



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Tecnologia

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

– DOUTORADO –

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
PARA A FLEXÃO DE PLACAS DUPLAS CONECTADAS POR
CAMADA ELÁSTICA DE PASTERNAK**

Por

Arthur Coutinho de Araújo Pereira

*Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para
obtenção do grau de Doutor*

João Pessoa – Paraíba

Dezembro de 2023



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Tecnologia

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

– DOUTORADO –

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
PARA A FLEXÃO DE PLACAS DUPLAS CONECTADAS POR
CAMADA ELÁSTICA DE PASTERNAK**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor.

Arthur Coutinho de Araújo Pereira

Orientador: Prof. Dr. Ângelo Vieira Mendonça

João Pessoa – Paraíba

Dezembro de 2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P436f Pereira, Arthur Coutinho de Araújo.

Formulação do método dos elementos de contorno para a flexão de placas duplas conectadas por camada elástica de Pasternak / Arthur Coutinho de Araújo Pereira. - João Pessoa, 2023.
194 f. : il.

Orientação: Ângelo Vieira Mendonça.
Tese (Doutorado) - UFPB/CT.

1. Engenharia civil. 2. Sistema de placas duplas. 3. Método dos Elementos de Contorno (MEC). 4. Teoria de Kirchhoff. 5. Modelo de Pasternak. 6. Equações integrais. I. Mendonça, Ângelo Vieira. II. Título.

UFPB/BC

CDU 624(043)


**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A FLEXÃO
DE PLACAS DUPLAS CONECTADAS POR CAMADA ELÁSTICA DE PASTERNAK**

ARTHUR COUTINHO DE ARAÚJO PEREIRA

Tese aprovada em 20 de dezembro de 2023.


Período Letivo: 2023.2

Documento assinado digitalmente

 **ANGELO VIEIRA MENDONÇA**
Data: 22/12/2023 19:25:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


**Prof(a). Dr(a). Ângelo Vieira Mendonça – UFPB
Orientador(a)**

Documento assinado digitalmente

 **SANDRO MARDEN TORRES**
Data: 27/12/2023 13:56:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


**Prof(a). Dr(a). Sandro Marden Torres – UFPB
Examinador(a) Interno(a)**

Documento assinado digitalmente

 **ROBERTO LEAL PIMENTEL**
Data: 08/01/2024 10:28:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


**Prof(a). Dr(a). Roberto Leal Pimentel – UFPB
Examinador(a) Interno(a)**

Documento assinado digitalmente

 **VALERIO DA SILVA ALMEIDA**
Data: 01/02/2024 10:54:06-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


**Prof(a). Dr(a). Valério da Silva Almeida – USP
Examinador(a) Externo(a)**

Documento assinado digitalmente

 **JAIRO ROCHA DE FARIA**
Data: 26/12/2023 18:51:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof(a). Dr(a). Jairo Rocha de Faria – UFPB
Examinador(a) Externo(a)**

Documento assinado digitalmente

 **ANTONIO JOSE BONESS DOS SANTOS**
Data: 22/12/2023 17:56:11-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof(a). Dr(a). Antônio José Boness dos Santos – UFPB
Examinador(a) Externo(a)**

João Pessoa/PB

2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pela vida e por ter me dado condições de chegar até aqui.

Aos meus pais, Francisco Oliveira Pereira e Marília Francisca Coutinho de Araújo Pereira, que, além de me ensinarem o valor do estudo, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa na minha vida.

À minha noiva Raquel Raiana Pimentel que me conforta com toda sua atenção, companheirismo e amor.

Aos meus irmãos, Allan Coutinho Pereira e Alex Coutinho Pereira, por todos apoios e conselhos.

Ao meu orientador Ângelo Vieira Mendonça, por quem tenho grande respeito e admiração, pela disponibilidade e por ter compartilhado seus conhecimentos, oferecendo todo suporte acadêmico para o desenvolvimento desse projeto.

Aos companheiros de laboratório, em especial Welky Klefson Ferreira de Brito, Paulo Cavalcante do Nascimento Júnior e Weber Geovanni Mendes Maciel pela amizade e convívio.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação pelos incentivos e contribuições.

À CAPES pelo suporte financeiro.

E, finalmente, a todos meus familiares e amigos que direta ou indiretamente me deram apoio, fundamental à conclusão deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como propósito o desenvolvimento de uma formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para análise estática de duas placas paralelas e conectadas por camada elástica de Pasternak. A solução fundamental é obtida por meio do operador de Hörmander e as equações integrais são deduzidas usando o teorema da reciprocidade de Betti. Alguns casos de placas com diferentes propriedades, condições de contorno e carregamento são estudados e seus resultados obtidos via MEC são validados por meio de respostas analíticas. Os resultados do MEC para sistema de placas duplas recuperaram os resultados analíticos de forma satisfatória e ainda mostraram que as rigidezes das placas e das constantes de fundação elástica tem papel relevante na transmissibilidade de efeitos no sistema de placas.

Palavras-Chave: Sistema de placas duplas; MEC; Kirchhoff; Pasternak; Equações integrais.

ABSTRACT

In this work, a formulation of the Boundary Element Method (BEM) for static analysis of two parallel plates connected by an elastic Pasternak layer is develop. The fundamental solution is obtained using the Hörmander operator and the integral equations are derived using Betti's reciprocity theorem. Some cases of plates with different properties, boundary conditions and loading are studied and their results obtained via BEM are validated through analytical responses. The BEM results for the double plate system recovered the analytical results satisfactorily and also showed that the stiffness of the plates and the elastic foundation constants play a relevant role in the transmissibility of effects in the plate system.

Keywords: Double plate system; BEM; Kirchhoff; Pasternak; Integral equations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Sistemas de placas elasticamente conectadas: (a) para-choque Whipple, (b) viaduto; (c) galeria de drenagem; (d) modelo sanduiche; (e) Modelo viaduto; (f) modelo galeria.	1
Figura 1.2 – Sistema de placas duplas retangulares elasticamente conectadas. Fonte: Nasirshoaibi e Mohammadi (2015).	5
Figura 2.1 – Placa isolada. Fonte: Autor.	10
Figura 2.2 – Cinemática da seção transversal na hipótese: (a) Kirchhoff; (b) Mindlin; (c) Reddy. Fonte: Autor.	11
Figura 2.3 – Deslocamento positivo de um ponto qualquer. Fonte: Autor.	12
Figura 2.4 – Representação dos esforços num elemento de placa. Fonte: Autor.	14
Figura 2.5 – Esforços no elemento abc. Fonte: Autor.	15
Figura 2.6 Elemento de placa. Fonte: Autor.	16
Figura 2.7 – Condições nas bordas. Fonte: Autor.	18
Figura 2.8 – Ponto “ p ” e “ q ” do contorno da placa e os vetores r, m, n e s	21
Figura 2.9 – Representação da camada elástica de Winkler. Fonte: Autor.	23
Figura 2.10 - Proporcionalidade da mola de Winkler. Fonte: Autor.	23
Figura 2.11 - Pontos de carregamento “ p ” e de deslocamento “ q ”. Fonte: Autor.	25
Figura 2.12 – Representação da camada elástica de Pasternak. Fonte: Autor.	26
Figura 3.1 – Placa dupla elasticamente conectada por camada de Pasternak.	31
Figura 3.2 – Problemas fundamentais do sistema, com base elástica de Pasternak: (a) Fonte na placa superior; (b) Fonte na placa inferior. Fonte: Autor.	36
Figura 4.1 – Contorno circular acrescido a um ponto o de um canto da placa. Fonte: Autor	60
Figura 4.2 - Região carregada Ωg . Fonte: Autor.	84
Figura 4.3 – Carregamento com variação linear.	90
Figura 4.4 – Contorno de uma placa dividida em elementos de contorno. Fonte: Autor. ..	101
Figura 4.5 – Representação das partições das matrizes influência. Fonte: Autor.	107
Figura 4.6 – Representação de elementos retos e curvos numa discretização do método. Fonte: Autor.	110
Figura 4.7 – Elementos de contorno linear contínuo no contorno Γ . Fonte: Autor.	110

Figura 4.8 – Nós duplos em descontinuidade de elemento (canto). Fonte: Autor.	111
Figura 4.9 – Elemento reto. Fonte: Autor.....	113
Figura 4.10 – Elemento Circular. Fonte: Autor.....	113
Figura 5.1 – Discretizações do contorno para placa retangular, placa circular e placa anular.	115
Figura 5.2 – Placa dupla submetida à carga pontual.	116
Figura 5.3 – Placa dupla simplesmente apoiada submetida à carga distribuída.....	119
Figura 5.4 – Deslocamentos no ponto central da placa superior e inferior com relação $h_1/h_2 = 1/2$	123
Figura 5.5 – Deslocamentos no ponto central da placa superior e inferior com relação $h_1/h_2 = 1$	124
Figura 5.6 – Deslocamentos no ponto central da placa superior e inferior com relação $h_1/h_2 = 2$	125
Figura 5.7 – Placa dupla ESES submetida à carga distribuída.....	126
Figura 5.8 – Placa dupla sob carregamento distribuído uniforme e condições de contorno.	128
Figura 5.9 – Deslocamento de placa dupla com ambas placas engastadas.	129
Figura 5.10 – Deslocamentos de placa dupla simplesmente apoiada.....	130
Figura 5.11 – Deslocamentos na placa superior engastada e inferior simplesmente apoiada.	131
Figura 5.12 – Deslocamentos na placa dupla, superior simplesmente apoiada e inferior engastada.	132
Figura 5.13 – Placa dupla circular sob carregamento pontual e condições de contorno...	133
Figura 5.14 – Placa dupla anular com várias condições de contorno: (a) engastada (b) engastada-apoiada (c)apoiada-engastada (d) SEES/ESSE.	135
Figura 5.15 – Deslocamentos na placa dupla anular engastada.	136
Figura 5.16 – Deslocamentos da placa dupla anular engastada e simplesmente apoiada.	137
Figura 5.17 – Placa dupla: (a) SSSS e (b) vinculação ESES/SSSS sob carga em linha....	139
Figura 5.18 – Placa dupla simplesmente apoiada sob carregamento hidrostático.....	142

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Tipos clássicos de vinculações das bordas.	108
Tabela 5.1 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga pontual – SSSS (Caso I) ...	116
Tabela 5.2 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga pontual – SSSS (Caso II)..	117
Tabela 5.3 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga pontual – SSSS (Caso III).	117
Tabela 5.4 – Momentos fletores no domínio da placa (Caso I).....	118
Tabela 5.5 – Momentos fletores no domínio da placa (Caso II)	118
Tabela 5.6 – Momentos fletores no domínio da placa (Caso III).....	118
Tabela 5.7 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga distribuída – SSSS (Caso I)	120
Tabela 5.8 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga distribuída – SSSS (Caso II)	120
Tabela 5.9 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga distribuída – SSSS (Caso III).	120
Tabela 5.10 – Momentos fletores das placas superior e inferior.	121
Tabela 5.11 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga distribuída – ESES.....	127
Tabela 5.12 – Momentos fletores nas placas sob carga distribuída – ESES	127
Tabela 5.13 – Deslocamentos na placa dupla circular engastada.....	129
Tabela 5.14 – Deslocamentos na placa dupla circular simplesmente apoiada	130
Tabela 5.15 – Deslocamentos na placa dupla circular engastada e simplesmente apoiada	131
Tabela 5.16 – Deslocamentos na placa superior simplesmente apoiada e inferior engastada.	132
Tabela 5.17 – Deslocamentos e rotações das placas duplas circulares sob carga pontual no centro.	134
Tabela 5.18 – Deslocamentos nas placas superior e inferior da placa dupla engastada....	135
Tabela 5.19 – Deslocamentos da placa dupla anular engastada e apoiada.....	136
Tabela 5.20 – Deslocamentos e rotações de placa anular simplesmente apoiada e engastada.	137
Tabela 5.21 – Deslocamentos e rotações de placa dupla anular SEES/ESSE.....	138

Tabela 5.22 – Deslocamentos da placa dupla simplesmente apoiada sob carga linha (Caso I)	139
Tabela 5.23 – Deslocamentos da placa dupla simplesmente apoiada sob carga linha (Caso II)	140
Tabela 5.24 – Deslocamentos da placa dupla simplesmente apoiada sob carga linha (Caso III)	140
Tabela 5.25 – Deslocamentos da placa dupla ESES/SSSS (Caso I)	141
Tabela 5.26 – Deslocamentos da placa dupla ESES/SSSS (Caso II)	141
Tabela 5.27 – Deslocamentos da placa dupla ESES/SSSS (Caso III)	141
Tabela 5.28 – Deslocamentos nas placas duplas sob carga hidrostática	143
Tabela 5.29 – Momentos das placas duplas sob carga hidrostática	144

LISTA DE SÍMBOLOS

E	– Módulo de elasticidade longitudinal
ν_i	– Coeficiente de Poisson referente à placa i
$\delta(p, q)$	– Delta de Dirac
δ_{ij}	– Delta de Kronecker
σ_i	– Tensão normal à direção i
ε_i	– Deformação linear na direção do eixo i
τ	– Tensão tangencial
a	– Dimensão da placa paralela ao eixo x
b	– Dimensão da placa paralela ao eixo y
L	– Dimensão do vão
K_w	– Constante elástica da mola da camada elástica
K_p	– Módulo de cisalhamento da camada elástica
h_i	– Espessura referente à placa i
D_i	– Módulo de rigidez à flexão da placa i
R	– Raio de curvatura da placa
r	– Distância entre ponto-fonte e o ponto-campo
w	– Deslocamento vertical do plano médio da placa superior
v	– Deslocamento vertical do plano médio da placa inferior
\emptyset	– Inclinação da linha elástica
θ	– Rotação da seção transversal da placa
ψ	– Função Digama
Φ	– Função escalar
ω	– Frequência de excitação da carga móvel
π_p	– Funcional de energia potencial de deformação
$\delta\pi_p$	– Variacional de energia potencial de deformação
P	– Módulo da carga transversal concentrada
g	– Módulo da carga transversal distribuída
g_i	– Carregamento externo transversal distribuído na placa i
mn	– Ângulo formado entre o elemento que contém o ponto-fonte e o elemento que contém o ponto-campo

M_n, M_{ns}	– Momentos fletor e volvente, atuantes na placa superior no sistema local de coordenadas
T_n, T_{ns}	– Momentos fletor e volvente, atuantes na placa inferior no sistema local de coordenadas
w^{i*}	– Deslocamento fundamental da placa superior devido ao carregamento da placa i
v^{i*}	– Deslocamento fundamental da placa inferior devido ao carregamento da placa i
M_n^{i*}	– Momento fletor fundamental da placa superior devido ao carregamento da placa i
T_n^{i*}	– Momento fletor fundamental da placa inferior devido ao carregamento da placa i
M_{ns}^{i*}	– Momento volvente fundamental da placa superior devido ao carregamento da placa i
T_{ns}^{i*}	– Momento volvente fundamental da placa inferior devido ao carregamento da placa i
V_n^{i*}	– Cortante equivalente de Kirchhoff fundamental da placa superior devido ao carregamento da placa i
Q_n^{i*}	– Cortante equivalente de Kirchhoff fundamental da placa inferior devido ao carregamento da placa i
A	– Área
V	– Volume
Ω	– Domínio dos corpos
ρ	– Massa específica da placa
G	– Matriz influência que contém as contribuições de todos os elementos de contorno, Módulo de elasticidade transversal da placa
H	– Matriz influência que contém as contribuições de todos os elementos de contorno.
n, s	– Sistema de coordenadas local
ξ	– Coordenada adimensional
p	– Ponto-fonte
q	– Ponto-campo
V_n	– Cortante equivalente de Kirchhoff

Q_n	– Esforço cortante de primeira ordem
∇	– Gradiente de uma função
∇^2	– Operador laplaciano
∇^4	– Operador biarmônico
Ω	– Domínio de um corpo genérico
Γ_j	– Contorno de um corpo genérico
Γ_j	– Sub-região do contorno de um corpo genérico
$L_0(x), L_1(x)$	– Funções de Struve (L)
$K_0(x), K_1(x)$	– Funções de Bessel Modificada de segunda espécie

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MDF – Método das Diferenças Finitas.

MEC – Método dos Elementos de Contorno.

MEF – Método dos Elementos Finitos.

MRP – Método dos Resíduos Ponderados

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Considerações iniciais	1
1.2	Revisão Bibliográfica	2
1.2.1	Placas Delgadas	2
1.2.2	Placas Delgadas Elasticamente Conectadas	3
1.3	Objetivos.....	6
1.4	Estruturação do texto	7
2	FUNDAMENTOS DE PLACAS SIMPLES SOBRE BASE ELÁSTICA	9
2.1	Placas Livres de Base Elástica	9
2.1.1	Relações diferenciais para placas isótropas sob a teoria de Kirchhoff.....	14
2.2	Placas sobre fundação elástica de Winkler.....	22
2.3	Placas sobre fundação elástica de Pasternak	25
3	FUNDAMENTOS DE PLACAS DUPLAS	31
3.1	Introdução	31
3.2	Placa Dupla Elasticamente Conectada	31
3.2.1	Equação Governante.....	31
3.2.2	Problema Fundamental	34
3.2.2.1	Caso I: raízes complexas e conjugadas.....	40
3.2.2.2	Caso II: raízes reais, positivas e distintas	43
3.2.2.3	Caso III: raízes reais iguais.....	45
4	EQUAÇÕES INTEGRAIS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS.....	49
4.1	Equações Integrais em Pontos de Domínio	49
4.2	Equações Integrais no Contorno.....	59
4.3	Equações Integrais de Curvatura no Domínio	82
4.4	Transformação das Equações Integrais de Carregamento	83
4.5	Método dos Elementos de Contorno	100
4.5.1	Equações Integrais Discretizadas	101
4.5.2	Equações Algébricas.....	106
4.5.3	Condições de Contorno	108
4.5.4	Elementos Utilizados.....	109

5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	115
5.1	Placas duplas simplesmente apoiadas sob carga pontual	116
5.2	Placas duplas simplesmente apoiadas sob carga distribuída	119
5.3	Exemplo paramétrico.....	122
5.4	Placas duplas sob carga distribuída e condição de contorno ESES.....	126
5.5	Placas duplas circulares sob carga distribuída.....	128
5.6	Placas duplas circulares sob carga pontual.....	133
5.7	Placas duplas anulares sob carga distribuída.....	134
5.8	Placas duplas sob carga linha	138
5.9	Placas duplas simplesmente apoiada sob carga distribuída hidrostática	142
	CONCLUSÕES.....	145
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	146
	APÊNDICE A	155
	APÊNDICE B.....	164
	APÊNDICE C	168
	APÊNDICE D	177

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

Nos problemas de infraestrutura, os modelos de fundação elástica têm sido amplamente utilizados em muitos problemas de interação solo-estrutura, devido ao menor custo computacional em comparação aos modelos baseados em contínuo, especialmente em análises estáticas e dinâmicas de edifícios, rodovias, estruturas ferroviárias etc.

Em alguns problemas estruturais homogêneos e não homogêneos, tais como um sistema de componentes estruturais interligados por camadas elásticas, têm recorrido a idealizações e representações de modelos de sistemas de estrutura dupla ou múltipla. Além disso, teorias de estruturas (placa ou viga) são assumidas governar o comportamento de cada um dos componentes estruturais e idealizações de fundações elásticas são adotadas para representar camadas elásticas. Nas indústrias mecânica, aeroespacial, naval e civil, estes modelos têm sido aplicados em situações como: sistemas de tubulações enterradas, nanotubos de carbono, nano placas de grafeno, absorvedores contínuos de vibração, estruturas em sanduíche, construção ferroviária e rodoviária, e escudos de colisão de micrometeoróides para veículos espaciais. Na figura 1.1 são mostrados alguns casos práticos de placas elasticamente conectadas, tais como: para-choque Whipple, Fig 1.1 (a); viaduto, Fig 1.1 (b); galerias de drenagem, Fig 1.1 (c); e os respectivos modelos de placa dupla para Fig 1.1 (d)-(f).

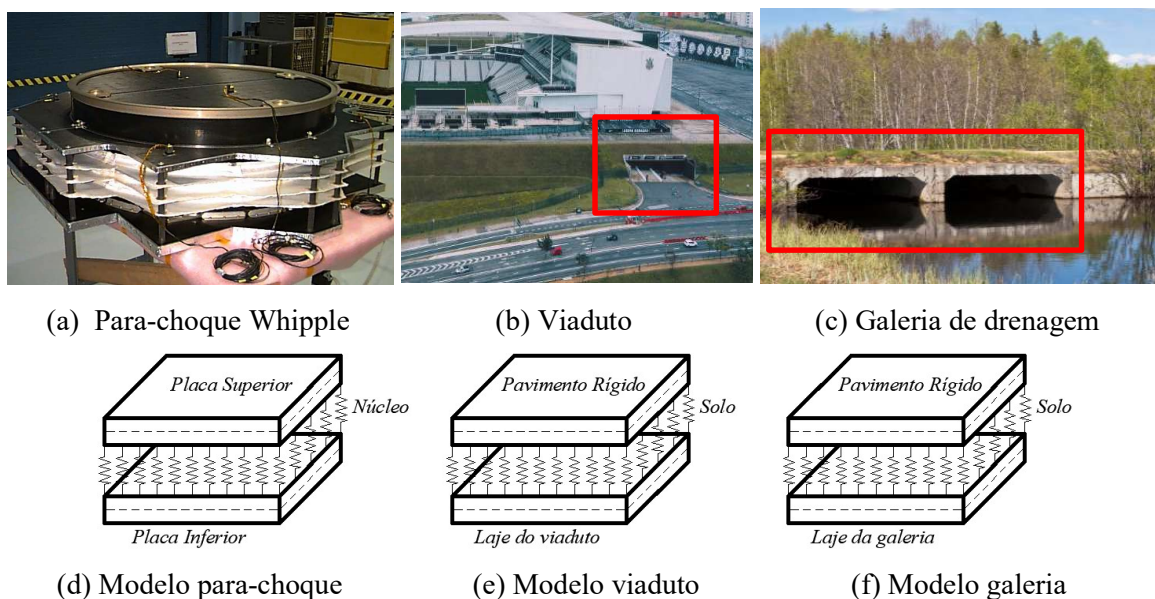


Figura 1.1 – Sistemas de placas elasticamente conectadas: (a) para-choque Whipple, (b) viaduto; (c) galeria de drenagem; (d) modelo sanduíche; (e) Modelo viaduto; (f) modelo galeria.

1.2 Revisão Bibliográfica

Neste subitem inicialmente será feita uma revisão da literatura envolvendo o desenvolvimento de equações integrais e do método dos elementos de contorno em placas simples isoladas e apoiadas em base elástica. Em seguida, descreve-se o estado da arte em problemas de placas duplas elasticamente conectadas.

1.2.1 Placas Delgadas

Em meados do XIX, tendo conhecimento das equações integrais, Betti (1872) e Somigliana (1885) as aplicaram em trabalhos voltados para elasticidade plana. Apesar disso, com o aumento na complexidade das geometrias e dos carregamentos, torna-se clara a necessidade do uso de métodos numéricos.

Uma alternativa para solução de sistemas de equações diferenciais, principalmente para algumas aplicações contínuas, é o Método dos Elementos de Contorno (MEC), podendo ser bem observado nas questões de domínio ilimitado. O conceito de resolver o problema com integrais de contorno não é novo, mas a contar do momento em que o MEC foi estudado, tomando uma extensa quantidade de trabalhos envolvendo flexão de placas finas, a utilização do método tem se dado de forma bem satisfatória, chamando atenção para vantagens que carrega consigo.

Uma contribuição bastante relevante, dada por Kupradze (1965), foi a formulação método dos elementos de contorno baseado em equações integrais, que Rizzo (1967), logo em seguida, desenvolveu uma concepção ainda mais completa para o MEC. Mais adiante, houve a introdução de funções de forma constante, linear e quadrático na formulação do MEC, através de Cruze (1969), Lachat (1973) e Ricardella (1973).

A aplicação do MEC, particularmente em análise de placas, sobreveio a partir dos trabalhos de: Jaswon et al. (1967) quando tratou problemas de valor de contorno biarmônico em termos de equações integrais, e ainda trabalhou com cantos suaves “*out sharp*”; Hansen (1976), que propôs e aplicou o método direto para análise de placas infinitas, com furos, de contorno não carregado, e por Bezine (1978) e Stern (1979). que considerando-se duas equações integrais, relativas ao deslocamento transversal e à sua derivada na direção normal ao contorno, enunciaram formulações diretas baseadas na identidade de Green.

Atentando que Bezine (1978) aplicou o MEC a placas poligonais, porém sem a colocação dos nós nos cantos, já Stern (1979) apresentou uma descrição completa de placas através do MEC tratando os termos livres de canto. Para a análise de placas fundamentadas na Teoria Clássica de Kirchhoff, a formulação direta é a mais utilizada, e diversos trabalhos importantes nas diversas aplicações foram surgindo desde o início dos anos 80.

Já os primeiros trabalhos em formulação indireta na análise de placas foram apresentados por Wu e Altiero (1979), analisando placas reais contidas em um contorno auxiliar infinito, de solução conhecida.

Ulteriormente, foram propostas alternativas para a solução de problemas de placas elásticas: Piltner e Taylor (1989) apresentaram funções complexas para definição das soluções fundamentais, considerando-se as deformações por cisalhamento para placas finas; já Hartmann e Zotemantel (1986) e Guo-Shu e Mukherjee (1986) estudaram funções interpoladoras hermitianas para aproximação dos deslocamentos, e; Abdel-Akher e Hartley (1989) que trabalharam com funções lagrangianas e integrais analíticas para o cálculo das integrais singulares.

Nos trabalhos de Vander Weeën (1982), Karam (1986), Paiva (1987), Ribeiro (1992), Chueiri (1994), Oliveira Neto (1998), Aliabadi (2002), Maciel (2020) também podem ser encontradas soluções do método dos elementos de contorno aplicadas a placas delgadas ou espessas livres de fundações elásticas.

Além disso, trabalhos que discorrem o MEC de placas simples sobre fundação elástica podem ser encontrados: Balaš (1984), Katsikadelis (1988), Manzoli (1992) discutiram a aplicação em placas delgadas sobre fundação elástica de Winkler e Pasternak; Rashed *et al.* (1998, 1999), Karam (2012) reportaram sobre placas espessas apoiadas em fundações de Winkler/Pasternak. Já em Souza (2019), uma formulação do MEC para placas delgadas sobre fundação elástica de Kerr foi estabelecida.

1.2.2 Placas Delgadas Elasticamente Conectadas

Várias pesquisas sobre problemas de placa dupla/múltipla foram realizadas com enfoque em soluções analíticas do modelo clássico de placas elasticamente conectadas, onde as placas são representadas pela teoria de placas de Kirchhoff e uma camada elástica é tratada como uma base elástica de Winkler.

Responsável por um dos estudos pioneiros, McElman (1964) investigou analiticamente o problema de *flutter* em um sistema de placa dupla retangular simplesmente apoiado submetido a uma corrente de ar supersônica na placa superior. Posteriormente, Shore (1975) estudou o mesmo problema, porém com placas ortotrópicas conectadas por um meio elástico. Os trabalhos de Kunukkasseril e Swamidas (1973), Marczak (2018), Hedrih (2006) apresentam analiticamente a vibração livre de sistemas de placas duplas/múltiplas simplesmente apoiados. Em Chonan (1976) uma solução fechada para vibração livre de um sistema de placa dupla circular sob tensão radial trativa pode ser vista, possuindo prescrições rígidas em deslocamentos transversais e rotações elasticamente impostas. Soluções analíticas para vibração forçada de sistemas de placa dupla sob carga dinâmica concentrada/distribuída pulsando fixamente são descritas nos trabalhos de Oniszczyk (2004), Hedrih (2006). O mesmo problema, mas sob carga pontual dinâmica móvel é discutido por Kessel (1967), que apresenta uma solução analítica e discute as equações de deslocamento, apontando também condições de ressonância de duas placas elasticamente conectadas simplesmente apoiadas e sujeitas a um carregamento móvel cíclico. Similarmente, em Hedrih (2007) são apresentadas soluções analíticas com a utilização de expansão em séries, abordando problema de vibração transversal forçada de um sistema de placas duplas elasticamente conectadas por uma camada elástica de Winkler. Ainda utilizando a mesma camada elástica, em Stokanovic *et al.* (2015) são estudadas soluções aproximadas para formas explícitas das expressões de frequências naturais e seus modos num sistema múltiplo de placas retangulares.

Também foram deduzidas soluções aproximadas para sistemas de placas duplas delgadas usando fundações diferentes do modelo de Winkler para representar as camadas elásticas. Kunukkasseril e Swamidas (1975) representam a camada elástica por suportes elásticos discretos em anéis concêntricos e investiga o problema de flambagem de um sistema de placa dupla circular. Sobre os trabalhos em que a fundação viscoelástica contínua desempenham a função do núcleo, Hedrih (2011) e Aida *et al.* (1995), apresentam soluções analíticas para o problema de controle de vibração em placa dupla. Cobrindo a análise dinâmica de múltiplas frequências num sistema de placas duplas circulares, Hedrih (2012) apresenta um modelo matemático não-linear, onde as placas são interconectadas por uma distribuição contínua viscoelástica de Voigt-Kelvin.

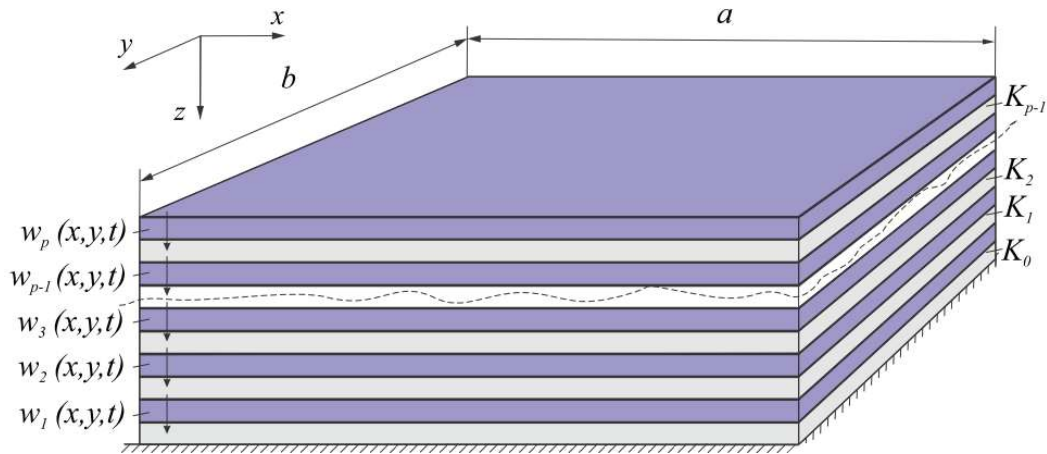


Figura 1.2 – Sistema de placas duplas retangulares elasticamente conectadas. Fonte: Nasirshoaibi e Mohammadi (2015).

Assumindo uma fundação de Pasternak, Marczak (2018), Nasirshoaibi e Mohammadi (2015a, 2015b) apresentam soluções de vibração livre e forçada de sistemas de membrana-placa ou placas duplas. Ainda, a vibração de um sistema de placa dupla conectadas por uma base elástica de Pasternak apoiado sobre o solo, que também foi tratado como uma fundação elástica de Pasternak, foi estudado analiticamente por De Rosa e Lippiello (2009). Já em Pereira *et al.* (2023) foram deduzidas soluções analíticas estáticas para placas duplas delgadas retangulares interconectadas por uma fundação de Pasternak.

Similarmente, foram deduzidas soluções analíticas para casos em que as idealizações de placa e núcleo são representadas por outras diferentes daquelas utilizadas no sistema de placa dupla clássico. Chonan (1979) apresentou um estudo de vibração de um sistema de placas duplas infinitamente longas, submetido a carregamento móvel, onde as placas respeitam as hipóteses da teoria de placas de Mindlin e o núcleo central médio é representado por uma fundação viscoelástica de Kelvin. Em Cao *et al.* (2021) também é estudado um sistema similar ao anterior, porém assumindo uma camada viscoelástica de Winkler.

A quantidade de trabalhos que lidam com solução numérica de sistema de placa dupla encontrados na literatura são em menor número das soluções exatas discutidas anteriormente. Em Gbadeyan *et al.* (2019) é utilizado um método aproximado para reduzir o sistema acoplado de equações diferenciais parciais de quarta ordem a um sistema acoplado de diferencial de segunda ordem, com a ajuda de soluções em série previamente assumidas e do Método da Transformação Diferencial (DTM). Com isso, é apresentada uma solução semi-analítica para análise de vibração de um sistema de placa dupla simplesmente apoiado submetido a carga móvel. Em Kukla (1998) é apresentada uma solução utilizando o Método de Função de Green (MFG) para um sistema de duas placas delgadas retangulares

elasticamente conectadas, como também equações integrais ponderadas para esse sistema, porém as equações integrais apresentadas não mostram a relação dual entre os campos reais e os fundamentais intrínsecos da formulação direta do MEC. Já Kukla (1999) apresentou uma solução para vibração livre de um sistema de placa dupla com camada elástica não-homogênea, onde o problema é representado por equações integrais contendo as funções de Green.

Conforme já discutido na seção 1.2.1, a maior parte das formulações diretas em MEC são empregadas para representar modelos de placas simples, com ou sem base elástica. Em Brito *et al.* (2018, 2019) é feita uma revisão na utilização de modelos de estruturas elasticamente conectadas na análise estrutural estática e são consideravelmente poucos, mesmo para sistemas de vigas duplas/múltiplas conforme discutido. Contudo, apenas alguns trabalhos usam o método dos elementos de contorno para analisar vigas duplas conectadas como discutido em Brito (2018), e Brito *et al.* (2019), onde soluções de MEC para sistemas de vigas duplas são deduzidas envolvendo três diferentes teorias de vigas para representar as barras em flexão e dois modelos para representar a camada elásticas. Em Pereira (2020) e Pereira *et al.* (2022) é apresentada uma análise estática de um sistema de placas duplas usando o MEC. O sistema é composto por duas placas paralelas com uma camada elástica entre elas. As placas são assumidas como sendo representadas pelo modelo de placas de Kirchhoff e a camada elástica é tratada como uma fundação elástica de Winkler. Embora um modelo mais refinado que o de Winkler já tenha sido incorporado nas formulações de elementos de contorno em vigas duplas, esse cenário ainda não se verificou em problemas de placas duplas.

Assim, o propósito desse trabalho é o estabelecimento do MEC para sistema de placas duplas delgadas interconectadas por fundações de Pasternak, deduzindo para esse fim desde equações integrais, soluções fundamentais, representações algébricas do método dos elementos de contorno.

1.3 Objetivos

Objetivo Geral:

- Desenvolver uma solução do MEC direto para placas duplas elasticamente conectadas por uma camada elástica de Pasternak.

Objetivos Específicos:

- Desenvolver a equação integral para o problema do sistema de placas duplas;
- Desenvolver as soluções fundamentais para problema de placas duplas elasticamente conectadas;
- Gerar os sistemas algébricos e suas soluções;
- Desenvolver um código para validação dos resultados do MEC.

1.4 Estruturação do texto

O presente trabalho está estruturado em seis capítulos, listagem de referências bibliográficas e dois apêndices.

No Capítulo 2 são apresentados fundamentos de placas sem contato, onde são vistos os conceitos de tensões, deformação, resultantes de tensões (momentos, forças cortantes, para o caso de flexão), hipóteses, equações de equilíbrio e relações diferenciais para placas isotrópicas segundo a teoria de Kirchhoff. Também, como um suporte a alguns modelos que auxiliam a solução proposta para problemas de placas duplas, são estendidas algumas explicações sobre placas delgadas apoiadas em base elástica de Pasternak.

No Capítulo 3, são explicitadas as equações governantes do problema para sistemas de placas duplas elasticamente conectadas, sendo a camada elástica regida pelo modelo de Pasternak. Um ponto de destaque deste capítulo é a dedução das soluções fundamentais para esse sistema. É dada uma atenção para os três conjuntos de raízes que dependem das propriedades mecânicas da placa e da camada elástica.

No Capítulo 4, o ponto de destaque é o estabelecimento das equações integrais de domínio para o problema de placas duplas conectadas, em que as equações diferenciais parciais e acopladas são transformadas em equações integrais equivalentes utilizando o teorema da reciprocidade de Betti. Além disso, as equações integrais de contorno são discretizadas utilizando elementos de contorno de acordo a geometria da placa. Nesse trabalho são usados elementos retos e circulares, sendo as variáveis em cada elementos de contorno aproximadas por funções interpoladoras lineares. Ainda nesse capítulo, o sistema de equações integrais discretizadas é transformado num sistema algébrico. E, finalmente, com a imposição das condições de contorno, as variáveis de contorno são determinadas.

No Capítulo 5, são apresentadas as respostas numéricas para alguns problemas envolvendo placas duplas elasticamente conectadas. Esses resultados da formulação

proposta são comparados com respostas numéricas e/ou analíticas. Esse capítulo também tem como destaque as deduções de soluções analíticas, que constituem uma contribuição original para tais problemas.

No último capítulo, são expostas as conclusões e feitas algumas sugestões para trabalhos futuros sobre sistemas de placas duplas elasticamente conectadas.

No Apêndice A são apresentadas as derivadas de algumas soluções fundamentais discutidas no Capítulo 2, tanto em deslocamentos quanto em esforços.

Nos Apêndices B, C e D são apresentadas, respectivamente as deduções dos resultados analíticos utilizando o método de Navier, as deduções por meio do método de Levy e deduções das respostas analíticas das placas duplas circulares a fim de comprovarem a convergência dos resultados apresentados no Capítulo 5.

2 FUNDAMENTOS DE PLACAS SIMPLES SOBRE BASE ELÁSTICA

Visando proporcionar um adequado fluxo de entendimento, que auxiliará na compreensão dos capítulos seguintes, neste segundo capítulo serão abordados alguns conceitos de placas simples isoladas e de placas delgadas com ou sem interação de bases elásticas.

2.1 Placas Livres de Base Elástica

De acordo com a NBR 6118:2023, placas são definidas como elementos estruturais de superfícies planas em que as ações atuantes se dão preponderantemente perpendiculares a seu plano médio, sendo admissíveis casos de pequena curvatura. Um aspecto desse elemento é sua espessura, distância entre as duas superfícies, que é pequena com relação às demais dimensões do corpo. O plano cêntrico às duas superfícies é conhecido por superfície média da placa. Outra marca desse elemento é possuir o carregamento sempre transversal ao plano médio, combinado ou não com outro carregamento compreendido no plano médio, conforme mostrado na Figura 2.1.

A classificação conforme seja o tipo do material componente da placa e suas propriedades, se dá da seguinte forma: anisotrópica – apresentando propriedades diferentes em qualquer plano; ortotrópica – apresentando simetria em três planos ortogonais; ou isotropa – dispondo de propriedades iguais em todos os planos.

De forma bem simplificada, as teorias que regem as análises de placas podem ser resumidas da seguinte forma: na primeira teoria, proposta por Kirchhoff (1850), a distorção transversa é desprezada, tornando-a apropriada para placas delgadas. Em compensação, existe modelos refinados de placa cuja deformação por cortante é levada em conta, tais como Reissner (1945) e Mindlin (1951), e Reddy (1984), podendo ser aplicadas a um espectro maior de razões de aspecto (L/h). Além do mais, um fator de correção de cisalhamento é imposto no modelo de deformação por cortante de Reissner e Mindlin, com o objetivo de suprir o erro da suposição da distribuição constante das tensões tangenciais transversas na energia de deformação. Contudo, o modelo de deformação por cortante de terceira ordem de Reddy não demanda tal correção, já que o desenvolvimento de tensões cisalhantes transversas quadráticas ao longo da espessura é possível, por meio da idealização do relaxamento da manutenção da planicidade da seção transversal no modelo. Vale a pena mencionar que os modelos refinados de placas exigem uma manipulação matemática mais

laboriosa, acarretando um sistema de equações com dimensões maiores do que aquele exigido pela teoria clássica.

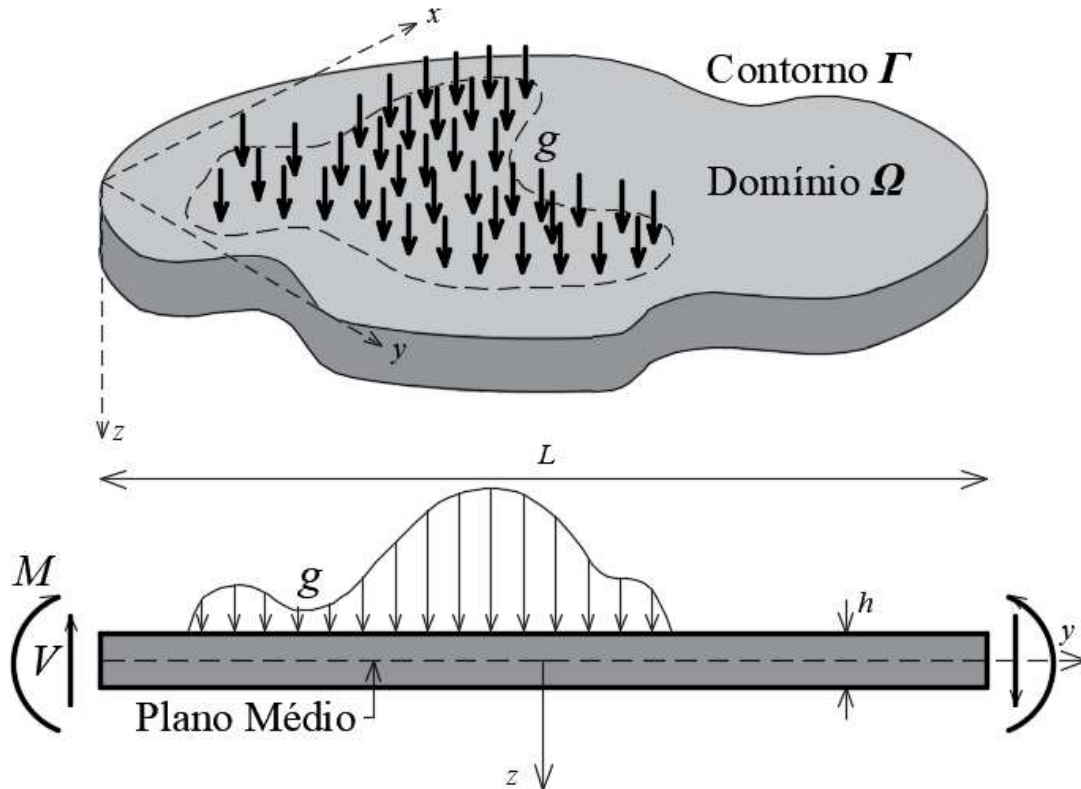


Figura 2.1 – Placa isolada. Fonte: Autor.

Convém, também, apontar que as suposições desses modelos de placas possuem correspondências com alguns modelos de vigas. A título de exemplo, as hipóteses da teoria de placa de Kirchhoff são análogas às hipóteses da teoria de viga de Euler-Bernoulli; modelo de placa de Mindlin é congruente ao modelo da viga de Timoshenko; e, finalmente, o modelo de Bickford-Reddy está associado ao modelo de placas de Reddy. As principais condições determinantes na distinção entre essas teorias (placa/viga) são a posição relativa da seção transversal com relação à superfície média (placa), ou ao eixo longitudinal (viga), e sua configuração. Dentre as hipóteses de Kirchhoff, a planicidade da seção transversal é preservada, juntamente com sua ortogonalidade com relação à linha elástica, conforme Figura 2.2(a). Já na teoria refinada de Mindlin a planicidade da seção é mantida, mas não existe mais a obrigatoriedade da ortogonalidade da seção com a linha elástica, vide Figura 2.2(b). Para a teoria de Reddy nem mesmo a planicidade da seção transversal é preservada, conforme Figura 2.2(c).

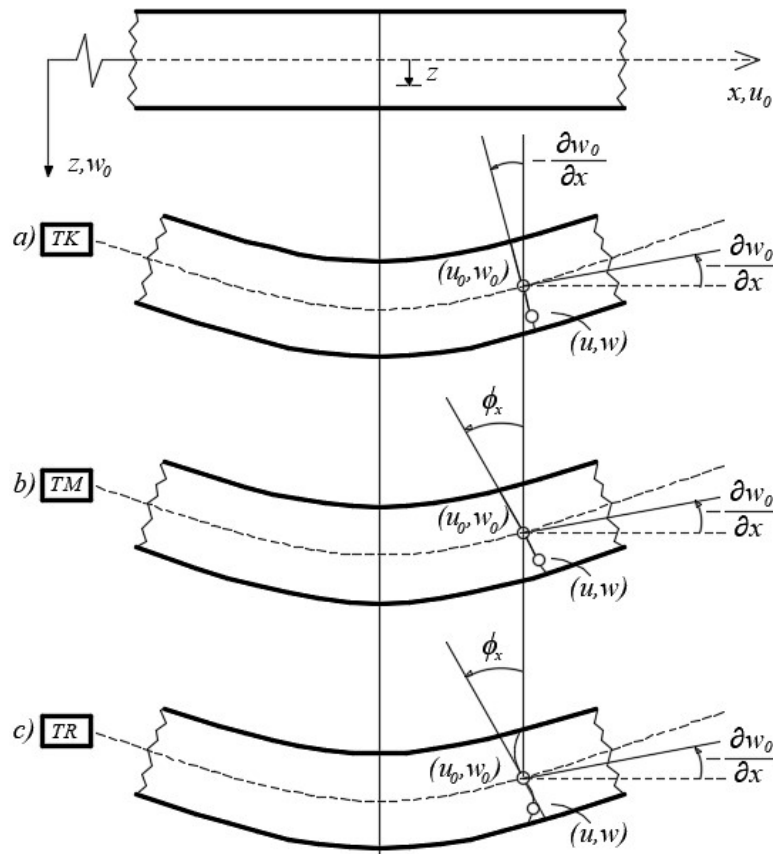


Figura 2.2 – Cinemática da seção transversal na hipótese: (a) Kirchhoff; (b) Mindlin; (c) Reddy. Fonte: Autor.

Neste trabalho serão consideradas apenas as placas delgadas e isotrópicas, submetidas a carregamento transversal e ortogonal ao plano médio, e será baseado na teoria de Kirchhoff, cujas hipóteses são:

- A placa é constituída de material elástico-linear e, portanto, segue a lei de Hooke;
- Os deslocamentos transversais são pequenos em relação a espessura, h , da placa;
- Não há deformação no plano médio da placa;
- As deformações na placa, devidas à flexão, variam linearmente com a distância ao plano médio desta placa, ao longo de sua espessura, o que equivale dizer que as tensões normais, paralelas ao plano médio, também variam linearmente com a espessura;
- As tensões normais na superfície da placa são desprezíveis em comparação com as tensões normais devidas à flexão.

A Figura 2.3 ilustra as componentes de deslocamento de um ponto pertencente à placa são representadas, sendo o deslocamento vertical do plano médio u_3 representado por w .

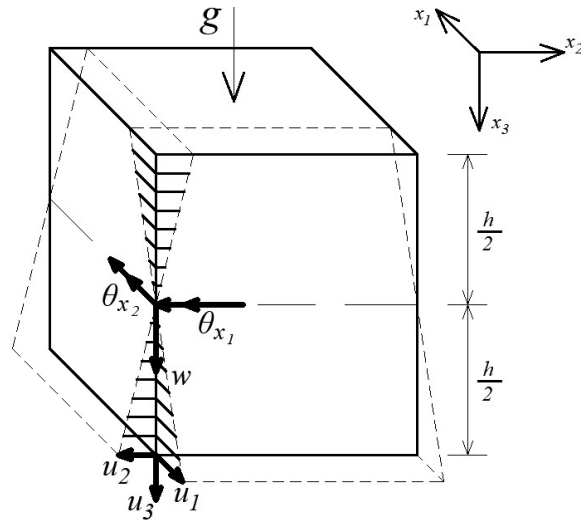


Figura 2.3 – Deslocamento positivo de um ponto qualquer. Fonte: Autor.

Uma consideração inaugural, levando-se em conta que se trata de uma placa suficientemente fina, é que o deslocamento vertical de qualquer ponto da placa é igual ao de um ponto correspondente no plano médio na mesma vertical:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \quad (2.1)$$

Neste trabalho, x_1, x_2, x_3 são correspondentes a x, y, z respectivamente.

Tal consideração supõe implicitamente que a deformação normal na direção z é desprezível.

O campo de deslocamentos considerado na direção de z é o referente à superfície média, e admitindo as hipóteses de Kirchhoff, é possível descrevê-lo da seguinte forma:

$$u_i = -zw_{,i} \quad (2.2)$$

Adotando a notação da Figura 2.3 e agora com a auxílio da equação (2.2), as deformações ao longo da espessura h da placa podem ser expressas em função das curvaturas da seguinte forma:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du_1}{dx_1} \\ \frac{du_2}{dx_2} \\ \frac{du_2}{dx_1} + \frac{du_1}{dx_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{d^2 w}{dx_1^2} \\ -z \frac{d^2 w}{dx_2^2} \\ -2z \frac{d^2 w}{dx_1 dx_2} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

ou na forma indicial:

$$\varepsilon_{ij} = -z w_{,ij} \quad (2.4)$$

Novamente, considerando que o material empregado na placa é homogêneo, linear e isotrópico, tem-se um caso de estado plano de tensão o qual, considerando-se a lei de Hooke, é dado por:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

ou indicialmente:

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + 2 \frac{E}{1-\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (2.6)$$

com $i, j, k = 1, 2$.

Sendo:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

onde G , ν e E são o módulo de elasticidade transversal do material, o coeficiente de Poisson do material e o módulo de elasticidade longitudinal do material, respectivamente.

O delta de Kroenecker é dado por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.7)$$

Assumindo ainda que podem ser desprezadas as tensões relativas à direção normal ao plano da placa e substituindo (2.4) em (2.6), pode-se escrever as relações de tensões-curvaturas da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = -z \frac{E}{1-\nu^2} [\delta_{ij} \nu w_{,kk} + (1-\nu) w_{,ij}] \quad i, j = 1, 2 \quad (2.8)$$

2.1.1 Relações diferenciais para placas isótropas sob a teoria de Kirchhoff

Tome inicialmente o elemento de placa da Figura 2.4, onde estão indicadas as tensões solicitantes devidas a um carregamento transversal. Pode-se obter os esforços - momentos de flexão, momento volvente— através das resultantes das tensões que atuam num elemento da placa, apresentadas na mesma.

Os momentos fletores, por unidade de comprimento, indicados na Figura 2.4(b) são obtidos da seguinte integração sobre a espessura h do elemento:

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z \, dz \quad (2.9)$$

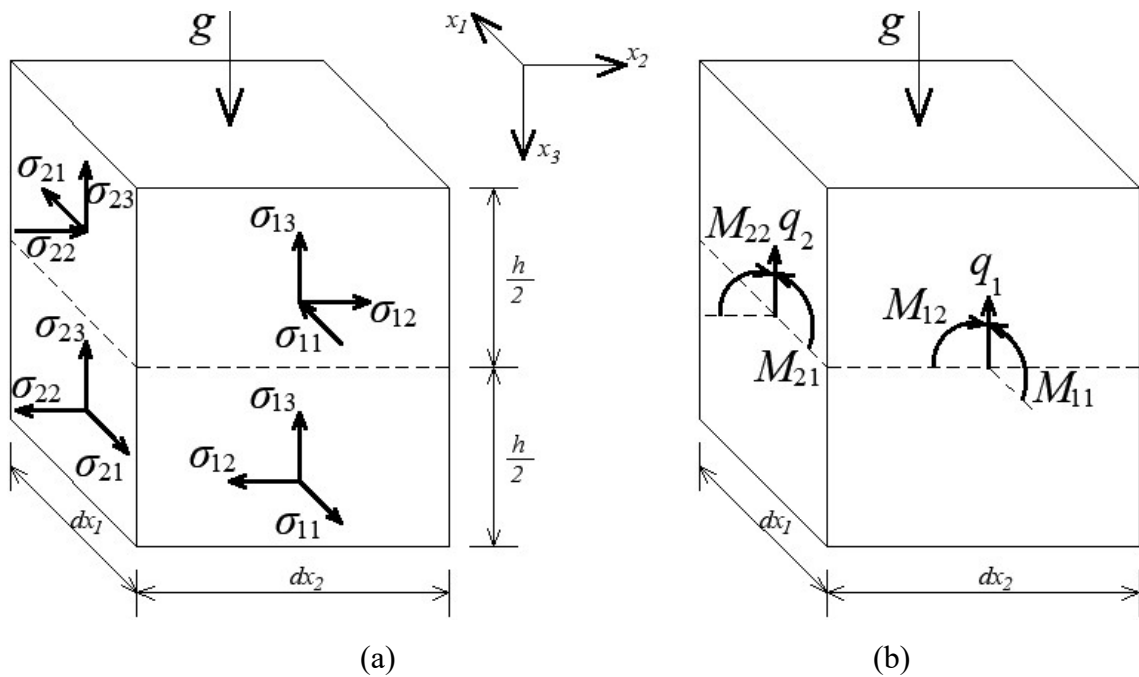


Figura 2.4 – Representação dos esforços num elemento de placa. Fonte: Autor

Tendo em vista a relação tensão-curvatura dada na equação (2.8), essa quando substituída na equação (2.9), seguida de sua integração, as equações dos momentos podem ser obtidas em função dos deslocamentos transversais, que ficam na forma:

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^2w}{dx_1^2} \\ \frac{d^2w}{dx_2^2} \\ 2\frac{d^2w}{dx_1dx_2} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Que na forma indicial pode ser escrita:

$$M_{ij} = -D [\delta_{ij} w_{,kk} \nu + (1-\nu) w_{,ij}] \quad (2.11)$$

Significando D o módulo de rigidez à flexão da placa, dado por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.12)$$

As resultantes de tensão podem ser transformadas do sistema de coordenadas (x_1, x_2) para um outro sistema de coordenadas (n, s) , conforme ilustrado na Figura 2.5:

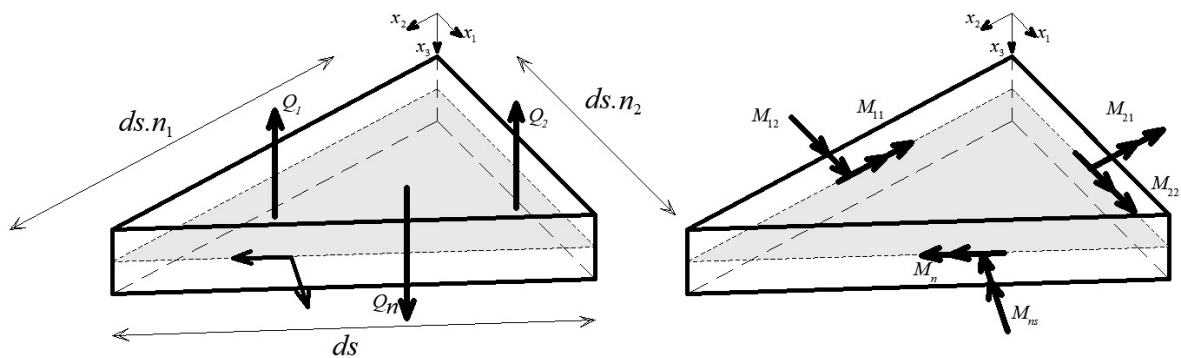


Figura 2.5 – Esforços no elemento abc. Fonte: Autor.

Equilibrando os momentos atuantes no elemento abc , os momentos fletores e momentos volventes, e através de algumas relações, chega-se às seguintes expressões:

$$M_n = \{n_1 \quad n_2\} \begin{Bmatrix} M_{n1} \\ M_{n2} \end{Bmatrix} = M_{11}n_1n_1 + M_{12}n_1n_2 + M_{22}n_2n_2 \quad (2.13)$$

$$M_{ns} = \{s_1 \quad s_2\} \begin{Bmatrix} M_{n1} \\ M_{n2} \end{Bmatrix} = M_{11}n_1s_1 + M_{12}s_1n_2 + M_{22}n_2s_2 \quad (2.14)$$

onde s_j são cossenos diretores da direção s .

Indicialmente, as equações (2.13) e (2.14)

$$M_n = M_{ij}n_in_j \quad (2.15)$$

$$M_{ns} = M_{ij}n_is_j \quad (2.16)$$

A Figura 2.6 mostra um elemento infinitesimal de placa com dimensões dx e dy . São indicados os esforços cortantes q_1 e q_2 , os momentos fletores M_1 e M_2 , e os momentos torsores M_{12} e M_{21} . Note que na convenção de placas o eixo z positivo aponta para baixo. O carregamento g e a deflexão w também são positivos para baixo.

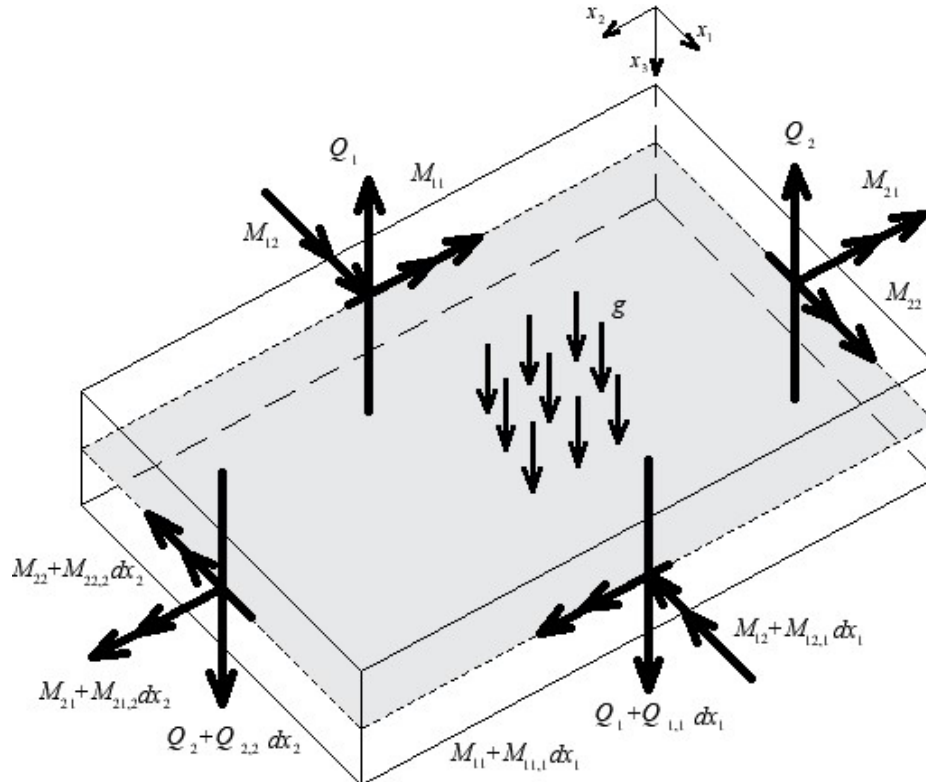


Figura 2.6 Elemento de placa. Fonte: Autor.

Ao impor equilíbrio sobre os esforços que atuam na placa é possível escrever algumas relações, como:

$$q_{i,i} + g = 0 \quad (2.17)$$

$$M_{ij,j} - q_i = 0 \quad (2.18)$$

tratando-se g como o carregamento externo.

Vale notar que na teoria de placas de Kirchhoff as forças cortantes não são calculadas diretamente por meio da tensão, devido a não consideração das distorções. Entretanto, são escritas em função da linha elástica da placa, utilizando-se (2.18) e (2.11), resultando em:

$$q_i = -Dw_{,ijj} \quad (2.19)$$

Derivando-se a equação (2.18) em relação à i e substituindo na equação (2.17), chega-se à equação diferencial de placas em função dos momentos, resultando em:

$$M_{ij,ij} + g = 0 \quad (2.20)$$

A equação diferencial de placa delgadas, agora em função do deslocamento transversal, é obtida substituindo a equação (2.11) em (2.20):

$$w_{,iiij} = \frac{g}{D} \quad (2.21)$$

sendo:

$$w_{,iiij} = \nabla^2_{,jj} = \nabla^2 \nabla^2 w = \nabla^4 w \quad (2.22)$$

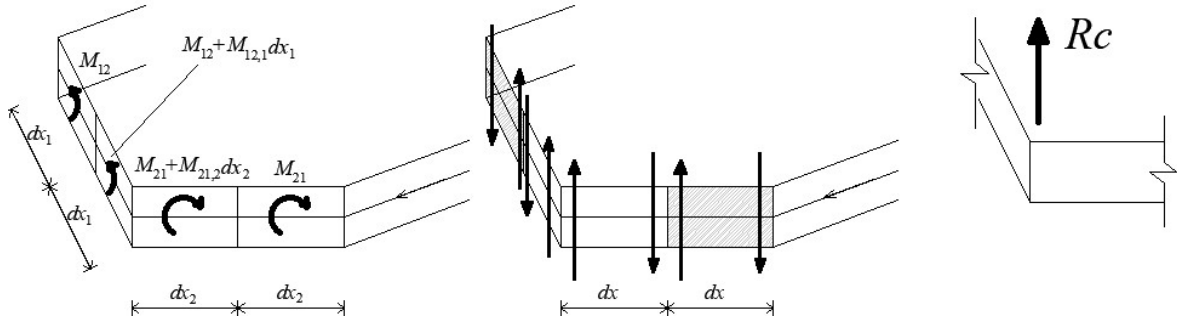


Figura 2.7 – Condições nas bordas. Fonte: Autor.

Há três valores de forças de superfície no contorno da placa, e estes estão associados a três valores de deslocamentos. Contudo, a equação diferencial da placa é de quarta ordem, ocasionando a necessidade de satisfazer duas condições de contorno em cada lado da placa, obrigando a eliminar uma força de superfície, bem como o deslocamento a ela relacionado, por ser diretamente dependente das demais. Com isso, surge uma força cortante equivalente ou força de Kirchhoff, denominada por Kirchhoff (1850) após demonstrar que as condições de contorno relativas à força cortante e ao momento de torção deveriam ser agrupadas numa única condição. A Figura 2.7 ilustra um elemento infinitesimal auxiliar que permite analisar o caso. Nesse elemento atua um momento resultante M_{ns} , alternativamente escrito $M_{ns} = m_{ns}ds$, e que pode ser substituído por um binário de forças equivalente, aplicadas nas extremidades do elemento. É importante notar que, em consequência da não contribuição da parcela da deformação por cortante, respeitando as condições de ortogonalidade e planicidade da teoria de Kirchhoff, a força cortante equivalente não é mais obtida via tensões, mas agora por meio do equilíbrio. Com isso, os valores de contorno relativos a Q_n e M_{ns} podem ser agrupados, recebendo a denominação de cortante equivalente V_n , escrita na forma:

$$V_n = q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (2.23)$$

Além disso, chama-se atenção que a substituição de forças não interfere na flexão da placa, pois não modifica os valores de M_{ns} .

Em regiões do contorno onde existem angulações ou alterações na direção do elemento se faz necessária uma análise complementar. Tome, assim, um canto i qualquer da placa, como é mostrado também na Figura 2.7. Devido ao cadenciamento dos momentos volventes posterior e anterior a esse canto, surge uma resultante não nula, dado às reações

de apoio correspondentes a cada lado. Tal resultante é denominada reação de canto R_c e é dada por:

$$R_{ci} = M_{ns}^+ - M_{ns}^- \quad (2.24)$$

Um caso particular de interesse está associado a placas circulares submetidas a carregamentos axissimétricos, cuja equação de equilíbrio (2.21) em coordenadas polares fica:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{g}{D} \quad (2.25)$$

De acordo com Chueiri (1994), os momentos (fletores e volventes) e a força cortante no contorno da placa circular sob carregamento axissimétrico são dados por:

$$M_n = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} [\nu + (1 - \nu)(r_{,i} n_i)^2] + \frac{\partial w}{r \partial r} [\nu + (1 - \nu)(r_{,i} s_i)^2] \right\} \quad (2.26)$$

$$M_{ns} = -D(1 - \nu)(r_{,i} n_i)(r_{,i} s_i) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \quad (2.27)$$

$$q_n = -D(r_{,i} n_i) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 w}{r \partial r^2} - \frac{\partial w}{r^2 \partial r} \right) \quad (2.28)$$

Também em coordenadas polares, a equação da força de Kirchhoff fica:

$$\begin{aligned} V_n = & -D(1 - \nu) \left\{ (r_{,i} n_i) \left[\left((r_{,i} s_i)^2 + \frac{1}{1 - \nu} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 w}{r \partial r^2} - \frac{\partial w}{r^2 \partial r} \right) \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{1 - 4(r_{,i} s_i)^2}{r} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \right] \\ & \left. - \frac{1}{R} [1 - 2(r_{,i} s_i)^2] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

sendo R o raio de curvatura do contorno da placa.

As derivadas direcionais do deslocamento em relação à normal:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.30)$$

As representações integrais requerem que sejam calculadas as derivadas direcionais dos esforços em coordenadas polares. Segundo Chueiri (1994) essas relações podem ser dadas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n}{\partial m} = & \frac{D(1-\nu)}{r} (m_i n_i - (r_{,i} n_i)(r_{,i} m_i)) \left\{ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 w}{r \partial r^2} - \frac{\partial w}{r^2 \partial r} \right) [(r_{,i} s_i)^2 \right. \\ & + \left. \frac{1}{1-\nu}] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \left[\frac{1 - 4(r_{,i} s_i)^2}{r} \right] \right\} \\ & + D(1-\nu) r_{,i} n_i \left\{ r_{,i} m_i \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{\partial^3 w}{r \partial r^3} + 2 \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial r^2} - 2 \frac{\partial w}{r^3 \partial r} \right) \left[(r_{,i} s_i)^2 + \frac{1}{1-\nu} \right] \right. \\ & + 2(r_{,i} s_i) (m_i s_i - (r_{,i} s_i)(r_{,i} m_i)) \left(\frac{\partial^3 w}{r \partial r^3} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial r^2} - \frac{\partial w}{r^3 \partial r} \right) \left. \right\} \\ & + \frac{D(1-\nu)}{R} \left\{ (r_{,i} m_i) \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} [(r_{,i} s_i)^2 - 1] + \right. \\ & + \left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial w}{r \partial r} \right) [2(m_i s_i)(r_{,i} s_i) - (r_{,i} m_i)(r_{,i} s_i)^2 + (r_{,i} m_i)] \right\} \quad (2.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n}{\partial m} = & -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} [\nu + (1-\nu)(r_{,i} n_i)^2] (r_{,i} m_i) + \right. \\ & + \frac{\partial^2 w}{r \partial r^2} [(1-\nu)(2(m_i s_i)(r_{,i} s_i) - r_{,i} m_i(2(r_{,i} n_i)^2 - 2(r_{,i} s_i)^2)) + r_{,i} m_i \nu] \\ & - \left. \frac{\partial w}{r^2 \partial r} [3r_{,i} m_i(1-\nu)(r_{,i} s_i)^2 + r_{,i} m_i \nu - 2(m_i s_i)(r_{,i} s_i)(1-\nu)] \right\} \quad (2.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ns}}{\partial m} = & D(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} (r_{,i} n_i)(r_{,i} s_i)(r_{,i} m_i) \left(\frac{\partial w}{r^2 \partial r} - \frac{\partial^2 w}{r \partial r^2} \right) [(r_{,i} s_i)(m_i n_i \right. \\ & - (r_{,i} n_i)(r_{,i} m_i)) + (r_{,i} m_i)(m_i s_i - (r_{,i} s_i)(r_{,i} m_i)) \\ & + \left. (r_{,i} n_i)(r_{,i} s_i)(r_{,i} m_i)] \right\} \quad (2.33) \end{aligned}$$

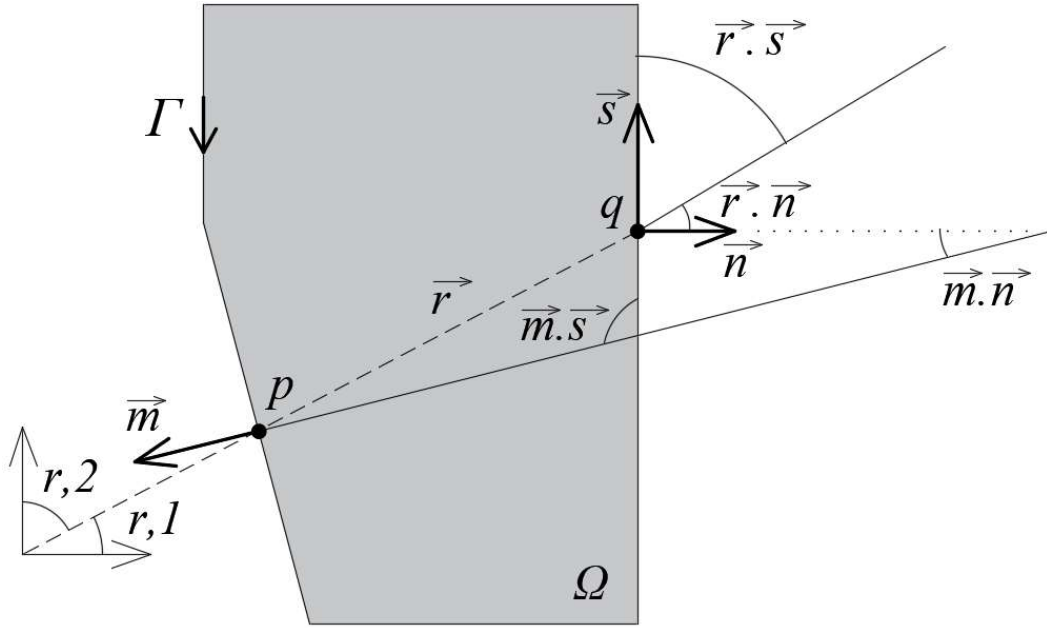


Figura 2.8 – Ponto “p” e “q” do contorno da placa e os vetores \vec{r} , \vec{m} , \vec{n} e \vec{s}

Em relação à direção x_i , no ponto q , as derivadas de $r = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$ são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x_i(p)} = \frac{x_i(q) - x_i(p)}{r} = -r_{,i} \\ \frac{\partial r_{,i}}{\partial x_j(p)} = -\frac{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}}{r} = -r_{,ij} \end{cases} \quad (2.34)$$

Um caso, sobretudo de interesse de placas circulares sob carregamento axissimétrico para o MEC, é o denominado problema fundamental, cujas características são:

a) Placa de raio infinito na qual é aplicada uma fonte $\delta(p, q)$ no ponto fonte p com leitura de seus efeitos no ponto campo q . Sendo $\delta(p, q)$ ou $\delta(p - q)$ definido como delta de Dirac, cujas propriedades são:

$$\begin{cases} \delta(p, q) = 0, \text{ se } p \neq q \\ \delta(p, q) = \infty, \text{ se } p = q \end{cases} \quad (2.35)$$

e

$$\int_{\Omega_\infty} \phi(p) \delta(p, q) d\Omega_\infty = \phi(q) \quad (2.36)$$

b) O problema contém todas as propriedades mecânicas do problema real, ou seja, a mesma coerência física.

Com base nisso, tem-se que as equações de equilíbrio do problema fundamental de placas delgadas isoladas são análogas àsquelas do problema real (2.21), de forma que sua equação governante pode ser escrita como:

$$D\nabla^4 w^*(p, q) = \delta(p, q) \quad (2.37)$$

A solução da equação governante do problema fundamental (2.37) é denominada de solução fundamental. De acordo com Bazine (1978), a solução pode ser escrita como:

$$w^*(p, q) = \frac{r^2 \ln(r)}{8\pi D} \quad (2.38)$$

Stern (1979) propôs também uma solução alternativa para esse problema fundamental:

$$w^*(p, q) = \frac{r^2}{8\pi D} \left[\ln(r) - \frac{1}{2} \right] \quad (2.39)$$

Em Paiva (1987), Karam (1986), Chueiri (1994) são encontradas as soluções fundamentais de placas delgadas livres de bases elásticas em esforços e suas derivadas correspondentes às equações (2.26), (2.27), (2.29), (2.31) e (2.33).

2.2 Placas sobre fundação elástica de Winkler

Winkler (1867) propôs um modelo simplista que assume a camada elástica como um conjunto de molas mutuamente independentes espaçadas infinitesimalmente, ilustrado na Figura 2.9.

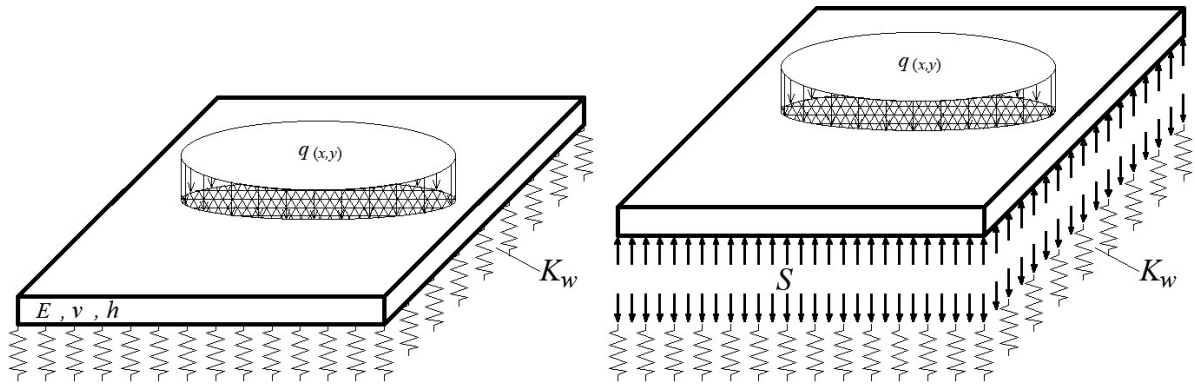


Figura 2.9 – Representação da camada elástica de Winkler. Fonte: Autor.

Dessa maneira, é assumido que a intensidade da reação da camada elástica em um dado ponto é diretamente proporcional à deflexão nesse ponto, ou seja, há um único parâmetro mecânico, que define sua rigidez:

$$S = K_w w \quad (2.40)$$

onde w é o deslocamento da placa e K_w o parâmetro da rigidez da camada elástica.

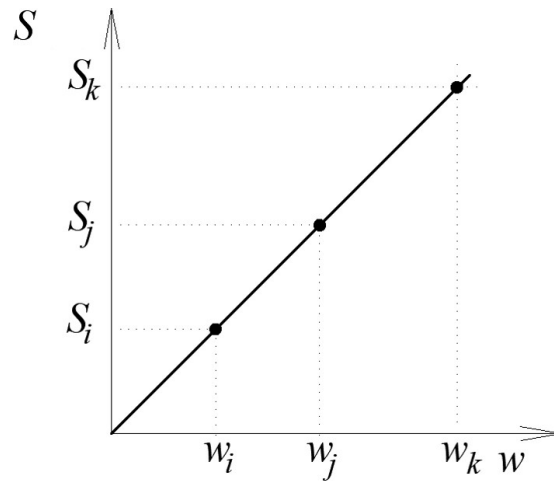


Figura 2.10 - Proporcionalidade da mola de Winkler. Fonte: Autor.

Considerando certa homogeneidade da camada elástica, sua rigidez pode assumir valor constante, fazendo com que o problema descrito por tal modelo seja relativamente simples.

O funcional da energia de deformação de uma placa apoiada em base de Winkler pode ser dado por:

$$\delta\pi = \int_{\Omega} (M_{ij}\delta w_{,ij} + K_w w \delta w) d\Omega \quad (2.41)$$

O trabalho externo das cargas é escrito na forma:

$$\delta W = \int_{\Omega} g \delta w d\Omega \quad (2.42)$$

Fazendo-se duas integrações por partes apropriadamente em (2.39), aplicando o princípio de minimização de energia chega-se à expressão:

$$\delta\pi - \delta W = \int_{\Omega} (M_{ij,ij} + K_w - g) \delta w d\Omega = 0 \quad (2.43)$$

Assim a equação de equilíbrio do problema fica:

$$M_{ij,ij} + K_w - g = 0 \quad (2.44)$$

Substituindo a equação (2.11) em (2.44), chega-se à:

$$\nabla^4 w = \frac{(g - K_w w)}{D} \quad (2.45)$$

Consoante ao que foi mencionado anteriormente, define-se como problema fundamental, uma placa de domínio infinito sujeita a uma carga transversal unitária em um ponto "q" deste domínio, conforme indicado na Figura 2.11.

A equação governante do problema fundamental é análoga àquela do problema real (2.45), assumindo-se o carregamento externo como fonte pontual dada pelo delta de Dirac em:

$$\nabla^4 w^* + \frac{K_w w^*}{D} = \frac{\delta(p, q)}{D} \quad (2.46)$$

A Figura 2.11 consiste num sistema de coordenadas polares como origem no ponto "p". Nota-se que é um problema com simetria em relação à origem do sistema, sugerindo a utilização da formulação feita para esses casos, como no item anterior, de placa simples.

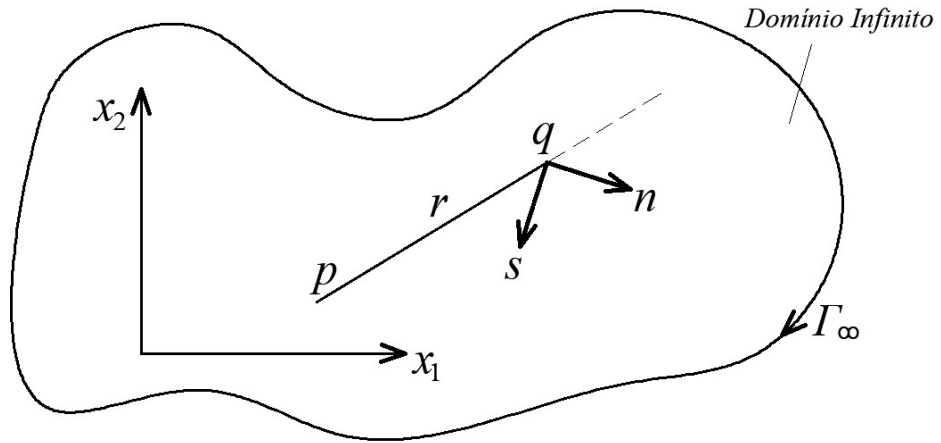


Figura 2.11 - Pontos de carregamento "p" e de deslocamento "q". Fonte: Autor.

Brebbia e Costa (1985) propõem a solução fundamental de placas sobre fundação elástica de Winkler:

$$w^* = -\frac{kei(\rho)}{2\pi D\lambda^{1/2}} \quad (2.47)$$

Tratando-se $\rho = \lambda r$, $\lambda = \sqrt{K_w/D}$, kei como uma das funções de Kelvin, que está descrita em Abramowitz e Stegun (1972).

Em Manzoli (1992) podem ser encontradas as demais soluções fundamentais em deslocamento e esforços, inclusive suas derivadas superiores, de placas simples apoiadas em base elástica de Winkler.

2.3 Placas sobre fundação elástica de Pasternak

Na Figura 2.12 está representada uma placa delgada simples em uma base de Pasternak (1954), que diferentemente do modelo de Winkler, leva em consideração as interações entre as molas, implicando numa transmissão de efeitos para fora das regiões diretamente mobilizadas. São idealizadas molas, sendo estas ligadas a uma camada incompressível, que resiste apenas as deformações por cisalhamento.

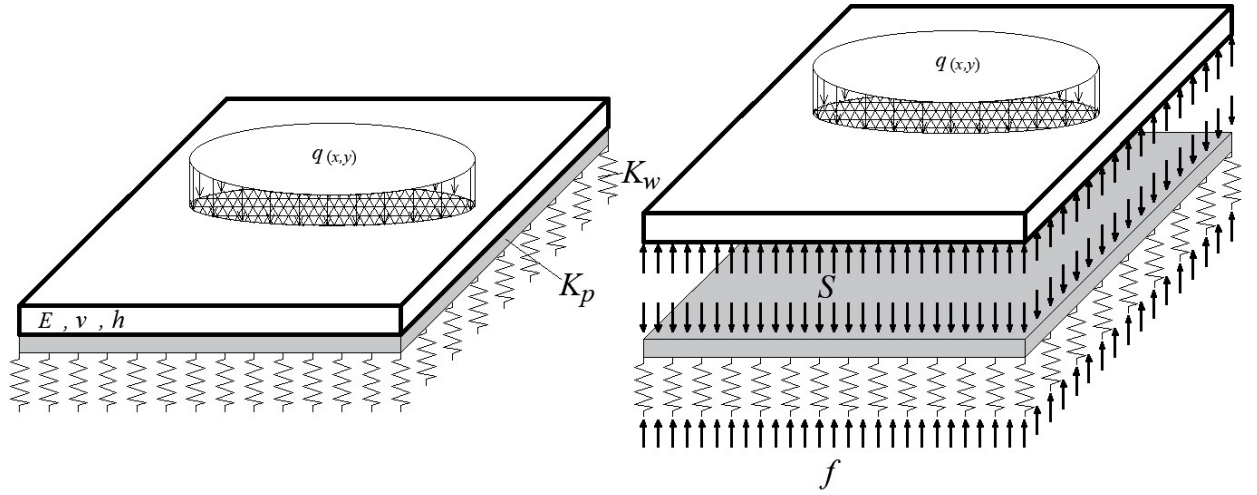


Figura 2.12 – Representação da camada elástica de Pasternak. Fonte: Autor.

Além do modelo da base elástica de Pasternak levar em consideração dois parâmetros, constante de mola (K_w) e constante da camada cisalhamento (G_p), também é assumido uma proporção entre as tensões cisalhantes da camada de cisalhamento e as distorções, implicando que a força cortante na camada de cisalhamento seja proporcional a inclinação da elástica.

As forças cortantes atuantes na camada de cisalhamento são:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int \sigma_{13} dx_3 \\ P_2 &= \int \sigma_{23} dx_3 \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde as direções das forças cortantes na camada de cisalhamento são determinadas pela integração de σ_{13} e σ_{23} , ao longo da camada.

De acordo com a lei de Hooke, as tensões tangenciais transversais podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= G_p \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_{23} &= G_p \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde G_p é o módulo de elasticidade transversal da camada cisalhante.

Visto que a camada de cisalhamento se estende infinitamente no plano xy , pode-se assumir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cong 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cong 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

As tensões na camada de cisalhamento podem ser reescritas substituindo as equações descritas em (2.49) em (2.48):

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \int_{-h/2}^{h/2} G_P \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_3 \\ \sigma_{23} = \int_{-h/2}^{h/2} G_P \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_3 \end{cases} \quad (2.51)$$

Shukla et al. (2011) considera que K_P é dado por $K_P = G_P H$, sendo H a espessura da camada. Assim, as forças cortantes na camada podem ser escritas como:

$$\begin{cases} P_1 = K_P \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ P_2 = K_P \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{cases} \quad (2.52)$$

As forças cortantes em (2.52) podem ser escritas inicialmente como:

$$P_i = K_P w_{,i} \quad (2.53)$$

O funcional da energia de deformação de uma placa apoiada em camada elástica de Pasternak pode ser dado por:

$$\delta\pi = \int_{\Omega} (M_{ij} \delta w_{,ij} + K_w w \delta w - K_P w_{,1} \delta w_{,1} - K_P w_{,2} \delta w_{,2}) d\Omega \quad (2.54)$$

O trabalho externo das cargas é escrito na forma:

$$\delta W = \int_{\Omega} g \delta w d\Omega \quad (2.55)$$

Fazendo-se duas integrações por partes apropriadamente, aplicando o princípio de minimização de energia chega-se à expressão:

$$\begin{aligned}\delta\pi - \delta W &= \int_{\Omega} (M_{ij}\delta w_{,ij} + K_w w \delta w - K_P w_{,11}\delta w - K_P w_{,22}\delta w - g\delta w) d\Omega \\ &= 0\end{aligned}\quad (2.56)$$

Que pode ser rescrita da seguinte maneira:

$$\delta\pi - \delta W = \int_{\Omega} (M_{ij,ij} + K_w w - K_P w_{,ii} - g) \delta w d\Omega = 0 \quad (2.57)$$

Assim a equação de equilíbrio do problema fica:

$$M_{ij,ij} + K_w w - K_P w_{,ii} - g = 0 \quad (2.58)$$

Substituindo-se (2.10) em (2.56), chega-se na equação governante:

$$\nabla^4 w = \frac{(g + K_P \nabla^2 w - K_w w)}{D} \quad (2.59)$$

Já as forças cortantes equivalentes de Kirchhoff no contorno em placas delgadas sobre base de Pasternak recebem uma contribuição da camada de cisalhamento:

$$V_n = q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + K_P \frac{\partial w}{\partial n} \quad (2.60)$$

O problema fundamental de placa delgada sobre fundação de Pasternak, tomando a mesma definição descrita previamente no modelo de placa sobre fundação de Winkler, é caracterizado também por uma placa de raio infinito na qual é aplicada uma fonte no ponto "p" com leitura de seus efeitos no ponto "q" (ponto fonte e ponto campo, respectivamente) que possui todas as propriedades do problema real. Dessa maneira, por analogia ao caso anterior, a equação de equilíbrio fundamental para o caso de placas delgadas sobre base de Pasternak é escrita na forma:

$$D\nabla^4 w^* + K_w w^* - K_P \nabla^2 w^* = \delta(p, q) \quad (2.61)$$

A equação (2.61) ainda pode ser reescrita na forma da equação governante do problema fundamental proposta por Balaš *et al.* (1982):

$$\nabla^4 w^* - 2x\nabla^2 w^* + w^* = \frac{g}{K_w} \quad (2.62)$$

$$\text{Sendo } x = \frac{K_P}{2\sqrt{K_w D}} \geq 0.$$

A equação (2.62), proposta por Balaš *et al* (1982), pode ser organizada da seguinte forma:

$$(\nabla^2 - a^2)(\nabla^2 - b^2)w^* = \frac{\delta(p, q)}{K_w} \quad (2.63)$$

$$\text{Equivalendo } a^2 = x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ e } b^2 = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

Balaš *et al* (1982) sugerem diferentes soluções fundamentais dependendo do intervalo de variação de x :

Quando $x > 1$, a solução fundamental da equação (2.63) é dada por:

$$w^* = -\frac{K_0(ar) - K_0(br)}{4\pi\sqrt{x^2 - 1}} \quad (2.64)$$

Onde $K_0(zr)$ é uma função de Bessel Modificada da segunda espécie e ordem zero.

No caso de $0 \leq x < 1$, um novo parâmetro ψ é introduzido por $x = \cos 2\eta$; $\eta \in (0; \pi/4)$, e os parâmetros a e b tornam complexos conjugados, $a = e^{i\eta} = \bar{b}$, onde $i = \sqrt{-1}$. Então de (2.63), e usando a relação $\overline{K_v} = K_{\bar{v}}(\bar{z})$ as funções de Bessel modificadas de ordem v , obtém-se:

$$w^* = -\frac{\text{Im}[K_0(e^{i\eta}r)]}{4\pi \text{sen}(2\psi)} \quad (2.65)$$

Correspondendo $\text{Im}[K_0(zr)]$ é a parte imaginária de $K_0(zr)$. No caso de $x = 0$, que corresponde fisicamente a uma fundação de Winkler, $\eta = \pi/4$ então:

$$w^* = -\frac{Kei(r)}{2\pi} \quad (2.66)$$

Quando $x = 1$, a solução fundamental, segundo Balaš *et al.* (1982), é dada por:

$$w^* = \frac{rK_1(r)}{4\pi} \quad (2.67)$$

3 FUNDAMENTOS DE PLACAS DUPLAS

3.1 Introdução

Neste capítulo encontram-se expostas as relações matemáticas que regem os problemas de placas duplas delgadas elasticamente conectadas. Soluções fundamentais são deduzidas pela primeira vez para problemas de placas duplas interconectadas por uma camada elástica de Pasternak.

3.2 Placa Dupla Elasticamente Conectada

3.2.1 Equação Governante

Na Figura 3.1 uma placa dupla com camada elástica de Pasternak é apresentada. Os deslocamentos da placa superior e inferior são representados, respectivamente por w e v . As propriedades da placa superior (E_1, ν_1, h_1) e inferior (E_2, ν_2, h_2) são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal, o coeficiente de Poisson e a espessura da placa. Os carregamentos são representados por g_1 , na placa superior, e g_2 , na inferior.

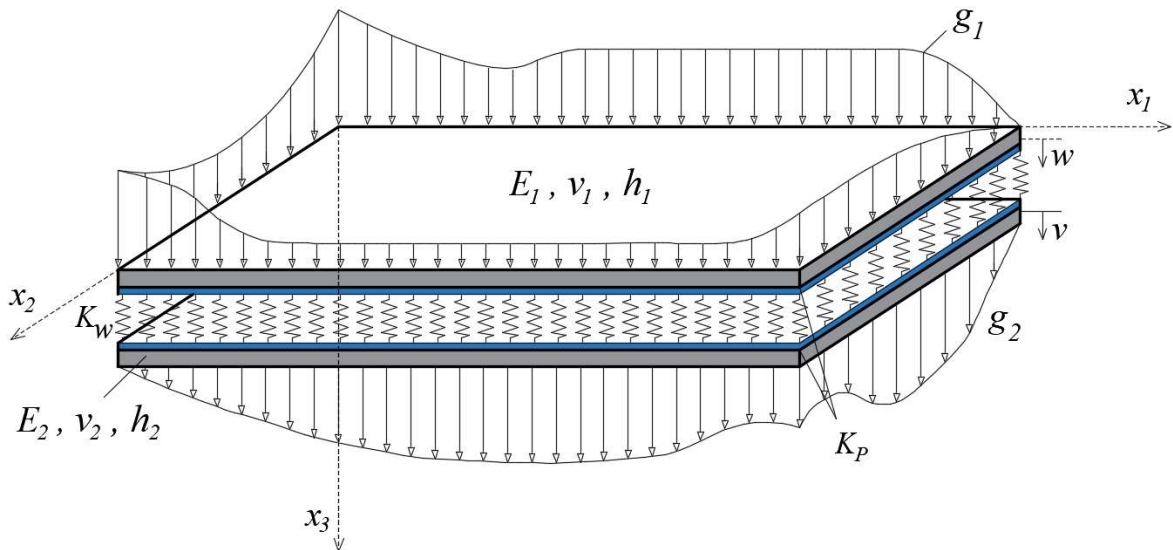


Figura 3.1 – Placa dupla elasticamente conectada por camada de Pasternak

O funcional da energia de deformação de uma placa apoiada em base de Pasternak pode ser dado por:

$$\begin{aligned} \delta\pi = \int_{\Omega} [& M_{ij}\delta w_{,ij} + T_{ij}\delta v_{,ij} + K_w(w-v)(\delta w - \delta v) \\ & + K_P(w_{,1} - v_{,1})(\delta w_{,1} - \delta v_{,1}) + K_P(w_{,2} - v_{,2})(\delta w_{,2} - \delta v_{,2})] d\Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

O trabalho externo das cargas é escrito na forma:

$$\delta W = \int_{\Omega} (g_1\delta w + g_2\delta v) d\Omega \quad (3.2)$$

Fazendo-se duas integrações por partes apropriadamente, aplicando o princípio de minimização de energia chega-se à expressão:

$$\begin{aligned} \delta\pi - \delta W = \int_{\Omega} \{ & [M_{ij,ij} + K_w(w-v) - K_P(w_{,11} - v_{,11}) - K_P(w_{,22} - v_{,22}) - g_1]\delta w \\ & + [T_{ij,ij} - K_w(w-v) + K_P(w_{,11} - v_{,11}) + K_P(w_{,22} - v_{,22}) - g_2]\delta v \} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

A equação (3.3) pode ser rescrita na forma:

$$\begin{aligned} \delta\pi - \delta W = \int_{\Omega} \{ & [M_{ij,ij} + K_w(w-v) - K_P(w_{,ii} - v_{,ii}) - g_1]\delta w \\ & + [T_{ij,ij} - K_w(w-v) + K_P(w_{,ii} - v_{,ii}) - g_2]\delta v \} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

O princípio da conservação de energia impõe $\delta\pi - \delta W = 0$. Sendo assim:

$$[M_{ij,ij} + K_w(w-v) - K_P(w_{,ii} - v_{,ii}) - g_1] = 0 \quad (3.5)$$

$$[T_{ij,ij} - K_w(w-v) + K_P(w_{,ii} - v_{,ii}) - g_2] = 0 \quad (3.6)$$

De forma semelhante a (2.11), para o sistema de placas duplas tem-se as seguintes relações momento-curvatura:

$$M_{ij} = -D_1[\delta_{ij}w_{,kk} \nu_1 + (1 - \nu_1)w_{,ij}] \quad (3.7)$$

$$T_{ij} = -D_2[\delta_{ij}v_{,kk} \nu_2 + (1 - \nu_2)v_{,ij}] \quad (3.8)$$

onde D_1 e D_2 significam o módulo de rigidez à flexão das placas superior e inferior, respectivamente.

As equações de equilíbrio em deslocamentos de placas duplas com camada elástica de Pasternak são então obtidas pela substituição respectiva de (3.7) e (3.8) em (3.5) e (3.6):

$$\begin{cases} D_1 \nabla^4 w - K_P \nabla^2 w + K_w w + K_P \nabla^2 v - K_w v = g_1 \\ D_2 \nabla^4 v - K_P \nabla^2 v + K_w v + K_P \nabla^2 w - K_w w = g_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

E rescritas na forma matricial chega-se à:

$$[B][u] = \{f\} \quad (3.10)$$

Equivalendo:

$$[B] = \begin{bmatrix} D_1 \nabla^4 - K_P \nabla^2 + K_w & K_P \nabla^2 - K_w \\ K_P \nabla^2 - K_w & D_2 \nabla^4 - K_P \nabla^2 + K_w \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$[u] = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\{f\} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Convém notar que as equações de equilíbrio (3.9), deduzidas nesta tese via princípios variacionais, são análogas àquelas da vibração de placas duplas apresentadas por Nasirshoaibi e Nohammadi (2015) se forem desprezados os termos inerciais.

Em relação a cortante equivalente de Kirchhoff, uma parcela referente a camada de cisalhamento deve ser adicionada, ficando:

$$V_1 = q_1 + M_{12,2} + K_P(w_{,1} - v_{,1}) \quad (3.14)$$

$$V_2 = q_2 + M_{21,1} + K_P(w_{,2} - v_{,2}) \quad (3.15)$$

$$Q_1 = p_1 + T_{12,2} - K_P(w_{,1} - v_{,1}) \quad (3.16)$$

$$Q_2 = p_2 + T_{21,1} - K_P(w_{,2} - v_{,2}) \quad (3.17)$$

No contorno, as resultantes de esforços na placa superior e inferior são:

$$M_n = M_{kl}n_k n_l = -D_1(1 - \nu_1) \left[w_{,kl}n_k n_l + \frac{\nu_1}{(1 - \nu_1)} w_{,pp} \right] \quad (3.18)$$

$$M_{ns} = M_{kl}n_k s_l = -D_1(1 - \nu_1) w_{,kl}n_k s_l \quad (3.19)$$

$$V_n = M_{kl,l}n_k + M_{ns,s} + K_P(w_{,n} - v_{,n}) \quad (3.20)$$

$$T_n = T_{kl}n_k n_l = -D_2(1 - \nu_2) \left[v_{,kl}n_k n_l + \frac{\nu_2}{(1 - \nu_2)} v_{,pp} \right] \quad (3.21)$$

$$T_{ns} = T_{kl}n_k s_l = -D_2(1 - \nu_2) v_{,kl}n_k s_l \quad (3.22)$$

$$Q_n = T_{kl,l}n_k + T_{ns,s} - K_P(w_{,n} - v_{,n}) \quad (3.23)$$

3.2.2 Problema Fundamental

O problema fundamental de um sistema de placas conectadas pode ser associado com um domínio infinito. O problema real está contido no fundamental e, assim, o problema fundamental é governado por relações similares aplicadas no problema real, de modo que as equações governantes fundamentais são análogas às equações governantes reais.

Aplicando-se primeiramente a fonte concentrada na placa superior, $g_1^{1*}(p, q) = \delta(p, q)$ e $g_2^{1*}(p, q) = 0$, obtem-se:

$$\begin{bmatrix} D_1 \nabla^4 - K_P \nabla^2 + K_w & K_P \nabla^2 - K_w \\ K_P \nabla^2 - K_w & D_2 \nabla^4 - K_P \nabla^2 + K_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^{1*}(p, q) \\ v^{1*}(p, q) \end{Bmatrix} = \delta(p, q) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Fazendo agora o mesmo processo na placa inferior, $g_2^{2*}(p, q) = \delta(p, q)$ e $g_1^{2*}(p, q) = 0$, fica:

$$\begin{bmatrix} D_1 \nabla^4 - K_P \nabla^2 + K_w & K_P \nabla^2 - K_w \\ K_P \nabla^2 - K_w & D_2 \nabla^4 - K_P \nabla^2 + K_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^{2*}(p, q) \\ v^{2*}(p, q) \end{Bmatrix} = \delta(p, q) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Ou em termos de esforços, as equações governantes (3.24) ficam:

$$\begin{cases} -M_{ij,jj}^{2*}(p, q) + K_w[w^{2*}(p, q) - v^{2*}(p, q)] = \delta(p, q) \\ -T_{ij,jj}^{2*}(p, q) - K_w[w^{2*}(p, q) - v^{2*}(p, q)] = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

A partir das equações (3.24) e (3.25), chega-se à equação governante do problema fundamental na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} D_1 \nabla^4 - K_P \nabla^2 + K_w & K_P \nabla^2 - K_w \\ K_P \nabla^2 - K_w & D_2 \nabla^4 - K_P \nabla^2 + K_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{1*}(p, q) & w^{2*}(p, q) \\ v^{1*}(p, q) & v^{2*}(p, q) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

A equação (3.27) ainda pode ser escrita na forma compacta como:

$$[B][G^*] = \{f^*\} \quad (3.28)$$

sendo $[B]$ é a matriz dos operadores, $[G^*]$ a matriz de influência dos deslocamentos e rotações e $\{f^*\}$ a matriz dos esforços:

$$[B] = \begin{bmatrix} D_1 \nabla^4 - K_P \nabla^2 + K_w & K_P \nabla^2 - K_w \\ K_P \nabla^2 - K_w & D_2 \nabla^4 - K_P \nabla^2 + K_w \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$[G^*] = \begin{bmatrix} w^{1*}(p, q) & w^{2*}(p, q) \\ v^{1*}(p, q) & v^{2*}(p, q) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\{f^*\} = \begin{bmatrix} g^{1*} & 0 \\ 0 & g^{2*} \end{bmatrix} = \delta(p, q)[I] \quad (3.31)$$

onde g^{i*} é o carregamento fundamental aplicado na placa i , δ é o Delta de Dirac. Os pontos campo e pontos fonte são denotados por q e \hat{p} , e $[I]$ é a matriz identidade. w^{1*} e v^{1*} são os deslocamentos da placa superior e inferior devido a fonte na placa superior, conforme indicado na Figura 3.2. Por outro lado, w^{2*} e v^{2*} são os deslocamentos da placa superior e inferior devido a fonte na placa inferior.

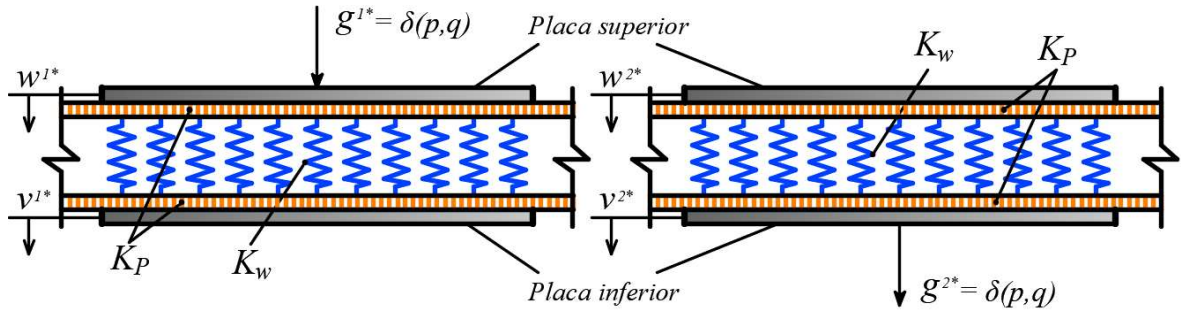


Figura 3.2 – Problemas fundamentais do sistema, com base elástica de Pasternak: (a) Fonte na placa superior; (b) Fonte na placa inferior. Fonte: Autor.

A equação (3.28) constitui-se em um sistema acoplado de equações em termo das variáveis w_{ij} , cuja solução pode ser encontrada se ela a for transformada numa equação equivalente desacoplada. Para tanto, pode ser utilizada uma técnica de desacoplamento, como - por exemplo - o método de Hörmander (1963). Esse método assume uma solução para equação (3.28) considerando a função escalar $\psi(p, q)$:

$$[G^*] = [B^{cof}]^T \psi(r) \quad (3.32)$$

Equivalendo $[B^{cof}]^T$ à matriz de cofatores de $[B]$ dada pela equação (3.29). Substituindo a matriz dos deslocamentos da equação (3.32) na equação (3.28):

$$[B][B^{cof}]^T \psi(r) = \{f^*\} \quad (3.33)$$

A equação (3.33) pode ser reduzida a:

$$[B][B]^{-1} \det[B] \psi(r) = \{f^*\} \quad (3.34)$$

Após simplificações a equação governante equivalente e desacoplada do problema fundamental pode ser escrita:

$$\det[B] \psi(r) = \delta(p, q) \quad (3.35)$$

ou

$$\nabla^4 [D_1 D_2 \nabla^4 - K_P (D_1 + D_2) \nabla^2 + K_W (D_1 + D_2)] \psi(r) = \delta(p, q) \quad (3.36)$$

Admitindo $\nabla^2 = z$ na equação (3.36), a equação característica fica:

$$D_1 D_2 z^2 - K_P (D_1 + D_2) z + K_w (D_1 + D_2) = 0 \quad (3.37)$$

E suas raízes são dadas pela forma:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{K_P}{2} \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) + \sqrt{\frac{K_P^2}{4} \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right)^2 - K_w \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right)} \\ z_2 = \frac{K_P}{2} \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) - \sqrt{\frac{K_P^2}{4} \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right)^2 - K_w \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right)} \end{cases} \quad (3.38)$$

Desta forma, as soluções da função ψ propostas neste trabalho dependem da natureza das raízes dadas em (3.38).

Convém notar que as soluções fundamentais do sistema (3.35) estão correlacionadas com a função $\psi(r)$ pela relação de Hörmander (1963) em (3.32). No caso de placas duplas com camada de Pasternak essas relações são dadas por:

$$\begin{bmatrix} w^{1*} & w^{2*} \\ v^{1*} & v^{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (D_2 \nabla^4 - K_P \nabla^2 + K_w) \psi(r) & (K_w - K_P \nabla^2) \psi(r) \\ (K_w - K_P \nabla^2) \psi(r) & (D_1 \nabla^4 - K_P \nabla^2 + K_w) \psi(r) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Finalmente, os deslocamentos fundamentais podem ser dados explicitamente substituindo-se (3.56), (3.63) e (3.64) em (3.39), resultando em:

$$w^{1*} = c \{ D_2 \nabla^4 \psi(r) - K_P \nabla^2 \psi(r) + K_w \psi(r) \} \quad (3.40)$$

$$w^{2*} = c \{ K_w \psi(r) - K_P \nabla^2 \psi(r) \} \quad (3.41)$$

$$v^{1*} = w^{2*} \quad (3.42)$$

$$v^{2*} = c \{ D_1 \nabla^4 \psi(r) - K_P \nabla^2 \psi(r) + K_w \psi(r) \} \quad (3.43)$$

As derivadas das soluções dos deslocamentos são apresentadas de forma mais detalhada para cada caso mais adiante. As soluções fundamentais para os esforços de momento fletor podem ser obtidas de forma análoga:

$$M_n^{1*} = -D_1 \left\{ \frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} [v_1 + (1 - v_1)(r_{,i} n_i)^2] + \frac{1}{r} \frac{dw^{1*}}{dr} [v_1 + (1 - v_1)(r_{,i} s_i)^2] \right\} \quad (3.44)$$

$$T_n^{1*} = -D_2 \left\{ \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} [v_2 + (1 - v_2)(r_{,i} n_i)^2] + \frac{1}{r} \frac{dv^{1*}}{dr} [v_2 + (1 - v_2)(r_{,i} s_i)^2] \right\} \quad (3.45)$$

$$M_n^{2*} = -D_1 \left\{ \frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} [v_1 + (1 - v_1)(r_{,i} n_i)^2] + \frac{1}{r} \frac{dw^{2*}}{dr} [v_1 + (1 - v_1)(r_{,i} s_i)^2] \right\} \quad (3.46)$$

$$T_n^{2*} = -D_2 \left\{ \frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} [v_2 + (1 - v_2)(r_{,i} n_i)^2] + \frac{1}{r} \frac{dv^{2*}}{dr} [v_2 + (1 - v_2)(r_{,i} s_i)^2] \right\} \quad (3.47)$$

A mesma nomenclatura utilizada para os deslocamentos fundamentais é utilizada para as fundamentais de esforços, sendo M_n o momento fletor da placa superior e T_n o momento fletor da placa inferior.

Mesma notação dos momentos fletores é aplicada aos momentos volventes que são dados por:

$$M_{ns}^{1*} = -D_1 (1 - v_1) (r_{,i} n_i) (r_{,j} s_j) \left(\frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{1*}}{dr} \right) \quad (3.48)$$

$$T_{ns}^{1*} = -D_2 (1 - v_2) (r_{,i} n_i) (r_{,j} s_j) \left(\frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv^{1*}}{dr} \right) \quad (3.49)$$

$$M_{ns}^{2*} = -D_1 (1 - v_1) (r_{,i} n_i) (r_{,j} s_j) \left(\frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{2*}}{dr} \right) \quad (3.50)$$

$$T_{ns}^{2*} = -D_2 (1 - v_2) (r_{,i} n_i) (r_{,j} s_j) \left(\frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv^{2*}}{dr} \right) \quad (3.51)$$

As soluções fundamentais das forças cortantes de Kirchhoff na placa superior e inferior ficam:

$$\begin{aligned}
V_n^{1*} = & -D_1(1 - \nu_1) \left\{ [(1 - \nu_1)^{-1} + (r_{,i} s_i)^2] \left(\frac{d^3 w^{1*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{1*}}{dr} \right) (r_{,i} n_i) \right. \\
& + [1 - 4(r_{,i} s_i)^2] \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{1*}}{dr} \right) (r_{,i} n_i) \\
& \left. - \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{1*}}{dr} \right) [1 - 2(r_{,i} s_i)^2] \right\} + K_P \left(\frac{dw^{1*}}{dr} - \frac{dv^{1*}}{dr} \right) (r_{,i} n_i) \quad (3.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_n^{1*} = & -D_2(1 - \nu_2) \left\{ [(1 - \nu_2)^{-1} + (r_{,i} s_i)^2] \left(\frac{d^3 v^{1*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dv^{1*}}{dr} \right) (r_{,i} n_i) \right. \\
& + [1 - 4(r_{,i} s_i)^2] \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dv^{1*}}{dr} \right) (r_{,i} n_i) \\
& \left. - \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv^{1*}}{dr} \right) [1 - 2(r_{,i} s_i)^2] \right\} + K_P \left(\frac{dv^{1*}}{dr} - \frac{dw^{1*}}{dr} \right) (r_{,i} n_i) \quad (3.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_n^{2*} = & -D_1(1 - \nu_1) \left\{ [(1 - \nu_1)^{-1} + (r_{,i} s_i)^2] \left(\frac{d^3 w^{2*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{2*}}{dr} \right) (r_{,i} n_i) \right. \\
& + [1 - 4(r_{,i} s_i)^2] \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{2*}}{dr} \right) (r_{,i} n_i) \\
& \left. - \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{2*}}{dr} \right) [1 - 2(r_{,i} s_i)^2] \right\} + K_P \left(\frac{dw^{2*}}{dr} - \frac{dv^{2*}}{dr} \right) (r_{,i} n_i) \quad (3.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_n^{2*} = & -D_2(1 - \nu_2) \left\{ [(1 - \nu_2)^{-1} + (r_{,i} s_i)^2] \left(\frac{d^3 v^{2*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dv^{2*}}{dr} \right) (r_{,i} n_i) \right. \\
& + [1 - 4(r_{,i} s_i)^2] \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dv^{2*}}{dr} \right) (r_{,i} n_i) \\
& \left. - \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv^{2*}}{dr} \right) [1 - 2(r_{,i} s_i)^2] \right\} + K_P \left(\frac{dv^{2*}}{dr} - \frac{dw^{2*}}{dr} \right) (r_{,i} n_i) \quad (3.55)
\end{aligned}$$

sendo V_n e Q_n os esforços cortantes equivalentes de Kirchhoff da placa superior e inferior.

3.2.2.1 Caso I: raízes complexas e conjugadas

Se $K_P < \frac{2K_W}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ então z_1 e z_2 serão complexas e conjugadas. Desta forma a solução

de ψ proposta para o problema é dada por:

$$\psi(r) = c \left\{ \frac{r^2 \ln(r)}{4} + a \ln(r) + a \operatorname{Re}[K_0(r\sqrt{z_1})] + fat \operatorname{Im}[K_0(r\sqrt{z_1})] \right\} \quad (3.56)$$

onde:

$$c = \frac{1}{2\pi z_1 z_2 D_1 D_2} \quad (3.57)$$

$$fat = (1 - a^2 z_1 z_2 / 2) / \beta \quad (3.58)$$

$$\beta = \operatorname{Im}(z_1) \quad (3.59)$$

$$a = 1/z_1 + 1/z_2 \quad (3.60)$$

sendo $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ as partes real e imaginária das raízes complexas z , respectivamente.

As soluções fundamentais propostas neste trabalho são dependentes das relações envolvendo funções de Bessel modificada de segunda espécie e de ordens zero e um, $K_0(z)$ e $K_1(z)$, cuja expansão genérica em série é dada por:

$$\begin{aligned} K_n(x) = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left\{ \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} [\varphi(r+1) + \varphi(n+r+1)] \right\} \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2k} \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde:

$$\begin{cases} \varphi(r+1) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r}\right) - \gamma \\ \varphi(1) = -\gamma \\ \varphi(n+r+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+r} - \gamma \end{cases} \quad (3.62)$$

sendo $\gamma = 0,5772156649$ a constante de Euler-Mascheroni.

Conforme mostrados em (3.39), os deslocamentos fundamentais dependem também do laplaciano e biarmônico da função $\psi(r)$, que podem ser escritas como:

$$\nabla^2 \psi(r) = c \{ \ln(r) + 1 + a/r + a \operatorname{Re}[z_1 K_0(r\sqrt{z_1})] + fat \operatorname{Im}[z_1 K_0(r\sqrt{z_1})] \} \quad (3.63)$$

$$\nabla^4 \psi(r) = c \{ a \operatorname{Re}[z_1^2 K_0(r\sqrt{z_1})] + fat \operatorname{Im}[z_1^2 K_0(r\sqrt{z_1})] \} \quad (3.64)$$

Conforme mostrado nas expressões dos esforços, podem ser requeridas até as derivadas de quarta ordem dos deslocamentos. Isto implica que as derivadas até a quarta ordem da função ψ e seus respectivos laplacianos e biarmônicos devem ser escritos.

A primeira derivada de ψ , $\psi_1 = \frac{d\psi}{dr}$, e seus laplaciano e biarmônico ficam:

$$\psi_1(r) = c \left\{ \frac{r[2 \ln(r) + 1]}{4} + a/r + a \operatorname{Re}[d_{10}] + fat \operatorname{Im}[d_{10}] \right\} \quad (3.65)$$

$$\nabla^2 \psi_1(r) = c \{ 1/r + a \operatorname{Re}[z_1 d_{10}] + fat \operatorname{Im}[z_1 d_{10}] \} \quad (3.66)$$

$$\nabla^4 \psi_1(r) = c \{ a \operatorname{Re}[z_1^2 d_{10}] + fat \operatorname{Im}[z_1^2 d_{10}] \} \quad (3.67)$$

onde:

$$d_{10} = -\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) \quad (3.68)$$

Para a segunda derivada de ψ , $\psi_2 = \frac{d^2\psi}{dr^2}$, laplaciano e biarmônico resultam em:

$$\psi_2(r) = c \left\{ \frac{3}{4} + \frac{\ln(r)}{2} - \frac{a}{r^2} + a \operatorname{Re}[d_{20}] + fat \operatorname{Im}[d_{20}] \right\} \quad (3.69)$$

$$\nabla^2 \psi_2(r) = c \left\{ -\frac{1}{r^2} + a \operatorname{Re}[z_1 d_{20}] + fat \operatorname{Im}[z_1 d_{20}] \right\} \quad (3.70)$$

$$\nabla^4 \psi_2(r) = c \{ a \operatorname{Re}[z_1^2 d_{20}] + fat \operatorname{Im}[z_1^2 d_{20}] \} \quad (3.71)$$

onde:

$$d_{20} = z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) + z_1 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{r\sqrt{z_1}} \quad (3.72)$$

Derivando ψ mais uma vez, escrevendo $\psi_3 = \frac{d^3\psi}{dr^3}$, e seus laplaciano e biharmônico:

$$\psi_3 = c \left\{ \frac{1}{2r} + 2a/r^3 + a \operatorname{Re}[d_{21}] + fat \operatorname{Im}[d_{21}] \right\} \quad (3.73)$$

$$\nabla^2 \psi_3 = c \left\{ \frac{2}{r^3} + a \operatorname{Re}[z_1 d_{21}] + fat \operatorname{Im}[z_1 d_{21}] \right\} \quad (3.74)$$

$$\nabla^4 \psi_3 = c \{ a \operatorname{Re}[z_1^2 d_{21}] + fat \operatorname{Im}[z_1^2 d_{21}] \} \quad (3.75)$$

onde:

$$d_{21} = -z_1 [K_0(r\sqrt{z_1})/r + \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) + 2 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{r^2 \sqrt{z_1}}] \quad (3.76)$$

Por fim, derivando ψ novamente, $\psi_4 = \frac{d^4\psi}{dr^4}$, seu laplaciano e biharmônico são escritos:

$$\psi_4 = c \left\{ -\frac{r^2 + 12a}{2r^4} + a \operatorname{Re}[d_{22}] + fat \operatorname{Im}[d_{22}] \right\} \quad (3.77)$$

$$\nabla^2 \psi_4 = c \left\{ -\frac{6}{r^4} + a \operatorname{Re}[z_1 d_{22}] + fat \operatorname{Im}[z_1 d_{22}] \right\} \quad (3.78)$$

$$\nabla^4 \psi_4 = c \{ a \operatorname{Re}[z_1^2 d_{22}] + fat \operatorname{Im}[z_1^2 d_{22}] \} \quad (3.79)$$

onde:

$$d_{22} = z_1 \left(\frac{3K_0(r\sqrt{z_1})}{r^2} + z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) + \frac{2\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1})}{r} + \frac{6K_1(r\sqrt{z_1})}{r^3 \sqrt{z_1}} \right) \quad (3.80)$$

3.2.2.2 Caso II: raízes reais, positivas e distintas

Para se obter z_1 e z_2 como raízes reais positivas e distintas, a condição de $K_p > \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$,

deverá ser obedecida. A solução proposta para esse caso será:

$$\psi(r) = c \left\{ \frac{r^2 \ln(r)}{4} + \frac{a}{b} \ln(r) + (a_1 + z_1 b_1) K_0(r\sqrt{z_1}) - (a_1 + z_2 b_1) K_0(r\sqrt{z_2}) \right\} \quad (3.81)$$

$$a = z_1 + z_2 \quad (3.82)$$

$$b = z_1 z_2 \quad (3.83)$$

$$d = z_1 - z_2 \quad (3.84)$$

$$a_1 = \frac{1}{d} - \frac{a^2}{bd} \quad (3.85)$$

$$b_1 = \frac{a}{bd} \quad (3.86)$$

De acordo com (3.39), os deslocamentos fundamentais dependem da função ψ e de seus laplacianos e biarmônicos, cujas formas explícitas são:

$$\nabla^2 \psi = c \{ \ln(r) + (a_1 + z_1 b_1) z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) - (a_1 + z_2 b_1) z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) + 1 \} \quad (3.87)$$

$$\nabla^4 \psi = c \{ (a_1 + z_1 b_1) z_1^2 K_0(r\sqrt{z_1}) - (a_1 + z_2 b_1) z_2^2 K_0(r\sqrt{z_2}) \} \quad (3.88)$$

A primeira derivada de ψ , $\psi_1 = \frac{d\psi}{dr}$, e seus laplaciano e biarmônico ficam:

$$\psi_1 = c \left\{ \frac{r}{4} + \frac{r \ln(r)}{2} + \frac{a}{br} - (a_1 + z_1 b_1) d_{10} + (a_1 + z_2 b_1) e_{10} \right\} \quad (3.89)$$

$$\nabla^2 \psi_1 = c \left\{ \frac{1}{r} + -(a_1 + z_1 b_1) z_1 d_{10} + (a_1 + z_2 b_1) z_2 e_{10} \right\} \quad (3.90)$$

$$\nabla^4 \psi_1 = c \{ -(a_1 + z_1 b_1) z_1^2 d_{10} + (a_1 + z_2 b_1) z_2^2 e_{10} \} \quad (3.91)$$

onde:

$$d_{10} = \sqrt{z_1} K_1(r \sqrt{z_1}) \quad (3.92)$$

$$e_{10} = \sqrt{z_2} K_1(r \sqrt{z_2}) \quad (3.93)$$

Para a segunda derivada de ψ , $\psi_2 = \frac{d^2 \psi}{dr^2}$, laplaciano e biharmônico resultam em:

$$\psi_2 = c \left\{ \frac{3}{4} + \frac{\ln(r)}{2} - \frac{a}{br^2} + (a_1 + z_1 b_1) d_{20} - (a_1 + z_2 b_1) e_{20} \right\} \quad (3.94)$$

$$\nabla^2 \psi_2 = c \left\{ -\frac{1}{r^2} + (a_1 + z_1 b_1) z_1 d_{20} - (a_1 + z_2 b_1) z_2 e_{20} \right\} \quad (3.95)$$

$$\nabla^4 \psi_2 = c \{ (a_1 + z_1 b_1) z_1^2 d_{20} - (a_1 + z_2 b_1) z_2^2 e_{20} \} \quad (3.96)$$

onde:

$$d_{20} = z_1 K_0(r \sqrt{z_1}) + \frac{\sqrt{z_1} K_1(r \sqrt{z_1})}{r} \quad (3.97)$$

$$e_{20} = z_2 K_0(r \sqrt{z_2}) + \frac{\sqrt{z_2} K_1(r \sqrt{z_2})}{r} \quad (3.98)$$

Derivando ψ mais uma vez, escrevendo $\psi_3 = \frac{d^3 \psi}{dr^3}$, e seus laplaciano e biharmônico:

$$\psi_3 = c \left\{ \frac{1}{2r} + \frac{2a}{br^3} - (a_1 + z_1 b_1) d_{30} + (a_1 + z_2 b_1) e_{30} \right\} \quad (3.99)$$

$$\nabla^2 \psi_3 = c \left\{ \frac{1}{2r^3} - (a_1 + z_1 b_1) z_1 d_{30} + (a_1 + z_2 b_1) z_2 e_{30} \right\} \quad (3.100)$$

$$\nabla^4 \psi_3 = c \{ -(a_1 + z_1 b_1) z_1^2 d_{30} + (a_1 + z_2 b_1) z_2^2 e_{30} \} \quad (3.101)$$

onde:

$$d_{30} = \left(z_1 + \frac{2}{r^2} \right) \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) + \frac{z_1 K_0(r\sqrt{z_1})}{r} \quad (3.102)$$

$$e_{30} = \left(z_2 + \frac{2}{r^2} \right) \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) + \frac{z_2 K_0(r\sqrt{z_2})}{r} \quad (3.103)$$

Por fim, derivando ψ novamente, $\psi_4 = \frac{d^4 \psi}{dr^4}$, seu laplaciano e biarmônico são escritos:

$$\psi_4 = c \left\{ -\frac{1}{2r^2} - \frac{6a}{br^4} + (a_1 + z_1 b_1) d_{40} - (a_1 + z_2 b_1) e_{40} \right\} \quad (3.104)$$

$$\nabla^2 \psi_4 = c \left\{ -\frac{6}{r^4} + (a_1 + z_1 b_1) z_1 d_{40} - (a_1 + z_2 b_1) z_2 e_{40} \right\} \quad (3.105)$$

$$\nabla^4 \psi_4 = c \{ (a_1 + z_1 b_1) z_1^2 d_{40} - (a_1 + z_2 b_1) z_2^2 e_{40} \} \quad (3.106)$$

onde:

$$d_{40} = \left(z_1 + \frac{3}{r^2} \right) \left[z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) + \frac{2\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1})}{r} \right] \quad (3.107)$$

$$e_{40} = \left(z_2 + \frac{3}{r^2} \right) \left[z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{2\sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2})}{r} \right] \quad (3.108)$$

3.2.2.3 Caso III: raízes reais iguais

Se $K_P = \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$, então z_1 e z_2 serão reais, positivas e iguais, onde a solução proposta

será:

$$\psi(r) = c \left\{ \frac{r^2 \ln(r)}{4} + \frac{a_1}{2\sqrt{z_1}} r K_1(r\sqrt{z_1}) + b_1 (\ln(r) + K_0(r\sqrt{z_1})) \right\} \quad (3.109)$$

onde:

$$a_1 = 1 \quad (3.110)$$

$$b_1 = \frac{2}{z_1} \quad (3.111)$$

Conforme já foi discutido nas seções anteriores, as soluções fundamentais de deslocamentos e esforços podem ser obtidas utilizando-se as seguintes relações explícitas:

$$\nabla^2 \psi = c \left\{ \ln(r) + 1 + [b_1 z_1 - 1] K_0(r\sqrt{z_1}) + \left[\frac{r\sqrt{z_1}}{2} \right] K_1(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (3.112)$$

$$\nabla^4 \psi = c \left\{ [b_1 z_1^2 - 2z_1] K_0(r\sqrt{z_1}) + \left[\frac{r\sqrt{z_1} z_1}{2} \right] K_1(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (3.113)$$

A primeira derivada de ψ , $\psi_1 = \frac{d\psi}{dr}$, e seus laplaciano e biarmônico ficam:

$$\psi_1 = c \left\{ \frac{r[2 \ln(r) + 1]}{4} + \frac{b_1}{r} - \left[\frac{r}{2} \right] K_0(r\sqrt{z_1}) + [b_1 z_1] K_1(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (3.114)$$

$$\nabla^2 \psi_1 = c \left\{ \frac{1}{r} - \left[\frac{a_1 z_1 r}{2} \right] K_0(r\sqrt{z_1}) + [a_1 \sqrt{z_1} - b_1 \sqrt{z_1} z_1] K_1(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (3.115)$$

$$\nabla^4 \psi_1 = c \left\{ - \left[\frac{a_1 z_1^2 r}{2} \right] K_0(r\sqrt{z_1}) + [2a_1 \sqrt{z_1} z_1 - b_1 \sqrt{z_1} z_1^2] K_1(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (3.116)$$

Para a segunda derivada de ψ , $\psi_2 = \frac{d^2\psi}{dr^2}$, laplaciano e biarmônico resultam em:

$$\psi_2 = c \left\{ \frac{\ln(r)}{2} + \frac{3}{4} - \frac{b_1}{r^2} + \left[b_1 z_1 - \frac{a_1}{2} \right] K_0(r\sqrt{z_1}) \right\}$$

$$+ \left[\frac{b_1 \sqrt{z_1}}{r} + \frac{a_1 r \sqrt{z_1}}{2} \right] K_1(r \sqrt{z_1}) \} \quad (3.117)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_2 = c \left\{ -\frac{1}{r^2} + \left[b_1 z_1^2 - \frac{3a_1 z_1}{2} \right] K_0(r \sqrt{z_1}) \right. \\ \left. + \left[\frac{b_1 \sqrt{z_1} z_1}{r} - a_1 \left(\frac{\sqrt{z_1}}{r} - \frac{r \sqrt{z_1} z_1}{2} \right) \right] K_1(r \sqrt{z_1}) \right\} \end{aligned} \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 \psi_2 = c \left\{ \left[b_1 z_1^3 - \frac{5a_1 z_1^2}{2} \right] K_0(r \sqrt{z_1}) \right. \\ \left. + \left[\frac{b_1 \sqrt{z_1} z_1^2}{r} - a_1 \left(\frac{2\sqrt{z_1} z_1}{r} - \frac{r \sqrt{z_1} z_1^2}{2} \right) \right] K_1(r \sqrt{z_1}) \right\} \end{aligned} \quad (3.119)$$

onde derivando ψ mais uma vez, escrevendo $\psi_3 = \frac{d^3 \psi}{dr^3}$, e seus laplaciano e biarmônico:

$$\begin{aligned} \psi_3 = c \left\{ \frac{2b_1}{r^3} + \frac{2}{r} - \left[\frac{a_1 z_1 r}{2} + \frac{b_1 z_1}{r} \right] K_0(r \sqrt{z_1}) \right. \\ \left. + \left[\frac{a_1 \sqrt{z_1}}{2} - b_1 \left(\sqrt{z_1} z_1 + \frac{2\sqrt{z_1}}{r^2} \right) \right] K_1(r \sqrt{z_1}) \right\} \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_3 = c \left\{ \frac{2}{r^3} + \left[a_1 \left(\frac{z_1}{r} - \frac{z_1^2 r}{2} \right) - \frac{b_1 z_1^2}{r} \right] K_0(r \sqrt{z_1}) \right. \\ \left. + \left[a_1 \left(\frac{3z_1 \sqrt{z_1}}{2} + \frac{2\sqrt{z_1}}{r^2} \right) - b_1 \left(\sqrt{z_1} z_1^2 + \frac{2z_1 \sqrt{z_1}}{r^2} \right) \right] K_1(r \sqrt{z_1}) \right\} \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 \psi_3 = c \left\{ \left[a_1 \left(\frac{2z_1^2}{r} - \frac{z_1^3 r}{2} \right) - \frac{b_1 z_1^3}{r} \right] K_0(r \sqrt{z_1}) \right. \\ \left. + \left[a_1 \left(\frac{5z_1^2 \sqrt{z_1}}{2} + \frac{4z_1 \sqrt{z_1}}{r^2} \right) - b_1 \left(\sqrt{z_1} z_1^3 + \frac{2z_1^2 \sqrt{z_1}}{r^2} \right) \right] K_1(r \sqrt{z_1}) \right\} \end{aligned} \quad (3.122)$$

Por fim, derivando ψ novamente, $\psi_4 = \frac{d^4 \psi}{dr^4}$, seu laplaciano e biarmônico são escritos:

$$\psi_4 = c \left\{ -\frac{1}{2r^2} - \frac{6b_1}{r^4} + \left[b_1 \left(\frac{3z_1}{r^2} + z_1^2 \right) - a_1 z_1 \right] K_0(r \sqrt{z_1}) \right.$$

$$+ \left[b_1 \left(\frac{2\sqrt{z_1}z_1}{r} + \frac{6\sqrt{z_1}}{r^3} \right) - a_1 \left(\frac{\sqrt{z_1}}{2r} - \frac{r\sqrt{z_1}z_1}{2} \right) \right] K_1(r\sqrt{z_1}) \} \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_4 = c \left\{ -\frac{6}{r^4} + \left[a_1 \left(-\frac{3z_1}{r^2} - 2z_1^2 \right) + b_1 \left(\frac{3z_1^2}{r^2} + z_1^3 \right) \right] K_0(r\sqrt{z_1}) \right. \\ \left. + \left[a_1 \left(\frac{5z_1^2\sqrt{z_1}}{2} - \frac{5z_1\sqrt{z_1}}{2r} - \frac{6\sqrt{z_1}}{r^3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + b_1 \left(\frac{2z_1^2\sqrt{z_1}}{r} + \frac{6z_1\sqrt{z_1}}{r^3} \right) \right] K_1(r\sqrt{z_1}) \right\} \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 \psi_4 = c \left\{ \left[a_1 \left(-\frac{6z_1^2}{r^2} - 3z_1^3 \right) + b_1 \left(\frac{3z_1^3}{r^2} + z_1^4 \right) \right] K_0(r\sqrt{z_1}) \right. \\ \left. + \left[a_1 \left(\frac{z_1^3\sqrt{z_1}}{2} - \frac{12z_1\sqrt{z_1}}{r^3} - \frac{9z_1^2\sqrt{z_1}}{2r} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + b_1 \left(\frac{2z_1^3\sqrt{z_1}}{r} + \frac{6z_1^2\sqrt{z_1}}{r^3} \right) \right] K_1(r\sqrt{z_1}) \right\} \end{aligned} \quad (3.125)$$

4 EQUAÇÕES INTEGRAIS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Nessa seção, são apresentadas as construções das representações integrais e algébricas para os problemas de placas duplas com base elástica de Pasternak. Ainda neste capítulo, é discorrida a transformação das equações integrais de domínio do carregamento em equações integrais de contorno. E por fim, são apresentadas as estratégias de formação do sistema algébrico, a começar da definição dos elementos de contorno até o cálculo das integrações envolvidas.

4.1 Equações Integrais em Pontos de Domínio

Existe basicamente duas formas de proporcionar a transformação das equações diferenciais de equilíbrio do problema em equações integrais equivalentes: uma alternativa é aplicando os fundamentos de energia, no caso, o Teorema da Reciprocidade de Betti, e a outra por meio do Método dos resíduos Ponderados. Neste trabalho, optou-se por empregar a reciprocidade de Betti para obtenção das equações integrais para placas duplas com camada elástica de Pasternak.

No problema real são mobilizadas um estado de tensões e deformações $(\sigma_{ij}^{sup}, \sigma_{ij}^{inf}, \varepsilon_{ij}^{sup}, \varepsilon_{ij}^{inf})$ bidimensionais nas placas superior e inferior devido à aplicação de carregamentos externos g_1 e g_2 . Seja um segundo estado de tensões e deformações $(\sigma_{ij}^{sup*1}, \sigma_{ij}^{inf*1}, \varepsilon_{ij}^{sup*1}, \varepsilon_{ij}^{inf*1})$ associado à aplicação da fonte na placa superior do problema fundamental de placas duplas. Com isso, aplicando o teorema da reciprocidade, uma relação entre o problema real e o fundamental pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \int_V \sigma_{ij}^{sup}(q) \varepsilon_{ij}^{sup*1}(p, q) dV + \int_V \sigma_{ij}^{inf}(q) \varepsilon_{ij}^{inf*1}(p, q) dV \\ & + \int_{\Omega} K_w [w(q) - v(q)] [w^{1*}(p, q) - v^{1*}(p, q)] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} K_p [w_{,i}(q) - v_{,i}] [w_{,i}^{1*}(p, q) - v_{,i}^{1*}(p, q)] d\Omega = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_V \sigma_{ij}^{sup*1}(p, q) \varepsilon_{ij}^{sup}(q) dV + \int_V \sigma_{ij}^{inf*1}(p, q) \varepsilon_{ij}^{inf}(q) dV \\
&+ \int_{\Omega} K_w [w^{1*}(p, q) - v^{1*}(p, q)] [w(q) - v(q)] d\Omega \\
&- \int_{\Omega} K_p [w_{,i}^{1*}(p, q) - v_{,i}^{1*}(p, q)] [w_{,i}(q) - v_{,i}] d\Omega
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde V é o volume e Ω é o domínio das placas.

Tomando as relações deformação-curvatura das placas $\varepsilon_{ij}^{sup} = -zw_{,ij}$, $\varepsilon_{ij}^{inf} = -zv_{,ij}$, relações momentos-tensões $\int \sigma_{ij}^{sup} z dz = M_{ij}$, $\int \sigma_{ij}^{inf} z dz = T_{ij}$ na equação (4.1) pode ser reescrita:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} M_{ij}(q) w_{,ij}^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij}(q) v_{,ij}^{1*}(p, q) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} K_w (w(q) - v(q)) (w^{1*}(p, q) - v^{1*}(p, q)) d\Omega \\
&- \int_{\Omega} K_p [w_{,i}(q) - v_{,i}] [w_{,i}^{1*}(p, q) - v_{,i}^{1*}(p, q)] d\Omega \\
&= \int_{\Omega} M_{ij}^{1*}(p, q) w_{,ij}(q) d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij}^{1*}(p, q) v_{,ij}(q) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} K_w (w^{1*}(p, q) - v^{1*}(p, q)) (w(q) - v(q)) d\Omega \\
&- \int_{\Omega} K_p [w_{,i}^{1*}(p, q) - v_{,i}^{1*}(p, q)] [w_{,i}(q) - v_{,i}] d\Omega
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Efetuada integração por partes nas duas primeiras parcelas no lado esquerdo de (4.2) fica:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} M_{ij}(q) w_{,ij}^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij}(q) v_{,ij}^{1*}(p, q) d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} M_{ij}(q) w_{,i}^{1*}(p, q) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} T_{ij}(q) v_{,i}^{1*}(p, q) n_j d\Gamma \\
&- \int_{\Omega} M_{ij,j}(q) w_{,i}^{1*}(p, q) d\Omega - \int_{\Omega} T_{ij,j}(q) v_{,i}^{1*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Também operando uma integração por partes na quarta parcela no lado esquerdo de (4.2):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} K_p [w_{,i}(q) - v_{,i}] [w_{,i}^{1*}(p, q) - v_{,i}^{1*}(p, q)] d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} K_p [w_{,i}(q) - v_{,i}(q)] w^{1*}(p, q) n_i d\Gamma - \int_{\Omega} K_p [w_{,ii}(q) - v_{,ii}(q)] w^{1*}(p, q) d\Omega + \\
&+ \int_{\Gamma} K_p [w_{,i}(q) - v_{,i}(q)] v^{1*}(p, q) n_i d\Gamma - \int_{\Omega} K_p [w_{,ii}(q) - v_{,ii}(q)] v^{1*}(p, q) d\Omega \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Manipulando os momentos fletores e volventes no contorno na placa superior e inferior, respectivamente, $M_n = M_{ij} n_i n_j$ e $M_{ns} = M_{ij} n_i s_j$, $T_n = T_{ij} n_i n_j$, e $T_{ns} = T_{ij} n_i s_j$, multiplicando-se M_n por $n_k w_{,k}^{1*}$, T_n por $n_k v_{,k}^{1*}$, M_{ns} por $s_k w_{,k}^{1*}$, T_{ns} por $s_k v_{,k}^{1*}$, seguida da soma desses resultados, chega-se à:

$$\begin{aligned}
& M_n n_k w_{,k}^{1*} + M_{ns} s_k w_{,k}^{1*} + T_n n_k v_{,k}^{1*} + T_{ns} s_k v_{,k}^{1*} \\
&= M_{ij} n_i w_{,k}^{1*} (n_j n_k + s_j s_k) + T_{ij} n_i v_{,k}^{1*} (n_j n_k + s_j s_k)
\end{aligned} \quad (4.5)$$

Sendo válida a seguinte identidade:

$$\delta_{jk} = n_j n_k + s_j s_k \quad (4.6)$$

Ao relacionar as equações (4.5) e (4.6), tem-se:

$$M_n n_k w_{,k}^{1*} + M_{ns} s_k w_{,k}^{1*} + T_n n_k v_{,k}^{1*} + T_{ns} s_k v_{,k}^{1*} = M_{ij} n_i w_{,j}^{1*} + T_{ij} n_i v_{,j}^{1*} \quad (4.7)$$

Substituindo-se (4.7) nas parcelas das integrais definidas no contorno na equação (4.3) fica:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} M_{ij}(q) n_j w_{,i}^{1*}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_{ij}(q) n_j v_{,i}^{1*}(p, q) d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma} M_{ns}(q) w_{,k}^{1*}(p, q) s_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_{ns}(q) v_{,k}^{1*}(p, q) s_k d\Gamma \quad (4.8)
\end{aligned}$$

As últimas integrais em (4.8) em regiões do contorno que apresentarem uma angularidade (canto), vide Figura 3.1, podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} M_{ns}(q) w_{,k}^{1*}(p, q) s_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_{ns}(q) v_{,k}^{1*}(p, q) s_k d\Gamma \\
&= [M_{ns}(q) w^{1*}(p, q) + T_{ns}(q) v_k^{1*}(p, q) s_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} \\
&- \int_{\Gamma} M_{ns,s}(q) w^{1*}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ns,s}(q) v^{1*}(p, q) d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Substituindo (4.9) e (4.8) em (4.3), chega-se em:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} M_{ij}(q) w_{,ij}^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij}(q) v_{,ij}^{1*}(p, q) d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma \\
&+ [M_{ns}(q) w^{1*}(p, q) + T_{ns}(q) v_k^{1*}(p, q) s_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} \\
&- \int_{\Gamma} M_{ns,s}(q) w^{1*}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ns,s}(q) v^{1*}(p, q) d\Gamma \\
&- \int_{\Omega} M_{ij,j}(q) w_{,i}^{1*}(p, q) d\Omega - \int_{\Omega} T_{ij,j}(q) v_{,i}^{1*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ao aplicar uma integração por partes nas duas últimas parcelas de (4.10) tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} M_{ij}(q) w_{,ij}^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij}(q) v_{,ij}^{1*}(p, q) d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma \\
&+ [M_{ns}(q) w^{1*}(p, q) + T_{ns}(q) v_k^{1*}(p, q) s_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} \\
&- \int_{\Gamma} [M_{ij,j}(q) n_i + M_{ns,s}(q)] w^{1*}(p, q) d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma} [T_{ij,j}(q)n_i + T_{ns,s}(q)]v^{1*}(p,q)d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} [M_{ij,j}(q)n_i]w^{1*}(p,q)d\Gamma - \int_{\Gamma} [T_{ij,j}(q)n_i]v^{1*}(p,q)d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} M_{ij,ij}(q)w^{1*}(p,q)d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij,ij}(q)v^{1*}(p,q)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Subtraindo-se a primeira e terceira integrais do lado direito em (4.4) de (4.11) tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} M_{ij}(q)w_{,ij}^{1*}(p,q)d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij}(q)v_{,ij}^{1*}(p,q)d\Omega \\
& - \int_{\Omega} K_p[w_{,i}(q) - v_{,i}] [w_{,i}^{1*}(p,q) - v_{,i}^{1*}(p,q)]d\Omega \\
& = \int_{\Gamma} M_n(q)w_{,k}^{1*}(p,q)n_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_n(q)v_{,k}^{1*}(p,q)n_k d\Gamma \\
& + [M_{ns}(q)w^{1*}(p,q) + T_{ns}(q)v_k^{1*}(p,q)s_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} \\
& - \int_{\Gamma} [M_{ij,j}(q)n_i + M_{ns,s}(q) + K_p[w_{,i}(q) - v_{,i}(q)]]w^{1*}(p,q)d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} [T_{ij,j}(q)n_i + T_{ns,s}(q) - K_p[w_{,i}(q) - v_{,i}(q)]]v^{1*}(p,q)d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} [M_{ij,j}(q)n_i]w^{1*}(p,q)d\Gamma - \int_{\Gamma} [T_{ij,j}(q)n_i]v^{1*}(p,q)d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} [M_{ij,ij}(q) + K_p[w_{,ii}(q) - v_{,ii}(q)]]w^{1*}(p,q)d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [T_{ij,ij}(q) + K_p[w_{,ii}(q) - v_{,ii}(q)]]v^{1*}(p,q)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Tendo em vista que $R_c^{sup} = -[M_{ns}]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2}$ e $R_c^{inf} = -[T_{ns}]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2}$ são as reações de canto nas placas superior e inferior, e ainda que as cortantes equivalentes de Kirchhoff nas placas superior e inferior, em específico com fundação de Pasternak, são dadas por $V_n = M_{ij,j}n_i + M_{ns,s} + K_p(w_{,n} - v_{,n})$ e $Q_n = T_{ij,j}n_i + M_{ns,s} - K_p(w_{,n} - v_{,n})$, a equação (4.11) pode reescrita como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} M_{ij}(q)w_{,ij}^{1*}(p,q)d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij}(q)v_{,ij}^{1*}(p,q)d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} M_n(q)w_{,k}^{1*}(p,q)n_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_n(q)v_{,k}^{1*}(p,q)n_k d\Gamma \\
&\quad - \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_c^{1*} - \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} w_c^{1*} \\
&\quad - \int_{\Gamma} V_n(q)w^{1*}(p,q)d\Gamma - \int_{\Gamma} Q_n(q)v^{1*}(p,q)d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma} M_n(q)w_{,k}^{1*}(p,q)n_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_n(q)v_{,k}^{1*}(p,q)n_k d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Omega} [M_{ij,ij}(q) + K_p[w_{,ii}(q) - v_{,ii}(q)]]w^{1*}(p,q)d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} [T_{ij,ij}(q) + K_p[w_{,ii}(q) - v_{,ii}(q)]]v^{1*}(p,q)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Unindo (4.13) ao lado esquerdo de (4.2) e tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} M_{ij}(q)w_{,ij}^{1*}(p,q)d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij}(q)v_{,ij}^{1*}(p,q)d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} K_w(w(q) - v(q))(w^{1*}(p,q) - v^{1*}(p,q))d\Omega \\
&- \int_{\Gamma} V_n(q)w^{1*}(p,q)d\Gamma - \int_{\Gamma} Q_n(q)v^{1*}(p,q)d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma} M_n(q)w_{,k}^{1*}(p,q)n_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_n(q)v_{,k}^{1*}(p,q)n_k d\Gamma \\
&+ \int_{\Omega} [M_{ij,ij}(q) + K_p[w_{,ii}(q) - v_{,ii}(q)]]w^{1*}(p,q)d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} [T_{ij,ij}(q) - K_p[w_{,ii}(q) - v_{,ii}(q)]]v^{1*}(p,q)d\Omega \\
&\quad \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_c^{1*} - \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_c^{1*}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Realizando analogamente procedimento aplicado das equações (4.3) a (4.13) no lado direito de (4.2), uma relação recíproca a (4.14) fica:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} M_{ij}^{1*}(p, q) w_{,ij}(q) d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij}^{1*}(p, q) v_{,ij}(q) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} K_w(w^{1*}(p, q) - v^{1*}(p, q))(w(q) - v(q)) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} V_n^{1*}(p, q) w(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} Q_n^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} [M_{ij,ij}^{1*}(p, q) + K_w[w^{1*}(p, q) - v^{1*}(p, q)] \\
& - K_P(w^{1*}_{,kk}(p, q) - v^{1*}_{,kk}(p, q))] w(q) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [T_{ij,ij}^{1*}(p, q) - K_w[w^{1*}(p, q) - v^{1*}(p, q)] \\
& + K_P(w^{1*}_{,kk}(p, q) - v^{1*}_{,kk}(p, q))] v(q) d\Omega \\
& - \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup1*} w_c - \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf1*} v_c
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Tomando as relações da Eq.(3.24), que são $-M_{ij,ij} + K_w(w - v) - K_P(w_{,kk} - v_{,kk}) = g_1$ e $-T_{ij,ij} - K_w(w - v) + K_P(w_{,kk} - v_{,kk}) = g_2$, bem como da Eq.(3.56), $-M_{ij,ij}^{1*} + K_w(w^{1*} - v^{1*}) - K_P(w^{1*}_{,kk} - v^{1*}_{,kk}) = \delta(p, q)$ e $-T_{ij,ij}^{1*} - K_w(w^{1*} - v^{1*}) + K_P(w^{1*}_{,kk} - v^{1*}_{,kk}) = 0$ e substituindo nas equações(4.13), (4.15) e (4.2), chega-se em:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} -\delta(p, q) w(q) d\Omega - \int_{\Gamma} V_n^{1*}(p, q) w(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} Q_n^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_n^{1*}(p, q) v_{,k}(q) n_k d\Gamma \\
& - \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup1*} w_c - \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf1*} v_c = \\
& - \int_{\Gamma} V_n(q) w^{1*}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma} Q_n(q) v^{1*}(p, q) d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} g_1 w^{1*}(p, q) d\Omega - \int_{\Omega} g_2 v^{1*}(p, q) d\Omega \\
& - \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_c^{1*} - \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_c^{1*}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

A equação integral dos deslocamentos da placa superior em (4.16) pode ser reescrita fazendo-se uso da propriedade do delta de Dirac $\int_{\Omega} \delta(p, q) f(q) d\Omega = f(p)$:

$$\begin{aligned}
& w(p) + \int_{\Gamma} V_n^{1*}(p, q) w(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} M_n^{*1}(p, q) w_{,k}(q) n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n^{*1}(p, q) v_{,k}(q) n_k d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup1*} w_c + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf1*} v_c \\
& = \int_{\Gamma} V_n(q) w^{1*}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n(q) v^{1*}(p, q) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_c^{1*} + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_c^{1*} \\
& + \int_{\Omega} g_1 w^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} g_2 v^{1*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Conforme discutido anteriormente, tensões e deformações bidimensionais (σ_{ij}^{sup} , σ_{ij}^{inf} , ε_{ij}^{sup} , ε_{ij}^{inf}) são mobilizadas nas placas superior e inferior em decorrência da aplicação de carregamentos externos g_1 e g_2 . Seja uma fonte ativada na placa inferior do problema de placas duplas fundamental implicando no desenvolvimento de tensões e deformações (σ_{ij}^{sup*2} , σ_{ij}^{inf*2} , ε_{ij}^{sup*2} , ε_{ij}^{inf*2}). Assim, o teorema da reciprocidade permite que uma relação entre o problema real e o fundamental pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \int_V \sigma_{ij}^{sup}(q) \varepsilon_{ij}^{sup*2}(p, q) dV + \int_V \sigma_{ij}^{inf}(q) \varepsilon_{ij}^{inf*2}(p, q) dV \\
& + \int_{\Omega} K_w (w(q) - v(q)) (w^{2*}(p, q) - v^{2*}(p, q)) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} K_p [w_{,k}(q) - v_{,k}] [w_{,k}^{2*}(p, q) - v_{,k}^{2*}(p, q)] d\Omega \\
& = \int_V \sigma_{ij}^{sup*2}(p, q) \varepsilon_{ij}^{sup}(q) dV + \int_V \sigma_{ij}^{inf*2}(p, q) \varepsilon_{ij}^{inf}(q) dV \\
& + \int_{\Omega} K_w (w^{2*}(p, q) - v^{2*}(p, q)) (w(q) - v(q)) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} K_p [w_{,k}^{2*}(p, q) - v_{,k}^{2*}(p, q)] [w_{,k}(q) - v_{,k}] d\Omega
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Para o caso da fonte aplicada na placa superior, uma relação matemática para fonte aplicada na placa inferior análoga a equação (4.15) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} M_{ij}^{2*}(p, q) w_{,ij}(q) d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij}^{2*}(p, q) v_{,ij}(q) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} K_w (w^{2*}(p, q) - v^{2*}(p, q)) (w(q) - v(q)) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} K_p [w_{,k}^{2*}(p, q) - v_{,k}^{2*}(p, q)] [w_{,k}(q) - v_{,k}] d\Omega = \\
& - \int_{\Gamma} V_n^{2*}(p, q) w(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} Q_n^{2*}(p, q) v(q) d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,k}^{2*}(p, q) n_k d\Gamma + \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,k}^{2*}(p, q) n_k d\Gamma + \\
& + \int_{\Omega} [M_{ij,ij}^{2*}(p, q) + K_w (w^{2*}(p, q) - v^{2*}(p, q))] w(q) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [T_{ij,ij}^{2*}(p, q) - K_w (w^{2*}(p, q) - v^{2*}(p, q))] v(q) d\Omega \\
& - \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup2*} w_c - \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf2*} v_c
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Se equação forem substituídas nas equações(4.13), (4.15) e (4.2), e ainda utilizando-se a propriedade de Dirac $\int_{\Omega} \delta(p, q)f(q)d\Omega = f(p)$, resulta em:

$$\begin{aligned}
& v(p) + \int_{\Gamma} V_n^{2*}(p, q)w(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n^{2*}(p, q)v(q)d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} M_n^{*2}(p, q)w_{,k}(q)n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n^{*2}(p, q)v_{,k}(q)n_k d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup2*} w_c + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf2*} v_c \\
& = \int_{\Gamma} V_n(q)w^{2*}(p, q)d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n(q)v^{2*}(p, q)d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} M_n(q)w_{,k}^{2*}(p, q)n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n(q)v_{,k}^{2*}(p, q)n_k d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_c^{2*} + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_c^{2*} \\
& + \int_{\Omega} g_1 w^{2*}(p, q)d\Omega + \int_{\Omega} g_2 v^{2*}(p, q)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Visto que o sistema de placas duplas possui quatro incógnitas em deslocamento e/ou esforços, o problema carece de duas equações integrais para resolvê-lo. Essas duas equações adicionais podem ser tomadas por meio da derivada direcional em relação ao ponto fonte dos deslocamentos transversais na placa superior e inferior, (4.17) e (4.20), resultando em:

$$\begin{aligned}
& w_{,m}(p) + \int_{\Gamma} V_{n,m}^{1*}(p, q)w(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_{n,m}^{1*}(p, q)v(q)d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,m}^{sup1*} w_c + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,m}^{inf1*} v_c \\
& - \int_{\Gamma} M_{n,m}^{*1}(p, q)w_{,k}(q)n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{n,m}^{*1}(p, q)v_{,k}(q)n_k d\Gamma \\
& = \int_{\Gamma} V_n(q)w_{,m}^{1*}(p, q)d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n(q)v_{,m}^{1*}(p, q)d\Gamma
\end{aligned}$$

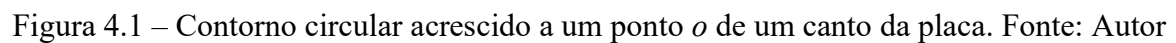
$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_{c,m}^{1*} + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_{c,m}^{1*} \\
& + \int_{\Omega} g_1 w_{,m}^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} g_2 v_{,m}^{1*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
& v_m(p) + \int_{\Gamma} V_{n,m}^{2*}(p, q) w(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_{n,m}^{2*}(p, q) v(q) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} M_{n,m}^{*2}(p, q) w_{,k}(q) n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{n,m}^{*2}(p, q) v_{,k}(q) n_k d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,m}^{sup2*} w_c + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,m}^{inf2*} v_c \\
& = \int_{\Gamma} V_n(q) w_{,m}^{2*}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n(q) v_{,m}^{2*}(p, q) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,k}^{2*}(p, q) n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,k}^{2*}(p, q) n_k d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_{c,m}^{2*} + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_{c,m}^{2*} \\
& + \int_{\Omega} g_1 w_{,m}^{2*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} g_2 v_{,m}^{2*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.22}$$

4.2 Equações Integrais no Contorno

Se a forma singular da solução for desejada, para a formulação de flexão de placa através Método dos Elementos de Contorno, além das equações (4.17), (4.20), (4.21) e (4.22) para pontos do domínio, será necessária a imposição da obtenção de equações integrais para pontos do contorno. Isso faz com que o ponto fonte seja locado no contorno do problema a equação passe agora a não ter somente integrandos regulares. Essa migração traz consigo algumas singularidades nas soluções fundamentais, visto que o na situação em que o raio r

Seja um ponto p , inicialmente no contorno, ilustrado na Figura 4.1. Uma manipulação pode ser implementada pelo acréscimo de um contorno circular Γ_ξ , centrado em p , e pela diminuição da parcela do contorno do problema $\bar{\Gamma}$, fazendo com que este ponto se torne inteiro ao domínio dessa região semicircular de raio ξ ,


$$\begin{aligned} & w(p) + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [V_n^{1*}(p, q)w(q) + Q_n^{1*}(p, q)v(q)]d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_\varepsilon} [V_n^{1*}(p, q)w(q) + Q_n^{1*}(p, q)v(q)]d\Gamma_\varepsilon \\ & - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [M_n^{*1}(p, q)w_{,k}(q)n_k + T_n^{*1}(p, q)v_{,k}(q)n_k]d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma_\varepsilon} [M_n^{*1}(p, q)w_{,k}(q)n_k + T_n^{*1}(p, q)v_{,k}(q)n_k]d\Gamma_\varepsilon \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup1*}(p, q)w_c + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf1*}(p, q)v_c \\
& = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [V_n(q)w^{1*}(p, q) + Q_n(q)v^{1*}(p, q)]d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_\varepsilon} [V_n(q)w^{1*}(p, q) + Q_n(q)v^{1*}(p, q)]d\Gamma_\varepsilon \\
& - \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [M_n(q)w_{,k}^{1*}(p, q)n_k + T_n(q)v_{,k}^{1*}(p, q)n_k]d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_\varepsilon} [M_n(q)w_{,k}^{1*}(p, q)n_k + T_n(q)v_{,k}^{1*}(p, q)n_k]d\Gamma_\varepsilon \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup}w_c^{1*}(p, q) + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf}v_c^{1*}(p, q) \\
& + \int_{\Omega} g_1w^{1*}(p, q)d\Omega + \int_{\Omega} g_2v^{1*}(p, q)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde ξ é o raio do semicírculo de centro no ponto fonte, que complementa o contorno Γ . Tal procedimento se aplica também, de forma semelhante, nas equações integrais de rotação $\frac{\partial w^*}{\partial m}$.

Fazendo-se a aproximação do ponto fonte no contorno, ou seja, tendendo $\xi \rightarrow 0$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& w(p) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [V_n^{1*}(p, q)w(q) + Q_n^{1*}(p, q)v(q)]d\Gamma \\
& + \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [V_n^{1*}(p, q)w(q) + Q_n^{1*}(p, q)v(q)]d\Gamma_\varepsilon \\
& - \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [M_n^{*1}(p, q)w_{,k}(q)n_k + T_n^{*1}(p, q)v_{,k}(q)n_k]d\Gamma \\
& - \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [M_n^{*1}(p, q)w_{,k}(q)n_k + T_n^{*1}(p, q)v_{,k}(q)n_k]d\Gamma_\varepsilon \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup1*}(p, q)w_c + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf1*}(p, q)v_c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [V_n(q) w^{1*}(p, q) + Q_n(q) v^{1*}(p, q)] d\Gamma \\
&+ \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [V_n(q) w^{1*}(p, q) + Q_n(q) v^{1*}(p, q)] d\Gamma_\varepsilon \\
&- \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma \\
&- \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma_\varepsilon \\
&+ \sum_{c=1}^{N_{cantos}} R_c^{sup} w_c^{1*}(p, q) + \sum_{c=1}^{N_{cantos}} R_c^{inf} v_c^{1*}(p, q) \\
&+ \int_{\Omega} g_1 w^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} g_2 v^{1*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Devido à presença de singularidades na segunda integral em ambos os lados da equação (4.24), bem como na primeira e terceira integrais de cada lado da mesma, essas devem ser tomadas no conceito do valor principal de Cauchy, resultando em:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [V_n^{1*}(p, q) w(q) + Q_n^{1*}(p, q) v(q)] d\Gamma \\
&- \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [M_n^{*1}(p, q) w_{,k}(q) n_k + T_n^{*1}(p, q) v_{,k}(q) n_k] d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} [V_n^{1*}(p, q) w(q) + Q_n^{1*}(p, q) v(q)] d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma} [M_n^{*1}(p, q) w_{,k}(q) n_k + T_n^{*1}(p, q) v_{,k}(q) n_k] d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [V_n(q) w^{1*}(p, q) + Q_n(q) v^{1*}(p, q)] d\Gamma \\
&- \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} [V_n(q) w^{1*}(p, q) + Q_n(q) v^{1*}(p, q)] d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma} [M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Porém só isso ainda não é suficiente para a análise. Faz-se necessário estudar as parcelas definidas no contorno Γ_ξ para consumir a análise da equação integral. Um procedimento que pode ser tomado é somar e subtrair, na primeira integral de cada lado da equação, os deslocamentos e rotações no ponto fonte:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n^{1*}(p, q)w(q) - M_n^{1*}(p, q)w_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [Q_n^{1*}(p, q)v(q) - T_n^{1*}(p, q)v_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi \\
& = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \{V_n^{1*}(p, q)[w(q) - w(p)] - M_n^{1*}(p, q)[w_{,l}(q) - w_{,l}(p)]n_l\} d\Gamma_\xi \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \{Q_n^{1*}(p, q)[v(q) - v(p)] - T_n^{1*}(p, q)[v_{,l}(q) - v_{,l}(p)]n_l\} d\Gamma_\xi \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n^{1*}(p, q)w(p) - M_n^{1*}(p, q)w_{,l}(p)n_l] d\Gamma_\xi \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [Q_n^{1*}(p, q)v(p) - T_n^{1*}(p, q)v_{,l}(p)n_l] d\Gamma_\xi \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Tomando uso da condição de Hölder tanto para os deslocamentos quanto para as rotações das placas, considera-se as seguintes relações:

$$|w(p) - w(q)| \leq C_1 r^{\alpha_1(p, q)} \tag{4.28}$$

sendo C_1 uma constante e $0 < \alpha_i \leq 1$, com $i = 1, 2$.

Prosseguindo com o cálculo dos limites após a substituição de (4.28) em (4.27), tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n^{1*}(p, q)w(q) - M_n^{1*}(p, q)w_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [Q_n^{1*}(p, q)v(q) - T_n^{1*}(p, q)v_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= w(p) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n^{1*}(p, q)] d\Gamma_\xi - w_{,l}(p) n_l \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [M_n^{1*}(p, q)] d\Gamma_\xi \\
&+ v(p) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [Q_n^{1*}(p, q)] d\Gamma_\xi - v_{,l}(p) n_l \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [T_n^{1*}(p, q)] d\Gamma_\xi
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Conforme pode ser visto na Figura 4.1, tem-se que $d\Gamma_\xi = \xi d\varnothing$ e ainda que o raio vetor $r = \xi$ é coincidente com a normal do contorno do círculo auxiliar de raio de curvatura implicando em $r_{,i} n_i = 1$, $r_{,i} s_i = 0$, $m_{,i} n_i = r_{,i} m_i$. Sendo β_c o ângulo interno do canto da placa. A equação (4.29) fica:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n^{1*}(p, q)w(q) - M_n^{1*}(p, q)w_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi \\
&+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [Q_n^{1*}(p, q)v(q) - T_n^{1*}(p, q)v_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi \\
&= \lim_{\xi \rightarrow 0} [w(p) \int_0^{2\pi-\beta_c} [V_n^{1*}(p, q)\xi] d\varnothing - w_{,l}(p) n_l \int_0^{2\pi-\beta_c} [M_n^{1*}(p, q)\xi] d\varnothing \\
&+ v(p) \int_0^{2\pi-\beta_c} [Q_n^{1*}(p, q)\xi] d\varnothing - v_{,l}(p) n_l \int_0^{2\pi-\beta_c} [T_n^{1*}(p, q)\xi] d\varnothing]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

onde:

$$V_n^{1*} \xi = -D_1 \left(\xi \frac{d^3 w^{1*}}{d\xi^3} + \frac{d^2 w^{1*}}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dw^{1*}}{d\xi} \right) + K_P \left(\frac{dw^{1*}}{d\xi} - \frac{dv^{1*}}{d\xi} \right) \tag{4.31}$$

$$Q_n^{1*} \xi = -D_2 \left(\xi \frac{d^3 v^{1*}}{d\xi^3} + \frac{d^2 v^{1*}}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dv^{1*}}{d\xi} \right) + K_P \left(\frac{dv^{1*}}{d\xi} - \frac{dw^{1*}}{d\xi} \right) \tag{4.32}$$

$$M_n^{1*} \xi = -D_1 \left(\xi \frac{\partial^2 w^{1*}}{\partial \xi^2} + v_1 \frac{\partial w^{1*}}{\partial \xi} \right) \tag{4.33}$$

$$T_n^{1*} \xi = -D_2 \left(\xi \frac{\partial^2 v^{1*}}{\partial \xi^2} + v_2 \frac{\partial v^{1*}}{\partial \xi} \right) \tag{4.34}$$

Chama-se atenção que os esforços indicados na equação (4.29), como já visto, dependem das soluções fundamentais que são dependentes das relações envolvendo funções de Bessel de segunda espécie e de ordens zero e um, $K_0(z)$ e $K_1(z)$. Para pequenos argumentos $z \rightarrow \hat{z}$, as expansões e se resumem:

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \hat{z}} K_0(z) = -\gamma - \ln\left(\frac{\hat{z}}{2}\right) \\ \lim_{z \rightarrow \hat{z}} K_1(z) \rightarrow \frac{1}{\hat{z}} \end{cases} \quad (4.35)$$

Uma vez que $\xi \rightarrow 0$, então se faz necessária a discussão de como essas funções podem ser expressas quando sujeitas a pequenos argumentos:

Para o caso II, $K_P > \frac{2K_W}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$, as soluções fundamentais ficam:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial w^{1*}}{\partial \xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{\partial^2 w^{1*}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4.36)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial w^{1*}}{\partial \xi} = c \left\{ \frac{K_W}{4} [2\ln(r) + 1] \right\} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 w^{1*}}{\partial \xi^2} = c \left\{ D_2 \left[\frac{b}{2d} \left(z_1 \ln\left(\frac{z_1}{4}\right) - z_2 \ln\left(\frac{z_2}{4}\right) + 2\gamma(z_1 - z_2) \right) \right] \right. \\ \left. - K_P \left[\frac{b}{2d} (\ln(z_1) - \ln(z_2)) \right] \right. \\ \left. + K_W \left[\frac{3 - 4\gamma + 2[\ln(r) + 2\ln(2)]}{4} + \frac{z_2 \ln(z_1) - z_1 \ln(z_2)}{2d} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \hat{r}} \xi \frac{\partial^3 w^{1*}}{\partial r^3} = c \left\{ -D_2 \frac{b}{2d} \left[z_1 \ln\left(\frac{z_1}{4}\right) - z_2 \ln\left(\frac{z_2}{4}\right) + (2\gamma - 1)d \right] \right. \\ \left. + K_P \frac{b}{2d} [\ln(z_1) - \ln(z_2)] \right. \\ \left. - \frac{K_W}{2d} \left[z_2 \ln\left(\frac{z_1}{4}\right) - z_1 \ln\left(\frac{z_2}{4}\right) - (2\gamma - 1)d \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Para o caso III, $K_P = \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$, as soluções fundamentais ficam:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial w^{1*}}{\partial \xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{\partial^2 w^{1*}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial w^{1*}}{\partial \xi} = c \left\{ \frac{D_2 z_1^2}{4} \left[\ln\left(\frac{z_1}{4}\right) + 2(\gamma) \right] - \frac{K_P z_1}{4} \left[\ln\left(\frac{z_1}{4}\right) + 2(\gamma) \right] \right. \\ \left. + \frac{K_w}{4} \left[2 \left(\ln(r) + \ln\left(\frac{z_1}{4}\right) + \gamma \right) + 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 w^{1*}}{\partial \xi^2} = c \left\{ \frac{D_2 z_1^2}{4} \left[\ln\left(\frac{z_1}{4}\right) + 2(\gamma + 1) \right] + \frac{K_P z_1}{4} \left[\ln\left(\frac{z_1}{4}\right) + 2(\gamma - 1) \right] \right. \\ \left. + K_w \left[\frac{1}{2} (3 \ln(2) - 3\gamma + \ln(r)) + \frac{5 - 3 \ln(z_1)}{4} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \hat{r}} \xi \frac{\partial^3 w^{1*}}{\partial r^3} = c \left\{ \frac{D_2}{2} z_1^2 - \frac{K_P}{4} z_1 \left[\gamma + \frac{\ln(z_1)}{2} - \ln(2) - \frac{1}{2} \right] \right. \\ \left. + K_w \left[2 \left(\gamma + \frac{\ln(z_1)}{2} - \ln(2) \right) - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Para o Caso I (raízes complexas), um procedimento análogo pode ser feito para obtenção desses limites. Já os limites de w^{2*} e suas derivadas superiores para os casos I, II, e III podem ser obtidas a partir das equações (4.36)-(4.39) atribuindo-se $D_2 = 0$.

Substituindo as expressões em (4.30):

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n^{1*}(p, q) w(p) - M_n^{1*}(p, q) w_{,l}(p) n_l] d\Gamma_\xi \\ & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [Q_n^{1*}(p, q) v(p) - T_n^{1*}(p, q) v_{,l}(p) n_l] d\Gamma_\xi \\ & = w(p) \int_0^{2\pi - \beta_c} D_1 D_2 z_1^2 c d\phi = -\frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(p) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Assim, tendo em vista as equação (4.25) e (4.26) , fazendo as devidas substituições das equações sob pequenos argumentos e (4.44) , a equação integral (4.24) para um ponto no contorno fica:

$$\begin{aligned}
C_1 w(p) &+ \int_{\Gamma} V_n^{1*}(p, q) w(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma} M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n^{1*}(p, q) v_{,k}(q) n_k d\Gamma \\
&+ \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup1*}(p, q) w_c + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf1*}(p, q) v_c \\
&= \int_{\Gamma} V_n(q) w^{1*}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n(q) v^{1*}(p, q) d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma \\
&+ \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_c^{1*}(p, q) + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_c^{1*}(p, q) \\
&+ \int_{\Omega} g_1 w^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} g_2 v^{1*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.45}$$

O termo livre C_1 , da equação (4.45), pode ser escrito em função de algumas colocações do ponto fonte como:

$$C_1 = \begin{cases} 0, & \text{se } p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{\beta_c}{2\pi}, & \text{se } p \in \Gamma \\ 1, & \text{se } p \in \Omega \end{cases} \tag{4.46}$$

De forma análoga, a equação integral do deslocamento transversal na placa inferior para o ponto p pode ser escrita, após esta modificação no domínio da placa, a partir da equação (4.20).

$$v(p) + \int_{\Gamma_{\xi}} [V_n^{2*}(p, q) w - M_n^{2*}(p, q) w_{,l} n_l + Q_n^{2*}(p, q) v - T_n^{2*}(p, q) v_{,l} n_l] d\Gamma_{\xi}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [V_n^{2*}(p, q)w - M_n^{2*}(p, q)w_{,l}n_l + Q_n^{2*}(p, q)v - T_n^{2*}(p, q)v_{,l}n_l] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup2*}(p, q)w_c + R_{\Gamma_1}^{sup2*}(p, q)v_{\Gamma_1} + R_{\Gamma_2}^{sup2*}(p, q)v_{\Gamma_2} \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf2*}(p, q)v_c + R_{\Gamma_1}^{inf2*}(p, q)v_{\Gamma_1} + R_{\Gamma_2}^{inf2*}(p, q)v_{\Gamma_2} \\
& = \int_{\Gamma_\xi} [V_n w^{2*}(p, q) - M_n w_{,l}^{2*}(p, q)n_l + Q_n v^{2*}(p, q) - T_n v_{,l}^{2*}(p, q)n_l] d\Gamma_\xi \\
& + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [V_n w^{2*}(p, q) - M_n w_{,l}^{2*}(p, q)n_l + Q_n v^{2*}(p, q) - T_n v_{,l}^{2*}(p, q)n_l] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_c^{2*}(p, q) + R_{\Gamma_1}^{sup} w_{\Gamma_1}^{2*}(p, q) + R_{\Gamma_2}^{sup} w_{\Gamma_2}^{2*}(p, q) \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_c^{2*}(p, q) + R_{\Gamma_1}^{inf} w_{\Gamma_1}^{2*}(p, q) + R_{\Gamma_2}^{inf} w_{\Gamma_2}^{2*}(p, q) \\
& + \int_{\Omega} [g_1 w^{2*}(p, q) + g_2 v^{2*}(p, q)] d\Omega
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Aproximando o ponto fonte no contorno, ou seja, implicando em $\xi \rightarrow 0$. A equação (4.47) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
& v(p) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n^{2*}(p, q)w - M_n^{2*}(p, q)w_{,l}n_l + Q_n^{2*}(p, q)v - T_n^{2*}(p, q)v_{,l}n_l] d\Gamma_\xi \\
& + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [V_n^{2*}(p, q)w - M_n^{2*}(p, q)w_{,l}n_l + Q_n^{2*}(p, q)v - T_n^{2*}(p, q)v_{,l}n_l] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup2*}(p, q)w_c + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{\Gamma_1}^{sup2*}(p, q)w_{\Gamma_1} + R_{\Gamma_2}^{sup2*}(p, q)w_{\Gamma_2}] \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf2*}(p, q)v_c + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{\Gamma_1}^{inf2*}(p, q)v_{\Gamma_1} + R_{\Gamma_2}^{inf2*}(p, q)v_{\Gamma_2}] \\
& = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n w^{2*}(p, q) - M_n w_{,l}^{2*}(p, q)n_l + Q_n v^{2*}(p, q) - T_n v_{,l}^{2*}(p, q)n_l] d\Gamma_\xi \\
& + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [V_n w^{2*}(p, q) - M_n w_{,l}^{2*}(p, q)n_l + Q_n v^{2*}(p, q) - T_n v_{,l}^{2*}(p, q)n_l] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_c^{2*}(p, q) + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{\Gamma_1}^{sup} w_{\Gamma_1}^{2*}(p, q) + R_{\Gamma_2}^{sup} w_{\Gamma_2}^{2*}(p, q)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_c^{2*}(p, q) + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{\Gamma_1}^{inf} w_{\Gamma_1}^{2*}(p, q) + R_{\Gamma_2}^{inf} w_{\Gamma_2}^{2*}(p, q)] \\
& + \int_{\Omega} [g_1 w^{2*}(p, q) + g_2 v^{2*}(p, q)] d\Omega
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Tomando o conceito do valor principal das integrais na equação (4.48) , chega-se às seguintes relações:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [V_n^{2*}(p, q)w - M_n^{2*}(p, q)w_{,l}n_l + Q_n^{2*}(p, q)v - T_n^{2*}(p, q)v_{,l}n_l] d\Gamma \\
& = \int_{\Gamma} [V_n^{2*}(p, q)w - M_n^{2*}(p, q)w_{,l}n_l + Q_n^{2*}(p, q)v - T_n^{2*}(p, q)v_{,l}n_l] d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [V_n w^{2*}(p, q) - M_n w_{,l}^{2*}(p, q)n_l + Q_n v^{2*}(p, q) - T_n v_{,l}^{2*}(p, q)n_l] d\Gamma \\
& = \int_{\Gamma} [V_n w^{2*}(p, q) - M_n w_{,l}^{2*}(p, q)n_l + Q_n v^{2*}(p, q) - T_n v_{,l}^{2*}(p, q)n_l] d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Para completar a análise da equação integral é necessário estudar as parcelas definidas no contorno Γ_{ξ} . Somando e subtraindo deslocamentos e rotações no ponto fonte, as seguintes relações podem ser escritas:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [V_n^{2*}(p, q)w(q) - M_n^{2*}(p, q)w_{,l}(q)n_l + Q_n^{2*}(p, q)v(q) - T_n^{2*}(p, q)v_{,l}(q)n_l] d\Gamma_{\xi} \\
& = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \{V_n^{2*}(p, q)[w(q) - w(p)] - M_n^{2*}(p, q)[w_{,l}(q) - w_{,l}(p)]n_l + \\
& + Q_n^{2*}(p, q)[v(q) - v(p)] - T_n^{2*}(p, q)[v_{,l}(q) - v_{,l}(p)]n_l\} d\Gamma_{\xi} \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [V_n^{2*}(p, q)w(p) - M_n^{2*}(p, q)w_{,l}(p)n_l] d\Gamma_{\xi} \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [Q_n^{2*}(p, q)v(p) - T_n^{2*}(p, q)v_{,l}(p)n_l] d\Gamma_{\xi}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Fazendo uso da condição de Hölder para os deslocamentos e rotações das placas, pode-se escrever as seguintes relações:

$$|v(p) - v(q)| \leq C_1 r^{\alpha_1(p,q)} \quad (4.52)$$

sendo C_1 uma constante e $0 < \alpha_i \leq 1$, com $i = 1, 2$.

Conforme pode ser visto, tem-se que $d\Gamma_\xi = \xi d\varnothing$ e ainda que o raio vetor $r = \xi$ é coincidente com a normal do contorno do círculo auxiliar de raio de curvatura implicando em $r_{,i} n_i = 1$, $r_{,i} s_i = 0$, $m_{,i} n_i = r_{,i} m_i$. Assim, a equação (4.51) fica:

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n^{2*}(p, q)w(q) - M_n^{2*}(p, q)w_{,l}(q)n_l + Q_n^{2*}(p, q)v(q) - T_n^{2*}(p, q)v_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} [w(p) \int_0^{2\pi-\beta_c} [V_n^{2*}(p, q)\xi] d\varnothing - w_{,l}(p)n_l \int_0^{2\pi-\beta_c} [M_n^{2*}(p, q)\xi] d\varnothing \\ &+ v(p) \int_0^{2\pi-\beta_c} [Q_n^{2*}(p, q)\xi] d\varnothing - v_{,l}(p)n_l \int_0^{2\pi-\beta_c} [T_n^{2*}(p, q)\xi] d\varnothing] \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde:

$$V_n^{2*}\xi = -D_1 \left(\xi \frac{d^3 w^{2*}}{d\xi^3} + \frac{d^2 w^{2*}}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dw^{2*}}{d\xi} \right) + K_P \left(\frac{dw^{2*}}{d\xi} - \frac{dv^{2*}}{d\xi} \right) \quad (4.54)$$

$$Q_n^{2*}\xi = -D_2 \left(\xi \frac{d^3 v^{2*}}{d\xi^3} + \frac{d^2 v^{2*}}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dv^{2*}}{d\xi} \right) + K_P \left(\frac{dv^{2*}}{d\xi} - \frac{dw^{2*}}{d\xi} \right) \quad (4.55)$$

$$M_n^{2*}\xi = -D_1 \left(\xi \frac{\partial^2 w^{2*}}{\partial \xi^2} + v_1 \frac{\partial w^{2*}}{\partial \xi} \right) \quad (4.56)$$

$$T_n^{2*}\xi = -D_2 \left(\xi \frac{\partial^2 v^{2*}}{\partial \xi^2} + v_1 \frac{\partial v^{2*}}{\partial \xi} \right) \quad (4.57)$$

As derivadas demandadas em (4.54)-(4.57) são dadas por:

Para o caso II, $K_P > \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$, as soluções fundamentais ficam:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial v^{2*}}{\partial \xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{\partial^2 v^{2*}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4.58)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial v^{2*}}{\partial \xi} = \frac{c}{d} \left\{ \frac{D_1}{4} [2 \ln(r) + 1] \right\} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 v^{2*}}{\partial \xi^2} = c \left\{ D_1 \left[\frac{b}{2d} \left(z_1 \ln \left(\frac{z_1}{4} \right) - z_2 \ln \left(\frac{z_2}{4} \right) + 2\gamma(z_1 - z_2) \right) \right] \right. \\ \left. - K_P \left[\frac{b}{2d} (\ln(z_1) - \ln(z_2)) \right] \right. \\ \left. + K_w \left[\frac{3 - 4\gamma + 2[\ln(r) + 2 \ln(2)]}{4} + \frac{z_2 \ln(z_1) - z_1 \ln(z_2)}{2d} \right] \right\} \quad (4.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \hat{r}} \xi \frac{\partial^3 v^{2*}}{\partial r^3} = c \left\{ -D_1 \frac{b}{2d} \left[z_1 \ln \left(\frac{z_1}{4} \right) - z_2 \ln \left(\frac{z_2}{4} \right) + (2\gamma - 1)d \right] \right. \\ \left. + K_P \frac{b}{2d} [\ln(z_1) - \ln(z_2)] \right. \\ \left. - \frac{K_w}{2d} \left[z_2 \ln \left(\frac{z_1}{4} \right) - z_1 \ln \left(\frac{z_2}{4} \right) - (2\gamma - 1)d \right] \right\} \quad (4.61) \end{aligned}$$

Para o caso III, $K_P = \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$, as soluções fundamentais ficam:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial v^{2*}}{\partial \xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{\partial^2 v^{2*}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial v^{2*}}{\partial \xi} = c \left\{ \frac{D_1 z_1^2}{4} \left[\ln \left(\frac{z_1}{4} \right) + 2(\gamma) \right] - \frac{K_P z_1}{4} \left[\ln \left(\frac{z_1}{4} \right) + 2(\gamma) \right] \right. \\ \left. + \frac{K_w}{4} \left[2 \left(\ln(r) + \ln \left(\frac{z_1}{4} \right) + \gamma \right) + 1 \right] \right\} \quad (4.63) \end{aligned}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 v^{2*}}{\partial \xi^2} = c \left\{ \frac{D_1 z_1^2}{4} \left[\ln \left(\frac{z_1}{4} \right) + 2(\gamma + 1) \right] + \frac{K_P z_1}{4} \left[\ln \left(\frac{z_1}{4} \right) + 2(\gamma - 1) \right] \right\}$$

$$+K_w \left[\frac{1}{2} (3\ln(2) - 3\gamma + \ln(r)) + \frac{5 - 3\ln(z_1)}{4} \right] \} \quad (4.64)$$

$$\lim_{r \rightarrow \hat{r}} \xi \frac{\partial^3 v^{2*}}{\partial r^3} = c \left\{ \frac{D_1}{2} z_1^2 - \frac{K_P}{4} z_1 \left[\gamma + \frac{\ln(z_1)}{2} - \ln(2) - \frac{1}{2} \right] \right. \\ \left. + K_w \left[2 \left(\gamma + \frac{\ln(z_1)}{2} - \ln(2) \right) - 1 \right] \right\} \quad (4.65)$$

Aqui também os resultados dos limites para o Caso I (raízes complexas) podem ser obtidos empregando um procedimento análogo.

Os limites de v^{1*} e suas derivadas superiores podem ser obtidas através das equações (4.58)-(4.61), para Caso I, e das (4.62)-(4.65), para Caso II, atribuindo-se $D_1 = 0$.

Substituindo as equações e (4.58)-(4.61) e (4.62)-(4.65), conforme o caso, em (4.54)-(4.57), a equação (4.53) resulta em:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n^{2*}(p, q)w(q) - M_n^{2*}(p, q)w_{,l}(q)n_l + Q_n^{2*}(p, q)v(q) - T_n^{2*}(p, q)v_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi \\ = v(p) \int_0^{2\pi - \beta_c} D_1 D_2 z_1^2 c d\phi = -\frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} v(p) \quad (4.66)$$

Semelhantemente, assim como ocorre com os limites das parcelas que envolvem as reações de canto R_c , as demais integrais sobre Γ_ξ indicadas em (4.53) conduzem a valores nulos.

Dessa maneira, a expressão (4.48), a qual representa a equação integral para um ponto no contorno, fica:

$$C_2 v(p) + \int_{\Gamma} V_n^{2*}(p, q)w(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n^{2*}(p, q)v(q)d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} M_n^{2*}(p, q)w_{,k}(q)n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n^{2*}(p, q)v_{,k}(q)n_k d\Gamma \\ + \sum_{c=1}^{N_{cantos}} R_c^{sup2*}(p, q)w_c + \sum_{c=1}^{N_{cantos}} R_c^{inf2*}(p, q)v_c$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma} V_n(q) w^{2*}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n(q) v^{2*}(p, q) d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,k}^{2*}(p, q) n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,k}^{2*}(p, q) n_k d\Gamma \\
&+ \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_c^{2*}(p, q) + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_c^{2*}(p, q) \\
&+ \int_{\Omega} g_1 w^{2*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} g_2 v^{2*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.67}$$

O termo livre pode ser escrito em função de algumas colocações do ponto fonte como:

$$C_2 = \begin{cases} 0, & \text{se } p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{\beta_c}{2\pi}, & \text{se } p \in \Gamma \\ 1, & \text{se } p \in \Omega \end{cases} \tag{4.68}$$

Seguindo o mesmo procedimento, o contorno será acrescido de um trecho circular Γ_{ξ} em torno do ponto "p" para a determinação da representação da equação integral da derivada direcional do deslocamento da placa superior para um ponto "p" do contorno da placa. Desse modo, o ponto "p" é integrado ao domínio e pode-se escrever a equação integral

$$\begin{aligned}
&w_{,m}(p) + \int_{\Gamma_{\xi}} [V_{n,m}^{1*}(p, q) w - M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,l} n_l + Q_{n,m}^{1*}(p, q) v - T_{n,m}^{1*}(p, q) v_{,l} n_l] d\Gamma_{\xi} \\
&+ \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [V_{n,m}^{1*}(p, q) w - M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,l} n_l + Q_{n,m}^{1*}(p, q) v - T_{n,m}^{1*}(p, q) v_{,l} n_l] d\Gamma \\
&+ \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,m}^{sup1*}(p, q) w_c + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,m}^{inf1*}(p, q) v_c \\
&= \int_{\xi} [V_n w_{,m}^{1*}(p, q) - M_n w_{,lm}^{1*}(p, q) n_l + Q_n v_{,m}^{1*}(p, q) - T_n v_{,lm}^{1*}(p, q) n_l] d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [V_n w_{,m}^{1*}(p, q) - M_n w_{,lm}^{1*}(p, q) n_l + Q_n v_{,m}^{1*}(p, q) - T_n v_{,lm}^{1*}(p, q) n_l] d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_{c,m}^{1*}(p, q) + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_{c,m}^{1*}(p, q) \\
& + \int_{\Omega} [g_1 w_{,m}^{1*}(p, q) + g_2 v_{,m}^{1*}(p, q)] d\Omega
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Aproximando o ponto "p" para o contorno, pode-se reescrever a (4.69):

$$\begin{aligned}
& w_{,m}(p) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [V_{n,m}^{1*}(p, q)w - M_{n,m}^{1*}(p, q)w_{,l}n_l + Q_{n,m}^{1*}(p, q)v - T_{n,m}^{1*}(p, q)v_{,l}n_l] d\Gamma_{\xi} \\
& + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [V_{n,m}^{1*}(p, q)w - M_{n,m}^{1*}(p, q)w_{,l}n_l + Q_{n,m}^{1*}(p, q)v - T_{n,m}^{1*}(p, q)v_{,l}n_l] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,m}^{sup1*}(p, q)w_c + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,m}^{inf1*}(p, q)v_c \\
& = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi} [V_n w_{,m}^{1*}(p, q) - M_n w_{,lm}^{1*}(p, q)n_l + Q_n v_{,m}^{1*}(p, q) - T_n v_{,lm}^{1*}(p, q)n_l] d\Gamma \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi} [Q_n v_{,m}^{1*}(p, q) - T_n v_{,lm}^{1*}(p, q)n_l] d\Gamma \\
& + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [V_n w_{,m}^{1*}(p, q) - M_n w_{,lm}^{1*}(p, q)n_l] d\Gamma \\
& + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [Q_n v_{,m}^{1*}(p, q) - T_n v_{,lm}^{1*}(p, q)n_l] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_{c,m}^{1*}(p, q) + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_{c,m}^{1*}(p, q) \\
& + \int_{\Omega} [g_1 w_{,m}^{1*}(p, q) + g_2 v_{,m}^{1*}(p, q)] d\Omega
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Lidando com o conceito do valor principal das integrais na equação (4.70), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [V_{n,m}^{1*}(p, q)w(q) - M_{n,m}^{1*}(p, q)w_{,l}(q)n_l] d\Gamma \\
& + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [Q_{n,m}^{1*}(p, q)v(q) - T_{n,m}^{1*}(p, q)v_{,l}(q)n_l] d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma} [V_{n,m}^{1*}(p,q)w(q) - M_{n,m}^{1*}(p,q)w_{,l}(q)n_l] d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma} [Q_{n,m}^{1*}(p,q)v(q) - T_{n,m}^{1*}(p,q)v_{,l}(q)n_l] d\Gamma \quad (4.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [V_n w_{,m}^{1*}(p,q) - M_n w_{,lm}^{1*}(p,q)n_l + Q_n v_{,m}^{1*}(p,q) - T_n v_{,lm}^{1*}(p,q)n_l] d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} [V_n w_{,m}^{1*}(p,q) - M_n w_{,lm}^{1*}(p,q)n_l + Q_n v_{,m}^{1*}(p,q) - T_n v_{,lm}^{1*}(p,q)n_l] d\Gamma \quad (4.72)
\end{aligned}$$

Faz-se necessário o estudo das parcelas definidas no contorno Γ_{ξ} . Manipulando os deslocamentos e rotações no ponto fonte, são escritas as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [V_{n,m}^{1*}(p,q)w(q) - M_{n,m}^{1*}(p,q)w_{,l}(q)n_l] d\Gamma_{\xi} \\
&+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [Q_{n,m}^{1*}(p,q)v(q) - T_{n,m}^{1*}(p,q)v_{,l}(q)n_l] d\Gamma_{\xi} \\
&= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \{V_{n,m}^{1*}(p,q)[w(q) - w(p)] - M_{n,m}^{1*}(p,q)[w_{,l}(q) - w_{,l}(p)]n_l \\
&+ Q_{n,m}^{1*}(p,q)[v(q) - v(p)] - T_{n,m}^{1*}(p,q)[v_{,l}(q) - v_{,l}(p)]n_l\} d\Gamma_{\xi} \\
&+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [V_{n,m}^{1*}(p,q)w - M_{n,m}^{1*}(p,q)w_{,l}n_l + Q_{n,m}^{1*}(p,q)v - T_{n,m}^{1*}(p,q)v_{,l}n_l] d\Gamma_{\xi} \quad (4.73)
\end{aligned}$$

A condição de Hölder para as rotações das placas, considera-se as seguintes relações:

$$\left| \frac{\partial w(p)}{\partial r} - \frac{\partial w(q)}{\partial r} \right| \leq L_2 r^{\alpha_1(p,q)} \quad (4.74)$$

sendo L_2 uma constante e $0 < \alpha_i \leq 1$, com $i = 1, 2$.

Aplicando a equação (4.74) na (4.73):

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_{n,m}^{1*}(p, q)w(q) - M_{n,m}^{1*}(p, q)w_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [+Q_{n,m}^{1*}(p, q)v(q) - T_{n,m}^{1*}(p, q)v_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi \\
& = w(p) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_{n,m}^{1*}(p, q) d\Gamma_\xi - w_{,l}(p)n_l \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_{n,m}^{1*}(p, q) d\Gamma_\xi \\
& + v(p) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Q_{n,m}^{1*}(p, q) d\Gamma_\xi - v_{,l}(p)n_l \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} T_{n,m}^{1*}(p, q) d\Gamma_\xi \quad (4.75)
\end{aligned}$$

Imprimindo um movimento de corpo rígido de rotação $w_{,l}(p)n_l = v_{,l}(p)n_l$ no sistema de placas, resultam em deslocamentos $w(p) = \xi w_{,l}(p)n_l$ e $v(p) = \xi v_{,l}(p)n_l$. Além disso, considerando que $d\Gamma_\xi = \xi d\emptyset$, pode-se reescrever a (4.75):

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_{n,m}^{1*}(p, q)w(q) - M_{n,m}^{1*}(p, q)w_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [Q_{n,m}^{1*}(p, q)v(q) - T_{n,m}^{1*}(p, q)v_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi \\
& = w(q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} V_{n,m}^{1*}(p, q)\xi d\emptyset - w_{,l}(p)n_l \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} M_{n,m}^{1*}(p, q)\xi d\emptyset \\
& + v(q) \int_0^{2\pi-\beta_c} Q_{n,m}^{1*}(p, q)\xi d\emptyset - w_{,l}(p)n_l \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} T_{n,m}^{1*}(p, q)\xi d\emptyset \quad (4.76)
\end{aligned}$$

No contorno auxiliar, o raio vetor $r = \xi$ é coincidente com a própria normal do contorno do círculo auxiliar de raio de curvatura implicando em $r_{,i}n_i = 1$, $r_{,i}s_i = 0$, $m_{,i}n_i = r_{,i}m_i$, assim as seguintes relações podem ser escritas:

$$\xi^2 V_{n,m}^{1*}(p, q) - \xi M_{n,m}^{1*}(p, q) = D_1 r_{,i} m_i \left(\xi^2 \frac{d^4 w^{1*}}{d\xi^4} + 3 \frac{d^2 w^{1*}}{d\xi^2} - \frac{3}{\xi} \frac{dw^{1*}}{d\xi} \right) \quad (4.77)$$

$$\xi^2 Q_{n,m}^{1*}(p, q) - \xi T_{n,m}^{1*}(p, q) = D_1 r_{,i} m_i \left(\xi^2 \frac{d^4 v^{1*}}{d\xi^4} + 3 \frac{d^2 v^{1*}}{d\xi^2} - \frac{3}{\xi} \frac{dv^{1*}}{d\xi} \right) \quad (4.78)$$

Levando-se em conta as soluções fundamentais para pequenos argumentos ($\hat{r} \ll 1$), para o caso II, $K_P > \frac{2K_W}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$, tem-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial w^{1*}}{\partial \xi} = c \left\{ K_W \frac{2 \ln(\hat{r}) + 1}{4} \right\} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 w^{1*}}{\partial \xi^2} = c \left\{ D_2 \left[\frac{b}{2d} \left(z_1 \ln\left(\frac{z_1}{4}\right) - z_2 \ln\left(\frac{z_2}{4}\right) + 2\gamma(z_1 - z_2) \right) \right] \right. \\ \left. - K_P \left[\frac{b}{2d} (\ln(z_1) + \ln(z_2)) \right] \right. \\ \left. + K_W \left[\frac{3 - 4\gamma + 2[\ln(r) + 2 \ln(2)]}{4} + \frac{z_2 \ln(z_1) - z_1 \ln(z_2)}{2d} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \hat{r}} \xi^2 \frac{\partial^4 w^{1*}}{\partial r^4} = c \left\{ -D_2 \left[\frac{b}{2d} (3z_2 \ln(z_2) - 3z_1 \ln(z_1) + (4 + \ln(64) - 6\gamma)(z_1 - z_2)) \right] \right. \\ \left. - K_P \left[\frac{3b}{2d} (\ln(z_1) - \ln(z_2)) \right] \right. \\ \left. + K_W \left[\frac{3 + 6[\ln(2) - \gamma]}{2} d + 3 \frac{z_2 \ln(z_1) - z_1 \ln(z_2)}{2d} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.81)$$

E para o caso III, $K_P = \frac{2K_W}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$, são escritas:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial w^{1*}}{\partial \xi} = c \left\{ \frac{D_1 z_1^2}{4} \left[\ln\left(\frac{z_1}{4}\right) + 2\gamma \right] - \frac{K_P z_1}{4} \left[\ln\left(\frac{z_1}{4}\right) + 2\gamma \right] \right\} \\ + K_W \left[\ln\left(\frac{z_1}{4}\right) + 2\gamma + 2\ln(r) + 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 w^{1*}}{\partial \xi^2} = c \left\{ \frac{D_2 z_1^2}{4} \left[\ln\left(\frac{z_1}{4}\right) + 2(\gamma + 1) \right] + \frac{K_P z_1}{4} \left[\ln\left(\frac{z_1}{4}\right) + 2(\gamma - 1) \right] \right. \\ \left. + K_W \left[\frac{1}{2} (3\ln(2) - 3\gamma + \ln(r)) + \frac{5 - 3\ln(z_1)}{4} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\lim_{r \rightarrow \hat{r}} \xi^2 \frac{\partial^4 w^{1*}}{\partial r^4} = c \left\{ -\frac{D_2}{2} z_1^2 + \frac{K_P}{2} 3z_1 \left[\ln\left(\frac{z_1}{4}\right) + 2\gamma - 1 \right] \right\}$$

$$-K_w \left[6 \left(\gamma + \frac{\ln(z_1)}{2} - \ln(2) \right) - 3 \right] \quad (4.83)$$

Os limites de w^{1*} e suas derivadas superiores podem ser obtidas de a partir das equações (4.79)-(4.81), atribuindo-se $D_2 = 0$.

Substituindo (4.77), (4.78) e (4.79)-(4.81) em (4.76):

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_{n,m}^{1*}(p, q)w(q) - M_{n,m}^{1*}(p, q)w_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi + \\ & \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [Q_{n,m}^{1*}(p, q)v(q) - T_{n,m}^{1*}(p, q)v_{,l}(q)n_l] d\Gamma_\xi \\ & = w_{,l}(q)m_l \int_0^{2\pi-\beta_c} 2D_1 D_2 z_1^2 c d\varphi = -\frac{1}{\pi} w_{,l}(q)m_l \int_0^{2\pi-\beta_c} r_{,i} m_i d\varphi \end{aligned} \quad (4.84)$$

sendo o ângulo φ formado entre os eixos dos sistemas cartesianos (n, s) e (m, n) , para qualquer ponto do contorno Γ_ξ :

$$r_{,i} m_i = \text{sen}(\varphi - \varphi) \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial w(p)}{\partial n} = \frac{\partial w(p)}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial n} + \frac{\partial w(p)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} \quad (4.86)$$

onde:

$$\frac{\partial m}{\partial n} = m_i n_i = \text{sen}(\varphi - \varphi) \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial t}{\partial n} = s_i n_i = -\cos(\varphi - \varphi) \quad (4.88)$$

Substituindo-se em (4.84), $\frac{\partial w(p)}{\partial n}$ e $r_{,i} m_i$ por seus valores dados em (4.87) e (4.88), efetuando-se a integração e calculando-se o limite, deduz-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \{V_{n,m}^{1*}(p, q)[w(q) - w(p)] - M_{n,m}^{1*}(p, q)[w_{,l}(q) - w_{,l}(p)]n_l$$

$$\begin{aligned}
& +Q_{n,m}^{1*}(p,q)[v(q)-v(p)]-T_{n,m}^{1*}(p,q)[v_{,l}(q)-v_{,l}(p)]n_l\}d\Gamma_\xi \\
& =-\frac{1}{4\pi}\left\{[(4\pi-2\beta_c)+\text{sen}(2\varphi+\beta_c)-\text{sen}(2\varphi)]\frac{\partial w(q)}{\partial m}\right. \\
& \left.+[\cos(2\varphi+\beta_c)-\cos(2\varphi)]\frac{\partial w(q)}{\partial t}\right\} \tag{4.89}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \{V_{n,m}^{2*}(p,q)[w(q)-w(p)]-M_{n,m}^{2*}(p,q)[w_{,l}(q)-w_{,l}(p)]n_l \\
& +Q_{n,m}^{2*}(p,q)[v(q)-v(p)]-T_{n,m}^{2*}(p,q)[v_{,l}(q)-v_{,l}(p)]n_l\}d\Gamma_\xi \\
& =-\frac{1}{4\pi}\left\{[(4\pi-2\beta_c)+\text{sen}(2\varphi+\beta_c)-\text{sen}(2\varphi)]\frac{\partial v(q)}{\partial m}\right. \\
& \left.+[\cos(2\varphi+\beta_c)-\cos(2\varphi)]\frac{\partial v(q)}{\partial t}\right\} \tag{4.90}
\end{aligned}$$

Procedendo-se de forma semelhante, a parcela de (4.70), referente à reação de canto $\frac{\partial R^*(p)}{\partial n}$, conduz a:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial R^*(p)}{\partial n} [w]_p^{r_2} + \frac{\partial R^*(p)}{\partial n} [w]_p^{r_1} \right\} \\
& = \frac{(1-\nu_1)}{4\pi} \left\{ -[\text{sen}(2\varphi)-\text{sen}(2\varphi+\beta_c)]\frac{\partial w(q)}{\partial m} \right. \\
& \left. +[\cos(2\varphi)-\cos(2\varphi+\beta_c)]\frac{\partial w(q)}{\partial t} \right\} \tag{4.91}
\end{aligned}$$

De forma análoga para v no equilíbrio inferior, fica:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial R^*(p)}{\partial n} [v]_p^{r_2} + \frac{\partial R^*(p)}{\partial n} [v]_p^{r_1} \right\} \\
& = \frac{(1-\nu_2)}{4\pi} \left\{ -[\text{sen}(2\varphi)-\text{sen}(2\varphi+\beta_c)]\frac{\partial v(q)}{\partial m} \right. \\
& \left. +[\cos(2\varphi)-\cos(2\varphi+\beta_c)]\frac{\partial v(q)}{\partial t} \right\} \tag{4.92}
\end{aligned}$$

E as demais parcelas dependentes de ξ em (4.70) conduzem a valores nulos. Assim, após as substituições de (4.89) e (4.91) em (4.70), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& C_3 \frac{\partial w(p)}{\partial m} + C_4 \frac{\partial v(p)}{\partial t} + \int_{\Gamma} \{V_{n,m}^{1*}(p, q)[w(q) - w(p)] - M_{n,m}^{1*}(p, q)[w_l(q) - w_l(p)]n_l\} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \{Q_{n,m}^{1*}(p, q)[v(q) - v(p)] - T_{n,m}^{1*}(p, q)[v_l(q) - v_l(p)]n_l\} d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,m}^{sup1*}[w_c - w(p)] + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,m}^{inf1*}[v_c - v(p)] \\
& = \int_{\Gamma} [V_n w_{,m}^{1*}(p, q) - M_n w_{,lm}^{1*}(p, q)n_l] d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} [Q_n v_{,m}^{1*}(p, q) - T_n v_{,lm}^{1*}(p, q)n_l] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_{c,m}^{1*}(p, q) + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_{c,m}^{1*}(p, q) \\
& + \int_{\Omega} [g_1 w_{,m}^{1*}(p, q) + g_2 v_{,m}^{1*}(p, q)] d\Omega \tag{4.93}
\end{aligned}$$

onde:

$$C_3 = \begin{cases} 0, se p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{\beta_c}{2\pi} + \frac{\nu_1}{4\pi} [\text{sen}(2\varphi) + \text{sen}(2\varphi + \beta_c)], se p \in \Gamma \\ 1, se p \in \Omega \end{cases} \tag{4.94}$$

$$C_4 = \begin{cases} 0, se p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{\nu_1}{4\pi} [\text{sen}(2\varphi) + \text{sen}(2\varphi + \beta_c)], se p \in \Gamma \\ 1, se p \in \Omega \end{cases} \tag{4.95}$$

Uma outra equação integral de interesse, quando o ponto fonte tende ao contorno, é a inclinação do deslocamento da placa inferior, que após a inserção do contorno auxiliar fica:

$$\begin{aligned}
& v_{,m}(p) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_{n,m}^{2*}(p, q)w - M_{n,m}^{2*}(p, q)w_{,l}n_l + Q_{n,m}^{2*}(p, q)v - T_{n,m}^{2*}(p, q)v_{,l}n_l] d\Gamma_\xi \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos-1} R_{c,m}^{sup2*}(p, q)w_c + \sum_{c=1}^{Ncantos-1} R_{c,m}^{inf2*}(p, q)v_c \\
& = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi} [V_n w_{,m}^{2*}(p, q) - M_n w_{,lm}^{2*}(p, q)n_l + Q_n v_{,m}^{2*}(p, q) - T_n v_{,lm}^{2*}(p, q)n_l] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos-1} R_c^{sup} w_{c,m}^{2*}(p, q) + \sum_{c=1}^{Ncantos-1} R_c^{inf} v_{c,m}^{2*}(p, q) \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega} [g_1 w_{,m}^{2*}(p, q) + g_2 v_{,m}^{2*}(p, q)] d\Omega \tag{4.96}
\end{aligned}$$

Tomando um procedimento análogo feita em (4.70), tem-se:

$$\begin{aligned}
& C_5 \frac{\partial w(p)}{\partial t} + C_6 \frac{\partial v(p)}{\partial m} + \int_{\Gamma} \{V_{n,m}^{2*}(p, q)[w(q) - w(p)] - M_{n,m}^{2*}(p, q)[w_{,l}(q) - w_{,l}(p)]n_l\} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \{Q_{n,m}^{2*}(p, q)[v(q) - v(p)] - T_{n,m}^{2*}(p, q)[v_{,l}(q) - v_{,l}(p)]n_l\} d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,m}^{sup2*}[w_c - w(p)] + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,m}^{inf2*}[v_c - v(p)] \\
& = \int_{\Gamma} [V_n w_{,m}^{2*}(p, q) - M_n w_{,lm}^{2*}(p, q)n_l] d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} [Q_n v_{,m}^{2*}(p, q) - T_n v_{,lm}^{2*}(p, q)n_l] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup} w_{c,m}^{2*}(p, q) + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf} v_{c,m}^{2*}(p, q) \\
& + \int_{\Omega} [g_1 w_{,m}^{2*}(p, q) + g_2 v_{,m}^{2*}(p, q)] d\Omega \tag{4.97}
\end{aligned}$$

onde:

$$C_5 = \begin{cases} 0, & \text{se } p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{\beta_c}{2\pi} + \frac{v_2}{4\pi} [\text{sen}(2\varphi) + \text{sen}(2\varphi + \beta_c)], & \text{se } p \in \Gamma \\ 1, & \text{se } p \in \Omega \end{cases} \tag{4.98}$$

$$C_6 = \begin{cases} 0, & \text{se } p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{v_2}{4\pi} [\text{sen}(2\varphi) + \text{sen}(2\varphi + \beta_c)], & \text{se } p \in \Gamma \\ 1, & \text{se } p \in \Omega \end{cases} \quad (4.99)$$

4.3 Equações Integrais de Curvatura no Domínio

Para a obtenção dos esforços no domínio são necessárias as curvaturas das placas, visto que a equação (2.11) depende das curvaturas $w_{,kk}$ e $w_{,ij}$. Isso implica que novas derivações deverão ser realizadas com relação as direções m e t no ponto fonte. Tomando a equação (4.21) e derivando na direção t em relação ao ponto fonte, podemos representar a equação integral de curvatura da placa superior da seguinte forma:

$$\begin{aligned} w_{,mt}(p) &+ \int_{\Gamma} V_{n,mt}^{1*}(p,q)w(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_{n,mt}^{1*}(p,q)v(q)d\Gamma \\ &+ \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,mt}^{sup1*}(p,q)w_c + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,mt}^{inf1*}(p,q)v_c \\ &- \int_{\Gamma} M_{n,mt}^{*1}(p,q)w_{,k}(q)n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{n,mt}^{*1}(p,q)v_{,k}(q)n_k d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} V_n(q)w_{,mt}^{1*}(p,q)d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n(q)v_{,mt}^{1*}(p,q)d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} M_n(q)w_{,kmt}^{1*}(p,q)n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n(q)v_{,kmt}^{1*}(p,q)n_k d\Gamma \\ &+ \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup}w_{c,mt}^{1*}(p,q) + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf}v_{c,mt}^{1*}(p,q) \\ &+ \int_{\Omega} g_1 w_{,mt}^{1*}(p,q)d\Omega + \int_{\Omega} g_2 v_{,mt}^{1*}(p,q)d\Omega \end{aligned} \quad (4.100)$$

Analogamente, a equação de curvatura da placa inferior é escrita:

$$\begin{aligned}
& v_{,mt}(p) + \int_{\Gamma} V_{n,mt}^{2*}(p,q)w(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_{n,mt}^{2*}(p,q)v(q)d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,mt}^{sup2*}(p,q)w_c + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_{c,mt}^{inf2*}(p,q)v_c \\
& - \int_{\Gamma} M_{n,mt}^{*2}(p,q)w_{,k}(q)n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{n,mt}^{*2}(p,q)v_{,k}(q)n_k d\Gamma \\
& = \int_{\Gamma} V_n(q)w_{,mt}^{2*}(p,q)d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n(q)v_{,mt}^{2*}(p,q)d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} M_n(q)w_{,kmt}^{2*}(p,q)n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n(q)v_{,kmt}^{2*}(p,q)n_k d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{sup}w_{c,mt}^{2*}(p,q) + \sum_{c=1}^{Ncantos} R_c^{inf}v_{c,mt}^{2*}(p,q) \\
& + \int_{\Omega} g_1 w_{,mt}^{2*}(p,q)d\Omega + \int_{\Omega} g_2 v_{,mt}^{2*}(p,q)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Chama-se atenção que as derivadas das soluções fundamentais podem ser vistas no Apêndice A.

4.4 Transformação das Equações Integrais de Carregamento

A exclusividade em trabalhar com integrais definidas no contorno é uma das características das formulações puras do MEC. Como consequência disso, as discretizações dos problemas são concebidas apenas no contorno, bem como as interpolações e locações das variáveis. Dessa maneira, evidencia-se uma das maiores vantagens do MEC e sua elegância: a redução dimensional da solução numérica em uma ordem. Todavia, podem existir integrais de domínio na representação integral do problema, como os casos de forças de corpo, problemas não lineares e não homogêneos, que têm potencial de suprimir essa vantagem de redução de dimensionalidade do método. Nesses casos, a aplicação de algumas técnicas para lidar com essas integrais de domínio, a fim de reestabelecer o carácter puro às formulações do MEC, torna-se inevitável. Neste trabalho será mostrada uma estratégia fundamentada na primeira identidade Green para transformar as equações integrais de

domínio decorrentes de carregamentos distribuídos constantes em equações integrais de contorno equivalentes.

Seja uma região Ω_g , com seu contorno Γ_g e o ponto de carregamento p , conforme a Figura 4.2. Algumas expressões podem ser escritas admitindo-se um sistema de coordenadas polares e utilizando as relações geométricas indicadas na mesma figura:

$$d\Omega = r dr d\theta \quad (4.102)$$

$$d\theta = \frac{r_{,i} n_i}{r} dr \quad (4.103)$$

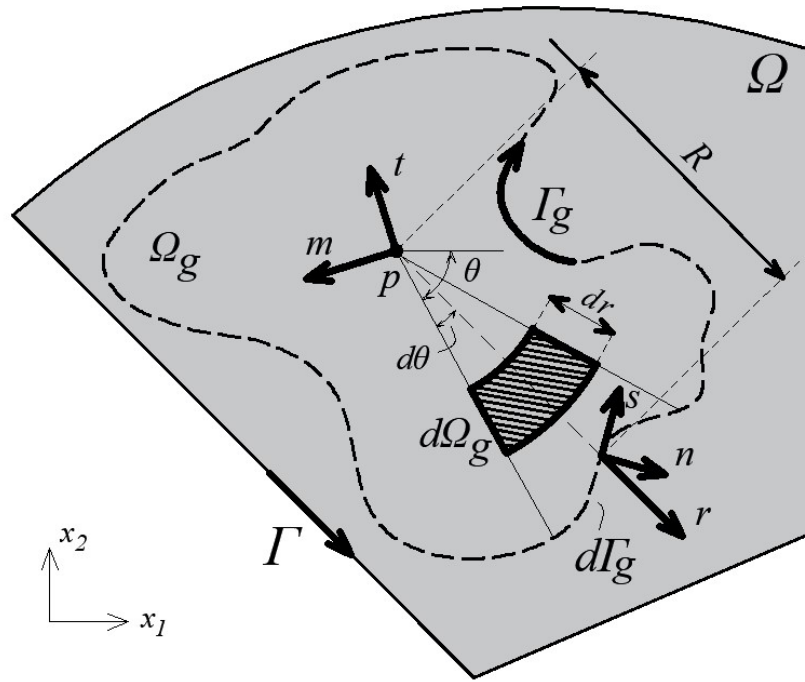


Figura 4.2 - Região carregada Ω_g . Fonte: Autor.

Tomando-se uma solução fundamental em deslocamento genérico, dependente apenas de r , como o deslocamento superior mobilizado pela carga atuante na mesma placa, e assumindo g_0^{sup} e g_0^{inf} constantes, então a integral de domínio de carga, pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_g} [g_0^{sup} w^{1*} + g_0^{inf} v^{1*}] d\Omega = g_0^{sup} \int_{\Omega} w^{1*} d\Omega + g_0^{inf} \int_{\Omega} v^{1*} d\Omega \quad (4.104)$$

Integrando-se (4.104) em coordenadas polares, fica:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} [g_0^{sup} w^{1*} + g_0^{inf} v^{1*}] d\Omega &= g_0^{sup} \int_0^\theta \int_0^r w^{1*} r dr d\theta \\ &+ g_0^{inf} \int_0^\theta \int_0^r v^{1*} r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.105)$$

Já a integração indefinida em r da equação (4.105) resulta em:

$$Fs^{1*}(r) = \int w^{1*} r dr \quad (4.106)$$

$$Fi^{1*}(r) = \int v^{1*} r dr \quad (4.107)$$

Mas ao analisar os limites de integração na equação (4.106), chega-se à seguinte expressão:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^r [w^{1*}] r dr = Fs^{1*}(r) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Fs^{1*}(\varepsilon) \quad (4.108)$$

Ao analisar (4.107), tem-se um resultado análogo à (4.108), chegando-se a:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^r v^{1*} r dr = Fi^{1*}(r) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Fi^{1*}(\varepsilon) \quad (4.109)$$

Desta forma, a partir de (4.108), a equação (4.105) fica:

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \int_0^r [g_0^{sup} w^{1*} + g_0^{inf} v^{1*}] r dr d\theta &= g_0^{sup} \int_0^\theta Fs^{1*} d\theta - g_0^{sup} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta Fs^{1*}(\varepsilon) d\theta \\ &+ g_0^{inf} \int_0^\theta Fi^{1*} d\theta - g_0^{inf} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta Fi^{1*}(\varepsilon) d\theta \end{aligned} \quad (4.110)$$

A equação (4.108) pode ser finalmente transformada em integral de contorno, se a relações (4.106) e (4.107) forem incorporadas e ainda sabendo-se que as relações geométricas da Figura 4.2 tem-se $d\theta = r_i n_i d\Gamma / r$, resultando em:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_g} [g_0^{sup} w^{1*} + g_0^{inf} v^{1*}] d\Omega \\
&= g_0^{sup} \int_0^\theta F s^{1*} d\theta - g_0^{sup} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta F s^{1*}(\varepsilon) d\theta \\
&+ g_0^{inf} \int_0^\theta F i^{1*} d\theta - g_0^{inf} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta F i^{1*}(\varepsilon) d\theta \\
&= g_0^{sup} \int_{\Gamma_g} \chi s^{1*} r_{,i} n_i d\Gamma + g_0^{inf} \int_{\Gamma_g} \chi i^{1*} r_{,i} n_i d\Gamma + TLC_1
\end{aligned} \tag{4.111}$$

sendo:

$$\chi s^{1*}(r) = \frac{F s^{1*}(r)}{r} = \frac{1}{r} \int w^{1*} r dr \tag{4.112}$$

e

$$\chi i^{1*}(r) = \frac{F i^{1*}(r)}{r} = \frac{1}{r} \int v^{1*} r dr \tag{4.113}$$

$$TLC_1 = -g_0^{sup} \int_0^\theta \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F s^{1*}(\varepsilon) d\theta - g_0^{inf} \int_0^\theta \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F i^{1*}(\varepsilon) d\theta \tag{4.114}$$

onde TLC_1 é o termo livre de carga constante na placa superior.

As soluções fundamentais dadas em (4.111) podem ser obtidas substituindo (3.40) em (4.112) e (3.42) em (4.113), chegando-se a:

$$\chi s^{1*}(r) = c\{D_2 i_4(r) + K_w i_0(r) - K_P i_2(r)\} \tag{4.115}$$

$$\chi i^{1*}(r) = c\{K_w i_0(r) - K_P i_2(r)\} \tag{4.116}$$

onde:

Para o caso em que $K_p < \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso I):

$$i_0(r) = \frac{r^3[4l n(r) - 1]}{64} + a \frac{r(2l n(r) + 1)}{4} - a \operatorname{Re} \left[\frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right] - fat \operatorname{Im} \left[\frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right] \quad (4.117)$$

$$i_2(r) = \frac{r[2l n(r) + 1]}{4} - a \operatorname{Re} \left[z_1 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right] - fat \operatorname{Im} \left[z_1 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right] \quad (4.118)$$

$$i_4(r) = -a \operatorname{Re} \left[z_1^2 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right] - fat \operatorname{Im} \left[z_1^2 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right] \quad (4.119)$$

Convém notar que as constantes (a , fat) foram definidas nas expressões (3.58) e (3.60).

Para o caso em que $K_p > \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso II):

$$i_0(r) = \frac{r^3[4l n(r) - 1]}{64} + \frac{a}{b} \frac{r[2l n(r) - 1]}{4} + a_1 \left(\frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}} - \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right) + b_1 \left(z_2 \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}} - z_1 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right) \quad (4.120)$$

$$i_2(r) = \frac{r[2l n(r) + 1]}{4} + a_1 \left(z_2 \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}} - z_1 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right) + b_1 \left(z_2^2 \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}} - z_1^2 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right) \quad (4.121)$$

$$i_4(r) = a_1 \left(z_2^2 \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}} - z_1^2 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right) + b_1 \left(z_2^3 \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}} - z_1^3 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right) \quad (4.122)$$

Convém notar que os as constantes (a_1 , b_1) foram definidas nas expressões (3.85) e (3.86).

Para o caso em que $K_p = \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso III):

$$i_0(r) = \frac{r^3[4l n(r) - 1]}{64} - \frac{a_1}{2z_1\sqrt{z_1}} \left(\sqrt{z_1} r K_0(r\sqrt{z_1}) + 2K_1(r\sqrt{z_1}) \right)$$

$$+b_1 \left(\frac{r[2l n(r) - 1]}{4} - z_1 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} \right) \quad (4.123)$$

$$i_2(r) = \frac{r[2l n(r) + 1]}{4} - a_1 \left(r \frac{K_0(r\sqrt{z_1})}{2} \right) - b_1 \left(\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) \quad (4.124)$$

$$i_4(r) = a_1 \left(\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) - r z_1 \frac{K_0(r\sqrt{z_1})}{2} \right) - b_1 z_1 \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) \quad (4.125)$$

Convém notar que os as constantes (a_1, b_1) foram definidas nas expressões (3.110) e (3.111).

O cálculo de termo livre de carregamento para a equação integral de deslocamento superior dado em (4.111) pode ser obtido manipulando apropriadamente os limites envolvidos em (4.114) chegando-se a:

$$TLC_1 = g_0^{sup} c [D_2 t_4 + K_w t_0 - K_p t_2] + g_0^{inf} c [K_w t_0 - K_p t_2] \quad (4.126)$$

Para o caso em que $K_p < \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso I):

$$t_0 = \left[a \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_1} \right) - fat \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z_1} \right) \right] \theta \quad (4.127)$$

$$t_2 = a \theta \quad (4.128)$$

$$t_4 = [a \operatorname{Re}(z_1) - fat \operatorname{Im}(z_1)] \theta \quad (4.129)$$

Convém notar que os as constantes (a, fat) foram definidas nas expressões (3.58) e (3.60).

Para o caso em que $K_p > \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso II):

$$t_0 = \frac{z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2}{z_1^2 z_2^2} \theta \quad (4.130)$$

$$t_2 = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} \theta \quad (4.131)$$

$$t_4 = \theta \quad (4.132)$$

Para o caso em que $K_p = \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso III):

$$t_0 = \frac{3}{z_1^2} \theta \quad (4.133)$$

$$t_2 = \frac{2}{z_1} \theta \quad (4.134)$$

$$t_4 = \theta \quad (4.135)$$

onde:

$$\theta = \begin{cases} 2\pi, & \text{se } p \in \Omega_g \text{ para ponto fonte no domínio da carga distribuída} \\ \pi, & \text{se } p \in \Omega \text{ para ponto fonte no contorno} \\ 0, & \text{se } p \notin \Omega \cup \Gamma \text{ para ponto fonte fora do contorno} \end{cases} \quad (4.136)$$

De forma semelhante, as integrais de domínio da equação integral dos deslocamentos inferiores podem ser trabalhadas. Então, a seguinte relação pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} [g_0^{sup} w^{2*} + g_0^{inf} v^{2*}] d\Omega &= g_0^{sup} \int_0^\theta F s^{2*} d\theta - g_0^{sup} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta F s^{2*}(\varepsilon) d\theta \\ &\quad + g_0^{inf} \int_0^\theta F i^{2*} d\theta - g_0^{inf} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta F i^{2*}(\varepsilon) d\theta \\ &= g_0^{sup} \int_{\Gamma_g} \chi s^{2*} r_{,i} n_i d\Gamma \\ &\quad + g_0^{inf} \int_{\Gamma_g} \chi i^{2*} r_{,i} n_i d\Gamma + TLC_2 \end{aligned} \quad (4.137)$$

De forma análoga às expressões (4.112) e (4.113) chega-se as formas das soluções fundamentais descritas na (4.137), respectivamente:

$$\chi s^{2*}(r) = \chi i^{1*}(r) \quad (4.138)$$

$$\chi i^{2*}(r) = c\{D_1 i_4(r) + K_w i_0(r) - K_P i_2(r)\} \quad (4.139)$$

onde as funções $i_0(r)$, $i_2(r)$ e $i_4(r)$ são dadas nas equações (4.114) a (4.114). Já o termo livre de carregamento obtido nesse caso, para a equação integral do deslocamento inferior, é análogo ao dado na equação (4.114), trocando Fs^{1*} e Fi^{1*} , respectivamente, por Fs^{2*} e Fi^{2*} , o que resulta na forma final:

$$TLC_2 = g_0^{sup} c(K_w t_0 - K_P t_2) + g_0^{inf} c(D_1 t_4 + K_w t_0 - K_P t_2) \quad (4.140)$$

Convém notar que as expressões t_0 , t_2 e t_4 são as mesmas daquelas presentes nas equações (4.127)-(4.135).

Em casos que o carregamento distribuído seja hidrostático (com variação linear em uma ou mais direções), conforme mostrado na Figura 4.3, tem-se:

$$g_1 = g_{,i}^{sup} r_{,i} r = r(\Delta g_x^{sup} r_{,1} + \Delta g_y^{sup} r_{,2}) \quad (4.141)$$

$$g_2 = g_{,i}^{inf} r_{,i} r = r(\Delta g_x^{inf} r_{,1} + \Delta g_y^{inf} r_{,2}) \quad (4.142)$$

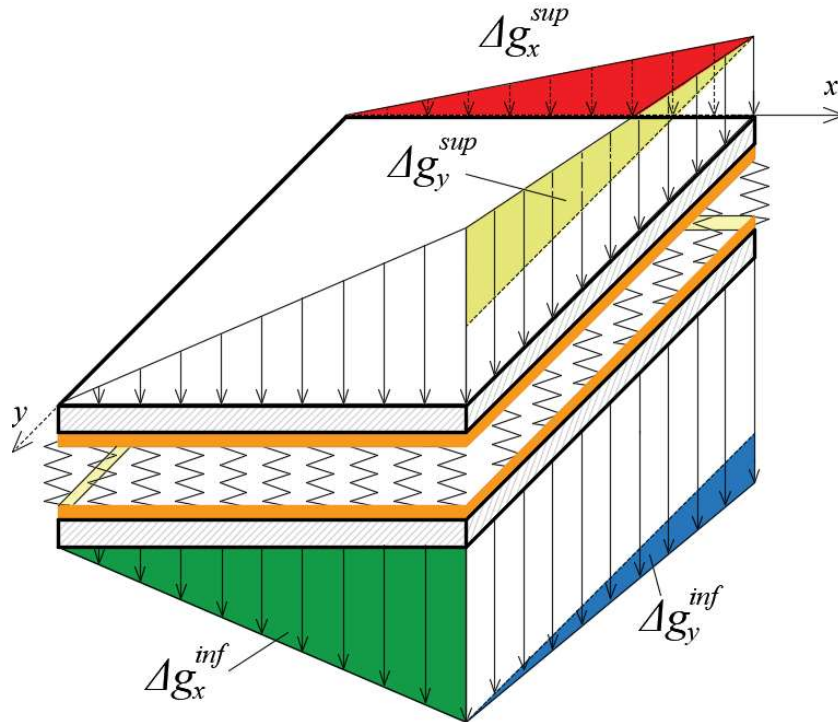


Figura 4.3 – Carregamento com variação linear.

Pode-se escrever a integral de domínio de carga hidrostática da equação integral de deslocamento da placa superior, dada em (4.23), como:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_g} [g_1 w^{1*} + g_2 v^{1*}] d\Omega &= \int_{\Omega} g_{,i}^{sup} r_{,i} r w^{1*} d\Omega + \int_{\Omega} g_{,i}^{inf} r_{,i} r v^{1*} d\Omega \\
&= \int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} G_S^{1*} d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{sup} G_S^{1*}(\varepsilon) d\theta \\
&\quad + \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} G_I^{1*} d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} G_I^{1*}(\varepsilon) d\theta
\end{aligned} \tag{4.143}$$

onde:

$$G_S^{1*}(r) = \int w^{1*} r^2 dr \tag{4.144}$$

$$G_I^{1*}(r) = \int v^{1*} r^2 dr \tag{4.145}$$

A partir das relações geométricas da Figura 4.2 tem-se que $d\theta = r_{,i} n_i d\Gamma / r$, e quando essa for substituída em (4.143) resulta em:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_g} [g_1 w^{1*} + g_2 v^{1*}] d\Omega &= \int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} G_S^{1*} d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} G_S^{1*}(\varepsilon) d\theta \\
&\quad + \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} G_I^{1*} d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} G_I^{1*}(\varepsilon) d\theta \\
&= \int_{\Gamma_g} g_{,i}^{sup} r_{,i} \Lambda_S^{1*} r_{,j} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_g} g_{,i}^{inf} r_{,i} \Lambda_I^{1*} r_{,j} n_j d\Gamma \\
&\quad + TLH_1
\end{aligned} \tag{4.146}$$

As soluções fundamentais Λ_S^{1*} e Λ_I^{1*} associadas à (4.146) podem ser escritas:

$$\Lambda_S^{1*}(r) = \frac{G_S^{1*}(r)}{r} \tag{4.147}$$

$$\Lambda i^{1*}(r) = \frac{Gi^{1*}(r)}{r} \quad (4.148)$$

Já o termo livre associado ao carregamento hidrostático em (4.146):

$$TLH_1 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} Gs^{1*}(\varepsilon) d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} Gi^{1*}(\varepsilon) d\theta \quad (4.149)$$

Além disso, as soluções fundamentais Λs^{1*} e Λi^{1*} podem ser explicitamente mostradas como:

$$\Lambda s^{1*}(r) = c\{D_2 h_4(r) + K_w h_0(r) - K_p h_2(r)\} \quad (4.150)$$

$$\Lambda i^{1*}(r) = c\{K_w h_0(r) - K_p h_2(r)\} \quad (4.151)$$

Para o caso em que $K_p < \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso I):

$$h_0(r) = \frac{r^4[5l n(r) - 1]}{100} + a \frac{r^2[3l n(r) + 2]}{9} - a Re \left[\frac{1}{z_1} K_r(r\sqrt{z_1}) \right] - f at Im \left[\frac{1}{z_1} K_r(r\sqrt{z_1}) \right] \quad (4.152)$$

onde:

$$K_r(x) = x K_1(x) - \frac{\Psi_K(x)}{x} \quad (4.153)$$

$$\Psi_K(x) = \frac{\pi x}{2} [K_0(x)L_1(x) + K_1(x)L_0(x)] \quad (4.154)$$

$$L_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(m + \alpha + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha+1} \quad (4.155)$$

Em (4.155), $\Gamma(z)$ é a função gama, cuja definição pode ser encontrada em Abramowitz e Stegun (1972).

Aplicando os operadores laplaciano e biarmônico em (4.152), tem-se, respectivamente:

$$h_2(r) = \frac{r^2[3l n(r) + 2]}{9} - a \operatorname{Re}[K_r(r\sqrt{z_1})] - fat \operatorname{Im}[K_r(r\sqrt{z_1})] \quad (4.156)$$

$$h_4(r) = -a \operatorname{Re}[z_1 K_r(r\sqrt{z_1})] - fat \operatorname{Im}[z_1 K_r(r\sqrt{z_1})] \quad (4.157)$$

Convém notar que as constantes (a , fat) foram definidas nas expressões (3.58) e (3.60).

Para o caso em que $K_p > \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso II):

$$\begin{aligned} h_0(r) = & \frac{r^4[5l n(r) - 1]}{100} + a \frac{r^2[3l n(r) + 2]}{9} - \frac{a}{b} (K_r(r\sqrt{z_1}) - K_r(r\sqrt{z_2})) \\ & - \frac{1 - a^2 z_1 z_2}{b} \left(\frac{1}{z_1} K_r(r\sqrt{z_1}) - \frac{1}{z_2} K_r(r\sqrt{z_2}) \right) \end{aligned} \quad (4.158)$$

onde:

$$h_2(r) = \frac{r^2[3l n(r) + 2]}{9} + \frac{1}{b} \left[\frac{z_2}{z_1} K_r(r\sqrt{z_1}) - \frac{z_1}{z_2} K_r(r\sqrt{z_2}) \right] \quad (4.159)$$

$$h_4(r) = \frac{z_1 z_2}{b} \left[\frac{1}{z_1} K_r(r\sqrt{z_1}) - \frac{1}{z_2} K_r(r\sqrt{z_2}) \right] \quad (4.160)$$

Convém notar que a constante a foi definida em (3.58) e $b = z_1 - z_2$.

Para o caso em que $K_p = \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso III):

$$\begin{aligned} h_0(r) = & \frac{r^4[5l n(r) - 1]}{100} + \frac{2}{z_1} \frac{r^2[3l n(r) + 2]}{9} - \frac{2}{z_1} \frac{d}{dz_1} [K_r(r\sqrt{z_1})] \\ & - (1 - 2z_1) \left[-\frac{1}{z_1^2} K_r(r\sqrt{z_1}) + \frac{1}{z_1} \frac{d}{dz_1} K_r(r\sqrt{z_1}) \right] \end{aligned} \quad (4.161)$$

$$h_2(r) = \frac{r^2[3l n(r) + 2]}{9} + \frac{d}{dz_1} K_r(r\sqrt{z_1}) - \frac{2}{z_1} K_r(r\sqrt{z_1}) \quad (4.162)$$

$$h_4(r) = -K_r(r\sqrt{z_1}) + z_1 \frac{d}{dz_1} K_r(r\sqrt{z_1}) \quad (4.163)$$

onde:

$$\frac{d}{dz_1} K_r(r\sqrt{z_1}) = \frac{r}{2\sqrt{z_1}} \left[-r\sqrt{z_1} K_0(r\sqrt{z_1}) - K_1(r\sqrt{z_1}) + \frac{\Psi_K(r\sqrt{z_1})}{(r\sqrt{z_1})^2} \right] \quad (4.164)$$

Calculando as integrais e aplicando os limites adequadamente em (4.149), tem-se o termo livre do carregamento com variação linear na equação integral de deslocamento superior:

$$TLH_1 = c(D_2 t_4 + K_w t_0 - K_p t_2)(x_p \Delta g_x^{sup} + y_p \Delta g_y^{sup}) + c(K_w t_0 - K_p t_2)(x_p \Delta g_x^{inf} + y_p \Delta g_y^{inf}) \quad (4.165)$$

onde Δg_x^{sup} e Δg_y^{sup} são as variações do carregamento da placa superior nas direções x e y , respectivamente. De forma análoga, Δg_x^{inf} e Δg_y^{inf} são as variações do carregamento da placa inferior nas direções x e y , respectivamente. As coordenadas do ponto fonte são representadas por x_p e y_p . Convém notar que as constantes t_0 , t_2 e t_4 ficam idênticas ao caso do carregamento uniforme e são dadas de acordo com a natureza das raízes conforme indicado nas equações (4.127) a (4.129) para raízes complexas (caso I). Já para raízes reais distintas (Caso II), tais constantes são dadas nas equações (4.130) a (4.132). Por fim, os valores t_0 , t_2 e t_4 para raízes múltiplas podem ser encontrados nas equações (4.133) a (4.135).

A integral de domínio de carga hidrostática da equação integral de deslocamento da placa inferior, vista em (4.47), pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} [g_1 w^{2*} + g_2 v^{2*}] d\Omega &= \int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} G s^{2*} d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} G s^{2*}(\varepsilon) d\theta \\ &+ \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} G i^{2*} d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} G i^{2*}(\varepsilon) d\theta \\ &= \int_{\Gamma_g} g_{,i}^{sup} r_{,i} \Lambda s^{2*} r_{,j} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_g} g_{,i}^{inf} r_{,i} \Lambda i^{2*} r_{,j} n_j d\Gamma \\ &+ TLH_2 \end{aligned} \quad (4.166)$$

onde as soluções fundamentais de termos de carga são dadas por:

$$\Lambda s^{2*}(r) = \frac{G s^{2*}(r)}{r} = \Lambda i^{1*}(r) \quad (4.167)$$

$$\Lambda i^{2*}(r) = \frac{Gi^{2*}(r)}{r} \quad (4.168)$$

$$TLH_2 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} Gs^{2*}(\varepsilon) d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} Gi^{2*}(\varepsilon) d\theta \quad (4.169)$$

Convém notar que os valores explícitos das soluções fundamentais Λs^{2*} , Λi^{2*} e termo livre TLH_2 são dadas por:

$$\Lambda s^{2*}(r) = c\{K_w h_0(r) - K_P h_2(r)\} \quad (4.170)$$

$$\Lambda i^{2*}(r) = c\{D_1 h_4(r) + K_w h_0(r) - K_P h_2(r)\} \quad (4.171)$$

$$TLH_2 = c(K_w t_0 - K_P t_2)(x_p \Delta g_x^{sup} + y_p \Delta g_y^{sup}) + c(D_1 t_4 + K_w t_0 - K_P t_2)(x_p \Delta g_x^{inf} + y_p \Delta g_y^{inf}) \quad (4.172)$$

onde as funções $h_0(r)$, $h_2(r)$ e $h_4(r)$ são definidas por (4.152), (4.156) e (4.157) para o Caso I (raízes complexas), de (4.158)-(4.160) para o Caso II (raízes reais distintas) e (4.161)-(4.163) para o Caso III (raízes reais múltiplas).

As integrais de domínio de carga uniforme pertencentes às integrais da rotação da placa superior, dada em (4.93), e inferior, vista em (4.97), são dadas por:

$$\int_{\Omega_g} [g_0^{sup} w_{,m}^{1*} + g_0^{inf} v_{,m}^{1*}] d\Omega = g_0^{sup} \int_{\Omega_g} w_{,m}^{1*} d\Omega + g_0^{inf} \int_{\Omega_g} v_{,m}^{1*} d\Omega \quad (4.173)$$

$$\int_{\Omega_g} [g_0^{sup} w_{,m}^{2*} + g_0^{inf} v_{,m}^{2*}] d\Omega = g_0^{sup} \int_{\Omega_g} w_{,m}^{2*} d\Omega + g_0^{inf} \int_{\Omega_g} v_{,m}^{2*} d\Omega \quad (4.174)$$

Aplicando em (4.173) e (4.174) um procedimento análogo ao feito nas equações (4.104) e (4.139), as seguintes expressões podem ser escritas:

$$\int_{\Omega_g} [g_0^{sup} w_{,m}^{1*} + g_0^{inf} v_{,m}^{1*}] d\Omega = g_0^{sup} \int_{\Gamma_g} Hs^{1*} r_{,i} m_i r_{,j} n_j d\Gamma$$

$$+g_0^{inf} \int_{\Gamma_g} H i^{1*} r_{,i} m_i r_{,j} n_j d\Gamma \quad (4.175)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} [g_0^{sup} w_{,m}^{2*} + g_0^{inf} v_{,m}^{2*}] d\Omega = g_0^{sup} \int_{\Gamma_g} H s^{2*} r_{,i} m_i r_{,j} n_j d\Gamma \\ + g_0^{inf} \int_{\Gamma_g} H i^{2*} r_{,i} m_i r_{,j} n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (4.176)$$

sendo:

$$H s^{1*}(r) = \frac{1}{r} \int r \frac{dw^{1*}(r)}{dr} dr = c\{D_2 j_4(r) + K_w j_0(r) - K_P j_2(r)\} \quad (4.177)$$

$$H i^{1*}(r) = H s^{2*}(r) = \frac{1}{r} \int r \frac{dw^{2*}(r)}{dr} dr = c\{K_w j_0(r) - K_P j_2(r)\} \quad (4.178)$$

$$H i^{2*}(r) = \frac{1}{r} \int r \frac{dv^{2*}(r)}{dr} dr = c\{D_1 j_4(r) + K_w j_0(r) - K_P j_2(r)\} \quad (4.179)$$

onde:

Para o caso em que $K_P < \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso I):

$$j_0(r) = -\frac{r^2[6l n(r) + 1]}{36} - a + a \operatorname{Re} \left[\frac{\Psi_{K1}(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} \right] + fat \operatorname{Im} \left[\frac{\Psi_{K1}(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} \right] \quad (4.180)$$

$$j_2(r) = -1 + a \operatorname{Re} \left[z_1 \frac{\Psi_{K1}(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} \right] + fat \operatorname{Im} \left[z_1 \frac{\Psi_{K1}(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} \right] \quad (4.181)$$

$$j_4(r) = a \operatorname{Re} \left[z_1^2 \frac{\Psi_{K1}(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} \right] + fat \operatorname{Im} \left[z_1^2 \frac{\Psi_{K1}(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} \right] \quad (4.182)$$

Para o caso em que $K_P > \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso II):

$$j_0(r) = -\frac{r^2[6l n(r) + 1]}{36} - a + \frac{a}{b} \left[z_1 \frac{\Psi_{K1}(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} - z_2 \frac{\Psi_{K1}(r\sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}r} \right]$$

$$+ \frac{(1 - a^2 z_1 z_2)}{b} \left[\frac{\Psi_K(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} - \frac{\Psi_K(r\sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}r} \right] \quad (4.183)$$

$$j_2(r) = -1 + \frac{1}{b} \left[-z_2 \frac{\Psi_K(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} + z_1 \frac{\Psi_K(r\sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}r} \right] \quad (4.184)$$

$$j_4(r) = -\frac{z_1 z_2}{b} \left[\frac{\Psi_K(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} - \frac{\Psi_K(r\sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}r} \right] \quad (4.185)$$

Convém notar que a constante a foi definida em (3.58) e $b = z_1 - z_2$.

Para o caso em que $K_p = \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso III):

$$j_0(r) = -\frac{r^2[6l n(r) + 1]}{36} - \frac{2}{z_1} + \frac{2}{z_1} \left\{ \frac{\Psi_{K1}(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} + z_1 \frac{d}{dz_1} \left[\frac{\Psi_{K1}(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} \right] \right\} \\ + (1 - 2z_1) \left\{ \frac{d}{dz_1} \left[\frac{\Psi_K(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} \right] \right\} \quad (4.186)$$

$$j_2(r) = -z_1 \frac{d}{dz_1} \left[\frac{\Psi_K(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} \right] + \frac{\Psi_K(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} - 1 \quad (4.187)$$

$$j_4(r) = -z_1^2 \frac{d}{dz_1} \left[\frac{\Psi_K(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} \right] \quad (4.188)$$

onde:

$$\frac{d}{dz_1} \left[\frac{\Psi_K(r\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}r} \right] = \frac{1}{2z_1} \left\{ r\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) - \frac{1}{r\sqrt{z_1}} \Psi_K(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (4.189)$$

Convém notar que não há a contribuição de termos livres de carregamento nas equações integrais de rotação, quando se tratar de carregamento uniforme.

Seguindo um procedimento análogo àquele dado às integrais de domínio de carga hidrostática em equações de integrais de deslocamento, as integrais de domínio pertencentes às integrais da rotação da placa superior e inferior podem ser expandidas como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_g} [g_{,i}^{sup} r_{,i} r w_{,m}^{1*} + g_{,i}^{inf} r_{,i} r v_{,m}^{1*}] d\Omega \\
&= \int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} K s^{1*} r_{,j} m_j d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} K s^{1*}(\varepsilon) r_{,j} m_j d\theta \\
&+ \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} K i^{1*} r_{,j} m_j d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} K i^{1*}(\varepsilon) r_{,j} m_j d\theta = \\
&\int_{\Gamma_g} g_{,i}^{sup} r_{,i} \chi s^{1*} r_{,j} m_j r_{,k} n_k d\Gamma + \int_{\Gamma_g} g_{,i}^{inf} r_{,i} \chi i^{1*} r_{,j} m_j r_{,k} n_k d\Gamma + TLR_1 \quad (4.190)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_g} [g_{,i}^{sup} r_{,i} r w_{,m}^{2*} + g_{,i}^{inf} r_{,i} r v_{,m}^{2*}] d\Omega = \\
&\int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} m_j r_{,j} K s^{2*} d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} m_j r_{,j} K s^{2*}(\varepsilon) d\theta \\
&+ \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} m_j r_{,j} K i^{2*} d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} m_j r_{,j} K i^{2*}(\varepsilon) d\theta = \\
&\int_{\Gamma_g} g_{,i}^{sup} r_{,i} \Upsilon s^{2*} m_j r_{,j} r_{,k} n_k d\Gamma + \int_{\Gamma_g} g_{,i}^{sup} r_{,i} \Upsilon i^{2*} m_j r_{,j} r_{,k} n_k d\Gamma + TLR_2 \quad (4.191)
\end{aligned}$$

onde definições das soluções fundamentais e dos termos livres associados às equações (4.190) e (4.191) são dadas por:

$$K s^{1*}(r) = \int r^2 \frac{dw^{1*}(r)}{dr} dr \quad (4.192)$$

$$K s^{2*}(r) = \int r^2 \frac{dw^{2*}(r)}{dr} dr \quad (4.193)$$

$$K i^{1*}(r) = \int r^2 \frac{dv^{1*}(r)}{dr} dr \quad (4.194)$$

$$K i^{2*}(r) = \int r^2 \frac{dv^{2*}(r)}{dr} dr \quad (4.195)$$

$$\Upsilon s^{2*}(r) = \frac{K s^{2*}(r)}{r} = \Upsilon i^{1*}(r) = c\{D_2 p_4(r) + K_w p_0(r) - K_p p_2(r)\} \quad (4.196)$$

$$Yi^{2*}(r) = \frac{Ki^{2*}(r)}{r} = c\{D_1p_4(r) + K_wp_0(r) - K_Pp_2(r)\} \quad (4.197)$$

$$\begin{aligned} TLR_1 &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} m_j r_{,j} Ks^{1*}(\varepsilon) d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} m_j r_{,j} Ki^{1*}(\varepsilon) d\theta \\ &= c(D_2t_4 + K_w t_0 - K_P t_2) m_i g_{,i}^{sup} + c(K_w t_0 - K_P t_2) m_i g_{,i}^{inf} \end{aligned} \quad (4.198)$$

$$\begin{aligned} TLR_2 &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{sup} r_{,i} m_j r_{,j} Ks^{2*}(\varepsilon) d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\theta g_{,i}^{inf} r_{,i} m_j r_{,j} Ki^{2*}(\varepsilon) d\theta \\ &= c(D_1t_4 + K_w t_0 - K_P t_2) m_i g_{,i}^{sup} + c(K_w t_0 - K_P t_2) m_i g_{,i}^{inf} \end{aligned} \quad (4.199)$$

E as expressões t_0 , t_2 e t_4 são as mesmas daquelas presentes nas equações (4.127)-(4.135).

Para o caso em que $K_P < \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso I):

$$p_0(r) = -\left\{ \frac{r^3[4l n(r) + 1]}{32} + \frac{ar}{2} + a \operatorname{Re}[K_{r3}(r\sqrt{z_1})] + fat \operatorname{Im}[K_{r3}(r\sqrt{z_1})] \right\} \quad (4.200)$$

$$p_2(r) = -\left\{ \frac{r}{2} + a \operatorname{Re}[z_1 K_{r3}(r\sqrt{z_1})] + fat \operatorname{Im}[z_1 K_{r3}(r\sqrt{z_1})] \right\} \quad (4.201)$$

$$p_4(r) = -\{a \operatorname{Re}[z_1^2 K_{r3}(r\sqrt{z_1})] + fat \operatorname{Im}[z_1^2 K_{r3}(r\sqrt{z_1})]\} \quad (4.202)$$

onde:

$$K_{r3}(r\sqrt{z_1}) = \frac{1}{\sqrt{z_1}} (r\sqrt{z_1} K_0(r\sqrt{z_1}) + 2K_1(r\sqrt{z_1})). \quad (4.203)$$

Para o caso em que $K_P > \frac{2K_w}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}$ (Caso II):

$$\begin{aligned} p_0(r) &= -\left\{ \frac{r^3[4l n(r) + 1]}{32} + \frac{ar}{2} + \frac{a}{b} [z_1 K_{r3}(r\sqrt{z_1}) - z_2 K_{r4}(r\sqrt{z_2})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - a^2 z_1 z_2}{b} [K_{r3}(r\sqrt{z_1}) - K_{r4}(r\sqrt{z_2})] \right\} \end{aligned} \quad (4.204)$$

$$p_2(r) = -\left\{\frac{r}{2} - \frac{z_2}{b} K_{r3}(r\sqrt{z_1}) + \frac{z_1}{b} K_{r4}(r\sqrt{z_2})\right\} \quad (4.205)$$

$$p_4(r) = \frac{z_1 z_2}{b} [K_{r3}(r\sqrt{z_1}) - K_{r4}(r\sqrt{z_2})] \quad (4.206)$$

onde:

$$K_{r4}(r\sqrt{z_2}) = \frac{1}{\sqrt{z_2}} \left(r\sqrt{z_2} K_0(r\sqrt{z_2}) + 2K_1(r\sqrt{z_2}) \right) \quad (4.207)$$

Convém notar que a constante a foi definida em (3.58) e $b = z_1 - z_2$.

Para o caso em que $K_p = \frac{2K_w}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}}$ (Caso III):

$$p_0(r) = -\left\{ \frac{r^3 [4l n(r) + 1]}{32} + \frac{r}{z_1} + \frac{2}{z_1} \left[K_{r3}(r\sqrt{z_1}) + z_1 \frac{d}{dz_1} [K_{r3}(r\sqrt{z_1})] \right] \right. \\ \left. + (1 - 2z_1) \frac{d}{dz_1} [K_{r3}(r\sqrt{z_1})] \right\} \quad (4.208)$$

$$p_2(r) = -\left\{ \frac{r}{2} - z_1 \frac{d}{dz_1} [K_{r3}(r\sqrt{z_1})] + K_{r3}(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (4.209)$$

$$p_4(r) = z_1^2 \frac{d}{dz_1} [K_{r3}(r\sqrt{z_1})] \quad (4.210)$$

onde:

$$\frac{d}{dz_1} [K_{r3}(r\sqrt{z_1})] = -\frac{1}{z_1} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{z_1}} + \frac{r^2 \sqrt{z_1}}{2} \right) K_1(r\sqrt{z_1}) + r K_0(r\sqrt{z_1}) \right] \quad (4.211)$$

4.5 Método dos Elementos de Contorno

Em concordância com os pontos já discutidos, a princípio para grande parte dos problemas de interesse prático não é possível obter a solução exata das equações integrais. Alternativamente, uma opção considerável é resolvê-los de forma numérica, transformando equações integrais em equações algébricas. Como o contorno, assim como o domínio, é

também contínuo, faz-se necessário gerar um número finito de pontos. Essa transformação compreende a discretização do contorno da placa em segmentos, vide Figura 4.4, que são chamados de elementos de contorno, sobre os quais deslocamentos e esforços são aproximados por funções previamente adotadas.

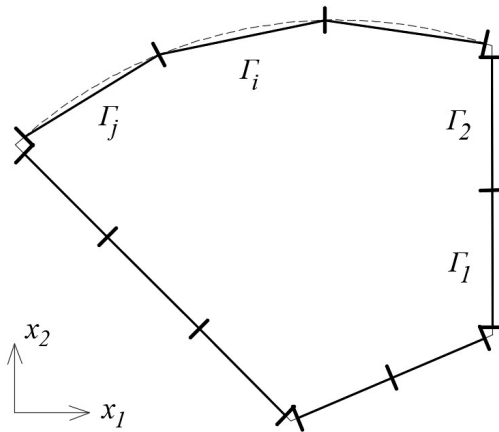


Figura 4.4 – Contorno de uma placa dividida em elementos de contorno. Fonte: Autor.

Advindas das transformações das equações integrais, as equações algébricas configuram um sistema de equações lineares onde as incógnitas são esforços e deslocamentos em pontos definidos sobre o contorno. A fim de obter as respostas do domínio, faz-se necessária a imposição das condições de contorno, assim como a resolução final do sistema de equações resultante no contorno.

4.5.1 Equações Integrais Discretizadas

É necessário que as equações integrais das equações (4.17) e (4.20) tenham o ponto fonte colocado no contorno ou fora do domínio, respectivamente, a forma singular ou regular da solução do MEC. Estabelecendo a geometria do problema e, consequentemente, a discretização do contorno do problema em elementos de contorno, bem como a definição nós funcionais e a interpolação dos campos de interesse. A interpolação é feita através de polinômios em função dos quais é definido o número de pontos nodais do elemento, com o objetivo de aproximar os deslocamentos e esforços ao longo de cada elemento. Com isso, os deslocamentos e esforços podem, em função da matriz das funções aproximadoras $[\Phi_i]$ serem escritos da seguinte forma:

$$w = [\Phi_i]\{w_i\}_{\Gamma_k} \quad (4.212)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = [\Phi_i]\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i\right\}_{\Gamma_k} \quad (4.213)$$

$$M_n = [\Phi_i]\{M_{n_i}\}_{\Gamma_k} \quad (4.214)$$

$$V_n = [\Phi_i]\{V_{n_i}\}_{\Gamma_k} \quad (4.215)$$

$$v = [\Phi_i]\{v_i\}_{\Gamma_k} \quad (4.216)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = [\Phi_i]\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i\right\}_{\Gamma_k} \quad (4.217)$$

$$T_n = [\Phi_i]\{T_{n_i}\}_{\Gamma_k} \quad (4.218)$$

$$Q_n = [\Phi_i]\{Q_{n_i}\}_{\Gamma_k} \quad (4.219)$$

Destaca-se que cada elemento de contorno é associado a um ou mais pontos denominados “nós”, “nós funcionais” ou “pontos nodais”. Os valores das variáveis associados a esses nós são denominados “valores nodais”. Substituindo (4.212) - (4.219) nas equações integrais e fazendo colocação do ponto no exterior ou contorno suave:

$$\begin{aligned} C_1 w(p) + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} & \left[[\varphi_i]\{w_i\}_{\Gamma_j} V_n^{1*} - [\varphi_i]\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i\right\}_{\Gamma_j} M_n^{1*} + [\varphi_i]\{v_i\}_{\Gamma_j} Q_n^{1*} \right. \\ & \left. - [\varphi_i]\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i\right\}_{\Gamma_j} T_n^{1*} \right] d\Gamma + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup1*} w_c + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf1*} v_c \\ & = \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i]\{V_{n_i}\}_{\Gamma_j} w^{1*} - [\varphi_i]\{M_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_m^{1*} + [\varphi_i]\{Q_{n_i}\}_{\Gamma_j} v^{1*} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [\varphi_i] \{T_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,n}^{1*} \Big] d\Gamma + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup} w_c^{1*}(p, q) + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf} v_c^{1*}(p, q) \\
& + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} (g_0^{sup} \chi s^{1*} + g_0^{inf} \chi i^{1*}) r_{,i} n_i d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} [(g_{,i}^{sup} r_{,i}) \Lambda s^{1*} + (g_{,i}^{inf} r_{,i}) \Lambda i^{1*}] r_{,i} n_i d\Gamma + TLC_1 + TLH_1 \quad (4.220)
\end{aligned}$$

onde $nelem$ é o número total de elementos de contorno e $ncantos$ é o número de cantos da placa. O termo livre C_1 pode assumir o valor $C_1 = 0$ ou $C_1 = 1/2$ dependendo da colocação do ponto fonte no exterior ou no contorno suave.

A equação integral de rotação discretizada da placa superior com colocação no exterior/contorno(suave) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& C_3 w_{,m} + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{w_i\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial V_n^{1*}}{\partial m} \right) - [\varphi_i] \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial M_n^{1*}}{\partial m} \right) \right. \\
& \left. + [\varphi_i] \{v_i\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial Q_n^{1*}}{\partial m} \right) - [\varphi_i] \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial T_n^{1*}}{\partial m} \right) \right] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{ncantos} R_{c,m}^{sup1*} w_c + \sum_{c=1}^{ncantos} R_{c,m}^{inf1*} v_c \\
& = \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{V_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_{,m}^{1*} - [\varphi_i] \{M_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_{,nm}^{1*} \right. \\
& \left. + [\varphi_i] \{Q_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,m}^{1*} - [\varphi_i] \{T_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,nm}^{1*} \right] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup} w_{c,m}^{1*} + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf} v_{c,m}^{1*} + \\
& + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left(g_0^{sup} \frac{\partial [\chi s^{1*}]}{\partial m} + g_0^{inf} \frac{\partial [\chi i^{1*}]}{\partial m} \right) r_{,i} n_i d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[(g_{,i}^{sup} r_{,i}) \frac{\partial [\Lambda s^{1*}]}{\partial m} + (g_{,i}^{inf} r_{,i}) \frac{\partial [\Lambda i^{1*}]}{\partial m} \right] r_{,i} n_i d\Gamma + TLR_1 \quad (4.221)
\end{aligned}$$

De forma análoga a (4.20), após as análises dos termos livres, a equação integral discretizada dos deslocamentos da placa inferior pode ser reescrita:

$$\begin{aligned}
C_2 v(p) &+ \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{w_i\}_{\Gamma_j} V_n^{2*} - [\varphi_i] \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_j} M_n^{2*} + [\varphi_i] \{v_i\}_{\Gamma_j} Q_n^{2*} \right. \\
&\quad \left. - [\varphi_i] \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_j} T_n^{2*} \right] d\Gamma + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup2*} w_c + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf2*} v_c \\
&= \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{V_{n_i}\}_{\Gamma_j} w^{2*} - [\varphi_i] \{M_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_{,n}^{2*} + [\varphi_i] \{Q_{n_i}\}_{\Gamma_j} v^{2*} \right. \\
&\quad \left. - [\varphi_i] \{T_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,n}^{2*} \right] d\Gamma + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup} w_c^{2*} + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf} v_c^{2*} \\
&+ \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} (g_0^{sup} \chi s^{2*} + g_0^{inf} \chi i^{2*}) r_{,i} n_i d\Gamma + \\
&+ \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} [(g_{,i}^{sup} r_{,i}) \Lambda s^{2*} + (g_{,i}^{inf} r_{,i}) \Lambda i^{2*}] r_{,i} n_i d\Gamma + TLC_2 + TLH_2 \quad (4.222)
\end{aligned}$$

Quando o ponto-fonte é colocado no exterior/contorno(suave) do problema, a equação integral de rotação discretizada da placa inferior pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
C_6 v_{,m} &+ \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{w_i\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial V_n^{2*}}{\partial m} \right) - [\varphi_i] \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial M_n^{2*}}{\partial m} \right) \right. \\
&\quad \left. + [\varphi_i] \{v_i\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial Q_n^{2*}}{\partial m} \right) - [\varphi_i] \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial T_n^{2*}}{\partial m} \right) \right] d\Gamma \\
&+ \sum_{c=1}^{ncantos} R_{c,m}^{sup2*} w_c + \sum_{c=1}^{ncantos} R_{c,m}^{inf2*} v_c \\
&= \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{V_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_{,m}^{2*} - [\varphi_i] \{M_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_{,mm}^{2*} \right. \\
&\quad \left. + [\varphi_i] \{Q_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,m}^{2*} - [\varphi_i] \{T_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,mm}^{2*} \right] d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup} w_{c,m}^{2*} + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf} v_{c,m}^{2*} + \\
& + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left(g_0^{sup} \frac{\partial[\chi s^{2*}]}{\partial m} + g_0^{inf} \frac{\partial[\chi i^{2*}]}{\partial m} \right) r_{,i} n_i d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[(g_{,i}^{sup} r_{,i}) \frac{\partial[\Lambda s^{2*}]}{\partial m} + (g_{,i}^{inf} r_{,i}) \frac{\partial[\Lambda i^{2*}]}{\partial m} \right] r_{,i} n_i d\Gamma + TLR_2 \quad (4.223)
\end{aligned}$$

Já a equação integral de curvatura discretizada da placa superior pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
w_{,mt} & + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{w_i\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial^2 V_n^{1*}}{\partial m \partial t} \right) - [\varphi_i] \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial^2 M_n^{1*}}{\partial m \partial t} \right) \right. \\
& + [\varphi_i] \{v_i\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial^2 Q_n^{1*}}{\partial m \partial t} \right) - [\varphi_i] \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial^2 T_n^{1*}}{\partial m \partial t} \right) \left. \right] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{ncantos} R_{c,mt}^{sup1*} w_c + \sum_{c=1}^{ncantos} R_{c,mt}^{inf1*} v_c \\
& = \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{V_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_{,mt}^{1*} - [\varphi_i] \{M_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_{,mnt}^{1*} \right. \\
& + [\varphi_i] \{Q_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,mt}^{1*} - [\varphi_i] \{T_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,mnt}^{1*} \left. \right] d\Gamma \\
& + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup} w_{c,mt}^{1*} + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf} v_{c,mt}^{1*} + \\
& + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left(g_0^{sup} \frac{\partial^2[\chi s^{1*}]}{\partial m \partial t} + g_0^{inf} \frac{\partial^2[\chi i^{1*}]}{\partial m \partial t} \right) r_{,i} n_i d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[(g_{,i}^{sup} r_{,i}) \frac{\partial^2[\Lambda s^{1*}]}{\partial m \partial t} + (g_{,i}^{inf} r_{,i}) \frac{\partial^2[\Lambda i^{1*}]}{\partial m \partial t} \right] r_{,i} n_i d\Gamma
\end{aligned}$$

Enquanto a equação integral de curvatura discretizada da placa inferior pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
v_{,mt} &+ \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{w_i\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial^2 V_n^{2*}}{\partial m \partial t} \right) - [\varphi_i] \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial^2 M_n^{2*}}{\partial m \partial t} \right) \right. \\
&+ [\varphi_i] \{v_i\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial^2 Q_n^{2*}}{\partial m \partial t} \right) - [\varphi_i] \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial^2 T_n^{2*}}{\partial m \partial t} \right) \Big] d\Gamma \\
&+ \sum_{c=1}^{ncantos} R_{c,mt}^{sup2*} w_c + \sum_{c=1}^{ncantos} R_{c,mt}^{inf2*} v_c \\
&= \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{V_{ni}\}_{\Gamma_j} w_{,mt}^{2*} - [\varphi_i] \{M_{ni}\}_{\Gamma_j} w_{,nmt}^{2*} \right. \\
&+ [\varphi_i] \{Q_{ni}\}_{\Gamma_j} v_{,mt}^{2*} - [\varphi_i] \{T_{ni}\}_{\Gamma_j} v_{,nmt}^{2*} \Big] d\Gamma \\
&+ \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup} w_{c,mt}^{2*} + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf} v_{c,mt}^{2*} + \\
&+ \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left(g_0^{sup} \frac{\partial^2 [\chi s^{2*}]}{\partial m \partial t} + g_0^{inf} \frac{\partial^2 [\chi i^{2*}]}{\partial m \partial t} \right) r_{,i} n_i d\Gamma + \\
&+ \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[(g_{,i}^{sup} r_{,i}) \frac{\partial^2 [\Lambda s^{2*}]}{\partial m \partial t} + (g_{,i}^{inf} r_{,i}) \frac{\partial^2 [\Lambda i^{2*}]}{\partial m \partial t} \right] r_{,i} n_i d\Gamma
\end{aligned}$$

4.5.2 Equações Algébricas

O sistema algébrico de toda estrutura só poderá ser preenchido quando forem colocados os pontos-fonte para todos os nós de contorno e cantos nas equações integrais discretizadas (4.220), (4.221), (4.222) e (4.223), bem como calculadas as integrais requeridas. Fazendo isso, o sistema pode ser matricialmente representado por:

$$\begin{bmatrix} H_{\Gamma\Gamma} & H_{\Gamma C} \\ H_{C\Gamma} & H_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\Gamma} \\ u_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\Gamma\Gamma} & G_{\Gamma C} \\ G_{C\Gamma} & G_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\Gamma} \\ p_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{\Gamma} \\ f_C \end{Bmatrix} \quad (4.224)$$

onde:

- $H_{\Gamma\Gamma}$ é a submatriz de influência dos deslocamentos gerada pela colocação do ponto fonte no contorno e ponto campo no contorno, vide Figura 4.5(a);

- $H_{\Gamma C}$ é a submatriz de influência dos deslocamentos gerada pela colocação do ponto fonte no contorno e ponto campo nos cantos, vide Figura 4.5(b);
- $H_{C\Gamma}$ é a submatriz de influência dos deslocamentos gerada pela colocação do ponto fonte nos cantos e ponto campo no contorno, vide Figura 4.5(c);
- H_{CC} é a submatriz de influência dos deslocamentos gerada pela colocação do ponto fonte no canto e ponto campo nos cantos, vide Figura 4.5(d).

Assim, a equação algébrica fica na forma compacta:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{f\} \quad (4.225)$$

onde $[H]$ e $[G]$ são as matrizes de influência da estrutura, em esforço e deslocamento, respectivamente. Os vetores $\{U\}$, $\{P\}$ e $\{f\}$ são, respectivamente, o vetor de deslocamento, vetor de esforço e o vetor de carregamento.

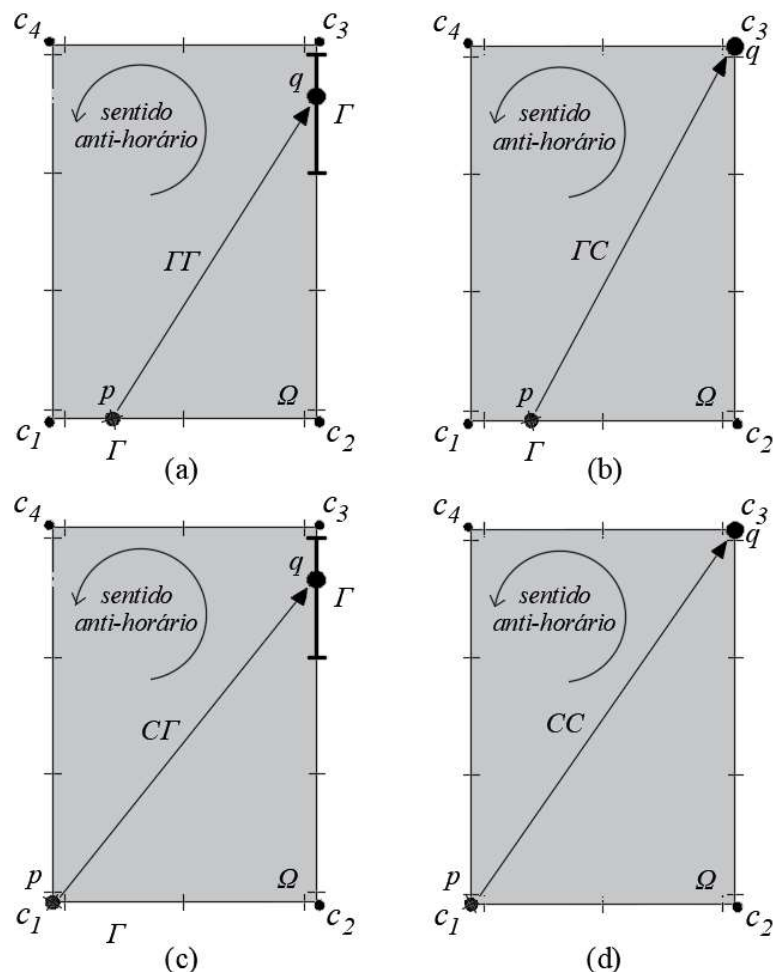


Figura 4.5 – Representação das partições das matrizes influência. Fonte: Autor.

Nesta etapa, faz-se necessária a aplicação das condições de contorno, de forma que o sistema algébrico pode ser separado numa matriz de influência de incógnitas $[A]$ e um vetor independente $[B]$, e possibilite a resolução do sistema no contorno:

$$[A]\{X\} = [B] \quad (4.226)$$

O que interessa ao problema na equação (4.226) é a determinação das incógnitas do contorno $\{X\}$. Para solução do sistema, diversas técnicas de resolução podem ser utilizadas: desde métodos iterativos até métodos diretos, tais como a eliminação de Gauss. Finalmente, após a determinação das variáveis do contorno, as incógnitas no domínio podem ser determinadas a partir da aplicação das equações integrais discretizadas.

4.5.3 Condições de Contorno

No sistema em questão, de placa dupla de Kirchhoff elasticamente conectadas por uma camada de Pasternak, existe oito variáveis $\left(w, v, \frac{\partial w}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}, V_n, Q_n, M_n, T_n\right)$ para cada nó, sendo que quatro são sempre conhecidas. De um modo geral, quando um deslocamento $\left(w, v, \frac{\partial w}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}\right)$ é conhecido, o esforço correspondente (V_n, Q_n, M_n, T_n) é incógnita e vice-versa. Analogamente à placa simples, os casos de vinculações clássicas podem ser escritos da seguinte forma:

Tabela 4.1 – Tipos clássicos de vinculações das bordas.

Tipo de vinculação da borda		Variáveis Conhecidas	Variáveis Desconhecidas
Engastada (E)	Placa Superior	$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$	V_n, M_n
	Placa Inferior	$v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$	Q_n, T_n
Simplesmente Apoiada (S)	Placa Superior	$w = M_n = 0$	$\frac{\partial w}{\partial n}, V_n$
	Placa Inferior	$v = T_n = 0$	$\frac{\partial v}{\partial n}, Q_n$
Livre (L)	Placa Superior	$V_n = M_n = 0$	$w, \frac{\partial w}{\partial n}$
	Placa Inferior	$Q_n = T_n = 0$	$v, \frac{\partial v}{\partial n}$

Dessa forma, depois de feita a imposição das condições de contorno, em cada nó são concebidas quatro equações e quatro incógnitas, exceto nos nós dos cantos, onde aparece também, como incógnita, a reação de canto da placa.

4.5.4 Elementos Utilizados

No presente trabalho as variáveis da placa serão interpoladas linearmente e serão utilizados elementos retos nas discretizações dos contornos, vide Figura 4.6.

Admitindo-se que ao longo de cada elemento os deslocamentos e esforços variem linearmente, os valores para quaisquer outros pontos sobre o elemento são obtidos a partir dos valores nodais posicionados em suas extremidades com o uso das funções aproximadoras:

$$w = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (4.227)$$

$$v = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (4.228)$$

$$M_n = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} M_{ni} \\ M_{nj} \end{Bmatrix} \quad (4.229)$$

$$T_n = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} T_{ni} \\ T_{nj} \end{Bmatrix} \quad (4.230)$$

$$V_n = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} V_{ni} \\ V_{nj} \end{Bmatrix} \quad (4.231)$$

$$Q_n = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} Q_{ni} \\ Q_{nj} \end{Bmatrix} \quad (4.232)$$

sendo as funções interpoladoras:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \varphi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{cases} \quad (4.233)$$

onde i e j são os nós associados ao elemento de contorno genérico k e n_k é o vetor normal a esse elemento.

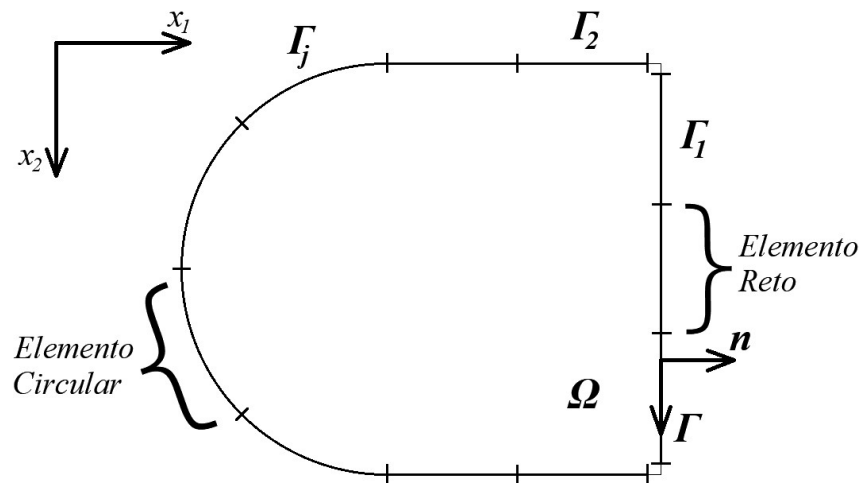


Figura 4.6 – Representação de elementos retos e curvos numa discretização do método.
Fonte: Autor.

Na composição do contorno, a geometria da estrutura norteia a disposição dos elementos. Os elementos são ditos contínuos quando não há descontinuidade nos valores das variáveis entre dois elementos adjacentes, como é mostrado na Figura 4.7.

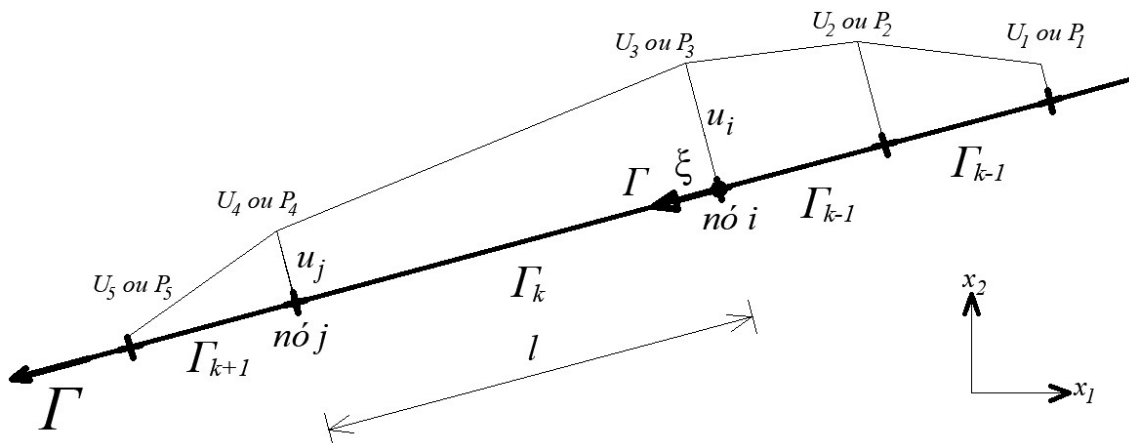


Figura 4.7 – Elementos de contorno linear contínuo no contorno Γ . Fonte: Autor.

Porém, em estruturas poligonais há alterações nas direções dos elementos, apresentando uma variação repentina das propriedades geométricas entre dois elementos consecutivos e consequentemente, uma descontinuidade das variáveis, como ocorre nos cantos, visualizado na Figura 4.7. Uma alternativa, que é a adotada neste trabalho, está na consideração de nós duplos: dois nós definidos com as mesmas coordenadas. Esse recurso impõe a formulação de duas equações independentes para o ponto como condição para representar a descontinuidade. Para isso, recalcula as coordenadas do nó duplo, fazendo com que ele passe a estar no interior do elemento e não coincida mais com sua extremidade, é um caminho.

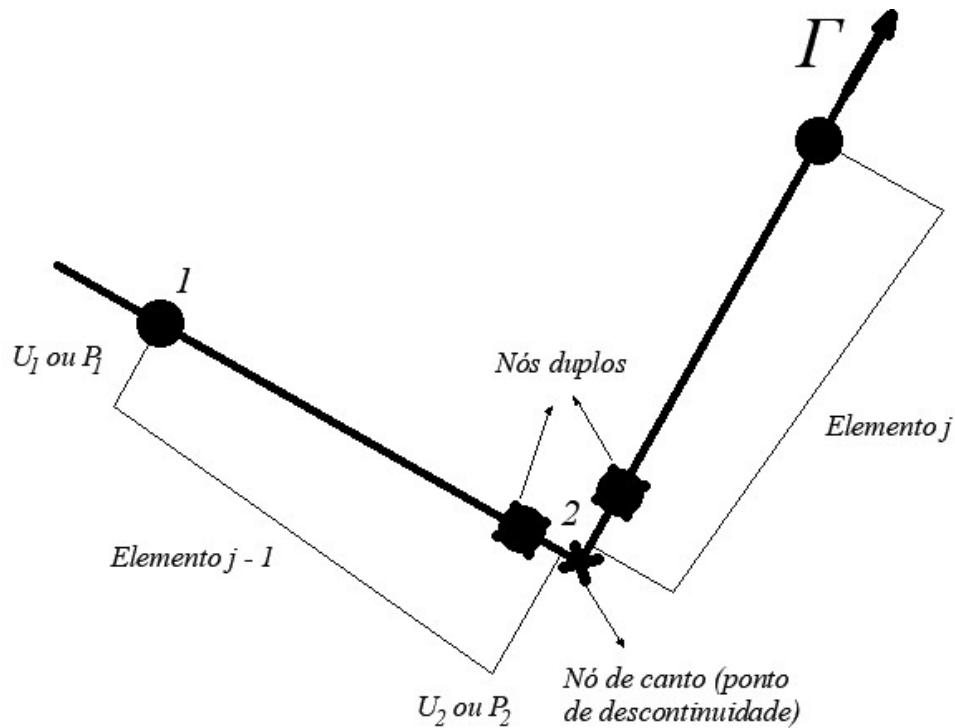


Figura 4.8 – Nós duplos em descontinuidade de elemento (canto). Fonte: Autor.

Para realizar as devidas integrações das soluções fundamentais ponderadas pelas funções aproximadoras, são necessárias algumas propriedades geométricas do elemento reto. Com o objetivo de simplificar as expressões das relações e os desenhos, o sistema (x, y) passa a representar o sistema (x_1, x_2) . A seguir estão descritas as principais relações de interesse:

a) Coordenadas do ponto campo

$$\begin{cases} x_q = \varphi_1 x_i + \varphi_2 x_j \\ y_q = \varphi_1 y_i + \varphi_2 y_j \end{cases} \quad (4.234)$$

b) Comprimento do raio vetor (distância entre o ponto campo q e o ponto fonte p)

$$r = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} \quad (4.235)$$

c) Cossenos diretores do raio vetor

$$\begin{cases} r_{,1} = \frac{x_q - x_p}{r} \\ r_{,2} = \frac{y_q - y_p}{r} \end{cases} \quad (4.236)$$

d) Cossenos diretores do elemento

$$\begin{cases} s_1 = \frac{x_j - x_i}{r} \\ s_2 = \frac{y_j - y_i}{r} \end{cases} \quad (4.237)$$

e) Cossenos diretores da normal ao elemento

$$\begin{cases} n_1 = \frac{y_j - y_i}{r} \\ n_2 = -\frac{x_j - x_i}{r} \end{cases} \quad (4.238)$$

f) Comprimento do elemento

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (4.239)$$

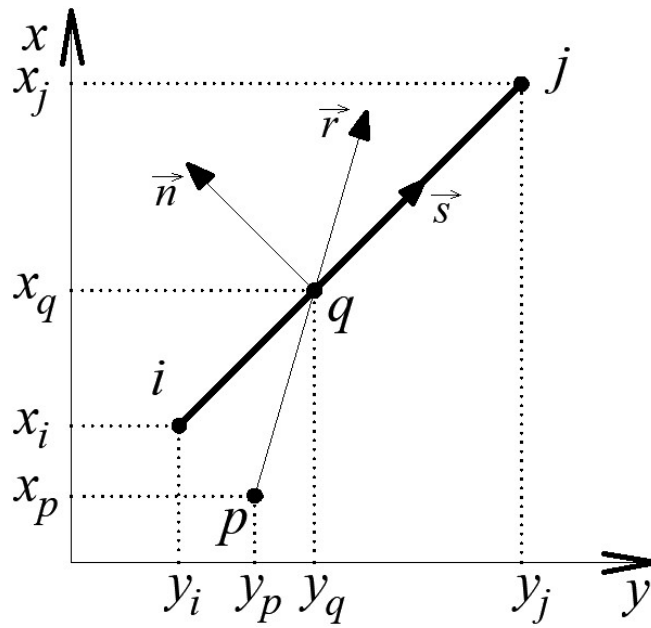


Figura 4.9 – Elemento reto. Fonte: Autor.

A Figura 4.10 ilustra um elemento circular de raio R com dois nós funcionais, de coordenadas (x_i, y_i) e (x_j, y_j) . Mais adiante são apresentadas algumas propriedades geométricas de interesse.

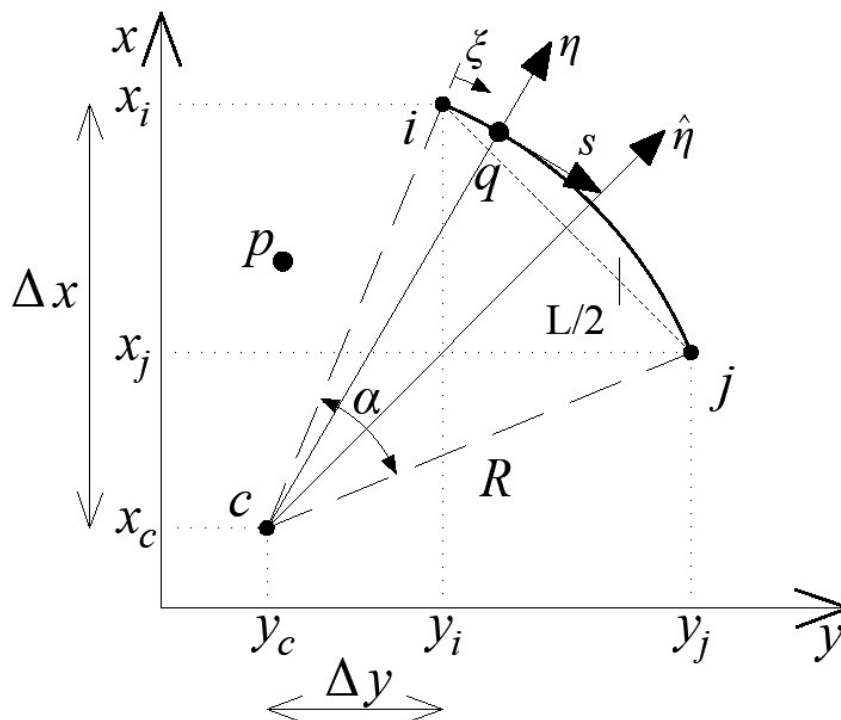


Figura 4.10 – Elemento Circular. Fonte: Autor.

- Diferencial da projeção do ponto "c" as coordenadas do eixo xy:

$$\begin{cases} \Delta x = x_c - x_i = -\hat{\eta}_x \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} - \hat{\eta}_y \frac{L}{2} \\ \Delta y = y_c - y_i = -\hat{\eta}_y \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} + \hat{\eta}_x \frac{L}{2} \end{cases} \quad (4.240)$$

sendo L a distância entre os nós funcionais do elemento, $\hat{\eta}$ é a normal do segmento secante ij e (x_c, y_c) as coordenadas do centro do raio de curvatura do arco.

- O ângulo total do arco:

$$\alpha = 2 \arcsen\left(\frac{L}{2R}\right) \quad (4.241)$$

- Coordenadas do centro do raio de curvatura do arco:

$$\begin{cases} x_c = x_i + \Delta x \\ y_c = y_i + \Delta y \end{cases} \quad (4.242)$$

- Coordenadas do ponto campo q

$$\begin{cases} x_q = \cos(\xi\alpha) (x_i - x_c) - \sin(\xi\alpha) (y_i - y_c) + x_c \\ y_q = \cos(\xi\alpha) (y_i - y_c) + \sin(\xi\alpha) (x_i - x_c) + y_c \end{cases} \quad (4.243)$$

sendo ξ a coordenada adimensional ao longo da curva com origem no nó inicial.

- Cossenos diretores da normal ao elemento circular:

$$\begin{cases} \eta_x = \frac{x_q - x_c}{R} \\ \eta_y = \frac{y_q - y_c}{R} \end{cases} \quad (4.244)$$

Além disso, $s_x = -\eta_y$ e $s_y = \eta_x$.

O raio vetor, nesse caso, também é dado por (4.235) e as inclinações dr/dx e dr/dy por (4.236).

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, os resultados do MEC são validados usando soluções analíticas fornecidas no Apêndice D. Elementos de contorno linear reto e circulares com 16 elementos (MEC16), 32 elementos (MEC32) e 64 elementos (MEC64) são usados para discretizar placas duplas retangulares, circulares e anulares, como mostrado na Figura 5.1 (a-i).

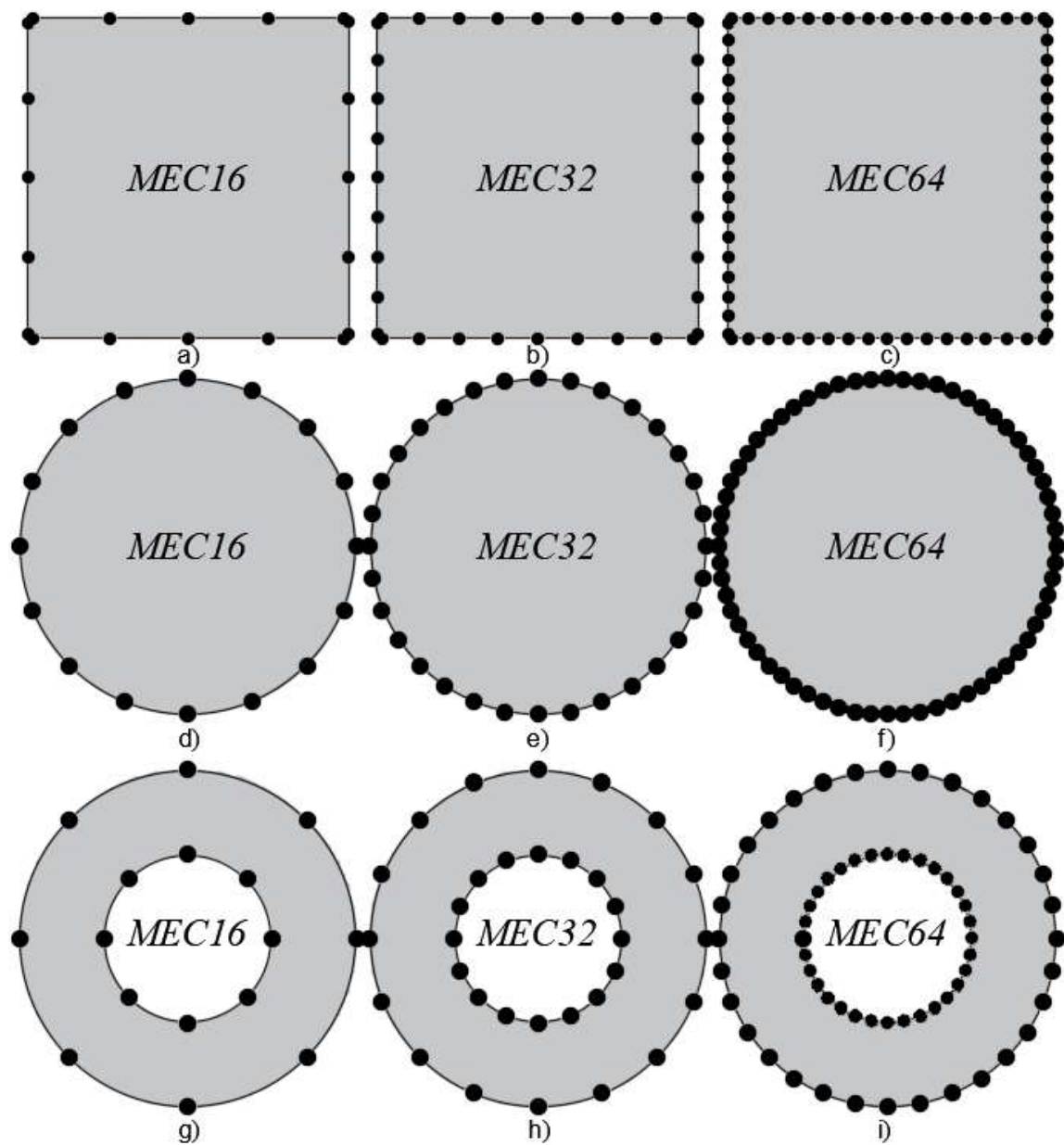


Figura 5.1 – Discretizações do contorno para placa retangular, placa circular e placa anular.

5.1 Placas duplas simplesmente apoiadas sob carga pontual

Considere um sistema de placas duplas simplesmente apoiadas (SSSS), conforme mostrado na Figura 5.2, submetido a uma carga concentrada $P = 10 \text{ kN}$ aplicada no centro da placa superior. As dimensões e espessura são iguais para as placas quadradas de 1 m de comprimento e $0,01 \text{ m}$ de espessura, com constante de mola $K_w = 0,1 \text{ MN/m}^3$. Foram utilizadas três configurações: $K_p = 2,646 \text{ kN/m}$, $K_p = 22,65 \text{ kN/m}$ e $K_p = 52,65 \text{ kN/m}$, cobrindo raízes complexas, iguais e distintas, respectivamente. Os módulos de elasticidade longitudinal da placa superior e inferior são $E = 28 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. As leituras dos deslocamentos e esforços se deram na linha central da placa, na direção x .

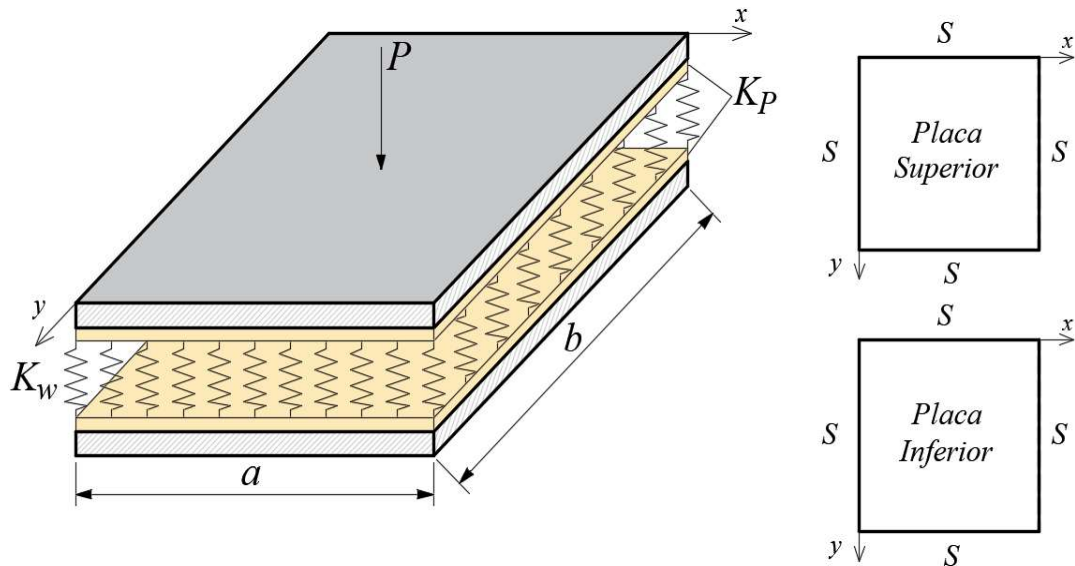


Figura 5.2 – Placa dupla submetida à carga pontual.

Tabela 5.1 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga pontual – SSSS (Caso I)

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-2}m)$	1,2349	1,2501	1,2525	1,2532
	$\theta(x10^{-2}rad)$	9,7623	9,8854	9,9024	9,9068
	$v(x10^{-4}m)$	1,7297	1,7705	1,7744	1,7753
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	1,3173	1,3498	1,3531	1,3538
$a/4$	$w(x10^{-2}m)$	2,4215	2,4489	2,4529	2,4540
	$\theta(x10^{-2}rad)$	9,0854	9,1579	9,1676	9,1703
	$v(x10^{-3}m)$	3,2192	3,2941	3,3015	3,3031
	$\varphi(x10^{-3}rad)$	1,0351	1,0566	1,0589	1,0594
$a/2$	$w(x10^{-2}m)$	4,0092	4,0450	4,0501	4,0515
	$v(x10^{-3}m)$	4,6144	4,7156	4,7257	4,7280

Tabela 5.2 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga pontual – SSSS (Caso II)

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-3}m)$	9,0077	9,1115	9,1274	9,1319
	$\theta(x10^{-2}rad)$	7,1632	7,2475	7,2589	7,2618
	$v(x10^{-3}m)$	5,0697	5,1599	5,1718	5,1750
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	3,9154	3,9875	3,9966	3,9988
$a/4$	$w(x10^{-2}m)$	1,7825	1,8010	1,8037	1,8044
	$\theta(x10^{-2}rad)$	6,8618	6,9115	6,9180	6,9197
	$v(x10^{-3}m)$	9,6092	9,7726	9,7937	9,7991
	$\varphi(x10^{-3}rad)$	3,258	3,3029	3,3085	3,3099
$a/2$	$w(x10^{-2}m)$	3,0449	3,0694	3,0728	3,0737
	$v(x10^{-2}m)$	1,4254	1,4471	1,4499	1,4506

Tabela 5.3 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga pontual – SSSS (Caso III)

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-2}m)$	1,0243	1,0359	1,0377	1,03819
	$\theta(x10^{-2}rad)$	8,1334	8,2277	8,2406	8,2439
	$v(x10^{-3}m)$	3,8348	3,9129	3,9226	3,92502
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	2,9453	3,0074	3,0149	3,0166
$a/4$	$w(x10^{-2}m)$	2,0217	2,0425	2,0456	2,04642
	$\theta(x10^{-2}rad)$	7,7251	7,7801	7,7874	7,7894
	$v(x10^{-3}m)$	7,2154	7,3572	7,3745	7,3788
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	2,3948	2,4343	2,4391	2,4403
$a/2$	$w(x10^{-2}m)$	3,4153	3,4425	3,4464	3,44741
	$v(x10^{-2}m)$	1,0551	1,0740	1,0763	1,07689

Pode-se observar que as soluções dos MEC dos deslocamentos e rotações apresentam respostas próximas às suas respectivas soluções analíticas, nas Tabela 5.1-Tabela 5.3. Para o primeiro caso, dentre os deslocamentos, o desempenho mais crítico ocorre em $L/4$: a malha MEC produz o maior erro relativo de 2,57%, diminuindo para 0,27% com MEC32 e finalmente atingindo 0,051% quando a discretização MEC64 é usada. Também no mesmo ponto, a rotação mais crítica possui desempenho semelhante, com os seguintes erros relativos: 2,70%, 0,30% e 0,052%, respectivamente, com MEC16, MEC32 e MEC64. Para o Caso II, o desempenho mais baixo foi também em $L/4$. Para deslocamentos os erros relativos são: 2,04%, 0,29% e 0,062% com 16, 32 e 64 elementos. E na mesma sequência,

as rotações com os seguintes falha: 2,09%, 0,28% e 0,055%. Para o caso com raízes iguais, no mesmo ponto: os erros relativos são de 2,30%, 0,31% e 0,062% para deslocamentos e 2,36%, 0,31% e 0,056% para rotações.

Tabela 5.4 – Momentos fletores no domínio da placa (Caso I)

x	Resultados ($\times 10^2 Nm/m$)	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	M_x	1,789	1,885	1,906	1,912
	M_y	3,953	3,978	3,987	3,999
	T_x	0,525	0,544	0,546	0,546
	T_y	0,575	0,583	0,584	0,584
$a/4$	M_x	4,769	4,874	4,888	4,891
	M_y	8,688	8,750	8,761	8,764
	T_x	1,023	1,0498	1,052	1,053
	T_y	1,082	1,100	1,103	1,103

Tabela 5.5 – Momentos fletores no domínio da placa (Caso II)

x	Resultados ($\times 10^2 Nm/m$)	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	M_x	1,059	1,126	1,141	1,145
	M_y	2,854	2,873	2,879	2,882
	T_x	1,2548	1,303	1,311	1,313
	T_y	1,674	1,688	1,691	1,693
$a/4$	M_x	3,034	3,105	3,115	3,116
	M_y	6,435	6,478	6,485	6,487
	T_x	2,757	2,818	2,826	2,828
	T_y	3,335	3,372	3,378	3,380

Tabela 5.6 – Momentos fletores no domínio da placa (Caso III)

x	Resultados ($\times 10^2 Nm/m$)	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	M_x	1,278	1,353	1,370	1,374
	M_y	3,256	3,276	3,284	3,290
	T_x	1,036	1,076	1,082	1,083
	T_y	1,271	1,284	1,287	1,288
$a/4$	M_x	3,626	3,706	3,717	3,719
	M_y	7,300	7,343	7,352	7,353
	T_x	2,165	2,218	2,224	2,225
	T_y	2,474	2,508	2,513	2,514

Os resultados em momentos seguem a tendência dos deslocamentos. As respostas revelam uma boa resposta da solução pelo MEC. A formulação das respostas analíticas pode ser encontrada no Apêndice B

5.2 Placas duplas simplesmente apoiadas sob carga distribuída

Nesse exemplo será analisado um caso com bordas simplesmente apoiadas sujeito a uma carga distribuída constante, conforme pode ser visto na Figura 5.3, com intensidade de $q = 1 \text{ kN/m}^2$ na placa superior. As dimensões e espessura da placa quadrada superior são 1 m de comprimento e $0,01 \text{ m}$ de espessura. A camada de ligação está associada a uma constante de mola $K_w = 0,1 \text{ MN/m}^3$. Três configurações foram utilizadas: $K_p = 2,646 \text{ kN/m}$, $K_p = 22,65 \text{ kN/m}$ e $K_p = 52,65 \text{ kN/m}$, cobrindo raízes complexas, iguais e distintas, respectivamente. O módulo de elasticidade longitudinal das placas é $E = 28 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

Nas Tabela 5.7 a 5.9 são apresentados resultados numéricos para as discretizações com 16, 32 e 64 elementos de contorno. Os pontos observados estão posicionados ao longo da linha central em x . A Tabela 5.10 traz as respostas de momentos fletores ao longo do eixo central das placas, na direção x .

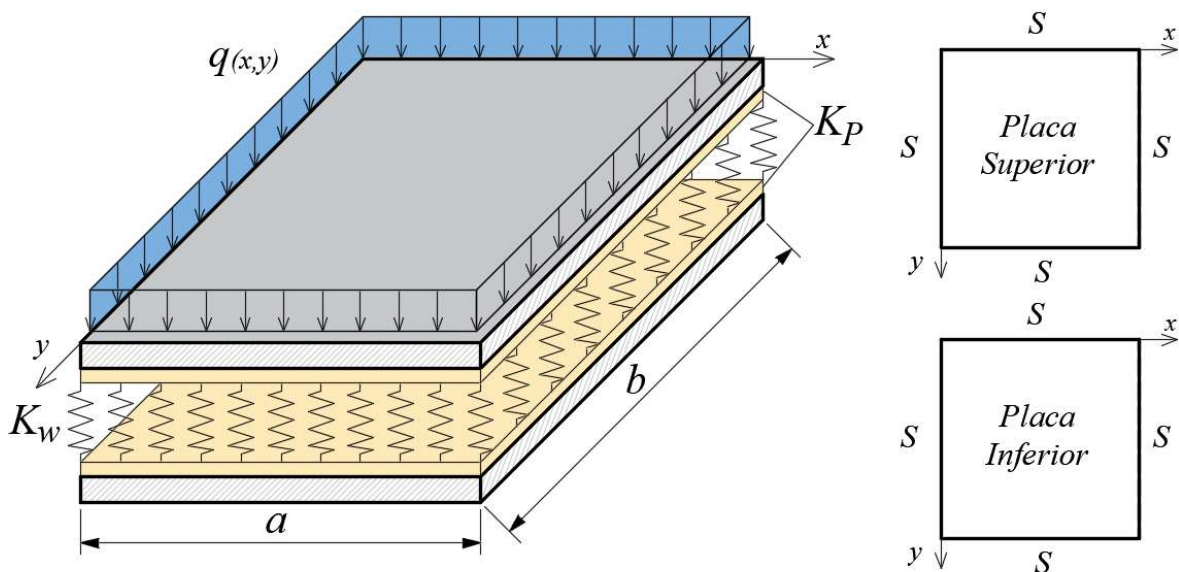


Figura 5.3 – Placa dupla simplesmente apoiada submetida à carga distribuída

Tabela 5.7 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga distribuída – SSSS (Caso I)

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-4}m)$	5,4119	5,5799	5,6001	5,6039
	$\theta(x10^{-3}rad)$	4,0123	4,1373	4,1520	4,1546
	$v(x10^{-5}m)$	6,9010	7,2332	7,2632	7,2676
	$\varphi(x10^{-4}rad)$	5,2190	5,4739	5,4976	5,5011
$a/4$	$w(x10^{-4}m)$	0,9786	1,0078	1,0113	1,0119
	$\theta(x10^{-3}rad)$	2,9139	2,9878	2,9965	2,9980
	$v(x10^{-4}m)$	1,2731	1,3334	1,3389	1,3398
	$\varphi(x10^{-4}rad)$	3,9882	4,1633	4,1802	4,1828
$a/2$	$w(x10^{-3}m)$	1,3525	1,3901	1,3946	1,3954
	$v(x10^{-4}m)$	1,7914	1,8802	1,8880	1,8891

Tabela 5.8 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga distribuída – SSSS (Caso II)

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-4}m)$	4,0213	4,1386	4,1528	4,1550
	$\theta(x10^{-3}rad)$	2,9680	3,0550	3,0650	3,0668
	$v(x10^{-4}m)$	2,0812	2,1645	2,1739	2,1756
	$\varphi(x10^{-3}rad)$	1,5665	1,6297	1,6367	1,6379
$a/4$	$w(x10^{-4}m)$	7,2409	7,4441	7,4679	7,4721
	$\theta(x10^{-3}rad)$	2,1339	2,1846	2,1905	2,1915
	$v(x10^{-4}m)$	3,8188	3,9672	3,9838	3,9867
	$\varphi(x10^{-3}rad)$	1,1790	1,2194	1,2240	1,2248
$a/2$	$w(x10^{-3}m)$	0,9967	1,0227	1,0258	1,0263
	$v(x10^{-4}m)$	5,3572	5,5539	5,5760	5,5798

Tabela 5.9 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga distribuída – SSSS (Caso III).

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-4}m)$	4,5465	4,6799	4,6957	4,6987
	$\theta(x10^{-3}rad)$	3,3609	3,4597	3,4713	3,4733
	$v(x10^{-3}m)$	1,5559	1,6234	1,6306	1,6319
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	1,1736	1,2249	1,2304	1,2314
$a/4$	$w(x10^{-4}m)$	8,1979	8,4288	8,4560	8,4610
	$\theta(x10^{-4}rad)$	2,4239	2,4813	2,4880	2,4892
	$v(x10^{-3}m)$	2,8616	2,9825	2,9956	2,9979
	$\varphi(x10^{-3}rad)$	8,8903	9,2280	9,2650	9,2714
$a/2$	$w(x10^{-3}m)$	1,1298	1,1594	1,1628	1,1635
	$v(x10^{-3}m)$	0,4026	0,4188	0,4206	0,4209

As Tabela 5.7-Tabela 5.9 apresentam os resultados do MEC para o sistema de placa dupla de carga uniforme para discretizações sucessivas. Os casos críticos dos resultados ocorrem em $L/4$ para o deslocamento e inclinação da placa inferior. Para o caso I, obtém-se um erro relativo de 5,04% (deslocamento) com a malha mais grossa, reduzindo para 0,473% usando a discretização MEC32 e chegando a 0,061% com a malha mais rica. A inclinação tem um comportamento semelhante ao do deslocamento, iniciando com um erro relativo de 5,13%, diminuindo para 0,49% com a malha MEC32 e finalmente chegando a 0,064% usando a discretização MEC64. Para o Caso II, o desempenho mais baixo foi também em $L/4$. Para deslocamentos os erros relativos são: 4,34%, 0,51% e 0,078% com 16, 32 e 64 elementos. E na mesma sequência, as rotações com os seguintes falha: 4,36%, 0,50% e 0,073%. Para o caso com raízes iguais, no mesmo ponto: os erros relativos são de 4,66%, 0,52% e 0,08% para deslocamentos e 4,69%, 0,53% e 0,081% para rotações. Os resultados do MEC demonstram boa aproximação para soluções analíticas.

Tabela 5.10 – Mometos fletores das placas superior e inferior.

x	Resultados (Nm/m)	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	M_x	21,355	22,289	22,412	22,436
	M_y	17,946	18,109	18,139	18,149
	T_x	2,285	2,427	2,440	2,442
	T_y	2,299	2,374	2,383	2,384
$a/4$	M_x	33,269	34,326	34,450	34,472
	M_y	30,666	31,177	31,240	31,253
	T_x	4,199	4,411	4,430	4,433
	T_y	4,197	4,358	4,374	4,377
$a/2$	M_x	40,832	41,631	41,725	41,742
	T_x	5,887	6,117	6,140	6,144

Quanto aos esforços de momento fletor, as respostas com discretizações MEC16 também apresentaram os maiores erros. Em $L/8$, na resposta do momento fletor da placa inferior T_x ocorreu um erro relativo de 6,429%, diminuído à 0,082% com a malha mais refinada. Convém notar que os resultados obtidos via MEC tiveram um bom desempenho quando comparados com as respostas analíticas.

5.3 Exemplo paramétrico

Seja um sistema de placas duplas simplesmente apoiado, submetido a uma carga concentrada $P = 10 \text{ kN}$ aplicada no centro da placa superior. A dimensão do lado das placas quadradas é de 8 m de comprimento. Os módulos de elasticidade longitudinal da placa superior e inferior são $E = 28 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Com o intuito de se investigar a influência dos parâmetros de rigidez das placas e da camada elástica no comportamento final do sistema foram adotadas as seguintes configurações de razão de espessuras: $h_1/h_2 = 1/2$; $h_1/h_2 = 1$ e; $h_1/h_2 = 2$ com $h_2 = 0,08 \text{ m}$. Além disso, para cada uma dessas razões foram admitidos diversos valores para a constante de mola da camada elástica. Os resultados para os deslocamentos e rotações das placas são obtidos utilizando uma discretização de 32 elementos e monitorados nos pontos A ($a/2, b/8$), B ($a/2, b/4$) e C ($a/2, b/2$). Nas Figura 5.4 a Figura 5.6 são apresentados os deslocamentos das placas superior e inferior ao longo da direção x.

Como esperado, as Figura 5.4 a 5.6 mostram que com o aumento do valor da constante de mola em cada sistema de placas, os deslocamentos superior e inferior de cada sistema tendem para os valores assintóticos associados a cada configuração. As formas das curvas assintóticas são dependentes da rigidez do conjunto placa e camada que formam sistema de placa dupla.

Na primeira configuração, com a razão $h_1/h_2 = 1/2$, pode-se observar que o sistema apresenta uma maior taxa para deslocamentos superiores em direção ao valor assintótico, isso em comparação com uma taxa crescente para deslocamentos menores em direção ao mesmo valor assintótico. Também pode ser visto que quanto maior o módulo de K_w , menor é a variação do deslocamento, implicando numa certa dominância com relação a K_p .

Para o caso de placas gêmeas onde $h_1/h_2 = 1$, dado às rigidezes das placas sendo iguais, há uma transferência de energia proporcional por parte da camada elástica. A Figura 5.5 mostra curvas quase-simétricas associadas a deslocamentos superior e inferior tendendo a um valor assintótico. Devido a rigidez nas regiões próximas aos apoios da placa ser mais elevada, o espectro de deslocamentos nesses pontos acaba sendo menor e, consequentemente, há uma menor influência com relação a variação da camada elástica.

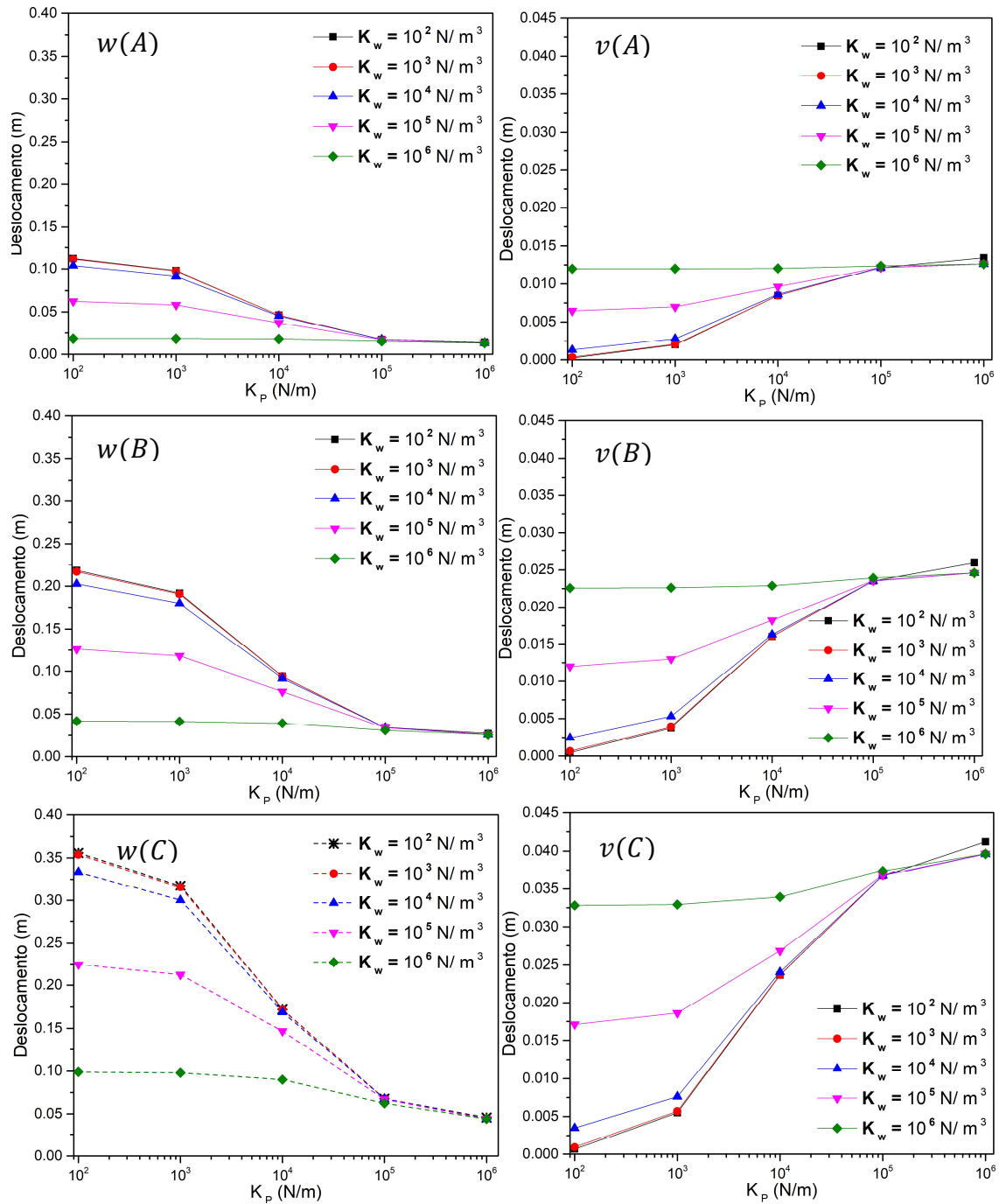


Figura 5.4 – Deslocamentos no ponto central da placa superior e inferior com relação $h_1/h_2 = 1/2$.

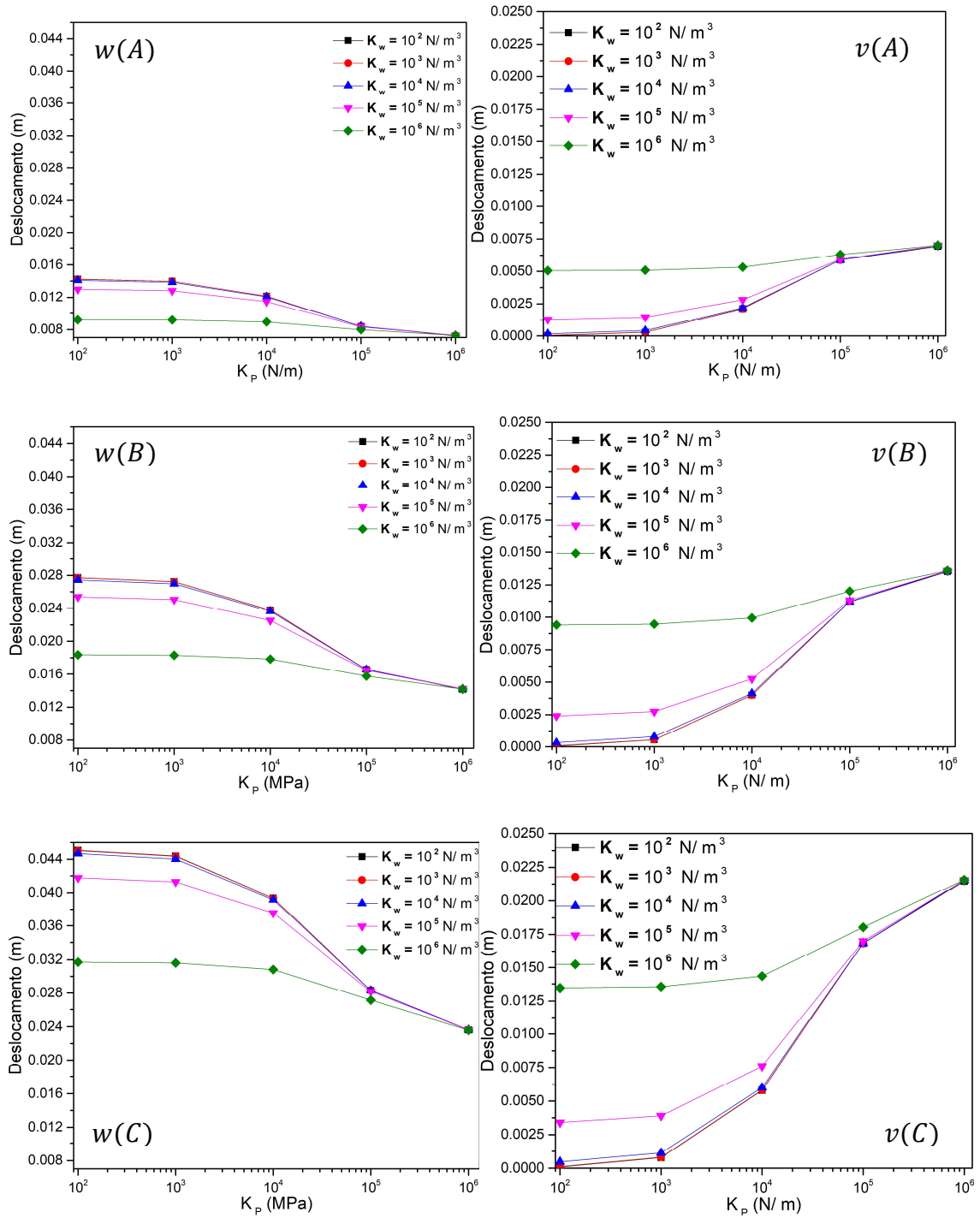


Figura 5.5 – Deslocamentos no ponto central da placa superior e inferior com relação $h_1/h_2 = 1$

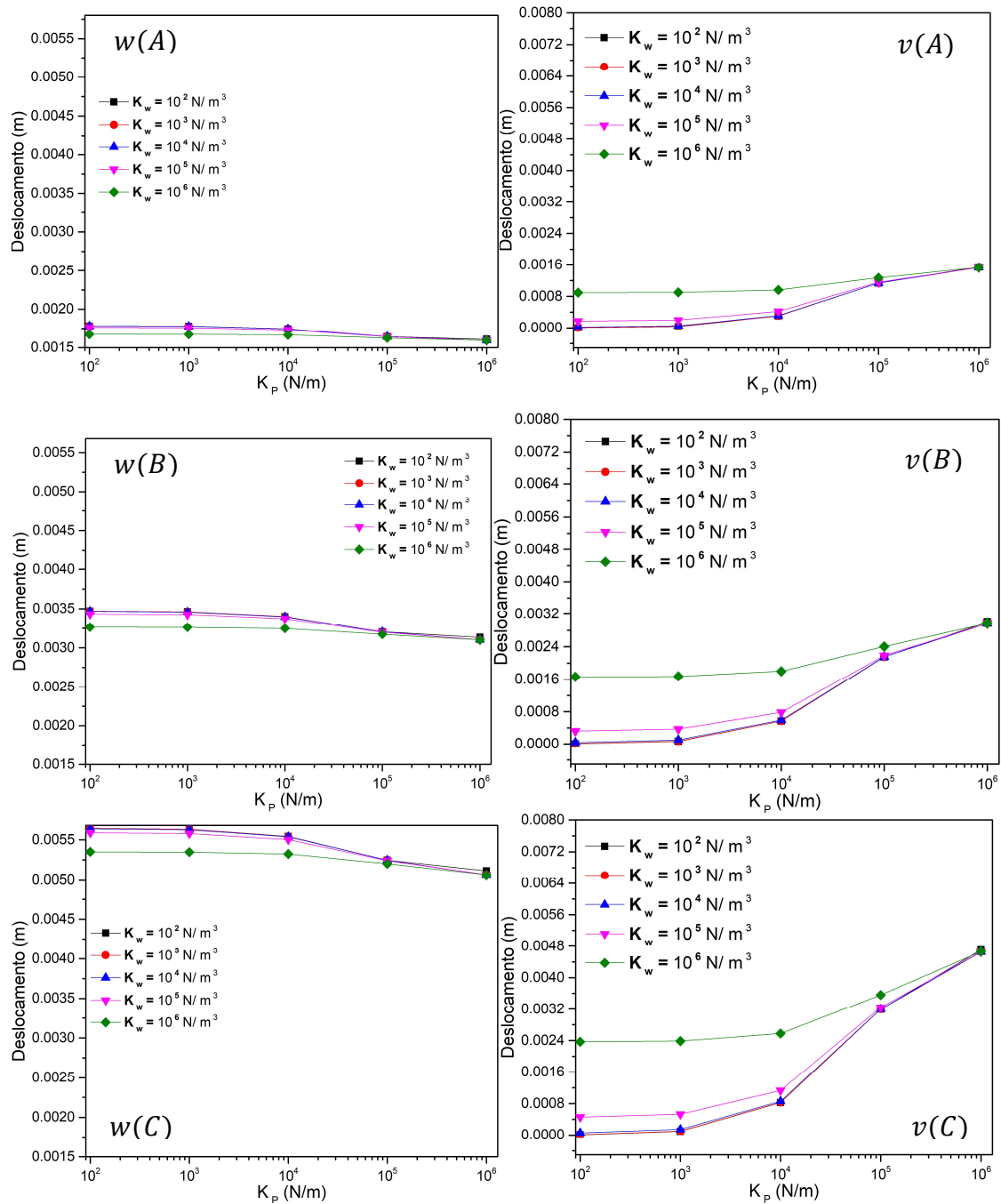


Figura 5.6 – Deslocamentos no ponto central da placa superior e inferior com relação $h_1/h_2 = 2$

A partir dos gráficos da Figura 5.6, para o sistema com relação $h_1/h_2 = 2$, os deslocamentos na placa superior são menos influenciados pelos valores da constante da mola e pela camada de cisalhamento, pois a carga é aplicada diretamente na placa superior que por ser mais rígida, acaba resultando em um trabalho externo mais absorvido.

É interessante notar que, diferentemente do caso de razão $h_1/h_2 = 1/2$, uma variação mais repentina de deslocamento entre módulos do cisalhamento da camada num mesmo ponto não ocorre quando para K_p menores, mas sim de forma inversa, quando o sistema possui elevados módulos de K_p . Então, o aumento do módulo da camada cisalhante acaba aumentando a rigidez do sistema das placas como um todo. Este fenômeno torna-se ainda mais evidente quando a rigidez da placa inferior é reduzida.

5.4 Placas duplas sob carga distribuída e condição de contorno ESES

Nesse exemplo é analisado um caso em que duas bordas estão engastadas e outras duas simplesmente apoiadas (ESES), em ambas as placas, vide Figura 5.7. É aplicada uma carga distribuída $q = 10 \text{ kN/m}^2$ na placa superior. As dimensões da placa quadrada são 3 m de comprimento. As espessuras da superior e inferior são, respectivamente de $0,04 \text{ m}$ e $0,02 \text{ m}$. A camada de ligação está associada a uma constante de mola $K_w = 0,1 \text{ MN/m}^3$ e o módulo da camada de cisalhamento $K_p = 44,05 \text{ kN/m}$. O módulo de elasticidade longitudinal da placa superior é $E = 3,5 \text{ GPa}$ e o da inferior $E = 28 \text{ GPa}$. Ambas as placas possuem coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Os resultados dos deslocamentos e esforços foram observados ao longo da linha central e na direção x .

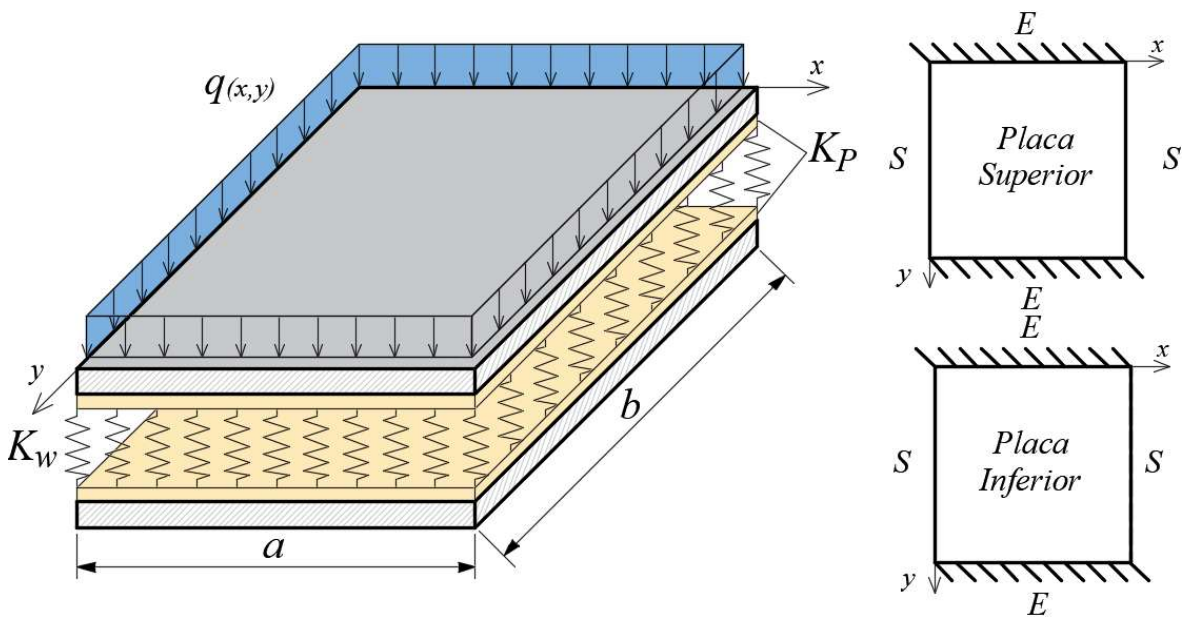


Figura 5.7 – Placa dupla ESES submetida à carga distribuída.

Tabela 5.11 – Deslocamentos e rotações das placas sob carga distribuída – ESES.

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-2}m)$	2,1632	2,1380	2,1345	2,1346
	$\theta(x10^{-2}rad)$	5,1709	5,1286	5,1215	5,1214
	$v(x10^{-2}m)$	1,0474	1,0247	1,0217	1,0217
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	2,5889	2,5483	2,5424	2,5423
$a/4$	$w(x10^{-2}m)$	3,7864	3,7506	3,7453	3,7453
	$\theta(x10^{-2}rad)$	3,4398	3,4250	3,4224	3,4222
	$v(x10^{-2}m)$	1,8917	1,8589	1,8544	1,8544
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	1,8652	1,8511	1,8488	1,8487
$a/2$	$w(x10^{-2}m)$	5,0501	5,0122	5,0066	5,0065
	$v(x10^{-2}m)$	2,6038	2,5687	2,5638	2,5638

Dentre os deslocamentos da Tabela 5.11, o desempenho mais crítico ocorre em $L/4$, onde a malha MEC produz 2,52% como o maior erro relativo, diminuindo para 0,29% com MEC32 e finalmente atingindo 0,0001% quando a discretização MEC64 é usada. Também no mesmo ponto, a rotação mais crítica possui desempenho semelhante, com os seguintes erros relativos: 1,83%, 0,24% e 0,0039%, respectivamente, com MEC16, MEC32 e MEC64.

Os resultados apresentam uma boa taxa de convergência da solução MEC. Nota-se que, diferentemente dos exemplos envolvendo a solução de Navier, a convergência se dá por uma aproximação superior, com relação a resposta exata.

Tabela 5.12 – Momentos fletores nas placas sob carga distribuída – ESES

x	Resultados ($x10^3Nm/m$)	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	M_x	1,027	1,012	1,011	1,012
	M_y	0,892	0,891	0,892	0,893
	T_x	4,146	3,992	3,979	3,981
	T_y	4,597	4,568	4,572	4,576
$a/4$	M_x	1,345	1,332	1,330	1,330
	M_y	1,469	1,466	1,466	1,467
	T_x	6,687	6,566	6,549	6,549
	T_y	8,203	8,151	8,149	8,151
$a/2$	M_x	1,385	1,383	1,382	1,383
	M_y	1,896	1,887	1,886	1,886
	T_x	8,142	8,119	8,116	8,117
	T_y	1,117	1,108	1,106	1,106

Uma boa convergência do MEC para as soluções analíticas associadas em cada placas, tanto em deslocamentos e rotações, quanto em esforços de momentos fletores pode ser vista nas Tabela 5.11 e Tabela 5.12. O maior erro relativo é visto no momento fletor T_x , chegando a 4,14% com a discretização de 16 elementos. Aumentando a discretização, o mesmo esforço em MEC64 apresenta um erro relativo de 0,05%.

5.5 Placas duplas circulares sob carga distribuída

As placas duplas circulares, neste exemplo, possuem espessuras das placas superior e inferior iguais a $0,01m$. Os raios adotados foram de $1m$. As propriedades da camada elástica são: constante de mola $K_w = 0,1MN/m^3$. Os módulos de elasticidade longitudinal da placa superior e inferior são $E_1 = E_2 = 28GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A camada cisalhante tem módulo $K_p = 5,265kN/m$. O carregamento aplicado tem intensidade $g_1 = 10kN/m^2$.

Utilizando os mesmos parâmetros para os exemplos com placas circulares, foram alteradas as condições de contorno abordando: totalmente engastada (E/E); simplesmente apoiada (S/S); placa superior apoiada e inferior engastada (S/E); e placa superior engastada e inferior simplesmente apoiada (E/S).

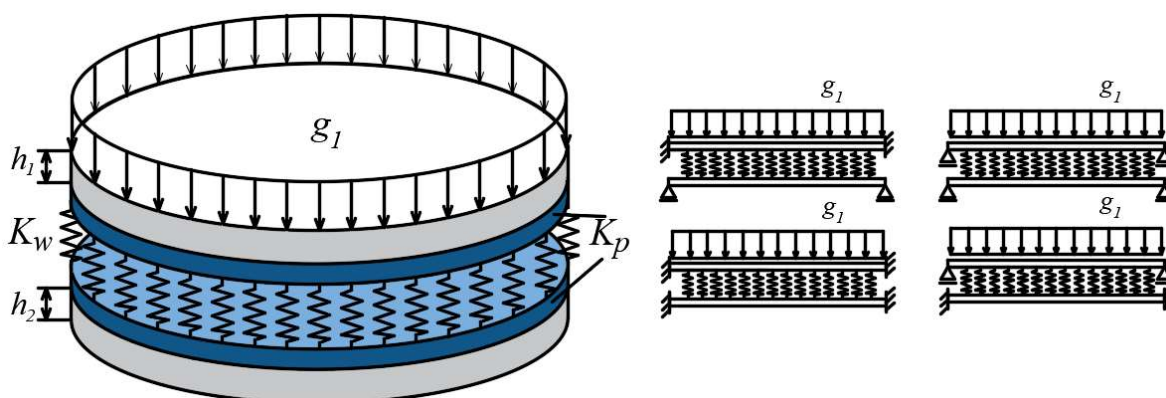


Figura 5.8 – Placa dupla sob carregamento distribuído uniforme e condições de contorno.

Tabela 5.13 – Deslocamentos na placa dupla circular engastada

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
0	$w(x10^{-2}m)$	3,6831	3,6888	3,6903	3,6957
	$v(x10^{-2}m)$	2,3716	2,3951	2,4010	2,4058
0,2R	$w(x10^{-2}m)$	3,4108	3,4152	3,4163	3,4206
	$\theta(x10^{-2}rad)$	2,6750	2,6879	2,6912	2,6990
	$v(x10^{-2}m)$	2,1692	2,1918	2,1975	2,2018
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	1,9750	1,9846	1,9870	1,9910
0,4R	$w(x10^{-2}m)$	2,6523	2,6531	2,6532	2,6559
	$\theta(x10^{-2}rad)$	4,7607	4,7837	4,7895	4,7984
	$v(x10^{-2}m)$	1,6199	1,6398	1,6448	1,6481
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	3,3768	3,3931	3,3972	3,4029
0,6R	$w(x10^{-2}m)$	1,5877	1,5832	1,5821	1,5830
	$\theta(x10^{-2}rad)$	5,6243	5,6515	5,6583	5,6662
	$v(x10^{-3}m)$	8,9234	9,0875	9,1286	9,1508
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	3,6757	3,6994	3,6980	3,7033
0,8R	$w(x10^{-3}m)$	5,3580	5,2630	5,2391	5,2347
	$\theta(x10^{-2}rad)$	4,4753	4,4970	4,5024	4,5075
	$v(x10^{-3}m)$	2,4888	2,6218	2,6551	2,6685
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	2,5000	2,5118	2,5148	2,5180

Na Tabela 5.13, é possível notar a convergência ascendente dos resultados numéricos para os momentos fletores, partindo da malha menos refinada (MEC16) até o modelo com mais elementos de contorno (MEC64). O erro relativo percentual máximo das respostas apresentadas foi de 6,73% para a malha mais pobre, no deslocamento da placa inferior da posição “0,8R”. Quando utilizado MEC64, tal erro reduziu para 0,127%.

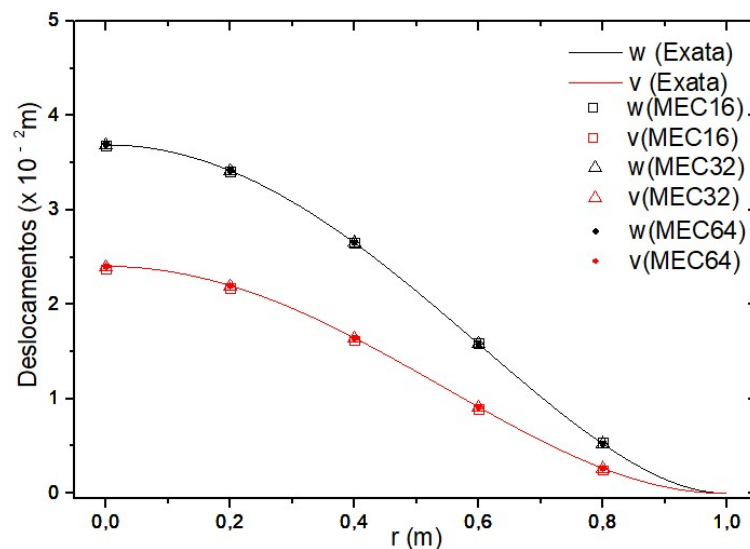


Figura 5.9 – Deslocamento de placa dupla com ambas placas engastadas.

Tabela 5.14 – Deslocamentos na placa dupla circular simplesmente apoiada

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
0	$w(x10^{-2}m)$	1,3189	1,3241	1,3254	1,3269
	$v(x10^{-2}m)$	1,1496	1,1563	1,1580	1,1595
0,2R	$w(x10^{-2}m)$	1,2546	1,2595	1,2607	1,2621
	$\theta(x10^{-2}rad)$	6,3787	6,4096	6,4173	6,4290
	$v(x10^{-2}m)$	1,0918	1,0983	1,1000	1,1013
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	5,7232	5,7509	5,7578	5,7657
0,4R	$w(x10^{-2}m)$	1,0675	1,0715	1,0725	1,0736
	$\theta(x10^{-2}rad)$	1,2189	1,2247	1,2262	1,2279
	$v(x10^{-2}m)$	0,9246	0,9303	0,9317	0,9328
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	1,0853	1,0905	1,0919	1,0932
0,6R	$w(x10^{-2}m)$	7,7473	7,7727	7,7791	7,7863
	$\theta(x10^{-2}rad)$	1,6850	1,6932	1,6952	1,6972
	$v(x10^{-3}m)$	6,6557	6,7000	6,7111	6,7194
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	1,4806	1,4877	1,4895	1,4912
0,8R	$w(x10^{-3}m)$	4,0528	4,0603	4,0621	4,0653
	$\theta(x10^{-2}rad)$	1,9745	1,9841	1,9865	1,9886
	$v(x10^{-3}m)$	3,4386	3,4674	3,4746	3,4793
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	1,7037	1,7120	1,7140	1,7159

No caso da placa dupla circular simplesmente apoiada, o maior erro relativo percentual foi de 1,17%, no deslocamento da placa inferior da posição “0,8R” da Tabela 5.14, ainda menor comparado à condição anterior. Com a discretização MEC64 o erro relativo diminuiu para 0,135%.

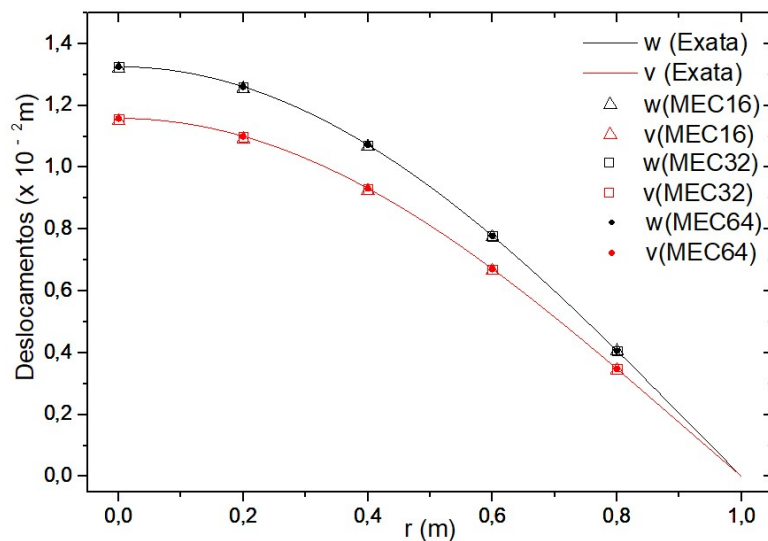


Figura 5.10 – Deslocamentos de placa dupla simplesmente apoiada.

Tabela 5.15 – Deslocamentos na placa dupla circular engastada e simplesmente apoiada

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
0	$w(x10^{-2}m)$	4,3228	4,3316	4,3338	4,3400
	$v(x10^{-2}m)$	3,4496	3,4784	3,4856	3,4917
0,2R	$w(x10^{-2}m)$	4,0134	4,0207	4,0225	4,0276
	$\theta(x10^{-2}rad)$	3,0440	3,0588	3,0624	3,0708
	$v(x10^{-2}m)$	3,2156	3,2433	3,2502	3,2558
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	2,2930	2,3041	2,3069	2,3113
0,4R	$w(x10^{-2}m)$	3,1458	3,1490	3,1498	3,1530
	$\theta(x10^{-2}rad)$	5,4755	5,5020	5,5086	5,5185
	$v(x10^{-2}m)$	2,5692	2,5937	2,5999	2,6044
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	4,0361	4,0556	4,0605	4,0671
0,6R	$w(x10^{-2}m)$	1,9097	1,9069	1,9062	1,9075
	$\theta(x10^{-2}rad)$	6,6000	6,6318	6,6398	6,6490
	$v(x10^{-2}m)$	1,6696	1,6897	1,6948	1,6980
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	4,7613	4,7843	4,7901	4,7968
0,8R	$w(x10^{-2}m)$	0,6571	0,6482	0,6459	0,6456
	$\theta(x10^{-2}rad)$	5,4288	5,4551	5,4616	5,4679
	$v(x10^{-2}m)$	0,7460	0,7617	0,7656	0,7676
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	4,2945	4,3153	4,3205	4,3259

Um comportamento semelhante é visto na Tabela 5.15, onde o erro relativo máximo é de 2,81% na malha menos refinada, atingindo 0,261%, para mesmo ponto, quando utilizada a MEC64.

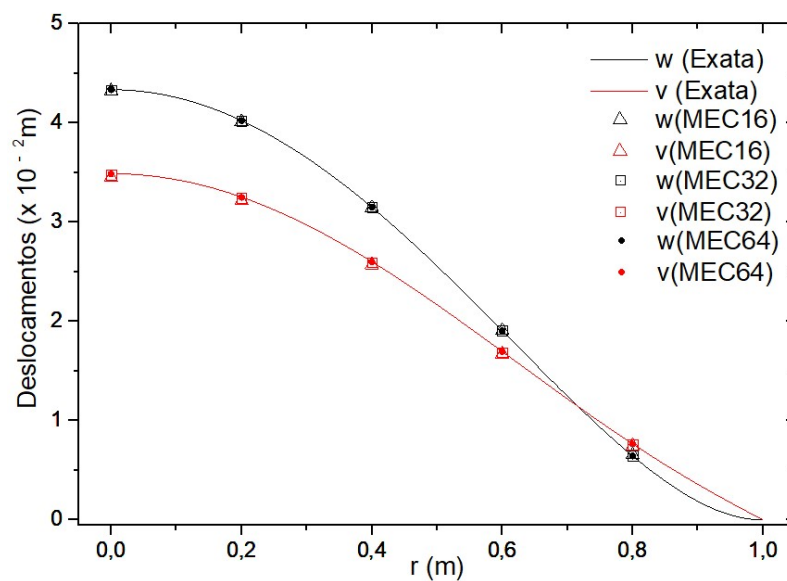


Figura 5.11 – Deslocamentos na placa superior engastada e inferior simplesmente apoiada.

Tabela 5.16 – Deslocamentos na placa superior simplesmente apoiada e inferior engastada.

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
0	$w(x10^{-2}m)$	6,3386	6,3571	6,3618	6,3697
	$v(x10^{-2}m)$	3,9472	3,9784	3,9862	3,9926
0,2R	$w(x10^{-2}m)$	5,9882	6,0051	6,0093	6,0162
	$\theta(x10^{-2}rad)$	3,4584	3,4751	3,4793	3,4879
	$v(x10^{-2}m)$	3,6536	3,6834	3,6909	3,6967
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	2,8841	2,8980	2,9015	2,9077
0,4R	$w(x10^{-2}m)$	4,9908	5,0028	5,0058	5,0107
	$\theta(x10^{-2}rad)$	6,3848	6,4157	6,4235	6,4340
	$v(x10^{-2}m)$	2,8355	2,8614	2,8678	2,8724
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	5,1375	5,1624	5,1686	5,1756
0,6R	$w(x10^{-2}m)$	3,5022	3,5070	3,5082	3,5110
	$\theta(x10^{-2}rad)$	8,2933	8,3384	8,3485	8,3590
	$v(x10^{-2}m)$	1,6857	1,7060	1,7111	1,7140
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	6,0790	6,1084	6,1158	6,1231
0,8R	$w(x10^{-2}m)$	1,7602	1,7567	1,7558	1,7565
	$\theta(x10^{-2}rad)$	8,8964	8,9395	8,9503	8,9597
	$v(x10^{-2}m)$	0,5476	0,5628	0,5661	0,5677
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	4,8483	4,8718	4,8777	4,8841

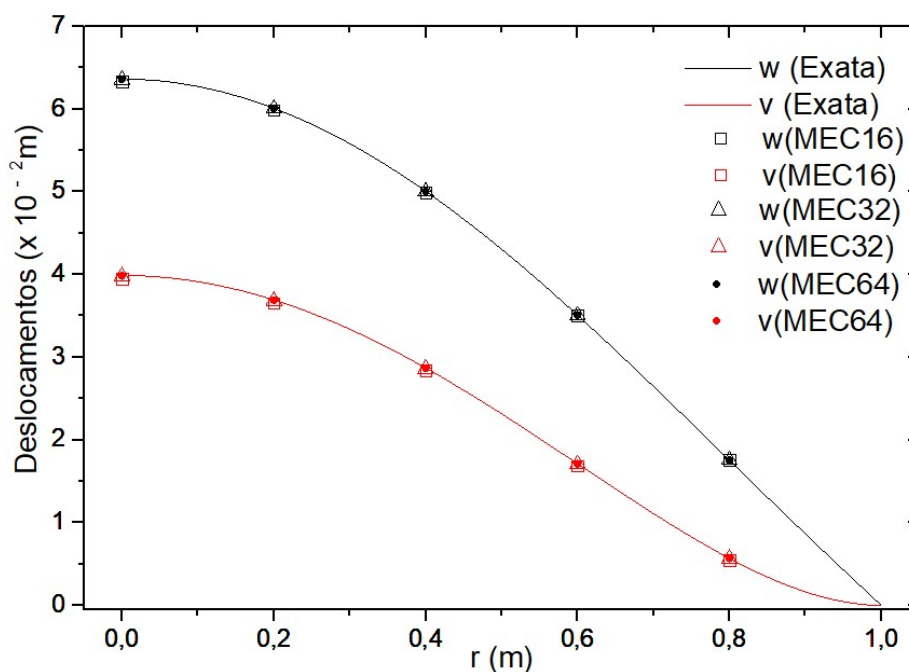


Figura 5.12 – Deslocamentos na placa dupla, superior simplesmente apoiada e inferior engastada.

Os resultados da Tabela 5.16 mostram um bom desempenho das soluções do MEC quando comparados com a solução exata. O deslocamento inferior na posição “0,8R” apresentou um erro relativo de 3,541% para o MEC16. Aumentando a discretização, tal erro é reduzido para 0,282%.

5.6 Placas duplas circulares sob carga pontual

As placas duplas circulares, nesta seção, possuem as espessuras superior e inferior iguais a $0,01m$, respectivamente. Os raios adotados foram de $1m$. As propriedades da camada elástica são: constante de mola $K_w = 0,1MN/m^3$. Os módulos de elasticidade longitudinal da placa superior e inferior são $E = 28 GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A camada cisalhante tem módulo $K_p = 23kN/m$

Com os mesmos parâmetros para cada exemplo, as condições abordadas são: totalmente engastada (E/E); simplesmente apoiada (S/S); placa superior apoiada e inferior engastada (S/E); e placa superior engastada e inferior simplesmente apoiada (E/S).

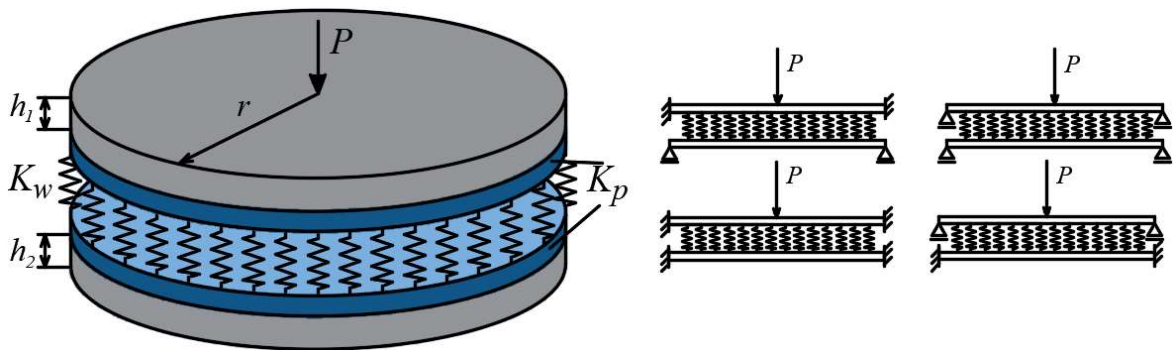


Figura 5.13 – Placa dupla circular sob carregamento pontual e condições de contorno.

Na Tabela 5.17 são apresentados os deslocamentos e rotações das placas superior e inferior. Convém notar que os resultados obtidos via MEC tiveram um bom desempenho quando comparados com as respostas analíticas.

Tabela 5.17 – Deslocamentos e rotações das placas duplas circulares sob carga pontual no centro.

$r(m)$	$w(x10^{-2}m)$		$\theta(x10^{-2}rad)$		$v(x10^{-2}m)$		$\varphi(x10^{-2}rad)$	
	MEC	Exata	MEC	Exata	MEC	Exata	MEC	Exata
Engastada-Engastada								
0	5,4577	5,4577	-	-	3,7205	3,7205	-	-
0,2R	4,4701	4,4701	7,0969	7,0969	3,3420	3,3420	3,4607	3,4607
0,4R	2,9591	2,9591	7,6232	7,6232	2,4756	2,4756	4,8873	4,8873
0,6R	1,5284	1,5284	6,4739	6,4739	1,4920	1,4920	4,7416	4,7416
0,8R	0,4495	0,4495	4,1005	4,1005	0,6386	0,6386	3,7108	3,7108
Simplesmente apoiada – Simplesmente apoiada								
0	1,0971	1,0971	-	-	8,7241	8,7241	-	-
0,2R	0,9777	0,9777	0,9171	0,9171	8,1321	8,1321	0,5594	0,5594
0,4R	0,7641	0,7641	1,1798	1,1798	6,6277	6,6277	0,9126	0,9126
0,6R	0,5159	0,5159	1,2848	1,2848	4,5928	4,5928	1,0988	1,0988
0,8R	0,2561	0,2561	1,3004	1,3004	2,3131	2,3131	1,1635	1,1635
Engastada – Simplesmente apoiada								
0	5,4577	5,4577	-	-	3,7205	3,7205	-	-
0,2R	4,4701	4,4701	7,0969	7,0969	3,3420	3,3420	3,4607	3,4607
0,4R	2,9591	2,9591	7,6232	7,6232	2,4756	2,4756	4,8873	4,8873
0,6R	1,5284	1,5284	6,4739	6,4739	1,4920	1,4920	4,7416	4,7416
0,8R	0,4495	0,4495	4,1005	4,1005	0,6386	0,6386	3,7108	3,7108
Simplesmente apoiada – Engastada								
0	6,4303	6,4304	-	-	3,7205	3,7205	-	-
0,2R	5,4294	5,4294	7,2348	7,2348	3,3165	3,3165	3,7119	3,7119
0,4R	3,8734	3,8734	7,9507	7,9507	2,3785	2,3785	5,3379	5,3379
0,6R	2,3447	2,3447	7,1795	7,1795	1,2983	1,2983	5,2033	5,2033
0,8R	1,0415	1,0415	5,8122	5,8122	0,3967	0,3967	3,5555	3,5555

5.7 Placas duplas anulares sob carga distribuída

De maneira semelhante, as placas duplas anulares, nesta seção, possuem configurações em comum, porém são feitas variações nas condições de contorno e nas cargas solicitantes.

As placas duplas anulares, nesta seção, possuem as espessuras superior e inferior iguais a $0,01m$. Os raios externo e interno adotados foram, respectivamente, de $8m$ e $4m$. As propriedades da camada elástica são: constante de mola $K_w = 0,1MN/m^3$. Os módulos de elasticidade longitudinal da placa superior e inferior são, respectivamente, $E_1 = E_2 = 28GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A camada cisalhante tem módulo $K_p = 2,646kN/m$. O carregamento aplicado tem módulo $q = 1kN/m^2$.

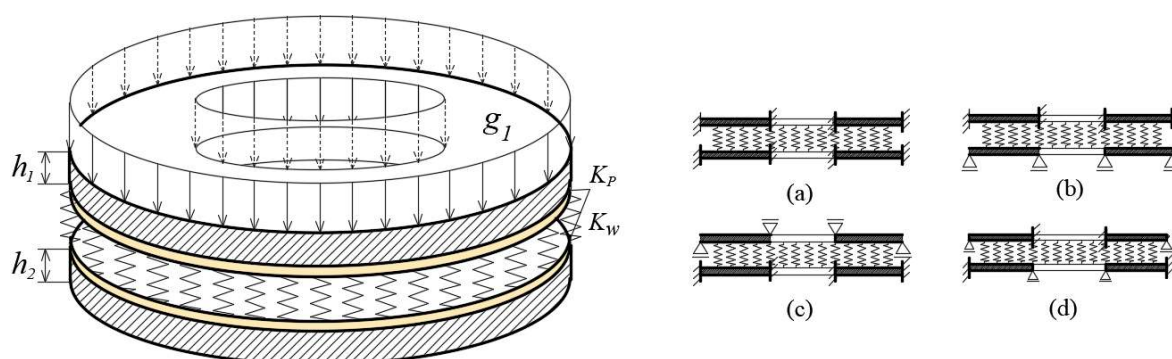


Figura 5.14 – Placa dupla anular com várias condições de contorno: (a) engastada (b) engastada-apoiada (c)apoiada-engastada (d) SEES/ESSE.

Tabela 5.18 – Deslocamentos nas placas superior e inferior da placa dupla engastada.

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$0,625R_1$	$w(x10^{-2}m)$	0,7935	0,8086	0,8124	0,8136
	$\theta(x10^{-2}rad)$	0,9742	0,9933	0,9981	0,9997
	$v(x10^{-2}m)$	0,7468	0,762	0,7658	0,767
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	0,9535	0,9721	0,9768	0,9784
$0,75R_1$	$w(x10^{-2}m)$	1,2973	1,3222	1,329	1,3306
	$\theta(x10^{-2}rad)$	-0,0851	-0,0868	-0,0872	-0,0874
	$v(x10^{-2}m)$	1,2456	1,2705	1,2767	1,2788
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	-0,0856	-0,0873	-0,0877	-0,0878
$0,875R_1$	$w(x10^{-2}m)$	0,6957	0,7089	0,7122	0,7133
	$\theta(x10^{-2}rad)$	-0,9459	-0,9645	-0,9691	-0,9707
	$v(x10^{-2}m)$	0,6492	0,6624	0,6657	0,6669
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	-0,9234	-0,9415	-0,946	-0,9475

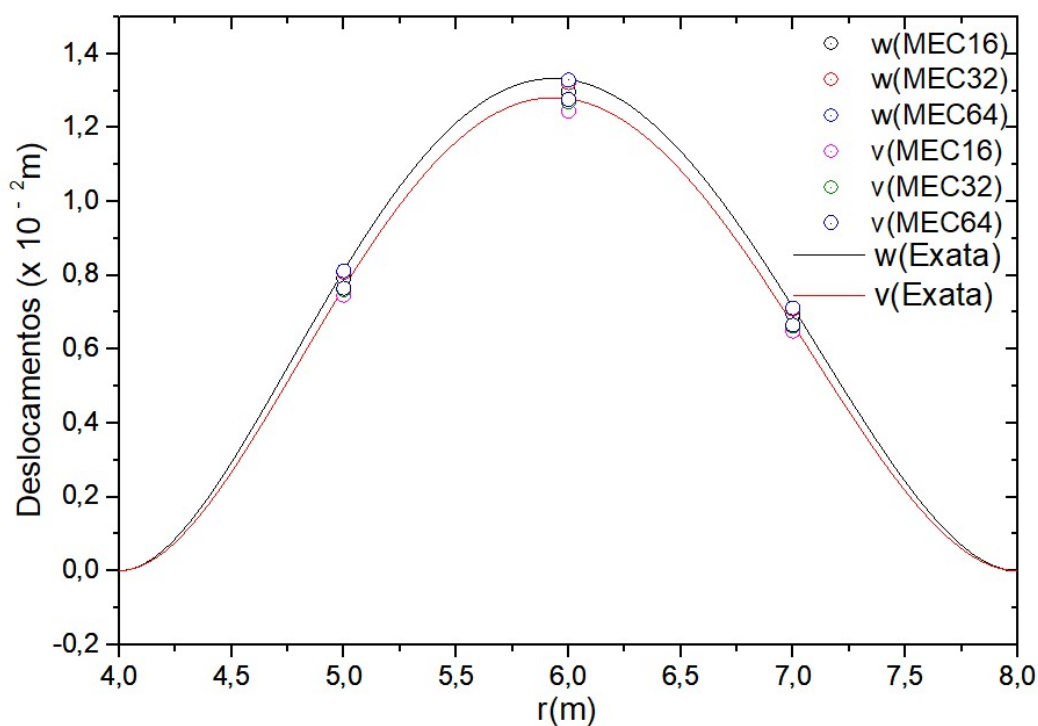


Figura 5.15 – Deslocamentos na placa dupla anular engastada.

Tabela 5.19 – Deslocamentos da placa dupla anular engastada e apoiada.

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$0,625R_1$	$w(x10^{-2}m)$	1,1406	1,1625	1,168	1,1875
	$\theta(x10^{-2}rad)$	1,2745	1,2995	1,3058	1,3186
	$v(x10^{-2}m)$	1,1419	1,1647	1,1705	1,1935
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	1,0994	1,121	1,1264	1,1282
$0,75R_1$	$w(x10^{-2}m)$	1,768	1,8021	1,8107	1,8305
	$\theta(x10^{-2}rad)$	-0,1098	-0,112	-0,1125	-0,121
	$v(x10^{-2}m)$	1,7083	1,7422	1,7508	1,7702
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	-0,1098	-0,1119	-0,1125	-0,1209
$0,875R_1$	$w(x10^{-2}m)$	1,0065	1,0257	1,0306	1,0389
	$\theta(x10^{-2}rad)$	-1,2527	-1,2773	-1,2835	-1,2958
	$v(x10^{-2}m)$	1,006	1,0262	1,0313	1,04
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	-1,0904	-1,1118	-1,1171	-1,1283

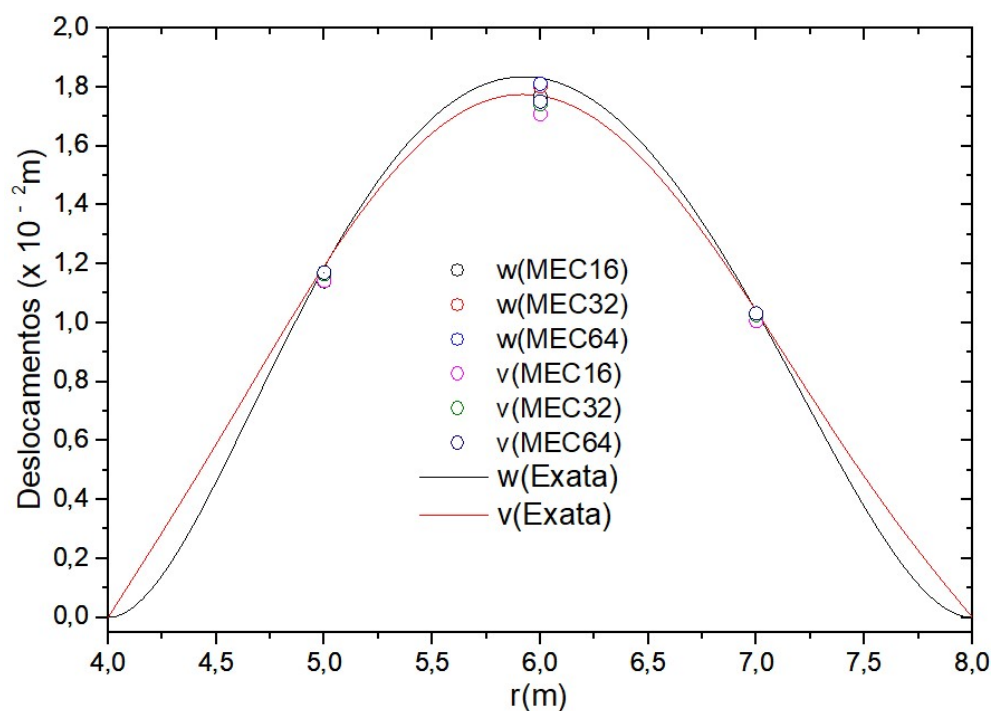


Figura 5.16 – Deslocamentos da placa dupla anular engastada e simplesmente apoiada.

Tabela 5.20 – Deslocamentos e rotações de placa anular simplesmente apoiada e engastada.

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$0,625R_1$	$w(x10^{-2}m)$	1,258	1,2822	1,2883	1,3114
	$\theta(x10^{-2}rad)$	1,1496	1,1721	1,1778	1,1797
	$v(x10^{-2}m)$	1,1554	1,1785	1,1844	1,204
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	1,3092	1,3349	1,3413	1,3542
$0,75R_1$	$w(x10^{-2}m)$	1,8453	1,8810	1,8900	1,9095
	$\theta(x10^{-2}rad)$	-0,1101	-0,1123	-0,1128	-0,1213
	$v(x10^{-2}m)$	1,8031	1,8389	1,848	1,8678
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	-0,1112	-0,1133	-0,1139	-0,1224
$0,875R_1$	$w(x10^{-2}m)$	1,1212	1,1427	1,1481	1,1569
	$\theta(x10^{-2}rad)$	-1,1421	-1,1645	-1,1701	-1,1814
	$v(x10^{-2}m)$	1,0195	1,040	1,0451	1,0535
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	-1,2871	-1,3123	-1,3187	-1,3311

Tabela 5.21 – Deslocamentos e rotações de placa dupla anular SEES/ESSE.

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
0,625R ₁	$w(x10^{-2}m)$	1,1012	1,1222	1,1276	1,1489
	$\theta(x10^{-2}rad)$	0,9606	0,9794	0,9842	0,9849
	$v(x10^{-2}m)$	1,0039	1,0241	1,0292	1,0473
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	1,1000	1,1216	1,127	1,1382
0,75R ₁	$w(x10^{-2}m)$	1,5247	1,5541	1,5615	1,5785
	$\theta(x10^{-2}rad)$	-0,218	-0,2223	-0,2234	-0,2322
	$v(x10^{-2}m)$	1,477	1,5064	1,5138	1,5310
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	-0,2202	-0,2245	-0,2256	-0,2345
0,875R ₁	$w(x10^{-2}m)$	0,7753	0,7900	0,7937	0,8000
	$\theta(x10^{-2}rad)$	-1,0837	-1,1049	-1,1103	-1,1208
	$v(x10^{-2}m)$	0,7289	0,7437	0,7474	0,7538
	$\varphi(x10^{-2}rad)$	-1,0625	-1,0833	-1,0886	-1,0992

Nota-se, na Tabela 5.20, que partindo da malha menos refinada (MEC16) até o modelo com mais elementos de contorno (MEC64) ocorre uma aproximação ascendente dos resultados numéricos para os deslocamentos e rotações. O erro relativo percentual máximo das respostas apresentadas foi de 4,072% para a malha mais pobre, no deslocamento da placa superior da posição “0,625R”. Quando utilizado MEC64, tal erro relativo reduziu para 1,762%.

Já para o sistema com condição de contorno mista, referente aos raios interno e externo, a Tabela 5.21 apresenta respostas dos deslocamentos e rotações com um desempenho satisfatórios. O maior erro relativo percentual ocorreu em 0,625R e foi de 4,152% quando utilizado MEC16, reduzindo para 1,85% com MEC64.

5.8 Placas duplas sob carga linha

Considere um sistema de placas duplas simplesmente apoiadas submetido a uma carga em linha $P = 1kN/m$ aplicada no centro da placa superior. As dimensões e espessura são iguais para as placas de dimensões: 2 m de largura e 4 m de comprimento e 0,05 m de

espessura. A constante de mola adotada foi de $K_w = 0,1MN/m^3$ e a camada cisalhante tem módulos $K_p = 233,2kN/m$, $K_p = 283,2kN/m$ e $K_p = 253,2kN/m$, para Caso I, Caso II e Caso III, respectivamente. Os módulos de elasticidade longitudinal da placa superior e inferior são $E = 28 GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Os resultados foram observados ao longo do eixo central da placa, na direção x .

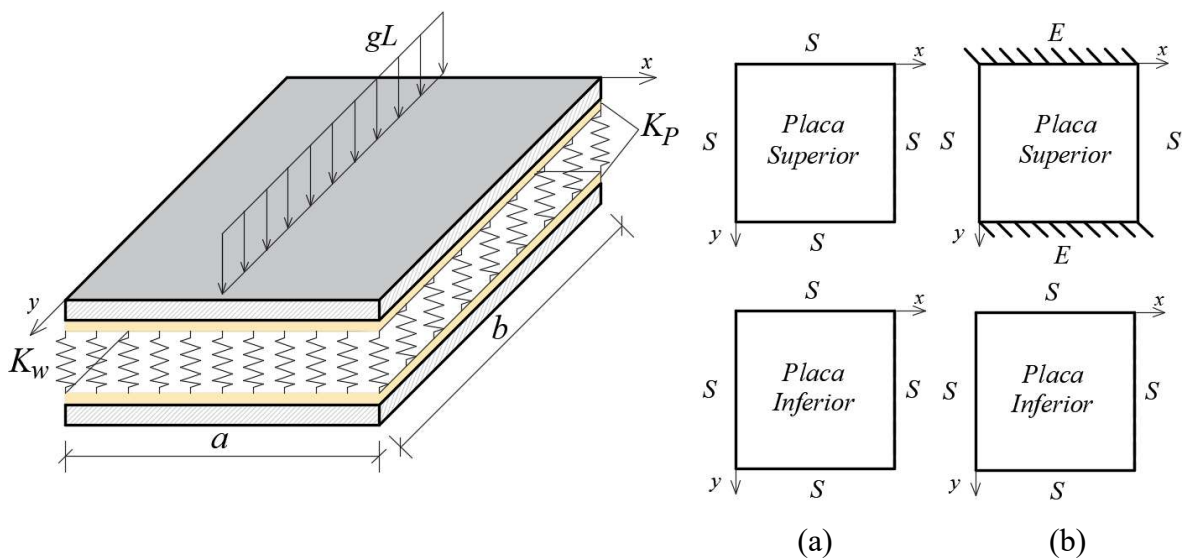


Figura 5.17 – Placa dupla: (a) SSSS e (b) vinculação ESES/SSSS sob carga em linha.

Tabela 5.22 – Deslocamentos da placa dupla simplesmente apoiada sob carga linha (Caso I)

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-4}m)$	1,163	1,201	1,203	1,204
	$\theta(x10^{-4}rad)$	4,470	4,622	4,632	4,634
	$v(x10^{-5}m)$	2,741	2,708	2,715	2,716
	$\varphi(x10^{-4}rad)$	1,039	1,029	1,032	1,033
$a/4$	$w(x10^{-4}m)$	2,192	2,264	2,269	2,270
	$\theta(x10^{-4}rad)$	3,665	3,782	3,790	3,792
	$v(x10^{-5}m)$	5,074	5,020	5,034	5,035
	$\varphi(x10^{-5}rad)$	8,038	7,964	7,990	7,992
$a/2$	$w(x10^{-4}m)$	3,240	3,342	3,349	3,350
	$v(x10^{-5}m)$	7,215	7,139	7,160	7,163

Tabela 5.23 – Deslocamentos da placa dupla simplesmente apoiada sob carga linha (Caso II)

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-4}m)$	1,146	1,170	1,173	1,173
	$\theta(x10^{-4}rad)$	4,404	4,505	4,515	4,517
	$v(x10^{-5}m)$	2,915	3,015	3,022	3,023
	$\varphi(x10^{-4}rad)$	1,105	1,146	1,150	1,150
$a/4$	$w(x10^{-4}m)$	2,160	2,207	2,212	2,212
	$\theta(x10^{-4}rad)$	3,614	3,691	3,698	3,700
	$v(x10^{-5}m)$	5,397	5,590	5,606	5,607
	$\varphi(x10^{-5}rad)$	8,554	8,875	8,903	8,907
$a/2$	$w(x10^{-4}m)$	3,193	3,260	3,267	3,268
	$v(x10^{-5}m)$	7,677	7,953	7,977	7,980

Tabela 5.24 – Deslocamentos da placa dupla simplesmente apoiada sob carga linha (Caso III)

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-4}m)$	1,176	1,188	1,191	1,191
	$\theta(x10^{-4}rad)$	4,517	4,573	4,584	4,586
	$v(x10^{-5}m)$	2,617	2,836	2,843	2,844
	$\varphi(x10^{-4}rad)$	9,919	1,078	1,081	1,081
$a/4$	$w(x10^{-4}m)$	2,215	2,240	2,245	2,246
	$\theta(x10^{-4}rad)$	3,702	3,744	3,752	3,754
	$v(x10^{-5}m)$	4,844	5,257	5,272	5,273
	$\varphi(x10^{-5}rad)$	7,672	8,342	8,369	8,372
$a/2$	$w(x10^{-4}m)$	3,272	3,308	3,315	3,316
	$v(x10^{-5}m)$	6,887	7,478	7,500	7,502

As Tabela 5.22 a 5.24 apresentam convergências ascendentes dos resultados numéricos para os deslocamentos, partindo da malha menos refinada (MEC16) até o modelo com mais elementos de contorno (MEC64), para os três casos de raízes. Os erros relativos percentuais apresentados são: no Caso I, de 3,436% no deslocamento da placa superior em $L/4$, chegando a 0,044%, quando refinada a MEC64. Para o Caso II, a diminuição do erro foi de 3,745% a 0,018%, no deslocamento inferior da mesma posição. No Caso III, na mesma posição e mesma placa do Caso II, o erro relativo inicial foi de 8,136% com MEC16, diminuindo consideravelmente a 0,019%.

Tabela 5.25 – Deslocamentos da placa dupla ESES/SSSS (Caso I)

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-4}m)$	1,045	1,029	1,026	1,026
	$\theta(x10^{-4}rad)$	4,019	3,967	3,958	3,958
	$v(x10^{-5}m)$	2,278	2,233	2,222	2,221
	$\varphi(x10^{-5}rad)$	8,630	8,490	8,454	8,452
$a/4$	$w(x10^{-4}m)$	1,973	1,945	1,940	1,940
	$\theta(x10^{-4}rad)$	3,317	3,281	3,273	3,274
	$v(x10^{-5}m)$	4,216	4,142	4,123	4,122
	$\varphi(x10^{-5}rad)$	6,678	6,586	6,559	6,558
$a/2$	$w(x10^{-4}m)$	2,928	2,891	2,884	2,884
	$v(x10^{-5}m)$	6,000	5,900	5,872	5,871

Tabela 5.26 – Deslocamentos da placa dupla ESES/SSSS (Caso II)

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-4}m)$	1,021	1,005	1,002	1,002
	$\theta(x10^{-4}rad)$	3,927	3,877	3,868	3,869
	$v(x10^{-5}m)$	2,545	2,497	2,484	2,484
	$\varphi(x10^{-5}rad)$	9,643	9,494	9,455	9,454
$a/4$	$w(x10^{-4}m)$	1,928	1,902	1,896	1,897
	$\theta(x10^{-4}rad)$	3,244	3,211	3,203	3,204
	$v(x10^{-5}m)$	4,711	4,632	4,611	4,611
	$\varphi(x10^{-5}rad)$	7,470	7,371	7,342	7,341
$a/2$	$w(x10^{-4}m)$	2,863	2,828	2,821	2,821
	$v(x10^{-5}m)$	6,703	6,600	6,571	6,570

Tabela 5.27 – Deslocamentos da placa dupla ESES/SSSS (Caso III)

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-4}m)$	1,035	1,019	1,016	1,016
	$\theta(x10^{-4}rad)$	3,981	3,930	3,921	3,921
	$v(x10^{-5}m)$	2,389	2,342	2,331	2,330
	$\varphi(x10^{-4}rad)$	9,050	8,906	8,869	8,868
$a/4$	$w(x10^{-4}m)$	1,954	1,927	1,922	1,922
	$\theta(x10^{-4}rad)$	3,287	3,252	3,244	3,245
	$v(x10^{-5}m)$	4,421	4,346	4,326	4,325
	$\varphi(x10^{-5}rad)$	7,007	6,911	6,883	6,882
$a/2$	$w(x10^{-4}m)$	2,901	2,865	2,858	2,858
	$v(x10^{-5}m)$	6,289	6,189	6,162	6,161

Nas Tabela 5.25 a 5.27 são apresentados os deslocamentos e rotações das placas superior e inferior para os três casos de raízes possíveis. Os erros relativos percentuais apresentados são baixos e ocorreram todos na mesma posição: no deslocamento da placa inferior em $L/8$. No Caso I, de 2,566%, chegando a 0,024%, quando refinada a MEC64. Para o Caso II, a diminuição do erro foi de 2,456% a 0,001. No Caso III, o erro inicial foi de 2,530% com MEC16, diminuindo consideravelmente a 0,001%.

5.9 Placas duplas simplesmente apoiada sob carga distribuída hidrostática

Considere um sistema de placas duplas simplesmente apoiadas submetido a uma carga de variação linear $g_1 = g(0) + [g(a) - g(0)]x/a$, onde $g(0) = 1 \text{ kN/m}^2$ e $g(a) = 2 \text{ kN/m}^2$. As dimensões e espessura são iguais para as placas de dimensões: 2 m de largura e 4 m de comprimento e 0,05 m de espessura. A constante de mola adotada foi de $K_w = 0,1 \text{ MN/m}^3$ e a camada cisalhante tem módulo $K_p = 233,2 \text{ kN/m}$. Os módulos de elasticidade longitudinal da placa superior e inferior são $E = 28 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Os pontos observados estão posicionados ao longo da linha central em x .

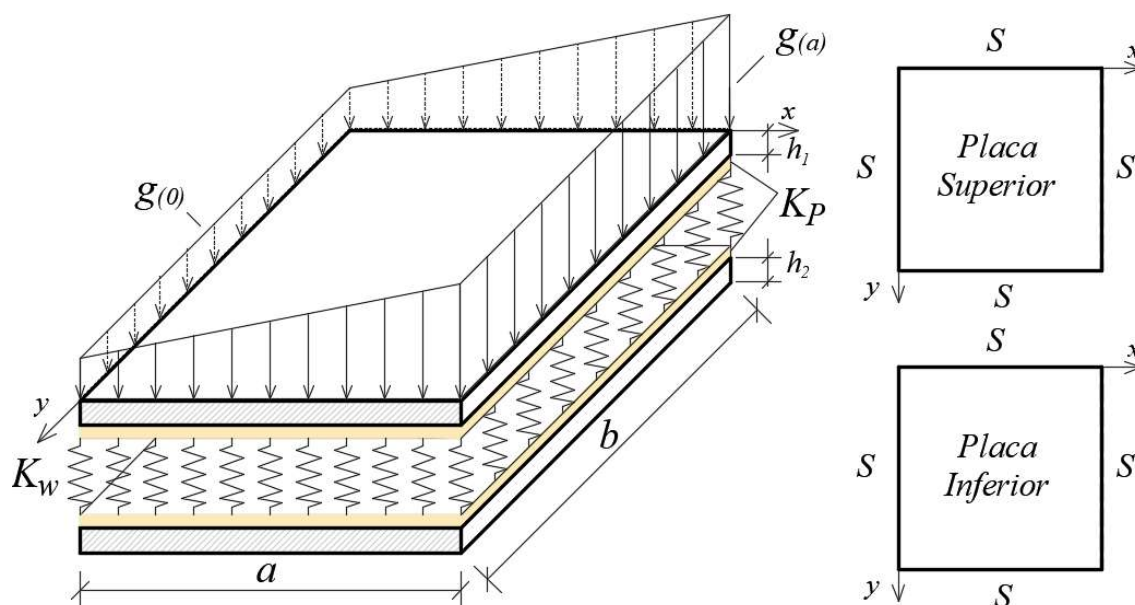


Figura 5.18 – Placa dupla simplesmente apoiada sob carregamento hidrostático.

Tabela 5.28 – Deslocamentos nas placas duplas sob carga hidrostática

x	Resultados	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	$w(x10^{-4}m)$	2,289	2,355	2,363	2,364
	$\theta(x10^{-4}rad)$	8,624	8,894	8,926	8,931
	$v(x10^{-5}m)$	4,937	5,161	5,183	5,185
	$\varphi(x10^{-4}rad)$	1,866	1,956	1,966	1,967
$a/4$	$w(x10^{-4}m)$	4,212	4,340	4,354	4,357
	$\theta(x10^{-4}rad)$	6,592	6,800	6,824	6,828
	$v(x10^{-5}m)$	9,111	9,540	9,583	9,588
	$\varphi(x10^{-4}rad)$	1,432	1,503	1,510	1,511
$a/2$	$w(x10^{-4}m)$	6,015	6,197	6,218	6,222
	$\theta(x10^{-5}rad)$	2,756	2,792	2,795	2,781
	$v(x10^{-4}m)$	1,294	1,356	1,362	1,363
	$\varphi(x10^{-6}rad)$	2,001	2,059	2,064	2,029
$3a/4$	$w(x10^{-4}m)$	4,397	4,526	4,541	4,544
	$\theta(x10^{-4}rad)$	-6,555	-6,762	-6,787	-6,790
	$v(x10^{-5}m)$	9,239	9,671	9,715	9,719
	$\varphi(x10^{-4}rad)$	-1,431	-1,502	-1,509	-1,510
$7a/8$	$w(x10^{-4}m)$	2,426	2,494	2,502	2,503
	$\theta(x10^{-4}rad)$	-9,026	-9,301	-9,334	-9,339
	$v(x10^{-5}m)$	5,028	5,255	5,277	5,279
	$\varphi(x10^{-4}rad)$	-1,895	-1,985	-1,995	-1,996

São apresentados os deslocamentos e rotações das placas superior e inferior, Tabela 5.28, e os esforços de momentos nas duas placas, Tabela 5.29.

Os erros apresentaram maiores respostas nas discretizações MEC16, tanto em deslocamentos quanto em esforços. Esses valores foram: referente ao deslocamento da placa superior obteve-se 3,327%, no meio da placa; Nas rotações da placa superior, o destaque foi para o erro relativo de 3,461% na posição de $3L/4$. Já para as respostas da placa inferior, respectivamente em deslocamento e rotação, os maiores erros foram 5,062%, no meio da placa, e 5,232% em $L/4$. Quanto aos esforços de momento fletores, o maior erro ocorreu na posição de $L/4$, apresentando um erro de 4,825% em T_x .

Convém notar que os resultados obtidos via MEC tiveram um bom desempenho quando comparados com as respostas analíticas.

Tabela 5.29 – Momentos das placas duplas sob carga hidrostática

x	Resultados ($\times 10^2 Nm/m$)	MEC			Analítica
		16	32	64	
$a/8$	M_x	2,004	2,036	2,041	2,043
	M_y	8,931	8,980	8,958	8,961
	T_x	4,208	4,310	4,321	4,322
	T_y	2,051	2,089	2,084	2,084
$a/4$	M_x	3,418	3,518	3,529	3,531
	M_y	1,583	1,584	1,583	1,583
	T_x	7,574	7,920	7,955	7,958
	T_y	3,767	3,838	3,843	3,843
$a/2$	M_x	4,816	4,945	4,960	4,963
	M_y	2,229	2,234	2,233	2,234
	T_x	1,084	1,133	1,138	1,138
	T_y	5,353	5,469	5,478	5,479
$3a/4$	M_x	3,987	4,093	4,105	4,107
	M_y	1,764	1,763	1,762	1,762
	T_x	7,980	8,335	8,371	8,374
	T_y	3,901	3,971	3,976	3,976
$7a/8$	M_x	2,511	2,546	2,552	2,553
	M_y	1,053	1,056	1,053	1,054
	T_x	4,513	4,622	4,633	4,634
	T_y	2,151	2,188	2,184	2,183

CONCLUSÕES

Uma formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para flexão de um sistema de placas duplas conectadas por camada elástica de Pasternak foi abordada nesse trabalho. Algumas contribuições originais deste estudo podem ser destacadas na viabilização do MEC para este sistema estrutural elasticamente conectado: proposição de solução fundamental; estabelecimento das equações integrais e a transformação das parcelas de carregamento que contém equações de domínio em equações de contorno, inclusive a dedução dos termos livres associados ao carregamento na solução pertinente. Exemplos numéricos foram apresentados, nos quais testes de convergência foram realizados utilizando três tipos de discretizações nos problemas envolvendo placas retangulares. Verificou-se que soluções do MEC apresentam respostas próximas às soluções analíticas. Além disso, os resultados numéricos mostraram que as rigidezes das placas combinadas com a magnitude da constante de mola e o módulo de cisalhamento da camada elástica têm papel relevante para a transmissão dos efeitos da placa superior para a inferior, propiciando um efetivo trabalho do sistema duplo de placas.

Sugestões para trabalhos futuros

Perante o exposto, algumas sugestões que poderiam ser investigadas para o desenvolvimento de estudos referentes à aplicação do MEC em placas duplas são:

- Utilização de teorias de placas duplas espessas;
- Utilização de modelos de bases elásticas mais refinadas, como as da família de Kerr;
- Desenvolvimento de formulação para placas múltiplas;
- Aplicação de métodos para transformações de carregamentos genérico, tais como polinomiais de alta ordem, senoidais e outros;
- Análise dinâmica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDEL-AKHER, Ahmed; HARTLEY, Gilbert A. Evaluation of boundary integrals for plate bending. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 28, n. 1, p. 75-93, 1989.

ABRAMOWITZ, Milton; STEGUN, Irene A. **Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables**. In: Appl. 1972.

AIDA T., KAWAZOE K., TODA S. **Vibration control of plates by plate-type dynamic vibration absorbers**, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Vibration and Acoustics 117, pp. 332–338, 1995.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2023.

BALAŠ, J.; SL DEK, V.; SL DEK, J. The Boundary Integral Equation Method for Plates Resting on a Two? Parameter Foundation. **ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift f r Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 64, n. 3, p. 137-146, 1984.

BETTI, E. **Teoria dell'elasticità**. Il Nuovo Cimento, p.7-10, 1872.

BETTI, Enrico. Teoria della elasticita'. **Il Nuovo Cimento (1869-1876)**, v. 7, n. 1, p. 69-97, 1872.

BEZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. **Mechanics Research Communications**, v. 5, n. 4, p. 197-206, 1978.

BEZINE, G. A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 11, p. 1647-1657, 1981.

BREBBIA, Carlos Alberto; DOMINGUEZ, Jose. **Boundary elements: an introductory course**. WIT press, 1994.

BREBBIA, Carlos Alberto; TELLES, José Claudio Faria; WROBEL, Luiz C. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering**. Springer Science & Business Media, 2012.

BRITO, W.K.F; MAIA, C.D.C.D; MACIEL, W. G. M; MENDONÇA, A. V. **Static Analysis of a Double-Beam System by Finite Element Method**. 6th International Congress on Technology, Engineering and Science, Kuala, Lumpur, Malaysia, 2018

BRITO, W.K.F. **Análise estática e dinâmica de vigas elasticamente conectadas: uma abordagem pelo Método dos Elementos de Contorno**. Dissertação(Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental. UFPB, 2018.

BRITO, W.K.F; MAIA, C.D.C.D; MENDONÇA, A. V. **Bending analysis of elastically connected Euler-Bernoulli double-beam system using the direct boundary element method**. Applied Mathematical Modeling, 74, p. 387-408, 2019

CAO, Tan Ngoc Than et al. A multi-layer moving plate method for dynamic analysis of viscoelastically connected double-plate systems subjected to moving loads. **Advances in Structural Engineering**, v. 24, n. 9, p. 1798-1813, 2021.

CHONAN, S. The free vibrations of elastically connected circular plate systems with elastically restrained edges and radial tensions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 49, n. 1, p. 129-136, 1976.

CHONAN, S. **Elastically connected Mindlin plates subjected to a moving load**. 1979.

CHUEIRI, Lauro Henrique Mello. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 1994.

DANSON, D. J. Analysis of plate bending problems by direct boundary element method. MSc Dissert. University of Southampton, 1979.

DE ROSA, M. A.; LIPPIELLO, M. Free vibrations of simply supported double plate on two models of elastic soils. **International journal for numerical and analytical methods in geomechanics**, v. 33, n. 3, p. 331-353, 2009.

GBADEYAN, Jacob Abiodun; OGUNMILORO, Oluwatayo Michael; FADUGBA, Sunday Emmanuel. Dynamic Response of an Elastically Connected Double Non-Mindlin Plates with Simply-Supported End Condition due to Moving Load. **Khayyam Journal of Mathematics**, v. 5, n. 1, p. 40-59, 2019.

GUO-SHU, Song; MUKHERJEE, Subrata. Boundary element method analysis of bending of elastic plates of arbitrary shape with general boundary conditions. **Engineering analysis**, v. 3, n. 1, p. 36-44, 1986.

HANSEN, Erik B. Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. **Journal of elasticity**, v. 6, n. 1, p. 39-56, 1976.

HARTMANN, F.; ZOTEMANTEL, R. The direct boundary element method in plate bending. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 23, n. 11, p. 2049-2069, 1986.

HEDRIH, Katica Stevanović. Transversal vibrations of double-plate systems. **Acta Mechanica Sinica**, v. 22, n. 5, p. 487-501, 2006.

HEDRIH, Katica. Energy transfer in double plate system dynamics. **Acta Mechanica Sinica**, v. 24, n. 3, p. 331-344, 2008.

HEDRIH, Katica R. Stevanović; SIMONOVIC, Julijana D. Non-linear dynamics of the sandwich double circular plate system. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 45, n. 9, p. 902-918, 2010.

HEDRIH, Katica R. Stevanović; SIMONOVIĆ, Julijana D. Non-linear dynamics of the sandwich double circular plate system. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 45, n. 9, p. 902-918, 2010.

SIMONOVIĆ, Julijana D. et al. Multi-frequency analysis of the double circular plate system non-linear dynamics. **Nonlinear Dynamics**, v. 67, n. 3, p. 2299-2315, 2012.

HÖRMANDER, L. **Linear partial differential operators**. [S.1] Springer, 1963.

JASWON, M. A.; MAITI, M.; SYMM, G. T. Numerical biharmonic analysis and some applications. **International Journal of Solids and Structures**, v. 3, n. 3, p. 309-332, 1967.

JASWON, M. A.; MAITI, M. An integral equation formulation of plate bending problems. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 2, n. 1, p. 83-93, 1968.

KARAM, V. J. Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para flexão de placas. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1986.

KARAM, V. J.; ALTOÉ, M.; RIBEIRO, N. S. Analysis of plate bending by the boundary element method considering Pasternak-type foundation. **Blucher Mechanical Engineering Proceedings**, v. 1, n. 1, 2014.

KATSIKADELIS, J. T.; KALLIVOKAS, L. F. Plates on biparametric elastic foundation by BDIE method. **Journal of engineering mechanics**, v. 114, n. 5, p. 847-875, 1988.

KESSEL, P. G. Resonance Conditions for an Elastically Connected Double-Plate System Due to a Cyclic Moving Load. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 41, n. 6, p. 1552-1552, 1967.

KIRCHHOFF, Gustaf. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Crelles Journal)**, v. 1850, n. 40, p. 51-88, 1850.

KUKLA, S. Application of Green's function in free vibration analysis of a system of line connected rectangular plates. **Journal of sound and vibration**, v. 217, n. 1, p. 1-15, 1998.

KUKLA, S. Free vibration of a system of two elastically connected rectangular plates. **Journal of sound and vibration**, v. 225, n. 1, p. 29-39, 1999.

KUNUKKASSERIL, V. X.; SWAMIDAS, A. S. J. Normal modes of elastically connected circular plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 30, n. 1, p. 99-108, 1973.

KUNUKKASSERIL, V. X.; SWAMIDAS, A. S. J. Stability of continuous double-plate systems. **AIAA Journal**, v. 13, n. 10, p. 1326-1332, 1975.

KUPRADZE, V. K. **Potential methods in elasticity theory**. FOREIGN TECHNOLOGY DIV WRIGHT-PATTERSON AFB OHIO, 1967.

LACHAT, Jean Claude Auguste. **A further development of the boundary integral technique for elastostatics**. Tese (Doutorado). University of Southampton. 1975

LI, Jun; CHEN, Yong; HUA, Hongxing. Exact dynamic stiffness matrix of a Timoshenko three-beam system. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 50, n. 6, p. 1023-1034, 2008.

LI, Y. X.; SUN, L. Z. Transverse vibration of an undamped elastically connected double-beam system with arbitrary boundary conditions. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 142, n. 2, p. 04015070, 2016.

MACIEL, Weber Giovanni Mendes. **O método dos elementos de contorno aplicado às teorias de placas de Reissner, Mindlin e Reddy**. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, UFPB, 2020.

MANZOLI, Osvaldo Luis. **Formulação do método dos elementos de contorno para placas sobre fundação elástica**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo 1992.

MARCZAK, J. Vibrations of sandwich plates-comparison of chosen modelling approaches. **Vibrations in Physical Systems**, v. 29, 2018.

MCELMAN, John A. Flutter of two parallel flat plates connected by an elastic medium. **AIAA Journal**, v. 2, n. 2, p. 377-379, 1964.

MINDLIN, RD0044. **Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates**. 1951.

MOHAMMADI, Nader; NASIRSHOAIBI, Mehrdad. Forced transverse vibration analysis of a Rayleigh double-beam system with a Pasternak middle layer subjected to compressive axial load. **Journal of vibroengineering**, v. 17, n. 8, p. 4545-4559, 2015.

NASIRSHOAIBI, M.; MOHAMMADI, N. Analyzing of free transverse vibration of an elastically connected rectangular plate-membrance system with a Pasternak layer in-between. **ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences**, 2006.

NASIRSHOAIBI, M.; MOHAMMADI, N. Forced transverse vibration analysis of an elastically connected rectangular double-plate system with a Pasternak middle layer. **ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences**, v. 10, p. 6004-6013, 2015.

OLIVEIRA NETO, Luttgardes de. **Uma formulação do método dos elementos de contorno com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas e suas aplicações a problemas de engenharia estrutural**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 1998.

ONISZCZUK, Z. Transverse vibrations of the elastically connected rectangular double-membrane compound system. **Journal of Sound and Vibration**, v. 221, n. 2, p. 235-250, 1999.

ONISZCZUK, Z. Free transverse vibrations of an elastically connected rectangular simply supported double-plate complex system. **Journal of sound and vibration**, v. 236, n. 4, p. 595-608, 2000.

ONISZCZUK, Z. Forced transverse vibrations of an elastically connected complex rectangular simply supported double-plate system. **Journal of sound and vibration**, v. 270, n. 4-5, p. 997-1011, 2004.

PASTERNAK, N. L. **New method for calculation of foundation on the elastic basement**. Gosstroizdat, Moscow (in Russian), 1954.

PAIVA, João Batista. **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 1987.

PEREIRA, A.C.A; OLIVEIRA, D.B; MENDONCA, A.V. Analytical solutions for double-plate systems with Pasternak-type foundation in between. **Mechanics Research Communications**, v. 131, p. 1-7, 2023.

PILTNER, R.; TAYLOR, R. L. The solution of plate bending problems with the aid of a boundary element algorithm based on singular complex functions. **Boundary Elements**, v. 12, p. 437-445, 1990.

RASHED, Youssef F.; ALIABADI, M. H.; BREBBIA, C. A. The boundary element method for thick plates on a Winkler foundation. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 41, n. 8, p. 1435-1462, 1998.

RASHED, Y. F.; ALIABADI, M. H.; BREBBIA, C. A. A boundary element formulation for a Reissner plate on a Pasternak foundation. **Computers & structures**, v. 70, n. 5, p. 515-532, 1999.

REISSNER, Eric. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. 1945.

RIBEIRO, G. O. **Sobre a formulação do método dos elementos de contorno para a flexão de placas usando as hipóteses de Reissner**. Tese(Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 1992.

RIZZO, Frank J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of applied mathematics**, v. 25, n. 1, p. 83-95, 1967.

RICCARDELLA, Peter Charles. **An implementation of the boundary-integral technique for planar problems of elasticity and elasto-plasticity**. Carnegie Mellon University, 1973.

RU, C. Q. Column buckling of multiwalled carbon nanotubes with interlayer radial displacements. **Physical Review B**, v. 62, n. 24, p. 16962, 2000.

SHORE, Charles P. **Flutter analysis of two parallel elastically coupled flat plates**. 1975.

SOUZA, M.M. **Formulação do método dos elementos de contorno para placas delgadas apoiadas em base elásticas de Kerr**. Tese(Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPB, 2019.

STOJANOVIĆ, Vladimir; KOZIĆ, Predrag; RISTIĆ, Marko. Vibrations and stability analysis of multiple rectangular plates coupled with elastic layers based on different plate theories. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 92, p. 233-244, 2015.

STERN, Morris. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. **International journal of solids and structures**, v. 15, n. 10, p. 769-782, 1979.

SHUKLA, S.K.; GUPTA, A.; SIVAKUGAN, N. Analysis of Circular Elastic Plate Resting on Pasternak Foundation by Strain Energy Approach. **Geotech Geol Eng**, v.29, p.613–618, 2011

SWAMIDAS, A. S. J.; KUNUKKASSERIL, V. X. Free vibration of elastically connected circular plate systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 39, n. 2, p. 229-235, 1975.

SWAMIDAS, A. S. J.; KUNUKKASSERIL, V. X. Vibration of circular double-plate systems. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 63, n. 6, p. 1832-1840, 1978.

WEEËN, F. Vander. Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 18, n. 1, p. 1-10, 1982.

WANG, C. M.; REDDY, J. N.; LEE, K. H. (Ed.). **Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions**. Elsevier, 2000.

WU, Benjamin C.; ALTIERO, Nicholas J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. **Computers & Structures**, v. 10, n. 4, p. 703-707, 1979.

APÊNDICE A

DERIVADAS DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

As derivadas das soluções fundamentais de deslocamento são:

$$w_{,n}^* = r_{,n} \frac{dw}{dr}$$

$$w_{,m}^* = -r_{,m} \frac{dw}{dr}$$

$$v_{,n}^* = r_{,n} \frac{dv}{dr}$$

$$v_{,m}^* = -r_{,m} \frac{dv}{dr} \quad (\text{A.1})$$

$$w_{,nm}^* = - \left[(m_i n_i - r_{,n} r_{,m}) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + r_{,n} r_{,m} \frac{d^2 w}{dr^2} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$v_{,nm}^* = - \left[(m_i n_i - r_{,n} r_{,m}) \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + r_{,n} r_{,m} \frac{d^2 v}{dr^2} \right] \quad (\text{A.3})$$

Os esforços dos momentos volventes quando derivados no ponto fonte ficam:

$$\begin{aligned} M_{ns,m}^{1*} = D_1(1 - \nu_1) & \left\{ [r_{,n}(m_i s_i - r_{,m} r_{,s}) \right. \\ & + r_{,s}(m_i n_i - r_{,m} r_{,n})] \frac{1}{r} \left[\frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{1*}}{dr} \right] \\ & \left. + r_{,m} r_{,n} r_{,s} \left[\frac{d^3 w^{1*}}{dr^3} + \frac{1}{r^2} \frac{dw^{1*}}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} \right] \right\} \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{ns,m}^{2*} = D_1(1 - \nu_1) & \left\{ [r_{,n}(m_i s_i - r_{,m} r_{,s}) \right. \\ & + r_{,s}(m_i n_i - r_{,m} r_{,n})] \frac{1}{r} \left[\frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{2*}}{dr} \right] \\ & \left. + r_{,m} r_{,n} r_{,s} \left[\frac{d^3 w^{2*}}{dr^3} + \frac{1}{r^2} \frac{dw^{2*}}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} \right] \right\} \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

$$T_{ns,m}^{1*} = D_2(1 - \nu_2) \left\{ [r_n(m_i s_i - r_m r_s) + r_s(m_i n_i - r_m r_n)] \frac{1}{r} \left[\frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv^{1*}}{dr} \right] \right. \\ \left. + r_m r_n r_s \left[\frac{d^3 v^{1*}}{dr^3} + \frac{1}{r^2} \frac{dv^{1*}}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} \right] \right\} \quad (A.6)$$

$$T_{ns,m}^{2*} = D_2(1 - \nu_2) \left\{ [r_n(m_i s_i - r_m r_s) + r_s(m_i n_i - r_m r_n)] \frac{1}{r} \left[\frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv^{2*}}{dr} \right] \right. \\ \left. + r_m r_n r_s \left[\frac{d^3 v^{2*}}{dr^3} + \frac{1}{r^2} \frac{dv^{2*}}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} \right] \right\} \quad (A.7)$$

As derivadas dos esforços dos momentos de flexão no ponto fonte:

$$M_{n,m}^{1*} = D_1 \left\{ \frac{d^3 w^{1*}}{dr^3} r_m [v_1 + (1 - \nu_1)(r_n)^2] + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} [(1 - \nu_1)[2m_i n_i r_n - r_m (2(r_n)^2 - (r_s)^2)] + v_1 r_m] \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{1*}}{dr} [3(1 - \nu_1)r_m (r_s)^2 + v_1 r_m - 2(1 - \nu_1)m_i s_i r_s] \right\} \quad (A.8)$$

$$M_{n,m}^{2*} = D_1 \left\{ \frac{d^3 w^{2*}}{dr^3} r_m [v_1 + (1 - \nu_1)(r_n)^2] + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} [(1 - \nu_1)[2m_i n_i r_n - r_m (2(r_n)^2 - (r_s)^2)] + v_1 r_m] \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{2*}}{dr} [3(1 - \nu_1)r_m (r_s)^2 + v_1 r_m - 2(1 - \nu_1)m_i s_i r_s] \right\} \quad (A.9)$$

$$T_{n,m}^{1*} = D_2 \left\{ \frac{d^3 v^{1*}}{dr^3} r_m [v_2 + (1 - \nu_2)(r_n)^2] + \frac{1}{r} \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} [(1 - \nu_2)[2m_i n_i r_n - r_m (2(r_n)^2 - (r_s)^2)] + v_2 r_m] \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \frac{dv^{1*}}{dr} [3(1 - \nu_2)r_m (r_s)^2 + v_2 r_m - 2(1 - \nu_2)m_i s_i r_s] \right\} \quad (A.10)$$

$$T_{n,m}^{2*} = D_2 \left\{ \frac{d^3 v^{2*}}{dr^3} r_m [v_2 + (1 - \nu_2)(r_n)^2] + \frac{1}{r} \frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} [(1 - \nu_2)[2m_i n_i r_n - r_m (2(r_n)^2 - (r_s)^2)] + v_2 r_m] \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \frac{dv^{2*}}{dr} [3(1 - \nu_2)r_m (r_s)^2 + v_2 r_m - 2(1 - \nu_2)m_i s_i r_s] \right\} \quad (A.11)$$

As cortantes equivalentes de Kirchhoff quando derivadas no ponto fonte:

$$\begin{aligned}
V_{n,m}^{1*} = & D_1(1 - \nu_1)(m_k n_k - r_m r_n) \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{d^3 w^{1*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{r^2} \frac{dw^{1*}}{dr} \right) \left[(1 - \nu_1)^{-1} + (r_s)^2 \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{1*}}{dr} \right) \left[1 - 4(r_s)^2 \right] \Big\} \\
& + D_1(1 - \nu_1) r_n \left\{ r_m \left[\frac{d^4 w^{1*}}{dr^4} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^3 w^{1*}}{dr^3} - \frac{2}{r} \frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} + \frac{2}{r^2} \frac{dw^{1*}}{dr} \right) \right] \left[(r_s)^2 \right. \right. \\
& + (1 - \nu_1)^{-1} \Big] + \frac{2}{r} \left(\frac{d^3 w^{1*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{1*}}{dr} \right) r_s [m_k s_k - r_s r_m] \Big\} \\
& + \frac{D_1(1 - \nu_1)}{R} \left[r_m \frac{d^3 w^{1*}}{dr^3} (2r_s^2 - 1) + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{1*}}{dr} \right) (4m_k s_k r_s - 6r_m r_s^2 + r_m) \right] \\
& + K_p \left[\left(\frac{dw^{1*}}{dr} - \frac{dv^{1*}}{dr} \right) \frac{m_i n_i - r_m r_n}{r} + \left(\frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} \right) r_m r_n \right] \quad (A.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{n,m}^{2*} = & D_1(1 - \nu_1)(m_k n_k - r_m r_n) \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{d^3 w^{2*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{r^2} \frac{dw^{2*}}{dr} \right) \left[(1 - \nu_1)^{-1} + (r_s)^2 \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{2*}}{dr} \right) \left[1 - 4(r_s)^2 \right] \Big\} \\
& + D_1(1 - \nu_1) r_n \left\{ r_m \left[\frac{d^4 w^{2*}}{dr^4} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^3 w^{2*}}{dr^3} - \frac{2}{r} \frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} + \frac{2}{r^2} \frac{dw^{2*}}{dr} \right) \right] \left[(r_s)^2 \right. \right. \\
& + (1 - \nu_1)^{-1} \Big] + \frac{2}{r} \left(\frac{d^3 w^{2*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{2*}}{dr} \right) r_s [m_k s_k - r_s r_m] \Big\} \\
& + \frac{D_1(1 - \nu_1)}{R} \left[r_m \frac{d^3 w^{2*}}{dr^3} (2r_s^2 - 1) + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{2*}}{dr} \right) (4m_k s_k r_s - 6r_m r_s^2 + r_m) \right] \\
& + K_p \left[\left(\frac{dw^{2*}}{dr} - \frac{dv^{2*}}{dr} \right) \frac{m_i n_i - r_m r_n}{r} + \left(\frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} \right) r_m r_n \right] \quad (A.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{n,m}^{1*} = & D_2(1 - \nu_2)(m_k n_k - r_m r_n) \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{d^3 v^{1*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{r^2} \frac{dv^{1*}}{dr} \right) \left[(1 - \nu_1)^{-1} + (r_s)^2 \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv^{1*}}{dr} \right) \left[1 - 4(r_s)^2 \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +D_2(1-v_2)r_n \left\{ r_m \left[\frac{d^4 v^{1*}}{dr^4} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^3 v^{1*}}{dr^3} - \frac{2}{r} \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} + \frac{2}{r^2} \frac{dv^{1*}}{dr} \right) \right] [(r_s)^2 \right. \\
& + (1-v_2)^{-1}] + \frac{2}{r} \left(\frac{d^3 v^{1*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dv^{1*}}{dr} \right) r_s [m_k s_k - r_s r_m] \Big\} \\
& + \frac{D_2(1-v_2)}{R} \left[r_m \frac{d^3 v^{1*}}{dr^3} (2r_s^2 - 1) + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv^{1*}}{dr} \right) (4m_k s_k r_s - 6r_m r_s^2 + r_m) \right] \\
& - K_p \left[\left(\frac{dw^{1*}}{dr} - \frac{dv^{1*}}{dr} \right) \frac{m_i n_i - r_m r_m}{r} + \left(\frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} \right) r_m r_m \right] \quad (A.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{n,m}^{2*} = & D_2(1-v_2)(m_k n_k - r_m r_n) \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{d^3 v^{2*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{r^2} \frac{dv^{2*}}{dr} \right) [(1-v_1)^{-1} + (r_s)^2] + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv^{2*}}{dr} \right) [1 - 4(r_s)^2] \right\} \\
& + D_2(1-v_2)r_n \left\{ r_m \left[\frac{d^4 v^{2*}}{dr^4} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^3 v^{2*}}{dr^3} - \frac{2}{r} \frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} + \frac{2}{r^2} \frac{dv^{2*}}{dr} \right) \right] [(r_s)^2 \right. \\
& + (1-v_2)^{-1}] + \frac{2}{r} \left(\frac{d^3 v^{2*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dv^{2*}}{dr} \right) r_s [m_k s_k - r_s r_m] \Big\} \\
& + \frac{D_2(1-v_2)}{R} \left[r_m \frac{d^3 v^{2*}}{dr^3} (2r_s^2 - 1) + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv^{2*}}{dr} \right) (4m_k s_k r_s - 6r_m r_s^2 + r_m) \right] \\
& + K_p \left[\left(\frac{dw^{2*}}{dr} - \frac{dv^{2*}}{dr} \right) \frac{m_i n_i - r_m r_m}{r} + \left(\frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} \right) r_m r_m \right] \quad (A.15)
\end{aligned}$$

onde: $r_n = r_k n_k$, $r_m = r_k m_k$, $r_s = r_k s_k$ e R é o raio da curvatura do contorno.

As segundas derivadas dos deslocamentos fundamentais podem ser escritas como:

$$w_{,mt}^{k*} = r_t r_m w_{1r} \quad (A.16)$$

$$v_{,mt}^{k*} = r_t r_m v_{1r} \quad (A.17)$$

$$\varphi_{,mt}^{k*} = m_j n_j r_t \frac{w_{1r}}{r} + r_n r_m r_t w_{3r} \quad (A.18)$$

$$\theta_{,mt}^{k*} = m_j n_j r_t \frac{v_{1r}}{r} + r_n r_m r_t v_{3r} \quad (A.19)$$

As expressões das curvaturas, por envolver regra da cadeia, tornam as expressões bastante extensas.

A fim de facilitar a leitura, sejam assumidas as seguintes relações:

$$\alpha_1 = D(1 - \nu) \quad (\text{A.20})$$

$$\alpha_5 = \nu - (1 - \nu)(r_{,s})^2 \quad (\text{A.21})$$

$$\alpha_7 = \nu - (1 - \nu)(r_{,n})^2 \quad (\text{A.22})$$

$$\alpha_9 = 1 - 4(r_{,s})^2 \quad (\text{A.23})$$

$$\alpha_{10} = 1 - 2(r_{,s})^2 \quad (\text{A.24})$$

$$\alpha_3 = (r_{,s})^2 + \frac{1}{1 - \nu} \quad (\text{A.25})$$

$$\alpha_{7m} = r_{,n}(m_i n_i - r_{,m} r_{,n}) \quad (\text{A.26})$$

$$\alpha_{5m} = r_{,s}(m_i s_i - r_{,m} r_{,s}) \quad (\text{A.27})$$

$$\alpha_{6mt} = (m_i s_i - 2r_{,m} r_{,s})(t_i s_i - 2r_{,s} r_{,t}) - m_i t_i (r_{,s})^2 \quad (\text{A.28})$$

$$\alpha_{8mt} = (m_i n_i - 2r_{,m} r_{,n})(t_i n_i - 2r_{,n} r_{,t}) - m_i t_i (r_{,n})^2 \quad (\text{A.29})$$

$$\alpha_{8m} = r_{,n}(m_i n_i - r_{,m} r_{,n}) \quad (\text{A.30})$$

$$\alpha_{6m} = r_{,s}(m_i s_i - r_{,m} r_{,s}) \quad (\text{A.31})$$

$$\alpha_{8t} = r_{,n}(t_i n_i - r_{,t} r_{,n}) \quad (\text{A.32})$$

$$\alpha_{6t} = r_{,s}(t_i s_i - r_{,t} r_{,s}) \quad (\text{A.33})$$

As derivadas referentes à curvatura dos momentos de flexão são:

$$\begin{aligned} M_{n,mt}^{1*} = D_1 \Big\{ & \alpha_8 \left(m_i t_i \frac{1}{r} \frac{d^3 w^{1*}}{dr^3} + w_{1r} r_{,m} r_{,t} \right) + \alpha_6 \left(m_i t_i \frac{1}{r^2} \frac{w_{1r}}{dr^3} + w_{1r} r_{,m} r_{,t} \right) + \\ & + 2(1 - \nu_1) \frac{1}{r^2} \left(\alpha_{6mt} \frac{dw^{1*}}{r dr} + \alpha_{8mt} \frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} \right) \\ & + 2(1 - \nu_1) \frac{1}{r} \left[(\alpha_{8m} r_{,t} + \alpha_{8t} r_{,m}) + (\alpha_{6m} r_{,t} + \alpha_{6t} r_{,m}) \left(\frac{1}{r} \frac{w_{1r}}{dr} \right) \right] \Big\} \quad (\text{A.34}) \end{aligned}$$

$$M_{n,mt}^{2*} = D_1 \left\{ \alpha_8 \left(m_i t_i \frac{1}{r} \frac{d^3 w^{2*}}{dr^3} + w_{1r} r_{,m} r_{,t} \right) + \alpha_6 \left(m_i t_i \frac{1}{r^2} \frac{w_{1r}}{dr^3} + w_{1r} r_{,m} r_{,t} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +2(1 - \nu_1) \frac{1}{r^2} \left(\alpha_{6mt} \frac{dw^{2*}}{rdr} + \alpha_{8mt} \frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} \right) \\
& +2(1 - \nu_1) \frac{1}{r} \left[(\alpha_{8m} r_{,t} + \alpha_{8t} r_{,m}) + (\alpha_{6m} r_{,t} + \alpha_{6t} r_{,m}) \left(\frac{1}{r} \frac{w_{1r}}{dr} \right) \right] \Big\} \quad (A.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{n,mt}^{1*} = D_2 \Big\{ & \alpha_8 \left(m_i t_i \frac{1}{r} \frac{d^3 v^{1*}}{dr^3} + v_{1r} r_{,m} r_{,t} \right) + \alpha_6 \left(m_i t_i \frac{1}{r^2} \frac{v_{1r}}{dr^3} + v_{1r} r_{,m} r_{,t} \right) + \\
& +2(1 - \nu_2) \frac{1}{r^2} \left(\alpha_{6mt} \frac{dv^{1*}}{rdr} + \alpha_{8mt} \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} \right) \\
& +2(1 - \nu_2) \frac{1}{r} \left[(\alpha_{8m} r_{,t} + \alpha_{8t} r_{,m}) + (\alpha_{6m} r_{,t} + \alpha_{6t} r_{,m}) \left(\frac{1}{r} \frac{v_{1r}}{dr} \right) \right] \Big\} \quad (A.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{n,mt}^{2*} = D_2 \Big\{ & \alpha_8 \left(m_i t_i \frac{1}{r} \frac{d^3 v^{1*}}{dr^3} + v_{1r} r_{,m} r_{,t} \right) + \alpha_6 \left(m_i t_i \frac{1}{r^2} \frac{v_{1r}}{dr^3} + v_{1r} r_{,m} r_{,t} \right) + \\
& +2(1 - \nu_2) \frac{1}{r^2} \left(\alpha_{6mt} \frac{dv^{2*}}{rdr} + \alpha_{8mt} \frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} \right) \\
& +2(1 - \nu_2) \frac{1}{r} \left[(\alpha_{8m} r_{,t} + \alpha_{8t} r_{,m}) + (\alpha_{6m} r_{,t} + \alpha_{6t} r_{,m}) \left(\frac{1}{r} \frac{v_{1r}}{dr} \right) \right] \Big\} \quad (A.37)
\end{aligned}$$

De forma reduzida, as derivadas referentes à curvatura das cortantes e das reações de canto são:

$$V_{n,mt}^{k*} = f_9 + f_{10} + f_{11} + f_{12} + f_{17} \quad (A.38)$$

$$Q_{n,mt}^{k*} = f_{13} + f_{14} + f_{15} + f_{16} - f_{18} \quad (A.39)$$

$$R_{c,mt}^{k*} = M_{ns,mt}^{-*k} - M_{ns,mt}^{+*k} \quad (A.40)$$

$$r_{c,mt}^{k*} = T_{ns,mt}^{-*k} - T_{ns,mt}^{+*k} \quad (A.41)$$

onde:

$$f_9 = -\alpha_1 m_j n_j \frac{1}{r} \left\{ 2\alpha_{6t} \frac{w_{3r}}{r} + r_{,t} [\alpha_3 w_{2r} + (\alpha_3 + \alpha_9) w_{4r}] \right\} \quad (A.42)$$

$$f_{10} = -\alpha_1 \left\{ \frac{1}{r} (m_j t_j r_{,n} + n_j t_j r_{,m} - 2r_{,m} r_{,n} r_{,t}) [\alpha_3 w_{2r} + (\alpha_3 + \alpha_9) w_{4r}] + \right. \\ \left. + \frac{2}{r} \alpha_{6t} r_{,n} r_{,m} (w_{2r} - 3w_{4r}) + r_{,n} r_{,m} r_{,t} \left[\alpha_3 \frac{d}{dr} (w_{2r}) + (\alpha_3 + \alpha_9) \frac{d}{dr} w_{4r} \right] \right\} \quad (\text{A.43})$$

$$f_{11} = -\frac{2}{r} \alpha_1 \{ (t_i n_i \alpha_{3m} + \alpha_{6mt} r_{,n}) \frac{w_{3r}}{r} + \alpha_{6m} r_{,n} r_{,t} (w_{2r} - 3w_{4r}) \} \quad (\text{A.44})$$

$$f_{12} = -\frac{\alpha_1}{R} \left\{ \alpha_{10} m_j s_j \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (w_{1r}) + \alpha_{10} r_{,m} r_{,t} \left[\frac{d^2}{dr^2} (w_{1r}) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (w_{1r}) \right] \right. \\ \left. - 8\alpha_{6t} r_{,m} \frac{d}{dr} (w_{1r}) + \frac{4}{r^2} \alpha_{6mt} w_{1r} + 4\alpha_{6m} r_{,t} \frac{d}{dr} \left(\frac{w_{1r}}{r} \right) \right\} \quad (\text{A.45})$$

$$f_{17} = K_P \left\{ \frac{d^3}{dr^3} (w_{1r}) r_{,m} (r_{,t})^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\frac{d}{dr} (w_{1r})}{r^2} - \frac{\frac{d^3}{dr^3} (w_{1r})}{r} \right] \left[3r_{,n} (r_{,m})^2 - 2m_j n_j r_{,m} - r_{,n} \right] \right\} \quad (\text{A.46})$$

$$f_{13} = -\alpha_2 m_j n_j \frac{1}{r} \left\{ 2\alpha_{6t} \frac{v_{3r}}{r} + r_{,t} [\alpha_4 v_{2r} + (\alpha_4 + \alpha_9) v_{4r}] \right\} \quad (\text{A.47})$$

$$f_{14} = -\alpha_2 \left\{ \frac{1}{r} (m_j t_j r_{,n} + n_j t_j r_{,m} - 2r_{,m} r_{,n} r_{,t}) [\alpha_4 v_{2r} + (\alpha_4 + \alpha_9) v_{4r}] + \right. \\ \left. + \frac{2}{r} \alpha_{6t} r_{,n} r_{,m} (v_{2r} - 3v_{4r}) + r_{,n} r_{,m} r_{,t} \left[\alpha_4 \frac{d}{dr} (v_{2r}) + (\alpha_4 + \alpha_9) \frac{d}{dr} v_{4r} \right] \right\} \quad (\text{A.48})$$

$$f_{15} = -\frac{2}{r} \alpha_2 \left\{ (t_i n_i \alpha_{6m} + \alpha_{6mt} r_{,n}) \frac{v_{3r}}{r} + \alpha_{6m} r_{,n} r_{,t} (v_{2r} - 3v_{4r}) \right\} \quad (\text{A.49})$$

$$f_{16} = -\frac{\alpha_2}{R} \left\{ \alpha_{10} m_j s_j \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (v_{1r}) + \alpha_{10} r_{,m} r_{,t} \left[\frac{d^2}{dr^2} (v_{1r}) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (v_{1r}) \right] \right. \\ \left. - 8\alpha_{6t} r_{,m} \frac{d}{dr} (v_{1r}) + \frac{4}{r^2} \alpha_{6mt} v_{1r} + 4\alpha_{6m} r_{,t} \frac{d}{dr} \left(\frac{v_{1r}}{r} \right) \right\} \quad (\text{A.50})$$

$$f_{18} = K_P \left\{ \frac{d^3}{dr^3} (v_{1r}) r_{,m} (r_{,t})^2 + \right.$$

$$+ \left[\frac{\frac{d}{dr}(v_{1r})}{r^2} - \frac{\frac{d^3}{dr^3}(v_{1r})}{r} \right] \left[3r_n(r_m)^2 - 2m_j n_j r_m - r_n \right] \Bigg\} \quad (\text{A.51})$$

$$\alpha_{8t} = r_n(t_j n_j - r_{,t} r_{,n}) \quad (\text{A.52})$$

$$\alpha_{6t} = r_s(t_j s_j - r_{,t} r_{,s}) \quad (\text{A.53})$$

$$\alpha_{6mt} = (m_i s_i - 2r_{,m} r_{,s})(t_j s_j - 2r_{,m} r_{,s}) - m_i t_i r_{,s}^2 \quad (\text{A.54})$$

$$\alpha_{8mt} = r_n(m_i n_i - 2r_{,m} r_{,n})(t_j n_j - 2r_{,m} r_{,t}) - m_i t_i r_{,n}^2 \quad (\text{A.55})$$

APÊNDICE B

SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA CASO DE PLACAS DUPLAS RETANGULARES - NAVIER

Nesta seção são deduzidas soluções analíticas para placas duplas retangulares submetidas a alguns tipos de carregamentos utilizando os métodos de Navier e de Levy.

B.1 Método de Navier

Esta técnica é geralmente aplicada para placas retangulares simplesmente apoiadas, em que os deslocamentos de interesse são expandidos em series duplas. No caso de placas duplas elasticamente conectadas, os deslocamentos da placa superior e inferior podem ser escritos como:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \text{sen}(X_m x) \text{sen}(X_n y) \quad (\text{B.1})$$

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \text{sen}(X_m x) \text{sen}(X_n y) \quad (\text{B.2})$$

onde $X_m = \frac{m\pi}{a}$, $X_n = \frac{n\pi}{b}$ e (a, b) são as dimensões da placa.

Para o caso de um carregamento aplicado na placa superior, esse também pode ser expandido em serie:

$$g_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \text{sen}(X_m x) \text{sen}(X_n y) \quad (\text{B.3})$$

Substituindo-se (B.1), (B.2), (B.3) na equação governante em (3.10), resulta em

$$\begin{bmatrix} M + N & -N \\ -N & \frac{D_2}{D_1} M + N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

onde:

$$M = D_1 (X_m^4 + 2X_m^2 X_n^2 + X_n^4) \quad (\text{B.5})$$

$$N = K_w - K_p (X_m^2 + X_n^2) \quad (\text{B.6})$$

Resolvendo o sistema (B.4) tem-se:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{D_2}{D_1} M + N \right] \text{sen}(X_m x) \text{sen}(X_n y) F_{mn}}{\frac{D_2}{D_1} M^2 - N^2} \quad (\text{B.7})$$

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[N] \text{sen}(X_m x) \text{sen}(X_n y) F_{mn}}{\frac{D_2}{D_1} M^2 - N^2} \quad (\text{B.8})$$

Já as rotações em relação a x das placas superior e inferior podem ser encontradas derivando-se (B.7) e (B.8), resultando em:

$$\frac{dw(x, y)}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_m \left[\frac{D_2}{D_1} M + N \right] \cos(X_m x) \text{sen}(X_n y) F_{mn}}{\frac{D_2}{D_1} M^2 - N^2} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{dv(x, y)}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_m [N] \cos(X_m x) \text{sen}(X_n y) F_{mn}}{\frac{D_2}{D_1} M^2 - N^2} \quad (\text{B.10})$$

O coeficiente F_{mn} pode ser determinado como:

$$F_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a g_1(x, y) \text{sen}(X_m x) \text{sen}(X_n y) dx dy \quad (\text{B.11})$$

De acordo com $g_1(x, y)$, tem-se:

a) Carga constante $g_1(x, y) = g$

$$F_{mn} = \frac{16}{\pi^2 mn} \text{sen}^2\left(\frac{m\pi}{2}\right) \text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{B.12})$$

b) Carga concentrada, $g_1(x, y) = P\delta(x, \varepsilon)\delta(y, \eta)$, aplicada nas coordenadas (ε, η) de intensidade P ;

$$F_{mn} = \frac{4P}{ab} \text{sen}(X_m \varepsilon) \text{sen}(X_n \eta) \quad (\text{B.13})$$

c) Carga constante em linha ao longo de y e na cota ε em x , $g_1(x, y) = \delta(x, \varepsilon)g$,

$$F_{mn} = \frac{2g}{a} \sin(X_m \varepsilon) \quad (\text{B.14})$$

onde $X_m = \frac{m\pi}{a}$ and $X_n = \frac{n\pi}{b}$, sendo a e b as dimensões da placa, e F_{mn} um coeficiente dependente do tipo de carga. Para um carregamento linear distribuído $g_1(x) = g_1(0) + x \Delta g/a$ atuando na placa superior, o coeficiente de carga é:

$$F_{mn} = \frac{16(g_0 + \Delta g)}{\pi^2 mn} \sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{8\Delta g}{\pi^2 mn} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{B.15})$$

onde $\Delta g = g_1(a) - g_1(0)$.

Para uma carga pontual aplicada na placa superior nas coordenadas (ε, η) , o coeficiente de carga é:

$$F_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin(X_m \varepsilon) \sin(X_n \eta) \quad (\text{B.16})$$

As curvaturas necessárias para obtenção dos momentos fletores, que futuramente poderão ser comparados com o MEC, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} X_n^2 \frac{[M + N] \sin(X_m x) \sin(X_n y)}{\frac{D_2}{D_1} M^2 - N^2} \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} X_m^2 \frac{[M + N] \sin(X_m x) \sin(X_n y)}{\frac{D_2}{D_1} M^2 - N^2} \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} v(x, y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} X_n^2 \frac{N \sin(X_m x) \sin(X_n y)}{\frac{D_2}{D_1} M^2 - N^2} \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} X_m^2 \frac{N \sin(X_m x) \sin(X_n y)}{\frac{D_2}{D_1} M^2 - N^2} \quad (\text{B.20})$$

APÊNDICE C

SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA CASO DE PLACAS DUPLAS RETANGULARES - LEVY

Nesta seção são deduzidas soluções analíticas para placas duplas retangulares submetidas a alguns tipos de carregamentos utilizando os métodos de Levy.

C. Formulação

Em contraste com o método Navier, no qual as soluções analíticas finais são derivadas em uma única etapa, as soluções analíticas baseadas no método Levy requerem que equações diferenciais parciais acopladas, Eq. (3.11), a serem transformadas em equações diferenciais ordinárias acopladas antes que as soluções finais sejam determinadas.

C.1 Soluções homogêneas e particulares

Considere sistemas retangulares de placas duplas tendo dois lados opostos simplesmente apoiados nas bordas $x = 0$ e $x = a$, e outras condições de contorno ao longo dos lados restantes. Além disso, assume-se que as cargas superiores e inferiores são continuamente distribuídas na direção y . Sob estas condições, soluções analíticas do problema podem ser derivadas usando o método de Levy, representando tanto os deslocamentos quanto o carregamento como séries senoidais independentes, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m(y) \sin\left(\sqrt{\hat{z}_m} \frac{x}{a}\right) \\ v(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m(y) \sin\left(\sqrt{\hat{z}_m} \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) \sin\left(\sqrt{\hat{z}_m} \frac{x}{a}\right) \\ g_2(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} G_m(y) \sin\left(\sqrt{\hat{z}_m} \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \quad (C.2)$$

onde $\hat{z}_m = \pi^2 m^2$, $A_m(y)$, $B_m(y)$, $F_m(y)$, e $G_m(y)$ são coeficientes dependentes de y a serem determinados.

Se as Eqs. (C.1) e (C.2) são substituídos em equações diferenciais parciais acopladas Eq. (3.11), as equações governantes das placas duplas são reduzidas a

$$\begin{aligned}
L_1 A_m(y) + L_2 B_m(y) &= F_m(y)/D_2 \\
L_2 A_m(y) + L_3 B_m(y) &= G_m(y)/D_2
\end{aligned} \tag{C.3}$$

onde:

$$L_1 = \frac{f_1}{a^4} + \frac{f_2}{a^2} \frac{d^2}{dy^2} + f_3 \frac{d^4}{dy^4}$$

$$L_2 = -\frac{f_7}{a^4} + \frac{G_c}{a^2} \frac{d^2}{dy^2}$$

$$L_3 = \frac{f_4}{a^4} + \frac{f_5}{a^2} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^4}{dy^4}$$

$$f_1 = K_c + G_c \hat{z}_m + \alpha \hat{z}_m^2$$

$$f_2 = -(G_c + 2\alpha \hat{z}_m)$$

$$f_3 = \alpha$$

$$f_7 = K_c + G_c \hat{z}_m$$

$$f_4 = K_c + G_c \hat{z}_m + \hat{z}_m^2$$

$$f_5 = -\frac{1}{a^2} (G_c + 2\hat{z}_m)$$

Equações governantes na Eq. (C.3) são equações diferenciais ordinárias acopladas obtidas a partir da aplicação do método de Levy. Para contornar este problema, uma mudança conveniente de variáveis $A_m(y) = L_3 \psi(y)$ and $B_m(y) = -L_2 \psi(y)$ é usada em formas homogêneas da Eq. (15) para desacoplar as equações governantes, resultando em:

$$\left\{ \alpha \frac{d^8}{dy^8} - \frac{f_8}{a^2} \frac{d^6}{dy^6} + \frac{f_9}{a^4} \frac{d^4}{dy^4} - \frac{f_{10}}{a^6} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{f_{11}}{a^8} \right\} \psi(y) = 0 \tag{C.4}$$

onde:

$$f_8 = (1 + \alpha)G_c + 4\alpha \hat{z}_m$$

$$f_9 = (1 + \alpha)(K_c + 3\hat{z}_m G_c) + 6\alpha \hat{z}_m^2$$

$$f_{10} = 2(K_c + G_c \hat{z}_m)[2G_c + (1 + \alpha)\hat{z}_m] + \hat{z}_m^2 f_8$$

$$f_{11} = (K_c + G_c \hat{z}_m)\hat{z}_m^2 (1 + \alpha) + \alpha \hat{z}_m^4$$

Solução da Eq. (C.4) para $\psi(y)$ pode ser dividido em $\psi_s(y)$ simétrico e $\psi_u(y)$ assimétrico:

$$\psi(y) = \psi_s(y) + \psi_u(y), \quad (C.5)$$

onde:

$$\psi_s(y) = c_1 h_1(y) + c_2 h_2(y) + c_3 h_3(y) + c_4 h_4(y) \quad (C.6)$$

$$\psi_u(y) = c_5 h_5(y) + c_6 h_6(y) + c_7 h_7(y) + c_8 h_8(y)$$

Os coeficientes $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$, e c_8 na Eq. (C.6) são determinados de acordo com as condições de contorno. Além disso, as funções $h_i(y)$ dependem da natureza das raízes de um polinômio característico obtido pela substituição $\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} = p$ na Eq. (C.4) dado por:

$$p^4\alpha - p^3f_8/a^2 + p^2f_9/a^4 - pf_{10}/a^6 + f_{11}/a^8 = 0. \quad (C.7)$$

Formas simétricas e assimétricas de funções $A_{mh}(y)$ e B_{mh} em termos de $\psi(y)$ são

$$A_{mhs}(y) = L_3\psi_s(y) = c_1q_1(y) + c_2q_2(y) + c_3q_3(y) + c_4q_4(y) \quad (C.8)$$

$$A_{mhu}(y) = L_3\psi_u(y) = c_5q_5(y) + c_6q_6(y) + c_7q_7(y) + c_8q_8(y) \quad (C.9)$$

$$B_{mhs}(y) = L_2\psi_s(y) = c_1r_1(y) + c_2r_2(y) + c_3r_3(y) + c_4r_4(y) \quad (C.10)$$

$$B_{mhu}(y) = L_2\psi_u(y) = c_5r_5(y) + c_6r_6(y) + c_7r_7(y) + c_8r_8(y) \quad (C.11)$$

onde as funções $q_i(y)$ e $r_i(y)$ são combinações da função $h_i(y)$ e suas derivadas.

Soluções particulares de equações dadas na Eq. (C.3) dependem das funções F_{mn} e G_{mn} . Se F_{mn} e G_{mn} forem tratados como funções constantes ou lineares e $B_{mp}(y)$ e $A_{mp}(y)$ também forem considerados funções constantes ou lineares em relação ao eixo y , soluções específicas podem ser dadas como segue

$$B_{mp}(y) = \alpha^2 a^4 (f_7 F_m(y) + f_1 G_m(y)) / [D_1^2 (f_1 f_4 - f_7^2)], \quad (C.12)$$

$$A_{mp}(y) = \alpha^2 a^4 (f_4 F_m(y) + f_7 G_m(y)) / [D_1^2 (f_1 f_4 - f_7^2)]. \quad (C.13)$$

Os valores de F_{mn} e G_{mn} associados à expansão de série trigonométrica única são:

$$\begin{aligned}
F_m(y) &= \frac{2}{a} \int_0^a g_1(x, y) \sin(X_m x) dx \\
G_m(y) &= \frac{2}{a} \int_0^a g_2(x, y) \sin(X_m x) dx
\end{aligned} \tag{C.14}$$

onde formas explícitas de F_m para determinadas cargas $g_1(x, y)$ são apresentadas na Tabela C.1.

Tabela C.1- Coeficientes em expansão de série trigonométrica única para certas cargas

Tipo de carregamento	Uniforme	Hidrostático	y-direção da linha
$g_1(x, y)$	g_0	$x \Delta g/a$	$g_0 \delta(x - \varepsilon)$
F_m	$\frac{4g_0}{\pi m} \sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right)$	$\frac{4\Delta g}{\pi m} [2\sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right) - 1]$	$\frac{2g_0}{a} \sin(X_m \varepsilon)$

Para casos simétricos, os deslocamentos são dados pelas Eqs. (C.1), (C.2), (C.8), (C.10), (C.12) e (C.13), resultando em

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} [A_{mhs}(y) + A_{mp}(y)] \sin(X_m x) \\
v(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} [B_{mhs}(y) + B_{mp}(y)] \sin(X_m x)
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Se não ocorrerem simetrias simultâneas de condições de contorno e carregamento, os deslocamentos inferiores totais são obtidos pela superposição das Eqs. (C.8)-(C.11) e com a ajuda das Eqs. (C.1), (C.2), (C.12) e (C.13), resultando em

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_{mhs}(y) + A_{mhu}(y) + A_{mp}(y)] \sin(X_m x), \tag{C.16}$$

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [B_{mhs}(y) + B_{mhu}(y) + B_{mp}(y)] \sin(X_m x). \tag{C.17}$$

C.2 Raízes naturais e funções auxiliares

As formas explícitas de $h_i(y)$ dependem da natureza das raízes da Eq. (C.4), que na forma fatorada é:

$$\begin{aligned}
& (\hat{z}_m/a^2 - p)^2 \left\{ p^2 - \frac{1}{a^2} \left[G_c \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) + 2\hat{z}_m \right] p + \frac{1}{a^4} [\hat{z}_m^2 + \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) (K_c + \hat{z}_m G_c)] \right\} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{C.18}$$

onde as raízes são:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\hat{p}_1}{a^2} \\
z_2 &= \frac{\hat{p}_2}{a^2} \\
z_3 &= z_4 = \frac{\hat{z}_m}{a^2} \\
\hat{p}_1 &= \hat{z}_m + \frac{G_c}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \sqrt{\Delta_2} \\
\hat{p}_2 &= \hat{z}_m + \frac{G_c}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \sqrt{\Delta_2} \\
\Delta_2 &= (G_c)^2 - 4 \frac{K_c}{1 + \frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

C.2.1 Caso I- Duas raízes complexas conjugadas

O primeiro conjunto de funções $h_i(y)$, $q_i(y)$, e $r_i(y)$ associado a raízes duplas positivas é:

$$\begin{aligned}
h_1(y) &= \cosh(\sqrt{\hat{z}_m} \mu) \\
h_2(y) &= \sqrt{\hat{z}_m} \mu \sinh(\sqrt{\hat{z}_m} \mu) \\
h_3(y) &= \sinh(\sqrt{\hat{z}_m} \mu) \\
h_4(y) &= \sqrt{\hat{z}_m} \mu \cosh(\sqrt{\hat{z}_m} \mu) \\
q_1(y) &= T_1 h_1(y)/a^4 \\
q_2(y) &= [T_1 h_2(y) + 2\hat{z}_m T_2 h_1(y)]/a^4 \\
q_3(y) &= T_1 h_3(y)/a^4 \\
q_4(y) &= [T_1 h_4(y) + 2\hat{z}_m T_2 h_3(y)]/a^4 \\
r_1(y) &= T_3 h_1(y)/a^4 \\
r_2(y) &= [T_3 h_2(y) - 2\hat{z}_m G_c h_1(y)]/a^4 \\
r_3(y) &= T_3 h_3(y)/a^4 \\
r_4(y) &= [T_3 h_4(y) - 2\hat{z}_m h_3(y)]/a^4
\end{aligned} \tag{C.19}$$

onde:

$$\mu = \xi \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = b/a$$

$$\xi = y/(\frac{b}{2})$$

$$\sqrt{\hat{z}_m} \mu = y X m$$

$$T_1 = f_4 + \hat{z}_m f_5 + \hat{z}_m^2$$

$$T_2 = f_5 + 2\hat{z}_m$$

$$T_3 = f_7 - \hat{z}_m G_c$$

(C.20)

Se $\Delta_2 < 0$, o segundo conjunto de $h_i(y)$, $q_i(y)$, e $r_i(y)$ é

$$h_5(y) = \sin h(\lambda_1 \mu) \sin(\lambda_2 \mu)$$

$$h_6(y) = \cos h(\lambda_1 \mu) \cos(\lambda_2 \mu)$$

$$h_7(y) = \sin h(\lambda_1 \mu) \cos(\lambda_2 \mu)$$

$$h_8(y) = \cos h(\lambda_1 \mu) \sin(\lambda_2 \mu)$$

$$q_5(y) = (t_1 h_5(y) + t_2 h_6(y))/a^4$$

$$q_6(y) = (t_1 h_6(y) - t_2 h_5(y))/a^4$$

$$q_7(y) = (t_1 h_7(y) - t_2 h_8(y))/a^4$$

$$q_8(y) = (t_1 h_8(y) + t_2 h_7(y))/a^4$$

$$r_5(y) = (s_1 h_5(y) + s_2 h_6(y))/a^4$$

$$r_6(y) = (s_1 h_6(y) - s_2 h_5(y))/a^4$$

$$r_7(y) = (s_1 h_7(y) - s_2 h_8(y))/a^4$$

$$r_8(y) = (s_1 h_8(y) + s_2 h_7(y))/a^4$$

(C.21)

onde:

$$t_1 = f_4 + a_1 f_5 + b_3$$

$$t_2 = b_1 f_5 + a_3$$

$$s_1 = f_7 - a_1 G_c$$

$$s_2 = -b_1 G_c$$

$$a_1 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2$$

$$b_1 = 2\lambda_1\lambda_2$$

$$a_3 = -4\lambda_1\lambda_2^3 + 4\lambda_1^3\lambda_2$$

$$b_3 = \lambda_1^4 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4$$

$$\lambda_1 = Re(\sqrt{\hat{p}_1})$$

$$\lambda_2 = Im(\sqrt{\hat{p}_1})$$

C.2.2 Caso II- Duas raízes reais e distintas

O primeiro conjunto de funções $h_i(y)$, $q_i(y)$, e $r_i(y)$ é idêntico à Eq. (C.19). Se $\Delta_2 > 0$, duas raízes reais positivas distintas \hat{p}_1 e \hat{p}_2 são obtidas, de modo que o segundo conjunto de funções $h_i(y)$, $q_i(y)$, e $r_i(y)$ é:

$$h_5(y) = \cos h(\sqrt{\hat{p}_1} \mu),$$

$$h_6(y) = \cosh(\sqrt{\hat{p}_2} \mu)$$

$$h_7(y) = \sin h(\sqrt{\hat{p}_1} \mu)$$

$$h_8(y) = \sinh(\sqrt{\hat{p}_2} \mu)$$

$$q_5(y) = R_1 h_5(y)/a^4$$

$$q_6(y) = R_2 h_6(y)/a^4$$

$$q_7(y) = R_1 h_7(y)/a^4$$

$$q_8(y) = R_2 h_8(y)/a^4$$

$$r_5(y) = R_3 h_5(y)$$

$$r_6(y) = R_4 h_6(y)$$

$$r_7(y) = R_3 h_7(y)$$

$$r_8(y) = R_4 h_8(y)$$

(C.22)

onde:

$$R_1 = f_4 + \hat{p}_1 f_5 + \hat{p}_1^2$$

$$R_2 = f_4 + \hat{p}_2 f_5 + \hat{p}_2^2$$

$$R_3 = f_7 - \hat{p}_1 G_c$$

$$R_4 = f_7 - \hat{p}_2 G_c$$

$$\mu = \xi \frac{\lambda}{2}$$

(C.23)

C.2.3 Caso III- Duas raízes distintas e positivas

O primeiro conjunto de funções $h_i(y)$, $q_i(y)$, e $r_i(y)$ é idêntico à Eq. (C.19). Se $\Delta_2 = 0$, um segundo conjunto de raízes duplas $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \hat{z}_m + \frac{G_c}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$ é obtido, de modo que o segundo conjunto de funções $h_i(y)$, $q_i(y)$, e $r_i(y)$ são análogos à Eq.(C.20), exigindo apenas a substituição de \hat{z}_m por $p_1 a^2$ na Eq.(C.20). Vale ressaltar que embora matematicamente ocorram quatro raízes múltiplas quando $K_w = K_P = 0$, isso é fisicamente inviável, pois significa que não há interligação entre as placas superior e inferior.

APÊNDICE D

SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA CASO DE PLACAS DUPLAS CIRCULARES

As soluções analíticas do sistema duplo de placas circulares conectadas por camada de Pasternak sob carga axissimétrica podem ser obtidas utilizando uma combinação linear das funções r^2 , $\ln(r)$, $r^2 \ln(r)$ e as funções de Bessel. Para o sistema sujeito a uma carga concentrada e centralizada na placa superior, cujas raízes são reais e distintas, uma solução pode ser dada por:

$$w(r) = -\gamma \frac{PK_w}{2\pi} [K_w A_1 + A_2(r^2 - 4K_p) - A_4 K_w(4 \ln(r) + 4) + A_5 \alpha_1 K_0(r\sqrt{z_1}) - A_6 \alpha_2 K_0(r\sqrt{z_2}) - A_7 \alpha_3 I_0(r\sqrt{z_1}) - A_8 \alpha_4 I_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{r^2}{4} \ln(r) + \alpha_5 \ln(r) - \alpha_6 K_0(r\sqrt{z_1}) + \alpha_7 K_0(r\sqrt{z_2})] \quad (D.1)$$

$$v(r) = -\gamma \frac{PK_w}{2\pi} [K_w A_1 + A_2(r^2 - 4K_p) - A_4 K_w(4 \ln(r) + 4) + A_5 \alpha_8 K_0(r\sqrt{z_1}) - A_6 \alpha_9 K_0(r\sqrt{z_2}) - A_7 \alpha_{10} I_0(r\sqrt{z_1}) - A_8 \alpha_{11} I_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{r^2}{4} \ln(r) + \alpha_5 \ln(r) - \alpha_6 K_0(r\sqrt{z_1}) + \alpha_7 K_0(r\sqrt{z_2})] \quad (D.2)$$

onde:

$$\alpha_1 = [D_2 z_1^2 - K_p z_1] K_0(r\sqrt{z_1}) \quad (D.3)$$

$$\alpha_2 = [D_2 z_2^2 - K_p z_2] K_0(r\sqrt{z_2}) \quad (D.4)$$

$$\alpha_3 = [D_2 z_1^2 + K_w - K_p z_1] I_0(r\sqrt{z_1}) \quad (D.5)$$

$$\alpha_4 = [D_2 z_2^2 + K_w - K_p z_2] I_0(r\sqrt{z_2}) \quad (D.6)$$

$$\alpha_5 = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} \quad (D.7)$$

$$\alpha_6 = \frac{z_2}{z_1(z_1 - z_2)} \quad (D.8)$$

$$\alpha_7 = \frac{z_1}{z_2(z_1 - z_2)} \quad (D.9)$$

$$\alpha_8 = -K_P z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) \quad (D.10)$$

$$\alpha_9 = -K_P z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) \quad (D.11)$$

$$\alpha_{10} = [K_w - K_P z_1] I_0(r\sqrt{z_1}) \quad (D.12)$$

$$\alpha_{11} = [K_w - K_P z_2] I_0(r\sqrt{z_2}) \quad (D.13)$$

Os coeficientes A_i são obtidos com a ajuda das equações (D.1) e (D.2) e impondo as condições de contorno para os deslocamentos e momentos. Para um sistema simplesmente apoiado: $w(R) = v(R) = M_n(R) = T_n(R) = 0$, onde os momentos fletores são dados por $M_n(r) = -D_1(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{v_1}{r} \frac{dw}{dr})$ e $T_n(r) = -D_2(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{v_2}{r} \frac{dv}{dr})$. Já para um sistema engastado: $w(R) = \frac{dw}{dr}(R) = v(R) = \frac{dv}{dr}(R) = 0$.

Se o sistema de placas duplas engastadas estiver sob um carregamento distribuído uniforme g aplicado na placa superior, os deslocamentos podem ser escritos:

$$\begin{aligned} w(r) = & A_1 + A_2 r^2 + A_3 l n(r) - A_4 r^2 l n(r) + A_5 K_0(r\sqrt{z_1}) + A_6 K_0(r\sqrt{z_2}) \\ & + A_7 I_0(r\sqrt{z_1}) + A_8 I_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{g}{D_1 + D_2} \left(\frac{r^2}{64} + \frac{D_2}{K_w} \right) \end{aligned} \quad (D.14)$$

$$\begin{aligned} v(r) = & A_1 + A_2 r^2 + A_3 l n(r) - A_4 r^2 l n(r) + A_5 K_0(r\sqrt{z_1}) + A_6 K_0(r\sqrt{z_2}) \\ & + A_7 I_0(r\sqrt{z_1}) + A_8 I_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{g}{D_1 + D_2} \left(\frac{r^2}{64} \right) \end{aligned} \quad (D.15)$$