Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre as aplicações de reflexão e as conjecturas de Lê e de Ruas

Manoel Messias da Silva Júnior

João Pessoa – PB
Dezembro de 2023

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre as aplicações de reflexão e as conjecturas de Lê e de Ruas

por

Manoel Messias da Silva Júnior

sob a orientação de

Prof. Dr. Otoniel Nogueira da Silva

João Pessoa – PB
Dezembro de 2023

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586s Silva Júnior, Manoel Messias da.
Sobre as aplicações de reflexão e as conjecturas de Lê e de Ruas / Manoel Messias da Silva Júnior. - João Pessoa, 2023.
108 f. : il.

Orientação: Otoniel Nogueira da Silva.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Aplicações de reflexão. 3. Trivialidade topológica. 4. Whitney equisingularidade. 5. Conjecturas. I. Silva, Otoniel Nogueira da. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por MAGNOLIA FELIX DE ARAUJO - CRB-15/883

Sobre as aplicações de reflexão e as conjecturas de Lê e de Ruas

por

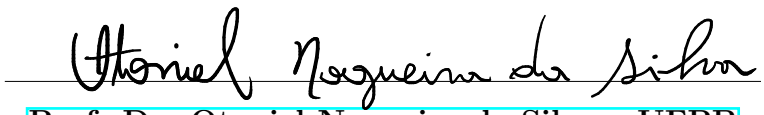
Manoel Messias da Silva Júnior [1]

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria/Topologia

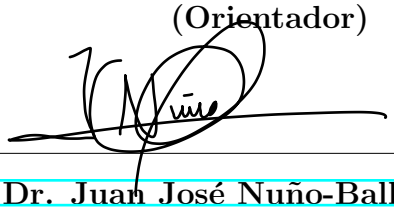
Aprovada em: 8 de Dezembro de 2023

Banca Examinadora:



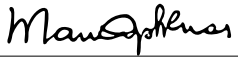
Prof. Dr. Otoniel Nogueira da Silva – UFPB

(Orientador)



Prof. Dr. Juan José Nuño-Ballesteros - UFPB

(Examinador Interno)



Profª. Drª. Maria Aparecida Soares Ruas - USP

(Examinadora Externa)

Prof. Dr. Guillermo Peñafort-Sanchis - UV

(Examinador Externo)

[1]Este trabalho contou com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES entre 01/01/2022 e 31/12/2023.

Aos meus pais, Jeovânia e Manoel.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me permitir a realização desse sonho, por me iluminar em cada escolha e em cada caminho a ser trilhado. Sem Ele nada disso seria possível.

Agradeço a minha família, pois a motivação de vocês me trouxe uma energia surreal ao longo de todo o percurso, e isso foi fundamental nessa conquista. Em especial, agradeço minha mãe pelo apoio e companheirismo de sempre. Essa conquista é tão sua quanto minha.

Deixo meus sinceros agradecimentos aos colegas do PPGMat que me receberam de braços abertos desde o início, pelas conversas, momentos de descontração e carinho que vocês me dedicaram ao longo dessa jornada. Em especial, Alexandre César, Antonio Nascimento, Diego Gomes, Fábio Lima, Geivison Ribeiro, Ginaldo Sá, Gustavo Mendes, João Pedro, Marcos Gabriel, Maria Jaislayne, Marta Menezes, Matheus Felipe, Milena Gama, Natália Lucas, Railane Antonia, Shirley Primo e Yasmin Lopes, obrigado por tudo.

Agradeço muito a todos os meus professores, sejam eles da graduação ou da pós-graduação, pois cada um contribuiu de forma significativa para o meu aprendizado e formação, me inspiraram e serão inspiração para mim onde quer que eu esteja. Em particular, obrigado ao meu grande amigo e orientador, professor Otoniel. O empenho e a atenção que me dedicou, bem como as incríveis orientações foram fundamentais em cada uma das etapas deste trabalho. Agradeço pelas oportunidades, pela confiança e pelo apoio de sempre.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos os germes de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, com $n < p$, que são germes de aplicação dados por uma composição da forma $f = \omega \circ h$, em que $\omega : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ é a chamada aplicação de órbita de um grupo de reflexão G que age sobre $\mathbb{C}^p$ e $h : \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^p$ é um mergulho. Apresentamos os resultados de Peñafort-Sanchis que mostram que a conjectura de Lê é válida para os germes de aplicação de reflexão. Além disso, exibimos alguns contra-exemplos dados por Ruas e Silva, que em particular são germes de aplicação de reflexão, para mostrar que a conjectura de Ruas não é verdadeira, em geral.

Palavras-chave: aplicações de reflexão; conjectura de Lê; trivialidade topológica; Whitney equisingularidade; conjectura de Ruas; conjectura da multiplicidade de Zariski.

Abstract

In this work, we study reflection map germs $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, with $n < p$, where these map germs are obtained by a composition of the form $f = \omega \circ h$, where $\omega : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ is the so-called orbit map of a reflection group G acting on $\mathbb{C}^p$ and $h : \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^p$ is an embedding. We present Peñafort-Sanchis's result which show that the Lê's conjecture is true for refection map germs. Furthermore, we present some counterexamples given by Ruas and Silva, that in particular are reflection map germs, to show that the Ruas's conjecture isn't true, in general.

Keywords: reflection maps; Lê's conjecture; topological triviality; Whitney equisingularity; Ruas's conjecture; Zariski's multiplicity conjecture.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **5**

1.1 Grupos 5

1.2 Álgebra Linear 8

1.3 Teoria de Singularidades 10

1.4 Estratificação de Whitney 18

1.5 O algoritmo de Mond e Pellikaan 19

1.6 Espaço de pontos duplos $D(f)$ 21

1.7 Os invariantes μ, m_0, μ_1 e m_1 23

2 Aplicações de reflexão e a conjectura de Lê **26**

2.1 Grupos de reflexão 26

2.2 Polinômios invariantes e a aplicação de órbita 36

2.3 O complexo de um grupo 42

2.4 Aplicações de reflexão 47

2.5 A conjectura de Lê 57

3 Trivialidade topológica, Whitney equisingularidade e a conjectura de Ruas **62**

3.1 Trivialidade topológica e Whitney equisingularidade 62

3.2 Componentes de dobra e de identificação de $D(f)$ 65

3.3 A conjectura de Ruas 68

3.4 Novos contra-exemplos para a conjectura de Ruas 87

3.5 A conjectura de Zariski 94

Referências Bibliográficas **96**

Lista de Figuras

1.1 Singularidades estáveis de aplicações de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$ (pontos reais) 14
1.2 Exemplos de espaços analíticos: irredutível x redutível 17
1.3 Interseção do guarda-chuva de Whitney com um plano genérico 25

2.1 Ação de $D_6 = \langle a, b \rangle$ sobre $\mathbb{C}^2$ com $ord(a) = 3$ e $ord(b) = 2$ 34
2.2 Ação de $\mathbb{Z}_{2,2}$ sobre $\mathbb{C}^2$ 36
2.3 A ação de ω ao longo das órbitas do espaço 41
2.4 Arranjo de hiperplanos de $\mathbb{Z}_{m_1}, \mathbb{Z}_{m_1,m_2}$ e $\mathbb{Z}_{m_1,m_2,m_3}$ 42
2.5 Faces do grupo $\mathbb{Z}_{m_1,m_2}$ 43
2.6 Primeira maneira de obter a cúspide via aplicação de reflexão 48
2.7 Segunda maneira de obter a cúspide via aplicação de reflexão 49
2.8 Terceira maneira de obter a cúspide via aplicação de reflexão 49
2.9 A coisa 50
2.10 A cúspide como aplicação de dobra 51
2.11 O guarda-chuva de Whitney como aplicação de dobra 51
2.12 O guarda-chuva de Whitney como aplicação de dobra dupla 52
2.13 h_0 cruza C_1 ortogonalmente 54
2.14 h_s cruza C_1 tranversalmente 55
2.15 Interseção de Y_0 com $i_1 Y_0$ 59
2.16 Interseção de Y_s com $i_1 Y_s$ 60

3.1 Componente de identificação de $D(f)$ 67
3.2 Componente de dobra de $D(f)$ 67
3.3 Componentes de identificação e de dobra de $D(f)$ 68
3.4 Ilustração das 27 componentes de $D(f)$ e suas respectivas imagens . . . 76
3.5 Deformação genérica da cúspide 87

Introdução

É de comum acordo entre os pesquisadores da área de Teoria de Singularidades que esta teoria teve suas origens na década de 50, nos trabalhos dos matemáticos americanos Hassler Whitney (1907-1989) e Marston Morse (1892-1977). Whitney introduziu as famosas estratificações de Whitney e as condições (a) e (b) de Whitney, enquanto que Morse introduziu a chamada Teoria de Morse, que busca entender a relação entre a topologia de um espaço e os pontos críticos de uma aplicação definida sobre uma variedade, seja ela de qualquer dimensão.

Embora a teoria seja relativamente nova, alguns problemas foram lançados por alguns pesquisadores e movimentam os demais estudiosos da área pela busca de soluções para essas conjecturas. Dentre essas conjecturas, destacamos três em especial: a conjectura do matemático vietnamita Lê Dûng Tráng, a conjectura da matemática brasileira Maria Aparecida Soares Ruas e a conjectura do matemático americano Oscar Ascher Zariski (1899-1986).

A conjectura de Lê [44] afirma que existe a seguinte equivalência entre as propriedades topológicas e analíticas de um germe de superfície S em $\mathbb{C}^3$: se o link de S é homeomorfo a uma esfera, então S é isomorfa a um espaço total de uma deformação equisingular de uma curva plana irredutível, no qual o link de S é dado pela interseção de S com uma esfera S_ϵ de raio ϵ suficiente pequeno e centrada na origem. Um fato conhecido da teoria de singularidades é que o link de um germe de superfície $(S, 0)$ em $\mathbb{C}^3$ é homeomorfo a uma esfera se, e somente se, a aplicação de normalização

$$n : (S', P) \longrightarrow (S, 0)$$

é uma bijeção de um germe de superfície suave (S', P) em $(S, 0)$. Na verdade, verifica-se que se um germe de aplicação analítico $n : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}^3$ é injetivo, então o posto da diferencial dn em 0 é no mínimo 1. Com isso, uma reformulação da conjectura de Lê é dada nos seguintes termos: se uma aplicação $n : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}^3$ é injetiva, então o posto da diferencial dn na origem é no mínimo 1. Ou ainda, uma reformulação para esta conjectura é apresentada por Fernándes de Bobadilla em [9] como a seguir:

Conjectura 1 (Lê)**.** Não existe germe $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ injetivo de coposto 2.

A conjectura 1 é um problema que segue em aberto e uma tentativa de provar esta conjectura foi apresentada em 1993 por Nemethi em [32]. Entretanto, em 2004, Keilen e Mond [19] forneceram um contra-exemplo para o resultado principal de Nemethi. Todavia, algumas ideias utilizadas por Nemethi são válidas e inspiram alguns trabalhos, como, por exemplo, o trabalho de Fernández de Bobadilla [9]. Para casos particulares, podemos citar o trabalho de Luengo e Pichon [23] que, em 2005, provaram que a conjectura 1 é válida para o caso de coberturas cíclicas sobre singularidades normais de uma superfície totalmente ramificada ao longo de uma vizinhança dos zeros de uma função analítica.

Pensando na segunda conjectura que mencionamos acima, proposta por Ruas, devemos começar relembrando que o clássico resultado de Zariski em [52] assegura que dada uma família de curvas $X \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ então a trivialidade topológica de X é equivalente a Whitney equisingularidade de X, em que o único invariante necessário e suficiente para caracterizar a Whitney equisingularidade é o número de Milnor das fibras de X.

Uma pergunta natural que surge neste momento é: dada uma família de hipersuperfícies $X \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, sobre quais condições a trivialidade topológica e a Whitney equisingularidade de X são equivalentes? Pelo segundo lema de isotopia de Thom, a Whitney equisingularidade de um desdobramento F a 1-parâmetro de um germe de aplicação f implica na trivialidade topológica de F e já sabemos que, em geral, a recíproca não é verdadeira.

Buscando hipóteses para as quais a recíproca desse resultado seja válida, em 1994, Ruas [39] conjecturou que para o caso de uma família X_t de hipersuperfícies em $\mathbb{C}^3$ parametrizadas por aplicações $\mathcal{A}$-finitamente determinadas, a trivialidade topológica de X é equivalente a Whitney equisingularidade de X. Além disso, o único invariante necessário e suficiente para caracterizar a Whitney equisingularidade de X é o número de Milnor da curva de pontos duplos $D(f_t)$. Uma versão da conjectura de Ruas pode ser enunciada da seguinte forma:

Conjectura 2 (Ruas)**.** Sejam $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento a 1-parâmetro de f. São equivalentes:

(a) F é Whitney equisingular.

(b) F é topologicamente trivial.

(c) $\mu(D(f_t))$ é constante.

A equivalência entre (b) e (c) na conjectura 2 foi resolvida por Callejas-Bedregal, Houston e Ruas no ano de 2006 em um trabalho não publicado (veja [3]) e, dois anos mais tarde, Fernández de Bobadilla e Pe Pereira apresentaram uma segunda prova em [10]. Entretanto, a equivalência entre (a) e (b) na Conjectura 2 permaneceu sem resposta por quase 25 anos. Tentativas sem sucesso de provar esta conjectura foram apresentadas por Callejas-Bedregal, Houston e Ruas [3] em 2006, Ruas [40] em 2013 e indiretamente por Marar e Nuño-Ballesteros em [25], no qual tentaram estudar o caso particular de coposto 1 com o desenvolvimento do invariante J. Até que, no ano de 2016, Ruas e Silva [41] (veja também [42]) exibiram alguns contra-exemplos para o problema, mostrando, assim, que a conjectura não é verdadeira, em geral.

Mas o que estas conjecturas tem de especial? O fato interessante aqui e que será explorado nesse trabalho é o seguinte: em 2016, Peñafort-Sanchis [36] prova um resultado que generaliza a Conjectura 1 para uma classe especial de germes de aplicação, que são conhecidos por germes de aplicação de reflexão. Além disso, os contra-exemplos exibidos por Ruas e Silva em [41] também pertencem a esta classe de germes de aplicação de reflexão. Esses estudos motivam o presente trabalho, que tem como objetivo estudar os germes de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, com $n < p$, os quais são dados por uma composição $f = \omega \circ h$ de um mergulho $h : \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^p$ e a chamada aplicação de órbita $\omega : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ de um grupo de reflexão G agindo sobre $\mathbb{C}^p$, com o intuito de apresentar o avanço na conjectura de Lê obtido por Peñafort-Sanchis [36] para germes de aplicação de reflexão e apresentar alguns contra-exemplos fornecidos por Ruas e Silva [41] para a conjectura de Ruas.

No Capítulo 1, relembramos alguns conceitos básicos da Teoria de Grupos, da Álgebra Linear e da Teoria de Singularidades que serão utilizados ao longo do texto. Além disso, dentro da Teoria de Singularidades, apresentamos brevemente o espaço de pontos duplos $D(f)$, bem como a estratificação de Whitney e os invariantes μ, m_0, μ_1 e m_1. Por fim, vale ressaltar que a Seção 1.5 foi dedicada a apresentação do algoritmo de Mond e Pellikaan apresentado em [31] que foi uma das ferramentas mais importantes no Capítulo 3 quando trabalhamos com os contra-exemplos encontrados por Ruas e Silva em [41] para a Conjectura 2.

No Capítulo 2, exploramos o conceito e as propriedades dos grupos de reflexão e apresentamos brevemente a álgebra de invariantes de um grupo de reflexão. Destacamos os resultados mais importantes sobre esta álgebra de invariantes e definimos a chamada aplicação de órbita de um grupo de reflexão, que é um dos objetos mais importantes no estudo das aplicações de reflexão. Em seguida, estudamos o complexo de um grupo de reflexão, o qual é uma estratificação do espaço ao qual o grupo está agindo, obtida pelo arranjo de hiperplanos refletores do grupo em questão. Na sequência, defi-

nimos nosso principal objeto de estudo: as aplicações de reflexão. Apresentamos alguns tipos espaciais de aplicações de reflexão, como as aplicações de dobra, de dobra dupla, essenciais e gráfico refletido, bem como resultados interessantes que envolvem o estrato que contém a origem do espaço. Por fim, fizemos um estudo sobre a injetividade dos germes de aplicação de reflexão e concluímos o capítulo apresentando um resultado de Peñafort-Sanchis provado em [36] que assegura a veracidade da Conjectura 1 dentro da classe de germes de aplicação de reflexão.

No Capítulo 3, estudamos a trivialidade topológica e a Whitney equisingularidade de famílias de superfícies em $\mathbb{C}^3$ parametrizadas por aplicações $\mathcal{A}$-finitamente determinadas. Apresentamos alguns contra-exemplos obtidos por Ruas e Silva em [41] que mostram que a Conjectura 2 não é verdadeira, em geral. Vale ressaltar que todos estes contra-exemplos foram obtidos pela ação do grupo cíclico ou produtos diretos de grupos cíclicos sobre $\mathbb{C}^3$. Por fim, apresentamos novos contra-exemplos para a Conjectura 2 utilizando a ação de outros grupos de reflexão, além de outras características que diferem estes contra-exemplos dos que foram obtidos por Ruas e Silva em [41].

Por fim, finalizamos o trabalho fazendo alguns comentários sobre as aplicações de reflexão e a conjectura da multiplicidade de Zariski, um problema proposto pelo matemático americano Oscar Ascher Zariski (1899-1986) em 1971. Considerando a versão da conjectura para famílias de germes de aplicação $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ em que $f_0 = f$ é um germe de função holomorfa reduzido e $V(f_t) = f_t^{-1}(0)$ é o correspondente germe de hipersuperfície em $\mathbb{C}^n$, a conjectura de Zariski nos diz que:

Conjectura 3 (Zariski)**.** Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de de função holomorfa e $F = (f_t, t)$ um desdobramento a 1-parâmetro de f. Se F é topologicamente trivial, então $m_0(V(f_t), 0)$ é constante.

Assim como a Conjectura 1, a Conjectura 3 é um problema que segue em aberto e diversos casos particulares foram obtidos por pesquisadores da área. Por exemplo, o próprio Zariski em [50] provou a conjectura no caso em que $n = 2$. Dos avanços recentes, Fernández de Bobaddila e Pelka [11] provaram que se uma família X_t de hipersuperfícies com singularidade isolada é μ-constante, então X_t é equimúltipla. Destacamos ainda o trabalho de Eyral [8], o qual o leitor pode conferir para ter uma visão geral sobre a Conjectura 3. O que deixaremos ao final do trabalho é a seguinte questão: a conjectura de Zariski é válida para a classe de germes de aplicação de reflexão? Se não, as técnicas utilizadas por Silva e Ruas em [41] podem ser úteis para exibirmos um contra-exemplo para esta conjectura?

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos os conceitos e resultados básicos que serão utilizados ao longo do texto. Vale ressaltar que conceitos e resultados de caráter topológico, analítico e/ou de álgebra comutativa serão tratados como pré-requisitos e não serão expostos aqui. Todavia, buscamos explorar o necessário sobre a Teoria de Grupos, Álgebra Linear e a Teoria de Singularidades, que serão os ambientes nos quais nosso estudo estará pautado.

No início de cada seção deixaremos uma ou mais referências que poderão ser consultadas para um aprofundamento do aporte teórico aqui relatado.

1.1 Grupos

Vamos iniciar nosso estudo com definições e resultados da Teoria de Grupos que serão importantes ao longo do texto. A principal referência desta seção é [13].

Um dos principais objetos do nosso estudo sobre grupos de reflexão é o grupo multiplicativo $GL(n, K)$ dado por

$$GL(n, K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0\},$$

em que K é um corpo e $M_n(K)$ denota o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em K. Este grupo é conhecido como grupo linear geral sobre K.

Definição 1.1.1. Sejam G um grupo e K um corpo. Uma representação linear do grupo G é um homomorfismo de grupos

$$\rho : G \to GL(n, K)$$

em que n é dito o grau de representação. Dizemos ainda que a representação é fiel quando ρ é injetora.

Exemplo 1.1.2. Seja G um grupo finito de ordem nm. Se exitem $a, b \in G$ tais que m e n são minimais satisfazendo

$$\begin{cases} a^n = e \\ b^m = a^u \\ ba = a^s b \end{cases}$$

para algum $s \geq 1$ e $u \geq 0$ inteiros, então $G = \langle a, b \rangle$. Além disso, estes grupos são únicos, a menos de isomorfismos. Um exemplo de grupo gerado por dois elementos satisfazendo estas condições é o grupo diedral D_{2n}, o qual tem ordem $2n$ e é gerado por elementos a e b tais que 2 e n são minimais satisfazendo

$$\begin{cases} a^n = e \\ b^2 = e \\ ba = a^{n-1} b \end{cases}$$

Além disso, se $G = \langle a, b \rangle$ é um grupo de ordem $2n$ tal que $ord(a) = ord(b) = 2$ e $ord(ab) = n$, então $G = D_{2n}$. Com efeito, é claro que $G = \langle a, ab \rangle$. Agora observe que

$$((a)(ab))^2 = e \Rightarrow (a)(ab) = ((a)(ab))^{-1} = (ab)^{-1}(a^{-1}) = (ab)^{n-1}a.$$

Sendo n e 2 minimais tais que estas relações acontecem, concluímos que G é o grupo diedral D_{2n}. Tomando $n = 4$ no grupo diedral, temos $D_8 = \langle a, b \rangle$ em que $ord(a) = 2$, $ord(b) = 2$ e $ord(ab) = 4$. Como $\rho : D_8 \to GL(2, \mathbb{C})$ dada por

$$\rho(a) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \rho(b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é um homomorfismo injetor. Já que φ uma representação linear fiel de D_8 em $GL(2, \mathbb{C})$, podemos enxergar D_8 como o subgrupo de $GL(2, \mathbb{C})$ gerado pelas matrizes $\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Em geral, para o grupo D_{2n} existe uma representação linear fiel sobre $GL(2, \mathbb{C})$ que nos permite enxergar D_{2n} como o subgrupo de $GL(2, \mathbb{C})$ gerado pelas matrizes $\begin{bmatrix} 0 & e^{2\pi i/n} \\ e^{-2\pi i/n} & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 1.1.3. Considere o grupo $\mathbb{Z}_{2,3} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Uma representação linear fiel de $\mathbb{Z}$ em $GL(2, \mathbb{C})$ é dada pelo homomomorfismo de grupos $\rho : \mathbb{Z}_{2,3} \to GL(2, \mathbb{C})$ dado por

$$\rho((1,0)) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \rho((0,1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} \end{bmatrix}.$$

Em geral, uma representação linear fiel do grupo $\mathbb{Z}_{m_1,\ldots,m_k} = \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ em $GL(k,\mathbb{C})$ é dada pelo homomorfismo de grupos $\rho : \mathbb{Z}_{m_1,\ldots,m_k} \to GL(k,\mathbb{C})$ dado por

$$\rho((1,0,\ldots,0)) = \begin{bmatrix} e^{2\pi i/m_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho((0,1,\ldots,0)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/m_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\rho((0,0,\ldots,1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{2\pi i/m_k} \end{bmatrix}.$$

Definição 1.1.4. Seja G um grupo. Definimos ordem de G como sendo o número de elementos de G. Vamos denotar a ordem de G por $|G|$.

Definição 1.1.5. Sejam G um grupo e $g \in G$. Definimos a ordem de g como sendo a ordem do subgrupo gerado por g. Denotemos por $ord(g)$ a ordem de g, ou seja, $ord(g) = |\langle g \rangle|$.

Observação 1.1.6. Se $g \in G$ possui ordem finita n, verifica-se que n é o menor inteiro positivo tal que $g^n = e$.

Definição 1.1.7. Sejam X um conjunto não-vazio e G um grupo. Uma ação de G sobre S (pela esquerda) é uma função

$$\begin{array}{rccc} * : & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & g * x \end{array}$$

tal que

(a) $e * x = x$, para todo $x \in X$.

(b) $g * (g' * x) = (gg') * x$, para quaisquer $g, g' \in G$ e $x \in X$.

Definição 1.1.8. Sejam G um grupo, K um corpo, $n \in \mathbb{N}$ e $\rho : G \to GL(n, K)$ um representação linear de G. Se X é um conjunto não vazio, definimos uma ação linear de G em K^n como sendo a ação de G em K^n dada pela função

$$\begin{array}{rccc} \rho^* : & G \times K^n & \longrightarrow & K^n \\ & (g, x) & \longmapsto & \rho^*((g, x)) = \rho(g)(x) \end{array} .$$

1.2 Álgebra Linear

Dedicaremos esta seção à explanação de conceitos básicos da Álgebra Linear, bem como alguns resultados que serão importantes para o estudo dos grupos de reflexão e suas propriedades. Nesta seção, a referência geral utilizada para o seu desenvolvimento foi [4].

Definição 1.2.1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e H um subespaço de V. Se $\dim H = \dim V - 1$, então dizemos que H é um hiperplano.

Definição 1.2.2. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$. Uma forma hermitiana sobre V é uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} (-,-) : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

tal que

(i) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w), \forall\, u, v, w \in V$.

(ii) $(au, v) = a(u, v), \forall\, u, v \in V$ e $\forall\, a \in \mathbb{C}$.

(iii) $\overline{(u, v)} = (v, u), \forall\, u, v \in V$.

Se para cada $u \in V$ tivermos $(u, u) \geq 0$ e $(u, u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$, então a forma hermitiana $(-,-)$ é dita positiva definida. No exemplo a seguir, veremos que dado um espaço vetorial V de dimensão n sempre é possível definir uma forma hermitiana positiva definida sobre V.

Exemplo 1.2.3. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V. Agora defina

$$\begin{array}{rccc} (-,-) : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (u, v) & \longmapsto & (u, v) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j} \end{array} ,$$

em que $u = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$ e $v = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j$. Verifica-se que $(-,-)$ define uma forma hermitiana positiva definida sobre V.

Definição 1.2.4. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ e $(-,-)$ uma forma hermitiana positiva definida sobre V. Uma base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V é ortogonal se $(e_i, e_j) = 0$ sempre que $i \neq j$. Se além disso $(e_j, e_j) = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$, dizemos que a base $\mathcal{B}$ é ortonormal.

Observação 1.2.5. É possível mostrar que duas formas hermitianas positivas definidas $(-,-)$ e $[-,-]$ em V são equivalentes, no sentido de que existe um isomorfismo φ de V tal que $(u, v) = [\varphi(u), \varphi(v)]$, para quaisquer $u, v \in V$. Desta forma, a partir de agora vamos fixar a forma $(-,-)$ do Exemplo 1.2.3.

Nas condições da Definição 1.1.8, considerando $e_1, \ldots, e_n$ a base canônica de K^n e sendo $X_1, \ldots, X_n$ a base de seu dual associada à base $e_1, \ldots, e_n$, podemos definir a ação dos elementos do grupo G sobre $X_1, \ldots, X_n$ por

$$gX_i(e_j) := X_i(g^{-1}e_j),$$

para quaisquer $g \in G$ e $1 \leq i, j \leq n$. Na Seção 2.2 apresentaremos os principais resultados sobre a álgebra de invariantes $K[V]^G$ em que G é um subgrupo de $GL(V)$ e vamos explorar os casos em que G é um grupo de reflexões.

Definição 1.2.6. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão n com forma hermitiana positiva definida $(-,-)$ e H um subespaço de V. Definimos o complemento ortogonal de H, e denotamos por $H^{\perp}$, como sendo

$$H^{\perp} := \{u \in V \mid (u, v) = 0, \, \forall \, v \in H\}$$

Definição 1.2.7. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Definimos $GL(V)$ como sendo o conjunto dos automorfismos de V, isto é,

$$GL(V) := \{T : V \to V \mid T \text{ é um isomorfismo}\}.$$

Definição 1.2.8. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Dizemos que $T \in GL(V)$ é unitária (ou isometria) quando $(T(u), T(v)) = (u, v)$, para quaisquer $u, v \in V$. Vamos denotar por $U(V)$ o conjunto de todos os automorfismos unitários de V, ou seja,

$$U(V) := \{T : V \to V \mid T \text{ é unitária}\}.$$

Além disso, verifica-se que $U(V)$ é um grupo com a operação de composição.

Observação 1.2.9. Se M é a matriz de $T \in GL(V)$ com respeito a uma base ortonormal de V, então g é unitário se, e somente se, M é uma matriz unitária, ou seja, $\overline{M}^t M = I$, em que $\overline{M}^t$ denota a transposição do conjugado complexo de M e I é a matriz identidade.

Definição 1.2.10. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com forma herminitana positiva definida $(-,-)$ e $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T possui adjunto se existir um operador linear $T^* : V \to V$ tal que $(T(u), v) = (u, T^*(v))$, para quaisquer $u, v \in V$. Neste caso, diremos que T^* é o adjunto de T.

Proposição 1.2.11. Seja T um operador linear de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$ com forma hermitiana $(-,-)$. Então $T \in U(V)$ se, e somente se, existe T^* e tem-se $T^* \circ T = T \circ T^* = Id$.

Demonstração. Ver Proposição 7.3.3, p. 223 em [4]. □

Definição 1.2.12. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com forma hermitiana positiva definida $(-,-)$ e T um operador linear de V. Dizemos que T é normal se existir T^* e $T^* \circ T = T \circ T^*$.

Em particular, da Proposição 1.2.11 tem-se que todo operador unitário é normal.

Definição 1.2.13. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K e T um operador linear de V. Dizemos que $\alpha \in K$ é um autovalor de T se existir $v \in V$ não nulo tal que $T(v) = \alpha v$. Além disso, dizemos que v é um autovetor de V associado ao autovalor α.

Teorema 1.2.14. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita com forma hermitiana positiva definida $(-,-)$ e T um operador linear de V. Então T é normal se, e somente se, existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.

Demonstração. Ver Teorema 7.4.10, p. 229 em [4]. □

Desta forma, concluímos em particular que para todo operador unitário T, existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T, pois todo unitário é normal.

1.3 Teoria de Singularidades

Vamos dedicar esta seção à exposição de conceitos básicos e muito importantes que são utilizados na Teoria de Singularidades e que, alguns deles, não são exclusivos desta teoria e podem ser estudados em diversos contextos. Dentre eles, o conceito de germe de espaço analítico é fundamental para nossa abordagem e pode ser estudado, por exemplo, em Geometria Algébrica. Para esta seção deixamos como referência [15] e [35].

Definição 1.3.1. Seja X um espaço topológico.

(1) Dado um subconjunto $S \subset X$, dizemos que dois subconjuntos $Y_1, Y_2 \subset X$ definem o mesmo germe ao longo de S se existe uma vizinhança aberta U de S em X tal que

$$Y_1 \cap U = Y_2 \cap U.$$

Isto define uma relação de equivalência sobre o conjunto de subconjuntos de X. Uma classe de equivalência é chamada de germe (ao longo de S) e o germe representado por $Y \subset X$ é denotado por (Y, S). Quando S é um conjunto discreto, os germes ao longo de S são chamados de germes em S. Sempre que $S = \{x\}$, denotamos $(Y, \{x\})$ simplesmente por (Y, x).

(2) Dizemos que um germe (Y, S) está contido em um germe (Y', S), e denotamos por $(Y, S) \subset (Y', S)$, se existem representantes Z e Z' de (Y, S) e (Y', S), respectivamente, satisfazendo $Z \subset Z'$. Além disso, definimos a interseção de dois germes como sendo $(Y, S) \cap (Y', S) = (Y \cap Y', S)$ e a união como sendo $(Y, S) \cup (Y', S) = (Y \cup Y', S)$ e observe que estas definições independem dos representantes.

Definição 1.3.2. Sejam X e Y espaços topológicos, $S \subset X$, $U_1, U_2 \subset X$ vizinhanças abertas de S e $f_1 : U_1 \to Y, f_2 : U_2 \to Y$ duas aplicações.

(1) Dizemos que f_1 e f_2 definem o mesmo germe ao longo de S se existe uma vizinhança aberta $U \subset U_1 \cap U_2$ de S tal que

$$f_1 \mid_U = f_2 \mid_U .$$

Isto define uma relação de equivalência no conjunto das aplicações $U \to Y$ definidas em torno de S.

(2) Uma classe de equivalência é chamada de germe de aplicação (ao longo de S) e o germe de aplicação representado por f é denotado por (f, S). Também denotamos o germe (f, S) de uma aplicação $f : U \to Y$ em torno de S por $f : (X, S) \to Y$ ou ainda por $f : (X, S) \to (Y, T)$, em que $f(S) \subset T \subset Y$.

(3) Um germe de homeomorfismo (resp. germe injetivo, germe de isomorfismo, etc.) é um germe que admite um representante que é um homeomorfismo (resp. injetivo, isomorfismo, etc.)

(4) Um germe de aplicação (f, S) sobre um conjunto finito S satisfazendo $f(S) = \{y\}$ para algum $y \in Y$ é chamado de multigerme. Um monogerme em $x \in X$ é um germe de aplicação (f, x).

As definições dadas anteriormente unidas com a definição de singularidade de aplicação, que veremos ainda nesta seção, serão suficientes para apresentarmos uma resposta à Conjectura 1 para a classe de germes de aplicação de reflexão. Entretanto, para avançarmos para os resultados de Ruas e Silva ([41] e [42]) na busca pelos contra-exemplos para a Conjectura 2, precisamos de um aporte teórico muito maior da teoria de singularidades. Para o nosso estudo, um dos principais objetos é o anel de séries formais convergentes $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Teorema 1.3.3. O anel $\mathcal{O}_n$ dos germes de funções holomorfas de n variáveis é isomorfo ao anel de séries complexas de potências convergentes em n variáveis $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [17]. □

Este resultado nos diz que podemos denotar uma função holomorfa (em torno de $0 \in \mathbb{C}^n$, em geral) ou uma série convergente da mesma forma. Além disso, $\mathcal{O}_n$ é um anel Noetheriano local cujo ideal maximal é $\mathfrak{m}_n = \{f \in \mathcal{O}_n \mid f(0) = 0\}$.

Vejamos as definições necessárias para nosso estudo no que se refere à teoria de singularidades de aplicações.

Definição 1.3.4. Denotamos por $\mathcal{O}_{n,p}$ o conjunto dos germes de aplicações analíticas $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}^p$ e $\mathcal{O}^0_{n,p}$ o conjunto dos germes $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$.

Um dos objetivos da teoria de singularidades é classificar germes de $\mathcal{O}_{n,p}$ sob relações de equivalência em $\mathcal{O}_{n,p}$ obtidas via ação de um grupo. Para o estudo de singularidades de aplicações $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ temos a seguinte noção de equivalência:

Definição 1.3.5. Seja $\mathcal{A}$ o grupo dos pares de germes de difeomorfismos (h, k) com $h : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ e $k : (\mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$. Dois germes $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ são $\mathcal{A}$-equivalentes se existe $(h, k) \in \mathcal{A}$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}^p, 0) \\ \Big\downarrow h & & \Big\downarrow k \\ (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{C}^p, 0) \end{array}$$

comuta. O grupo $\mathcal{A}$ é conhecido como $\mathcal{A}$-grupo de Mather.

Definição 1.3.6. (a) Dizemos que uma aplicação $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ tem posto r em um ponto $x \in \mathbb{C}^n$, e denotamos por posto $f_x = r$ se a diferencial df_x tem posto r.

(b) Definimos o coposto de uma aplicação $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ em um ponto $x \in \mathbb{C}^n$, e denotamos por coposto f_x, como sendo coposto $f_x = n - \text{posto}\, df_x$.

(c) Dizemos que $x \in \mathbb{C}^n$ é um ponto regular de uma aplicação $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ se df_x tem posto máximo, ou equivalentemente, se coposto $f_x = 0$. Caso contrário, dizemos que x é um ponto singular de f.

Quando nos referimos ao posto de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, estamos olhando para o posto de um representante de f em $0 \in \mathbb{C}^n$.

Definição 1.3.7. Um desdobramento de um multigerme $f : (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é um multigerme

$$F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) \longrightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0)$$

da forma $F(x, s) = (f_s(x), s)$ com $f_0(x) = f(x)$. Além disso, dizemos que dois desdobramentos F e F' são $\mathcal{A}$-equivalentes se existem desdobramentos das aplicações identidade de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$

$$\phi : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) \longrightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\})$$

e

$$\psi : (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0)$$

tais que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) & \xrightarrow{F} & (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) & \xrightarrow{F'} & (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0) \end{array}$$

comuta.

Definição 1.3.8. Sejam $f : (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ um multigerme e F um desdobramento de f. Dizemos que F é trivial se F é $\mathcal{A}$-equivalente ao desdobramento constante $I(x, s) = (f(x), s)$, o qual denotamos por $f \times id$. Quando todo desdobramento de f é trivial, dizemos que f é estável.

De maneira intuitiva, dizer que um multigerme $f : (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é estável significa que sua $\mathcal{A}$-classe não muda após uma pequena perturbação. No caso de germes de aplicação finitos $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$, Whitney [46] mostrou que as únicas singularidades estáveis nestas dimensões são os pontos duplos de cruzamentos tranversais, os guarda-chuvas de Whitney e os ponto triplos (veja a Figura 1.1).

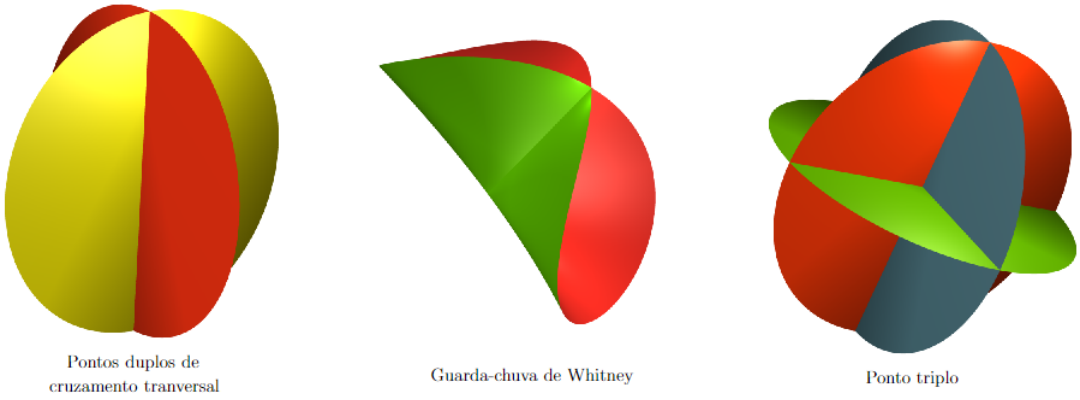


Figura 1.1: Singularidades estáveis de aplicações de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$ (pontos reais)

Observação 1.3.9. Assim como na Figura 1.1, utilizaremos desenhos reais para ilustrar nossos objetos complexos. Portanto, a partir de agora, omitiremos esta informação na legenda das figuras.

Definição 1.3.10. Uma aplicação $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ é $\mathcal{A}$-estável se, para todo $y \in \mathbb{C}^p$, o multigerme de f em $f^{-1}(y)$ é estável.

Definição 1.3.11. Dizemos que duas aplicações $f, g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ possuem o mesmo k-jato em um ponto $x \in \mathbb{C}^n$ se $f(x) = g(x)$ e as expansões em séries de Taylor até ordem k, para algum sistema de coordenadas locais, $j^k f(x)$ e $j^k g(x)$ de f e g em x, respectivamente, coincidem.

A seguir, definiremos o conceito de $\mathcal{A}$-determinação finita de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$. No Capítulo 3, veremos que a única hipótese posta por Ruas sobre o germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ é a determinação finita, para que valha a equivalência entre a Whitey equisingularidade e a trivialidade topológica de um desdobramento $F = (f_t, t)$.

Definição 1.3.12. Dizemos que um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é k-$\mathcal{A}-$determinado se dado qualquer germe $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ com o mesmo k-jato de f em $0 \in \mathbb{C}^n$, tem-se que $g \sim_{\mathcal{A}} f$. Além disso, quando f é k-$\mathcal{A}$-determinado para algum k, dizemos simplesmente que f é $\mathcal{A}$-finitamente determinado.

Outro conceito importante é o de germe de aplicação $\mathcal{A}$-finito. Vejamos a definição:

Definição 1.3.13. Dizemos que um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é $\mathcal{A}$-finito se possui instabilidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^n$, isto é, para todo representante f existem vizinhanças U de $0 \in \mathbb{C}^n$ e V de $0 \in \mathbb{C}^p$, com $f(U) \subset V$, tais que para todo $y \in V \setminus \{0\}$ o conjunto $S = f^{-1}(y) \cap \Sigma(f)$ é finito e $f : (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é estável, em que $\Sigma(f)$ denota o conjunto singular de f.

Na Definição anterior, dizer que um germe de aplicação f possui instabilidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^n$ significa que, em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$, todas as singularidades fora da origem são estáveis. A seguir, enunciaremos um resultado muito conhecido da teoria de singularidades, que trata de uma caracterização geométrica para a determinação finita de germes de aplicações.

Teorema 1.3.14 (Critério geométrico de Mather-Gaffney)**.** Um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é $\mathcal{A}$-finitamente determinado se, e somente se, é $\mathcal{A}$-finito.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [45]. □

Ao longo do trabalho utilizaremos apenas o grupo $\mathcal{A}$. Desta forma, vamos omitir o prefixo $\mathcal{A}$ e diremos apenas que um germe de aplicação é finitamente determinado.

Definição 1.3.15. Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ uma vizinhança aberta de $0 \in \mathbb{C}^n$.

(1) Um espaço localmente analítico é um conjunto $X \subset U$ com a propriedade de que para todo $p \in X$ existe uma vizinhança aberta U_p de p e um número finito de funções holomorfas $f_{p_1}, \ldots, f_{p_k}$ definidas em U_p tais que

$$X \cap U_p := \{x \in U_p \mid f_{p_1}(x) = \cdots = f_{p_k}(x) = 0\}.$$

Usamos a notação

$$V(f_{p_1}, \ldots, f_{p_k}) := \{x \in U_p \mid f_{p_1}(x) = \cdots = f_{p_k}(x) = 0\}$$

para denotar o conjunto de zeros de $f_{p_1}, \ldots, f_{p_k}$ em U_p.

(2) Seja $I = (f_1, \ldots, f_k) \subset \mathcal{O}_n$ um ideal com f_i definida em U para cada $i = 1, \ldots, k$. Definimos o germe de espaço localmente analítico $(X, 0)$ como sendo

$$(X, 0) := (V(I), 0),$$

ou simplesmente $(X, 0) = V(I)$. Observe que

$$(V(I), 0) = \bigcap_{i=1}^{k} (V(f_i), 0) = \bigcap_{i=1}^{k} (\{p \in U \mid f_i(p) = 0\}, 0).$$

(3) Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de espaço localmente analítico. Definimos o ideal

$I(X)$ de $(X,0)$ como sendo

$$I(X) := \{f \in \mathcal{O}_n \mid (X,0) \subset (V(f),0)\}.$$

(4) Seja $(X,0)$ um germe de espaço localmente analítico. Dizemos que $(X,0)$ é irredutível se para quaisquer germes de espaços analíticos $(X_1,0),(X_2,0)$ tais que $X = X_1 \cup X_2$, tem-se que, necessariamente, $X = X_1$ ou $X = X_2$.

Observação 1.3.16. Ao longo do texto, trabalharemos apenas com espaços localmente analíticos. Desta forma, com o intuito de simplificar a escrita, utilizaremos apenas o termo "espaço analítico" para tratar de "espaços localmente analíticos".

Verifica-se que dado um germe de espaço analítico $(X,0)$, existem um inteiro $k > 0$ e $X_1, \ldots, X_k$ para algum $k > 0$ germes de espaço analítico irredutíveis em torno de 0 com X_i não contido em X_j sempre que $i \neq j$ tais que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$. Os germes de espaço analítico $(X_i,0)$ são unicamente determinados, a menos da ordem, e são chamados de componentes irredutíveis de $(X,0)$.

A definição de germe de aplicação finito a seguir é uma das mais importantes para o desenvolvimento do nosso estudo. Vejamos a definição:

Definição 1.3.17. Seja $f : (X,0) \to (Y,0)$ um germe de aplicação entre espaços analíticos. Dizemos que f é finito se existe um representante de f que é uma aplicação fechada e tal que $f^{-1}(y)$ é finito, para todo $y \in Y$.

Exemplo 1.3.18. Considere os germes de espaço analítico $(X,0) = V(x^2 - y^2z)$ e $(Y,0) = V(xy)$, em que (x,y,z) é o sistema de coordenadas canônicas de $\mathbb{C}^3$. O germe X é conhecido como guarda-chuva de Whitney e é irredutível. Já o germe Y é formado por dois planos que se intersectam tranversalmente. Y é redutível e suas componentes irredutíveis são $Y_1 = V(x)$ e $Y_2 = V(y)$. A Figura 1.2 a seguir apresenta um exemplo de um espaço analítico irredutível e um exemplo de um espaço analítico redutível.

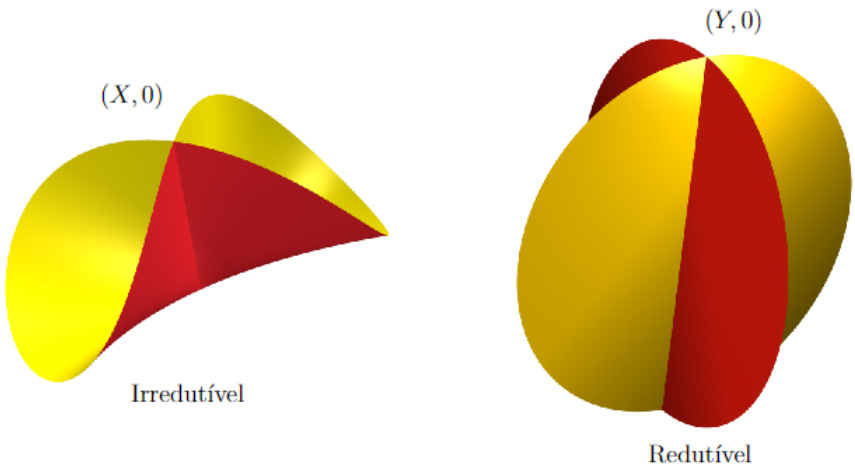


Figura 1.2: Exemplos de espaços analíticos: irredutível x redutível

Definição 1.3.19. Sejam $(X,0) = V(I) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ e $(Y,0) \subset (\mathbb{C}^m,0)$ germes de espaço analítico.

(1) Dizemos que $g : (X,0) \to (\mathbb{C},0)$ é um germe de função analítica se para algum representante (que em geral também chamamos de g) $g : U \to \mathbb{C}$ tem-se que g é a restrição de alguma aplicação analítica $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ao conjunto aberto U.

(2) Dizemos que $\varphi = (f_1,\ldots,f_m) : (X,0) \to (Y,0)$ é um germe de aplicação analítica se cada f_i é um germe de função analítica. A aplicação $\varphi : (X,0) \to (Y,0)$ é dita um isomorfismo se φ possui inversa analítica.

(3) Definimos o anel local de funções sobre $(X,0)$ como sendo

$$\mathcal{O}_X := \mathcal{O}_n/I.$$

(4) Definimos o germe de espaço analítico reduzido $(X_{red},0)$ como o germe de espaço analítico $(X_{red},0) := V(\sqrt{I})$. Desta forma, o anel local das funções sobre $(X_{red},0)$ é

$$\mathcal{O}_{X_{red}} := \mathcal{O}_n/\sqrt{I}$$

Teorema 1.3.20 (Hilbert's Nullstellensatz - versão local)**.** Seja I um ideal de $\mathcal{O}_n$. Então $I(X) = \sqrt{I}$, em que $\sqrt{I} = \{f \in \mathcal{O}_n \mid f^n \in I, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração. Ver [16], p. 660. □

Do famoso Teorema acima conluímos que $I(X)$ é um ideal radical e que o anel local $\mathcal{O}_{X_{red}}$ é isomorfo ao quociente $\mathcal{O}_n/I(X)$.

1.4 Estratificação de Whitney

O objetivo desta seção é definir a noção de estratificação de Whitney, introduzida por Whitney em [47]. Uma boa referência para esta seção é [14].

Seja X um espaço analítico em $\mathbb{C}^n$. Queremos "particionar" o espaço X em subconjuntos disjuntos $X_1, \ldots, X_s$ de modo que cada X_i é um espaço analítico suave, os quais serão chamados de estratos. Mais formalmente, temos a:

Definição 1.4.1. Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ um espaço analítico. Uma estratificação localmente finita $\mathcal{X}$ de X é uma partição de X em subconjuntos analíticos suaves X_α de $\mathbb{C}^n$, chamados de estratos, tais que para todo ponto de X existe uma vizinhança em $\mathbb{C}^n$ que encontra apenas um número finito de estratos.

Definição 1.4.2. Dizemos que a estratificação $\mathcal{X}$ de X satisfaz a condição de fronteira se para dois estratos X_α e X_β tais que $X_\alpha \cap \overline{X_\beta} \neq \emptyset$ tem-se que $X_\alpha \subset \overline{X_\beta}$.

Definição 1.4.3. A estratificação $\mathcal{X}$ de X satisfaz as condições de Whitney se para todo par (X_α, X_β) de estratos tais que $X_\beta \subset \overline{X_\alpha}$ e para todo ponto $y \in X_\beta$ tem-se que:

(a) Para toda sequência de pontos (x_i) de X_α convergindo para y tal que o limite

$$\lim_{i\to\infty} T_{x_i}(X_\alpha) = T$$

existe na Grassmaniana correspondente, então T contém $T_y(X_\beta)$.

(b) Além disso, se para toda sequência (y_i) em X_β convergindo para y e tal que o limite de direções

$$\lim_{i\to\infty} \overline{x_i y_i} = l$$

existe no espaço projetivo, então T contém l.

Estas são as chamadas condição (a) e condição (b) de Whitney. Além disso, vale ressaltar que Whitney [47] mostrou que todo espaço analítico complexo admite uma estratificação satisfazendo as condições (a) e (b). Outra observação sobre este resultado é que esta estratificação exibida por Whitney também satisfaz a condição de fronteira na Definição 1.4.2.

Definição 1.4.4. Uma estratificação $\mathcal{X}$ de X é dita Whitney regular ou Whitney equisingular quando satisfaz a condição de fronteira e as condições (a) e (b) de Whitney.

1.5 O algoritmo de Mond e Pellikaan

O objetivo desta seção é o de apresentar o algoritmo de Mond e Pellikaan exposto em [31] para a construção de uma matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_{X,x})$, em que $f : (X, x) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ é uma aplicação finita e (X, x) é um multi-germe de espaço analítico Cohen-Macaulay de dimensão n.

Vamos iniciar com o conceito de espaço analítico Cohen-Macaulay, que pode ser melhor explorado, por exemplo, em [7].

Definição 1.5.1. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local. Uma sequência $f_1, \ldots, f_r$ de elementos de $\mathfrak{m}$ é regular de comprimento r de R se f_1 não é divisor de zero de R e f_i não é divisor de zero de $R/(f_1, \ldots, f_{i-1})$ para todo $i = 2, \ldots, r$. O supremo dos comprimentos de todas as cadeias regulares é chamado de profundidade do anel R e denotado por $depth(R)$.

Definição 1.5.2. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local. Dizemos que R é Cohen-Macaulay se $depth(R) = \dim(R)$ (dimensão de Krull do anel R). No caso em que R não é um anel local, então R é Cohen-Macaulay se, e somente se, a localização R_P é Cohen-Macaulay para todo ideal primo $P \subset R$.

Definição 1.5.3. Seja $(X, 0) = (V(I), 0)$ um germe de espaço analítico. Dizemos que $(X, 0)$ é Cohen-Macaulay se $\mathcal{O}_X$ é Cohen-Macaulay.

Observação 1.5.4. Ao longo do trabalho vamos sempre trabalhar com o germe de espaço analítico $(\mathbb{C}^n, 0)$, o qual é Cohen-Macaulay.

Vejamos agora o conceito de apresentação de um módulo.

Definição 1.5.5. Seja R um anel e M um R-módulo. Uma apresentação de M é uma sequência exata

$$R^p \xrightarrow{\lambda} R^q \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$$

de R-módulos. Quando esta sequência existe, dizemos que λ é uma matriz de apresentação do módulo e o módulo M é dito módulo de apresentação finita.

Em geral, não é simples construir uma apresentação de um módulo. No caso em que tomamos uma aplicação finita $f : (X, x) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ em que (X, x) é um multi-germe de espaço analítico Cohen-Macaulay de dimensão n, o Teorema de preparação de Weierstrass assegura que $\mathcal{O}_{X,x}$ é um $\mathcal{O}_{n+1}$-módulo finito via f^*. Além disso, note que se as classes $g_1, \ldots, g_h$ em $\mathcal{O}_{X,x}/f^*(x_1, \ldots, x_{n+1})$ geram este anel como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, então $g_1, \ldots, g_h$ geram $\mathcal{O}_{X,x}$ como $\mathcal{O}_{n+1}$-módulo, de modo que é suficiente obtermos apenas as relações entre os $g_i's$ em $\mathcal{O}_{n+1}$.

Agora vejamos como funciona o algoritmo de Mond e Pellikaan. Inicialmente, escolha uma projeção $\pi : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $\tilde{f} = \pi \circ f$ também seja finita, a qual existe devido ao Lema de Normalização de Noether. Após uma mudança de coordenadas, podemos escrever $f(x) = (\tilde{f}(x), f_{n+1}(x))$ e como $\mathcal{O}_{X,x}$ é Cohen-Macaulay, segue que $\mathcal{O}_{X,x}$ é um $\mathcal{O}_n$-módulo livre via $\tilde{f}^*$. Desta forma, existem $\alpha_{ij} \in \mathcal{O}_n$ com $1 \leq i, j \leq h$ tais que

$$f_{n+1}g_i = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} \circ \tilde{f})g_j,$$

para cada $i = 1, \ldots, h$.

Como os germes g_j geram $\mathcal{O}_{X,x}$ sobre $\mathcal{O}_{n+1}$ via f^*, então

$$\begin{cases} \lambda_{ij} = \alpha_{ij} \circ \pi, \text{ se } i \neq j \\ \lambda_{ii} = \alpha_{ii} \circ \pi - X_{n+1} \end{cases},$$

em que $f_{n+1} = X_{n+1} \circ f$ e $(X_1, \ldots, X_{n+1})$ é um sistema de coordenadas de $\mathbb{C}^{n+1}$ na meta. Portanto, $\lambda = \lambda_{ij}$ é uma matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_{X,x})$ como um $\mathcal{O}_{n+1}$-módulo e temos a sequência exata

$$\mathcal{O}_{n+1}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_{n+1}^p \xrightarrow{\alpha} f_*(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow 0$$

em que α é o morfismo definido por $e_i \mapsto h_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, sendo $\{e_1 \ldots, e_p\}$ uma base canônica de $\mathcal{O}_{n+1}^p$ e $\{h_1, \ldots, h_p\}$ são os geradores de $f_*(\mathcal{O}_{X,x})$ como $\mathcal{O}_{n+1}$-módulo.

Quando estivermos aptos a apresentar os contra-exemplos dados por Ruas e Silva em [41] para a Conjectura 2, utilizaremos o algoritmo de Mond e Pellikaan para encontrar uma matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como um $\mathcal{O}_3$-módulo, em que $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ é um germe de aplicação finitamente determinado. Além disso, vale ressaltar que utilizaremos o Software Singular [48] e a implementação do algoritmo de Mond e Pellikaan dada por Hernandes, Miranda e Peñafort-Sanchis em [18]. Na página de Miranda [37], podemos encontrar uma biblioteca do Singular que nos permite calcular matrizes de apresentação baseados nos resultados vistos em [18].

Outras ferramentas importantes no nosso estudo serão os ideais de Fitting, os quais podem ser estudados, por exemplo, em [15] ou [31]. Usamos estes ideais para dar uma estrutura conveniente para alguns espaços e também para calcular alguns invariantes, como o número de pontos triplos de um germe de aplicação de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$.

Para finalizar esta seção, vamos introduzir o conceito de k-ésimo ideal de Fitting de $\mathcal{O}_{X,x}$ como $\mathcal{O}_{Y,y}$-módulo em que (X, x) e (Y, y) são germes de espaços analíticos.

Definição 1.5.6. Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito entre espaços complexos. Se o

módulo $f_*(\mathcal{O}_X)$ é um feixe coerente de $\mathcal{O}_Y$-módulos, então denotamos por $\mathcal{F}_k(f) = \mathcal{F}_k(f_*(\mathcal{O}_X))$ o k-ésimo feixe de ideais de Fitting. Analogamente, se $f : (X, x) \to (Y, y)$ é um germe de aplicação finita, então denotamos por $F_k(f) = F_k(f_*(\mathcal{O}_{X,x}))$ o k-ésimo ideal de Fitting de $\mathcal{O}_{X,x}$ como $\mathcal{O}_{Y,y}$-módulo.

Quando estamos de posse de uma matriz de apresentação λ de $f_*(\mathcal{O}_n)$ como $\mathcal{O}_{n+1}$-módulo para um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, então o k-ésimo ideal de Fitting de f é o ideal gerado pelos menores de ordem $q - k$ de λ, em que q é a ordem de λ. Em particular, tem-se que $F_0(f) = \langle \det \lambda \rangle$ e $f(\mathbb{C}^2) = V(F_0(f)) = V(\det \lambda)$.

1.6 Espaço de pontos duplos $D(f)$

Seguindo com nossos conceitos preliminares, vamos dedicar esta seção à introdução do espaço de pontos duplos $D(f)$ de uma aplicação f. Para o desenvolvimento do nosso estudo faz-se necessário a introdução do conjunto dos pontos duplos $D^2(f)$ de f, embora não o utilizemos para efetuar cálculos.

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é um germe de aplicação. O conjunto $D^2(f)$ é definido por

$$D^2(f) := \{(x, x') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mid f(x) = f(x') \text{ com } x \neq x'\} \cup \Sigma(f),$$

em que $\Sigma(f)$ denota o conjunto singular de f. Se f tem coposto 1, podemos escrever f na sua forma normal

$$f(x, y) = (x, f_n(x, y), \ldots, f_p(x, y))$$

na qual $x \in \mathbb{C}^{n-1}$, $y \in \mathbb{C}$ e $f_j \in \mathfrak{m}_2^2$ para todo $j = n, \ldots, p$, e verifica-se que

$$D^2(f) = V\left(x_1 - x_1', \ldots, x_{n-1} - x_{n-1}', \frac{f_n(x, y) - f_n(x, y')}{y - y'}, \ldots, \frac{f_p(x, y) - f_p(x, y')}{y - y'}\right).$$

Em particular, quando $(n, m) = (2, 3)$ podemos escrever f na sua fora normal $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$ em que $p, q \in \mathfrak{m}_2^2$ e verifica-se que

$$D^2(f) = V\left(x - x', \frac{p(x, y) - p(x, y')}{y - y'}, \frac{q(x, y) - q(x, y')}{y - y'}\right).$$

É possível dar uma estrutura analítica para $D^2(f)$ no caso geral, isto é, quando coposto $f \neq 1$. No entanto, como este não é o foco do trabalho, deixaremos as ótimas referências [30] e [35] para que o leitor mais interessado possa conhecer um pouco mais sobre esse conjunto.

Via $D^2(f)$, podemos definir o espaço $D(f)$ como sendo $p_1(D^2(f))$, em que $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ é uma aplicação holomorfa e $p_1 : U \times U \to U$ é uma projeção no primeiro fator. Entretanto, a estrutura analítica mais apropriada para $D(f)$ é a estrutura dada através dos ideais de Fitting, visto que esta estrutura nos permite analisar propriedades do espaço $D(f)$ herdadas pelas propriedades de $D^2(f)$.

Vamos definir o espaço $D(f)$ com a estrutura de ideais de Fitting:

Definição 1.6.1. (a) Sejam $f : U \to V$ uma aplicação finita, em que $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^p$ são abertos, e $p_1|_{D^2(f)} : D^2(f) \subset U \times U \to U$ a restrição da projeção p_1, no primeiro fator, ao conjunto $D^2(f)$. O espaço de pontos duplos $D(f)$ é o espaço complexo

$$D(f) := V(\mathcal{F}_0(p_1|_{D^2(f)})).$$

Observe que obtemos a igualdade de conjuntos $D(f) = p_1(D^2(f))$. Além disso, o leitor pode conferir a Seção 3.2 na qual apresentamos alguns exemplos em que expressamos $D(f)$ para germes de aplicação f de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$.

(b) Dado um germe de aplicação finito $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, o espaço de pontos duplos $D(f)$ de f é o germe de espaço complexo

$$D(f) := V(F_0(p_1|_{D^2(f)})),$$

isto é, o anel local de $D(f)$ é o anel $\mathcal{O}_{D(f)} = \mathcal{O}_n/F_0(p_1|_{D^2(f)})$.

A definição a seguir nos permite determinar $f(D(f))$ com a estrutura de ideais de Fitting. Esta definição será útil para que possamos calcular a multiplicidade de Hilbert-Samuel de $f(D(f))$ quando estivermos tratando dos contra-exemplos para a conjectura 2.

Definição 1.6.2. Seja $f : U \to V$ uma aplicação finita, na qual $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^p$ são abertos. O espaço de pontos duplos na imagem é o espaço complexo

$$f(D(f)) := V(\mathcal{F}_1(f)).$$

Se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é um germe de aplicação finita, então $f(D(f)) = V(F_1(f))$ denota o germe de pontos duplos na imagem.

A proposição a seguir nos permite afirmar quando um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ é finitamente determinado. Este resultado é de extrema importância para nosso estudo dado que uma das hipóteses da conjectura 2 é a determinação finita do germe f.

Proposição 1.6.3. Um germe de aplicação finita $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ é finitamente determinado se, e somente se, $\mu(D(f))$ é finito, em que μ denota o número de Milnor.

Demonstração. Ver Corolário 3.5, p. 531 em [26]. □

1.7 Os invariantes μ, m_0, μ_1 e m_1

Para finalizar este capítulo, vamos relembrar alguns invariantes na teoria de singularidades que serão utilizados ao longo do trabalho. Para esta seção, o leitor poderá consutar as referências [12] e [15] para um aprofundamento dos conceitos.

Vamos começar apresentando o invariante δ de uma curva reduzida com singularidade isolada.

Definição 1.7.1. Seja $C \subset \mathbb{C}^n$ uma curva complexa reduzida, $x \in C$ um ponto singular isolado e $n : (\overline{C}, \overline{x}) \to (C, x)$. Definimos o delta-invariante de C em x como sendo o número

$$\delta(C, x) := \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{n_* \mathcal{O}_{\overline{C},\overline{x}}}{\mathcal{O}_{C,x}} \right).$$

Se C possui apenas um número finito de pontos singulares, então o número

$$\delta(C) := \sum_{x \in \Sigma(C)} \delta(C, x),$$

em que $\Sigma(C)$ denota o conjunto singular de C, é chamado de delta-invariante de C.

Na sequência veremos uma caracterização para o número de Milnor de uma curva complexa reduzida $C \subset \mathbb{C}^n$ em um ponto singular isolado $x \in C$. A definição clássica do número de Milnor para curvas reduzidas foi dada por Buchweitz e Greuel em [2] e se utiliza de conceitos que não serão abordados neste trabalho.

Definição 1.7.2. Seja $C \subset \mathbb{C}^n$ uma curva complexa reduzida e $x \in C$ um ponto singular isolado. O número de Milnor de C em x é definido por

$$\mu(C, x) := 2\delta(C, x) - r(C, x) + 1,$$

em que $r(C, x)$ denota o número de ramos de C em x.

Esta caracterização foi apresentada inicialmente para curvas planas por Milnor e ficou conhecida historicamente por fórmula de Milnor. Posteriormente, Buchweitz e Greuel generalizaram esta caracterização para uma curva espacial conforme a Definição 1.7.2.

Outro invariante que precisaremos para o estudo da Whitney equisingularidade é a multiplicidade de uma curva complexa em um ponto dado. Vejamos sua definição.

Definição 1.7.3. Sejam $C \subset \mathbb{C}^n$ uma curva complexa e $x \in C$ um ponto. Definimos a multiplicidade de C em x como sendo a multiplicidade de Hilbert-Samuel

$$m_0(C, x) := e(\mathfrak{m}_x, \mathcal{O}_{C,x}),$$

em que $\mathfrak{m}_x$ é o ideal maximal do anel local $\mathcal{O}_{C,x}$.

O leitor pode conferir, por exemplo, o bom livro [27], p. 107, para conhecer ou recordar a multiplicidade de Hilbert-Samuel. Ainda para a multiplicidade, se $S \subset \mathbb{C}^3$ e uma superfície, $s \in S$ é um ponto e (S, s) é um germe de espaço complexo, denotamos por $m_0(S, s)$ a multiplicidade de Hilbert-Samuel de S em s.

Definição 1.7.4. Sejam (S, s) um germe de superfície em $\mathbb{C}^3$, $L \subset \mathbb{C}^3$ uma reta genérica e $\pi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ uma projeção linear tal que $\ker \pi = L$. Chamamos de curva polar com respeito à L e denotamos por $P(S)$ a curva $P(S) := \overline{\Sigma(\pi|_{S_{reg}})}$. Com isso, definimos a multiplicidade polar m_1 de S em s por $m_1(S, s) := m_0(P(S), s)$.

Vale ressaltar que na definição acima m_1 não depende de L, ou seja, m_1 está bem definida. Para finalizar esta seção e também o capítulo, vamos definir o número de Milnor transversal de uma superfície. Mas antes disso, seguindo [25], temos a seguinte definição:

Definição 1.7.5. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação holomorfa finito e genericamente 1-a-1. Dizemos que $H_0 \subset \mathbb{C}^3$ é um plano genérico para f se as seguintes condições são satisfeitas:

(1) $H_0 \cap df_0(\mathbb{C}^2) = \{0\}$

(2) $H_0 \cap f(D(f)) = \{0\}$

(3) $H_0 \cap C_0(f(D(f))) = \{0\}$

em que $C_0(f(D(f)))$ denota o cone tangente de Zariski de $f(D(f))$.

Em adição, vamos pedir que H_0 e $C_0(f(\mathbb{C}^2))$ sejam transversais. Além disso, observe que no caso em que f tem coposto 2 a condição (1) se verifica trivialmente.

Definição 1.7.6. Seja (S, s) um germe de superfície em $\mathbb{C}^3$. O número de Milnor transversal μ_1 de S em s é definido por $\mu_1(S, s) := \mu(S \cap H, s)$ em que $H \subset \mathbb{C}^3$ é um plano genérico contendo s.

Assim como para a multiplicidade polar, o número de Milnor transversal independe de H, desde que H seja genérico. Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.7.7. Considere o guarda-chuva de Whitney $S = V(y^2 - x^2z) \subset \mathbb{C}^3$. O plano H dado por $z - x = 0$ é genérico para S. Daí, $S \cap H = V(y^2 - x^3)$ (veja a Figura 1.3).

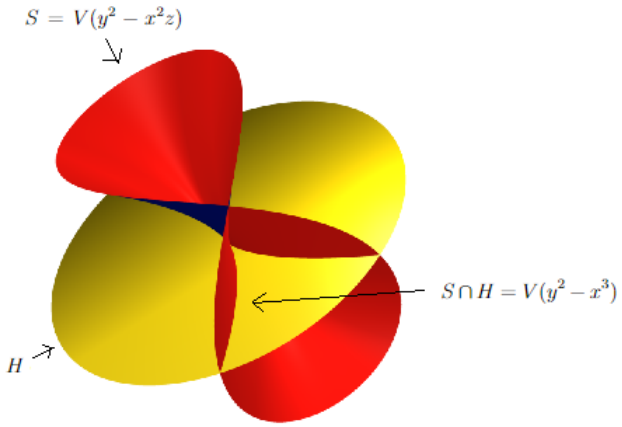


Figura 1.3: Interseção do guarda-chuva de Whitney com um plano genérico

Portanto, por definição, segue que

$$\mu_1(S, 0) = \mu(S \cap H, 0) = 2.$$

Capítulo 2

Aplicações de reflexão e a conjectura de Lê

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos e resultados fundamentais que serão utilizados no decorrer do trabalho, a saber: reflexões, polinômios invariantes, aplicação de órbita, complexo de um grupo de reflexão e as aplicações de reflexão. Aos resultados apresentados sem demonstrações teremos o cuidado de deixar uma boa referência para eventuais consultas do leitor e dedicaremos a última seção deste capítulo à apresentação de resultados que asseguram a veracidade da Conjectura 1 para os germes de aplicação de reflexão.

No início de cada seção deixaremos uma ou mais referências que poderão ser consultadas para um aprofundamento da teoria aqui estudada.

2.1 Grupos de reflexão

Ao longo de toda esta seção, V denotará um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita n munido da forma hermitiana $(-,-)$ vista no Exemplo 1.2.3. Para esta seção, utilizaremos [22].

Definição 2.1.1. Um subgrupo G de $GL(V)$ deixa a forma $(-,-)$ invariante se

$$(gv, gw) = (v, w)$$

para quaisquer $g \in G$ e $u, v \in V$. Dizemos também que $(-,-)$ é uma forma G-invariante.

Seja G um subgrupo finito de $GL(V)$. Defina

$$\begin{array}{rccc} [-,-]: & V & \longrightarrow & V \\ & (u,v) & \longmapsto & [u,v]=\sum_{g\in G}(gu,gv) \end{array} .$$

Verifica-se que $[-,-]$ define uma forma hermitiana positiva definida sobre V. Vejamos que $[-,-]$ é G-invariante. Dados $h \in G$ e $u, v \in V$, temos

$$[hu, hv] = \sum_{g\in G}(g(hu), g(hv)) = \sum_{g\in G}((gh)u, (gh)v).$$

Como $gh \in G$, então $gh = g_1$, com $g_1 \in G$. Daí, $g = g_1h^{-1}$ e segue que

$$[hu, hv] = \sum_{g_1\in G}(g_1u, g_1v) = [u, v].$$

Ou seja, para qualquer subgrupo finito de $GL(V)$ existe uma forma hermitiana positiva definida $G-$invariante. Mas quaisquer duas formas hermitianas positivas definidas são equivalentes. Portanto, a menos de um isomorfismo, todo subgrupo finito de $GL(V)$ deixa a forma $(-,-)$ invariante.

Definição 2.1.2. Seja id o elemento identidade de $GL(V)$. Para $g \in GL(V)$ e $H \subset GL(V)$, defina

(i) $\operatorname{Fix} g := \ker(id - g) = \{v \in V \mid gv = v\}$.

(ii) $V^H := \operatorname{Fix}_V(H) := \{v \in V \mid hv = v \text{ para todo } h \in H\}$.

(iii) $[V, g] := \operatorname{Im}(id - g)$.

Lema 2.1.3. Se $g \in U(V)$, então $[V, g] = (\operatorname{Fix} g)^{\perp}$.

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que $[V, g] \subset (\operatorname{Fix} g)^{\perp}$. Dado $u \in [V, g]$, então $u = (id - g)w$ para algum $w \in V$. Se $v \in \operatorname{Fix} g$, então

$$\begin{aligned} (u, v) &= (w - gw, v) \\ &= (w, v) - (gw, v) \\ &= (gw, gv) - (gw, v) \\ &= (gw, gv - v) \\ &= (gw, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(u, v) = 0$ e concluímos que $u \in (\operatorname{Fix} g)^{\perp}$. Assim, $[V, g] \subset (\operatorname{Fix} g)^{\perp}$. Por outro lado, temos

$$\dim(\operatorname{Fix} g) + \dim(\operatorname{Fix} g)^{\perp} = \dim V = \dim \ker(id - g) + \dim \operatorname{Im}(id - g),$$

em que $\operatorname{Fix} g = \ker(id - g)$. Segue que $\dim(\operatorname{Fix} g)^{\perp} = \dim \operatorname{Im}(id - g) = \dim[V, g]$. Mas sabemos que $[V, g] \subset (\operatorname{Fix} g)^{\perp}$. Logo, $[V, g] = (\operatorname{Fix} g)^{\perp}$. □

Definição 2.1.4. Uma reflexão sobre V é um automorfismo $r : V \to V$ satisfazendo:

(i) r tem ordem finita.

(ii) $\dim \operatorname{Fix} r = \dim V - 1$.

(iii) r é unitária.

O subespaço $\operatorname{Fix} r$ é chamado hiperplano refletor de r.

Observação 2.1.5. A condição (ii) da definição anterior é equivalente a mostrar que r satisfaz $\dim[V, r] = 1$.

O próximo lema nos mostra que o resultado de uma conjugação de uma reflexão por automorfismos unitários de V é ainda uma reflexão.

Lema 2.1.6. Se $g, r \in GL(V)$, então $\operatorname{Fix}(grg^{-1}) = g \operatorname{Fix} r$. Em particular, se r é uma reflexão e $g \in U(V)$, então grg^{-1} é uma reflexão.

Demonstração. Dado $x \in \operatorname{Fix}(grg^{-1})$, temos $grg^{-1}x = x$, ou seja,

$$grg^{-1}x - gg^{-1}x = 0 \Rightarrow g(rg^{-1}x - g^{-1}x) = 0.$$

Mas $g \in GL(V)$. Desta forma, devemos ter $rg^{-1}x - g^{-1}x = 0$, donde $g^{-1}x \in \operatorname{Fix} r$. Com isso, $x = gg^{-1}x \in g \operatorname{Fix} r$. Reciprocamente, se $x \in g \operatorname{Fix} r$, existe $y \in \operatorname{Fix} r$ tal que $x = gy$. Assim,

$$x = gy = gry = grg^{-1}gy = grg^{-1}x,$$

ou seja, $x \in \operatorname{Fix}(grg^{-1})$. Em particular, se r é uma reflexão, então $\operatorname{ord}(r) < \infty$. Como $\operatorname{ord}(grg^{-1}) = \operatorname{ord}(r)$, concluímos que grg^{-1} tem ordem finita. Além disso, observe que

$$\dim \operatorname{Fix}(grg^{-1}) = \dim(g \operatorname{Fix} r) = \dim \operatorname{Fix} r = \dim V - 1.$$

Por fim, como $g, r \in U(V)$, segue que $grg^{-1} \in U(V)$. Logo, grg^{-1} é uma reflexão. □

Exemplo 2.1.7. Seja $\omega = e^{2\pi i/3}$ raiz cúbica da unidade. Vamos mostrar que

$$r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } r_1 = \frac{\omega}{2}\begin{bmatrix} -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i \end{bmatrix}$$

são reflexões sobre $\mathbb{C}^2$. Inicialmente, vejamos que r e r_1 possuem ordem finita. Com efeito,

$$r^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{\omega^2}{4}\begin{bmatrix} -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i \end{bmatrix} \\ &= \frac{\omega^2}{4}\begin{bmatrix} -2+2i & -2+2i \\ 2+2i & -2-2i \end{bmatrix} \\ &= \frac{\omega^2}{2}\begin{bmatrix} -1+i & -1+i \\ 1+i & -1-i \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r_1^3 &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1+i & -1+i \\ 1+i & -1-i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $ord(r) = 2$ e $ord(r_1) = 3$. Além disso, como

$$\overline{r}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = r \text{ e } \overline{r_1}^t = \frac{\overline{w}}{2}\begin{bmatrix} -1+i & -1+i \\ 1+i & -1-i \end{bmatrix},$$

temos

$$\overline{r}^t r = r^2 = I$$

e

$$\overline{r_1}^t r_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1+i & -1+i \\ 1+i & -1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = I.$$

Portanto, r e r_1 são unitárias. Agora note que

$$(x,y) \in \operatorname{Fix} r \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0.$$

Por outro lado, é claro que $(x,0) \in \operatorname{Fix} r$, para todo $x \in \mathbb{C}$. Assim, $\operatorname{Fix} r = \langle (1,0) \rangle$ e concluímos que $\dim \operatorname{Fix} r = 1 = \dim \mathbb{C}^2 - 1$. Agora, considere $(a+bi, c+di) \in \operatorname{Fix} r_1$. Então

$$\frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a+bi \\ c+di \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bi \\ c+di \end{bmatrix}$$

donde segue que

$$\frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} -a+b+c+d+(-a-b-c+d)i \\ -a+b-c-c+(-a-b+c-d)i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bi \\ c+di \end{bmatrix}.$$

Pela igualdade de matrizes e somando as equações, obtemos

$$(-a+b)\omega + (-a-b)\omega i = (a+c) + (b+d)i.$$

Portanto, $c = (-a+b)\omega - a$ e $d = (-a-b)\omega - b$. Logo, $\operatorname{Fix} r_1$ é um subespaço de dimensão 1, ou seja, $\dim \operatorname{Fix} r_1 = \dim \mathbb{C}^2 - 1$. Desta forma, concluímos que r e r_1 são reflexões sobre $\mathbb{C}^2$. Considere ainda $r_1' = r r_1 r^{-1} = r r_1 r$ dada por

$$r_1' = \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} -1-i & -1+i \\ 1+i & -1+i \end{bmatrix}.$$

Do Lema 2.1.6, tem-se que r_1' é uma reflexão sobre $\mathbb{C}^2$.

Observação 2.1.8. Como r é unitária, então r é diagonalizável, isto é, r pode ser representada por uma matriz diagonal com relação a uma determinada base. Considere $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e vamos admitir que $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é a base do subespaço $\operatorname{Fix} r$. Assim, r tem a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

para algum $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Se $ord(r) = m$, então

$$I = r^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_1(1+\lambda_n+\cdots+\lambda_n^{m-1}) \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \lambda_2(1+\lambda_n+\cdots+\lambda_n^{m-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_{n-1}(1+\lambda_n+\cdots+\lambda_n^{m-1}) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^m \end{bmatrix},$$

donde $\lambda_j(1+\lambda_n+\cdots+\lambda_n^{m-1}) = 0$ e $\lambda_n^m = 1$, com $j = 1, \ldots, n-1$, cuja solução ocorre para λ_n uma raiz m-ésima primitiva da unidade. Agora, tomando

$$s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \dfrac{\lambda_1}{\lambda_n - 1} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_n - 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - 1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } s^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \dfrac{-\lambda_{n-1}}{\lambda_n - 1} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \dfrac{-\lambda_{n-2}}{\lambda_n - 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \dfrac{-\lambda_1}{\lambda_n - 1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a matriz diagonal de r é da forma

$$\tilde{r} = s^{-1}rs = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

com λ_n uma rais m-ésima primitiva da unidade.

Definição 2.1.9. Um subgrupo G de $GL(V)$ é um grupo de reflexão se é finito e pode ser gerado por reflexões.

Observação 2.1.10. Um grupo finito G gerado por $g_1, \ldots, g_k$ é um grupo de reflexão sobre $\mathbb{C}^n$ se existe uma representação linear fiel ρ de G em $GL(n, \mathbb{C})$ tal que $\rho(g_1), \ldots, \rho(g_k)$ são reflexões. Por exemplo, podemos considerar duas representações lineares de $\mathbb{Z}_2$ em $GL(2, \mathbb{C})$, a saber:

$$\mathbb{Z}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \tag{2.1}$$

e

$$\mathbb{Z}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \tag{2.2}$$

Em 2.1, temos $\mathbb{Z}_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ é um grupo de reflexão, pois seu gerador é uma reflexão. Entretanto, quando olhamos a representação em 2.2, temos $\mathbb{Z}_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ mas o gerador não é uma reflexão. Com este exemplo, percebemos a importância da escolha da representação linear adequada no estudo dos grupos de reflexão, visto que nem toda representação linear de um grupo o torna um grupo de reflexão.

Da Observação 2.1.10 surge a seguinte questão: se G é um grupo finito, então G é um grupo de reflexão? Ou seja, sempre é possível obter uma representação linear de G em $GL(n, \mathbb{C})$ que o torne um grupo de reflexão? A resposta é não! O grupo dos quatérnios, denotado por Q_8, possui uma única representação linear irredutível em $GL(2, \mathbb{C})$, a saber:

$$Q_8 = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Não é difícil mostrar que Q_8 não possui reflexões. Portanto, Q_8 não é um grupo de reflexão.

Exemplo 2.1.11. As reflexões r_1 e r_1' do Exemplo 2.1.7 geram um grupo de reflexão de ordem 24, o qual é denotado por G_4 na classificação de Shephard e Todd [43]. Este grupo possui 8 reflexões, a saber:

$$r_1, r_1', r_1^2, (r_1')^2, r_1 r_1' r_1^2, r_1' r_1 (r_1')^2, r_1 (r_1')^2 r_1^2 \text{ e } r_1' r_1^2 (r_1')^2.$$

Proposição 2.1.12. Se $g \in GL(V)$ é uma reflexão, então $\langle g \rangle$ é um grupo de reflexão. Em particular, se $ord(g) = m$, então g^k é uma reflexão para todo $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$.

Demonstração. De fato, é claro que $\langle g \rangle$ é um grupo de reflexão. Como $ord(g) = m$, tem-se que $ord(g^k)$ é finita para todo $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Dado $x \in \operatorname{Fix} g$, temos

$$g^k x = g^{k-1}(gx) = g^{k-1} x.$$

Repetindo este processo, já que o número de iterações é finito, devemos obter $g^k x = gx = x$, ou seja, $x \in \operatorname{Fix} g^k$. Assim, $\operatorname{Fix} g \subset \operatorname{Fix} g^k$ donde $\operatorname{Fix} g^k = \operatorname{Fix} g$ ou $\operatorname{Fix} g^k = V$, visto que $\operatorname{Fix} g$ é um hiperplano. Se $\operatorname{Fix} g^k = V$, então $g^k = id$. Mas

$ord(g) = m$ e $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Portanto, $g^k \neq id$ e concluímos que $\operatorname{Fix} g^k = \operatorname{Fix} g$. Em particular, $\dim \operatorname{Fix} g^k = \dim V - 1$. Por fim, dados $x, y \in V$, temos

$$(g^k x, g^k y) = (g(g^{k-1}x), g(g^{k-1}y)) = (g^{k-1}x, g^{k-1}y).$$

Novamente, repetindo o processo com o número de iterações finito, obtemos

$$(g^k x, g^k y) = (gx, gy) = (x, y).$$

Assim, g^k é reflexão para todo $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. □

Corolário 2.1.13. Se g é uma reflexão, então g^{-1} é uma reflexão.

Demonstração. De fato, se $ord(g) = m$, então $g^{-1} = g^{m-1}$ e o resultado segue do Proposição anterior. □

Proposição 2.1.14. Se G_1 e G_2 são grupos de reflexão agindo sobre V_1 e V_2 espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$, respectivamente, então $G = G_1 \times G_2$ age sobre $V = V_1 \oplus V_2$ como um grupo de reflexão.

Demonstração. Sejam $g_1, \ldots, g_n$ geradores de G_1 e $r_1, \ldots, r_m$ geradores de G_2 e e_1, e_2 seus elementos neutros, respectivamente. É claro que

$$(g_1, e_2), \ldots, (g_n, e_2), (e_1, r_1), \ldots, (e_1, r_m)$$

são geradores de G e são reflexões, visto que $g_1, \ldots, g_n, r_1, \ldots, r_m$ são reflexões. Por fim, a ação de um elemento $(g, r) \in G$ sobre um elemento $(x, y) \in V$ é dada por (gx, ry). □

Corolário 2.1.15. Se $G_1, \ldots, G_n$ são grupos de reflexão agindo sobre $V_1, \ldots, V_n$, então $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ é um grupo de reflexão agindo sobre $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$.

Demonstração. Basta usar um argumento indutivo com a Proposição 2.1.14. □

Exemplo 2.1.16. No Exemplo 1.1.2, vimos que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & e^{2\pi i/n} \\ e^{-2\pi i/n} & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ são geradores do grupo diedral D_{2n}, com $ord(A) = ord(B) = 2$ e $ord(AB) = n$, em que

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & e^{2\pi i/n} \\ e^{-2\pi i/n} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi i/n} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/n} \end{bmatrix}.$$

Vejamos que A e B são reflexões sobre $\mathbb{C}^2$. Já sabemos que A e B possuem ordem finita. Como

$$\overline{A}^t = \begin{bmatrix} 0 & e^{2\pi i/n} \\ e^{-2\pi i/n} & 0 \end{bmatrix} = A \text{ e } \overline{B}^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = B,$$

segue que $\overline{A}^t A = I = \overline{B}^t B$ o que mostra que A e B são unitárias. Por fim, se $(x, y) \in \operatorname{Fix} A$, então

$$\begin{bmatrix} 0 & e^{2\pi i/n} \\ e^{-2\pi i/n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e^{2\pi i/n} y \\ e^{-2\pi i/n} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

donde $x = e^{2\pi i/n} y$. Com isso, concluímos que $\operatorname{Fix} A \subset \langle (e^{2\pi i/n}, 1) \rangle$. Como a outra inclusão é verificada facilmente, segue que $\dim \operatorname{Fix} A = \dim \mathbb{C}^2 - 1$. De modo análogo, se $(x, y) \in \operatorname{Fix} B$, então

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

donde $x = y$. Deste modo, $\operatorname{Fix} B = \langle (1, 1) \rangle$, visto que a outra inclusão também é de fácil verificação, e tem-se que $\dim \operatorname{Fix} B = \dim \mathbb{C}^2 - 1$. Logo, concluímos que os grupos diedrais são grupos de reflexão sobre $\mathbb{C}^2$. A Figura 2.1 a seguir apresenta ilustra a ação de D_6 sobre $\mathbb{C}^2$. Vale ressaltar que as reflexões são b, ab e $a^2 b$ enquanto os hiperplanos refletores são H_1, H_2 e H_3.

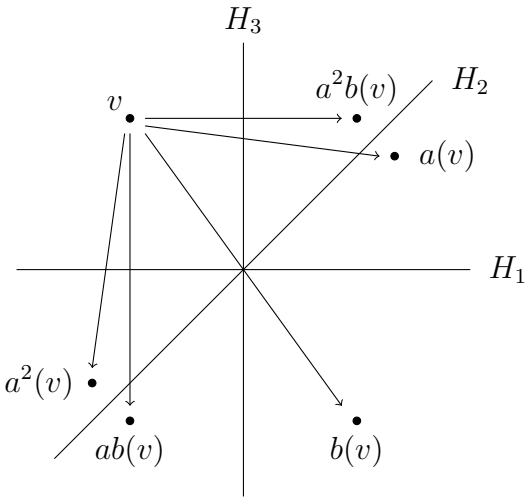


Figura 2.1: Ação de $D_6 = \langle a, b \rangle$ sobre $\mathbb{C}^2$ com $ord(a) = 3$ e $ord(b) = 2$

Exemplo 2.1.17. O grupo cíclico $\mathbb{Z}_m$ é um grupo de reflexão e age sobre $\mathbb{C}$ pela multiplicação das potências da raiz m-ésima da unidade. Vamos indexar os elementos de $\mathbb{Z}_m$ pelos números $0 \leq a < m$. Então, a ação de um elemento i_a é dada por $x \mapsto e^{2\pi ai/m}x$. Do Corolário 2.1.15 segue que $\mathbb{Z}_{m_1,\ldots,m_p}$ é um grupo de reflexão agindo sobre $\mathbb{C}^p$. Denote ainda os elementos de $\mathbb{Z}_{m_1,\ldots,m_p}$ por $i_a = i_{a_1,\ldots,a_p}$ com $0 \leq a_j < m_j$ para todo $j = 1, \ldots, p$, em que $a = (a_1, \ldots, a_p)$. Desta forma, a ação de $\mathbb{Z}_{m_1,\ldots,m_p}$ sobre $\mathbb{C}^p$ é dada por $x \mapsto (e^{2\pi a_1 i/m_1}x_1, \ldots, e^{2\pi a_p i/m_p}x_p)$, em que $x = (x_1, \ldots, x_p)$. No Exemplo 1.1.3 conhecemos os geradores de $\mathbb{Z}_{m_1,\ldots,m_p}$ em sua representação linear, de modo que todo elemento de $\mathbb{Z}_{m_1,\ldots,m_p}$ é da forma

$$i_a = \begin{bmatrix} e^{2\pi a_1 i/m_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{2\pi a_2 i/m_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{2\pi a_p i/m_p} \end{bmatrix}.$$

Afirmamos que i_a é uma reflexão se, e somente se, exatamente um a_i é não nulo. De fato, suponha que i_a é uma reflexão. Dado $x \in \operatorname{Fix} i_a$, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi a_1 i/m_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{2\pi a_2 i/m_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{2\pi a_p i/m_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi a_1 i/m_1}x_1 \\ e^{2\pi a_2 i/m_2}x_2 \\ \vdots \\ e^{2\pi a_p i/m_p}x_p \end{bmatrix},$$

donde $e^{2\pi a_j i/n}x_j = x_j$, para todo $j = 1, \ldots, p$. Se tivéssemos a_i e a_j não nulos distintos, então $x_i = x_j = 0$ e segue que $\operatorname{Fix} i_a$ estaria contido em um subespaço de dimensão menor do que ou igual a $p-2$, o que contraria $\dim \operatorname{Fix} i_a = p-1$. Além disso, se $a_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, p$, então $\operatorname{Fix} i_a = \mathbb{C}^p$, o que novamente contraria a dimensão do subespaço $\operatorname{Fix} i_a$. Reciprocamente, suponha sem perda de generalidade que $a_1 \neq 0$ e $a_j = 0$, para todo $j = 2, \ldots, p$. É claro que i_a tem ordem finita. Além disso, $x \in \operatorname{Fix} i_a$ se, e somente se, $i_a x = x$, isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi a_1 i/m_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi a_1 i/m_1}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}.$$

Assim, $x \in \operatorname{Fix} i_a$ se, e somente se, $x_1 = 0$ e concluímos que $\operatorname{Fix} i_a = \langle (0, x_2, \ldots, x_p) \rangle$ e

$\dim \operatorname{Fix} i_a = p-1$. Por fim, dados $x, y \in \mathbb{C}^p$, temos

$$\begin{aligned}(i_a x, i_a y) &= ((e^{2\pi a_1 i/m_1}x_1, x_2 \ldots, x_p), (e^{2\pi a_1 i/m_1}y_1, y_2 \ldots, y_p)) \\ &= e^{2\pi a_1 i/m_1}\overline{e^{2\pi a_1 i/m_1}}x_1\overline{y_1} + \sum_{j=2}^{p} x_j\overline{y_j} \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_j\overline{y_j} \\ &= (x, y).\end{aligned}$$

Logo, i_a é uma reflexão. Na Figura 2.2 a seguir, a ação de $\mathbb{Z}_{2,2}$ sobre $\mathbb{C}^2$ é ilustrada em que $i_{0,1}$ e $i_{1,0}$ são as reflexões enquanto os eixos coordenados são os hiperplanos refletores.

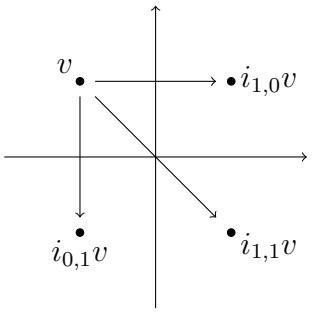


Figura 2.2: Ação de $\mathbb{Z}_{2,2}$ sobre $\mathbb{C}^2$

Definição 2.1.18. Sejam G um grupo de reflexão agindo sobre V e $H_1, \ldots, H_k$ todos os seus hiperplanos refletores. Dados $a_i \in H_i^{\perp}$ não nulos para todo $i = 1, \ldots, k$, definimos o post do grupo G, e denotamos por $\operatorname{posto} G$, como sendo a dimensão do subespaço gerado por $a_1, \ldots, a_k$.

A primeira lista completa com a classificação desses grupos de reflexão foi apresentada por Shephard e Todd [43] em 1954. Em 1976, Cohen [5] deu uma nova prova para esta classificação incluindo a classificação de grupos finitos de Coxeter mas independente de resultados anteriores de Mitchell [28] e outros. No apêndice D em [22] podemos encontrar tabelas com a classificação desses grupos em questão.

2.2 Polinômios invariantes e a aplicação de órbita

Nesta seção, V denotará um espaço vetorial sobre um corpo K de dimensão finita n. O objetivo desta seção é de apresentar os resultados que nos darão todas as informações necessárias para a álgebra de invariantes $K[V]^G$ para um determinado

grupo de reflexão. Dentre estes resultados, veremos o tipo de polinômio que gera esta álgebra de invariantes e estes geradores serão de extrema importância na definição da chamada aplicação de órbita.

Para esta seção, utilizaremos [22] mas o leitor pode consultar [33] para um estudo mais aprofundado desta teoria de invariantes.

Definição 2.2.1. Para cada $r = 1, 2, \ldots$, defina $T^0(V) := \mathbb{C}$ e $T^r(V) := \bigotimes_{i=1}^{r} V$. A soma direta

$$T(V) := \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(V)$$

é chamada de álgebra tensorial de V, em que a multiplicação em $T(V)$ é obtida pela extensão via linearidade do produto de $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \in T^k(V)$ por $v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_t} \in T^t(V)$ definido por $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_t} \in T^{k+t}(V)$.

Definição 2.2.2. Seja I um ideal bilateral de $T(V)$ gerado pelos elementos $v \otimes w - w \otimes v$. Definimos a álgebra simétrica de V pelo quociente $S(V) := T(V)/I$, e temos $S(V)$ uma álgebra livre comutativa sobre V, em que o produto de $v + I, w + I \in S(V)$ é dado por $v \otimes w + I$.

O resultado a seguir segue como caso particular da Proposição 8.1, p. 636 em [21].

Proposição 2.2.3. Se V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então $S(V)$ é isomorfo a álgebra de polinômios $\mathbb{C}[v_1, \ldots, v_n]$.

Demonstração. Ver Proposição 8.1, p. 636 em [21]. □

Em particular, para o espaço dual V^* tem-se que se $X_1, \ldots, X_n$ a base de V^* para a base $v_1, \ldots, v_n$ de V, então $X_1, \ldots, X_n$ são funções coordenadas de V e $S := S(V^*) \simeq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ é o anel de coordenadas de V. Desta forma, S pode ser visto como um anel de funções polinomiais sobre V. No caso de uma variável, temos a importante proposição a seguir, conhecida como Interpolação de Lagrange:

Proposição 2.2.4 (Interpolação de Lagrange)**.** Sejam $w_1, \ldots, w_s$ elementos distintos de V e $a_1, \ldots, a_s$ elementos arbitrários de $\mathbb{C}$. Então existe um polinômio $P \in S$ tal que $P(w_i) = a_i$, para todo $i = 1, \ldots, s$.

Demonstração. Ver Lema 3.3, p. 40 em [22]. □

Observação 2.2.5. O grau de um monômio $X_1^{m_1} X_2^{m_2} \ldots X_n^{m_n}$ é dado por $m_1 + \cdots + m_n$. Denotamos o grau de um polinômio P por $\deg P$ e P é dito homogêneo de grau r se P é uma combinação linear de monômios de grau r.

No anel S, denote por S_r o subespaço dos polinômios homogêneos de grau r. Assim,

$$S = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S_r$$

e $S_r S_t \subset S_{r+t}$. Além disso, a ação de $g \in GL(V)$ sobre $P \in S$ é dada por $(gP)(v) = P(g^{-1}v)$, para todo $v \in V$.

Definição 2.2.6. (a) Dados G um subgrupo de $GL(V)$ e $P \in S$, dizemos que P é G-invariante se $gP = P$, para todo $P \in S$.

(b) Dado G um subgrupo de $GL(V)$, a álgebra de invariantes de G é a álgebra das funções polinomiais G-invariantes $S^G = K[V]^G$.

Teorema 2.2.7 (Hilbert-Noether)**.** Seja G um subgrupo finito de $GL(V)$. Então a álgebra de invariantes $K[V]^G$ é finitamente gerada.

Demonstração. Ver Teorema 3.12 e Corolário 3.13, p. 44 em [22]. □

Definição 2.2.8. Seja G um subgrupo finito de $GL(V)$. O conjunto minimal de geradores da álgebra $K[V]^G$ é chamado de conjunto de invariantes básicos de G.

Teorema 2.2.9 (Shephard-Todd)**.** Seja G um grupo de reflexão agindo sobre V. Então o anel $K[V]^G$ de polinômios G-invariantes é uma álgebra polinomial, isto é, é gerado por uma coleção de polinômios homogêneos algebricamente independentes.

Demonstração. Ver Teorema 3.20, p. 48 em [22]. □

Proposição 2.2.10. Seja G um grupo de reflexão agindo sobre V. Se $\{I_1, \ldots, I_r\}$ é um conjunto de invariantes básicos de G, então $r = n$ e o grau de cada polinômio está unicamente determinado por G.

Demonstração. Ver Proposição 3.25, p. 50 em [22]. □

As informações importantes que obtemos com os Teoremas 2.2.7 e 2.2.9 e com a Proposição 2.2.10 é que a álgebra de invariantes $K[V]^G$ é finitamente gerada, o número mínimo de geradores coincide com a dimensão do espaço V e seus geradores são polinômios homogêneos algebricamente independentes, cujos graus são unicamente determinados por G.

Teorema 2.2.11 (Shephard-Todd)**.** Sejam G é um grupo de reflexão agindo sobre V e $d_1, d_2, \ldots, d_n$ os graus dos polinômios invariantes de $K[V]^G$. Então

(1) $|G| = d_1 d_2 \ldots d_n$.

(2) O número de reflexões de G é $\sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$.

Demonstração. Ver Teorema 4.14, p. 59 em [22]. □

Teorema 2.2.12. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ e G um grupo finito agindo sobre V. Suponha que $f_1, \ldots, f_n$ são polinômios homogêneos algebricamente independentes em $K[V]^G$ e $d_i = \deg f_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Então

(1) $|G| \leq d_1 d_2 \ldots d_n$,

(2) Se $|G| = d_1 d_2 \ldots d_n$, então G é um grupo de reflexão sobre V e $K[V]^G$ é gerado por $f_1, \ldots, f_n$ como álgebra,

(3) Se $K[V]^G$ é gerado como álgebra por $f_1, \ldots, f_n$, então a igualdade em (1) ocorre e G é um grupo de reflexão.

Demonstração. Ver Teorema 4.19, p. 61 em [22] □

Estes resultados motivam a escolha dos grupos de reflexão para o estudo de geometria através de ações de grupos. Além da riqueza da vasta teoria desses grupos, a Proposição 2.2.10 unida ao Teorema 2.2.12 nos diz que os grupos de reflexão são os únicos grupos cuja álgebra de invariantes tem exatamente $\dim V$ geradores (número mínimo de geradores). Isto torna os grupos de reflexão uma ferramenta interessante, visto que as dimensões dos espaços que contém a imagem dos mergulhos, que utilizaremos nas aplicações de reflexão no Capítulo 3, serão preservadas após a aplicação de ω (aplicação de órbita).

Outro ponto importante, que será de extrema importância quando tratarmos da Conjectura 1, é que os hiperplanos do grupo de reflexão induzem uma estratificação no nosso espaço V. Em particular, o estrato que contém a origem do nosso espaço vetorial será um dos pontos chave no estudo do coposto e injetividade das aplicações de reflexão.

Lema 2.2.13. Os polinômios $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ são algebricamente independentes se, e somente se, o determinante $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$.

Demonstração. Ver Lema 9.5, p. 172 em [22]. □

No Exemplo 2.31, p. 31 em [49], podemos ver a complexidade do problema de se determinar os geradores da álgebra de invariantes de $\mathbb{C}[x, y]^{D_{2n}}$. Ainda em [49], no Exemplo 2.35, p. 33, percebemos a importância dos resultados aqui citados na determinação desses invariantes básicos. Como o cálculo em si desses polinômios invariantes não é foco do trabalho, vamos apenas utilizar estas álgebras de invariantes dos grupos de reflexão que podem ser encontradas, por exemplo, em [22].

Exemplo 2.2.14. Para os grupos $D_{2n}, \mathbb{Z}_{m_1,\ldots,m_k}$ e G_4, tem-se que

$$\mathbb{C}[x,y]^{D_{2n}} = [xy, x^n + y^n],$$

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_k]^{\mathbb{Z}_{m_1,\ldots,m_k}} = \mathbb{C}[x_1^{m_1},\ldots,x_k^{m_k}]$$

e

$$\mathbb{C}[x,y]^{G_4} = \mathbb{C}[x^4 + 2i\sqrt{3}x^2y^2 + y^4, x^5y - xy^5],$$

respectivamente.

Definição 2.2.15. Seja G um grupo de reflexão agindo sobre um espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita n. Se $\omega_1,\ldots,\omega_n$ são os invariantes básicos de $\mathbb{C}[V]^G$, então a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \omega_G: & V & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & v & \longmapsto & \omega_G(v) = (\omega_1(v),\ldots,\omega_n(v)) \end{array}$$

é chamada de aplicação de órbita.

Observação 2.2.16. Vamos denotar a aplicação de órbita de um grupo de reflexão G simplesmente por ω quando o grupo estiver subtendido.

Antes de enunciarmos e fazermos a demonstração do resultado que justifica o nome desta aplicação, vamos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.2.17 (Noether)**.** Considere $u, v \in V$. Então existe $g \in G$ tal que $gv = u$ se, e somente se, $P(v) = P(u)$, para todo $P \in S^G$.

Demonstração. Ver teorema 3.5, p. 41 em [22]. □

O teorema a seguir, demonstrado por Noether em [34], foi o que motivou o nome da aplicação de órbita. Essencialmente o teorema nos diz que a aplicação de órbita é constante na órbita de $v \in V$.

Teorema 2.2.18 (Noether)**.** Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão n e G um grupo de reflexão agindo sobre V. Então para todo $v \in V$, tem-se que $\omega^{-1}(\omega(v)) = Gv$, em que $Gv = \{gv \mid g \in G\}$ denota a órbita de v.

Demonstração. Sejam $\omega_1,\ldots,\omega_n$ os invariantes básicos da álgebra $\mathbb{C}[V]^G$. Dado $u \in \omega^{-1}(\omega(v))$, temos $\omega(u) = \omega(v)$. Daí, $\omega_i(u) = \omega_i(v)$, para todo $i = 1,\ldots,n$. Como a última igualdade é verdadeira para todos os invariantes básicos, concluímos que $P(u) = P(v)$, para todo $P \in \mathbb{C}[V]^G$. Logo, pelo Teorema 2.2.17, existe $g \in G$ tal

que $u = gv$, isto é, $u \in Gv$. Reciprocamente, se $u \in Gv$, então $u = gv$ e vem que

$$\begin{aligned}\omega(u) &= \omega(gv)\\ &= (\omega_1(gv), \ldots, \omega_n(gv))\\ &= (g^{-1}\cdot\omega_1(v), \ldots, g^{-1}\cdot\omega_n(v))\\ &= (\omega_1(v), \ldots, \omega_n(v))\\ &= \omega(v),\end{aligned}$$

donde $u \in \omega^{-1}(\omega(v))$. □

Veja a Figura 2.3, em que uma ideia geométrica de como atua a aplicação de órbita ω de um grupo de reflexão G ao longo da órbita dos elementos do espaço. Essencialmente a aplicação ω identifica os pontos de uma mesma órbita.

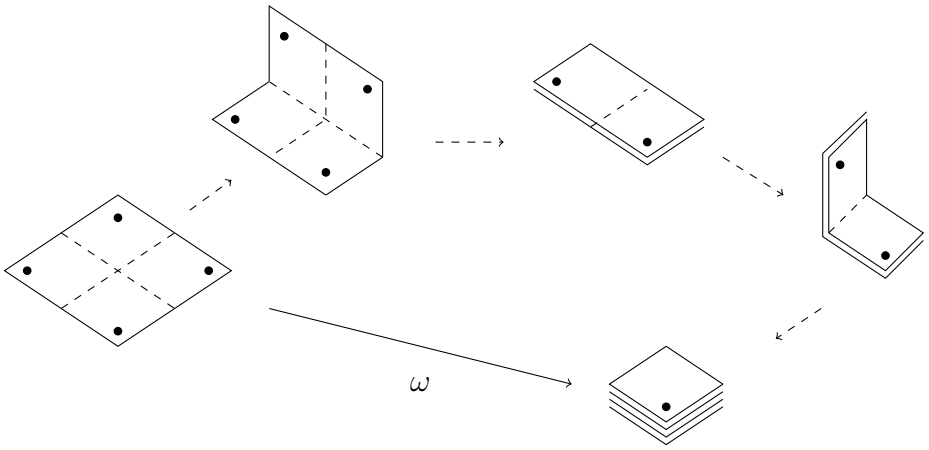


Figura 2.3: A ação de ω ao longo das órbitas do espaço

Exemplo 2.2.19. Considere a ação de D_{2n} sobre $\mathbb{C}^2$. Assim, a aplicação de órbita do grupo diedral é $\omega_{D_{2n}}(x, y) = (xy, x^n + y^n)$. Já para o grupo $\mathbb{Z}_{m_1,\ldots,m_k}$ agindo sobre $\mathbb{C}^k$ a aplicação de órbita é dada por $\omega_{\mathbb{Z}_{m_1,\ldots,m_k}}(x_1, \ldots, x_k) = (x_1^{m_1}, \ldots, x_k^{m_k})$. Por fim, considerando a ação de G_4 sobre $\mathbb{C}^2$, segue-se que a aplicação de órbita de G_4 é dada por $\omega_{G_4}(x, y) = (x^4 + 2i\sqrt{3}x^2y^2 + y^4, x^5y - xy^5)$.

Definição 2.2.20. Sejam G um grupo de reflexão agindo sobre V e $\omega_1, \ldots, \omega_n$ os invariantes básicos de $K[V]^G$. A matriz Jacobiana da aplicação de órbita ω é dada por

$$Jac(\omega) := \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

e $\Pi := \det Jac(\omega)$ é chamado de Jacobiano de ω.

Observação 2.2.21. A notação $Jac(\omega)_v$ significa que estamos avaliando a matriz Jacobiana em $v \in V$. O mesmo vale para $\det Jac(\omega)_v$.

A aplicação de órbita possui várias propriedades interessantes que podem ser estudadas em [22]. Entretanto, os conceitos que introduzimos acima serão suficientes para o nosso estudo.

2.3 O complexo de um grupo

Nesta seção voltaremos nossas atenções para o estudo do complexo de um grupo de reflexão e os principais resultados que este conceito possui. A partir de agora, V denotará um espaço vetorial complexo de dimensão finita p munido da forma hermitiana $(-,-)$ vista no Exemplo 1.2.3 e G denotará um grupo de reflexão agindo sobre V.

Note que podemos considerar uma estratificação natural para o espaço V obtida pela ação de G: o arranjo de hiperplanos de G é a união

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{i=1}^{k} H_i$$

dos hiperplanos refletores $H_1, \ldots, H_k$ de todas as reflexões de G. Na Figura 2.4 podemos ver o arranjo de hiperplanos para os grupos $\mathbb{Z}_{m_1}, \mathbb{Z}_{m_1,m_2}$ e $\mathbb{Z}_{m_1,m_2,m_3}$ agindo sobre $\mathbb{C}^3$, respectivamente.

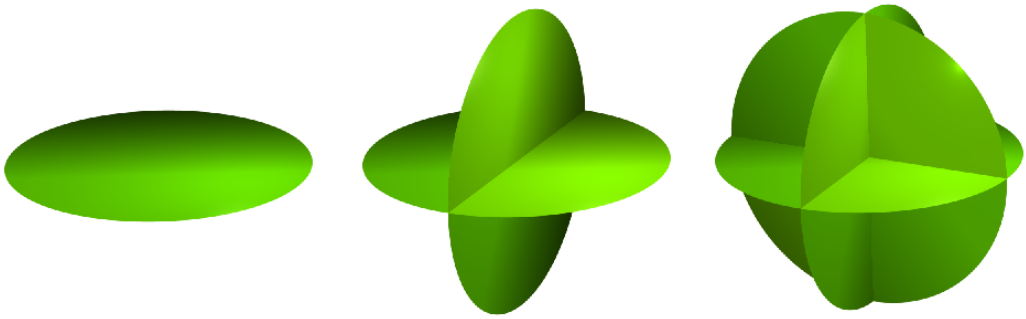


Figura 2.4: Arranjo de hiperplanos de $\mathbb{Z}_{m_1}, \mathbb{Z}_{m_1,m_2}$ e $\mathbb{Z}_{m_1,m_2,m_3}$

Os hiperplanos induzem a seguinte partição de V: Para cada subconjunto $B \subset \{1, \ldots, k\}$, defina

$$C_B := \{y \in V \mid y \in H_i \Leftrightarrow i \in B\}.$$

Com efeito, se $y \in V \setminus \mathfrak{A}$, então $y \notin H_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$, Daí, concluímos que

$y \in C_\emptyset$. Se $y \in \mathfrak{A}$, existem $i_1, \ldots, i_j$ tais que $y \in H_{i_1}, \ldots, H_{i_j}$. Deste modo, $y \in C_B$, em que $B = \{i_1, \ldots, i_j\} \subset \{1, \ldots, k\}$. Portanto, $V = \bigcup_{B \subset \{1,\ldots,k\}} C_B$. Além disso, dados $B_1, B_2 \subset \{1, \ldots, k\}$ com $B_1 \neq B_2$, suponha, sem perda de generalidade, que existe $j \in B_1$ tal que $j \notin B_2$. Se $C_{B_1} \cap C_{B_2} \neq \emptyset$, tomemos $y \in C_{B_1} \cap C_{B_2}$ e note que $y \in H_j$, pois $j \in B_1$, mas $j \notin B_2$, o que contraria a definição de C_{B_2}. Portanto, $C_{B_1} \cap C_{B_2} = \emptyset$. A Figura 2.5 apresenta geometricamente as faces do grupo $\mathbb{Z}_{m_1,m_2}$ quando age sobre $\mathbb{C}^2$.

Cada conjunto C_B é não-vazio e é chamado de face. O conjunto $\mathfrak{C}$ de todas as faces é dito complexo de G. Observe ainda que cada $y \in V$ pertence a uma face C que consiste nos pontos que estão exatamente nos mesmos hiperplanos de y. A Figura 2.5 apresenta geometricamente as faces do grupo $\mathbb{Z}_{m_1,m_2}$ quando age sobre $\mathbb{C}^2$. A Figura 2.5 apresenta geometricamente as faces do grupo $\mathbb{Z}_{m_1,m_2}$ quando age sobre $\mathbb{C}^2$.

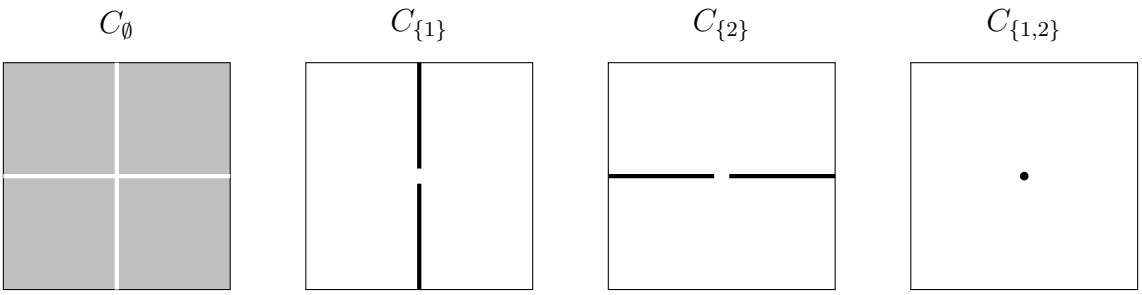


Figura 2.5: Faces do grupo $\mathbb{Z}_{m_1,m_2}$

Observação 2.3.1. Vamos denotar a face $C_{\{i_1,\ldots,i_j\}}$ simplesmente por $C_{i_1,\ldots,i_j}$.

Os lemas a seguir serão úteis para as demonstrações de resultados que virão posteriormente. Vale ressaltar que estes lemas podem ser encontrados em [49].

Lema 2.3.2. Sejam $H_1, \ldots, H_k$ os hiperplanos refletores de G. Se $B \subset \{1, \ldots, k\}$, então $\overline{C_B} = \langle C_B \rangle = \bigcap_{i \in B} H_i$, em que $\langle C_B \rangle$ denota o subespaço gerado por C_B.

Demonstração. Dado $y \in C_B$, então para todo $i \in B$, temos $y \in H_i$, isto é, $y \in \bigcap_{i \in B} H_i$. Como H_i fechado, segue que $\bigcap_{i \in B} H_i$ é fechado. Assim, $\overline{C_B} \subset \bigcap_{i \in B} H_i$. Reciprocamente, se $y \notin \overline{C_B}$, então $y \notin C_B$. Deste modo, existe $i \in B$ tal que $y \notin H_i$, ou seja, $y \notin \bigcap_{i \in B} H_i$. Portanto, $\overline{C_B} = \bigcap_{i \in B} H_i$. Agora, como interseção de subespaços é um subespaço e $C_B \subset \bigcap_{i \in B} H_i$, tem-se que $\langle C_B \rangle \subset \left\langle \bigcap_{i \in B} H_i \right\rangle = \bigcap_{i \in B} H_i$. Por outro lado, como

os subespaços são fechados e $C_B \subset \langle C_B \rangle$, concluímos que $\bigcap_{i \in B} H_i = \overline{C_B} \subset \overline{\langle C_B \rangle} = \langle C_B \rangle$. Logo, $\langle C_B \rangle = \bigcap_{i \in B} H_i$, o que conclui a prova. □

O lema a seguir vai nos garantir, em particular, que a face que passa pela origem é um subespaço.

Lema 2.3.3. Sejam $H_1, \ldots, H_k$ os hiperplanos refletores de G. Se $C \in \mathfrak{C}$ é a face passando pela origem, então C é fechado.

Demonstração. Como $0 \in C$ e H_i é subespaço para todo $i = 1, \ldots, k$, temos $0 \in H_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Portanto, $0 \in \bigcap_{i=1}^{k} H_i$. Como C consiste nos pontos que estão nos mesmos hiperplanos de 0, concluímos que $C \subset \bigcap_{i=1}^{k} H_i$. Reciprocamente, se $y \notin C$, então existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $y \notin H_i$, ou seja, $y \notin \bigcap_{i=1}^{k} H_i$. Logo, $C = \bigcap_{i=1}^{k} H_i$ e segue que C é fechado. □

Proposição 2.3.4. Sejam $H_1, \ldots, H_k$ os hiperplanos refletores de G. Se $C \in \mathfrak{C}$ é a face passando pela origem, então $\dim C + \operatorname{posto} G = \dim V$. Em particular, $\dim C^{\perp} = \operatorname{posto} G$.

Demonstração. Dados $a_i \in H_i^{\perp}$ não nulos com $i = 1, \ldots, k$, segue da definição do posto de G que $\dim\langle a_1, \ldots, a_k \rangle = \operatorname{posto} G$. Vamos mostrar que $C = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle^{\perp}$, o que conclui a prova, visto que $\dim V = \dim\langle a_1, \ldots, a_k \rangle + \dim\langle a_1, \ldots, a_k \rangle^{\perp}$. Desta forma, dado $v \in C$, temos $v \in H_i$ para todo $i = 1 \ldots, k$. Se $w \in \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$, então $w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$ e segue que

$$\begin{aligned} (v, w) &= \left(v, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i}(v, a_i) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $(v, a_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Desta forma, $v \in \langle a_1, \ldots, a_k \rangle^{\perp}$. Reciprocamente, se $v \in \langle a_1, \ldots, a_k \rangle^{\perp}$, então $v \in \langle a_i \rangle^{\perp}$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Mas, para cada i, temos $\langle a_i \rangle^{\perp} = H_i$. Desta forma, $v \in \bigcap_{i=1}^{k} H_i = C$. Em particular,

$$\dim C + \dim C^{\perp} = \dim V = \dim C + \operatorname{posto} G,$$

e segue que $\dim C^{\perp} = \operatorname{posto} G$. □

Este resultado particular que obtemos com a Proposição 2.3.4 nos permitirá exibir uma caracterização para os chamados germes de aplicação de reflexão essenciais em termos do complemento ortogonal da face que passa pela origem e do espaço tangente à imagem do mergulho h atrelado à aplicação de reflexão. Também vamos mostrar uma equivalência entre os germes de aplicação de reflexão essenciais com os chamados germes de aplicação de gráfico refletido.

Proposição 2.3.5. Sejam $H_1, \ldots, H_k$ os hiperplanos refletores de G. Para cada $v \in V$, os seguintes números são iguais:

(a) $\dim X(v)$, em que $X(v) = \bigcap_{v \in H_i} H_i$.

(b) $\min \{\dim \operatorname{Fix} x \mid x \in G_v\}$, em que $G_v = \{g \in G \mid gv = v\}$.

(c) $\operatorname{posto} Jac(\omega)_v$.

Demonstração. Ver Proposição 9.13, p. 174 em [22]. □

Corolário 2.3.6. Se X é uma interseção de hiperplanos refletores, existe $g \in G$ tal que $\operatorname{Fix} g = X$.

Demonstração. Ver Corolário 9.14, p. 176 em [22]. □

O próximo corolário, que nada mais é do que uma reformulação do Corolário 2.3.6, será chave para muitos resultados posteriores.

Corolário 2.3.7. Para cada face $C \in \mathfrak{C}$, existe $g \in G$ tal que $\operatorname{Fix} g = \langle C \rangle$.

Demonstração. Do Lema 2.3.2, para cada face $C \in \mathfrak{C}$, tem-se que $\langle C \rangle$ é uma interseção de hiperplanos refletores. Portanto, segue do Corolário 2.3.6 que existe $g \in G$ tal que $\operatorname{Fix} g = \langle C \rangle$. □

Lema 2.3.8. Se $v \in V$ e $C \in \mathfrak{C}$ é a face contendo v, então $\ker d\omega_v = C^{\perp}$, em que $\omega : V \to \mathbb{C}^p$ é a aplicação de órbita. Em particular, o arranjo de hiperplanos $\mathfrak{A}$ é o conjunto crítico de ω, isto é,

$$\mathfrak{A} = \{v \in V \mid \dim(\operatorname{Im} d\omega_v) \neq p\}.$$

Demonstração. Sejam $H_1, \ldots, H_k$ todos os hiperplanos de V definidos por G. Sem perda de generalidade, vamos considerar que $\langle C \rangle = H_1 \cap \cdots \cap H_m$, para algum $m \leq k$. Pelo Corolário 2.3.7, existe $g \in G$ tal que $\langle C \rangle = \operatorname{Fix} g$. Sendo g diagonalizável, considere

$\beta = \{v_1, \ldots, v_p\}$ a base ortonormal de V dada pelos autovetores de g. A menos de uma reordenação, vamos assumir que $\operatorname{Fix} g = \langle v_{h+1}, \ldots, v_p \rangle$ para algum $h \leq p-1$ e seja $\beta^* = \{X_1, \ldots, X_p\}$ a base do dual de V associada a β. Desta forma, observe que, como $v \in \operatorname{Fix} g$, temos $X_j(v) = 0$ para todo $1 \leq j \leq h$. Inicialmente, afirmamos que se $f \in \mathbb{C}[V]^G$, então nenhum monômio de f possui grau total igual a 1 em $X_1, \ldots, X_h$. De fato, observe que $g \cdot X_i = X_i$, para todo $h+1 \leq i \leq p$. Com efeito, como $\operatorname{Fix} g = \operatorname{Fix} g^{-1}$, então para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)_\beta$, temos

$$g \cdot X_i(\alpha) = X_i(g^{-1}(\alpha)) = X_i(v_1 + \cdots + v_h + \alpha_{h+1}v_{h+1} + \cdots + \alpha_p v_p) = \alpha_i = X_i(\alpha)$$

o que mostra que g deixa X_i invariante. Agora, suponha que f possui um monômio da forma $X_i X_{h+1}^{k_{h+1}} \cdots X_p^{k_p}$, para algum $1 \leq i \leq h$ e $k_{h+1}, \ldots, k_p \in \mathbb{Z}_+$. Como $g \cdot f = f$, então

$$\begin{aligned} X_i X_{h+1}^{k_{h+1}} \cdots X_p^{k_p} &= g \cdot (X_i X_{h+1}^{k_{h+1}} \cdots X_p^{k_p}) \\ &= (g \cdot X_i)(g \cdot (X_{h+1}^{k_{h+1}} \cdots X_p^{k_p})) \\ &= (g \cdot X_i) X_{h+1}^{k_{h+1}} \cdots X_p^{k_p} \end{aligned}$$

em que a igualdade ocorre se, e somente se, $g \cdot X_i = X_i$. Aplicando em v_i, temos

$$1 = X_i(v_i) = g \cdot (X_i(v_i)) = X_i(g^{-1}(v_i)),$$

em que esta igualdade ocorre se, e somente se, $g^{-1}(v_i) = v_i$, isto é, $v_i \in \operatorname{Fix} g$, o que não ocorre. Logo, $g \cdot X_i \neq X_i$ e vem que f não é invariante por g, o que contraria $f \in \mathbb{C}[V]^G$. Agora suponha que $f = \left(\sum_{i=1}^{h} \alpha_i X_i \right) f_d$, em que $f_d = X_{h+1}^{k_{h+1}} \cdots X_p^{k_p}$ com $k_{h+1}, \ldots, k_p \in \mathbb{Z}_+$ e $k_{h+1} + \cdots + k_p = d$ e $\alpha_i \in \mathbb{C}$. De $g \cdot f = f$, temos $\sum_{i=1}^{h} \alpha_i (g \cdot X_i) = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i X_i$. Suponha que $\alpha_k \neq 0$ para algum $1 \leq k \leq h$. Aplicando em v_k, obtemos

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \sum_{i=1}^{h} \alpha_i X_i(v_k) \\ &= \sum_{i=1}^{h} \alpha_i (g \cdot X_i)(v_k) \\ &= \sum_{i=1}^{h} \alpha_i X_i(g^{-1}(v_k)) \\ &= \sum_{i=1}^{h} \alpha_i X_i(\lambda_k^{-1} v_k) \\ &= \alpha_k \lambda_k^{-1}\end{aligned}$$

donde $\lambda_k^{-1} = 1$. Logo, $g^{-1}(v_k) = v_k$ e tem-se que $v_k \in \operatorname{Fix} g$, o que não ocorre. Com isso, concluímos a nossa afirmação. Daí, como $v \in \operatorname{Fix} g = \langle v_{h+1}, \ldots, v_p \rangle$, então $\dfrac{\partial f}{\partial X_i}(v) = 0$, para todo $1 \leq i \leq h$. Desta forma, escrevendo $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_p)$, então as primeiras h colunas de $d\omega_v$ são nulas, visto que $\omega_i \in \mathbb{C}[V]^G$, para todo $1 \leq i \leq p$. Agora tome $u \in C^{\perp}$. Então $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_h, 0, \ldots, 0)_\beta$ e $d\omega_v(u) = 0$, isto é, $u \in \ker d\omega_v$. Assim, sendo $C^{\perp}$ um subespaço de V e $C^{\perp} \subset \ker d\omega_v$, tem-se que $C^{\perp}$ é subespaço de $\ker d\omega_v$. Do Teorema 2.3.5, temos $\dim\langle C \rangle = \dim(\operatorname{Im} d\omega_v)$. Mas

$$\dim\langle C \rangle + \dim\langle C \rangle^{\perp} = p = \dim(\operatorname{Im} d\omega_v) + \dim(\ker d\omega_v).$$

Desta forma, $\dim\langle C \rangle^{\perp} = \dim(\ker d\omega_v)$ e $C^{\perp} = \langle C \rangle^{\perp}$, donde concluímos que vale a igualdade $\ker d\omega_v = C^{\perp}$. Por fim, note que v não é ponto crítico de ω se, e somente se, $\ker d\omega_v = \{0\}$, isto é, $C^{\perp} = \{0\}$ em que C é a face que contém v. Com isso, verifica-se que $C = C_\emptyset$ e $v \notin \mathfrak{A}$. A outra inclusão é imediata e vem que $\mathfrak{A}$ é um conjunto crítico de ω. □

2.4 Aplicações de reflexão

Nesta seção introduziremos as aplicações de reflexão que são aplicações da forma $f = \omega \circ h$, em que ω é a aplicação de órbita de um grupo de reflexão G que age sobre um espaço vetorial complexo V de dimensão p e h é um mergulho. Para germes desta classe de aplicações, veremos como obter informações a partir da imagem de h. Após o estudo dessas aplicações, veremos que a Conjectura 1 é verdadeira para esta classe de germes de aplicação de reflexão (valendo um resultado mais geral). Além disso, mostraremos que dentre os contra-exemplos fornecidos por Ruas e Silva em [41] para

mostrar que a Conjectura 2 não é verdadeira, em geral, estão os germes de aplicação de reflexão.

Definição 2.4.1. Sejam X uma variedade complexa de dimensão n, V um espaço vetorial de dimensão p sobre $\mathbb{C}$ e G um grupo de reflexão agindo sobre V. Uma aplicação de reflexão $f : X \to \mathbb{C}^p$ é uma aplicação da forma

$$f = \omega \circ h,$$

em que $h : X \hookrightarrow V$ é um mergulho e $\omega : V \to \mathbb{C}^p$ é a aplicação de órbita de G.

Mond [29], em 1985, introduziu as chamadas aplicações de dobra de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ (veja o Exemplo 2.4.3), as quais são exemplos de aplicação de reflexão com a ação do grupo $\mathbb{Z}_2$ na segunda coordenada de $\mathbb{C}^3$ e ação trivial nas demais. Em 2008, Marar e Nuño-Ballesteros [24] introduziram as chamadas aplicações de dobra dupla também para aplicações de $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{C}^3$ (veja o Exemplo 2.4.7), e observamos que estas aplicações também são exemplos de aplicação de reflexão, agora com a ação de $\mathbb{Z}_{2,2}$ nas duas primeiras coordenadas de $\mathbb{C}^3$ e ação trivial na terceira coordenada. Com isso, Fernández de Bobadilla foi o responsável por apresentar uma definição geral para as aplicações de reflexão, conforme a Definição 2.4.1, mas foram estudadas primeiramente por Peñafort-Sanchis em [36].

Exemplo 2.4.2. Vejamos agora três maneiras de obter a cúspide via aplicação de reflexão. Para o primeiro caso, considere o mergulho $h_1(t) = (t, t)$ e a aplicação de órbita $\omega_1(x, y) = (x^2, y^3)$ considerando a ação de $\mathbb{Z}_{2,3}$ sobre $\mathbb{C}^2$, obtemos a aplicação de reflexão $f_1(t) = (t^2, t^3)$ (veja a Figura 2.6).

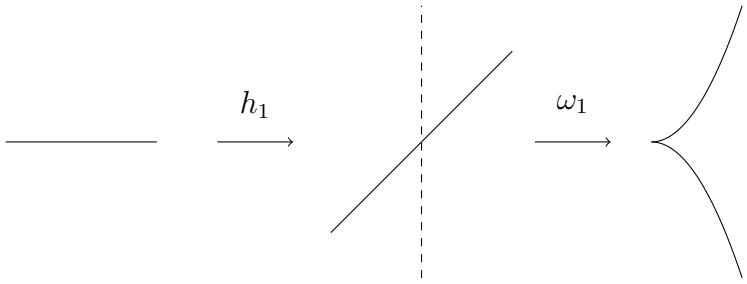


Figura 2.6: Primeira maneira de obter a cúspide via aplicação de reflexão

No segundo caso, considere a ação de $\mathbb{Z}_3$ na segunda coordenada de $\mathbb{C}^2$ e o mergulho $h_2(t) = (t^2, t)$. Já que aplicação de órbita é $\omega_2(x, y) = (x, y^3)$, temos a aplicação de reflexão $f_2(t) = (t^2, t^3)$, cuja imagem é novamente a cúspide (veja a Figura 2.7).

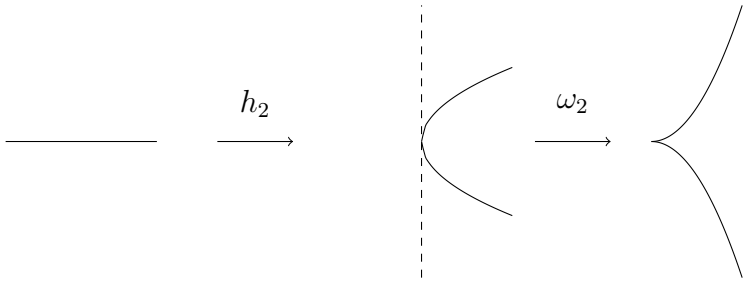


Figura 2.7: Segunda maneira de obter a cúspide via aplicação de reflexão

Por fim, considere a aplicação de reflexão $f_3(t) = (t^2, t^3)$ dada pelo mergulho $h_3(t) = (t, t^3)$ e aplicação de órbita $\omega_3(x, y) = (x^2, y)$, considerando a ação de $\mathbb{Z}_2$ na primeira coordenada de $\mathbb{C}^2$ (veja a Figura 2.8).

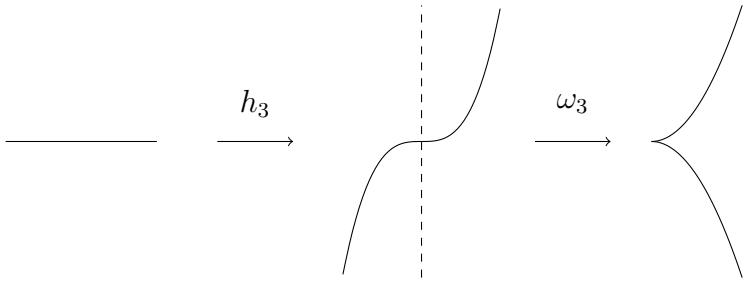


Figura 2.8: Terceira maneira de obter a cúspide via aplicação de reflexão

No próximo exemplo apresentaremos as chamadas aplicações de dobra, introduzidas por Mond em [29] na classificação de germes $\mathcal{A}$-simples de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$.

Exemplo 2.4.3 (Aplicação de dobra)**.** Uma aplicação de dobra é um germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ da forma

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \big(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^2, H(x)\big)$$

para alguma $H : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{p-n}, 0)$. As aplicações de dobra são exemplos de aplicações de reflexão. Com efeito, considere $h : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ dada por $h(x) = (x, H(x))$ e $\omega : (\mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ dada por

$$y = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_p) \mapsto (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n^2, y_{n+1}, \ldots, y_p),$$

isto é, ω é aplicação de órbita obtida pela ação de $\mathbb{Z}_2$ na n-ésima coordenada de $\mathbb{C}^p$ e a ação trivial nas demais. Com isso, $f = \omega \circ h$.

Em [29], Mond mostrou que todo germe $\mathcal{A}$-simples $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ é uma aplicação

de reflexão. As famílias

$$\begin{aligned} S_k : \quad (x,y) &\mapsto (x, y^2, y^3 + x^{k+1}y),\ k \geq 0, \\ B_k : \quad (x,y) &\mapsto (x, y^2, x^2y + y^{2k+1}),\ k \geq 2, \\ C_k : \quad (x,y) &\mapsto (x, y^2, xy^3 + x^k y),\ k \geq 3 \end{aligned}$$

e o germe

$$F_4 : \quad (x,y) \mapsto (x, y^2, x^3y + y^5)$$

são aplicações de dobra. A família restante

$$H_k : \quad (x,y) \mapsto (x, y^3, xy + y^{3k-1}y),\ k \geq 1$$

consiste em aplicações de reflexão com mergulho $h_k(x,y) = (x, y, xy+y^{3k-1})$ e aplicação de órbita dada pela ação de $\mathbb{Z}_3$ na segunda coordenada e ação trivial nas demais $\omega_k(x,y,z) = (x, y^3, z)$, para cada $k \geq 1$.

Observação 2.4.4. Como curiosidade, escolhendo $k = 2$ na família H_k vista anteriormente, a imagem de H_2 (pontos reais) ganhou uma escultura no pátio do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da Universidade de São Paulo (USP) e é conhecida carinhosamente por "A coisa" (veja a Figura 2.9 abaixo).

Figura 2.9: A coisa

Exemplo 2.4.5. A cúspide $x \mapsto (x^2, x^3)$ é um exemplo de aplicação de dobra, obtida pela dobra do gráfico da função $H(x) = x^3$. Note que o germe de aplicação f_3 do Exemplo 2.4.2 é a aplicação de dobra em questão. A Figura 2.10 ilustra uma ideia geométrica que nos permite compreender o porquê destes germes de aplicação de reflexão serem chamados de aplicação de dobra.

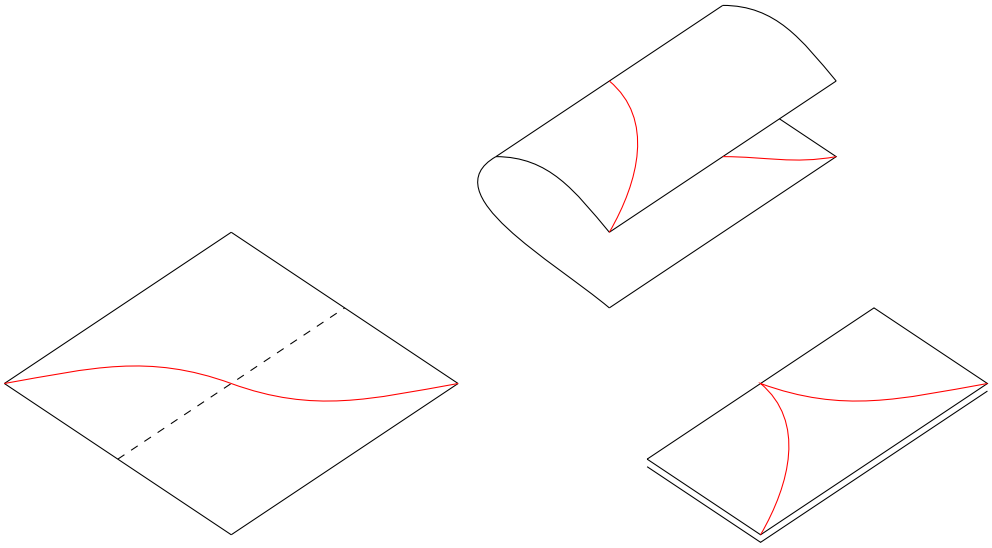


Figura 2.10: A cúspide como aplicação de dobra

Exemplo 2.4.6. O guarda-chuva de Whitney $(x, y) \mapsto (x, y^2, xy)$ é uma aplicação de dobra, obtida pela dobra do gráfico da função $H(x, y) = xy$. Como aplicação de reflexão, esta aplicação de dobra está ligada ao mergulho $h(x, y) = (x, y, xy)$ e aplicação de órbita $\omega(x, y, z) = (x, y^2, z)$ (veja a Figura 2.11).

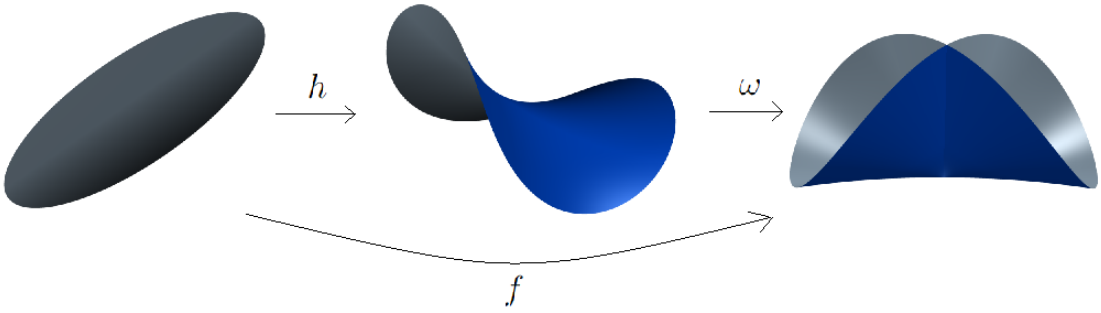


Figura 2.11: O guarda-chuva de Whitney como aplicação de dobra

No próximo exemplo, veremos mais um tipo especial de germe de aplicação de reflexão: as aplicações de dobra dupla. Estas aplicações foram introduzidas por Marar e Nuño-Ballesteros em [24], na busca por germes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$ quase-homogêneos, $\mathcal{A}$-finitos e de coposto 2. O leitor pode conferir novamente a Figura 2.3 para ver uma ideia geométrica do porquê destes germes serem chamados de aplicação de dobra dupla.

Exemplo 2.4.7 (Aplicação de dobra dupla)**.** Uma aplicação de dobra dupla é um germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ da forma

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}^2, x_n^2, H(x)\right)$$

para alguma $H : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{p-n}, 0)$. As aplicações de dobra dupla são exemplos de aplicação de reflexão. Com efeito, considere $h : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ dada por $h(x) = (x, H(x))$ e $\omega : (\mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ dada por

$$y = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_p) \mapsto (y_1, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}^2, y_n^2, y_{n+1}, \ldots, y_p),$$

isto é, ω é aplicação de órbita obtida pela ação de $\mathbb{Z}_{2,2}$ nas $(n-1)$-ésima e n-ésima coordenadas de $\mathbb{C}^p$ e a ação trivial nas demais. Desta forma, $f = \omega \circ h$.

Exemplo 2.4.8. Uma maneira alternativa de parametrizarmos o guarda-chuva de Whitney é $(x, y) \mapsto (x^2, y^2, x + y)$, a qual é um exemplo de aplicação de dobra dupla. Para esta parametrização, podemos associar o mergulho $h(x, y) = (x, y, x + y)$ e a aplicação de órbita $\omega(x, y, z) = (x^2, y^2, z)$ (veja a Figura 2.12).

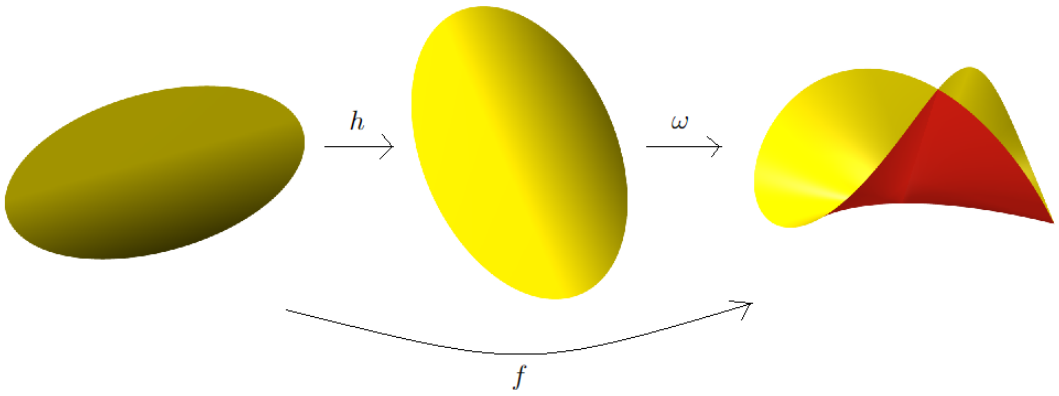


Figura 2.12: O guarda-chuva de Whitney como aplicação de dobra dupla

Um fato interessante que podemos observar com os Exemplos 2.4.6 e 2.4.8 é que aplicações de reflexão contruídas a partir de grupos de reflexão distintos podem ser $\mathcal{A}$-equivalentes. Em outras palavras, a classe de isomorfismos de grupos não distingue a classe de $\mathcal{A}$-equivalência de germes de aplicação de reflexão.

Observação 2.4.9. A partir de agora vamos fixar V um espaço vetorial de dimensão p sobre $\mathbb{C}$ e a aplicação $f : X \to \mathbb{C}^p$ denotará uma aplicação de reflexão, em que X é uma variedade complexa de dimensão n, e omitiremos a informação de que G, h e ω são, respectivamente, o grupo de reflexão, o mergulho e a aplicação de órbita associados a esta aplicação, desde que o contexto esteja claro. Além disso, vamos denotar por $Y = \operatorname{Im} h \subset V$.

Definição 2.4.10. Seja $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ uma função holomorfa entre variedades complexas com $n = \dim \mathcal{X} < \dim \mathcal{Y}$. O coposto de f em $x \in \mathcal{X}$ é dado por

$$\operatorname{coposto} f_x = n - \operatorname{posto} df_x.$$

Observação 2.4.11. Como df_x é uma aplicação linear e posto $df_x = \dim(\operatorname{Im} df_x)$, segue do Teorema do núcleo e imagem que

$$\text{coposto } f_x = n - \dim(\operatorname{Im} df_x) = \dim(\ker df_x)$$

Lema 2.4.12. Seja f uma aplicação de reflexão. Se $y = h(x)$ pertence a face $C \in \mathfrak{C}$, então $\ker df_x = dh_x^{-1}(C^\perp)$. Em particular,

$$\text{coposto } f_x = \dim(T_yY \cap C^\perp).$$

Demonstração. Do Lema 2.3.8, temos $\ker d\omega_y = C^\perp$. Usando a regra da cadeia, concluímos que

$$\begin{aligned} v \in \ker df_x &\Leftrightarrow df_x(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow d\omega_y(dh_x(v)) = 0 \\ &\Leftrightarrow dh_x(v) \in \ker d\omega_y = C^\perp \\ &\Leftrightarrow v \in dh_x^{-1}(C^\perp), \end{aligned}$$

ou seja, $\ker df_x = dh_x^{-1}(C^\perp)$. Além disso, note que

$$\begin{aligned} g = dh_x|_{dh_x^{-1}(C^\perp)} : \quad dh_x^{-1}(C^\perp) &\longrightarrow \operatorname{Im} dh_x \cap C^\perp \\ v &\longmapsto dh_x(v) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Com efeito, sendo h um mergulho, segue que dh_x é injetiva. Desta forma, a restrição g de dh_x ao conjunto $dh_x^{-1}(C^\perp)$ também é injetiva. Dado $u \in \operatorname{Im} dh_x \cap C^\perp$, então u é da forma $dh_x(v) = u \in C^\perp$, donde $v \in dh_x^{-1}(C^\perp)$, o que garante que $u = g(v)$. Logo, g é isomorfismo, como afirmamos. Por fim, sabemos que $\operatorname{Im} dh_x = T_yY$ e segue da Observação 2.4.11 que

$$\text{coposto } f_x = \dim(\ker df_x) = \dim(dh_x^{-1}(C^\perp)) = \dim(\operatorname{Im} dh_x \cap C^\perp) = \dim(T_yY \cap C^\perp),$$

como queríamos mostrar. □

Observação 2.4.13. Dado um germe de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, devemos ter $h(0) = 0$. Com efeito, como $f(0) = 0$, então

$$\omega(h(0)) = 0 = \omega(0),$$

de modo que $h(0) \in \omega^{-1}(\omega(0))$. Do Teorema 2.2.18, concluímos que $h(0) \in G0 = 0$, ou seja, $h(0) = 0$.

Exemplo 2.4.14. Dado $s \in \mathbb{C}$, considere a família de mergulhos h_s dada por $h_s(t) = (t, t^3 - st)$ e ω aplicação de órbita dada por $\omega(x, y) = (x^2, y)$. Vamos denotar por f_s a aplicação de reflexão $\omega \circ h_s$ para cada $s \in \mathbb{C}$ e observe que o complexo de $\mathbb{Z}_2$ é apenas $\{C_\emptyset, C_1\}$, em que

$$C_\emptyset = \left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \neq 0\right\}$$

e

$$C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = 0\right\}.$$

Já que $C_\emptyset$ é um aberto em $\mathbb{C}^2$, temos $C_\emptyset^\perp = \{0\}$. Assim, do Lema 2.4.12, temos coposto$(f_s)_t = 0$ em todo ponto $t \in \mathbb{C}$ tal que $h_s(t) \in C_\emptyset$. Desta forma, f_s não pode ser singular fora de C_1. Vejamos agora que o coposto de f_s depende de como h_s cruza a face C_1. Denotando por $Y_s = \operatorname{Im} h_s$, então para $s = 0$ observe que T_0Y_0 é o eixo x, de modo que h_0 cruza a face C_1 ortogonalmente, ou seja, $C_1^\perp \subset T_0Y_0$ (veja a Figura 2.13).Daí, do Lema 2.4.12, temos coposto$(f_0)_0 = 1$ e isto produz uma singularidade na origem para f_0.

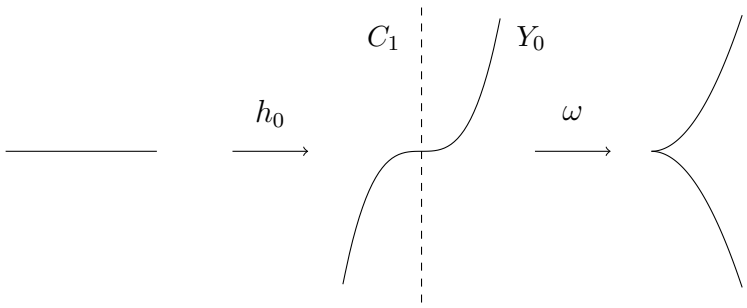


Figura 2.13: h_0 cruza C_1 ortogonalmente

Já para $s \neq 0$, observe que T_0Y_s é o espaço gerado por $(1, -s)$, que não cruza C_1 ortogonalmente, ou seja, T_0Y_s não contém $C_1^\perp$. Desta forma, $T_0Y_s \cap C_1^\perp = \{0\}$ e concluímos que coposto$(f_s)_0 = 0$, isto é, f_s é imersiva (veja a Figura 2.14).

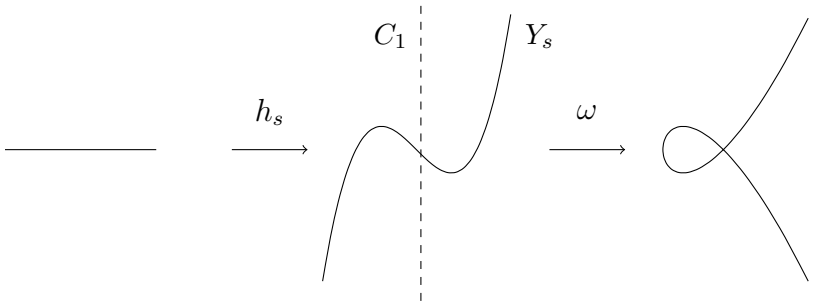


Figura 2.14: h_s cruza C_1 tranversalmente

Definição 2.4.15. Um germe de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é dito essencial se coposto $f =$ posto G.

Observemos o seguinte fato: o germe de aplicação de reflexão visto no Exemplo 2.4.6 é essencial, visto que coposto $f = 1 =$ posto $\mathbb{Z}_2$. Por outro lado, o germe de aplicação de reflexão visto no Exemplo 2.4.8 não é essencial, pois coposto $f = 1 < 2 =$ posto $\mathbb{Z}_{2,2}$. Entretanto, os dois germes são $\mathcal{A}$-equivalentes, o que nos leva a perceber que a ação do grupo $\mathbb{Z}_{2,2}$ na primeira coordenada de $\mathbb{C}^3$ não tem tanta influência na geometria do nosso objeto. O importante (ou essencial) é a ação de $\mathbb{Z}_{2,2}$ na segunda coordenada (apenas uma variável).

Isto nos leva a crer que o termo essencial vem desta ideia de que o excedente do posto do grupo G comparado ao coposto de f não tenha tanta influência na geometria do nosso objeto e, além disso, em condições apropriadas, sempre é possível obter um representante dentro da classe de germes de aplicação de reflexão que seja essencial (veja Proposição 2.4.18). Ou seja, existem um grupo de reflexão e uma aplicação de reflexão associada a este grupo tais que o posto do grupo coincide com o coposto de f e a ação em cada uma das coordenadas é importante (ou essencial) na geometria do nosso objeto e a aplicação de reflexão permanece na mesma classe de $\mathcal{A}$-equivalência de f.

Como já haviamos mencionado na Seção 2.3, é possível obter uma caracterização para os germes de aplicação de reflexão essenciais em termos do complemento ortogonal da face que passa pela origem e do espaço tangente à imagem de h na origem. Vejamos esta caracterização no lema:

Lema 2.4.16. Um germe de aplicação de reflexão f é essencial se, e somente se, $C^\perp \subset T_0Y$, em que $C \in \mathfrak{C}$ é a face passando pela origem.

Demonstração. Com efeito, se f é essencial, então coposto $f =$ posto G. Se $C \in \mathfrak{C}$ é a

face que passa pela origem, segue do Lema 2.4.12 e da Proposição 2.3.4 que

$$\dim C^{\perp} = \operatorname{posto} G = \operatorname{coposto} f = \dim(T_0Y \cap C^{\perp}).$$

Portanto, $C^{\perp} \subset T_0Y$. Reciprocamente, se $C \in \mathfrak{C}$ é a face que passa pela origem e $C^{\perp} \subset T_0Y$, segue novamente do Lema 2.4.12 e da Proposição 2.3.4 que

$$\operatorname{coposto} f = \dim(T_0Y \cap C^{\perp}) = \dim C^{\perp} = \operatorname{posto} G,$$

e concluímos que f é essencial. □

Definição 2.4.17. Sejam $H : V \to \mathbb{C}^r, G$ um grupo de reflexão agindo sobre V com aplicação de órbita ω. O G-gráfico refletido de H é a aplicação $(\omega, H) : V \to \mathbb{C}^{p+r}$ dada por

$$x \mapsto (\omega(x), H(x)).$$

O gráfico refletido (ω, H) é uma aplicação de reflexão obtida considerando o mergulho $h(x) = (x, H(x))$ e ação de G sobre $V \times \mathbb{C}^r$, com ação trivial no segundo fator.

Proposição 2.4.18. Um germe de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é essencial se, e somente se, f é $\mathcal{A}$-equivalente a uma aplicação de gráfico refletido (ω, H) cujas funções coordenadas $H_j \in \mathfrak{m}^2$, em que $\mathfrak{m}^2$ denota o quadrado do ideal maximal de $\mathcal{O}_n$.

Demonstração. Inicialmente, suponha que f seja essencial e considere $k = \operatorname{coposto} f = \operatorname{posto} G$. Se $C \in \mathfrak{C}$ é face passando pela origem, segue do Lema 2.3.8 e da Proposição 2.3.4 que $k = \dim(\ker d\omega_0)$. Assim, existem germes de biholomorfismos $\tilde{\phi}$ e ϕ tais que a aplicação $\omega' = \phi \circ \omega \circ \tilde{\phi}$ é outra aplicação de órbita para G e tem a forma

$$y = (y_1, \ldots, y_p) \mapsto (\omega'_1(y), \ldots, \omega'_k(y), y_{k+1}, \ldots, y_p).$$

Seja $h' = \tilde{\phi}^{-1} \circ h$. Então $f \sim_{\mathcal{A}} \phi \circ f$, em que

$$\phi \circ f = \phi \circ \omega \circ h = \phi \circ \omega \circ \tilde{\phi} \circ \tilde{\phi}^{-1} \circ h = \omega' \circ h'.$$

Após a mudança de coordenadas $\tilde{\phi}$, observe que $C^{\perp} = \{y_{k+1} = \cdots = y_p = 0\}$. De fato, como $C^{\perp} = \ker d\omega'_0$, concluímos que $y \in C^{\perp}$ se, e somente se, $y_{k+1} = \cdots = y_p = 0$. Pelo Lema 2.4.16, sabemos que $C^{\perp} \subset T_0Y$. Assim, podemos assumir que $\tilde{\phi}$ é tal que $\psi = (h'_1, \ldots, h'_n)$ é um germe de biholomorfismo. Portanto, como $\operatorname{coposto} f = \operatorname{posto} G$, devemos ter $h'_{n+1}, \ldots, h'_p \in \mathfrak{m}^2$. Logo, $f \sim_{\mathcal{A}} \phi \circ f \circ \psi^{-1}$, em que esta última aplicação

é da forma

$$x \mapsto (\omega_1'(x), \ldots, \omega_k'(x), x_{k+1}, \ldots, x_n, h_{n+1}' \circ \psi^{-1}(x), \ldots, h_p' \circ \psi^{-1}(x)).$$

Definindo as aplicações ω'' e H por $\omega''(x) = (\omega_1'(x), \ldots, \omega_k'(x), x_{k+1}, \ldots, x_n)$ e $H(x) = (h_{n+1}' \circ \psi^{-1}(x), \ldots, h_p' \circ \psi^{-1}(x))$, o resultado segue para a aplicação de gráfico refletido (ω'', H). Reciprocamente, suponha que f é $\mathcal{A}$-equivalente a uma aplicação de gráfico refletido (ω, H) cujas coordenadas de H pertencem ao quadrado do ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_n$. Como

$$Jac(\omega, H) = \begin{bmatrix} Jac(\omega) \\ ------ \\ Jac(H) \end{bmatrix},$$

segue que $v \in \ker d(\omega, H)_0$ se, e somente se, $v \in \ker d\omega_0$. Se $C \in \mathfrak{C}$ é face passando pela origem, pelo Lema 2.3.8 concluímos que $v \in \ker d(\omega, H)_0$ se, e somente se, $v \in C^{\perp}$. Logo, pela Observação 2.4.11 e pela Proposição 2.3.4, temos

$$\text{coposto}(\omega, H)_0 = \dim(\ker d(\omega, H)_0) = \dim C^{\perp} = \text{posto}\, G.$$

Portanto, sendo (ω, H) essencial, concluímos que f é essencial. □

2.5 A conjectura de Lê

Nesta seção, vamos estudar injetividade de germes de aplicações de reflexão f e relacionar este conceito com o coposto de f. A motivação para o estudo de injetividade dessa classe de germes de aplicações vem da conjectura de Lê em [44], a qual afirma que existe a seguinte equivalência entre as propriedades topológicas e analíticas de um germe de superfície S em $\mathbb{C}^3$: se o link de S é homeomorfo a uma esfera, então S é isomorfa a um espaço total de uma deformação equisingular de uma curva plana irredutível, em que o link de S é dado pela interseção de S com uma esfera S_ϵ de raio ϵ suficiente pequeno e centrada na origem.

Um fato conhecido da teoria de singularidades é que o link de um germe de superfície $(S, 0)$ em $\mathbb{C}^3$ é homeomorfo a uma esfera se, e somente se, a aplicação de normalização

$$n : (S', P) \longrightarrow (S, 0)$$

é uma bijeção de um germe de superfície suave (S', P) em $(S, 0)$. Na verdade, verifica-se que se um germe de aplicação analítico $n : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}^3$ é injetivo, então o posto da

diferencial dn em 0 é no mínimo 1. Com isso, uma reformulação da conjectura de Lê é dada nos seguintes termos: se uma aplicação $n : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}^3$ é injetiva, então o posto da diferencial dn na origem é no mínimo 1. Ou ainda, uma reformulação para esta conjectura é apresentada por Fernándes de Bobadilla em [9] como a seguir:

Conjectura 1 (Lê)**.** Não existe germe $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ injetivo de coposto 2.

A conjectura 1 é um problema que segue em aberto e uma tentativa de provar esta conjectura foi apresentada em 1993 por Nemethi em [32]. Entretanto, em 2004, Keilen e Mond [19] forneceram um contra-exemplo para o resultado principal de Nemethi. Todavia, algumas ideias utilizadas por Nemethi são válidas e inspiram alguns trabalhos, como, por exemplo, o trabalho de Fernández de Bobadilla [9]. Para casos particulares, podemos citar o trabalho de Luengo e Pichon [23] que, em 2005, provaram que a Conjectura 1 é válida para o caso de coberturas cíclicas sobre singularidades normais de uma superfície totalmente ramificada ao longo de uma vizinhança do zeros de uma função analítica.

Para germes de aplicação de reflexão, a conjectura é verdadeira. Nesta seção veremos, mais precisamente, um resultado mais geral provado por Peñafort-Sanchis em [36] dentro dessa classe de germes de aplicação, de modo que a veracidade da Conjectura 1 segue como corolário. Seguindo com as convenções feitas na Observação 2.4.9, temos o seguinte lema:

Lema 2.5.1. Uma aplicação de reflexão f é injetiva se, e somente se, para todo $g \in G \setminus \{id\}$, tem-se que $Y \cap gY \subset \operatorname{Fix} g$.

Demonstração. Suponha que f é injetiva. Dados $g \in G \setminus \{id\}$ e $y \in Y \cap gY$, existem $x, x' \in X$ tais que $h(x) = y = gh(x')$. Desta forma,

$$\omega(h(x)) = \omega(gh(x')) = \omega(h(x')),$$

em que esta última igualdade vem do Teorema 2.2.18. Portanto, $f(x) = f(x')$ e concluímos, pela injetividade de f, que $x = x'$. Desta forma, $y = gh(x) = gy$, isto é, $y \in \operatorname{Fix} g$. Portanto, $Y \cap gY \subset \operatorname{Fix} g$, para todo $g \in G \setminus \{id\}$. Reciprocamente, sejam $x, x' \in X$ tais que $f(x) = f(x')$. Assim, $\omega(h(x)) = \omega(h(x'))$, donde segue que $h(x') \in \omega^{-1}(\omega(h(x))$. Do Teorema 2.2.18, existe $g \in G$ tal que $h(x') = gh(x)$. Se $g = id$ o resultado segue da injetividade de h. Se $g \neq id$, observe que $h(x') \in Y \cap gY$. Por hipótese, teremos $h(x') \in \operatorname{Fix} g$, de modo que $h(x') = gh(x')$. Daí, $gh(x') = gh(x)$, donde $h(x) = h(x')$ e novamente o resultado segue da injetividade de h. □

Exemplo 2.5.2. Voltando ao Exemplo 2.4.14, como o grupo que age sobre $\mathbb{C}^2$ é o $\mathbb{Z}_2$, o nosso único elemento diferente do neutro é a reflexão $i_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Além disso,

tem-se que $\operatorname{Fix} i_1 = \langle (0,1) \rangle$. Para $s = 0$, note que

$$i_1 h_0(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t^3 \end{bmatrix}.$$

Daí, $y \in Y_0 \cap i_1 Y$ se, e somente se, existem $t_0, t_1 \in \mathbb{C}$ tais que

$$(t_0, t_0^3) = y = (-t_1, t_1^3),$$

donde $t_0 = -t_1$ e vem que $-t_1^3 = t_1^3$, isto é, $t_1 = 0 = t_0$. Portanto, $Y_{\cap} i_1 Y_0 = \{0\} \subset \operatorname{Fix} i_1$. Do Lema 2.5.1, concluímos que f_0 é injetiva (veja a Figura 2.15).

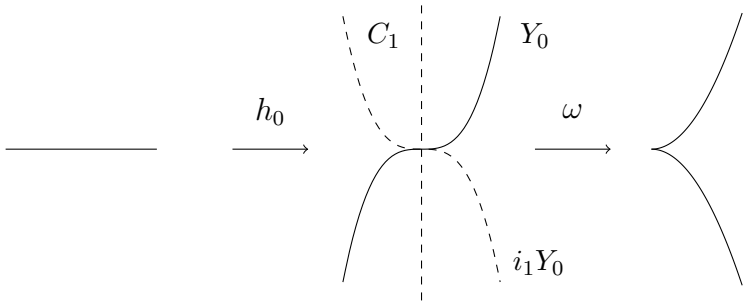


Figura 2.15: Interseção de Y_0 com $i_1 Y_0$

Para $s \neq 0$, observe que

$$i_1 h_s(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t^3 - st \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t^3 - st \end{bmatrix}.$$

Agora $y \in Y \cap i_1 Y$ se, e somente se, existem $t_0, t_1 \in \mathbb{C}$ tais que

$$(t_0, t_0^3 - st_0) = y = (-t_1, t_1^3 - st_1).$$

Daí, $t_0 = -t_1$ e vem que

$$-t_1^3 + st_1 = t_1^3 - st_1 \Leftrightarrow 2t_1^3 - 2st_1 = 0 \Leftrightarrow t_1(t_1^2 - s) = 0$$

cujas soluções são $t_1 = 0, t_1 = \alpha$ e $t_1 = \beta$, para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ não nulos e distintos. Para $t = \alpha$, por exemplo, temos

$$i_1 h_s(\alpha) = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha^3 - s\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \notin \operatorname{Fix} i_1.$$

Portanto, do Lema 2.5.1, f_s não é injetivo (veja a Figura 2.16).

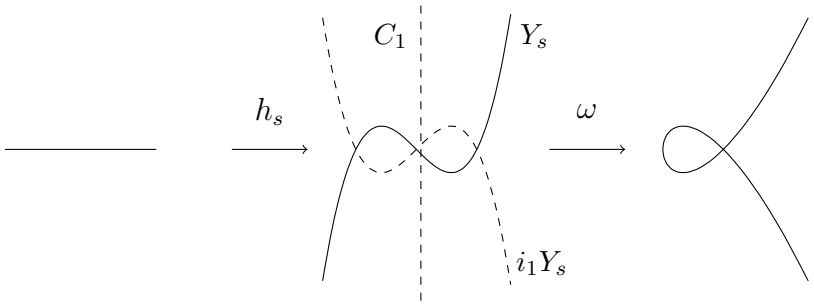


Figura 2.16: Interseção de Y_s com $i_1 Y_s$

Com este exemplo, podemos intuir como a interseção de Y com sua translação por g caracteriza injetividade.

Proposição 2.5.3. Não existe germe de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ injetivo com $\operatorname{posto} G > 2(p-n)$.

Demonstração. Suponha que exista tal f. Seja $C \in \mathfrak{C}$ a face passando pela origem. Pela Proposição 2.3.4, temos $\operatorname{posto} G = \dim C^\perp$. Como $p = \dim C + \dim C^\perp$ segue-se que

$$p = \dim C + \operatorname{posto} G > \dim C + 2(p-n),$$

donde $\dim C < 2n - p$. Do Corolário 2.3.7, existe $g \in G$ tal que $C = \operatorname{Fix} g$. Note que $g \neq id$, pois do contrário teríamos $\dim C = p$ e, portanto, $p < 2n - p$, isto é, $p < n$ que não ocorre. Além disso, já que $\dim Y = n$ e Y é uma subvariedade de $\mathbb{C}^p$ que passa pela origem, então $Y \cap gY \neq \emptyset$ e tem-se que

$$\dim(Y \cap gY) \geq p - 2(p-n) = 2n - p.$$

Com isso, $\dim \operatorname{Fix} g < 2n - p \leq \dim(Y \cap gY)$, donde $Y \cap gY \nsubseteq \operatorname{Fix} g$ contrariando o Lema 2.5.1. □

Antes de apresentarmos o teorema principal da seção, vamos enunciar mais um lema auxiliar, cuja demonstração será omitida.

Lema 2.5.4. Sejam Y um subvariedade de $\mathbb{C}^p$ contendo a origem e C um subespaço vetorial de $\mathbb{C}^p$. Se $\dim(T_0 Y \cap C^\perp) = d$, então $\dim(Y \cap C) \leq \dim Y - d$.

Demonstração. Ver Lema 1.21, p. 5 em [49]. □

Vamos agora ao teorema principal da seção.

Teorema 2.5.5. Não existe germe de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ injetivo com coposto $f > p - n$.

Demonstração. Suponha que exista tal f. Seja $C \in \mathfrak{C}$ a face que passa pela origem. Pelo Lema 2.4.12, tem-se que $\dim(T_0Y \cap C^\perp) = \text{coposto}\, f > p - n$. Do Lema 2.5.4, concluímos que

$$\dim(Y \cap C) \leq n - \dim(T_0Y \cap C^\perp) < n - (p - n) = 2n - p,$$

isto é, $\dim(Y \cap C) < 2n - p$. Além disso, segue do Corolário 2.3.7 que existe $g \in G$ tal que $C = \operatorname{Fix} g$. Note que $g \neq id$, pois do contrário teríamos $C^\perp = \{0\}$, donde $0 = \text{coposto}\, f > p - n$, ou seja, $n > p$, o que não ocorre. Agora, como f é injetiva, o Lema 2.5.1 assegura que $Y \cap gY \subset \operatorname{Fix} g$. Como $Y \cap gY \neq \emptyset$, segue que $\dim(Y \cap gY) \geq p - 2(p - n) = 2n - p$. Por fim, observe que $Y \cap gY = Y \cap C$. De fato, como $Y \cap gY \subset Y$ e $Y \cap gY \subset \operatorname{Fix} g = C$, temos $Y \cap gY \subset Y \cap C$. Por outro lado, se $y \in Y \cap C$, então $y = gy$, com $y \in Y$, isto é, $y \in Y \cap gY$. Portanto, $\dim(Y \cap C) \geq 2n - p$, o que é um absurdo. □

Como corolário deste teorema, obtemos a veracidade da Conjectura 1 para germes de aplicações de reflexão.

Corolário 2.5.6. A conjectura de Lê é verdadeira para germes de aplicação de reflexão.

Demonstração. Com efeito, basta considerar $n = 2$ e $p = 3$ no Teorema 2.5.5. □

Vale recordar que o caso geral para a Conjectura de 1 ainda é um problema em aberto. Em [36], Peñafort-Sanchis deixa a seguinte questão, à luz do Teorema 2.5.5: se $p < 2n$, então existem germes de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ injetivos com coposto $f > p - n$? Este é mais um problema aberto que, em caso de resposta negativa, a conjectura 1 pode ser resolvida novamente particularizando n e p como no Corolário 2.5.6. Todavia, em caso de resposta afirmativa, as técnicas utilizadas para obter um exemplo que assegure a veracidade do problema podem, de certa forma, dar luz à ideias para construir um contra-exemplo para a Conjectura 1 (claro, imaginando que a conjectura não seja verdadeira, em geral, neste caso).

Capítulo 3

Trivialidade topológica, Whitney equisingularidade e a conjectura de Ruas

Como já mencionamos, o objetivo do trabalho é estudar as aplicações de reflexão para dar respostas para as Conjecturas 1 e 2 dentro dessa classe de aplicações. No capítulo anterior já tratamos a Conjectura 1. Assim, o objetivo deste capítulo será explorar aspectos básicos de trivialidade topológica e Whitney equisingularidade, afim de termos condições de apresentar os contra-exemplos (que são germes de aplicações de reflexão) dados por Ruas e Silva em [41] que mostram que a Conjetura 2 não é verdadeira, em geral.

Vale lembrar que nosso objeto de estudo desde o início são as aplicações de reflexão. Desta forma, no decorrer do capítulo omitiremos algumas demonstrações de resultados que surgirão, visto que fogem do objetivo do trabalho. No entanto, teremos o cuidado de deixar sempre boas referências para que o leitor possa consultar sempre que desejado.

3.1 Trivialidade topológica e Whitney equisingularidade

Nesta seção voltaremos nossas atenções a um breve estudo da trivialidade topológica e a Whitney equisingularidade de uma família de superfícies em $\mathbb{C}^3$, parametrizadas por germes de aplicações finitamente determinados. O intuito desta seção é de apresentar e descrever o necessário sobre a teoria e resultados preliminares sobre a trivialidade topológica e da Whitney equisingularidade para que possamos apresentar os contra-exemplos para a Conjectura 2, os quais são parte do nosso objetivo principal.

Vamos iniciar com a definição de desdobramento a 1-parâmetro de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$. O leitor pode checar as Definições 1.3.12 e 1.3.13 bem como o critério de Mather-Gaffney 1.3.14 para relembrar o conceito de determinação finita de um germe.

Definição 3.1.1. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado. Um desdobramento a 1-parâmetro de f é um germe de aplicação $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ da forma $F(x, y, t) = (f_t(x, y), t)$ tal que $f_t(0) = 0$ e $f_0 = f$.

Definição 3.1.2. Sejam $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado, $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento a 1-parâmetro de f dado por $F(x, t) = (f_t(x), t)$ e $I(x, t) = (f(x), t)$ o desdobramento trivial de f. Dizemos que F é topologicamente equisingular ou que F é topologicamente trivial se existem germes de homeomorfismos

$$G : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \text{ e } H : (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$$

tais que G e H são desdobramentos a 1-parâmetro de germes das aplicações identidade $g : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ e $h : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$, isto é,

$$G(x, t) = (g_t(x), t), g_0(x) = x, g_t(0) = 0$$
$$H(x, t) = (h_t(x), t), h_0(x) = x, h_t(0) = 0$$

e o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{F} & (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0) \\ \Big\downarrow G & & \Big\downarrow H \\ (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{I} & (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0) \end{array}$$

é comutativo.

Em geral, verificar se um desdobramento F de um germe de aplicação finitamente determinado de $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ é topologicamente trivial via definição não é uma tarefa simples. No entanto, Callejas-Bedregal, Houston e Ruas em [3] verificaram que um desdobramento a 1-parâmetro $F = (f_t, t)$ de um germe de aplicação finitamente

determinado f é topologicamente trivial se, e somente se, $\mu(D(f_t))$ é constante. Ressaltamos ainda que esta caracterização foi apresentada independentemente por Fernández de Bobadilla e Pe Pereira em [10]. Vejamos esta caracterização no teorema a seguir.

Teorema 3.1.3. Seja $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento a 1-parâmetro de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) F é topologicamente equisingular.

(2) $\mu(D(f_t))$ é constante.

Demonstração. Ver Teorema 6.2, p. 13 em [3] ou Corolário 32, p. 25 em [10]. □

Vamos agora tratar da Whitney equisingularidade de uma família de superfícies. Em [12], Gaffney introduziu a noção de desdobramento excelente e estes desdobramentos induzem estratificações naturais na fonte e na meta. Mais precisamente, considere um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ e um desdobramento excelente $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ de f. Desta forma,

$$\left\{\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \setminus D(F), D(F) \setminus T, T\right\}$$

e

$$\left\{\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \setminus F(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}), F(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}) \setminus F(D(F)), F(D(F)) \setminus T, T\right\}$$

são estratificações naturais na fonte e na meta, respectivamente, em que T é o eixo de parâmetros (que é suave). Observe que este último é obtido mapeando o primeiro por F, isto é, F mapeia os estratos da fonte em estratos na meta.

Na Seção 1.4, citamos o resultado de Whitney [47] que assegura que todo espaço analítico complexo admite uma estratificação satisfazendo as condições (a) e (b) de Whitney bem como a condição de fronteira, isto é, todo espaço analítico admite uma estratificação Whitney regular. Todavia, essa estratificação que Whitney obtém não assegura que a estratificação acima induzida pelo desdobramento F seja Whitney regular. Aqui estamos interessados nos casos nos quais a estratificação acima é Whitney regular, em que, neste caso, dizemos que F é Whitney equisingular.

Definição 3.1.4. Dizemos que F é Whitney equisingular se existe um representante de F que admite uma estratificação Whitney regular tal que as estratificações na fonte e na meta acima são Whitney equisingulares ao longo de T.

No Teorema 5.2, p. 58 em [14] (conhecido como segundo lema de isotopia de Thom para aplicações analíticas) tem-se que se um desdobramento F de f é Whitney equisingular, então F é topolgicamente trivial. No entanto, a recíproca não é verdadeira, em

geral. Por exemplo, em [20], Jorge-Pérez e Nuño-Ballesteros mostraram que o germe $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}^5, 0)$ definido por $f(x, y, z) = (x, y, z^2, z(xy), z(z^{12} + x^{15} + y^{10}))$ é tal que o desdobramento a 1-parâmetro $F = (f_t, t)$ de f com

$$f_t(x, y, z) = (x, y, z^2, z(xy - tz^2), z(z^{12} + x^{15} + y^{10}))$$

é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

Desta forma, uma pergunta natural que surge neste momento é: quais são as hipóteses necessárias para garantir que a trivialidade topológica de um desdobramento F de f implique na Whitney equisingularidade de F?

É conhecido do clássico resultado de Zariski em [52] que dada uma família de curvas planas $X \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$, então a trivialidade topológica de X é equivalente a Whitney equisingularidade de X, e o que nos dá essa equivalência é a constância do número $\mu(X_t)$. Ora, embora estejamos trabalhando com uma família de superfícies, observe que no Teorema 3.1.3 o que controla a trivialidade topológica de F é a constância do número de Milnor de uma família de curvas. Este fato motiva as ideias de Ruas em [39] que conjectura que, para germes de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$, a determinação finita é a única hipótese necessária para obtermos a equivalência entre trivialidade topológica e a Whitney equisingularidade de um desdobramento $F = (f_t, t)$ de f, e que a constância de $\mu(D(f_t))$ é o que nos dá essa equivalência. Veremos mais detalhes da Conjectura 2 em 3.3.

3.2 Componentes de dobra e de identificação de $D(f)$

Nesta seção apresentaremos dois conceitos introduzidos por Silva [42] em sua tese, que apresenta os tipos de componentes irredutíveis que podem surgir na curva de pontos duplos $D(f)$ para um germe de aplicação $\mathcal{A}$-finito $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$. Estas componentes irredutíveis são ditas componentes de dobra ou componentes de identificação de $D(f)$. Estes conceitos serão de extrema importância na construção dos contra-exemplos para a Conjectura 2 nos mostrando a motivação para certas construções.

Inicialmente, lance mão de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$. Sabemos que a restrição de f à curva de pontos duplos $D(f)$ $f|D(f) : D(f) \to \mathbb{C}^3$ é uma aplicação genericamente 2-a-1. Agora considere $D(f)^j$ uma componente irredutível de $D(f)$ e observe que a restrição $f|_{D(f)^j} : D(f)^j \to \mathbb{C}^3$ é tal que existem duas possibilidades para a componente irredutível $D(f)^j$, que são:

Definição 3.2.1. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente de-

terminado e considere $D(f)^j$ uma componente irredutível da curva de pontos duplos $D(f)$. Então

(1) Se a restrição $f|_{D(f)^j} : D(f)^j \to \mathbb{C}^3$ é uma aplicação genericamente 1-a-1, então dizemos que $D(f)^j$ é uma componente de identificação de $D(f)$. Além disso, neste caso deve existir uma componente irredutível $D(f)^i$ de $D(f)$ com $i \neq j$ de modo que $f(D(f)^j) = f(D(f)^i)$.

(2) Se a restrição $f|_{D(f)^j} : D(f)^j \to \mathbb{C}^3$ é uma aplicação genericamente 2-a-1, então dizemos que $D(f)^j$ é uma componente de dobra de $D(f)$.

Analisaremos a seguir três exemplos que mostram que estas componentes irredutíveis, de fato, podem surgir. No primeiro exemplo, veremos um caso em que $D(f)$ só admite componentes de identificação, no segundo exemplo só teremos a presença de componentes de dobra e no terceiro exemplo veremos que $D(f)$ pode ter componentes tanto de identificação quanto de dobra.

Exemplo 3.2.2. Considere o germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ dado por $f(x, y) = (x, y^2, x^2y - y^7)$. Verifica-se que $D(f) = V(x^2 - y^6) = V(x - y^3) \cup V(x + y^3)$. Daí, como $\mu(D(f)) = 5$, segue da Proposição 1.6.3 que f é finitamente determinado. Agora observe que $D(f)$ possui duas componentes irredutíveis, a saber: $D(f)^1 = V(x - y^3)$ e $D(f)^2 = V(x + y^3)$. Além disso, quando restrita à $D(f)^j$, com $j = 1, 2$, tem-se que

$$f|_{D(f)^1}(y^3, y) = (y^3, y^2, 0) \text{ e } f|_{D(f)^2}(-y^3, y) = (-y^3, y^2, 0),$$

donde f é genericamente 1-a-1 e observe que estas restrições são parametrizações da mesma curva, basta fazer a mudança de coordenadas $y \mapsto -y$ em $f|_{D(f)^2}$. Com isso,

$$f(D(f)^1) = f(D(f)^2) = V(X^2 - Y^3, Z) = f(D(f)).$$

Portanto, neste caso, podemos pensar que f "identifica" as componentes $D(f)^1$ e $D(f)^2$ em uma curva em $\mathbb{C}^3$, o que justifica o nome deste tipo de componente (veja a Figura 3.1).

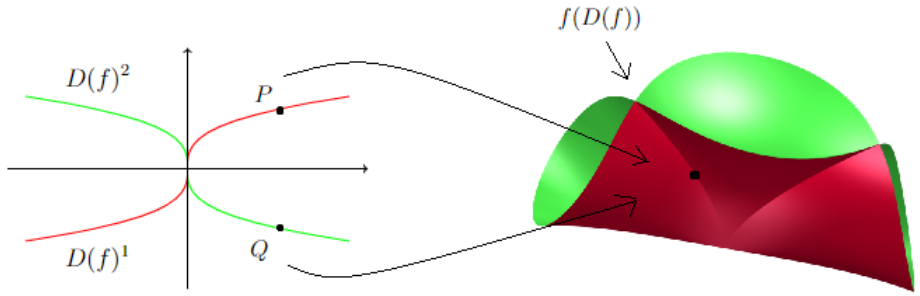


Figura 3.1: Componente de identificação de $D(f)$

Exemplo 3.2.3. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação dado por $f(x, y) = (x, y^2, xy)$. Um cálculo simples mostra que $D(f) = V(x)$ e que $\mu(D(f)) = 0$, isto é, $D(f)$ é suave. Assim, pela Proposição 1.6.3, temos f finitamente determinado. Ainda sobre $D(f)$, observe que $D(f)$ é irredutível e, portanto, a restrição de f a $D(f)$ é necessariamente 2-a-1. Desta forma, podemos pensar que a restrição de f a $D(f)^j$ quando estamos trabalhando com componentes de dobra é uma aplicação de recobrimento duplo não ramificado fora da origem, dando sentido à escolha do nome dado para estas componentes (veja a Figura 3.2).

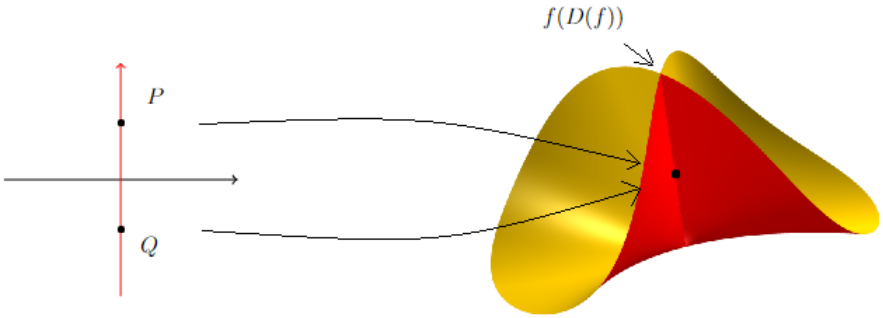


Figura 3.2: Componente de dobra de $D(f)$

Exemplo 3.2.4. Considere a aplicação $f(x, y) = (x, y^2, xy^3 - x^3y)$. Neste exemplo tem-se que

$$D(f) = V(xy^2 - x^3) = V(x) \cup V(x + y) \cup V(x - y)$$

e $\mu(D(f)) = 4$. Desta forma, a Proposição 1.6.3 assegura que f é finitamente determinado. Além disso, observe que $D(f)$ possui três componentes irredutíveis, a saber:

$$D(f)^1 = V(x), D(f)^2 = V(x + y) \text{ e } D(f)^3 = V(x - y).$$

Quando restrita a $D(f)^1$, tem-se que f é genericamente 2-a-1, pois $f(0, y) = (0, y^2, 0)$.

Por outro lado, restringindo f às componentes $D(f)^2$ e $D(f)^3$, temos

$$f|_{D(f)^2}(y,y) = (y, y^2, 0) \text{ e } f|_{D(f)^3}(-y,y) = (-y, y^2, 0)$$

e segue que f é genericamente 1-a-1 e que estas restrições são parametrizações de uma mesma curva, basta fazer $y \mapsto -y$ em $f|_{D(f)^3}$ para checar. Com isso,

$$f(D(f)^1) = V(Y - X^2, Z) = f(D(f)^2).$$

Portanto, $D(f)^1$ é uma componente de dobra de $D(f)$ enquanto $D(f)^2$ e $D(f)^3$ são componentes identificação (veja a Figura 3.3).

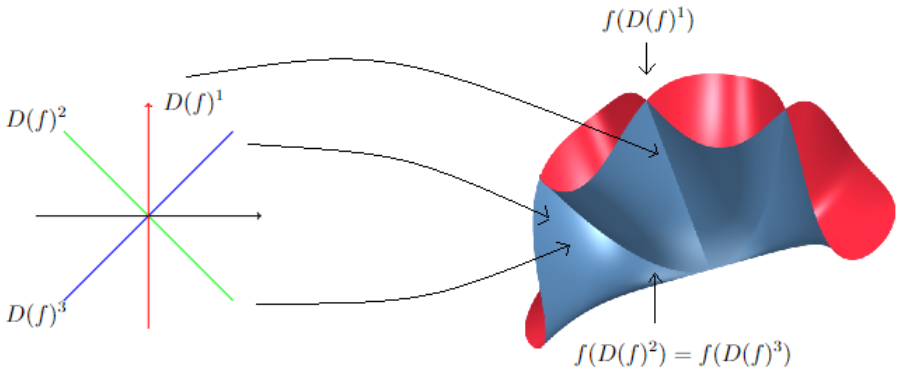


Figura 3.3: Componentes de identificação e de dobra de $D(f)$

3.3 A conjectura de Ruas

Estamos em condições de apresentar a conjectura de Ruas. Para iniciarmos esta seção, é conhecido do clássico resultado de Zariski em [52] que dada uma família de curvas planas $X \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ então a trivialidade topológica de X é equivalente a Whitney equisingularidade de X, em que o único invariante necessário e suficiente para caracterizar a Whitney equisingularidade dessa família é o número de Milnor das curvas X_t dessa família.

Uma pergunta natural que surge neste momento é: dada uma família de hipersuperfícies $X \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, sobre quais condições a trivialidade topológica de X é equivalente a Whitney equisingularidade de X?

Na seção anterior já vimos que o segundo lema de isotopia de Thom assegura que a Whitney equisingularidade de um desdobramento F a 1-parâmetro de um germe de aplicação f implica na trivialidade topológica de F e já sabemos que, em geral, a recíproca não é verdadeira. Visando encontrar hipóteses para garantir que a recíproca

fosse verdadeira, em 1994, Ruas [39] conjecturou que para o caso de uma família X_t de hipersuperfícies em $\mathbb{C}^3$ parametrizadas por aplicações finitamente determinadas a trivialidade topológica de X é equivalente a Whitney equisingularidade de X. Além disso, o único invariante necessário e suficiente para caracterizar a Whitney equisingularidade de X é o número de Milnor da curva de pontos duplos $D(f_t)$. Uma versão da conjectura de Ruas pode ser enunciada da seguinte forma:

Conjectura 2 (Ruas)**.** Sejam $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento a 1-parâmetro de f. São equivalentes:

(a) F é Whitney equisingular.

(b) F é topologicamente trivial.

(c) $\mu(D(f_t))$ é constante.

A equivalência entre (b) e (c) na Conjectura 2 foi resolvida por Callejas-Bedregal, Houston e Ruas no ano de 2006 em um trabalho não publicado (veja [3]) e, dois anos mais tarde, Fernández de Bobadilla e Pe Pereira apresentaram uma segunda prova em [10]. Entretanto, a equivalência entre (a) e (b) na Conjectura 2 permaneceu sem resposta por quase 25 anos. Tentativas sem sucesso de provar esta conjectura foram apresentadas por Callejas-Bedregal, Houston e Ruas [3] em 2006, Ruas [40] em 2013 e indiretamente por Marar e Nuño-Ballesteros em [25], em que tentaram estudar o caso particular de coposto 1 com o desenvolvimento do invariante J. Até que, no ano de 2016, Ruas e Silva [41] (veja também [42]) exibiram alguns contra-exemplos para o problema, mostrando, assim, que a conjectura não é verdadeira, em geral.

Aqui veremos alguns destes contra-exemplos tanto no caso de coposto 1 quanto no caso de coposto 2 e buscaremos apresentar uma ideia de como surgiram as inspirações para obtê-los através do conceitos de componentes de dobra e de identificação introduzidos por Silva em sua tese [42] e com a utilização da pré-imagem de planos genéricos de f.

O lema a seguir é de extrema importância para a determinação da Whitney equisingularidade de um desdobramento F. Vejamos o Lema.

Lema 3.3.1. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado. Se $H_0 \subset \mathbb{C}^3$ é um plano genérico para f, $Y_0 = H_0 \cap f(\mathbb{C}^2)$ e $\tilde{Y_0}$ é a curva plana em $\mathbb{C}^2$ dada por $\tilde{Y_0} = f^{-1}(H_0)$, então

(1) $m_1(f(\mathbb{C}^2), 0) = \mu(\tilde{Y_0}, 0) + m_0(f(\mathbb{C}^2), 0) - 1$,

(2) $\mu_1(f(\mathbb{C}^2), 0) = \mu(\tilde{Y_0}, 0) + 2 \cdot m_0(f(D(f)), 0)$,

em que m_1 e μ_1 denotam a primeira multiplicidade polar e o número de Milnor transversal, respectivamente, os quais foram definidos na Seção 1.7.

Demonstração. Ver Lema 5.2, p. 534 em [26]. □

O próximo teorema nos dá uma caracterização para a Whitney equisingularidade de uma família f_t pela constância dos invariantes $\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2), 0)$ e $\mu(D(f_t))$.

Teorema 3.3.2. Sejam $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e F um desdobramento a 1-parâmetro de f. Então F é Whitney equisingular se, e somente se, $\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2), 0)$ e $\mu(D(f_t))$ são constantes.

Demonstração. Ver Teorema 5.3, p. 534 em [26]. □

Vale ressaltar que estamos interessados em apresentar um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ e um desdobramento F de f tal que F seja topologicamente trivial mas que não seja Whitney equisingular. Desta forma, dado um germe f dentro das hipóteses, precisamos inicialmente garantir que o desdobramento F seja topologicmanete trivial.

Para o caso em que f é quase-homogênea, Damon [6] mostrou que se F adiciona apenas termos de graus maiores ou iguais ao das funções coordenadas de f para cada uma dessas funções, então F é topologicamente trivial (veja Teorema 1, p. 381 em [6]). Neste sentido, se consideramos germes de aplicações finitamente determinados quase-homogêneos, temos uma maneira simples de obter a trivialidade topológica de F.

Vamos começar com o caso de coposto 1. Pelo Teorema 3.3.2, queremos apresentar uma familía $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ de germes finitamente determinados como acima de modo que $\mu(\tilde{Y}_t, 0)$ ou $m_0(f(D(f_t)), 0)$ não seja constante. Entretanto, temos o

Lema 3.3.3. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação holomorfa genericamente 1-a-1 sobre sua imagem. Então

$$f \text{ tem coposto } 1 \iff \mu(\tilde{Y}_0, 0) = 0.$$

Demonstração. Ver Lema 4.24, p. 79 em [42]. □

Em particular, se f é finitamente determinado, então o Lema anterior é verdadeiro. Agora suponha que f é finitamente determinado, quase-homogêneo e de coposto 1. Escrevendo f na sua forma normal $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$ com $p, q \in \mathfrak{m}_2^2$, em que $\mathfrak{m}_2^2$ denota o quadrado do maximal de $\mathcal{O}_2$, sabemos que adicionando termos de graus maiores ou iguais aos das funções coordenadas de f, obtemos uma família f_t

topologicamente trivial. No entanto, $\mu(\tilde{Y}_t, 0) = 0$ para todo t, visto que f é de coposto 1. Desta forma, se quisermos produzir um contra-exemplo para a conjectura nessa classe de germes, precisamos de um desdobramento F tal que a multiplicidade de $(f_t(D(f_t)), 0)$ varie.

Outro resultado muito importante e que nos ajudará com contra-exemplos para coposto 1 é o seguinte Teorema:

Teorema 3.3.4. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado, homogêneo de coposto 1. Escreva f na forma $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$ e denote por n e m os graus de p e q, respectivamente, com $2 \leq n \leq m$. Então

(1) $D(f)$ é um germe de curva com d ramos suaves em que $d = nm - n - m + 1$ e

$$D(f) = V\left(\prod_{i=1}^{d}(x - \alpha_i y)\right)$$

com $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

(2) d é ímpar se, e somente se, n e m são ambos pares.

(3) Se n e m são ambos pares, então $mdc(m, n) = 2$, caso contrário, f não é finitamente determinado. Neste caso, $D(f)$ tem $d - 1$ componentes de identificação e $D(f)^j = V(x)$ é a única componente de dobra de $D(f)$ e

$$m_0(f(D(f))) = \frac{nm - m}{2} \text{ e } \mu_1(f(\mathbb{C}^2)) = nm - m.$$

(4) Se n ou m é ímpar, então todas as d componentes de $D(f)$ são de identificação. Neste caso,

$$m_0(f(D(f))) = \frac{nm - n - m + 1}{2} \text{ e } \mu_1(f(\mathbb{C}^2)) = nm - n - m + 1.$$

Demonstração. Ver Proposição 6.2, p. 365 em [41] ou Proposição 4.37, p. 97 em [42]. □

Antes de trabalharmos com os contra-exemplos, de fato, vamos apresentar uma proposição que nos permite encontrar uma função $\lambda(x, y) \in \mathcal{O}_2$ que define $D(f)$, isto é, $D(f) = V(\lambda(x, y))$, e um lema que nos ajudará a calcular a multiplicidade das imagens das componentes irredutíveis de $D(f)$. Vale ressaltar que a proposição a seguir é uma reformulação dos resultados de Piene em [38] para o contexto que estamos trabalhando. O leitor pode conferir o Teorema 1 e seus Corolários em [38], p. 510, para conferir o resultado em questão.

Proposição 3.3.5. Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de aplicação finito e considere a imagem de f como um germe de hipersuperfície em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ definida pelos zeros de $\mathcal{F} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Suponha ainda que f é uma imersão em $\mathbb{C}^n \setminus A$, em que A é um subconjunto de $\mathbb{C}^n$ de codimensão 2. Então para algum germe de função holomorfa $\lambda : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ temos $\lambda\Delta_i = \pm\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_i}$, em que Δ_i é o determinante da matriz obtida deletando a i-ésima linha da matriz Jacobiana de f. Além disso, $\lambda(x, y) = 0$ é uma função que define a hipersuperfície de pontos duplos $D(f) \subset \mathbb{C}^n$.

Demonstração. Ver Proposição 2.5, p. 3634 em [1]. □

Em particular, se $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ dada por $f(x, y) = (X(x, y), Y(x, y), Z(x, y))$ é um germe de aplicação finito, então uma aplicação $\lambda(x, y)$ que define $D(f)$ é dada por $\mathcal{F}_Z^*/\eta$, em que $\mathcal{F}_Z^*$ é a derivada parcial de $\mathcal{F}(X, Y, Z)$ em relação a Z restrita à imagem de f, ou seja, $\mathcal{F}_Z^* = \mathcal{F}_Z(X(x, y), Y(x, y), Z(x, y))$ e η é o determinante 2×2 da matriz Jacobiana de X e Y

$$\eta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Observe ainda que o conjunto A do Teorema anterior para este caso particular é um conjunto finito contendo a origem. Desta forma, como estamos interessados em estudar em uma vizinhança da origem, podemos admitir que A contém apenas a origem.

Lema 3.3.6. Seja $\alpha : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação holomorfa dada por

$$\alpha(t) = (a_1 t^{m_1}, \ldots, a_n t^{m_n})$$

em que U é uma vizinhança aberta suficientemente pequena contendo a origem em $\mathbb{C}$. Então α é uma aplicação genericamente d-a-1 sobre sua imagem, em que

$$d = mdc(m_1, \ldots, m_n).$$

Demonstração. Ver Lema 6.1, p. 365 em [41] ou Lema 4.36, p. 96 em [42]. □

Em [41], p. 365, o leitor pode conferir a Tabela 1 com os contra-exemplos apresentados por Ruas e Silva para a conjectura 2. Foram exibidos contra-exemplos tanto para o caso de coposto 1 quanto para o caso de coposto 2. Em particular, o primeiro contra-exemplo encontrado para a conjectura foi para o caso de coposto 2 e é dado pela família

$$f_t(x, y) = (x^2 + txy, x^2y + xy^2 + y^3, x^5 + y^5).$$

Além disso, o primeiro contra-exemplo encontrado para o caso de coposto 1 é dado pela família

$$f_t(x,y) = (x, y^4, x^5y + xy^5 + ty^7).$$

O leitor pode conferir o Capítulo 4 da tese de Silva [42] para estudar estes contra-exemplos. Aqui não trabalharemos com estes contra-exemplos que já foram bastante explorados em [42]. Apresentaremos outras famílias de germes contidas na tabela citada e faremos a demonstração de que, de fato, estas famílias fornecem contra-exemplos para a conjectura 2. Vejamos um dos primeiros contra-exemplos de coposto 1:

Proposição 3.3.7. Seja $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ uma família de germes de aplicação dada por

$$f_t(x,y) = (x, y^4, x^9y + xy^9 + y^{10} + ty^{11}).$$

Então $f = f_0$ é finitamente determinado e o desdobramento $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

Demonstração. Inicialmente mostraremos que f é finitamente determinado. Para isto, com o auxílio do Software Singular [48], vamos encontrar uma matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo e utilizar a Proposição 3.3.5 para determinar $D(f)$. Nesta demontração vamos inserir um passo a passo do código que utilizamos no Singular para encontrar tal matriz, bem como a curva de pontos duplos $D(f)$. Começamos declarando os anéis

R=0,(X,Y,Z),ds; r=0,(x,y),ds;

em que (x, y) é um sistema de coordenadas na fonte e (X, Y, Z) é um sistema de coordenadas na meta. Na sequência, declaramos o ideal I e o mapa f

ideal I=0; map f=R,x,y4,x9y+xy9+y10;

e após adicionar a livraria presmatrix.lib, que pode ser encontrada em [37], podemos utilizá-la para encontrar a matriz de apresentação $M(f)$ de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo da seguinte forma:

LIB "presmatrix.lib"; presmatrix(f,I);

Então, a matriz de apresentação em questão é

$$M(f) = \begin{bmatrix} Z & -XY^2 - X^9 & -Y^2 & 0 \\ 0 & Z & -XY^2 - X^9 & -Y^2 \\ -Y^3 & 0 & Z & -XY^2 - X^9 \\ -X^9Y & -Y^3 & 0 & Z \end{bmatrix}.$$

Voltando ao Singular, sabemos que o ideal de Fitting $F_0(f)$ é dado pelo determinante de $M(f)$. Com o intuito de exibir uma equação para $D(f)$, vamos determinar $F_0(f)$ e calcular sua derivada em relação a variável Z. Antes de exibir o ideal $F_0(f)$, precisamos utilizar o anel RTPr (que é criado automaticamente quando inserimos o código presmatrix) para conseguir operar com a matrix de apresentação, que no Singular é nomeada por PM. Deste modo, o código

setring RTPr;

informa que estamos trabalhando com o anel RTPr e com o código

ideal F0=det(PM); F0;

obtemos

$$\begin{aligned} F_0(f) &= \langle Z^4 - 2Y^5Z^2 + Y^{10} - 4X^2Y^7Z - X^4Y^9 - 8X^{10}Y^5Z - 4X^{12}Y^7 \\ &\quad -4X^{18}Y^3Z - 6X^{20}Y^5 - 4X^{28}Y^3 - X^{36}Y\rangle. \end{aligned}$$

Denote por $\mathcal{F}(X,Y,Z)$ o gerador de $F_0(f)$ e utilizemos o código

ideal k=diff(F0,Z); k;

para encontrar sua derivada em relação a Z, que é dada por

$$\mathcal{F}_Z = 4Z^3 - 4Y^5Z - 4X^2Y^7 - 8X^{10}Y^5 - 4X^{18}Y^3.$$

Na sequência precisamos olhar para $\mathcal{F}_Z$ restrita à imagem de f. No Singular, vamos inserir um novo anel que possua todas as variáveis pequenas e grandes e, então, poderemos fazer a restrição desejada. O código que pode realizar esta tarefa é

ring r1=0,(X,Y,Z,x,y),ds; ideal k=imap(RTPr,k);
ideal j=subst(k,X,x,Y,y4,Z,x9y+xy9+y10); j;

em que j é a restrição de $\mathcal{F}_Z$ à imagem de f, e é dada por

$$\mathcal{F}_Z^* = 4x^{27}y^3+12x^{19}y^{11}+8x^{18}y^{12}+12x^{11}y^{19}+16x^{10}y^{20}+8x^9y^{21}+4x^3y^{27}+8x^2y^{28}+8xy^{29}.$$

Seguindo, se $\eta(x,y)$ é o determinante da matriz Jacobiana de $(X(x,y),Y(x,y)) = (x,y^4)$, verifica-se facilmente que $\eta(x,y) = 4y^3$. Caso este determinante não fosse simples de ser calculado, podemos fazer uso do Singular mais uma vez para efetuar este cálculo. Uma maneira de fazer isso é abrir um novo terminal do Software e utilizar o seguinte código:

LIB "sing.lib"; ring r=0,(x,y),ds; ideal i=(x,y4); matrix jacob(i); ideal j=det(M); j;

Portanto, uma função $\lambda(x,y)$ tal que $D(f) = V(\lambda(x,y))$ é dada por $\lambda(x,y) = \mathcal{F}_Z^*/\eta$ e pode ser calculada no Software com o código a seguir

ideal j1=(j[1])/(4y3); j1;

e segue que

$$\lambda(x,y) = x^{27} + 3x^{19}y^8 + 2x^{18}y^9 + 3x^{11}y^{16} + 4x^{10}y^{17} + 2x^9y^{18} + x^3y^{24} + 2x^2y^{25} + 2xy^{26}.$$

Novamente com o auxílio do Singular, verifica-se que $\mu(D(f)) = 676$ da seguinte maneira

ring r2=0,(x,y),ds; ideal j1=imap(r1,j1); milnor(j1);

e segue da Proposição 1.6.3 que f é finitamente determinado. Além disso, como f_t adiciona apenas um termo de grau 11 na terceira função coordenada de f que tem grau 10, donde concluímos que $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial pelo resultado de Damon [6]. Por fim, mostraremos que F não é Whitney equisingular. Com efeito, pelo item (3) do Teorema 3.3.4 para $n = 4$ e $m = 10$, temos $\mu_1(f(\mathbb{C}^2), 0) = 30$. Agora vamos encontrar uma matriz de apresentação de $f_{t*}(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo e recordar que $f_t(\mathbb{C}^2) = V(F_0(f_t))$. Utilizando o Singular, se $M(f_t)$ é uma matriz de apresentação de $f_{t*}(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo, então

$$M(f_t) = \begin{bmatrix} Z & -XY^2 - X^9 & -Y^2 & -tY^2 \\ -tY^3 & Z & -XY^2 - X^9 & -Y^2 \\ -Y^3 & -tY^3 & Z & -XY^2 - X^9 \\ -X^9Y & -Y^3 + tXY^3 & -XZ - tY^3 & Z + X^2Y^2 + X^{10} \end{bmatrix}.$$

Como a imagem de f_t é dada por $f_t(\mathbb{C}^2) = V(\det(M(f_t)))$, temos

$$\begin{aligned} f_t(\mathbb{C}^2) \;=\; & V(Z^4 - 2Y^5Z^2 - 4tXY^5Z^2 - 4t^2Y^8Z + Y^{10} - 4X^2Y^7Z - 4tXY^{10} - t^4Y^{11} \\ & +2t^2X^2Y^{10} - X^4Y^9 - 4tX^9Y^3Z^2 - 8X^{10}Y^5Z - 4tX^9Y^8 + 4t^2X^{10}Y^8 \\ & -4X^{12}Y^7 - 4X^{18}Y^3Z + 2t^2X^{18}Y^6 - 6X^{20}Y^5 - 4X^{28}Y^3 - X^{36}Y). \end{aligned}$$

Agora observe que o plano H dado por $X - Y = 0$ é genérico para f_t. Daí,

$$\begin{aligned} H \cap f_t(\mathbb{C}^2) &= V(Z^4 - 2X^5Z^2 - 4tX^6Z^2 - 4t^2X^8Z + X^{10} - 4X^9Z - 4tX^{11} - t^4X^{11} \\ &\quad +2t^2X^{12} - X^{13} - 4tX^{12}Z^2 - 8X^{15}Z - 4tX^{17} + 4t^2X^{18} - 4X^{19} \\ &\quad -4X^{21}Z + 2t^2X^{24} - 6X^{25} - 4X^{31} - X^{37}), \end{aligned}$$

donde segue da definição do número de Milnor transversal que

$$\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2), 0) = \mu(H \cap f_t(\mathbb{C}^2), 0) = 28,\ t \neq 0.$$

Portanto, $\mu_1(f(\mathbb{C}^2), 0) = 30$ enquanto $\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2), 0) = 28$ para $t \neq 0$. Logo, pelo Teorema 3.3.2 concluímos que $F = (f_t, t)$ não é Whitney equisingular, o que finaliza a prova. □

Aqui apresentamos um primeiro contra-exemplo para a Conjectura 2, em que o germe de aplicação f utilizado é um germe de aplicação de reflexão com aplicação de órbita $\omega(x, y, z) = (x, y^4, z)$ e mergulho $h(x, y) = (x, y, x^9y + xy^9 + y^{10})$. Outro fato que merece ser observado é sobre a multiplicidade das imagens das componentes irredutíveis de $D(f)$ após a deformação. Do Lema 3.3.6, podemos observar também que o mdc dos $m_i's$ mede o grau da parametrização, de modo que podemos fazer uma reparametrização com $t \mapsto t^{1/d}$ e obter uma aplicação $\tilde{\alpha}$ que seja genericamente 1-a-1, isto é, a curva passa a ter uma parametrização primitiva. Além disso, a multiplicidade da sua imagem com estrutura reduzida é dada pelo $\min\{m_i/d \mid i = 1, \ldots, n\}$.

Ora, já sabemos do Teorema 3.3.4 que $D(f)^1 = V(x)$ é a única componente de dobra de $D(f)$ na Proposição 3.3.7 e que o número de componentes irredutíveis de $D(f)$ é 27. Daí, $D(f)^j$ é uma componente de identificação para todo $j = 2, \ldots, 27$ (veja a Figura 3.4).

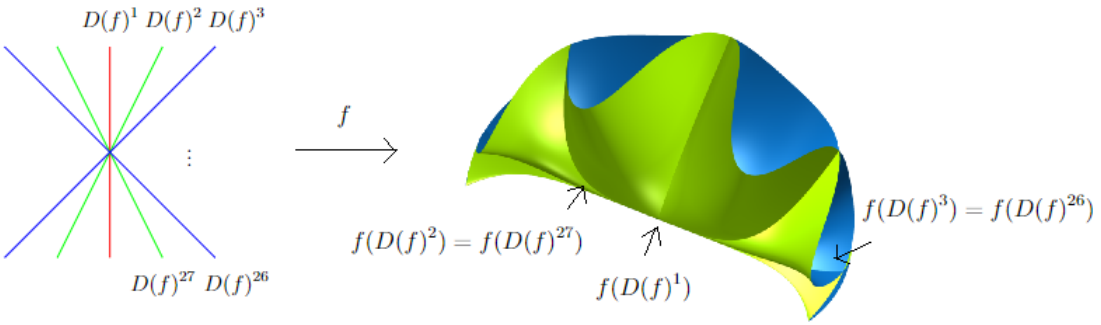


Figura 3.4: Ilustração das 27 componentes de $D(f)$ e suas respectivas imagens

Em $D(f)^1$ considere a parametrização $\gamma_1(u) = (0, u)$ e note que

$$f \circ \gamma_1(u) = (0, u^4, u^{10})$$

é, pelo Lema 3.3.6, uma aplicação genericamente 2-a-1 e a multiplicidade da imagem com estrutura reduzida é 2, pelo que acabamos de comentar. Ou seja,

$$m_0(f(D(f)^1)) = m_0((f \circ \gamma_1)(\mathbb{C})) = 2.$$

Para as componentes $D(f)^j = V(x - \alpha_j y)$ com $j = 2, \ldots, 27$, considere uma parametrização $\gamma_j(u) = (\alpha_j u, u)$ e note que $f \circ \gamma_j(u) = (\alpha_j u, u^4, (\alpha_j^9 + \alpha_j + 1)u^{10})$ que é uma aplicação genericamente 1-a-1, via Lema 3.3.6. Portanto,

$$m_0(f(D(f)^j)) = m_0((f \circ \gamma_j)(\mathbb{C})) = 1.$$

Sendo a multiplicidade aditiva e que para cada $j \in \{2, \ldots, 27\}$ deve existir $i \neq j$ em $\{2, \ldots, 27\}$ tal que $f(D(f)^j) = f(D(f)^i)$, então

$$m_0(f(D(f)) = m_0(f(D(f)^1) + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{27} m_0(f(D(f)^j)) = 15.$$

No entanto, quando fizemos a deformação em f a componente $D(f)^1$ sofre uma deformação tal que sua imagem por f_t passa a ter multiplicidade 1. De fato, pelo Lema 3.3.3, tem-se que $\mu(\tilde{Y}_t) = 0$ para todo t, e dos valores que obtemos para o número de Milnor transversal de $f(\mathbb{C}^2)$ e $f_t(\mathbb{C}^2)$ com $t \neq 0$ na Proposição 3.3.7 unidos ao Teorema 3.3.1, concluímos que $m_0(f(D(f))) = 15$ enquanto $m_0(f_t(D(f_t))) = 14$ para $t \neq 0$. Um cálculo análogo ao que fizemos para as componentes de identificação de f, após a deformação, a multiplicidade da imagem das componentes $D(f_t)^j, j = 2, \ldots, 27$, são todas iguais a 1. Usando a aditividade da multiplicidade, concluímos que $m_0(f_t(D(f_t)^1)) = 1$, como havíamos afirmado.

Esta diminuição da multiplicidade da imagem de uma das componentes irredutíveis de $D(f)$ após a deformação já é suficiente para garantir que a multiplicidade de $f_t(D(f_t))$ não é constante, visto que o número de componentes irredutíveis de $D(f_t)$ é o mesmo de $D(f)$ pela trivialidade topológica, a aditividade da multiplicidade e o fato de que a multiplicidade e o número de Milnor possuírem a propriedade de serem semicontínuos superiormente (isto é, a multiplicidade e o número de Milnor são não-crescentes após uma deformação), nos permite concluir que o número de Milnor transversal de $f(\mathbb{C}^2)$ não é constante. Desta forma o desdobramento não é Whitney equisingular.

Para estes casos em que a multiplicidade varia, esta é uma das motivações para a construção dos contra-exemplos para a conjectura: encontrar uma deformação que faça com que a multiplicidade da imagem de uma das componentes irredutíveis da curva de pontos duplos varie após a deformação. Para este mesmo germe de aplicação finitamente determinado f da Proposição 3.3.7 podemos considerar a família dada por

$$f_t(x,y) = (x + ty^2, y^4, x^9y + xy^9 + y^{10})$$

e notar que $V(x)$ também é componente de dobra para $D(f_t)$. Daí, escolhendo a parametrização $\gamma(u) = (0,u)$ para esta componente, temos $f_t \circ \gamma(u) = (tu^2, u^4 + u^{10})$. Do Lema 3.3.6, a aplicação $f_t \circ \gamma$ é genericamente 2-a-1 e a multiplicidade da imagem, considerando a estrutura reduzida, é 1. Ou seja,

$$m_0(f_t(V(x))) = m_0((f_t \circ \gamma)(\mathbb{C})) = 1.$$

Mas $m_0(f(V(x))) = 2$, como já havíamos mostrado. Deste modo, esta deformação também é uma maneira de mostrar que $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular. Todavia, fazendo uma mudança de coordenadas em que $x \mapsto x - ty^2$ e $y \mapsto y$, verifica-se que f_t assume a forma

$$f_t = (x, y^4, x^9y + xy^9 + y^{10} + t \cdot (\text{tmg})),$$

em que "tmg" denota os termos de grau maiores ou iguais a 11. Com isso, esta nova deformação essencialmente é o mesmo tipo de deformação da Proposição 3.3.7 a menos de uma mudança de coordenadas.

Na próxima proposição mostraremos que a família

$$f_t(x,y) = (x + ty^2, y^6, x^7y + xy^7 + y^8)$$

também nos fornece um contra-exemplo para a conjectura 2 dentro da classe de germes de aplicação de coposto 1.

Proposição 3.3.8. Seja $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ uma família de germes de aplicação dada por

$$f_t(x,y) = (x + ty^2, y^6, x^7y + xy^7 + y^8).$$

Então $f = f_0$ é finitamente determinado e o desdobramento $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

Demonstração. A demonstração desta Proposição se dá de modo análogo à Proposição 3.3.7. Iniciaremos com a verificação de que f é finitamente determinado. Com o auxílio

do Software Singular [48], encontraremos uma matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo e na sequência faremos uso da Proposição 3.3.5 para determinar $D(f)$. Sejam (x,y) um sistema de coordenadas na fonte, (X,Y,Z) um sistema de coordenadas na meta e $M(f)$ a matriz de apresentação desejada. Então

$$M(f)=\begin{bmatrix} Z & -XY-X^7 & -Y & 0 & 0 & 0\\ 0 & Z & -XY-X^7 & -Y & 0 & 0\\ 0 & 0 & Z & -XY-X^7 & -Y & 0\\ 0 & 0 & 0 & Z & -XY-X^7 & -Y\\ -Y^2 & 0 & 0 & 0 & Z & -XY-X^7\\ -X^7Y & -Y^2 & 0 & 0 & -XZ & Z+X^2Y+X^8 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $\mathcal{F}(X,Y,Z)=\det(M(f))$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(X,Y,Z) &= Z^6-2Y^4Z^3+Y^8-9X^2Y^5Z^2-6X^4Y^6Z-X^6Y^7-18X^8Y^4Z^2\\ &\quad -24X^{10}Y^5Z-6X^{12}Y^6-9X^{14}Y^3Z^2-36X^{16}Y^4Z-15X^{18}Y^5\\ &\quad -24X^{22}Y^3Z-20X^{24}Y^4-6X^{28}Y^2Z-15X^{30}Y^3-6X^{36}Y^2\\ &\quad -X^{42}Y\end{aligned}$$

e sua derivada em relação a variável Z é

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Z &= 6Z^5-6Y^4Z^2-18X^2Y^5Z-6X^4Y^6-36X^8Y^4Z-24X^{10}Y^5-18X^{14}Y^3Z\\ &\quad -36X^{16}Y^4-24X^{22}Y^3-6X^{28}Y^2.\end{aligned}$$

Restringindo F_Z à imagem de f, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Z^* &= 6x^{35}y^5+30x^{29}y^{11}+24x^{28}y^{12}+60x^{23}y^{17}+96x^{22}y^{18}+42x^{21}y^{19}+60x^{17}y^{23}\\ &\quad +144x^{16}y^{24}+126x^{15}y^{25}+36x^{14}y^{26}+30x^{11}y^{29}+96x^{10}y^{30}+126x^9y^{31}\\ &\quad +72x^8y^{32}+18x^7y^{33}+6x^5y^{35}+24x^4y^{36}+42x^3y^{37}+36x^2y^{38}+18xy^{39}\end{aligned}$$

Agora, se $\eta(x,y)$ é o determinante da matriz Jacobiana de $(X(x,y),Y(x,y))=(x,y^6)$, verifica-se facilmente que $\eta(x,y)=6y^5$. Portanto, uma função $\lambda(x,y)$ tal que $D(f)=V(\lambda(x,y))$ é dada por

$$\begin{aligned}\lambda(x,y)=\mathcal{F}_Z^*/\eta &= x^{35}+5x^{29}y^6+4x^{28}y^7+10x^{23}y^{12}+16x^{22}y^{13}+7x^{21}y^{14}+10x^{17}y^{18}\\ &\quad +24x^{16}y^{19}+21x^{15}y^{20}+6x^{14}y^{21}+5x^{11}y^{24}+16x^{10}y^{25}+21x^9y^{26}\\ &\quad +12x^8y^{27}+3x^7y^{28}+x^5y^{30}+4x^4y^{31}+7x^3y^{32}+6x^2y^{33}+3xy^{34}.\end{aligned}$$

Utilizando o Singular, verifica-se que $\mu(D(f))=1556$ e segue da Proposição 1.6.3 que f é finitamente determinado. Perceba agora que f_t adiciona apenas um termo de grau

2 na primeira função coordenada de f que possui grau 1. Desta forma, $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial. Mostraremos, por fim, que F não é Whitney equisingular. De fato, uma maneira de ver que F não é Whitney equisingular é calculando a multiplicidade da imagem das componentes irredutíveis de $D(f)$ e mostrar que a multiplicidade da imagem de $D(f)$ não é constante. Pelo Teorema 3.3.4 para $n = 6$ e $m = 8$, tem-se $m_0(f(D(f))) = 20$, o número de componentes irredutíveis de $D(f)$ é 35, $D(f)^1 = V(x)$ é a única componente de dobra de $D(f)$ e $D(f)^j$ é componente de identificação de $D(f)$ para todo $j = 2, \ldots, 35$. Seja $\gamma_1(u) = (0, u)$ uma parametrização de $D(f)^1$. Assim,

$$f \circ \gamma_1(u) = (0, u^6, u^8)$$

é uma aplicação genericamente 2-a-1 e, com a estrutura reduzida, segue que

$$m_0(f(D(f)^1)) = m_0((f \circ \gamma_1)(\mathbb{C})) = 3.$$

Agora note que $V(x)$ continua sendo componente de dobra de $D(f_t)$ após a deformação, ou seja, $D(f_t)^1 = V(x)$. Usando γ_1 novamente para $t \neq 0$, temos

$$f_t \circ \gamma_1(u) = (tu^2, u^6, u^8)$$

é uma aplicação genericamente 2-a-1 e, novamente olhando para a estrutura reduzida, vem que

$$m_0(f_t(D(f_t)^1)) = m_0((f_t \circ \gamma_1)(\mathbb{C})) = 1.$$

Portanto, a multiplicidade da imagem de $D(f)^1$ mudou de 3 para 1 após a deformação e, como já mencionamos antes, isso é suficiente para garantir que $\mu_1(f_2(\mathbb{C}^2), 0)$ não seja constante. Logo, pelo Teorema 3.3.2 segue que $F = (f_t, t)$ não é Whitney equisingular, como queríamos mostrar. □

Na Proposição anterior é possível mostrar que $m_0(f_t(D(f_t))) = 18$, usando as parametrizações das demais componentes de $D(f_t)$ e a aditividade de m_0. Vale ressaltar que assim como na Proposição 3.3.7, na Proposição 3.3.8 a multiplicidade da imagem da curva de pontos duplos $D(f)$ diminuiu conforme diminuiu a multiplicidade da imagem da componente de dobra $D(f)^1 = V(x)$ após a deformação, isto é, o decréscimo de $m_0(f_t(D(f_t)))$ para $t \neq 0$ foi exatamente o decréscimo obtido em $m_0(f_t(D(f_t)^1)$ para $t \neq 0$.

Antes de apresentarmos os contra-exemplos para coposto 2, vejamos uma proposição que será útil a seguir.

Proposição 3.3.9. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente

determinado, homogêneo e de coposto 2. Se $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$ e os graus de f_1, f_2 e f_3 são d_1, d_2 e d_3, respectivamente, com $d_1 < d_2 < d_3$, então $D(f)$ possui exatamente $d = d_1d_2d_3 - d_1 - d_2 - d_3 + 2$ componentes irredutíveis e suaves.

Demonstração. Ver Proposição 4.38, p. 100 em [42]. □

Agora trabalharemos com os contra-exemplos de coposto 2. Neste caso, podemos obter exemplos em que a multiplicidade da imagem da curva de pontos duplos não é constante ou o número de Milnor da pré-imagem de um plano génerico não é constante. Na Proposição a seguir veremos um caso de coposto 2 em que a multiplicidade da imagem da curva de pontos duplos $D(f)$ do germe f não é constante.

Proposição 3.3.10. Seja $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ uma família de germes de aplicação dada por

$$f_t(x,y) = (x^3, y^5, x^2 - xy + y^2 + tx^2).$$

Então $f = f_0$ é finitamente determinado e o desdobramento $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

Demonstração. Assim como nas Proposições 3.3.7 e 3.3.8, comecemos encontrando uma matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo com a utilização do Singular [48] e na sequência usar a Proposição 3.3.5 para determinar $D(f)$. Sejam (x,y) um sistema de coordenadas na fonte, (X,Y,Z) um sistema de coordenadas na meta e $M(f)$ a matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo. Então

$$M(f) = \begin{bmatrix}
Z & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-X & Z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -X & Z & X & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & Z & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -X & Z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -X & Z & X & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & Z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & Z & X & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & Z & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & Z & X & 0 & 0 \\
0 & Y & 0 & -Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z & 0 & -1 \\
0 & 0 & Y & 0 & -Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & Z & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y & -X^2 & XZ & 0 & XZ & 0 & 0 & 0 & -X & Z
\end{bmatrix}.$$

Fazendo $\mathcal{F}(X,Y,Z) = \det(M(f))$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(X,Y,Z) &= -Y^6 - 15XY^5Z - 2X^5Y^3 - 90X^2Y^4Z^2 - 15X^6Y^2Z - 245X^3Y^3Z^3 \\ &\quad +3Y^4Z^5 - X^{10} - 15X^7YZ^2 - 300X^4Y^2Z^4 + 80XY^3Z^6 + 5X^8Z^3 \\ &\quad -72X^5YZ^5 + 345X^2Y^2Z^7 - 10X^6Z^6 + 270X^3YZ^8 - 3Y^2Z^{10} \\ &\quad +10X^4Z^9 + 60XYZ^{11} - 5X^2Z^{12} + Z^{15}\end{aligned}$$

e sua derivada em relação a variável Z é

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Z &= -15XY^5 - 180X^2Y^4Z - 15X^6Y^2 - 735X^3Y^3Z^2 + 15Y^4Z^4 - 30X^7YZ \\ &\quad -1200X^4Y^2Z^3 + 480XY^3Z^5 + 15X^8Z^2 - 360X^5YZ^4 + 2415X^2Y^2Z^6 \\ &\quad -60X^6Z^5 + 2160X^3YZ^7 - 30Y^2Z^9 + 90X^4Z^8 + 660XYZ^{10} \\ &\quad -60X^2Z^{11} + 15Z^{14}.\end{aligned}$$

Restringindo $\mathcal{F}_Z$ à imagem de f, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Z^* &= 1215x^{24}y^4 - 9720x^{23}y^5 + 43335x^{22}y^6 - 136080x^{21}y^7 + 334665x^{20}y^8 \\ &\quad -675540x^{19}y^9 + 1154520x^{18}y^{10} - 1699560x^{17}y^{11} + 2185080x^{16}y^{12} \\ &\quad -2476140x^{15}y^{13} + 2497515x^{14}y^{14} - 2261295x^{13}y^{15} + 1858410x^{12}y^{16} \\ &\quad -1399455x^{11}y^{17} + 974940x^{10}y^{18} - 628575x^9y^{19} + 372975x^8y^{20} - 199200x^7y^{21} \\ &\quad +93450x^6y^{22} - 36750x^5y^{23} + 11625x^4y^{24} - 2625x^3y^{25} + 375x^2y^{26}\end{aligned}$$

Agora, se $\eta(x,y)$ é o determinante da matriz Jacobiana de $(X(x,y), Y(x,y)) = (x^3, y^5)$, verifica-se facilmente que $\eta(x,y) = 15x^2y^4$. Portanto, uma função $\lambda(x,y)$ tal que $D(f) = V(\lambda(x,y))$ é dada por

$$\begin{aligned}\lambda(x,y) = \mathcal{F}_Z^*/\eta &= 81x^{22} - 648x^{21}y + 2889x^{20}y^2 - 9072x^{19}y^3 + 22311x^{18}y^4 \\ &\quad -45036x^{17}y^5 + 76968x^{16}y^6 - 113304x^{15}y^7 + 145672x^{14}y^8 \\ &\quad -165076x^{13}y^9 + 166501x^{12}y^{10} - 150753x^{11}y^{11} + 123894x^{10}y^{12} \\ &\quad -93297x^9y^{13} + 64996x^8y^{14} - 41905x^7y^{15} + 24865x^6y^{16} \\ &\quad -13280x^5y^{17} + 6230x^4y^{18} - 2450x^3y^{19} + 775x^2y^{20} - 175xy^{21} \\ &\quad +25y^{22}\end{aligned}$$

Utilizando o Singular, verifica-se que $\mu(D(f)) = 441$ donde segue da Proposição 1.6.3 que f é finitamente determinado. Além disso, f_t adiciona apenas um termo de grau 2 na terceira função coordenada de f que possui grau 2. Desta forma, $F = (f_t, t)$

é topologicamente trivial. Para mostrar que F não é Whitney equisingular utilizaremos a Proposição 3.3.9 para conseguir determinar as multiplicidades $m_0(f(D(f)))$ e $m_0(f_t(D(f_t)))$ com $t \neq 0$. Da Proposição 3.3.9, segue que $D(f)$ possui 22 componentes irredutíveis, e todas serão de identificação. Em particular, existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^*$ tais que

$$x^2 - xy + y^2 = (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y).$$

Perceba ainda que $D(f)^1 = V(x - \alpha_1 y)$ e $D(f)^2 = V(x - \alpha_2 y)$ são componentes de identificação de $D(f)$ tais que $f(D(f)^1) = f(D(f)^2)$. Considerando $\gamma_1(u) = (\alpha_1 u, u)$ uma parametrização de $D(f)^1$, temos

$$f \circ \gamma_1(u) = (\alpha_1^3 u^3, u^5, 0)$$

que é uma aplicação genericamente 1-a-1. Portanto, olhando a curva com a estrutura reduzida, temos

$$m_0(f(D(f)^1)) = m_0((f \circ \gamma_1)(\mathbb{C})) = 3.$$

Agora tomemos $\gamma_j(u) = (\alpha_j u, u)$ uma parametrização de $D(f)^j$ para algum $j \in \{3, \ldots, 22\}$. Daí, $\alpha_j^2 - \alpha_j + 1 \neq 0$ e

$$f \circ \gamma_j(u) = (\alpha_j^3 u^3, u^5, (\alpha_j^2 - \alpha_j + 1)u^2)$$

é uma aplicação genericamente 1-a-1, donde

$$m_0(f(D(f)^j)) = m_0((f \circ \gamma_j)(\mathbb{C})) = 2,$$

em que estamos considerando a estrutura reduzida para a curva. Logo, pela aditividade da multiplicidade, temos

$$m_0(f(D(f))) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{22} m_0(f(D(f)^j)) = 23.$$

Após a deformação, um cálculo análogo mostra que a multiplicidade $m_0(f_t(D(f_t)^j)) = 2$ para todo $j \in \{3, \ldots, 22\}$. Por outro lado, as componentes $D(f)^1 = V(x - \alpha_1 y)$ e $D(f)^2 = V(x - \alpha_2 y)$ não sofrem deformações, isto é, as componentes $D(f_t)^1$ e $D(f_t)^2$ são dadas por $V(x - \alpha_1 y)$ e $V(x - \alpha_2 y)$, respectivamente. Com isso,

$$f_t \circ \gamma_1(u) = (\alpha_1^3 u^3, u^5, \alpha_1^2 t u^2)$$

é uma aplicação genericamente 1-a-1 e

$$m_0(f_t(D(f_t)^1)) = m_0((f_t \circ \gamma_1)(\mathbb{C})) = 2.$$

Logo,

$$m_0(f_t(D(f_t))) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{22} m_0(f_t(D(f_t)^j)) = 22.$$

Como a multiciplidade $m_0(f_t(D(f_t)))$ não é constante, o Teorema 3.3.2 assegura que $F = (f_t, t)$ não é Whitney equisingular. □

Nesta Proposição trabalhamos com um germe de aplicação de reflexão com aplicação de órbita $\omega(x, y, z) = (x^3, y^5, z)$ e mergulho $h(x, y) = (x, y, x^2 - xy + y^2)$. Além disso, é possível mostrar que $\mu(\tilde{Y}_t, 0) = 1$, para todo t.

Para finalizar esta Seção, vamos apresentar mais um contra-exemplo com um germe de aplicação de reflexão obtido pela ação de $\mathbb{Z}_{2,3}$ nas duas primeiras coordenadas de $\mathbb{C}^3$ e mergulho $h(x, y) = (x, y, (x + y)^5)$. Neste caso, mostraremos que $\mu(\tilde{Y}_t, 0)$ não é constante.

Proposição 3.3.11. Seja $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ uma família de germes de aplicação dada por

$$f_t(x, y) = (x^2 + ty^2, y^3, (x + y)^5).$$

Então $f = f_0$ é finitamente determinado e o desdobramento $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

Demonstração. Sejam (x, y) um sistema de coordenadas na fonte, (X, Y, Z) um sistema de coordenadas na meta e $M(f)$ a matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo. Então

$$M(f) = \begin{bmatrix} Z - 10XY & -X^2 & -5X^2 & -5Y & -Y & -10X \\ -X^3 & Z - 10XY & -5XY & -5X^2 & -10X^2 & -Y \\ -Y^2 & -10XY & Z - 10XY & -X^2 & -5X^2 & -5Y \\ -10X^2Y & -Y^2 & -X^3 & Z - 10XY & -5XY & -5X^2 \\ -5X^2Y & -5Y^2 & -Y^2 & -10XY & Z - 10XY & -X^2 \\ -\frac{24}{5}XY^2 & -3X^2Y & -\frac{1}{5}XZ - 8X^2Y & -Y^2 + \frac{1}{5}X^3 & 0 & Z - 9XY \end{bmatrix}.$$

Fazendo $\mathcal{F}(X, Y, Z) = \det(M(f))$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X, Y, Z) \;=\; & Z^6 - 60XYZ^5 - 2Y^5Z^3 + 1170X^2Y^2Z^4 - 165XY^6Z^2 - 8210X^3Y^3Z^3 \\ & -3X^5Z^4 + Y^{10} - 420X^2Y^7Z + 16095X^4Y^4Z^2 - 730X^6YZ^3 - 5X^3Y^8 \\ & -3906X^5Y^5Z - 7050X^7Y^2Z^2 + 10X^6Y^6 - 3240X^8Y^3Z + 3X^{10}Z^2 \\ & -10X^9Y^4 - 210X^{11}Y^Z + 5X^{12}Y^2 - X^{15} \end{aligned}$$

e sua derivada em relação a variável Z é

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Z &= 6Z^5 - 300XYZ^4 - 6Y^5Z^2 + 4680X^2Y^2Z^3 - 330XY^6Z - 24630X^3Y^3Z^2 \\ &\quad -12X^5Z^3 - 420X^2Y^7 + 32190X^4Y^4Z - 2190X^6YZ^2 - 3906X^5Y^5 \\ &\quad -14100X^7Y^2Z - 3240X^8Y^3 + 6X^{10}Z - 210X^{11}Y.\end{aligned}$$

Restringindo $\mathcal{F}_Z$ à imagem de f, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Z^* &= 600x^{23}y^2 + 5700x^{22}y^3 + 31650x^{21}y^4 + 127200x^{20}y^5 + 388320x^{19}y^6 \\ &\quad +893280x^{18}y^7 + 1559550x^{17}y^8 + 2070420x^{16}y^9 + 2129124x^{15}y^{10} \\ &\quad +1770060x^{14}y^{11} + 1286430x^{13}y^{12} + 876000x^{12}y^{13} + 587160x^{11}y^{14} \\ &\quad +390636x^{10}y^{15} + 261180x^9y^{16} + 173220x^8y^{17} + 115050x^7y^{18} + 72960x^6y^{19} \\ &\quad +42168x^5y^{20} + 18600x^4y^{21} + 5430x^3y^{22} + 900x^2y^{23} + 90xy^{24}\end{aligned}$$

Seja $\eta(x,y)$ o determinante da matriz Jacobiana de $(X(x,y), Y(x,y)) = (x^2, y^3)$. Então $\eta(x,y) = 6xy^2$ e uma função $\lambda(x,y)$ tal que $D(f) = V(\lambda(x,y))$ é dada por

$$\begin{aligned}\lambda(x,y) = \mathcal{F}_Z^*/\eta &= 100x^{22} + 950x^{21}y + 5275x^{20}y^2 + 21200x^{19}y^3 + 64720x^{18}y^4 \\ &\quad +148880x^{17}y^5 + 259925x^{16}y^6 + 345070x^{15}y^7 + 354854x^{14}y^8 \\ &\quad +295010x^{13}y^9 + 214405x^{12}y^{10} + 146000x^{11}y^{11} + 97860x^{10}y^{12} \\ &\quad +65106x^9y^{13} + 43530x^8y^{14} + 28870x^7y^{15} + 19175x^6y^{16} \\ &\quad +12160x^5y^{17} + 7028x^4y^{18} + 3100x^3y^{19} + 905x^2y^{20} + 150xy^{21} \\ &\quad +15y^{22}\end{aligned}$$

e concluímos que $\mu(D(f)) = 441$. Portanto, segue da Proposição 1.6.3 que f é finitamente determinado. Além disso, f_t adiciona apenas um termo de grau 2 na primeira função coordenada de f que possui grau 2. Desta forma, $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial. Para verificar que F não é Whitney equisingular, considere o plano H dado por $X - Y = 0$ que é genérico para f_t. Daí,

$$(\tilde{Y_t}, 0) = V(x^2 + ty^2 - y^3)$$

e segue que $\mu(\tilde{Y_0}, 0) = 2$ enquanto $\mu(\tilde{Y_t}, 0) = 1$, para todo $t \neq 0$. Logo, como $\mu(\tilde{Y_t}, 0)$ não é constante, o Teorema 3.3.2 assegura que $F = (f_t, t)$ não é Whitney equisingular, como queríamos mostrar. □

É possível mostrar na Proposição 3.3.11 que $m_0(f_t(D(f_t))) = 22$ para todo t. Na ver-

dade, Peñafort-Sanchis mostrou em [36] que germes de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ dados por $f(x, y) = (x^n, y^m, (x + y)^k)$ com $2 \leq n < m < k$ coprimos em pares são finitamente determinados. Além disso, Silva mostrou em [42] que, para essa classe de germes de aplicação, a família $f_t = (x^n + ty^n, y^m, (x+y)^k)$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular, em que $m_0(f_t(D(f_t))) = \dfrac{dn}{2}$ e $d = nmk - n - m - k + 2$, para todo t, $\mu(\tilde{Y}_0, 0) = (m - 1)(n - 1)$ enquanto $\mu(\tilde{Y}_t, 0) = (n - 1)^2$ para $t \neq 0$.

Para finalizar esta Seção, utilizaremos a Proposição 3.3.11 para dar uma ideia de como obter a deformação para que $\mu(\tilde{Y}_t, 0)$ não seja constante. Inicialmente, precisamos entender como se dá a escolha de um plano genérico para f. Quando estamos lidando com os planos genéricos de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ finitamente determinado e homogêneo, a função coordenada de menor grau precisa ser considerada na escolha deste plano.

Assumindo que $f = (f_1, f_2, f_3)$ e que $d_1 < d_2 < d_3$, em que d_i é o grau de f_i para todo $i = 1, 2, 3$, então a função coordenada f_1 deve aparecer na escolha do plano genérico. Daí, olhamos para a variedade determinada por f_1. Se esta for reduzida, então o plano $aX + bY + cZ = 0$ com $a \in \mathbb{C}$ não nulo é genérico para f. Caso contrário, precisamos considerar a função coordenada f_2 que possui o menor grau após f_1. Na sequência, verificamos se a variedade determinada por $af_1 + bf_2$ é reduzida, com $a, b \in \mathbb{C}$ não nulos. Se sim, o plano $aX + bY + cZ = 0$ é genérico para f. Do contrário, um plano genérico para f é da forma $aX + bY + cZ = 0$ com $a, b, c \in \mathbb{C}$ não nulos.

Para o germe f da Proposição 3.3.11 dado por

$$f(x, y) = (x^2, y^3, (x + y)^5),$$

note que $V(x^2)$ não é reduzida enquanto $V(a(x^2) + b(y^3))$ tem estrutura reduzida para $a, b \in \mathbb{C}$ não nulos. Logo, podemos considerar o plano H dado por $X - Y = 0$ que é genérico para f e observe que $\mu(\tilde{Y}_0, 0) = \mu(f^{-1}(H), 0) = 2$. O próximo passo é entender como podemos deformar o germe f de modo que $\mu(\tilde{Y}_t, 0) < \mu(\tilde{Y}_0, 0)$ para $t \neq 0$.

Para conseguirmos a deformação conveniente, note que a variedade determinada por $x^2 - y^3$ é uma cúspide. Uma deformação genérica para a cúspide é a cúspide de Whitney (ou "peixinho"), cuja singularidade é o cruzamento de duas retas quando olhamos em uma vizinhança deste ponto (veja Figura 3.5).

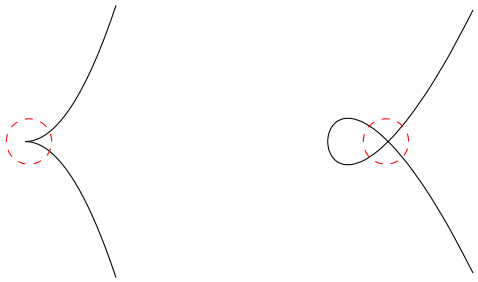


Figura 3.5: Deformação genérica da cúspide

Além disso, o número de Milnor da cúspide de Whitney nesse cruzamento é 1. Neste contexto, precisamos buscar uma deformação para f que nos ajude deformar a cúspide ao longo de um plano genérico. Como na Proposição 3.3.11, realizamos a deformação

$$f_t(x,y) = (x^2 + ty^2, y^3, (x+y)^5).$$

Agora observe que H dado por $X - Y = 0$ ainda é um plano genérico para f_t com $t \neq 0$ e

$$\mu(\tilde{Y}_t, 0) = \mu(f_t^{-1}(H), 0) = \mu(x^2 + ty^2 - y^3) = 1,\ t \neq 0.$$

Isto nos permite mostrar que $\mu(\tilde{Y}_t)$ não é constante, como desejávamos.

Por fim, observe que o plano $X = 0$ já era genérico para f_t, com $t \neq 0$. Além disso, $V(x^2+ty^2)$, para $t \neq 0$, já nos fornecia as duas retas que precisávamos. O termo y^3 em $(\tilde{Y}_t, 0)$ não influencia na topologia do nosso objeto para o contexto local que estamos trabalhando. Contudo, utilizamos o plano H para f_t para garantir que $\mu(\tilde{Y}_t, 0)$ não é constante ao longo do mesmo plano genérico.

3.4 Novos contra-exemplos para a conjectura de Ruas

Nesta seção, apresentaremos novos contra-exemplos para a conjectura de Ruas. Nos contra-exemplos encontrados por Ruas e Silva (veja Tabela 1, p. 365 em [41]), podemos fazer algumas observações. A primeira é que para o caso de coposto 1, pelo Lema 3.3.3 já sabemos que $\mu(\tilde{Y}_t, 0) = 0$ para todo t. Desta forma, a única posibilidade de conseguir os contra-exemplos no caso de coposto 1 para a Conjectura 2 é encontrando uma família f_t tal que $m_0(f_t(D(f_t)))$ não é constante.

Quando passamos ao caso de coposto 2, temos a possibilidade de conseguir contra-exemplos em que $\mu(\tilde{Y}_t, 0)$ pode variar ou $m_0(f_t(D(f_t)))$ pode variar. A tabela citada acima fornece contra-exemplos para ambos os casos. Entretanto, os contra-exemplos

mantém um desses números contante enquanto o outro varia. Mas será que é possível encontrar contra-exemplos em que esses dois invariantes não sejam constantes, simultaneamente? Ainda no caso de coposto 2, o contra-exemplo em que $m_0(f_t(D(f_t)))$ não é constante foi obtido mostrando que a multiplicidade da imagem de certas componentes de identificação não eram constantes. Com isso, podemos nos questionar se é possível conseguir contra-exemplos de coposto 2 em que $m_0(f_t(D(f_t)^j)) < m_0(f(D(f)^j)$ para alguma componente de dobra $D(f)^j$ de $D(f)$.

Por fim, observe que todos os germes de aplicação de reflexão utilizados são tomados com a ação de grupos cíclicos ou produtos diretos de grupos cíclicos. Entretanto, será que é possível obter contra-exemplos com a ação de grupos de reflexão diferentes do cíclico ou produto direto de cíclicos?

Buscamos responder estas perguntas e encontrar novos contra-exemplos com estas características. A Tabela 3.1 a seguir apresenta os novos contra-exemplos que encontramos.

Família de germes de aplicação	Grupo	$\mu(\tilde{Y}_t, 0)$		$m_0(f_t(D(f_t)))$	
		$t=0$	$t\neq 0$	$t=0$	$t\neq 0$
$\left(x^{10}, y^8, \prod_{j=2}^{4}(x-jy)+ty^4\right)$	$\mathbb{Z}_{10,8}$	4	4	339	333
$(x^5y-xy^5, x^8+14x^4y^4+y^8, x-3y+ty^2)$	G_{12}	0	0	20	18
$(x^2y^2, x^6+y^6, x-3y+ty^2)$	$G(6,3,2)$	0	0	9	8
$\left(x^2y^2+t(x^4+y^4), x^6+y^6, \prod_{j=2}^{6}(x-jy)\right)$	$G(6,3,2)$	13	9	20	20
$(x^8, y^{10}, (x+y)^3+y^9+ty^4)$	$\mathbb{Z}_{8,10}$	14	10	339	333

Tabela 3.1: Novos contra-exemplos para a conjectura de Ruas

O primeiro contra-exemplo é de um germe de aplicação de coposto 2 tal que a $D(f)$ possui três componentes de dobra de modo que, após a deformação, a multiplicidade da imagem da deformação dessas componentes diminui.

Proposição 3.4.1. Seja $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ uma família de germes de aplicação dada por

$$f_t(x,y) = \left(x^{10}, y^8, \prod_{j=2}^{4}(x-jy)+ty^4\right).$$

Então $f = f_0$ é finitamente determinado e o desdobramento $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

Demonstração. A demonstração segue exatamente os mesmos passos usados na seção anterior. Utilizando o algoritmo de Mond e Pellikaan para encontrar uma matriz

de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo obtemos uma matriz $M(f)$ quadrada de ordem 80 e verifica-se que $D(f)$ é definida por um polinômio homogêneo de grau 221 donde segue que $\mu(D(f)) = 48400$. Assim, f é finitamente determinado vide Proposição 1.6.3.

Agora observe que, pela Proposição 3.3.9, $D(f)$ possui 221 componentes irredutíveis. Dentre elas,

$$D(f)^j = V(x - jy), j = 2, 3, 4$$

são componentes de dobra enquanto $D(f)^j$ com $i = 4, \ldots, 221$ são componentes de identificação. Seja $\gamma_1(u) = (2u, u)$ parametrização de $D(f)^1$. Assim,

$$f \circ \gamma_1(u) = (2^{10}u^{10}, u^8, 0)$$

é uma aplicação genericamente 2-a-1 tal que, considerando a estrutura reduzida,

$$m_0(f(D(f)^1)) = m_0((f \circ \gamma_1)(\mathbb{C})) = 4.$$

De modo análogo podemos mostrar que $m_0(f(D(f)^2)) = m_0(f(D(f)^3)) = 4$. Tomando agora a parametrização $\gamma_j(u) = (\alpha_j u, u)$ de $D(f)^j$ para algum $j \in \{4, \ldots, 221\}$, tem-se que

$$f \circ \gamma_j(u) = (\alpha_j^{10}u^{10}, u^8, (\alpha_j - 2)(\alpha_j - 3)(\alpha_j - 4)u^3)$$

é uma aplicação genericamente 1-a-1 e

$$m_0(f(D(f)^j)) = m_0((f \circ \gamma_j)(\mathbb{C})) = 3.$$

Logo,

$$m_0(f(D(f))) = \sum_{i=1}^{3} m_0(f(D(f)^i)) + \frac{1}{2}\sum_{j=4}^{221} m_0(f(D(f)^j)) = 12 + 327 = 339.$$

Note que $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial, pois f é homogêneo e f_t adiciona apenas um termo de grau 4 na terceira função coordenada de f que possui grau 3. Além disso, as componentes $D(f)^j$, para $j = 1, 2, 3$, ainda são componentes de dobra de $D(f_t)$ após a deformação. Em particular, para a parametrização γ_1 de $D(f_t)^1$ temos

$$f_t \circ \gamma_1(u) = (2^{10}u^{10}, u^8, tu^4)$$

é uma aplicação genericamente 2-a-1 e, considerando a estrutura reduzida, vem que $m_0(f_t(D(f_t)^1)) = 2$ para $t \neq 0$. Analogamente, obtemos $m_0(f_t(D(f_t)^j)) = 2$ para

$j = 2,3$ $m_0(f_t(D(f_t)^j)) = 3$, para todo $j = 4,\ldots,221$ e $t \neq 0$. Logo, verifica-se que $m_0(f_t(D(f_t))) = 333$ para $t \neq 0$ enquanto que $m_0(f(D(f)) = 339$. Já que a multiplicidade da imagem de $D(f_t)$ não é constante, concluímos do Teorema 3.3.2 que o desdobramento $F = (f_t, t)$ não é Whitney equisingular. □

Em [22] podemos encontrar na classificação dos grupos de reflexão um grupo denotado por G_{12} de ordem 48 que age sobre $\mathbb{C}^2$ e é gerado por três reflexões. É possível mostrar, em particular, que este grupo é isomorfo ao grupo $GL(2,\mathbb{Z}_3)$, seus geradores são

$$r_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ r_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } r_3'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

e seus polinômios invariantes são

$$\omega_1 = x^5y - xy^5 \text{ e } \omega_2 = x^8 + 14x^4y^4 + y^8.$$

O que faremos na proposição a seguir é apresentar um contra-exemplo para a conjectura 2 com uma aplicação de reflexão dada pela ação de G_{12} nas duas primeiras coordenadas de $\mathbb{C}^3$ e o mergulho dado por $h(x,y) = (x,y,x-3y)$.

Proposição 3.4.2. Seja $f_t : (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C}^3,0)$ uma família de germes de aplicação dada por

$$f_t(x,y) = (x^5y - xy^5, x^8 + 14x^4y^4 + y^8, x - 3y + ty^2).$$

Então $f = f_0$ é finitamente determinado e o desdobramento $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

Demonstração. Utilizando o algoritmo de Mond e Pellikaan, encontramos uma matriz de apresentação de ordem 48 de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo e verifica-se que $D(f)$ é definida por um polinômio homogêneo de grau 35. Assim, $\mu(D(f)) = 1156$ e conlcluímos, pela Proposição 1.6.3, que f é finitamente determinado. Observe ainda que $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial, pois f é homogêneo e f_t adiciona apenas um termo de grau 2 na terceira função coordenada de f, que possui grau 1. Além disso, com a mesma técnica das componentes de dobra, mostramos que a multiplicidade da imagem de $D(f_t)$ não é constante. Pelo Teorema 3.3.4, a menos de uma mudança de coordenadas, tem-se que $D(f)$ possui 35 componentes irredutíveis, $D(f)^1 = V(x-3y)$ é a única componente de dobra de $D(f)$ e $m_0(f(D(f))) = 20$. Para f_t, a componente de dobra de $D(f)$ não sofre deformação. Utilizando as parametrizações de modo análogo ao que fizemos para os outros contra-exemplos, verifica-se que $m_0(f_t(D(f_t))) = 18$. Logo, o Teorema 3.3.2 assegura que o desdobramento $F = (f_t, t)$ não é Whitney equisingular. □

Vamos apresentar mais dois contra-exemplos para a Conjectura 2 com a utilização de germes de aplicação de reflexão com a ação de um grupo diferente do grupo cíclico. No Capítulo 2 de [22] o leitor pode encontrar uma família de grupos de reflexão determinada por três parâmetros m, p e n denotados por $G(m,p,n)$. Vale observar que no caso em que $m = p$ e $n = 2$ verifica-se que $G(m,m,2) = D_{2m}$.

Neste capítulo citado, o leitor poderá encontrar muitas propriedades interessantes dessa família, como os geradores do grupo e os polinômios invariantes correspondentes. Em particular, os polinômios invariantes do grupo $G(6,3,2)$ são

$$\omega_1 = x^2y^2 \text{ e } \omega_2 = x^6 + y^6.$$

As duas proposições a seguir apresentarão germes de aplicação de reflexão cujo grupo em questão é o grupo $G(6,3,2)$.

Proposição 3.4.3. Seja $f_t : (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C}^3,0)$ uma família de germes de aplicação dada por

$$f_t(x,y) = (x^2y^2, x^6 + y^6, x - 3y + ty^2).$$

Então $f = f_0$ é finitamente determinado e o desdobramento $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

Demonstração. Inicialmente, utilizando o algoritmo de Mond e Pellikaan encontramos uma matriz de apresentação de ordem 24 de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo e verifica-se que $D(f)$ é definida por um polinômio homogêneo de grau 15, donde $\mu(D(f)) = 196$. Portanto, pela Proposição 1.6.3 concluímos que f é finitamente determinado. Observe ainda que $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial, pois f é homogêneo e f_t adiciona apenas um termo de grau 2 na terceira função coordenada de f, a qual possui grau 1. Além disso, com a mesma técnica das componentes de dobra conseguimos mostrar que a multiplicidade da imagem de $D(f_t)$ não é constante. Pelo Teorema 3.3.4, a menos de uma mudança de coordenadas, tem-se que $D(f)$ possui 15 componentes irredutíveis, $D(f)^1 = V(x-3y)$ é a única componente de dobra de $D(f)$ e $m_0(f(D(f))) = 9$. Para f_t, a componente de dobra de $D(f)$ não sofre deformação. Utilizando as parametrizações como nas Proposições anteriores verifica-se que $m_0(f_t(D(f_t))) = 8$. Logo, o Teorema 3.3.2 assegura que o desdobramento $F = (f_t, t)$ não é Whitney equisingular. □

Proposição 3.4.4. Seja $f_t : (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C}^3,0)$ uma família de germes de aplicação dada por

$$f_t(x,y) = \left(x^2y^2 + t(x^4 + y^4), x^6 + y^6, \prod_{j=2}^{6}(x - jy) \right).$$

Então $f = f_0$ é finitamente determinado e o desdobramento $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

Demonstração. Com o algoritmo de Mond e Pellikaan encontramos uma matriz de apresentação de ordem 24 de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo e verifica-se que $D(f)$ é definida por um polinômio homogêneo de grau 107, donde $\mu(D(f)) = 11236$. Portanto, pela Proposição 1.6.3 concluímos que f é finitamente determinado. Agora, como f é homogêneo e f_t adiciona apenas um termo de grau 4 na primeira função coordenada de f, a qual possui grau 4, segue que $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial. Vale ressaltar que neste exemplo temos a constância de $m_0(f_t(D(f_t)))$ e seu valor é 20. Para verificar que F não é Whitney equisingular, considere o plano H dado por $X - Y = 0$ que é genérico para f_t. Assim,

$$(\tilde{Y_t}, 0) = V(x^2y^2 + t(x^4 + y^4) - x^6 - y^6),$$

donde $\mu(\tilde{Y_0}, 0) = 13$ enquanto $\mu(\tilde{Y_t}, 0) = 9$, para todo $t \neq 0$. Logo, como $\mu(\tilde{Y_t}, 0)$ não é constante, o Teorema 3.3.2 mostra que $F = (f_t, t)$ não é Whitney equisingular. □

Vejamos agora o último contra-exemplo contido na Tabela 3.1, em que $\mu(\tilde{Y_t}, 0)$ e $m_0(f_t(D(f_t)))$ não são constantes simultaneamente.

Proposição 3.4.5. Seja $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ uma família de germes de aplicação dada por

$$f_t(x, y) = (x^8, y^{10}, (x + y)^3 + y^9 + ty^4).$$

Então $f = f_0$ é finitamente determinado e o desdobramento $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

Demonstração. Observe que f não é mais homogêneo (ou quase-homogêneo). Desta forma, as técnicas e os resultados utilizados nas demais proposições não se aplicam e nos deparamos com mais um problema: garantir que a família f_t é topologicamente trivial. No entanto, vamos tentar apresentar a ideia de como chegamos a esta família. Inicialmente, podemos nos utilizar do algoritmo de Mond e Pellikaan para encontrar uma matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como $\mathcal{O}_3$-módulo e, com o auxílio do Singular, encontramos uma matriz de ordem 80 e não é dificil checar que $D(f)$ é reduzida, ou seja, f é finitamente determinado.

Vamos agora ao estudo de $D(f)$. Se considerarmos $g(x, y) = (x^8, y^{10}, (x + y)^3)$, um cálculo mostra que a λ que define $D(g)$ se fatora em 219 fatores lineares, sendo 218 são simples (de multiplicidade 1) e o último fator é múltiplo, sa saber: $V((x + y)^3)$, que possui multiplicidade 3. Com isso, tem-se que $D(g)$ não é reduzida. Todavia, quando

adicionamos o fator y^9 na terceira função coordenada de g, fazemos uma deformação em $V((x+y)^3)$ de tal forma que $D(f)$ possui 221 componentes irredutíveis, todas suaves. Além disso, como $D(f)$ possui estrutura reduzida, temos

$$(x+y)^3+y^9=(x-\alpha_1y^3)(x-\alpha_2y^3)(x-\alpha_3y^3)$$

com $\alpha_i\in\mathbb{C}$ não nulos para todo $i=1,2,3$, e $\alpha_i\neq\alpha_j$ para $i\neq j$. Observe ainda que

$$D(f)^1=V(x-\alpha_1y^3), D(f)^2=V(x-\alpha_2y^3) \text{ e } D(f)^3=V(x-\alpha_3y^3)$$

são componentes de dobra de $D(f)$, enquanto que $D(f)^j$ é componente de identificação para todo $j\in\{4,\ldots,221\}$. Assim, um cálculo mostra que $\mu(D(f))=48412$ (aqui utilizamos o Corolário 1.2.3, p. 246 em [2]). Para $t\neq 0$, tem-se que a deformação $f_t(x,y)=(x^8,y^{10},(x+y)^3+y^9+ty^4)$ não altera a topologia de $D(f)$. Desta forma, é possível mostrar que $\mu(D(f_t))=48412$ para todo t. Portanto, $F=(f_t,t)$ é topologicamente trivial vide Teorema 3.1.3.

Agora vejamos que F não é Whitney equisingular verificando que $\mu(\tilde{Y}_t,0)$ e $m_0(f_t(D(f_t)))$ não são constantes. Vamos começar tomando o plano H dado por $X+Y-Z=0$, que é genérico para f e vem que

$$(\tilde{Y}_0,0)=V(x^8+y^{10}-(x+y)^3-y^9)$$

e $\mu(\tilde{Y}_0,0)=14$. Para $t\neq 0$, temos H genérico para f_t e

$$(\tilde{Y}_t,0)=V(x^8+y^{10}-(x+y)^3-y^9-ty^4)$$

e segue que $\mu(\tilde{Y}_t,0)=10$. Com isso, já conseguimos garantir que $\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2,0)$ não é constante e, portanto, o Teorema 3.3.2 assegura que $F=(f_t,t)$ não é Whitney equisingular. Entretanto, vejamos o que acontece com $m_0(f_t(D(f_t)))$. Para $t=0$, considere a parametrização $\gamma_1(u)=(\alpha_1u,u)$ de $D(f)^1$ e note que

$$(f\circ\gamma_1)(u)=(\alpha_1^8u^8,u^{10},0)$$

é uma aplicação genericamente 2-a-1, donde segue que

$$m_0(f(D(f)^1))=m_0((f\circ\gamma_1)(\mathbb{C}))=4$$

quando consideramos a estrutura reduzida da curva. Analogamente, verifica-se que

$m_0(f(D(f)^i)) = 4$ para $i = 2, 3$ e $m_0(f(D(f)^j)) = 3$ para todo $j \in \{4, \ldots, 221\}$. Daí,

$$m_0(f(D(f))) = \sum_{i=1}^{3} m_0(f(D(f)^i)) + \frac{1}{2}\sum_{j=4}^{221} m_0(f(D(f)^j)) = 12 + 327 = 339.$$

Agora observe que se $t \neq 0$, as componentes $V(x - \alpha_i y^3)$ continuam sendo componentes de dobra de $D(f_t)$ para $i = 1, 2, 3$. Além disso, usando a parametrização γ_1, vem que

$$(f_t \circ \gamma_1)(u) = (\alpha_1^8 u^8, u^{10}, tu^4)$$

é uma aplicação genericamente 2-a-1. Com a estrutura reduzida, tem-se que

$$m_0(f_t(D(f_t)^1)) = m_0((f_t \circ \gamma_1)(\mathbb{C})) = 2.$$

Um cálculo análogo mostra que $m_0(f(D(f)^i)) = 2$ para $i = 2, 3$ e $m_0(f(D(f)^j)) = 3$ para todo $j \in \{4, \ldots, 221\}$. Desta forma,

$$m_0(f(D(f))) = \sum_{i=1}^{3} m_0(f(D(f)^i)) + \frac{1}{2}\sum_{j=4}^{221} m_0(f(D(f)^j)) = 6 + 327 = 333$$

e concluímos que $m_0(f_t(D(f_t)))$ também não é constante, como queríamos mostrar. □

3.5 A conjectura de Zariski

Para finalizar o trabalho, vamos agora fazer alguns comentários sobre a conjectura de Zariski. Em 1971, Oscar Ascher Zariski (1899-1986) propôs algumas questões para a teoria de singularidades em [51]. Dentre estas questões, está a chamada "conjectura da multiplicidade de Zariski" ou, simplesmente, a "conjectura de Zariski". Aqui vamos considerar a versão da conjectura para famílias de germes de aplicação $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ em que $f_0 = f$ é um germe de função holomorfa reduzido e $V(f_t) = f_t^{-1}(0)$ é o correspondente germe de hipersuperfície em $\mathbb{C}^n$. Com isso, a conjectura de Zariski nos diz que:

Conjectura 3 (Zariski)**.** Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de de função holomorfa e $F = (f_t, t)$ um desdobramento a 1-parâmetro de f. Se F é topologicamente trivial, então $m_0(V(f_t), 0)$ é constante.

Esta conjectura permanece aberta e diversos casos particulares foram obtidos por pesquisadores da área. Por exemplo, o próprio Zariski em [50] provou a conjectura no caso em que $n = 2$. Dos avanços recentes, vale destacar o resultado obtido por

Fernández de Bobadilla e Pelka [11], que assegura que se uma família X_t de hipersuperfícies com singularidade isolada é μ-constante, então X_t é equimúltipla. Destacamos ainda o trabalho de Eyral [8], o qual o leitor pode conferir para ter uma visão geral sobre a Conjectura 3.

Voltando nossas atenções às aplicações de reflexão, percebemos que este objeto merece uma grande atenção no estudo da teoria de singularidade de aplicações. Como podemos perceber, a classe de germes de aplicação de reflexão forneceu uma grandiosa contribuição no âmbito do estudo de coposto e injetividade de germes de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^p, 0)$, com $n < p$, obtendo a veracidade da conjectura de 1 para esta classe de germes de aplicação (veja [36]). Além disso, esta classe de germes de aplicação foi a chave para Ruas e Silva em [41] na busca pelos contra-exemplos para a Conjectura 2.

Ora, mas e quanto a conjectura da multiplicidade de Zariski? Será que é possível desbravar por entre os germes de aplicação de reflexão afim de apresentar uma resposta à conjectura? Pensando em uma perspectiva em que a conjectura de Zariski não seja verdadeira, em geral, será que as técnicas utilizadas por Ruas e Silva para exibir os contra-exemplos para a Conjectura 2 seriam o caminho para encontrar os contra-exemplos para a conjectura de Zariski? Será que as técnicas utilizadas por Ruas e Silva, para os casos em que $m_0(f_t(D(f_t)))$ não é constante, podem ser adaptadas para que possamos exibir uma família f_t tal que $m_0(f_t(\mathbb{C}^2))$ não seja constante?

A conjectura da multiplicidade de Zariski é um problema extremamente complicado na teoria de singularidades, isto é fato. Entretanto, é preciso olhar para a classe de germes de aplicação de reflexão com muito entusiasmo, visto que é um objeto poderoso e pouco explorado. Assim, promovendo o estudo deste objeto, podemos buscar soluções para os diversos problemas da teoria de singularidades. Quem sabe um desses problemas não seja a famosa conjectura da multiplicidade de Zariski?

Referências Bibliográficas

[1] Bruce, J. W.; Marar, W. L., *Images and varieties*. Journal of Mathematics Sciences, São Paulo, v. 82, n. 5, p. 3633-3641. 1996.

[2] Buchweitz, R. O; Greuel, G. M., *The Milnor number and deformations of complex curve singularities*. Inventiones Mathematicae, v. 58, p. 241-281. 1980.

[3] Callejas-Bedregal, R.; Houston, K.; Ruas, M. A. S., *Topological Triviality of Families of Singular Surfaces*. Preprint: arXiv: math/0611699v1 [math.CV] 22 Nov 2006.

[4] Coelho, F. U.; Lourenço, M. L., *Um curso de álgebra linear*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2018.

[5] Cohen, A. M., *Finite complex reflection groups*. Ann. Sci. École. Norm. Sup. (4)9:379-436, 1976.

[6] Damon, J. N., *Topological triviality and versality for soubgroups of A and K.II*. Sufficient conditions and applications. Nonlinearity, v. 5, n. 2, p. 373-412. 1992.

[7] de Jong, T.; Pfister, G., *Local Analytic Geometry*: Basic Theory and Applications. In: Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2000. 382 p.

[8] Eyral, C., *Zariski's multiplicity question - a survey*. New Zealand, J. Math. **36**(2007), 253-276.

[9] Fernández de Bobadilla, J., *A reformulation of Lê's conjecture*. Indag. Math. **17**(3), 345-352 (2006).

[10] Fernández de Bobadilla, J.; Pe Pereira, M., *Equisingularity at the normalisation*. Journal of Topology, Londres, v. 1, n. 4, p. 879-909, 2008.

[11] Fernández de Bobadilla, J.; Pelka, T., *Simplectic monodromy at radius zero and equimultiplicity of μ-constant families*. Preprint: arXiv: math/2204.07007v4 [math.AG] 26 Dec 2022.

[12] Gaffney, T., *Polar multiplicities and equisingularity of map germs*. Topology, v. 32, n. 1, p. 185-223, 1993.

[13] Garcia, A.; Lequain, Y., *Elementos de álgebra*. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[14] Gibson, C. G. *et al.*, *Topological stability of smooth mappings*. Springer - Verlag, Lecture Notes in Math. sér. 552. 1976. 154 p.

[15] Greuel, G. M.; Lossen, C.; Shustin, E., *Introduction to singularities and deformations*. Springer - Verlag, 2000. 471 p.

[16] Griffiths, P.; Harris, J., *Principles of algebraic geometry*. New York: Wiley-Interscience (John Wiley & Sons) 1978. 813 p.

[17] Gunning, R. C., *Introduction to holomorphic functions of several variables*. v. II, Belmont: Wadsworth, 1990. 218 p.

[18] Hernandes, M. E.; Miranda, A. J.; Peñafort-Sanchis, G., *An algorithm to compute a presentation of pushforward modules*. Topology Appl. **234**, 440-451, 2018.

[19] Keilen, T.; Mond, D., *Injective analytic mappings - a counterexample to the proof*. Preprint: arXiv:math/0409426 [math.AG] 22 Sep 2004.

[20] Jorge-Pérez, V. H.; Nuño-Ballesteros, J. J., *Finite determinacy and whitney equisingularity of map germs from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^{2n-1}$*. Manuscripta Mathematica. v. 128, p. 389-410. 2009.

[21] Lang, S., *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics, 3. ed. vol. 211. New York: Springer, 2002.

[22] Lehrer, G. I.; Taylor, D. E., *Unitary reflection groups*. Cambridge, 2009.

[23] Luengo, I.; Pichon, A., *A Lê's conjecture to cyclic covers*. in: Brasselet, J. -P., Suwa, T. (Eds.), Singularités franco-japonaises, Sémin. Congr., vol. 10, Soc. Math. France, Paris, 2005.

[24] Marar, W. L., Nuño-Ballesteros, J. J., *A note on finite determinacy for corank 2 map germs from surfaces to 3-space*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **145**(1), (153-163), 2008.

[25] Marar, W. L., Nuño-Ballesteros, J. J., *Slicing corank 1 map germs from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^3$*. Quart. J. Math. v. 65, p. 1375-1395, 2014.

[26] Marar, W. L., Nuño-Ballesteros, J. J., Peñafort-Sanchis, G., *Double point curves for corank 2 map germs from* $\mathbb{C}^2$ *to* $\mathbb{C}^3$. Topology Appl., v. 159, n. 2, p. 526-536, 2012.

[27] Matsumura, H., *Commutative ring theory*. Tradução de M. Reid. Cambridge Univ. Press. 1986. 320 p.

[28] Mitchell, H. H., *Determination of all primitive colliniation groups in more than four variables which contain homologies*. Amer. J. Math. 36:1-12, 1914.

[29] Mond, D., *On the classification of germs of maps from* $\mathbb{R}^2$ *to* $\mathbb{R}^3$. Proc. Long. Math. Soc. **50**(2), 333-369. 1985.

[30] Mond, D., *Some remarks on the geometry and classification of germs of map from surfaces to 3-space*. Topology, v. 26, n. 3, p. 361-383. 1987.

[31] Mond, D.; Pellikaan, R., *Fitting ideals and multiple points of analytic mappings*. Separata de: E. R. de Arellano (Ed.). Algebraic Geometry and Complex Analysis, Patzcuaro 1987. Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., sér. 1414, p. 107-161. 1989.

[32] Nemethi, A., *Injective analytic mappings*. Duke Math. J. **69**(2), 335-347. 1993.

[33] Neusel, M. D., *Invariant theory*. American Mathematical Soc., vol. 36, 2007.

[34] Noether, E., *Der endlichkeitssatz der invarianten endlicher gruppen*. Mathematische Annalen, pg. 89-92, 1915.

[35] Nuño-Ballesteros, J. J.; Mond, D., *Singularities of mappings: the local behavior of smooth and complex analytic mappings*. Vol. 357. Springer Nature, 2020.

[36] Penãfort-Sanchis, G., *Reflection maps*. Mathematische Annalen, pg. 559-598, 2020.

[37] presmatrix.txt *(Biblioteca para Software Singular)*. Disponível em: `https://sites.google.com/site/aldicio`. Acesso em: 14 de Agosto de 2023.

[38] Piene, R., *Ideals associated with a desingularization*. Lect. Notes Math., **732**, 503-517.

[39] Ruas, M. A. S., *On the equisingularity of families of corank 1 generic germs*. Differential Topology, Foliations and Groups Action. Contemporary Mathematics, v. 161, p. 113-121, 1994.

[40] Ruas, M. A. S., *Equimultiplicity of topologically equisingular families of parametrized surfaces in* $\mathbb{C}^3$. Preprint: arXiv: 1302.5800v1 [math.CV] 23 Feb 2013.

[41] Ruas, M. A. S; Silva, O. N., *Whitney equisingularity of families of surfaces in* $\mathbb{C}^3$. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **166**(2), (353-369), 2019.

[42] Silva, O. N., *Superfícies com singularidades não isoladas*. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

[43] Shephard, G. C.; Todd, J. A., *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math, 6:274-304, 1954.

[44] Tráng, L. D., *Problem session in proceedings of seminar*. Plans-sur-Bex, 1982. Monographies de L'Enseignement Mathematique, vol. 31 (1983).

[45] Wall, C. T. C., *Finite determinacy of smooth maps-germs*. Bull. London Math. Soc., v. 13, n. 6, p. 481-539. 1981.

[46] Whitney, H., *The singularities of a smooth n-manifold in* $(2n-1)$*-space*. Ann. Math. sér. 2, v. 45, n. 2, p. 247-293, 1944.

[47] Whitney, H., *Tangents to an analytic variety*, Ann. Math. v. 81, n. 3, p. 496-549, 1965.

[48] Wolfram, D.; Greuel, G. M.; Pfister, G.; Schönemann, H., *Singular 4-0-2. A computer algebra system for polynomial computations*. 2015. Disponível em: `https://www.singular.uni-kl.de`. Acesso em: 13 de Maio de 2023.

[49] Zampiva, J. R. B., *Aplicações singulares via grupos de reflexão*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, p. 90, 2020.

[50] Zariski, O., *On the topology of algebroids singularities*. Am. J. Math. **54**, 453-465, 1932.

[51] Zariski, O., *Some open questions in the theory of singularities*. Bull. Am. Math. Soc. **77**, 481-491, 1971.

[52] Zariski, O., *Collected papers*. v. 4, MIT Press, Cambridge. 1979.