Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Classificação e Identidades Polinomiais de Álgebras de Jordan Bidimensionais

Matheus Gabriel Nascimento Lima

João Pessoa - PB
Janeiro de 2024

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Classificação e Identidades Polinomiais de Álgebras de Jordan Bidimensionais

por

Matheus Gabriel Nascimento Lima

sob orientação do

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

João Pessoa - PB
Janeiro de 2024

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L732c Lima, Matheus Gabriel Nascimento.
Classificação e identidades polinomiais de álgebras de Jordan bidimensionais / Matheus Gabriel Nascimento Lima. - João Pessoa, 2024.
83 f. : il.

Orientação: Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CT.

1. Álgebras livres. 2. Identidades polinomiais. 3. Sequência de codimensões. 4. Sequência de cocaracteres. I. Silva, Diogo Diniz Pereira da Silva e. II. Título.

UFPB/BC CDU 512.57(043)

Elaborado por MAGNOLIA FELIX DE ARAUJO - CRB-15/883

Classificação e Identidades Polinomiais de Álgebras de Jordan Bidimensionais

por

Matheus Gabriel Nascimento Lima[1]

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em: 29 de janeiro de 2024.

Banca examinadora:

Diogo Diniz P.S. Silva

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFPB
(Orientador)

Alan de Araújo Guimarães

Prof. Dr. Alan de Araújo Guimarães - UFRN
(Examinador externo)

gov.br Documento assinado digitalmente
DAVID LEVI DA SILVA MACEDO
Data: 07/02/2024 10:43:55-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. David Levi da Silva Macêdo - UFERSA
(Examinador externo)

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

À minha mãe, Maria.
Ao meu pai, Bira (in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe, Maria Nascimento, por seu apoio incondicional e por, mesmo sem perceber, me ensinar tanto, todos os dias, sobre perseverar. Te amo, mãe, este trabalho é para você. Agradeço também ao meu pai, Bira Lima (in memoriam), por todo apoio dado nessa trajetória. Sua partida representou um triste marco em meio ao mestrado. Este trabalho também é para você, pai.

Aos meus irmãos Melqui, Pérola, Paloma e Zeus pelo companheirismo de sempre e pelo incentivo nos momentos difíceis e também aos meus sobrinhos queridos João, Maria e Laura.

A Milla, pelas conversas, devaneios e momentos de descontração em João Pessoa, tornando toda essa trajetória mais leve. A Rubi e sua dog, Dandara Stephanie, por me receberem em João Pessoa afetuosamente. Agradeço também a todos os colegas do PPGMAT UFPB, por toda ajuda prestada.

Sou grato a todos os professores do mestrado que me deram base para chegar até aqui, em especial a Diogo, Allan, Evelina, Jacqueline, Otoniel, Jamilson e Cleto.

Agradeço ao meu amigo André Dosea, que me impulsionou em diversos momentos, me fazendo enxergar possibilidades onde eu já não conseguia mais ver. Sou extremamente grato pelo tempo que foi dedicado a mim, por todas as conversas e ensinamentos.

A Gustavo, Mateus, Max, Pedro e Timón pelo fundamental apoio e escuta nos momentos de insegurança e dúvida, estando sempre presentes com palavras de força e encorajamento. Agradeço por tantos bons momentos compartilhados, que me serviram de combustível para seguir em meio às adversidades.

Agradeço ao meu Orientador, Diogo Diniz, pelo incentivo, paciência, confiança e pelo tempo dedicado a mim. Sem dúvidas sua chegada foi uma virada de chave para a minha persistência no mestrado e realização deste trabalho, tornando tudo possível. Sou profundamente grato.

Agradeço à banca examinadora, Alan de Araújo Guimarães e David Levi da Silva Macêdo, pelo tempo e pelas valiosas contribuições.

À CAPES pelo fundamental apoio financeiro.

A todos aqueles que contribuíram, de alguma forma, para a realização deste trabalho, deixo aqui registrada minha imensa gratidão.

Resumo

Neste trabalho classificamos as álgebras de Jordan bidimensionais sobre um corpo K de característica diferente de 2. Como consequência, provamos que existe, a menos de isomorfismo, uma única álgebra de Jordan não associativa bidimensional sobre K, a qual pode ser generalizada para uma álgebra de dimensão arbitrária, mantendo as propriedades algébricas fundamentais para nosso estudo. Quando K, além de ter característica diferente de 2, é um corpo infinito, determinamos uma base finita para os T-ideais gerados pelas identidades polinomiais de cada uma dessas álgebras obtidas na classificação e também suas sequências de codimensões. Além disso, quando K tem característica 0, determinamos a sequência de cocaracteres dessas álgebras.

Palavras-chave: Álgebras de Jordan; Álgebras Livres; Identidades Polinomiais; Álgebras Não Associativas; Sequência de Codimensões; Sequência de Cocaracteres.

Abstract

In this work we classify the two-dimensional Jordan algebras over a field K of characteristic different from 2. As a consequence, we prove that there exists, up to isomorphism, a unique two-dimensional non-associative Jordan algebra over K, such an algebra can be generalized to an algebra of arbitrary dimension, maintaining the algebraic properties that are fundamental in our study. When K, in addition to having characteristic different from 2, is an infinite field, we determine a finite basis for the T-ideals of the polynomial identities of each of these algebras obtained in the classification and also their codimension sequence. Furthermore, when K has characteristic 0, we determine the cocharacter sequence of these algebras.

Keywords: Jordan Algebras; Free Algebras; Polynomial Identities; Non-associative Algebras; Codimension Sequence; Cocharacter Sequence.

Sumário

Introdução

Uma álgebra é um espaço vetorial sobre um corpo K munido de um produto que é uma aplicação bilinear. Citamos, por exemplo, os espaços vetoriais $M_n(K)$ (matrizes quadradas de ordem $n \geq 1$), munido do produto usual de matrizes, e $\mathbb{R}^3$ munido do produto vetorial. Com estes respectivos produtos, temos que $M_n(K)$ é uma álgebra associativa, enquanto $\mathbb{R}^3$ é uma álgebra não associativa. A história das álgebras não associativas remonta ao século XIX com a introdução dos quatérnions. Em 1843, Hamilton conseguiu definir uma multiplicação em $\mathbb{R}^4$ mostrando que todos os axiomas de corpo são satisfeitos, exceto a comutatividade. Meses depois da descoberta dos quatérnions, Graves introduziu os octônions, definindo uma multiplicação em $\mathbb{R}^8$. Este sistema de números não é comutativo e nem associativo.

Uma importante classe de álgebras que em geral são não associativas é a classe das álgebras de Jordan, que são álgebras comutativas e satisfazem a igualdade $(a^2b)a = a^2(ba)$, para quaisquer elementos a e b da álgebra. As álgebras de Jordan apareceram pela primeira vez no trabalho de Jordan, von Neumann e Wigner, publicado no Annals of Mathematics em 1934. Esses autores mostraram que as propriedades estatísticas de um sistema mecânico quântico ficavam mais simples quando descritas usando a álgebra $M_n(\mathbb{R})^+$. Esta álgebra é obtida quando consideramos a álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{R})$ e trocamos a multiplicação usual AB das matrizes A e B pela multiplicação $A \circ B = (1/2)(AB + BA)$.

Dada uma álgebra de Jordan J, é conhecido que, para qualquer $a \in J$ e $n, m \in \mathbb{N}$, $a^n a^m = a^{n+m}$. Álgebras com esta propriedade são chamadas associativas à potências e tal propriedade equivale a dizer que as subálgebras geradas por um elemento são associativas. Nem toda álgebra associativa à potências é de Jordan, basta observar que $M_n(K)$, $n > 1$, munida do produto usual de matrizes, é associativa à potências (por ser associativa), mas não é comutativa, logo não é de Jordan. Além disso, já foi provado que álgebras comutativas e associativas à potências de dimensão ≤ 3 sobre um corpo algebricamente fechado de característica diferente de $2, 3$ ou 5, são álgebras de Jordan e que existem álgebras comutativas e associativas à potências de dimensão 4 que não são álgebras de Jordan, ver [1] e [17].

Classes importantes de álgebras, como álgebras de Jordan e álgebras de Lie, são definidas por meio de identidades polinomiais. Para isso, necessitamos da álgebra livre

$K\{X\}$, onde X é um conjunto não vazio. Ressaltamos que $K\{X\}$ é uma álgebra não associativa cujos elementos são polinômios, nas variáveis de X e com coeficientes em K. Sendo $x_1, \ldots, x_n$ as variáveis que ocorrem num certo polinômio f, iremos denotá-lo por $f(x1, ..., xn)$. Quando a substituição dos elementos $x_1, \ldots, x_n$ de X, pelos elementos $a_1, \ldots, a_n$ de uma álgebra A resultar em zero para quaisquer $a_1, \ldots, a_n$ em A, então $f(x_1, \ldots, x_n)$ será chamado de identidade polinomial de A. Esta álgebra será chamada de PI-álgebra quando existe um polinômio não nulo de $K\{X\}$ que é uma identidade para A. Por exemplo, uma álgebra é comutativa se satisfaz a identidade $x_1x_2 - x_2x_1$ e associativa se satisfaz a identidade $(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$. O conjunto das identidades de A, denotado por $Id(A)$, é um ideal de $K\{X\}$ invariante pelos endomorfismos desta álgebra, tais ideais de $K\{X\}$ são chamados de T-ideais. Um conjunto $S \subset K\{X\}$ é uma base para $Id(A)$ se $Id(A) = \langle S \rangle^T$, onde $\langle S \rangle^T$ é o T-ideal de $K\{X\}$ gerado por S.

Outro conceito importante para uma álgebra é o de codimensão. A noção de codimensão para uma álgebra A foi introduzida por Regev e leva ao estudo do comportamento assintótico de sua sequência de codimensões $(c_n(A))_{n\geq 1}$. No final da década de 1990, Giambruno e Zaicev deram uma resposta positiva para uma conjectura de Amitsur feita na década anterior, provando que, para uma PI-álgebra associativa A, o limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$ existe e é um número inteiro não negativo, chamado expoente de A, ver [10] e [9]. O mesmo resultado é válido para álgebras de Lie de dimensão finita, álgebras de Jordan, álgebras alternativas e para pares de representações de dimensão finita, ver [19], [8] e [12]. Por outro lado, a sequência de codimensões de álgebras não associativas pode ter crescimento superexponencial e até mesmo, para álgebras não associativas com crescimento exponencial, o expoente pode não ser um número inteiro, ver [20] e [15]. As codimensões de álgebras bidimensionais não associativas sobre um corpo de característica zero foram estudadas em [7], onde foi provado que a sequência de codimensões de uma álgebra não associativa bidimensional A é limitada por $n+1$ ou cresce exponencialmente como 2^n. A restrição aos corpos de característica zero em [7] é necessária porque os autores aplicam a teoria de Young de representações do grupo simétrico S_n à PI-teoria (teoria das álgebras com identidades polinomiais).

Neste trabalho, apresentamos a classificação das álgebras de Jordan bidimensionais sobre um corpo de característica diferente de 2. Na literatura, existem diversos resultados de classicação de álgebras de dimensão baixa. Em [14], o autor faz a classificação de álgebras comutativas bidimensionais sobre o corpo $\mathbb{R}$ utilizando equações diferenciais e em [16] foram classificadas as álgebras bidimensionais não associativas sobre um corpo qualquer, incluindo os de característica 2. À luz desses estudos, em [4], ao se considerar uma álgebra bidimensional, comutativa e associativa à potências sobre um corpo K de característica diferente de 2, é mostrado que essa álgebra será uma álgebra de Jordan isomorfa a uma das seguintes álgebras:

(i) $N = \text{span}\{u, u^2\} \subset M_3(K)$, onde $u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(ii) $M = \text{span}\{u, u^2\} \subset M_3(K)$, onde $u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(ii) $M_\lambda = \text{span}\{1, u\} \subset M_2(K)$, onde $u = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\lambda \in K$;

(iv) $D_2 = \text{span}\{e_{11}, e_{12}\} \subset UJ_2(K)$.

Logo, obtem-se uma classificação, a menos de isomorfismo, das álgebras de Jordan bidimensionais sobre um corpo K de característica diferente de 2. Sendo D_2 a única álgebra não associativa das álgebras listadas acima, segue que existe, a menos de isomorfismo, uma única álgebra de Jordan bidimensional não associativa sobre um corpo de característica diferente de 2.

Com isso, além de classificar as álgebras de Jordan bidimensionais sobre um corpo de característica diferente de 2, o objetivo deste trabalho é descrever uma base finita para o T-ideal $Id(D_2)$, bem como a sequência de codimensões $(c_n(D_2))_{n\geq 1}$, quando K é qualquer corpo infinito de característica diferente de 2, e a sequência de cocaracteres $(\chi_n(D_2))_{n\geq 1}$ para qualquer corpo de característica zero. O mesmo é feito para as álgebras N, M e M_λ. Para tanto, dividimos este trabalho em três capítulos, descritos abaixo.

O Capítulo 1 aborda o conceito de álgebra, o processo de construção das álgebras livres e definimos o T-ideal das identidades de uma álgebra. Além disso, apresentamos a definição de álgebras de Jordan e provamos que toda álgebra de Jodan é associativa à potências. Para isso, utilizamos como principais referências [5] e [21].

No Capítulo 2, expomos um pouco da teoria de módulos sobre uma álgebra, especialmente sobre a álgebra de grupo $K[S_n]$, sendo S_n o grupo de permutações do conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Além disso, tratamos também do conceito de representações de grupos, isso será necessário para o estudo da sequência de cocaracteres das álgebras estudadas. Ao notarmos a relação biunívoca entre as estruturas de $K[S_n]$-módulos e as representações do grupo S_n, por meio da Teoria de Young, definimos o $K[S_n]$-módulo irredutível M_α, associado a uma partição α de n e expomos uma maneira de calcular a dimensão desse módulo. Além disso, sendo $P_n \subset K\{X\}$ o subespaço dos polinômios multilineares em $K\{X\}$, ao notarmos que, dada uma álgebra A, temos que

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

pode ser visto como um $K[S_n]$-módulo e ao definirmos o caracter de um $K[G]$-módulo, conceituamos a n-ésima codimensão como sendo $\dim_K P_n(A)$ e o n−ésimo cocaracter como sendo o caracter do módulo $P_n(A)$. Neste capítulo, utilizamos principalmente [3], [11], [13] e [18] como referências.

Por último, no Capítulo 3, onde abordamos todos os resultados de [4], fazemos a classificação das álgebras de Jordan bidimensionais sobre um corpo de característica diferente de 2. Quando K é um corpo algebricamente fechado, por exemplo, mostramos que, a menos de isomorfismo, existem apenas 5 álgebras de Jordan bidimensionais sobre K. Após isso, denotamos por D uma álgebra sobre um corpo K de característica diferente de 2 que é comutativa, associativa à potências, tem dimensão maior ou igual a 2, e tal que $\{u, u^2\}$ é linearmente dependente para todo $u \in D$. Com isso, observamos que as identidades polinomiais de D independem da sua dimensão e, passando a considerar que K é um corpo infinito de característica diferente de 2, descrevemos uma base finita para o T-ideal $Id(D)$, bem como a sequência de codimensões $(c_n(D))_{n\geq 1}$ e, quando a característica de K é zero, a sequência de cocaracteres $(\chi_n(D))_{n\geq 1}$. Assim, uma vez que a álgebra D_2 satisfaz todas as propriedades definidas em D, também teremos estes resultados para D_2. Além disso, descrevemos uma base para cada T-ideal $Id(N)$, $Id(M)$ e $Id(M_\lambda)$, bem como a sequência de codimensões, quando o corpo K é infinito e tem característica diferente de 2, e a sequência de cocaracteres, quando a característica de K é zero, das álgebras N, M e M_λ. Como consequência, constatamos que a n-ésima codimensão de qualquer álgebra de Jordan bidimensional sobre um corpo infinito de característica diferente de 2 é limitada por n, contrastando do caso geral de álgebras bidimensionais não associativas, já que em [7] os autores provam que a sequência de codimensões é limitada por $n+1$ ou cresce exponencialmente como 2^n.

Capítulo 1

Álgebras

Este capítulo, inicialmente, abordará alguns conceitos e resultados gerais da teoria de álgebras. Após isso, veremos o processo de construção das álgebras livres, que são álgebras não associativas essenciais para nosso trabalho, pois, a partir delas, daremos a definição de identidades polinomiais para uma álgebra qualquer. Além disso, exploraremos um pouco sobre as álgebras de Jordan, que são álgebras naturalmente definidas por duas identidades polinomiais. Introduziremos as álgebras de Jordan bidimensionais sobre um corpo de característica diferente de 2, as quais, como veremos no Capítulo 3, são únicas, a menos de isomorfismo, e também mostraremos que álgebras de Jordan são associativas à potências. Mais adiante, no Capítulo 3, veremos que as álgebras associativas à potências e comutativas de dimensão 2 são álgebras de Jordan.

1.1 Álgebras

Definição 1.1 (Álgebra)**.** Um conjunto A é chamado de álgebra sobre o corpo K se A possui uma estrutura de K-espaço vetorial e um produto "$\cdot$" que satisfaz as seguintes propriedades

1) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

2) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

3) $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$

para quaisquer $x, y, z \in A$ e $\alpha \in K$. Em outras palavras, A é um espaço vetorial no qual a aplicação $A \times A \to A$ que leva (x, y) em $x \cdot y$ é bilinear.

Chamamos a álgebra sobre o corpo K de K-álgebra, porém, em alguns momentos, podemos utilizar apenas a terminologia álgebra, sem fazer referência ao corpo K. Dizemos que a dimensão de uma K-álgebra A, denotada por $\dim_K A$, é a dimensão de A como espaço vetorial e uma base para A é uma base para A como espaço vetorial.

Além disso, podemos denotar o produto $x \cdot y$ em A simplesmente por xy quando não houver ambiguidade.

Definição 1.2. Dada uma álgebra A, dizemos que:

1. A tem unidade, quando existe um elemento $1 \in A$ tal que $1x = x1 = x$, para todo $x \in A$;

2. A é comutativa se $xy - yx = 0$, para quaisquer $x, y \in A$. Caso contrário A será não comutativa;

3. A é associativa se, para quaisquer $x, y, z \in A$, vale a igualdade $(xy)z - x(yz) = 0$. Caso contrário, A será não associativa;

4. A é uma álgebra com divisão se, para todo $a \in A \backslash \{0\}$, existe $b \in A$ tal que $ab = ba = 1$.

Exemplo 1.3. Um corpo K é uma K-álgebra comutativa, associativa, com divisão, com unidade e de dimensão 1.

Exemplo 1.4. Seja L uma extensão do corpo K, isto é, L é um corpo, tal que $K \subseteq L$ é um subcorpo de L. Consideramos L como um K-espaço vetorial, onde a multiplicação por escalar $K \times L \to L$ é a restrição da multiplicação de L para o conjunto $K \times L$. Com esta estrutura de espaço vetorial, temos que a multiplicação do corpo L é K-bilinear e, deste modo, obtemos uma estrutura de K-álgebra em L comutativa, associativa, com divisão e com unidade.

Exemplo 1.5. O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do produto vetorial é uma $\mathbb{R}$-álgebra não comutativa e não associativa.

Exemplo 1.6 (Álgebra das matrizes sobre K)**.** Considere o K-espaço vetorial $M_n(K)$ das matrizes quadradas de ordem $n \geq 1$ com entradas em K. Munido do produto usual de matrizes, $M_n(K)$, com $n > 1$, é uma K-álgebra não comutativa, associativa e com unidade I_n, onde I_n é a matriz identidade de $M_n(K)$. Nesta álgebra, destacamos os elementos da forma e_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, onde e_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna. É sabido que estas matrizes formam uma base para $M_n(K)$ e que $\dim_K M_n(K) = n^2$.

Definição 1.7. Sejam K um corpo de característica diferente de 2 e A uma álgebra associativa com produto "$\cdot$". Definimos em A a multiplicação "$\circ$" dada por

$$a \circ b := (1/2)(a \cdot b + b \cdot a),$$

onde $a, b \in A$.

Exemplo 1.8. Seja K um corpo de característica diferente de 2. Munida do produto $\circ$, $M_n(K)$, com $n > 1$, é uma K-álgebra comutativa e não associativa. Com efeito, a comutatividade é clara, uma vez que para quaisquer $A, B \in M_n(K)$,

$$A \circ B = (1/2)(A \cdot B + B \cdot A) = (1/2)(B \cdot A + A \cdot B) = B \circ A.$$

Agora, sejam $e_{11}, e_{12}, u = e_{11} + e_{12} \in M_n(K)$, então

$$\begin{aligned}(e_{12} \circ u) \circ e_{11} - e_{12} \circ (u \circ e_{11}) &= \frac{1}{2}[e_{12} \circ e_{11} - e_{12} \circ (e_{11} + u)] \\ &= \frac{1}{4}(e_{12} - 2e_{12}) = -\frac{1}{4}e_{12} \neq 0,\end{aligned}$$

o que mostra a não associatividade.

Exemplo 1.9 (Álgebras de grupo)**.** Sendo K um corpo e G um grupo com a operação $*$, a álgebra de grupo $K[G]$ é o conjunto de todas as combinações lineares de um número finito de elementos de G com coeficientes em K, portanto, de todos os elementos da forma

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_n g_n,$$

onde α_i pertence a K, g_i pertence a G e $g_i \neq g_j$ se $i \neq j$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Este elemento pode ser denotado em geral por

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g,$$

onde é assumido que $\alpha_g \neq 0$ para uma quantidade finita de elementos de G. $K[G]$ é uma álgebra associativa sobre K em relação a adição definida pela regra

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

o produto por um escalar dado por

$$\alpha \sum_{g \in G} \alpha_g g = \sum_{g \in G} (\alpha \alpha_g) g,$$

e a multiplicação

$$\left(\sum_{h_1 \in G} \alpha_{h_1} h_1\right)\left(\sum_{h_2 \in G} \beta_{h_2} h_2\right) = \sum_{h_1, h_2 \in G} (\alpha_{h_1} \beta_{h_2}) g,$$

onde $g = h_1 * h_2$. Desta definição, segue-se que o elemento identidade de G é a unidade de $K[G]$, e que $K[G]$ é comutativa se, e somente se, G for um grupo abeliano.

Como veremos, a álgebra de grupo $K[S_n]$, onde S_n é o grupo de permutações de n

elementos, será bastante utilizada nos Capítulos 2 e 3.

Definição 1.10. Sejam A e B álgebras. Dizemos que uma aplicação linear $\phi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras se $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2)$ para quaisquer $a_1, a_2 \in A$.

As definições de monomorfismo (homomorfismo injetivo), epimorfismo (homomorfismo sobrejetor), isomorfismo (homomorfismo bijetivo) e automorfismo (isomorfismo de uma álgebra A nela própria) são análogas às definições para anéis. Dessa forma, o homomorfismo ϕ na definição acima é um isomorfismo se for bijetor e um automorfismo se, além disso, $B = A$. Dizemos que as álgebras A e B são isomorfas se existe um isomorfismo entre A e B.

Definição 1.11 (Subálgebra)**.** Seja A uma álgebra. Um subespaço B de A é uma subálgebra da álgebra A se $b_1 \cdot b_2 \in B$ para quaisquer $b_1, b_2 \in B$.

Exemplo 1.12. Sejam V um K-espaço vetorial com base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e A o espaço de todas as transformações lineares de V, representado por $\mathrm{End}_K V$, então A é uma K-álgebra munida do produto dado pela composição de transformações lineares de V em V. Se $B = M_n(K)$ e $f : A \to B$ é a aplicação na qual, para todo $T \in A$, $f(T)$ é a forma matricial de T relativa à base β de V, então f é um isomorfismo de álgebras.

Exemplo 1.13. Seja $UT_n(K)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ triangulares superiores com entradas em K, isto é, $UT_n(K)$ é o subespaço de $M_n(K)$ que consiste das matrizes (a_{ij}) tais que $a_{ij} = 0$ se $i > j$. Então $UT_n(K)$ é uma subálgebra de $M_n(K)$.

Sejam I um conjunto de índices, $\{A_i \mid i \in I\}$ uma família de subálgebras de uma K-álgebra A e

$$B = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Dados $b, b' \in B$ e $\alpha \in K$, então $\alpha b + b', bb' \in A_i$, para todo $i \in I$, logo $\alpha b + b', bb' \in B$. Isso implica que uma interseção arbitrária de subálgebras de A é uma subálgebra de A.

Definição 1.14. Sejam A uma K-álgebra e S um conjunto de elementos de A. Definimos a subálgebra gerada por S, denotada por (S), como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contêm S.

É fácil observar que (S) é a menor subálgebra de A, com respeito à inclusão, que contém S. Mais adiante, na Proposição 1.38, após apresentarmos o conceito de álgebra livre, veremos uma caracterização dos elementos da subálgebra (S).

Definição 1.15. Seja A uma álgebra e $a \in A$ um elemento qualquer. Para $n \geq 1$, definimos

$$a^1 := a \quad \text{e} \quad a^{n+1} := a(a^n).$$

Assim, por exemplo, a definição anterior nos diz que $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a(a^2) = a(a \cdot a)$ e $a^4 = a(a^3) = a(a(a \cdot a))$.

Exemplo 1.16. Seja $N = \text{span}\{u, u^2\} \subset M_3(K)$, onde

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então N é a subálgebra de $M_3(K)$ gerada pelo conjunto unitário $\{u\}$. De fato, N é uma K-álgebra, pois $u^3 = u(u \cdot u) = 0$. Além disso, se N' é uma subálgebra de $M_3(K)$ que contém u, então $u^2 \in N'$, assim, $N \subseteq N'$. Logo, $(\{u\}) = N$. Analogamente, podemos concluir que $M = \text{span}\{v, v^2\} \subset M_3(K)$, onde

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é a subálgebra de $M_3(K)$ gerada por $\{v\}$, observando que $v^3 = v$. Agora considere $M_\lambda = \text{span}\{1, w\} \subset M_2(K)$, onde 1 é a matriz identidade de $M_2(K)$ e

$$w = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in K.$$

Uma vez que $w^2 = \lambda \cdot 1$, segue que, para $\lambda \neq 0$, M_λ é gerada por $\{w\}$.

Definição 1.17 (Ideal)**.** Seja A uma álgebra. Dizemos que um subespaço I de A é um ideal à esquerda (respectivamente à direita) se $aI \subseteq I$ (respectivamente $Ia \subseteq I$) para todo $a \in A$. Um ideal de A é um subespaço que é ideal à esquerda e também à direita de A.

Exemplo 1.18. Se A é uma álgebra, então $\{0\}$ e A são ideais de A.

Exemplo 1.19. Se $f : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras, então o núcleo de f, isto é, o conjunto

$$\ker f = \{a \in A \,|\, f(a) = 0\},$$

é um ideal de A. De fato, dado $a \in A$ e $b \in \ker f$, então, como f é um homomorfismo, $f(ab) = f(a)f(b) = 0$ e $f(ba) = f(b)f(a) = 0$, logo, ab e ba estão em $\ker f$.

Assim como ocorre para homomorfismos de anéis, temos que f é um monomorfismo se, e somente se, $\ker f = \{0\}$.

Exemplo 1.20. A interseção arbitrária de ideais de uma álgebra A é um ideal de A. Com efeito, sejam $\{I_j\}_{j \in J}$ uma família de ideais de A e $I = \bigcap_{j \in J} I_j$. Dados $a \in A$ e

$i \in I$, uma vez que i está em I_j para todo $j \in J$, segue que $ai \in I_j$, para todo $j \in J$, consequentemente, $ai \in I$. Isso mostra que I é um ideal à esquerda de A. Analogamente, mostra-se que I é um ideal à direita de A.

Definição 1.21 (Álgebra quociente). Sendo A uma álgebra e I um ideal de A, o espaço quociente A/I com a multiplicação

$$\begin{aligned} A/I \times A/I &\to A/I \\ (a+I, b+I) &\mapsto ab+I \end{aligned}$$

é uma álgebra chamada de quociente de A por I.

Exemplo 1.22. Sendo A uma álgebra e I um ideal de A, a aplicação quociente

$$\begin{aligned} \pi : A &\to A/I \\ a &\mapsto \pi(a) = \overline{a} = a + I \end{aligned}$$

é um epimorfismo com núcleo I, chamado de projeção canônica.

1.2 Álgebras Livres

Nesta seção nos direcionaremos ao processo de construção de uma álgebra essencial para nosso estudo: a álgebra livre $K\{X\}$, onde X é um conjunto não vazio.

Para construirmos uma álgebra livre, primeiramente fixamos um conjunto não vazio X e adicionamos a ele mais dois símbolos, parênteses à esquerda e à direita, para obter um conjunto $X^* = X \cup \{(,)\}$. Considere todas as possíveis sequências finitas de elementos do conjunto X^*. Duas sequências $a_1a_2\dots a_m$ e $b_1b_2\dots b_n$, onde $a_i, b_j \in X^*$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, são consideradas iguais se $m = n$ e $a_i = b_i$ para $i = 1, 2, \dots, m$. Definimos indutivamente um conjunto $V[X]$ de sequências de elementos do conjunto X^* da seguinte forma:

1. todos os elementos do conjunto X pertencem ao conjunto $V[X]$;
2. se $x_1, x_2 \in X$ e $u, v \in V[X]\backslash X$, então as sequências x_1x_2, $x_1(u)$, $(v)x_2$, e $(u)(v)$ também pertencem ao conjunto $V[X]$. Nenhuma outra sequência está contida em $V[X]$.

Chamamos as sequências de $V[X]$ de palavras não associativas de elementos do conjunto X. O número de elementos do conjunto X que aparecem em uma palavra não associativa v é chamado de comprimento de v, e é denotado por $d(v)$.

Exemplo 1.23. Considere o conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, então a sequência

$$(x_1(x_2x_3))x_4$$

é uma palavra não associativa de elementos do conjunto X. De fato, no primeiro passo da construção de $V[X]$, todos os elementos de X são considerados palavras não associativas válidas. Portanto, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in V[X]$. No segundo passo da construção, aplicamos as regras indutivas para combinar elementos de X e palavras não associativas já existentes em $V[X]$. A sequência x_2x_3 é uma palavra não associativa válida, pois $x_2, x_3 \in X$. A sequência $x_1(x_2x_3)$ também é uma palavra não associativa válida, onde estamos combinando o elemento x_1 de X com a palavra não associativa x_2x_3. Finalmente, a sequência $(x_1(x_2x_3))x_4$ é formada combinando a palavra não associativa $x_1(x_2x_3)$ com o elemento x_4 de X.

Por outro lado, a sequência $(x_1(x_2x_3)x_4)$ não é uma palavra não associativa, visto que não pode assumir nenhuma das formas possíveis de palavras de $V[X]$.

Proposição 1.24. *Seja u uma palavra não associativa de elementos de um conjunto X. Então*

1. *o número de parênteses à esquerda de u é igual ao número de parênteses à direita;*

2. *em qualquer subsequência inicial da palavra u, o número de parênteses à esquerda é maior ou igual ao número de parênteses à direita.*

Demonstração. Faremos indução no comprimento da palavra u. Para palavras de comprimento 0, 1, e 2 não há parênteses e ambos os itens da proposição são satisfeitos trivialmente.

Seja u uma palavra de comprimento 3, temos que $u = x(u')$ ou $u = (u')x$ com $d(u') = 2$. Portanto u tem um parêntes à esquerda e um parênteses à direita e os itens 1 e 2 também são satisfeitos.

Suponha que a propriedade seja verdadeira para palavras de comprimento até $n \geq 3$. Vamos mostrar que ela também é verdadeira para palavras de comprimento $n+1$. Seja u uma palavra não associativa de comprimento $n+1$. Temos os seguintes casos:

1) existem $x \in X$ e $v \in V[X] \setminus X$ tais que $u = x(v)$. Então $d(v) = n$, logo, pela hipótese de indução, os itens 1 e 2 são válidos para v. Portanto, u tem um parênteses à direita e um parênteses à esquerda a mais que v, logo, u tem a mesma quantidade de parênteses à esquerda e à direita. Além disso, qualquer subsequência inicial da palavra u, tem um número maior de parênteses à esquerda, a menos que a subsequência seja x ou próprio u, onde, nestes casos, o número de parênteses à esquerda e à direita coincidem.

2) existem $x \in X$ e $v \in V[X] \backslash X$ tais que $u = (v)x$. Neste caso, o processo para mostrar que u tem a mesma quantidade de parênteses à esquerda e à direita é análogo ao caso anterior. Também podemos observar que qualquer subsequência inicial da palavra u, tem um número maior de parênteses à esquerda, a menos que a subsequência seja (v) ou próprio u, onde, nestes casos, o número de parênteses à esquerda e à direita coincidem.

3) existem $v, w \in V[X] \backslash X$ tais que $u = (v)(w)$. Então $2 \leq d(v), d(w) \leq n-1$, logo, pela hipótese de indução, os itens 1 e 2 são válidos para as palavras v e w. Consequentemente, é claro que também são válidos para u.

Portanto, em todos os casos, os itens 1 e 2 são satisfeitos. □

Definimos no conjunto $V[X]$ uma operação binária, denotada por "$\cdot$", de acordo com as seguintes regras: sejam $x_1, x_2 \in X$ e $u, v \in V[X] \backslash X$, então

$$x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2, \quad x_1 \cdot u = x_1(u),$$
$$v \cdot x_2 = (v)x_2, \quad u \cdot v = (u)(v).$$

Proposição 1.25. *Toda palavra não associativa v de elementos de um conjunto X, com $d(v) \geq 2$, tem uma representação única na forma de um produto de duas palavras não associativas de comprimento menor.*

Demonstração. A existência de tal representação decorre diretamente da definição de palavras não associativas. Considere v uma palavra não associativa tal que $d(v) = n \geq 2$. Suponha que v tenha duas representações diferentes, $v = u \cdot w = u' \cdot w'$, com $d(u)$, $d(w)$, $d(u')$, $d(w') \geq 1$. Sabemos que $d(u) + d(w) = d(u') + d(w')$, logo temos os seguintes casos

1. $d(u) = 1$, $d(w) = 1$. Neste caso, v tem comprimento 2, assim $d(u') = d(w') = 1$. Logo, temos $u = x$, $w = y$, $u' = x'$ e $w' = y'$, onde x, y, x', $y' \in X$. Portanto, $v = xy = x'y'$, daí, $x = x'$ e $y = y'$.

2. $d(u) = 1$, $d(w) > 1$. Aqui temos $u = x$, onde $x \in X$, e $v = x(w)$. Agora, vamos supor que $d(u') > 1$. Se isso fosse verdade, teríamos $v = (u')(w')$, se $d(w') > 1$, ou $v = (u')y'$, se $d(w') = 1$, onde $w' = y' \in X$. No entanto, isso é uma contradição, pois uma representação de v começa com x e outra com (. Portanto, devemos ter $d(u') = 1$, o que implica que $u' = u = x$. Com isso, $d(w') = d(w)$ e, consequentemente, $w = w'$.

3. $d(u) > 1$, $d(w) = 1$. Nesta situação, temos $w = y$, com $y \in X$, e $v = (u)y$. Agora, vamos supor que $d(w') > 1$. Se isso fosse verdade, teríamos $v = (u')(w')$, se

$d(u') > 1$, ou $v = x'(w')$, se $d(u') = 1$, onde $u' = x' \in X$. No entanto, isso é uma contradição, pois uma representação de v termina com y e outra com). Assim, $d(w') = 1$, o que implica que $w' = w = y$. Daí, $d(u') = d(u)$ e, portanto, $u = u'$.

4. $d(u)$, $d(w) > 1$. Neste caso, segue pelos casos anteriores que $d(u'), d(w') > 1$, assim $v = (u)(w) = (u')(w')$. Suponha que $d(u) > d(u')$, então $u')$ é uma subsequência inicial da palavra u. Sendo u' uma palavra não associativa, então, pela primeira parte da Proposição 1.24, u' possui a mesma quantidade de parênteses à direita e à esquerda, logo $u')$ possui mais parênteses à direita do que à esquerda, contrariando a segunda parte dessa mesma proposição, já que $u')$ é subsequência inicial de u. Além disso, quando supomos que $d(u) < d(u')$, temos uma contradição análoga. Assim, $d(u) = d(u')$, o que implica que $u = u'$ e $w = w'$.

Assim, o resultado está provado. □

Consideramos agora o K-espaço vetorial $K\{X\}$ tendo como base o conjunto $V[X]$, e estendemos a operação de multiplicação definida em $V[X]$ para $K\{X\}$ pela regra

$$\left(\sum_i \alpha_i u_i\right) \cdot \left(\sum_j \beta_j v_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (u_i \cdot v_j),$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in K$ e $u_i, v_j \in V[X]$. Com essa estrutura de multiplicação, obtemos a K-álgebra $K\{X\}$ que é chamada de álgebra livre sobre o corpo K do conjunto de geradores X. Com isso, se f é um elemento arbitrário de $K\{X\}$, então f é uma soma finita de produtos de elementos de K por elementos de $V[X]$, logo aparecerá em f apenas um número finito de elementos de X, por exemplo, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Neste caso, escrevemos $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definição 1.26. Considere a álgebra livre $K\{X\}$,

1. os elementos de $K\{X\}$ são chamados de polinômios não associativos de elementos do conjunto X, ou, simplesmente, polinômios;

2. um polinômio não associativo da forma αv, onde $\alpha \in K\backslash\{0\}$ e $v \in V[X]$, é chamado de monômio não associativo, ou, simplesmente, monômio;

3. se αv é um monômio, o comprimento da palavra não associativa v é chamado de grau do monômio αv e o denotamos por $\deg \alpha v$;

4. o máximo dos graus dos monômios cuja soma forma um polinômio f diferente de zero é chamado de grau do polinômio f e o denotamos por $\deg f$.

Observação 1.27. Note que se $v \in V[X]$, tem-se $\deg(v) = d(v)$. Neste trabalho, reservamos a notação $\deg(v)$ quando tratamos do grau do monômio v e $d(v)$ quando tratamos do comprimento da palavra não associativa v.

Definição 1.28. Sejam $u \in K\{X\}$ um monômio e $f \in K\{X\}$ um polinômio,

1. dizemos que o número de vezes que x_i aparece no monômio u é o grau de u em x_i, e o denotamos por $\deg_{x_i} u$;

2. o polinômio f é dito homogêneo em x_i se o grau de x_i em todos os monômios de f é o mesmo. Se f é homogêneo em todas as suas variáveis, dizemos que f é multihomogêneo;

3. o monômio u é dito linear em x_i se $\deg_{x_i} u = 1$;

4. chamamos o polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de linear em x_i se todos os seus monômios são lineares em x_i. Se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é multihomogêneo e linear em todas as suas n variáveis, dizemos que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é multilinear (de grau n);

5. se $f(x_1 \ldots, x_n)$ é um polinômio multihomogêneo, o multigrau de f é a n-upla
$$(\deg_{x_1} f, \ldots, \deg_{x_n} f).$$

Exemplo 1.29. Sejam

$$f(x_1, x_2) = x_1(x_1x_2) + ((x_1x_2)x_1)x_2 \quad \text{e} \quad g(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$$

polinômios em $K\{X\}$. Então $\deg f = 4$, f é homogêneo em x_1 e não é homogêneo em x_2. Por sua vez, $\deg g = 2$ e g é multilinear, uma vez que g é linear em x_1 e em x_2.

Definição 1.30. Denotamos por P_n o subespaço vetorial de $K\{X\}$ dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Pela definição anterior, segue que o polinômio $g(x_1, x_2)$ do Exemplo 1.29 pertence a P_2.

Observação 1.31. Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\{X\}$. Note que é possível reordenar os monômios de f, de modo a escrever f como uma soma de polinômios multihomogêneos.

Álgebras livres possuem a seguinte propriedade universal:

Teorema 1.32. *Seja A uma K-álgebra arbitrária e θ uma aplicação de um conjunto X em A. Então θ se estende únicamente a um homomorfismo da álgebra $K\{X\}$ em A.*

Demonstração. Primeiro estendemos θ a $V[X]$. Para isso, vamos definir indutivamente a aplicação $\theta' : V[X] \to A$ da seguinte maneira: $\theta'(x) = \theta(x)$ para todo $x \in X$. Suponha que θ' está definida para toda palavra em $V[X]$ de comprimento menor que $n \geq 2$. Seja $w \in V[X]$ de comprimento n, então pela Proposição 1.25, w tem uma representação única na forma de um produto de duas palavras de menor comprimento, $w = u \cdot v$. Os elementos $\theta'(u)$ e $\theta'(v)$ já estão definidos pois $d(u), d(v) < n$, então definimos $\theta'(w) = \theta'(u) \cdot \theta'(v)$. Essa aplicação está bem definida, pois u e v são unicamente determinados pela palavra w.

Agora vamos estender θ' para $K\{X\}$. Para isso, definimos $\theta'' : K\{X\} \to A$ da seguinte forma

$$\theta''\left(\sum_i \alpha_i u_i\right) = \sum_i \alpha_i \theta'(u_i)$$

para todo $\alpha_i \in K$ e $u_i \in V[X]$. Isso pode ser feito porque $K\{X\}$ é um K-espaço vetorial com base $V[X]$. Afirmamos agora ver que θ'' é um homomorfismo de $K\{X\}$ em A. Com efeito, dados $\sum_i \alpha_i u_i, \sum_j \beta_j v_j \in K\{X\}$, então

$$\begin{aligned}
\theta''\left(\left(\sum_i \alpha_i u_i\right) \cdot \left(\sum_j \beta_j v_j\right)\right) &= \theta''\left(\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (u_i \cdot v_j)\right) \\
&= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \theta'(u_i \cdot v_j) \\
&= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (\theta'(u_i) \cdot \theta'(v_j)) \\
&= \left(\sum_i \alpha_i \theta'(u_i)\right) \cdot \left(\sum_j \beta_j \theta'(v_j)\right) \\
&= \theta''\left(\sum_i \alpha_i u_i\right) \cdot \theta''\left(\sum_j \beta_j v_j\right).
\end{aligned}$$

Mostremos agora a unicidade de θ''. Considere o homomorfismo de álgebras $\gamma : K\{X\} \to A$ que estende θ a $V[X]$. Logo, $\gamma(x) = \theta(x)$ para todo $x \in X$. Suponha que $\gamma(v) = \theta'(v)$ para todo $v \in V[X]$ de comprimento menor que $n \geq 2$. Seja $u \in V[X]$ tal que $d(u) = n$, então $u = u_1 \cdot u_2$, onde $d(u_1), d(u_2) < n$. Logo, por hipótese indutiva, segue-se que

$$\gamma(u) = \gamma(u_1 \cdot u_2) = \gamma(u_1) \cdot \gamma(u_2) = \theta'(u_1) \cdot \theta'(u_2) = \theta'(u_1 \cdot u_2) = \theta'(u) = \theta''(u).$$

Como $V[X]$ é a base de $K\{X\}$, segue-se que $\gamma = \theta''$. Isso conclui a prova do teorema.

□

Definição 1.33 (T-ideal)**.** Diremos que um ideal I de $K\{X\}$ é um T-ideal se I é invariante por todos os endomorfismos de $K\{X\}$, isto é, $\phi(I) \subseteq I$ para todo ϕ endomorfismo de $K\{X\}$.

É fácil observar que se I é um T-ideal e $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$, então

$$f(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in I,$$

para quaisquer $h_1, h_2, \ldots, h_n \in K\{X\}$.

Exemplo 1.34. Se I e J são T-ideais de $K\{X\}$, então $I + J$ é um T-ideal de $K\{X\}$. De fato, seja ϕ um endomorfismo de $K\{X\}$ e $i + j \in I + J$, onde $i \in I$ e $j \in J$, então $\phi(i + j) = \phi(i) + \phi(j)$. Uma vez que $\phi(i) \in I$ e $\phi(j) \in J$, temos $\phi(i + j) \in I + J$.

Proposição 1.35. *Seja S um subconjunto de $K\{X\}$. Então a interseção de todos os T-ideais de $K\{X\}$ que contêm S, denotada por $\langle S\rangle^T$, é um T-ideal de $K\{X\}$.*

Demonstração. Segue do Exemplo 1.20 que $\langle S\rangle^T$ é um ideal. Assim, resta-nos mostrar que $\langle S\rangle^T$ é invariante por endomorfismos de $K\{X\}$. Sejam $\phi \in \text{End } K\{X\}$ e $a \in \langle S\rangle^T$, então a pertence a todo T-ideal de $K\{X\}$ que contém S, logo $\phi(a)$ também pertence a todo T-ideal de $K\{X\}$ que contém S e, portanto, $\phi(a) \in \langle S\rangle^T$, o que conclui a demonstração. □

Chamamos $\langle S\rangle^T$ de T-ideal gerado por S. A proposição anterior nos diz que $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal, com respeito à inclusão, que contém S.

Observação 1.36. Se $S \subset K\{X\}$ e $S' \subseteq \langle S\rangle^T$, então $\langle S'\rangle^T \subseteq \langle S\rangle^T$.

Proposição 1.37. *Seja S um subconjunto não vazio de $K\{X\}$. Então $\langle S\rangle^T$ é o espaço vetorial gerado por elementos da forma*

$$p = \omega(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, f(h_1, h_2, \ldots, h_n), \omega_{j+1}, \ldots, \omega_m), \tag{1.1}$$

onde $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $\omega(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m)$ é um monômio em P_m, $1 \leq j \leq m$, $\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_m$ são monômios em $K\{X\}$ e $h_1, \ldots, h_n$ são polinômios em $K\{X\}$.

Demonstração. Seja W o espaço vetorial gerado por elementos da forma (1.1). Como $\langle S\rangle^T$ é um T-ideal e $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \langle S\rangle^T$, então $f(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \langle S\rangle^T$, para quaisquer $h_1, \ldots, h_n \in K\{X\}$. Pelo fato de $\langle S\rangle^T$ ser um ideal à esquerda, então para qualquer $u \in K\{X\}$, temos

$$u \cdot f(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \langle S\rangle^T.$$

Agora, como $\langle S\rangle^T$ é um ideal à direita, para qualquer $v \in K\{X\}$, temos

$$(u \cdot f(h_1, h_2, \ldots, h_n)) \cdot v \in \langle S\rangle^T.$$

Assim, usando esse argumento quantas vezes forem necessárias, concluímos que um polinômio da forma (1.1) pertence a $\langle S\rangle^T$. Portanto, $W \subseteq \langle S\rangle^T$.

Mostraremos agora que W é um T-ideal que contém S. A inclusão $S \subset W$ é óbvia. Como W é um espaço vetorial, para mostrar que W é um ideal é suficiente mostrar que dado um polinômio $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \in K\{X\}$, onde $u_i \in V[X]$ e $\alpha_i \in K$ para quaisquer $i = 1, \ldots, k$ e p um polinômio da forma (1.1), então $u \cdot p \in W$ e $p \cdot u \in W$. De fato,

$$u \cdot p = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right) \cdot p = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (u_i \cdot p) \in W$$

e

$$p \cdot u = p \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (p \cdot u_i) \in W.$$

Logo W é um ideal de $K\{X\}$. Agora, seja $\phi \in \text{End } K\{X\}$ e $p \in W$ da forma (1.1). Temos

$$\begin{aligned}
\phi(p) &= \phi(\omega(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, f(h_1, h_2, \ldots, h_n), \omega_{j+1}, \ldots, \omega_m)) \\
&= \omega(\phi(\omega_1), \ldots, \phi(\omega_{j-1}), \phi(f(h_1, h_2, \ldots, h_n)), \phi(\omega_{j+1}), \ldots, \phi(\omega_m)) \\
&= \omega(\phi(\omega_1), \ldots, \phi(\omega_{j-1}), f(\phi(h_1), \phi(h_2), \ldots, \phi(h_n)), \phi(\omega_{j+1}), \ldots, \phi(\omega_m)).
\end{aligned}$$

Logo, $\phi(p)$ é uma combinação linear de elementos da forma (1.1) e, portanto, está em W. Assim, concluímos que W é um T-ideal que contém S, portanto, $\langle S \rangle^T \subseteq W$. □

1.3 Identidades Polinomiais de uma Álgebra

Sejam $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um polinômio da álgebra livre $K\{X\}$, A uma K-álgebra qualquer e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementos de A. Pelo Teorema 1.32 existe um único homomorfismo $\theta : K\{X\} \to A$ que envia x_i para a_i para todos $i = 1, 2, \ldots, n$ e envia os demais elementos do conjunto X para zero. Vamos denotar a imagem do elemento f sob o homomorfismo θ por $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, ou seja, o elemento $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é obtido pela substituição dos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no polinômio não associativo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Na Definição 1.14, vimos que uma subálgebra gerada por um conjunto $S \subset K\{X\}$, denotada por (S), é a interseção de todas as subálgebras de A que contêm S. Com a discussão acima, podemos fazer a seguinte caracterização:

Proposição 1.38. *Sejam A uma K-álgebra, S um conjunto não vazio de elementos de A e*

$$\overline{S} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i(a_1, \ldots, a_n) \mid n > 0,\ a_1, \ldots, a_n \in S \text{ e } v_i(x_1, \ldots, x_n) \in V[X], \forall i = 1, \ldots, k \right\}.$$

Então $\overline{S} = (S)$.

Demonstração. Dado $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{S}$, onde $v_i \in V[X]$ para todo $i = 1, \ldots, n$, é claro que f pertence a toda subálgebra de A que contém S, assim $f \in (S)$ e, portanto, $\overline{S} \subseteq (S)$.

Agora sejam $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i(a_1, \ldots, a_n)$, $g = \sum_{j=1}^{l} \beta_j w_j(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{S}$, onde $v_i, w_j \in V[X]$ para quaisquer $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, l$, e $a_1, \ldots, a_n$ são elementos de S que aparecem em v_i ou w_j para quaisquer $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq l$. Assim,

$$fg = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \alpha_i \beta_j u_{ij}(a_1, \ldots, a_n),$$

onde $u_{ij}(a_1, \ldots, a_n) = v_i w_j$. Com isso, $fg \in \overline{S}$. Portanto, $\overline{S}$ é uma subálgebra de A que contém S, logo $(S) \subseteq \overline{S}$. $\square$

Definição 1.39. Um polinômio não associativo $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\{X\}$ é chamado de identidade da álgebra A se $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Denotamos o conjunto de todas as identidades de uma álgebra A por $Id(A)$. Quando existe $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\{X\} \backslash \{0\}$ que é identidade para uma álgebra A, esta álgebra é chamada de PI-álgebra.

Exemplo 1.40. Os polinômios $x_1x_2 - x_2x_1$ e $(x_1x_2)x_3 - x_3(x_2x_1)$ são identidades para a $\mathbb{R}$-álgebra dos números reais.

Exemplo 1.41. Uma álgebra é chamada de álgebra de Lie se satisfaz as identidades polinomiais x_1^2 e $(x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2$. Com isso, o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, munido do produto vetorial, é uma álgebra de Lie. Além disso, toda álgebra associativa A munida do produto $[a, b] = ab - ba$, com $a, b \in A$, é uma álgebra de Lie.

Exemplo 1.42. Sejam A e B álgebras isomorfas. Então $Id(A) = Id(B)$.

Definição 1.43. Um conjunto de identidades $S \subseteq Id(A)$ é uma base de $Id(A)$ se $Id(A) = \langle S \rangle^T$.

Proposição 1.44. *Seja A uma álgebra. O conjunto $Id(A)$ é um T-ideal de $K\{X\}$.*

Demonstração. Mostremos primeiramente $Id(A)$ é um ideal da álgebra $K\{X\}$. Dados $\alpha \in K$ e $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_n) \in Id(A)$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são os elementos de X que aparecem em f ou em g. Então $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ e $g(b_1, \ldots, b_n) = 0$ para todos $a_i, b_i \in A$, $i = 1, \ldots n$. Logo,

$$(\alpha f + g)(a_1, \ldots, a_n) = \alpha f(a_1, \ldots, a_n) + g(a_1, \ldots, a_n) = \alpha 0 + 0 = 0,$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Assim, $\alpha f + g \in Id(A)$ e, portanto, $Id(A)$ é um subespaço de $K\{X\}$. Seja agora $f(x_1, \ldots, x_n) \in Id(A)$ e $h(x_1, \ldots, x_n) \in K\{X\}$, onde n é o maior índice das variáveis que aparecem em f ou em h, então $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$. Logo,

$$hf(a_1, \ldots, a_n) = h(a_1, \ldots, a_n) \cdot f(a_1, \ldots, a_n) = h(a_1, \ldots, a_n) \cdot 0 = 0$$

e

$$fh(a_1,\dots,a_n) = f(a_1,\dots,a_n)\cdot h(a_1,\dots,a_n) = 0\cdot h(a_1,\dots,a_n) = 0,$$

para todos $a_1,\dots,a_n \in A$. Isso mostra que $Id(A)$ é um ideal de $K\{X\}$.

Agora, nos resta mostrar que $Id(A)$ é invariante por qualquer endormorfismo de $K\{X\}$. Seja $\phi \in \text{End } K\{X\}$, dado $f(x_1,\dots,x_n) \in Id(A)$, temos $\phi(f(x_1,\dots,x_n)) = f(\phi(x_1),\dots,\phi(x_n))$, com $\phi(x_i)(x_1,\dots,x_l) \in K\{X\}$ para todo $i = 1,\dots,n$, onde l é o maior índice que aparece em algum dos $\phi(x_i)$, com $i = 1,\dots,n$. Uma vez que $\phi(x_i)(a_1,\dots,a_l) \in A$ para todo $a_1,\dots,a_l \in A$, então $f(\phi(x_1),\dots,\phi(x_n))$ continua sendo uma identidade de A. Portanto, $\phi(Id(A)) \subseteq Id(A)$, isto é, $Id(A)$ é um T-ideal. $\square$

Agora vamos demonstrar o Teorema 1.45, que será usado na demonstração dos principais resultados do Capítulo 3.

Teorema 1.45. *Sejam $f(x_1,\dots,x_m) \in K\{X\}$ e $k \in \{1,2,\dots,m\}$. Considere*

$$f(x_1,\dots,x_m) = \sum_{i=0}^{d} f_i \in K\{X\},$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_k. Se o corpo K for infinito, então $f_i \in \langle f\rangle^T$, para todo $i = 0,1,\dots,d$. Em particular, se f é uma identidade de uma álgebra, então f_i também será, para todo $i = 0,1,\dots,d$. Em razão disso, cada componente multihomogênea de f pertence a $\langle f\rangle^T$ e, se f for uma identidade para uma álgebra, então cada componente multihomogênea também será.

Demonstração. Provaremos aqui o caso $k = 1$, os demais casos são análogos. Seja $\langle f\rangle^T$ o T-ideal de $K\{X\}$ gerado por f. Escolhemos $d+1$ elementos diferentes $\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_d$ de K. Se $j = 0,1,\dots,d$, uma vez que f_i tem grau i em x_1, para todo $i = 0,1,\dots,d$, então

$$f(\xi_j x_1, x_2,\dots,x_m) = \sum_{i=0}^{d} \xi_j^i f_i(x_1,x_2,\dots,x_m).$$

Além disso, uma vez que $\langle f\rangle^T$ é um T-ideal, temos

$$f(\xi_j x_1, x_2,\dots,x_m) = \sum_{i=0}^{d} \xi_j^i f_i(x_1,x_2,\dots,x_m) \in \langle f\rangle^T, \quad j = 0,1,\dots,d. \tag{1.2}$$

Mostremos agora que existem $z_0, z_1, \dots, z_d \in K$ tais que

$$\begin{cases} z_0 + z_1 + \cdots + z_d = 0 \\ \xi_0 z_0 + \xi_1 z_1 + \cdots + \xi_d z_d = 0 \\ \vdots \\ \xi_0^i z_0 + \xi_1^i z_1 + \cdots + \xi_d^i z_d = 1 \\ \vdots \\ \xi_0^d z_0 + \xi_1^d z_1 + \cdots + \xi_d^d z_d = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $0 \leq i \leq d$. De fato, uma vez que o determinante da matriz associada ao sistema linear (1.3) é o determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_d \\ \xi_0^2 & \xi_1^2 & \dots & \xi_d^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_0^d & \xi_1^d & \dots & \xi_d^d \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\xi_j - \xi_i)$$

e é diferente de 0, segue-se que o sistema (1.3) é possível e determinado. Logo por (1.2) e (1.3), temos

$$z_0 f(\xi_0 x_1, \dots, x_m) + \cdots + z_i f(\xi_i x_1, \dots, x_m) + \cdots + z_d f(\xi_d x_1, \dots, x_m) = f_i(x_1, \dots, x_m),$$

e concluímos que $f_i(x_1, \dots, x_m)$ pertence a $\langle f \rangle^T$, para todo $i = 0, 1, \dots, d$.

Suponha agora que f é uma identidade de uma álgebra A. Pela Observação 1.36 $\langle f \rangle^T \subseteq Id(A)$, então

$$f_i \in \langle f \rangle^T \subseteq Id(A),$$

para todo $i = 0, 1, \dots, d$.

Assim, escrevendo f_i como soma de componentes homogêneas em x_2, onde $i \in \{1, \dots, d\}$, obtemos componentes de f homogêneas em x_1 e x_2 e, por um argumento análogo ao que vimos acima, cada uma destas componentes pertence a $\langle f_i \rangle^T$. Uma vez que $\langle f_i \rangle^T \subseteq \langle f \rangle^T$, então cada componente de f_i homogênea em x_1 e x_2 pertence a $\langle f \rangle^T$, para todo $i = 1, \dots, d$, ou seja, toda componente de f homogênea em x_1 e x_2 pertence a $\langle f \rangle^T$. Repetindo o mesmo processo para as variáveis $x_3, \dots, x_n$, chegamos à conclusão de que cada componente multihomogênea de f pertence a $\langle f \rangle^T$. Com isso, concluímos a demonstração. $\square$

1.4 Álgebras de Jordan

Nesta seção, daremos a definição de álgebras de Jordan e álgebras associativas à potências e mostraremos que toda álgebra de Jordan é associativa à potências. De agora em diante o corpo K terá característica diferente de 2, a menos que se mencione o contrário.

Definição 1.46. Seja A uma álgebra. Dados $a_1, a_2, a_3 \in A$, o elemento

$$(a_1, a_2, a_3) := (a_1 a_2) a_3 - a_1 (a_2 a_3)$$

é chamado de associador de a_1, a_2, a_3.

É claro que uma álgebra A é associativa se, e somente se, $(x_1, x_2, x_3) \in K\{X\}$ é uma identidade polinomial para A.

Definição 1.47 (Álgebra de Jordan)**.** Uma álgebra A é chamada de álgebra de Jordan se satisfaz as identidades polinomiais:

$$[x_1, x_2] := x_1 x_2 - x_2 x_1 \quad \text{e} \quad (x_1^2, x_2, x_1).$$

Da definição anterior, segue que uma álgebra de Jordan é uma PI-álgebra.

Dada uma álgebra associativa A, o espaço vetorial de A munido da multiplicação da Definição 1.7, dada por $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, onde $a, b \in A$, é uma álgebra de Jordan. De fato,

$$[a, b] = a \circ b - b \circ a = \frac{1}{2}(ab + ba) - \frac{1}{2}(ba + ab) = 0$$

e

$$\begin{aligned}
(a^2, b, a) &= (a^2 \circ b) \circ a - a^2 \circ (b \circ a) \\
&= \frac{1}{2}(a^2 b + b a^2) \circ a - a^2 \circ \frac{1}{2}(ba + ab) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}((a^2 b + b a^2) a + a(a^2 b + b a^2)) - \frac{1}{2}(a^2(ba + ab) + (ba + ab) a^2)\right] \\
&= \frac{1}{4}(a^2 ba + ba^3 + a^3 b + aba^2 - a^2 ba - a^3 b - ba^3 - aba^2) = 0.
\end{aligned}$$

Observação 1.48. Se A for a álgebra $UT_n(K)$ de matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em K, então denotamos a álgebra de Jordan obtida dessa maneira por $UJ_n(K)$.

Exemplo 1.49. Toda álgebra comutativa e associativa é uma álgebra de Jordan.

Exemplo 1.50. Seja K um corpo qualquer, então as álgebras

$$N = \text{span}\{u, u^2\} \subset M_3(K), \text{ onde } u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \text{span}\{u, u^2\} \subset M_3(K), \text{ onde } u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$M_\lambda = \text{span}\{1, u\} \subset M_2(K)$, onde 1 é a identidade em $M_2(K)$ e $u = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, com $\lambda \in K$, e

$D_2 = \text{span}\{e_{11}, e_{12}\} \subset UJ_n(K)$

são álgebras de Jordan bidimensionais. Com efeito, sejam $x = \alpha_1 u + \beta_1 u^2$ e $y = \alpha_2 u + \beta_2 u^2$ em N, onde $\alpha_i, \beta_i \in K$, para $i = 1, 2$. Note que $u^3 = 0 = (u^2)(u^2)$, assim

$$xy - yx = (\alpha_1 u + \beta_1 u^2)(\alpha_2 u + \beta_2 u^2) - (\alpha_2 u + \beta_2 u^2)(\alpha_1 u + \beta_1 u^2) = 0.$$

Logo, N é comutativa. Analogamente, mostramos que M é comutativa, observando que $u^3 = u$ e $(u^2)(u^2) = u^2$, e que M_λ é comutativa, observando que $u^3 = \lambda u$ e $(u^2)(u^2) = \lambda u^2$. Agora, como o produto de matrizes é associativo, segue que as álgebras N, M e M_λ são de Jordan. Além disso, como D_2 é uma subálgebra de $UJ_2(K)$ (que é uma álgebra de Jordan), então D_2 é de Jordan.

Definição 1.51 (Álgebra associativa à potências)**.** Uma álgebra A é chamada de associativa à potências se a subálgebra gerada por qualquer elemento de A for associativa.

Uma caracterização das álgebras associativas à potência, e que justifica o nome, é dada a seguir.

Proposição 1.52. *Uma álgebra A é associativa à potências se, e somente se, para todo $a \in A$ e para todos $m, n > 0$, vale*

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}.$$

Demonstração. Seja A uma álgebra associativa à potências, $a \in A$ um elemento qualquer e B a subálgebra gerada por a. Sendo $m \in \mathbb{N}$, mostremos por indução sobre n que $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Se $n = 1$, então $a^1 \cdot a^m = a(a^m) = a^{m+1}$. Suponha que $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ para algum natural menor ou igual a $n > 1$. Logo, usando a associatividade de B e a hipótese de indução, temos

$$a^{n+1} \cdot a^m = (a(a^n))(a^m) = a(a^{n+m}) = a^{n+m+1}$$

e segue o resultado.

Reciprocamente, suponha que, para todo $m, n > 0$, tem-se $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$. Sendo B a subálgebra gerada por a, mostraremos que B é associativa. Se $f \in B$, pela Proposição 1.38, temos $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i(a, \ldots, a)$, onde $v_i(x_1, \ldots, x_l)$ é um monômio em $K\{X\}$ e $\lambda_i \in K$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Sendo m_i o comprimento de v_i, mostremos, por indução sobre m_i, que $v_i(a, \ldots, a) = a^{m_i}$. Para $m_i = 1$, temos $v_i(a) = a$ e segue o resultado. Suponha que $m_i > 1$, então pela Proposição 1.25, existem, monômios v_i' e v_i'' de comprimento menor que m_i tais que $v_i = v_i' v_i''$. Sejam m_{i_1}, m_{i_2} os comprimentos de v_i' e v_i'' respectivamente, então, usando a hipótese de indução, temos

$$v_i(a, \ldots, a) = v_i'(a, \ldots, a) v_i''(a, \ldots, a) = a^{m_{i_1}} a^{m_{i_2}} = a^{m_{i_1} + m_{i_2}} = a^{m_i}.$$

Portanto, podemos escrever $f = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i a^i$. Assim, dados $f = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i a^i$, $g = \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j a^j$ e $h = \sum_{k=1}^{n_3} \gamma_k a^k$ em B, como

$$\begin{aligned}(a^i, a^j, a^k) = (a^i a^j) a^k - a^i (a^j a^k) &= a^{i+j} a^k - a^i a^{j+k} \\ &= a^{i+j+k} - a^{i+j+k} = 0,\end{aligned}$$

para quaisquer $i = 1, \ldots, n_1, j = 1, \ldots, n_2$ e $k = 1, \ldots, n_3$, segue que $(f, g, h) = 0$ e, portanto, B é associativa. Consequentemente, A é associativa à potências. □

Exemplo 1.53. Toda álgebra associativa é associativa à potências.

Exemplo 1.54. Considere a álgebra de Jordan $D_2 = span\{e_{11}, e_{12}\} \subset UJ_2(K)$. Então D_2 não é uma álgebra associativa, mas é associativa à potências. De fato, do Exemplo 1.8, sabemos que D_2 não é associativa. Seja agora $u = \alpha e_{11} + \beta e_{12} \in D_2$, então

$$u^2 = u \circ u = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad u^3 = u \circ u^2 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & \alpha^2\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad u^4 = u \circ u^3 = \begin{pmatrix} \alpha^4 & \alpha^3\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, se $n > 0$, por indução em n, concluímos que

$$u^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & \alpha^{n-1}\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, se $m, n > 0$, temos

$$u^n \circ u^m = \begin{pmatrix} \alpha^n & \alpha^{n-1}\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \alpha^m & \alpha^{m-1}\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{n+m} & \alpha^{n+m-1}\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = u^{n+m}.$$

Logo, D_2 é associativa à potências.

Exemplo 1.55. A álgebra livre $K\{X\}$ não é associativa à potências, uma vez que se $x \in X$, temos

$$x^4 = x(x(x^2)) \neq (x^2)(x^2).$$

Exemplo 1.56. Sabemos que a álgebra $M_n(K)$, com $n > 1$, munida do produto usual de matrizes é uma álgebra não comutativa e associativa, logo $M_n(K)$ é uma álgebra associativa à potências que não é de Jordan.

Vimos nos exemplos anteriores que as álgebras M, N, M_λ e D_2 são álgebras de Jordan, de dimensão 2 e associativas à potências. A partir de agora nosso objetivo nesta seção será mostrar que toda álgebra de Jordan é associativa à potências.

Seja A uma K-álgebra comutativa. Para cada elemento $a \in A$ definimos o endomorfismo

$$\begin{aligned} R_a : A &\to A \\ x &\mapsto xa. \end{aligned}$$

A subálgebra da álgebra de endomorfismos do K-espaço vetorial A gerada por todos os possíveis operadores R_a, onde $a \in A$, é chamada de álgebra de multiplicação da álgebra A e é denotada por $R(A)$. Se A é uma subálgebra de uma álgebra B, denotamos por $R^B(A)$ a subálgebra gerada em $R(B)$ pelos operadores R_a, onde $a \in A$.

Seja A uma álgebra de Jordan e $x, y \in A$. Usando a comutatividade, temos

$$(x^2 y)x = x^2(yx) \Leftrightarrow (yx^2)x = (yx)x^2,$$

daí, $f(x_1, x_2) = (x_2 x_1^2)x_1 - (x_2 x_1)x_1^2$ é uma identidade para A. Agora observe que $R_x(R_{x^2}(y)) = R_x(yx^2) = (yx^2)x$ e $R_{x^2}(R_x(y)) = R_{x^2}(yx) = (yx)x^2$, daí $R_x(R_{x^2}(y)) = R_{x^2}(R_x(y))$. Como y é arbitrário em A, temos que $R_x \cdot R_{x^2} = R_{x^2} \cdot R_x$, portanto,

$$[R_x, R_{x^2}] = 0. \tag{1.4}$$

Faremos agora um processo análogo ao de linearização para a identidade $f(x_1, x_2) = (x_2 x_1^2)x_1 - (x_2 x_1)x_1^2$ da álgebra de Jordan A. Tal processo consiste em obter um polinômio multilinear que é consequência de f, isto é, está no T-ideal gerado por f.

Começamos este processo calculando $f(a_1 + a_2, y) - f(a_1, y) - f(a_2, y)$, onde $a_1, a_2, y \in$

A. Temos

$$\begin{aligned}
&f(a_1+a_2,y)-f(a_1,y)-f(a_2,y)\\
&\quad=((a_1+a_2)^2y)(a_1+a_2)-(a_1+a_2)^2(y(a_1+a_2))\\
&\qquad-(a_1^2y)a_1+a_1^2(ya_1)-(a_2^2y)a_2+a_2^2(ya_2)\\
&\quad=(a_1^2y+2(a_1a_2)y+a_2^2y)a_1+(a_1^2y+2(a_1a_2)y+a_2^2y)a_2\\
&\qquad-(a_1^2(ya_1)+2(a_1a_2)(ya_1)+a_2^2(ya_1))-(a_1^2(ya_2)+2(a_1a_2)(ya_2)+a_2^2(ya_2))\\
&\qquad-(a_1^2y)a_1+a_1^2(ya_1)-(a_2^2y)a_2+a_2^2(ya_2)\\
&\quad=(a_1^2y)a_1+2((a_1a_2)y)a_1+(a_2^2y)a_1+(a_1^2y)a_2+2((a_1a_2)y)a_2+(a_2^2y)a_2-a_1^2(ya_1)\\
&\qquad-2(a_1a_2)(ya_1)-a_2^2(ya_1)-a_1^2(ya_2)-2(a_1a_2)(ya_2)-a_2^2(ya_2)-(a_1^2y)a_1\\
&\qquad+a_1^2(ya_1)-(a_2^2y)a_2+a_2^2(ya_2),
\end{aligned}$$

e dessa forma,

$$\begin{aligned}
&f(a_1+a_2,y)-f(a_1,y)-f(a_2,y)\\
&\quad=(a_2^2y)a_1+(a_1^2y)a_2-a_2^2(ya_1)-a_1^2(ya_2)+2((a_1a_2)y)a_1+2((a_1a_2)y)a_2\\
&\qquad-2(a_1a_2)(ya_1)-2(a_1a_2)(ya_2).
\end{aligned}$$

Agora seja

$$\begin{aligned}
g(a_1,a_2,y)&=(a_2^2y)a_1+(a_1^2y)a_2-a_2^2(ya_1)-a_1^2(ya_2)\\
&\quad+2((a_1a_2)y)a_1+2((a_1a_2)y)a_2-2(a_1a_2)(ya_1)-2(a_1a_2)(ya_2).
\end{aligned}$$

Então é claro que

$$\begin{aligned}
g(x_1,x_2,x_3)&=(x_2^2x_3)x_1+(x_1^2x_3)x_2-x_2^2(x_3x_1)-x_1^2(x_3x_2)\\
&\quad+2((x_1x_2)x_3)x_1+2((x_1x_2)x_3)x_2-2(x_1x_2)(x_3x_1)-2(x_1x_2)(x_3x_2)
\end{aligned}$$

também é uma identidade de A. Note que $g(x_1,x_2,x_3)$ ainda não é multilinear. Assim, vamos calcular $g(b_1+b_2,a_2,y)-g(b_1,a_2,y)-g(b_2,a_2,y)$, onde $b_1,b_2,a_2,y\in A$. Temos

$$\begin{aligned}
g(b_1+b_2,a_2,y) &= (a_2^2y)(b_1+b_2)+((b_1+b_2)^2y)a_2-a_2^2(y(b_1+b_2))-(b_1+b_2)^2(ya_2)\\
&\quad+2(((b_1+b_2)a_2)y)(b_1+b_2)+2(((b_1+b_2)a_2)y)a_2\\
&\quad-2((b_1+b_2)a_2)(y(b_1+b_2))-2((b_1+b_2)a_2)(ya_2)\\
&=(a_2^2y)b_1+(a_2^2y)b_2+((b_1^2+2b_1b_2+b_2^2)y)a_2-a_2^2(yb_1)-a_2^2(yb_2)\\
&\quad-(b_1^2+2b_1b_2+b_2^2)(ya_2)+2(((b_1a_2)+(b_2a_2))y)(b_1+b_2)\\
&\quad+2(((b_1a_2)+(b_2a_2))y)a_2-2((b_1a_2)+(b_2a_2))((ya_2)+(ya_2))\\
&\quad-2((b_1a_2)+(b_2a_2))(ya_2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
g(b_1+b_2,a_2,y) &= (a_2^2y)b_1+(a_2^2y)b_2+(b_1^2y)a_2+2((b_1b_2)y)a_2+(b_2^2y)a_2\\
&\quad-a_2^2(yb_1)-a_2^2(yb_2)-b_1^2(ya_2)-2(b_1b_2)(ya_2)-b_2^2(ya_2)\\
&\quad+2((b_1a_2)y)b_1+2((b_2a_2)y)b_1+2((b_1a_2)y)b_2+2((b_2a_2)y)b_2\\
&\quad+2((b_1a_2)y)a_2+2((b_2a_2)y)a_2-2(b_1a_2)(yb_1)-2(b_2a_2)(yb_1)\\
&\quad-2(b_1a_2)(yb_2)-2(b_2a_2)(yb_2)-2(b_1a_2)(ya_2)-2(b_2a_2)(ya_2.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
-g(b_1,a_2,y) &= -(a_2^2y)b_1-(b_1^2y)a_2+a_2^2(yb_1)+b_1^2(ya_2)\\
&\quad-2((b_1a_2)y)b_1-2((b_1a_2)y)a_2+2(b_1a_2)(yb_1)+2(b_1a_2)(ya_2),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-g(b_2,a_2,y) &= -(a_2^2y)b_2-(b_2^2y)a_2+a_2^2(yb_2)+b_2^2(ya_2)\\
&\quad-2((b_2a_2)y)b_2-2((b_2a_2)y)a_2+2(b_2a_2)(yb_2)+2(b_2a_2)(ya_2).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&g(b_1+b_2,a_2,y)-g(b_1,a_2,y)-g(b_2,a_2,y)\\
&=2[((b_1b_2)y)a_2+((b_2a_2)y)b_1+((b_1a_2)y)b_2-(b_1b_2)(ya_2)-(b_2a_2)(yb_1)-(b_1a_2)(yb_2)]
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
h(x_1,x_2,x_3,x_4) &= ((x_1x_2)x_4)x_3+((x_2x_3)x_4)x_1+((x_1x_3)x_4)x_2\\
&\quad-(x_1x_2)(x_4x_3)-(x_2x_3)(x_4x_1)-(x_1x_3)(x_4x_2)
\end{aligned}$$

é um polinômio multilinear que é uma identidade da álgebra de Jordan A. Portanto, dados $x, y, t, z \in A$, e usando a comutatividade, temos

$$((xy)z)t + ((xt)z)y + x((yt)z) = (xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz). \tag{1.5}$$

Agora notamos que no lado direito de (1.5) todas as variáveis aparecem simetricamente e, portanto, o lado esquerdo não deve depender das posições das variáveis x e z. Assim, usando comutatividade, obtemos as igualdades

$$\begin{aligned}(xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz) &= (zy)(xt) + (zx)(yt) + (zt)(yx) \\ &= ((zy)x)t + ((zt)x)y + z((yt)x) \\ &= (x(yz))t + (x(zt))y + (x(yt))z. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Dessa forma, de (1.5) e (1.6) obtemos ainda a identidade

$$((xy)z)t + ((xt)z)y + x((yt)z) = (x(yz))t + (x(yt))z + (x(zt))y$$

que é equivalente à relação dos operadores

$$R_y R_z R_t + R_t R_z R_y + R_{(yt)z} = R_y R_{zt} + R_z R_{yt} + R_t R_{yz}. \tag{1.7}$$

Proposição 1.57. *Se a subálgebra A de uma álgebra de Jordan B é gerada pelo conjunto A_0, então a álgebra $R^B(A)$ é gerada pelo conjunto de operadores $\{R_a, R_{ab} \mid a, b \in A_0\}$.*

Demonstração. Como a álgebra A é gerada por A_0, então, pela Proposição 1.38, todo elemento de A é do tipo $f = \sum_{i>0} \alpha_i v_i(a_1, \ldots, a_n)$, com $a_1, \ldots, a_n \in A_0$. Assim, a álgebra $R^B(A)$ é gerada por operadores da forma $R_{\overline{v}}$, onde $v = v(x_1, \ldots, x_n)$ é algum monômio não associativo e $\overline{v} = v(a_1, \ldots, a_n)$ com $a_i \in A_0$, para todo $i > 0$. Basta mostrar que, para qualquer monômio v, o operador $R_{\overline{v}}$ está na subálgebra $R(B)'$ de $R(B)$ gerada pelo conjunto $\{R_a, R_{ab} \mid a, b \in A_0\}$. Faremos uma indução sobre o comprimento do monômio v. Se $d(v) \leq 2$, então é óbvio $R_{\overline{v}} \in R(B)'$. Se $d(v) \geq 3$, então, pela comutatividade de A, podemos supor que $v = (v_1 v_2) v_3$, onde o v_1, v_2, v_3 são monômios de comprimento menor que $d(v)$. Por (1.7), temos

$$R_{\overline{v}} = -R_{\overline{v}_1} R_{\overline{v}_3} R_{\overline{v}_2} - R_{\overline{v}_2} R_{\overline{v}_3} R_{\overline{v}_1} + R_{\overline{v}_1} R_{\overline{v}_2 \overline{v}_3} + R_{\overline{v}_2} R_{\overline{v}_1 \overline{v}_3} + R_{\overline{v}_3} R_{\overline{v}_1 \overline{v}_2}.$$

Pela hipótese de indução $R_{\overline{v}_i}, R_{\overline{v}_i \overline{v}_j} \in R(B)'$ e, portanto, $R_{\overline{v}} \in R(B)'$. Isso mostra que $R(B)' = R^B(A)$, o que prova a proposição. $\square$

Definição 1.58. Uma subálgebra A de uma álgebra de Jordan B é chamada fortemente associativa se, para quaisquer elementos $a, a' \in A$ e $b \in B$, vale a igualdade $(a, b, a') = 0$.

Seja A uma subálgebra de uma álgebra de Jordan B, note que

$$(a,b,a') = (ab)a' - a(ba') = (ba)a' - (ba')a = R_{a'}(R_a(b)) - R_a(R_{a'}(b))$$

para todos $a,a' \in A$ e $b \in B$. Assim, temos a relação $(a,b,a') = [R_a, R_{a'}](b)$, o que implica que a condição de associatividade forte para uma subálgebra A de uma álgebra de Jordan B é equivalente à comutatividade da álgebra $R^B(A)$.

Teorema 1.59. *Toda subálgebra gerada por um único elemento de uma álgebra de Jordan é fortemente associativa.*

Demonstração. Seja A uma subálgebra da álgebra de Jordan B, onde A é gerada pelo elemento a. Então, pela Proposição 1.57, a álgebra $R^B(A)$ é gerada pelos elementos R_a e R_{a^2}, que comutam por (1.4). Como $R^B(A)$ é associativa e R_a e R_{a^2} comutam não é difícil ver que, como espaço vetorial, $R^B(A)$ é gerada pelos elementos da forma $R_a^i, R_{a^2}^j$, onde $i,j \in \mathbb{N}$. Logo, sejam $r = \sum_{i,j} \alpha_{ij} R_a^i R_{a^2}^j$ e $s = \sum_{k,l} \beta_{kl} R_a^k R_{a^2}^l$ em $R^B(A)$, onde α_{ij}, $\beta_{kl} \in K$ e os somatórios são finitos, usando a comutatividade de R_a e R_{a^2}, temos

$$\begin{aligned}
[r,s] &= \left(\sum_{i,j} \alpha_{ij} R_a^i R_{a^2}^j\right)\left(\sum_{k,l} \beta_{kl} R_a^k R_{a^2}^l\right) - \left(\sum_{k,l} \beta_{kl} R_a^k R_{a^2}^l\right)\left(\sum_{i,j} \alpha_{ij} R_a^i R_{a^2}^j\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l} \alpha_{ij}\beta_{kl} R_a^i R_{a^2}^j R_a^k R_{a^2}^l - \sum_{i,j,k,l} \beta_{kl}\alpha_{ij} R_a^k R_{a^2}^l R_a^i R_{a^2}^j \\
&= \sum_{i,j,k,l} \alpha_{ij}\beta_{kl} R_a^{i+k} R_{a^2}^{l+j} - \sum_{i,j,k,l} \beta_{kl}\alpha_{ij} R_a^{k+i} R_{a^2}^{j+l} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente, a álgebra $R^B(A)$ é comutativa. Isso prova o teorema. □

Corolário 1.60. *Toda Álgebra de Jordan é associativa à potências.*

Demonstração. Seja A uma subálgebra da álgebra de Jordan B, onde A é gerada por um único elemento. Como vimos no teorema anterior, A é fortemente associativa, logo $(a,b,a') = 0$ para todos $a,a' \in A$ e $b \in B$. Portanto, é claro que $(a,a'',a') = 0$ para quaisquer $a,a',a'' \in A$. □

Capítulo 2

Módulos, Representações, Codimensões e Cocaracteres

Neste capítulo, veremos os resultados da teoria de módulos e representações de grupos, que serão utilizados nos principais resultados do Capítulo 3. Abordaremos a relação biunívoca entre essas representações e os módulos sobre álgebras de grupo, com foco no grupo de permutações S_n, onde, para isso, usaremos a teoria de Young de representações de S_n. Além disso, definiremos o caracter de uma representação, bem como a sequência de codimensões e a sequência de cocaracteres de uma álgebra. Neste capítulo, a menos que haja menção contrária, A será uma álgebra associativa com unidade.

2.1 Módulos e Representações de Grupos

Definição 2.1. Considere uma K-álgebra A associativa com unidade, um K-espaço vetorial V e o produto

$$\begin{aligned} \cdot : A \times V &\to V \\ (a, v) &\mapsto a \cdot v \end{aligned}$$

satisfazendo

1) $(a_1 + a_2) \cdot v = (a_1 \cdot v) + (a_2 \cdot v)$

2) $a \cdot (v_1 + v_2) = (a \cdot v_1) + (a \cdot v_2)$

3) $(\lambda a) \cdot v = a \cdot (\lambda v) = \lambda(a \cdot v)$

4) $a_1 \cdot (a_2 \cdot v) = (a_1 a_2) \cdot v$

5) $1_A \cdot v = v$

para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A$, $v, v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in K$. Munido desse produto, dizemos que V é um A-módulo ou um módulo sobre A.

Exemplo 2.2. Como A é uma álgebra associativa e com unidade, então A é um A-módulo, cujo produto é a sua multiplicação.

Sendo V um espaço vetorial sobre um corpo K, denotamos por $GL(V)$ o grupo de transformações lineares bijetivas de V em V.

Exemplo 2.3. Sejam G um grupo, V um K-espaço vetorial e $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ um homomorfismo de grupos, onde $\phi(g) = \phi_g$. Considere o produto $\cdot : K[G] \times V \to V$ definido por

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g, v\right) \mapsto \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) \cdot v = \sum_{g \in G} \lambda_g \phi_g(v).$$

Do fato de ϕ ser um homomorfismo de grupos, pode-se notar que V, munido desse produto, é um módulo sobre a álgebra de grupo $K[G]$. Também podemos dizer que V é simplesmente um G-módulo.

Definição 2.4. Sejam A uma álgebra e V um módulo sobre A,

1. um submódulo (ou A-submódulo) W de V é definido como sendo um subespaço vetorial W de V tal que $a \cdot v \in W$ para quaisquer $a \in A$ e $v \in W$;

2. se V é não nulo e os únicos submódulos de V são $\{0\}$ e V, dizemos que V é um módulo irredutível.

Exemplo 2.5. Sejam A uma álgebra. Ao considerarmos A como um A-módulo, pela definição, segue-se que os submódulos de A são exatamente os ideais à esquerda da álgebra A.

Exemplo 2.6. Sejam V um A-módulo e $v \in V$. Então o conjunto

$$A \cdot v = \{a \cdot v \mid a \in A\}$$

é um submódulo de V.

Exemplo 2.7. Se V_1 e V_2 são submódulos do A-módulo V, então $V_1 \cap V_2$ é submódulo dos A-módulos V, V_1 e V_2.

Exemplo 2.8. Considere a álgebra de grupo $K[S_n]$, o subespaço vetorial P_n de $K\{X\}$, dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e o produto

$$\begin{aligned} \cdot : K[S_n] \times P_n &\to P_n \\ (a, f) &\mapsto a \cdot f, \end{aligned}$$

onde $a \in K[S_n]$ e $f \in P_n$. Este produto é a aplicação bilinear tal que $\alpha \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(n)})$, para quaisquer $\alpha \in S_n$ e $f(x_1, \ldots, x_n)$ em P_n, ou seja, é a aplicação bilinear induzida pela ação de α nos índices das variáveis de f. Munido desse produto, P_n é um S_n-módulo. Ademais, se A é uma K-álgebra e $g \in P_n \cap Id(A)$, como $\alpha \cdot g \in P_n \cap Id(A)$, para todo $\alpha \in S_n$, segue-se que $P_n \cap Id(A)$ é um submódulo de P_n.

Definição 2.9. Sendo V um A-módulo e W um submódulo de V, o espaço quociente V/W é um A-módulo munido do produto definido por $a \cdot (v + W) = av + W$, para $a \in A$ e $v + W \in V/W$. Chamamos V/W de módulo quociente de V por W.

Exemplo 2.10. Do Exemplo 2.8, segue-se que

$$\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

é um S_n-módulo quociente.

Definição 2.11. Um homomorfismo de A-módulos V_1, V_2 é uma transformação linear $\Phi : V_1 \to V_2$ tal que, para quaisquer $a \in A$ e $x \in V_1$, tem-se $\Phi(a \cdot x) = a \cdot \Phi(x)$. Um isomorfismo de A-módulos é um homomorfismo bijetivo.

Observação 2.12. Seja $\Phi : V_1 \to V_2$ um homomorfismo de A-módulos, então

1. $\ker \Phi$ é submódulo de V_1 e $\operatorname{Im} \Phi$ é submódulo de V_2,

2. se Φ é bijetivo e V_1 é irredutível, então V_2 também é irredutível.

Agora iremos apresentar alguns conceitos e resultados acerca de representações de grupos. De agora em diante, G será sempre um grupo finito.

Definição 2.13. Definimos uma representação de um grupo G em um espaço vetorial V de dimensão finita como sendo um homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \phi : G &\to \mathrm{GL}(V) \\ g &\mapsto \phi(g) = \phi_g. \end{aligned}$$

Exemplo 2.14. Considere um espaço vetorial de dimensão finita V, então

$$\begin{aligned} \phi : G &\to \mathrm{GL}(V) \\ g &\mapsto \phi(g) = \mathrm{Id}_V. \end{aligned}$$

é uma representação de G em V.

Exemplo 2.15. Considere o grupo das permutações de 3 elementos

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

Podemos escrevê-lo em termos de seus geradores $\alpha = (123)$ e $\beta = (12)$ e suas relações:

$$S_3 = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^3 = (1) = \beta^2, \beta\alpha = \alpha^2\beta \rangle.$$

Para definirmos uma representação, basta definirmos nos geradores e verificarmos que as relações do grupo são preservadas na imagem dos geradores.

Tomemos $V = \mathbb{C}^2$ e seja $w = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \in \mathbb{C}$. Escreva

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & w \\ \overline{w} & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente,

$$[U(\alpha)]^3 = [U(\beta)]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e note que

$$\begin{pmatrix} 0 & w \\ \overline{w} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & w \\ \overline{w} & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a aplicação $U : S_3 \to \mathrm{GL}(V)$, onde $\dim_K V$ é igual a 2, determinada por $U(\alpha)$ e $U(\beta)$ é uma representação de S_3.

Exemplo 2.16. Sejam $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação de G em V e H um subgrupo de G. Observe que a restrição de ϕ a H, ou seja, $\phi|_H : H \to \mathrm{GL}(V)$ é uma representação de H em V.

Definição 2.17. Seja $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação. Dizemos que um subespaço W de V é ϕ-invariante se $\phi_g(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$. Se não existe um subespaço W não trivial de V, isto é $\{0_V\} \subsetneq W \subsetneq V$, que é ϕ-invariante, então ϕ será chamada de representação irredutível. Se existe W satisfazendo tais condições, dizemos que ϕ é redutível.

Seja V um espaço vetorial não nulo. Uma vez que os subespaços triviais, $\{0\}$ e V, de V são ϕ-invariantes, então ϕ é irredutível se, e somente se, os únicos subespaços ϕ-invariantes são os triviais.

Agora considere um subespaço W de V que seja ϕ-invariante e $g \in G$. Logo, temos

$\phi_g(W) \subseteq W$ e podemos definir,

$$\begin{aligned} \phi_g|_W : W &\to W \\ w &\mapsto \phi_g(w). \end{aligned}$$

Como $\phi_g^{-1}(W) = \phi_{g^{-1}}(W) \subseteq W$, segue que $\phi_g(\phi_g^{-1}(W)) \subseteq \phi_g(W)$, e, portanto, $W \subseteq \phi_g(W)$. Com isso, temos a igualdade $\phi_g(W) = W$, donde concluímos que $\phi_g|_W \in \mathrm{GL}(W)$. Assim, podemos enunciar a seguinte definição:

Definição 2.18. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação e W um subespaço ϕ-invariante de V. A restrição de ϕ a W é definida como sendo a representação

$$\begin{aligned} \phi|_W : G &\to \mathrm{GL}(W) \\ g &\mapsto \phi|_W(g) = \phi_g|_W. \end{aligned}$$

Nestas condições, $\phi|_W$ é chamada de sub-representação de G.

Como vimos no Exemplo 2.3, toda representação de um grupo G está associada a um $K[G]$-módulo V. Se W é um subespaço ϕ-invariante de V, teremos que $\phi_g(w) = g \cdot w \in W$ para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$. Como G gera a álgebra $K[G]$, temos $\alpha \cdot w \in W$, para qualquer $\alpha \in K[G]$. Com isso, W é um submódulo de V.

Vamos considerar agora a construção inversa e obter uma representação a partir de um G-módulo. Dado um G-módulo qualquer V de dimensão finita, para cada $g \in G$, defina

$$\begin{aligned} \phi_g : V &\to V \\ v &\mapsto \phi_g(v) = g \cdot v. \end{aligned}$$

Seja 1 a unidade de G, para todo $v \in V$, temos

$$\phi_{g^{-1}}(\phi_g(v)) = \phi_{g^{-1}}(g \cdot v) = g^{-1} \cdot (g \cdot v) = (g^{-1}g) \cdot v = 1 \cdot v = v,$$

donde concluímos que $\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g = Id_V$. Analogamente, temos $\phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = Id_V$ e segue que $\phi_g \in \mathrm{GL}(V)$. Além disso, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$, tem-se

$$\phi_{g_1 g_2}(v) = (g_1 g_2) \cdot v = g_1 \cdot (g_2 v) = g_1 \cdot (\phi_{g_2}(v)) = \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(v)),$$

logo, a aplicação

$$\begin{aligned}\phi : G &\to \mathrm{GL}(V)\\ g &\mapsto \phi(g) = \phi_g,\end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos e, portanto, uma representação de G em V. Considere agora um submódulo W de V. Uma vez que $g \cdot w \in W$, segue que $\phi_g(w) \in W$ para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$ e, portanto, W é um subespaço ϕ-invariante de V.

Assim sendo, há uma correspondência biunívoca entre as estruturas de $K[G]$-módulos em V e as representações de G em V. Com isso, podemos dizer, por exemplo, que os conceitos de submódulos e subespaços invariantes são equivalentes e os conceitos de módulo irredutível e representação irredutível são equivalentes.

2.2 S_n-Módulos

Nesta seção, iremos discutir algumas propriedades dos S_n-módulos. Vale ressaltar que, como vimos na seção anterior, tais módulos estão relacionados de forma biunívoca com as representações do grupo de permutações S_n.

Nesta seção, K será um corpo de característica zero, a menos que haja menção contrária.

Definição 2.19. Uma partição de um número $n \in \mathbb{N}$ é uma r-upla de números naturais $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, satisfazendo

$$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r \quad \text{e} \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n.$$

A notação $(n_1, n_2, \ldots, n_r) \vdash n$ indica que $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ é uma partição de n.

O conjunto das partições de $n \in \mathbb{N}$, denotado por $Par(n)$, é ordenado lexicograficamente da seguinte forma: se $\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ e $\beta = (m_1, m_2, \ldots, m_t)$ são partições de n, então $\alpha > \beta$ se $n_k > m_k$ para $k = \min\{i \in \mathbb{N} \mid n_i \neq m_i\}$.

Para uma partição $\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_r) \vdash n$ associamos um conjunto D_α de n pares ordenados, o qual chamamos de Diagrama de Young, dado por

$$D_\alpha = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq n_i\}.$$

O diagrama de Young D_α é representado por n quadrados correspondentes aos n pares ordenados. Tais quadrados estão dispostos em r linhas horizontais tais que a i-ésima linha possui n_i quadrados.

Exemplo 2.20. Sendo $\alpha = (2,2,1) \vdash 5$, o diagrama de Young da partição α é dado por

$$D_\alpha = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Dado o diagrama D_α de uma partição α de n, podemos construir tabelas distribuindo os números do conjunto $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$ nos quadrados de D_α, de modo que em cada quadrado apareça um número e quadrados distintos tenham números distintos. Tais tabelas são chamadas tabelas de Young e cada número desta tabela corresponde a uma entrada da tabela. Considere $\alpha = (2,2,1) \vdash 5$, como no Exemplo 2.20, então uma tabela de Young do diagrama D_α (ou da partição α) é

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Definição 2.21. Dada uma partição $\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ de n, uma tabela de Young T da partição α é standard quando satisfaz as seguintes propriedades:

1. $T(i,j) < T(i,j+1)$, para $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j < n_i$;

2. $T(i,j) < T(i+1,j)$ para $1 \leq j \leq n_1$ e $1 \leq i < m_j$, onde m_j é o número de quadrados da j-ésima coluna de D_α.

Com a definição anterior, uma tabela de Young standard de D_α do Exemplo 2.20 é

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \tag{2.1}$$

Se T é uma tabela de Young, definimos o grupo R_T de permutações de linhas de T como sendo o subgrupo de S_n de permutações que estabilizam os subconjuntos de I_n preenchidos nas linhas de T. Da mesma forma, nós definimos o subgrupo C_T de permutações de colunas de T como sendo o subgrupo de S_n de permutações que estabilizam as colunas de T. Por exemplo, em (2.1), temos que $(1),(12) \in R_T$ e $(1),(153) \in C_T$.

Se T é uma tabela de Young e $\sigma \in S_n$, então σT é a tabela obtida de T aplicando σ às suas entradas. Com isso, notamos que σT é também uma tabela de Young.

Para cada tabela de Young T de uma partição α de $n \in \mathbb{N}$, associaremos elementos da álgebra de grupo $K[S_n]$ como segue:

$$S_T = \sum_{\sigma \in R_T} \sigma, \quad A_T = \sum_{\tau \in C_T} (\text{sg } \tau)\tau \quad \text{e} \quad E_T = A_T S_T = \sum_{\tau \in C_T} \sum_{\sigma \in R_T} (\text{sg } \tau)\tau\sigma, \tag{2.2}$$

onde sg τ é o sinal da permutação τ. Note que $S_T \neq 0$ e $A_T \neq 0$ em $K[S_n]$. Além disso, observe que $R_T \cap C_T = (1)$, pois um elemento comum a esses subgrupos estabiliza cada linha e cada coluna e, portanto, fixa todos os elementos em $\{1, 2, \ldots, n\}$. Segue-se agora que se $\sigma_1, \sigma_2 \in R_T$ e $\tau_1, \tau_2 \in C_T$, então $\tau_1\sigma_1 = \tau_2\sigma_2$ implica $\sigma_2\sigma_1^{-1} = \tau_2^{-1}\tau_1 = (1)$ e, portanto, $\sigma_1 = \sigma_2$ e $\tau_1 = \tau_2$. Logo, os produtos $\tau\sigma$ que aparecem em E_T são distintos e, assim, $E_T \neq 0$.

Observação 2.22. Seja T uma tabela de Young de uma partição de $n \in \mathbb{N}$, para quaisquer $\rho, \tau \in S_n$, nota-se que

a) $R_{\rho T} = \rho R_T \rho^{-1}$;

b) $C_{\rho T} = \rho C_T \rho^{-1}$;

c) sg $\rho\tau\rho^{-1} =$ sg τ.

Pela observação anterior, segue que $S_{\rho T} = \rho S_T \rho^{-1}$, $A_{\rho T} = \rho A_T \rho^{-1}$ e $E_{\rho T} = \rho E_T \rho^{-1}$. Além disso, se $\sigma \in R_T$ e $\tau \in C_T$, então, de (2.2), temos

$$\sigma S_T = S_T = S_T \sigma \quad \text{e} \quad \tau A_T = (\text{sg } \tau) A_T = A_T \tau. \tag{2.3}$$

Lema 2.23. *Sejam α e β partições de n tais que $\alpha \geq \beta$ e sejam T_1 e T_2 tabelas de Young associadas, respectivamente a α e β. Suponha que dois números que aparecem na mesma linha em T_1 não estejam na mesma coluna de T_2. Então $\alpha = \beta$ e existem $\sigma \in R_{T_1}$ e $\tau \in C_{T_1}$ tais que $T_2 = \sigma\tau T_1$.*

Demonstração. Como $\alpha \geq \beta$, o número de entradas na primeira linha de T_1 é maior ou igual ao número de entradas na primeira linha de T_2. Suponha que seja maior, então como o número de colunas de T_2 é o número de entradas na primeira linha de T_2, duas entradas da primeira linha de T_1 ocorrem na mesma coluna em T_2, contrariando a hipótese. Portanto, ambos os diagramas têm o mesmo número de entradas na primeira linha. Além disso, existe uma permutação de coluna τ_1' de T_2 tal que a primeira linha de $\tau_1' T_2$ tem as mesmas entradas que a primeira linha de T_1. A seguir, notamos que as entradas na segunda linha de T_1 ocorrem em colunas distintas de $\tau_1' T_2$ e em linhas após a primeira. Segue-se que T_1 e $\tau_1' T_2$ (e, portanto, T_1 e T_2) têm o mesmo número de entradas na segunda linha e uma permutação de coluna τ_2' de $\tau_1' T_2$ (e de T_2) faz com que as entradas da segunda linha de $\tau_2' \tau_1' T_2$ sejam iguais as entradas da segunda linha de T_1. Continuando desta forma, vemos que $\beta = \alpha$ e existe um $\tau' \in C_{T_2}$ tal que as entradas de cada linha de $\tau' T_2$ e de T_1 são iguais. Portanto, existe $\sigma \in R_{T_1}$ tal que $\sigma T_1 = \tau' T_2$. Agora, $\tau' \in C_{T_2} = C_{\tau' T_2} = C_{\sigma T_1} = \sigma C_{T_1} \sigma^{-1}$. Portanto $\tau' = \sigma \tau^{-1} \sigma^{-1}$, $\tau^{-1} \in C_{T_1}$ e $\sigma \tau^{-1} \sigma^{-1} T_2 = \sigma T_1$. Então $T_2 = \sigma \tau T_1$. □

Agora considere α, β partições de n tais que $\alpha > \beta$. Então o Lema 2.23 implica que existem $i, j \in I_n$, $i \neq j$, em uma linha de T_α e em uma coluna de T_β. Se $\pi = (ij)$ então $\pi \in R_{T_\alpha}$, C_{T_β}. Então, por (2.3), $\pi S_{T_\alpha} = S_{T_\alpha} = S_{T_\alpha} \pi$ e $\pi A_{T_\beta} = -A_{T_\beta} = A_{T_\beta} \pi$. Assim,

$$S_{T_\alpha} A_{T_\beta} = (S_{T_\alpha} \pi) A_{T_\beta} = S_{T_\alpha} (\pi A_{T_\beta}) = -S_{T_\alpha} A_{T_\beta}$$
$$A_{T_\beta} S_{T_\alpha} = A_{T_\beta} (\pi S_{T_\alpha}) = (A_{T_\beta} \pi) S_{T_\alpha} = -A_{T_\beta} S_{T_\alpha}.$$

Portanto, $S_{T_\alpha} A_{T_\beta} = 0 = A_{T_\beta} S_{T_\alpha}$. Se $\rho \in S_n$, então $S_{\rho T_\alpha} = \rho S_{T_\alpha} \rho^{-1}$ e como $S_{\rho T_\alpha} A_{T_\beta} = 0 = A_{T_\beta} S_{\rho T_\alpha}$, temos $S_{T_\alpha} \rho^{-1} A_{T_\beta} = 0$ e $A_{T_\beta} \rho S_{T_\alpha} = 0$. Sendo assim,

$$S_{T_\alpha} K[S_n] A_{T_\beta} = 0 = A_{T_\beta} K[S_n] S_{T_\alpha}, \text{ se } \alpha > \beta \tag{2.4}$$

Lema 2.24. *Seja T uma tabela de Young associada a uma partição de n. Um elemento $a \in K[S_n]$ satisfaz a igualdade $\tau a \sigma = (sg\ \tau) a$ para todo $\sigma \in R_T$ e $\tau \in C_T$ se, e somente se, $a = kE_T$, $k \in K$.*

Demonstração. Sejam $\sigma \in R_T$ e $\tau \in C_T$, temos $E_T \sigma = A_T S_T \sigma = A_T S_T = E_T$ e $\tau E_T = \tau A_T S_T = (\text{sg}\ \tau) A_T S_T = (\text{sg}\ \tau) E_T$. Portanto, qualquer kE_T, com $k \in K$, satisfaz a igualdade $\tau (kE_T) \sigma = (\text{sg}\ \tau) kE_T$. Agora, seja $a = \sum_{\rho \in S_n} k_\rho \rho$, satisfazendo as condições dadas. Então

$$k_\rho = (\text{sg}\ \tau) k_{\tau \rho \sigma} \tag{2.5}$$

para $\sigma \in R_T$ e $\tau \in C_T$. Em particular, $k_{\tau\sigma} = k_{(1)} \text{sg}\ \tau$, então se pudermos mostrar que $k_\rho = 0$, quando ρ não for da forma $\tau\sigma$, $\tau \in C_T$, $\sigma \in R_T$, teremos que $a = k_{(1)} E_T$ por (2.2). Portanto, suponha $\rho \neq \tau\sigma$ para $\tau \in C_T$, $\sigma \in R_T$, logo $\rho^{-1} \neq \sigma\tau$, $\sigma \in R_T$, $\tau \in C_T$. Assim, $\rho^{-1} T \neq \sigma\tau T$ e o Lema 2.23 implica que existe uma transposição $\pi \in R_T$, $\pi \in C_{\rho^{-1} T} = \rho^{-1} C_T \rho$. Logo, $\pi = \rho^{-1} \pi' \rho$, onde π' é uma transposição contida em C_T. Dessa forma, $\rho = \pi' \rho \pi$ e $k_{\pi' \rho \pi} = k_\rho = -k_{\pi' \rho \pi}$ por (2.5). Daí, $k_\rho = 0$ e a prova está completa. □

Agora seja $x \in K[S_n]$ e considere o elemento $E_T x E_T = A_T S_T x A_T S_T$. Por (2.3), temos $\tau E_T x E_T \sigma = (\text{sg}\ \tau) E_T x E_T$ para $\sigma \in R_T$ e $\tau \in C_T$. Portanto, pelo Lema 2.24, temos $E_T x E_T = kE_T$, com $k \in K$. Em particular, $E_T^2 = \gamma E_T$, $\gamma \in K$. Mostremos que $\gamma \neq 0$. Para isso, consideramos a aplicação $x \mapsto E_T x$ de $K[S_n]$ em $K[S_n]$. Se $\gamma = 0$, então $E_T^2 = 0$ e a aplicação $x \mapsto E_T x$ é nilpotente e, portanto, possui traço 0. Por outro lado, dado $\rho \in S_n$, se olharmos para a matriz de $x \mapsto \rho x$ relativa à base, vemos que o traço desta aplicação é 0 se $\rho \neq (1)$ e é $n!$ se $\rho = (1)$. Como (2.2) mostra que o coeficiente de (1) na expressão para E_T é 1, o traço de $x \mapsto E_T x$ é $n!$ (o que é possível para qualquer $n \geq 1$, uma vez que estamos supondo que a característica do corpo K é zero).

Agora, definimos $e_T = \gamma^{-1} E_T$. Então

$$e_T^2 = (\gamma^{-1}E_T)(\gamma^{-1}E_T) = \gamma^{-2}E_T^2 = \gamma^{-2}\gamma E_T = e_T \neq 0, \tag{2.6}$$

logo e_T é um elemento idempotente de $K[S_n]$. Além disso, pelo Lema 2.24,

$$e_T K[S_n] e_T = K e_T. \tag{2.7}$$

Proposição 2.25. *Sejam α e β partições distintas de n, então $e_{T_\alpha} K[S_n] e_{T_\beta} = 0$.*

Demonstração. Se $\alpha > \beta$, por (2.4), temos $S_{T_\alpha}(A_{T_\alpha} K[S_n] S_{T_\beta}) A_{T_\beta} = 0$, logo, $e_{T_\alpha} K[S_n] e_{T_\beta} = 0$. Se $\alpha < \beta$, então por (2.4), temos $A_{T_\alpha} K[S_n] S_{T_\beta} = 0$, assim $S_{T_\alpha}(A_{T_\alpha} K[S_n] S_{T_\beta}) A_{T_\beta} = 0$ e, portanto, $e_{T_\alpha} K[S_n] e_{T_\beta} = 0$. □

Seja $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação de G em V, pode-se notar que $\mathrm{End}_{K[G]} V$ é uma K-álgebra, onde sua multiplicação é dada pela composição de endormorfismos em $\mathrm{End}_{K[G]} V$.

Lema 2.26 (Lema de Schur)**.** *Se M é um módulo irredutível, então a álgebra de endomorfismos End M é uma álgebra com divisão.*

Demonstração. Seja f um endomorfismo de M. Temos que $\ker f$ e $\mathrm{Im}\ f$ são submódulos de M, então a irredutibilidade de M implica que $\ker f = M$ ou 0 e $\mathrm{Im}\ f = M$ ou 0. Se $f \neq 0$, então $\ker\ f \neq M$ e $\mathrm{Im}\ f \neq 0$. Assim, $\ker\ f = 0$ e $\mathrm{Im}\ f = M$, logo, f é um automorfismo. Portanto, $f^{-1} \in \mathrm{End}\ M$ e esta álgebra é uma álgebra com divisão. □

Dados dois A-módulos M e N, podemos obter um novo A-módulo, considerando o conjunto

$$M \oplus N = \{(m, n) \mid m \in M \text{ e } n \in N\}$$

definindo as seguintes operações

$$\begin{aligned}(m_1, n_1) + (m_2, n_2) &= (m_1 + m_2, n_1 + n_2),\\ \alpha(m_1, n_1) &= (\alpha m_1, \alpha n_1),\end{aligned}$$

para quaisquer $\alpha \in A$, para todo $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in M \oplus N$. Este módulo é chamado de soma direta de M e N.

Teorema 2.27 (Teorema de Maschke)**.** *Toda representação ϕ de um grupo G em um K-espaço vetorial V tal que a característica de K não divide $|G|$ é irredutível.*

Demonstração. Seja U um subespaço ϕ-invariante de V e escreva $V = U \oplus U_0$, onde U_0 é um segundo subespaço (não necessariamente invariante). Seja p_0 a projeção em U determinada por esta decomposição. Vamos agora construir, por meio de um processo de média uma projeção em U que comuta com cada ϕ_g, $g \in G$. Considere

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi_g^{-1} p_0 \phi_g.$$

Como a característica de K não divide $|G|$, então $|G|^{-1}$ existe em K e p está bem definida. Se $g' \in G$, então

$$\begin{aligned}
\phi_{g'}^{-1} p \phi_{g'} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi_{g'}^{-1} \phi_g^{-1} p_0 \phi_g \phi_{g'} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi_{gg'}^{-1} p_0 \phi_{gg'} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi_g^{-1} p_0 \phi_g \\
&= p.
\end{aligned}$$

Portanto, $\phi_{g'} p = p \phi_{g'}$ para $g' \in G$. Evidentemente, $p \in \mathrm{End}_K V$. Se $y \in U$, então $p_0(y) = y$ e como $\phi_g(y) \in U$, pois U é ϕ-invariante, $p_0 \phi_g y = \phi_g y$. Assim, $\phi_g^{-1} p_0 \phi_g(y) = y$ e

$$p(y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi_g^{-1} p_0 \phi_g(y) = \frac{1}{|G|} |G| y = y.$$

Se $x \in V$, então $p_0(x) \in U$ e $\phi_g^{-1} p_0 \phi_g(x) \in U$, portanto $p(x) \in U$. As duas condições em $p \in \mathrm{End}_K V$, $p(y) = y$ para $y \in U$ e $p(x) \in U$ para $x \in V$, implicam que p é uma projeção em U. Então $V = U \oplus U'$ onde $U' = (1 - p)V$ e como p comuta com cada ϕ_g, U' é ϕ-invariante. □

Teorema 2.28. *Sejam G um grupo finito e K um corpo tal que sua característica não divide $|G|$. Considere $\phi : G \to GL(V)$ uma representação de G em V. Então ϕ é irredutível se, e somente se, $End_{K[G]}V$ é uma álgebra com divisão.*

Demonstração. Se ϕ é irredutível, então $\mathrm{End}_{K[G]} V$ é uma álgebra com divisão pelo Lema 2.26. Agora, suponha que ϕ seja redutível, então temos um subespaço ϕ-invariante $U \neq V, 0$. Pelo Teorema 2.27, existe uma projeção p em U que comuta com cada ϕ_g. Então p é um idempotente diferente de 0 e 1 em $\mathrm{End}_{K[G]} V$ e $\mathrm{End}_{K[G]} V$ não é uma álgebra com divisão. Assim, se $\mathrm{End}_{K[G]} V$ é uma álgebra com divisão, então ϕ é irredutível. □

Se T é uma tabela de Young associada a uma partição de $n \in \mathbb{N}$, pelo Exemplo 2.6 temos que

$$M_T = K[S_n] \cdot e_T = \{\alpha e_T \mid \alpha \in K[S_n]\},$$

é um S_n-módulo.

Mostraremos agora que M_T é um S_n-módulo irredutível. Considere a transformação linear

$$\begin{aligned} \Phi_k : M_T &\to M_T \\ x &\mapsto kx \end{aligned}$$

onde $k \in K$. Se $a \in K[S_n]$ e $x \in M_T$, tem-se

$$\Phi_k(a \cdot x) = k(a \cdot x) = a \cdot (kx) = a \cdot \Phi_k(x),$$

portanto, Φ_k é um homomorfismo de $K[S_n]$-módulos, logo, $\Phi_k \in End_{K[S_n]}M_T$, para todo $k \in K$. Agora seja $\Phi \in End_{K[S_n]}M_T$ e $\alpha \in K[S_n]$ tais que $\Phi(e_T) = \alpha e_T$. Por (2.6) e (2.7), temos

$$\Phi(e_T) = \Phi(e_T e_T) = e_T \Phi(e_T) = e_T \alpha e_T = k e_T$$

para algum $k \in K$, logo para todo $x = \gamma e_T \in M_T$, $\gamma \in K[S_n]$, temos

$$\Phi(x) = \Phi(\gamma e_T) = \gamma \Phi(e_T) = \gamma(k e_T) = k \gamma e_T = kx,$$

assim, $\Phi = \Phi_k$. Com isso, concluímos que $End_{K[S_n]}M_T = \{\Phi_k \mid k \in K\}$. Consequentemente, $End_{K[S_n]}M_T$ é isomorfo ao corpo K e, portanto, é uma álgebra com divisão. Como assumimos, no início desta seção, que a característica de K é 0, então, pelo Teorema 2.28, segue que a representação $\phi : S_n \to GL(M_T)$ em K é irredutível. Como vimos na seção anterior, uma representação irredutível está associada a um módulo irredutível, logo segue que M_T é um S_n-módulo irredutível.

Proposição 2.29. *Sejam α_1, α_2 partições de n e T_1, T_2 tabelas de Young das partições α_1, α_2, respectivamente, então M_{T_1} e M_{T_2} são S_n-módulos isomorfos se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2$.*

Demonstração. Seja $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Pela Proposição 2.25 segue-se que $e_{T_1} \gamma e_{T_2} = 0$, para todo $\gamma \in K[S_n]$. Sejam $\theta : M_{T_1} \to M_{T_2}$ um homomorfismo de S_n-módulos e $\gamma_1 \in K[S_n]$ satisfazendo $\theta(e_{T_1}) = \gamma_1 e_{T_2}$, então temos

$$\theta(e_{T_1}) = \theta(e_{T_1} e_{T_1}) = e_{T_1} \theta(e_{T_1}) = e_{T_1} \gamma_1 e_{T_2} = 0.$$

Logo, todo homomorfismo entre esses módulos é o homomorfismo nulo, o que implica que M_{T_1} e M_{T_2} não são módulos isomorfos.

Reciprocamente, suponha que $\alpha_1 = \alpha_2$. Logo, existe $\sigma \in S_n$ tal que

$$T_1 = \sigma T_2.$$

Da Observação 2.22, podemos concluir que $e_{T_1} = a\sigma e_{T_2}\sigma^{-1}$ para algum $a \in K - \{0\}$. Isso implica que $M_{T_1} = M_{T_2}\sigma^{-1}$ e, portanto, M_{T_1} e M_{T_2} são S_n-módulos isomorfos. □

Com isso, designaremos como M_α o $K[S_n]$-módulo irredutível, a menos de isomorfismo, associado à partição α de n.

Definição 2.30. O gancho (i,j) em um diagrama de Young λ, compreende os quadrados que se encontram à direita e abaixo do quadrado (i,j), incluindo este quadrado em questão.

Teorema 2.31. *Se α é uma partição de $n \in \mathbb{N}$, então*

1. *a dimensão do S_n-módulo irredutível M_α é igual ao número de tabelas standard da partição α.*

2. *(Fórmula do Gancho) o número de tabelas standard de α, denotado por $S(\alpha)$, é dado pela seguinte fórmula*

$$S(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in D_\alpha} h_{ij}},$$

onde h_{ij} denota o número de quadrados do gancho (i,j).

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [3], Capítulos 4 e 5. □

2.3 Sequência de Codimensões e Sequência Cocaracteres

Como vimos no Exemplo 2.10, se A é uma álgebra, então

$$\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

pode ser visto como um S_n-módulo. Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos relacionados a tal módulo, que, a partir de agora o denotaremos por $P_n(A)$.

Definição 2.32. Sendo A uma álgebra, a n-ésima codimensão de A, denotada por $c_n(A)$, é definida como sendo a dimensão, enquanto espaço vetorial, de $P_n(A)$, isto é,

$$c_n(A) = \dim_K P_n(A) = \dim_K \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}.$$

Além disso, a sequência de codimensões de A é a sequência $(c_n(A))_{n\geq 1}$.

A partir de agora, nesta seção, consideraremos que K é um corpo de característica zero.

Como vimos na Seção 2.1, uma representação de um grupo finito G é um homomorfismo de grupos $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Fixada uma base de V, podemos então considerar a matriz da transformação linear $\phi(g)$, para todo $g \in G$, que representaremos por $[\phi(g)]$.

Definição 2.33. Sendo $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação de um grupo finito G em um espaço vetorial de dimensão finita V, definimos o caracter de ϕ como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \chi : G &\to K \\ g &\mapsto \mathrm{Tr}([\phi(g)]), \end{aligned}$$

onde Tr é a aplicação traço. Se χ é a aplicação nula, escrevemos $\chi = 0$.

Exemplo 2.34. Se 1 é a unidade do grupo G, então $\phi(1)$ é a identidade em V, assim, se $\dim V = n$, então $\chi(1) = n$.

Definição 2.35. O caracter de um $K[G]$-módulo é o caracter da representação associada a esse módulo.

Exemplo 2.36. Se V é o $K[G]$-módulo nulo, então o caracter de V é zero. Com efeito, seja ϕ a representação de G associada ao $K[G]$-módulo V, então $\phi(g)$ é a transformação nula, para todo $g \in G$. Logo, $\mathrm{Tr}([\phi(g)]) = 0$, para todo $g \in G$. Portanto, o caracter de V é a aplicação nula.

Proposição 2.37. *Sejam $\phi_1 : G \to GL(V_1)$ e $\phi_2 : G \to GL(V_2)$ representações de G e χ_1, χ_2 seus respectivos caracteres. Então o caracter χ da soma direta $V_1 \oplus V_2$ é igual a $\chi_1 + \chi_2$.*

Demonstração. Sejam $g \in G$ e $[\phi_1(g)]$, $[\phi_2(g)]$ as formas matriciais de $\phi_1(g)$ e $\phi_2(g)$, respectivamente. Se ϕ é a representação de G em $V_1 \oplus V_2$, então tomando uma base de $V_1 \oplus V_2$ formada pela união da base fixada em V_1 com a base fixada em V_2, a forma matricial da transformação linear $\phi(g)$, onde $g \in G$, é dada por

$$[\phi(g)] = \begin{pmatrix} [\phi_1(g)] & 0 \\ 0 & [\phi_2(g)] \end{pmatrix}.$$

Logo, $\mathrm{Tr}([\phi(g)]) = \mathrm{Tr}([\phi_1(g)]) + \mathrm{Tr}([\phi_2(g)])$, isto é, $\chi(g) = \chi_1(g) + \chi_2(g)$, para todo $g \in G$ e segue o resultado. $\square$

Mais detalhes sobre a construção da soma direta de duas representações podem ser encontrados em [18], Capítulo 1.

Definição 2.38. Sejam $\phi_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ e $\phi_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ representações do grupo G. Dizemos que ϕ_1 e ϕ_2 são representações isomorfas se existe um isomorfismo linear $T : V_1 \to V_2$ tal que

$$T \circ \phi_1(g) = \phi_2(g) \circ T,$$

para todo $g \in G$, onde, neste caso, $\circ$ denota a composição de transformações lineares.

Nota-se, da definição anterior, que dizer que $\phi_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ e $\phi_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ são representações isomorfas de G equivale a dizer que V_1 e V_2 são módulos isomorfos.

Proposição 2.39. *Sejam $\phi_1 : G \to GL(V_1)$ e $\phi_2 : G \to GL(V_2)$ representações isomorfas de G. Então $\chi_1 = \chi_2$, onde χ_1 e χ_2 são os caracteres de ϕ_1 e ϕ_2, respectivamente.*

Demonstração. Seja $T : V_1 \to V_2$ um isomorfismo de $K[G]$-módulos, então $T \circ \phi_1(g) = \phi_2(g) \circ T$ e, portanto, $\phi_1(g) = T^{-1} \circ \phi_2(g) \circ T$. Assim, se $[\phi_1(g)]$, $[T^{-1}]$, $[\phi_2(g)]$ e $[T]$ são formas matriciais de $\phi_1(g)$, T^{-1}, $\phi_2(g)$ e T, respectivamente, temos $\mathrm{Tr}([\phi_1(g)]) = \mathrm{Tr}([T^{-1}][\phi_2(g)][T])$ e, como o traço não depende da ordem do produto, segue que

$$\mathrm{Tr}([\phi_1(g)]) = \mathrm{Tr}\big([T^{-1}][T][\phi_2(g)]\big) = \mathrm{Tr}([\phi_2(g)]).$$

Portanto, $\chi_1(g) = \chi_2(g)$. Como essa igualdade é válida para todo $g \in G$, segue que $\chi_1 = \chi_2$. □

Observação 2.40. Considere K um corpo de característica zero. Dada uma partição α de $n \in \mathbb{N}$, como vimos na Proposição 2.29, para quaisquer duas tabelas de Young T_1 e T_2 da partição α, temos que os S_n-módulos M_{T_1} e M_{T_2} são isomorfos. Logo, pela proposição anterior, os caracteres de M_{T_1} e M_{T_2} coincidem. Com isso, denotaremos por χ_α o caracter do S_n-módulo M_α, onde M_α é o $K[S_n]$-módulo irredutível, a menos de isomorfismo, associado à partição α.

Definição 2.41. Se A é uma álgebra e $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\chi_n(A)$ o caracter do S_n-módulo $P_n(A)$. Além disso, a sequência

$$(\chi_n(A))_{n\geq 1} = (\chi_1(A), \chi_2(A), \ldots, \chi_n(A), \ldots)$$

é chamada de sequência de cocaracteres de A.

Capítulo 3

Classificação e Identidades Polinomiais de Álgebras de Jordan Bidimensionais

Neste capítulo, iremos classificar as álgebras bidimensionais de Jordan sobre um corpo arbitrário K de característica diferente de 2. Além disso, quando K é um corpo infinito de característica diferente de 2, iremos descrever os T-ideais gerados pelas identidades dessas álgebras, bem como as sequências de codimensões correspondentes e também, as suas sequências de cocaracteres, caso a característica de K seja zero.

3.1 As Álgebras Bidimensionais Comutativas Associativas à Potências

Nesta seção, descreveremos as álgebras bidimensionais comutativas associativas à potências sobre um corpo arbitrário K de característica diferente de 2. Como consequência, obteremos uma classificação das álgebras de Jordan bidimensionais sobre K e provamos que, a menos de isomorfismo, existe uma única álgebra de Jordan bidimensional não associativa. Observaremos que tal álgebra pode ser naturalmente generalizada para uma álgebra de Jordan com uma dimensão arbitrária e com propriedades que se mantêm independentemente da dimensão. Devido a isso, começaremos esta seção com um resultado que não depende da dimensão da álgebra e nele introduziremos uma notação que será útil aqui e mais adiante.

Lema 3.1. *Seja D uma álgebra comutativa sobre um corpo K de característica diferente de 2 tal que $D^2 \neq \{0\}$ (onde D^2 é o espaço vetorial gerado pelos produtos da forma $u \cdot v$, com $u, v \in D$). Se $\{u, u^2\}$ é um conjunto linearmente dependente para todo $u \in D$, então* *existe um único homomorfismo de K-álgebras $\psi : D \to K$ tal que*

$$u^2 = \psi(u)u$$

para todo $u \in D$. Além disso, $\psi \neq 0$ e D é uma álgebra de Jordan.

Demonstração. Dado $u \in D - \{0\}$, uma vez que $\{u, u^2\}$ é um conjunto linearmente dependente, existe um único $\psi(u) \in K$ tal que $u^2 = \psi(u)u$. Defina $\psi(0) = 0$. Vamos provar que $\psi : D \to K$ é um homomorfismo de K-álgebras.

(a) Se $u \in D$ e $\alpha \in K$, provaremos que $\psi(\alpha u) = \alpha\psi(u)$. Se $\alpha = 0$ ou $u = 0$, a igualdade é claramente válida. Agora, suponha que $\alpha \neq 0$ e $u \neq 0$, então

$$[\psi(\alpha u)](\alpha u) = (\alpha u)^2 = \alpha^2 u^2 = \alpha^2\psi(u)u = [\alpha\psi(u)](\alpha u),$$

portanto, $\psi(\alpha u) = \alpha\psi(u)$.

(b) Dados $u, v \in D$, provaremos que $\psi(u + v) = \psi(u) + \psi(v)$. Se $u = 0$ ou $v = 0$, o resultado é claro. Logo, supondo que u e v são diferentes de 0, temos dois casos a analisar:

Caso 1. $\{u, v\}$ é um conjunto linearmente dependente. Neste caso, teremos $u = \alpha v, \alpha \in K$, logo, usando o item (a), temos

$$\psi(u + v) = \psi(\alpha v + v) = \psi((\alpha + 1)v) = (\alpha + 1)\psi(v) = \psi(\alpha v) + \psi(v) = \psi(u) + \psi(v).$$

Caso 2. $\{u, v\}$ é um conjunto linearmente independente. Neste caso,

$$[\psi(u + v)](u + v) = (u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = \psi(u)u + 2uv + \psi(v)v$$

e

$$[\psi(u - v)](u - v) = (u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 = \psi(u)u - 2uv + \psi(v)v.$$

Somando essas duas equações, concluímos que

$$[\psi(u + v) + \psi(u - v)]u + [\psi(u + v) - \psi(u - v)]v = 2\psi(u)u + 2\psi(v)v.$$

Portanto,

$$\psi(u + v) + \psi(u - v) = 2\psi(u) \quad \text{e} \quad \psi(u + v) - \psi(u - v) = 2\psi(v),$$

assim, $2\psi(u + v) = 2\psi(u) + 2\psi(v)$. Uma vez que a característica de K é diferente de 2, segue-se que $\psi(u + v) = \psi(u) + \psi(v)$.

(c) Se $u, v \in D$ provaremos que $\psi(uv) = \psi(u)\psi(v)$. Temos

$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = \psi(u)u + 2uv + \psi(v)v$$

e, por (b),

$$(u+v)^2 = \psi(u+v)(u+v) = \psi(u)u + \psi(u)v + \psi(v)u + \psi(v)v.$$

Com isso,

$$uv = \frac{1}{2}(\psi(u)v + \psi(v)u), \tag{3.1}$$

para todo $u, v \in D$. Em particular,

$$\psi(uv) = \psi\left(\frac{1}{2}(\psi(u)v + \psi(v)u)\right) = \frac{1}{2}(\psi(u)\psi(v) + \psi(v)\psi(u)) = \psi(u)\psi(v).$$

Concluímos, portanto, que ψ é um homomorfismo de K-álgebras. Agora, como $D^2 \neq \{0\}$, existem $u, v \in D$ tais que $uv \neq 0$, logo, segue de (3.1), que $\psi(u) \neq 0$ ou $\psi(v) \neq 0$. Com isso, $\psi \neq 0$.

Agora provaremos que D é uma álgebra de Jordan. Se $u, v \in D$ então usando a comutatividade de D, tem-se

$$((u^2)v)u = ((\psi(u)u)v)u = \psi(u)((uv)u) = \psi(u)(u(vu)) = (\psi(u)u)(vu) = (u^2)(vu).$$

Portanto, como D já é comutativa por hipótese, segue que D é uma álgebra de Jordan.

□

Observação 3.2. Se $\dim_K D \geq 2$, existem $u, v \in D$ não nulos tais que $\psi(u) = 1$ e $\psi(v) = 0$. De fato, dado $w \in D$, tal que $\psi(w) \neq 0$ (isso é possível, pois $\psi \neq 0$), denote $u = (\psi(w))^{-1}w$, então $\psi(u) = 1$. A existência de $v \neq 0$ tal que $\psi(v) = 0$, decorre do fato de que $\dim_K D \geq 2$. Além disso, como $u \notin \ker\psi$ e $v \in \ker\phi$, então u e v são linearmente independentes.

Exemplo 3.3. Sejam K um corpo de característica diferente de 2 e D_n, $n \geq 1$, a subálgebra de $UJ_n(K)$ gerada por $e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n}$ (munida do produto $\circ$, como vimos no Capítulo 1). Como $UJ_n(K)$ é uma álgebra de Jordan, então D_n é uma álgebra comutativa. Além disso, $D_n^2 \neq \{0\}$, pois, se $u = \xi_1 e_{11} + \xi_2 e_{12} + \cdots + \xi_n e_{1n} \in D$, onde $\xi_1, \ldots, \xi_n \in K$, como

$$u \circ u = \frac{1}{2}(u^2 + u^2) = u^2 \quad \text{e} \quad e_{1i}e_{1j} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq 1 \\ e_{1j}, & \text{se } i = 1 \end{cases},$$

temos

$$\begin{aligned}
u^2 &= (\xi_1 e_{11} + \xi_2 e_{12} + \cdots + \xi_n e_{1n})(\xi_1 e_{11} + \xi_2 e_{12} + \cdots + \xi_n e_{1n}) \\
&= \xi_1 e_{11}(\xi_1 e_{11}) + \xi_1 e_{11}(\xi_2 e_{12}) + \cdots + \xi_1 e_{11}(\xi_n e_{1n}) \\
&= \xi_1(\xi_1 e_{11} + \xi_2 e_{12} + \cdots + \xi_n e_{1n}) \\
&= \xi_1 u.
\end{aligned}$$

Assim, o homomorfismo $\psi : D_n \to K$ do Lema 3.1 é $\psi(u) = \xi_1$.

Teorema 3.4. *Seja J uma álgebra bidimensional comutativa associativa à potências sobre um corpo arbitrário K de característica diferente de 2. Então J é uma álgebra de Jordan, e se $J^2 \neq \{0\}$, então J é isomorfa a uma das seguintes álgebras:*

(i) $N = span\{u, u^2\} \subset M_3(K)$, *onde* $u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(ii) $M = span\{u, u^2\} \subset M_3(K)$, *onde* $u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(iii) $M_\lambda = span\{1, u\} \subset M_2(K)$, *onde* $u = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(iv) $D_2 = span\{e_{11}, e_{12}\} \subset UJ_2(K)$.

Além disso, para um dado $\lambda \in K$, quaisquer duas das álgebras N, M, M_λ e D_2 não são isomorfas, e M_λ é isomorfa a $M_{\lambda'}$ se, e somente se, existe um elemento $a \in K$ diferente de zero tal que $\lambda = a^2\lambda'$.

Demonstração. Seja J uma álgebra bidimensional comutativa associativa à potências. Se $J^2 = \{0\}$, então é trivial que J é uma álgebra de Jordan. Suponha que $J^2 \neq \{0\}$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1. Existe $u \in J$ tal que $\{u, u^2\}$ é um conjunto linearmente independente.

Neste caso, $\{u, u^2\}$ é uma base para J. Além disso, sejam $x = \alpha_1 u + \beta_1 u^2$, $y = \alpha_2 u + \beta_2 u^2$, e $z = \alpha_3 u + \beta_3 u^2$ em J, onde $\alpha_i, \beta_i \in K$. Vamos calcular $(xy)z$:

$$\begin{aligned}
(xy)z &= ((\alpha_1 u + \beta_1 u^2)(\alpha_2 u + \beta_2 u^2))(\alpha_3 u + \beta_3 u^2) \\
&= (\alpha_1\alpha_2 u^2 + \alpha_1\beta_2 u^3 + \beta_1\alpha_2 u^3 + \beta_1\beta_2 u^4)(\alpha_3 u + \beta_3 u^2) \\
&= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 u^3 + (\alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\beta_2\alpha_3 + \beta_1\alpha_2\alpha_3)u^4 \\
&\quad + (\alpha_1\beta_2\beta_3 + \beta_1\alpha_2\beta_3 + \beta_1\beta_2\alpha_3)u^5 + \beta_1\beta_2\beta_3 u^6.
\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular $x(yz)$:

$$\begin{aligned} x(yz) &= (\alpha_1 u + \beta_1 u^2)((\alpha_2 u + \beta_2 u^2)(\alpha_3 u + \beta_3 u^2)) \\ &= (\alpha_1 u + \beta_1 u^2)(\alpha_2\alpha_3 u^2 + \alpha_2\beta_3 u^3 + \beta_2\alpha_3 u^3 + \beta_2\beta_3 u^4) \\ &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 u^3 + (\alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\beta_2\alpha_3 + \beta_1\alpha_2\alpha_3)u^4 \\ &\quad + (\alpha_1\beta_2\beta_3 + \beta_1\alpha_2\beta_3 + \beta_1\beta_2\alpha_3)u^5 + \beta_1\beta_2\beta_3 u^6. \end{aligned}$$

Portanto, J é uma álgebra associativa e, pela hipótese de comutatividade, J é uma álgebra de Jordan.

Sejam $\alpha, \beta \in K$ escalares tais que

$$u^3 = \alpha u^2 + \beta u.$$

(a) Se $\alpha = \beta = 0$, então $u^3 = 0$. Definimos então a aplicação linear $\phi : J \to N$ dada por $\phi(u) = e_{21} + e_{32}$ e $\phi(u^2) = e_{31}$. Vamos mostrar que ϕ é um isomorfismo de K-álgebras. Para isso, como ϕ é uma aplicação linear entre espaços vetoriais de dimensão 2 e a imagem de uma base de J pela ϕ é uma base de N, precisamos apenas mostrar que ϕ é compatível com o produto, isto é, dados $a, b \in J$, tem-se $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Sejam $\alpha_1 u + \alpha_2 u^2, \beta_1 u + \beta_2 u^2 \in J$, como $u^4 = u(u^3) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \phi((\alpha_1 u + \alpha_2 u^2)(\beta_1 u + \beta_2 u^2)) &= \phi(\alpha_1\beta_1 u^2 + \alpha_1\beta_2 u^3 + \alpha_2\beta_1 u^3 + \alpha_2\beta_2 u^4) \\ &= \alpha_1\beta_1\phi(u^2) \\ &= \alpha_1\beta_1 e_{31} \\ &= (\alpha_1(e_{21} + e_{32}) + \alpha_2 e_{31})(\beta_1(e_{21} + e_{32}) + \beta_2 e_{31}) \\ &= \phi(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2)\phi(\beta_1 u + \beta_2 u^2). \end{aligned}$$

Assim, ϕ é compatível com o produto e, portanto, um isomorfismo entre as álgebras J e N.

(b) Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$, então $u^3 = \alpha u^2$. Seja $v = \alpha^{-1}u$, logo

$$v^3 = \alpha^{-3}u^3 = \alpha^{-3}\alpha u^2 = \alpha^{-2}u^2 = v^2.$$

Assim, $\{v, v^2\}$ é uma base para J. Definimos agora a aplicação linear $\phi : J \to M$ da seguinte forma: $\phi(v) = e_{21} + e_{32} + e_{33}$ e $\phi(v^2) = e_{31} + e_{32} + e_{33}$.

Dados $\alpha_1 v + \alpha_2 v^2, \beta_1 v + \beta_2 v^2 \in J$, como $v^4 = v(v^3) = v(v^2) = v^3 = v^2$, temos

$$\begin{aligned}
\phi((\alpha_1 v + \alpha_2 v^2)(\beta_1 v + \beta_2 v^2)) &= \phi(\alpha_1\beta_1 v^2 + \alpha_1\beta_2 v^3 + \alpha_2\beta_1 v^2 + \alpha_2\beta_2 v^4) \\
&= \phi((\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)v^2) \\
&= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\phi(v^2) \\
&= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)(e_{31} + e_{32} + e_{33}) \\
&= (\alpha_1(e_{21} + e_{32} + e_{33}) + \alpha_2(e_{31} + e_{32} + e_{33})) \\
&\quad (\beta_1(e_{21} + e_{32} + e_{33}) + \beta_2(e_{31} + e_{32} + e_{33})) \\
&= \phi(\alpha_1 v + \alpha_2 v^2)\phi(\beta_1 v + \beta_2 v^2)),
\end{aligned}$$

logo, ϕ é um isomorfismo de álgebras. Portanto, J e M são isomorfas.

(c) Agora, assuma que $\beta \neq 0$. Neste caso, $u^3 = \alpha u^2 + \beta u$. Assim, o elemento $r = -\alpha\beta^{-1}u + \beta^{-1}u^2$ é uma unidade em J. De fato, se $s = \alpha_1 u^2 + \beta_1 u \in J$, então

$$\begin{aligned}
s \cdot r &= (\alpha_1 u^2 + \beta_1 u)(-\alpha\beta^{-1}u + \beta^{-1}u^2) \\
&= -\alpha_1\alpha\beta^{-1}u^3 + \alpha_1\beta^{-1}u^4 - \beta_1\alpha\beta^{-1}u^2 + \beta_1\beta^{-1}u^3.
\end{aligned}$$

Como

$$u^4 = u(u^3) = u(\alpha u^2 + \beta u) = \alpha u^3 + \beta u^2 = \alpha(\alpha u^2 + \beta u) + \beta u^2 = (\alpha^2 + \beta)u^2 + \alpha\beta u,$$

então

$$\begin{aligned}
s \cdot r = &-\alpha_1\alpha\beta^{-1}(\alpha u^2 + \beta u) + \alpha_1\beta^{-1}[(\alpha^2 + \beta)u^2 + \alpha\beta u] \\
&- \beta_1\alpha\beta^{-1}u^2 + \beta_1\beta^{-1}(\alpha u^2 + \beta u) \\
= &(-\alpha^2\alpha_1\beta^{-1} + \alpha_1\beta^{-1}\alpha^2 + \alpha_1\beta^{-1}\beta - \beta_1\alpha\beta^{-1} + \beta_1\beta^{-1}\alpha)u^2 \\
&+ (-\alpha_1\alpha\beta^{-1}\beta + \alpha_1\beta^{-1}\alpha\beta + \beta_1\beta^{-1}\beta)u = s.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que $r \cdot s = s$. Dessa forma, podemos concluir que $r = 1$ e como $-\alpha\beta^{-1}u + \beta^{-1}u^2 = 1$, segue-se que $u^2 = \alpha u + \beta 1$. Além disso, observamos que $\{1, u\}$ é uma base para J. Se $w = u - (\alpha/2)1$, temos que

$$\begin{aligned}
w^2 &= u^2 - \alpha u + (\alpha^2/4)1 \\
&= \alpha u + \beta 1 - \alpha u + (\alpha^2/4)1 \\
&= (\alpha^2/4 + \beta)1.
\end{aligned}$$

Logo, $\{1, w\}$ também é uma base para J. Seja $\lambda = (\alpha^2/4 + \beta)$, considere a aplicação linear de J em M_λ dada por $\phi(1) = (e_{11} + e_{22})$ e $\phi(w) = (\lambda e_{12} + e_{21})$.

Dados arbitrários $\alpha_1 1 + \alpha_2 w, \beta_1 1 + \beta_2 w \in J$, temos

$$\begin{aligned}
\phi((\alpha_1 1 + \alpha_2 w)(\beta_1 1 + \beta_2 w)) &= \phi(\alpha_1\beta_1 1 + \alpha_1\beta_2 w + \alpha_2\beta_1 w + \alpha_2\beta_2 w^2) \\
&= \phi((\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\lambda)1 + (\alpha_1\beta_2 w + \alpha_2\beta_1)w) \\
&= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\lambda)\phi(1) + (\alpha_1\beta_2 w + \alpha_2\beta_1)\phi(w) \\
&= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\lambda)(e_{11} + e_{22}) + (\alpha_1\beta_2 w + \alpha_2\beta_1)(\lambda e_{12} + e_{21}) \\
&= (\alpha_1(e_{11} + e_{22}) + \alpha_2(\lambda e_{12} + e_{21})) \\
&\quad\ (\beta_1(e_{11} + e_{22}) + \beta_2(\lambda e_{12} + e_{21})) \\
&= \phi(\alpha_1 1 + \alpha_2 w)\phi(\beta_1 1 + \beta_2 w)).
\end{aligned}$$

Portanto, ϕ é um isomorfismo entre as álgebras J e M_λ.

Caso 2.$\{u, u^2\}$ é um conjunto linearmente dependente para todo $u \in J$.

Neste caso, segue do Lema 3.1 que J é uma álgebra de Jordan. Além disso, o Lema 3.1 nos diz que existe um único homomorfismo de K-álgebras $\psi : J \to K$ tal que

$$u^2 = \psi(u)u$$

para todo $u \in J$.

Pela Observação 3.2, podemos tomar uma base $\{u, v\}$ de J tal que $\psi(u) = 1$ e $\psi(v) = 0$. A definição de ψ e (3.1) implicam que

$$u^2 = u,\ v^2 = 0 \text{ e } uv = \frac{1}{2}(\psi(u)v + \psi(v)u) = \frac{1}{2}v.$$

Definimos a aplicação linear $\phi : J \to D_2$ dada por $\phi(u) = e_{11}$ e $\phi(v) = e_{12}$. Se $\alpha_1 u + \alpha_2 v, \beta_1 u + \beta_2 v \in J$, lembrando que a multiplicação de D_2 é $\circ$, temos

$$\begin{aligned}
\phi((\alpha_1 u + \alpha_2 v)(\beta_1 u + \beta_2 v)) &= \phi(\alpha_1\beta_1 u^2 + \alpha_1\beta_2 uv + \alpha_2\beta_1 vu + \alpha_2\beta_2 v^2) \\
&= \phi(\alpha_1\beta_1 u + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(1/2)v) \\
&= (\alpha_1\beta_1)\phi(u) + (1/2)(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\phi(v) \\
&= (\alpha_1\beta_1)e_{11} + (1/2)(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)e_{12} \\
&= (\alpha_1 e_{11} + \alpha_2 e_{12})(\beta_1 e_{11} + \beta_2 e_{12}) \\
&= \phi(\alpha_1 u + \alpha_2 v)\phi(\beta_1 u + \beta_2 v).
\end{aligned}$$

Logo, ϕ é um isomorfismo de J para D_2.

Portanto, J é uma álgebra de Jordan e se $J^2 \neq 0$, dos Casos 1 e 2, segue que J é isomorfa a uma das álgebras em (i)-(iv).

Observe que entre as álgebras listadas N é a única álgebra nilpotente, D_2 é a única álgebra não associativa, M é a única álgebra associativa que não é nilpotente e não tem unidade, e M_λ é uma álgebra associativa com unidade. Portanto, quaisquer duas das álgebras N, M, M_λ e D_2 não são isomorfas.

Agora, assuma que M_λ e $M_{\lambda'}$ são isomorfas e seja $\phi : M_\lambda \to M_{\lambda'}$ um isomorfismo de álgebras. Seja $u_\lambda = \lambda e_{12} + e_{21}$, uma vez que $\phi(1) = 1$, onde $1 = e_{11} + e_{22}$, existem $\alpha, \beta \in K$, com $\beta \neq 0$, de tal modo que

$$\phi(\alpha 1 + \beta u_\lambda) = u_{\lambda'}.$$

Como

$$\phi(\alpha 1 + \beta u_\lambda)^2 = \lambda' 1,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\phi((\alpha 1 + \beta u_\lambda)^2) = \lambda' 1 &\Leftrightarrow \phi(\alpha^2 1 + 2\alpha\beta u_\lambda + \beta^2 \lambda 1) = \lambda' \phi(1) \\ &\Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2\lambda)\phi(1) + 2\alpha\beta\phi(u_\lambda) = \lambda'\phi(1)\end{aligned}$$

e assim $\alpha = 0$ e $\lambda' = \beta^2\lambda$ como desejado. Reciprocamente, se $\lambda = a^2\lambda'$ então $\{1, v\}$, onde $v = a^{-1}u_\lambda$, é uma base de M_λ. Como

$$v^2 = a^{-2}\lambda 1 = \lambda' 1,$$

a aplicação linear $\phi : M_\lambda \to M_{\lambda'}$ dada por $\phi(1) = 1$ e $\phi(v) = u_{\lambda'}$ é um isomorfismo de M_λ para $M_{\lambda'}$. De fato, mostremos que tal aplicação é compatível com o produto. Dados $\alpha_1 1 + \alpha_2 v,\ \beta_1 1 + \beta_2 v$ em M_λ, temos

$$\begin{aligned}\phi((\alpha_1 1 + \alpha_2 v)(\beta_1 1 + \beta_2 v)) &= \phi(\alpha_1\beta_1 1 + \alpha_1\beta_2 v + \alpha_2\beta_1 v + \alpha_2\beta_2\lambda' 1) \\ &= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\lambda')\phi(1) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\phi(v) \\ &= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\lambda')1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)u_{\lambda'} \\ &= (\alpha_1 1 + \alpha_2 u_{\lambda'})(\beta_1 1 + \beta_2 u_{\lambda'}) \\ &= \phi(\alpha_1 1 + \alpha_2 v)\phi(\beta_1 1 + \beta_2 v).\end{aligned}$$

Isso encerra a demonstração. □

Pelo Corolário 1.60 toda álgebra de Jordan é associativa à potências, logo, com o Teorema 3.4, concluímos que toda álgebra de Jordan de dimensão 2 sobre um corpo K de característica diferente de 2 é isomorfa a uma das álgebras: N, M, M_λ ou D_2.

Observação 3.5. Seja D uma álgebra comutativa sobre um corpo K de característica diferente de 2 tal que $D^2 \neq \{0\}$ e $\dim_K D = n$. Se $\{u, u^2\}$ é um conjunto linearmente dependente para todo $u \in D$ então D é isomorfo a $D_n = span\{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n}\}$. De fato, se ψ é a aplicação do Lema 3.1, podemos considerar uma base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de D tal que

$$\psi(u_1) = 1 \text{ e } \psi(u_2) = \cdots = \psi(u_n) = 0.$$

Então (3.1) implica que a aplicação linear $\phi : D \to D_n$ tal que $\phi(u_i) = e_{1i}$, $i = 1, ..., n$ é um isomorfismo de álgebras.

Terminamos esta seção com algumas classificações de álgebras de Jordan bidimensionais que podem ser obtidas como corolários do Teorema 3.4.

Corolário 3.6. *Seja J uma álgebra de Jordan bidimensional sobre um corpo K algebricamente fechado de característica diferente de 2. Se $J^2 \neq 0$ então J é isomorfa a uma das seguintes álgebras*

$$N,\ M,\ M_0,\ M_1 \text{ ou } D_2.$$

Demonstração. Seja J uma álgebra de Jordan bidimensional sobre um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2 tal que $J^2 \neq 0$. Pelo Teorema 3.4, sabemos que J é isomorfa a uma das seguintes álgebras: N, M, M_λ ou D_2. Precisamos mostrar que para qualquer $\lambda \in K$, M_λ é isomorfa a M_0 ou M_1.

Para $\lambda = 0$, então $M_\lambda = M_0$. Suponha que $\lambda \neq 0$. Como K é um corpo algebricamente fechado, a equação

$$\lambda - x^2 = 0$$

tem solução em K. Logo existe $a \in K \backslash \{0\}$ tal que $\lambda = a^2 1$. Assim, pelo Teorema 3.4, M_λ é isomorfa a M_1. □

Corolário 3.7. *Seja J uma álgebra de Jordan bidimensional sobre o corpo dos números reais. Se $J^2 \neq \{0\}$ então J é isomorfa a uma das seguintes álgebras*

$$N, M, M_{-1}, M_0, M_1 \text{ ou } D_2.$$

Demonstração. Precisamos mostrar, neste caso, que M_λ é isomorfa a M_0, M_1 ou M_{-1}.

Para $\lambda = 0$, então $M_\lambda = M_0$. Se $\lambda > 0$, a equação

$$\lambda - x^2 = 0,$$

tem solução nos reais, logo existe $a \in K \backslash \{0\}$ tal que $\lambda = a^2 1$ e, pelo Teorema 3.4, M_λ é isomorfa a M_1. Se $\lambda < 0$, então a equação

$$-\lambda - x^2 = 0,$$

tem solução nos reais, logo existe $a \in K \backslash \{0\}$ tal que $\lambda = a^2(-1)$ e, pelo Teorema 3.4, M_λ é isomorfa a M_{-1}. □

3.2 Algumas Identidades Polinomiais de D

A partir de agora D será uma álgebra comutativa sobre um corpo qualquer K de característica diferente de 2, $D^2 \neq \{0\}$, $\dim_K D \geq 2$ e o conjunto $\{u, u^2\}$ será linearmente dependente para todo $u \in D$. Daqui em diante usaremos as notações do Lema 3.1 e também, a fim de evitar uma notação complicada, para escrever o produto de polinômios $f_1, f_2, \ldots, f_n \in K\{X\}$, usaremos a seguinte convenção:

$$f_1 f_2 \cdots f_n := f_1(f_2(\cdots(f_{n-1}f_n)\cdots)).$$

Primeiro forneceremos algumas identidades polinomiais para D.

No que segue, consideramos os quatro polinômios em $K\{X\}$ listados abaixo:

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1, \tag{3.2}$$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_3, x_4) - x_1(x_2, x_3, x_4) - x_2(x_1, x_3, x_4), \tag{3.3}$$

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2x_3, x_4) - 2x_2(x_1, x_3, x_4), \tag{3.4}$$

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1x_2)(x_3, x_4, x_5) - 2x_1x_2(x_3, x_4, x_5). \tag{3.5}$$

Proposição 3.8. *Os polinômios* (3.2), (3.3), (3.4) *e* (3.5) *são identidades para D.*

Demonstração. Como D é comutativa, é claro que (3.2) é uma identidade para D. Sejam $u, v, w, r \in D$, então, usando (3.1), teremos

$$\begin{aligned}
(u, v, w) &= (uv)w - u(vw) \\
&= \left(\frac{1}{2}\psi(u)v + \frac{1}{2}\psi(v)u\right)w - u\left(\frac{1}{2}\psi(v)w + \frac{1}{2}\psi(w)v\right) \\
&= \frac{1}{2}\psi(u)vw + \frac{1}{2}\psi(v)uw - \frac{1}{2}\psi(v)uw - \frac{1}{2}\psi(w)uv \\
&= \frac{1}{2}\psi(u)\left(\frac{1}{2}\psi(v)w + \frac{1}{2}\psi(w)v\right) - \frac{1}{2}\psi(w)\left(\frac{1}{2}\psi(u)v + \frac{1}{2}\psi(v)u\right) \\
&= \frac{1}{4}\psi(u)\psi(v)w + \frac{1}{4}\psi(u)\psi(w)v - \frac{1}{4}\psi(w)\psi(u)v - \frac{1}{4}\psi(w)\psi(v)u \\
&= \frac{1}{4}\psi(v)(\psi(u)w - \psi(w)u).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Assim,

$$\psi((u, v, w)) = \frac{1}{4}\psi(v)(\psi(u)\psi(w) - \psi(w)\psi(u)) = 0,$$

e de (3.1), segue-se que

$$r(u, v, w) = \frac{1}{2}\psi(r)(u, v, w). \tag{3.7}$$

Analogamente, tem-se

$$u(r, v, w) = \frac{1}{2}\psi(u)(r, v, w).$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
(ru,v,w) &= ((ru)v)w - (ru)(vw)\\
&= \left(\frac{1}{2}\psi(r)uv + \frac{1}{2}\psi(u)rv\right)w - \left(\frac{1}{2}\psi(r)u + \frac{1}{2}\psi(u)r\right)(vw)\\
&= \frac{1}{2}\psi(r)(uv)w + \frac{1}{2}\psi(u)(rv)w - \frac{1}{2}\psi(r)u(vw) - \frac{1}{2}\psi(u)r(vw)\\
&= \frac{1}{2}\psi(r)((uv)w - u(vw)) + \frac{1}{2}\psi(u)((rv)w - r(vw))\\
&= \frac{1}{2}\psi(r)(u,v,w) + \frac{1}{2}\psi(u)(r,v,w)\\
&= r(u,v,w) + u(r,v,w),
\end{aligned}$$

e (3.3) é uma identidade para D. Além disso, usando (3.6) e (3.7), temos

$$\begin{aligned}
(u,rv,w) &= \frac{1}{4}\psi(rv)(\psi(u)w - \psi(w)u)\\
&= \frac{1}{4}\psi(r)\psi(v)(\psi(u)w - \psi(w)u)\\
&= \psi(r)(u,v,w)\\
&= 2r(u,v,w),
\end{aligned}$$

portanto, (3.4) também é uma identidade para D. Agora segue-se novamente de (3.7) que

$$\begin{aligned}
2r(s(u,v,w)) &= 2r\frac{1}{2}\psi(s)(u,v,w)\\
&= \frac{1}{2}\psi(s)\psi(r)(u,v,w)\\
&= \frac{1}{2}\psi(rs)(u,v,w)\\
&= (rs)(u,v,w)
\end{aligned}$$

para quaisquer $u,v,w,r,s \in D$ e, portanto, o polinômio (3.5) é uma identidade para D. □

Seja I o T-ideal de $K\{X\}$ gerado pelos polinômios (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5). Definimos a relação de congruência "≡" em $K\{X\}$ da seguinte forma: se $f,g \in K\{X\}$ então

$$f \equiv g \text{ se, e somente se, } f + I = g + I.$$

No que segue, apresentaremos diversos lemas que serão utilizados na demonstração dos resultados da Seção 3.3.

Lema 3.9. *Se I é o T-ideal de $K\{X\}$ gerado por* (3.2), (3.3), (3.4) *e* (3.5), *então*

$I \subseteq Id(D)$.

Demonstração. Como $Id(D)$ é um T-ideal que contém os polinômios (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5), então, da Observação 1.36, $I \subseteq Id(D)$. □

Considere agora a álgebra quociente $K\{X\}/I$ e vejamos que a mesma é de Jordan. Primeiramente, note que

$$0 \equiv T(x_1, x_1, x_2, x_1) = (x_1^2, x_2, x_1) - 2x_1(x_1, x_2, x_1),$$

além disso,

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_1) &= (x_1x_2)x_1 - x_1(x_2x_1)\\ &= (x_1x_2)x_1 - x_1(x_1x_2 - [x_1, x_2])\\ &= (x_1x_2)x_1 - x_1(x_1x_2) + x_1([x_1, x_2])\\ &= [x_1x_2, x_1] + x_1([x_1, x_2]),\end{aligned}$$

assim, como I é um T-ideal e $[x_1, x_2] \in I$, então, pela Proposição 1.37, $(x_1, x_2, x_1) = [x_1x_2, x_1] + x_1([x_1, x_2]) \in I$ e, por isso, $(x_1, x_2, x_1) \equiv 0$. Portanto, temos

$$0 \equiv (x_1^2, x_2, x_1) - 2x_1(x_1, x_2, x_1) \equiv (x_1^2, x_2, x_1),$$

ou seja, $(x_1^2, x_2, x_1) \in I$. Como I é um T-ideal, então, pela Proposição 1.37, $[u, v]$ e (u^2, v, u) estão em I para quaisquer $u, v \in K\{X\}$. Com isso, concluímos que $K\{X\}/I$ é uma álgebra de Jordan. Considere agora $u, v, w \in K\{X\}$. Temos

$$\begin{aligned}(w, v, u) + (u, v, w) &= (wv)u - w(vu) + (uv)w - u(vw)\\ &= (wv)u - u(vw) + (uv)w - w(vu)\\ &= (wv)u - u(wv - [w, v]) + (uv)w - w(uv - [u, v])\\ &= (wv)u - u(wv) + u([w, v]) + (uv)w - w(uv) + w([u, v])\\ &= [wv, u] + u([w, v]) + [uv, w] + w([u, v])\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(v, u, w) - (u, v, w) + (u, w, v) &= (vu)w - v(uw) - (uv)w + u(vw) + (uw)v - u(wv)\\ &= (vu)w - (uv)w + u(vw) - u(wv) + (uw)v - v(uw)\\ &= ([v, u])w + u([v, w]) + [uw, v].\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 1.37, $(w, v, u) + (u, v, w) \in I$ e $(v, u, w) - (u, v, w) + (u, w, v) \in I$, ou seja,

$$(w,v,u) \equiv -(u,v,w) \quad \text{e} \quad (v,u,w) \equiv (u,v,w) - (u,w,v). \tag{3.8}$$

Lema 3.10. *As seguintes congruências ocorrem em $K\{X\}$:*

a) $(x_1x_2, x_3, x_4) \equiv x_1(x_2, x_3, x_4) + x_2(x_1, x_3, x_4)$;

b) $(x_3, x_4, x_1x_2) \equiv x_1(x_3, x_4, x_2) + x_2(x_3, x_4, x_1)$;

c) $(x_1, x_2x_3, x_4) \equiv 2x_2(x_1, x_3, x_4)$.

Demonstração. Como $T(x_1, x_2, x_3, x_4) \in I$ obtemos $T(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0$, ou seja,

$$(x_1x_2, x_3, x_4) \equiv x_1(x_2, x_3, x_4) + x_2(x_1, x_3, x_4).$$

Isso prova a afirmação de a).

Por (3.8) temos $(x_3, x_4, x_1x_2) \equiv -(x_1x_2, x_4, x_3)$. Agora usando o item a), temos $-(x_1x_2, x_4, x_3) \equiv -x_1(x_2, x_4, x_3) - x_2(x_1, x_4, x_3)$ e, usando (3.8), concluímos que

$$-x_1(x_2, x_4, x_3) - x_2(x_1, x_4, x_3) \equiv x_1(x_3, x_4, x_2) + x_2(x_3, x_4, x_1).$$

Isso prova b).

Por fim, como $S(x_1, x_2, x_3, x_4) \in I$ então $S(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0$, ou seja,

$$(x_1, x_2x_3, x_4) \equiv 2x_2(x_1, x_3, x_4).$$

Isso prova a afirmação de c). □

A partir de agora demonstraremos alguns lemas envolvendo o T-ideal gerado por (x_1, x_2, x_3), ou seja, $\langle (x_1, x_2, x_3) \rangle^T$.

Lema 3.11. *Se f é um elemento em $\langle (x_1, x_2, x_3) \rangle^T$, então $f + I$ é uma combinação linear de elementos*

$$u_1u_2 \cdots u_n(v_1, v_2, v_3) + I, \tag{3.9}$$

onde $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, v_3$ são monômios em $K\{X\}$ e $n \geq 0$.

Demonstração. Pela Proposição 1.37, o T-ideal $\langle (x_1, x_2, x_3) \rangle^T$ é o subespaço vetorial de $K\{X\}$ gerado por todos os elementos da forma

$$g = \omega(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, (h_1, h_2, h_3), \omega_{j+1}, \ldots, \omega_m),$$

onde $\omega(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m)$ é um monômio em P_m, $1 \leq j \leq m$,

$$\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_m$$

são monômios em $K\{X\}$ e h_1, h_2, h_3 são polinômios em $K\{X\}$. Note que se $h_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i u_i$, então

$$
\begin{aligned}
(h_1, h_2, h_3) = \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i u_i, h_2, h_3\right) &= \left(\left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i u_i\right) h_2\right) h_3 - \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i u_i\right)(h_2 h_3) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i (u_i h_2)\right) h_3 - \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i u_i (h_2 h_3) \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i (u_i h_2) h_3 - \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i u_i (h_2 h_3) \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i [(u_i h_2) h_3 - u_i (h_2 h_3)] \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i (u_i, h_2, h_3). \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

onde $\alpha_i \in K$ e u_i é um monômio em $K\{X\}$ para todo $i = 1, \ldots, n_1$. Agora, se $h_2 = \sum_{l=1}^{n_2} \beta_l v_l$ e $h_3 = \sum_{k=1}^{n_3} \gamma_k w_k$, onde $\beta_l, \gamma_k \in K$ e v_l, w_k são monômios em $K\{X\}$, para $l = 1, \ldots, n_2$ e $k = 1, \ldots, n_3$, então aplicando em h_2 e h_3 um argumento análogo ao utilizado em (3.10), obtemos

$$(h_1, h_2, h_3) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} \alpha_i \beta_l \gamma_k (u_i, v_l, w_k).$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
g &= \omega\left(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} \alpha_i \beta_l \gamma_k (u_i, v_l, w_k), \omega_{j+1}, \ldots, \omega_m\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} \alpha_i \beta_l \gamma_k \; \omega(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, (u_i, v_l, w_k), \omega_{j+1}, \ldots, \omega_m).
\end{aligned}
$$

Com isso, g é uma combinação linear de elementos da forma

$$f = \omega(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, (v_1, v_2, v_3), \omega_{j+1}, \ldots, \omega_m),$$

onde v_1, v_2, v_3 são monômios em $K\{X\}$. Logo, tais elementos geram o subespaço vetorial $\langle (x_1, x_2, x_3) \rangle^T$.

Agora provaremos, por indução em $\deg f$, que f é congruente módulo I a um polinômio da forma (3.9). Se $\deg f = 3$, então $f = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$ e $f + I$ é da forma (3.9).

Suponha que $\deg f \geq 4$. Se $m = 1$, então $f = (v_1, v_2, v_3)$, e, neste caso, $f + I$ é da forma (3.9). Se $m \geq 2$, pela Proposição 1.25, podemos escrever

$$\omega(x_1, \ldots, x_m) = \omega'(x_{l_1}, \ldots, x_{l_t}) \omega''(x_{l_{t+1}}, \ldots, x_{l_m}),$$

onde $\omega'(x_{l_1},\dots,x_{l_t})$ e $\omega(x_{l_{t+1}},\dots,x_{l_m})$ são monômios multilineares com

$$\{l_1,\dots,l_t,l_{t+1},\dots,l_m\}=\{1,\dots,m\},$$

onde $1\le t<m$. Com isso, temos

$$f=\omega'(\omega_{l_1},\dots,\omega_{l_t})\omega''(\omega_{l_{t+1}},\dots,(v_1,v_2,v_3),\dots,\omega_{l_m}) \quad \text{ou}$$
$$f=\omega'(\omega_{l_1},\dots,(v_1,v_2,v_3),\dots,\omega_{l_t})\omega''(\omega_{l_{t+1}},\dots,\omega_{l_m}).$$

No primeiro caso, $\omega'(\omega_{l_1},\dots,\omega_{l_t})$ é um monômio e, aplicando a hipótese de indução em $\omega''(\omega_{l_{t+1}},\dots,(v_1,v_2,v_3),\dots,\omega_{l_m})$, concluímos que $f+I$ é da forma (3.9). No segundo caso, como $K\{X\}/I$ é comutativa, segue que

$$f+I=\omega''(\omega_{l_{t+1}},\dots,\omega_{l_m})\omega'(\omega_{l_1},\dots,(v_1,v_2,v_3),\dots,\omega_{l_t})+I$$

e podemos usar o mesmo argumento do primeiro caso. Portanto, um elemento qualquer em $\langle(x_1,x_2,x_3)\rangle^T$ é uma combinação linear de elementos

$$u_1u_2\cdots u_n(v_1,v_2,v_3),$$

onde $u_1,u_2,\dots,u_n,v_1,v_2,v_3$ são monômios em $K\{X\}$ e $n\ge 0$. Assim, o resultado está provado. □

Lema 3.12. *Se f é um elemento em $\langle(x_1,x_2,x_3)\rangle^T$, então $f+I$ é uma combinação linear de elementos*

$$u_1u_2\cdots u_n(x_i,x_j,x_k)+I,$$

onde $u_1,u_2,\dots,u_n$ são monômios em $K\{X\}$, $n\ge 0$ e $x_i,x_j,x_k\in X$.

Demonstração. Pelo lema anterior, podemos assumir que $f=u_1u_2\cdots u_n(v_1,v_2,v_3)$, onde $u_1,u_2,\dots,u_n,v_1,v_2,v_3$ são monômios em $K\{X\}$ e $n\ge 0$, é um dos geradores do espaço vetorial $\langle(x_1,x_2,x_3)\rangle^T$, logo,

$$f+I=u_1u_2\cdots u_n(v_1,v_2,v_3)+I.$$

Se $\deg v_1\ge 2$, então existem monômios $v_1',v_1''\in K\{X\}$ tais que $v_1=v_1'v_1''$. Pelo Lema 3.10 - (a), obtemos a igualdade

$$f+I=u_1u_2\cdots u_nv_1'(v_1'',v_2,v_3)+u_1u_2\cdots u_nv_1''(v_1',v_2,v_3)+I.$$

Se necessário, podemos usar o mesmo argumento nas duas somas acima e, após um número finito de passos, obteremos que $f + I$ é uma combinação linear de elementos

$$\omega_1\omega_2\cdots\omega_m(x_i, v_2, v_3) + I,$$

onde $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ são monômios em $K\{X\}$, $m \geq 0$ e $x_i \in X$. Pelo Lema 3.10 - (b) e um argumento análogo, podemos assumir que $v_3 \in X$. Pelo Lema 3.10 - (c) e um argumento semelhante, podemos supor que $v_2 \in X$ e concluímos a demonstração. □

Lema 3.13. *A congruência*

$$(x_1x_2)x_3x_4\cdots x_n(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}) \equiv 2x_1x_2x_3x_4\cdots x_n(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3})$$

vale em $K\{X\}$ para todo $n \geq 2$.

Demonstração. Demonstraremos este lema fazendo indução sobre n. Como

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in I$$

obtemos $U(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \equiv 0$, ou seja,

$$(x_1x_2)(x_3, x_4, x_5) \equiv 2x_1x_2(x_3, x_4, x_5),$$

logo, para $n = 2$, o resultado é imediato. Para $n \geq 3$ usando, respectivamente, o Lema 3.10 - (c), a hipótese de indução e o Lema 3.10 - (c) novamente, temos

$$\begin{aligned}(x_1x_2)x_3\cdots x_n(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}) &\equiv \frac{1}{2}(x_1x_2)x_3\cdots x_{n-1}(x_{n+1}, x_nx_{n+2}, x_{n+3})\\ &\equiv x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}(x_{n+1}, x_nx_{n+2}, x_{n+3})\\ &\equiv 2x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}x_n(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3})\end{aligned}$$

e obtemos a congruência desejada. □

Lema 3.14. *Se f é um elemento em $\langle(x_1, x_2, x_3)\rangle^T$, então $f + I$ é uma combinação linear de elementos da forma*

$$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}) + I,$$

onde $n \geq 0$ e $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3} \in X$.

Demonstração. Pelo Lema 3.12 podemos assumir que

$$f = u_1u_2\cdots u_n(x_i, x_j, x_k),$$

é um gerador de $\langle(x_1, x_2, x_3)\rangle^T$, onde $u_1, u_2, \ldots, u_n$ são monômios em $K\{X\}$, $n \geq 0$ e $x_i, x_j, x_k \in X$. Vamos provar o lema por indução sobre o grau de f. Se $\deg f = 3$ então

$f = (x_i, x_j, x_k)$. Assuma que $\deg f \geq 4$. Aplicando a hipótese de indução em

$$u_2 \cdots u_n(x_i, x_j, x_k),$$

podemos assumir que $u_2, u_3, \ldots, u_n \in X$. Se $u_1 \in X$, então o resultado é válido. Assuma agora que $\deg u_1 \geq 2$ e escreva $u_1 = u_1' u_1''$, onde u_1' e u_1'' são monômios. Aplicando o lema anterior segue que

$$f = (u_1' u_1'') u_2 \cdots u_n(x_i, x_j, x_k) \equiv 2 u_1' u_1'' u_2 \cdots u_n(x_i, x_j, x_k).$$

Aplicamos novamente a hipótese de indução em

$$u_1'' u_2 \cdots u_n(x_i, x_j, x_k).$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $u_1'' \in X$ e, se necessário, recomeçamos o processo com u_1' e segue o resultado. □

Lema 3.15. *A seguinte congruência é válida em $K\{X\}$:*

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_n(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}) \equiv x_2 x_1 x_3 \cdots x_n(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3})$$

para todo $n \geq 2$.

Demonstração. Usando o Lema 3.13, a comutatividade de $K\{X\}/I$ e novamente o Lema 3.13, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 \cdots x_n(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}) &\equiv \frac{1}{2}(x_1 x_2) x_3 \cdots x_n(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}) \\ &\equiv \frac{1}{2}(x_2 x_1) x_3 \cdots x_n(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}) \\ &\equiv x_2 x_1 x_3 \cdots x_n(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}). \end{aligned}$$

A prova está completa. □

Lema 3.16. *Se $n \geq 2$ e $\sigma \in S_n$, então*

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n-1)}(x_{n+1}, x_{\sigma(n)}, x_{n+2}) \equiv x_1 x_2 \cdots x_{n-1}(x_{n+1}, x_n, x_{n+2}). \tag{3.11}$$

Demonstração. Note primeiramente que, como $S(x_1, x_2, x_3, x_4) \in I$ e $[x_1, x_2] \in I$, obtemos

$$x_2(x_1, x_3, x_4) \equiv \frac{1}{2}(x_1, x_2 x_3, x_4) \equiv \frac{1}{2}(x_1, x_3 x_2, x_4) \equiv x_3(x_1, x_2, x_4). \tag{3.12}$$

Façamos indução sobre n. Para $n = 2$, por (3.12), temos

$$x_1(x_3, x_2, x_4) \equiv x_2(x_3, x_1, x_4),$$

portanto, (3.11) é válida para todo $\sigma \in S_2$. Suponha agora que $n \geq 3$, assim, usando (3.12) e o lema anterior, temos

$$\begin{aligned} x_1x_2\cdots x_{n-1}(x_{n+1},x_n,x_{n+2}) &\equiv x_1x_2\cdots x_n(x_{n+1},x_{n-1},x_{n+2}) \\ &\equiv x_nx_1x_2\cdots x_{n-2}(x_{n+1},x_{n-1},x_{n+2}), \end{aligned}$$

agora, usando a hipótese de indução e o lema anterior, obtemos a congruência

$$\begin{aligned} x_1x_2\cdots x_{n-1}(x_{n+1},x_n,x_{n+2}) &\equiv x_nx_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n-2)}(x_{n+1},x_{\sigma(n-1)},x_{n+2}) \\ &\equiv x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n-1)}(x_{n+1},x_n,x_{n+2}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Para todo $\sigma \in S_{n-1}$. Portanto, usando (3.12) e o último lema quantas vezes forem necessárias em (3.13), chegamos à congruência

$$x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n-1)}(x_{n+1},x_{\sigma(n)},x_{n+2}) \equiv x_1x_2\cdots x_{n-1}(x_{n+1},x_n,x_{n+2}).$$

para todo $\sigma \in S_n$. □

Definição 3.17. Um polinômio

$$f = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}(x_j,x_{i_{t+1}},x_k)$$

é chamado de polinômio bom se

$$j \leq i_{t+1} \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_t \quad \text{e} \quad j < k.$$

Neste caso, se $\deg_{x_i} f = m_i$, então denotamos

$$f = f(x_j,x_{j+1},\ldots,x_n) = f^{(j,k)}_{(m_j,m_{j+1},\ldots,m_n)}.$$

Exemplo 3.18. O polinômio

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = f^{(1,5)}_{(3,1,2,0,2,1)} = x_1x_2x_3x_3x_5x_6(x_1,x_1,x_5)$$

é um polinômio bom.

Lema 3.19. *Se g é um elemento em $\langle(x_1,x_2,x_3)\rangle^T$, então $g+I$ é uma combinação linear de elementos $h+I$, onde os polinômios h são polinômios bons.*

Demonstração. Pelo Lema 3.14, temos que $g+I$ é uma combinação linear de elementos $h+I$ onde

$$h = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}).$$

Pelo Lema 3.16 podemos assumir que

$$j_2 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_t.$$

Se $j_1 = j_3$, como $K\{X\}/I$ é comutativa, temos

$$(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_1}) + I = [(x_{j_1}x_{j_2})x_{j_1} - x_{j_1}(x_{j_2}x_{j_1})] + I = [(x_{j_1}x_{j_2})x_{j_1} - x_{j_1}(x_{j_1}x_{j_2})] + I = 0 + I,$$

logo, $h + I = 0 + I$, assim podemos supor que $j_1 \neq j_3$. Por (3.8), temos

$$(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}) + I = -(x_{j_3}, x_{j_2}, x_{j_1}) + I,$$

com isso, podemos assumir que $j_1 < j_3$ em h.

Se $j_1 \leq j_2$ então h é um polinômio bom. Se $j_1 > j_2$, então de (3.8), segue-se que

$$(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}) + I = -(x_{j_2}, x_{j_3}, x_{j_1}) + (x_{j_2}, x_{j_1}, x_{j_3}) + I.$$

Portanto $h + I = -h' + h'' + I$, onde

$$h' = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}(x_{j_2}, x_{j_3}, x_{j_1}) \text{ e } h'' = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}(x_{j_2}, x_{j_1}, x_{j_3}).$$

Se h' e h'' são polinômios bons, o lema está provado, caso contrário, aplicamos novamente o Lema 3.16 em h' e h''. □

Lema 3.20. *Seja H o subconjunto de $K\{X\}$ formado por*

(a) todos os polinômios $(x_1^{m_1})(x_2^{m_2})\cdots(x_n^{m_n})$, onde $m_1, \ldots, m_n \geq 0$ não são simultaneamente zero,

(b) e todos os polinômios bons.

Então o espaço vetorial quociente $K\{X\}/I$ é gerado pelo conjunto de todos os elementos $h + I$ onde $h \in H$.

Demonstração. Se

$$I' = I + \langle (x_1, x_2, x_3) \rangle^T,$$

então I' é um T-ideal e $[x_1, x_2]$ e (x_1, x_2, x_3) estão em I'. Assim, $K\{X\}/I'$ é uma álgebra comutativa e associativa. Com isso, se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\{X\}$ é um monômio então em $K\{X\}/I'$ teremos

$$f + I' = (x_1^{m_1})(x_2^{m_2})\cdots(x_n^{m_n}) + I',$$

portanto,

$$f - (x_1^{m_1})(x_2^{m_2})\cdots(x_n^{m_n}) \in I' \Rightarrow f - (x_1^{m_1})(x_2^{m_2})\cdots(x_n^{m_n}) = i + g$$
$$\Rightarrow f = (x_1^{m_1})(x_2^{m_2})\cdots(x_n^{m_n}) - i + g,$$

para algum $i \in I$ e algum $g \in \langle (x_1, x_2, x_3) \rangle^T$ e $m_1, \ldots, m_n \geq 0$. Logo,

$$f + I = (x_1^{m_1})(x_2^{m_2})\cdots(x_n^{m_n}) + g + I,$$

Agora usamos o Lema 3.19 em $g + I$ e o resultado está provado. □

Se $m_1, m_2, \ldots, m_n \geq 0$ e $f_1, f_2, \ldots, f_n \in K\{X\}$, denotamos

$$\underbrace{f_1 f_1 \cdots f_1}_{m_1 \text{ vezes}} \underbrace{f_2 f_2 \cdots f_2}_{m_2 \text{ vezes}} \cdots \underbrace{f_n f_n \cdots f_n}_{m_n \text{ vezes}} \quad \text{por} \quad f_1^{m_1} f_2^{m_2} \cdots f_n^{m_n}.$$

Atenção para a diferença:

$$f_1^{m_1} f_2^{m_2} \cdots f_n^{m_n} \neq (f_1^{m_1})(f_2^{m_2})\cdots(f_n^{m_n}).$$

Por exemplo,

$$x_1^3 x_2 = x_1 x_1 x_1 x_2 = x_1(x_1(x_1 x_2)) \neq (x_1^3) x_2 = (x_1(x_1 x_1)) x_2.$$

Outro exemplo,

$$f_{(5,2,2,1)}^{(1,4)} = x_1 x_1 x_1 x_2 x_2 x_3 x_3 (x_1, x_1, x_4) = x_1^3 x_2^2 x_3^2 (x_1, x_1, x_4) \neq (x_1^3)(x_2^2)(x_3^2)(x_1, x_1, x_4).$$

Lema 3.21. *Sejam u, v elementos diferentes de zero de D tais que $\psi(u) = 1$ e $\psi(v) = 0$. Considere $X_i = \xi_i u + \tau_i v$, onde $\xi_i, \tau_i \in K$. Então*

a) $(X_1, X_2, X_3) = (1/4)\xi_2(\xi_1 \tau_3 - \tau_1 \xi_3) v$;

b) $X_{j_1} \cdots X_{j_m}(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}) = \alpha \xi_{j_1} \xi_{j_2} \cdots \xi_{j_m} \xi_{i_2} (\xi_{i_1} \tau_{i_3} - \tau_{i_1} \xi_{i_3}) v$, *onde* $\alpha = (1/2)^{m+2}$.

Demonstração. Por (3.6) temos

$$\begin{aligned}(X_1, X_2, X_3) &= (1/4)\psi(X_2)(\psi(X_1) X_3 - \psi(X_3) X_1) \\ &= (1/4)\xi_2(\xi_1(\xi_3 u + \tau_3 v) - \xi_3(\xi_1 u + \tau_1 v)) \\ &= (1/4)\xi_2(\xi_1 \tau_3 - \xi_3 \tau_1) v.\end{aligned}$$

Assim, o item a) está provado.

Provaremos agora o item b) fazendo indução em m. Para $m = 0$ a igualdade segue do item a). Assuma que $m \geq 1$, usando a hipótese de indução, a igualdade $(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}) = (1/4)\xi_{i_2}(\xi_{i_1}\tau_{i_3} - \tau_{i_1}\xi_{i_3})v$ e (3.7), temos

$$\begin{aligned} X_{j_1}X_{j_2}\cdots X_{j_m}(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}) &= X_{j_1}(1/2)^{(m-1)+2}\xi_{j_2}\xi_{j_3}\cdots\xi_{j_m}\xi_{i_2}(\xi_{i_1}\tau_{i_3} - \tau_{i_1}\xi_{i_3})v \\ &= (1/2)^{m-1}\xi_{j_2}\xi_{j_3}\cdots\xi_{j_m}X_{j_1}(1/4)\xi_{i_2}(\xi_{i_1}\tau_{i_3} - \tau_{i_1}\xi_{i_3})v \\ &= (1/2)^{m-1}\xi_{j_2}\xi_{j_3}\cdots\xi_{j_m}(1/2)\psi(X_{j_1})(1/4)\xi_{i_2}(\xi_{i_1}\tau_{i_3} - \tau_{i_1}\xi_{i_3})v \\ &= (1/2)^{m+2}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\cdots\xi_{j_m}\xi_{i_2}(\xi_{i_1}\tau_{i_3} - \tau_{i_1}\xi_{i_3})v \end{aligned}$$

e está provado o item b). □

Lema 3.22. *Sejam u, v elementos de D diferentes de zero tais que $\psi(u) = 1$ e $\psi(v) = 0$. Considere $X_i = \xi_i u + \tau_i v$, onde $\xi_i, \tau_i \in K$. Então*

$$\left(f^{(j,k)}_{(m_j,\ldots,m_n)}\right)(X_j, \ldots, X_n) = \alpha\xi_j^{m_j-1}\xi_{j+1}^{m_{j+1}}\cdots\xi_k^{m_k-1}\cdots\xi_n^{m_n}(\xi_j\tau_k - \xi_k\tau_j)v,$$

onde $\alpha = (1/2)^{m_j+\cdots+m_n-1}$, os expoentes de ξ_j e ξ_k são $m_j - 1$ e $m_k - 1$, respectivamente, e o expoente de ξ_s é m_s sempre que $j < s \leq n$ e $s \neq k$.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $m_j, \ldots, m_n > 0$. Se $m_j = 1$, temos dois casos:

1) $k = j + 1$. Neste caso,

$$\left(f^{(j,k)}_{(1,m_{j+1},\ldots,m_n)}\right)(X_j, \ldots, X_n) = X_{j+1}^{m_{j+1}-2}\cdots X_s^{m_s}\cdots X_n^{m_n}(X_j, X_{j+1}, X_{j+1}),$$

onde $j + 1 < s \leq n$. Assim, pelo Lema 3.21, temos

$$\begin{aligned} \left(f^{(j,k)}_{(1,m_{j+1},\ldots,m_n)}\right)(X_j, \ldots, X_n) &= \alpha\xi_{j+1}^{m_{j+1}-2}\cdots\xi_s^{m_s}\cdots\xi_n^{m_n}\xi_{j+1}(\xi_j\tau_{j+1} - \xi_{j+1}\tau_j)v \\ &= \alpha\xi_j^{m_j-1}\xi_{j+1}^{m_{j+1}-1}\cdots\xi_n^{m_n}(\xi_j\tau_{j+1} - \xi_{j+1}\tau_j)v, \end{aligned}$$

com

$$\alpha = (1/2)^{((m_j-1)+(m_{j+1}-2)+\cdots+m_s+\cdots+m_n)+2} = (1/2)^{m_j+\cdots+m_n-1}.$$

2) $k \neq j + 1$. Neste caso,

$$\left(f^{(j,k)}_{(1,m_{j+1},\ldots,m_n)}\right)(X_j, \ldots, X_n) = X_{j+1}^{m_{j+1}-1}\cdots X_s^{m_s}\cdots X_k^{m_k-1}\cdots X_n^{m_n}(X_j, X_{j+1}, X_k),$$

onde $j + 1 < s \leq n$ e $s \neq k$. Assim, pelo Lema 3.21, temos

$$\begin{aligned} \left(f^{(j,k)}_{(1,m_{j+1},\ldots,m_n)}\right)(X_j, \ldots, X_n) &= \alpha\xi_{j+1}^{m_{j+1}-1}\cdots\xi_s^{m_s}\cdots\xi_k^{m_k-1}\cdots\xi_n^{m_n}\xi_{j+1}(\xi_j\tau_k - \xi_k\tau_j)v \\ &= \alpha\xi_j^{m_j-1}\xi_{j+1}^{m_{j+1}}\cdots\xi_k^{m_k-1}\cdots\xi_n^{m_n}(\xi_j\tau_k - \xi_k\tau_j)v, \end{aligned}$$

com

$$\alpha = (1/2)^{((m_j-2)+(m_{j+1}-1)+\cdots+m_s+\cdots+(m_k-1)+\cdots+m_n)+2} = (1/2)^{m_j+\cdots+m_n-1}.$$

Logo, dos casos anteriores, segue a igualdade desejada. Suponha agora que $m_j \geq 2$, então

$$\left(f^{(j,k)}_{(m_j,\ldots,m_n)}\right)(X_j,\ldots,X_n) = X_j^{m_j-2}\cdots X_s^{m_s}\cdots X_k^{m_k-1}\cdots X_n^{m_n}(X_j,X_j,X_k),$$

onde $j < s \leq n$ e $s \neq k$. Assim, pelo Lema 3.21, temos

$$\begin{aligned}\left(f^{(j,k)}_{(m_j,\ldots,m_n)}\right)(X_j,\ldots,X_n) &= \alpha\xi_j^{m_j-2}\cdots\xi_s^{m_s}\cdots\xi_k^{m_k-1}\cdots\xi_n^{m_n}\xi_j(\xi_j\tau_k - \xi_k\tau_j)v\\ &= \alpha\xi_j^{m_j-1}\cdots\xi_s^{m_s}\cdots\xi_k^{m_k-1}\cdots\xi_n^{m_n}(\xi_j\tau_k - \xi_k\tau_j)v,\end{aligned}$$

com

$$\alpha = (1/2)^{((m_j-2)+\cdots+m_s+\cdots+(m_k-1)+\cdots+m_n)+2} = (1/2)^{m_j+\cdots+m_n-1}.$$

Logo, segue o resultado e o lema está provado. □

3.3 Identidades Polinomiais, Sequência de Cocaracteres e Codimensão de D

Nesta seção, descreveremos uma base finita para o T-ideal $Id(D)$ e a sequência de codimensões $(c_n(D))_{n\geq 1}$ de D, quando K é um corpo infinito de característica diferente de 2, bem como a sequência de cocaracteres $(\chi_n(D))_{n\geq 1}$ para qualquer corpo de característica zero. Como consequência, provaremos que o T-ideal $Id(D)$ não depende da dimensão de D. Em particular, obteremos uma base finita para $Id(D_2)$, ou seja, o T-ideal das identidades polinomiais da única álgebra de Jordan bidimensional não associativa sobre um corpo infinito de característica diferente de 2. Aqui também usaremos as notações do Lema 3.1.

Teorema 3.23. *Se K é um corpo infinito de característica diferente de 2, então $Id(D) = I$. Além disso, o conjunto do Lema 3.20 forma uma base para o espaço vetorial $K\{X\}/Id(D)$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.9, temos $I \subseteq Id(D)$. Seja H o conjunto do Lema 3.20 e escreva $\overline{H} = \{g + Id(D) \mid g \in H\}$. Segue-se do Lema 3.20 que se $f \in K\{X\}$, então, existem $\lambda_i \in K$ e $h_i \in H$, com $i = 1,\ldots,r$, tais que

$$f + I = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i h_i + I.$$

Assim, $f - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i \in I \subseteq Id(D)$ e isso implica que

$$f + Id(D) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i + Id(D).$$

Logo, $K\{X\}/Id(D) \subseteq \text{span}(\overline{H})$ e, como a inclusão contrária é óbvia, segue a igualdade $K\{X\}/Id(D) = \text{span}(\overline{H})$. Provaremos agora que $\overline{H}$ é um conjunto linearmente independente, para isso, considere uma combinação linear nula em $K\{X\}/Id(D)$ dada por

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{h \in H} \lambda_h h \in Id(D),$$

com $h \in H$, $\lambda_h \in K$ e $\lambda_h \neq 0$ para um número finito de elementos $h \in H$. Como K é um corpo infinito, pelo Teorema 1.45, cada componente multihomogênea de g pertence a $Id(D)$, logo podemos assumir que g é um polinômio multihomogêneo. Seja $(m_1, \ldots, m_n)$ o multigrau de $g(x_1, \ldots, x_n)$ isto é, $\deg_{x_j} g = m_j$, para $j = 1, 2, \ldots, n$, e assuma que $m_1, \ldots, m_n \geq 1$, sem perda de generalidade. Nesse caso, g é da forma

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \lambda(x_1^{m_1}) \cdots (x_n^{m_n}) + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \left(g_{(m_1, \ldots, m_n)}^{(1,k)} \right) (x_1, \ldots, x_n).$$

Sejam $u, v \in D$ elementos não nulos tais que $\psi(u) = 1$ e $\psi(v) = 0$. Usando a igualdade $u^2 = u$, temos $(u^{m_1}) \cdots (u^{m_n}) = u$ e $(u, u, u) = 0$, além disso, como $g \in Id(D)$ e $u \in D$, segue-se que

$$g(u, \ldots, u) = \lambda(u^{m_1}) \cdots (u^{m_n}) + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \left(g_{(m_1, \ldots, m_n)}^{(1,k)} \right) (u, \ldots, u) = \lambda u = 0$$

e assim $\lambda = 0$. Fixado $2 \leq l \leq n$, denotamos $X_l = u + v$ e $X_i = u$ se $i \neq l$. Sabemos que $g(X_1, \ldots, X_n) = 0$, além disso, pelo Lema 3.22, temos

$$g(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \left(g_{(m_1, \ldots, m_n)}^{(1,k)} \right) (X_1, \ldots, X_n) = \lambda_l \left(g_{(m_1, \ldots, m_n)}^{(1,l)} \right) (X_1, \ldots, X_n) = -\lambda_l \alpha v,$$

onde $\alpha = (1/2)^{m_1 + \ldots + m_n - 1}$, portanto $\lambda_l = 0$, para todo $2 \leq l \leq n$ e segue a independência linear do conjunto $\overline{H}$. Com isso, $\overline{H}$ é uma base para $K\{X\}/Id(D)$.

Agora, dado $f \in Id(D)$, sabemos que existem $\lambda_i \in K$ e $h_i \in H$, com $i = 1, \ldots, r$, tais que $f - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i \in I \subseteq Id(D)$. Logo $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i \in Id(D)$ e, como vimos acima, isso implica que $\lambda_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, r$. Logo, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i = 0$ e, portanto, $f \in I$. Com isso, temos $Id(D) \subseteq I$ e o teorema está provado. □

Corolário 3.24. *Se K um corpo infinito de característica diferente de 2, então $Id(D_2) = I$. Além disso, o conjunto no Lema 3.20 forma uma base para o espaço vetorial quociente $K\{X\}/Id(D_2)$.*

Demonstração. Como D_2 é uma álgebra que satisfaz todas as propriedades definidas em D, o resultado é imediato. □

Lema 3.25. *Seja K um corpo infinito de característica $p \neq 2$ e H o conjunto do Lema 3.20. Então o conjunto de todos os elementos $h + (P_n \cap Id(D))$, onde $h \in P_n \cap H$ é uma base para o espaço vetorial*

$$P_n(D) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(D)}.$$

Demonstração. Considere $f \in P_n \subset K\{X\}$. Pelo Teorema 3.23, sabemos que

$$f + Id(D) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i + Id(D), \tag{3.14}$$

com $\lambda_i \in K$ e $h_i \in H$ para todo $i = 1, \dots, r$. Escreva

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i + Id(D) = \sum_{j=1}^{r_1} \alpha_j g_j + \sum_{k=1}^{r_2} \beta_k r_k + Id(D), \tag{3.15}$$

onde, para quaisquer $j = 1, \dots, r_1,\ k = 1, \dots, r_2$, tem-se que $\alpha_j,\ \beta_k \in K$ e $g_j,\ r_k \in H$ tais que $g_j \in P_n$ e $r_k \notin P_n$. Então de (3.14) e (3.15), temos

$$\left(f - \sum_{j=1}^{r_1} \alpha_j g_j - \sum_{k=1}^{r_2} \beta_k r_k\right) \in Id(D). \tag{3.16}$$

Uma vez que $f - \sum_{j=1}^{r_1} \alpha_j g_j$ é um polinômio multilinear, então essa diferença será uma componente multihomogênea do polinômio em (3.16), logo, pelo Teorema 1.45, segue que $(f - \sum_{j=1}^{r_1} \alpha_j g_j) \in Id(D)$ e, portanto, $(f - \sum_{j=1}^{r_1} \alpha_j g_i) \in (P_n \cap Id(D))$. Assim,

$$f + (P_n \cap Id(D)) = \sum_{j=1}^{r_1} \alpha_j g_j + (P_n \cap Id(D)), \tag{3.17}$$

com $g_j \in H \cap P_n$. Com isso, denotando por H' o conjunto formado pelos elementos da forma $h + (P_n \cap Id(D))$, onde $h \in P_n \cap H$, como vimos em (3.17), H' gera o espaço vetorial $P_n(D)$. Além disso, pelo Teorema 3.23 segue que H' é linearmente independente e, portanto, uma base para $P_n(D)$. □

Teorema 3.26. *Se K é um corpo infinito de característica $p \neq 2$, então*

$$c_1(D) = c_2(D) = 1 \text{ e } c_n(D) = n$$

quando $n \geq 3$. Além disso, se $p = 0$, então

$$\chi_1(D) = \chi_{(1)},\ \chi_2(D) = \chi_{(2)} \text{ e } \chi_n(D) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}$$

quando $n \geq 3$.

Demonstração. Se K é um corpo infinito de característica $p \neq 2$, então pelo Lema 3.25, uma base para o espaço vetorial $P_n(D)$ é o conjunto de todos os elementos $f + (P_n \cap Id(D))$ tal que $f \in H \cap P_n$, logo

1) $f = x_1$, se $n = 1$;

2) $f = x_1x_2$, se $n = 2$;

3) $f = x_1x_2\cdots x_n$ ou $f = f^{(1,j)}_{(1,\dots,1)}$ onde $2 \leq j \leq n$, se $n \geq 3$.

Portanto, a sequência de codimensões de D é dada por

$$c_1(D) = \dim_K P_1(D) = 1, \quad c_2(D) = \dim_K P_2(D) = 1 \quad \text{e} \quad c_n(D) = \dim_K P_n(D) = n,$$

quando $n \geq 3$.

Agora seja K um corpo de característica $p = 0$ e sejam $u, v \in D$ elementos diferentes de zero tais que $\psi(u) = 1$ e $\psi(v) = 0$.

Dada uma partição λ de n e uma tabela de Young standard T associada a λ, considere

$$e_T = \left(\sum_{\sigma \in R_T} \sigma\right)\left(\sum_{\gamma \in C_T} (\text{sg } \gamma)\gamma\right),$$

onde R_T e C_T são os estabilizadores das linhas e colunas de T, respectivamente.

Afirmação 1. Seja T_1 a tabela de Young associada à partição $(n) \vdash n$ dada por

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline\end{array}$$

então $f(x_1,\dots,x_n) = e_{T_1} \cdot (x_3x_4\cdots x_{n-1}x_1x_2x_n)$ não é uma identidade para D.

Prova da Afirmação 1. Neste caso, $R_{T_1} = S_n$ e $C_{T_1} = (1)$. Assim, pela ação da álgebra $K[S_n]$ no S_n-módulo P_n (definida no Exemplo 2.8), temos

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}\cdots x_{\sigma(n-1)}x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(n)}$$

e, como $u = u^2$, segue

$$f(u,\dots,u) = (n!)u^n = (n!)u.$$

Portanto $f \notin Id(D)$ e a Afirmação 1 está provada.

Afirmação 2. Se $n \geq 3$, seja T_2 a tabela de Young, associada à partição $(n-1,1) \vdash n$, dada por

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline n \\ \cline{1-1}\end{array}$$

então $f(x_1,\dots,x_n) = e_{T_2} \cdot (x_3x_4\cdots x_{n-1}x_1x_2x_n)$ não é uma identidade para D.

Prova da Afirmação 2. Aqui temos $R_{T_2} = S_{n-1}$ e $C_{T_2} = \{(1),(1\ n)\}$, assim, usando a comutatividade de $K\{X\}/Id(D)$, obtemos

$$\begin{aligned}
f + Id(D) &= \left(\sum_{R_{T_2}} \sigma\right)((1) - (1\ n)) \cdot (x_3x_4\cdots x_{n-1}x_1x_2x_n) + Id(D)\\
&= \left(\sum_{\sigma\in S_{n-1}} \sigma\right) \cdot ((x_3x_4\cdots x_{n-1}x_1x_2x_n) - (x_3x_4\cdots x_{n-1}x_nx_2x_1)) + Id(D)\\
&= -\left(\sum_{\sigma\in S_{n-1}} \sigma\right) \cdot f^{(1,n)}_{(1,\dots,1)} + Id(D)\\
&= -\sum_{\sigma\in S_{n-1}} x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}\cdots x_{\sigma(n-1)}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_n) + Id(D).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.16, podemos escrever $f + Id(D) = g + Id(D)$, onde

$$\begin{aligned}
g(x_1,\dots,x_n) = &-[(n-2)!]x_3\cdots x_{n-1}(x_1,x_2,x_n)+\\
&-[(n-2)!]\sum_{j=2}^{n-1} x_2\cdots x_{j-1}x_{j+1}\cdots x_{n-1}(x_j,x_1,x_n).
\end{aligned}$$

Agora usando a comutatividade de D, temos que $(u,v,u) = (uv)u - u(vu) = 0$. Além disso, por (3.1), segue que $(v,u,u) = -(1/2)^2 v$, assim

$$g(v,u,\dots,u) = [(n-2)!](1/2)^{n-1}v.$$

Logo, $g \notin Id(D)$ e, portanto, $f \notin Id(D)$ e segue a Afirmação 2.

Agora, considere o S_n-módulo $P_n(D)$. Mostremos que

$$W_1 = K[S_n] \cdot [e_{T_1} \cdot (x_3x_4\cdots x_{n-1}x_1x_2x_n) + (P_n \cap Id(D))]$$

é um submódulo irredutível de $P_n(D)$ correspondente à partição $(n) \vdash n$. De fato, como $p = 0$, considere o S_n-módulo irredutível $M_{T_1} = K[S_n] \cdot e_{T_1}$ e a aplicação linear

$$\begin{aligned}
\phi : M_{T_1} &\to P_n(D)\\
\alpha e_{T_1} &\mapsto \alpha e_{T_1} \cdot [(x_3x_4\cdots x_{n-1}x_1x_2x_n) + (P_n \cap Id(D))].
\end{aligned}$$

Note que ϕ é um homomorfismo de S_n-módulos e sua imagem é W_1. Como, pela Afirmação 1, $e_{T_1} \cdot (x_3x_4\cdots x_{n-1}x_1x_2x_n)$ não pertence a $Id(D)$, segue que $\ker\phi \neq M_{T_1}$. Uma vez que M_{T_1} é um S_n-módulo irredutível (como vimos na Seção 2.2) e $\ker\phi$ é submódulo de M_{T_1}, então $\ker\phi = \{0\}$. Com isso, ϕ é um isomorfismo sobre sua imagem e, portanto, W_1 também é irredutível. Agora, como T_1 é uma tabela de Young associada à partição $(n) \vdash n$, pela Seção 2.2, sabemos que existe apenas um S_n-módulo, a menos de isomorfismo, associado à partição n, logo, denotamos M_{T_1} por $M_{(n)}$. Assim, pelo

Teorema 2.31, temos que $\dim_K M_{(n)} = 1$, logo, $\dim_K W_1 = 1$.

Se $n \geq 3$, por um argumento análogo, temos que

$$W_2 = K[S_n] \cdot [e_{T_2} \cdot (x_3 x_4 \cdots x_{n-1} x_1 x_2 x_n) + (P_n \cap Id(D))]$$

também é um submódulo irredutível de $P_n(D)$, correspondente à partição $(n-1,1) \vdash n$, isomorfo a $M_{T_2} = K[S_n] \cdot e_{T_2}$. Logo, novamente, denotando M_{T_2} por $M_{(n-1,1)}$ e usando o Teorema 2.31, temos que $\dim_K M_{(n-1,1)} = n-1$ e, portanto, $\dim_K W_2 = n-1$. Assim, para $n \geq 3$, tem-se $W_1 \neq W_2$. Além disso, sabemos que $W_1 \cap W_2$ é submódulo de W_1 e W_2, logo, como estes módulos são irredutíveis, temos $W_1 \cap W_2 = 0$. Portanto, temos

$$\dim_K (W_1 \oplus W_2) = n \quad \text{e} \quad W_1 \oplus W_2 \subseteq P_n(D).$$

Como $\dim_K P_n(D) = c_n(D) = n$, temos $W_1 \oplus W_2 = P_n(D)$.

Agora, pela Proposição 2.37 segue-se que o caracter de $P_n(D)$ é a soma dos caracteres de W_1 e W_2 e, como tais S_n-módulos são isomorfos a $M_{(n)}$ e $M_{(n-1,1)}$, respectivamente, então, da Proposição 2.39, segue-se

$$\chi_n(D) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)},$$

se $n \geq 3$. Além disso, se $n \in \{1,2\}$, então $P_n(D) = W_1$, logo

$$\chi_1(D) = \chi_{(1)} \text{ e } \chi_2(D) = \chi_{(2)}.$$

Com isso, a prova está completa. □

Corolário 3.27. *Se K é um corpo infinito de característica $p \neq 2$, então*

$$c_1(D_2) = c_2(D_2) = 1 \text{ e } c_n(D_2) = n$$

quando $n \geq 3$. Além disso, se $p = 0$, então

$$\chi_1(D_2) = \chi_{(1)}, \; \chi_2(D_2) = \chi_{(2)} \text{ e } \chi_n(D_2) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}$$

quando $n \geq 3$.

3.4 Identidades Polinomiais, Codimensão e Cocaracteres de Álgebras de Jordan Associativas de Dimensão Dois

Sejam N, M e M_λ as álgebras do Teorema 3.4, e seja K um corpo infinito de característica diferente de 2. Nesta seção, descreveremos os T-ideais $Id(N)$, $Id(M)$, e $Id(M_\lambda)$, as sequências de codimensões das álgebras N, M e M_λ e também suas sequências de cocaracteres, caso a característica de K seja zero. Recorde que, como vimos na Seção 2.2, se K é um corpo de característica zero e α é uma partição de n, o $K[S_n]$-módulo M_α é irredutível.

Teorema 3.28. *Se K é um corpo infinito de característica diferente de 2, então $Id(N)$ é gerado, como um T-ideal, pelos polinômios*

$$[x_1, x_2] \text{ e } x_1x_2x_3.$$

Além disso, o conjunto formado por todos os elementos $f + Id(N)$ tal que $f = x_i$ ou $f = x_ix_j$ para todo $j \geq i \geq 1$ forma uma base para o espaço vetorial $K\{X\}/Id(N)$.

Demonstração. Note primeiramente que $[x_1, x_2]$ e $x_1x_2x_3$ são identidades de N, uma vez que N é uma álgebra comutativa e $u^3 = 0$. Logo, se $I = \langle [x_1, x_2], x_1x_2x_3\rangle^T$, então $I \subseteq Id(N)$.

Afirmação: Seja $H = \{x_i, x_ix_j \mid j \geq i \geq 1\}$, então $K\{X\}/I$ é gerado, como espaço vetorial, por elementos da forma $h + I$, com $h \in H$.

Demonstração da Afirmação: Primeiramente, note que nenhum elemento de H pertence a I. Sabemos que o conjunto $V[X]$, formado pelas palavras não associativas, geram $K\{X\}$ como espaço vetorial. Mostremos, por indução, que toda palavra não associativa de comprimento maior ou igual a 3 pertence a I. Seja $v \in V[X]$. Se $d(v) = 3$, então temos que $v = x_i(x_jx_k)$ ou $v = (x_ix_j)x_k = x_k(x_ix_j) + [x_ix_j, x_k]$ e, pela Proposição 1.37, segue que $v \in I$. Supondo que $d(v) > 3$, então $v = v_1 \cdot v_2$, onde $d(v_1), d(v_2) < d(v)$. No caso em que $d(v) = 4$ e $v = (x_ix_j)(x_kx_l)$, então $v \in I$, para qualquer outro caso, usando a hipótese de indução, note que $v_1 \in I$ ou $v_2 \in I$, o que resulta em $v \in I$.

Agora observe que se $x_ix_j \in V[X]$ e $i \geq j$, então $x_ix_j + I = x_jx_i + [x_i, x_j] + I = x_jx_i + I$. Assim, dado $f \in K\{X\}$, temos que $f + I = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i + I$, onde $\lambda_i \in K$ e $h_i \in H$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e isso conclui a demonstração da Afirmação.

Mostremos que o conjunto $\overline{H} = \{h + Id(N) \mid h \in H\}$ é uma base para a álgebra $K\{X\}/Id(N)$. Da Afirmação, segue-se que se $f \in K\{X\}$, então existem $\lambda_i \in K$ e $h_i \in H$, para todo $i = 1, \ldots, n$, tais que

$$f + I = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i + I.$$

Logo, $f - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i \in I \subseteq Id(N)$ e, portanto, $f + Id(N) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i + Id(N)$. Assim, $\overline{H}$ gera $K\{X\}/Id(N)$. Agora, considere uma combinação linear nula em $K\{X\}/Id(N)$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i \in Id(N),$$

onde $\alpha_i \in K$ e $g_i \in H$, para todo $i = 1, \dots, m$. Como cada componente $\alpha_i g_i$ é multihomogênea, pelo Teorema 1.45 segue-se que $\alpha_i g_i \in Id(N)$, para todo $i = 1, \dots, m$. Como os elementos de H não são identidades em N, segue-se que $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, m$. Assim $\overline{H}$ é um conjunto gerador linearmente independente de $K\{X\}/Id(N)$ e, portanto, uma base.

Resta-nos mostrar a igualdade $Id(N) = I$. Para isso, considere $f \in Id(N)$, então, existem $\beta_1, \dots, \beta_k \in K$ e $w_1, \dots, w_k \in H$ tais que $f - \sum_{i=1}^{k} \beta_i w_i \in I \subseteq Id(N)$. Logo $\sum_{i=1}^{k} \beta_i w_i \in Id(N)$ e, como vimos, isso implica que $\beta_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$. Portanto, $f \in I$ e concluímos a demonstração. □

Teorema 3.29. *Se K é um corpo infinito de característica $p \neq 2$, então*

$$c_1(N) = c_2(N) = 1 \ \textit{e}\ c_n(N) = 0$$

quando $n \geq 3$. Além disso, se $p = 0$, então

$$\chi_1(N) = \chi_{(1)},\ \chi_2(N) = \chi_{(2)},\ \textit{e}\ \chi_n(N) = 0$$

quando $n \geq 3$.

Demonstração. Seja K é um corpo de característica $p \neq 2$ e considere o conjunto $H = \{x_i, x_i x_j \mid j \geq i \geq 1\}$, então, utilizando um argumento semelhante ao usado no Lema 3.25, segue-se que o conjunto de todos os elementos $h + (P_n \cap Id(N))$, onde $h \in P_n \cap H$, é uma base para o espaço vetorial $P_n(N) = P_n/(P_n \cap Id(N))$.

Dessa forma, se $n = 1$, então $P_1 \cap H = \{x_1\}$, se $n = 2$, $P_2 \cap H = \{x_1 x_2\}$ e se $n \geq 3$, então $P_n \cap Id(N) = P_n$. Assim, como $c_n(N) = \dim_K P_n(N)$, temos

$$c_1(N) = 1,\ c_2(N) = 1,\ \text{e}\ c_n(N) = 0.$$

Agora, considere $p = 0$ e vamos calcular a sequência de cocaracteres $(\chi_n(N))_{n \in \mathbb{N}}$. Se $n = 1$, então $P_1(N) = K[S_1] \cdot [x_1 + (P_1 \cap Id(N))]$. Seja

$$T = \boxed{1}$$

a única tabela de Young associada à partição $(1) \vdash 1$, então, como $R_T = C_T = (1)$, temos $e_T = (1)$, logo, usando as notações da Seção 2.2, $M_T = K[S_1] \cdot (1) = K[S_1] = M_{(1)}$ é o

S_n-módulo associado à partição $(1) \vdash 1$. Com isso, a aplicação linear

$$\begin{aligned} \Phi : M_{(1)} &\to P_1(N) \\ \alpha &\mapsto \alpha \cdot [x_1 + (P_1 \cap Id(N))] \end{aligned}$$

é um isomorfismo de S_n-módulos e, pela Proposição 2.39, segue que $\chi_1(N) = \chi_{(1)}$.

Se $n = 2$, então $P_2(N) = K[S_2] \cdot [x_1x_2 + (P_2 \cap Id(N))]$. Seja

$$T_2 = \boxed{1 \mid 2}$$

uma tabela de Young relacionada à partição $(2) \vdash 2$, então $R_T = S_2$ e $C_T = (1)$, logo $e_{T_2} = (1) + (1\ 2)$. Assim, $M_{T_2} = K[S_2] \cdot e_{T_2} = K[S_2] \cdot [(1) + (1\ 2)] = K[S_2] = M_{(2)}$ é o S_n-módulo associado à partição $(2) \vdash 2$. Com isso

$$\begin{aligned} \Psi : M_{(2)} &\to P_2(N) \\ \alpha &\mapsto \alpha \cdot [x_1x_2 + (P_2 \cap Id(N))] \end{aligned}$$

é um isomorfismo de S_n-módulos e, portanto, $\chi_2(N) = \chi_{(2)}$.

Por fim, se $n \geq 3$, então $P_n(N) = 0$, logo, pelo Exemplo 2.36, temos $\chi_n(N) = 0$ e isso encerra a demonstração. □

Embora M e M_λ não sejam álgebras isomorfas, seus T-ideais coincidem. Veremos isso nos resultados a seguir, concluindo o estudo das identidades polinomiais de álgebras de Jordan bidimensionais sobre um corpo infinito de característica diferente de 2.

Teorema 3.30. *Seja A a álgebra M ou M_λ. Se K é um corpo infinito de característica diferente de 2, então $Id(A)$ é gerado, como um T-ideal, pelos polinômios*

$$[x_1, x_2] \text{ e } (x_1, x_2, x_3).$$

Além disso, o conjunto formado por todos os elementos $(x_1^{m_1})\cdots(x_n^{m_n}) + Id(A)$, onde $m_1, \ldots, m_n \geq 0$ não são simultaneamente zero e $n \geq 1$, forma uma base para o espaço vetorial $K\{X\}/Id(A)$.

Demonstração. A demonstração desse Teorema segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.29. Neste caso, temos que A é comutativa e associativa, logo, se $I = \langle [x_1, x_2], (x_1, x_2, x_3) \rangle^T$, então $I \subseteq Id(A)$. Além disso, sendo $K\{X\}/I$ uma álgebra comutativa e associativa, então o conjunto

$$H = \{(x_1)^{m_1}\cdots(x_n)^{m_n} \mid m_1, \ldots m_n \geq 0 \text{ não são todos nulos e } n \geq 1\}$$

gera $K\{X\}/I$.

O processo para mostrar que o conjunto $\overline{H} = \{h + Id(A) \mid h \in H\}$ é uma base para $K\{X\}/Id(A)$ e que $Id(A) \subseteq I$ é análogo ao utilizado na demonstração do Teorema 3.29, onde usamos o fato de que os elementos de H são polinômios multihomogêneos. □

Teorema 3.31. *Seja A a álgebra M ou M_λ. Se K é um corpo infinito de característica $p \neq 2$, então*

$$c_n(A) = 1$$

para todo $n \geq 1$. Além disso, se $p = 0$, então $\chi_n(A) = \chi_{(n)}$ para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Seja K um corpo infinito de característica $p \neq 2$ e considere o conjunto H do teorema anterior. Por um argumento semelhante ao usado no Lema 3.25, o conjunto formado pelos elementos $h + (P_n \cap Id(A))$, onde $h \in P_n \cap H$, é uma base para o espaço vetorial $P_n(A)$. Como $P_n \cap H = \{x_1 \cdots x_n\}$, então, para todo $n \geq 1$, temos

$$c_n(A) = \dim_K P_n(A) = 1.$$

Agora, considere $p = 0$. Sabemos que $P_n(A) = K[S_n] \cdot [x_1 \cdots x_n + (P_n \cap Id(A))]$. Seja

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline \end{array}$$

uma tabela de Young associada à partição $(n) \vdash n$, então $R_T = S_n$ e $C_T = (1)$. Logo, $e_T = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$ e, portanto, $M_T = K[S_n] \cdot e_T = K[S_n] = M_{(n)}$. Com isso, a aplicação linear

$$\begin{aligned} \Phi : M_{(n)} &\to P_n(A) \\ \alpha &\mapsto \alpha \cdot [x_1 \cdots x_n + (P_n \cap Id(A))] \end{aligned}$$

é um isomorfismo de S_n-módulos. Assim, pela Proposição 2.39, para todo $n \geq 1$, temos

$$\chi_n(A) = \chi_{(n)}.$$

□

Referências Bibliográficas

[1] ALBERT, A. A. A theory of power-associative commutative algebras. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 69, n.03 p. 503–527, nov. 1950.

[2] BERMÚDEZ, J.M. A.; CAMPOAMOR-STURSBERG, R.; VERGNOLLE, L. G.; HERNÁNDEZ, J. S. Contractions d'algèbres de Jordan en dimension 2. **Journal of Algebra**, v.319, p. 2395–2409, jan. 2008.

[3] BOEMER, H. Representations of groups. 2ª ed. North-Holland, Amsterdan: 1967, 1970.

[4] DINIZ, D.; GONÇALVES, D. J.; SILVA, V. R. T.; SOUZA, M. Two-dimensional Jordan algebras: Their classification and polynomial identities. **Linear Algebra and its Applications, ScienceDirect**, v. 664, p.104-125, jan. 2023.

[5] DRENSKY, V.; FORMANEK, E. Polynomial Identity Rings. Basel: Birkhäuser Basel, 2004.

[6] DRENSKY, V. Free algebras and PI algebras. Singapore: Springer, 1999.

[7] GIAMBRUNO, A.; MISHCHENKO, S. P.; ZAICEV M. V.; Codimension growth of two-dimensional nonassociative algebras. **Proceedings of the American Mathematical Society**, n. 11, v. 135, p. 3405–3415, nov. 2007.

[8] GIAMBRUNO, A.; SHESTAKOV, I.; ZAICEV, M. Finite-dimensional non-associative algebras and codimension growth. **Adv. in Appl. Math.**, n. 1, v. 47, 125139, 2011.

[9] GIAMBRUNO, A.; ZAICEV, M. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate. **Adv. Math.**, v. 142, p. 221–243, 1999.

[10] GIAMBRUNO, A.; ZAICEV, M. On codimension growth of finitely generated associative algebras. **Adv. Math.**, v. 140, p. 145–155, 1998.

[11] GIAMBRUNO, A.; ZAICEV, M. Polynomials Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs, v. 122. American Mathematical Society, 2005.

[12] GORDIENKO, A. S. Codimensions of polynomial identities of representations of Lie algebras, **Proc. Amer. Math. Soc.**, n. 10, v. 141, 33693382, 2013.

[13] JACOBSON, N. Basic Algebra II. 2ª ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1989.

[14] MARKUS, L. Quadratic differential equations and nonassociative algebras, in: Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations. **American Mathematical Society**, Princeton, n. 45, v. 05, p. 185–213, 1960.

[15] MISHCHENKO, S. P.; ZAICEV, M. Sequences of codimensions of identities and their asymptotic behaviour (Russia). **Fundam. Appl. Math.** 2 (2), 115127, 2019.

[16] PETERSON, H.P. The classification of two-dimensional nonassociative algebras. **Results in Math.**, Basel, v. 37, p. 120–154, 2000.

[17] RODRIGUES, R. L.; NETO, A. P.; E. VANEGAS, E. Q. Commutative power-associative algebras of small dimension. **Communications in Algebra**, n. 12, v. 48, p. 5056–5066, 2020.

[18] SERRE, J. P.; Linear Representations of Finite Groups. New York: Springer, 1977.

[19] ZAICEV, M. Integrality of exponents of growth of identities of nite-dimensional Lie algebras (Russian), **Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.**, n. 3, v. 66, 2002; English translation: Izv. Math. 66, 2002.

[20] ZAICEV, M.; MISHCHENKO, S. P. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent. **J. Math. Sci.**, New York, n. 6, v. 93, 977982, 1999.

[21] ZHEVLAKOV, K. A.; SLIN'KO, A. M.; SHIRSHOK, A. I.; SHESTAKOV, I. P. Rings that are nearly associative. Nova York: Academic Press, 1982.