

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Estruturas robustas em classes de
operadores e a Desigualdade
multipolinomial de
Kahane–Salem–Zygmund

por

Lindinês Coleta da Silva

João Pessoa - PB

Junho de 2023

Estruturas robustas em classes de operadores e a Desigualdade multipolinomial de Kahane–Salem–Zygmund

por

Lindinês Coleta da Silva ¹

sob a orientação do

Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMat) da UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

João Pessoa - PB

Junho de 2023

¹Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586e Silva, Lindinês Coleta da.

Estruturas robustas em classes de operadores e a
desigualdade multipolinomial de Kahane-Salem-Zygmund /
Lindinês Coleta da Silva. - João Pessoa, 2023.
96 f. : il.

Orientação: Nacib Gurgel Albuquerque.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Lineabilidade. 3. Espaçabilidade.
4. Operadores somantes. 5. Espaços de sequências. 6.
Multipolinômios. 7. Desigualdade de
Kahane-Salem-Zygmund. I. Albuquerque, Nacib Gurgel. II.
Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMat) da UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Área de concentração: Análise

Data de aprovação: 20 de Junho de 2023

Comissão examinadora:


Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque

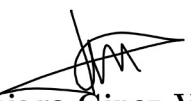
Universidade Federal da Paraíba – Orientador


Prof. Dr. Cleon S. Barroso

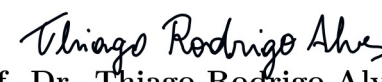
Universidade Federal do Ceará


Profa. Dra. Diana Marcela Serrano Rodríguez

Universidad Nacional de Colombia


Prof. Dr. Thiago Ginez Velanga Moreira

Universidade Federal de Rondônia


Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves

Universidade Federal do Amazonas

Prof. Dr. Vladimir Pestov

University of Ottawa



Documento assinado digitalmente

Vladimir Pestov

Data: 28/06/2023 10:44:52-0300

CPF: ***.231.711-**

Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

João Pessoa - PB

Junho de 2023

Agradecimentos

A Deus.

Aos meus pais, Josefa Rosileide e Genilson, por todos os ensinamentos, incentivos, dedicação e amor.

Ao meu irmão, por todo carinho, apoio e presença na vida dos meus pais.

Ao meu orientador, professor Nacib Albuquerque, pela orientação, pelas valiosas discussões e por todo apoio e compreensão nas tomadas de decisões profissionais e acadêmicas.

A minha amiga Janiely, pela incrível parceria na jornada entre mestrado e doutorado e por sua preciosa amizade.

Ao Kelvin, meu amor, por ser tão incrível.

Aos meus amigos da pós-graduação, pela amizade, pelas discussões ricas em aprendizados e pelos maravilhosos momentos de descontração.

Aos professores do DM/UFPB, por todos os ensinamentos.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Aos meus pais.

Resumo

Este trabalho traz resultados de investigações em duas linhas distintas de pesquisa: lineabilidade/espacabilidade em classes de operadores multilineares e versões multipolinomiais da Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund. Primeiramente, apresentamos as noções e propriedades elementares das teorias e tópicos centrais da tese, o que compõe o Capítulo 1. No Capítulo 2, fornecemos resultados nas recentes noções de lineabilidade/espacabilidade pontual e (α, β) -lineabilidade/espacabilidade, que são mais restritivas que a noção clássica, no contexto dos operadores multilineares somantes que assumem valores em espaços (quasi-) Banach de sequências. Em particular, provamos que a classe dos operadores multilineares que assumem valores em espaços ℓ_q ($0 < q \leq \infty$) que são absolutamente, mas não são múltiplos somantes, é pontualmente $\mathfrak{c}$ -espacável quando não é vazio. No Capítulo 3, expomos um critério de espacabilidade no âmbito geral dos multi-ideais de operadores que generaliza o apresentado por F. L. Hernández *et al.* e algumas aplicações. Por fim, reservamos ao Capítulo 4 a apresentação das versões multipolinomiais da Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund. Uma variante inicial de uma versão multilinear com expoentes ótimos é obtida e, a partir de certas restrições, invocamos outras versões multilineares e suas extensões multipolinomiais são fornecidas.

Palavras-chave: lineabilidade, espacabilidade, operadores somantes, espaços de sequências, multipolinômios, desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund.

Abstract

This work presents results in two distinct lines of research: lineability/spaceability and multipolynomial versions of Kahane-Salem-Zygmund inequalities. First, we present the basic notions and properties of the theories and central topics of the thesis, which form Chapter 1. In Chapter 2, we provide results on the contemporary notions of pointwise lineability/spaceability and (α, β) -lineability/spaceability, which are more restrictive than the classical notion in the context of multilinear summing operators taking values on (quasi-)Banach sequence spaces. In particular, we prove that the class of multilinear operators taking values on ℓ_q ($0 < q \leq \infty$) that are absolutely but not multiple summing is pointwise c -spaceable when non-empty. In Chapter 3, we expose a criterion of spaceability within the general setting of multi-ideal operators that generalizes the one presented by F. L. Hernández *et al.* and some applications. Finally, we reserve for Chapter 4 the presentation of the multipolynomial versions of the Kahane-Salem-Zygmund inequalities. An initial variant of a multilinear version with optimal exponents is obtained, and given certain restrictions, we invoke other multilinear versions, and their multipolynomial extensions are provided.

Keywords: lineability, spaceability, summing operators, sequence spaces, multipolynomial, Kahane-Salem-Zygmund inequality.

Sumário

Introdução	xvii
Lista de Símbolos	xxiii
I Estruturas robustas em classes de operadores	1
1 Preliminares	3
1.1 Aplicações multilineares	3
1.2 Espaços quasi-Banach: aspectos básicos	6
1.2.1 Os espaços ℓ_p para $0 < p < 1$	8
1.3 Operadores Somantes	10
1.4 Multi-ideais de operadores	15
1.5 Polinômios homogêneos e multipolinômios	18
2 Estruturas robustas presentes na classe dos operadores somantes	23
2.1 Operadores somantes e lineabilidade: um breve panorama histórico	24
2.2 Preliminares	26
2.3 Espaçabilidade de operadores multilineares somantes	30
2.3.1 Operadores não absolutamente somantes em espaços clássicos de sequências	35
2.4 Operadores absolutamente somantes e operadores Dunford-Pettis	35
2.5 Operadores somantes em famílias somáveis gerais de escalares	39
2.6 Comentários e problemas	41
3 Espaçabilidade em multi-ideais de operadores	43
3.1 Critério de espaçabilidade para multi-ideais de operadores	43

3.2	Aplicações	51
3.2.1	Operadores somantes	51
3.2.2	Operadores Dunford–Pettis	52
3.2.3	Índice de somabilidade	52
3.3	Comentários e problemas	53
II	Desigualdade multipolinomial de Kahane–Salem–Zygmund	55
4	Extensões multipolinomiais da Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund	57
4.1	Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund para multipolinômios	57
4.2	Variantes da Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund para multipolinômios	63
4.3	Cotas superiores	68
4.4	Comentários e problemas	69
	Referências	71

Introdução

Parte I: Lineabilidade de operadores multilineares somantes

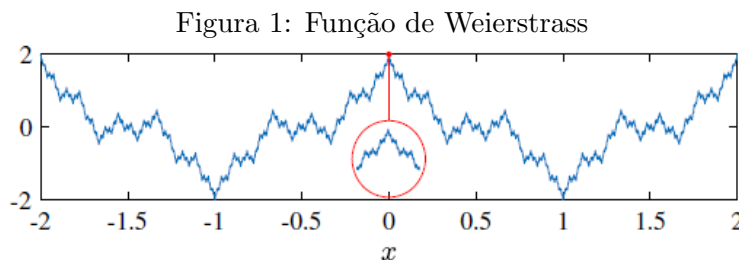
Lineabilidade é uma linha de pesquisa em Análise Funcional que busca pela linearidade na Matemática. A investigação em lineabilidade se caracteriza pela busca de espaços vetoriais em âmbitos matemáticos que, à primeira vista, não aparentam dispor de uma estrutura linear.

Foi uma surpresa para a comunidade acadêmica quando em 1872, durante uma apresentação para a Academia de Berlim, o matemático alemão K. Weierstrass mostrou um exemplo de uma função contínua em todo ponto, porém não diferenciável em qualquer um deles, rompendo com a intuição geral da época: que uma função contínua deve possuir derivadas em um conjunto considerável de pontos. O exemplo particular exibido e conhecido como “Monstro de Weierstrass” foi a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x),$$

onde $0 < a < 1$, b é qualquer inteiro ímpar e $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Embora a primeira publicação de um exemplo dessa natureza seja certamente devido a Weierstrass, em 1830 o matemático tcheco B. Bolzano já havia exibido uma função contínua não diferenciável em qualquer ponto (veja [67] para um estudo detalhado dessas citações). A partir da publicação de Weierstrass, outros exemplos surgiram, mas não anulando a dificuldade de se fornecer explicitamente funções desse tipo. Devido a isso, foi bem surpreendente quando em 1966 V. I. Gurariy [46] mostrou que o conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ e não diferenciáveis em qualquer ponto contém um subespaço vetorial de dimensão infinita, a menos do vetor nulo. Vale ressaltar que já em 1940 B. Levine e D. Milman [51] publicaram um resultado nessa direção, sobre a (não) existência de espaços vetoriais na classe das funções contínuas em $[0, 1]$ com variação

limitada. Mais precisamente eles provaram que o conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ com variação limitada não contém um subespaço fechado de dimensão infinita. E esses são, provavelmente, os primeiros trabalhos que se tem menção na literatura que trazem resultados, em terminologia atual, de *lineabilidade* e *espaçabilidade*.



Fonte: [45, FIG.1]

Mesmo que alguns trabalhos, de modo isolado, tenham sido obtidos no último terço do século passado, a pesquisa pela busca de espaços lineares em conjuntos aparentemente não prováveis da existência de linearidade, só começou, de fato, no início do século atual. Os termos *Lineabilidade* e *Espaçabilidade*, por exemplo, surgiram somente pela primeira vez em 2005 no profícuo artigo [16] de R. M. Aron, V. I. Gurariy e J. B. Seoane-Sepúlveda: para α um número cardinal, um subconjunto A de um espaço vetorial V é dito α -*lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço de V de dimensão α . Se V , em adição, é um espaço vetorial topológico, então A é dito α -*espaçável* se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço fechado de V de dimensão α .

A partir de então, outras variantes dessa noção surgiram. L. Bernal-González (2010) em [25] introduziu o conceito de conjunto *maximal lineável* e de *maximal denso-lineável*: um conjunto A de um espaço vetorial V é dito *maximal lineável* (respec. *maximal denso-lineável*) se contém, exceto pelo elemento nulo, um subespaço (respec. subespaço denso) com dimensão igual à dimensão de V . Outras noções derivadas, como *algebrabilidade*, α -*algebrabilidade* e α -*algebrabilidade forte* surgem quando trocamos a busca de espaços vetoriais por álgebras (veja, por exemplo, [17–19, 21]). A pesquisa em lineabilidade/espaçabilidade e nas noções variantes cresceu notoriamente desde o início do século atual, com resultados em diversas áreas da Matemática, como: Análise Real, Análise Complexa, Espaços de sequências, Teoria da Medida e Integração, Hiperciclicidade, Probabilidade, Topologia, entre outras. Na primeira parte deste trabalho apresentamos nossos resultados provenientes de investigações nessa linha de pesquisa.

Primeiramente, no Capítulo 1 trazemos as noções base dos principais temas tratados nos demais três capítulos da tese. No Capítulo 2, fornecemos resultados nas recentes

noções de *lineabilidade pontual* e (α, β) -*lineabilidade*, que são mais restritivas que a noção clássica, no contexto dos operadores multilineares somantes que assumem valores em espaços quasi-Banach de sequências. Pela desigualdade clássica de Bohnenblust–Hille e também pelo Teorema de Defant–Voigt é possível concluir

$$\Pi_{(r,1)}^{\text{ms}}({}^m E; \mathbb{K}) \subsetneq \mathcal{L}({}^m E; \mathbb{K}) = \Pi_{(r,1)}^{\text{as}}({}^m E; \mathbb{K})$$

para todo $1 \leq r < \frac{2m}{m+1}$. Isso nos diz que o conjunto $\Pi_{(r,1)}^{\text{as}}({}^m E; \mathbb{K}) \setminus \Pi_{(r,1)}^{\text{ms}}({}^m E; \mathbb{K})$ dos operadores multilineares absolutamente $(r, 1)$ -somantes que não são múltiplos $(r, 1)$ -somantes é não vazio, e a busca de espaços vetoriais fechados nesse contexto surge naturalmente. Questionamentos como esse são respondidos como caso particular do resultado principal. Além disso, como interessante aplicação, mostramos que o conjunto da classe dos operadores multilineares absolutamente somantes que assumem valores em espaços ℓ_q e que não são múltiplos somantes é maximal espaçável, caso seja não vazio. Mais especificamente: para $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach, multi-parâmetros $(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \in [1, \infty)^m$ e $q \in (0, \infty]$,

$$\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\text{as}}(E_1, \dots, E_m; \ell_q) \setminus \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\text{ms}}(E_1, \dots, E_m; \ell_q)$$

é pontualmente $\mathfrak{c}$ -espaçável quando não é vazio.

No Capítulo 3, continuamos a busca por estruturas topológicas robustas, agora no ambiente geral dos ideais de operadores multilineares, no sentido de Pietsch [63]. Nossos estudos tiveram como motivação os resultados obtidos por F. L. Hernández, C. Ruiz e V. M. Sánchez em [47] que provam a espaçabilidade do conjunto $\mathcal{I}_1(E; F) \setminus \mathcal{I}_2(E; F)$, onde $\mathcal{I}_1(E; F)$ e $\mathcal{I}_2(E; F)$ são ideais de operadores lineares limitados definidos entre espaços de Banach com certas propriedades. O resultado principal do capítulo é uma generalização desse último resultado no contexto dos operadores multilineares em ambientes de espaços quasi-Banach.

Parte II: Versões multipolinomiais das Desigualdades de Kahane–Salem–Zygmund

A investigação de formas multilineares $A_{m,n} : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \rightarrow \mathbb{K}$ unimodulares (ou seja, de coeficientes $+1$ ou -1 , por vezes números complexos de módulo 1) com normas relativamente pequenas por meio de métodos probabilísticos norteiam a pesquisa das chamadas Desigualdades de Kahane–Salem–Zygmund (desigualdades KSZ para abreviar). Recente-

mente, uma gama de generalizações importantes dessas desigualdades foram desenvolvidas, por exemplo, em [37, 55, 61]. A segunda parte desta tese é dedicada à apresentação de versões multipolinomiais desse tipo de desigualdades especiais.

A noção de multipolinômio é uma extensão natural do conceito de polinômio homogêneo e surgiu pela primeira vez (com outra terminologia) no trabalho de I. Chernega e A. Zagorodnyuk em [35]. Em [70], T. Velinga introduziu o conceito de multipolinômio (na notação e terminologia atual) na tentativa de unificar as teorias das aplicações multilineares e dos polinômios homogêneos entre espaços de Banach. Assim, lembremos que uma aplicação $P : E \rightarrow F$ entre espaços de Banach E e F é dita um *polinômio m -homogêneo* se existe uma aplicação m -linear $A : E^m \rightarrow F$ tal que P coincide com A na diagonal, *i.e.*, se $P(x) = A(x, \dots, x)$ para todo $x \in E$. Essa noção estendida para o contexto multilinear foi apresentada por T. Velinga [70] como segue: sejam $m \in \mathbb{N}$, $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ e $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Banach. Uma aplicação $P : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ é dita um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo (ou *multipolinômio*) se, para cada $1 \leq j \leq m$, a aplicação

$$P(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_m) : E_j \rightarrow F$$

é um polinômio n_j -homogêneo para todo $x_i \in E_i$ fixado, com $i \neq j$. Observemos que, recuperamos o conceito de aplicação linear para $m = 1$ e $n_1 = 1$; de polinômio homogêneo para $m = 1$ e $n_1 > 1$; e de aplicação multilinear para $m > 1$ e $n_1 = \dots = n_m = 1$.

Ao Capítulo 4 desta tese reservamos a apresentação das versões multipolinomiais das desigualdades de Kahane–Salem–Zygmund. Primeiramente, aplicamos a versão multilinear da desigualdade KSZ devido a Pellegrino–Serrano–Silva [59, Theorem 1.1] e obtivemos, precisamente, a seguinte variante multipolinomial: sejam m, n , e $n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos, e sejam $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$. Então, existe uma constante universal C_M , uma escolha de sinais $+1$ e -1 , e um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P_{M,n} : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$P_{M,n}(z_1, \dots, z_m) = \sum_{|\alpha_1|=n_1, \dots, |\alpha_m|=n_m} \pm c_\alpha z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m},$$

com pelo menos n^m coeficientes $c_\alpha = 1$, tal que

$$\|P_{M,n}\| \leq C_M \cdot n^{\frac{1}{\min_i \{\max\{2, p_i^*\}\}} + \sum_{i=1}^m \max\{n_i(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_i}), 0\}}. \quad (1)$$

O resultado acima reduz-se ao caso multilinear quando $m > 1$ e $n_1 = \dots = n_m = 1$. Outra

aplicação assumindo $m = 1$, $n_1 = d$ e $p_1 = p$, por outro lado, fornece uma versão particular para polinômios homogêneos. Restringindo as hipóteses sobre os índices, considerando $p_1 = \dots = p_m = p$ para $p \in [1, \infty]$, aplicamos a desigualdade KSZ simétrica de H. Boas [28, Theorem 3.4] e obtivemos uma segunda versão do teorema anterior agora com coeficientes $c_\alpha = \prod_i \binom{n_i}{\alpha_i}$ e a desigualdade (1) tornando-se

$$\|P_{M,n}\| \leq \sqrt{32M \log(6M)} \cdot (M!)^{\frac{1}{\max\{2, p^*\}}} \cdot n^{\frac{1}{2} + M \cdot \max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}, 0\}},$$

como em Boas. Para o caso $p_1 = \dots = p_m = \infty$ e espaços de sequências $\ell_\infty^{N_j}$ com dimensões $N_j \in \mathbb{N}$ não necessariamente iguais, aplicamos a versão multilinear da desigualdade KSZ com constantes assintoticamente ótimas de Raposo–Pellegrino [61, Theorem 1.1] e, como consequência do resultado acima apresentado, chegamos na respectiva variante multipolinomial com pelo menos $N_1 \dots N_m$ coeficientes $c_\alpha = 1$ e (1) sendo

$$\|P_{M,N_1,\dots,N_m}\| \leq (1 + \varepsilon) \max \left\{ N_1^{\frac{1}{2}}, \dots, N_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{j=1}^m n_j \cdot N_j^{\frac{1}{2}}.$$

Por fim, finalizamos o capítulo com uma análise sobre as cotas superiores para a norma $\|P_{M,n}\|$ em cada uma das desigualdades e com alguns comentários e questionamentos finais.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos inteiros positivos
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$(\mathbb{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$	Decomposição infinita disjunta, ou seja, $\text{card } \mathbb{N}_k = \text{card } \mathbb{N}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$ se $i \neq j$
$\mathbb{K}$	Conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos números complexos $\mathbb{C}$
$\aleph_0$	$\text{card } \mathbb{N}$
$\mathfrak{c}$	$\text{card } \mathbb{R}$
E, F, G, H	Espaços vetoriais (quasi-)normados, geralmente, espaços de Banach ou espaços quasi-Banach
E^m	$\underbrace{E \times \cdots \times E}_m$
$\mathcal{E}$	Espaço de sequência padrão quasi-Banach sobre um espaço de Banach X
$\ \cdot\ _E$	Norma usual de E
E'	Dual topológico de E
B_E	Bola unitária fechada de E
$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$	Espaço vetorial de todas as aplicações multilineares contínuas definidas do cartesiano $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F
$\mathcal{L}^s({}^m E; F)$	Espaço de todas as aplicações m -lineares simétricas definidas do cartesiano $E \times \cdots \times E$ em F
$\mathcal{P}({}^{n_1} E_1, \dots, {}^{n_m} E_m; F)$	Espaço vetorial de todos os polinômios $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneos definidos do produto cartesiano $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F
Λ, Γ	Subconjuntos não vazios de índices em $\mathbb{N}^m$
$\mathbf{r} := (r_1, \dots, r_m)$	Multi-parâmetros em $\mathbb{N}^m$ ou, simplesmente, r se $r_1 = \cdots = r_m = r$
$\mathbf{i}$	Multi-índice em $\Lambda \subseteq \mathbb{N}^m$

$\left(\Pi_{(r,s)}^{as}, \pi_{(r,s)}^{as}\right)$	Classe dos operadores $(r, \mathbf{s})$ -absolutamente somantes sob sua norma usual $\pi_{(r,s)}^{as}(\cdot)$
$\left(\Pi_{(\mathbf{r},\mathbf{s})}^{ms}, \pi_{(\mathbf{r},\mathbf{s})}^{ms}\right)$	Classe dos operadores múltiplos $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ -somantes sob sua norma usual $\pi_{(\mathbf{r},\mathbf{s})}^{ms}(\cdot)$
$\left(\Pi_{(\mathbf{r},\mathbf{s})}^{\Lambda}, \pi_{(\mathbf{r},\mathbf{s})}^{\Lambda}\right)$	Classe dos operadores Λ -($\mathbf{r}, \mathbf{s}$)-somantes sob sua norma usual $\pi_{(\mathbf{r},\mathbf{s})}^{\Lambda}(\cdot)$
$DP(E; F)$	Classe dos operadores Dunford-Pettis (ou completamente contínuos) entre os espaços de Banach E, F ;
$\mathcal{I}$	Ideal de operadores lineares
$\mathcal{M}$	Multi-ideal de operadores m -lineares
ℓ_p^n	$\left\{(x_j)_{j=1}^n : x_j \in \mathbb{K}, \text{ com } \ (x_j)_{j=1}^n\ = \left(\sum_{j=1}^n x_j ^p\right)^{\frac{1}{p}}, 0 < p < \infty \text{ e } n \in \mathbb{N}\right\}$
ℓ_p	$\left\{(x_j)_{j \in \mathbb{N}} : \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j ^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ com } x_j \in \mathbb{K} \text{ e } 0 < p < \infty\right\}$
ℓ_{∞}	$\{(x_j)_{j \in \mathbb{N}} : \sup_{j \in \mathbb{N}} x_j < \infty, \text{ com } x_j \in \mathbb{K}\}$
$\ell_p(E)$	$\left\{(x_j)_{j \in \mathbb{N}} : \left(\sum_{j=1}^{\infty} \ x_j\ _E^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ com } x_j \in E \text{ e } 0 < p < \infty\right\}$
$c_0(E)$	$\{(x_j)_{j \in \mathbb{N}} : \lim_j x_j = 0, x_j \in E \text{ e } \ (x_j)_j\ = \sup_{j \in \mathbb{N}} \ x_j\ _E < \infty\}$
$\ell_{\mathbf{r}}(E)$	Espaço de todas as multi-matrizes $(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m} = (x_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\|(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}\|_{\ell_{\mathbf{r}}(E)} := \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} \|x_{\mathbf{i}}\|_E^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \cdots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} < \infty$$

$\ell_q(I)$	$\{(x_i)_{i \in I} : \sum_{i \in F} x_i ^q < \infty, \text{ com } F \text{ subconjunto finito de } I \text{ e } x_i \in \mathbb{K}\}$, sendo I um conjunto arbitrário de índices e $0 < q < \infty$
z^{α}	$z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ para $n \in \mathbb{N}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$
$ \alpha $	$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ para $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$
$\binom{n}{\alpha_k}$	$\frac{n!}{\alpha_k!} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$ para $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$

Parte I

Estruturas robustas em classes de operadores

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo, apresentamos todos os conceitos e resultados considerados preliminares para o que será desenvolvido durante os demais capítulos da tese. Consoante a isso, os resultados serão expostos com demonstrações omitidas, mas indicaremos referências que abordam os temas mais sofisticados com maiores detalhes.

O capítulo está dividido em cinco seções: a primeira relembra os conceitos e os resultados base da teoria das aplicações multilineares; a segunda seção traz uma breve discussão sobre os espaços quasi-Banach e, em particular, sobre o espaço de sequência ℓ_p para $0 < p < 1$; sendo a teoria dos operadores somantes um dos principais ambientes tratados no Capítulo 2, a terceira seção revisita as definições e propriedades base dessas classes de operadores; a seção quatro apresenta a noção geral de multi-ideais de operadores, ambiente trabalhado nos Capítulos 2 e 3; e, por fim, a seção cinco discorre sobre as noções e resultados concernentes aos polinômios homogêneos e multipolinômios, essenciais para o desenvolvimento do Capítulo 4.

Ao longo desta tese, representaremos por $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos números complexos $\mathbb{C}$, por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. As letras maiúsculas (e eventualmente com índices) tais como $E, E_1, \dots, E_m, F, G, H$ representarão espaços vetoriais normados (ou quasi-normados) que, em geral, serão Banach (ou quasi-Banach). O dual topológico e a bola unitária fechada de um espaço E serão denotados por E' e B_E , respectivamente.

1.1 Aplicações multilineares

Nesta seção, relembremos a definição de aplicações multilineares e evidenciaremos alguns importantes resultados da teoria. Para uma abordagem completa sobre o tema, reco-

mendamos o clássico livro [57].

Definição 1.1. Para cada $m \in \mathbb{N}$, uma aplicação $A : E_1 \times \cdots \times E_m \rightarrow F$ é dita *m-linear* se, para cada índice $1 \leq j \leq m$, a aplicação

$$A(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_m) : E_j \rightarrow F$$

é linear para todos fixados $x_i \in E_i$, com $i \neq j$. Denotaremos por $\mathcal{L}_a(E_1, \dots, E_m; F)$ o espaço vetorial formado por todas as aplicações *m-lineares* de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F , e por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ o subespaço de todas as aplicações *m-lineares* contínuas.

Para cada $A \in \mathcal{L}_a(E_1, \dots, E_m; F)$, definamos a função

$$\|A\| := \sup\{C \geq 0 : \|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_m\|, \forall x_j \in E_j, j = 1, \dots, m\} \in [0, \infty]$$

e estabelecamos as seguintes notações:

- Se $E_1 = \cdots = E_m = E$, os espaços serão representados por $\mathcal{L}_a({}^m E; F)$ e $\mathcal{L}({}^m E; F)$;
- Se $m = 1$, como usual, $\mathcal{L}_a({}^1 E; F) = \mathcal{L}_a(E; F)$ e $\mathcal{L}({}^1 E; F) = \mathcal{L}(E; F)$;
- Se $F = \mathbb{K}$, omite-se a escrita de F na notação, logo todos os casos acima ficarão como $\mathcal{L}_a(E_1, \dots, E_m)$ e $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m)$ ou $\mathcal{L}_a({}^m E)$ e $\mathcal{L}({}^m E)$ ou $\mathcal{L}_a(E)$ e $\mathcal{L}(E)$.

A função $\|\cdot\|$ acima nos diz exatamente como normar o espaço das aplicações multilíneares contínuas. Vejamos as seguintes caracterizações.

Proposição 1.1. Para cada $A \in \mathcal{L}_a(E_1, \dots, E_m; F)$, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) A é contínua;
- (ii) A é contínua na origem;
- (iii) Existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq c\|x_1\| \cdots \|x_m\|$$

para todo $(x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$;

- (iv) $\|A\| < \infty$;
- (v) A é uniformemente contínua em subconjuntos limitados de $E_1 \times \cdots \times E_m$;

- (vi) A é limitado em toda bola com raio finito;
- (vii) A é limitado em alguma bola;
- (viii) A é limitado em alguma bola com centro na origem.

Proposição 1.2. Se $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$, então:

- (i) A expressão

$$\|A\| := \sup\{C \geq 0 : \|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_m\|, \forall x_j \in E_j, j = 1, \dots, m\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$.

- (ii) $\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq \|A\|\|x_1\| \cdots \|x_m\|$ para todo $x_j \in E_j, j = 1, \dots, m$.
- (iii) Se F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ também é Banach.

Se na Proposição 1.1 tivéssemos $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach, a continuidade de $A \in \mathcal{L}_a(E_1, \dots, E_m; F)$ poderia ser caracterizada ainda via suas componentes em cada variável.

Proposição 1.3. Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}_a(E_1, \dots, E_m; F)$. A é contínua se, e somente se, para cada $1 \leq j \leq m$ a aplicação linear

$$A(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_m) : E_j \rightarrow F$$

é contínua.

No capítulo 4, necessitaremos da noção de aplicação multilinear simétrica.

Definição 1.2. Dizemos que uma aplicação $A \in \mathcal{L}_a({}^m E; F)$ é *simétrica* se

$$A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = A(x_1, \dots, x_m)$$

para todos $x_j \in E, 1 \leq j \leq m$, e para toda permutação σ dos primeiros m números inteiros positivos. O espaço de todas as aplicações m -lineares simétricas definidas do cartesiano $E \times \cdots \times E$ em F será denotado por $\mathcal{L}_a^s({}^m E; F)$. Além disso, o espaço das aplicações multilineares simétricas contínuas é dado por $\mathcal{L}^s({}^m E; F) = \mathcal{L}({}^m E; F) \cap \mathcal{L}_a^s({}^m E; F)$. O caso $F = \mathbb{K}$ recebe a notação simplificada, ou seja, $\mathcal{L}_a^s({}^m E)$ e $\mathcal{L}^s({}^m E)$.

A notação seguinte será necessária para apresentarmos as conhecidas *Fórmula de Leibniz* e a *Fórmula de Polarização*. Além disso, tal notação será fortemente usada no Capítulo 4 desta tese.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, denotemos

$$|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \quad \text{e} \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

Assim, dado $A \in \mathcal{L}_a({}^m E; F)$, para cada $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ e para cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, com $|\alpha| = m$, escreveremos

$$Ax_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = A(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{\alpha_n}).$$

Observemos que $n \leq m$. E o caso $n = m$ retoma a representação usual.

Fórmula de Leibniz: Sejam $A \in \mathcal{L}_a^s({}^m E; F)$, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ e multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, com $|\alpha| = m$. Então

$$A(x_1 + \dots + x_n)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!} Ax_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Fórmula de Polarização: Seja $A \in \mathcal{L}_a^s({}^m E; F)$. Então para todo $x_0, \dots, x_m \in E$, temos

$$A(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m)^m.$$

1.2 Espaços quasi-Banach: aspectos básicos

Nesta seção, apresentaremos os espaços quasi-Banach e discutiremos, brevemente, aspectos concernentes a tais espaços. Recomendamos [2, 48, 49] para mais detalhes sobre o assunto. Iniciaremos com a seguinte definição de quasi-norma.

Definição 1.3. Uma *quasi-norma* em um espaço vetorial E é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

- (i) $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
- (ii) $\|ax\| = |a|\|x\|$ para todo $a \in \mathbb{K}$ e $x \in E$;
- (iii) Existe uma constante $C \geq 1$ tal que, para quaisquer $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$.

A constante C é, algumas vezes, chamada de *módulo de concavidade* da quasi-norma. Note que, para $C = 1$ obtemos uma norma. Se $\|\cdot\|$ é uma quasi-norma em um espaço vetorial E , o par $(E, \|\cdot\|)$ é chamado *espaço quasi-normado*. Ademais, se a aplicação $\|\cdot\|$ é *p-subaditiva*

para $0 < p \leq 1$, i.e., se ela satisfaz

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p \quad \text{para todos } x, y \in X,$$

$\|\cdot\|$ é chamada uma p -norma. O seguinte resultado conhecido como Teorema de Aoki-Rolewicz (veja [12, 66] e [48, Theorem 1.3]) diz que toda quasi-norma admite uma p -norma equivalente.

Teorema 1.4 (Aoki-Rolewicz). *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço quasi-normado. Então existe $0 < p \leq 1$ e uma p -norma $|||\cdot|||$ em E equivalente a $\|\cdot\|$. Se C é o módulo de concavidade de $\|\cdot\|$, então $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$.*

A p -norma $|||\cdot|||$ em questão é dada por

$$|||x||| = \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} : x = \sum_{i=1}^n x_i, \text{ com } x_1, \dots, x_n \in E \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Como toda p -subaditiva quasi-norma $|||\cdot|||$ induz uma topologia métrica no espaço, a qual é dada por $d(x, y) := |||x - y|||^p$ (veja [49]), uma importante consequência do Teorema de Aoki-Rolewicz é que todo espaço quasi-normado é metrizável e, além disso, a quasi-norma é contínua na topologia métrica induzida pela p -norma. Assim, um espaço quasi-normado E é chamado um *espaço quasi-Banach* quando é completo para essa métrica. Um espaço quasi-Banach com a p -norma associada é também chamado um *espaço p -Banach*. A partir deste momento, quando nos referirmos a espaços quasi-Banach, estamos considerando espaços p -Banach para algum $0 < p < 1$.

Diferentemente dos espaços de Banach, os espaços quasi-Banach não são localmente convexos. Isso deve-se ao fato da bola unitária fechada B_E , definida por

$$B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\},$$

não ser um conjunto convexo quando E é quasi-normado (p -normado). De acordo com a terminologia em [49], nesse caso, B_E será um conjunto *absolutamente p -convexo*, ou seja, dados $x_1, x_2 \in B_E$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, então $a_1x_1 + a_2x_2 \in B_E$ sempre que $|a_1|^p + |a_2|^p \leq 1$. Essa perda da convexidade local gera um enorme “desconforto” para se trabalhar com os espaços quasi-Banach, uma vez que temos a falha do Teorema de Hahn-Banach e de outros resultados que dependem da convexidade. Além disso, a estrutura de espaços quasi-Banach podem sofrer mudanças extremas quando comparados aos espaços de Banach. Por exemplo, $L_p[0, 1]$ e ℓ_p para $0 < p < 1$ são, provavelmente, os exemplos mais conhecidos de espaços quasi-Banach

e o dual topológico $(L_p[0, 1])' = \{0\}$ é trivial e $\ell'_p = \ell_\infty$. Logo, investigar problemas que necessitem do dual de tais espaços não é uma tarefa simples e requer certos cuidados. Devido a isso, suporemos que os espaços quasi-Banach que aparecem na tese tenham dual separante.

Mesmo diante de questões como essas, muitas definições e resultados clássicos em espaços de Banach podem ser transladados de maneira natural para os quasi-Banach, como o Teorema da Limitação Uniforme, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado, os quais dependem somente da completude do espaço. Abaixo enunciamos esses resultados, mas antes, estabeleceremos algumas notações.

Se E e F são espaços quasi-Banach (ou p -Banach para algum $0 < p < 1$), denotaremos por $\mathcal{L}(E; F)$ o espaço de todos operadores lineares contínuos $T : E \rightarrow F$ sobre a quasi-norma

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}.$$

O espaço $E' = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ sempre será um espaço de Banach e, além disso, essas noções podem ser estendidas para o contexto multilinear de modo natural.

Teorema 1.5 (Princípio da Limitação Uniforme). *Sejam E um espaço quasi-Banach, F um espaço quasi-normado e $(T_i)_{i \in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E; F)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$ existe uma constante $C_x < \infty$ tal que $\sup_{i \in I} \|T_i x\| < C_x$. Então $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.*

Teorema 1.6 (Teorema da Aplicação Aberta). [48, Corollary 1.5] *Sejam E e F espaços quasi-Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear sobrejetivo. Então T é uma aplicação aberta.*

Teorema 1.7 (Teorema do Gráfico Fechado). [48, Corollary 1.7] *Sejam E e F espaços quasi-Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, o gráfico de T é fechado em $E \times F$.*

Na subseção seguinte, trataremos sobre os espaços ℓ_p para $0 < p < 1$, o qual é uma das nossas maiores fontes de exemplos no contexto de espaços quasi-Banach.

1.2.1 Os espaços ℓ_p para $0 < p < 1$

Para $0 < p < \infty$, ℓ_p é o espaço de todas as sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $x_n \in \mathbb{K}$, tal que

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (1.1)$$

Para $p = \infty$, ℓ_∞ é o espaço de todas as seqüências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $x_n \in \mathbb{K}$, tal que

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty.$$

É importante destacar que, se $0 < p \leq q \leq \infty$, então $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$ e, conseqüentemente, $\ell_p \subset \ell_q$. Os espaços ℓ_p para $p \geq 1$ são bem-conhecidos e amplamente tratados em todo livro que aborde os fundamentos em Análise Funcional. Aqui, trataremos um pouco dos espaços ℓ_p para $0 < p < 1$.

Para $0 < p < 1$, a função $\|\cdot\|_p : \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ dada em (1.1) define uma quasi-norma, com constante $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$. Com efeito, os itens (i) e (ii) da Definição 1.3 são imediatos, assim, provemos (iii). Sejam $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências em ℓ_p , então

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|)^p.$$

Usando o fato que $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ para todos os números $a, b \geq 0$ e $0 < p < 1$, obtemos

$$\|x + y\|_p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como ambos os números $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{1-p}$ são maiores do que 1 e temos $\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = 1$, aplicando a Desigualdade de Hölder para o caso $n = 2$ e enxergando a soma $\|x\|_p^p + \|y\|_p^p$ como $1 \cdot \|x\|_p^p + 1 \cdot \|y\|_p^p$, temos

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p &\leq (1 \cdot \|x\|_p^p + 1 \cdot \|y\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\left(1^{\frac{1}{1-p}} + 1^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p} \cdot \left((\|x\|_p^p)^{\frac{1}{p}} + (\|y\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}-1} \cdot (\|x\|_p + \|y\|_p). \end{aligned}$$

Assim, $\|\cdot\|_p$ é uma quasi-norma, que é p -subaditiva e induz a topologia métrica no espaço através da métrica $d(x, y) := \|x - y\|_p^p$. A prova que ℓ_p é completo para a quasi-norma $\|\cdot\|_p$ segue de argumentos padrões conhecidos do caso $p \geq 1$. Portanto, $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço quasi-Banach (ou p -Banach).

Como no caso dos espaços ℓ_p com $p \geq 1$, a seqüência $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dos vetores canônicos, $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$, é uma base de Schauder de ℓ_p para $0 < p < 1$. Dessa forma, para cada $i \in \mathbb{N}$, podemos definir o funcional linear limitado $\varphi_i : \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $\varphi(x) = x_i$ para todo $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$. Isso nos diz que o dual ℓ'_p separa pontos (recordemos que para um espaço

quasi-normado E , dizemos que E' separa pontos se dados $x \neq y$ em E , existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Portanto, para $0 < p < 1$, sabemos que ℓ_p tem *dual separante*. Mais ainda: o dual de ℓ_p é isométrico a ℓ_∞ .

Teorema 1.8. [36, Day (1940)] *Para $0 < p \leq 1$, $(\ell_p)'$ é isométrico a ℓ_∞ .*

O resultado acima nos diz que ℓ_p possui “muitos” funcionais lineares contínuos. Entretanto, não é um espaço localmente convexo.

Teorema 1.9. [48, Proposition 2.4] *Para $0 < p < 1$, ℓ_p não é localmente convexo.*

A seguir, precisaremos da definição de espaço complementado.

Definição 1.4 (Subespaço complementado). Um subespaço fechado H de um espaço p -Banach E é dito *complementado* se existe um subespaço fechado G de E tal que $E = H \oplus G$, isto é, $E = H + G$ e $H \cap G = \{0\}$.

O próximo resultado para $0 < p < \infty$ reúne dois importantes teoremas obtidos, primeiramente, para o caso $1 \leq p < \infty$ e para os espaços c_0 por Pelczynski (1960) (veja [1, Theorem 2.2.4]) e, posteriormente, para $0 < p < 1$ por Styles (1970) (veja [48, Theorem 2.6]).

Teorema 1.10. ([1, Theorem 2.2.4] e [48, Theorem 2.6]). *Sejam $0 < p < \infty$ e Y um subespaço complementado de dimensão infinita de ℓ_p (resp. c_0). Então Y é isomorfo a ℓ_p (resp. c_0).*

Além de ser um importante resultado sobre a estrutura dos espaços ℓ_p , o teorema acima será de importante aplicabilidade para estabelecermos um exemplo no Capítulo 3.

1.3 Operadores Somantes

Nesta seção, nosso objetivo é apresentar os conceitos centrais da teoria dos operadores lineares somantes. Apresentaremos as extensões dessa noção para o contexto multilinear, que serão úteis nos capítulos subsequentes da tese. Em particular, exibiremos as definições base da teoria, faremos menção às propriedades importantes de tais classes de operadores e estabeleceremos as notações que são as comumente adotadas.

Iniciemos com os seguintes conceitos: se E é um espaço de Banach e $0 < r < \infty$, $\ell_r(E)$ é o espaço vetorial constituído por todas as seqüências $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que

$$\|(x_j)_{j \in \mathbb{N}}\|_r := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^r \right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

A função $\|\cdot\|_r$ define uma norma (r -norma se $0 < r < 1$) no espaço. Por $\ell_r^w(E)$ representamos o espaço vetorial das sequência $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que $(\phi(x_j))_{j \in \mathbb{N}} \in \ell_r$ para todo $\phi \in E'$. A função $\|\cdot\|_{w,r}$ definida como

$$\|(x_j)_{j \in \mathbb{N}}\|_{w,r} := \sup_{\phi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\phi(x_j)|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

é uma norma (r -norma se $0 < r < 1$) em $\ell_r^w(E)$. Quando $r = \infty$, define-se

$$\|(x_j)_{j \in \mathbb{N}}\|_{\infty} := \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|_E.$$

A seguir apresentaremos a definição de *operador linear absolutamente somante*. A base da teoria pode ser encontrada no clássico livro [39].

Definição 1.5 (Operadores lineares absolutamente somantes). Sejam E, F espaços de Banach e $1 \leq s \leq r < \infty$. Um operador linear contínuo $T : E \rightarrow F$ é dito (r, s) -*absolutamente somante* (ou, simplesmente, (r, s) -somante) se $(Tx_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_r(F)$ sempre que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_s^w(E)$. Equivalentemente, $T : E \rightarrow F$ é (r, s) -somante se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^N \|Tx_i\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \cdot \|(x_i)_{i=1}^N\|_{w,s} \quad (1.2)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ e para todos $x_i \in E$, $i = 1, \dots, N$.

- A classe de todos os operadores lineares contínuos (r, s) -somantes definidos entre os espaços de Banach E e F será denotada por $\Pi_{(r,s)}(E; F)$ (ou $\Pi_r(E; F)$ se $r = s$).
- O ínfimo das constantes $C > 0$ satisfazendo a desigualdade (1.2) define uma norma em $\Pi_{(r,s)}(E; F)$, a qual é denotada por $\pi_{(r,s)}(\cdot)$ (ou $\pi_r(\cdot)$ se $r = s$).
- $(\Pi_{(r,s)}(E; F), \pi_{(r,s)}(\cdot))$ é um espaço de Banach.
- Se $r < s$, então $\Pi_{(r,s)}(E; F) = \{0\}$.

De acordo com menções na literatura, os trabalhos de A. Pietsch [63] e R. Alencar e M. C. Matos [9] são considerados os precursores da teoria não linear dos operadores somantes.

Definição 1.6 (Operadores multilineares absolutamente somantes). Sejam $E_1, \dots, E_m$ e F espaços de Banach, r um inteiro positivo e $\mathbf{s} := (s_1, \dots, s_m) \in [1, \infty)^m$. Um operador m -linear contínuo $T : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ é dito *absolutamente $(r, \mathbf{s})$ -somante* se existe uma

constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^N \|T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \prod_{k=1}^m \|(x_i^{(k)})_{i=1}^N\|_{w, s_k} \quad (1.3)$$

para $N \in \mathbb{N}$ e para todos $x_i^{(k)} \in E_k$, $k = 1, \dots, m$ e $i = 1, \dots, N$.

- A classe de todos os operadores $(r, \mathbf{s})$ -absolutamente somantes de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F será denotada por $\Pi_{(r, \mathbf{s})}^{as}(E_1, \dots, E_m; F)$ (ou $\Pi_{(r, s)}^{as}(E_1, \dots, E_m; F)$ se $s_1 = \dots = s_m = s$).
- O ínfimo de todas as constantes $C > 0$ que satisfazem a desigualdade (1.3) define uma norma no espaço, a qual representaremos por $\pi_{(r, \mathbf{s})}^{as}(\cdot)$ (ou $\pi_{(r, s)}^{as}(\cdot)$ se $s_1 = \dots = s_m = s$).
- $(\Pi_{(r, \mathbf{s})}^{as}(E_1, \dots, E_m; F); \pi_{(r, \mathbf{s})}^{as}(\cdot))$ é um espaço de Banach.
- Se $\frac{1}{r} > \frac{1}{s_1} + \dots + \frac{1}{s_m}$, então $\Pi_{(r, \mathbf{s})}^{as}(E_1, \dots, E_m; F) = \{0\}$. A fim de não recairmos no caso trivial, sempre consideraremos $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{s_1} + \dots + \frac{1}{s_m}$.

A definição de operadores somantes no contexto multilinear não ficou restrita à noção apresentada acima, pelo contrário, a teoria não linear ganhou espaço e definições mais gerais surgiram. A seguir, apresentamos o conceito “mais forte” de *operador multilinear múltiplo somante* que foi introduzido em 2003, independentemente, por Matos [56] e por Bombal, Pérez-García e Villanueva [29].

Definição 1.7. [Operador multilinear múltiplo somante] Sejam $E_1, \dots, E_m$ e F espaços de Banach, r um inteiro positivo e $\mathbf{s} := (s_1, \dots, s_m) \in [1, \infty)^m$. Um operador m -linear contínuo $T : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ é dito *múltiplo $(r, \mathbf{s})$ -somante* se existe uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N \|T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \prod_{k=1}^m \|x_{i_k}^{(k)}\|_{w, s_k} \quad (1.4)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ e para todos $x_{i_k}^{(k)} \in E_k$, $k = 1, \dots, m$ e $i_k = 1, \dots, N$.

- A classe de todos os operadores m -lineares múltiplos somantes de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F será denotada por $\Pi_{(r, \mathbf{s})}^m(E_1, \dots, E_m; F)$ (ou $\Pi_{(r, s)}^m(E_1, \dots, E_m; F)$ se $s_1 = \dots = s_m = s$).
- O ínfimo das constantes $C > 0$ que satisfazem a desigualdade acima define uma norma em $\Pi_{(r, \mathbf{s})}^m(E_1, \dots, E_m; F)$, com a qual será completo.

Posteriormente, em [13], com o intuito de apresentar uma classe geral de operadores que recuperasse as dos absolutamente e múltiplos somantes, foi introduzida a classe dos operadores multilineares *múltiplos somantes com múltiplos expoentes*. Essa noção foi, provavelmente, motivada pela notação usada em [3], onde os autores provam que a desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille é, na verdade, um caso particular de uma família bastante geral de desigualdades ótimas.

Relembremos que, para m um inteiro positivo, E um espaço de Banach e $\mathbf{r} := (r_1, \dots, r_m) \in (0, \infty]^m$, o espaço de seqüências de norma mista

$$\ell_{\mathbf{r}}(E) := \ell_{r_1}(\ell_{r_2}(\dots(\ell_{r_{m-1}}(\ell_{r_m}(E)))\dots))$$

é formado por todas as multi-matrizes $(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m} = (x_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\|(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}\|_{\ell_{\mathbf{r}}(E)} := \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} \|x_{\mathbf{i}}\|_E^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \dots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} < \infty.$$

Aqui, $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$ representa um multi-índice, como usual. Quando $E = \mathbb{N}$, escreveremos $\ell_{\mathbf{r}} = \ell_{\mathbf{r}}(\mathbb{N})$ e, quando nenhuma precisão a mais for necessária, $\|\cdot\|_{\ell_{\mathbf{r}}(E)} = \|\cdot\|_{\mathbf{r}}$.

Definição 1.8. [Operador múltiplo somante com múltiplos expoentes] [13, Definition 5.1]

Sejam m um inteiro positivo, $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Banach e $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m), \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m) \in [1, \infty)^m$. Um operador m -linear contínuo $T : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ é dito *múltiplo $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ -somante* se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todos $x_{i_k}^{(k)} \in E_k$, $k = 1, \dots, m$ e $i_k = 1, \dots, N_k$

$$\|(Tx_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}\|_{\ell_{\mathbf{r}}(F)} = \left(\sum_{i_1=1}^{N_1} \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^{N_m} \|Tx_{\mathbf{i}}\|^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \dots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq C \prod_{k=1}^m \|x_{i_k}^{(k)}\|_{w, s_k}, \quad (1.5)$$

onde $Tx_{\mathbf{i}} := T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})$. A classe de todos os operadores múltiplos $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ -somantes de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F será denotada por $\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms}(E_1, \dots, E_m; F)$. Quando $r = r_1 = \dots = r_m$ ou $s = s_1 = \dots = s_m$, escreveremos $\Pi_{(r, \mathbf{s})}^{ms}(E_1, \dots, E_m; F)$ e $\Pi_{(\mathbf{r}, s)}^{ms}(E_1, \dots, E_m; F)$, respectivamente. Os resultados fundamentais sobre essa classe de operadores são provados em [13] e abaixo os listamos.

- O ínfimo das constantes C em (1.5) define uma norma no espaço, que será denotada por $\pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms}(\cdot)$;

- $(\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms}(E_1, \dots, E_m; F), \pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms}(\cdot))$ é um espaço de Banach;
- A desigualdade $\|T\| \leq \pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms}(T)$ é válida para todo $T \in \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms}(E_1, \dots, E_m; F)$;
- Se ocorrer $r_k < s_k$ para algum $k = 1, \dots, m$, então $\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms}(E_1, \dots, E_m; F) = \{0\}$.

Em uma tentativa de unificar as diferentes abordagens de operadores multilineares somantes existentes, [23] e [64] introduziram, independentemente, a noção de *operador multilinear Λ -somante*. Antes de apresentarmos a definição, fixemos algumas notações: dado um conjunto de índices $\Lambda \subseteq \mathbb{N}^m$, por $(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda}$ representamos uma multi-matriz com valores em E indexada sobre Λ , e sua $\ell_{\mathbf{r}}$ -norma pode ser vista como

$$\|(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda}\|_{\ell_{\mathbf{r}}(E)} := \|(x_{\mathbf{i}} \cdot 1_{\Lambda}(\mathbf{i}))_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}\|_{\ell_{\mathbf{r}}(E)},$$

onde 1_{Λ} é a função característica de Λ . Vale a pena apontar algumas simples, mas úteis propriedades de monotonicidade: $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_s$ sempre que $0 < s \leq r < \infty$; $\|(\alpha_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda}\|_{\mathbf{r}} \leq \|(\alpha_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Gamma}\|_{\mathbf{r}}$ para toda multi-matriz escalar $(\alpha_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}$ e para todos os conjuntos de índices (não vazios) $\Lambda \subset \Gamma \subseteq \mathbb{N}^m$; $\|(\alpha_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda}\|_{\mathbf{r}} \leq \|(\beta_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda}\|_{\mathbf{r}}$ se $\alpha_{\mathbf{i}} \leq \beta_{\mathbf{i}}$ para todo $\mathbf{i} \in \Lambda$. Além disso, $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ sempre representarão m -uplas $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$ e $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m)$ em $[1, \infty)^m$ e escreveremos $Tx_{\mathbf{i}}$ para representar o operador m -linear T aplicado na m -upla $x_{\mathbf{i}}$, com $\mathbf{i} \in \Lambda$.

Definição 1.9. Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Banach, m um inteiro positivo, $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in [1, \infty)^m$ e $\Lambda \subseteq \mathbb{N}^m$ um conjunto de índices. Um operador multilinear $T : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ é Λ -($\mathbf{r}, \mathbf{s}$)-somante se existe uma constante $C > 0$ tal que $x^k \in \ell_{s_k}^w(E_k)$, $k = 1, \dots, m$,

$$\|(Tx_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda}\|_{\ell_{\mathbf{r}}(F)} = \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} \|Tx_{\mathbf{i}} \cdot 1_{\Lambda}(\mathbf{i})\|_{\ell_{\mathbf{r}}(F)}^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \dots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq C \prod_{k=1}^m \|x^k\|_{w, s_k},$$

onde 1_{Λ} é a função característica de Λ .

- Representaremos a classe de todos os operadores de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F que são Λ -($\mathbf{r}, \mathbf{s}$)-somantes por $\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; F)$;
- O ínfimo das constantes C satisfazendo a desigualdade acima define uma norma em $\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; F)$, a qual denotaremos por $\pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(\cdot)$. Além disso, o espaço será completo para essa norma e, portanto;
- $(\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; F), \pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(\cdot))$ é um espaço de Banach.

Observação 1.1. Para $\Lambda = \{(i, \dots, i) : i \in \mathbb{N}\}$, a Definição 1.9 recupera a noção de operador multilinear absolutamente $(r, \mathbf{s})$ -somante. Quando $\Lambda = \mathbb{N}^m$, recaímos no caso dos operadores múltiplos $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ -somantes.

Observação 1.2. Sejam $\Lambda \subset \Gamma \subseteq \mathbb{N}^m$ conjuntos de índices. Para quaisquer parâmetros $(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \in \mathbb{N}^m$ valem as seguintes desigualdades

$$\pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{as}(T) \leq \pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(T) \leq \pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Gamma}(T) \leq \pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms}(T)$$

e, consequentemente, as seguintes inclusões

$$\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms} \subseteq \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Gamma} \subseteq \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda} \subseteq \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{as}.$$

1.4 Multi-ideais de operadores

Nesta seção, exporemos os conceitos básicos da teoria de ideais de operadores lineares, devido a A. Pietschi [62] e, em seguida, sua extensão para o ambiente dos operadores multilineares.

Relembremos que um operador linear contínuo $u : E \rightarrow F$ é chamado de *posto finito* se sua imagem, $u(E)$, tem dimensão finita. Equivalentemente, u tem posto finito se existem $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$ e $b_1, \dots, b_n \in F$ tal que

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) b_i,$$

para todo $x \in E$.

Definição 1.10. Um *ideal de operador* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para todos os espaços de Banach E e F , suas componentes

$$\mathcal{I}(E; F) := \mathcal{L}(E; F) \cap \mathcal{I}$$

satisfazem:

(P1) $\mathcal{I}(E; F)$ é um subespaço linear de $\mathcal{L}(E; F)$ e contém todos operadores lineares de posto finito;

(P2) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{I}(E; F)$, $v \in \mathcal{L}(G; E)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$t \circ u \circ v \in \mathcal{I}(G; H).$$

Além disso, quando existe uma aplicação $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)$ satisfazendo

- (i) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita a $\mathcal{I}(E; F)$ é uma (quasi-)norma para todos os espaços de Banach E e F ;
- (ii) $\|I\|_{\mathcal{I}} = 1$, sendo $I : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, I(\lambda) := \lambda$;
- (iii) *Desigualdade de ideal*: se $u \in \mathcal{I}(E; F)$, $v \in \mathcal{L}(G; E)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|t \circ u \circ v\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \|u\|_{\mathcal{I}} \|v\|;$$

dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal (quasi-)normado de operadores*. Quando todas as componentes $\mathcal{I}(E; F)$ são completas sobre a (quasi-)norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, então $\mathcal{I}$ é chamado *ideal (quasi-)Banach de operadores*. Além disso, $\mathcal{I}$ é dito *fechado* se todas as suas componentes $\mathcal{I}(E; F)$ são subespaços fechados de $\mathcal{L}(E; F)$, com a norma usual de $\mathcal{L}(E; F)$.

Listamos a seguir alguns exemplos de ideais de operadores apresentados por A. Pietsch em [62]: ideal dos operadores de posto finito $\mathcal{F}$; ideal dos operadores contínuos $\mathcal{L}$; ideal dos operadores aproximáveis $\mathcal{A}$; ideal dos operadores compactos $\mathcal{K}$; ideal dos operadores completamente contínuos (ou operadores Dunford-Pettis) D ; ideal dos operadores (p, q) -somantes $\Pi_{(p,q)}$. É importante destacar que, $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, $(D, \|\cdot\|)$ e $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$ são subespaços fechados, logo, ideais Banach. Para $1 \leq r < \infty$, $(\Pi_{(r,s)}, \pi_{(r,s)})$ é um ideal Banach e, para $0 < r < 1$, $(\Pi_{(r,s)}, \pi_{(r,s)})$ é um ideal quasi-Banach.

Como uma tentativa de levar para o contexto não linear a bem sucedida teoria dos ideais de operadores lineares, A. Pietsch [63] introduziu a teoria de ideais de aplicações multilineares entre espaços de Banach (ou, simplesmente, multi-ideais).

Recordemos que uma aplicação multilinear $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ é dita de *tipo finito* se existem $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{1i} \in E'_1, \dots, \varphi_{mi} \in E'_m$ e $b_i \in F$, com $1 \leq i \leq n$, tal que

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^n \varphi_{1i}(x_1) \cdots \varphi_{mi}(x_m) b_i$$

para todo $(x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$. Denotaremos por $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_m; F)$ o subespaço de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ formado por todas as aplicações multilineares de *tipo finito* definidas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F .

Definição 1.11. Para cada inteiro positivo m , $\mathcal{L}_m$ denota a classe de todas as aplicações m -lineares contínuas definidas entre espaços de Banach. Um *ideal de aplicações multilineares* $\mathcal{M}$ (ou, simplesmente, um *multi-ideal* $\mathcal{M}$) é uma subclasse da classe $\mathcal{L} = \cup_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}_m$ de todas as aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach tais que, para m um inteiro positivo, $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Banach, suas componentes

$$\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F) := \mathcal{M} \cap \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$$

satisfazem as seguintes condições:

- (M1) $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ e contém todos os operadores multilineares de tipo finito;
- (M2) *Propriedade de multi-ideal:* Se $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F)$, $B_i \in \mathcal{L}(G_i; E_i)$ para $i = 1, \dots, m$ e $t \in \mathcal{L}(F; G)$, então

$$t \circ A \circ (B_1, \dots, B_m) \in \mathcal{M}(G_1, \dots, G_m; G).$$

Quando existe uma aplicação $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$ que cumpre

- (i) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ restrita a $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F)$ é uma (quasi-)norma para todo $m \in \mathbb{N}$ e espaços Banach $E_1, \dots, E_m, F$;
- (ii) $\|I_m\|_{\mathcal{M}} = 1$, sendo $I_m : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$, $I_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) := \lambda_1 \dots \lambda_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$;
- (iii) *Desigualdade de multi-ideal:* Se $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F)$, $B_i \in \mathcal{L}(G_i; E_i)$ para $i = 1, \dots, m$ e $t \in \mathcal{L}(F; G)$, então

$$\|t \circ A \circ (B_1, \dots, B_m)\| \leq \|t\| \|A\|_{\mathcal{M}} \|B_1\| \dots \|B_m\|;$$

dizemos que o par $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um *multi-ideal (quasi-)normado*. Se toda componente $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m)$ for completa com respeito à topologia gerada por $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, então dizemos que $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um *multi-ideal (quasi-)Banach*. A teoria dos multi-ideais normados (ou quasi-normados) de operadores pode ser encontrada em [32, 63].

Alguns exemplos de multi-ideais de operadores multilineares são extensões naturais de ideais de operadores lineares: multi-ideal das aplicações multilineares contínuas $\mathcal{L}_m$; multi-ideal das aplicações multilineares de tipo finito $\mathcal{L}_f$; multi-ideal das aplicações multilineares

aproximáveis $\mathcal{L}_A$; multi-ideal dos operadores $(p, \mathbf{q})$ -absolutamente somantes $\Pi_{(p, \mathbf{q})}^{as}$ e multi-ideal dos operadores $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ -múltiplo somantes $\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms}$. Como no caso linear, os multi-ideais $(\mathcal{L}_m, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{L}_A, \|\cdot\|)$ são fechados, logo multi-ideais Banach e, $(\Pi_{(r, \mathbf{s})}^{as}, \pi_{(r, \mathbf{s})}^{as})$ é Banach para $r \geq 1$ e quasi-Banach para $0 < r < 1$.

Na proposição seguinte, enunciaremos duas diretas, porém úteis propriedades sobre multi-ideais de operadores que serão aplicadas no Capítulo 3.

Proposição 1.11. Seja $\mathcal{M}$ um multi-ideal de operadores. Então

- (i) Se F_1, F_2 são espaços de Banach isomórficos, então existe uma bijeção entre as componentes $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F_1)$ e $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F_2)$ para todos os espaços de Banach $E_1, \dots, E_m$.
- (ii) Se $E_{1,n}$ é um subespaço fechado do espaço de Banach E_1 e $T \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F)$, então $T|_{E_{1,n} \times E_2 \times \dots \times E_m} \in \mathcal{M}(E_{1,n}, \dots, E_m; F)$ para todo espaço de Banach F .

1.5 Polinômios homogêneos e multipolinômios

Nesta seção, faremos um breve apanhado sobre a teoria de *multipolinômios*, que foi desenvolvida e amplamente abordada em [71]. Essa noção foi concebida inicialmente por I. Chernega e A. Zagorodnyuk em [35, Definition 3.1] e retomada em [70] por T. Velanga, na notação / linguagem atual, na tentativa de unificar as teorias das aplicações multilineares e dos polinômios homogêneos entre espaços de Banach. Assim, começaremos relembrando a definição de *polinômio homogêneo*. Para os fundamentos da teoria dos polinômios homogêneos, indicamos J. Mujica [57] e S. Dineen [40]

Definição 1.12. Sejam E e F espaços vetoriais. Uma aplicação $P : E \rightarrow F$ é chamada um *polinômio m -homogêneo* se existe uma aplicação m -linear $A : E^m \rightarrow F$ tal que

$$P(x) = A(x, \dots, x)$$

para todo $x \in E$.

O espaço vetorial de todos os polinômios m -homogêneos de E em F será denotado por $\mathcal{P}_a(^m E; F)$ e seu subespaço formado pelos polinômios m -homogêneos contínuos por $\mathcal{P}(^m E; F)$. Para o caso $F = \mathbb{K}$, a notação será reduzida a $\mathcal{P}_a(^m E)$ e $\mathcal{P}(^m E)$, respectivamente. Vale a pena destacar que $\mathcal{P}(^m E; F)$ é um espaço vetorial normado ao ser munido com a norma

$P \mapsto \|P\|$ dada por

$$\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : x \in E \text{ com } \|x\| \leq 1\}.$$

Se F for um espaço de Banach, então $\mathcal{P}(^m E; F)$ também será Banach.

Aqui não exporemos os resultados fundamentais da teoria de polinômios homogêneos, apenas os resultados estendidos e obtidos por T. Velanga em [71], já que a noção de multipolinômio recupera a de polinômio homogêneo.

Definição 1.13. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ e $E_1, \dots, E_m, F$ espaços normados. Uma aplicação $P : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ é dita um *polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo* se, para cada $1 \leq j \leq m$, a aplicação

$$P(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_m) : E_j \rightarrow F$$

é um polinômio n_j -homogêneo para todo $x_i \in E_i$ fixado, com $i \neq j$.

O espaço vetorial de todos os polinômios $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneos definidos do produto cartesiano $E_1 \times \dots \times E_m$ em F será denotado por $\mathcal{P}_a(^{n_1} E_1, \dots, ^{n_m} E_m; F)$, e o seu subespaço formado por membros contínuos por $\mathcal{P}(^{n_1} E_1, \dots, ^{n_m} E_m; F)$. Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos $\mathcal{P}_a(^{n_1} E_1, \dots, ^{n_m} E_m)$ e $\mathcal{P}(^{n_1} E_1, \dots, ^{n_m} E_m)$. A Definição 1.13 recai a noções familiares de aplicação linear, multilinear e polinômio homogêneo para alguns casos particulares: para $m = 1$ e $n_1 = 1$, recuperamos o conceito de aplicação linear; para $m = 1$ e $n_1 > 1$, de polinômio homogêneo; e para $m > 1$ e $n_1 = \dots = n_m = 1$, de aplicação multilinear. Aplicações desse tipo são chamadas de *multipolinômios*. A seguir, listamos alguns resultados fundamentais da teoria de multipolinômios, os quais, com suas respectivas demonstrações, podem ser consultados em [71].

O próximo teorema, que é uma extensão natural daquele existente para aplicações multilineares, apresenta equivalências que caracterizam os multipolinômios contínuos.

Teorema 1.12. Para cada $P \in \mathcal{P}_a(^{n_1} E_1, \dots, ^{n_m} E_m; F)$, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) P é contínuo;
- (ii) P é contínuo na origem;

(iii) Existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\|P(x_1, \dots, x_m)\| \leq c \|x_1\|^{n_1} \cdots \|x_m\|^{n_m},$$

para todo $(x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$;

(iv) $\|P\| < \infty$;

(v) P é uniformemente contínuo em um subconjunto limitado de $E_1 \times \cdots \times E_m$;

(vi) P é limitado em toda bola com raio finito;

(vii) P é limitado em alguma bola;

(viii) P é limitado em alguma bola com centro na origem.

Se $E_1, \dots, E_m$ forem espaços de Banach, a continuidade de $P \in \mathcal{P}_a({}^{n_1}E_1, \dots, {}^{n_m}E_m; F)$ poderá ser caracterizada via continuidade de cada uma das suas componentes.

Proposição 1.13. Se $E_1, \dots, E_m$ são espaços de Banach, então $P \in \mathcal{P}_a({}^{n_1}E_1, \dots, {}^{n_m}E_m; F)$ é contínuo se, e somente se, for separadamente contínuo em cada uma das variáveis.

Como no caso evidenciado para aplicações multilineares contínuas, também para multipolinômios a condição (iii) nos diz como definir uma norma em $\mathcal{P}({}^{n_1}E_1, \dots, {}^{n_m}E_m; F)$, tornando-o um espaço vetorial normado.

Proposição 1.14. Se $P \in \mathcal{P}({}^{n_1}E_1, \dots, {}^{n_m}E_m; F)$, então:

(i) A expressão

$$\|P\| := \sup \left\{ \|P(x_1, \dots, x_m)\| : \max_{1 \leq j \leq m} \|x_j\| \leq 1, \text{ com } x_j \in E_j \right\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{P}({}^{n_1}E_1, \dots, {}^{n_m}E_m; F)$.

(ii) $\|P(x_1, \dots, x_m)\| \leq \|P\| \|x_1\|^{n_1} \cdots \|x_m\|^{n_m}$ para todo $x_j \in E_j, j = 1, \dots, m$.

(iii) Se F for Banach, então $\mathcal{P}({}^{n_1}E_1, \dots, {}^{n_m}E_m; F)$ é um espaço de Banach.

Abaixo, apresentaremos as extensões multipolinomiais do *Princípio da Limitação Uniforme* e do *Teorema de Banach-Steinhaus*.

Teorema 1.15 (Princípio da Limitação Uniforme). *Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach, F um espaço normado e $\{P_i\}_{i \in I}$ uma família em $\mathcal{P}({}^{n_1}E_1, \dots, {}^{n_m}E_m; F)$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Para cada $(x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \dots \times E_m$, existe uma constante $C_x < \infty$ tal que

$$\sup_{i \in I} \|P_i(x)\| < C_x.$$

(ii) A família $\{P_i\}_{i \in I}$ é limitada na norma, isto é,

$$\sup_{i \in I} \|P_i\| < \infty.$$

Corolário 1.16 (Teorema de Banach-Steinhaus). Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach, F um espaço normado e (P_k) uma sequência em $\mathcal{P}(^{n_1}E_1, \dots, ^{n_m}E_m; F)$ tal que $(P_k(x_1, \dots, x_m))$ converge em F para todo $(x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \dots \times E_m$. Se definirmos $P : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ por

$$P(x_1, \dots, x_m) := \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x_1, \dots, x_m),$$

então $P \in \mathcal{P}(^{n_1}E_1, \dots, ^{n_m}E_m; F)$.

Se nas hipóteses do corolário anterior for adicionado F um espaço de Banach, obtém-se que (P_k) converge para P uniformemente em subconjuntos compactos de $E_1 \times \dots \times E_m$.

Corolário 1.17. Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Banach e $P, \{P_k\}_k$ multipolinômios em $\mathcal{P}(^{n_1}E_1, \dots, ^{n_m}E_m; F)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x_1, \dots, x_m) = P(x_1, \dots, x_m)$ para todo $(x_1, \dots, x_m)$ em $E_1 \times \dots \times E_m$. Então $(P_k)_k$ converge uniformemente para P em subconjuntos compactos de $E_1 \times \dots \times E_m$.

Estruturas robustas presentes na classe dos operadores somantes

Neste capítulo, apresentamos resultados obtidos provenientes da busca por estruturas topológicas lineares no âmbito dos operadores multilineares somantes. E tais resultados podem ser encontrados em:

[6] N. G. Albuquerque and L. Coleta, *Large structures within the class of summing operators*, J. Math. Anal. Appl. **526** (2023), 127262, 13 pp.

Nossas investigações ocorreram em duas perspectivas: averiguação das recentes noções de lineabilidade pontual e (α, β) -lineabilidade, que são mais restritivas que a noção clássica; e o estudo das classes dos operadores multilineares somantes que assumem valores em espaços quasi-Banach de sequências. Quando trata-se de espaços quasi-Banach, o panorama pode ser bem diferente daquele para espaços de Banach, a convexidade local do espaço é perdida e, com isso, a aplicação, por exemplo, de resultados como o Teorema de Hahn-Banach não é mais possível. Assim, a busca por técnicas de lineabilidade/espacabilidade e, até mesmo, a verificação que aquelas já existentes se aplicam em espaços quasi-Banach pode ser uma questão estimulante e desafiadora.

É bem conhecido pela desigualdade clássica de Bohnenblust–Hille e também pelo Teorema de Defant-Voigt que $\Pi_{(r,1)}^{\text{ms}}({}^m E; \mathbb{K}) \subsetneq \mathcal{L}({}^m E; \mathbb{K}) = \Pi_{(r,1)}^{\text{as}}({}^m E; \mathbb{K})$ para todo $1 \leq r < \frac{2m}{m+1}$. Portanto $\Pi_{(r,1)}^{\text{as}}({}^m E; \mathbb{K}) \setminus \Pi_{(r,1)}^{\text{ms}}({}^m E; \mathbb{K})$ é não vazio e a busca por “grandes” espaços vetoriais fechados surge naturalmente nesse contexto. Problemas semelhantes a esse são respondidos como uma aplicação do resultado que fornecemos. Além disso, como um importante caso particular, provamos que o conjunto da classe dos operadores multilineares

absolutamente somantes que assumem valores em espaços ℓ_q e que não são múltiplos somantes é $\mathfrak{c}$ -espaçável, caso seja não vazio. Mais especificamente: para $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach, multi-parâmetros $(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \in [1, \infty)^m$ e $q \in (0, \infty]$,

$$\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\text{as}}(E_1, \dots, E_m; \ell_q) \setminus \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\text{ms}}(E_1, \dots, E_m; \ell_q)$$

é $\mathfrak{c}$ -espaçável quando não é vazio.

2.1 Operadores somantes e lineabilidade: um breve panorama histórico

A moderna terminologia de lineabilidade e espaçabilidade foi cunhada por R. M. Aron, V. I. Gurariy e J. B. Seoane-Sepúlveda em [16]: para α um número cardinal, um subconjunto A de um espaço vetorial V é dito α -*lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço de V de dimensão α . Se V , em adição, é um espaço vetorial topológico, então A é dito α -*espaçável* se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço fechado de V de dimensão α . Esses conceitos são amplamente investigados em diversos ramos da pesquisa, em particular, no contexto dos operadores somantes, o foco desse panorama.

O primeiro trabalho conhecido sobre lineabilidade no contexto dos operadores lineares absolutamente somantes é devido a D. Puglisi e J. B. Seoane-Sepúlveda (2008), que provaram dentre outros resultados interessantes, que para um espaço de Banach E com certa propriedade, o conjunto dos operadores lineares limitados assumindo valores em ℓ_2 que não são absolutamente-somantes é lineável. Mais precisamente:

[65, Theorem 1.3] Seja E um espaço de Banach com a propriedade das duas séries.

Então $\mathcal{L}(E; \ell_2) \setminus \Pi_1(E; \ell_2)$ é lineável.

No mesmo artigo, os autores levantaram o seguinte questionamento: se E é super-reflexivo e $p \geq 1$, então o conjunto $\mathcal{L}(E; F) \setminus \Pi_p(E; F)$ é lineável para todo espaço de Banach F ? Exceto para casos *exóticos*, G. Botelho, D. Diniz e D. Pellegrino (2009) responderam positivamente a esse questionamento. Eles provaram que o conjunto $\mathcal{K}(E; F) \setminus \Pi_p(E; F)$ dos operadores lineares compactos que não são p -somantes é lineável para $p \geq 1$ e sob algumas condições de reflexividade, dimensão infinita e base incondicional sobre os espaços de Banach E e F .

[30, Theorem 2.1] Sejam $p \geq 1$ e E um espaço de Banach super-reflexivo. Se ou E contém um subespaço complementado de dimensão infinita com base in-

condicional, ou F contém uma sequência básica incondicional infinita, então $\mathcal{K}(E; F) \setminus \Pi_p(E; F)$ (assim $\mathcal{L}(E; F) \setminus \Pi_p(E; F)$) é lineável.

Em seguida, D. Kitson e R. M. Timoney (2011) generalizaram os resultados anteriores obtendo um critério de espaçabilidade para espaços de Fréchet com diversas aplicações, dentre elas:

[50, Theorema 4.1] Sejam E e F espaços de Banach com dimensão infinita, com E super-reflexivo. Então $\mathcal{K}(E; F) \setminus \bigcup_{1 \leq p < \infty} \Pi_p(E; F)$ é espaçável.

Neste momento, torna-se interessante destacar um ponto levantado em [30] a respeito da lineabilidade do conjunto geral $\mathcal{I}_1(E; F) \setminus \mathcal{I}_2(E; F)$, onde $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ são ideais de operadores lineares e E, F espaços de Banach. Com um contraexemplo, foi mostrado que o conjunto $\mathcal{I}_1(E; F) \setminus \mathcal{I}_2(E; F)$ não é, em geral, lineável: se E é um espaço de Banach complexo hereditariamente indecomponível e SS denota o ideal dos operadores lineares estritamente singulares, o conjunto $\mathcal{L}(E; E) \setminus SS(E; E)$ não contém, sequer, um subespaço 2-dimensional (veja [30, Example 1.2]). Entretanto, para E ou F espaços de Banach “especiais”, chamados σ -reproduzíveis (veja [47, Definition 3.1] ou Definição 3.1), F. L. Hernández, C. Ruiz e V. M. Sánchez (2015) obtiveram a espaçabilidade do conjunto geral $\mathcal{I}_1(E; F) \setminus \mathcal{I}_2(E; F)$, caso esse seja não vazio.

[47, Theorem 3.5] Sejam $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ ideais de operadores lineares tal que $\mathcal{I}_1(E; F) \setminus \mathcal{I}_2(E; F)$ é não vazio para E, F espaços de Banach. Se E ou F é σ -reproduzível e $\mathcal{I}_1(E; F)$ é completo para uma ideal norma, então $\mathcal{I}_1(E; F) \setminus \mathcal{I}_2(E; F)$ é espaçável.

Em 2017, G. Araújo e D. Pellegrino estabeleceram, provavelmente, o primeiro resultado de lineabilidade/espaçabilidade no âmbito dos operadores multilineares somantes. O resultado teve como motivação a famosa Desigualdade de Bohnenblust–Hille que garante, em linguagem de operadores múltiplos somantes, que todo operador $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathbb{K})$ é $(\frac{2m}{m+1}, 1)$ -somante para todos espaços de Banach $E_1, \dots, E_m$, e o valor $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo.

[14, Theorem 2.1] Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo e $p \in [2, \infty)$. Se $1 \leq s < p'$ e $r < \frac{2ms}{s+2m-ms}$, então $\mathcal{L}(^m \ell_p; \mathbb{K}) \setminus \Pi_{(r,s)}^{ms}(^m \ell_p; \mathbb{K})$ é maximal espaçável.

No âmbito dos operadores lineares contínuos definidos em espaços quasi-Banach que não são absolutamente somantes, D. Tomáz (2018) obteve o próximo resultado.

[69, Theorem 3.1] Sejam $0 < p < 1$ e $1 \leq s \leq r < \infty$. Então

$$\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p) \setminus \bigcup_{1 \leq s \leq r < \infty} \Pi_{(r,s)}(\ell_p; \ell_p)$$

é $\mathfrak{c}$ -lineável. Além disso, o resultado é ótimo, uma vez que não é válido para $p \geq 1$.

Em 2020, V. V. Fávaro, D. Pellegrino e P. Rueda (2020) mostraram para operadores lineares contínuos assumindo valores em famílias somáveis gerais de escalares e que não são absolutamente somantes a (α, β) -lineabilidade do conjunto (veja Definição 2.5).

[44, Proposition 3.2] Seja E um espaço de Banach com $\dim E < \text{card}(I)$. Se $\mathcal{L}(E; \ell_2(I)) \setminus \Pi_1(E; \ell_2(I))$ é não vazio, então ele é $(\alpha, \text{card}(I))$ -lineável para $\alpha < \text{card}(I)$.

Recentemente, T. R. Alves e P. Turco (2022) lidaram com a espaçabilidade de conjuntos de aplicações lineares p -compactas, cujo domínio e contradomínio são espaços c_0 e ℓ_r , com $1 \leq r < \infty$, obtendo diversas aplicações interessantes, inclusive no contexto dos operadores somantes [11, Theorem 2.6].

2.2 Preliminares

Inicialmente vamos estabelecer algumas notações e relembrar conceitos necessários. Escreveremos $\text{card } \mathbb{R} = \mathfrak{c}$ e $\text{card } \mathbb{N} = \aleph_0$. Para m um inteiro positivo, $\mathbf{i} := (i_1, \dots, i_m)$ um multi-índice em $\mathbb{N}^m$ e $\mathbf{r} := (r_1, \dots, r_m)$ um multi-parâmetro em $(0, \infty]^m$, relembremos que

$$\ell_{\mathbf{r}} := \ell_{r_1} \left(\cdots \left(\ell_{r_{m-1}} \left(\ell_{r_m}(E) \right) \cdots \right) \right)$$

é o espaço (quasi-)Banach que reúne todas as multi-matrizes $(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m} \in E^{\mathbb{N}^m}$ com valores em E e com $\ell_{\mathbf{r}}$ -norma finita, *i.e.*,

$$\|(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}\|_{\ell_{\mathbf{r}}(E)} := \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\sum_{i_2=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} \|x_{\mathbf{i}}\|_E^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \cdots \right)^{\frac{r_2}{r_3}} \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} < \infty.$$

A $\ell_{\mathbf{r}}$ -norma $\|\cdot\|_{\ell_{\mathbf{r}}(E)}$ pode ser vista como um caso particular de uma definição geral, na qual o conjunto de índices é tomado arbitrário: dado $\Lambda \subset \mathbb{N}^m$ um conjunto de índices não vazio,

por $(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda}$ representamos uma multi-matriz com valores em E e indexada sobre Λ , e sua $\ell_{\mathbf{r}}$ -norma pode ser vista como

$$\|(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda}\|_{\ell_{\mathbf{r}}(E)} = \|(x_{\mathbf{i}} \cdot 1_{\Lambda}(\mathbf{i}))_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}\|_{\ell_{\mathbf{r}}(E)},$$

onde 1_{Λ} é a função característica de Λ . Para mais detalhes sobre a $\ell_{\mathbf{r}}$ -norma, consulte a Seção 1.3 do Capítulo 1, onde propriedades úteis de monotonicidade são destacadas. O resultado deste Capítulo (Teorema 2.3) e a Proposição 2.2 são obtidos para operadores que assumem valores nos chamados *espaços de sequência padrão quasi-Banach*. Assim, passemos a sua definição.

Definição 2.1 (Espaço de sequência padrão). Um *espaço de sequência padrão quasi-Banach* sobre um espaço de Banach X é um espaço quasi-Banach $\mathcal{E}$ de dimensão infinita, cujos elementos são sequências de entradas em X e com as operações usuais satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x_j\|_X \leq C\|x\|_{\mathcal{E}},$$

para todo $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ e todo $j \in \mathbb{N}$.

- (ii) Se $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ e $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de x , então $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ e

$$\|(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}\|_{\mathcal{E}} \leq \|x\|_{\mathcal{E}}.$$

- (iii) Se $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ e $\mathbb{N}' := \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, então a sequência $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ definida por

$$y_j := \begin{cases} x_i, & \text{se } j = n_i, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

pertence a $\mathcal{E}$ e $\|y\|_{\mathcal{E}} \leq \|x\|_{\mathcal{E}}$.

A combinação de (ii) e (iii) resulta em $\|y\|_{\mathcal{E}} = \|x\|_{\mathcal{E}}$. Com relação à notação, a n -ésima coordenada de uma sequência $z \in \mathcal{E} \subset X^{\mathbb{N}}$ será denotada por z_n ou, quando mais precisão for necessária, por $z(n)$. A menos que o contrário seja expressamente estabelecido, $\mathcal{E}$ representará um espaço de sequência padrão quasi-Banach.

Exemplo 2.1. Espaços de seqüências usuais são espaços de seqüências padrão (quasi-)Banach. Como, por exemplo, os clássicos espaços de seqüências $\ell_p(E)$, $\ell_p^w(E)$, $\ell_p^u(E)$ com $p \in (0, \infty)$, $c_0(E)$, $c(E)$, e os espaços Lorentz $\ell_{p,q}$. Para uma discussão mais profunda sobre os espaços de seqüências gerais e para mais detalhes e exemplos, indicamos ao leitor [31, 41].

Finalizamos esta seção com a Proposição 2.2, cujo resultado se revelará útil e intimamente ligado a uma técnica de lineabilidade que remonta a [58]. Mas antes, precisaremos do próximo lema.

Lema 2.1. Sejam $\mathbf{r} := (r_1, \dots, r_m) \in [1, \infty)^m$ e $\Lambda \subset \mathbb{N}^m$. Se $(\alpha_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda} \notin \ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E})$, então, ou

$$\left((\alpha_{\mathbf{i}}(j))_{j \in \mathbb{N}'} \right)_{\mathbf{i} \in \Lambda} \notin \ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E}), \quad \text{ou} \quad \left((\alpha_{\mathbf{i}}(j))_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}'} \right)_{\mathbf{i} \in \Lambda} \notin \ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E}) \quad (2.1)$$

para qualquer $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, com $\text{card } \mathbb{N}' = \text{card}(\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}') = \aleph_0$.

Demonstração. Suponhamos que exista $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, com $\text{card } \mathbb{N}' = \text{card}(\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}') = \aleph_0$ e tal que (2.1) não aconteça. Para esse $\mathbb{N}'$, ambas as seqüências em (2.1) pertencem a $\ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E})$, ou seja,

$$\left\| \left((\alpha_{\mathbf{i}}(j))_{j \in \mathbb{N}'} \right)_{\mathbf{i} \in \Lambda} \right\|_{\ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E})} < \infty \quad \text{e} \quad \left\| \left((\alpha_{\mathbf{i}}(j))_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}'} \right)_{\mathbf{i} \in \Lambda} \right\|_{\ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E})} < \infty.$$

Definindo as seqüências $(\gamma_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda}$ e $(\beta_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda}$, respectivamente, por

$$\gamma_{\mathbf{i}}(j) := \begin{cases} \alpha_{\mathbf{i}}(j), & \text{se } j \in \mathbb{N}', \\ 0, & \text{se } j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}' \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta_{\mathbf{i}}(j) := \begin{cases} 0, & \text{se } j \in \mathbb{N}', \\ \alpha_{\mathbf{i}}(j), & \text{se } j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}' \end{cases},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \left((\alpha_{\mathbf{i}}(j))_{j \in \mathbb{N}} \right)_{\mathbf{i} \in \Lambda} \right\|_{\ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E})} &= \left\| \left((\gamma_{\mathbf{i}} + \beta_{\mathbf{i}})(j) \right)_{j \in \mathbb{N}} \right\|_{\ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E})} \\ &= \left\| \left((\gamma_{\mathbf{i}}(j))_{j \in \mathbb{N}} \right)_{\mathbf{i} \in \Lambda} + \left((\beta_{\mathbf{i}}(j))_{j \in \mathbb{N}} \right)_{\mathbf{i} \in \Lambda} \right\|_{\ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E})} \\ &\leq \left\| \left((\gamma_{\mathbf{i}}(j))_{j \in \mathbb{N}} \right)_{\mathbf{i} \in \Lambda} \right\|_{\ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E})} + \left\| \left((\beta_{\mathbf{i}}(j))_{j \in \mathbb{N}} \right)_{\mathbf{i} \in \Lambda} \right\|_{\ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E})} \\ &= \left\| \left((\alpha_{\mathbf{i}}(j))_{j \in \mathbb{N}'} \right)_{\mathbf{i} \in \Lambda} \right\|_{\ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E})} + \left\| \left((\alpha_{\mathbf{i}}(j))_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}'} \right)_{\mathbf{i} \in \Lambda} \right\|_{\ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E})} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, uma vez que $(\alpha_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda} \notin \ell_{\mathbf{r}}(\mathcal{E})$. □

Definição 2.2. Dizemos que $(\mathbb{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma *decomposição infinita disjunta* dos números

naturais quando podemos escrever $\mathbb{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}_k$, com cada $\mathbb{N}_k := \{n_1^{(k)} < n_2^{(k)} < \dots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$.

Proposição 2.2. Seja $\mathcal{M}$ um multi-ideal quasi-Banach de operadores. Dada uma decomposição infinita disjunta $(\mathbb{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ e um operador não nulo $T \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$, valem as afirmações seguintes.

(i) Para cada natural $k \geq 2$, a aplicação $T_k : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow \mathcal{E}$ definida por

$$T_k x(j) := \begin{cases} 0, & \text{se } j \notin \mathbb{N}_k, \\ Tx(i), & \text{se } j = n_i^{(k)} \in \mathbb{N}_k \end{cases}$$

pertence a $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$ e $\|T_k x\|_{\mathcal{E}} = \|Tx\|_{\mathcal{E}}$ para todo $x \in E_1 \times \dots \times E_m$. Além disso, o conjunto $\{T_k : k \geq 2\}$ é linearmente independente.

(ii) Para algum $0 < p \leq 1$, a aplicação $\Psi : \ell_p \rightarrow \mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$ dada por

$$\Psi a := \alpha_1 T + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j T_j, \quad a = (\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell_p,$$

é bem-definida, linear, limitada e injetiva.

Demonstração. (i) Uma vez que T é um operador não nulo, existe $x_0 \in E_1 \times \dots \times E_m$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Tx_0(j_0) \neq 0$, onde $Tx_0(j_0)$ é a j_0 -ésima coordenada da sequência $Tx_0 \in \mathcal{E}$. Por simplicidade, assumiremos que $j_0 \in \mathbb{N}_1$. Para cada $k \geq 2$, consideremos o subconjunto $\mathbb{N}_k = \{n_1^{(k)} < n_2^{(k)} < \dots\}$ e, para esse, usando a condição (iii) da Definição 2.1, definamos a aplicação $V_k : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ por $V_k x := (y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ para cada $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}$.

Como V_k é uma aplicação linear limitada, já que $\|V_k\| \leq 1$, então $T_k = V_k \circ T$ pertence a $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$ e $\|T_k\|_{\mathcal{M}} \leq \|T\|_{\mathcal{M}}$. A partir das condições (ii) e (iii) de espaços de sequência padrão, temos

$$\|T_k x\|_{\mathcal{E}} = \|(V_k \circ T)x\|_{\mathcal{E}} = \|V_k(Tx)\|_{\mathcal{E}} = \|Tx\|_{\mathcal{E}}$$

para todo $x \in E_1 \times \dots \times E_m$. Por fim, como $\{T_k x\}_{k \geq 2}$ é uma família de sequências em $\mathcal{E}$ cujos suportes são dois a dois disjuntos para qualquer x , segue que $\{T_k : k \geq 2\}$ é linearmente independente.

(ii) Como $A := \mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E}) \subset \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$ é um p -Banach para algum $p \in (0, 1]$,

para qualquer $a = (\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell_p$,

$$\sum_{j \geq 2} \|\alpha_j T_j\|_A^p = \sum_{j \geq 2} |\alpha_j|^p \|T_j\|_A^p = \sum_{j \geq 2} |\alpha_j|^p \|T\|_A^p = \|T\|_A^p \sum_{j \geq 2} |\alpha_j|^p < \infty,$$

o que nos diz que a série $\sum_{j \geq 2} \alpha_j T_j$ converge em A e, consequentemente, a aplicação $\Psi : \ell_p \rightarrow A$ está bem-definida e é linear. A fim de simplificar a notação, escreveremos $\Psi_a := \Psi a$ para $a \in \ell_p$. Agora, suponhamos que $\Psi_a = 0$. Combinando $T x_0(j_0) \neq 0$ com o fato que a sequência $T_j x$ tem coordenadas nulas em $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_j$, para todos $x \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e $j \geq 2$,

$$0 = \Psi_a x_0(j_0) = \alpha_1 T x_0(j_0) + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j T_j x_0(j_0) = \alpha_1 T x_0(j_0),$$

implicando que $\alpha_1 = 0$. Como $(T_j)_j$ é linearmente independente, temos $\alpha_j = 0$ para todo j . Portanto $a = 0$, o que garante que Ψ é injetiva. $\square$

2.3 Espaçabilidade de operadores multilineares somantes

Para $m \in \mathbb{N}$ um inteiro positivo, $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in [1, +\infty)^m$ e $\Lambda \subset \mathbb{N}^m$ um conjunto de índices, relembremos que um operador m -linear $T : E_1 \times \cdots \times E_m \rightarrow F$ é dito Λ -($\mathbf{r}; \mathbf{s}$)-somante se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(Tx_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Lambda}\|_{\ell_{\mathbf{r}}(F)} \leq C \prod_{k=1}^m \sup_{\phi_k \in B_{E'_k}} \left(\sum_{i=1}^N |\phi(x_i^{(k)})|^{s_k} \right)^{\frac{1}{s_k}} \quad (2.2)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ e $x_i^{(k)} \in E_k$, $k = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, N$. Aqui, $T x_{\mathbf{i}} := T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})$ e a classe de todos os operadores que cumprem a desigualdade anterior é denotada por $\Pi_{(\mathbf{r}; \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; F)$, que é um espaço de Banach munido com a norma $\pi_{(\mathbf{r}; \mathbf{s})}^{\Lambda}(T)$ tomada sob o ínfimo das constantes $C > 0$ satisfazendo (2.2). Alguns detalhes sobre essa classe geral de operadores somantes pode ser encontra na Seção 1.3 do Capítulo 1. Recordemos que, para $\Lambda = \text{Diag}(\mathbb{N}^m) := \{(n, \dots, n) \in \mathbb{N}^m : n \in \mathbb{N}\}$ e $\Lambda = \mathbb{N}^m$, a classe Π^{Λ} recupera a classe dos operadores *absolutamente* e *múltiplos* somantes, respectivamente. Além disso, podemos tratar o contradomínio F como um espaço quasi-Banach e, com argumento padrão, mostrar que $\Pi_{(\mathbf{r}; \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; F)$ também é um espaço quasi-Banach. Para mais detalhes e aplicações sobre a teoria dos operadores absolutamente e múltiplos somantes, veja [33] e suas referências.

Nossas investigações no campo da lineabilidade para operadores Λ -somantes resultaram

em respostas na recente noção “geométrica” de *lineabilidade pontual*, introduzida por D. Pellegrino e A. Raposo Jr. [60].

Definição 2.3 (Lineabilidade/espacabilidade pontual). Sejam V um espaço vetorial e α um número cardinal, com $\alpha \leq \dim V$. Um subconjunto $A \subset V$ é α -pontualmente lineável se para cada $x \in A$, existe um subespaço $W = W_{x,\alpha}$ de V tal que $x \in W \subset A \cup \{0\}$ e $\dim W = \alpha$. Se, em adição, V for um espaço vetorial topológico e W puder ser escolhido fechado, A é dito α -pontualmente espacável.

Para $\alpha \geq \aleph_0$ diremos que o conjunto é, simplesmente, pontualmente lineável ou pontualmente espacável, omitindo assim, a escrita do cardinal. Lineabilidade pontual é, claramente, um conceito mais restritivo que lineabilidade clássica. O primeiro enfrenta um tecnicismo que nem sempre é abordado nos resultados usuais de lineabilidade: o subespaço gerado deve conter todo vetor-mãe inicial. Além disso, essa noção está relacionada com a (α, β) -lineabilidade (veja Definição 2.5), basta considerar $\alpha = 1$ nessa última. Para mais detalhes, referenciamos [60].

Teorema 2.3. *Sejam $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u} \in [1, +\infty)^m$ e $\Lambda \subset \Gamma \subset \mathbb{N}^m$ conjuntos de índices. Então*

$$\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E}) \setminus \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\Gamma}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$$

é vazio ou pontualmente $\mathfrak{c}$ -espacável.

Demonstração. Para simplificar a notação, escrevamos $A := \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$ e $B := \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\Gamma}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$. Vamos supor que existe um operador $T \in A \setminus B$ e, primeiramente, provaremos que $A \setminus B$ é pontualmente $\mathfrak{c}$ -lineável. Fixemos $x_0 \in E_1 \times \dots \times E_m$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ tais que $Tx_0(j_0) \neq 0$. Agora, consideremos sequências fracamente somáveis $z^{(j)} = (z_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{u_j}^w(E_j)$, $j = 1, \dots, m$, de modo que

$$\|(Tz_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Gamma}\|_{\ell_{\mathbf{t}}(\mathcal{E})} = \infty.$$

Aqui relembre a notação $Tz_{\mathbf{i}} := T(z_{i_1}^{(1)}, \dots, z_{i_m}^{(m)})$. O Lema 2.1 garante que podemos tomar $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ com $j_0 \in \mathbb{N}_1$, $\text{card } \mathbb{N}_1 = \text{card}(\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1) = \aleph_0$ e ainda

$$\left\| ((Tz_{\mathbf{i}}(n))_{n \in \mathbb{N}_1})_{\mathbf{i} \in \Gamma} \right\|_{\ell_{\mathbf{t}}(\mathcal{E})} = \infty. \quad (2.3)$$

Consideremos a seguinte decomposição infinita disjunta (Definição 2.2): $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1 = \bigcup_{k \geq 2} \mathbb{N}_k$. Então, a Proposição 2.2 (i), aplicada para $\mathcal{M} = \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}$, fornece uma sequência $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de

2. Estruturas robustas presentes na classe dos operadores somantes

operadores (linearmente independentes), com $\|T_k x\|_{\mathcal{E}} = \|Tx\|_{\mathcal{E}}$ para todo $x \in E_1 \times \cdots \times E_m$. Isso nos permite concluir $\|T_k\|_A = \|T\|_A$ para todo k e, conseqüentemente, que $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pertence a $A \setminus B$.

Para obtermos um espaço $\mathfrak{c}$ -dimensional em $A \setminus B$ que contenha T , usaremos a construção e a notação da Proposição 2.2 (ii): para algum $0 < p \leq 1$, a aplicação $\Psi : \ell_p \rightarrow A$ está bem-definida, é limitada, linear e injetiva. De acordo com isso, $\Psi(\ell_p) \subset A$ é um espaço vetorial $\mathfrak{c}$ -dimensional que contém T . Agora devemos provar que $\Psi(\ell_p) \setminus \{0\} \subset A \setminus B$, isto é: $\Psi_a \notin B$ para qualquer $a = (\alpha_j)_j \in \ell_p \setminus \{0\}$. Assim, consideremos $z^{(j)} \in \ell_{u_j}^w(E_j)$, $j = 1, \dots, m$, como em (2.3). Se $\alpha_1 \neq 0$, usando novamente que $T_j z$ é uma sequência com coordenadas nulas em $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_j$ para $j \geq 2$ e qualquer z ,

$$\begin{aligned} \|\Psi_a z_{\mathbf{i}}\|_{\mathcal{E}} &= \left\| \left(\alpha_1 T z_{\mathbf{i}}(n) + \sum_{j \geq 2} \alpha_j T_j z_{\mathbf{i}}(n) \right)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathcal{E}} \geq \left\| \left(\alpha_1 T z_{\mathbf{i}}(n) + \sum_{j \geq 2} \alpha_j T_j z_{\mathbf{i}}(n) \right)_{n \in \mathbb{N}_1} \right\|_{\mathcal{E}} \\ &= \|(\alpha_1 T z_{\mathbf{i}}(n))_{n \in \mathbb{N}_1}\|_{\mathcal{E}} \\ &= |\alpha_1| \|(T z_{\mathbf{i}}(n))_{n \in \mathbb{N}_1}\|_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

A monotonicidade da quasi-norma fornece

$$\|(\Psi_a z_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Gamma}\|_{\ell_{\mathbf{t}}(\mathcal{E})} \geq |\alpha_1| \left\| ((T z_{\mathbf{i}}(n))_{n \in \mathbb{N}_1})_{\mathbf{i} \in \Gamma} \right\|_{\ell_{\mathbf{t}}(\mathcal{E})} = \infty,$$

com a última desigualdade sendo uma consequência de (2.3), o que mostra que $\Psi_a \notin B$. Neste momento, retornemos ao caso $\alpha_1 = 0$, no qual procederemos de maneira similar. Consideremos $\alpha_i \neq 0$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Usando a definição dos operadores $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ na Proposição 2.2 (i),

$$\|\Psi_a z_{\mathbf{i}}\|_{\mathcal{E}} = \left\| \left(\sum_{j \geq 2} \alpha_j T_j z_{\mathbf{i}}(n) \right)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathcal{E}} \geq \left\| \left(\alpha_i T_i z_{\mathbf{i}} \left(n_k^{(i)} \right) \right)_{k \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathcal{E}} = |\alpha_i| \|(T z_{\mathbf{i}}(k))_{k \in \mathbb{N}}\|_{\mathcal{E}},$$

assim

$$\|(\Psi_a z_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Gamma}\|_{\ell_{\mathbf{t}}(\mathcal{E})} \geq |\alpha_i| \|(T z_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \Gamma}\|_{\ell_{\mathbf{t}}(\mathcal{E})} = \infty.$$

E isso prova a $\mathfrak{c}$ -lineabilidade pontual de $A \setminus B$.

Agora provaremos a $\mathfrak{c}$ -espaçabilidade pontual de $A \setminus B$. Nosso candidato natural a subespaço fechado de dimensão $\mathfrak{c}$ de A é $\overline{\Psi(\ell_p)}$. Assim, devemos verificar que $\overline{\Psi(\ell_p)} \setminus \{0\} \subset A \setminus B$ e, para tal, fixemos $S = \lim_k \Psi_k \in \overline{\Psi(\ell_p)} \setminus \{0\}$, com $\Psi_k := \Psi_{a^{(k)}}$ e $a^{(k)} = \left(\alpha_j^{(k)} \right)_j \in \ell_p$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Inicialmente, verificaremos que o limite $\lim_k \alpha_1^{(k)}$ existe. Notemos que, para todos $b = (\beta_n)_n \in \ell_p$, $x \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e $j \in \mathbb{N}_1$, $\Psi_b x(j) = \beta_1 T x(j)$. Tomando $x_0 \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e $j_0 \in \mathbb{N}_1$ tais que $T x_0(j_0) \neq 0$, temos

$$S x_0(j_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k x_0(j_0) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_1^{(k)} \right) T x_0(j_0),$$

o que garante a existência do limite $\lim_k \alpha_1^{(k)}$.

Considere $z^{(j)} \in \ell_{u_j}^w(E_j)$, $j = 1, \dots, m$, como em (2.3). Supondo que o $\lim_k \alpha_1^{(k)} \neq 0$, para todo $x \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e para todo $a \in \ell_p$, vale

$$\begin{aligned} \|\Psi_a x\|_{\mathcal{E}} &= \left\| \left(\alpha_1 T x(i) + \sum_{j \geq 2} \alpha_j T_j x(i) \right)_{i \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathcal{E}} \\ &\geq \left\| \left(\alpha_1 T x(i) + \sum_{j \geq 2} \alpha_j T_j x(i) \right)_{i \in \mathbb{N}_1} \right\|_{\mathcal{E}} \\ &= |\alpha_1| \|(T x(i))_{i \in \mathbb{N}_1}\|_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Então

$$\|S z_i\|_{\mathcal{E}} \geq \lim_k |\alpha_1^{(k)}| \|(T z_i(i))_{i \in \mathbb{N}_1}\|_{\mathcal{E}},$$

de onde

$$\|(S z_i)_{i \in \Gamma}\|_{\ell_t(\mathcal{E})} \geq \lim_k |\alpha_1^{(k)}| \cdot \|(T z_i)_{i \in \Gamma}\|_{\ell_t(\mathcal{E})} = \infty.$$

Façamos agora o caso $\lim_k \alpha_1^{(k)} = 0$. Como $S \neq 0$, existem $x \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e $i_0 \in \mathbb{N}$ tais que $S x(i_0) \neq 0$. Além disso, existem únicos $l, t \in \mathbb{N}$ de modo que podemos escrever $i_0 = n_t^{(l)}$ e, assim

$$\begin{aligned} S x(i_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k x(i_0) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\alpha_1^{(k)} T x(i_0) + \sum_{j \geq 2} \alpha_j^{(k)} T_j x(i_0) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\alpha_1^{(k)} T x(n_t^{(l)}) + \alpha_l^{(k)} T_l x(n_t^{(l)}) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_l^{(k)} T x(t), \end{aligned}$$

o que nos garante $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_l^{(k)} \neq 0$. Dispondo disso,

$$\begin{aligned}
 \|Sx\|_{\mathcal{E}} &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\alpha_1^{(k)} Tx + \sum_{j \geq 2} \alpha_j^{(k)} T_j x \right] \right\|_{\mathcal{E}} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j \geq 2} \alpha_j^{(k)} T_j x \right\|_{\mathcal{E}} \\
 &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{j \geq 2} \alpha_j^{(k)} T_j x(i) \right)_{i \in \mathbb{N}_l} \right\|_{\mathcal{E}} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(\alpha_l^{(k)} T_l x(i) \right)_{i \in \mathbb{N}_l} \right\|_{\mathcal{E}} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_l^{(k)}| \left\| (T_l x(i))_{i \in \mathbb{N}_l} \right\|_{\mathcal{E}} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_l^{(k)}| \left\| (Tx(i))_{i \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathcal{E}} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_l^{(k)}| \|Tx\|_{\mathcal{E}}
 \end{aligned}$$

para todo $x \in E_1 \times \cdots \times E_m$. Em particular, para cada z_i como em (2.3),

$$\|(Sz_i)_{i \in \Gamma}\|_{\ell_t(\mathcal{E})} \geq \left(\lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_l^{(k)}| \right) \cdot \|(Tz_i)_{i \in \Gamma}\|_{\ell_t(\mathcal{E})} = \infty.$$

Isso mostra que $S \notin B$ e, portanto, isso conclui a prova. $\square$

Procedendo da mesma maneira que a prova do Teorema 2.3, obtemos o próximo resultado.

Teorema 2.4. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{N}^m$ um conjunto de índices e $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in [1, +\infty)^m$. Então*

$$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E}) \setminus \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$$

é ou vazio, ou pontualmente $\mathfrak{c}$ -espaçável.

Nos resultados anteriores, consideremos $\Lambda = \text{Diag}(\mathbb{N}^m) := \{(n, \dots, n) \in \mathbb{N}^m : n \in \mathbb{N}\}$ e $\Gamma = \mathbb{N}^m$, o que resulta no seguinte.

Corolário 2.5. *Sejam $q \in (0, \infty]$ e $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u} \in [1, +\infty)^m$. Então, cada um dos conjuntos*

$$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \ell_q) \setminus \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\text{ms}}(E_1, \dots, E_m; \ell_q), \quad \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \ell_q) \setminus \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\text{as}}(E_1, \dots, E_m; \ell_q)$$

e

$$\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\text{as}}(E_1, \dots, E_m; \ell_q) \setminus \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\text{ms}}(E_1, \dots, E_m; \ell_q)$$

é ou vazio, ou pontualmente $\mathfrak{c}$ -espaçável.

2.3.1 Operadores não absolutamente somantes em espaços clássicos de sequências

Nesta subseção, dedicamos nossa atenção aos operadores lineares limitados definidos nos espaços quasi-Banach clássicos ℓ_q para $0 < q < 1$ que falham em ser absolutamente somantes. Mais precisamente, para $0 < q < 1$, investigamos grandes estruturas lineares topológicas em $\mathcal{L}(\ell_q, \ell_q) \setminus \bigcup_{1 \leq s \leq r < \infty} \Pi_{(r,s)}(\ell_q, \ell_q)$. Esse assunto foi recentemente investigado em [69], onde a $\mathfrak{c}$ -lineabilidade foi obtida. Aqui, damos um passo à frente, provando que o conjunto é $\mathfrak{c}$ -espaçável. Assim, o resultado seguinte generaliza [69, Theorem 3.1].

Teorema 2.6. *Seja $0 < q < 1$. Então*

$$\mathcal{L}(\ell_q; \ell_q) \setminus \bigcup_{1 \leq s \leq r < \infty} \Pi_{(r,s)}(\ell_q; \ell_q)$$

é $\mathfrak{c}$ -espaçável. Além disso, o resultado é ótimo, uma vez que não é válido para $q \geq 1$.

Demonstração. Primeiramente, precisamos garantir que o conjunto em questão é não vazio. E isso segue de um resultado chave devido a Maddox [53], o qual provou que a aplicação identidade em ℓ_q , $Id : \ell_q \rightarrow \ell_q$, não é (r, s) -absolutamente somante para quaisquer que sejam os parâmetros $1 \leq s \leq r < \infty$ e para $0 < q < 1$ (para mais detalhes veja [69]).

Assim, podemos tomar $T := Id \in \mathcal{L}(\ell_q; \ell_q) \setminus \bigcup_{1 \leq s \leq r < \infty} \Pi_{(r,s)}(\ell_q; \ell_q)$. O argumento é semelhante à prova do Teorema 2.3. Mencionaremos apenas as pequenas mudanças necessárias: na Proposição 2.2 podemos tomar qualquer decomposição infinita enumerável de conjuntos infinitos dois a dois disjuntos $(\mathbb{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sem adição a qualquer outra restrição; e o operador Ψ no item (ii) deve ser definido como $\Psi_a := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j T_j$ para $a = (\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell_p$. A última afirmação do Teorema foi observada em [69], para $q \geq 1$ a coincidência $\Pi_{(\max\{2,q\},1)}(\ell_q; \ell_q) = \mathcal{L}(\ell_q; \ell_q)$ é bem conhecida. $\square$

2.4 Operadores absolutamente somantes e operadores Dunford-Pettis

Ainda no contexto dos operadores somantes, adicionamos nesta seção investigações que remontam aos denotados operadores *Dunford-Pettis*, também conhecidos como *completamente contínuos*. Verificaremos que o conjunto dos operadores lineares somantes que

assumem valor em ℓ_q , $1 \leq q < \infty$, que não satisfazem a propriedade de Dunford-Pettis admite estrutura linear, mais especificamente, mostraremos que o conjunto é pontualmente $\mathfrak{c}$ -espaçável.

Definição 2.4 (Operadores Dunford-Pettis). Um operador $T : E \rightarrow F$ é chamado *Dunford-Pettis* (ou *completamente contínuo*) se Tx_n converge para Tx (em F), sempre que x_n converge fracamente para x em E .

A partir de agora, a classe dos operadores Dunford-Pettis entre espaços de Banach E e F será denotada por $DP(E; F)$. Observemos que um operador compacto é um *operador Dunford-Pettis* e, claramente, as duas noções coincidem quando E é reflexivo. O leitor interessado pode encontrar mais informações e um panorama sobre o assunto em [38] e suas referências.

Bennet, em [24], mostrou a conexão entre operadores absolutamente (r, s) -somantes e operadores Dunford-Pettis: para quaisquer espaços de Banach E e F , existe um operador absolutamente (r, s) -somante $T : E \rightarrow F$, com $1 \leq r < s < \infty$, que não satisfaz a propriedade de *Dunford-Pettis*. Com isso, temos um ambiente propício para investigar propriedades de lineabilidade e espaçabilidade. Na verdade, o próximo resultado mostra que o conjunto dos operadores (r, s) -somantes que assumem valores em ℓ_q e que falham em ser Dunford-Pettis é pontualmente $\mathfrak{c}$ -espaçável.

Teorema 2.7. *Sejam $1 \leq q \leq \infty$ e $1 \leq r < s < \infty$. Então*

$$\Pi_{(r,s)}(E; \ell_q) \setminus DP(E; \ell_q)$$

é pontualmente $\mathfrak{c}$ -espaçável.

Demonstração. Para encurtar a notação, escrevamos $A := \Pi_{(r,s)}(E; \ell_q)$ e $DP := DP(E; \ell_q)$. Fixemos um operador não trivial T em $A \setminus DP$ e tomemos uma sequência $(x_n)_n$ que converge fracamente para $x \in E$, porém com Tx_n não convergindo para Tx em ℓ_q . Também consideremos $x_0 \in E$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ tais que $Tx_0(j_0) \neq 0$, isto é, a j_0 -ésima coordenada da sequência $Tx_0 \in \ell_q$ é não nula. Então podemos escolher $\epsilon_0 > 0$ e $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$, com $j_0 \in \mathbb{N}_1$ e $\text{card } \mathbb{N}_1 = \text{card}(\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1) = \aleph_0$, tais que

$$\left(\sum_{l \in \mathbb{N}_1} |Tx_n(l) - Tx(l)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \epsilon_0, \quad (2.4)$$

para algum n grande o suficiente.

Procederemos como na prova do Teorema 2.3, assim, omitiremos alguns detalhes. Aplicaremos a Proposição 2.2 com $\mathcal{M} = \Pi_{(r,s)}$. Fixada uma decomposição infinita disjunta $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1 = \bigcup_{j \geq 2} \mathbb{N}_j$, a sequência de operadores $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ da Proposição 2.2 (i) fornece $\|T_k\|_A = \|T\|_A$ e $T_k \in A \setminus DP$ para todo k . Uma vez que A é um espaço de Banach, na Proposição 2.2 (ii) tomemos $p = 1$ e a aplicação construída, $\Psi : \ell_1 \rightarrow A$, é tal que $\Psi(\ell_1) \subset A$ é um espaço de dimensão $\mathfrak{c}$ contendo T . Restando-nos provar então que $\Psi_a \notin DP$ para todo $a = (\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$ não nulo.

Primeiro, suponhamos que $\alpha_1 = 0$. Uma vez que $\{T_k x\}_{k \in \mathbb{N}}$ são sequências em ℓ_q com suportes dois a dois disjuntos para todo x ,

$$\sum_{l=1}^\infty |\Psi_a x_n(l) - \Psi_a x(l)|^q = \sum_{l=1}^\infty \left| \sum_{j=2}^\infty \alpha_j T_j x_n(l) - \alpha_j T_j x(l) \right|^q = \sum_{l=1}^\infty \left| \sum_{j=2}^\infty \alpha_j T_j (x_n - x)(l) \right|^q.$$

Para cada $l \in \mathbb{N}$, existem únicos $t, s \in \mathbb{N}$ de modo que podemos escrever $l = n_t^{(s)}$ e, com isso,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^\infty \left| \sum_{j=1}^\infty \alpha_j T_j (x_n - x)(l) \right|^q &= \sum_{s,t=1}^\infty \left| \sum_{j=1}^\infty \alpha_j T_j (x_n - x) \left(n_t^{(s)} \right) \right|^q \\ &= \sum_{s,t=1}^\infty \left| \alpha_s T_s (x_n - x) \left(n_t^{(s)} \right) \right|^q \\ &= \sum_{s=1}^\infty |\alpha_s|^q \sum_{t=1}^\infty |T(x_n - x)(t)|^q \\ &\geq \|a\|_{\ell_q}^q \cdot \epsilon_0^q, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de (2.4). Por outro lado, $\alpha_1 \neq 0$ implica

$$\begin{aligned} &\|\Psi_a x_n - \Psi_a x\|_{\ell_q}^q \\ &\geq \sum_{l \in \mathbb{N}_1} \left| \alpha_1 T(x_n - x)(l) + \sum_{j=2}^\infty \alpha_j T_j (x_n - x)(l) \right|^q \\ &= |\alpha_1|^q \cdot \sum_{l \in \mathbb{N}_1} |T(x_n - x)(l)|^q \\ &\geq |\alpha_1|^q \cdot \epsilon_0^q. \end{aligned}$$

Novamente, a última desigualdade segue de (2.4). Provamos, assim, que $\Psi_a \notin DP$ e, portanto, a $\mathfrak{c}$ -lineabilidade de $A \setminus DP$.

Agora provaremos que $\overline{\Psi(\ell_1)} \subset (A \setminus DP) \cup \{0\}$. Seja $S = \lim_k \Psi a^{(k)} \in \overline{\Psi(\ell_1)} \setminus \{0\}$, com

$a^{(k)} = \left(\alpha_j^{(k)}\right)_j \in \ell_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Resta-nos verificar que $S \notin DP$. Consideremos $\epsilon_0 > 0$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in E$ como em (2.4). Pelos mesmos argumentos da prova do Teorema 2.3, existe o $\lim_k \alpha_1^{(k)}$ e, primeiramente, suponhamos que este seja não nulo. Assim temos

$$\begin{aligned}
 \|S(x_n - x)\|_{\ell_q}^q &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\alpha_1^{(k)} T(x_n - x) + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j^{(k)} T_j(x_n - x) \right] \right\|_{\ell_q}^q \\
 &= \sum_{l \in \mathbb{N}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \alpha_1^{(k)} T(x_n - x)(l) + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j^{(k)} T_j(x_n - x)(l) \right|^q \\
 &\geq \sum_{l \in \mathbb{N}_1} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \alpha_1^{(k)} T(x_n - x)(l) + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j^{(k)} T_j(x_n - x)(l) \right|^q \\
 &= \sum_{l \in \mathbb{N}_1} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \alpha_1^{(k)} T(x_n - x)(l) \right|^q \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_1^{(k)}|^q \cdot \sum_{l \in \mathbb{N}_1} |T(x_n - x)(l)|^q \\
 &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_1^{(k)}|^q \cdot \epsilon_0^q.
 \end{aligned}$$

Se $\lim_k \alpha_1^{(k)} = 0$, como verificado na prova da $\mathfrak{c}$ -espaçabilidade pontual no Teorema 2.3, para algum $s \in \mathbb{N}$, $\lim_k \alpha_s^{(k)} \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
 \|S(x_n - x)\|_{\ell_q}^q &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\alpha_1^{(k)} T(x_n - x) + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j^{(k)} T_j(x_n - x) \right] \right\|_{\ell_q}^q \\
 &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j^{(k)} T_j(x_n - x) \right\|_{\ell_q}^q \\
 &= \sum_{l \in \mathbb{N}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j^{(k)} T_j(x_n - x)(l) \right|^q \\
 &\geq \sum_{l \in \mathbb{N}_s} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j^{(k)} T_j(x_n - x)(l) \right|^q \\
 &= \sum_{l \in \mathbb{N}_s} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \alpha_s^{(k)} T_s(x_n - x)(l) \right|^q \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_s^{(k)}|^q \cdot \sum_{l \in \mathbb{N}_s} |T_s(x_n - x)(l)|^q \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_s^{(k)}|^q \cdot \|T(x_n - x)\|_{\ell_q}^q \\
 &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_s^{(k)}|^q \cdot \epsilon_0^q.
 \end{aligned}$$

Portanto S falha em ser um operador Dunford-Pettis e, com isso, concluímos a prova do teorema. $\square$

2.5 Operadores somantes em famílias somáveis gerais de escalares

Nesta seção, lidaremos com operadores assumindo valores em $\ell_q(I)$, o espaço de todas as uplas q -somáveis indexadas em um conjunto arbitrário não vazio I e $q \in (0, \infty)$. Relembremos que $\ell_q(I)$ é o espaço vetorial de todas as funções $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $\sum_{i \in I} |f(i)|^q < \infty$, com essa soma definida por

$$\sum_{i \in I} |f(i)|^q := \sup \left\{ \sum_{i \in F} |f(i)|^q : F \text{ é um subconjunto finito de } I \right\},$$

e também lembre que $\ell_q(I)$ munido com $\|f\|_q = (\sum_{i \in I} |f(i)|^q)^{1/q}$ é um espaço quasi-Banach. Para detalhes sobre o espaço $\ell_q(I)$ e resultados relacionados, referenciamos [62].

Neste contexto, investigamos a noção *geométrica* (α, β) -lineabilidade, recentemente introduzida por V. V. Fávaro, D. Pellegrino e D. Tomaz em [43].

Definição 2.5 ((α, β) -lineabilidade). Sejam α, β, λ números cardinais e V um espaço vetorial, com $\dim V = \lambda$ e $\alpha < \beta \leq \lambda$. Um conjunto $A \subset V$ é (α, β) -lineável se ele é α -lineável e para todo subespaço $W_\alpha \subset V$ com $W_\alpha \subset A \cup \{0\}$ e $\dim W_\alpha = \alpha$, existe um subespaço $W_\beta \subset V$ com $\dim W_\beta = \beta$ e $W_\alpha \subset W_\beta \subset A \cup \{0\}$. Quando V é um espaço vetorial topológico e o subespaço W_β pode ser escolhido fechado, A é dito ser (α, β) -espaçável.

Observe que a (α, β) -lineabilidade engloba a noção clássica de lineabilidade (basta considerar $\alpha = 0$). No que concerne a lineabilidade pontual, é claro que α -lineabilidade/espaçabilidade pontual implica na $(1, \alpha)$ -lineabilidade/espaçabilidade. A seguir, apresentamos nosso resultado nessa direção, e [41, 42, 44, 60] são trabalhos recentes nessa linha.

Proposição 2.8. Sejam $q \in (0, \infty]$, I um conjunto não vazio e E_i um espaço de Banach de dimensão infinita, com $\dim E_i < \text{card } I$ para $i = 1, \dots, m$. Também considere $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u} \in [1, +\infty)^m$ e $\Lambda \subset \Gamma \subset \mathbb{N}^m$ conjuntos de índices. Então

$$\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^\Lambda(E_1, \dots, E_m; \ell_q(I)) \setminus \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^\Gamma(E_1, \dots, E_m; \ell_q(I))$$

é ou vazio, ou $(\alpha, \text{card } I)$ -lineável para um cardinal $\alpha < \text{card } I$.

2. Estruturas robustas presentes na classe dos operadores somantes

Demonstração. Escrevamos $A = \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; \ell_q(I))$ e $B = \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\Gamma}(E_1, \dots, E_m; \ell_q(I))$ para simplificar a notação. Suponhamos que existe $T \in A \setminus B$ e escrevamos $I = \bigcup_{j \in I} I_j$ como uma união de conjuntos dois a dois disjuntos, com $\text{card } I_j = \text{card } I$ para todo $j \in I$. Para cada $j \in I$, denotemos $I_j := \{\eta_i^{(j)} : i \in I\}$ e, assim, $I = \{\eta_i^{(j)} : i, j \in I\}$. Então, para qualquer $\nu \in I$, existem únicos $i, j \in I$ tais que $\nu = \eta_i^{(j)}$. Da mesma forma que a construção na Proposição 2.2 (i), para todo $\nu \in I$, definamos $T_\nu : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow \ell_q(I)$ por

$$T_\nu x \left(\eta_i^{(j)} \right) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq \nu \\ T x(i), & \text{se } j = \nu. \end{cases}$$

Assim, $\|T_\nu\|_A = \|T\|_A$ e isto implica $T_\nu \in A \setminus B$ para todo $\nu \in I$. Além disso, $\{T_\nu : \nu \in I\}$ é linearmente independente e $X := \text{span} \{T_\nu : \nu \in I\} \subset (A \setminus B) \cup \{0\}$. Uma vez que $\dim X = \text{card } I$, obtemos a $\text{card } I$ -lineabilidade de $A \setminus B$.

Agora nos voltemos a verificação de que $A \setminus B$ é $(\alpha, \text{card } I)$ -lineável para todo $\alpha < \text{card } I$. Seja $\mathcal{V} \subset A \setminus B \cup \{0\}$ um subespaço arbitrário de dimensão α . Considere

$$\mathcal{I} := \{Vx : V \in \mathcal{V} \text{ e } x \in E_1 \times \dots \times E_m\} \subset \ell_q(I)$$

e denote por Δ o conjunto de índices formado por todas as coordenadas não nulas de cada família de escalar $Vx \in \mathcal{I} \subset \ell_q(I)$. Percebamos que a cardinalidade de $\mathcal{I}$ não é maior que

$$\beta := \text{card}(E_1 \times \dots \times E_m) \cdot \aleph_0 \cdot \text{card } \mathcal{V} < \text{card } I.$$

Considere uma nova decomposição disjunta de I ,

$$I = \left(\bigcup_{j \in I} \tilde{I}_j \right) \cup \Delta,$$

com $\text{card } \tilde{I}_j = \text{card } I$ para todo $j \in I$. Como antes, temos que construir operadores $F_\nu : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow \ell_q(I)$ de modo que o suporte da família de escalar $F_\nu x \in \ell_q(I)$ encontre-se em $\tilde{I}_\nu$ e também $\|F_\nu x\|_{\ell_p(I)} = \|T_\nu x\|_{\ell_q(I)}$ para todo $x \in E_1 \times \dots \times E_m$. Assim, F_ν pertence a $A \setminus B$ para todo $\nu \in I$ e o subespaço

$$\mathcal{W} := \text{span} \{F_\nu, V : \nu \in I \text{ e } V \in \mathcal{V}\}$$

satisfaz $\mathcal{V} \subset \mathcal{W} \subset (A \setminus B) \cup \{0\}$ e $\dim \mathcal{W} = \text{card } I$. □

2.6 Comentários e problemas

Já sabemos que a $\mathfrak{c}$ -lineabilidade / espaçabilidade pontual implica na $(1, \mathfrak{c})$ -lineabilidade / espaçabilidade. Isso nos permite ver o Teorema 2.3 na perspectiva da (α, β) -lineabilidade para o caso particular $\alpha = 1$ e $\beta = \mathfrak{c}$. Diante disso, nos questionamos se é possível melhorar nosso resultado, obtendo-o para $\alpha \geq 2$, ou seja,

Problema 2.1. Sejam $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u} \in [1, +\infty)^m$ e $\Lambda \subset \Gamma \subset \mathbb{N}^m$ conjuntos de índices. Então

$$\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E}) \setminus \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\Gamma}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$$

é ou vazio, ou $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçável para $\alpha \geq 2$?

Ainda o que tange o Teorema 2.3, o que poderíamos dizer quanto a $\mathfrak{c}$ -espaçabilidade (ou até mesmo quanto a lineabilidade clássica) do resultado para um caso semelhante ao do Teorema 2.6? Mais especificamente, vejamos o problema seguinte.

Problema 2.2. Sejam m um inteiro positivo, $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach, e $\mathcal{E}$ um espaço de sequência padrão quasi-Banach. Considere $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}_{\nu}, \mathbf{u}_{\nu} \in [1, +\infty)^m$ e $\Lambda \subset \Gamma_{\nu} \subset \mathbb{N}^m$ para índices $\nu \in I \neq \emptyset$. Então

$$\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E}) \setminus \bigcup_{\nu \in I} \Pi_{(\mathbf{t}_{\nu}, \mathbf{u}_{\nu})}^{\Gamma_{\nu}}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$$

é ou vazio, ou pontualmente $\mathfrak{c}$ -espaçável?

O mesmo pode ser levantado para o caso $\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E}) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$, nos levando a tentativa de também melhorar o Teorema 2.4. De modo mais restritivo ao apresentado no problema acima, poderíamos melhorar o Teorema 2.6 obtendo a espaçabilidade pontual? Assim, surge o próximo questionamento.

Problema 2.3. Seja $0 < q < 1$. Então

$$\mathcal{L}(\ell_q; \ell_q) \setminus \bigcup_{1 \leq s \leq r < \infty} \Pi_{(r, s)}(\ell_q; \ell_q)$$

é pontualmente $\mathfrak{c}$ -espaçável?

O Teorema 2.7 apresenta um resultado de espaçabilidade pontual no contexto dos operadores lineares somantes que não são Dunford-Pettis. Mas isso ocorre para o caso particular de operadores assumindo valores nos clássicos espaços de sequência ℓ_q para $1 \leq q \leq \infty$.

Diante dos demais resultados apresentados ao longo deste capítulo para operadores tomando valores no gerais espaços de sequência padrão $\mathcal{E}$, seria possível substituir ℓ_q por $\mathcal{E}$?

Problema 2.4. Considere $\mathcal{E}$ um espaço de sequência padrão quasi-Banach. Então

$$\Pi_{(r,s)}(E, \mathcal{E}) \setminus DP(E, \mathcal{E})$$

é ou vazio, ou pontualmente $\mathfrak{c}$ -espaçável?

Espaçabilidade em multi-ideais de operadores

Este capítulo tem como base o projeto em desenvolvimento

[8] N. G. Albuquerque and L. Coleta, Operators multi-ideals spaceability, preprint.

Aqui continuamos a busca por grandes estruturas topológicas, agora no ambiente geral dos ideais de operadores multilineares, no sentido de Pietsch [63]. Em [47], F. L. Hernández, C. Ruiz e V. M. Sánchez obtiveram a espaçabilidade do conjunto $\mathcal{I}_1(E; F) \setminus \mathcal{I}_2(E; F)$, onde $\mathcal{I}_1(E; F)$ e $\mathcal{I}_2(E; F)$ são ideais de operadores lineares limitados, definidos entre espaços de Banach com certas propriedades. Esse resultado, devido à generalidade do ambiente trabalhado, engloba inúmeros outros resultados de espaçabilidade no contexto dos operadores lineares. Aqui, investigamos este problema para o caso de ideais de operadores multilineares assumindo valores em espaços quasi-Banach, obtendo um resultado geral. As noções elementares da teoria de ideais de operadores multilineares podem ser encontradas na Seção 1.3 do Capítulo 1.

3.1 Critério de espaçabilidade para multi-ideais de operadores

Nesta seção, apresentamos os resultados do capítulo, os quais generalizam os teoremas obtidos em [47]. Esses resultados são desenvolvidos no contexto dos multi-ideais de operadores multilineares contínuos $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F)$ para $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach, F espaço quasi-Banach e, com a condição de algum E_i , $i = 1, \dots, m$, ou F ser um espaço σ -reproduzível. Esse conceito, como ficará evidente, é a ferramenta central para o desenvolvimento do critério de espaçabilidade obtido. Assim, iniciemos apresentando sua definição e,

3. Espaçabilidade em multi-ideais de operadores

para tal, relembremos que um subespaço fechado H de um espaço de Banach E é dito *complementado* se existe um subespaço fechado G de E tal que $E = H \oplus G$, isto é, $E = H + G$ e $H \cap G = \{0\}$. Com a noção de subespaço complementado em mente, segue que:

Definição 3.1 (Espaço σ -reproduzível). Um espaço (quasi-)Banach é dito σ -reproduzível se satisfaz as seguintes condições:

- (i) existe uma sequência $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subespaços complementados;
- (ii) para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $P_n : E \rightarrow E_n$ uma projeção limitada, i.e., $P_n^2 := P_n \circ P_n = P_n$, com $P_i \circ P_j = 0$ se $i \neq j$;
- (iii) existe uma sequência $\phi_n : E_n \rightarrow E$ de isomorfismos e
- (iv) para todo $k \in \mathbb{N}$, as projeções $\tilde{P}_k = \sum_{n=1}^k P_n : E \rightarrow \bigoplus_{n=1}^k E_n$ são uniformemente limitadas.

A propriedade de um espaço ser σ -reproduzível é preservada por isomorfismos e, além disso, vale o resultado seguinte.

Proposição 3.1. [47, Proposition 3.2]) Se E ou F são espaços de Banach σ -reproduzíveis, então $E \oplus F$ e E' são σ -reproduzíveis.

Esse resultado é provado para E e F espaços de Banach, porém, os argumentos são aplicados diretamente para o caso quasi-Banach. Em [47] são mencionados inúmeros exemplos de espaços de Banach σ -reproduzíveis. Abaixo listamos alguns deles e citamos alguns casos que podem ser aplicados para o contexto quasi-Banach. Mas primeiro, precisaremos da próxima definição.

Definição 3.2 (Decomposição de Schauder). [52, p.47] Dado X um espaço de Banach, uma sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subespaços fechados de X é chamada uma *decomposição de Schauder* de X se, para todo $x \in X$, existe uma única representação da forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, com $x_n \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.1. Todo espaço de Banach E , o qual admite uma decomposição de Schauder $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que cada subespaço E_n é isomorfo a E , é σ -reproduzível. Em contrapartida, se E é um espaço *indecomponível*, isto é, não existem G e H subespaços fechados de E tal que $E = G \oplus H$, E não pode ser σ -reproduzível.

Exemplo 3.2. O espaço $\mathcal{C}[0, 1]$ das funções reais contínuas definidas no intervalo $[0, 1]$ é σ -reproduzível ([47, Proposition 3.4]). Consequentemente, $\mathcal{C}(K)$ é σ -reproduzível para K um

espaço métrico compacto não enumerável, uma vez que, $\mathcal{C}[0, 1]$ e $\mathcal{C}(K)$ são espaços isomórficos (veja [1, Theorem 4.4.8]).

Exemplo 3.3. Para $0 < p < \infty$ e E um espaço de Banach de dimensão infinita, os espaços $\ell_p(E)$ e $c_0(E)$ são σ -reproduzíveis. Em [1, Theorem 2.2.4] é provado que, se Y é um subespaço de dimensão infinita complementado de ℓ_p , para $1 \leq p < \infty$ (respectivamente, c_0), então Y é isomorfo a ℓ_p (respectivamente, c_0); para o caso $0 < p < 1$, o mesmo resultado está provado em [48, Theorem 2.6] (ou veja Teorema 1.10 onde reunimos ambos os teoremas).

Exemplo 3.4. Seja $D = \{z : |z| < 1\}$ o disco aberto unitário do plano complexo $\mathbb{C}$. O disco algébrico $A(D)$, de todas as funções analíticas para $|z| < 1$ e contínuas para $|z| \leq 1$, é um espaço σ -reproduzível, uma vez que é isomorfo a $c_0(A(D))$ (veja [72, p.190]).

O famoso Critério de Banach-Grunblum-Nikolskii, que fornece um critério prático para determinar sequências básicas, é uma ferramenta fundamental para a prova dos resultados que obtivemos, os quais apresentamos logo a seguir. Mas antes:

Definição 3.3 (Sequência básica). Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no espaço (quasi-)Banach E é dita uma *sequência básica* se for uma base de Schauder de $\overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Lema 3.2 (Critério de Banach-Grunblum-Nikolskii). ([26, p.4004] e [20, p.258]) Seja E um espaço (quasi-)Banach. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vetores não nulos em E é básica se, e somente se, existe uma constante $K \in (0, \infty)$ tal que, para números naturais $s < r$ e para toda sequência finita de escalares $a_1, \dots, a_s$, temos

$$\left\| \sum_{n=1}^s a_n x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^r a_n x_n \right\|.$$

O próximo resultado fornece a espaçabilidade no contexto dos multi-ideais quasi-Banach de operadores. As técnicas seguem as ideias de Hernández *et. al* [47].

Teorema 3.3. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach, F um espaço quasi-Banach e sejam $\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F)$ e $\mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$ multi-ideais quasi-normados de operadores tal que $\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$ é não vazio. Se F ou E_j , para algum $j = 1, \dots, m$, é um espaço σ -reproduzível e se $\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F)$ é completo, então*

$$\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$$

é espaçável.

3. Espaçabilidade em multi-ideais de operadores

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$.

Caso 1. Suponhamos que E_j seja um espaço de Banach σ -reproduzível para algum $j = 1, \dots, m$. Por simplicidade de notação, suponhamos $j = 1$. Assim, existe uma sequência $(E_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de subespaços complementados de E_1 e, para cada $n \in \mathbb{N}$, um isomorfismo $\phi_{1,n} : E_{1,n} \rightarrow E_1$ e uma projeção limitada $P_{1,n} : E_1 \rightarrow E_{1,n}$ que cumprem as condições da Definição 3.1. A partir de então, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos o operador m -linear $T_n : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ como

$$T_n := T\Phi_n P_n,$$

com P_n e Φ_n operadores m -lineares definidos por $\Phi_n := (\phi_{1,n}, Id_{E_2}, \dots, Id_{E_m})$ e $P_n := (P_{1,n}, Id_{E_2}, \dots, Id_{E_m})$, onde $\phi_{1,n} : E_{1,n} \rightarrow E_1$ e $P_{1,n} : E_1 \rightarrow E_{1,n}$ são, respectivamente, os isomorfismos e as projeções limitadas existentes do fato de E_1 ser σ -reproduzível e Id_{E_i} representa o operador identidade de E_i , $i = 1, \dots, m$. A seguir, veremos que a sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ acima definida está contida em $\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$, é composta por operadores m -lineares linearmente independentes e

$$\text{span}\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)) \cup \{0\}. \quad (3.1)$$

Pela propriedade de multi-ideal, é claro que, $T_n \in \mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ver que $T_n \notin \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$ note que

$$T_n|_{E_{1,n} \times E_2 \times \dots \times E_m} = (T\Phi_n P_n)|_{E_{1,n} \times E_2 \times \dots \times E_m} = T\Phi_n = T \circ (\phi_{1,n}, Id_{E_2}, \dots, Id_{E_m}).$$

Como $\phi_{1,n}$ é um isomorfismo e $\mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$ é estável por composição à direita com operadores m -lineares limitados segue que T_n não pode pertencer a $\mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$, caso contrário, pela propriedade de multi-ideal, $T = T\Phi_n \Phi_n^{-1} \in \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$. Aplicando argumento análogo, consideremos $N \in \mathbb{N}$, escalares $a_1, a_2, \dots, a_N$ e o operador $\sum_{k=1}^N a_k T_k$. Para cada $1 \leq j \leq N$, a restrição de T_n a $E_{1,j} \times E_2 \times \dots \times E_m$ coincide com $T\Phi_j$ quando $j = n$, e 0 caso contrário. Assim,

$$\left(\sum_{k=1}^N a_k T_k \right) \Big|_{E_{1,j} \times E_2 \times \dots \times E_m} = \left(\sum_{k=1}^N a_k T\Phi_k P_k \right) \Big|_{E_{1,j} \times E_2 \times \dots \times E_m} = a_j T\Phi_j. \quad (3.2)$$

Combinando isso com o fato de $\phi_{1,j}$ ser um isomorfismo e T não pertencer a $\mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$, concluímos que $\sum_{k=1}^N a_k T_k$ também não pertence, o que prova (3.1). Pelo mesmo argumento em (3.2) verifica-se diretamente que a sequência $(T_n)_n$ é linearmente independente, o que nos

3. Espaçabilidade em multi-ideais de operadores

garante a lineabilidade do conjunto $\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$.

Resta-nos agora provar a espaçabilidade. Pelo Lema 3.2, $(T_n)_n$ é uma sequência básica em $\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F)$. Com efeito, para um número natural s , definamos $\tilde{P}_s : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ por $\tilde{P}_s := (\tilde{P}_{1,s}, Id_{E_2}, \dots, Id_{E_m})$, sendo $\tilde{P}_{1,s} := \sum_{k=1}^s P_{1,k}$. Assim

$$\begin{aligned} T_n \circ \tilde{P}_s &= T\Phi_n(P_{1,n}, Id_{E_2}, \dots, Id_{E_m}) \circ (\tilde{P}_{1,s}, Id_{E_2}, \dots, Id_{E_m}) \\ &= T\Phi_n \circ \left(\sum_{k=1}^s P_{1,n} \circ P_{1,k}, Id_{E_2}, \dots, Id_{E_m} \right) \\ &= \begin{cases} T_n, & \text{se } n \leq s, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Consequentemente, para naturais $r > s$ e escalares $b_k, k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{k=1}^s b_k T_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^r b_k T_k \tilde{P}_s \right\| \leq \left\| \tilde{P}_s \right\| \left\| \sum_{k=1}^r b_k T_k \right\|.$$

E como para todo $s \in \mathbb{N}$, as aplicações $\tilde{P}_s$ são uniformemente limitadas, concluímos que $(T_n)_n$ é uma sequência básica em $\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F)$. Então, dado $S \in \overline{\text{span}\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\}}$, existe uma sequência de escalares $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com algum $c_{n_0} \neq 0$, tal que $S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n$. Restringindo S a $E_{1,n_0} \times E_2 \times \dots \times E_m$, obtemos $c_{n_0} T\Phi_{n_0}$, donde podemos concluir que S não pertence a $\mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$. Fica provada, assim, a espaçabilidade de $\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$ para o caso E_j σ -reproduzível para algum $j = 1, \dots, m$.

Caso 2. Suponhamos que F seja um espaço quasi-Banach σ -reproduzível, com subespaços complementados F_n , isomorfismos $\phi_n : F_n \rightarrow F$ e projeções $P_n : F \rightarrow F_n$ como na Definição 3.1. Um raciocínio semelhante ao caso anterior se aplica aqui. Assim, apontaremos apenas os principais fatos. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, o operador m -linear

$$T_n = \phi_n^{-1} T$$

e, a menos de isomorfismo, $T_n \in \mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F)$. Como $T \notin \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$, $\mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$ é estável por composição à esquerda e ϕ_n^{-1} é um isomorfismo, segue que $T_n \notin \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$. Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $a_1, \dots, a_N$ escalares, para $1 \leq i \leq N$,

$$P_i \circ \left(\sum_{k=1}^N a_k T_k \right) = \sum_{k=1}^N a_k P_i T_k = \sum_{k=1}^N a_k P_i \phi_k^{-1} T = a_i \phi_i^{-1} T.$$

3. Espaçabilidade em multi-ideais de operadores

A partir dessa igualdade podemos concluir que a sequência $(T_n)_n$ é linearmente independente e $\text{span}\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)) \cup \{0\}$. Novamente pelo Lema 3.2, verificamos que $(T_n)_n$ é uma sequência básica. De fato, para $s \in \mathbb{N}$, consideremos $\tilde{P}_s := \sum_{k=1}^s P_k$ e note que

$$\begin{aligned} \tilde{P}_s T_n &= \left(\sum_{k=1}^s P_k \right) \circ \phi_n^{-1} T = \sum_{k=1}^s P_k \phi_n^{-1} T \\ &= \begin{cases} \phi_n^{-1} T, & \text{se } n \leq s, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, para números naturais $r > s$ e escalares $b_k, k \in \mathbb{N}$, temos

$$\left\| \sum_{k=1}^s b_k T_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^r b_k \tilde{P}_s T_k \right\| = \left\| \tilde{P}_s \circ \sum_{k=1}^r b_k T_k \right\| \leq \|\tilde{P}_s\| \left\| \sum_{k=1}^r b_k T_k \right\|,$$

o que nos garante que $(T_n)_n$ é uma sequência básica. Assim, se $S \in \overline{\text{span}\{T_n : n \in \mathbb{N}\}} \setminus \{0\}$, podemos escrever $S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n$ para alguma sequência $(c_n)_n$ de escalares, com algum $c_{n_0} \neq 0$. Como $P_{n_0} S = c_{n_0} \phi_{n_0}^{-1} T \notin \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$, segue que $\overline{\text{span}\{T_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset (\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)) \cup \{0\}$. Com isso, a espaçabilidade está provada para o caso F σ -reproduzível. $\square$

Para o caso $m = 1$ e $E_1, \dots, E_m$ e F espaços de Banach, o Teorema 3.3 recupera o resultado de F. L. Hernández *et.al* [47, Theorem 3.5].

Corolário 3.4. [47, Theorem 3.5] Sejam $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ ideais de operadores tais que $\mathcal{I}_1(E; F) \setminus \mathcal{I}_2(E; F)$ é não vazio para E, F espaços de Banach. Se E ou F é σ -reproduzível e $\mathcal{I}_1(E; F)$ é completo para uma ideal norma, então $\mathcal{I}_1(E; F) \setminus \mathcal{I}_2(E; F)$ é espaçável.

O próximo teorema é uma generalização do Teorema 3.3 e sua prova, como no caso desse último, segue as ideias de [47, Theorem 3.7] com as adaptações necessárias para o contexto multilinear, permitindo assim, a obtenção de um resultado geral sobre espaçabilidade para o âmbito não linear.

Teorema 3.5. Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach, F quasi-Banach e $\mathcal{M}, \mathcal{M}_n, n \in \mathbb{N}$, multi-ideais quasi-normados de operadores. Se F ou E_j , para algum $j = 1, \dots, m$, é um espaço σ -reproduzível, se $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F)$ é completo para uma ideal (quasi-)norma, e se

3. Espaçabilidade em multi-ideais de operadores

para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$ é não vazio, então

$$\mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$$

é espaçável.

Demonstração. Nosso principal objetivo nesta prova é obter um operador T que pertença a $\mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A partir disso, basta procedermos como no teorema anterior para fornecermos uma sequência básica $(T_n)_n$ tal que $\overline{\text{span}\{T_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset (\mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \bigcup_n \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)) \cup \{0\}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $S_n \in \mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$.

Caso 1. Suponhamos que E_j seja σ -reproduzível para algum $j = 1, \dots, m$. Para simplificar a notação, consideremos $j = 1$. Como E_1 é σ -reproduzível, existem $(E_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subespaços complementados de E_1 , isomorfismos $\phi_{1,n} : E_{1,n} \rightarrow E_1$ e projeções $P_{1,n} : E_1 \rightarrow E_{1,n}$ como na Definição 3.1. Agora, para cada n , definamos o operador m -linear

$$\widetilde{S}_n := S_n \Phi_n P_n,$$

com P_n e Φ_n operadores m -lineares definidos por $\Phi_n := (\phi_{1,n}, Id_{E_2}, \dots, Id_{E_m})$ e $P_n := (P_{1,n}, Id_{E_2}, \dots, Id_{E_m})$, onde $\phi_{1,n} : E_{1,n} \rightarrow E_1$ e $P_{1,n} : E_1 \rightarrow E_{1,n}$ são, respectivamente, os isomorfismos e as projeções limitadas existentes do fato de E_1 ser σ -reproduzível e Id_{E_i} representa o operador identidade de E_i , $i = 1, \dots, m$. Note que, $\widetilde{S}_n$ pertence a $\mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$. A partir desses operadores, definamos o operador m -linear

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widetilde{S}_n}{2^n \|\widetilde{S}_n\|_{\mathcal{M}}}. \quad (3.3)$$

Verifiquemos que $T \in \mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, que $T \in \mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$. Primeiro vejamos que $T \in \mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F)$ e, para tal, escrevamos

$$Z_k = \sum_{n=1}^k \frac{\widetilde{S}_n}{2^n \|\widetilde{S}_n\|_{\mathcal{M}}}. \quad (3.4)$$

Para todos os inteiros positivos $k > l$, temos

$$\|Z_k - Z_l\|_{\mathcal{M}} = \left\| \sum_{n=l+1}^k \frac{\widetilde{S}_n}{2^n \|\widetilde{S}_n\|_{\mathcal{M}}} \right\|_{\mathcal{M}} \leq C \sum_{n=l+1}^k \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

3. Espaçabilidade em multi-ideais de operadores

quando $k, l \rightarrow \infty$ e a constante C acima é devido à quasi-norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$. Portanto, $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F)$ e, pela completude do espaço, trata-se de uma sequência convergente, o que prova $T \in \mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F)$. Como $\tilde{S}_i$ restrito a $E_{1,n} \times E_2 \times \dots \times E_m$ coincide com $S_n \Phi_n$ se $n = i$, ou com 0 caso contrário, segue que

$$T|_{E_{1,n} \times \dots \times E_m} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{S}_i}{2^i \|\tilde{S}_i\|_{\mathcal{M}}} \right) \Big|_{E_{1,n} \times \dots \times E_m} = \frac{\tilde{S}_n}{2^n \|\tilde{S}_n\|_{\mathcal{M}}},$$

donde concluímos que $T \notin \mathcal{M}_n(E_1, \dots, E_m; F)$ e como $n \in \mathbb{N}$ foi tomado arbitrário, concluímos que $T \in \mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$. Com isso, obtivemos o operador T desejado.

Caso 2. Seja F um espaço quasi-Banach σ -reproduzível, com isomorfismos $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e projeções limitadas $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como na Definição 3.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o operador não nulo $S_n \in \mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$. E, assim, definamos

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^{-1} \circ S_n}{2^n \|\phi_n^{-1} \circ S_n\|_{\mathcal{M}}}$$

um operador m -linear em $\mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$. A prova que $T \in \mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F)$ segue como no caso anterior e, para todo número natural i , a composição de P_i com T resulta em $\phi_i^{-1} \circ S_i$, que não pertence $\mathcal{M}_i(E_1 \dots, E_m; F)$. Portanto, $T \in \mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $T \in \mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$.

Em ambos os casos obtivemos um operador T pertencente ao conjunto $\mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$. A partir desse operador, a verificação da espaçabilidade é análoga ao que foi desenvolvido no Teorema 3.3: constrói-se $(T_n)_n$ uma sequência básica de operadores linearmente independentes tal que

$$\overline{\text{span}\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\}} \subset \mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F).$$

□

Como consequência direta:

Corolário 3.6. [47, Theorem 3.7]. Se E ou F é um espaço de Banach σ -reproduzível, $\mathcal{M}$ é um ideal de operador completo para uma ideal norma e $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de ideais de operadores tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}(E, F) \setminus \mathcal{M}_n(E, F)$ é não vazio, então o conjunto $\mathcal{M}(E, F) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(E, F)$ é espaçável.

3.2 Aplicações

Nesta seção, fornecemos algumas consequências dos Teoremas 3.3 e 3.5 para alguns casos particulares de multi-ideais Banach ou quasi-Banach de operadores.

3.2.1 Operadores somantes

Para algum E_j σ -reproduzível, com $j = 1, \dots, m$, ou $\mathcal{E}$ σ -reproduzível, obtemos a espaçabilidade de $\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E}) \setminus \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\Gamma}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$, o conjunto dos operadores $\Lambda - (\mathbf{r}, \mathbf{s})$ -somantes que não são $\Gamma - (\mathbf{t}, \mathbf{u})$ -somantes definidos entre o espaço de Banach $E_1 \times \dots \times E_m$ e o espaço $\mathcal{E}$ de sequência padrão quasi-Banach. Mais precisamente, teríamos como consequência imediata a seguinte versão do Teorema 2.3 do Capítulo 2.

Corolário 3.7. Sejam $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u} \in [1, +\infty)^m$, $\Lambda \subset \Gamma \subset \mathbb{N}^m$ conjuntos de índices, $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach e $\mathcal{E}$ um espaço de sequência padrão quasi-Banach. Se E_j , para algum $j = 1, \dots, m$, ou $\mathcal{E}$ é σ -reproduzível, então

$$\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E}) \setminus \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\Gamma}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$$

se não for vazio, é espaçável.

Consequentemente, sob as mesmas condições do teorema acima, obtemos diretamente a espaçabilidade do conjunto $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E}) \setminus \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{E})$. Sem nenhuma mudança sob as hipóteses, é imediata a espaçabilidade do Corolário 2.5. Pelo Exemplo 3.3, temos que os espaços ℓ_q para $0 < q \leq \infty$, como todos aqueles que admitem uma representação no sentido de ℓ_q , são σ -reproduzíveis. Assim, temos

Corolário 3.8. Sejam $q \in (0, \infty]$ e $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u} \in [1, +\infty)^m$. Então, cada um dos conjuntos

$$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \ell_q) \setminus \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\text{ms}}(E_1, \dots, E_m; \ell_q), \quad \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \ell_q) \setminus \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\text{as}}(E_1, \dots, E_m; \ell_q)$$

e

$$\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\text{as}}(E_1, \dots, E_m; \ell_q) \setminus \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\text{ms}}(E_1, \dots, E_m; \ell_q)$$

é ou vazio, ou espaçável.

Ainda no ambiente geral dos operadores somantes, pelo Teorema 3.3, concluímos a espaçabilidade na Proposição 2.8.

Corolário 3.9. Sejam $q \in (0, \infty]$, I um conjunto não v zio e E_i um espaço de Banach de dimensão infinita, com $i = 1, \dots, m$. Também considere $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u} \in [1, +\infty)^m$ e $\Lambda \subset \Gamma \subset \mathbb{N}^m$ conjuntos de  ndices. Então

$$\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{\Lambda}(E_1, \dots, E_m; \ell_q(I)) \setminus \Pi_{(\mathbf{t}, \mathbf{u})}^{\Gamma}(E_1, \dots, E_m; \ell_q(I))$$

  espaçável quando não   v zio.

3.2.2 Operadores Dunford–Pettis

Sobre o conjunto dos operadores lineares definidos entre espaços de Banach que são absolutamente somantes e não são Dunford–Pettis, no capítulo anterior, verificamos que esse é pontualmente $\mathbf{c}$ -espaçável. No entanto, destacamos aqui que a conclusão apenas da espaçabilidade (no sentido clássico) poderia ser obtida de [47, Theorem 3.5] e, consequentemente, do nosso Teorema 3.3.

Corolário 3.10. Sejam $1 \leq q \leq \infty$ e $1 \leq r < s < \infty$. Então

$$\Pi_{(r, s)}(E, \ell_q) \setminus DP(E, \ell_q)$$

  espaçável.

3.2.3  ndice de somabilidade

Em [54], M. Maia, D. Pellegrino e J. Santos introduziram a noção de * ndice de somabilidade para pares de espaços de Banach* [54, Definition 1.3]. Esses  ndices desempenham o papel de “medir” quão distante um operador multilinear está longe de ser múltiplo (r, s) -somante (veja Definição 1.7). Como comentado pelos autores no artigo, quando a desigualdade (1.4) não é satisfeita, isso significa que não existe tal constante $C > 0$, mas o que não é de simples percepção, é que existirá uma constante C_N (dependendo de N) de modo que a soma no lado esquerdo da desigualdade (1.4) não tenda a infinito. A constante $C_N = C_1 N^\xi$ poderá ser encontrada para um número ξ dependendo de r, s, m e, já percebemos, *a priori*, que recaímos ao caso do operador ser múltiplo $(r, s_1, \dots, s_m)$ -somante para $\xi = 0$. Em [34], o conceito de  ndice de somabilidade é estendido para o contexto mais geral dos operadores múltiplos $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ -somantes, com $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$ e $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m)$ multi-parâmetros (Veja Definição (1.8)).

Definição 3.4. [34, Definição 4.1.1] Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Banach, $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in (0, \infty)^m$

e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, com $\xi_k \geq 0$ valores fixos para todo $k = 1, \dots, m$. Um operador m -linear contínuo $T : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ é dito $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ - ξ -somante se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{N_1} \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^{N_m} \|Tx_{i_1}\|^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \dots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq C \prod_{k=1}^m N_k^{\xi_k} \prod_{k=1}^m \|x^k\|_{w, s_k}, \quad (3.5)$$

para todo inteiro positivo N_k e $x^k = (x_j)_{j=1}^{N_k} \in \ell_{s_k}^w(E_k)$, $k = 1, \dots, m$. Aqui $Tx_{i_1} := T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})$. A classe de todos os operadores de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F que satisfaz a condição (3.5) será denotada por $\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{m-\xi}(E_1, \dots, E_m; F)$, a qual é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ [34, Proposition 4.1.3], e coincide com a classe $\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms}(E_1, \dots, E_m; F)$ dos operadores múltiplos $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ -somantes quando $\xi = 0$. Além disso, o ínfimo de todas as constantes C que satisfazem (3.5) define uma norma no espaço, com a qual será de Banach.

Para esse novo espaço introduzido, K. S. Câmara prova, para o caso $F = \ell_\infty$, que o conjunto $\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{m-\xi}(E_1, \dots, E_m; \ell_\infty) \setminus \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms}(E_1, \dots, E_m; \ell_\infty)$ se não for vazio, é maximal lineável [34, Proposition 4.2.2]. Como aplicação do Teorema 3.3, recuperamos esse resultado e, mais ainda, damos um passo além obtendo a espaçabilidade do conjunto para o caso $F = \ell_p$ para $p \in (0, \infty]$. Assim, o seguinte corolário recupera e generaliza [34, Proposition 4.2.2].

Corolário 3.11. Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Banach, $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in [1, \infty)^m$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, com $\xi_k \geq 0$ valores fixados. Para $p \in (0, \infty]$,

$$\Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{m-\xi}(E_1, \dots, E_m; \ell_p) \setminus \Pi_{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}^{ms}(E_1, \dots, E_m; \ell_p)$$

ou é vazio, ou é espaçável.

3.3 Comentários e problemas

Como deve ter sido notado pelo leitor, diferentemente da maioria dos resultados do Capítulo 2, que foram obtidos para as recentes noções de *lineabilidade pontual* e (α, β) -*lineabilidade* (ver Definições 2.3 e 2.5), os resultados presentes no atual capítulo são obtidos para o conceito clássico de lineabilidade/espaçabilidade conhecidos, contribuindo, assim, com a teoria para o ambiente geral que é tratado. No que diz respeito às investigações do conjunto $\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$ quanto às recentes noções “geométricas” de lineabilidade/espaçabilidade pontual e (α, β) -lineabilidade/espaçabilidade, levantamos os seguintes questionamentos:

3. Espaçabilidade em multi-ideais de operadores

Problema 3.1. Sob as condições do Teorema 3.3 e para cardinais $\alpha < \beta \leq \dim \mathcal{M}_1$, o conjunto

$$\mathcal{M}_1(E_1, \dots, E_m; F) \setminus \mathcal{M}_2(E_1, \dots, E_m; F)$$

caso seja não vazio, é (α, β) -lineável/espaçável ou pontualmente β -lineável/espaçável?

Ou mais geral:

Problema 3.2. Para as condições do Teorema 3.5 e para cardinais $\alpha < \beta \leq \dim \mathcal{M}$, o conjunto

$$\mathcal{M}(E_1 \dots, E_m; F) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(E_1 \dots, E_m; F)$$

caso seja não vazio, é (α, β) -lineável/espaçável ou pontualmente β -lineável/espaçável?

Parte II

Desigualdade multipolinomial de Kahane–Salem–Zygmund

Capítulo 4

Extensões multipolinomiais da Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund

Este capítulo foi desenvolvido com base no trabalho

[7] N. G. Albuquerque, L. Coleta and T. Velanga, Extensions of Kahane–Salem–Zygmund inequality and applications, preprint,

e tem como objetivo investigar a desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund (desigualdades KSZ para abreviar) dentro do contexto multipolinomial, que abrange tanto casos multilineares quanto polinomiais. Assim, variantes da desigualdade KSZ no cenário multipolinomial são fornecidas. Ademais, analisamos diferentes aspectos entre esses resultados, primordialmente, em termos de constantes e expoentes envolvidos.

Os conceitos de polinômio homogêneo e multipolinômio constituem uma das bases deste capítulo. Desse modo, convidamos o leitor a revisitar as definições e aspectos básicos na Seção 1.5 do Capítulo 1.

4.1 Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund para multipolinômios

A investigação de formas multilineares $A_{m,n} : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 tem aplicações em vários campos da matemática e tem sido explorada em diversos contextos desde o início de meados do século passado. Essas formas são geralmente chamadas formas unimodulares, uma vez que seus coeficientes são 1 e -1 (e também podem ser números complexos de módulo 1). Um dos objetivos que norteia este tópico está na busca de formas

unimodulares com as menores normas possíveis. Em muitos casos, métodos probabilísticos entram em ação. Hoje em dia essas abordagens são exploradas em diferentes linhas de pesquisa (veja [3–5, 10, 15, 22, 27, 28, 61, 68] e suas referências). Em geral, argumentos probabilísticos são suficientes para fornecer expoentes ótimos, mas as constantes envolvidas não são precisas. Apenas recentemente, em [61], foi obtido um resultado neste sentido com constantes precisas. As desigualdades KSZ multilineares e polinomiais pertencem a essa classe de desigualdades que fornecem formas multilineares unimodulares (e polinomiais) com normas pequenas por meio de métodos probabilísticos. Recentemente, uma gama de generalizações importantes dessas desigualdades foram desenvolvidas, por exemplo, em [37, 55, 61].

A primeira versão multilinear da KSZ que tratamos deve-se a D. Pellegrino, D. Serrano-Rodríguez e J. Silva [59, Theorem 1.1], a qual é uma versão refinada da desigualdade KSZ multilinear com expoentes ótimos.

Teorema 4.1. [59, Theorem 1.1] *Sejam m e n inteiros positivos, e sejam $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$. Então, existe uma constante universal C_m , uma escolha de sinais $+1$ e -1 , e uma forma m -linear de $A_{m,n} : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A_{m,n}(z_1, \dots, z_m) = \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n \pm z_{1j_1} \cdots z_{mj_m},$$

tal que

$$\|A_{m,n}\| \leq C_m \cdot n^{\frac{1}{\min_k \left\{ \max \left\{ 2, p_k^* \right\} \right\}} + \sum_{k=1}^m \max \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0 \right\}}. \quad (4.1)$$

Além disso, o expoente no lado direito da desigualdade (4.1) é ótimo.

Aplicamos a versão multilinear da KSZ acima para fornecermos nossa primeira variante multipolinomial, a qual apresentamos em detalhes a seguir. Discutiremos mais adiante os resultados que podem ser derivados dela, em particular uma desigualdade multipolinomial de KSZ de [68, Teorema 2.4]. Mas antes, estabeleçamos algumas notações: seja m um inteiro positivo, para algum inteiro $1 \leq k \leq m$, se $z_k = (z_{k1}, \dots, z_{kn}) \in \ell_p^n$ e $\alpha_k = (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kn}) \in \mathbb{N}_0^n$, escreveremos $z_k^{\alpha_k} = z_{k1}^{\alpha_{k1}} \cdots z_{kn}^{\alpha_{kn}}$, $|\alpha_k| = \alpha_{k1} + \dots + \alpha_{kn}$ e $\alpha_k! = \alpha_{k1}! \cdots \alpha_{kn}!$. Para fixados $n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos, escreveremos ainda $M := \sum_{i=1}^m n_i$ e $\binom{n_k}{\alpha_k} = \frac{n_k!}{\alpha_k!} = \frac{n_k!}{\alpha_{k1}! \cdots \alpha_{kn}!}$.

Teorema 4.2. *Sejam m, n e $n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos e sejam $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$. Então, existe uma constante universal C_M , uma escolha de sinais $+1$ e -1 , e um polinômio*

$(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P_{M,n} : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$P_{M,n}(z_1, \dots, z_m) = \sum_{|\alpha_1|=n_1, \dots, |\alpha_m|=n_m} \pm c_\alpha z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m}, \quad (4.2)$$

com pelo menos n^m coeficientes $c_\alpha = 1$, tais que

$$\|P_{M,n}\| \leq C_M \cdot n^{\frac{1}{\min_i \{\max\{2, p_i^*\}\}} + \sum_{i=1}^m \max\{n_i(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_i}), 0\}}. \quad (4.3)$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.1, existe uma constante universal C_M , uma escolha de sinais $+1$ e -1 , e uma forma M -linear

$$A_{M,n} : \overbrace{\ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_1}^n}^{n_1} \times \dots \times \overbrace{\ell_{p_m}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n}^{n_m} \longrightarrow \mathbb{K} \quad (4.4)$$

do tipo

$$A_{M,n}(z_1, \dots, z_M) = \sum_{j_1, \dots, j_M=1}^n \pm z_{1j_1} \dots z_{Mj_M},$$

tal que

$$\|A_{M,n}\| \leq C_M \cdot n^{\frac{1}{\min_{1 \leq k \leq M} \{\max\{2, p_k^*\}\}} + \sum_{k=1}^M \max\{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}), 0\}}. \quad (4.5)$$

A forma M -linear $A_{M,n}$ acima está definida no cartesiano de $\ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_M}^n$, com os espaços ℓ_{p_k} , $1 \leq k \leq M$, coincidindo em bloco, como evidenciado em (4.4). Mais especificamente, para cada i fixado, com $1 \leq i \leq m$, o número $p_{M-(n_i+\dots+n_m)+k_i} = p_i$ para todo k_i variando de 1 a n_i . Assim, o expoente que aparece no lado direito da desigualdade (4.5) pode ser escrito como

$$\frac{1}{\min \{\max \{2, p_i^*\} : 1 \leq i \leq m\}} + \sum_{i=1}^m \max \left\{ n_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_i} \right), 0 \right\}. \quad (4.6)$$

Dessa forma, definamos a aplicação $P_{M,n} : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$P_{M,n}(z_1, \dots, z_m) = A_{M,n} \left(\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{z_m, \dots, z_m}_{n_m} \right), \quad (4.7)$$

a qual é um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo como em (4.2) tal que $\|P_{M,n}\| \leq \|A_{M,n}\|$; e a estimativa (4.5) juntamente com o expoente (4.6) nos leva a

$$\|P_{M,n}\| \leq C_M \cdot n^{\frac{1}{\min_i \{\max\{2, p_i^*\}\}} + \sum_{i=1}^m \max\{n_i(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_i}), 0\}}.$$

4. Extensões multipolinomiais da Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund

Para ver que $P_{M,n}$ é, de fato, um multipolinômio como em (4.2), observe primeiro que cada termo

$$\underbrace{z_{1j_1} \cdots z_{1j_{n_1}}}_{n_1} \cdots \underbrace{z_{mj_{M-n_m+1}} \cdots z_{mj_M}}_{n_m}$$

na soma de (4.7) pode ser reescrito $z_1^{\alpha_1} \cdots z_m^{\alpha_m} =: z^\alpha$, onde $|\alpha_i| = n_i$ para todo $i = 1, \dots, m$; e o produto $\binom{n_1}{\alpha_1} \cdots \binom{n_m}{\alpha_m}$ de coeficientes multinomiais $\binom{n_i}{\alpha_i}$, que é igual a $n_i!/\alpha_i!$ para todo $1 \leq i \leq m$, é o número de vezes que este ‘monômio’ z^α aparece na soma (veja, e.g. [28, p. 330]). Uma vez que devemos considerar a escolha dos sinais positivos e negativos provenientes de $A_{M,n}$, e levando em conta a possibilidade de que um par do mesmo monômio z^α vem com sinais opostos $+z^\alpha$ e $-z^\alpha$, deduzimos que seu correspondente “coeficiente monomial” c_α deve ser igual a esse produto menos um múltiplo de dois. Para ser mais preciso, cada monômio z^α tem coeficiente

$$c_\alpha = \prod_{i=1}^m \binom{n_i}{\alpha_i} - 2k$$

para algum inteiro não negativo k com $0 \leq k \leq [\prod_i \binom{n_i}{\alpha_i}]/2$. Finalmente, temos pelo menos n^m coeficientes $c_\alpha = 1$. Estes correspondem exatamente aos coeficientes monomiais $c_\alpha = \prod_i \binom{n_i}{\alpha_i}$ tais que, para todo $1 \leq i \leq m$, a n -upla α_i admite uma das n possíveis escritas $\alpha_i = (0, \dots, n_i, \dots, 0)$. $\square$

Versões anteriores da desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund podem ser derivadas deste resultado. Primeiro, como mencionado antes, note que usando $p_1 = \cdots = p_m = p$ no teorema, obtemos um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P_{M,n}$, o qual é similar ao Q de [68, Teorema 2.4] tal que

$$\|P_{M,n}\| \leq C_M \cdot n^{\max\left\{M\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{p}\right\}}, \quad (4.8)$$

que é a mesma estimativa superior de $\|Q\|$. O nosso resultado também reduz-se a [59, Theorem 1.1] quando $m > 1$ e $n_1 = \cdots = n_m = 1$. Outra aplicação assumindo $m = 1$, $n_1 = d$, e $p_1 = p$, por outro lado, fornece uma versão particular para polinômios homogêneos. Assim, segue o seguinte corolário do teorema.

Corolário 4.3. Sejam n e d inteiros positivos, e seja $p \in [1, \infty]$. Então, existe uma constante universal C_d , uma escolha de sinais $+1$ e -1 , e um polinômio d -homogêneo $P_{d,n} : \ell_p^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$P_{d,n}(z) = \sum_{|\alpha|=d} \pm c_\alpha z^\alpha,$$

com pelo menos n coeficientes $c_\alpha = 1$, tal que

$$\|P_{d,n}\| \leq C_d \cdot n^{\max\left\{d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{p}\right\}}.$$

Para elucidar melhor a escrita do polinômio no Teorema 4.2, o próximo exemplo expõe um caso particular do resultado, permitindo-nos explicitar precisamente os seus coeficientes.

Exemplo 4.1. Tomemos $m = 1, n = 2$ e $n_1 = 4$. Então $M = n_1 = 4$. Para esse caso particular, temos o n_1 -polinômio homogêneo

$$P_{M,n} : \ell_{p_1}^2 \rightarrow \mathbb{K}$$

dado por

$$P_{M,n}(z_1) = A_{M,n}(\underbrace{z_1, z_1, z_1, z_1}_{n_1=4}) = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^2 \pm z_{1j_1} z_{1j_2} z_{1j_3} z_{1j_4}. \quad (4.9)$$

Mas, de acordo com a equação (4.2) do Teorema 4.2, devemos ter a seguinte expressão para $P_{M,n}$:

$$P_{M,n}(z_1) = \sum_{|\alpha_1|=4} c_{\alpha_1} z_1^{\alpha_1}, \quad (4.10)$$

onde $c_{\alpha_1} = \binom{n_1}{\alpha_1} - 2k$ para algum inteiro não negativo $0 \leq k \leq \binom{n_1}{\alpha_1}/2$. O que vamos fazer a partir de agora é explicitar, via este caso particular, o porquê a soma em (4.9) pode ser escrita como a soma em (4.10).

Primeiramente, como $z_1 \in \ell_{p_1}^2$, podemos escrever $z_1 = (z_{11}, z_{12})$. Como $j_1, j_2, j_3, j_4 \in \{1, 2\}$, percebemos que existem exatamente 16 possibilidades para o produto $z_{1j_1} z_{1j_2} z_{1j_3} z_{1j_4}$, o que nos diz que a soma em (4.9) é composta por 16 termos. A saber:

$$\begin{array}{cccc} z_{11}z_{11}z_{11}z_{11} & z_{11}z_{11}z_{11}z_{12} & z_{12}z_{11}z_{11}z_{11} & z_{12}z_{11}z_{11}z_{12} \\ z_{11}z_{11}z_{12}z_{11} & z_{11}z_{11}z_{12}z_{12} & z_{12}z_{11}z_{12}z_{11} & z_{12}z_{11}z_{12}z_{12} \\ z_{11}z_{12}z_{11}z_{11} & z_{11}z_{12}z_{11}z_{12} & z_{12}z_{12}z_{11}z_{11} & z_{12}z_{12}z_{11}z_{12} \\ z_{11}z_{12}z_{12}z_{11} & z_{11}z_{12}z_{12}z_{12} & z_{12}z_{12}z_{12}z_{11} & z_{12}z_{12}z_{12}z_{12}. \end{array}$$

Cada produto $z_{1j_1} z_{1j_2} z_{1j_3} z_{1j_4}$ acima pode ser reescrito em uma das seguintes formas: $z_{11}^4 z_{12}^0$ ou $z_{11}^3 z_{12}^1$ ou $z_{11}^2 z_{12}^2$ ou $z_{11}^1 z_{12}^3$ ou $z_{11}^0 z_{12}^4$ a depender da quantidade de vezes que z_{11} e z_{12} se repetem. Adotando a notação introduzida no início da seção, para $z_1 = (z_{11}, z_{12})$ e $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12})$, temos $z_1^{\alpha_1} = z_1^{(\alpha_{11}, \alpha_{12})} = z_{11}^{\alpha_{11}} z_{12}^{\alpha_{12}}$. Então, por exemplo, como no produto

4. Extensões multipolinomiais da Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund

$z_{11}z_{11}z_{11}z_{12}$ o termo z_{11} repete-se três vezes e z_{12} uma única vez, $\alpha_1 = (3, 1)$, donde

$$z_{11}z_{11}z_{11}z_{12} = z_{11}^3z_{12} = z_1^{(3,1)}.$$

Caso tivéssemos o produto $z_{11}z_{12}z_{12}z_{12}$, sua reescrita ficaria $z_{11}z_{12}^3 = z_1^{(1,3)}$, uma vez que z_{11} aparece uma única vez e z_{12} três vezes, resultando em $\alpha_1 = (1, 3)$. Agora, reescreveremos cada um dos elementos da lista acima na forma $z_1^{\alpha_1}$ exatamente na ordem que anteriormente aparecem listados.

$$\begin{array}{cccc} z_1^{(4,0)} & z_1^{(3,1)} & z_1^{(3,1)} & z_1^{(2,2)} \\ z_1^{(3,1)} & z_1^{(2,2)} & z_1^{(2,2)} & z_1^{(1,3)} \\ z_1^{(3,1)} & z_1^{(2,2)} & z_1^{(2,2)} & z_1^{(1,3)} \\ z_1^{(2,2)} & z_1^{(1,3)} & z_1^{(1,3)} & z_1^{(0,4)}. \end{array}$$

Note que, para todos os casos, $|\alpha_1| = n_1 = 4$. Resta-nos agora justificar a escrita dos coeficientes c_{α_1} . Para isso, observemos que os termos $z_1^{(4,0)}$ e $z_1^{(0,4)}$ aparecem uma única vez; já os termos $z_1^{(3,1)}$ e $z_1^{(1,3)}$ aparecem 4 vezes; e $z_1^{(2,2)}$ aparece seis vezes. Mais uma vez relembando a escrita adotada no início da seção, sabemos que $\binom{n_1}{\alpha_1} = \frac{n_1!}{\alpha_{11}!\alpha_{12}!}$, sendo $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12})$. Como

para $\alpha_1 = (4, 0)$ e $\alpha_1 = (0, 4)$, temos $\binom{n_1!}{\alpha_1!} = \frac{4!}{4!0!} = 1$;

para $\alpha_1 = (3, 1)$ e $\alpha_1 = (1, 3)$, temos $\binom{n_1!}{\alpha_1!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$; e

para $\alpha_1 = (2, 2)$, temos $\binom{n_1!}{\alpha_1!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$,

e tais valores são exatamente a quantidade de vezes que cada um dos termos $z_1^{(4,0)}$, $z_1^{(3,1)}$, $z_1^{(1,3)}$, $z_1^{(2,2)}$ e $z_1^{(0,4)}$ se repetem na soma, evidenciando que os coeficientes c_{α_1} são expressamente os valores determinados por $\binom{n_1}{\alpha_1}$. Mas esta não é, necessariamente, a expressão sinalizada para os coeficientes do polinômio $P_{4,2}$. Isso se deve à escolha dos sinais $+1$ e -1 que define a aplicação $A_{4,2}$. Assim, apenas por uma questão de elucidação, vamos fixar a seguinte escolha de sinais

$$\begin{array}{cccc} + z_1^{(4,0)} & + z_1^{(3,1)} & - z_1^{(3,1)} & - z_1^{(2,2)} \\ + z_1^{(3,1)} & + z_1^{(2,2)} & - z_1^{(2,2)} & - z_1^{(1,3)} \\ + z_1^{(3,1)} & + z_1^{(2,2)} & - z_1^{(2,2)} & - z_1^{(1,3)} \end{array}$$

$$+ z_1^{(2,2)} + z_1^{(1,3)} - z_1^{(1,3)} - z_1^{(0,4)}.$$

O resultado dessa soma nos dá: um termo $z_1^{(4,0)}$, dois termos $z_1^{(3,1)}$, zero termos $z_1^{(2,2)}$, dois termos $-z_1^{(1,3)}$ e um termo $-z_1^{(0,4)}$, ou seja,

$$P_{4,2}(z_1) = 1 \cdot z_1^{(4,0)} + 2 \cdot z_1^{(3,1)} + 0 \cdot z_1^{(2,2)} - 2 \cdot z_1^{(1,3)} - 1 \cdot z_1^{(0,4)}.$$

Então, a menos do sinal, os coeficientes c_{α_1} são

$$c_{(4,0)} = 1 \text{ que pode ser escrito da forma } c_{(4,0)} = \frac{4!}{4!0!} - 2 \cdot k \text{ para } k = 0;$$

$$c_{(3,1)} = 2 = \frac{4!}{3!1!} - 2 \cdot k \text{ para } k = 1;$$

$$c_{(2,2)} = 0 = \frac{4!}{2!2!} - 2 \cdot k \text{ para } k = 3;$$

$$c_{(3,1)} = 2 = \frac{4!}{1!3!} - 2 \cdot k \text{ para } k = 1; \text{ e}$$

$$c_{(0,4)} = 1 = \frac{4!}{0!4!} - 2 \cdot 0 \text{ para } k = 0.$$

E isso justifica a escrita do polinômio $P_{4,2}$ da forma

$$P_{4,2}(z_1) = c_{(4,0)}z_1^{(4,0)} + c_{(3,1)}z_1^{(3,1)} + c_{(2,2)}z_1^{(2,2)} - c_{(1,3)}z_1^{(1,3)} - c_{(0,4)}z_1^{(0,4)}$$

ou

$$P_{4,2}(z_1) = \sum_{|\alpha_1|=4} c_{\alpha_1} z_1^{\alpha_1},$$

onde $c_{\alpha_1} = \binom{n_1}{\alpha_1} - 2k$ para algum $0 \leq k \leq \left\lfloor \binom{n_1}{\alpha_1} \right\rfloor / 2$. Portanto, para dado caso particular, verificamos que o polinômio $P_{M,n}$ em (4.7) tem a forma dada em (4.2).

4.2 Variantes da Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund para multipolinômios

Nesta seção, apresentamos específicas versões do Teorema 4.2 que podem ser obtidas restringindo-se as hipóteses sobre os índices $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$. Para $p_1 = \dots = p_m = p$, podemos lidar com formas multilineares simétricas, o que nos remete a versão multilinear da desigualdade KSZ devido a H. Boas [28, Theorem 4], que apresentamos a seguir.

Teorema 4.4. [28, Theorem 4] *Se $1 \leq p \leq \infty$, e se n e m são inteiros positivos maiores do que 1, então existe uma forma m -linear simétrica $F : \ell_p^n \times \dots \times \ell_p^n \rightarrow \mathbb{K}$ da forma*

$$F_{m,n}(z_1, \dots, z_m) = \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_m=1}^n \pm z_{1j_1} \dots z_{mj_m}$$

tal que

$$\|F_{m,n}\| \leq \sqrt{32m \log(6m)} \cdot (m!)^{\frac{1}{\max\{2, p^*\}}} \cdot n^{\frac{1}{2} + m \cdot \max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}, 0\}}. \quad (4.11)$$

Observação 4.1. Sabemos que a escolha de sinais $+1$ e -1 que determina a forma m -linear $F_{M,n}$ no Teorema acima tem sua existência garantida pelo resultado. Entretanto, algumas condições são inerentes a esta escolha de sinais. Como enfatizado pelo próprio Boas em seu artigo [28], como $F_{m,n}$ é simétrica, a escolha de sinais deve atender a condição de que toda permutação de um dado conjunto de índices $j_1, \dots, j_m$ receba o mesmo sinal, caso contrário, não se teria a simetria da aplicação. Além disso, quando todos os vetores $z_k \in \ell_p^n$ são iguais, digamos $z = z_k$ para todo $1 \leq k \leq m$, o Teorema 4.4 fornece um caso especial de polinômio m -homogêneo. Observemos que, para uma lista de índices $j_1, \dots, j_m$ fixada, a quantidade de vezes que o termo $z_{j_1} \cdots z_{j_m}$ aparece é exatamente a quantidade de permutações da lista de índices $j_1, \dots, j_m$. Se representarmos por α_k a quantidade de vezes que o índice j_k se repete, então a quantidade de permutações de dada lista de índices é $\binom{m}{\alpha} = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!}$, ou seja, o termo $z_{j_1} \cdots z_{j_m}$ se repete $\binom{m}{\alpha}$ vezes. E, conseqüentemente, segue o seguinte corolário.

Corolário 4.5. [28, Corollary] Se $1 \leq p \leq \infty$, e se n e m são inteiros maiores do que 1, então existe um polinômio m -homogêneo na variável z em ℓ_p^n da forma

$$P_{m,n} = \sum_{|\alpha|=m} \pm \binom{m}{\alpha} z^\alpha$$

tal que o supremo do módulo do polinômio quando z pertence a bola unitária de ℓ_p^n não é maior que a cota em (4.11).

No próximo exemplo exibiremos um caso particular do corolário acima com o intuito de elucidar a forma dos coeficientes do polinômio.

Exemplo 4.2. Seja $p \in [1, \infty]$ e consideremos o caso particular $m = 3$ e $n = 2$ no Corolário 4.5. Assim, temos a existência de um polinômio 3-homogêneo $P : \ell_p^2 \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$P(z) = \sum_{|\alpha|=3} \pm c_\alpha z^\alpha,$$

com coeficiente $c_\alpha = \binom{m}{\alpha}$ e a norma $\|P_{3,2}\|$ satisfazendo a desigualdade (4.11). E ainda sabemos que

$$P(z) = F(z, z, z) = \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^2 \pm z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3}.$$

Como F é simétrica, a escolha de sinais $+1$ e -1 que existe atende a condição de que

permutações de um mesmo conjunto de índices não tem sinais diferentes. Diante disso, e por uma questão elucidativa, suponhamos a existência de F com a seguinte escolha de sinais

$$\begin{aligned} P(z) = F_{3,2}(z, z, z) &= z_1 z_1 z_1 + z_1 z_1 z_2 + z_1 z_2 z_1 - z_1 z_2 z_2 \\ &\quad + z_2 z_1 z_1 - z_2 z_1 z_2 - z_2 z_2 z_1 + z_2 z_2 z_2 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} P(z) &= z_1^3 z_2^0 + z_1^2 z_2^1 + z_1^2 z_2^1 - z_1^1 z_2^2 + z_1^2 z_2^1 - z_1^1 z_2^2 - z_1^1 z_2^2 + z_1^0 z_2^3 \\ &= z^{(3,0)} + z^{(2,1)} + z^{(2,1)} - z^{(1,2)} + z^{(2,1)} - z^{(1,2)} - z^{(1,2)} + z^{(0,3)}. \end{aligned}$$

Isso nos diz que, $z^{(3,0)}$ se repete $\frac{3!}{3!0!} = 1$ vez; $z^{(2,1)}$ se repete $\frac{3!}{2!1!} = 3$ vezes; $-z^{(1,2)}$ se repete $\frac{3!}{1!2!} = 3$ vezes e $z^{(0,3)}$ se repete $\frac{3!}{0!3!} = 1$ vez. Portanto,

$$P(z) = c_{(3,0)} z^{(3,0)} + c_{(2,1)} z^{(2,1)} - c_{(1,2)} z^{(1,2)} + c_{(0,3)} z^{(0,3)},$$

ou na escrita geral,

$$P(z) = \sum_{|\alpha|=3} \pm c_\alpha z^\alpha,$$

como queríamos elucidar.

Se no Teorema 4.2 $p_1 = \dots = p_m = p$, podemos invocar a forma multilinear simétrica do Teorema 4.4 de Boas para substituir $A_{M,n}$ por $F_{M,n}$ no início da nossa prova. Essa alternativa nos permitirá simplificar a demonstração de maneira natural. Obtemos assim a seguinte extensão de ([28, Theorem 4]).

Teorema 4.6. *Sejam m, n e $n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos, e seja $p \in [1, \infty]$. Então, existe uma escolha de sinais $+1$ e -1 e um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P_{M,n} : \ell_p^n \times \dots \times \ell_p^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$P_{M,n}(z_1, \dots, z_m) = \sum_{|\alpha_1|=n_1, \dots, |\alpha_m|=n_m} \pm c_\alpha z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m}, \quad (4.12)$$

com coeficientes $c_\alpha = \prod_i \binom{n_i}{\alpha_i}$, tais que

$$\|P_{M,n}\| \leq \sqrt{32M \log(6M)} \cdot (M!)^{\frac{1}{\max\{2, p^*\}}} \cdot n^{\frac{1}{2} + M \cdot \max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}, 0\}}. \quad (4.13)$$

Demonstração. Esta prova é um refinamento daquela feita para o Teorema 4.2, sendo que aqui, invocaremos o Teorema 4.4 de Boas. Assim, pelo Teorema 4.4, existe uma escolha de

sinais $+1$ e -1 e uma forma simétrica M -linear

$$F_{M,n} : \overbrace{\ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n}^{n_1} \times \cdots \times \overbrace{\ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n}^{n_m} \longrightarrow \mathbb{K}$$

do tipo

$$F_{M,n}(z_1, \dots, z_M) = \sum_{j_1, \dots, j_M=1}^n \pm z_{1j_1} \cdots z_{Mj_M},$$

tal que

$$\|F_{M,n}\| \leq \sqrt{32M \log(6M)} \cdot (M!)^{\frac{1}{\max\{2, p^*\}}} \cdot n^{\frac{1}{2} + M \cdot \max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}, 0\}}.$$

Então, definamos o polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P_{M,n} : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$P_{M,n}(z_1, \dots, z_m) = F_{M,n} \left(\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{z_m, \dots, z_m}_{n_m} \right)$$

e notemos que $P_{M,n}$ é um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo como em (4.12) tal que $\|P_{M,n}\| \leq \|F_{M,n}\|$. A escrita dos coeficientes c_α se justifica pela simetria de $F_{M,n}$ e, assim, a escolha de sinais existente atende a condição de que toda permutação de um dado conjunto de índices $j_1, \dots, j_M$ recebe o mesmo sinal. Em outras palavras, para impor simetria sob permutações dos vetores $z_1, \dots, z_m$, todo termo

$$\underbrace{z_{1j_1} \cdots z_{1j_{n_1}}}_{n_1} \cdots \underbrace{z_{mj_{M-n_m+1}} \cdots z_{mj_M}}_{n_m}$$

para o qual a M -upla $j_1, \dots, j_M$ é uma permutação de uma determinada lista de índices deve receber o mesmo sinal. E, com isso, concluímos a prova. $\square$

O Teorema 4.6 reduz-se ao Teorema 4.4 quando $m > 1$ e $n_1 = \cdots = n_m = 1$ e, ao seu Corolário 4.5 quando $m = 1$, $n_1 = m$, e $p_1 = p$.

Observação 4.2. Neste ponto, chamamos atenção às formas dos coeficientes c_α nos teoremas 4.2 e 4.6. No Teorema 4.2 $c_\alpha = \prod_{j=1}^m \binom{n_j}{\alpha_j} - 2k$ para algum $0 \leq k \leq \left[\prod_{j=1}^m \binom{n_j}{\alpha_j} \right] / 2$, já no Teorema 4.6, temos, simplesmente, $c_\alpha = \prod_{j=1}^m \binom{n_j}{\alpha_j}$. Isso justifica-se pela condição implicitamente conhecida sobre a escolha dos sinais $+1$ e -1 que existe e determina a aplicação $F_{M,n}$. Um caso particular foi feito no Exemplo 4.2 quando $m = 1$, $n_1 = 3$ e $n = 2$.

Recentemente, A. Raposo Jr. e D. Pellegrino em [61] forneceram uma versão multilinear da desigualdade KSZ com constantes assintoticamente ótimas para o caso $p_1 = \cdots = p_m = \infty$

e os espaços de sequências $\ell_\infty^{N_j}$ com dimensões $N_j \in \mathbb{N}$ não necessariamente iguais, com $1 \leq j \leq m$. Mais precisamente:

Teorema 4.7. [61, Theorem 1.1] *Seja m um inteiro positivo. Dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que, para todos $N_1, \dots, N_m > N$, existe uma forma m -linear $A_{N_1, \dots, N_m} : \ell_\infty^{N_1} \times \dots \times \ell_\infty^{N_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A_{N_1, \dots, N_m}(z_1, \dots, z_m) = \sum_{j_1=1}^{N_1} \dots \sum_{j_m=1}^{N_m} \pm z_{1j_1} \dots z_{mj_m},$$

tal que

$$\|A_{N_1, \dots, N_m}\| \leq (1 + \varepsilon) \max \left\{ N_1^{\frac{1}{2}}, \dots, N_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{j=1}^m N_j^{\frac{1}{2}}.$$

Por fim, usando o resultado de Raposo–Pellegrino (Teorema 4.7) com constantes assintoticamente ótimas, podemos provar uma variante multipolinomial da desigualdade KSZ com constantes assintoticamente ótimas quando lidamos com os espaços ℓ_∞^N .

Teorema 4.8. *Sejam $m, n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos e $M = \sum_{j=1}^m n_j$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que, para todos $N_1, \dots, N_m > N$, existe um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P_{M, N_1, \dots, N_m} : \ell_\infty^{N_1} \times \dots \times \ell_\infty^{N_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$P_{M, N_1, \dots, N_m}(z_1, \dots, z_m) = \sum_{|\alpha_1|=n_1, \dots, |\alpha_m|=n_m} \pm c_\alpha z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m} \quad (4.14)$$

com pelo menos $N_1 \dots N_m$ coeficientes $c_\alpha = 1$, tal que

$$\|P_{M, N_1, \dots, N_m}\| \leq (1 + \varepsilon) \max \left\{ N_1^{\frac{1}{2}}, \dots, N_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{j=1}^m n_j \cdot N_j^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. A prova deste resultado segue de uma adaptação direta daquela feita para o Teorema 4.2 aplicando a forma $A_{M, N_1, \dots, N_m}$ do Teorema 4.7 em vez de $A_{M, n}$ do Teorema 4.1. Pelo Teorema 4.7, para $M = \sum_{j=1}^m n_j$ e $\varepsilon > 0$ dado, existe um inteiro positivo N de modo que, para todos $N_1, \dots, N_m > N$, existe uma M -linear forma

$$A_{M, N_1, \dots, N_m} : \underbrace{\ell_\infty^{N_1} \times \dots \times \ell_\infty^{N_1}}_{n_1} \times \dots \times \underbrace{\ell_\infty^{N_m} \times \dots \times \ell_\infty^{N_m}}_{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$$

do tipo

$$A_{M, N_1, \dots, N_m}(z_1, \dots, z_M) = \sum_{j_1=1}^{N_1} \dots \sum_{j_M=1}^{N_M} \pm z_{1j_1} \dots z_{Mj_M},$$

tal que

$$\|A_{N_1, \dots, N_M}\| \leq (1 + \varepsilon) \max \left\{ N_1^{\frac{1}{2}}, \dots, N_M^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{j=1}^M N_j^{\frac{1}{2}}. \quad (4.15)$$

Então definamos o polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P_{M, N_1, \dots, N_m} : \ell_\infty^{N_1} \times \dots \times \ell_\infty^{N_m} \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$P_{M, N_1, \dots, N_m}(z_1, \dots, z_m) = A_{M, N_1, \dots, N_M}(\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{z_m, \dots, z_m}_{n_m}).$$

Com isso, obtemos $P_{M, N_1, \dots, N_m}$ um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo como em (4.14) satisfazendo $\|P_{M, N_1, \dots, N_m}\| \leq \|A_{M, N_1, \dots, N_M}\|$. E como para cada $1 \leq i \leq m$, temos $N_i = N_{M - (n_i + \dots + n_m) + k_i}$, com $1 \leq k_i \leq n_i$, a expressão no lado direito da desigualdade em (4.15) acima torna-se

$$(1 + \varepsilon) \max \left\{ N_1^{\frac{1}{2}}, \dots, N_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{j=1}^m n_j \cdot N_j^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, já sabemos que os coeficientes c_α são da forma $\prod_{i=1}^m \binom{n_i}{\alpha_i} - 2k$ para algum $0 \leq k \leq [\prod_{i=1}^m \binom{n_i}{\alpha_i}]/2$. $\square$

4.3 Cotas superiores

Vamos supor que $p_1 = \dots = p_m = p$. Sob esse contexto, como tínhamos mencionado, a estimativa para a norma de $P_{M, n}$ in (4.3) torna-se a estimativa em (4.8). Então surge a pergunta: qual é a melhor extensão multipolinomial da desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund em um ponto de vista quantitativo, Teorema 4.2 (ou equivalentemente, [68, Theorem 2.4]) ou Teorema 4.6? Dedicamos esta última seção para esboçar uma comparação entre as cotas superiores de $\|P_{M, n}\|$ nas desigualdades (4.8) e (4.13). Finalmente, esta relação comparativa tornará nossas considerações adequadas para aplicações em situações m -lineares e d -homogêneas.

Primeiro, note que a constante C_M de (4.8) pode ser colocada (veja, e.g. [61, Eq. (1.2)]) na forma

$$C_M = \sqrt{32M \log(6M)} \sqrt{M!}.$$

Se p for um número real variando no intervalo $2 \leq p \leq \infty$, então

$$\max \left\{ M \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{p} \right\} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) M.$$

Assim, nesse caso, os limites superiores em (4.8) e (4.13) coincidem. Nossa consideração é,

portanto, restrita ao caso $1 \leq p \leq 2$. Neste caso, temos

$$\max \left\{ M \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{p} \right\} = 1 - \frac{1}{p},$$

e pode-se verificar rapidamente que $n \leq M!$ implica

$$n^{\frac{1}{2}} (M!)^{1-\frac{1}{p}} \leq (M!)^{\frac{1}{2}} n^{1-\frac{1}{p}};$$

isto mostra que a cota superior em (4.8) é menos precisa que a dada em (4.13). Assim, temos uma resposta parcial a nossa pergunta: do ponto de vista do controle da norma, quando $n \leq M!$, o Teorema 4.6 parece ser uma melhor escolha que 4.2. Entretanto, deve-se lembrar que exigimos simetria na prova do primeiro, o que não é exigido no segundo.

Prosseguindo com as observações sobre o cenário $p_1 = \dots = p_m = p$, vamos supor agora que $m > 1$ e $n_1 = \dots = n_m = 1$. Sob essas hipóteses, $M = m$, e tudo o que formulamos nesta seção reduz-se ao contexto multilinear. Precisamente, do ponto de vista de controle de norma, considerando a condição de simetria em questão, [28, Theorem 4] parece ser uma escolha melhor que [59, Theorem 1.1] sempre que $n \leq m!$. Por outro lado, quando $m = 1$ e $n_1 = d$, nossos comentários reduzem-se para a situação d -homogênea. Temos $M = d$ e o corolário de [28, p. 330] fornece uma cota superior mais precisa para $\|P_{d,n}\|$ do que o Corolário 4.3 (ou equivalentemente, [68, Theorem 2.3]) sempre que $n \leq d!$. Por último, é claro que as cotas superiores invocadas no Teorema 4.8, isto é, $C_M \leq 1 + \varepsilon$ para $N_1, \dots, N_m$ suficientemente grandes, são as melhores possíveis em termos de crescimento ótimo.

4.4 Comentários e problemas

É bem conhecido que as investigações que norteiam as desigualdades KSZ são provenientes da busca por formas multilineares com coeficientes $+1$ e -1 (por vezes, números complexos de módulo 1) definidas no cartesiano de espaços do tipo ℓ_p^n , com $p \in [1, \infty]$ e $n \in \mathbb{N}$, e com normas as menores possíveis. No que diz respeito aos espaços ℓ_p , seria possível no Teorema 4.1 generalizarmos esses espaços no sentido de tomar $p \in (0, \infty]$, ou seja, é possível obter uma desigualdade KSZ multilinear e, conseqüentemente, uma versão multipolinomial em espaços quasi-Banach?

Referências

- [1] F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 233, Springer, 2006.
- [2] F. Albiac, *Nonlinear structure of some classical quasi-Banach spaces and F -spaces*, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), no. 2, 1312–1325.
- [3] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Sharp generalizations of the multilinear Bohnenblust–Hille inequality*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 3726–3740.
- [4] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino and J. Seoane-Sepúlveda, *Optimal Hardy–Littlewood type inequalities for polynomials and multilinear operators*, Isr. J. Math. **211** (1) (2016) 197–220.
- [5] N. Albuquerque and L. Rezende, *Asymptotic estimates for unimodular multilinear forms with small norms on sequence spaces*, Bull. Braz. Math. Soc. **52** (2021) 23–39.
- [6] N. G. Albuquerque and L. Coleta, *Large structures within the class of summing operators*, J. Math. Anal. Appl. **526** (2023), 127262, 13 pp.
- [7] N. G. Albuquerque, L. Coleta and T. Velanga, *Extensions of Kahane–Salem–Zygmund inequality and applications*, preprint.
- [8] N. G. Albuquerque and L. Coleta, *Operators multi-ideals spaceability*, preprint.
- [9] R. Alencar and M. C. Matos, *Some Classes of Multilinear Mappings Between Banach Spaces*, Vol. 12. Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático, Universidad Complutense de Madrid, Madrid (1989).
- [10] N. Alon and J.H. Spencer, *The Probabilistic Method*, fourth edition, Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2016, xiv+375 pp
- [11] T. R. Alves and P. Turco, *Spaceability of sets of p -compact maps*, J. Math. Anal. Appl. **514** (2022) , no. 1, 126265.
- [12] T. Aoki, *Locally bounded linear topological spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **18** (1942), 588–594.
- [13] G. Araújo, *Some classical inequalities, summability of multilinear operators and strange functions*, PhD Thesis, UFPB/UFCG, 2016.
- [14] G. Araújo and D. Pellegrino, *Optimal estimates for summing multilinear operators*, Linear Multilinear Algebra. **65** (2017), no. 5, 930–942.

- [15] G. Araújo and D. Pellegrino, *A Gale-Berlekamp permutation-switching problem in higher dimensions*, European Journal of Combinatorics **77** (2019), 17–30.
- [16] R. M. Aron, V. I. Gurariy, and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability and spaceability of sets of functions on $\mathbb{R}$* , Proc. Am. Math. Soc. **133** (3) (2005) 795–803.
- [17] R. M. Aron, D. Pérez-García and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Algebrability of the set of non-convergent Fourier series*, Studia Math. **175** (2006), no. 1, 83–90.
- [18] R. M. Aron and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Algebrability of the set of everywhere surjective functions on $\mathbb{C}$* , Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. **14** (2007), 25–31.
- [19] R. M. Aron, F. J. García-Pacheco, D. Pérez-García and J. B. Seoane-Sepúlveda, *On dense-lineability of sets of functions on $\mathbb{R}$* , Topology. **48** (2009), 149–156.
- [20] R. M. Aron, L. Bernal-González, D. Pellegrino, and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*, Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton (2016).
- [21] A. Bartoszewicz and S. Glab, *Strong algebrability of sets of sequences of functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 827–835.
- [22] F. Bayart, *Maximum modulus of random polynomials*, Q. J. Math. **63** (1) (2012) 21–39.
- [23] F. Bayart, D. Pellegrino, and P. Rueda, *On coincidence results for summing multilinear operators: interpolation, ℓ_1 -spaces and cotype*, Collect. Math. **71** (2020), no. 2, 301–318.
- [24] G. Bennet, *Inclusion Mappings Between ℓ_p spaces*, J. Funct. Anal. **13** (1977), 20–27.
- [25] L. Bernal-González, *Algebraic genericity of strict-order integrability*, Studia Math. **199** (2010), 279–293.
- [26] L. Bernal-González and M. Ordóñez Cabrera, *Lineability criteria, with applications*, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 6, 3997–4025.
- [27] H. P. Boas, *The football player and the infinite series*, Not. Am. Math. Soc. **44** (11) (1997) 1430–1435.
- [28] H. P. Boas, *Majorant series. Several complex variables (Seoul, 1998)*, Journal of the Korean Mathematical Society **37** (2000), no. 2, 321–337.
- [29] F. Bombal, D. Pérez-Gracia, and I. Villanueva, *Multilinear extensions of Grothendieck’s theorem*, Q. J. Math. **55** (2004), 441–450.
- [30] G. Botelho, D. Diniz, and D. Pellegrino, *Lineability of the set of bounded linear non-absolutely summing operators*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), no. 1, 171–175.
- [31] G. Botelho and V. V. Fávaro, *Constructing Banach spaces of vector-valued sequences with special properties*, Michigan Math. J. **64** (2015), no. 3, 539–554.
- [32] G. Botelho and E. R. Torres, *Hyper ideals of multilinear operators*, Linear Algebra Appl. **482** (2015), 1–20.
- [33] G. Botelho and D. Freitas, *Summing multilinear operators by blocks: the isotropic and anisotropic cases*, J. Math. Anal. Appl. **490** (2020), no.1, 124203, 21 pp.
- [34] K. S. Câmara, *Operadores múltiplos somantes: desigualdades de Hardy-Littlewood, índice de somabilidade e lineabilidade*, PhD Thesis, UFPB, 2021.

- [35] I. Chernega and A. Zagorodnyuk, *Generalization of the polarization formula for nonhomogeneous polynomials and analytic mappings on Banach spaces*, *Topology* **48** (2009), 197–202.
- [36] M. M. Day, *The spaces L_p for $0 < p < 1$* , *Bull. Amer. Math. Soc.* **46** (1940), 816–823.
- [37] A. Defant, M. Mastylo, *Aspects of the Kahane-Salem-Zygmund inequalities in Banach spaces*, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* **117** (2023), no. 44, 40 pp.
- [38] J. Diestel, *A survey of results related to the Dunford-Pettis property*, *Contemporary Math.* **2** (1980), 15–60.
- [39] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, *Cambridge Stud. Adv. Math.* 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
- [40] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite-Dimensional Spaces*, *Springer Monographs in Mathematics*, Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999.
- [41] D. Diniz, V. V. Fávaro, D. Pellegrino, A. Raposo Jr., *Spaceability of the sets of surjective and injective operators between sequence spaces*, *RACSAM* (2020).
- [42] D. Diniz and A. Raposo Jr., *A note on the geometry of certain classes of linear operators*, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **52** (2021), 1073–1080.
- [43] V. V. Fávaro, D. Pellegrino, and D. Tomaz, *Lineability and spaceability: a new approach*, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **51** (2020), no. 1, 27–46.
- [44] V. V. Fávaro, D. Pellegrino, and P. Rueda, *On the size of the set of unbounded multilinear operators between Banach spaces*, *Linear Algebra Appl.* **606** (2020), 144–158.
- [45] C. Gao, H. Zhai, and Z. Shi, *Dynamical Fractal in Quantum Gases with Discrete Scaling Symmetry*, *Physical Review Letters* **122** (2019), 230402, 5 pp.
- [46] V. I. Gurariy, *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **167** (1966), 971–973 (Russian).
- [47] F. L. Hernández, C. Ruiz, and V. M. Sánchez, *Spaceability and operator ideals*, *J. Math. Anal. Appl.* **431** (2015), no. 2, 1035–1044.
- [48] N. J. Kalton, N. T. Peck, and J. W. Roberts, *An F -space Sampler*, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, vol. 89. Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [49] N. J. Kalton, *Handbook of the geometry of Banach spaces*, Vol. 2, 1099–1130, North-Holland, Amsterdam (2003).
- [50] D. Kitson and R. M. Timoney, *Operator ranges and spaceability*, *J. Math. Anal. Appl.* **378** (2011), no. 2, 680–686.
- [51] B. Levine and D. Milman, *On linear sets in space C consisting of functions of bounded variation*, *Commun. Inst. Sci. Math. Mec. Uni. Kharkoff [Zapiski Inst. Mat. Mech.]* (4) **16** (1940), 102–105 (Russian).
- [52] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I, Sequence Spaces*, Springer, 1977.
- [53] I. J. Maddox, *A non-absolutely summing operators*, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **43** (1987), no. 1, 70–73.
- [54] M. Maia, D. Pellegrino, and J. Santos, *An index of summability for pairs of Banach spaces*, *J. Math. Anal. Appl.* **441** (2016), 702–722.

- [55] M. Mastyło and R. Szvedek, *Kahane-Salem-Zygmund polynomial inequalities via Rademacher processes*, J. Funct. Anal. **272** (11) (2017) 4483–4512.
- [56] M. C. Matos, *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings*, Collect. Math. **54** (2003), 111–136.
- [57] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Dover Publication, Inc., New York, 2010.
- [58] D. Pellegrino and E. Teixeira, *Norm optimization problem for linear operators in classical Banach spaces*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **40** (2009), no. 3, 417–431.
- [59] D. Pellegrino, D. Serrano-Rodríguez, and J. Silva, *On unimodular multilinear forms with small norms on sequence spaces*, Linear Algebra and its Applications **595** (2020), 24–32.
- [60] D. Pellegrino and A. Raposo Jr., *Pointwise lineability in sequence spaces*, Indag. Math. (N.S.) **32** (2021), no. 2, 536–546.
- [61] D. Pellegrino and A. Raposo Jr., *Constants of the Kahane–Salem–Zygmund inequality asymptotically bounded by 1*, Journal of Functional Analysis **282** (2) (2022), Paper No. 109293.
- [62] A. Pietsch, *Operators Ideals*, North-Holland, 1980.
- [63] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, in: Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals, and Their Applications in Theoretical Physics, Leipzig (1983), vol. 67, pp. 185–199.
- [64] D. Popa, *Operators with the Maurey–Pietsch multiple splitting property*, Linear Multilinear Algebra. **68** (2020), 1201–1217.
- [65] D. Puglisi and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Bounded linear non-absolutely summing operators*, J. Math. Anal. Appl. **338** (2008), no. 1, 292–298.
- [66] S. Rolewicz, *On a certain class of linear metric spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III. **5** (1957), 471–473.
- [67] J. Thim, *Continuous nowhere differentiable functions*, Lulea University of Technology, 2003. Master Thesis.
- [68] D. Tomaz, *Hardy-Littlewood inequalities for multipolynomials*, Advances in Operator Theory **4** (2019), no. 3, 688–697.
- [69] D. Tomaz, *Linear structure in certain subsets of quasi-Banach sequence spaces*, Linear Multilinear Algebra. **67** (2019), no. 8, 1561–1566.
- [70] T. Velanga, *Ideals of polynomials between Banach spaces revisited*, Linear and Multilinear Algebra **66** (2018), 2328–2348.
- [71] T. Velanga, *Multipolynomials between Banach spaces: designs of a theory*, PhD Thesis, UNICAMP, 2019.
- [72] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge Univ. Press, 1991.