l t)^{q^{(i)}})$. A sequência ordenada de números inteiros, com possível representação $(m_{\theta_1}^{(i,j)} \le \cdots \le m_{\theta_{m^{(i,j)}}}^{(i,j)}; \theta_l \in G_{m^{(i,j)}})$ é chamada *multiplicidades de contato auxiliares* associadas ao par de índices (i,j) e será denotada por $CoAM(X^{(i)},X^{(j)},0)$.

2.3 O cone C_5 como um conjunto

Nesta seção, vamos mostrar um método para se determinar o feixe de planos do cone C_5, pois iremos deixar claro no Teorema 2.14 que o cone C_5 para curvas analíticas é, na verdade, uma união finita de planos que ao qual cada um deles contém pelo menos uma das retas tangentes da curva.

Observação 2.3. Lançando mão de um vetor qualquer v em $C_5(X,0)$ de uma curva analítica em $(\mathbb{C}^n,0)$, onde $X = X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)}$ com $(X^{(i)},0)$ germe de curva irredutível, temos, pela Definição 2.1, que existem $(w_s)_s, (\tilde{w}_s)_s$ sequências em $(X,0)$ e $(\lambda_s)_s$ uma sequência de escalares em $\mathbb{C}$, tais que

$$v = \lim_{s\to\infty} \lambda_s(w_s - \tilde{w}_s).$$

Dessa definição, extraimos algumas possibilidades para $(w_s)_s$ e $(\tilde{w}_s)_s$, considerando valores de s suficientemente grande:

- As duas sequências pertencem a um único ramo, isto é, existe um $i \in \{1,...,r\}$ tal que $(w_s)_s, (\tilde{w}_s)_s$ são sequência de pontos em $X^{(i)}$.
- As duas sequências estão em diferentes ramos, isto é, existem $i \in \{1,...,r\}$ tais que $(w_s)_s$ é uma sequência de pontos em $X^{(i)}$ e $(\tilde{w}_s)_s$ é uma sequência de pontos em $X^{(j)}$.

Podemos desconsiderar os demais casos, pois se uma das sequências que definem v oscilar infinitamente entre dois, ou mais, ramos, podemos extrair uma subsequência que está em apenas um. Digamos que $(w_s)_s$ tenha infinitos pontos em $X^{(i)}$ e também em $X^{(j)}$, enquanto que $(\tilde{w}_s)_s$ está inteiramente contida em $X^{(i)}$, neste caso, podemos extrair uma subsequência $(w_{s_k})_k$ de $(w_s)_s$ que está inteiramente contida em $X^{(i)}$ e como o limite é único, ainda temos que

$$v = \lim_{k\to\infty} \lambda_s(w_{s_k} - \tilde{w}_{s_k}),$$

daí retornamos ao primeiro caso, pois ambas as subsequências estão inteiramente contidas em $X^{(i)}$, o mesmo podemos fazer se supormos o contrário. Também vale um processo análogo caso as duas sequências não tenham um ramo fixado. Fazendo essas considerações, se torna possível afirmar que a direção do vetor v vem da direção limite de secantes $w_s - \tilde{w}_s$, quando s tende ao infinito, podendo ser $(w_s)_s, (\tilde{w}_s)_s$ estando no mesmo ramo irredutível, ou em dois ramos irredutíveis diferentes.

Antes de darmos uma apresentação para o teorema central que norteia a escrita dessa dissertação, vamos abordar três lemas que são cruciais na demonstração do re-

sultado que foi demonstrado no artigo de Giles-Flores; Silva e Snoussi em [6, Th. 3.2]. O Lema 2.11 traz a forma de determinar o cone C_5 de uma curva irredutível, ou ainda, a contribuição do primeiro caso da Observação 2.3. Já os Lemas 2.12 e 2.13 trazem a maneira de determinar a contribuição de um par de ramos de uma curva não irredutível.

Lema 2.11. Seja $(X,0)$ um germe de uma curva singular irredutível em $(\mathbb{C}^n,0)$ com multiplicidade m. Então

$$C_5(X,0) = \bigcup_{\substack{\theta\in G_m\\ \theta\neq 1}} H_\theta$$

onde cada H_θ é como na Definição 2.3.

Demonstração. Para simplificar vamos escolher uma parametrização primitiva de Puiseux de $(X,0)$, podemos supor que seja da forma:

$$\varphi(t) = \left(t^m, \sum_{i\geq m} a_{2,i}t^i, ..., \sum_{i\geq m} a_{n,i}t^i\right)$$

defina $w := (1, a_{2,m}, ..., a_{n,m})$, onde não necessariamente os valores $a_{j,m}$ são diferentes de zero, para todo $j \in \{2,...,n\}$, então $C_3(X,0) = [w]$. Seja $\theta \in G_m$ com $\theta \neq 1$. Considere o germe da curva auxiliar $(A_\theta(X),0)$ dado como na Definição 2.3, então

$$\Phi_\theta(t) \quad = \quad \left(0, \sum_{i>m} a_{2,i}(1-\theta^i)t^i, ..., \sum_{i>m} a_{2,i}(1-\theta^i)t^i\right)$$

Para cada $j \in \{2,...,n\}$, temos

$$a_{j,m_\theta}(1-\theta^{m_\theta})t^{m_\theta} + \sum_{i>m_\theta} a_{j,i}(1-\theta^i)t^i$$

onde m_θ é a multiplicidade de $A_\theta(X)$ (veja a Definição 2.3), sendo $v_\theta := (0, a_{2,m_\theta}, ..., a_{n,m_\theta})$, onde pelo menos um $a_{j,m_\theta} \neq 0$. Assim $C_3(A_\theta(X),0) = [v_\theta]$. Pela Proposição 2.6 segue que $[w] \subset C_5(X,0)$, além disso, podemos facilmente verificar que $[v_\theta] \subset C_5(X,0)$.

Agora, mostraremos que dado um vetor $v \in C_5(X,0)$ então $v \in H_\theta$ para algum $\theta \in G_m$. Pelo Lema 2.10, existem $f,g : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ germes de funções analíticas, isto é, $f(s), g(s) \in \mathbb{C}\{s\}$, tais que $\varphi(f(s)) \neq \varphi(g(s))$ e

$$v = \lim_{s\to 0} \lambda(s)(\varphi(f(s)) - \varphi(g(s)))$$

para alguma função $\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Sem perda de generalidade, suponha que $\hat{d} := ord(g) \leq ord(f) =: d$ e denote por

$$\ell := \lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{g(s)}$$

Lembramos que precisamos verificar apenas a direção de v que é indicada pela direção do limite de secantes $\overline{\varphi(f(s))-\varphi(g(s))}$, quando $s \to 0$. Para fins de demonstração, denotaremos $\alpha(s) := \overline{\varphi(f(s))-\varphi(g(s))}$. Assim, sendo

$$\alpha(s) = [\alpha_1(s) : \alpha_2(s) : \ldots : \alpha_n(s)]$$

onde,

$$\alpha_1(s) = f(s)^m - g(s)^m \quad \text{e} \quad \alpha_j(s) = \sum_{i \geq m} a_{j,i}(f(s)^i - g(s)^i), \ \forall j = 2, \ldots, n$$

Vamos mostrar que em todos os casos estabelecidos para o valor ℓ teremos que $v \in H_\theta$ para algum $\theta \in G_m - \{1\}$. Observe que dividindo todas coordenadas por $g(s)^m$, obtemos

$$\alpha_1(s) = \frac{f(s)^m}{g(s)^m} - 1 \quad \text{e} \quad \alpha_j(s) = \sum_{i \geq m} a_{j,i}\left(\frac{f(s)^m f(s)^{i-m}}{g(s)^m} - g(s)^{i-m}\right), \ \forall j = 2, \ldots, n$$

então fazendo $s \to 0$, temos que

$$\lim_{s\to 0} \alpha(s) \quad = \quad [\ell^m - 1 : a_{2,m}(\ell^m - 1) : \ldots : a_{n,m}(\ell^m - 1)] \tag{2.2}$$

Fato 2.11.1. *Se $\ell = 1$ então $v \in [w]$.*

Prova. Temos que $ord(f) = ord(g) = d$ e como $f \neq g$, temos $f - g \neq 0$. Então pelo Lema B.2 temos que $\alpha_1(s) = f(s)^m - g(s)^m \neq 0$. Logo, fatorando o termo $\alpha_1(s)$ de $\alpha(s)$, para as coordenadas α_j, com $j = 2, \ldots, n$, segue

$$\begin{aligned} \alpha_j(s) &= \frac{1}{\alpha_1(s)} \sum_{i \geq m} a_{j,i}(f(s)^i - g(s)^i) \\ \alpha_j(s) &= a_{j,m} + \frac{1}{\alpha_1(s)} \sum_{i > m} a_{j,i}(f(s)^i - g(s)^i) \end{aligned}$$

Observando que $1 \in G_i$ para todo $i \geq 1$ inteiro segue, pelo Lema B.3 e sendo $i > m$, que

$$ord(f^i - g^i) = d_1 + (i-1)d > d_1 + (m-1)d = ord(\alpha_1),$$

então

$$\lim_{s\to 0} \alpha(s) = [1 : a_{2,m} : \ldots : a_{n,m}] = [w].$$

Fato 2.11.2. *Se $\ell = 0$ então $v \in [w]$*

Prova. Com efeito, podemos verificar que se $\ell = 0$, então $\hat{d} < d$, e da equação (2.2) segue

que

$$\lim_{s\to 0}\alpha(s) = [-1 : -a_{2,m} : \ldots : -a_{n,m}] = [w]$$

Fato 2.11.3. *Se $\ell \neq 0$ e $\ell^m \neq 1$ então $v \in [w]$.*

Prova. Temos que $\ell^m - 1 \neq 0$ e a partir da equação (2.2) segue que,

$$\lim_{s\to 0}\alpha(s) = [\ell^m - 1 : a_{2,m}(\ell^m - 1) : \ldots : a_{n,m}(\ell^m - 1)] = [1 : a_{2,m} : \ldots : a_{n,m}] = [w]$$

Fato 2.11.4. *Se $\ell^m = 1$ e $\ell \neq 1$, isto é, $\ell = \theta$ para algum $\theta \in G_m - \{1\}$, então:*

- *se $ord(\alpha_1) < dm_\theta$, então $v \in [w]$;*
- *se $ord(\alpha_1) > dm_\theta$, então $v \in [v_\theta]$;*
- *se $ord(\alpha_1) = dm_\theta$, então $v \in [\gamma w + (\theta^{m_\theta} - 1)v_\theta]$, onde $\gamma = \lim_{s\to 0}\dfrac{\alpha_1(s)}{g(s)^{m_\theta}}$.*

Prova. Observamos que $m_\theta = \min\{i; \exists j \in \{2, \ldots, n\}$tal que $a_{j,i}(1-\theta^i) \neq 0\}$, logo, pelo Lema B.3, temos que

$$ord(f^m - g^m) = \begin{cases} d_0 + (i-1)d, & \text{se } \exists\theta \in G_i \\ id, & \text{caso contrário.} \end{cases},$$

onde $d_0 = ord(f - \theta g)$ e $d = ord(f) = ord(g)$. Considerando $i < m_\theta$, como $a_{j,i}(1-\theta^i) = 0$, temos que se $a_{j,i} \neq 0$ então $o(\theta)|i$, então $\theta \in G_i$, logo,

$$ord(f^i - g^i) = d_0 + (i-1)d \geq d_1 + (m-1) = ord(\alpha_1) \ \forall i < m_\theta.$$

Como $\theta^{m_\theta} \neq 1$, segue que, $\theta \notin G_{m_\theta}$, logo, $ord(f^{m_\theta} - g^{m_\theta}) = dm_\theta$. Além disso, considerando $i > m_\theta$, se $a_{j,i}(1-\theta^i) \neq 0$, então $\theta \notin G_i$, então segue que

$$ord(f^i - g^i) = di > dm_\theta.$$

Em resumo, temos

$$(\star)\begin{cases} ord(f^m - g^m) = ord(\alpha_1), & \text{se } i = m \\ ord(f^i - g^i) > ord(\alpha_1), & \text{se } m < i < m_\theta \\ ord(f^{m_\theta} - g^{m_\theta}) = dm_\theta, & \text{se } i = m_\theta \\ ord(f^i - g^i) > dm_\theta, & \text{se } i > m_\theta \end{cases}$$

Assim, supondo que $ord(\alpha_1) < dm_\theta$, através de $(\star)$, segue que

$$ord(f^i - g^i) > ord(\alpha_1), \quad \forall i > m$$

então

$$\lim_{s\to 0}\frac{\alpha_j(s)}{\alpha_1(s)} = a_{j,m} + \lim_{s\to 0}\sum_{i>m} a_{j,i}\frac{f(s)^i - g(s)^i}{\alpha_1(s)} = a_{j,m}, \quad \forall j = 2,\dots,n.$$

Ou seja,

$$\lim_{s\to 0}\alpha(s) = [1 : a_{2,m} : \dots : a_{n,m}] = [w].$$

Agora, supondo que $ord(\alpha_1) > dm_\theta$, temos que

$$\lim_{s\to 0}\frac{\alpha_1(s)}{f(s)^{m_\theta} - g(s)^{m_\theta}} = 0$$

e faremos a seguinte análise nas coordenadas de α:

$$\frac{\alpha_j(s)}{f(s)^{m_\theta} - g(s)^{m_\theta}} = \sum_{m\le i<m_\theta} a_{j,i}\frac{f(s)^i - g(s)^i}{f(s)^{m_\theta} - g(s)^{m_\theta}} + a_{j,m_\theta} + \sum_{i>m_\theta} a_{j,i}\frac{f(s)^i - g(s)^i}{f(s)^{m_\theta} - g(s)^{m_\theta}}$$

e então, por $(\star)$, segue

$$\lim_{s\to 0}\frac{\alpha_j(s)}{f(s)^{m_\theta} - g(s)^{m_\theta}} = a_{j,m_\theta}, \ \ \forall j = 2,\dots,n$$

Logo,

$$\lim_{s\to 0}\alpha(s) = [0 : a_{2,m_\theta} : \dots : a_{n,m_\theta}] = [v_\theta].$$

Suponha que $ord(\alpha_1) = dm_\theta$, assim,

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha_j(s)}{g(s)^{m_\theta}}\\ = \ & a_{j,m}\frac{\alpha_1(s)}{g(s)^{m_\theta}} + \sum_{m<i<m_\theta} a_{j,i}\frac{f(s)^i - g(s)^i}{g(s)^{m_\theta}} + a_{j,m_\theta}\frac{f(s)^{m_\theta} - g(s)^{m_\theta}}{g(s)^{m_\theta}} + \sum_{i>m_\theta} a_{j,i}\frac{f(s)^i - g(s)^i}{g(s)^{m_\theta}}.\end{aligned}$$

Por $(\star)$, temos que,

$$\lim_{s\to 0}\frac{\alpha_1(s)}{g(s)^{m_\theta}} = \gamma \quad \text{e} \quad \lim_{s\to 0}\frac{\alpha_j(s)}{g(s)^{m_\theta}} = \gamma a_{j,m} + (\theta^{m_\theta} - 1)a_{j,m_\theta} \ \ \forall j = 2,\dots,n$$

Portanto,

$$\lim_{s\to 0}\alpha(s) = [\gamma : \gamma a_{2,m} + (\theta^{m_\theta} - 1)a_{2,m_\theta} : \dots : \gamma a_{n,m} + (\theta^{m_\theta} - 1)a_{n,m_\theta}] = \overline{\gamma w + (\theta^{m_\theta} - 1)v_\theta}.$$

Com isto, encerramos a prova do Fato 2.11.4.

Até aqui provamos que o cone $C_5(X, 0)$ está contido na união de todos os planos H_θ, com $\theta \neq 1$. Contudo, ainda precisamos mostrar que dado qualquer $v \in H_\theta$, podemos

escolher $f, g \in \mathbb{C}\{s\}$ satisfazendo as hipóteses do Fato 2.11.4, de modo que

$$v = \gamma w + (\theta^{m_\theta} - 1)v_\theta,$$

ou seja, $v \in C_5(X, 0)$.

Fato 2.11.5. *Dado $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ então existem $f, g \in \mathbb{C}\{s\}$ de modo que*

$$\lim_{s\to 0} \alpha(s) = \gamma w + (\theta^{m_\theta} - 1)v_\theta$$

.

Prova. Com efeito, começamos tomando $f(s) = \theta s + \frac{\gamma}{m\theta^{m-1}} s^{d_0}$ e $g(s) = s$, note que $d = 1$, então precisamos que $m_\theta = ord(f^m - g^m) = d_0 + m - 1$, ou seja, $d_0 = m_\theta - m + 1$, além disso, temos $\theta = \lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{g(s)}$. Logo,

$$\alpha_1(s) = f(s)^m - g(s)^m = \theta^m s^m + \gamma s^{m-1} s^{d_0} + \cdots + \gamma^m s^{md_1} - s^m = \gamma s^{m_\theta} + \cdots + \gamma^m s^{md_0}.$$

Daí,

$$\lim_{s\to 0} \frac{\alpha_1(s)}{g(s)^{m_\theta}} = \lim_{s\to 0} \frac{\alpha_1(s)}{s^{m_\theta}} = \gamma$$

Agora, para cada $j \in \{2, ..., n\}$, como f e g satisfazem as hipóteses do terceiro item do Fato 2.11.4, segue que

$$\lim_{s\to 0} \frac{\alpha_j(s)}{s^{m_\theta}} = \gamma a_{j,m} + (\theta^{m_\theta} - 1)a_{j,m_\theta}.$$

Portanto, o Fato 2.11.5 nos diz que $H_\theta \subset C_5(X, 0)$, para todo $\theta \in G_m - \{1\}$. ∎

Lema 2.12. Sejam $(X^{(1)}, 0)$ e $(X^{(2)}, 0)$ germes de curvas irredutíveis em $(\mathbb{C}^n, 0)$ tangentes, com multiplicidades $m^{(1)}$ e $m^{(2)}$, respectivamente. Considere $(X, 0) = (X^{(1)} \cup X^{(2)}, 0)$. Então

$$C_5(X, 0) = C_5(X^{(1)}, 0) \cup C_5(X^{(2)}, 0) \cup \left(\bigcup_{\theta \in G_{m^{(1,2)}}} H_\theta^{(1,2)} \right)$$

onde cada $H_\theta^{(1,2)}$ é como na Definição 2.4.

Demonstração. Faremos a prova por dupla inclusão de maneira semelhante a feita na prova do Lema 2.11, fazendo algumas adaptações necessárias. Segue da Proposição 2.3 que $C_5(X^{(1)}, 0) \cup C_5(X^{(2)}, 0) \subset C_5(X, 0)$. Como $X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ são tangentes em 0, então $w := w^{(1)} = w^{(2)}$, daí

$$H_\theta^{(1,2)} = [w^{(1)}, w^{(2)}, w_\theta^{(1,2)}] = [w, w_\theta^{(1,2)}].$$

Considere,

$$\varphi^{(1)}(t) = \left(t^{m^{(1)}}, \sum_{i\geq m^{(1)}} a_{2,i}t^i, \dots, \sum_{i\geq m^{(1)}} a_{n,i}t^i\right) \quad \text{e} \quad \varphi^{(2)}(t) = \left(t^{m^{(2)}}, \sum_{i\geq m^{(2)}} b_{2,i}t^i, \dots, \sum_{i\geq m^{(2)}} b_{n,i}t^i\right)$$

as parametrizações de Puiseux de $X^{(1)}$ e $X^{(2)}$, respectivamente. Dessa maneira $\{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}\}$ é sistema compatível para X. Usando a notação da Definição 2.4, vamos pôr $m := m^{(1,2)} = m^{(1)}q^{(1)} = m^{(2)}q^{(2)}$ e para cada $\theta \in G_m$, definimos

$$v_\theta := v_\theta^{(1,2)} = (0, a_{2,m_\theta} - \theta^{m_\theta}b_{2,m_\theta}, \dots, a_{n,m_\theta} - \theta^{m_\theta}b_{n,m_\theta}),$$

onde $m_\theta = \min\{i; \exists j \in \{2, \dots, n\} \text{ tal que } a_{j,i} - \theta^i b_{j,i} \neq 0\}$. Assim, a parametrização de contato auxiliar tem a seguinte forma:

$$\Phi_\theta^{(1,2)}(t) = \varphi^{(1)}(t^{q^{(1)}}) - \varphi^{(2)}(\theta^{q^{(2)}}t^{q^{(2)}}),$$

isto é, com as devidas adaptações nos índices dos coeficientes $a_{j,i}$'s e $b_{j,i}$'s, temos

$$\Phi_\theta^{(1,2)}(t) = \left(0, \sum_{i>m}(a_{2,i} - \theta^i b_{2,i})t^i, \dots, \sum_{i>m}(a_{n,i} - \theta^i b_{n,i})t^i\right).$$

Logo, para cada $j = 2, \dots, n$, tem-se

$$\Phi_{\theta,j}^{(1,2)}(t) = (a_{j,m_\theta} - \theta^{m_\theta}b_{j,m_\theta})t^{m_\theta} + \sum_{i>m_\theta}(a_{j,i} - \theta^i b_{j,i})t^i,$$

donde se obtém,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{m_\theta}}\Phi_\theta^{(1,2)}(t) = (0, a_{2,m_\theta} - \theta^{m_\theta}b_{2,m_\theta}, \dots, a_{n,m_\theta} - \theta^{m_\theta}b_{n,m_\theta})$$

Com isso, segue que $C_3(A_\theta^{(1,2)}(X), 0) = [v_\theta]$. Dessa forma, podemos escolher o $w_\theta^{(1,2)} = v_\theta$, então temos $H_\theta^{(1,2)} = [w, v_\theta]$. Agora, mostraremos que dado $v \in C_5(X, 0)$ teremos que $v \in C_5(X^{(1)}, 0) \cup C_5(X^{(2)}, 0)$ ou $v \in H_\theta^{(1,2)}$ para algum $\theta \in G_m$. Vamos supor que $v \notin C_5(X^{(1)}, 0) \cup C_5(X^{(2)}, 0)$, então através do Lema 2.10, existem $f, g : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes de funções analíticas tais que

$$v = \lim_{s\to 0}\lambda(s)(\varphi^{(1)}(f(s)^{q^{(1)}}) - \varphi^{(2)}(g(s)^{q^{(2)}})),$$

para alguma função $\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Lembrando algumas notações feitas na demonstração

do Lema 2.11, temos

$$\hat{d} := ord(g) \leq ord(f) =: d \quad \text{e} \quad \ell := \lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{g(s)}.$$

Porém, nessa nova situação, vamos definir uma nova aplicação α:

$$\alpha(s) = \overline{\varphi^{(1)}(g(s)^{q^{(1)}}) - \varphi^{(2)}(f(s)^{q^{(2)}})}$$

onde,

$$\alpha_1(s) = g(s)^m - f(s)^m \quad \text{e} \quad \alpha_j(s) = \sum_{i\geq m} a_{j,i}g(s)^i - b_{j,i}f(s)^i, \ \forall j = 2, \dots, n$$

Mostraremos que em todos os casos para ℓ, temos que $v \in H_\theta^{(1,2)}$ para algum $\theta \in G_m$. A prova dos seguintes fatos são bastante análogas às provas feitas nos fatos da demonstração do Lema 2.11.

Fato 2.12.1. *Se $\ell = 0$ então $v \in [w]$*

Prova. Observe,

$$\frac{\alpha_1(s)}{g(s)^m} = 1 - \frac{f(s)^m}{g(s)^m} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha_j(s)}{g(s)^m} = \sum_{i\geq m} a_{j,i}g(s)^{i-m} - b_{j,i}\frac{f(s)^{i-m}f(s)^m}{g(s)^m}, \quad \forall j = 2, \dots, n$$

e então, temos

$$\lim_{s\to 0} \alpha(s) = [1 - \ell^m : a_{2,m} - b_{2,m}\ell^m : \dots : a_{n,m} - b_{n,m}\ell^m] \tag{2.3}$$

Como, $\ell = 0$, temos que

$$\lim_{s\to 0} \alpha(s) = [1 : a_{2,m} : \dots : a_{n,m}] = \overline{w^{(1)}} = \overline{w}$$

Fato 2.12.2. *Se $\ell \neq 0$ e $\ell^m \neq 1$ então $v \in [w]$.*

Prova. Como no Fato anterior temos a equação (2.3), então

$$\lim_{s\to 0} \alpha(s) = \overline{w^{(1)} - \ell^m w^{(2)}} = \overline{(1 - \ell^m)w} = \overline{w}$$

Fato 2.12.3. *Se $\ell^m = 1$, isto é, $\ell = \theta$ para algum $\theta \in G_m$, então:*

- *se $ord(\alpha_1) < dm_\theta$, então $v \in [w]$;*
- *se $ord(\alpha_1) > dm_\theta$, então $v \in [v_\theta]$;*

- *se* $ord(\alpha_1) = dm_\theta$, *então* $v = v_\theta + \gamma w$ *onde* $\gamma = \lim_{s\to 0} \dfrac{\alpha_1(s)}{g(s)^{m_\theta}}$.

Prova. Lembrando que $m_\theta = \min\{i;\ \exists j \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_{j,i} - \theta b_{j,i} \neq 0\}$ e usando o Lema B.3, temos que (Veja o Fato 2.11.4)

$$(\spadesuit)\begin{cases} ord(a_{j,m}g^m - b_{j,m}f^m) = ord(\alpha_1), & \text{se } i = m \\ ord(a_{j,m}g^i - b_{j,m}f^i) > ord(\alpha_1), & \text{se } m < i < m_\theta \\ ord(a_{j,m}g^{m_\theta} - b_{j,m}f^{m_\theta}) = dm_\theta, & \text{se } i = m_\theta \\ ord(a_{j,m}g^i - b_{j,m}f^i) > dm_\theta, & \text{se } i > m_\theta \end{cases}$$

Assim, se $ord(\alpha_1) < dm_\theta$, teremos, através de $(\spadesuit)$, que $ord(a_{j,m}g^i - b_{j,m}f^i) > ord(\alpha_1)$ para todo $i > m$ e sabendo que $a_{j,m} = b_{j,m}$ para todo $j \in \{2, \dots, n\}$, segue

$$\lim_{s\to 0} \frac{\alpha_j(s)}{\alpha_1(s)} = a_{j,m} + \lim_{s\to 0} \sum_{i>m} \frac{a_{j,i}g(s)^i - b_{j,i}f(s)^i}{\alpha_1(s)} = a_{j,m}$$

ou seja,

$$\lim_{s\to 0} \alpha(s) = [w]$$

Agora, se $ord(\alpha_1) > dm_\theta$, teremos através de $(\spadesuit)$, que $ord(a_{j,m}g^i - b_{j,m}f^i) > dm_\theta$ para todo $i > m$ e $i \neq m_\theta$, logo

$$\lim_{s\to 0} \frac{\alpha_1(s)}{g(s)^{m_\theta}} = 0$$

e também

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} \frac{\alpha_j(s)}{g(s)^{m_\theta}} &= \lim_{s\to 0} \sum_{m\leq i<m_\theta} \frac{a_{j,i}g(s)^i - b_{j,i}f(s)^i}{g(s)^{m_\theta}} + \lim_{s\to 0}\left(a_{j,m_\theta} - b_{j,m_\theta}\left(\frac{f(s)}{g(s)}\right)^{m_\theta}\right) \\ &+ \lim_{s\to 0} \sum_{i>m_\theta} \frac{a_{j,i}g(s)^i - b_{j,i}f(s)^i}{g(s)^{m_\theta}} \\ &= a_{j,m_\theta} - \theta^{m_\theta} b_{j,m_\theta} \end{aligned}$$

com isso, conseguimos

$$\lim_{s\to 0} \alpha(s) = [v_\theta]$$

No último caso, se $ord(\alpha_1) = dm_\theta$, com base em $(\spadesuit)$, vamos ter que

$$ord(a_{j,m}g^m - b_{j,m}f^m) = ord(a_{j,m}g^{m_\theta} - b_{j,m}f^{m_\theta}) = dm_\theta$$

Considerando que

$$\gamma := \lim_{s\to 0} \frac{\alpha_1(s)}{g(s)^{m_\theta}}$$

temos que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\frac{\alpha_j(s)}{g(s)^{m_\theta}} &= \lim_{s\to 0} a_{j,m}\frac{\alpha_1(s)}{g(s)^{m_\theta}} + \sum_{m<i<m_\theta}\frac{a_{j,i}g(s)^i - b_{j,i}f(s)^i}{g(s)^{m_\theta}}\\ &+ \lim_{s\to 0}\frac{a_{j,m}g(s)^{m_\theta} - b_{j,m}f(s)^{m_\theta}}{g(s)^{m_\theta}} + \sum_{i>m_\theta}\frac{a_{j,i}g(s)^i - b_{j,i}f(s)^i}{g(s)^{m_\theta}}\\ &= \gamma a_{j,m} + (a_{j,m_\theta} - \theta^{m_\theta}b_{j,m_\theta})\end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{s\to 0}\alpha(s) = [\gamma : \gamma a_{2,m} + (a_{2,m_\theta} - \theta^{m_\theta}b_{2,m_\theta}) : \dots : \gamma a_{n,m} + (a_{n,m_\theta} - \theta^{m_\theta}b_{n,m_\theta})] = \overline{\gamma w + v_\theta}$$

Ainda precisamos mostrar que todos os planos $H_\theta^{(1,2)}$ estão contidos no cone $C_5(X,0)$. Para isso, vamos mostrar no fato a seguir que o vetor $\gamma w + v_\theta \in H_\theta^{(1,2)}$ é um vetor no cone $C_5(X,0)$.

Fato 2.12.4. *Dado $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ existem $f, g \in \mathbb{C}\{s\}$ tais que*

$$\lim_{s\to 0}\alpha(s) = \overline{\gamma w + v_\theta}$$

Prova. Veja a prova do Fato 2.11.5.

Portanto, vale o resultado. ∎

Lema 2.13. Sejam $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$ germes de curvas irredutíveis em $(\mathbb{C}^n,0)$ não tangentes, com multiplicidades $m^{(1)}$ e $m^{(2)}$, respectivamente. Considere $(X,0) = (X^{(1)} \cup X^{(2)},0)$. Então $H^{(1,2)} := H_\theta^{(1,2)}$ para todo $\theta \in G_{m^{(1,2)}}$, sendo cada $H_\theta^{(1,2)}$ como na Definição 2.4, e também

$$C_5(X,0) = C_5(X^{(1)},0) \cup C_5(X^{(2)},0) \cup H^{(1,2)}$$

Demonstração. Pela Proposição 2.3 temos que $C_5(X^{(1)},0)\cup C_5(X^{(2)},0) \subset C_5(X,0)$. Vamos considerar $C_3(X^{(1)}) = [w^{(1)}]$ e $C_3(X^{(2)}) = [w^{(2)}]$, temos que $H_\theta^{(1,2)} = [w^{(1)}, w^{(2)}, w_\theta^{(1,2)}]$, sendo $w_\theta^{(1,2)} \in C_3(A_\theta^{(1,2)}(X),0)$ com $\theta \in G_{m^{(1,2)}}$. Sejam $\varphi^{(1)},\varphi^{(2)} : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^n,0)$ um sistema de parametrizações Puiseux de $(X,0)$, e como $[w^{(1)}] \cap [w^{(2)}] = \{0\}$ segue que $m_\theta^{(1,2)} = m^{(1,2)}$ para todo $\theta \in G_{m^{(1,2)}}$. Considerando

$$\varphi_j^{(1)}(t) = \sum_{i\geq m^{(1)}} a_{j,i}t^i \quad \text{e} \quad \varphi_j^{(2)}(t) = \sum_{i\geq m^{(2)}} b_{j,i}t^i$$

para todo $j = 1,2,\dots,n$. Logo,

$$\frac{\Phi_{\theta,j}^{(1,2)}(t)}{t^{m^{(1,2)}}} = (a_{j,m^{(1)}} - b_{j,m^{(2)}}) + \frac{1}{t^{m^{(1,2)}}}\sum_{i>m^{(1,2)}}(a_{j,i} - \theta^i b_{j,i})t^i \longrightarrow a_{j,m^{(1)}} - b_{j,m^{(2)}}$$

ou seja, $C_3(A_\theta^{(1,2)}(X),0) = [w^{(1)} - w^{(2)}]$. Então, $H_\theta^{(1,2)} = [w^{(1)}, w^{(2)}] = H^{(1,2)}$. Seja $v \in C(X,0)$ tal que $v \notin C_5(X^{(1)},0) \cup C_5(X^{(2)},0)$. Assim, temos que $v \notin C_3(X,0)$ então pelo Lema 2.10, existem $f, g \in \mathbb{C}\{s\}$ funções analíticas tais que

$$\lim_{s\to 0} \lambda(s)(\varphi^{(1)}(g(s)^{q^{(1)}}) - \varphi^{(2)}(f(s)^{q^{(2)}})) = v$$

observe que $ord(f) = ord(g) = d$. Logo,

$$\lim_{s\to 0} \frac{\varphi_j^{(1)}(g(s)^{q^{(1)}}) - \varphi_j^{(2)}(f(s)^{q^{(2)}})}{s^{dm^{(1,2)}}} = \lambda_1 w^{(1)} + \lambda_2 w^{(2)}$$

para alguns $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Agora, tome $\lambda_1 w^{(1)} + \lambda_2 w^{(2)} \in H^{(1,2)}$, então considere $f(s) = (\lambda_2)^{\frac{1}{m^{(1,2)}}} s$ e $g(s) = (\lambda_1)^{\frac{1}{m^{(1,2)}}} s$, então

$$\lim_{s\to 0} \frac{\varphi_j^{(1)}(g(s)^{q^{(1)}}) - \varphi_j^{(2)}(f(s)^{q^{(2)}})}{s^{m^{(1,2)}}} = \lambda_1 w^{(1)} + \lambda_2 w^{(2)}$$

Portanto, vale a segunda parte do lema. ∎

Feito a prova dos Lemas 2.11, 2.12 e 2.13, podemos enunciar o Teorema 2.14. Uma versão deste resultado foi provada na década de 80, inicialmente por Briaçon, Galligo e Granger em [1]. Posteriormente, no ano de 2002, Krasiński apresentou, em [11], uma nova prova, desta vez descrevendo uma caracterização do cone C_5 de uma curva analítica como um conjunto. Além disso, Giles-Flores, Silva e Snoussi-2022 em [6], deram uma contribuição significativa descrevendo um procedimento de como determinar cada plano encontrado no cone C_5 de uma curva analítica. Todas demonstrações declaram o cone C_5 de Whitney para uma curva analítica singular complexa como um conjunto. A principal diferença da prova feita por Giles-Flores, Silva e Snoussi, é que além de evidenciar como é o comportamento do cone C_5, também descreve um procedimento para determinar cada plano em função das parametrizações dos ramos, assim, por consequência, conseguimos uma forma de contá-los. Veremos este último fato em detalhes no Capítulo 4.

Teorema 2.14 (Giles-Flores; Silva e Snoussi 2022)**.** *Seja* $(X,0) = (X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)}, 0)$ *um germe de curva em* $(\mathbb{C}^n, 0)$*, onde* $(X^{(i)}, 0)$ *é um germe irredutível de curva em* $(\mathbb{C}^n, 0)$*. Com as notações da Definição 2.2, temos*

$$C_5(X,0) = \left(\bigcup_{\substack{i\in S(X) \\ \theta \in G_{m^{(i)}} \setminus \{1\}}} H_\theta^{(i)} \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{(i,j)\in T(X) \\ \theta \in G_{m^{(i,j)}}}} H_\theta^{(i,j)} \right) \cup \left(\bigcup_{(i,j)\in NT(X)} H^{(i,j)} \right)$$

onde os $H_\theta^{(i)}$, $H_\theta^{(i,j)}$, $H^{(i,j)}$ *são planos de dimensão 2 contendo ao menos uma das retas*

em $C_3(X,0)$.

Demonstração. Vamos considerar $\{\varphi^{(1)},...,\varphi^{(r)}\}$ um sistema de parametrizações compatível de Puiseux, onde $\varphi^{(i)}:(\mathbb{C},0)\to(X^{(i)},0)$ para cada $i=1,...,r$. Então pelo Lema 2.11, segue que $H_\theta^{(i)}\subset C_5(X,0)$ para todo $i\in S(X)$ e $\theta\in G_{m^{(i)}}-\{1\}$. Temos também, através dos Lemas 2.12 e 2.13, que $H_\theta^{(i,j)}, H^{(k,l)}\subset C_5(X,0)$ para todo par $(i,j)\in T(X)$ e todo par $(k,l)\in NT(X)$. Por outro lado, seja $v\in C_5(X,0)$, então, pelo o que foi comentado v é o limite de secantes oriundas de sequências $(w_s)_s,(\tilde{w}_s)_s$ inteiramente contidas no mesmo ramo $(w_s)_s,(\tilde{w}_s)_s\in X^{(i)}$ ou em dois ramos diferentes $(w_s)_s\in X^{(i)}$ e $(\tilde{w}_s)_s\in X^{(j)}$, tangentes ou não tangentes, em todas as situações já foi provado nos Lemas 2.11, 2.12 e 2.13 que v pertence a um dos planos H. ∎

Observação 2.4. No trabalho de Giles-Flores, Silva e Snoussi em [6] o Teorema 2.14 é denominado de C_5-procedure. O teorema recebe esse nome, pois nele somos capazes de observar a descrição de um procedimento, que segue um roteiro de três etapas para determinar todos os planos do cone C_5 de uma curva singular.

Etapa 1. Para cada $i\in S(X)$ e $\theta\in G_{m^{(i)}}-\{1\}$ encontre $H_\theta^{(i)}$.

Etapa 2. Para cada $(i,j)\in T(X)$, assumindo que $m^{(i,j)}=\text{mmc}\{m^{(i)},m^{(j)}\}$, e $\theta\in G_{m^{(i,j)}}$ encontre $H_\theta^{(i,j)}$.

Etapa 3. Para cada $(i,j)\in NT(X)$ encontre $H^{(i,j)}$.

Podemos ver com mais clareza o emprego destas etapas nas Proposições A.1 e A.2 e também no Exemplo 2.7 a seguir.

Exemplo 2.7. Seja $(X,0)=(X^{(1)}\cup X^{(2)}\cup X^{(3)}\cup X^{(4)})$ um germe de curva em $(\mathbb{C}^3,0)$, onde para cada $i\in\{1,2,3,4\}$, temos que $(X^{(i)},0)$ é dada pela respectiva parametrização, $\varphi^{(i)}:(\mathbb{C},0)\to(X^{(i)},0)$:

$$\varphi^{(1)}(t)=(t^6,t^{11}-t^9,t^{11}+t^9),\quad \varphi^{(2)}(t)=(t^4,t^6,t^9),$$

$$\varphi^{(3)}(t)=(t^4,t^3,t^5)\quad\text{e}\quad \varphi^{(4)}(t)=(t,2t,t)$$

Usando o processo do Teorema 2.14, obtemos que o cone $C_5(X,0)$ é formado por sete planos distintos, como ilustrado na Figura 2.6, onde podemos facilmente encontrar a equação reduzida de cada plano, como descrito na Tabela 2.2, que são:

$$C_5(X,0)=V(y)\cup V(z)\cup V(y+z)\cup V(y-z)\cup V(y+2z)\cup V(y-2z)\cup V(x-z)$$

Tomando o produto dessas sete equações que definem os planos, encontramos que

$$C_5(X,0)=V(xy^5z-y^5z^2-5xy^3z^3+5y^3z^4+4xyz^5-4yz^6)$$

Antes de dar início ao C_5-procedure, devemos classificar cada ramo e também cada par de ramos de $(X,0)$, de acordo com a Definição 2.2. Assim, ficamos com:

$$S(X) = \{1,2,3\};\ T(X) = \{(1,2)\} \text{ e } NT(X) = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

Observamos, também, que o sistema $\{\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\varphi^{(3)},\varphi^{(4)}\}$ já se encontra na forma de um sistema de parametrizações de Puiseux compatível. Alguns detalhes sobre as multiplicidades das curvas e suas parametrizações auxiliares estão apresentados na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Parametrizações Auxiliares e multiplicidades dos ramos de $(X,0)$ do Exemplo 2.7

Etapa 1.

$S(X)$	$\theta \in G_{m^{(i)}}$	Parametrização característica $\Phi_\theta^{(i)}(t)$	$H_\theta^{(i)}$	$m_\theta^{(i)}$
1	$e^{\pi i/3}$	$(0, \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})t^{11} - 2t^9, \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})t^{11} + 2t^9)$	$V(y+z)$	9
	$e^{2\pi i/3}$	$(0, \frac{1}{2}(3+i\sqrt{3})t^{11}, \frac{1}{2}(3+i\sqrt{3})t^{11})$	$V(y-z)$	11
	-1	$(0, 2t^{11} - 2t^9, 2t^{11} + 2t^9)$	$V(y+z)$	9
	$e^{4\pi i/3}$	$(0, \frac{1}{2}(3-i\sqrt{3})t^{11}, \frac{1}{2}(3-i\sqrt{3})t^{11})$	$V(y-z)$	11
	$e^{5\pi i/3}$	$(0, \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})t^{11} - 2t^9, \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})t^{11} + 2t^9)$	$V(y+z)$	9
2	i	$(0, 2t^6, (1-i)t^9)$	$V(z)$	6
	-1	$(0, 0, 2t^9)$	$V(y)$	9
	$-i$	$(0, 2t^6, (1+i)t^9)$	$V(z)$	6
3	$e^{2\pi i/3}$	$(\frac{1}{2}(3-i\sqrt{3})t^4, 0, \frac{1}{2}(3+i\sqrt{3})t^5)$	$V(z)$	4
	$e^{4\pi i/3}$	$(\frac{1}{2}(3+i\sqrt{3})t^4, 0, \frac{1}{2}(3-i\sqrt{3})t^5)$	$V(z)$	4

Etapa 2.

$T(X)$	$\theta \in G_{m^{(i,j)}}$	Parametrização de contato $\Phi_\theta^{(i)}(t)$	$H_\theta^{(i,j)}$	$m_\theta^{(i,j)}$
$(1,2)$	$e^{k\pi i/6},\ k \notin 2\mathbb{Z}+1$	$(0, -2t^{18} + t^{22}, t^{18} + t^{22} - \theta^3 t^{27})$	$V(y+2z)$	18
	$e^{k\pi i/6},\ k \in 2\mathbb{Z}+1$	$(0, t^{22}, t^{18} + t^{22} - \theta^3 t^{27})$	$V(y)$	18

Etapa 3.

$NT(X)$	$\theta \in G_{m^{(i,j)}}$	Parametrização de contato $\Phi_\theta^{(i)}(t)$	$H^{(i,j)}$	$m^{(i,j)}$
$(1,3)$	$\theta \in G_6$	$(t^6 - \theta^2 t^8, t^{11} - t^9 - t^6, t^{11} + t^9 - \theta^4 t^{10})$	$V(z)$	6
$(1,4)$	$\theta \in G_6$	$(0, t^{11} - t^9 - t^6, t^{11} + t^9 - t^6)$	$V(y-2z)$	6
$(2,3)$	$\theta \in G_{12}$	$(t^{12} - \theta^4 t^{16}, t^{18} - t^{12}, t^{27} - \theta^8 t^{20})$	$V(z)$	12
$(2,4)$	$\theta \in G_4$	$(0, t^6 - 2t^4, t^9 - t^4)$	$V(y-2z)$	4
$(3,4)$	$\theta \in G_3$	$(t^4 - t^3, -t^3, t^5 - t^3)$	$V(x-z)$	3

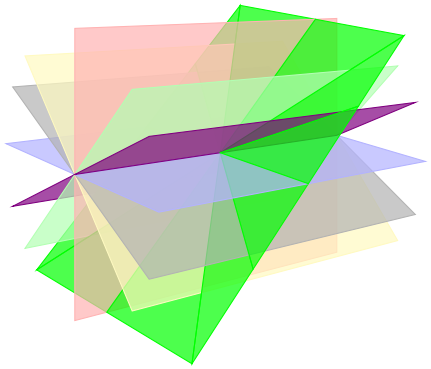


Figura 2.6: Cone C_5 da curva do Exemplo 2.7.

Capítulo 3

Multiplicidades auxiliares como invariantes bi-Lipschitz

O objetivo deste capítulo é mostrar que a coleção de todas as multiplicidades auxiliares associadas ao germe de uma curva $(X,0)$ em $(\mathbb{C}^n,0)$ é um invariante Lipschitz. Mas para isso precisamos compreender primeiro dentro da Seção 3.1 alguns outros invariantes que estão definidos para o caso em que $(X,0)$ é uma curva plana. Ademais, iremos ver na Seção 3.2 uma classe de projeções $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^2$ que preservam o tipo Lipschitz de curvas. E por último, na Seção 3.3, provaremos que o tipo Lipschitz de uma curva determina e é determinado pelo conjunto das multiplicidades auxiliares associados a ela.

3.1 Curvas planas e seus invariantes

Em [14], Pham e Teissier provaram uma série de resultados sobre curvas planas relacionando os expoentes característicos e as multiplicidades de interseção com as multiplicidades auxiliares, embora a noção de multiplicidades auxiliares não apareça em [14] com essa terminologia. Nesta Seção, nosso objetivo será criar um ambiente necessário para desenvolver estas relações mencionadas aqui. Inicialmente, vamos dar uma ideia do que são os expoentes característicos de uma curva plana. Note que dado $(X,0)$ um germe de curva plana reduzida e irredutível com multiplicidade m, através de uma mudança de coordenadas, obtemos uma parametrização de Puiseux da forma:

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

onde,

$$\varphi_1(t) = t^m \quad \text{e} \quad \varphi_2(t) = \sum_{i \geq m} a_i t^i$$

Com isso, introduzimos a seguinte definição:

Definição 3.1 (Expoentes característicos)**.** Seja $(X,0)$ um germe de curva plana irredutível, com multiplicidade m. Sendo $\varphi:(\mathbb{C},0)\to(X,0)$, definida por

$$\varphi(t)=\left(t^m,\sum_{i\geq m}a_it^i\right)$$

uma parametrização de $(X,0)$. Definimos

$\beta_0=m$
$\beta_j=\min\{i;a_i\neq 0 \text{ e } \mathrm{mdc}\{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{j-1}\}>\mathrm{mdc}\{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{j-1},i\}\},\quad$ para $j\geq 1$.

Chamamos o conjunto $m=\beta_0<\beta_1<\cdots<\beta_\rho$ de *expoentes característicos* do germe de curva $(X,0)$ e denotaremos por $E(X,0)=\{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_\rho\}$.

Observe que para cada β_j associamos um número $\Delta_j=\mathrm{mdc}\{m,\beta_1,\dots,\beta_{j-1},i\}=\mathrm{mdc}\{\Delta_{j-1},\beta_j\}$, se $j\geq 1$ e $\Delta_0=m$.

Exemplo 3.1. Vamos considerar a curva plana irredutível $(X,0)\subset\mathbb{C}^2$, definida pela parametrização de Puiseux, dada por $\varphi(t)=(t^4,t^8+t^{10}+t^{12}+t^{13}+t^{15})$. Então, temos que $\beta_0=4$ e verificamos que

$$\begin{cases}\Delta_0=4\\ \Delta_0=\mathrm{mdc}\{4,8\}=4\\ \Delta_1=\mathrm{mdc}\{4,8,10\}=2\\ \Delta_1=\mathrm{mdc}\{4,8,10,12\}=2\\ \Delta_2=\mathrm{mdc}\{4,8,10,12,13\}=1,\end{cases}$$

daí, segue que $\beta_1=10,\ \beta_2=13$. Logo, $E(X,0)=\{4,10,13\}$.

Um outro número muito importante que usaremos neste capítulo mede o quanto duas curvas planas irredutíveis estão se tangenciando. Este número é um invariante topológico denominado multiplicidade de interseção, mais precisamente, temos:

Definição 3.2 (Multiplicidade de interseção)**.** Sejam $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$ dois germes de curvas analíticas irredutíveis, tais que $X^{(1)}=V(f)$ e $X^{(2)}=V(g)$ para alguns $f,g\in\mathbb{C}\{x,y\}$. Suponha que $\varphi(t)=(x(t),y(t))$ é uma parametrização primitiva para $(X^{(2)},0)$. Então

$$i(X^{(1)},X^{(2)},0)=ord_0(f(x(t),y(t)))$$

este número é denominado *multiplicidade de interseção* dos ramos $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$.

Podemos enxergar o teorema seguinte, basicamente, como uma reformulação da proposição feita por Pham e Teissier em [14, prop. VI.3.2].

Teorema 3.1. *Sejam* $(X,0) = (X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)},0)$ *e* $(Y,0) = (Y^{(1)} \cup \cdots \cup Y^{(\tilde{r})},0)$ *a decomposição em ramos irredutíveis de germes de curvas planas. Então* $(X,0)$ *e* $(Y,0)$ *tem o mesmo tipo topológico se, e somente se,* $r = \tilde{r}$ *e existe* $\rho : I_r \to I_r$ *preservando todas as multiplicidades auxiliares, isto é,*

$$ChAM(X^{(i)},0) = ChAM(Y^{(\rho(i))},0) \quad e \quad CoAM(X^{(i)},X^{(j)},0) = CoAM(Y^{(\rho(i))},Y^{(\rho(j))},0)$$

para todo $i \in S(X)$ *e* $(i,j) \in T(X) \cup NT(X)$.

O caso particular para curvas irredutíveis que relaciona multiplicidades característica auxiliares e expoentes característicos será resolvido no lema a seguir.

Lema 3.2. Seja $(X,0)$ um germe de curva plana irredutível. Então o conjunto $ChAM(X,0) = E(X,0)$.

Demonstração. Sejam $m < \beta_1 < \cdots < \beta_\rho$ o conjunto dos expoentes característicos de $(X,0)$, então podemos assumir que $\varphi_1(t) = t^m$ e

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= \sum_{k=1}^{s_0} a_{km}t^{km} + a_{\beta_1}t^{\beta_1} + \sum_{k=1}^{s_1} a_{\beta_1+k\Delta_1}t^{\beta_1+k\Delta_1} + \cdots \\ &\quad \cdots + a_{\beta_j}t^{\beta_j} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{\beta_j+k\Delta_j}t^{\beta_j+k\Delta_j} + \cdots + a_{\beta_\rho}t^{\beta_\rho} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{\beta_\rho+k}t^{\beta_\rho+k}\end{aligned}$$

então para cada $\theta \in G_m$, temos as funções coordenadas da parametrezição característica auxiliar $\varphi_1(t) - \varphi_1(\theta t) = 0$ e

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) - \varphi_2(\theta t) &= a_{\beta_1}(1-\theta^{\beta_1})t^{\beta_1} + \sum_{k=1}^{s_1} a_{\beta_1+k\Delta_1}(1-\theta^{\beta_1+k\Delta_1})t^{\beta_1+k\Delta_1} + \\ &\quad \cdots + a_{\beta_\rho}t^{\beta_\rho} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{\beta_\rho+k}(1-\theta^{\beta_\rho+k})t^{\beta_\rho+k}\end{aligned}$$

Note que

$$\{1\} = G_{\Delta_\rho} \subsetneq G_{\Delta_{\rho-1}} \subsetneq \cdots \subsetneq G_{\Delta_1} \subsetneq G_m$$

e observando que $o(\theta)|\beta_j$ se, e somente se, $o(\theta)|\Delta_j$, teremos

$$\theta \in G_{\Delta_{j-1}} - G_{\Delta_j} \iff ord_0(\varphi_2(t) - \varphi_2(\theta t)) = \beta_j.$$

juntando isso, com o fato que $m_\theta = ord_0(\varphi_2(t) - \varphi_2(\theta t))$, encerramos a demonstração do lema. ∎

A relação feita no Lema 3.2 é o fato que justifica a escolha do nome do conjunto $ChAM(X,0)$. Para o caso não irredutível é suficiente considerar uma curva com dois ramos $(X,0) = (X^{(1)} \cup X^{(2)},0)$. Neste contexto, o tipo topológico de uma curva determina e é determinado pelos expoentes característicos de cada ramo adicionando agora, a multiplicidade de interseção entre eles. O próximo lema está apresentado em detalhes em [14]. Basicamente, ele nos diz que a multiplicidade de interseção pode ser determinada através do conjunto das multiplicidades de contato auxiliares.

Lema 3.3. [14, Lem. VI.3.4]. Considerando $i(X^{(1)},X^{(2)},0)$ a multiplicidade de interseção entres os ramos $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$. Então

$$i(X^{(1)},X^{(2)},0) = \frac{m_{\theta_1}^{(1,2)} + m_{\theta_2}^{(1,2)} + \cdots + m_{\theta_{m^{(1,2)}}}^{(1,2)}}{q^{(1)}q^{(2)}}$$

sendo $m^{(1)}$ e $m^{(2)}$ as multiplicidades de $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$, $m^{(1,2)} = m^{(1)}q^{(1)} = m^{(2)}q^{(2)}$ e $CoAM(X^{(1)},X^{(2)},0) = \{m_{\theta_1}^{(1,2)},\dots,m_{\theta_{m^{(1,2)}}}^{(1,2)}\}$ (Veja a Definição 2.4).

Observação 3.1. Lembrando o Lema 2.13, no contexto em que $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$ não são tangentes, temos que $m_\theta^{(1,2)} = m^{(1,2)}$ para todo $\theta \in G_{m^{(1,2)}}$ logo,

$$i(X^{(1)},X^{(2)},0) = \frac{m^{(1,2)}m^{(1,2)}}{q^{(1)}q^{(2)}} = \frac{m^{(1)}q^{(1)}m^{(2)}q^{(2)}}{q^{(1)}q^{(2)}} = m^{(1)}m^{(2)}$$

Neste ponto, para sermos capazes de demonstrar o Teorema 3.1, temos que provar que as multiplicidades características auxiliares e as multiplicidades de contato auxiliares são invariantes topológicos. Já sabemos, através do Lema 3.2, que o conjunto $ChAM(X^{(i)},0)$ das multiplicidades características auxiliares corresponde ao conjunto $E(X^{(i)},0)$ dos expoentes característicos de cada ramo de $(X,0)$.

Assim, é essencial para nosso estudo estabelecer que o conjunto das multiplicidades de contato auxiliares é um invariante topológico. Sejam

$$\varphi^{(1)}(t) = \left(t^{m^{(1)}}, \sum_{i \geq m^{(1)}} a_i t^i\right) \quad \text{e} \quad \varphi^{(2)}(t) = \left(t^{m^{(2)}}, \sum_{i \geq m^{(2)}} b_i t^i\right),$$

um sistema de parametrizações compatível de Puiseux de $(X,0)$. Lembrando que

$$m_\theta^{(1,2)} = ord_0(\varphi_2^{(1)}(t^{q^{(1)}}) - \varphi_2^{(2)}(\theta^{q^{(2)}}t^{q^{(2)}})).$$

Observe que sobre esta parametrização dos ramos a sequência dos expoentes característico de $(X^{(1)},0)$ é multiplicada por $q^{(1)}$ e também a sequência dos expoentes característicos de $(X^{(2)},0)$ é multiplicada por $q^{(2)}$. Com isso, vamos considerar estas novas

sequências que coincidem até um certo número $\tau \geq 0$. Ou seja, se tomamos

$$\begin{cases} m^{(1)} < \alpha_1 < \cdots < \alpha_s \\ m^{(2)} < \gamma_1 < \cdots < \gamma_r \end{cases}$$

as sequências de expoentes característicos de $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$, respectivamente, então teremos

$$\beta_1 := q^{(1)}\alpha_1 = q^{(2)}\gamma_1;\ \beta_2 := q^{(1)}\alpha_2 = q^{(2)}\gamma_2;\ \cdots;\ \beta_\tau := q^{(1)}\alpha_\tau = q^{(2)}\gamma_\tau.$$

com, $\beta_1 < \cdots < \beta_\tau$. Por último, vamos pôr $\delta := \max\{m_\theta^{(1,2)}; \theta \in G_{m^{(1,2)}}\}$. E, assim, afirmamos:

Lema 3.4. ([14, Lem. VI.3.5]). Existe um número inteiro q determinado pela multiplicidade de interseção dos ramos e pelos expoentes característicos dos ramos $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$ tal que $0 \leq q \leq \tau$ e

- $CoAM(X^{(1)},X^{(2)},0) = \{\beta_1,\ldots,\beta_q,\delta\}$ e no caso $q = 0$, temos $CoAM(X^{(1)},X^{(2)},0) = \{\delta\}$.
- Além disso, pondo $\hat{\Delta}_0 = m^{(1,2)}$ e para cada $j \in \{1,\ldots,\tau\}$ tome $\hat{\Delta}_j = \mathrm{mdc}\{\hat{\Delta}_{j-1},\beta_j\}$, então o número de raízes da unidade θ em $G_{m^{(1,2)}}$ tal que $m_\theta^{(1,2)} = \beta_k$ é igual a $\hat{\Delta}_{k-1} - \hat{\Delta}_k$, e o número de θ's em $G_{m^{(1,2)}}$ tais que $m_\theta^{(1,2)} = \delta$ é igual a $\hat{\Delta}_q$.

Em outras palavras o que o Lema 3.4 está descrevendo é a forma que a sequência ordenada de multiplicidades auxiliares assume, como podemos notar na seguinte disposição:

$$\underbrace{\beta_1 = \cdots = \beta_1}_{\hat{\Delta}_0-\hat{\Delta}_1\ vezes} < \underbrace{\beta_2 = \cdots = \beta_2}_{\hat{\Delta}_1-\hat{\Delta}_2\ vezes} < \cdots < \underbrace{\beta_q = \cdots = \beta_q}_{\hat{\Delta}_{q-1}-\hat{\Delta}_q\ vezes} < \underbrace{\delta = \cdots = \delta}_{\hat{\Delta}_q\ vezes}.$$

Esta observação é bastante útil quando levamos a um exemplo prático.

Exemplo 3.2. Seja $(X,0) = (X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup X^{(3)} \cup X^{(4)},0)$ um germe de curva plana parametrizada por

$$\varphi^{(1)}(t) = (t^{12}, t^{18} + t^{33} + t^{34})\ \varphi^{(2)}(t) = (t^8, t^{12} + t^{20} + 2t^{22} + t^{23})$$

$$\varphi^{(3)}(t) = (t, 2t) \quad \text{e} \quad \varphi^{(4)} = (t^3, t^2)$$

Temos então que $T(X) = \{(1,2)\}$ e $NT(X) = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$. Calcularemos as multiplicidades de interseção. Note que $m^{(1,2)} = 24$, ou seja, $q^{(1)} = 2$ e $q^{(2)} = 3$. Encontramos que

$$E(X^{(1)},0) = \{12,18,33,34\} \quad \text{e} \quad E(X^{(2)},0) = \{8,12,22,23\}$$

então,

$$2\cdot E(X^{(1)},0)=\{24,36,66,68\}\quad\text{e}\quad 3\cdot E(X^{(2)},0)=\{24,36,66,69\}$$

logo, os expoentes que coincidem são $\beta_0=24$, $\beta_1=36$ e $\beta_2=66$, isto é, $\tau=2$. Note também que os ramos irredutíveis gerados pelas parametrizações são tangentes em 0. Logo, temos para cada $\theta\in G_{24}$ a seguinte parametrização de contato auxiliar:

$$\varphi^{(1)}(t^2)-\varphi^{(2)}(\theta^3t^3)=(0,(1-\theta^{12})t^{36}-\theta^{12}t^{60}+(1-2\theta^{18})t^{66}+t^{68}-\theta^{21}t^{69})$$

daí, segue $CoAM(X,0)=\{36,60\}$, pois observando que $\theta\in G_{24}-G_{12}$ se, e somente se, $1-\theta^{12}\neq 0$, então temos $\max\{m_\theta^{(1,2)};\theta\in G_{24}\}=60$ e $q=1$. Com isso, pelo Lema 3.4, temos a seguinte sequência de ordenada de multiplicidade de contado auxiliar:

$$\underbrace{36=\cdots=36}_{24-12\ vezes}<\underbrace{60=\cdots=60}_{12\ vezes}$$

Portanto,

$$i(X^{(1)},X^{(2)},0)=\frac{(\hat{\Delta}_0-\hat{\Delta}_1)\cdot\beta_1+\hat{\Delta}_1\cdot\delta}{q^{(1)}\cdot q^{(2)}}=\frac{12\cdot 36+12\cdot 60}{2\cdot 3}=192.$$

Além disso, pela Observação 3.1, segue que

$$\begin{cases} i(X^{(1)},X^{(2)},0)=192\\ i(X^{(1)},X^{(3)},0)=12;\\ i(X^{(1)},X^{(4)},0)=24;\\ i(X^{(2)},X^{(3)},0)=8;\\ i(X^{(2)},X^{(4)},0)=16;\\ i(X^{(3)},X^{(4)},0)=2. \end{cases}$$

Agora, somos capazes de demonstrar o Teorema 3.1.

Demonstração. (do Teorema 3.1). Considere as curvas planas $(X,0)=(X^{(1)}\cup\cdots\cup X^{(r)},0)$ e $(Y,0)=(Y^{(1)}\cup\cdots\cup Y^{(\tilde{r})},0)$ então suponha que $r=\tilde{r}$ e que existe uma bijeção $\rho:I_r\to I_r$ tal que

$$ChAM(X^{(i)},0)=ChAM(Y^{(\rho(i))},0)\quad\text{e}\quad CoAM(X^{(i)},X^{(j)},0)=CoAM(Y^{(\rho(i))},Y^{(\rho(j))},0)$$

para todo $i\in I_r$ e $(i,j)\in T(X)\cup NT(X)$, então pelos Lemas 3.2 e 3.4, ρ também preserva os expoentes característicos e as multiplicidades de interseção, ou seja, $(X,0)$ e $(Y,0)$ tem o mesmo tipo topológico.

Reciprocamente, se $(X,0)$ e $(Y,0)$ tem o mesmo tipo topológico então $r=\tilde{r}$ e existe

$\rho : I_r \to I_r$ tal que

$$E(X^{(i)},0) = E(Y^{(\rho(i))},0) \quad \text{e} \quad i(X^{(i)},X^{(j)},0) = i(Y^{(\rho(i))},Y^{(\rho(j))},0)$$

para todo $i \in I_r$ e $(i,j) \in T(X) \cup NT(X)$. Logo, é suficiente considerar o caso em que $r = 2$, isto é, $(X,0) = (X^{(1)} \cup X^{(2)},0)$ e $(Y,0) = (Y^{(1)} \cup Y^{(2)},0)$. Sejam $\{\varphi^{(1)},\varphi^{(2)}\}$ e $\{\psi^{(1)},\psi^{(2)}\}$ sistemas de parametrizações compatíveis de Puiseux de $(X,0)$ e $(Y,0)$, respectivamente. Sejam $m_\theta^{(1,2)}$ e $\mathbf{m}_\eta^{(1,2)}$ as multiplicidades de contato auxiliar de $(X,0)$ e $(Y,0)$, respectivamente, com $\theta \in G_{m^{(1,2)}}$ e $\eta \in G_{\mathbf{m}^{(1,2)}}$. Como $(X,0)$ e $(Y,0)$ são curvas planas temos que

$$\begin{aligned} m_\theta^{(1,2)} &= ord_0(\varphi_2^{(1)}(t^{q^{(1)}}) - \varphi_2^{(2)}(\theta^{q^{(2)}}t^{q^{(2)}})) \\ \mathbf{m}_\eta^{(1,2)} &= ord_0(\psi_2^{(1)}(t^{\mathbf{q}^{(1)}}) - \psi_2^{(2)}(\eta^{\mathbf{q}^{(2)}}t^{\mathbf{q}^{(2)}})). \end{aligned}$$

Considere,

$$\begin{aligned} E(X^{(1)},0) &= \{m^{(1)},\alpha_1,\dots,\alpha_{s_1}\} \quad \text{e} \quad E(X^{(2)},0) = \{m^{(2)},\gamma_1,\dots,\gamma_{s_2}\} \\ E(Y^{(1)},0) &= \{\mathbf{m}^{(1)},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{\hat{s}_1}\} \quad \text{e} \quad E(Y^{(2)},0) = \{\mathbf{m}^{(2)},\zeta_1,\dots,\zeta_{\hat{s}_2}\}, \end{aligned}$$

Vamos assumir que ocorrem as seguintes coincidências:

$$\beta_1 := q^{(1)}\alpha_1 = q^{(2)}\gamma_1; \quad \beta_2 := q^{(1)}\alpha_2 = q^{(2)}\gamma_2; \quad \cdots; \quad \beta_\tau := q^{(1)}\alpha_\tau = q^{(2)}\gamma_\tau$$

e, respectivamente,

$$\sigma_1 := \mathbf{q}^{(1)}\varepsilon_1 = \mathbf{q}^{(2)}\zeta_1; \quad \sigma_2 := \mathbf{q}^{(1)}\varepsilon_2 = \mathbf{q}^{(2)}\zeta_2; \quad \cdots; \quad \sigma_{\hat{\tau}} := \mathbf{q}^{(1)}\varepsilon_{\hat{\tau}} = \mathbf{q}^{(2)}\zeta_{\hat{\tau}},$$

para alguns $\tau,\hat{\tau} \geq 0$. Através do Lema 3.2, segue que $ChAM(X^{(i)},0) = ChAM(Y^{(i)},0)$, para $i = 1,2$. Assim, é fácil concluir que $m^{(i)} = \mathbf{m}^{(i)}$, o que força $q^{(i)} = \mathbf{q}^{(i)}$, então $\tau = \hat{\tau}$ e $\beta_j = \sigma_j$ para todo $0 \leq j \leq \tau$. Pelo Lema 3.4, temos que existem $q,\hat{q} \geq 0$ números inteiros tais que $CoAM(X^{(1)},X^{(2)},0) = \{\beta_1,\dots,\beta_q,\delta\}$ e, respectivamente, $CoAM(Y^{(1)},Y^{(2)},0) = \{\sigma_1,\dots,\sigma_{\hat{q}},\hat{\delta}\}$. Novamente, pelo Lema 3.4, q e $\hat{q}$ são determinados pelas multiplicidades de interseção e pelos expoentes característicos, o que implica $q = \hat{q}$. Lembrando que $\delta = \max\{m_\theta^{(1,2)};\theta \in G_{m^{(1,2)}}\}$ e $\hat{\delta} = \max\{\mathbf{m}_\eta^{(1,2)};\eta \in G_{\mathbf{m}^{(1,2)}}\}$. Portanto, utilizando o Lema 3.3, segue que $\delta = \hat{\delta}$, o que encerra a demonstração. ∎

Uma observação a ser feita nesta etapa do nosso estudo é que o Teorema 3.1, nos diz que dada uma curva plana analítica as multiplicidades características auxiliares não dependem da escolha das parametrizações dos ramos da curva.

3.2 Projeções genéricas de curvas espaciais em $\mathbb{C}^2$

Nesta seção, definiremos um tipo bastante importante de projeção $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^2$, que denominaremos de projeções genéricas, pois elas têm uma propriedade de conservar as multiplicidades auxiliares das curvas espaciais singulares. Este conceito será muito importante pois através destas projeções seremos capazes de verificar multiplicidades auxiliares são invariantes bi-Lipschitz. Mais precisamente, temos:

Definição 3.3. Seja $(X,0)$ um germe de curva em $(\mathbb{C}^n,0)$. Seja $\pi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ uma projeção linear. Dizemos que a projeção π é C_5-*genérica* se o núcleo de π intersecta transversalmente o cone C_5 da curva $(X,0)$, ou seja, $\ker(\pi) \cap C_5(X,0) = \{0\}$, veja como ocorre esse fenômeno em um exemplo em $\mathbb{C}^3$ na Figura 3.1. Quando π é C_5-genérica denotaremos por $(\tilde{X},0)$ o conjunto $\pi(X,0)$.

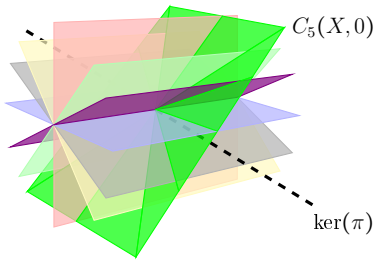


Figura 3.1: Interseção do $\ker(\pi)$ com $C_5(X,0)$, sendo π genérica.

Exemplo 3.3. Considere $(X,0)$ um germe de curva irredutível em $(\mathbb{C}^3,0)$, definida pela parametrização de Puiseux $\varphi : (\mathbb{C},0) \to (X,0)$, $\varphi(t) = (t^4, t^6, t^7)$. Então temos que $C_5(X,0) = V(y) \cup V(z)$. Considere $\pi_1, \pi_2 : (\mathbb{C}^3,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ projeções lineares, definidas por $\pi_1(x,y,z) = (x, y+z)$ e $\pi_2(x,y,z) = (x, 3z)$, respectivamente. Verificamos que $\ker(\pi_1) = V(x) \cap V(y+z)$ e $\ker(\pi_2) = V(x) \cap V(z)$, então temos que $C_5(X,0) \cap \ker(\pi_1) = \{0\}$ e $C_5(X,0) \cap \ker(\pi_2) = V(x) \cap V(z)$, ou seja, π_1 é C_5-genérica em relação a $(X,0)$ mas π_2 não é C_5-genérica em relação a $(X,0)$, veja a Figura 3.2. Além disso, observamos que $\pi_1 \circ \varphi(t) = (t^4, t^6 + t^7)$ e $\pi_2 \circ \varphi(t) = (t^4, 3t^7)$, e daí notamos que π_1 preserva as multiplicidades de X enquanto π_2 não preserva.

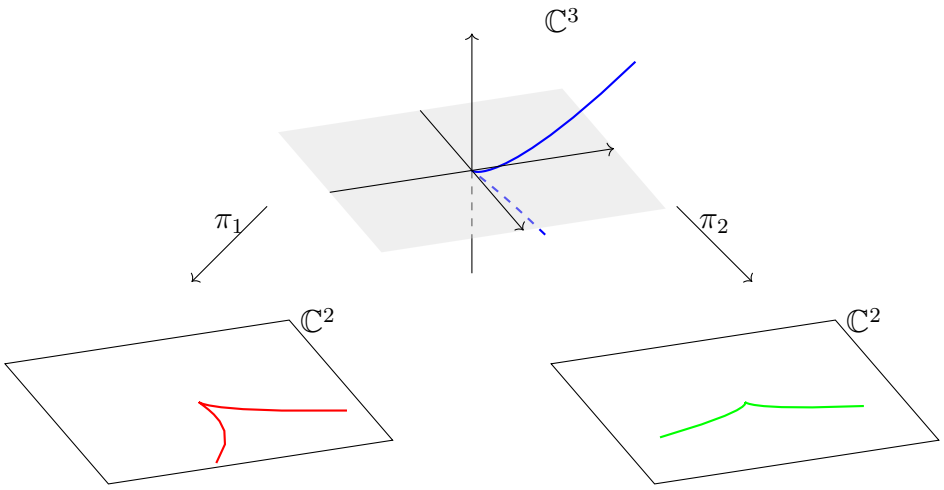


Figura 3.2: Projeções de uma curva em $\mathbb{C}^3$ para o plano $\mathbb{C}^2$.

Observação 3.2. Note que no Exemplo 3.3, podemos escolher qualquer projeção $\pi : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, dada por $\pi(x, y, z) = (x, \lambda_2 y + \lambda_3 z)$, pois o plano $V(x)$ não está contido no cone $C_5(X, 0)$, assim basta escolher valores de λ_2, λ_3 de modo que a $V(x) \cap V(\lambda_2 y + \lambda_3 z)$ não esteja contido no cone $C_5(X, 0)$. De maneira geral, a projeção $\pi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, dada por $\pi(x_1, ..., x_n) = (x_1, \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n)$ poderá ser escolhida como possível projeção C_5-genérica em relação a $(X, 0)$ sempre que o hiperplano $V(x_1)$ não estiver contido no cone $C_5(X, 0)$.

Na proposição seguinte vamos mostrar que uma projeção linear será C_5-genérica em relação a uma curva espacial $(X, 0)$ quando ela preserva as multiplicidades características auxiliares e as multiplicidade de contato auxiliar de $(X, 0)$.

Proposição 3.5. Seja $(X, 0)$ um germe de curva em $(\mathbb{C}^n, 0)$ e $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^2$ uma projeção linear. Então π é C_5-genérica se, e somente se,

$$ChAM(X^{(i)}, 0) = ChAM(\pi(X^{(i)}), 0) \text{ e } CoAM(X^{(i)}, X^{(j)}, 0) = CoAM(\pi(X^{(i)}), \pi(X^{(j)}), 0)$$

para todo $i \in S(X)$ e $(i, j) \in T(X) \cup NT(X)$.

Demonstração. considerando a Observação 3.2, tome $\pi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ uma projeção linear, definida por,

$$\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n)$$

então, $\ker(\pi) \subset V(x_1)$ então, para valores genéricos $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ a projeção π é C_5-genérica em relação a $(X, 0)$. Vamos começar supondo que $(X, 0)$ é irredutível. Pondo φ uma

parametrização de Puiseux de $(X,0)$, definida por,

$$\varphi(t) = \left(t^m, \sum_{i\geq m} a_{2,i}t^i, \dots, \sum_{i\geq m} a_{n,i}t^i\right)$$

Então para cada $\theta \in G_m - \{1\}$, temos a seguinte parametrização auxiliar:

$$\Phi_\theta(t) = (\Phi_{\theta,1}(t), \dots, \Phi_{\theta,n}(t))$$

com,

$$\Phi_{\theta,1}(t) = 0 \text{ e } \Phi_{\theta,j}(t) = a_{j,m_\theta}(1-\theta^{m_\theta})t^{m_\theta} + \sum_{i>m_\theta} a_{j,i}(1-\theta^i)t^i, \quad \forall j = 2,\dots,n$$

lembrando que $m_\theta = \min\{i; \exists j = 2,\dots,n \text{ tal que } a_{j,i}(1-\theta^i) \neq 0\}$. Logo, π é C_5-genérica em relação a $(X,0)$, para valores $\lambda_2,\dots,\lambda_n$ genéricos. Definindo $\tilde{\varphi} := \pi \circ \varphi$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(t) &= \left(t^m, \lambda_2 \sum_{i\geq m} a_{2,i}t^i + \cdots + \lambda_n \sum_{i\geq m} a_{n,i}t^i\right)\\ &= \left(t^m, \sum_{i\geq m}(\lambda_2 a_{2,i} + \cdots + \lambda_n a_{n,i})t^i\right),\end{aligned}$$

ou seja, $(\tilde{X},0) = (\pi\circ\varphi)(\mathbb{C},0)$. Podemos então determinar para cada $\theta \in G_m - \{1\}$, a parametrização característica auxiliar de $(\tilde{X},0)$ e como $a_{j,m_\theta}(1-\theta^{m_\theta}) \neq 0$ para algum $j = 2,\dots,n$ e também que

$$a_{j,i}(1-\theta^i) = 0$$

para todo $j = 2,\dots,n$ e $m \leq i < m_\theta$, daí

$$\tilde{\Phi}_\theta(t) = \left(0, (\lambda_2 a_{2,m_\theta} + \cdots + \lambda_n a_{n,m_\theta})(1-\theta^{m_\theta})t^{m_\theta} + \sum_{i>m_\theta}(\lambda_2 a_{2,i} + \cdots + \lambda_n a_{n,i})(1-\theta^i)t^i\right),$$

note que se fosse $\lambda_2 a_{2,m_\theta} + \cdots + \lambda_n a_{n,m_\theta} = 0$, e lembrando que $v_\theta = (0, a_{2,m_\theta}, \dots, a_{n,m_\theta})$, teríamos que $v_\theta \in \ker(\pi)$, o que é uma contradição pois, $v_\theta \in C_5(X,0)$. Logo,

$$\lambda_2 a_{2,m_\theta} + \cdots + \lambda_n a_{n,m_\theta} \neq 0$$

Portanto, para cada $\theta \in G_m - \{1\}$, temos que m_θ é a multiplicidade de $\tilde{\Phi}_\theta$, ou seja, $ChAM(X,0) = ChAM(\pi(X),0)$.

Agora, para o caso não irredutível, basta consideramos o caso que $(X,0)$ tem dois ramos, ou seja, $(X,0) = (X^{(1)},0) \cup (X^{(2)},0)$. Sendo $\{\varphi^{(1)},\varphi^{(2)}\}$ um sistema de parame-

trização compatível de Puiseux de $(X,0)$, definimos como no caso anterior

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_\theta^{(1,2)}(t) &= \tilde{\varphi}^{(1)}(t^{q^{(1)}}) - \tilde{\varphi}^{(2)}(\theta^{q^{(2)}} t^{q^{(2)}}) \\ &= \pi\circ\varphi^{(1)}(t^{q^{(1)}}) - \pi\circ\varphi^{(2)}(\theta^{q^{(2)}} t^{q^{(2)}}) \\ \pi\circ\Phi_\theta^{(1,2)}(t) &= \pi\left(\varphi^{(1)}(t^{q^{(1)}}) - \varphi^{(2)}(\theta^{q^{(2)}} t^{q^{(2)}})\right)\end{aligned}$$

Assim, temos duas situações: quando $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$ são não tangentes e quando $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$ são tangentes. Na primeira situação, temos que a multiplicidade de $\Phi_\theta^{(1,2)}$ é $m^{(1,2)}$ para todo $\theta \in G_{m^{(1,2)}}$, isto é,

$$CoAM(X^{(1)}, X^{(2)}, 0) = \{m^{(1,2)}\}$$

então por um processo semelhante ao processo feito no caso irredutível segue que

$$CoAM(\pi(X^{(1)}), \pi(X^{(2)}), 0) = \{m^{(1,2)}\}.$$

Na segunda situação a prova que $CoAM(X^{(1)}, X^{(2)}, 0) = CoAM(\pi(X^{(1)}), \pi(X^{(2)}), 0)$ é similar ao caso irredutível.

Para a prova da recíproca deste resultado veja [6, prop. 4.10]. ∎

Visto que toda projeção C_5-genérica de um germe de curva tem o mesmo tipo topológico (veja [7, prop. 8.4.6]) então pela Proposição 3.5, temos que as multiplicidades características auxiliares e as multiplicidades de contato auxiliar não dependem da escolha do sistema compatível de parametrizações de Puiseux.

3.3 Curvas bi-Lipschitz equivalentes

Nesta parte do nosso estudo, vamos tratar da noção da bi-Lipschitz equivalência entre curvas. Deixamos claro também que consideraremos apenas a métrica externa, isto é, vamos considerar apenas a métrica induzida pela métrica do ambiente em que a curva está mergulhada.

Dizemos que dois germes de curvas $(X,0)$ e $(Y,0)$ são bi-Lipschitz equivalentes se existe um germe de homeomorfirmo bi-Lipschitz $h:(X,0)\to(Y,0)$. Como consequência direta dos últimos resultados, provaremos que as multiplicidades auxiliares, ou seja, os conjuntos $ChAM(X,0)$ e $CoAM(X,0)$ determinam, e são determinados pelo tipo Lipschitz de uma curva X qualquer.

Teorema 3.6. *Sejam* $(X,0) = (X^{(1)}\cup\cdots\cup X^{(r)},0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ *e* $(Y,0) = (Y^{(1)}\cup\cdots\cup Y^{(\tilde{r})},0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ *germes de curvas. Então* $(X,0)$ *e* $(Y,0)$ *são bi-Lipschitz equivalentes se, e*

somente se, $r = \tilde{r}$ *e existe uma bijeção* $\rho : I_r \to I_r$ *tal que*

$$ChAM(X^{(i)},0) = ChAM(Y^{(\rho(i))},0) \text{ e } CoAM(X^{(i)},X^{(j)},0) = CoAM(Y^{(\rho(i))},Y^{(\rho(j))},0),$$

para todo $i \in S(X)$ *e* $(i,j) \in T(X) \cup NT(X)$.

Demonstração. Sejam $\pi_X : (X,0) \to (\tilde{X},0)$ e $\pi_Y : (Y,0) \to (\tilde{Y},0)$ as projeções C_5-genéricas de $(X,0)$ e $(Y,0)$, respectivamente. Sabemos, através de [19] que π_X e π_Y são germes de aplicações bi-Lipschitz. Suponha que $(X,0)$ e $(Y,0)$ sejam bi-Lipschitz equivalentes então existe um germe de aplicação bi-Lipschitz $h : (X,0) \to (Y,0)$, formando o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (X,0) & \xrightarrow{h} & (Y,0) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_X} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ (\tilde{X},0) & \xrightarrow{\pi_X^{-1}\circ h\circ \pi_Y} & (\tilde{Y},0) \end{array}$$

Então a aplicação $\pi_X^{-1} \circ h \circ \pi_Y : (\tilde{X},0) \to (\tilde{Y},0)$ é bi-Lipschitz, e consequentemente, $(\tilde{X},0)$ e $(\tilde{Y},0)$ tem o mesmo tipo topológico. Assim, pelo Teorema 3.1 e pela Proposição 3.5, temos que $r = \tilde{r}$ e existe $\rho : I_r \to I_r$ uma bijeção tal que

$$ChAM(X^{(i)},0) = ChAM(Y^{(\rho(i))},0) \text{ e } CoAM(X^{(i)},X^{(j)},0) = CoAM(Y^{(\rho(i))},Y^{(\rho(j))},0)$$

para todo $i \in S(X)$ e $(i,j) \in T(X) \cup NT(X)$. Reciprocamente, se $r = \tilde{r}$ e existe $p : I_r \to I_r$ uma bijeção que preserva as multiplicidades auxiliares então, novamente, pela Proposição 3.5 e pelo Teorema 3.1, segue que $(\tilde{X},0)$ e $(\tilde{Y},0)$ tem o mesmo tipo topológico, por se tratarem de curvas planas temos que $(\tilde{X},0)$ e $(\tilde{Y},0)$ são bi-Lipschitz equivalentes, logo existe uma germe de aplicação bi-Lipschitz $\tilde{h} : (\tilde{X},0) \to (\tilde{Y},0)$

$$\begin{array}{ccc} (X,0) & \xrightarrow{\pi_X\circ\tilde{h}\circ\pi_Y^{-1}} & (Y,0) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_X} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ (\tilde{X},0) & \xrightarrow{\tilde{h}} & (\tilde{Y},0) \end{array}$$

Logo, $\pi_X \circ \tilde{h} \circ \pi_Y^{-1} : (X,0) \to (Y,0)$ é uma aplicação bi-Lipschitz. Portanto, $(X,0)$ e $(Y,0)$ são bi-Lipschitz equivalentes. ∎

Para evidenciar esse fato, vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 3.4. Sejam $(X,0),(Y,0)$ germes de curvas e irredutíveis com $(X,0)\subset(\mathbb{C}^3,0)$ e $(Y,0)\subset(\mathbb{C}^4,0)$. Considere

$$\varphi(t)=(t^{16},t^{57},t^{24}+t^{36}+t^{54}+t^{55}) \quad \text{e} \quad \psi(t)=(t^{24},t^{36}+t^{54}+t^{57},t^{36}-t^{54}+t^{55},t^{16})$$

parametrizações, tais que $\varphi(\mathbb{C},0)=(X,0)$ e $\psi(\mathbb{C},0)=(Y,0)$. Logo,

$$ChAM(X,0)=\{16,24,36,54,55\}=ChAM(Y,0),$$

então pelo Teorema 3.6, segue que $(X,0)$ e $(Y,0)$ são bi-Lipschitz equivalentes.

Como na Proposição 3.1, aqui a hipótese sobre os conjuntos das multiplicidades de contato auxiliares é muito importante.

Exemplo 3.5. Sejam $(X,0)=(X^{(1)}\cup X^{(2)},0)$ e $(Y,0)=(Y^{(1)}\cup Y^{(2)},0)$ germes de curva com $(X,0)\subset(\mathbb{C}^3,0)$ e $(Y,0)\subset(\mathbb{C}^2,0)$. Considere

$$\begin{cases} \varphi^{(1)}(\mathbb{C},0)=(X^{(1)},0);\ \varphi^{(2)}(\mathbb{C},0)=(X^{(2)},0) \\ \varphi^{(1)}(t)=(t^3,t^3+t^5,t^3);\ \varphi^{(2)}(t)=(t^2,t^2+t^3,t^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi^{(1)}(\mathbb{C},0)=(Y^{(1)},0);\ \psi^{(2)}(\mathbb{C},0)=(Y^{(2)},0) \\ \psi^{(1)}(t)=(t^2,t^3);\ \psi^{(2)}(t)=(t^5,t^3), \end{cases}$$

e perceba que

$$\begin{cases} ChAM(X^{(1)},0)=ChAM(Y^{(2)},0)=\{2,3\} \\ ChAM(X^{(2)},0)=ChAM(Y^{(1)},0)=\{3,5\}. \end{cases}$$

Contudo, $(X,0)$ e $(Y,0)$ não são topologicamente equivalentes, pois os ramos $X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ são tangentes na origem do $\mathbb{C}^3$, enquanto os ramos $Y^{(1)}$ e $Y^{(2)}$ são transversais na origem do $\mathbb{C}^2$. O motivo está no fato de que $CoAM(X^{(1)},X^{(2)},0)\neq CoAM(Y^{(1)},Y^{(2)},0)$, pois verificamos que a multiplicidade de $\varphi^{(1)}(t^2)-\varphi^{(2)}(\theta^3t^3)$ é igual a 10 e a multiplicidade de $\psi^{(1)}(t^2)-\psi^{(2)}(\theta^3t^3)$ é igual a 6, para todo $\theta\in G_6$.

Capítulo 4

O número de planos do cone C_5

Agora, mostraremos algumas cotas para o número de componentes irredutíveis presentes no cone C_5 de uma curva analítica singular X de $\mathbb{C}^n$. Ao longo deste capítulo, denotaremos o conjunto das componentes irredutíveis de uma variedade analítica $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$, por $irred(\mathcal{V})$. Ao final, na Seção 4.2, mostraremos que o número $\#(irred(C_5(X,0)))$ não é um invariante bi-Lipschitz, sendo $(X,0)$ um germe de curva singular de $(\mathbb{C}^n,0)$.

4.1 Cotas superiores

Como apresentado no Capítulo 2, temos que o cone C_5 de uma curva singular é composto por planos que contém pelo menos uma tangente do cone de Zariski. A partir disso, podemos fazer a seguinte questão: *Qual é número máximo de planos que o cone C_5 pode possuir?* Respondendo essa pergunta, temos como consequência direta do Teorema 2.14 que,

$$\#(irred(C_5(X,0))) \leq \left(\sum_{i\in S(X)} m^{(i)} - 1\right) + \left(\sum_{(i,j)\in T(X)} m^{(i,j)}\right) + \#(NT(X)). \tag{4.1}$$

O trabalho central desse capítulo é, sob certas condições, melhorar essa limitação (muitas vezes chamada de cota) para o número de componentes irredutíveis do cone C_5 de uma curva. Nessa linha, Krasiński provou em [11, Cor. 3.6] que para um par de ramos $(X,0)$ e $(Y,0)$ a quantidade de planos do cone C_5 decorrentes de tomar sequências em diferentes ramos é limitada superiormente pelo máximo divisor comum entre as multiplicidades $m(X,0)$ e $m(Y,0)$, como veremos no Corolário 4.2. Mas, antes disso, vamos ver a proposição seguinte que fornece uma outra forma de se determinar os planos gerados pelas interações entres duas curvas.

Proposição 4.1. Seja $(X,0) = (X^{(1)} \cup X^{(2)},0)$ um germe de curva singular em $(\mathbb{C}^n,0)$, sendo $(X^{(1)},0)$, $(X^{(2)},0)$ germes de curvas irredutíveis com multiplicidade $m^{(1)}$, $m^{(2)}$ e

$\{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}\}$ um sistema de parametrização de $(X,0)$. Suponha ainda que $m^{(1)} \geq m^{(2)}$ e para cada $\eta_j \in G_{m^{(2)}}$, defina

$$\begin{array}{rccl} \hat{\Phi}_{\eta_j}^{(1,2)}: & (\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^n,0) \\ & t & \longmapsto & \varphi^{(1)}(t^{m^{(2)}}) - \varphi^{(2)}(\eta_j t^{m^{(1)}}) \end{array}$$

Então para todo $\theta_k \in G_{m^{(1,2)}}$ existe $\eta_j \in G_{m^{(2)}}$ tal que $(A_{\theta_k}^{(1,2)}(X),0) = \hat{\Phi}_{\eta_j}^{(1,2)}(\mathbb{C},0)$.

Demonstração. Para efeito de demonstração, vamos tomar $m = m^{(1,2)}$ (Veja a Definição 2.4), e para todo $\theta_k \in G_m$ temos que $(A_{\theta_k}^{(1,2)}(X),0) = \Phi_{\theta_j}^{(1,2)}(\mathbb{C},0)$. Inicialmente, vamos fixar $\theta_k = e^{\frac{2\pi ki}{m}}$, com $i = \sqrt{-1}$. Lembrando que $q^{(1)}m^{(1)} = q^{(2)}m^{(2)} = m$, temos

$$\theta_k^{q^{(2)}} = \left(e^{\frac{2\pi ki}{m}}\right)^{q^{(2)}} = e^{\frac{2\pi k q^{(2)} i}{q^{(2)} m^{(2)}}} = e^{\frac{2\pi ki}{m^{(2)}}}$$

sendo que $m^{(2)} | m$, então vamos tomar $j = k - zm^{(2)}$ para algum $z \in \mathbb{Z}$, ou seja, j é o resto da divisão de k por $m^{(2)}$. Então vamos tomar $\eta_j = e^{\frac{2\pi ji}{m^{(2)}}} \in G_{m^{(2)}}$. Logo, fazendo a seguinte mudança de parâmetros $\psi : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0),\ t \mapsto t^{\frac{m^{(2)}}{q^{(1)}}}$, temos

$$\Phi_{\theta_k}^{(1,2)}(\psi(t)) = \varphi^{(1)}(\psi(t)^{q^{(1)}}) - \varphi^{(2)}(\theta_k^{q^{(2)}}\psi(t)^{q^{(2)}}) = \varphi^{(1)}(t^{m^{(2)}}) - \varphi^{(2)}(\eta_j t^{m^{(1)}}) = \hat{\Phi}_{\eta_j}^{(1,2)}(t),$$

como desejado. ∎

A Proposição 4.1, nos diz que não precisamos calcular todas as curvas de contato auxiliar para cada $\theta \in G_{m^{(1,2)}}$, somente para aqueles que estão presentes em $G_{\hat{m}}$, onde $\hat{m} = \min\{m^{(1)}, m^{(2)}\}$. Isto é importante, pois fornece uma contribuição para melhoria da cota dada em (4.1), agora supondo que $m^{(i)} \leq m^{(j)}$, temos:

$$\#(irred(C_5(X,0))) \leq \left(\sum_{i \in S(X)} m^{(i)} - 1\right) + \left(\sum_{\substack{(i,j)\in T(X) \\ m^{(i)} \leq m^{(j)}}} m^{(i)}\right) + \#(NT(X)) \tag{4.2}$$

Corolário 4.2. [11, Cor. 3.6]. Sejam $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$ germes de curvas irredutíveis em $(\mathbb{C}^n,0)$, com multiplicidades $m^{(1)}$ e $m^{(2)}$, respectivamente, onde $(X^{(1)} \cup X^{(2)},0)$ é um germe de curva singular. Considere $C_5(X^{(1)},X^{(2)}) = \{H_\theta^{(1,2)}; \theta \in G_{m^{(1,2)}}\}$

$$1 \leq \#(C_5(X^{(1)},X^{(2)})) \leq \text{mdc}\{m^{(1)}, m^{(2)}\}$$

Demonstração. No caso em que $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$ são não tangentes, pelo Lema 2.13, temos que $\#(C_5(X^{(1)},X^{(2)})) = 1$, então vale o resultado. Suponha, agora, que $(X^{(1)},0)$ e $(X^{(2)},0)$ são tangentes. Assim, vamos supor que $m^{(2)} \leq m^{(1)}$, lembrando

a demonstração do Lema 2.12 que $H_{\theta_k}^{(1,2)} = [w, v_{\theta_k}]$ e da Proposição 4.1 sabemos que podemos tomar $\theta_k \in G_{m^{(2)}}$. Então para todo $k = 1, \dots, m^{(2)}$, temos

$$v_{\theta_k} := \lim_{t\to 0} \frac{\varphi^{(1)}(t^{m^{(2)}}) - \varphi^{(2)}(\theta_k t^{m^{(1)}})}{t^{m_{\theta_k}}}.$$

Considere $D = \text{mdc}\{m^{(1)}, m^{(2)}\}$, então $D | m^{(2)}$, logo podemos identificar o grupo $G_D = \{\eta_1, \dots, \eta_D\}$ como um subgrupo do grupo cíclico $G_{m^{(2)}}$. Além disso, temos que para cada $k = 1, \dots, m^{(2)}$ existe $\theta_j \in G_{m^{(2)}}$ tal que $\theta_k \theta_j^{m^{(1)}} = \eta_p$ para algum $p = 1, \dots, D$. Logo, fazendo a seguinte mudança de parâmetros $t \mapsto \theta_j t$, temos

$$v_{\theta_k} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi^{(1)}(\theta_j^{m^{(2)}} t^{m^{(2)}}) - \varphi^{(2)}(\theta_k \theta_j^{m^{(1)}} t^{m^{(1)}})}{\theta_j^{m_{\theta_k}} t^{m_{\theta_k}}} = \theta_j^{-m_{\theta_k}} \lim_{t\to 0} \frac{\varphi^{(1)}(t^{m^{(2)}}) - \varphi^{(2)}(\eta_p t^{m^{(1)}})}{t^{m_{\theta_k}}}$$

Ou seja, as direções dos v_{θ_k} são determinadas pelos elementos de G_D, logo, o número de planos em $C_5(X^{(1)}, X^{(2)})$ é limitado pelo $\text{mdc}\{m^{(1)}, m^{(2)}\}$. ∎

Exemplo 4.1. Observe que dado $(X^{(1)} \cup X^{(2)}, 0)$ definido pelos sistema de parametrizações:

$$\varphi(t) = (t^6, t^4, t^7) \quad \text{e} \quad \psi(t) = (t^9, t^6, t^7),$$

temos que o $\text{mdc}\{4, 6\} = 2$ e analisando a parametrização de contato auxiliar

$$\varphi(t^3) - \psi(\theta^2 t^2) = ((1 - \theta^6)t^{18}, 0, -\theta^8 t^{20} + t^{21}).$$

verificamos que se $\theta \in G_6$, então $v_\theta = (0, 0, 1)$, e se $\theta \in G_{12} - G_6$ então $v_\theta = (1, 0, 0)$. Logo, teremos que $C_5(X^{(1)}, X^{(2)}) = \{V(x), V(z)\}$. Portanto, $\#(C_5(X^{(1)}, X^{(2)})) = 2$.

Com isso, conseguimos uma melhora significativa na limitação do número de plano do cone C_5 de uma curva analítica:

Corolário 4.3. (Primeira Cota [6, Cor. 5.1]). Seja $(X, 0) = (X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)}, 0)$ um germe de uma curva singular em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Então

$$\#(irred(C_5(X, 0))) \leq \left(\sum_{i \in S(X)} m^{(i)} - 1 \right) + \left(\sum_{(i,j) \in T(X)} \text{mdc}\{m^{(i)}, m^{(j)}\} \right) + \#(NT(X))$$

Em particular, se $(X, 0)$ é irredutível, então

$$\#(irred(C_5(X, 0))) \leq m(X, 0) - 1$$

O Lema 2.11, para o caso de curvas irredutíveis, fornece um processo de determinação do cone C_5 que ainda podemos melhorar. Dado duas raízes distintas da unidade

em G_m, digamos θ_p, θ_q tais que $o(\theta_p) = o(\theta_q)$, então os planos $H_{\theta_p} = H_{\theta_q}$, como veremos no Teorema 4.4. Outra consequência bastante interessante e útil, é que o número de divisores de m é um cota superior para o número de planos. Contudo, estes fatos não ocorrem no caso de curvas não irredutíveis, como verificaremos no Exemplo 4.3.

Teorema 4.4. *Seja $(X,0)$ um germe de curva irredutível em $(\mathbb{C}^n,0)$, com multiplicidade m. Sejam $\theta_p, \theta_q \in G_m$ tais que $o(\theta_p) = o(\theta_q)$, então $H_{\theta_p} = H_{\theta_q}$.*

Demonstração. Sejam $\theta_p, \theta_q \in G_m$ tais que $o(\theta_p) = o(\theta_q) = d$. Escolhendo um parametrização primitiva de Puiseux de $(X,0)$, da forma:

$$\varphi(t) = \left(t^m, \sum_{i\geq m} a_{2,i}t^i, \dots, \sum_{i\geq m} a_{n,i}t^i\right),$$

podemos verificar que $C_3(A_{\theta_p}(X),0) = [v_{\theta_p}]$ e $C_3(A_{\theta_q}(X),0) = [v_{\theta_q}]$, onde

$$v_{\theta_p} = (0, a_{2,m_{\theta_p}}, \dots, a_{n,m_{\theta_p}}) \quad \text{e} \quad v_{\theta_q} = (0, a_{2,m_{\theta_q}}, \dots, a_{n,m_{\theta_q}})$$

Considere o polinômio ciclotômico $\phi_d \in \mathbb{C}[z]$, então $\phi_d(\theta_p) = \phi_d(\theta_q) = 0$. Pela Observação 1.1, segue que $z^i - 1 = 0$ se, e somente se, $d|i$. Lembramos que

$$m_{\theta_p} = \min\{i; \exists j \in \{2, \dots, n\} \text{ tal que } a_{j,i}(1-\theta_p^i) \neq 0\}$$

isso nos diz que

$$a_{j,i}(1-\theta_p^i) = 0, \quad \forall i \in \{m+1, \dots, m_{\theta_p}-1\}$$

isto é, $a_{j,i} = 0$ ou $d|i$, e também temos que $a_{j,m_{\theta_p}}(1-\theta_p^{m_{\theta_p}}) \neq 0$ então $d \nmid m_{\theta_p}$. Como $o(\theta_q) = d$, segue, desses últimos fatos, que

$$a_{j,i}(1-\theta_q^i) = 0, \quad \forall i \in \{m+1, \dots, m_{\theta_p}-1\} \quad \text{e} \quad a_{j,m_{\theta_p}}(1-\theta_q^{m_{\theta_p}}) \neq 0$$

Então, devemos ter $m_{\theta_p} = m_{\theta_q}$. Portanto, consequentemente, tem-se $v_{\theta_p} = v_{\theta_q}$. ∎

Exemplo 4.2. Considere o germe irredutível de uma curva $(X,0) \subset (\mathbb{C}^{200},0)$ parametrizada pela seguinte aplicação

$$\varphi(t) = (t^{2027}, t^{2028}, t^{2029}, \dots, t^{2226})$$

então a multiplicidade de $(X,0)$ é 2027, e este, por sua vez, é um número primo. Assim, temos que todo $\theta \in G_{2027} - \{1\}$ tem ordem 2027. Portanto, pelo Teorema 4.4, temos que $C_5(X,0) = V(x_3, x_4, \dots, x_{200})$, onde $(x_1, x_2, \dots, x_{200})$ são as coordenadas locais de $\mathbb{C}^{200}$.

Fica claro através deste exemplo que não precisamos necessariamente calcular todos os planos para as $m-1$ raízes na unidade diferente de 1 presentes no grupo G_m. Com o resultado do Teorema 4.4, precisamos apenas conhecer as ordens possíveis em G_m e escolher uma raíz da unidade para cada ordem. Em particular, se $(X,0)$ é um germe de curva irredutível com multiplicidade prima então o número de planos será 1. Porém, essa relação entre a multiplicidade dos ramos e a quantidade planos não pode ser aplicada para o caso não irredutível, como podemos notar no exemplo a seguir.

Exemplo 4.3. Sejam $(X,0)$ e $(Y,0)$ germes de curvas irredutíveis em $(\mathbb{C}^3,0)$ tangentes, dadas pela parametrizações de germe

$$\varphi:\ \begin{array}{ccc}(\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (X,0)\\ t & \longmapsto & (t^3,\theta_1 t^4+t^5,t^5)\end{array} \quad \text{e} \quad \psi:\ \begin{array}{ccc}(\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (Y,0)\\ t & \longmapsto & (t^3,t^4,t^5)\end{array}$$

sendo $G_3=\{\theta_0=1,\theta_1=e^{\frac{2\pi}{3}i},\theta_2=e^{\frac{4\pi}{3}i}\}$. Assim, para cada $i=0,1,2$ temos que

$$\varphi(t)-\psi(\theta_i t)=\left(0,(\theta_1-\theta_i)t^4+t^5,(1-\theta_i^2)t^5\right)$$

observamos que $o(\theta_1)=o(\theta_2)=3$, contudo, segue que

$$C_3(A_{\theta_1}(X\cup Y),0)=[v_{\theta_1}] \quad \text{e} \quad C_3(A_{\theta_2}(X\cup Y),0)=[v_{\theta_2}]$$

onde $v_{\theta_1}=(0,1,1-\theta_2)$ e $v_{\theta_2}=(0,\theta_1-\theta_2,0)$. Logo, pondo $w=(1,0,0)$ sendo um vetor na tangente de $X\cup Y$ na origem, segue que $H_{\theta_1}=[w,v_{\theta_1}]\neq[w,v_{\theta_2}]=H_{\theta_2}$.

Observação 4.1. Além de melhorar o Teorema 2.14 o Teorema 4.4 também melhora a Primeira Cota. Seja $Div:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, dada por $Div(m)$ =número de divisores positivos de m. Também é importante lembrar que se $o(\theta)=d$ em G_m então $d|m$ e sendo G_m um grupo cíclico, também vale a recíproca, isto é, dado d um divisor de m então existe $\theta\in G_m$ tal que $o(\theta)=d$. Então temos,

Corolário 4.5. Seja $(X,0)=(X^{(1)}\cup\cdots\cup X^{(r)},0)$ um germe de uma curva singular em $(\mathbb{C}^n,0)$. Então

$$\#(irred(C_5(X,0)))\leq\left(\sum_{i\in S(X)}Div(m^{(i)})-1\right)+\left(\sum_{(i,j)\in T(X)}\mathrm{mdc}\{m^{(i)},m^{(j)}\}\right)+\#(NT(X))$$

Em particular, se $(X,0)$ é irredutível, então

$$\#(irred(C_5(X,0)))\leq Div(m(X,0))-1$$

Demonstração. A demonstração segue pelo Corolário 4.3, Teorema 4.4 e pela Observação 4.1. ∎

Observação 4.2. Lembrando o Lema 3.2, temos que se $(X,0)$ é um germe de curva irredutível então $ChAM(X,0) = E(X,0)$. E sabendo que cada $e_j \in E(X,0)$ está associado um valor Δ_j. Assim, se $ChAM(X,0) = \{m = m_0, m_1, \dots, m_k\}$ o conjunto das multiplicidades características associadas $(X,0)$, temos a seguinte sequência:

$$m = \Delta_0 > \Delta_1 > \cdots > \Delta_k = 1$$

onde $\Delta_j | \Delta_{j-1}$ para todo $j = 1, \dots, k$.

Assim, vamos considerar a seguinte definição: Considerando o conjunto dos divisores positivos de um determinado número inteiro m, considere uma cadeia

$$m = a_1 < a_2 < \dots < a_\tau = 1$$

de divisores de m, tais que $a_{j+1} | a_j$ para todo $j = 1, \dots, \tau - 1$, sempre pondo $a_1 = m$ e $a_\tau = 1$. Definimos

$$\sigma(m) = max\{\tau; \quad m = a_1 < a_2 < \dots < a_\tau = 1 \text{ é uma cadeia de divisores de } m\}$$

Com isso, conseguimos obter que,

Proposição 4.6. (Segunda Cota [6, Prop. 5.4]). Seja $(X,0) = (X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)}, 0)$ um germe de uma curva singular em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Então

$$\#(irred(C_5(X,0))) \leq \left(\sum_{i \in S(X)} \sigma(m^{(i)}) - 1 \right) + \left(\sum_{(i,j) \in T(X)} \text{mdc}\{m^{(i)}, m^{(j)}\} \right) + \#(NT(X))$$

Em particular, se $(X,0)$ é irredutível, então

$$\#(irred(C_5(X,0))) \leq \sigma(m(X,0)) - 1$$

Demonstração. A demonstração segue como consequência do Corolário 4.5, pela Observação 4.2 e do Lema 3.2. ∎

Observe que em uma curva $(X,0)$ irredutível com multiplicidade 6, apesar do número de divisores positivos ser 4, teremos que $\#(irred(C_5(X,0))) \leq 2$.

Exemplo 4.4. Considere o germe de curva irredutível $(X,0)$ de $(\mathbb{C}^3,0)$, definido pela parametrização $\varphi(t) = (t^6, t^9, t^8)$, temos que $\sigma(6) = 3$. Além disso, temos que $C_3(X,0) =$

$[(1,0,0)]$ e

$$\Phi_\theta(t) = (0, (1-\theta^3)t^9, (1-\theta^2)t^8)$$

implica que

$$\begin{cases} C_3(A_\theta(X),0) = [(0,0,1)], & \text{se } \theta^2 \neq 1 \\ C_3(A_\theta(X),0) = [(0,1,0)], & \text{se } \theta^2 = 1. \end{cases}$$

Ou seja, o cone $C_5(X,0)$ é constituído de dois planos distintos. Note que se $o(\theta) = 3$ então $\theta^2 \neq 1$. Outra observação pertinente é que $\#(ChAM(X,0)) \leq 2$.

4.2 O número de planos do cone C_5 é um invariante bi-Lipschitz?

Vimos na Proposição 2.5 que o cone C_5 de um conjunto analítico qualquer é invariante por aplicações biholomorfas. Por isso, surge o importante questionamento, se o mesmo vale para outros tipos de aplicações, como por exemplos aplicações bi-Lipschitz. Vimos em [19] que para uma curva singular $(X,0)$ de $(\mathbb{C}^n,0)$ a projeção $\pi : (X,0) \to (\tilde{X},0)$, C_5-genérica é uma aplicação bi-Lipschitz, contudo é fácil perceber que ela não preserva o número de planos do cone C_5 de uma curva singular. Mas ainda vale se perguntar, o que aconteceria se acrescentássemos mais hipóteses.

Consideremos uma família de curvas planas $p : (\mathfrak{X},0) \to (\mathbb{C},0)$ e seja $p : \mathfrak{X} \to T$ um bom representante, veja [2, pag. 248] e também [17, Def. 2.2]. Denotamos as fibras de p por $X_t := p^{-1}(t) \subset \mathfrak{X}$. Sabemos que quando $p : \mathfrak{X} \to T$ é bi-Lipschitz equisingular então para cada $t \in T$, existe um homeomorfismo bi-Lipschitz de X_0 para X_t. Uma consequência de um dos resultados centrais de Sampaio em [16] é que em uma família equisingular de curvas, o número de componentes irredutíveis do cone C_3 é constante, isto é, $\#(irred(C_3(X_0,0))) = \#(irred(C_3(X_t,0)))$ para todo $t \in T$, veja também [5, Cor. 4.6]. Com isso, ainda podemos afirmar que $C_3(X_0,0)$ e $C_3(X_t,0)$ são homeomorfos. O próximo passo seria avaliar o que acontece com o cone C_4, contudo no Capítulo 2, na Proposição 2.4, provamos que o cone $C_3(X_t,0)$ e o cone $C_4(X_t,0)$ são iguais como conjuntos, para todo $t \in T$, logo o mesmo resultado vale.

A partir disso, surge naturalmente a seguinte questão: *em uma família equisingular de curvas, o número de componentes irredutíveis do cone C_5 é constante ?* Então, avaliaremos como se dá o comportamento do número de planos do cone C_5 em uma família de curvas equisingular. Respondendo a questão feita sobre o o cone C_5, Giles-Flores, Silva e Snoussi, em [6], propuseram o seguinte exemplo.

Exemplo 4.5. Considere o germe de superfície analítica reduzida $(\mathfrak{X},0)$ em $(\mathbb{C}^4,0)$ dada como imagem do germe de parametrização $\varphi : (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathfrak{X},0)$, $\varphi(u,t) = (\varphi_t(u),t)$

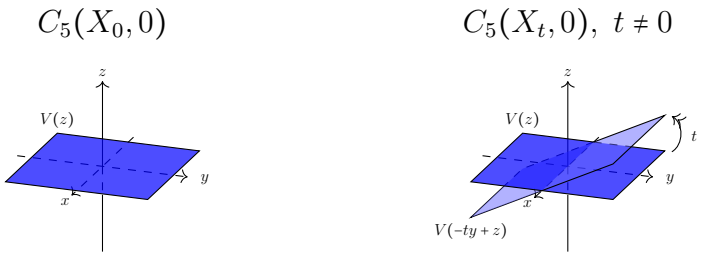


Figura 4.1: Cone C_5 das curvas do Exemplo 4.5.

sendo $\varphi_t(u) = (u^6, u^9+u^{10}, u^{11}+tu^{10})$. Seja $p:(\mathfrak{X},0)\to(\mathbb{C},0)$ a projeção canônica para a última coordenada, sendo (x,y,z,t) um sistema de coordenadas para $\mathbb{C}^4$. Temos que $\mathfrak{X}$ possui uma estrutura reduzida, donde podemos perceber que é uma superfície com o eixo t sendo precisamente o conjunto singular de $\mathfrak{X}$. Vamos tomar $p:\mathfrak{X}\to T$ sendo um bom representante. Afirmamos que p é uma família bi-Lipschitz equisingular de curvas reduzidas.

De fato, veja que $\varphi^{-1}(0,0,0,t) = (0,t)$ para todo $t\in T$, sabendo que φ é um normalização de $\mathfrak{X}$ temos que X_t é irredutível para todo $t\in T$. Logo, φ_t é uma parametrização de Puiseux para X_t. Observamos que $ChAM(X_t,(0,0,0,t)) = \{6,9,10\}$ para todo $t\in T$ então pelo Teorema 3.6, segue que $(X_t,(0,0,0,t))$ é bi-Lipschitz equivalente a $(X_0,(0,0,0,0))$ para todo $t\in T$. Pela Proposição 3.5, segue que a família de curvas planas das projeções C_5-genéricas $\tilde{X}_t$ é topologicamente trivial. Portanto, pelo Corolário 3.6 apresentado em [5], temos que $p:\mathfrak{X}\to T$ é bi-Lipschitz equisingular.

Agora, usando o Teorema 2.14, temos que $C_5(X_0,(0,0,0,0)) = V(z)$ composto por um único plano enquanto $C_5(X_t,(0,0,0,t)) = V(z)\cup V(-ty+z)$ para $t\neq 0$ é composto por dois planos distintos. Na Figura 4.1, podemos observar que no caso em que $t\neq 0$ o plano $V(-ty+z)$ se realça e a medida que aumentamos o valor de t o "ângulo" formado com o plano $V(z)$ também aumenta.

A partir do Exemplo 4.5, concluímos que o número de componentes irredutíveis do cone C_5 de uma curva não é um invariante bi-Lipschitz. Uma consequência interessante deste fato, é que podemos, assim, criar curvas que são bi-Lipschitz equivalentes mas, que não são analiticamente equivalentes visto que na Proposição 2.5 fica claro que o número de planos é um invariante analítico.

Exemplo 4.6. Sejam $(X,0)$ e $(Y,0)$ germes de curvas irredutíveis em $(\mathbb{C}^3,0)$, definidas pelas parametrizações $\varphi,\psi:(\mathbb{C},0)\longrightarrow(\mathbb{C}^3,0)$ dadas por

$$\varphi(t) = (t^8, t^{12}+t^{14}, t^{12}+t^{15}) \quad \text{e} \quad \psi(t) = (t^8, t^{12}+t^{14}+t^{15}, t^{12}+t^{14}+t^{15})$$

Temos que $ChAM(X,0) = ChAM(Y,0) = \{8,12,14,15\}$ daí $(X,0)$ e $(Y,0)$ são bi-Lipschitz equivalentes, contudo, observamos que $C_5(X,0) = V(y)\cup V(z)\cup V(y-z)$

enquanto, $C_5(Y,0) = V(y-z)$. Portanto, verificamos que $(X,0)$ e $(Y,0)$ não são analiticamente equivalentes.

A ideia de como construir uma classe de exemplos, em $\mathbb{C}^3$, dessa natureza, com um número arbitrário de planos no cone C_5 será apresentada na Proposição A.2 no Apêndice A.

Apêndice A

Problemas

Neste apêndice, responderemos algumas questões naturais que surgem a respeito do cone C_5 de uma curva singular complexa. Observamos que as contribuições feitas neste apêndice são originais e obtidas pelo autor.

Provamos no Teorema 2.14, um procedimento que caracteriza o cone $C_5(X,0)$ como um conjunto, sendo $(X,0)$ uma curva singular complexa reduzida e irredutível em $(\mathbb{C}^n,0)$, vimos, também, que o cone $C_5(X,0)$ é uma união finita de planos todos eles contendo a tangente de $(X,0)$ que é o cone $C_3(X,0)$. Agora, queremos saber quais hipóteses uma curva parametrizada deve satisfazer para que dado um feixe de planos, este seja o cone C_5 de uma curva. Um questionamento inicial é resolvido na Proposição A.1: *Dado um número inteiro $k>0$, é possível construir uma curva em $\mathbb{C}^n$ de modo que o cone C_5 desta curva contenha exatamente k planos distintos?*

Exemplo A.1. Vamos considerar $(X,0)$ um germe de curva reduzida e irredutível em $(\mathbb{C}^5,0)$, definida pela imagem da parametrização $\varphi:(\mathbb{C},0)\to(X,0)$ com

$$\varphi(t)=(t^{16},t^{24},t^{28},t^{30},t^{31}),$$

temos que a multiplicidade de $(X,0)$ é 16, assim, a parametrização característica auxiliar é,

$$\Phi_\theta(t)=(0,(1-\theta^8)t^{24},(1-\theta^{12})t^{28},(1-\theta^{14})t^{30},(1-\theta^{15})t^{31})$$

para todo $\theta\in G_{16}$. Conseguimos os seguintes valores para os vetores v_θ, em função da ordem de θ

$$v_\theta=\begin{cases}(0,1,0,0,0), & \text{se } o(\theta)=16\\ (0,0,1,0,0), & \text{se } o(\theta)=8\\ (0,0,0,1,0), & \text{se } o(\theta)=4\\ (0,0,0,0,1), & \text{se } o(\theta)=2,\end{cases}$$

Ou seja, lembrando o Teorema 4.4 e considerando (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) um sistema de

coordenadas locais para $(\mathbb{C}^5, 0)$, segue que

$$C_5(X,0) = V(x_3,x_4,x_5) \cup V(x_2,x_4,x_5) \cup V(x_2,x_3,x_5) \cup V(x_2,x_3,x_4)$$

Observamos que o Exemplo A.1 responde o caso para o nosso questionamento anterior para $k = 4$. Podemos generalizar esse processo para um valor de k arbitrário, como segue.

Proposição A.1. Seja k um número inteiro positivo, então existe uma curva irredutível X em $\mathbb{C}^{k+1}$ de modo que o cone $C_5(X,0)$ seja constituído de exatamente k planos distintos.

Demonstração. Tendo em mente a Proposição 4.6, vamos tomar uma curva com multiplicidade 2^k, pois para todo $j \in \{0,1,2,...,k+1\}$, temos que 2^{k-j+1} é um divisor positivo de 2^k e obviamente todos estes estão em uma cadeia de comprimento $k+1$, isto é, $\sigma(2^k) = k+1$. A ideia aqui, é criar uma parametrização de uma curva irredutível em $\mathbb{C}^{k+1}$, como cada plano contem a tangente, que é o próprio cone $C_3(X,0)$ que pela Proposição 2.1 é uma reta. Assim, sabemos que cada um dos planos será gerado por um vetor $w \in C_3(X,0)$ e outro $v = \lim_s \lambda_s(w_s - \hat{w}_s)$, observe a Definição 2.1. Com isso, damos como solução a seguinte parametrização,

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^{k+1},0) \\ & t & \longmapsto & (t^{S_1}, t^{S_2}, ..., t^{S_{k+1}}) \end{array}$$

onde, $S_j = 2^{k+1}(1-2^{-j}) = 2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2^{k-j+1}$. Com efeito, note que φ é uma parametrização de Puiseux com a coordenada especial sendo a primeira. Considere $\{e_1, e_2, ..., e_{k+1}\}$ os vetores da base canônica de $\mathbb{C}^{k+1}$, temos que $C_3(X,0) = [e_1]$. Escolhemos $\theta \in G_{2^k}$ com $o(\theta) = 2^k$, então

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \varphi(\theta t) &= ((1-\theta^{S_1})t^{S_1}, (1-\theta^{S_2})t^{S_2}, ..., (1-\theta^{S_{k+1}})t^{S_{k+1}}) \\ &= ((1-\theta^{2^k})t^{S_1}, (1-\theta^{2^{k-1}})t^{S_2}, ..., (1-\theta^{S_{k+1}})t^{S_{k+1}}) \\ &= (0, (1-\theta^{2^{k-1}})t^{S_2}, ..., (1-\theta^{S_{k+1}})t^{S_{k+1}}) \end{aligned}$$

obtemos que $C_3(A_\theta(X),0) = [e_2]$, então $H_\theta = [e_1, e_2]$. Seguindo esse raciocínio tome para cada $j \in \{1,2,...,k+1\}$ uma raíz da unidade $\theta_j \in G_{2^k}$ tal que $o(\theta_j) = 2^{k-j+1}$. Assim,

$$\varphi(t) - \varphi(\theta_j t) = (0,0,..., \underbrace{0}_{j-\text{ésima}}, (1-\theta_j^{2^{k-j}})t^{S_{j+1}}, ..., (1-\theta_j^{S_{k+1}})t^{S_{k+1}})$$

Então $C_3(A_{\theta_j}(X),0) = [e_j]$, e sendo $H_j := H_{\theta_j} = [e_1, e_j]$ para todo $j \in \{2,3,...,k+1\}$.

Portanto, segue do Teorema 2.14 que

$$C_5(X,0) = \bigcup_{j=2}^{k+1} H_j$$

■

Observe que a dimensão $n = k+1$ do espaço, onde a curva $(X,0) = \varphi(\mathbb{C},0)$ está mergulhada, aumenta de acordo com o valor de k. Assim, o próximo passo para melhorar a Proposição A.1 será fixar o valor de n fazendo o seguinte questionamento: *É possível obter uma curva singular em $\mathbb{C}^3$ de modo que o seu cone C_5 tenha exatamente k planos?* E como resposta a esta pergunta enunciamos e provamos a proposição a seguir.

Proposição A.2. Seja k um número inteiro positivo, então existe uma curva irredutível X em $\mathbb{C}^3$ de modo que o cone $C_5(X,0)$ seja constituído de exatamente k planos distintos.

Demonstração. Para cada $j \in \{1,\dots,k\}$ escolha valores $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, tais que os vetores $w_j := (0,a_j,b_j)$ sejam dois a dois L.i. Sabemos pela Proposição A.1, que existe uma curva $(Y,0)$ reduzida e irredutível em $(\mathbb{C}^{k+1},0)$, definida pela parametrização

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (\mathbb{C},0) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^{k+1},0) \\ & t & \longmapsto & (t^{S_1}, t^{S_2}, \dots, t^{S_{k+1}}) \end{array}$$

possui k planos distintos em seu cone C_5. Considere $(x_1,x_2,\dots,x_{k+1})$ um sistema de coordenadas locais para $(\mathbb{C}^{k+1},0)$, defina, $P:(\mathbb{C}^{k+1},0)\to(\mathbb{C}^3,0)$ a projeção linear dada por

$$P(x_1,x_2,\dots,x_{k+1}) = \left(x_1, \sum_{j=1}^{k} a_j x_{j+1}, \sum_{j=1}^{k} b_j x_{j+1}\right).$$

Vamos verificar que $\#(irred(C_5(X,0))) = k$. De fato, tomando $\psi = P\circ\varphi$, temos que

$$\psi(t) = \left(t^{S_1}, \sum_{j=1}^{k} a_j t^{S_{j+1}}, \sum_{j=1}^{k} b_j t^{S_{j+1}}\right),$$

com isso, segue

$$\begin{aligned} \psi(t) - \psi(\theta_i t) &= \left((1-\theta_i^{2^k})t^{2^k}, \sum_{j=1}^{k} a_j(1-\theta_i^{S_{j+1}})t^{S_{j+1}}, \sum_{j=1}^{k} b_j(1-\theta_i^{S_{j+1}})t^{S_{j+1}}\right) \\ &= \left(0, \sum_{j=i}^{k} a_j(1-\theta_i^{S_{j+1}})t^{S_{j+1}}, \sum_{j=i}^{k} b_j(1-\theta_i^{S_{j+1}})t^{S_{j+1}}\right). \end{aligned}$$

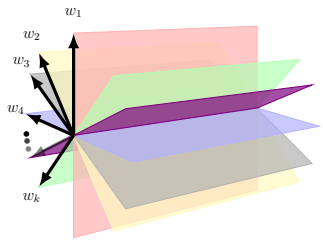


Figura A.1: Feixe de k planos.

Olhando para a segunda coordenada de $\psi(t) - \psi(\theta_i t)$,

$$\psi_2(t) - \psi_2(\theta_i t) = a_i(1-\theta_i^{2^{k-i}})t^{S_{i+1}} + \sum_{j=i+1}^{k} a_j(1-\theta_i^{S_{j+1}})t^{S_{j+1}},$$

o processo na terceira coordenada é análogo. Então pondo $H_i := H_{\theta_i} = [(1,0,0),(0,a_i,b_i)]$, podemos observar que

$$C_5(X,0) = \bigcup_{i=1}^{k} H_i.$$

Como podemos ver na ilustração da Figura A.1. ∎

Neste ponto, conseguimos observar que o número planos do cone C_5 de uma curva parametrizada, singular, reduzida e irredutível depende, além da multiplicidade, também dos seus coeficientes das séries das funções coordenadas da parametrização. No caso de curvas não irredutíveis, vamos acompanhar o que acontece na resposta do problema seguinte.

Problema A.1. *Construa uma parametrização de uma curva analítica* $(X,0)$ *em* $(\mathbb{C}^3,0)$*, de modo que o cone* $C_5(X,0)$ *seja igual a união dos planos* $H_i = [w_0, w_i]$ *para* $i = 1,2,3,4$ *e* $H_5 = [w_1, w_2]$*, onde* $w_0 = (1,0,0)$; $w_1 = (0,1,0)$; $w_2 = (0,0,1)$; $w_3 = (0,1,1)$; $w_4 = (0,1,-1)$.

A disposição que temos dos planos do cone $C_5(X,0)$ está apresentada na Figura A.2. Seguindo a ideia da Proposição A.2 temos que a parametrização $\varphi^{(1)} : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^3,0)$, dada por

$$\varphi^{(1)}(t) = (t^{16}, t^{24} + t^{30} + t^{31}, t^{28} + t^{30} - t^{31})$$

onde, $C_5(X^{(1)},0) = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4$, com $(X^{(1)},0) = \varphi^{(1)}(\mathbb{C},0)$. Agora tome $\varphi^{(2)} : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^3,0)$, dada por

$$\varphi^{(2)}(t) = (0, t^3, t^2)$$

então o cone $C_5(X^{(2)},0) = H_5$, sendo $(X^{(2)},0) = \varphi^{(2)}(\mathbb{C},0)$. Agora, como estamos lidando com dois ramos, precisamos usar a Definição 2.4, assim, sabendo que $m^{(1)} = 16$ $m^{(2)} = 2$ e que $X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ não são tangentes então $\{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}\}$ é um sistema de

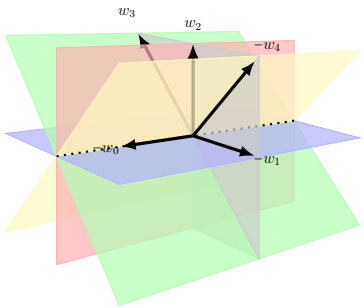


Figura A.2: Feixe de planos do Problema A.1.

parametrização de Puiseux compatível para $(X,0) = (X^{(1)} \cup X^{(2)},0)$. Vamos considerar a parametrização $\Phi : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^3,0)$ dada, como na Definição 2.4,

$$\Phi(t) = \varphi^{(1)}(t) - \varphi^{(2)}(\theta^8 t^8) = (t^{16}, (1-\theta^8)t^{24} + t^{30} + t^{31}, t^{28} + t^{30} - t^{31} - t^{16})$$

logo, como esperado, temos que $C_3(A_\theta^{(1,2)}(X),0) = [(1,0,-1)]$ para todo $\theta \in G_{16}$(Veja o Lema 2.13). Assim, o plano $H^{(1,2)} = H_5$. Portanto,

$$C_5(X,0) = \bigcup_{i=1}^{5} H_i.$$

O que concluímos a partir da solução deste problema é que, agora, o número de planos do $C_5(X^{(1)} \cup \cdots \cup X^{(r)},0)$ depende das multiplicidades de cada componente irredutível, dos coeficientes das séries das funções coordenadas de cada parametrização do sistema $\{\varphi^{(1)},...,\varphi^{(r)}\}$ e, também, do comportamento e da interação entre as componentes $X^{(1)},...,X^{(r)}$.

Um outro problema pertinente está em tentar determinar a multiplicidade do cone C_5. Quando consideramos o cone $C_5(X,0)$ para uma curva X em $\mathbb{C}^n$, com a estrutura reduzida fornecida pela Teorema 2.14, temos que $m(C_5(X,0),0) = \#(irred(C_5(X,0)))$, pois cada plano presente no cone $C_5(X,0)$ é uma componente suave, observe o Exemplo 2.7. Além disso, sabemos que dado um conjunto analítico $(W,0)$ em $(\mathbb{C}^n,0)$, sabemos que a multiplicidade do cone $C_3(W,0)$ é igual a multiplicidade do conjunto W, quando olhamos para $C_3(W,0)$ com uma estrutura analítica herdada da estrutura analítica do conjunto W. Contudo, o mesmo não vale quando aplicamos ao cone C_5. Relembrando o procedimento de Whitney no Teorema 2.8, somos capazes de munir o cone C_5 com uma estrutura analítica não necessariamente reduzida e, assim, determinamos sua multiplicidade. Veja a Tabela A.1, onde, através do software SINGULAR [10], determinamos a multiplicidade do cone $C_5(X,0)$ para $(X,0)$ um germe de curva plana singular.

Devido ao custo computacional que o processo[1] exige nos restringimos a esses exemplos apresentados na Tabela A.1. Observando esta tabela, percebemos um determinado padrão, que a multiplicidade do conjunto C_5 coincide com soma das multiplicidades características auxiliares, levando em consideração as suas repetições, somado com a multiplicidade da curva. Assim, nos levando a Conjectura A.1.

Tabela A.1: Resultados do SINGULAR.

$(X,0)$	$m(C_5(X,0),0)$	$m(C_5(X^{(i)},0),0)$	$m(X^{(i)},0)$	m_θ
$V(x^3-y^2)$	5	5	2	3
$V(x^2-y^9)$	11	11	2	9
$V(x^4-y^3)$	11	11	3	4; 4
$V(x^3-y^8)$	19	19	3	8; 8
$V((x^2-y^3)(x^2+y^3))$	22	5; 5	2; 2	6; 6

Conjectura A.1. *Seja $(X,0)$ um germe de curva reduzida e singular em $(\mathbb{C}^n,0)$:*

1. *Se $(X,0)$ é irredutível, com multiplicidade m. Então teremos*

$$m(C_5(X,0),0) = m + \sum_{\substack{\theta\in G_m \\ \theta\neq 1}} m_\theta.$$

2. *Se $(X,0) = (X^{(1)}\cup X^{(2)},0)$ tal que com $m(X^{(i)},0) = m^{(i)} \geq 2$, para $i = 1,2$. Então teremos*

$$m(C_5(X,0),0) = m(C_5(X^{(1)},0),0) + m(C_5(X^{(2)},0),0) + \sum_{\theta\in G_{m(1,2)}} m_\theta^{(1,2)}$$

Uma outra possível forma de se determinar uma estrutura analítica para o cone C_5 de uma curva é calculando o cone C_3 de uma superfície auxiliar. Como segue na conjectura a seguir:

Conjectura A.2. *Seja $(X,0)$ um germe de curva reduzida e irredutível em $(\mathbb{C}^n,0)$, e seja $\varphi:(\mathbb{C},0)\to(X,0)$ uma parametrização de Puiseux de $(X,0)$, definida por*

$$\varphi(t) = \left(t^m, \sum_{i\geq m} a_{2,i}t^i, \ldots, \sum_{i\geq m} a_{n,i}t^i\right)$$

[1] O processo que implementamos no SINGULAR para a curva $V(x^3-y^2)$:
ring r=0,(x,y,X,Y,u,v),ds; ideal i=v*(x-X)-u*(y-Y),x3-y2,X3-Y2; LIB "homolog.lib"; list L=primdecGTZ(i); ideal k=L[1][1]; ideal k1=L[2][1]; ideal w=k,k1; mult(std(w));.

Então considere a superfície auxiliar definida pela parametrização $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathcal{S}, 0)$ *dada por,*

$$\phi(u,v) = \left(\frac{u^m - v^m}{u-v}, \sum_{i \geq m} a_{2,i} \frac{u^i - v^i}{u-v}, \dots , \sum_{i \geq m} a_{n,i} \frac{u^i - v^i}{u-v} \right).$$

Então $C_3(\mathcal{S}, 0) = C_5(X, 0)$ *como conjuntos.*

Vejamos o que ocorre no exemplo a seguir.

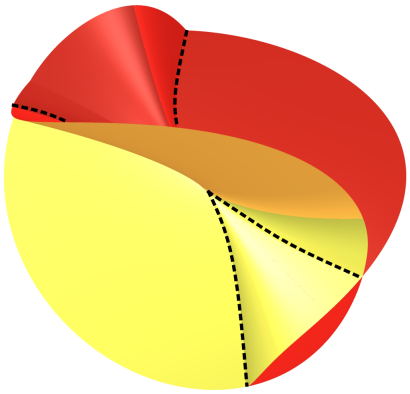


Figura A.3: Superfície auxiliar para a curva do Exemplo A.2

Exemplo A.2. Seja $(X, 0)$ um germe de curva reduzida e irredutível em $(\mathbb{C}^3, 0)$ dada pela parametrização $\varphi(t) = (t^4, t^6, t^7)$. Então a superfície auxiliar $(\mathcal{S}, 0)$ é dada por

$$\phi(u,v) = \left(\frac{u^4 - v^4}{u-v}, \frac{u^6 - v^6}{u-v}, \frac{u^7 - v^7}{u-v} \right)$$

E usando o software SINGULAR, obtemos que $\mathcal{S} = V(p)$ sendo

$$\begin{aligned} p(x,y,z) \quad = \quad & 8y^3z^5 + y^9 - 17xy^6z^2 - 9x^2y^3z^4 - 27x^3z^6 + 32x^3y^6z + 52x^4y^3z^3 + 54x^5z^5 \\ & -16x^5y^6 - 166x^6y^3z^2 - 9x^7z^4 + 172x^8y^3z - 28x^9z^3 - 57x^{10}y^3 + 3x^{11}z^2 \\ & +6x^{13}z + x^{15}. \end{aligned}$$

Na Figura A.3, conseguimos ter uma ideia da superfície que é formada pela deformação da curva X inicial. Assim, observamos que $C_3(\mathcal{S}, 0) = V(y^3z^5) = C_5(X, 0)$, contudo, ainda observamos que $m(C_3(\mathcal{S}, 0)) = 8$ e pela Conjectura A.1, espera-se que $m(C_5(X, 0)) = 23$, com a estrutura analítica dada por Whitney no Teorema 2.8.

O que concluímos a partir do Teorema 2.14 e das Conjecturas A.1 e A.2 que temos três formas de se definir uma estrutura analítica e consequentemente a multiplicidade do cone $C_5(X, 0)$ de uma curva X em $\mathbb{C}^n$: a estrutura reduzida obtida pelo Teorema 2.14, a estrutura apresentada no Teorema 2.8 e a estrutura que surge como consequência da Conjectura A.2. Um próximo passo seria relacioná-las de modo a tornar a determinação

dos cone $C_5(X, 0)$ bem como a sua multiplicidade uma tarefa mais simples, além da obtenção de novas propriedades e resultados.

Apêndice B

Ordem natural no anel $\mathbb{C}\{s\}$

Primeiramente, vamos expor algumas propriedades pertinentes sobre a ordem natural de um elemento no anel das séries convergentes $\mathbb{C}\{s\}$. Dado $f \in \mathbb{C}\{s\}$, sendo

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i s^i,$$

definimos a ordem de f como sendo o menor número inteiro $i \geq 0$ tal que $A_i \neq 0$ e denotamos por $ord(f)$. Em outras palavras, temos:

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i s^i \text{ e } ord(f) = d \Longleftrightarrow A_d \neq 0 \text{ e } A_i = 0 \text{ se } i < d.$$

Assim, sempre que $ord(f) = d$, podemos assumir $f(s) = A_d s^d + A_{d+1} s^{d+1} + \cdots$. Com isso, dados $f, g \in \mathbb{C}\{s\}$, conseguimos verificar as seguintes propriedades:

- $ord(f.g) = ord(f) + ord(g)$;
- $ord(f + g) \geq \min\{ord(f), ord(g)\}$;
- $ord(1) = 0$;
- $ord(f^m) = m.ord(f)$;
- $ord(f^m + g^m) \geq \min\{ord(f^m), ord(g^m)\} = m.\min\{ord(f), ord(g)\}$.

Por convenção, considera-se $ord(0) = \infty$. Vejamos alguns resultados, pertinentes.

Proposição B.1. Sejam $f, g \in \mathbb{C}\{s\}$, tais que $ord(f) \geq ord(g)$ então existe o limite $\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{g(s)}$. Além disso, $\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{g(s)} = 0$ se, e somente se $ord(f) > ord(g)$.

Demonstração. Digamos que sejam

$$f(s) = A_c s^c + A_{c+1} s^{c+1} + \cdots \quad \text{e} \quad g(s) = B_d s^d + B_{d+1} s^{d+1} + \cdots \tag{B.1}$$

com $A_c, B_d \neq 0$. Então, temos $c \geq d$ e

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{g(s)} &= \lim_{s\to 0}\frac{A_c s^c + A_{c+1}s^{c+1}+\cdots}{B_d s^d + B_{d+1}s^{d+1}+\cdots}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{A_c s^{c-d} + A_{c+1}s^{c+1-d}+\cdots}{B_d + B_{d+1}s^1+\cdots}\end{aligned}$$

daí, segue que se $c = d$, temos que $\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{g(s)} = \frac{A_c}{B_c}$ e se $c > d$, temos $\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{g(s)} = 0$. ∎

Lema B.2. Sejam $f, g \in \mathbb{C}\{s\}$. Supondo que $\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{g(s)} = 1$. Então para todo $m \geq 1$ tem-se que $ord(f^m - g^m) = \infty$ se, e somente se $ord(f - g) = \infty$. Em outras palavras, $f^m - g^m = 0$ se, e somente se, $f - g = 0$.

Demonstração. Observe inicialmente que

$$f^m - g^m = \prod_{i=1}^{m}(f - \theta_i g) \quad \text{onde } \theta_i \in G_m,\ \forall i = 1, \dots, m \tag{B.2}$$

Primeiramente, note que $ord(f) = ord(g)$. Suponha que $f^m - g^m = 0$. Então existe $j = 1, \dots, m$ tal que $f - \theta_j g = 0$, assumindo que f e g sejam da forma dada em (B.1). Em particular temos,

$$A_d - \theta_j B_d = 0 \Leftrightarrow \theta_j = \frac{A_d}{B_d} = \lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{g(s)} = 1$$

logo, $f - g = 0$. Reciprocamente, suponha que $f - g = 0$, como $1 \in G_m$ para todo $m \geq 0$, pela equação (B.2), temos que $f^m - g^m = 0$. ∎

Lema B.3. Sejam $f, g \in \mathbb{C}\{s\}$. Supondo que $\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{g(s)} = \theta_0 \in G_m$, defina $d_0 := ord(f - \theta_0 g)$, $d := \min\{ord(f), ord(g)\}$ e $d_k := ord(af^k - bg^k)$ com $a, b \in \mathbb{C}$ não simultaneamente nulos. Então

$$d_k = \begin{cases} d_0 + (k-1)d, & \text{se } \exists \eta_j \in G_k \text{ tal que } \eta_j = \gamma\theta_0 \\ dk, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

para todo $k \geq 1$ inteiro, onde $\gamma^k = \frac{a}{b}$.

Demonstração. Temos que $ord(f) = ord(g) = d$. Se for $a = 0$ ou $b = 0$ então $d_k = dk$. Suponha $a, b \neq 0$, então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $\alpha^k = a$ e $\beta^k = b$, então por (B.2), temos

$$af^k - bg^k = (\alpha f)^k - (\beta g)^k = \prod_{\eta_j \in G_k}(\alpha f - \eta_j \beta g).$$

Assumindo que f e g são da forma dada em (B.1), temos que

$$\alpha A_d - \eta_j \beta B_d = 0 \Longleftrightarrow \eta_j = \frac{\alpha}{\beta}\frac{A_d}{B_d} = \frac{\alpha}{\beta}\theta_0$$

tomando $\gamma = \dfrac{\alpha}{\beta}$, temos que se existe $\eta_j = \gamma\theta_0$, então

$$ord(\alpha f - \eta\beta g) = ord(\alpha f - \alpha\theta_0 g) = ord(f - \theta_0 g) = d_0$$

e temos que $ord(\alpha f - \eta_j \beta g) = d$ para todo $\eta_j \neq \gamma\theta_0$. Logo,

$$af^k - bf^k = (\alpha f - \gamma\theta_0\beta g) \cdot \prod_{\eta_j \in G_k - \{\gamma\theta_0\}} (\alpha f - \eta\beta g)$$

então, $d_k = d_0 + (k-1)d$. No caso contrário, se $\eta_j \neq \gamma\theta_0$ para todo $\eta_j \in G_k$, temos que $d_k = kd$. ∎

Referências Bibliográficas

[1] Briançon, J., Galligo, A., Granger, M.: *Déformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites,,* Mem. Soc. Math. Springer, France (N.S.) 69, no. 1 1980/81.

[2] Buchweitz, R. O., Greuel, G.-M.,*The Milnor Number and Deformations of Complex Curve Singularities,* Invent. Math. 58, 1980. 241–281

[3] Bruhat, F. ,Cartan, H. *Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels,* CR Acad. Sci., vol. 244, n. 8 1957. 988–990

[4] Chirka, E. M., *Complex analytic sets,* Translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 46. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.

[5] Giles-Flores, A., Silva, O. N., Snoussi, J., *On Tangency in equisingular families of curves and surfaces,* Quart. J. Math. Oxford 71(2), 2020. 485–505

[6] Giles-Flores, A., Silva, O. N., Snoussi, J., *On the fith Whitney cone of a complex analytic curve,* Journal of Singularities, vol. 24, 2022. 96–118

[7] Giles-Flores, A., Silva, O. N., Teissier, B., *The biLipschitz Geometry of Complex Curves: an Algebraic approach,* Lecture Notes in Mathematics. 2280, 2020. 217–272

[8] Greuel, G.-M., Lossen, C., Shustin, E., *Introduction to singularities and deformations,* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.

[9] Gunning, R., Rossi, H. *Analytic functions of several complex variables,* Prentice - Hall, New Jersey, 1965.

[10] Greuel, G.-M., Pfister, G., Schönemann, H., Wolfram, D., *SINGULAR 4-3-2, A computer algebra system for polynomial computations,* http://www.singular.uni-kl.de, 2023.

[11] Krasiński, T. *The join of algebraic curves,* Illinois Journal of Mathematics, vol. 46, 3ª Ed. 2002.

[12] Milnor. J. *Singular points of complex hypersufaces,* Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1968.

[13] Moreira, C. G., Ruas, M. A. S. *O lema da seleção da curva e o teorema de Morse-Sard,* Rev. Matemática Universitária, vol. 36, 2004. 23–32

[14] Pham, F., Teissier, B. *Saturation des algèbres analytiques locales de dimension un,* appendice in: Briançon, J.; Galligo, A.; Granger, M. Déformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites. Mém. Soc. Math. France, deuxième série, tome 1 No. 1, 1980. 1-69

[15] Remmert, R., Stein, K. *Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen,* Mathematische Annalen, vol. 126, n. 1 1953. 263–306

[16] Sampaio, J. E., *Bi-Lipschitz homeomorphic subanalytic sets have bi-Lipschitz homeomorphic tangent cones,* Selecta Math. (N.S.), 22, 2016. 553–559

[17] Silva, O. N., Snoussi, J., *Whitney equisingularity in one parameter families of generically reduced curves,* Manuscripta Math, 163, 2020. 463–479

[18] Stutz, J., *Equisingularity and equisaturation in codimension 1,* Amer. J. Math. 94, 1972. 1245–1268

[19] Teissier, B., *Variétés polaires II: multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney, in "Algebraic Geometry, Proceedings, La Rabida, 1981,"* , Lecture Notes in Math. 961, Springer-Verlag, 1982. 314–491

[20] Wallace, A. H. *Algebraic approximation of curves,* Canad. J. Math. 10, 1958. 242–278

[21] Whitney, H. *Local properties of analytic varieties,* in Diff. and Combinator. Topology. Princeton Univ. Press, 1965. 205–244