

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Contribuições para as teorias linear e não-linear dos operadores somantes

por

Renato Burity Croccia Macedo

João Pessoa - PB
Fevereiro/2024

Contribuições para a teoria linear e não-linear de operadores somantes

por

Renato Burity Croccia Macedo 

sob orientação do

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Fevereiro/2024

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M141c Macedo, Renato Burity Croccia.
Contribuições para as teorias linear e não-linear
dos operadores somantes / Renato Burity Croccia Macedo.
- João Pessoa, 2024.
101 f.

Orientação: Joedson Silva dos Santos.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Espaços de sequências. 3. Espaços
de Banach. 4. Operadores somantes. I. Santos, Joedson
Silva dos. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 28/02/2024

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque

Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho

Prof. Dr. Nilson da Costa Bernardes Júnior

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos
Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Fevereiro/2024

Agradecimentos

A Deus, por me fornecer forças e sabedoria para conseguir finalizar essa etapa da vida com saúde. Sem Ele, nada faz sentido.

Aos meus pais, Ricardo Antônio Croccia Macedo e Maria Gabriela Teixeira Burity, que desde a graduação em matemática sempre me apoiaram e incentivaram para estudar matemática. Graças a eles venho conseguindo alcançar meus sonhos.

A minha amada esposa, Thayane Bezzera Lyra Ferreira Burity, que sempre esteve ao meu lado me apoiando com extrema paciência e com muito amor. Se você não estivesse ao meu lado, essa conquista não existiria.

Aos meus irmão, Ricardo Burity Croccia Macedo e Rafael Burity Croccia Macedo, que estiveram presentes em todo o processo fazendo com o que esses anos tenham sido mais leves. Além disso, agradeço a Ricardo por me incentivar a prestar vestibular para matemática e por todos os conselhos ao longo dessa trajetória acadêmica.

Ao Professor Doutor Joedson Silva dos Santos, que foi um orientador exemplar. Sempre me proporcionando oportunidades de estudo, conselhos e dividindo comigo seus problemas matemáticos, os quais conseguimos juntos resolver alguns. Agradeço por toda paciência e dedicação nestes anos.

Aos Professores Membros da Banca, que se dispuseram a ler e corrigir o trabalho em questão. Suas observações enriqueceram o trabalho.

Aos Professores do departamento de matemática da Universidade Federal da Paraíba, que ao longo de todos esses anos me ensinaram com muita destreza e agregaram bastante a minha formação acadêmica.

Aos amigos e amigas que a matemática me proporcionou, onde venho ressaltar primeiramente Raoní, Ramon, Raíza e Ranieri que estiveram comigo desde o primeiro período do curso de Bacharelado em matemática. Esses anos de estudos ficaram mais leves ao lado de vocês. Além disso, agradeço a todos as amizades que conquistei ao longo do Doutorado. Sem vocês essa etapa seria extremamente mais difícil.

“Se todas as artes aspiram à condição da Música, todas as ciências aspiram à condição da Matemática.”

George Santayana

Dedicatória

Aos meus pais, irmãos e minha esposa.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar algumas contribuições à teoria dos operadores absolutamente somantes. No contexto linear, definimos e estudamos um espaço de sequências com valores vetoriais, denominado espaço de sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis e também definimos duas classes de operadores lineares envolvendo este novo espaço. Além disso, ampliamos o escopo de três resultados importantes da teoria linear; o primeiro foi obtido por Bu e Kranz, o segundo por Bu e o terceiro por Kwapien. Finalmente, agora no ambiente não linear, apresentamos uma abordagem abstrata para outro famoso resultado de S. Kwapien que relaciona um operador somante e seu adjunto e mostramos que, mesmo quando restrito ao caso linear, nosso resultado generaliza o teorema de Kwapien.

Palavras-chave: Espaços de Sequências; Espaços de Banach; Operadores Somantes.

Abstract

The aim of this work is to present some contributions to the theory of absolutely summing operators. In linear context, we define and study a vector-valued sequence space, called the space of anisotropic (s, q, r) -summable sequences and also we define two classes of linear operators involving this new space. Furthermore, we extend the scope of three important results in the linear theory; the first was obtained Bu and Kranz, the second one is due to Bu and the third one is due to Kwapien. Finally, now in the non-linear environment, we present an abstract approach to another famous result of S. Kwapien that relates a summing operator and its adjoint and we show that, even when restricted to the linear case, our result generalizes Kwapien's theorem.

Keywords: Sequence Spaces; Banach Spaces; Summing Operators.

Sumário

Notação e terminologia	x
Introdução	1
1 Conceitos Preliminares	5
1.1 Espaço de Banach	5
1.2 Espaços de Sequências	8
1.2.1 Sequências Limitadas, Nulas e Eventualmente Nulas	8
1.2.2 Sequências fortemente e fracamente p -somáveis	9
1.2.3 Sequências quase incondicionalmente somáveis	12
1.2.4 Sequências Cohen fortemente p -somáveis	13
1.3 Espaços de Hilbert	14
1.4 Classes de Operadores	16
1.4.1 Ideais de Operadores	16
1.4.2 Operadores absolutamente somantes	17
1.4.3 Operadores quase somantes	18
1.4.4 Operadores Lipschitz somantes	21
1.4.5 Operadores Cohen fortemente p -somantes	23
1.5 Noções topológicas	23
1.6 $\mathcal{L}_p$ -espaços	25
2 Espaços de Sequências Anisotrópicas	27
2.1 Sequências Mistas	27
2.2 Sequências Anisotrópicas	29
2.2.1 Espaço das Sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis	29
2.2.2 Resultados de Coincidência do espaço $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$	40
2.2.3 Outras importantes propriedades do espaço $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$	48
2.3 Operadores associados ao espaço $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$	51
2.3.1 Operador fracamente anisotrópico	52
2.3.2 Operadores anisotrópicos somantes	64

3	Algumas propriedades dos operadores quase somantes	71
3.1	Estendendo o Teorema de Bu-Kranz	71
3.2	Estendendo o Teorema de Bu	75
3.3	Estendendo o Teorema de Kwapien	78
4	Uma Versão Abstrata do Teorema de Kwapien	80
4.1	Teorema de Kwapien	80
4.2	Teorema de Kwapien Abstrato	82
4.3	Aplicações do Teorema de Kwapien Abstrato	85
4.3.1	Operadores lineares absolutamente somantes	85
4.3.2	Operadores Lipschitz p -somantes	86
4.3.3	Operadores Lipschitz p -somantes em um ponto	86

Notação e terminologia

- $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ocasionalmente escreveremos $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, com $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- BAN representará o conjunto de todos os espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$.
- Usaremos o termo “operador” com o mesmo sentido de “função”. Se E e F são espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, denotaremos por $\mathcal{L}(E; F)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de E em F .
- Seja $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por p^* o conjugado de p , isto é, é satisfeito $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.
- δ_{ij} denotará o delta de Kronecker, ou seja, $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ caso contrário.
- As notações $d(\cdot, \cdot)$ e $\|\cdot\|$ serão utilizadas para representar, respectivamente, a métrica e a norma de um espaço.
- $C(X)$ denotará o espaço de todas as aplicações contínuas de X em $\mathbb{K}$ e $\|\cdot\|_\infty$ a norma do supremo.
- $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ denotará o dual topológico de X . Neste caso, X^{**} será o dual topológico de X^* , que denominaremos de bidual topológico de X .
- $B_X := \{x \in X ; \|x\| \leq 1\}$ será a notação para a bola fechada unitária de X .
- Sendo φ uma função de X em Y , usaremos, em alguns casos a seguinte notação $\langle \varphi, x \rangle := \varphi(x)$. Todavia, em outros casos, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ será utilizado para representar o produto interno.
- Denotaremos por $X^{\mathbb{N}}$ o espaço de todas as sequências a valores em X .
- Para cada $u \in \mathcal{L}(X, Y)$, iremos denotar o operador induzido por u por $\widehat{u} : X^{\mathbb{N}} \rightarrow Y^{\mathbb{N}}$, com $\widehat{u}((x_j)_{j=1}^\infty) = (u(x_j))_{j=1}^\infty$.

- $\ell_\infty(X)$ denotará o espaço de todas as seqüências limitadas sobre X .
- $c_{00}(X)$ denotará o espaço de todas as seqüências eventualmente nulas a valores em X .
- $c_0(X)$ denotará o espaço de todas as seqüências nulas a valores em X .
- $\ell_p(X)$ denotará o espaço de todas as seqüências p -somáveis a valores em X . Além disso, $\|\cdot\|_p$ irá representar a norma p .
- $\ell_p^w(X)$ denotará o espaço de todas as seqüências fracamente p -somantes a valores em X . Além disso, $\|\cdot\|_{w,p}$ irá representar a norma fraca p .
- ℓ_p representará o espaço $\ell_p(\mathbb{K})$.
- $\ell_p^n(X)$ representará o espaço das seqüências com exatamente n entradas. Tal notação será usada de forma análoga para os demais espaços de seqüências.
- $J_X : X \rightarrow X^{**}$, dado por $J_X(x)(\varphi) = \varphi(x), \forall x \in X$ e $\varphi \in X^*$, será o mergulho canônico de X em X^{**} .
- $r_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotarão as funções de Rademacher.
- $L_p(X)$ denotará o espaço de todas as funções mensuráveis f de X em $\mathbb{K}$ tais que $\int_X |f|^p d\nu < \infty$, onde ν é uma medida associada a X .
- $Rad(X)$ denotará o espaço de todas as seqüências quase incondicionalmente somáveis a valores em X . Além disso, $\|\cdot\|_{Rad(X)}$ denotará a norma do espaço $Rad(X)$.
- $\ell_p \langle X \rangle$ denotará o espaço de todas as seqüências Cohen fortemente p -somáveis com valores em X . Além disso, $\|\cdot\|_{C,p}$ denotará a norma de tal espaço.
- Sejam X um espaço de Hilbert e $S \subseteq X$. Denotaremos por $S^\perp$ o conjunto de todos os elementos de X ortogonais a S .
- Seja $S \subseteq X$. Denotaremos por $[S]$ o espaço cujos elementos são combinações lineares finitas de elementos em S e $\overline{S}$ representará o fecho do conjunto S em X . Em alguns casos, quando $S = \{x_1, \dots, x_n\}$, usaremos a notação $span\{x_1, \dots, x_n\}$ para denotar $[S]$.
- Para cada $j \in \mathbb{N}$, e_j representará a seqüência canônica onde todas as entradas são nulas, exceto a j -ésima que será o número 1. A notação $x \cdot e_j$ representará a seqüência e_j trocando a número 1 da j -ésima entrada por x .

- Seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Com isso, denotaremos $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ com $T^*(\varphi)(x) = \varphi(T(x))$, para todos $x \in X$ e $\varphi \in Y^*$, como o operador adjunto de T .
- $\mathcal{I}$ representará um ideal de operadores. $\mathcal{I}^{dual}$ será o ideal dual de $\mathcal{I}$, isto é, dados $X, Y \in BAN$, temos $\mathcal{I}^{dual}(X, Y) := \{u \in \mathcal{L}(X, Y); u^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*)\}$.
- id_X representará a aplicação identidade de X em X .
- $\Pi_{p,q}(X, Y)$ denotará o espaço dos operadores (p, q) -somantes e $\pi_{p,q}(\cdot)$ representará a norma de tal espaço. Quando $p = q$, usaremos as notações $\Pi_p(X, Y)$ e $\pi_p(\cdot)$, e o operador será denominado apenas por p -somante.
- $\Pi_{al.s.p}(X, Y)$ denotará o espaço dos operadores quase p -somantes e $\pi_{al.s.p}(\cdot)$ representará a norma de tal espaço. Quando $p = 2$, usaremos as notações $\Pi_{al.s.}(X, Y)$ e $\pi_{al.s.}(\cdot)$, e o operador será denominado apenas por quase somante.
- Sendo u uma aplicação Lipschitz, $Lip(u)$ representará o ínfimo sobre todas as constantes que satisfazem a propriedade de u ser Lipschitz.
- $Lip_0(X, Y)$ representará o espaço de todas as funções Lipschitz que preservam ponto base. Quando $Y = \mathbb{K}$, usaremos a notação $X^\#$, a qual denominaremos de dual Lipschitz.
- $\mathcal{D}_p(X, Y)$ denotará a classe de todos os operadores Cohen fortemente p -somantes de X em Y .
- $\sigma(X, X^*)$ denotará a topologia fraca e $\sigma(X^*, X)$ a topologia fraca estrela. Além disso, $\xrightarrow{w}$ indicará convergência fraca e $\xrightarrow{w^*}$ convergência fraca estrela.
- Seja $f : X \rightarrow Y$ com $Z \subseteq X$. Usaremos a notação $f|_Z$ para representar a restrição de f ao subconjunto Z .
- $\ell_{(s;q)}^m(X)$ representará o espaço de todas as sequências mistas $(s; q)$ -somáveis em X e $\|\cdot\|_{m(s;q)}$ será a norma de tal espaço.
- $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ denotará o conjunto de todas as sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis. Além disso, $\|\cdot\|_{A(s,q,r)}$ será a norma de tal espaço.
- Sejam X e Y espaços de Banach. Então $X \xhookrightarrow{1} Y$ denotará inclusão contínua de X em Y , isto é, $\|x\|_Y \leq \|x\|_X$ para qualquer $x \in X$.
- A notação $\simeq$ indicará de dois espaços são isometricamente isomorfos.

- Sejam $X, Y \subseteq Z$. Usaremos as notações $X \setminus Y$ ou $X - Y$ para indicar o conjunto de elementos que estão em X e não pertencem a Y .
- (Ω, X, μ) denotará um espaço de probabilidade.
- $W(B_{X^*})$ denotará o conjunto de todas as medidas de probabilidade regulares definidas na σ -álgebra dos subconjuntos Borel de B_{X^*} . Além disso, δ_x representará a medida de Dirac.
- $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$ denotará o espaço de todos os operadores fracamente anisotrópico $(s, q, r; p)$ -somantes de U em X . A norma de tal espaço será denotada por $w_{(s,q,r;p)}^A(\cdot)$.
- $\Pi_{(p;s,q,r)}^A(U; X)$ denotará o espaço de todos os operadores anisotrópico $(p; s, q, r)$ -somantes de U em X . A norma de tal espaço será denotada por $\pi_{(p;s,q,r)}(\cdot)$.

Introdução

Em 1950, A. Dvoretzky e C. A. Rogers mostraram que, em espaços de Banach de dimensão infinita, as noções de somabilidade incondicional e absoluta nunca são equivalentes. De modo mais preciso, foi provado que em todo espaço de Banach de dimensão infinita existem séries incondicionalmente somáveis que não são absolutamente somáveis. Posteriormente, A. Grothendieck observou que, mediante ao resultado de Dvoretzky e Rogers (o qual ele apresentou uma segunda demonstração), o operador identidade não transforma todas as sequências incondicionalmente somáveis em absolutamente somáveis. Por esse motivo, foi introduzido por ele a noção dos operadores que satisfazem tal propriedade, que na época foram chamados de "application semi-integral à droite". Posteriormente, esses operadores foram denominados operadores absolutamente somantes. Esse foi o ponto inicial da Teoria de Operadores Somantes, que é consolidada e estudada até os dias de hoje. Vale ressaltar, que apenas na década de 60, mediante diversos trabalhos de Pietsch, Lindenstrauss, Pelczynski e Mitjagin, a teoria foi amadurecida, juntamente com uma nova notação que facilitou o seu entendimento, tornando-a mais acessível. Neste intervalo de tempo, a Teoria de Operadores Somantes ascendeu na Análise Funcional.

O objetivo deste trabalho é apresentar algumas contribuições para a Teoria dos Operadores Somantes. É importante frisar que tais contribuições abrangem casos lineares e não-lineares. Para alcançar tal meta, dedicamos o primeiro capítulo para discussão de temas importantes (e alguns bastantes difundidos) da Análise Funcional com o intuito de deixar o trabalho mais autossuficiente. Todos os conceitos e exemplos do capítulo 1 serão de grande valia para os capítulos subsequentes.

A primeira contribuição encontra-se no segundo capítulo. Iremos abordar um novo espaço de sequências, que será denominado espaço das sequências anisotrópicas somáveis. Sua descoberta deu-se através dos resultados [19] Theorems 20.1.1 e 20.1.4]. Eles garantem que um operador T é $(m(s; q); p)$ -somante se, e somente se, existe uma

constante $C > 0$ de modo que

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m |x_k^*(T(x_i))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \| (x_i)_{i=1}^m \|_{w,p} \| (x_k^*)_{k=1}^n \|_s,$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \dots, x_m^* \in X^*$ e $x_1, \dots, x_n \in U$. Porém, é esperado da Teoria dos Operadores Somantes que $\|\cdot\|_{m(s;q)}$ (a norma do espaço das sequências mistas) estivesse presente no lado esquerdo da desigualdade anterior. Tendo esse fato em mente, definimos as sequências anisotrópicas como as sequências tais que a dupla série do lado esquerdo da desigualdade seja convergente. Iremos garantir uma norma associada a tal espaço de sequência que o tornará um espaço de Banach. Além disso, provaremos diversos resultados de coincidência, incluindo um Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers. Garantiremos também que o novo espaço de sequência satisfará as condições do ambiente de classes de sequências, que foi introduzido em [7]. Outro fato importante é que as sequências mistas serão um caso particular das anisotrópicas e, neste caso, as normas associadas a esses espaços irão coincidir. Desta forma, o espaço das sequências mistas é levado para o ambiente de classes de sequências (o que não havia sido garantindo ainda) e todo o seu conjunto de ferramentas úteis para o estudo de operadores somantes, fornecendo novas propriedades para o espaço das sequências mistas. Associado ao novo espaço de sequências, apresentaremos também duas novas classes de operadores que são caracterizadas por transformações de clássicas sequências com valores vetoriais e sequências anisotrópicas somáveis. Com relação a essas classes de operadores, provamos que são ideais de Banach, apresentam a propriedade injetiva de ideal, resultados de inclusão e Teoremas do tipo Dominação de Pietsch.

As contribuições presentes no capítulo 3 estão diretamente relacionadas com a classe dos operadores quase somantes. É sabido que todo operador q -somante é quase somante, para todo $q \in [1, +\infty)$. Além disso, apresentaremos um exemplo de um operador que é quase somante e não é q -somante, para todo q . Mediante essas informações, no capítulo 3 deste trabalho iremos demonstrar extensões de clássicos resultados da Teoria de Operadores Somantes para a classe dos operadores quase somantes, isto é, tais resultados também serão verificados para a classe dos operadores quase somantes, o que antes era provado apenas para os operadores absolutamente somantes. Os resultados estendidos foram: Teorema Bu-Kranz ([14]), Teorema de Bu ([13]) e o Teorema de Kwapien ([26]). É importante salientar que a demonstração do Teorema Bu-Kranz utilizou fortes ferramentas como o Teorema da Dominação de Pietsch e as desigualdades de Khinchin e Kahane. Porém, a demonstração da extensão de tal resultado não faz uso de nenhuma dessas ferramentas, e é provado de uma maneira mais direta.

Por fim, dedicamos o último capítulo deste trabalho ao estudo do Teorema de Kwapien presente em [25] (que é distinto do Teorema de Kwapien apresentado em [26]). Tal teorema é um clássico resultado da Teoria de Operados, ele fornece condições para que um operador linear T seja absolutamente somante quando o adjunto T^* for q -somante, para algum $q \in [1, \infty)$. Porém, nos últimos anos uma série de trabalhos ([12, 34, 35, 36, 37]) mostraram que vários resultados importantes da Teoria dos Operadores Somantes não precisam de estrutura linear para serem válidos. Tendo isso em vista, apresentamos no capítulo 4 uma versão abstrata (não-linear) do clássico Teorema de Kwapien. A demonstração de tal resultado foi baseado no ambiente abstrato apresentado em [36]. Como aplicação de tal resultado, apresentamos uma versão do Teorema de Kwapien para operadores absolutamente somantes que recupera e generaliza o resultado clássico. Além disso, também foi possível generalizar uma versão não-linear do Teorema de Kwapien com respeito as funções Lipschitz que foi apresentada em [16].

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Dedicamos este primeiro capítulo à apresentação de resultados e conceitos da Análise Funcional, focado na Teoria de Operadores, que irão nos auxiliar nos capítulos subsequentes. É importante que o leitor tenha uma base acadêmica em temas abordados em um curso de Análise no $\mathbb{R}^n$, pois iremos supor alguns conceitos matemáticos que estão, em geral, presentes neste curso. A menos de menção contrária, utilizaremos a notação $\mathbb{K}$ para representar $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que denotam o corpo dos números reais e complexos, respectivamente. Sendo $1 < p < \infty$, p^* representará o número que satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Neste caso, dizemos que p^* é o *conjugado de p* e vice-versa. Os temas e resultados presentes neste capítulo podem ser encontrados em [11, 20].

1.1 Espaço de Banach

Um dos objetos matemáticos mais básicos e essenciais para Análise Funcional são os espaços normados, que são casos particulares dos espaços métricos. De maneira sucinta, podemos entender os espaços métricos como conjuntos não-vazios onde é possível medir distância entre pontos. Já os espaços normados são espaços vetoriais onde existe a possibilidade de calcular o comprimento de vetores. Nesta subseção iremos apresentar uma breve introdução sobre tais conceitos, para que possamos abordar a noção de espaços de Banach. É importante ressaltar que a noção de espaços de Banach é uma generalização dos espaços euclidianos. Também abordaremos alguns exemplos que terão grande importância ao longo deste trabalho.

Definição 1.1. Seja X um conjunto não-vazio. Uma aplicação $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita um *métrica* se para quaisquer $x, y, z \in X$ tem-se

- $d(x, y) \geq 0$;
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;

- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Caso d seja uma métrica, dizemos que o par (X, d) é um *espaço métrico*. Sendo X um espaço métrico e $e_X \in X$, dizemos que o par (X, e_X) é um *espaço métrico pontuado*.

Observe que para o par (X, d) ser um espaço métrico, não é necessário que exista uma operação sobre o conjunto X . A seguir, vamos apresentar alguns exemplos de espaços métricos que podem ser facilmente verificados.

Exemplo 1.1. i) Se $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, então podemos considerar $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $d(x_i, x_j) = 1 - \delta_{ij}$, cujo δ_{ij} é o *delta de Kronecker*, ou seja, $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ caso contrário.

ii) Se $X = \mathbb{R}$, então podemos considerar $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, com $d(x, y) = |x - y|$.

iii) Sendo $C([a, b])$ o conjunto das aplicações contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{K}$, podemos definir a métrica dada por $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.

Definição 1.2. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é *sequência de Cauchy* em X se $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e dado $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ de modo que

$$m, n > n_\epsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

No caso em que toda sequência de Cauchy for convergente, dizemos que X é um *espaço métrico completo*. Sem muitas dificuldades, é possível mostrar que os itens (ii) e (iii) do Exemplo 1.1 são espaços métricos completos.

Definição 1.3. Seja X um espaço vetorial. Dizemos que a aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *norma* se para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, as seguintes condições são satisfeitas:

- $\|x\| \geq 0$;
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

O par $(X, \|\cdot\|)$ será denominado *espaço normado*. Se definirmos $d(x, y) = \|x - y\|$, então é possível mostrar que (X, d) é um espaço métrico, ou seja, todo espaço normado está associado a um espaço métrico. Caso $(X, \|\cdot\|)$ for completo, dizemos que X é um *espaço de Banach*. Denotaremos por *BAN* o conjunto de todos os espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$.

Exemplo 1.2. i) Os itens (ii) e (iii) do Exemplo 1.1 são espaços de Banach.

- ii) Seja X um espaço compacto. Denotaremos por $C(X)$ o espaço de todas as aplicações contínuas de X em $\mathbb{K}$. Com isso, se definirmos

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \text{ para todo } x \in X,$$

então $(C(X); \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

- iii) Sendo $X, Y \in BAN$, denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço de todos os operadores lineares contínuos de X em Y . Vale ressaltar que um *operador linear* é uma função linear entre espaços de Banach. Se definirmos

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\| \text{ para todo } x \in X,$$

é possível mostrar que $(\mathcal{L}(X, Y); \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach. Quando $Y = \mathbb{K}$, iremos denotar $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ por X^* , o qual denominaremos de *dual topológico de X* . Iremos denotar por X^{**} o dual topológico de X^* , que denominaremos de *bidual topológico de X* .

- iv) Seja $X \in BAN$. A *bola fechada unitária de X* será denotada por B_X , isto é,

$$B_X = \{x \in X ; \|x\| \leq 1\}.$$

Um importantíssimo resultado presente na Análise Funcional é o famoso Teorema de Hahn-Banach (ver [11, Teorema 3.1.1]). Tal resultado é puramente algébrico e apresenta inúmeras aplicações, não somente na Análise Funcional, como também em diversas áreas da matemática e física. Iremos apresentar agora um corolário deste resultado que é bastante útil na Análise Funcional e que, muitas vezes, também é chamado de Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 1.1. ([11, Corolário 3.1.5]) *Sejam X um espaço normado, $X \neq \{0\}$ e $x \in X$. Então,*

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x)|.$$

Outro resultado bastante difundido com relação aos espaços de Banach é a caracterização de subespaços vetoriais que são Banach com a norma induzida. Enunciemos tal resultado agora.

Proposição 1.2. ([11, Proposição 1.1.1]) *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço vetorial de X . Então, Y é um espaço de Banach, com a norma induzida por X , se, e somente se, Y é fechado em X .*

Observação 1.1. Considere uma função $\varphi : X \rightarrow Y$, de modo que X e Y sejam conjuntos não vazios. Em alguns casos, com o intuito de facilitar o entendimento matemático, iremos utilizar a seguinte notação:

$$\langle \varphi, x \rangle := \varphi(x).$$

Na próxima seção utilizaremos a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para representar um produto interno. Sendo assim, é importante entender o contexto para que não haja dúvidas sobre tais notações.

1.2 Espaços de Sequências

Importantes classes de operadores lineares e não lineares entre espaços de Banach foram definidas ou caracterizadas via transformações de sequências sobre espaços de Banach. Por esse motivo, o estudo de espaços de sequências se tornou bastante relevante. Nesta seção, iremos abordar alguns desses clássicos espaços. Denotaremos por $X^{\mathbb{N}}$ o espaço de todas as sequências a valores em X , e para cada $u \in \mathcal{L}(X, Y)$, iremos definir o *operador (linear) induzido por u* como $\hat{u} : X^{\mathbb{N}} \rightarrow Y^{\mathbb{N}}$, com $\hat{u}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (u(x_j))_{j=1}^{\infty}$.

1.2.1 Sequências Limitadas, Nulas e Eventualmente Nulas

Sendo X um espaço de Banach, dizemos que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$ é *sequência limitada* se existir $M > 0$ de modo que $\|x_j\| \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Denotaremos o espaço de todas as sequências limitadas a valores em X por $\ell_{\infty}(X)$. Quando $X = \mathbb{K}$, denotaremos apenas por ℓ_{∞} . Devido a limitação dessas sequências, podemos definir a *norma do supremo* da seguinte forma:

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\| \text{ para toda } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}(X). \quad (1.1)$$

É possível mostrar que $(\ell_{\infty}(X), \|\cdot\|_{\infty})$ é um espaço de Banach (ver [11, Seção 1.4]).

Dizemos que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$ é *sequência eventualmente nula* se existir $j_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $x_j = 0$ para todo $j \geq j_0$. Denotaremos o espaço de todas as sequências eventualmente nulas a valores em X por $c_{00}(X)$. No caso de $X = \mathbb{K}$, denotaremos apenas por c_{00} . Dizemos que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$ é *sequência nula* se $\lim_{j \rightarrow \infty} \|x_j\| = 0$. Denotaremos o espaço de todas as sequências nulas a valores em X por $c_0(X)$. No caso de $X = \mathbb{K}$, denotaremos apenas por c_0 . É possível mostrar sem muitas dificuldades a seguinte inclusão:

$$c_{00}(X) \subseteq c_0(X) \subseteq \ell_{\infty}(X).$$

Assim, podemos munir $c_{00}(X)$ e $c_0(X)$ com a norma (1.1). Porém, apenas $(c_0(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach (ver [11, Exemplo 1.1.7]).

1.2.2 Sequências fortemente e fracamente p -somáveis

Sendo X um espaço de Banach, diremos que $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$ é uma *sequência fortemente p -somável* (ou *sequência p -somável*) se $\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < \infty$. Denotaremos o espaço de todas as sequências p -somáveis a valores em X por $\ell_p(X)$. No caso $X = \mathbb{K}$, denotaremos apenas por ℓ_p . Considerando $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(X)$, podemos definir a *norma p* da seguinte forma:

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 1.2. I) Duas importantes desigualdades relacionadas à norma p são as desigualdade de Minkowski ([11, Proposição 1.4.2]) e Hölder ([11, Proposição 1.4.1]) que são dadas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\left(\sum_{j=1}^m |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^m |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.2)$$

e

$$\sum_{j=1}^m |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^m |b_j|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

para quaisquer escalares $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$.

II) Outro importante fato bastante relevante sobre os espaços ℓ_p é a relação entre as normas p (também conhecida como monotonicidade das normas p) e as inclusões próprias entre tais espaços. Considere $1 \leq p < q < \infty$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$ não nula. Sendo assim, defina

$$y_j = \frac{x_j}{\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, $|y_j| \leq 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, $|y_j|^{q-p} \leq 1$ para qualquer j , uma vez que $1 \leq p < q$. Isso implica em $|y_j|^q \leq |y_j|^p$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\|(y_j)_{j=1}^\infty\|_q^q \leq \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_p^p = 1.$$

Portanto, por definição da sequência $(y_j)_{j=1}^\infty$, segue que

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p.$$

Isso implica em $\ell_p \subseteq \ell_q$. Mais ainda, é possível mostrar que $\ell_p \subsetneq \ell_q$, basta considerar $x_j = \frac{1}{j^{\frac{1}{p}}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e notar que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q - \ell_p$. É importante mencionar que essa relação é bastante conhecida e as ideias desta demonstração não são novas, mas estão aqui com o intuito de deixar neste trabalho mais completo.

É possível mostrar que o par $(\ell_p(X), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach (ver [11, Seção 1.4]). Para cada n inteiro natural, a notação $\ell_p^n(X)$ irá representar o espaço das sequências com exatamente n coordenadas em X . Usaremos essa mesmo tipo de notação para as outras classes de sequências.

Observação 1.3. Dado $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p*}$, é possível provar que

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j < \infty, \quad \forall (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p.$$

Desta forma, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \ell_{p*} &\longrightarrow (\ell_p)^* \\ \mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \varphi_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

onde $\varphi_{\mathbf{x}} : \ell_p \rightarrow \mathbb{R}$ com $\varphi_{\mathbf{x}}((y_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$. A aplicação Ψ é um isomorfismo isométrico, isto é, bijetiva e preserva a norma. Sendo assim, podemos concluir que o dual de ℓ_p é isometricamente isomorfo ao espaço ℓ_{p*} . De modo análogo é possível garantir que o dual de c_0 é isometricamente isomorfo a ℓ_1 . Para mais informações, consulte [11, Seção 4.2].

Sendo X um espaço de Banach, dizemos que $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$ é uma *fracamente p -somável* se para todo $\varphi \in X^*$, tivermos $\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty$. Com o auxílio do Teorema do Gráfico Fechado (ver [11, Teorema 2.5.1]), é possível definir a *norma fraca p* da seguinte forma:

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para toda } (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X).$$

O espaço de todas as sequências fracamente p -somantes é a valores em X será denotado por $\ell_p^w(X)$. Utilizando argumentos análogos ao caso do $\ell_p(X)$, é possível mostrar que, munido da norma fraca p , $\ell_p^w(X)$ é um espaço de Banach. Além disso, para $1 \leq p < \infty$,

é possível garantir que

$$c_{00}(X) \subseteq \ell_p(X) \subseteq \ell_p^w(X) \subseteq \ell_\infty(X) \quad (1.3)$$

É importante lembrar que as sequências canônicas representadas por $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^\infty$ estão em todos os espaços de sequências mencionados na cadeia em questão. Além disso, uma questão interessante é saber em quais contextos existe a igualdade entre $\ell_p(X)$ e $\ell_p^w(X)$. Tal problema foi resolvido com o auxílio do Teorema de Dvoretzky-Rogers (para mais informações sobre tal resultado consulte [11, Seção 10.1]) da seguinte forma:

Proposição 1.3. *Seja X um espaço de Banach. Então X apresenta dimensão finita se, e somente se, $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$.*

Em muitos contextos, a Proposição 1.3 também é denominada de Teorema de Dvoretzky-Rogers.

Observação 1.4. Sendo X um espaço de Banach, vamos considerar $\mathbf{x}^* = (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X^*)$. Com isso, por definição podemos dizer que

$$\sum_{j=1}^\infty \|x^{**}(x_j^*)\|^p < \infty, \quad \forall x^{**} \in X^{**}. \quad (1.4)$$

Por outro lado, considere $J_X : X \rightarrow X^{**}$ o *mergulho canônico* de X em X^{**} (ver [11, Seção 4.3]), que é uma isometria linear dada por

$$J_X(x)(\varphi) = \varphi(x), \quad \forall x \in X \text{ e } \varphi \in X^*.$$

Assim, considerando $x^{**} = J_X(x)$ em (1.4) podemos dizer que

$$\sum_{j=1}^\infty \|x_j^*(x)\|^p = \sum_{j=1}^\infty \|J_X(x)(x_j^*)\|^p < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Logo, a sequência $(x_j^*(x))_{j=1}^\infty \in \ell_p$. Sendo assim, podemos definir o operador

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{x}^*} : X &\longrightarrow \ell_p \\ x &\longmapsto (x_j^*(x))_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

É possível verificar que esse operador é linear contínuo e satisfaz $\|(x_j^*)_{j=1}^\infty\|_{w,p} = \|T_{\mathbf{x}^*}\|$. Como consequência, por definição, podemos concluir a seguinte igualdade:

$$\|(x_j^*)_{j=1}^\infty\|_{w,p} = \sup_{x \in B_X} \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X^*). \quad (1.5)$$

É importante ressaltar que tal igualdade é bastante difundida no meio acadêmico e que a ideia da demonstração dessa igualdade não é algo novo. Ela está presente neste texto com o intuito de disseminar tal prova.

1.2.3 Sequências quase incondicionalmente somáveis

Antes de definirmos as sequências quase incondicionalmente somáveis, devemos abordar o conceito das funções de Rademacher, cujas propriedades aqui mencionadas podem ser encontradas em [20, P.10]. Formalmente, as *funções de Rademacher* $r_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, são definidas por $r_n(t) := \text{sign}(\sin 2^n \pi t)$, onde a aplicação $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{1, -1\}$ relaciona, respectivamente, valores positivos e negativos com 1 e -1 . Por convenção, se estabelece que $r_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo I um intervalo de $\mathbb{R}$, podemos definir a aplicação 1_I de modo que $1_I(t) = 1$ se $t \in I$ e $1_I(t) = 0$ caso contrário. Desta forma, podemos estabelecer que $r_1 = 1_{(0,1/2]} - 1_{[1/2,1]}$ e $r_{n+1}(t) = r_1(2^n t)$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, 1]$.

Usando a notação $L_2(X)$ para representar o espaço de todas as funções mensuráveis f de X em $\mathbb{K}$ tais que $\int_X |f|^2 d\nu < \infty$ (ver [11, Seção 1.2] para mais informações sobre tal espaço), uma propriedade interessante sobre as funções de Rademacher é que a sequência $(r_j)_{j=1}^\infty$ é ortonormal em $L_2[0, 1]$. Como consequência, obtemos

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n r_j(t) a_j \right|^2 dt = \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \quad (1.6)$$

para toda $(a_j)_{j=1}^n \in \ell_2^n$ e todo inteiro positivo n . Além disso, a famosa desigualdade de Khinchin garante que os espaços gerados pelas funções Rademacher têm normas L_p equivalentes, a demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [20, Theorem 11.1].

Observação 1.5. De modo análogo ao que comentamos sobre o espaço $L_2(X)$, é possível definir o espaço $L_p(X)$. A norma de tal espaço é dada por

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\nu \right)^{\frac{1}{p}},$$

com $f \in L_p(X)$. Para mais informações sobre tal espaço consulte [11, Seção 1.2].

Teorema 1.4. (*Desigualdade de Kahane*). *Sejam $0 < p, q < \infty$. Então existe uma constante $K_{p,q} > 0$ para a qual*

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) x_j \right\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{p,q} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) x_j \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

independente da escolha do espaço de Banach X e qualquer quantidade finita de vetores $x_1, \dots, x_m$ de X .

O principal resultado sobre as funções de Rademacher é uma poderosa desigualdade de Khinchin. A prova dessa desigualdade pode ser encontrada em [20, Theorem 1.10].

Teorema 1.5. (*Desigualdade de Khinchin*). Para cada $0 < p < \infty$, existem constantes positivas A_p e B_p tais que independentemente da sequência escalar $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2$, obtemos

$$A_p \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^\infty r_j(t) a_j \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 1.6. Quando $q = 2$ e $X = \mathbb{K}$, podemos dizer que, por meio de (1.6), a desigualdade de Kahane recupera a desigualdade de Khinchin. Neste caso, $K_{p,2}^{-1}$ é geralmente denotado por A_p .

Sendo X um espaço de Banach, dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$ é *quase incondicionalmente somável* se

$$\sum_{j=1}^\infty r_j(t) x_j$$

é convergente quase sempre, isto é, a série é convergente para todo t a menos de um conjunto de medida nula. Denotamos o espaço de todas as sequências quase incondicionalmente somáveis a valores em X por $Rad(X)$. É possível definir a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{Rad(X)} := \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^\infty r_j(t) x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2},$$

que torna $Rad(X)$ um espaço de Banach.

1.2.4 Sequências Cohen fortemente p -somáveis

Sendo X um espaço de Banach, dizemos que $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$ é uma *sequência Cohen fortemente p -somável* (ou *sequência fortemente p -somável*) se

$$\sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)| < \infty, \quad \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(X^*).$$

Denotaremos o espaço de todas as sequências Cohen fortemente p -somáveis com entradas em X por $\ell_p \langle X \rangle$. Utilizando técnicas análogas às usadas na norma fraca p ,

podemos garantir que

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p} := \sup_{(x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(X^*)}} \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)|$$

define uma norma sobre $\ell_p \langle X \rangle$. É possível mostrar que $(\ell_p \langle X \rangle, \|\cdot\|_{C,p})$ é um espaço de Banach. Para mais informações sobre esse espaço de sequência consulte [17].

1.3 Espaços de Hilbert

É sabido que, na Teoria da Álgebra linear, a noção de espaço com produto interno nos permite uma interpretação geométrica envolvendo espaços vetoriais e transformações lineares. A noção de espaços de Hilbert é uma generalização de tal conceito que aproxima ainda mais a teoria dos espaços de Banach à teoria euclidiana. Vejamos agora uma breve revisão sobre tais conceitos. Para mais informações consulte [11, Capítulo 5].

Definição 1.4. Sejam X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação. Valem as condições

- i) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$;
- ii) $\langle \lambda x_1, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle$;
- iii) $\langle x_1, y \rangle = \overline{\langle y, x_1 \rangle}$, onde $\overline{\langle y, x_1 \rangle}$ é o conjugado de $\langle y, x_1 \rangle$;
- iv) $\langle x_1, x_1 \rangle > 0$, com $x_1 \neq 0$.

para quaisquer $x_1, x_2, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, dizemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um *produto interno* sobre X . Neste caso, X é um *espaço com produto interno*.

Sendo X um espaço com produto interno, é possível definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

Tal aplicação é chamada de *norma induzida pelo produto interno*, e torna X um espaço normado. Neste caso, sempre que $(X, \|\cdot\|)$ for completo, dizemos que X é um *espaço de Hilbert*.

Exemplo 1.3. Consideremos $X = \mathbb{R}^n$. Com isso, dados $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ podemos definir a aplicação

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Tal aplicação é o produto interno usual do espaço euclidiano, tornando $\mathbb{R}^n$ um espaço de Hilbert.

Um fato bastante difundido é que todo espaço vetorial (com dimensão finita ou infinita) possui uma base (ver [11, Proposição A.4]), ou seja, todo vetor de um espaço vetorial pode ser escrito como a combinação linear de vetores da base. No caso de dimensão finita tal fato é bastante útil pois a base apresenta uma quantidade finita de vetores. Porém, quando estamos diante de espaços vetoriais de dimensão infinita, em geral, a base em questão não apresenta utilidade prática. Tendo isso em mente, vamos agora abordar uma noção bastante útil de representação de vetores em espaços de Hilbert como combinações (que podem não ser finitas) de vetores convenientemente estabelecidos. Para mais informações consulte [11, Seção 5.3].

Definição 1.5. Seja X um espaço com produto interno. Um conjunto $S \subset X$ é dito *ortonormal* se para quaisquer $x, y \in S$, tem-se

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq y \\ 1, & \text{se } x = y \end{cases}$$

Definindo $S^\perp := \{x \in X ; \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in S\}$, dizemos que S é um *sistema ortonormal completo* se S for ortonormal e $S^\perp = \{0\}$.

Enunciemos agora um resultado que caracteriza e fornece importantes propriedades sobre os sistemas ortonormais completos quando definidos em um espaço de Hilbert.

Teorema 1.6. [11, Teorema 5.3.10] *Seja $S = \{x_i ; i \in I\}$ um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert X . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *Para cada $x \in X$, tem-se $x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i$;*
- ii) *S é um sistema ortonormal completo;*
- iii) *$\overline{[S]} = X$, onde $[S]$ é o subespaço gerado S , isto é, todo elemento é uma combinação linear de elementos de S ;*
- iv) *Para cada $x \in X$, tem-se $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$ (Identidade de Parseval);*

v) Para todos $x, y \in X$, tem-se $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_i \rangle}$.

Exemplo 1.4. i) A base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é um sistema ortonormal completo de $\mathbb{R}^3$.

ii) O conjunto $\{e_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema ortonormal completo de ℓ_2 , onde e_n é a sequência canônica com todas as entradas nulas, exceto a n -ésima que será o número 1.

1.4 Classes de Operadores

A teoria dos operadores lineares absolutamente somantes, originada da teoria de Grothendieck em [24], desempenha um papel fundamental na teoria dos espaços de Banach e aplicações. Hoje em dia, variantes lineares e não lineares de operadores absolutamente somantes têm sido exploradas em diferentes configurações com aplicações em diferentes campos de matemática pura e aplicada. Nesta seção, iremos abordar algumas dessas classes de operadores, e dedicaremos a primeira subseção para tratar brevemente sobre a teoria de ideais de operadores.

1.4.1 Ideais de Operadores

Iremos denotar por $\mathcal{L}$ a classe de operadores lineares contínuos que atuam entre espaços de Banach arbitrários, ou seja, $\mathcal{L}(X, Y)$ é um elemento de $\mathcal{L}$, com $X, Y \in BAN$. Desta forma, podemos definir um ideal de operadores da seguinte forma:

Definição 1.6. Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse de $\mathcal{L}$ de modo que, para quaisquer $X, Y \in BAN$

$$\mathcal{I}(X, Y) := \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(X, Y).$$

As seguintes condições também devem ser satisfeitas:

- (i) $id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{I}$, sendo $id_{\mathbb{K}}$ a aplicação identidade sobre o corpo $\mathbb{K}$.
- (ii) Dados $T_1, T_2 \in \mathcal{I}(X, Y)$, segue que $T_1 + T_2 \in \mathcal{I}(X, Y)$.
- (iii) Se $T \in \mathcal{L}(X_0, Y)$, $S \in \mathcal{I}(X, Y)$ e $R \in \mathcal{L}(X, Y_0)$, então $R \circ S \circ T \in \mathcal{I}(X_0, Y_0)$.

É possível mostrar que se $\mathcal{I}$ é um operador ideal, então toda componente $\mathcal{I}(X, Y)$ é um subespaço linear de $\mathcal{L}(X, Y)$. A condição (iii) é chamada de *propriedade de ideal para operadores*. Além disso, a classe dos operadores compactos e fracamente compactos são exemplos de ideais de operadores. Para mais informações, consulte [38, Chapter 1].

Definição 1.7. Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal injetivo* no caso em que, para quaisquer $U, X, Y \in BAN$, se $v \circ T \in \mathcal{I}(U; Y)$ para qualquer v satisfazendo $\|v(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$, então $T \in \mathcal{I}(U; X)$.

Definição 1.8. Sejam X e Y espaços vetoriais normados, e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Com isso, podemos definir $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ dado por

$$T^*(\varphi)(x) = \varphi(T(x)), \text{ para todos } x \in X \text{ e } \varphi \in Y^*.$$

O operador T^* é denominado *operador adjunto de T* .

Vamos representar por $\mathcal{I}^{dual}$ o *ideal dual* de $\mathcal{I}$ (ver [20, P. 186]), isto é, dados $X, Y \in BAN$, temos

$$\mathcal{I}^{dual}(X, Y) := \{u \in \mathcal{L}(X, Y); u^* \in \mathcal{I}(Y^*, X^*)\}.$$

1.4.2 Operadores absolutamente somantes

Suponhamos $1 \leq q \leq p < \infty$ e $u : X \rightarrow Y$ um operador linear entre espaços de Banach. Dizemos que u é um *operador absolutamente (p, q) -somante* se existir uma constante $C > 0$ de modo que, para todos $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_m \in X$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^m \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^m |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.7)$$

O ínfimo sobre as constantes C de (1.7) será denotado por $\pi_{p,q}(u)$. O espaço de todos os operadores absolutamente (p, q) -somantes com domínio X e contradomínio Y será denotado por $\Pi_{p,q}(X, Y)$. É simples checar que $\Pi_{p,q}(X, Y)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(X, Y)$, $(\Pi_{p,q}(X, Y), \pi_{p,q}(\cdot))$ é um espaço de Banach e que $\|u\| \leq \pi_{p,q}(u)$ para todo $u \in \Pi_{p,q}(X, Y)$. No caso em que $p = q$, chamaremos tais operadores de *p -somantes* e usaremos a notação $\Pi_p(X, Y)$ e $\pi_{p,q}(\cdot)$. Quando $p = 1$, dizemos que o operador é *absolutamente somante*.

Observação 1.7. No caso em que $p < q$, é possível mostrar que o único operador (p, q) -somante é o operador nulo. Por esse motivo, só consideramos o caso em que $q \leq p$. Para mais informações consulte [20].

Iremos agora enunciar alguns importantes resultados sobre os operadores p -somantes que serão utilizados posteriormente. O primeiro é uma caracterização que irá relacionar esses operadores com as classes $\ell_p^w(X)$ e $\ell_p(Y)$. O segundo é um teorema de Inclusão relacionado ao índice p , e por fim, iremos enunciar os famosos Teoremas de Grothendieck e da Dominação de Pietsch.

Proposição 1.7. [20, Proposition 2.1]. *Seja $1 \leq p < \infty$. Então, $u \in \Pi_p(X, Y)$ se, e somente se, $\widehat{u}(\ell_p^w(X)) \subseteq \ell_p(Y)$. Neste caso, $\|\widehat{u} : \ell_p^w(X) \rightarrow \ell_p(Y)\| = \pi_p(u)$.*

Teorema 1.8. [20, Theorem 2.8]. *Se $1 \leq p < q < \infty$, então $\Pi_p(X, Y) \subseteq \Pi_q(X, Y)$. Além disso, para cada $u \in \Pi_p(X, Y)$, segue que $\pi_p(u) \leq \pi_q(u)$.*

Teorema 1.9. [11, Teorema 10.2.6] *Todo operador linear contínuo $u : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ é absolutamente somante.*

Teorema 1.10. [20, Theorem 2.12]. *Suponhamos $1 \leq p < \infty$ e $u : X \rightarrow Y$ um operador linear entre espaços de Banach, e K é um subespaço não vazio de B_{X^*} compacto munido da topologia fraca estrela. Então, u é p -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade μ sobre K de modo que para todo $x \in X$, temos*

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_K |\varphi(x)| d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para mais informações sobre essa classe de operadores, veja [20, Chapter 2].

1.4.3 Operadores quase somantes

De acordo com [5], um operador linear entre espaços de Banach $u : X \rightarrow Y$ é *quase p -somante* se existir uma constante $C > 0$ de modo que

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) u(x_j) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|(x_j)_{j=1}^m\|_{p,w}, \quad (1.8)$$

para todos inteiro positivo m e $x_1, \dots, x_m \in X$. A classe de todos os operadores quase p -somantes de X em Y será denotado por $\Pi_{al.s.p}(X, Y)$. O ínfimo sobre as constantes C satisfazendo (1.8) será denotado por $\pi_{al.s.p}(u)$, e torna $\Pi_{al.s.p}(X, Y)$ um espaço de Banach. É possível mostrar que $\|u\| \leq \pi_{al.s.p}(u)$. No caso $p = 2$, os operadores serão denominados *quase somantes* e escrevemos $\Pi_{al.s.}(X, Y)$, ao invés de $\Pi_{al.s.2}(X, Y)$. Por [20, Proposition 12.5], dados $X, Y \in BAN$, podemos garantir que

$$\bigcup_{1 \leq q < \infty} \Pi_q(X, Y) \subseteq \Pi_{al.s.}(X, Y). \quad (1.9)$$

Para mais informações sobre essa classe, consulte [20, Chapter 12].

Veja agora um exemplo onde a inclusão (1.9) é própria. Vale ressaltar que não conseguimos encontrar, com facilidade, na literatura um exemplo que satisfaça a inclusão própria. Por esse motivo, optamos por abordar tal exemplo de maneira detalhada. O exemplo aqui abordado foi retirado de [28].

Exemplo 1.5. Inicialmente vamos considerar o espaço de Banach

$$Y = \left(\sum_{k=3}^{\infty} \ell_k \right)_1 := \left\{ (x_k)_{k=3}^{\infty} ; x_k \in \ell_k \text{ e } \|(x_k)_{k=3}^{\infty}\|_1 = \sum_{k=3}^{\infty} \|x_k\|_{\ell_k} < \infty \right\}$$

e

$$T_k : \ell_1 \rightarrow \ell_k$$

um operador T_k que não é absolutamente k -somante para todo $k \in \{3, 4, 5, \dots\}$ (ver [4, Proposition 5.2(v)]). Por outro lado, para todo $k \in \{3, 4, 5, \dots\}$ (ver [4, Proposition 5.2(iii)]) podemos dizer que

$$\Pi_{k+1}(\ell_1, \ell_k) = \mathcal{L}(\ell_1, \ell_k).$$

Logo,

$$T_k \in \Pi_{k+1}(\ell_1, \ell_k) \subset \Pi_{al.s}(\ell_1, \ell_k).$$

Vejamos agora que, para todo $k \in \{3, 4, 5, \dots\}$, podemos definir

$$i_k : \ell_k \rightarrow Y$$

como a inclusão natural dada por

$$i_k \left((a_j)_{j=1}^{\infty} \right) = \left(0, \dots, 0, (a_j)_{j=1}^{\infty}, 0, 0, \dots \right),$$

com $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ na $(k-2)$ -ésima posição e as outras são as sequências nulas. Sem muitas dificuldades é possível observar que $\|i_k\| = 1$. Desta forma, consideremos

$$T : \ell_1 \rightarrow Y$$

de modo que

$$T(z) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(i_k \circ T_k)(z)}{C_k},$$

onde

$$C_k := 2^k \cdot \pi_{al.s}(T_k).$$

Note que T está bem definido, é linear e contínuo. Com efeito, como $\|T_k\| \leq \pi_{al.s}(T_k)$ obtemos

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left\| \frac{i_k \circ T_k}{C_k} \right\| = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{C_k} \|i_k \circ T_k\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{C_k} \|i_k\| \|T_k\| \\
&= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\|T_k\|}{2^k \cdot \pi_{al.s}(T_k)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$T := \sum_{k=3}^{\infty} \frac{i_k \circ T_k}{C_k}$$

está bem definido. Como T_k e i_k são lineares contínuas, segue que $T \in \mathcal{L}(\ell_1, Y)$. Veja também que

$$\|T_k(x)\|_k \leq C_k \cdot \|T(x)\|_1.$$

Com isso, como T_k falha em ser absolutamente k -somante, é simples observar que

$$T \notin \bigcup_{k \in \{3,4,\dots\}} \Pi_k(\ell_1, Y) = \bigcup_{p \geq 1} \Pi_p(\ell_1, Y).$$

Resta provar que T é quase somante. Como $T_k \in \Pi_{al.s}(\ell_1, \ell_k)$, pela propriedade de ideal, temos

$$i_k \circ T_k \in \Pi_{al.s}(\ell_1, Y).$$

Porém, como $\|i_k\| = 1$, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{\infty} \pi_{al.s} \left(\frac{i_k \circ T_k}{C_k} \right) &= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{C_k} \cdot \pi_{al.s}(i_k \circ T_k) \\
&\leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{C_k} \cdot \|i_k\| \cdot \pi_{al.s}(T_k) \\
&= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot \pi_{al.s}(T_k)} \cdot \pi_{al.s}(T_k) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Como $\Pi_{al.s}(\ell_1, Y)$ é um espaço de Banach, concluímos que

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{i_k \circ T_k}{C_k}$$

converge em $\Pi_{al.s}(\ell_1, Y)$, isto é, T é quase somante.

Duas outras noções atreladas às funções de Rademacher e aos operadores quase somantes são os espaços que tem tipo p e cotipo q . Vejamos tais definições agora.

Definição 1.9. Dizemos que um espaço de Banach tem *tipo* p se existe uma constante $C \geq 0$ de modo que, para todos $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_m \in X$, tem-se

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) x_j \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \cdot \|(x_i)_{i=1}^m\|_p.$$

O ínfimo sobre todas as constantes C será denotado por $T_p(X)$.

Definição 1.10. Dizemos que um espaço de Banach tem *cotipo* q se existe uma constante $K \geq 0$ de modo que, para todos $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_m \in X$, tem-se

$$\|(x_i)_{i=1}^m\|_q \leq K \cdot \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) x_j \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O ínfimo sobre todas as constantes K será denotado por $C_q(X)$.

Vamos enunciar agora alguns resultados envolvendo espaços que apresentam tipo p que serão de grande importância nos capítulos subsequentes.

Proposição 1.11. [20, Proposition 12.4] *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Então, X tem tipo p se, e somente se, $\ell_p(X)$ é um subespaço linear de $\text{Rad}(X)$.*

Proposição 1.12. [20, Proposition 11.10] *Se um espaço de Banach X tem tipo p , então X^* tem cotipo p^* .*

Proposição 1.13. [20, Corollary 12.7] *Se um espaço de Banach Y tem cotipo 2, então $\Pi_{as}(X, Y) = \Pi_r(X, Y)$ para todo espaço de Banach X e todo $r \in [2, \infty)$.*

1.4.4 Operadores Lipschitz somantes

Iremos apresentar agora uma importante classe de operadores não lineares definida entre espaços métricos. Uma aplicação $u : X \rightarrow Y$, com X e Y espaços métricos, é dita *Lipschitz* se existe uma constante $C > 0$ de modo que

$$d_Y(u(x), u(y)) \leq C d_X(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in X$. O ínfimo sobre as constantes C sobre a desigualdade anterior é denominado de *número de Lipschitz (ou constante de Lipschitz) da aplicação u* , e será denotada por $\text{Lip}(u)$. De modo equivalente, podemos dizer que

$$\text{Lip}(u) = \sup_{x, y \in X} \frac{d_Y(u(x), u(y))}{d_X(x, y)}.$$

Por convenção, consideraremos $\frac{0}{0} = 0$. No caso em que $Lip(u) = \infty$, dizemos que u não é Lipschitz. Uma clássica propriedade dessas aplicações é que toda aplicação Lipschitz é uniformemente contínua. Todavia, a recíproca não é verdadeira, basta considerar $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, com $x \in [0, 1]$. Para mais informações sobre essas aplicações consulte [41, Subsection 1.2].

Em [41, Theorem 1.33], a extensão de McShane garante que aplicações Lipschitz com domínio contido em um espaço métrico podem ser estendidas para outras aplicações Lipschitz preservando a constante de Lipschitz. Isso ocorre de forma semelhante para a classe operadores lineares contínuos, com o clássico Teorema de Hahn-Banach. Tal resultado é enunciado da seguinte maneira:

Teorema 1.14. (*Extensão de McShane*). *Sejam X um espaço métrico, X_0 um subconjunto não vazio de X , e f_0 uma aplicação Lipschitz de X_0 em $\mathbb{R}$. Então, existe uma extensão $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ de f_0 que tem o mesmo Lipschitz número. Se f_0 é limitada, então podemos garantir que $\|f_0\|_\infty = \|f\|_\infty$.*

Definição 1.11. Sejam X um espaço métrico pontuado e Y um espaço de Banach. Com isso, podemos definir $Lip_0(X, Y)$ como o espaço de todas as aplicações Lipschitz que preservam ponto base, isto é,

$$Lip_0(X, Y) := \{u : X \rightarrow Y \text{ função Lipschitz ; } u(e_X) = 0\}.$$

Em particular, quando $Y = \mathbb{K}$, iremos denotar $Lip_0(X, \mathbb{K})$ por $X^\#$, que denominaremos de *dual lipschitz*. Para mais informações sobre esse espaço consulte [41, Subsection 1.6]

Observação 1.8. (i) Sejam X um espaço métrico, Y um espaço de Banach, $y_0 \in Y$ um ponto não nulo fixado e $u : X \rightarrow Y$ com $u(x) = y_0$ para todo $x \in X$. É claro que u é uma aplicação lipschitz de com $Lip(u) = 0$. Assim, como u não é a aplicação nula, concluímos que $Lip(\cdot)$ visto como uma aplicação não define uma norma sobre o espaço de todas as aplicações lipschitz de X em Y . Por esse motivo, é fundamental que fixemos um ponto base para X , pois desta forma é possível demonstrar que $(Lip_0(X, Y), Lip(\cdot))$ é um espaço de Banach.

(ii) A definição do $Lip_0(X, Y)$ independe da escolha do ponto base e_X (ver [41, Theorem 2.2.2]).

À luz da classe dos operadores p -somante, Farmer e Johnson apresentaram em [21] uma nova classe envolvendo os operadores Lipschitz. Tal classe será trabalhada posteriormente.

Definição 1.12. Sendo X um espaço métrico pontuado e Y um espaço métrico, dizermos que uma aplicação $u : X \rightarrow Y$ é *Lipschitz p -somante* se existe uma constante $C > 0$

de modo que, dados $a_1, \dots, a_n$ números reais positivos e $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{i=1}^n a_i d_Y(u(x_i), u(y_i))^p \leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p. \quad (1.10)$$

Em [21], Farmer e Johnson mencionam que a definição anterior é suficiente para o caso em que $a_1 = \dots = a_n = 1$.

1.4.5 Operadores Cohen fortemente p -somantes

Em [17], Cohen introduziu uma classe de operadores que caracteriza adjuntos p^* -somantes. Tais operadores são denominados Cohen fortemente p -somantes ou fortemente p -somantes. Considerando $u \in \mathcal{L}(X, Y)$, dizemos que u é *Cohen fortemente p -somante ou fortemente p -somante* se

$$(u(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p \langle Y \rangle \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(X).$$

A classe de todos operadores Cohen fortemente p -somantes de X em Y será denotada por $\mathcal{D}_p(X, Y)$. Equivalentemente, é possível garantir que $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ é Cohen fortemente p -somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ de modo que

$$\sum_{i=1}^m |y_i^*(u(x_i))| \leq C \cdot \|(x_i)_{i=1}^m\|_p \cdot \|(y_i^*)_{i=1}^m\|_{w, p^*}$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_m \in X$, $y_1^*, \dots, y_m^* \in Y^*$ e todo inteiro positivo m .

Enunciemos agora dois resultados, que serão usados posteriormente, com relação à classe dos operadores Cohen fortemente p -somantes.

Proposição 1.15. [20, Corollary 12.21] *Se Y é um espaço de Banach de tipo 2, então para todo espaço de Banach X , temos $\mathcal{D}_2(X, Y) \subseteq \Pi_{al.s}(X, Y)$.*

Teorema 1.16. [17, Theorem 2.2.2] *Sejam $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ e $1 < p \leq \infty$. Então, $T \in \mathcal{D}_{p^*}(X; Y)$ se, e somente se, $T^* \in \Pi_p(Y^*; X^*)$.*

1.5 Noções topológicas

Nesta seção temos o objetivo de apresentar, de maneira sucinta, duas topologias bastante utilizadas na Análise Funcional, as quais utilizaremos posteriormente. Para mais informações sobre tais topologias consulte [11, Capítulo 6].

Considerando X um espaço de normado, definimos a *topologia fraca de X* , denotada por $\sigma(X, X^*)$, como a menor topologia que mantém os funcionais lineares contínuos (na topologia da norma) $\varphi \in X^*$ ainda contínuos, isto é, os conjuntos

$$\varphi^{-1}(A) := \{x \in X ; \varphi(x) \in A\},$$

com $\varphi \in X^*$ e A aberto em $\mathbb{R}$, são abertos básicos de $\sigma(X, X^*)$ (ou seja, todo aberto em $\sigma(X, X^*)$ é uma união de interseções finitas de conjuntos da forma $\varphi^{-1}(A)$). Neste caso, dizemos que a topologia $\sigma(X, X^*)$ foi gerada pelos elementos de X^* . Quando uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ converge para x na topologia $\sigma(X, X^*)$, iremos escrever

$$x_j \xrightarrow{w} x.$$

Vejamos agora um resultado bastante útil com relação à topologia fraca.

Proposição 1.17. ([11, 6.2.2]) *Seja X um espaço normado. Então*

- a) *Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em X . Então, $x_j \xrightarrow{w} x$ se, e somente se, a sequência $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}$ converge para $\varphi(x)$ para todo $\varphi \in X^*$.*
- b) *A topologia $\sigma(X, X^*)$ é de Hausdorff.*

É fato que podemos considerar a topologia fraca de X^* que é denotada por $\sigma(X^*, X^{**})$ e gerada por elementos do bidual de X . Porém, considerando $J_X : X \rightarrow X^{**}$ o famoso mergulho canônico de X em X^{**} dado por

$$J_X(x)(\varphi) = \varphi(x), \forall x \in X \text{ e } \varphi \in X^*,$$

foi observado $J_X(X)$ forma um conjunto notável em X^* . Sendo assim, foi definida a *topologia fraca estrela* como a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $J_X(x) \in X^*$, que será denotada por $\sigma(X^*, X)$. Quando uma sequência $(x_k^*)_{k=1}^{\infty}$ em X^* converge para x^* na topologia fraca estrela, utilizaremos a seguinte notação

$$x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*.$$

Agora vamos enunciar um resultado bastante útil com relação à topologia fraca estrela.

Proposição 1.18. ([11, 6.3.2]) *Seja X um espaço normado.*

- a) *Seja $(x_k^*)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em X^* . Então, $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$ se, e somente se, a sequência $(x_k^*(x))_{k=1}^{\infty}$ converge para $x^*(x)$, para todo $x \in X$.*
- b) *A topologia $\sigma(X^*, X)$ é de Hausdorff.*

1.6 $\mathcal{L}_p$ -espaços

Observando as equações (1.7), (1.8) e (1.10), é possível perceber que a definição de um operador envolve apenas um número finito de vetores por vez. Veja que o conhecimento desses operadores será grandemente aprimorado se tivermos uma boa compreensão dos subespaços de dimensão finita dos espaços de Banach com os quais trabalhamos. Tendo isso em mente, podemos definir os $\mathcal{L}_p$ -espaços com uma propriedade conveniente de que seus subespaços de dimensão finita estão sempre contidos em cópias levemente distorcidas dos espaços ℓ_p^n . Isso faz com que seja possível associar argumentos sobre certos operadores em $\mathcal{L}_p$ -espaços para argumentos sobre operadores nos espaços ℓ_p^n . Vejamos a definição formal de tais espaços.

Definição 1.13. Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\lambda > 1$. Dizemos que $X \in BAN$ é um $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ -espaço se todo subespaço de dimensão finita E de X estiver contido em algum subespaço de dimensão finita F de X para o qual existe um isomorfismo $v : F \rightarrow \ell_p^{dim(F)}$ satisfazendo $\|v\| \|v^{-1}\| < \lambda$. Dizemos que X é um $\mathcal{L}_p$ -espaço quando X for um $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ -espaço para algum $\lambda > 1$.

Agora iremos demonstrar que todo espaço de Hilbert é um $\mathcal{L}_2$ -espaço.

Proposição 1.19. *Toda espaço de Hilbert é um $\mathcal{L}_2$ -espaço.*

Demonstração. Sejam H um espaço de Hilbert e E um subespaço de H de dimensão finita. Logo, é possível obter $x_1, \dots, x_n \in E$ que formam uma base para E . Consequentemente, podemos dizer que $[x_1, \dots, x_n] = E$. Utilizando o clássico processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, podemos supor que $\{x_1, \dots, x_n\}$ é um conjunto ortonormal. Definindo $F = \overline{[x_1, \dots, x_n]}$, o conjunto $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ é um sistema ortonormal completo em F . De fato, basta observar que S satisfaz o item (iii) do Teorema 1.6. Por outro lado, para cada $x \in F$, $(\langle x, x_j \rangle)_{j=1}^n \in \ell_2^n$. Assim, podemos definir o operador

$$\begin{aligned} v : F &\longrightarrow \ell_2^n \\ x &\longmapsto (\langle x, x_j \rangle)_{j=1}^n \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade (i) e (ii) da definição 1.4, podemos garantir que v é linear. Pela identidade de Parseval, para todo $x \in F$, segue que $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle x, x_j \rangle|^2$. Portanto,

$$\|x\| = \|v(x)\| \text{ para todo } x \in F. \quad (1.11)$$

Logo, garantimos que v é injetora. Por outro lado, dado $(a_i)_{i=1}^n \in \ell_2^n$, considere $x =$

$\sum_{i=1}^n a_i x_i \in F$. Como $\{x_1, \dots, x_n\}$ é um sistema ortonormal completo de F , segue que

$$v(x) = \left(\left\langle \sum_{i=1}^n a_i x_i, x_j \right\rangle \right)_{j=1}^n = \left(\sum_{j=1}^n a_j \langle x_i, x_j \rangle \right)_{j=1}^n = (a_j)_{j=1}^n.$$

Sendo assim, v é sobrejetiva. Portanto, v é um isomorfismo. Ademais, utilizando (1.11), podemos dizer que $\|v\| \leq 1$ e $\|v^{-1}\| \leq 1$. Portanto, H é um $\mathcal{L}_2$ -espaço. $\square$

Capítulo 2

Espaços de Sequências Anisotrópicas

Neste capítulo estamos interessados em definir e estudar um novo espaço de sequências com valores vetoriais denominado espaço de sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis. Esse espaço generaliza o clássico espaço das sequências $(s; q)$ -mistas (ou sequências mistas $(s; q)$ -somáveis) e garantirá novas propriedades para tal espaço. Além disso, definiremos novas classes de operadores lineares associados a este novo espaço de sequências. Vale ressaltar que uma dessas classes generaliza os operadores lineares $(s; q)$ -mistos, que foram definidos por A. Pietsch. Iremos também abordar caracterizações, como também resultados de inclusão e um teorema do tipo dominação de Pietsch para essas novas classes de operadores. Mediante a isso, vamos inciar abordando o conceito das sequências mistas com o intuito de fornecer uma motivação para a definição das sequências anisotrópicas. Vale ressaltar que os resultados apresentados com relação as sequências anisotrópicas foram retirados de [15].

2.1 Sequências Mistas

Entre os exemplos clássicos de espaços de sequências com valores vetoriais que fazem parte do escopo desta teoria, como por exemplo $\ell_p(X)$ e $\ell_p^w(X)$, o espaço de sequências mistas $(s; q)$ -somáveis em X (também chamadas de sequências $(s; q)$ -mistas somáveis), onde X é um espaço de Banach, aparece em várias obras de Defant e Floret (ver [19]), Pietsch (ver [33]) e Matos (ver [29, 30]). Vejamos a definição de tal espaço.

Definição 2.1. Sejam $0 < q \leq s \leq \infty$ e considere $s(q)'$ de modo que $1/s(q)' + 1/s = 1/q$. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em X é *mista $(s; q)$ -somável* se

$$x_j = \tau_j y_j \quad \forall j \in \mathbb{N}, \text{ com } (\tau_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{s(q)'} \text{ e } (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_s^w(X). \quad (2.1)$$

O espaço de todas as sequências mistas $(s; q)$ -somáveis em X será denotado por $\ell_{(s;q)}^m(X)$.

É possível mostrar que a expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{m(s;q)} = \inf \|(\tau_j)_{j=1}^\infty\|_{s(q)'} \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{w,s},$$

onde o ínfimo é considerado sobre todas as representações possíveis como em (2.1), define uma norma para $\ell_{(s;q)}^m(X)$ tornando-o um espaço de Banach, para $1 \leq q$. Em [19, Proposition 16.4.4.] é provado que este espaço satisfaz as seguintes inclusões

$$\ell_q(X) \subset \ell_{(s;q)}^m(X) \subset \ell_q^w(X).$$

Neste mesmo artigo existe um estudo sobre operadores mistos definidos por Pietsch, denominados operadores $(m(s; q), p)$ -somantes, com $q \leq p$ e $q \leq s$. Esses operadores são definidos pela seguinte propriedade: Um operador linear contínuo entre espaços de Banach $T : U \rightarrow X$ é $(m(s; q); p)$ -somante se

$$(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_{(s;q)}^m(X), \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(U).$$

Além disso, por [19, Theorems 20.1.1 e 20.1.4], podemos formular o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *As seguintes sentenças são equivalentes:*

- (i) T é $(m(s; q); p)$ -somante;
- (ii) Existe uma constante $C > 0$ de modo que

$$\|T(x_j)_{j=1}^m\|_{m(s;q)} \leq C \|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,p}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_m \in U$;

- (iii) Existe uma constante $C > 0$ de modo que

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m |x_k^*(T(x_i))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|(x_i)_{i=1}^m\|_{w,p} \|(x_k^*)_{k=1}^n\|_s$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \dots, x_m^* \in X^*$ e $x_1, \dots, x_n \in U$.

Observando o item (iii) da caracterização anterior e tendo em mente tudo o que se sabe sobre a teoria dos operadores somantes, surge uma questão natural:

Problema 2.2. Se considerarmos $\|(x_k^*)_{k=1}^n\|_s \leq 1$, qual é a relação entre o lado esquerdo da desigualdade em (iii) e a norma $\|\cdot\|_{m(s;q)}$?

A procura de uma resposta para este questionamento foi uma das principais motivações para o estudo das sequências anisotrópicas.

2.2 Sequências Anisotrópicas

Inspirados no Problema 2.2, na primeira subseção iremos considerar todas as sequências que irão satisfazer a condição (iii) do Teorema 2.1, as quais serão denominadas, posteriormente, sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis. Analisaremos os índices s , q e r , com a intenção de investigar em quais condições o conjunto das sequências em questão coincide com clássicos espaços de sequências. Apresentaremos um norma associada a este novo espaço de sequências, que o tornará um espaço de Banach, e resultados de inclusão contínua. Na segunda subseção, iremos garantir uma série de resultados de coincidência associados ao espaço das sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis, incluindo um teorema do tipo Dvoretzky-Rogers e condições para que o espaço das sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis seja igual aos espaços das sequências mistas (s, q) -somáveis. Na ultima subseção abordaremos importantes conceitos sobre a teoria dos espaços de sequências, que foram introduzidas em [7], e provaremos que o novo espaço de sequências goza de tais propriedades.

2.2.1 Espaço das Sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis

Consideremos X um espaço de Banach e $1 \leq s, r, q < \infty$ números reais. Desta forma, inspirado no Problema 2.2, vamos denotar por $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ o conjunto de todas as sequências $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$ de modo que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} < \infty, \text{ sempre que } (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$$

isto é,

$$((x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_s) \text{ sempre que } (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*).$$

Observação 2.1. 1. Note que se seguirmos exatamente o item (iii) do Teorema 2.1, deveríamos considerar $r = s$. Todavia, com o objetivo de uma definição mais geral, optamos por considerar r número real maior ou igual a 1.

2. Veja que $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ é um espaço vetorial. Com efeito, consideremos $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Como $\ell_q(\ell_s)$ é espaço vetorial, dada $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$, temos

$$((x_k^*(x_j + \lambda y_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty = ((x_k^*(x_j) + \lambda x_k^*(y_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty$$

$$\begin{aligned}
&= ((x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty + \lambda(x_k^*(y_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty \\
&= ((x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty + ((\lambda x_k^*(y_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_s).
\end{aligned}$$

Sendo assim, $(x_j)_{j=1}^\infty + \lambda(y_j)_{j=1}^\infty = (x_j + \lambda y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$.

Proposição 2.3. *Se considerarmos $r > s$, então $\ell_{(s,q,r)}^A(X) = \{\mathbf{0}\}$, onde $\mathbf{0}$ está representando a sequência nula.*

Demonstração. Vamos supor que exista $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Sendo assim, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $x_{j_0} \neq 0$. Por outro lado, o fato de $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$ implica em

$$((x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_s) \text{ para toda } (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*).$$

Logo, dado $j \in \mathbb{N}$, temos

$$(x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty \in \ell_s \text{ para toda } (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*).$$

Em particular,

$$(x_k^*(x_{j_0}))_{k=1}^\infty \in \ell_s \text{ para toda } (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*). \quad (2.2)$$

Agora note que podemos obter $x^* \in X^*$ de modo que $x^*(x_{j_0}) \neq 0$. De fato, caso isso não ocorra teríamos $x^*(x_{j_0}) = 0$ para todo $x^* \in X^*$. Daí, pelo Teorema 1.1 isso implicaria em $x_{j_0} = 0$, o que não é possível. Por outro lado, pelo que comentamos no item (II) da Observação 1.2, a hipótese $r > s$ nos permite considerar $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \in \ell_r \setminus \ell_s$. Logo, $(\lambda_k x^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$. Desta forma, tomando $x_k^* = \lambda_k x^*$ em (4.8), segue que

$$\begin{aligned}
(\lambda_k x^*(x_{j_0}))_{k=1}^\infty \in \ell_s &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k x^*(x_{j_0})|^s < \infty \\
&\Leftrightarrow |x^*(x_{j_0})|^s \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^s < \infty \\
&\Leftrightarrow (\lambda_k)_{k=1}^\infty \in \ell_s.
\end{aligned}$$

Mas isso é uma contradição, pois $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \notin \ell_s$. Com isso, $\ell_{(s,q,r)}^A(X) = \{\mathbf{0}\}$. $\square$

Proposição 2.4. *Seja $r \leq s$. Se $s \leq q$ e $p \leq q$, então $\ell_p^w(X) \subseteq \ell_{(s,q,r)}^A(X)$.*

Demonstração. Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X)$ e $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$. Com o auxílio da desigualdade de Minkowski com relação a $\frac{q}{s}$, podemos dizer que

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \leq \left(\sum_{k=1}^n (|x_k^*(x_j)|^s)^{\frac{q}{s}} \right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, fazendo $n \rightarrow \infty$, podemos dizer que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{s}{q}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} (|x_1^*(x_j)|^s)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{s}{q}} + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{\infty} (|x_k^*(x_j)|^s)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{s}{q}} + \cdots \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_1^*(x_j)|^q \right)^{\frac{s}{q}} + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^q \right)^{\frac{s}{q}} + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^q \right)^{\frac{s}{q}}.
\end{aligned}$$

Desta forma, elevando os dois membros a $\frac{1}{s}$, segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^q \right)^{\frac{s}{q}} \right)^{\frac{1}{s}}. \quad (2.3)$$

Porém, utilizando a relação das normas p e sabendo que $r \leq s$ e $p \leq q$, segue que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^q \right)^{\frac{s}{q}} \right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_k^*\|^q \left| \frac{x_k^*}{\|x_k^*\|} (x_j) \right|^q \right)^{\frac{s}{q}} \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\|x_k^*\|^q \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{x_k^*}{\|x_k^*\|} (x_j) \right|^q \right)^{\frac{s}{q}} \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\|^s \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{x_k^*}{\|x_k^*\|} (x_j) \right|^q \right)^{\frac{s}{q}} \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\|^s \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q}^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q} \|(x_k^*)_{k=1}^{\infty}\|_s \\
&\leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} \|(x_k^*)_{k=1}^{\infty}\|_r.
\end{aligned}$$

Portanto, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. □

Corolário 2.5. *Seja $r \leq s$. Se $s \leq q$, então $\ell_q^w(X) = \ell_{(s,q,r)}^A(X)$.*

Demonstração. Se tomarmos $p = q$ na proposição anterior, então $\ell_q^w(X) \subseteq \ell_{(s,q,r)}^A(X)$.

Por outro lado, se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$, então

$$\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} < \infty, \quad \forall (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*).$$

Sendo assim, dado $\varphi \in X^*$, podemos tomar $(x_k^*)_{k=1}^\infty = (\varphi, 0, 0, \dots) \in \ell_r(X^*)$. Logo,

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^s < \infty, \quad \forall \varphi \in X^*.$$

Assim, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_s^w(X) \subseteq \ell_q^w(X)$. Portanto, $\ell_q^w(X) = \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. □

Através da Proposição 2.3 e do Corolário 2.5 podemos dizer que só é interessante analisar o espaço $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ quando $q < s$ e $r \leq s$, pois os outros casos resultam em espaços de sequências já conhecidos. Sendo assim, de agora em diante iremos sempre considerar $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ com as condições $q < s$ e $r \leq s$. Denominaremos as sequências deste espaço como anisotrópicas (s, q, r) -somáveis. Formalmente, podemos definir tal espaço da seguinte forma:

Definição 2.2. Sejam $q < s$ e $r \leq s$ números reais. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$ é chamada *anisotrópica (s, q, r) -somável* se

$$((x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_s) \text{ sempre que } (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*),$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} < \infty \text{ sempre que } (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*). \quad (2.4)$$

Denotaremos por $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ o conjunto de todas as sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis.

O próximo lema nos dará condições suficientes para introduzirmos uma norma no espaço das sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis.

Lema 2.6. *Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$ uma sequência anisotrópica (s, q, r) -somável. Então,*

$$\sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Demonstração. Considere $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência anisotrópica (s, q, r) -somável.

Vamos definir o seguinte operador

$$\begin{aligned} T_x : \ell_r(X^*) &\longrightarrow \ell_q(\ell_s) \\ (x_k^*)_{k=1}^\infty &\longmapsto ((x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

Veja que T_x está bem definido pois $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}(X)$. Além disso, se $(x_k^*)_{k=1}^\infty, (y_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned} T_x(\lambda(x_k^*)_{k=1}^\infty + (y_k^*)_{k=1}^\infty) &= ((\lambda x_k^* + y_k^*)(x_j))_{k=1}^\infty_{j=1}^\infty \\ &= \lambda((x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty + ((y_k^*(x_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty \\ &= \lambda T_x((x_k^*)_{k=1}^\infty) + T_x((y_k^*)_{k=1}^\infty), \end{aligned}$$

ou seja, T_x é linear. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \|T_x\| &= \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \|T_x((x_k^*)_{k=1}^\infty)\|_q \\ &= \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \|((x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty\|_q \\ &= \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^\infty \|(x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty\|_s^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Desta forma, é suficiente mostrarmos que T_x é contínuo para finalizarmos a demonstração. Sendo assim, vamos considerar $(\mathbf{x}^n, T_x(\mathbf{x}^n))_{n=1}^\infty$ uma sequência no gráfico de T_x , de modo que $\mathbf{x}^n = (x_{n,k}^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos

$$(\mathbf{x}^n, T_x(\mathbf{x}^n)) \xrightarrow{n} (a, b),$$

onde $a = (a_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$ e $b = (b^k)_{k=1}^\infty \in \ell_q(\ell_s)$, onde $b^k = (b_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell_s$, para cada $k \in \mathbb{K}$. Com isso, $T_x(\mathbf{x}^n) \xrightarrow{n} b$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow \|T_x(\mathbf{x}^n) - b\|_q < \epsilon \\ &\Rightarrow \|T_x((x_{n,k}^*)_{k=1}^\infty) - (b^k)_{k=1}^\infty\|_q < \epsilon \\ &\Rightarrow \|((x_{n,k}^*(x_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty - ((b_j^k)_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty\|_q < \epsilon \\ &\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^\infty \|(x_{n,k}^*(x_j))_{k=1}^\infty - (b_j^k)_{k=1}^\infty\|_s^q \right)^{\frac{1}{q}} < \epsilon \\ &\Rightarrow \|(x_{n,k}^*(x_j))_{k=1}^\infty - (b_j^k)_{k=1}^\infty\|_s < \epsilon, \quad \forall j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k}^*(x_j) - b_j^k|^s \right)^{\frac{1}{s}} < \epsilon, \quad \forall j \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow |x_{n,k}^*(x_j) - b_j^k| < \epsilon, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\mathbf{x}^n \xrightarrow{n} a$. Logo, de maneira análoga, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} n > n_1 &\Rightarrow \|\mathbf{x}^n - a\|_r < \epsilon \\ &\Rightarrow \|(x_{n,k}^*)_{k=1}^{\infty} - (a_k^*)_{k=1}^{\infty}\|_r < \epsilon \\ &\Rightarrow \|x_{n,k}^* - a_k^*\| < \epsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sendo assim, $x_{n,k}^* \xrightarrow{n} a_k^*$. Em particular,

$$x_{n,k}^*(x_j) \xrightarrow{n} a_k^*(x_j)$$

para quaisquer $k, j \in \mathbb{N}$. Pela unicidade do limite, $a_k^*(x_j) = b_j^k$ para todo $j, k \in \mathbb{N}$. Portanto, $T_x(a) = b$. Desta forma, pelo Teorema do Gráfico Fechado, T_x é contínuo. $\square$

Proposição 2.7. *Sejam X um espaço de Banach e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Com isso, a expressão*

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{A(s,q,r)} := \sup_{(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.5)$$

define uma norma sobre $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$.

Demonstração. Considere $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Note que

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{A(s,q,r)} = 0 &\Rightarrow \sup_{(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} = 0 \\ &\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} = 0, \quad \forall (x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_r(X^*)} \\ &\Rightarrow |x_k^*(x_j)| = 0, \quad \forall (x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_r(X^*)} \text{ e } j, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Em particular, se tomarmos $(x_k^*)_{k=1}^{\infty} = (x^*, 0, 0, \dots)$, com $x^* \in B_{X^*}$, então para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$|x^*(x_j)| = 0, \quad \forall x^* \in B_{X^*}$$

Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach, $\|x_j\| = 0$, isto é, $x_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Reciprocamente, se $(x_j)_{j=1}^\infty = (0, 0, \dots)$, então $x_k^*(x_j) = 0$, para qualquer $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}$ e $j, k \in \mathbb{N}$. Portanto, $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)} = 0$.

Por outro lado, usando duas vezes a desigualdade de Minkowski (ver equação (1.2)), temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m |x_k^*(\lambda x_j + y_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^m |x_k^*(\lambda x_j + y_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^m |x_k^*(\lambda x_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} + \left(\sum_{k=1}^m |x_k^*(y_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^m |x_k^*(\lambda x_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} + \\
&\quad \left(\sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^m |x_k^*(y_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= |\lambda| \left(\sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^m |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} + \\
&\quad \left(\sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^m |x_k^*(y_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Desta forma, fazendo $m, n \rightarrow \infty$ e tomando o supremo com relação a $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}$, podemos concluir que

$$\|\lambda(x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)} \leq \lambda \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)} + \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)}.$$

Logo, $\|\cdot\|_{A(s,q,r)}$ define uma norma sobre $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$. □

Sendo X um espaço normado, pela Proposição anterior sabemos que $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ é de fato um espaço normado munido com $\|\cdot\|_{A(s,q,r)}$. Agora é interessante analisarmos a completude de tal espaço no caso em que X seja um espaço de Banach. Os próximos resultados serão importantes nesta tarefa. Ademais, esses resultados irão fornecer relações entre clássicos espaços de sequências e o espaço das sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis.

Proposição 2.8. *Para todo X Banach, $c_{00}(X) \subseteq \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Além disso, a aplicação $\pi : X \rightarrow \ell_{(s,q,r)}^A(X)$, dado por $x \mapsto \pi(x) = (x, 0, 0, \dots)$, é uma imersão isométrica.*

Demonstração. Considere uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}(X)$. Como $r \leq s$, podemos dizer que, para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \|x_j\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\|^r \right)^{\frac{1}{r}} < \infty, \forall (x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r(X^*).$$

Por outro lado, como $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é eventualmente nula, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_j = 0$, para todo $j > n_0$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} = \sum_{j=1}^{n_0} \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right)^q < \infty, \forall (x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r(X^*).$$

Portanto, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$, provando que $c_{00}(X) \subseteq \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Além disso, tal inclusão garante que a aplicação $\pi : X \rightarrow \ell_{(s,q,r)}^A(X)$, dado por $x \mapsto \pi(x) = (x, 0, 0, \dots)$, está bem definida e claramente é linear. Considerando $(x_j)_{j=1}^{\infty} = (x, 0, \dots)$ podemos observar, utilizando o fato de $r \leq s$, que

$$\begin{aligned} \|\pi(x)\|_{A(s,q,r)} &= \sup_{(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq \sup_{(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_r(X^*)}} (\|x\| \| (x_k^*)_{k=1}^{\infty} \|_s) \\ &\leq \sup_{(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_r(X^*)}} (\|x\| \| (x_k^*)_{k=1}^{\infty} \|_r) \\ &\leq \|x\| \sup_{(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_r(X^*)}} \| (x_k^*)_{k=1}^{\infty} \|_r \\ &\leq \|x\|. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.1, dado $x \in X$, podemos dizer que $\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x)|$. Sendo assim, considerando novamente $(x_j)_{j=1}^{\infty} = (x, 0, 0, \dots) = \pi(x)$ e sabendo que se $\varphi \in B_{X^*}$, então $(\varphi, 0, 0, \dots) \in B_{\ell_r(X^*)}$, podemos dizer que

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x)|$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty = (\varphi, 0, 0, \dots) \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^q \right)^{s/q} \right)^{1/s} \\
&\leq \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^q \right)^{s/q} \right)^{1/s} \\
&= \|\pi(x)\|_{A(s,q,r)}.
\end{aligned}$$

Portanto, π é uma imersão isométrica, uma vez que $\|x\| = \|\pi(x)\|_{A(s,q,r)}$. $\square$

Analogamente aos espaços das sequências mistas $(s; q)$ -somáveis, o espaço $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ também pode ser colocado em uma cadeia com os espaços de sequências somáveis absoluta e fracamente:

Proposição 2.9. *Seja X espaço de Banach. Então,*

$$\ell_q(X) \xhookrightarrow{I} \ell_{(s,q,r)}^A(X) \xhookrightarrow{I} \ell_q^w(X). \quad (2.6)$$

Demonstração. Inicialmente vamos considerar $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q(X)$ e $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}$. Desta forma, utilizando o fato de que $r \leq s$, segue que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty \|x_k^*\|^s \|x_j\|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\|x_j\|^s \sum_{k=1}^\infty \|x_k^*\|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^q \left(\sum_{k=1}^\infty \|x_k^*\|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^q \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_s^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_s \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_s \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q \\
&\leq \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_r \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q \\
&= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q.
\end{aligned}$$

Aplicando o supremo com relação a $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}$ concluímos que

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q,$$

isto é, $\ell_q(X) \xhookrightarrow{1} \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Agora vamos considerar $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Sejam $x^* \in B_{X^*}$, $(x_k^*)_{k=1}^\infty = (x^*, 0, 0, \dots) \in B_{\ell_r(X^*)}$. Assim,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^\infty |x^*(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)}. \end{aligned}$$

Aplicando o supremo com relação a $x^* \in B_{X^*}$, obtemos

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)}.$$

Assim, podemos concluir que $\ell_{(s,q,r)}^A(X) \xhookrightarrow{1} \ell_q^w(X)$. □

Observação 2.2. É conhecido que $\ell_s^w(X) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(X)$. Logo, pela proposição anterior, podemos concluir que

$$\ell_{(s,q,r)}^A(X) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(X).$$

Proposição 2.10. *Seja X um espaço normado. Então, $(\ell_{(s,q,r)}^A(X); \|\cdot\|_{A(s,q,r)})$ é um espaço de Banach, se e somente se, X é Banach.*

Demonstração. Suponhamos que X seja Banach. Considere $(x^n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\begin{aligned} n, m \geq n_0 &\Rightarrow \|x^n - x^m\|_{A(s,q,r)} < \epsilon \\ &\Rightarrow \|(x_j^n - x_j^m)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)} < \epsilon. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Porém, pela observação anterior, $\ell_{(s,q,r)}^A(X) \xhookrightarrow{1} \ell^\infty(X)$. Logo,

$$\begin{aligned} n, m \geq n_0 &\Rightarrow \|(x_j^n - x_j^m)_{j=1}^\infty\|_\infty < \epsilon \\ &\Rightarrow \|x_j^n - x_j^m\| < \epsilon \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto, $(x_j^n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em X para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, existe $a_j \in X$ de modo que $x_j^n \xrightarrow{n} a_j$, para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, por (2.7), para

$m, n \geq n_0$, temos

$$\sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j^n) - x_k^*(x_j^m)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} < \epsilon,$$

o que implica em

$$\left(\sum_{j=1}^{h_1} \left(\sum_{k=1}^{h_2} |x_k^*(x_j^n) - x_k^*(x_j^m)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} < \epsilon \quad (2.8)$$

para quaisquer $h_1, h_2 \in \mathbb{N}$ e $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}$. Daí, fazendo $m \rightarrow \infty$ em (2.8), obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{h_1} \left(\sum_{k=1}^{h_2} |x_k^*(x_j^n) - x_k^*(a_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} < \epsilon$$

Logo, para $n \geq n_0$, temos

$$\sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j^n) - x_k^*(a_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} < \epsilon.$$

Tomando $a = (a_j)_{j=1}^\infty$, podemos garantir que $(x^n)_{n=1}^\infty$ converge para a e $(x^{n_0} - a) \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Porém, como $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ é um espaço vetorial

$$a = x^{n_0} - (x^{n_0} - a) \in \ell_{(s,q,r)}^A(X).$$

Portanto, $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ é espaço de Banach.

Reciprocamente, vamos supor que $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ seja espaço de Banach. Desta forma, consideremos $F = \{(x, 0, 0, \dots) ; x \in X\}$. Pela Proposição 2.8, $F \subseteq \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Note que F é fechado, pois é isomorfo isometricamente a X . Desta forma, pela Proposição 1.2, F é um espaço de Banach. Agora vamos considerar o seguinte operador:

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow \ell_{(s,q,r)}^A(X) \\ x &\longmapsto (x, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.8, π é uma imersão isométrica. Porém, como $\pi(X) = F$, segue que X é espaço de Banach. $\square$

A próxima proposição estabelece a relação entre espaços de sequência anisotrópica

através de seus índices.

Proposição 2.11. *Se $r_2 \leq r_1 \leq s_1 \leq s_2$, $q_1 \leq q_2 < s_2$ e $q_1 < s_1$, então, para todo espaço de Banach X ,*

$$\ell_{(s_1, q_1, r_1)}^A(X) \xhookrightarrow{1} \ell_{(s_2, q_2, r_2)}^A(X). \quad (2.9)$$

Demonstração. Considere $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s_1, q_1, r_1)}^A(X)$ e $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_{r_1}(X)$. Como $q_1 \leq q_2$ e $s_1 \leq s_2$, segue da monotonicidade das normas p que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^{s_2} \right)^{\frac{1}{s_2}} \right)^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} &\leq \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^{s_1} \right)^{\frac{1}{s_1}} \right)^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^{s_1} \right)^{\frac{1}{s_1}} \right)^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}. \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que para todo $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_{r_1}(X^*)$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^{s_2} \right)^{\frac{q_2}{s_2}} \right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^{s_1} \right)^{\frac{q_1}{s_1}} \right)^{\frac{1}{q_1}} < \infty. \quad (2.10)$$

Porém, como $r_2 \leq r_1$, temos que $\ell_{r_2}(X^*) \subseteq \ell_{r_1}(X^*)$. Com isso, (2.10) é válida para toda $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_{r_2}(X^*)$, o que implica em $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s_2, q_2, r_2)}^A(X)$. Além disso, observe que para qualquer $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_{r_2}}(X^*)$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^{s_2} \right)^{\frac{q_2}{s_2}} \right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_{r_1}}(X^*)} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^{s_1} \right)^{\frac{q_1}{s_1}} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Consequentemente,

$$\sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_{r_2}}(X^*)} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^{s_2} \right)^{\frac{q_2}{s_2}} \right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_{r_1}}(X^*)} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^{s_1} \right)^{\frac{q_1}{s_1}} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Sendo assim, $\|\cdot\|_{A(s_2, q_2, r_2)} \leq \|\cdot\|_{A(s_1, q_1, r_1)}$. Portanto, $\ell_{(s_1, q_1, r_1)}^A(X) \xhookrightarrow{1} \ell_{(s_2, q_2, r_2)}^A(X)$. $\square$

2.2.2 Resultados de Coincidência do espaço $\ell_{(s, q, r)}^A(X)$

Neste subseção temos o interesse em fornecer condições para que o espaço $\ell_{(s, q, r)}^A(X)$ coincida com os demais espaços envolvidos em (2.6). Para isso, apresentemos primeiramente alguns fatos relevantes. Dado $x \in X$, como estamos considerando $r \leq s$, para

cada $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$, podemos garantir o seguinte:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \|x\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\|^s \right)^{\frac{1}{s}} = \|x\| \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_s \leq \|x\| \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_r < \infty.$$

Isso nos mostra que $(x_k^*(x))_{k=1}^\infty \in \ell_s$. Mediante a esse fato, poderemos formular o próximo resultado que irá nos fornecer uma aplicação linear contínua que será de grande importância em resultados futuros.

Proposição 2.12. *Para cada $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$, a aplicação $\Psi_{\mathbf{x}^*} : X \rightarrow \ell_s$ dada por*

$$\Psi_{\mathbf{x}^*}(x) := (x_k^*(x))_{k=1}^\infty,$$

é bem definida, linear, contínua e satisfaz $\|\Psi_{\mathbf{x}^}\| \leq \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_r$.*

Demonstração. Como $(x_k^*(x))_{k=1}^\infty \in \ell_s$ para todo $x \in X$, podemos dizer que $\Psi_{\mathbf{x}^*}$ está bem definida. Dados $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, como $x_k^* \in X^*$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\Psi_{\mathbf{x}^*}(\lambda x + y) = (x_k^*(\lambda x + y))_{k=1}^\infty = \lambda(x_k^*(x))_{k=1}^\infty + (y_k^*(x))_{k=1}^\infty = \lambda\Psi_{\mathbf{x}^*}(x) + \Psi_{\mathbf{x}^*}(y),$$

ou seja, $\Psi_{\mathbf{x}^*}$ é linear. Além disso,

$$\|\Psi_{\mathbf{x}^*}(x)\|_s = \|(x_k^*(x))_{k=1}^\infty\|_s = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\|^s \right)^{\frac{1}{s}} \|x\|. \quad (2.11)$$

Logo, como $\Psi_{\mathbf{x}^*}$ é linear, podemos dizer que $\Psi_{\mathbf{x}^*}$ é contínua. Por fim, sabendo que $r \leq s$, pela desigualdade (2.11),

$$\|\Psi_{\mathbf{x}^*}(x)\|_s \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \|x\| = \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_r \|x\|.$$

Aplicando o supremo com relação a $x \in B_X$, concluímos que $\|\Psi_{\mathbf{x}^*}\| \leq \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_r$. $\square$

Teorema 2.13. *Seja X espaço de Banach. Então,*

$$\ell_{(s,q,r)}^A(X) = \ell_q^w(X) \Leftrightarrow \Psi_{\mathbf{x}^*} \in \Pi_q(X; \ell_s), \quad \forall \mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*).$$

Demonstração. Vamos supor que $\ell_{(s,q,r)}^A(X) = \ell_q^w(X)$. Com isso, dada $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(X)$, temos que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Logo, por definição, dada $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Tomando $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty$ e sabendo que $\Psi_{\mathbf{x}^*}(x) = (x_k^*(x))_{k=1}^\infty$, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \|\Psi_{\mathbf{x}^*}(x_j)\|_s^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Logo, $\Psi_{\mathbf{x}^*} \in \Pi_q(X; \ell_s)$ para todo $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$.

Reciprocamente, se $\Psi_{\mathbf{x}^*} \in \Pi_q(X; \ell_s)$ para todo $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$, então dado $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(X)$ segue que $(\Psi_{\mathbf{x}^*}(x_j))_{j=1}^\infty = ((x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_s)$ para toda $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$. Logo, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Com isso, $\ell_q^w(X) \subseteq \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Portanto, pela Proposição 2.9, $\ell_q^w(X) = \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. $\square$

Com o objetivo de abordar um Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para o espaço das sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis, iremos apresentar dois lemas a seguir.

Lema 2.14. *Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_s^w(X)$, então*

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_r \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,s}, \quad \forall (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*). \quad (2.12)$$

Demonstração. Dada $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$, como $r \leq s$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^\infty \|x_k^*\|^s \sum_{j=1}^\infty \left| \frac{x_k^*}{\|x_k^*\|}(x_j) \right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,s} \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_s \\ &\leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,s} \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_r. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.15. *Sejam $s, q \in [1, \infty)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_s^w(X) \setminus \ell_s(X)$ de modo que $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$, com $t > 0$. Se para cada $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{\frac{t}{q}}$ tivermos $\sum_{j=1}^\infty |a_j| \|x_j\|^q < \infty$, então $(\|x_j\|^q)_{j=1}^\infty \in \ell_{\frac{s}{q}}$, ou seja, $(\|x_j\|)_{j=1}^\infty \in \ell_s$.*

Demonstração. Inicialmente vamos considerar

$$\begin{aligned} \phi : \quad \ell_{\frac{t}{q}} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \sum_{j=1}^\infty a_j \|x_j\|^q \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \|x_j\|^q \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \|x_j\|^q$ para todo $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{t}{q}}$, pela hipótese, podemos dizer que ϕ está bem definido. É claro que ϕ é linear. Vejamos agora a continuidade. Para isso, vamos considerar $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\ell_{\frac{t}{q}}$, sendo $a^n = (a_j^n)_{j=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que $a^n \rightarrow a$ em $\ell_{\frac{t}{q}}$, com $a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{t}{q}}$. Pelo fato de $\ell_{\frac{t}{q}}$ ser espaço vetorial podemos dizer que $(a^n - a) \in \ell_{\frac{t}{q}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, usando novamente a hipótese, segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j^n - a_j| \|x_j\|^q < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Critério de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\sum_{j=k_0+1}^{\infty} |a_j^n - a_j| \|x_j\|^q < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.13)$$

Por outro lado, como $a^n \rightarrow a$ em $\ell_{\frac{t}{q}}$, para $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k_0} \|x_j\|^q \right)^{-1}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|a^n - a\|_{\frac{t}{q}} < \epsilon_1.$$

Porém, sabemos que $\ell_{\frac{t}{q}} \xhookrightarrow{1} \ell_{\infty}$. Sendo assim,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_j^n - a_j| < \epsilon_1, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo, podemos concluir que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k_0} |a_j^n - a_j| \|x_j\|^q \leq \epsilon_1 \cdot \sum_{j=1}^{k_0} \|x_j\|^q = \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.14)$$

Com isso, dado $n \geq n_0$, segue das equações (2.13) e (2.14) que

$$\begin{aligned} |\phi(a^n) - \phi(a)| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \|x_j\|^q - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \|x_j\|^q \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} (a_j^n - a_j) \|x_j\|^q \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j^n - a_j| \|x_j\|^q \\ &= \sum_{j=1}^{k_0} |a_j^n - a_j| \|x_j\|^q + \sum_{j=k_0+1}^{\infty} |a_j^n - a_j| \|x_j\|^q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\phi(a^n) \rightarrow \phi(a)$. Pela arbitrariedade de a , podemos concluir que ϕ é contínua. Por outro lado, $1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$. Assim, $\ell_{\frac{s}{q}} \simeq \left(\ell_{\frac{t}{q}}\right)^*$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\Phi : \quad \ell_{\frac{s}{q}} &\longrightarrow \left(\ell_{\frac{t}{q}}\right)^* \\
\mathbf{b} = (b_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \Phi_{\mathbf{b}}
\end{aligned}$$

com $\Phi_{\mathbf{b}}((a_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty a_j b_j$, é um isomorfismo isométrico. Sendo assim, como $\phi \in \left(\ell_{\frac{t}{q}}\right)^*$, existe $(b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{\frac{s}{q}}$, tal que $\Phi_{\mathbf{b}} = \phi$. Daí, sendo e_j os vetores canônicos, temos

$$b_j = \Phi_{\mathbf{b}}(e_j) = \phi(e_j) = \|x_j\|^q, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $(\|x_j\|^q)_{j=1}^\infty \in \ell_{\frac{s}{q}}$. □

Teorema 2.16. *Um espaço de Banach X tem dimensão finita se, e somente se, $\ell_{(s,q,r)}^A(X) = \ell_q(X)$.*

Demonstração. Se X tem dimensão finita, então pela Proposição 1.3, $\ell_q^w(X) = \ell_q(X)$. Assim, por (2.6), $\ell_{(s,q,r)}^A(X) = \ell_q(X)$. Para garantir a recíproca vamos supor que X seja um espaço de Banach de dimensão infinita e mostrar que $\ell_{(s,q,r)}^A(X) \setminus \ell_q(X) \neq \emptyset$. Com efeito, pela Proposição 1.3, existe $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_s^w(X) \setminus \ell_s(X)$. Como $q < s$, existe um número real $t > 0$ tal que

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}. \quad (2.15)$$

Afirmção 2.1. *Se $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_t$, segue que $(\lambda_j x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$.*

De fato, usando a desigualdade clássica de Hölder e o Lema 2.14, para cada $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$ temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(\lambda_j x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^q \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^t \right)^{\frac{1}{t}} \left(\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\stackrel{(2.12)}{\leq} \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_t \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{w,s} \| (x_k^*)_{k=1}^\infty \|_r.
\end{aligned}$$

Logo, $(\lambda_j x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$, isto é, a Afirmção 2.1 está provada. Por outro lado, sabendo que $(x_j)_{j=1}^\infty \notin \ell_s(X)$ e utilizando o Lema 2.15, podemos garantir a existência

de uma sequência $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{t}{q}}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \|x_j\|^q = \infty. \quad (2.16)$$

Considerando a sequência $(b_j)_{j=1}^{\infty} = \left(|a_j|^{\frac{1}{q}}\right)_{j=1}^{\infty}$, temos $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_t$. Pela Afirmação 2.1, $(b_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Por outro lado, (2.16) garante que $(b_j x_j)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_q(X)$. Portanto, $(b_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{(s,q,r)}^A(X) \setminus \ell_q(X)$. $\square$

Agora iremos demonstrar um dos resultados mais importantes envolvendo o espaço $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ que irá responder o Problema 2.2. Este resultado faz uso de uma caracterização devida a B. Maurey para a norma $\|\cdot\|_{m(s;q)}$ (ver [30, Teorema 1.1]) e de uma noção de medidas regulares. Para alcançar tal objetivo vamos agora definir essa noção de medida e enunciar o resultado de B. Maurey.

Definição 2.3. Considere (Ω, X, μ) um espaço de probabilidade. Dado $x \in \Omega$, a medida definida por

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

é uma chamada *medida de Dirac associada a* $x \in \Omega$. Além disso, dizemos que uma medida μ é uma *medida de probabilidade discreta em* Ω se existem $x_1, \dots, x_m \in \Omega$ tais que

$$\mu = \sum_{k=1}^m v_k \delta_{x_k}$$

de modo que $v_k \geq 0$, δ_k a medida de Dirac associada a x_k para todo $k \in \{1, \dots, m\}$, e $\sum_{k=1}^m v_k = 1$.

Teorema 2.17. [30, Teorema 1.1] *Sejam $0 < q < s$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}(X)$. As seguintes sentenças são equivalentes:*

- i) $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é $m(s; q)$ -somável;
- ii) Denotando por $W(B_{X^*})$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade regulares definidas no σ -álgebra dos subconjuntos Borel de B_{X^*} , quando este conjunto é dotado da restrição a topologia estrela fraca de X^* , segue que

$$\left(\left(\int_{B_{X^*}} |x^*(x_j)|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q,$$

para toda $\mu \in W(B_{X^*})$. Neste caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{m(s;q)} = \sup_{\mu \in W(B_{X^*})} \left\| \left(\left(\int_{B_{X^*}} |x^*(x_j)|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^\infty \right\|_q.$$

Teorema 2.18. *Seja X um espaço de Banach. Se $1 \leq q < s$, então*

$$\ell_{(s;q)}^m(X) = \ell_{(s,q,s)}^A(X) \text{ e } \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{m(s;q)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,s)}.$$

Demonstração. Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s;q)}^m(X)$. Agora considere a representação $x_j = \lambda_j u_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$, com $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{s(q)'}^\infty$ e $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_s^w(X)$. Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(\lambda_j u_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^q \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(u_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^{s(q)'} \right)^{\frac{1}{s(q)'}} \left(\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |x_k^*(u_j)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\stackrel{(2.12)}{\leq} \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_{s(q)'} \| (u_j)_{j=1}^\infty \|_{w,s} \| (x_k^*)_{k=1}^\infty \|_s. \end{aligned}$$

Logo $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,s)}^A(X)$. Além disso, tomando o supremo sobre $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_s(X^*)}$ obtemos

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,s)} \leq \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_{s(q)'} \| (u_j)_{j=1}^\infty \|_{w,s}.$$

Pela propriedade de ínfimo, podemos concluir que

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,s)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{m(q;s)}. \quad (2.17)$$

Agora consideremos $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,s)}^A(X)$. Pela definição de $\|\cdot\|_{A(s,q,s)}$, para toda $(y_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_s(X^*)$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |y_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,s)} \|(y_k^*)_{k=1}^\infty\|_s.$$

Em particular, para quaisquer $y_1^*, \dots, y_m^* \in B_{X^*}$ e $n \in \mathbb{N}$, podemos dizer que

$$\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m |y_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{A(s,q,s)} \|(y_k^*)_{k=1}^m\|_s. \quad (2.18)$$

Com isso, considere μ uma medida de probabilidade discreta sobre B_{X^*} . Logo, por definição, existem $x_1^*, \dots, x_m^* \in B_{X^*}$ de modo que $\mu = \sum_{k=1}^m v_k \delta_k$ com δ_k a medida de Dirac associada a x_k^* , para cada $k \in \mathbb{N}$. Desta forma, segue da definição de integral que

$$\int_{B_{X^*}} |x^*(x_j)|^s d\mu(x^*) = \sum_{k=1}^m |x_k^*(x_j)|^s v_k = \sum_{k=1}^m \left| v_k^{\frac{1}{s}} x_k^*(x_j) \right|^s, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.19)$$

Observemos que $\left\| v_k^{\frac{1}{s}} x_k^* \right\| \leq \left\| \left(v_k^{\frac{1}{s}} x_k^* \right)_{k=1}^m \right\|_s \leq 1$ para qualquer $k \in \{1, \dots, m\}$. Com efeito, pela definição da norma s a primeira desigualdade é verificada. Por outro lado, sabendo que $\sum_{k=1}^m v_k = 1$, $v_k \geq 0$ e $\|x_k^*\| = 1$ para todo k , podemos provar segunda desigualdade da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \left\| \left(v_k^{\frac{1}{s}} x_k^* \right)_{k=1}^m \right\|_s &= \left(\sum_{k=1}^m \left\| v_k^{\frac{1}{s}} x_k^* \right\|^s \right)^{\frac{1}{s}} = \left(\sum_{k=1}^m v_k \|x_k^*\|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^m v_k \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sendo assim, por (2.18) e (2.19), para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \left(\int_{B_{X^*}} |x^*(x_j)|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m \left| v_k^{\frac{1}{s}} x_k^*(x_j) \right|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{A(s,q,s)} \cdot \left\| \left(v_k^{\frac{1}{s}} x_k^* \right)_{k=1}^m \right\|_s \\ &\leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{A(s,q,s)}. \end{aligned}$$

Logo, como $W(B_{X^*})$ é o conjunto de todas as medidas de probabilidade regulares definidas na σ -álgebra dos subconjuntos de B_{X^*} , podemos dizer que

$$\left(\sum_{j=1}^n \left(\int_{B_{X^*}} |x^*(x_j)|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,s)} < \infty \quad (2.20)$$

para toda medida de probabilidade discreta $\mu \in W(B_{X^*})$. Porém, neste caso, as

medidas discretas são densas em $W(B_{X^*})$ com relação à topologia fraca definida por $C(B_{X^*})$ (ver [23, Proposition 437K and Exercise 437X (g)]). Desta maneira, podemos concluir que (2.20) é válida para toda medida em $W(B_{X^*})$. Sendo assim, pelo Teorema 2.17, podemos dizer que $\ell_{(s,q,s)}^A(X) \subseteq \ell_{m(s;q)}(X)$ e

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{m(s;q)} \leq \|(x_i)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,s)}. \quad (2.21)$$

Portanto, por (2.17) e (2.21), podemos concluir que

$$\ell_{(s;q)}^m(X) = \ell_{(s,q,s)}^A(X) \quad \text{e} \quad \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,s)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{m(s;q)}.$$

□

Observação 2.3. Vale ressaltar os seguintes comentários com respeito ao Teorema 2.18:

- i) Em [38] é provado que $\ell_{(s;s)}^m(X) = \ell_s^w(X)$. Por outro lado, pelo Corolário 2.5 $\ell_{(s,s,s)}^A(X) = \ell_s^w(X)$, ou seja, $\ell_{(s;s)}^m(X) = \ell_{(s,s,s)}^A(X)$. Portanto, podemos concluir que o Teorema 2.18 também é válido para o caso $q = s$.
- ii) O Teorema 2.18 juntamente com o Teorema 2.13 estabelecem uma caracterização para o espaço $\ell_{(s;q)}^m(X)$, que até onde sabemos não está presente na literatura.
- iii) Os Teoremas 2.18 e 2.16 estabelecem um Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para o espaço de sequências mistas $(s;q)$ -somáveis. Porém, este resultado já foi comprovado em [30, Theorem 2.1].

2.2.3 Outras importantes propriedades do espaço $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$

Em [7] foi elaborada uma teoria abstrata construída com o intuito de lidar com ideais de operadores lineares e multilineares caracterizados pela transformação de sequências com valores vetoriais unificando tais propriedades. Tal estrutura é chamada classe de sequências. Além da construção, os resultados e exemplos presentes no artigo [7] e nas referências [1, 3, 8, 6, 9, 10, 39] nos trazem diversas aplicações do ambiente de classes de sequências que mostram sua versatilidade para a teoria de operadores. Iremos provar nesta subseção que o espaço $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ goza de tais propriedades. Mas antes vejamos a definição de tais conceitos.

Definição 2.4. Uma *classe de sequência* é uma regra $X \mapsto Z(X)$ que atribui a cada espaço Banach X a um espaço de Banach $Z(X)$ de modo que $Z(X) \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Além disso, as seguintes condições devem ser satisfeitas

- i) $c_{00}(X) \subseteq Z(X)$;
- ii) $Z(X) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(X)$;
- iii) $\|e_j\|_{X(\mathbb{K})} = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Uma classe de seqüências $X \mapsto Z(X)$ é dita *finitamente determinada* quando $(x_j)_{j=1}^\infty \in Z(X)$ se, e somente se, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{Z(X)} < \infty$. Além disso, devemos ter

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{Z(X)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{Z(X)}.$$

Dizemos que $X \mapsto Z(X)$ é *linear estável* se dados $(x_j)_{j=1}^\infty \in Z(U)$ e $u \in \mathcal{L}(U; X)$, tem-se $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in Z(X)$ e, neste caso, o operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{u} : Z(U) &\longrightarrow Z(X) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (u(x_j))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

está bem definido, é contínuo e satisfaz $\|u\| = \|\widehat{u}\|$.

Antes de provarmos que $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ satisfaz todos os itens da definição anterior, vejamos um lema auxiliar.

Lema 2.19. ([32, Lema 2.4.10]) *Se X e Y são conjuntos não vazios e $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, então*

$$\sup_{x \in X} \sup_{y \in Y} F(x, y) = \sup_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y).$$

Teorema 2.20. *A correspondência $X \mapsto \ell_{(s,q,r)}^A(X)$ é uma classe de seqüências linear estável e finitamente determinada.*

Demonstração. Pela Proposição 2.8 e a Observação 2.2 podemos dizer que $c_{00}(X) \subseteq \ell_{(s,q,r)}^A(X) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(X)$. Por outro lado, como $\|e_j\|_q = \|e_j\|_{w,q} = 1$, segue da Proposição 2.9 que $\|e_j\|_{A(s,q,r)} = 1$. Sendo assim, $X \mapsto \ell_{(s,q,r)}^A(X)$ é uma classe de seqüências. Agora, dado $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$, temos $(x_k^* \circ u)_{k=1}^\infty \in \ell_r(U^*)$ para todo $u \in \mathcal{L}(U; X)$. Desta forma, considerando $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(U)$, temos

$$\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |(x_k^* \circ u)(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} < \infty.$$

Logo, $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Agora defina o seguinte operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{u} : \ell_{(s,q,r)}^A(U) &\longrightarrow \ell_{(s,q,r)}^A(X) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (u(x_j))_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

Pelo que mostramos, $\widehat{u}$ está bem definido. Além disso, como $\left(x_k^* \circ \frac{u}{\|u\|}\right)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(U^*)}$, para todo $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}$, podemos dizer que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}\| &= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{(s,q,r)}^A(U)}} \|\widehat{u}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{A(s,q,r)} \\
&= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{(s,q,r)}^A(U)}} \|(u(x_j))_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)} \\
&= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{(s,q,r)}^A(U)}} \left(\sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(u(x_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&= \|u\| \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{(s,q,r)}^A(U)}} \left(\sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty \left| \left(x_k^* \circ \frac{u}{\|u\|}\right)(x_j) \right|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&\leq \|u\| \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{(s,q,r)}^A(U)}} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)} \\
&\leq \|u\|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se tomarmos $x \in B_U$ e $(x_j)_{j=1}^\infty = (x, 0, 0, \dots)$, sabemos que $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q \leq 1$. Assim, pela Proposição 2.9, $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)} \leq 1$. Observe também que, para qualquer $\varphi \in B_{X^*}$, temos $(x_k^*)_{k=1}^\infty = (\varphi, 0, 0, \dots) \in B_{\ell_r(X^*)}$. Portanto,

$$|\varphi(u(x))| = \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(u(x_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|(u(x_j))_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)}, \quad \forall x \in B_U.$$

Logo, pela Proposição 1.3, tem-se

$$\|u(x)\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(u(x))| \leq \|(u(x_j))_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)} = \|\widehat{u}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{A(s,q,r)} \leq \|\widehat{u}\|, \quad \forall x \in B_X.$$

Desta forma, $\|u\| \leq \|\widehat{u}\|$. Portanto, $\|u\| = \|\widehat{u}\|$. Sendo assim, a classe de seqüências $X \mapsto \ell_{(s,q,r)}^A(X)$ é linear estável. Por fim, vamos supor que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Com isso, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \leq \sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}}.$$

para toda $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$. Logo, podemos dizer que

$$\sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\|(x_j)_{j=1}^n\|_{A(s,q,r)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)}.$$

Portanto,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{A(s,q,r)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)} < \infty.$$

Reciprocamente, pelo Lema 2.19, podemos dizer que

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{A(s,q,r)} &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^q \right)^{s/q} \right)^{1/s} \right) \\ &= \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^q \right)^{s/q} \right)^{1/s} \right) \\ &= \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^q \right)^{s/q} \right)^{1/s} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)}. \end{aligned}$$

Logo, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(X)$ sempre que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{A(s,q,r)} < \infty$. Além disso, provamos também que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{A(s,q,r)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)}.$$

Sendo assim, a classe de seqüências $X \mapsto \ell_{(s,q,r)}^A(X)$ é finitamente determinada. $\square$

Para encerrar esta subseção, comentemos o impacto do Teorema 2.18 em nosso estudo. Como mencionamos anteriormente, a norma do espaço $\ell_{(s,q)}^m(X)$ é originalmente definida por um ínfimo e isso dificulta o trabalhar no ambiente de classe de seqüências. Por exemplo, não sabemos se $\ell_{(s,q)}^m(X)$ é finitamente determinado. Mesmo a palavra "somável" na definição de seqüências mistas $(s; q)$ -somáveis não faz sentido, uma vez que a expressão $\|\cdot\|_{m(s,q)}$ não envolve uma série. O resultado do Teorema 2.18 na verdade introduz uma norma alternativa no espaço $\ell_{(s,q)}^m(X)$ que nos leva ao ambiente de classe de seqüências (através do Teorema 2.20) e todo o seu conjunto de ferramentas úteis para o estudo de operadores somantes.

2.3 Operadores associados ao espaço $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$

Motivado pela cadeia de inclusões 2.6, estudaremos nesta seção duas novas classes de operadores que são caracterizadas por transformações de clássicas seqüências com

valores vetoriais e seqüências anisotrópicas somáveis. No que se segue, $1 \leq s, q, r, p < \infty$ são números reais, X e U espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(U; X)$.

2.3.1 Operador fracamente anisotrópico

A primeira classe de operadores será composta pelos operadores fracamente anisotrópicos $(s, q, r; p)$ -somantes. Tais operadores irão associar as seqüências fracamente p -somáveis com as anisotrópicas (s, q, r) -somáveis. Vejamos a definição de tal espaço.

Definição 2.5. Sejam $1 \leq p \leq q < s$, $1 \leq r \leq s$ números reais e $T \in \mathcal{L}(U; X)$. Dizemos que T é um operador é *fracamente anisotrópico* $(s, q, r; p)$ -somante se

$$(T(u_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{(s,q,r)}^A(X) \text{ sempre que } (u_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(U),$$

isto é, o operador induzido $\widehat{T} : \ell_p^w(U) \rightarrow \ell_{(s,q,r)}^A(X)$, dado por $\widehat{T}((u_j)_{j=1}^{\infty}) = (T(u_j))_{j=1}^{\infty}$, está bem definido. Denotaremos por $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$ o espaço de todos os operadores fracamente anisotrópico $(s, q, r; p)$ -somantes de U em X .

Observação 2.4. Note que:

- 1) Como $\ell_{(s,q,r)}^A(X)$ é um espaço vetorial, é possível mostrar que $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$ é um espaço vetorial.
- 2) Se $r > s$, então pela Proposição 2.3 $\ell_{(s,q,r)}^A(X) = \{0\}$, onde 0 está representando a seqüência nula. Neste caso, uma vez que todo operador fracamente anisotrópico somante é linear, teríamos $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X) = \{0\}$, onde 0 representa, neste caso, o operador nulo.
- 3) Se $s \leq q$, então pelo Corolário 2.5 $\ell_q^w(X) = \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Nesta caso, por definição, $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X) = \Pi_{p,q}(U; X)$.

Proposição 2.21. Quando $p > q$, o único operador fracamente anisotrópico $(s, q, r; p)$ -somante de U em X é o nulo.

Demonstração. Primeiramente vamos supor que $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X) \neq \{0\}$, onde 0 representa, neste caso, o operador nulo. Como, por hipótese, $p > q$, pelo que comentamos na Observação 1.2 item (II), existe $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p \setminus \ell_q$. É claro que $(\lambda_j u)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(U)$ qualquer que seja $u \in U$. Então, dado $T \in \mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X) - \{0\}$, existe $u \in U$ de modo que $T(u) \neq 0$. Além disso, por definição, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_j x_k^*(T(u))|^q \right)^{s/q} < \infty \text{ sempre que } (x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r(X^*). \quad (2.22)$$

Considerando em (2.22) a sequência $(x_k^*)_{k=1}^\infty = (x^*, 0, 0, \dots) \in \ell_r(X^*)$, com $x^* \in X^*$, obtemos

$$|x^*(T(u))| \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^s < \infty.$$

Como $|x^*(T(u))| \neq 0$, podemos concluir que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^s < \infty,$$

ou seja, $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_s$, o que é uma contradição. Logo, $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X) = \{0\}$. $\square$

Veja que nas hipóteses da Observação 2.4 ou da Proposição 2.21, $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$ resulta em espaços já conhecidos. Esse é o motivo pelo qual, na Definição 2.5, são impostas condições sobre os índices s, q, r e p .

Agora vamos apresentar caracterizações para que um operador seja fracamente anisotrópico $(s, q, r; p)$ -somantes. Mediante essas caracterizações, definiremos uma norma para $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$ e mostraremos que tal espaço é de Banach. Para auxiliar na demonstração das caracterizações, enunciaremos o caso $n = 1$ da Proposição 2.4 presente em [7].

Proposição 2.22. *Sejam H_1 e H_2 classes de sequências. Os seguintes itens são equivalentes para qualquer operador linear contínuo $A \in \mathcal{L}(E, F)$.*

- a) $(A(x_j))_{j=1}^\infty \in H_2(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in H_1(E)$;
- b) O operador induzido $\hat{A} : H_1(E) \rightarrow H_2(F)$, dado por $\hat{A}((x_j)_{j=1}^\infty) = (A(x_j))_{j=1}^\infty$, está bem definido, é contínuo e linear.

Além disso, no caso em que H_1 e H_2 são finitamente determinadas, podemos dizer que as condições acima também são equivalentes a condição (c) abaixo:

- c) Existe uma constante $C > 0$ de modo que

$$\|(A(x_j))_{j=1}^k\|_{H_2(F)} \leq C \|(x_j)_{j=1}^k\|_{H_1(E)} \quad (2.23)$$

para todos $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_k \in E$. Neste caso,

$$\|\hat{A}\| = \inf\{C ; \text{ satisfaz (2.23)}\}.$$

Proposição 2.23. *Sejam X, U espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(U; X)$. As seguintes sentenças são equivalentes:*

- (i) O operador T é fracamente anisotrópico $(s, q, r; p)$ -somante;

(ii) Existe uma constante $D > 0$ tal que

$$\left\| (T(u_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_{A(s,q,r)} \leq D \left\| (u_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \quad (2.24)$$

sempre que $(u_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(U)$;

(iii) Existe uma constante $D > 0$ tal que

$$\left\| (T(u_j))_{j=1}^m \right\|_{A(s,q,r)} \leq D \left\| (u_j)_{j=1}^m \right\|_{w,p} \quad (2.25)$$

para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $u_1, \dots, u_m \in U$.

(iv) Existe uma constante $D > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(T(u_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq D \left\| (x_k^*)_{k=1}^{\infty} \right\|_r \left\| (u_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \quad (2.26)$$

para todos $(u_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(U)$ e $(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r(X^*)$.

(v) Existe uma constante $D > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(T(u_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq D \left\| (x_k^*)_{k=1}^{\infty} \right\|_r \left\| (u_j)_{j=1}^m \right\|_{w,p} \quad (2.27)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_m \in U$ e $(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r(X^*)$.

(vi) Existe uma constante $D > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |x_k^*(T(u_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq D \left\| (x_k^*)_{k=1}^n \right\|_r \left\| (u_j)_{j=1}^m \right\|_{w,p} \quad (2.28)$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_m \in U$ e $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$.

O ínfimo de todas as constantes D satisfazendo uma das desigualdades anteriores será denotado por $w_{(s,q,r;p)}^A(T)$ e define uma norma para $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$.

Demonstração. Como $\ell_{(s,q,r)}^A(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ são classes de seqüências finitamente determinadas, pela Proposição 2.22, (i), (ii) e (iii) são equivalentes e $w_{(s,q,r;p)}^A(\cdot)$ define uma norma sobre $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). Por hipótese, podemos dizer que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x_k^*}{\|(x_k^*)_{k=1}^{\infty}\|_r} (T(u_j)) \right|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq D \|(u_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}$$

para todos $(u_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(U)$ e $(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r(X^*)$. Logo,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^* (T(u_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq D \|(x_k^*)_{k=1}^{\infty}\|_r \|(u_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}, \forall (u_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(U).$$

Portanto, (iv) é válida.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Basta observar que $c_{00}(U) \subseteq \ell_p^w(U)$.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Basta observar que $c_{00}(X^*) \subseteq \ell_r(X^*)$.

(vi) $\Rightarrow$ (ii). Consideremos $(u_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(U)$ e $(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_r(X^*)}$. Daí, por hipótese, existe uma constante $D > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |x_k^* (T(u_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq D \|(x_k^*)_{k=1}^n\|_r \|(u_j)_{j=1}^m\|_{w,p}$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$. Assim, podemos dizer que

$$\left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |x_k^* (T(u_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq D \|(x_k^*)_{k=1}^{\infty}\|_r \|(u_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |x_k^* (T(u_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq D \|(u_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}.$$

Isso implica que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n |x_k^* (T(u_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq D \|(u_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}.$$

Daí, como $\ell_{(s,q,r)}^A(\cdot)$ é finitamente determinada, segue que

$$\|T(u_j)\|_{A(s,q,r)} \leq D \|(u_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}.$$

Assim, o resultado está provado. $\square$

Para um operador $T \in \mathcal{L}(U; X^*)$, onde o contradomínio é um espaço espaço dual, podemos formular a seguinte caracterização.

Corolário 2.24. *Seja $T \in \mathcal{L}(U; X^*)$. Então, $T \in \mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X^*)$ se, e somente se, existe $D > 0$ de modo que*

$$\left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |(T(u_j)(x_k))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq D \| (x_k)_{k=1}^n \|_r \| (u_j)_{j=1}^m \|_{w,p} \quad (2.29)$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_m \in U$ e $x_1, \dots, x_n \in X$. Nesta caso, $w_{(s,q,r;p)}^A(T)$ é igual ao ínfimo das constantes D .

Demonstração. Primeiramente vamos supor que $T \in \mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X^*)$. Se $u_1, \dots, u_m \in U$ e $x_1, \dots, x_n \in X$, podemos observar que, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, temos

$$|T(u_j)(x_k)| = |J(x_k)(T(u_j))|,$$

onde $J : X \rightarrow X^{**}$ é o mergulho canônico. Sendo assim, por (2.28), existe $D > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |(T(u_j)(x_k))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |(J(x_k)(T(u_j)))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq D \| (J(x_k))_{k=1}^n \|_r \| (u_j)_{j=1}^m \|_{w,p} \\ &= D \| (x_k)_{k=1}^n \|_r \| (u_j)_{j=1}^m \|_{w,p}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, vamos considerar $u_1, \dots, u_m \in U$ e $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in X^{**}$. Assim, tomemos M e N , respectivamente, como os espaços de todas as combinação lineares finitas dos elementos $\{x_1^{**}, \dots, x_n^{**}\}$ e $\{T(u_1), \dots, T(u_m)\}$, isto é,

$$M = \text{span}\{x_1^{**}, \dots, x_n^{**}\} \subseteq X^{**}$$

e

$$N = \text{span}\{T(u_1), \dots, T(u_m)\} \subseteq X^*.$$

Desta forma, pelo Princípio da Reflexividade Local (ver [20, 8.16 Principle of Local Reflexivity]), para todo $\epsilon > 0$, existe $R \in \mathcal{L}(M; X)$, com $\|R\| \leq 1 + \epsilon$, de modo que

$$y^*(R(x^{**})) = x^{**}(y^*)$$

para todos $y^* \in N$ e $x^{**} \in M$. Em particular,

$$T(u_j)(R(x_k^{**})) = x_k^{**}(T(u_j))$$

para quaisquer $k \in \{1 \dots, n\}$ e $j \in \{1 \dots, m\}$. Sendo assim, por hipótese, podemos obter $D > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |x_k^{**}(T(u_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |T(u_j)(R(x_k^{**}))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq D \|(R(x_k^{**}))_{k=1}^n\|_r \|(u_j)_{j=1}^m\|_{w,p} \\ &\leq D \|R\| \|(x_k^{**})_{k=1}^n\|_r \|(u_j)_{j=1}^m\|_{w,p} \\ &\leq D(\epsilon + 1) \|(x_k^{**})_{k=1}^n\|_r \|(u_j)_{j=1}^m\|_{w,p}. \end{aligned}$$

Daí, pela arbitrariedade do ϵ , podemos concluir que

$$\left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |(x_k^{**}(T(u_j)))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq D \|(x_k^{**})_{k=1}^n\|_r \|(u_j)_{j=1}^m\|_{w,p}$$

Sendo assim, $T \in \mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X^*)$. Além disso, pela Proposição 2.23, $w_{(s,q,r;p)}^A(T)$ é igual ao ínfimo das constantes D . $\square$

Vejamos agora alguns considerações imediatas com relação ao espaço $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$.

Observação 2.5. a) Em [38, Seção 20], Pietsch abordou a classe dos operadores mistos $(s; q)$ -somantes. Tal classe associa as sequências fracamente p -somantes com as mistas (s, q) -somantes, isto é, um operador $T \in \mathcal{L}(U; X)$ é misto $(s; q)$ -somante se, e somente se,

$$(T(u_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X) \text{ sempre que } (u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{s,q,r}^A(U).$$

Com isso, pelo Teorema 2.18, a classe dos operadores fracamente anisotrópicos $(s, q, s; p)$ -somantes generaliza a classe de operadores mistos $(s; q)$ -somantes, basta tomar $p = q$.

b) Com p e q satisfazendo as condições da Definição 2.5, utilizando as inclusões do espaço das sequências p -somáveis, é possível garantir que $\Pi_{q,p}(U; X) \subseteq W_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$. Além disso, pela Proposição 2.9, se $T \in W_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$ e $S \in \Pi_q(X; Y)$, então $S \circ T \in \Pi_{q,p}(U; Y)$.

O clássico teorema de inclusão (ver [20, Theorem 10.4]) garante que se $1 \leq p_j \leq$

$q_j < \infty$, para $j \in \{1, 2\}$, satisfazendo $p_1 \leq p_2$ e $q_1 \leq q_2$ e $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, então

$$\Pi_{q_1, p_1}(U; X) \subseteq \Pi_{q_2, p_2}(U; X)$$

para quaisquer $U, X \in BAN$. Em particular, se $p \leq q$, temos $\Pi_q(U; X) \subset \Pi_{q, p}(U; X)$. Assim, pela Observação 2.5 item (b) temos $\Pi_q(U; X) \subseteq W_{(s, q, r; p)}^A(U; X)$. Agora iremos melhorar esta inclusão provando que $\Pi_t \subseteq W_{(s, q, r; p)}^A(U; X)$ sempre que $t > q$ e satisfizer $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$.

Proposição 2.25. *Seja $t > q$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$. Se $T \in \Pi_t(U; X)$, então $T \in \mathcal{W}_{(s, q, r; p)}^A(U; X)$.*

Demonstração. Seja $T \in \Pi_t(U; X)$. Dado $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(U) \subseteq \ell_q^w(U)$, de [20, Lemma 2.23], existem seqüências $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_t$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_s^w(X)$ tais que $Tu_j = \lambda_j x_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. No Theorem 2.18 vimos que $(Tu_j)_{j=1}^\infty = (\lambda_j x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s, q, r)}^A(X)$. Portanto, por definição, $T \in \mathcal{W}_{(s, q, r; p)}^A(U; X)$. $\square$

O próximo resultado fornece outra caracterização para operadores somantes fracamente anisotrópicos usando o operador $\Psi_{\mathbf{x}^*}$ definido na Proposição 2.12.

Teorema 2.26. *As seguintes sentenças são equivalentes para $T \in \mathcal{L}(U; X)$:*

- i) $T \in \mathcal{W}_{(s, q, r; p)}^A(U; X)$.
- ii) $\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T \in \Pi_{q, p}(U; \ell_s)$ para toda $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}$.

Além disso, se (i) for verificada (e consequentemente (ii)), então $\pi_{q, p}(\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T) = w_{(s, q, r; p)}^A(T)$ para todo $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}$.

Demonstração. Primeiramente, vamos observar que dada $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}$ temos

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(Tu_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^\infty \|\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T(u_j)\|_s^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.30)$$

para toda seqüência $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(U)$. Daí, se $T \in \mathcal{W}_{(s, q, r; p)}^A(U; X)$, então por (2.26) e (2.30), temos

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \|\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T(u_j)\|_s^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq w_{(s, q, r; p)}^A(T) \|(u_j)_{j=1}^\infty\|_{w, p}.$$

Logo, $\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T \in \Pi_{q,p}(U; \ell_s)$. Além disso, $\pi_{q,p}(\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T) \leq w_{(s,q,r;p)}^A(T)$. Reciprocamente, se $\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T \in \Pi_{q,p}(U; \ell_s)$, então

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T(u_j)\|_s^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_{q,p}(\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T) \|(u_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q}.$$

Sendo assim, por (2.30),

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(Tu_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_{q,p} \left(\Psi_{\frac{\mathbf{x}^*}{\|\mathbf{x}^*\|_r}} \circ T \right) \|(u_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q}.$$

Portanto, por (2.26), $T \in \mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$. Além disso, $w_{(s,q,r;p)}^A(T) \leq \pi_{q,p}(\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T)$. Logo, $w_{(s,q,r;p)}^A(T) = \pi_{q,p}(\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T)$. $\square$

Corolário 2.27. *As seguintes sentenças são verificadas:*

a) Se $p_1 \leq q_1 < s$, $p_2 \leq q_2 < s$, $r \leq s$ e $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, então

$$\mathcal{W}_{(s,q_1,r,p_1)}^A(U; X) \xhookrightarrow{1} \mathcal{W}_{(s,q_2,r,p_2)}^A(U; X).$$

b) Se $\Psi_{\frac{\mathbf{x}^*}{\|\mathbf{x}^*\|_r}} \in \Pi_{q,p}(X; \ell_s)$ para cada $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r(X^*)$, então $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X) = \mathcal{L}(U; X)$.

Demonstração. a) Considere $T \in \mathcal{W}_{(s,q_1,r,p_1)}^A(U; X)$ e $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r(X^*)$. Dessa forma, como $r \leq s$, podemos definir

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{x}^*,T} : U &\longrightarrow \ell_s \\ u &\longmapsto (x_k^*(T(u)))_{k=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Note que $\Psi_{\mathbf{x}^*,T} = \Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T$. Assim, Pela Proposição 2.12, $\Psi_{\mathbf{x}^*,T}$ está bem definido, é contínuo e satisfaz

$$\|\Psi_{\mathbf{x}^*,T}\| \leq \|\Psi_{\mathbf{x}^*}\| \cdot \|T\| \leq \|T\| \cdot \|\mathbf{x}^*\|_r.$$

Por outro lado, como $T \in \mathcal{W}_{(s,q_1,r,p_1)}^A(U; X)$, $(T(u_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{(s,q_1,r)}^A(X)$ sempre que $(u_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_1}^w(U)$. Logo,

$$(\Psi_{\mathbf{x}^*,T}(u_j))_{j=1}^{\infty} = (\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T(u_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_1}(\ell_s).$$

Sendo assim, $\Psi_{\mathbf{x}^*,T} \in \Pi_{q_1,p_1}(U; \ell_s)$. Com isso, a hipótese nos parâmetros juntamente com o Teorema de Inclusão nos garante que $\Psi_{\mathbf{x}^*,T} \in \Pi_{q_2,p_2}(U; \ell_s)$. Ademais,

pelo Teorema [2.26](#), podemos garantir que

$$\pi_{(q_2, p_2)}(\Psi_{\mathbf{x}^*, T}) \leq \pi_{(q_1, p_1)}(\Psi_{\mathbf{x}^*, T}) = w_{(s, q_1, r, p_1)}^A(T) \cdot \|\mathbf{x}^*\|_r.$$

Sendo assim, para toda $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p_2}^w(U)$, segue que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(T(u_j))|^s \right)^{\frac{q_2}{s}} \right)^{\frac{1}{q_2}} &\leq \pi_{(s, p_2)}(\Psi_{\mathbf{x}^*, T}) \cdot \|(u_j)_{j=1}^\infty\|_{p_2, w} \\ &\leq w_{(s, q_1, r, p_1)}^A(T) \cdot \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_r \cdot \|(u_j)_{j=1}^\infty\|_{p_2, w}. \end{aligned}$$

Portanto, pela arbitrariedade de $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$ e a propriedade de ínfimo, a proposição está provada.

- b) Dado $T \in \mathcal{L}(U; X)$, novamente pela propriedade de ideal dos operadores $(s; p)$ -somantes, temos $\Psi_{\frac{\mathbf{x}^*}{\|\mathbf{x}^*\|_r}} \circ T \in \Pi_{s, p}(U; \ell_q)$ e portanto $T \in \mathcal{W}_{(s, q, r; p)}^A(U; X)$. □

O próximo resultado irá garantir que certas relações de inclusão envolvendo as classes de sequências $\ell_{(s, q, r)}^A(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ nos fornece outro resultado de coincidência para a classe de operadores fracamente anisotrópicos.

Proposição 2.28. *Seja $2 \leq q < \infty$ um número real. Então,*

- a) *Se U tem cotipo $2 \leq q < \infty$, então $\ell_1^w(U) \subseteq \ell_{(s, q, r)}^A(U)$.*
b) *Se U ou X tem cotipo $2 \leq q < \infty$, então $\mathcal{L}(U; X) = \mathcal{W}_{(s, q, r; 1)}^A(U; X)$.*

Demonstração. a) Suponha que U tenha cotipo $2 \leq q < \infty$. Por [\[19, 24.7\]](#) ou [\[20, Theorem 11.17\]](#), a aplicação identidade de U , a qual denotaremos por id_U , é $(q, 1)$ -somante. Pela Observação [2.5](#), $id_U \in \mathcal{W}_{(s, q, r; 1)}^A(U; U)$, ou seja, $\ell_1^w(U) \subseteq \ell_{(s, q, r)}^A(U)$.

- b) Se U tem cotipo $2 \leq q < \infty$, então, pela Proposição [2.9](#), podemos dizer que $\ell_1^w(U) \subseteq \ell_{(s, q, r)}^A(U)$. Sendo assim, $F \in \mathcal{W}_{(s, q, r; 1)}^A(U; X)$, para qualquer $F \in \mathcal{L}(U; X)$, pois $\ell_{(s, q, r)}^A$ é linear estável. Logo, $\mathcal{L}(U; X) = \mathcal{W}_{(s, q, r; 1)}^A(U; X)$. Analogamente para o caso X com cotipo $q < \infty$. □

Estamos interessado em apresentar um Teorema do tipo dominação de Pietsch para a nova classe de operadores $\mathcal{W}_{(s, q, r; s)}^A(U; X)$. Para isso, iremos agora apresentar a abordagem abstrata presente em [\[33, 36\]](#). Sejam Y_1 , Y_2 , E e G conjuntos não-vazios,

$\mathcal{H}$ uma família não vazia de aplicações com domínio Y_1 e contradomínio Y_2 e K um espaço topológico de Hausdorff compacto. Consideremos também

$$R : K \times E \times G \longrightarrow [0, \infty) \text{ e } S : \mathcal{H} \times E \times G \longrightarrow [0, \infty)$$

aplicações de modo que

$$\begin{aligned} R_{x,b} : K &\longrightarrow [0, \infty) \\ \varphi &\longmapsto R_{x,b}(\varphi) = R(\varphi, x, b) \end{aligned}$$

seja contínua. Para todos $p \in (0, \infty)$, dizemos que $f \in \mathcal{H}$ é RS-abstrato p -somante se existir uma constante $C > 0$ de modo que

$$\left(\sum_{j=1}^m S(f, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^m R(\varphi, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.31)$$

para todos $x_1, \dots, x_m \in E, b_1, \dots, b_m \in G$ e $m \in \mathbb{N}$. O ínfimo sobre as constantes C será denotado por $\pi_{RS,p}(f)$. Nessas condições e tomando G um espaço de Banach, podemos enunciar o seguinte resultado (que é conhecido como versão abstrata do Teorema de Pietsch):

Teorema 2.29 (Theorem 3.1, [33]). *Uma aplicação $f \in \mathcal{H}$ é RS-abstrata p -somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade μ nos borelianos de K tal que*

$$S(f, x, b) \leq C \left(\int_K R(\varphi, x, b)^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $x \in E$ e $b \in G$. Além disso, o ínfimo sobre as constantes C é igual a $\pi_{RS,p}(f)$.

Teorema 2.30. *Sejam U e X espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(U; X)$. O operador T é fracamente anisotrópico $(s, p, r; p)$ -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade μ nos borelianos de B_{U^*} , com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|\psi_{\mathbf{x}^*}(T(u))\|_s \leq C \left(\int_{B_{U^*}} |u^*(u)|^p d\mu(u^*) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.32)$$

para cada $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}$ e para todo $u \in U$. Além disso, $w_{(s,q,r;s)}^A(T) = \inf\{C; C \text{ satisfaz (2.32)}\}$.

Demonstração. Mediante as notações do Teorema 2.29, para cada $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}$, vamos considerar:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}(U; X), \quad E = U \times \{\mathbf{x}^*\}, \quad G = \mathbb{R} \text{ e } K = B_{U^*},$$

com K munido da topologia fraca estrela. O clássico Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki ([11, Teorema 6.3.9.]) garante que B_{U^*} é compacta na topologia fraca-estrela, isto é, K é compacto e Hausdorff. Além disso, vamos definir

$$S(T, (u, \mathbf{x}^*), b) = \|\Psi_{\mathbf{x}^*}(T(u))\|_s$$

e

$$R(\varphi, (u, \mathbf{x}^*), b) = |\varphi(u)|.$$

Note que se $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ converge fraca estrela para φ em B_{U^*} , então, para qualquer $u \in U$, $(\varphi_j(u))_{j=1}^\infty$ converge para $\varphi(u)$, ou seja, $(R_{(u, \mathbf{x}^*), b}(\varphi_j))_{j=1}^\infty$ converge para $(R_{(u, \mathbf{x}^*), b}(\varphi))$. Como B_{U^*} é munido com a topologia fraca estrela, podemos concluir que a aplicação $R_{(u, \mathbf{x}^*), b}$ é contínua. Além disso, por definição, note também que

$$T \text{ é RS-abstrato } p\text{-somante} \iff \left(\sum_{j=1}^m \|\Psi_{\mathbf{x}^*}(T(u))\|_s^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^m |\varphi(u)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ou seja, T é RS-abstrato p -somante se, e somente se, $\Psi_{\mathbf{x}^*} \circ T$ é um operador p -somante para todo $\mathbf{x}^* \in B_{\ell_r(X^*)}$. Desta forma, pelo Teorema 2.26, podemos dizer que

$$T \text{ é RS-abstrato } p\text{-somante} \iff T \in \mathcal{W}_{(s,p,r;p)}^A(U; X).$$

Sendo assim, utilizando o Teorema 2.29, podemos inferir que $T \in \mathcal{W}_{(s,p,r;p)}^A(U; X)$ se, e somente se existem uma constante positiva $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade μ nos borelianos de B_{U^*} , com a topologia fraca estrela, tais que

$$\|\psi_{\mathbf{x}^*}(T(u))\|_s \leq C \left(\int_{B_{U^*}} |u^*(u)|^p d\mu(u^*) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para cada $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(X^*)}$ e para todo $u \in U$. Além disso, $w_{(s,q,r;s)}^A(T) = \inf\{C; C \text{ satisfaz (2.32)}\}$. $\square$

Mostraremos agora que a classe dos operadores fracamente anisotrópicos somantes se enquadram na estrutura de ideais de operadores. Além disso, provaremos também que tal classe possui a propriedade de injetividade de ideais. Para isso, necessitamos

enunciar o Teorema 3.6 presente em [7] no caso $n = 1$.

Teorema 2.31. *Seja H_1 e H_2 classes de seqüências linear estáveis satisfazendo $H_1(\mathbb{K}) \xrightarrow{1} H_2(\mathbb{K})$. Então $(\mathcal{L}_{H_1;H_2}; \|\cdot\|_{H_1;H_2})$ é um ideal de Banach de operadores, onde $\mathcal{L}_{H_1;H_2}$ denota o conjunto de operadores lineares contínuos que levam seqüências de $H_2(U)$ com seqüências em $H_1(X)$, para quaisquer $X, U \in BAN$.*

Proposição 2.32. *Sejam U e X espaços de Banach. Então, $(\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X); w_{(s,q,r;p)}^A(\cdot))$ é um ideal Banach de operadores.*

Demonstração. Usando a desigualdade de Minkowski, é fácil ver que $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$ é um espaço vetorial. Note também que, pelo Teorema 2.16, $\ell_q = \ell_{(s,q,r)}^A(\mathbb{K})$. Com isso, pelo fato de $p \leq q$, podemos dizer que

$$\ell_p^w(\mathbb{K}) = \ell_p \xrightarrow{1} \ell_q = \ell_{(s,q,r)}^A(\mathbb{K})$$

Daí, sendo $\ell_{(s,q,r)}^A(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ classes de seqüências linearmente estáveis, segue do Teorema 2.31 que $(\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X); w_{(s,q,r;p)}^A(\cdot))$ é um ideal Banach de operadores. $\square$

Proposição 2.33. *O ideal $\mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A$ é injetivo.*

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{L}(U; X)$ e $i \in \mathcal{L}(X; Y)$ de modo que $\|i(x)\| = \|x\|$ para todos $x \in X$ e $i \circ T \in \mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; Y)$. Consideremos $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(U)$ e $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$. Com isso, para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{aligned} z_k^* : \text{Im}(i) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ i(x) &\longmapsto z_k^*(i(x)) = x_k^*(x). \end{aligned}$$

Como i é injetiva, z_k^* está bem definido. Note também que, pelo fato de x_k^* e i serem lineares contínuos, podemos dizer que $z_k^* \in (\text{Im}(i))^*$. Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $y_k^* \in Y^*$ de modo que $y_k^*|_{\text{Im}(i)} = z_k^*$ e $\|y_k^*\| = \|z_k^*\|$. Além disso,

$$\|y_k^*\| = \|z_k^*\| = \sup_{y \in B_{\text{Im}(i)}} |z_k^*(y)| = \sup_{\|i(x)\| \leq 1} |z_k^*(i(x))| = \sup_{x \in B_X} |x_k^*(x)| = \|x_k^*\|.$$

Como isso, obtemos $(y_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(Y^*)$, pois $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$. Sendo assim, como $i \circ T \in \mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; Y)$, segue que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(Tu_j)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |z_k^*(i(Tu_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |y_k^*(i(Tu_j))|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\leq w_{(s,q,r;p)}^A(i \circ T) \|(u_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} \|(y_k^*)_{k=1}^\infty\|_r.$$

Portanto, $T \in \mathcal{W}_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$. □

2.3.2 Operadores anisotrópicos somantes

A segunda classe de operadores que iremos abordar agora será composta pelos operadores anisotrópicos $(p; s, q, r)$ -somantes, os quais associarão as sequências anisotrópicas (s, q, r) -somáveis com as p -somáveis. Segue a definição de tal espaço.

Definição 2.6. Sejam $1 \leq q < s$, $q \leq p$ e $1 \leq r \leq s$ números reais e $T \in \mathcal{L}(U; X)$. Dizemos que T é um operador *anisotrópico* $(p; s, q, r)$ -somante se

$$(T(u_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(X) \text{ sempre que } (u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(U),$$

ou seja, o operador induzido $\hat{T}: \ell_{(s,q,r)}^A(U) \rightarrow \ell_p(X)$, dado por $\hat{T}((u_j)_{j=1}^\infty) = (T(u_j))_{j=1}^\infty$, está bem definido. Denotaremos por $\Pi_{(p;s,q,r)}^A(U; X)$ o espaço de todos os operadores anisotrópico $(p; s, q, r)$ -somantes de U em X .

Observação 2.6. Note que

- 1) Como $\ell_p(X)$ é um espaço vetorial, é possível mostrar que $\Pi_{(p;s,q,r)}^A(U; X)$ também é.
- 2) Se $s \leq q$, então, pelo Corolário 2.5, $\ell_q^w(X) = \ell_{(s,q,r)}^A(X)$. Logo, por definição, $\Pi_{(p;s,q,r)}^A(U; X) = \Pi_{p,q}(U; X)$
- 3) Se $s < r$, então, pela Proposição 2.3, $\ell_{(s,q,r)}^A(X) = \{\mathbf{0}\}$, onde $\mathbf{0}$ está representando a sequência nula. Neste caso, uma vez que todo operador anisotrópico somante é linear, teríamos $\Pi_{(p;s,q,r)}^A(U; X) = \{0\}$, onde 0 representa, neste caso, o operador nulo.

Proposição 2.34. Sejam $1 \leq q < s$ e $1 \leq r \leq s$. Se $p < q$, então o único operador anisotrópico $(p; s, q, r)$ -somante é o operador nulo.

Demonstração. Com efeito, vamos supor que exista um operador não nulo $T \in \Pi_{(s,q,r;p)}^A(U; X)$, isto é, existe $x \in B_U$ de modo que $T(x) \neq 0$. Por outro lado, como $p < q$, pelo que comentamos na Observação 1.2 item (II), existe $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q \setminus \ell_p$. Desta forma, dada $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(X^*)$ e sabendo que $r \leq s$, segue que

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(\lambda_j x)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |\lambda_j|^s |x_k^*(x)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^q \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x)|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*(x)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_q \cdot \|(x_k^*(x))_{k=1}^{\infty}\|_s \\
&\leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_q \cdot \|(x_k^*)_{k=1}^{\infty}\|_r \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Sendo assim, $(\lambda_j x) \in \ell_{(s,q,r)}^A(U)$. Como T é operador anisotrópico $(p; s, q, r)$ -somante, segue que $(T(\lambda_j x)) \in \ell_p(X)$. Porém, como $T(x) \neq 0$, é possível observar que

$$\begin{aligned}
(T(\lambda_j x)) \in \ell_p(X) &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |T(\lambda_j x)|^p < \infty \\
&\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \cdot |T(x)|^p < \infty \\
&\Leftrightarrow |T(x)|^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty \\
&\Leftrightarrow (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p.
\end{aligned}$$

Todavia, isso é uma contradição com o fato de $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p$. Portanto, T é o operador nulo.

□

Se observarmos com atenção, nas hipóteses da Observação 2.6 ou da Proposição 2.34, $\Pi_{(p;s,q,r)}^A(U; X)$ resulta em espaços já conhecidos. Por esse motivo, na Definição 2.6 são impostos condições sobre os índices s, q, r e p .

Analogamente aos operadores fracamente anisotrópico $(s, q, r; p)$ -somantes, o próximo teorema apresenta caracterizações para os operadores anisotrópicos. Através dessas caracterizações, poderemos fornecer uma norma para o espaço $\Pi_{(p;s,q,r)}^A(U; X)$ que o tornará um ideal de Banach.

Proposição 2.35. *Sejam X, U espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(U; X)$. Então, as seguintes sentenças são equivalentes:*

- (i) *O operador T é anisotrópico $(p; s, q, r)$ -somante;*
- (ii) *Existe $D > 0$ de modo que*

$$\|(T(u_j))_{j=1}^{\infty}\|_p \leq D \cdot \|(u_j)_{j=1}^{\infty}\|_{A(s,q,r)} \quad (2.33)$$

sempre que $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(U)$.

(iii) Existe $D > 0$ de modo que

$$\|(T(u_j))_{j=1}^m\|_p \leq D \cdot \|(u_j)_{j=1}^m\|_{A(s,q,r)} \quad (2.34)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ e $u_1, \dots, u_m \in U$.

O ínfimo das constantes D de (2.35) e (2.35) será denotado por $\pi_{(p;s,q,r)}^A(T)$ e define uma norma para $\Pi_{(p;s,q,r)}^A(U; X)$.

Demonstração. Já sabemos que $\ell_{(s,q,r)}^A(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ são classes de sequências finitamente determinadas. Desta forma, pela Proposição 2.22, segue que (i), (ii) e (iii) são equivalentes e $\pi_{(p;s,q,r)}^A(\cdot)$ define uma norma sobre $\Pi_{(p;s,q,r)}^A(U; X)$. $\square$

Observação 2.7. Algumas considerações imediatas:

- i) Em [30, Definition 2.2], Matos definiu os operadores $(p; m(s; q))$ -somantes, que associam sequências mistas $(s; q)$ -somáveis com sequências p -somáveis, isto é, $T \in \mathcal{L}(U; X)$ é $(p; m(s; q))$ -somante se, e somente se,

$$(T(u_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(X) \text{ sempre que } (T(u_j))_{j=1}^\infty \in \ell_{(s;q)}^m(U).$$

Através do Teorema 2.18 podemos dizer que a classe dos operadores anisotrópicos $(p; s, q, s)$ -somantes generaliza a classe de operadores $(p; m(s; q))$ -somantes, basta tomar $r = s$.

- ii) Considerando p e q nas condições da Definição 2.6 e sabendo, pela Proposição 2.9, que $\ell_{(s,q,r)}^A(X) \subset \ell_q^w(X)$, podemos dizer que $\Pi_{p,q}(U; X) \subseteq \Pi_{(p,s,q,r)}^A(U; X)$.

O resultado subsequente irá garantir que certas relações de coincidência envolvendo as classes de sequência $\ell_{(s,q,r)}^A(\cdot)$ e $\ell_q^w(\cdot)$ nos fornecem outro resultado de coincidência para a classe de operadores anisotrópicos.

Proposição 2.36. *Seja U um espaço de Banach. São equivalentes as seguintes sentenças:*

- (i) $\ell_{(s,q,r)}^A(U) = \ell_q^w(U)$;
- (ii) $\Pi_{(q;s,q,r)}^A(U; X) = \Pi_q(U; X)$ para todo X espaço de Banach;
- (iii) $\Pi_{(q;s,q,r)}^A(U; \ell_s) = \Pi_q(U; \ell_s)$;

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Seja X espaço de Banach e vamos supor que $\ell_{(s,q,r)}^A(U) = \ell_q^w(U)$. Assim,

$$\begin{aligned} T \in \Pi_{(q;s,q,r)}^A(U; X) &\Leftrightarrow (T(u_j))_{j=1}^\infty \in \ell_q(X) \text{ sempre que } (u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(U) \\ &\Leftrightarrow (T(u_j))_{j=1}^\infty \in \ell_q(X) \text{ sempre que } (u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(U) \\ &\Leftrightarrow T \in \Pi_q(U; X). \end{aligned}$$

Portanto, $\Pi_{(q;s,q,r)}^A(U; X) = \Pi_q(U; X)$ para todo X espaço de Banach.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Basta tomar $X = \ell_s$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Primeiramente note que se $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(U^*)$, então $\Psi_{\mathbf{x}^*} \in \Pi_{(q;s,q,r)}^A(U; \ell_s)$. Com efeito, dada $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(U)$, por definição temos

$$((x_k^*(u_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_s),$$

isto é,

$$(\Psi_{\mathbf{x}^*}(u_j))_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_s).$$

Desta forma, por hipótese, $\Psi_{\mathbf{x}^*} \in \Pi_q(U; \ell_s)$. Assim, pelo Teorema 2.13, $\ell_{(s,q,r)}^A(U) = \ell_q^w(U)$. $\square$

De modo análogo ao que fizemos para a classe dos operadores fracamente anisotrópicos $(s, p, r; p)$ -somantes, iremos utilizar a abordagem abstrata do Teorema 2.29 com o intuito de formular um teorema do tipo Dominação Pietsch para a classe dos operadores anisotrópicos. Vejamos tal resultado a seguir.

Teorema 2.37. *Sejam U e X espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(U; X)$. O operador T é anisotrópico $(p; s, p, r)$ -somante se, e somente se, existem uma constante positiva $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade μ nos borelianos de $B_{(\ell_{r^*}(U))^*}$, com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|T(u)\| \leq C \left(\int_{B_{(\ell_{r^*}(U))^*}} \left(\sum_{k=1}^\infty |\varphi_{x^*}(u \cdot e_k)|^s \right)^{\frac{p}{s}} d\nu(\varphi_{x^*}) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $u \in U$. O ínfimo sobre as constantes C é igual a $\pi_{(p;s,p,r)}^A(T)$.

Demonstração. Pela equação (2.33) da Proposição 2.35, podemos dizer que $T \in \mathcal{L}(U; X)$ é um operador anisotrópico $(p; s, p, r)$ -somante se, e somente se, existe uma constante

positiva $C > 0$ de modo que para qualquer $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)(U)}^A$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^\infty |T(u_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{(x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_r(U^*)}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(u_j)|^s \right)^{\frac{p}{s}} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.35)$$

Porém, a relação de dualidade entre $\ell_r(U^*)$ e $(\ell_{r^*}(U))^*$ estabelecida pelo isomorfismo isométrico que associa

$$\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(U^*) \mapsto \varphi_{\mathbf{x}^*} \in (\ell_{r^*}(U))^*,$$

onde $\varphi_{\mathbf{x}^*}((u_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty x_i^*(u_i)$, nos garante, mediante (2.35), que $T \in \mathcal{L}(U; X)$ é um operador anisotrópico $(p; s, p, r)$ -somante se, e somente se, existe uma constante positiva $C > 0$ de modo que, para qualquer $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)(U)}^A$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^\infty |T(u_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi_{\mathbf{x}^*} \in B_{(\ell_{r^*}(U))^*}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |\varphi_{\mathbf{x}^*}(u_j \cdot e_k)|^s \right)^{\frac{p}{s}} \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde, para todo $j \in \mathbb{N}$, $u_j \cdot e_j$ representa a sequência cuja j -ésima entrada é u_j e as demais são todas zero. Por outro lado, considere $\mathcal{H} = \mathcal{L}(U; X)$, $E = U$, $G = \{0\}$ e $K = (B_{\ell_{r^*}(U)})^*$, com K munido da topologia fraca estrela. Além disso, para cada $T \in \mathcal{L}(U; X)$, $u \in U$ e $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_r(U^*)$, defina

$$S(T, u, 0) = \|T(u)\| \text{ e } R(\varphi_{\mathbf{x}^*}, u, 0) = \left(\sum_{k=1}^\infty |\varphi_{\mathbf{x}^*}(u \cdot e_k)|^s \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Afirmção 2.2. Para cada $u \in U$, a aplicação $R_{u,0} : (B_{\ell_{r^*}(U)})^* \rightarrow (0, \infty)$ definida por $R_{u,0}(\varphi_{\mathbf{x}^*}) = R(\varphi_{\mathbf{x}^*}, u, 0)$ é contínua.

Com efeito, pela relação de dualidade podemos dizer que todo elemento de $(B_{\ell_{r^*}(U)})^*$ é da forma $\varphi_{\mathbf{x}^*}$, onde $\mathbf{x}^* \in B_{\ell_r(U^*)}$. Desta forma, vamos considerar $(\varphi_{\mathbf{x}_j^*})_{j=1}^\infty$ uma sequência em $(B_{\ell_{r^*}(U)})^*$ que converge fraco estrela para $\varphi_{\mathbf{x}^*}$, com $\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_j^* \in B_{\ell_r(U^*)}$. Sendo assim, pela propriedade da topologia fraca estrela, podemos dizer que $(\varphi_{\mathbf{x}_j^*}(\mathbf{y}))_{j=1}^\infty$ converge para $(\varphi_{\mathbf{x}^*}(\mathbf{y}))$, para todo $\mathbf{y} \in B_{\ell_{r^*}(U)}$, com a topologia usual de norma, ou seja,

$$\varphi_{\mathbf{x}_j^*}(\mathbf{y}) \xrightarrow{j} \varphi_{\mathbf{x}^*}(\mathbf{y})$$

para qualquer $\mathbf{y} \in B_{\ell_{r^*}(U)}$. Em particular, para $\mathbf{y} = u \cdot e_k$, segue que

$$\varphi_{\mathbf{x}_j^*}(u \cdot e_k) \xrightarrow{j} \varphi_{\mathbf{x}^*}(u \cdot e_k).$$

Como a norma é uma função contínua, podemos dizer que para cada $u \in U$,

$$\begin{aligned}
\lim_{j \rightarrow \infty} R(\varphi_{\mathbf{x}_j^*}, u, 0) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|(\varphi_{\mathbf{x}_j^*}(u \cdot e_k))_{k=1}^\infty\|_s \\
&= \left\| \lim_{j \rightarrow \infty} (\varphi_{\mathbf{x}_j^*}(u \cdot e_k))_{k=1}^\infty \right\|_s \\
&= \|(\varphi_{\mathbf{x}^*}(u \cdot e_k))_{k=1}^\infty\|_s \\
&= R(\varphi_{\mathbf{x}^*}, u, 0),
\end{aligned}$$

isto é, a Afirmação 2.2 está provada. Por definição, podemos dizer que T é anisotrópica $(p; s, p, r)$ -somante se e somente se T é RS -abstrata p -somante. Logo, pelo Teorema 2.29 o resultado está provado. $\square$

Utilizando a monotonicidade das normas do L_p podemos estabelecer um resultado de inclusão para a classe dos operadores anisotrópicos, que será uma consequência imediata do teorema anterior.

Corolário 2.38. *Se $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, então $\Pi_{(p_1; s, p_1, r)}(U; X) \xhookrightarrow{1} \Pi_{(p_2; s, p_2, r)}(U; X)$.*

Para finalizar, mostraremos que a classe dos operadores anisotrópicos somantes se enquadra na estrutura de ideais de operadores e possuem a propriedade de injetiva de ideais.

Proposição 2.39. *Sejam U e X espaços de Banach. Então, $(\Pi_{(p; s, q, r)}^A(U; X); \pi_{(p; s, q, r)}^A(\cdot))$ é um ideal Banach de operadores.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.16 podemos dizer que

$$\ell_{(s, q, r)}^A(\mathbb{K}) = \ell_q \xhookrightarrow{1} \ell_p(\mathbb{K}).$$

Como $\ell_{(s, q, r)}^A(\cdot)$ e $\ell_p(\cdot)$ são classes de sequências linearmente estáveis, pelo Teorema 2.31 podemos dizer que $(\Pi_{(s, q, r; p)}^A(U; X); \pi_{(s, q, r; p)}^A(\cdot))$ é um ideal Banach de operadores. $\square$

Proposição 2.40. *O ideal $\Pi_{(p; s, q, r)}^A$ é injetivo.*

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{L}(U; X)$ e $i \in \mathcal{L}(X; Y)$ de modo que $\|i(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$ e $i \circ T \in \Pi_{(p; s, q, r)}^A(U; Y)$. Pela Proposição 2.35 existe $D > 0$ de modo que

$$\|(i \circ T(u_j))_{j=1}^\infty\|_p \leq D \cdot \|(u_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s, q, r)},$$

sempre que $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s, q, r)}^A(U)$. Porém, como $\|i(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$, em particular podemos dizer que $\|i(T(u_j))\| = \|T(u_j)\|$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sendo assim,

$\|(i \circ T(u_j))_{j=1}^\infty\|_p = \|T(u_j)_{j=1}^\infty\|_p$. Logo, pela desigualdade anterior,

$$\|(i \circ T(u_j))_{j=1}^\infty\|_p \leq D \cdot \|(u_j)_{j=1}^\infty\|_{A(s,q,r)},$$

sempre que $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{(s,q,r)}^A(U)$, isto é, T é anisotrópico $(p; s, q, r)$ -somante. Portanto, o ideal $\Pi_{(p;s,q,r)}^A$ é injetivo. $\square$

Capítulo 3

Algumas propriedades dos operadores quase somantes

O principal objetivo deste capítulo é apresentar novas propriedades envolvendo os operadores quase somantes. Inspirados por (1.9), apresentaremos três resultados importantes na teoria linear de operadores absolutamente somantes com o intuito de ampliar o escopo dos mesmos, mais precisamente iremos garantir que tais teoremas serão válidos para a classe dos operadores quase somantes, o que antes era provado apenas para os operadores absolutamente somantes. Os resultados demonstrados neste capítulo foram retirados de [28].

3.1 Estendendo o Teorema de Bu-Kranz

Utilizando fortes ferramentas para sua demonstração, como o Teorema de Dominação de Pietsch e as desigualdades de Khinchin e Kahane, o principal resultado obtido por Bu e Kranz em [14] é formulado da seguinte forma:

Teorema 3.1. [14, Theorem 1] *Sejam X e Y espaços de Banach e u um operador linear contínuo de X em Y . Se u^* é p -somante para algum $p \geq 1$, então, para todo $q \geq 2$, temos*

$$(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(Y) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \text{Rad}(X).$$

O próximo teorema é o principal resultado desta seção. Com seu auxílio iremos garantir que o Teorema de Bu-Kranz também é válido para a classe dos operadores quase somantes. A prova deste resultado é muito simples e não requer a utilização do Teorema de Dominação de Pietsch e das desigualdades de Khinchin e Kahane.

Teorema 3.2. *Sejam X e Y espaços de Banach, com Y sobre o corpo dos reais, e u um operador linear contínuo de X em Y . Se u^* é quase p^* -somante para algum $p \geq 1$,*

então

$$(u(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle Y \rangle \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in \text{Rad}(X).$$

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dados $x_1, \dots, x_m \in X$, $y_1^*, \dots, y_m^* \in Y^*$ e tomando $\theta_j = \text{sign}[y_j^*(u(x_j))]$, com $j = 1, \dots, m$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |y_j^*(u(x_j))| &= \left| \sum_{j=1}^m \theta_j y_j^*(u(x_j)) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^m u^*(\theta_j y_j^*)(x_j) \right| \\ &= \left| \int_0^1 \sum_{j=1}^m r_j(t) u^*(\theta_j y_j^*) \left(\sum_{j=1}^m r_j(t) x_j \right) dt \right| \\ &\leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^m r_j(t) u^*(\theta_j y_j^*) \right|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\stackrel{(1.8)}{\leq} \pi_{al.s.p^*}(u^*) \cdot \|(\theta_j y_j^*)_{j=1}^m\|_{w,p^*} \cdot \|(x_j)_{j=1}^m\|_{\text{Rad}(X)} \\ &= \pi_{al.s.p^*}(u^*) \cdot \|(y_j^*)_{j=1}^m\|_{w,p^*} \cdot \|(x_j)_{j=1}^m\|_{\text{Rad}(X)}. \end{aligned}$$

Desta forma, podemos concluir que

$$\sum_{j=1}^m |y_j^*(u(x_j))| \leq \pi_{al.s.p^*}(u^*) \cdot \|(y_j^*)_{j=1}^m\|_{w,p^*} \cdot \|(x_j)_{j=1}^m\|_{\text{Rad}(X)}. \quad (3.1)$$

Agora vamos considerar $(x_j)_{j=1}^\infty \in \text{Rad}(X)$ e $(y_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(Y^*)$. Por [7, 40],

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|(y_j^*)_{j=1}^m\|_{w,p^*} = \|(y_j^*)_{j=1}^\infty\|_{w,p^*} \quad (3.2)$$

e

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^m\|_{\text{Rad}(X)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\text{Rad}(X)}. \quad (3.3)$$

Aplicando o supremo com relação a $m \in \mathbb{N}$ em (3.1), segue de (3.2) e (3.3) que

$$\sum_{j=1}^\infty |y_j^*(u(x_j))| \leq \pi_{al.s.p^*}(u^*) \cdot \|(y_j^*)_{j=1}^\infty\|_{w,p^*} \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\text{Rad}(X)} < \infty.$$

Logo, para cada $(x_j)_{j=1}^\infty \in \text{Rad}(X)$, $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle Y \rangle$. □

Corolário 3.3. *Sejam X e Y espaços de Banach e u um operador contínuo de X em Y . Se u^* é quase somante, então, para todo $q \geq 2$,*

$$(u(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_q\langle Y \rangle \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in \text{Rad}(X).$$

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ de modo que $u^* \in \Pi_{al.s}(Y^*, X^*)$. Tomando $p = 2$ no teorema anterior, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y_i^*(u(x_i))| < \infty$$

para cada $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Rad(X)$ e todo $(y_i^*)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2^w(Y^*)$. Por outro lado, $\ell_{q^*}^w(Y^*) \subseteq \ell_2^w(Y^*)$ com $q^* \leq 2$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y_i^*(u(x_i))| < \infty$$

para cada $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Rad(X)$ e todo $(y_i^*)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{q^*}^w(Y^*)$. Consequentemente, para todo $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Rad(X)$, $(u(x_i))_{i=1}^{\infty} \in \ell_q(Y)$. $\square$

Observe que, devido a (1.9), o Corolário 3.3 estende o enunciado do Teorema de Bu-Kranz. Vejamos agora outras consequências do Teorema 3.2.

Corolário 3.4. *Sejam X e Y espaços de Banach de modo que X tenha tipo p , com $1 \leq p \leq 2$, e u um operador linear contínuo de X em Y . Se u^* é quase p^* -somante, então u is Cohen fortemente p -somante.*

Demonstração. Seja u um operador linear contínuo de X em Y de modo que u^* é quase p^* -somante. Dada $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$, como X tem tipo p , pela Proposição 1.11, temos que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Rad(X)$. Pelo Teorema 3.2, $(u(x_i))_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$. Assim, u é Cohen fortemente p -somante. $\square$

Um problema interessante na teoria dos operadores somantes é investigar em que condições o adjunto de um operador é p -somante. Cohen garante em [17] que um operador linear $u : X \rightarrow Y$ é Cohen fortemente p -somante se, e somente se, $u^* : Y^* \rightarrow X^*$ é p^* -somante. Seguindo essa linha, o próximo resultado aborda este tipo de problema e fornece uma espécie de recíproca do Teorema de Bu-Kranz quando X tem tipo p , com $1 \leq p \leq 2$.

Teorema 3.5. *Consideremos X e Y espaços de Banach de modo que X tenha tipo p , com $1 < p \leq 2$, e u um operador linear contínuo de X em Y . Se $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad(X)$, então u^* é p^* -somante (ou u é Cohen fortemente p -somante).*

Demonstração. Devemos mostrar que se

$$(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(Y) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad(X),$$

então

$$(u^*(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}(X^*) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(Y^*).$$

Com efeito, consideremos $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(X)$ e $(y_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(Y^*)$. Como X tem tipo p , pela Proposição 1.11 temos $(x_j)_{j=1}^\infty \in \text{Rad}(X)$ e por hipótese $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle Y \rangle$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |y_j^*(u(x_j))| < \infty.$$

Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} |u^*(y_j^*)(x_j)| < \infty.$$

Pela arbitrariedade de $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(X)$, $(u^*(y_j^*))_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}(X^*)$. □

Vejamos uma interessante consequência deste resultado.

Corolário 3.6. [14, Theorem 4] Consideremos X e Y espaços de Banach de modo que X^* é tipo 2 e $u \in \mathcal{L}(X, Y)$. Então

$$(u(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_2\langle Y \rangle \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in \text{Rad}(X),$$

se, e somente se, u^* é 2-somante (ou u é Cohen fortemente 2-somante).

Demonstração. Como X^* , pela Proposição 1.13 podemos dizer que $\Pi_{al.s}(Y^*, X^*) = \Pi_2(Y^*, X^*)$. Então o resultado segue do Theorem 3.2 e Teorema 3.5. □

O Teorema 3.5 nos diz que a hipótese $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ satisfazendo

$$(u(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle Y \rangle \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in \text{Rad}(X) \quad (3.4)$$

é uma condição suficiente para que u^* seja p^* -somante, sempre que X tiver tipo p . Por outro lado, em geral, existem operadores com o adjunto p -somante que não são p -somantes. Sendo assim, podemos dizer que a hipótese (3.4) não é uma condição suficiente para que u seja p -somante para algum $p \geq 1$. Entretanto, iremos garantir que existem alguns espaços de Banach X e Y de modo que a hipótese (3.4) é condição suficiente para que u seja 1-somante. Para este propósito utilizamos o Teorema 4.8

Teorema 3.7. Consideremos X e Y espaços de Banach de modo que X tenha tipo 2 e Y seja um $\mathcal{L}_2$ -espaço, e u seja um operador linear contínuo de X em Y . Se

$$(u(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_2\langle Y \rangle \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in \text{Rad}(X),$$

então u é 1-somante.

Demonstração. Como X tem tipo 2, Corolário 3.6 assegura que u^* é 2-somante. Por (1.9), u^* é quase somante. Como Y é um $\mathcal{L}_2$ -espaço, segue do Teorema 4.8 que u é 1-somante. □

Do [17, Teorema 3.2.3(ii)] sabemos que se Y é um $\mathcal{L}_2$ -espaço, então $\mathcal{D}_2(X, Y) \subseteq \Pi_2(X, Y)$ para todo espaço de Banach X . O Corolário 3.6 e o Teorema 3.7 melhoram esta inclusão, eles garantem que $\mathcal{D}_2(X, Y) \subseteq \Pi_1(X, Y)$ sempre que X tem tipo 2 e Y é um espaço $\mathcal{L}_2$.

3.2 Estendendo o Teorema de Bu

Seja X um espaço de Hilbert. Em [18], Cohen mostrou a seguinte inclusão:

$$\Pi_2(X, Y) \subseteq \mathcal{D}_2(X, Y) \text{ para todo espaço de Banach } Y. \quad (3.5)$$

Em [13], Bu estendeu a inclusão anterior. Ele mostrou que (3.5) é válida sem restrições dos parâmetros $p, q \in (1, \infty)$ ao invés de $p = q = 2$. Tal resultado é enunciado da seguinte forma:

Teorema 3.8. [13, Main Theorem] *Sejam $1 < p, q < \infty$, X espaço de Hilbert e Y espaço de Banach. Então,*

$$\Pi_p(X, Y) \subseteq \mathcal{D}_q(X, Y).$$

O objetivo desta seção é apresentar uma extensão do Teorema de Bu (Teorema 3.8) para $\mathcal{L}_{p^*}$ -espaços, com $2 \leq p < \infty$, e operadores quase p -somante ao invés de espaços de Hilbert e operadores p -somantes.

Teorema 3.9. *Consideremos $2 \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, X e Y espaços de Banach de modo que X seja um $\mathcal{L}_{p^*}$ -espaço. Então*

$$\Pi_{al.s.p}(X, Y) \subseteq \mathcal{D}_q(X, Y).$$

Demonstração. Consideremos $u \in \Pi_{al.s.p}(X, Y)$, $x_1, \dots, x_m \in X$ e $y_1^*, \dots, y_m^* \in Y^*$. Como X é um $\mathcal{L}_{p^*}$ -espaço, existem um subespaço de dimensão finita F de X contendo $\text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$, $\lambda > 1$ e um isomorfismo $v : F \rightarrow \ell_{p^*}^n$ de modo que $\|v\|\|v^{-1}\| \leq \lambda$. Com isso, existem $v_j, k \in \mathbb{K}$ tais que

$$vx_j = \sum_{k=1}^n \nu_{j,k} e_k, \quad j = 1, \dots, m,$$

onde $(e_k)_{k=1}^n$ é a base canônica de $\ell_{p^*}^n = (\ell_p^n)^*$. Então, usando a monotonicidade das normas de ℓ_p e as desigualdades de Hölder e Khinchin, segue que

$$\sum_{j=1}^m |y_j^*(u(x_j))| = \sum_{j=1}^m |y_j^*(uv^{-1}v(x_j))|$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m \left| y_j^* \left(uv^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \nu_{j,k} e_k \right) \right) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |\nu_{j,k}|^{p^*} \right)^{1/p^*} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |y_j^*(uv^{-1}(e_k))|^p \right)^{1/p} \\
&\leq \sum_{j=1}^m \|vx_j\|_{p^*} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |y_j^*(uv^{-1}(e_k))|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{j=1}^m \|v\| \|x_j\| \cdot \frac{1}{A_{q^*}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n r_k(t) y_j^*(uv^{-1}(e_k)) \right|^{q^*} dt \right)^{1/q^*} \\
&\leq \|v\| \cdot \frac{1}{A_{q^*}} \cdot \left(\sum_{j=1}^m \|x_j\|^q \right)^{1/q} \cdot \left(\sum_{j=1}^m \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n r_k(t) y_j^*(uv^{-1}(e_k)) \right|^{q^*} dt \right)^{1/q^*} \\
&= \|v\| \cdot \frac{1}{A_{q^*}} \cdot \|(x_j)_{j=1}^m\|_q \cdot \left(\int_0^1 \sum_{j=1}^m \left| y_j^* \left(\sum_{k=1}^n r_k(t) uv^{-1}(e_k) \right) \right|^{q^*} dt \right)^{1/q^*}.
\end{aligned}$$

Mas por (1.5), temos

$$\|(y_j^*)_{j=1}^m\|_{w,q^*} := \sup_{y^{**} \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{j=1}^m |y^{**}(y_j^*)|^{q^*} \right)^{1/q^*} = \sup_{y \in B_Y} \left(\sum_{j=1}^m |y_j^*(y)|^{q^*} \right)^{1/q^*}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m |y_j^*(u(x_j))| &\leq \|v\| \cdot \frac{1}{A_{q^*}} \cdot \|(x_j)_{j=1}^m\|_q \cdot \left(\int_0^1 \left(\left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) uv^{-1}(e_k) \right\| \cdot \|(y_j^*)_{j=1}^m\|_{w,q^*} \right)^{q^*} dt \right)^{1/q^*} \\
&\leq \|v\| \cdot \frac{1}{A_{q^*}} \cdot \|(x_j)_{j=1}^m\|_q \cdot \|(y_j^*)_{j=1}^m\|_{q^*,w} \cdot \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) uv^{-1}(e_k) \right\|^{q^*} dt \right)^{1/q^*}.
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Kahane temos

$$\sum_{j=1}^m |y_j^*(u(x_j))| \leq \|v\| \cdot \frac{1}{A_{q^*}} \cdot \|(x_j)_{j=1}^m\|_q \cdot \|(y_j^*)_{j=1}^m\|_{w,q^*} \cdot K_{2,q^*} \cdot \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) uv^{-1}(e_k) \right\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Como u é quase p -somante, podemos inferir que uv^{-1} também é quase p -somante e como $\|(e_k)_{k=1}^n\|_{p,w} = 1$ em $\ell_{p^*,w}^n$, segue que

$$\sum_{i=1}^m |y_i^*(u(x_i))| \leq \|v\| \cdot \frac{1}{A_{q^*}} \cdot \|(x_i)_{i=1}^m\|_q \cdot \|(y_i^*)_{i=1}^m\|_{w,q^*} \cdot K_{2,q^*} \cdot \pi_{al.s.p}(u) \cdot \|v^{-1}\| \cdot \|(e_k)_{k=1}^n\|_{p,w}$$

$$\leq \lambda \cdot \frac{1}{A_{q^*}} \cdot K_{2,q^*} \cdot \pi_{al.s.p}(u) \cdot \|(x_i)_{i=1}^m\|_q \cdot \|(y_i^*)_{i=1}^m\|_{w,q^*}.$$

Logo, $u \in \mathcal{D}_q(X, Y)$. □

Como corolário, tomando $p = 2$, uma vez que (1.9) é válido e, pela Proposição 1.19, todo espaço de Hilbert é um $\mathcal{L}_2$ -espaço, temos uma melhoria do Teorema de Bu [13, Main Theorem]:

Corolário 3.10 (Extensão do Teorema de Bu). *Considere $1 < q \leq \infty$. Se X é um $\mathcal{L}_2$ -espaço e Y é um espaço de Banach, então*

$$\Pi_{al.s}(X, Y) \subseteq \mathcal{D}_q(X, Y).$$

Em [20, Corolário 9.12(b)] há uma caracterização com relação a subespaços fechados dos espaços L_r , com $1 \leq r < \infty$, que é dada da seguinte forma: um espaço de Banach Y é isomorfo a um subespaço fechado de algum L_r (isto é, isomorfo a algum subespaço de $L_r(\nu)$, para alguma medida ν) se, e somente se, para todo o espaço de Banach X ,

$$\mathcal{D}_{r^*}(X, Y) \subseteq \Pi_r(X, Y).$$

Mediante tal resultado, mostramos no próximo corolário um resultado de coincidência entre as classes dos operadores Cohen fortemente r^* -somantes, absolutamente r -somantes e quase somantes.

Corolário 3.11. *Sejam X um $\mathcal{L}_2$ -espaço e Y um espaço de Banach isomorfo a um subespaço fechado de algum L_r , com $1 \leq r < \infty$. Então*

$$\Pi_{al.s}(X, Y) = \mathcal{D}_{r^*}(X, Y) = \Pi_r(X, Y).$$

Demonstração. Seja X um $\mathcal{L}_2$ -espaço. Assim, considerando $p = 2$ e $q = r^*$ no Teorema 3.9, segue que

$$\Pi_{al.s}(X, Y) \subseteq \mathcal{D}_{r^*}(X, Y).$$

Uma vez que Y é um espaço de Banach isomorfo a um subespaço fechado de algum L_r , segue de [20, Corollary 9.12(b)] e (1.9) que $\mathcal{D}_{r^*}(X, Y) \subseteq \Pi_r(X, Y) \subseteq \Pi_{al.s}(X, Y)$. Logo,

$$\Pi_{al.s}(X, Y) = \mathcal{D}_{r^*}(X, Y) = \Pi_r(X, Y),$$

como queríamos mostrar. □

3.3 Estendendo o Teorema de Kwapien

Cohen questionou, em [18], se (3.5) caracteriza espaços isomorfos a um espaço de Hilbert. Em [26] Kwapien garantiu que esta questão tem uma resposta positiva. Tal resultado é enunciado da seguinte forma:

Teorema 3.12. [26] *As seguintes propriedades são equivalentes para qualquer espaço de Banach X .*

- (i) *O espaço X é isomorfo a um espaço de Hilbert;*
- (ii) $\Pi_2(X, Y) \subseteq \mathcal{D}_2(X, Y)$ *para todo espaço de Banach Y .*

Veja agora o teorema a seguir, que é o resultado principal desta seção e é uma melhoria do teorema anterior.

Teorema 3.13. *As seguintes propriedades são equivalentes para qualquer espaço de Banach X .*

- (i) *O espaço X é isomorfo a um espaço de Hilbert;*
- (ii) $\Pi_{al.s}(X, Y) \subseteq \mathcal{D}_q(X, Y)$ *para todos $q \in (1, \infty)$ e Y espaço de Banach;*
- (iii) $\Pi_{al.s}(X, Y) \subseteq \mathcal{D}_2(X, Y)$ *para todo espaço de Banach Y .*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Se X é isomorfo a um espaço de Hilbert, então é um $\mathcal{L}_2$ -espaço. Pelo Teorema 3.9 segue que $\Pi_{al.s}(X, Y) \subseteq \mathcal{D}_q(X, Y)$ para todo espaço de Banach Y e todo $1 < q \leq \infty$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Basta tomar $q = 2$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Para todo espaço de Banach Y , vamos supor que $u \in \Pi_2(X, Y)$. Por (1.9), $u \in \Pi_{al.s}(X, Y)$. Agora usando a hipótese, segue que $u \in \mathcal{D}_2(X, Y)$. Logo, o Teorema de 3.12 garante que X é isomorfo a um espaço de Hilbert. $\square$

Vejam agora uma consequência direta deste resultado no caso em que Y apresenta tipo 2.

Corolário 3.14. *Se X é isomorfo a um espaço de Hilbert e Y tem tipo 2, então*

$$\Pi_{al.s}(X, Y) = \mathcal{D}_2(X, Y).$$

Demonstração. Como X é isomorfo a um espaço de Hilbert, o Teorema 3.13 assegura que $\Pi_{al.s}(X, Y) \subseteq \mathcal{D}_2(X, Y)$. Por outro lado, como Y tem tipo 2, segue da Proposição 1.15 que $\mathcal{D}_2(X, Y) \subseteq \Pi_{al.s}(X, Y)$. Assim, a demonstração está completa. $\square$

Capítulo 4

Uma Versão Abstrata do Teorema de Kwapień

Em [25], Kwapień provou que um operador linear com domínio espaço de Banach e contradomínio espaço de Hilbert é absolutamente 1-somante sempre que seu adjunto for absolutamente q -somante para algum $q \in [1, \infty)$. Recentemente Chen e Zheng estenderam esse resultado para as operadores Lipschitz somantes, que é uma classe de aplicações não-lineares. Com isso, surgiu o questionamento se tal resultado também seria válido para outras classes de aplicações e em outros contextos. Desta forma, este capítulo tem como objetivo apresentar os frutos desta investigação garantindo que os Teoremas de Kwapień e Chen-Zheng são válidos em um ambiente não linear com hipóteses mais fracas. Mesmo quando restrito ao caso linear original, o principal resultado deste capítulo irá generalizar o clássico Teorema de Kwapień pois ele será válido quando o adjunto for um operador quase somante. Além disso, uma variante para espaços L_p , com $p \geq 2$, em vez de espaços de Hilbert, será fornecida. Os resultados aqui presentes foram retirados de [27].

4.1 Teorema de Kwapień

Nesta subseção iremos apresentar o clássico Teorema de Kwapień (ver [25]). Para entendermos sua motivação vamos considerar a aplicação inclusão $i : \ell_2 \rightarrow c_0$. É claro que i está bem definida, pois $\ell_2 \subseteq c_0$. Vejamos que a aplicação i não é 2-somante. Com efeito, considere a sequência $(x^n)_{n=1}^\infty$ com $x^n = (\delta_{in})_{i=1}^\infty$. Note que $(x^n)_{n=1}^\infty \notin \ell_2(c_0)$, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x^n\|_\infty^2 = 1 + 1 + \cdots = \infty.$$

Porém, dado $\varphi \in B_{(\ell_2)^*}$, pela Observação [1.3](#), podemos dizer que $\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2$. Além disso, ainda pela Observação [1.3](#) e utilizando de desigualdade de Hölder, podemos dizer que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x^n)|^2 \right)^{1/2} &= \left(\sum_{n=1}^\infty \left| \sum_{i=1}^\infty \varphi_i x_i^n \right|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i|^2 \sum_{i=1}^\infty |x_i^n|^2 \right) \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i|^2 \right)^{1/2} = \|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $(x^n)_{n=1}^\infty \in \ell_2^w(\ell_2)$. Pela contrapositiva da Proposição [1.7](#), i não pode ser 2-somante. Por outro lado, sabemos que o adjunto de i é uma aplicação contínua e, pela relação de dualidade presente na Observação [1.3](#), é dada por $i^* : \ell_1 \rightarrow \ell_2$. Assim, pelo clássico Teorema de Grothendieck ([\[11\]](#), Teorema 10.2.6]) e o Teorema [1.8](#), i^* é 2-somante. Desta forma, podemos concluir também que i^{**} não é 2-somante. Sendo assim, concluimos que, em geral, o adjunto de um operador p -somante pode não ser p -somante e vice-versa. De modo natural, surge o seguinte problema:

Problema 4.1. Para quais espaços de Banach X e Y e $1 \leq p, q < \infty$ a seguinte inclusão é verificada:

$$\Pi_q^{dual}(X, Y) \subseteq \Pi_p(X, Y).$$

Kwapień apresentou em [\[25\]](#) um importante resultado que fornece uma resposta parcial para o Problema [4.1](#). Foi mostrado que um operador linear T de um espaço de Banach X em um espaço de Hilbert H é absolutamente 1-somante sempre que T^* é absolutamente q -somante, para algum $q \in [1, \infty)$. Em outras palavras:

Teorema 4.2. [\[20\]](#), Theorem 2.21] Se X é um espaço de Banach e H é um espaço de Hilbert, então

$$\bigcup_{1 \leq q < \infty} \Pi_q^{dual}(X, H) \subseteq \Pi_1(X, H).$$

Em 2011, Chen e Zheng forneceram uma extensão do Teorema de Kwapień para a classe dos operadores Lipschitz p -somantes. Tal variante do Teorema de Kwapień é enunciada da seguinte forma:

Teorema 4.3. [\[16\]](#), Theorem 3.1] Sejam X um espaço métrico pontuado e H um espaço de Hilbert. Se $T \in Lip_0(X; H)$ com $T^\#|_{H^*}$ um operador absolutamente q -somante para algum $q \in [1, \infty)$, então T é Lipschitz 1-somante.

Como os operadores Lipschitz p -somantes está associada a uma classe não linear, é natural o surgimento dos seguintes problemas:

Problema 4.4. *Existem outras extensões/generalizações não lineares do Teorema de Kwapien?*

Problema 4.5. *Existem variantes do Teorema de Kwapien em que a imagem não é necessariamente um espaço de Hilbert?*

Tais problemas foram respondidos de forma positiva em [27]. Vejamos tais resultados nas próximas subseções.

4.2 Teorema de Kwapien Abstrato

A prova do resultado principal desta subseção foi baseado no ambiente abstrato apresentado em [33, 36], isto é, o mesmo ambiente abordado no Teorema 2.29 apresentado na Seção 2.3. Porém, neste caso, sendo X e Y conjuntos não vazios, iremos considerar $Y_1 = X$, $Y_2 = Y$, $E = G = X$. Sendo assim, as aplicações R e S são da forma

$$R: K \times X \times X \longrightarrow [0, \infty) \text{ e } S: \mathcal{H}(X; Y) \times X \times X \longrightarrow [0, \infty),$$

com K um espaço de Hausdorff compacto.

No caso em que X é um espaço métrico pontuado e Y é um espaço de Banach, podemos escolher um espaço Banach adequado $X^d \subseteq \mathbb{K}^X$, onde $\mathbb{K}^X$ representa o conjunto de todas as funções com domínio X e contradomínio $\mathbb{K}$, contendo $X^\#$ de modo que

$$f^a: Y^\# \longrightarrow X^d, f^a(h) := h \circ f,$$

está bem definido para todo $f \in \mathcal{H}(X; Y)$. Sem muitos problemas é possível notar que f^a é sempre uma aplicação linear. Em geral, para nossas aplicações, bastará considerar $X^d = X^\#$. Observe também que quando f é um operador linear entre espaços de Banach temos $f^a(y^*) = f^*(y^*)$ para todo $y^* \in Y^*$. Por esse motivo, denominamos f^a como *adjunto abstrato* de f . Para garantir o resultado desejado, vamos precisar impor as seguintes propriedades para R e S :

- (I) $S(f, x, q) \leq \|f(x) - f(q)\|$ para todos $f \in \mathcal{H}(X; Y)$ e $x, q \in X$.
- (II) $K \subseteq X^d$, $B_{f^a(Y^*)} \subseteq K$ e

$$|g(x) - g(q)| \leq R(g, x, q) \text{ para quaisquer } g \in B_{f^a(Y^*)} \text{ e } x, q \in X.$$

Nosso principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 4.6. *Sejam X um espaço métrico pontuado, Y um $\mathcal{L}_p$ -espaço, com $2 \leq p < \infty$, e $f \in \mathcal{H}(X; Y)$. Se R e S satisfazem (I) e (II), e $f^a|_{Y^*}$ é quase p -somante, então f é RS -abstrata 1-somante.*

Demonstração. Como Y é um $\mathcal{L}_p$ -espaço, considere $\lambda > 1$ de modo que Y seja um $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ -espaço. Fixando $x_1, \dots, x_n, q_1, \dots, q_n \in X$, podemos tomar um subespaço de dimensão finita $Y_0 \subseteq Y$ que contém $\{f(x_1), \dots, f(x_n), f(q_1), \dots, f(q_n)\}$, para o qual existe um isomorfismo $v : Y_0 \longrightarrow \ell_p^m$ tal que $\|v\| \|v^{-1}\| \leq \lambda$. Logo, utilizando **(I)** temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n S(f, x_i, q_i) &\stackrel{(\mathbf{I})}{\leq} \sum_{i=1}^n \|f(x_i) - f(q_i)\| \\ &= \sum_{i=1}^n \|v^{-1}vf(x_i) - v^{-1}vf(q_i)\| \\ &\leq \|v^{-1}\| \cdot \sum_{i=1}^n \|vf(x_i) - vf(q_i)\|_p. \end{aligned}$$

Porém, como $vf(x_i) - vf(q_i) \in \ell_p^m$, existe $(y_j)_{j=1}^m \in \ell_p^m$ de modo que $vf(x_i) - vf(q_i) = (y_j)_{j=1}^m$. Por outro lado, denotando por $(e_k)_{k=1}^m$ a base canônica de $\ell_p^m = (\ell_p^m)^*$, pela relação de dualidade que mencionamos na Observação [1.3](#) podemos dizer que

$$e_k((vf(x_i) - vf(q_i))) = \sum_{j=1}^m y_j e_{kj} = y_k,$$

onde e_{kj} representa o j -ésimo termo da sequência e_k . Com isso, por definição segue que

$$\|vf(x_i) - vf(q_i)\|_p = \left(\sum_{k=1}^m |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^m |e_k((vf(x_i) - vf(q_i)))|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto, utilizando a igualdade anterior temos

$$\sum_{i=1}^n S(f, x_i, q_i) \leq \|v^{-1}\| \cdot \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m |e_k(vf(x_i) - vf(q_i))|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, devido à monotonicidade das normas p , segue que

$$\sum_{i=1}^n S(f, x_i, q_i) \leq \|v^{-1}\| \cdot \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m |e_k(vf(x_i) - vf(q_i))|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Daí, pela desigualdade de Khinchin, podemos dizer que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n S(f, x_i, q_i) &\leq \|v^{-1}\| \cdot \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m |e_k(vf(x_i) - vf(q_i))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \cdot \|v^{-1}\| \cdot \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m e_k(vf(x_i) - vf(q_i)) \cdot r_k(t) \right| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2} \cdot \|v^{-1}\| \cdot \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m e_k(vf(x_i)) \cdot r_k(t) - \sum_{k=1}^m e_k(vf(q_i)) \cdot r_k(t) \right| dt \\
&= \sqrt{2} \cdot \|v^{-1}\| \cdot \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m v^*(e_k)(f(x_i)) \cdot r_k(t) - \sum_{k=1}^m v^*(e_k)(f(q_i)) \cdot r_k(t) \right| dt.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach podemos estender $v^*(e_k)$ para Y^* , e assim

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n S(f, x_i, q_i) &\leq \sqrt{2} \cdot \|v^{-1}\| \cdot \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m f^a v^*(e_k)(x_i) \cdot r_k(t) - \sum_{k=1}^m f^a v^*(e_k)(q_i) \cdot r_k(t) \right| dt \\
&= \sqrt{2} \cdot \|v^{-1}\| \cdot \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \left(\sum_{k=1}^m r_k(t) f^a v^*(e_k) \right)(x_i) - \left(\sum_{k=1}^m r_k(t) f^a v^*(e_k) \right)(q_i) \right| dt.
\end{aligned}$$

Combinando a desigualdade anterior com **(II)** obtemos

$$\sum_{i=1}^n S(f, x_i, q_i) \leq \sqrt{2} \cdot \|v^{-1}\| \cdot \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) f^a v^*(e_k) \right\| dt \cdot \sup_{g \in K} \sum_{i=1}^n R(g, x_i, q_i)$$

e, usando a monotonicidade das normas L_p , temos

$$\sum_{i=1}^n S(f, x_i, q_i) \leq \sqrt{2} \cdot \|v^{-1}\| \cdot \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) f^a v^*(e_k) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sup_{g \in K} \sum_{i=1}^n R(g, x_i, q_i).$$

Como $f^a|_{Y^*}$ é quase p -somante, segue que $f^a|_{Y^*} v^*$ também é quase p -somante. Além disso, como $\|(e_k)_{k=1}^n\|_{p,w} = 1$ em $\ell_{p^*}^m$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n S(f, x_i, q_i) &\leq \sqrt{2} \cdot \|v^{-1}\| \cdot \pi_{al.s.p}(f^a|_{Y^*} v^*) \cdot \sup_{g \in K} \sum_{i=1}^n R(g, x_i, q_i) \\
&\leq \sqrt{2} \cdot \|v^{-1}\| \cdot \|v^*\| \cdot \pi_{al.s.p}(f^a|_{Y^*}) \cdot \sup_{g \in K} \sum_{i=1}^n R(g, x_i, q_i) \\
&= \sqrt{2} \cdot \|v^{-1}\| \cdot \|v\| \cdot \pi_{al.s.p}(f^a|_{Y^*}) \cdot \sup_{g \in K} \sum_{i=1}^n R(g, x_i, q_i) \\
&\leq \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot \pi_{al.s.p}(f^a|_{Y^*}) \cdot \sup_{g \in K} \sum_{i=1}^n R(g, x_i, q_i).
\end{aligned}$$

Logo, f é RS -abstrata 1-somante. □

Como corolário, uma vez que todo espaço de Hilbert é um $\mathcal{L}_2$ -espaço (pela Proposição [1.19](#)), podemos estabelecer uma generalização abstrata do Teorema de Kwapien da seguinte forma:

Corolário 4.7 (Teorema Abstrato Tipo Kwapien). *Sejam X um espaço métrico pontuado, H um espaço de Hilbert e $f \in \mathcal{H}(X, H)$. Se R e S satisfazem (I) e (II), e $f^a|_{H^*}$ é absolutamente q -somante para algum $1 \leq q < \infty$, então T é RS -abstrato 1-somante.*

4.3 Aplicações do Teorema de Kwapien Abstrato

Iremos agora garantir primeiramente que o Teorema 4.6 recupera e generaliza o clássico Teorema de Kwapien e o Teorema 4.3. Posteriormente, utilizando o Teorema 4.6, para apresentar um novo teorema do tipo Kwapien para uma classe de operadores que não gozava de tal propriedade. Em [27] é possível encontrar outros teoremas do tipo Kwapien para outras classes de operadores.

4.3.1 Operadores lineares absolutamente somantes

Sejam X e Y espaços de Banach e $T: X \rightarrow Y$ um operador linear. Por [11, Proposição 6.3.2] e [11, Teorema 6.3.9], B_{X^*} é Hausdorff compacto, quando munido da topologia fraca estrela (para mais informações sobre essa topologia consulte [11, Seção 6.3]). Sendo assim, considere a topologia fraca estrela sobre B_{X^*} ,

$$(K, \mathcal{H}(X; Y)) = (B_{X^*}, \mathcal{L}(X; Y)),$$

$$\begin{cases} R: K \times X \times X \rightarrow [0, \infty) \\ R(\varphi, x, q) = |\varphi(x - q)|, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} S: \mathcal{L}(X; Y) \times X \times X \rightarrow [0, \infty) \\ S(T, x, q) = \|T(x - q)\|. \end{cases}$$

Desta forma, por definição, podemos dizer que T é RS -abstrato p -somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ de modo que

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i - q_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i - q_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todos $x_1, \dots, x_n, q_1, \dots, q_n \in X$ e todo inteiro positivo n . Sendo assim, por (1.7) T é absolutamente p -somante se, e somente se, T RS -abstrato p -somante. Tomando $X^d = X^\#$, segue que $T^a|_{Y^*} = T^*$. Assim, as hipóteses (I) e (II) são satisfeitas, pois φ e T são lineares. Desta forma, o Teorema 4.6 proporciona o seguinte resultado:

Teorema 4.8. *Sejam X um espaço de Banach, Y um $\mathcal{L}_p$ -espaço, com $2 \leq p < \infty$, e $f \in \mathcal{L}(X; Y)$. Se T^* é quase p -somante, então T é absolutamente 1-somante.*

Como todo espaço de Hilbert é um $\mathcal{L}_2$ -espaço (Proposição 1.19) e todo operador absolutamente p -somante é quase somante (equação 1.9), podemos dizer que o Teorema anterior generaliza o clássico Teorema de Kwapien (Teorema 4.2).

4.3.2 Operadores Lipschitz p -somantes

Quando X for um espaço métrico com ponto base denotado por 0 e Y for um $\mathcal{L}_p$ -espaço, com $2 \leq p < \infty$, podemos dizer por (1.10) que um operador $T : X \rightarrow Y$ é Lipschitz p -somante se existe uma constante $C > 0$ de modo que

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i) - T(q_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i) - \varphi(q_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo inteiro positivo n e quaisquer $x_1, \dots, x_n, q_1, \dots, q_n \in X$. Munindo $B_{X^\#}$ com a topologia de convergência pontual teremos um espaço de Hausdorff compacto (para mais informações sobre essa topologia consulte [31, Chapter 7] e [41, Chapter 2]). Desta forma, consideremos $B_{X^\#}$ com a topologia de convergência pontual,

$$(K, \mathcal{H}(X; Y)) = (B_{X^\#}, Lip_0(X, Y)),$$

$$\begin{cases} R: K \times X \times X \longrightarrow [0, \infty) \\ R(\varphi, x, q) = |\varphi(x) - \varphi(q)| \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} S: Lip_0(X, Y) \times X \times X \longrightarrow [0, \infty) \\ S(T, x, q) = \|T(x) - T(q)\|. \end{cases}$$

Desta forma, T é Lipschitz p -somante se, e somente se, T é RS -abstrata p -somante. Tomando $X^d = X^\#$, segue que $T^a|_{Y^*} = T^\#|_{Y^*}$. Como as condições (I) e (II) são satisfeitas, podemos recorrer ao Teorema 4.6 para garantir a seguinte extensão do Teorema de Chen-Zheng:

Teorema 4.9. *Sejam X um espaço métrico pontuado e Y um $\mathcal{L}_p$ -espaço, com $2 \leq p < \infty$. Se $T \in Lip_0(X; Y)$ é tal que $T^\#|_{Y^*}$ é quase p -somante, então T é Lipschitz 1-somante.*

4.3.3 Operadores Lipschitz p -somantes em um ponto

A próxima definição está presente em [34] e nas referências nele contidas.

Definição 4.1. *Sejam X um espaço vetorial normado e Y um espaço de Banach. Um operador Lipschitz $T : X \longrightarrow Y$ é Lipschitz p -somante em um ponto $w \in X$ se existe*

uma constante $C > 0$ de modo que

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(w + x_i) - T(w + q_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i) - \varphi(q_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo inteiro positivo n e quaisquer $x_1, \dots, x_n, q_1, \dots, q_n \in X$.

Note que Lipschitz p -somante em 0 é precisamente a noção de Lipschitz p -somante. Dado $T \in Lip(X, Y)$, definimos $T_w : X \rightarrow Y$ por $T_w(x) = T(w + x) - T(w)$. É simples verificar que $T \in Lip(X, Y)$ se, e somente se, $T_w \in Lip(X, Y)$ e $Lip(T) = Lip(T_w)$. Observe também que

T é Lipschitz p -somante no ponto w se, e somente se, T_w é Lipschitz p -somante

e

T é Lipschitz p -somante se, e somente se, T_0 é Lipschitz p -somante.

Agora defina $w - Lip(X, Y) := \{T_w : T \in Lip(X, Y)\}$ e considere $B_{X^\#}$ munido com a topologia de convergência pontuada, que já vimos que resulta em um espaço de Hausdorff compacto. Com isso, tomando

$$(K, \mathcal{H}(X; Y)) = (B_{X^\#}, w - Lip(X, Y)),$$

$$\begin{cases} R: B_{X^\#} \times X \times X \rightarrow [0, \infty) \\ R(\varphi, x, q) = |\varphi(x) - \varphi(q)|, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} S: w - Lip(X, Y) \times X \times X \rightarrow [0, \infty) \\ S(T_w, x, q) = \|T_w(x) - T_w(q)\|, \end{cases}$$

podemos concluir que $T_w \in w - Lip(X, Y)$ é RS -abstrata p -somante se, e somente se, T_w é Lipschitz p -somante (ou equivalentemente, T é Lipschitz p -somante em w). Tomando $X^d = X^\#$, segue que $T_w^a|_{Y^*} = T_w^\#|_{Y^*}$. Como **(I)** e **(II)** são satisfeitos, o Teorema 4.6 fornece um teorema do tipo Kwapień para os operadores Lipschitz p -somante em um ponto que será enunciado da seguinte forma:

Teorema 4.10. *Sejam X um espaço vetorial normado, $w \in X$, Y um $\mathcal{L}_p$ -espaço, com $2 \leq p < \infty$, e $T \in Lip(X; Y)$. Se $(T_w)^\#|_{Y^*}$ é quase p -somante, então T é Lipschitz 1-somante em w .*

Referências Bibliográficas

- [1] D. Achour, A. Alouani e P. Rueda, *Tensor characterizations of summing polynomials*, Mediterr. J. Math., **15** (2018), 127–139.
- [2] J. C. Angulo-López e M. Fernández-Unzueta, *Lipschitz p -summing multilinear operators*, J. Funct. Anal., **279** (2020), Article no. 108572.
- [3] G. Araújo e D. Pellegrino, *Optimal estimates for summing multilinear operators*, Linear Multilinear Algebra, **65** (2017), 930–942.
- [4] G. Bennett, *Schur multipliers*, Duke Math. J., **44** (1977), 603–639.
- [5] G. Botelho, H. A. Braunss e H. Junek, *Almost p -summing polynomials and multilinear mappings*, Arch. Math, **76** (2001), 109–118.
- [6] G. Botelho e J. R. Campos, *Type and cotype of multilinear operators*, Rev. Mat. Complut., **29** (2016), 659–676.
- [7] G. Botelho e J. R. Campos, *On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators*, Monatsh. Math., **183** (2017), 415–435.
- [8] G. Botelho e J. R. Campos, *Duality theory for generalized summing linear operators*, Collect. Math., **74** (2023), 457–472.
- [9] G. Botelho, J. R. Campos e J. Santos, *Operator ideals related to absolutely summing and Cohen strongly summing operators*, Pacific. J. Math., **287** (2017), 1–17.
- [10] G. Botelho e D. Freitas, *Summing multilinear operators by blocks: the isotropic and anisotropic cases*, J. Math. Anal. Appl., **490** (2020), 124203.
- [11] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos da Análise Funcional*, 3^a Edição, Soc. Bras. Mat., 2023.
- [12] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *Pietsch’s factorization theorem for dominated polynomials*, J. Funct. Anal., **243** (2007), 257–269.

- [13] Q. Bu, *Some mapping properties of p -summing operators with hilbertian domain*, Contemp. Math., **328** (2003), 145–149.
- [14] Q. Bu e P. Kranz, *Some mapping properties of p -summing adjoint operators*, J. Math. Anal. Appl., **303** (2005), 585–590.
- [15] J. R. Campos, R. Macedo e J. Santos - *An anisotropic summability and mixed sequences*, Rev. Mat. Complut., (2023), Published Online.
- [16] D. Chen e B. Zheng, *Remarks on Lipschitz p -summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **139** (2011), 2891–2898.
- [17] J. S. Cohen, *Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates*, Math. Ann., **201** (1973), 177–200.
- [18] J. S. Cohen, *A characterization of inner-product spaces using absolutely 2-summing operators*, Studia Math., **38** (1970), 271–276.
- [19] A. Defant e K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland, 1993.
- [20] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.
- [21] J. Farmer e W.B. Johnson, *Lipschitz p -summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **137** (2009), 2989–2995.
- [22] M. Fernández-Unzueta, *The Segre cone of Banach spaces and multilinear mappings*, Linear Multilinear Algebra, **68** (2020), 575–593.
- [23] D. H. Fremlin, *Measure Theory: Topological Measure Spaces*, Vol. 4, Torres Fremlin, 2003.
- [24] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo, **8** (1953), 1-79.
- [25] S. Kwapien, *On a theorem of L. Schwartz and the applications to absolutely summing operators*, Stud. Math., **38** (1970), 193–201.
- [26] S. Kwapien, *A linear topological characterization of inner product spaces*, Stud. Math., **38** (1970), 277-278.
- [27] R. Macedo, D. Pellegrino e J. Santos, *Nonlinear variants of a theorem of Kwapien*, Israel Journal of Mathematics, **247** (2022), 217–231.

- [28] R. Macedo e J. Santos, *Some properties of almost summing operators*, J. Math. Anal. Appl., **504** (2021), 125431.
- [29] M. C. Matos, *Absolutely summing mappings, nuclear mappings and convolution equations*, Lecture notes, 2005.
- [30] M. C. Matos, *Mappings between Banach spaces that send mixed sequences into absolutely summable sequences*, J. Math. Anal. Applic., **297** (2004), 833–851.
- [31] J. Munkres, *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, 2000.
- [32] D. F. Nogueira, *Espaços de seqüências vetoriais e ideais de operadores*, Dissertação de mestrado, UFU, 2016.
- [33] D. Pellegrino e J. Santos, *A general Pietsch domination theorem*, J. Math. Anal. Appl., **375** (2011), 371–374.
- [34] D. Pellegrino e J. Santos, *On summability of nonlinear maps: a new approach*, Math. Z., **270** (2012), 189–196.
- [35] D. Pellegrino, J. Santos e J. B. Seoane-Sepúlveda, *A general extrapolation theorem for absolutely summing operators*, Bull. Lond. Math. Soc., **44** (2012), 1292–1302.
- [36] D. Pellegrino, J. Santos e J. B. Seoane-Sepúlveda, *Some techniques on nonlinear analysis and applications*, Adv. Math., **229** (2012), 1235–1265.
- [37] D. Pellegrino, J. Santos, D. Serrano-Rodríguez e E. Teixeira, *A regularity principle in sequence spaces and applications*, Bull. Sci. Math., **141** (2017), 802–837.
- [38] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.
- [39] J. Ribeiro e F. Santos, *Generalized multiple summing multilinear operators on Banach spaces*, Mediterr. J. Math. **16** (2019), 108.
- [40] N. Vakhania, V. Tarieladze e S. Chobanyan, *Probability distributions on Banach spaces*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
- [41] N. Weaver, *Lipschitz Algebras*, World Scientific, 2018.