



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

RAUL BERNARDO DE PONTES PIRES

**ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE PARA
HOMOGENEIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DE MATERIAIS
HETEROGÊNEOS BIFÁSICOS ATRAVÉS DA MICROMECAÂNICA DOS
CAMPOS MÉDIOS**

João Pessoa

Maior 2022

RAUL BERNARDO DE PONTES PIRES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca examinadora do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba como parte das exigências à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Cavalcanti Rodrigues

João Pessoa

Maio/ 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P667e Pires, Raul Bernardo de Pontes.

ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE PARA
HOMOGENEIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DE MATERIAIS
HETEROGÊNEOS BIFÁSICOS ATRAVÉS DA MICROMECAÂNICA DOS
CAMPOS MÉDIOS / Raul Bernardo de Pontes Pires. - João
Pessoa, 2022.

77 f.

Orientação: Marcelo Rodrigues.

TCC (Graduação) - UFPB/TECNOLOGIA.

1. Micromecânica dos campos médios. 2. Materiais
heterogêneos. 3. MATLAB. 4. Calc-Composite. I.
Rodrigues, Marcelo. II. Título.

UFPB/BSCT

CDU 620(0.43)

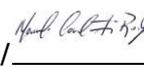
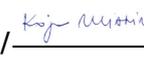


AVALIAÇÃO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO - TCC

NOME RAUL BERNARDO DE PONTES PIRES Matrícula 11511695

TÍTULO: ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE PARA HOMOGENEIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DE MATERIAIS HETEROGÊNEOS BIFÁSICOS ATRAVÉS DA MICROMECHANICA DOS CAMPOS MÉDIOS

AVALIAÇÃO

		NOTAS		
Prof <u>Marcelo Cavalcanti Rodrigues</u>	/ 	/ <u>10,0</u>	/ <u>10,0</u>	/ <u>10,0</u>
Nome	Rubrica	Monografia	Apresentação	Média
Prof. <u>Koje Daniel Vasconcelos Mishina</u>	/ 	/ <u>10,0</u>	/ <u>10,0</u>	/ <u>10,0</u>
Nome	Rubrica	Monografia	Apresentação	Média
Prof. <u>José Antônio França de Araujo</u>	/ 	/ <u>10,0</u>	/ <u>10,0</u>	/ <u>10,0</u>
Nome	Rubrica	Monografia	Apresentação	Média

Média Final: 10,0

Situação: (x) aprovado / () reprovado

RECOMENDAÇÕES:

A banca recomenda fazer as sugestões propostas.

João Pessoa, 02 de maio de 2022.

OBS: A implantação da nota no sistema seguirá o disposto na PORTARIA NORMATIVA N° 02/2018 / CCGEM

Dedico este trabalho aos meus pais José Bernardo Pires Filho e Severina Xavier de Pontes Pires e aos meus irmãos Matheus Bernardo de Pontes Pires e Arthur Bernardo de Pontes Pires.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, por ter me concedido saúde e determinação para vencer todos os obstáculos encontrados ao longo dessa trajetória.

Aos meus pais José Bernardo Pires Filho e Severina Xavier de Pontes Pires pelo amor incondicional e o suporte e incentivo oferecido durante toda minha vida, conduzindo da melhor maneira a construção da minha formação moral e educacional.

Aos meus irmãos Matheus Bernardo de Pontes Pires e Arthur Bernardo de Pontes Pires que me incentivaram nos momentos difíceis.

Ao meu avô e minhas avós José Bernardo [*in memoriam*], Raimunda Mesquita Pires [*in memoriam*] e Maria das Mercês [*in memoriam*] por terem contribuído de maneira direta na minha formação acadêmica e social.

Ao meu orientador, professor Dr. Marcelo Cavalcanti Rodrigues pelos ensinamentos que permitiram apresentar o melhor desempenho durante o curso e o desenvolvimento deste trabalho e outros de iniciação científica.

Ao meu amigo José Antônio França de Araújo por ter compartilhado comigo o conhecimento referente ao campo de estudo de materiais heterogêneos, contribuindo para construção desse trabalho.

Aos meus amigos de curso, com os quais pude compartilhar conhecimento durante as horas de estudo nas bibliotecas e espaços de vivência da UFPB.

A todos os professores que guiaram o meu aprendizado.

“Prefiram a minha instrução à prata, e o conhecimento ao ouro puro, pois a sabedoria é mais preciosa do que rubis; nada do que vocês possam desejar compara-se a ela”.

Provérbios 8:10-1

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo desenvolver um software para homogeneização de materiais heterogêneos através da micromecânica dos campos médio utilizando os métodos de homogeneização Dilute suspension, Auto-consistente, Mori-Tanaka e Esquema diferencial. Com base nisso, foi elaborado um algoritmo para a determinação das propriedades efetivas elásticas de um material bifásico através das principais técnicas para as seguintes geometrias de inclusão: esférica, fibras alinhadas e desalinhadas, podendo as duas últimas ter formato prolate ou oblate todas dispostas aleatoriamente no espaço. Este algoritmo foi transformado no software Calc-Composite, utilizando a linguagem MATLAB. Através da literatura e do DIGIMAT foi feita a validação do código. Os resultados obtidos com o Calc-Composite para os principais métodos de homogeneização foram comparados com resultados experimentais e com a técnica de elementos finitos, onde o Esquema diferencial apresentou os melhores resultados para frações volumétricas elevadas. Com o auxílio do Calc-Composite, foi feito um estudo da influência da geometria no módulo de Young de um material compósito, sendo notado que as fibras alinhadas apresentam maior rigidez quando comparadas a fibras desalinhdas e a inclusão esférica. Observou-se também que a rigidez de um material heterogêneo com inclusões em formato de esferoide, cresce à medida que a razão de aspecto se distancia de 1 pela esquerda ou direita, atingindo um valor limite, onde o aumento ou decréscimo da razão de aspecto não mais terá influência significativa na rigidez do material.

Palavras-chave: Micromecânica dos campos médios, Materiais heterogêneos, MATLAB, Calc-Composite.

ABSTRACT

Initially, a bibliographic study was carried out on the micromechanics of the mean fields for heterogeneous materials and on the Dilute suspension, Self-consistent, Mori-Tanaka and Differential Scheme homogenization methods. Based on this, an algorithm was developed to determine the effective elastic properties of a two-phase material through the main techniques for the following inclusion geometries: spherical, aligned and misaligned fibers, the last two being able to have a prolate or oblate shape, all arranged randomly in the space. This algorithm was transformed in the Calc-Composite software, using the MATLAB language. Through the literature and DIGIMAT, the code validation was carried out. The results obtained with Calc-Composite for the main homogenization methods were compared with experimental results and with the finite element technique, where the Differential Scheme presented the best results for high volumetric fractions. With the help of Calc-Composite, a study was carried out on the influence of geometry on the Young's modulus of a composite material, noting that aligned fibers present greater stiffness when compared to misaligned fibers and spherical inclusion. It was also observed that the stiffness of a heterogeneous material with spheroid-shaped inclusions increases as the aspect ratio moves away from 1 on the left or right, reaching a limit value, where the increase or decrease of the aspect ratio does not more will have a significant influence on the stiffness of the material.

Keywords: Midfield Micromechanics, Heterogeneous Materials, MATLAB, Calc-Composite.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1: Fases de um compósito	18
Figura 2.2: Classificação dos materiais compósitos.....	19
Figura 2.3: EVR e processo de homogeneização	20
Figura 2.4: Condições de contorno homogêneas em deformação aplicadas no EVR....	24
Figura 2.5: Condições de contorno homogêneas em tensão aplicadas no EVR.....	25
Figura 2.6: Resolução do problema de Eshelby.	32
Figura 2.7: a) Heterogeneidade elipsoidal, b) Material homogêneo com eigenstrain... 33	
Figura 2.8: Princípio da transformação de Eshelby.....	34
Figura 2.9: Método Auto Consistente	36
Figura 3.1: Algoritmo para o método de Mori-Tanaka	39
Figura 3.2: Visão geral da interface gráfico do software Calc-Composite	40
Figura 3.3: Área de entrada de dados do usuário	41
Figura 3.4: Área de exibição dos resultados os Calc-composite	42
Figura 4.1: Módulo de Young obtidos pelo método Dilute suspension para Inclusão esférica.....	44
Figura 4.2: Módulo de Young obtidos pelo método Auto-Consistente para inclusão esférica.....	45
Figura 4.3: Módulo de Cisalhamento obtidos pelo método Auto-Consistente para inclusão esférica.....	45
Figura 4.4: Módulo de Bulk obtidos pelo método Auto-Consistente para inclusão esférica	45
Figura 4.5: Módulo de Young obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão esférica	46
Figura 4.6: Módulo de cisalhamento obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão esférica.....	47
Figura 4.7: Módulo de Young obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão fibras desalinhas	48
Figura 4.8: Módulo de cisalhamento obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão fibras desalinhas	48
Figura 4.9: Módulo de Bulk obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão fibras desalinhas	48

Figura 4.10: Módulo de Young obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão fibras alinhadas	49
Figura 4.11: Módulo de Cisalhamento obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão fibras alinhadas	49
Figura 4.12: Módulo de Young obtido através do método esquema diferencial para material com poros esféricos	50
Figura 4.13: Módulo de cisalhamento obtido através do esquema diferencial	51
Figura 4.14: Módulo de Bulk obtido através do método esquema diferencial para um material de poros esféricos	52
Figura 4.15: Comparativo do módulo de Young efetivo obtido por MEF e pelos modelos micromecânicos	53
Figura 4.16: Comparação do módulo de Young: Experimental x Analítico	55
Figura 4.17: Representação dos tipos de esferoides: Esfera, prolata e oblate	56
Figura 4.18: Influência da geometria da inclusão para razões de aspecto maiores que 1	57
Figura 4.19: Influência da geometria da inclusão para razões de aspecto menores que 1	58
Figura 4.20: Influência da razão de aspecto	59
Figura B.1: Relações de propriedades elásticas de um material isotrópico.....	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Propriedades elásticas do nanocompósito de matriz de alumínio e inclusões esféricas de alumina.....	43
Tabela 2: Propriedades elásticas do nanocompósito SiC/Al	44
Tabela 3: Propriedades elásticas do nanocompósito alumina/epóxi	46
Tabela 4: Propriedades elásticas do nanocompósito grafite/epóxi.....	47
Tabela 5: Propriedades elásticas dos constituintes do compósito vidro/epóxi.....	51
Tabela 6: Propriedades elásticas da mistura areia-asfalto	53
Tabela 7: Propriedades elásticas do compósito: Experimental x modelos micromecânicos	54
Tabela 8: Propriedades elásticas do compósito Epóxi/Boro	56

LISTA DE SÍMBOLOS

$\langle \varepsilon_i \rangle$	Deformação média na inclusão
$\langle \varepsilon_m \rangle$	Deformação média na matriz
$\langle \bar{\varepsilon} \rangle$	Deformação média efetiva do material heterogêneo
$\langle \sigma_m \rangle$	Tensão média aplicada na matriz
$\langle \sigma_i \rangle$	Tensão média aplicada na inclusão
$\langle \bar{\sigma} \rangle$	Tensão média efetiva do material heterogêneo
ε^*	Eigenstrain
A_i	Tensor de concentração de deformação da inclusão
A_m	Tensor de concentração de deformação da matriz
B_i	Tensor de concentração de tensão da inclusão
B_m	Tensor de concentração de tensão da matriz
\bar{E}	Módulo de Young efetivo
\bar{G}	Módulo de cisalhamento efetivo
\bar{K}	Módulo de bulk efetivo
\bar{C}	Tensor de rigidez efetivo do material heterogêneo
C_i	Tensor de rigidez da inclusão
C_m	Tensor de rigidez da matriz
\bar{D}	Tensor de flexibilidade efetivo do material heterogêneo
D_i	Tensor de flexibilidade da inclusão
D_m	Tensor de flexibilidade da matriz
f_i	Fração volumétrica da inclusão
f_m	Fração volumétrica da matriz

s_{ijkl}	Tensor de Eshelby
V_m	Volume da matriz
V_i	Volume da inclusão
$\langle \rangle$	Valor médio
V	Volume representativo
ν_m	Coefficiente de Poisson da matriz
ν_i	Coefficiente de Poisson da inclusão

SUMÁRIO

1. Introdução.....	14
1.1 Objetivo geral	17
1.2 Objetivos específicos	17
2. Referencial teórico	18
2.1 Definição e classificação de materiais compósitos.....	18
2.2 Micromecânica dos campos médios	19
2.2.1 Elemento de volume representativo	19
2.2.2 Médias volumétricas.....	21
2.2.3 Condições de contorno homogênea em tensão e deformação	23
2.2.4 Relações constitutivas para materiais compósitos.....	26
2.2.5 Tensor de concentração de tensão e deformação.....	29
2.2.6 Problema da inclusão equivalente de Eshelby.....	31
2.3 Modelos de homogeneização dos campos médios.....	33
2.3.1 Dilute Suspension.....	33
2.3.2 Auto-Consistente	35
2.3.3 Mori-Tanaka	37
2.3.4 Esquema diferencial	37
2.4 Influência das direções das inclusões nas propriedades elásticas de materiais heterogêneos	38
3. Metodologia	39
3.1 Estrutura e funcionamento	40
4. Resultados	43
4.1 Validação do código	43
4.1.1 Dilute suspension.....	43
4.1.2 Auto-consistente	44

4.1.3	Mori-Tanaka (DIGIMAT)	46
4.1.4	Esquema diferencial	50
4.2	Análise comparativa dos modelos micromecânicos com o MEF	53
4.3	Comparação entre os métodos de homogeneização.....	54
4.4	Estudo da influência da geometria.....	55
5.	Conclusão	59
6.	Trabalhos futuros.....	61
7.	Referências	62

1. Introdução

Diversas conquistas tecnológicas atuais, relacionadas a aplicações nas áreas como aeronáutica, aeroespacial, petroquímica, naval, bioengenharia, automobilística, construção civil, entre outras, somente foi possível devido ao advento dos materiais compósitos. Embora estejam na maioria das vezes ligados as chamadas tecnologias de ponta, a classe de materiais compósitos tem sua origem a milhares de anos, uma vez que madeiras, ossos e tecidos musculares são exemplos clássicos dos chamados compósitos naturais. Há 3500 anos os egípcios fabricavam tijolos formados por palha e barro, caracterizando desta forma um exemplo de material compósito (NETO; PARDINI, 2016; YIN; ZHAO, 2016).

A possibilidade de combinar diferentes materiais para criarmos um compósito, permite obtermos propriedades especiais que não são apresentadas por seus constituintes quando analisados de maneira isolada ou quando comparados com outra classe de material como ligas metálicas, cerâmicas e material polimérico monolítico convencional (NETO; PARDINI, 2016; CALLISTER, 2016).

A partir da década de 1950, os materiais compósitos passaram a ter um desenvolvimento mais aprimorado e amplamente utilizado na indústria, de maneira que a determinação das propriedades mecânicas e físicas efetivas desta classe de material se tornou extremamente necessária, tendo em vista os benefícios tanto para a aplicação quanto para a fase de projeto do compósito (TIAN et al., 2020).

No desenvolvimento de compósitos avançados, a modelagem preditiva e as simulações possuem um papel importante, onde é necessário levar em consideração através de abordagens multiescala as características da microestrutura (CHEN et.al, 2018). Portanto, surge a necessidade de prever as propriedades de microestruturas heterogêneas em compósitos por meio de conceitos da micromecânica dos materiais heterogêneos utilizando métodos de homogeneização. A micromecânica tem como principal objetivo determinar as propriedades macroscópicas ou efetivas do material compósito através das propriedades das fases e da sua distribuição espacial no material (LIM et.al, 2020; ESCUDERO, 2004). A técnica de homogeneização consiste em substituir um meio heterogêneo complexo por um meio homogêneo, onde ambos

apresentam globalmente o mesmo comportamento. Sabendo as propriedades das fases de reforço e da matriz e suas respectivas frações volumétricas, é possível obter os valores das propriedades mecânicas globais do material (DUTRA, 2012; TAVARES, 2012).

Essa abordagem micromecânica permite a prever o comportamento de novos materiais sem a necessidade de realizar experimentos físicos. Sendo uma ferramenta importante para projetos de engenharia, fabricação e análise de uma enorme gama de materiais, a exemplo dos policristalinos, compósitos, biológicos e eletrônicos. Microestruturas otimizadas podem ser previstas ou invés de serem encontradas por meio de tentativa e erro (QU; CHERKAOUI, 2006).

Para a aplicação da micromecânica é necessário definir um elemento de volume representativo (EVR), que se trata de uma porção do material capaz de representar o seu comportamento microscópico, ou seja, o EVR deve capturar todos os microelementos que influenciam a resposta macroscópica do contínuo (DANTAS, 2013).

Um dos principais modelos da micromecânica está baseado na teoria dos campos médios. Neste modelo as propriedades mecânicas efetivas são relacionadas com o volume médio da tensão e deformação do EVR. Logo, os macro campos são caracterizados como o volume médio dos micros campos, sendo, portanto, as propriedades efetivas definidas como relações entre os micros campos médios. As técnicas de homogeneização da micromecânica dos campos médios, se baseia nos conceitos de tensores de concentração de tensão e deformação, introduzidos pela primeira vez por Hill (HORI, M. e NEMAT-NASSER, S. 1983 Apud AGUIAR, 2016; ABDIN, 2015).

O resultado encontrado por Eshelby é considerado como a provável solução analítica mais importante da micromecânica (GROSS e SEELIG, 2017 Apud MOREIRA, 2019). Com base no princípio da inclusão equivalente de Eshelby, onde é considerado uma inclusão elipsoidal inserida em um meio infinito, foram desenvolvidos os modelos de homogeneização dos campos médios mais comumente utilizados (HORI, M. e NEMAT-NASSER, S. 1993). Dentre as diversas formulações das técnicas de homogeneização dos campos médios, podemos destacar o Dilute Suspension desenvolvido por Eshelby (1957), a presente no trabalho de Hashin e Shtrickman (1963), onde foi deduzido os limites superior e inferior para propriedades elásticas efetivas de materiais heterogêneos por meio de uma abordagem variacional, a proposta por Mori e Tanaka (1973) e anos mais tarde reformulada por Benveniste (1987), o auto – consistente

apresentado por Hill (1965a) e Budiansky (1965) e o esquema diferencial desenvolvido por McLaughlin (1977).

Os métodos de homogeneização dos campos médios são os mais utilizados devido ao seu baixo custo computacional e sua ótima precisão. Estes métodos são a base de softwares comerciais consolidados no mercado, como MoldFlow, Digimat e Converse (JAIN, 2019).

1.1 Objetivo geral

O presente trabalho, tem como objetivo geral, realizar um estudo para determinação das propriedades efetivas elásticas de materiais heterogêneos através da micromecânica dos campos médios e desenvolver um software dotado de interface gráfica capaz de realizar a homogeneização de materiais bifásicos, facilitando desta forma o cálculo das propriedades efetivas elásticas.

1.2 Objetivos específicos

- I. Realizar estudo sobre a micromecânica dos campos médios aplicada a materiais heterogêneos no regime elástico.
- II. Estudo comparativo entre os seguintes modelos de homogeneização da micromecânica dos campos médios: Dilute Suspension, Auto-Consistente, Mori-Tanaka e Esquema diferencial.
- III. Estudo sobre a influência da geometria da inclusão.
- IV. Desenvolver software baseado na micromecânica dos campos médios para obtenção das propriedades efetivas elásticas de materiais heterogêneos.
- V. Realizar estudo comparativo dos resultados obtidos a partir do software desenvolvido com os encontrados na literatura e em outros softwares consolidados na área.

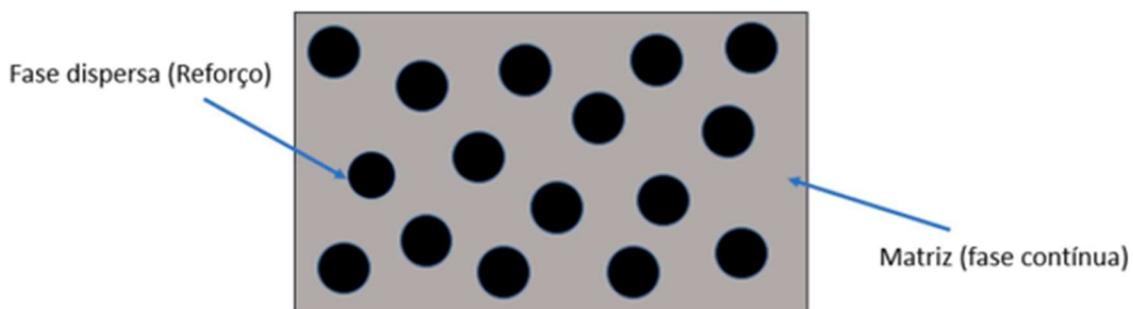
2. Referencial teórico

2.1 Definição e classificação de materiais compósitos

Os materiais compósitos são definidos como a combinação de dois ou mais micro ou macro constituintes não solúveis e diferentes na forma e na composição química. Os compósitos apresentam grande relevância na engenharia, pois com a junção de dois ou mais materiais diferentes, podemos gerar um material compósito com propriedades superiores às encontradas nos seus componentes quando analisados de maneira separada. (SMITH, 2012)

Os compósitos são formados por duas fases, que são: A matriz, também denominada de fase contínua, que tem por finalidade atribuir forma a estrutura, transferir e distribuir a tensão ao reforço, separar as partículas ou fibras e proteger o reforço contra danos ambientais, como: umidade, radiação UV e corrosão química. (VASILIEV e MOROZOV, 2001 Apud LOPES, 2017). A outra fase é o reforço, ou dispersa, podendo ser partículas, fibras descontínuas ou fibras contínuas. Ela é responsável por proporcionar força e rigidez, aumentar a resistência ao calor, corrosão e condutividade (VENTURA, 2009).

Figura 2.1: Fases de um compósito

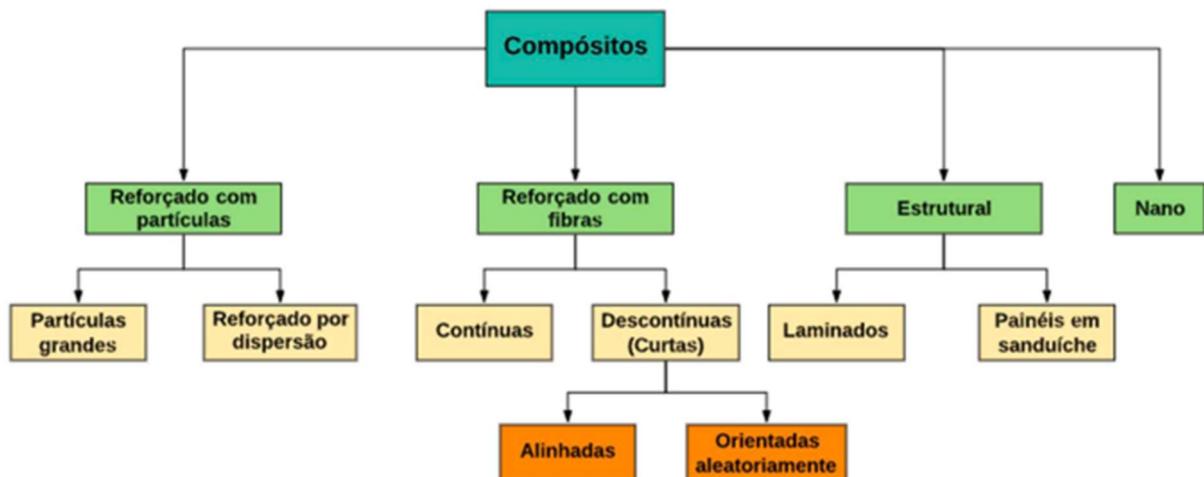


Fonte: Autor

De acordo com Callister (2016), a classe de materiais compósitos está classificada em 4 grupos, que são: Compósito reforçados com partículas, reforçados com fibras, compósitos estruturais e nano compósitos. A fase dispersa nos compósitos reforçados com partículas é equiaxial, ou seja, as dimensões das partículas são

praticamente iguais em todas as direções; nos reforçados com fibra, a inclusão está presente no formato de fibras, apresentando, portanto, elevada razão entre o comprimento e o diâmetro. Nos compósitos estruturais, temos o material sendo formado por diversas camadas, sendo projetados para apresentarem baixas massas específicas e altos graus de integridade estrutural. Os nano compósitos são caracterizados por apresentarem as partículas da fase dispersa com dimensões na escala de nanômetros. A figura 2.2, mostra a classificação dos materiais compósitos. Neste trabalho será estudado os compósitos reforçados com partículas e com fibras.

Figura 2.2: Classificação dos materiais compósitos



Fonte: Adaptado de Callister (2016)

2.2 Micromecânica dos campos médios

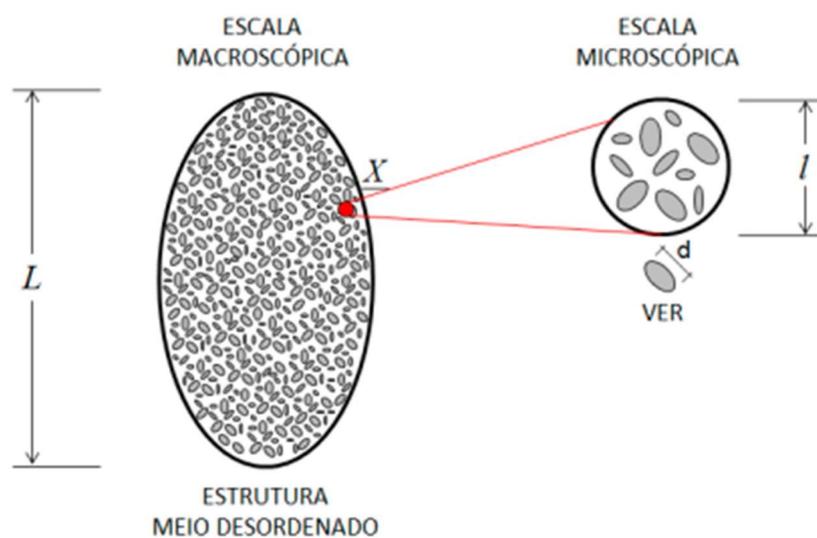
Nesta seção será apresentado alguns conceitos básicos para o entendimento sobre a teoria da micromecânica dos campos médios. A principal finalidade desta teoria é determinar as propriedades efetivas de um compósito através das propriedades, distribuição e fração volumétrica dos materiais que o constituem (VIEIRA, 2012).

2.2.1 Elemento de volume representativo

O elemento de volume representativo (EVR), é a menor porção de um material, cujo seu comportamento efetivo representa o do material de maneira global. É preciso

que o EVR possua um volume grande o suficiente para representar a essência da microestrutura estatisticamente. (ABOUDI; ARNOLD; BEDNARCYK; 2013). Isto é, o meio homogêneo equivalente deve ser tal que os campos de tensão e deformação obtidos da escala macroscópica por meio da resolução de um problema de contorno em uma estrutura homogênea formada por este material homogêneo fictício, sejam os valores médios calculados sobre o EVR, dos campos de deformação e tensão local (ZAOUI, 2002 Apud DUTRA, 2012).

Figura 2.3: EVR e processo de homogeneização



Fonte: LORENCI (2013).

É preciso que a dimensão característica d das heterogeneidades sejam muito menor do que a dimensão característica l do volume elementar. Desta maneira esse volume definido poderá ser representativo, independentemente da sua localização na estrutura macroscopicamente homogênea. Há a necessidade também de l ser suficientemente menor que a dimensão característica L da estrutura para que haja a possibilidade de aplicar as ferramentas de integração e derivação clássicas da análise estrutural. A menor dimensão característica d , que poderá ser assumida, deve atender a compatibilidade da utilização dos conceitos básicos da mecânica do contínuo, ou seja,

$d_0 \ll d \ll l \ll L$, onde d_0 é a menor dimensão a partir da qual os conceitos da mecânica do contínuo não são mais válidos (ZAOUI, 2002 Apud DUTRA, 2012).

2.2.2 Médias volumétricas

As macros tensões e macros deformações que caracterizam o estado mecânico de um ponto do material macroscópico são definidas como as médias volumétricas dos campos microscópicos (GROSS; SEELIG, 2018).

Quando aplicado macroscopicamente a um EVR, de volume V , uma tensão homogênea ou deformação homogênea, a tensão média e a deformação média podem ser definidas, conforme as equações 2.1 e 2.2, respectivamente (ABOUDI; ARNOLD; BEDNARCYK; 2013).

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_x dV, \quad (2.1)$$

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathcal{E}_x dV, \quad (2.2)$$

Ao estudarmos a micromecânica dos campos médios, definimos os constituintes que compõem o EVR, como fase (inclusões), e o material que envolve as fases de matriz. Sendo assim, um compósito, em seu elemento de volume representativo, é caracterizado por uma matriz e diversas fases (TAVARES, 2012).

Admitimos que o volume representativo é dado pela soma do volume da matriz com o somatório de todas as parcelas de inclusões, que podem ser vazios, materiais e fissuras, conforme é mostrado na equação (2.3) (CHRISTENSEN and LO 1979 Apud TAVARES, 2012).

$$V = V_m + \sum_{i=1}^n V_i, \quad (2.3)$$

Sendo V_m o volume da matriz, V_i o volume da i -ésima inclusão e V é o volume do elemento representativo do material heterogêneo. Com as informações do volume da matriz, da inclusão e do material heterogêneo, podemos definir as frações volumétricas da matriz (f_m) e inclusão (f_i), respectivamente, conforme as equações (2.4) e (2.5) (TAVARES; SILVA, 2012).

$$f_m = \frac{V_m}{V}, \quad (2.4)$$

$$f_i = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n V_i, \quad (2.5)$$

Os campos de tensão e deformação dentro de cada fase do material heterogêneo podem ser representados por suas médias volumétricas $\langle \sigma_m \rangle$ e $\langle \mathcal{E}_m \rangle$ para a matriz e $\langle \sigma_i \rangle$ e $\langle \mathcal{E}_i \rangle$ para a inclusão. Podemos calcular a média volumétrica de tensão e deformação da matriz e da inclusão conforme as equações (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9), onde V_m é o volume da matriz e V_i é o volume da inclusão (DANTAS, 2013).

$$\langle \sigma_m \rangle = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \sigma_m(x) dV, \quad (2.6)$$

$$\langle \mathcal{E}_m \rangle = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \mathcal{E}_m(x) dV, \quad (2.7)$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \sigma_i(x) dV, \quad (2.8)$$

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \mathcal{E}_i(x) dV, \quad (2.9)$$

Utilizando as equações (2.1), (2.2), (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9), podemos definir as seguintes equações para as tensões e deformações médias no compósito, em função dos tensores de tensão e deformação média de cada fase (BARBOSA, 2010; COSTA, 2017).

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \left[\frac{V_m}{V_m} \int_{V_m} \sigma_m(x) dV + \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V_i} \int_{V_i} \sigma_i(x) dV \right] \quad (2.10)$$

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{V} \left[\frac{V_m}{V_m} \int_{V_m} \mathcal{E}_m(x) dV + \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V_i} \int_{V_i} \mathcal{E}_i(x) dV \right] \quad (2.11)$$

Substituindo as equações (2.6) - (2.9) em (2.10) e (2.11), obtemos as seguintes expressões:

$$\langle \sigma \rangle = f_m \langle \sigma_m \rangle + \sum_{i=1}^n f_i \langle \sigma_i \rangle \quad (2.12)$$

$$\langle \mathcal{E} \rangle = f_m \langle \mathcal{E}_m \rangle + \sum_{i=1}^n f_i \langle \mathcal{E}_i \rangle \quad (2.13)$$

2.2.3 Condições de contorno homogênea em tensão e deformação

O desenvolvimento do procedimento de homogeneização, está relacionado a resolução de um problema auxiliar de contorno imposto sobre o EVR. Este problema também é denominado de problema de concentração e aborda a modelagem da mecânica das interações entre as fases do material heterogêneo e da determinação dos campos de tensão e deformação locais no interior do EVR, representados por $\sigma(x)$ e

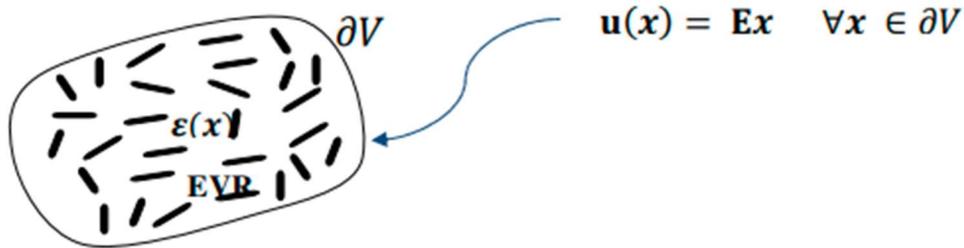
$\mathcal{E}(x)$, respectivamente, por meio do conhecimento das tensões e deformações macroscópicas, Σ e E , respectivamente (COSTA, 2017).

Duas condições de contorno geralmente são utilizadas para resolução desse problema, são elas: Condição de contorno homogênea em deformação e tensão (COSTA, 2017).

- **Condição de contorno homogênea em deformação:** Para esta condição associamos deslocamentos prescritos no contorno \mathbf{u} (figura 2.4), dados por:

$$\mathbf{u}(x) = E\mathbf{x} \quad (2.14)$$

Figura 2.4: Condições de contorno homogêneas em deformação aplicadas no EVR



Fonte: COSTA, 2017

Sendo E o vetor constante de deformação macroscópico e x é um vetor posição do contorno do EVR.

Considerando os deslocamentos no contorno, conforme (2.14) e aplicando o teorema da divergência na equação (2.2), teremos que a média volumétrica da deformação no EVR, será dada por (COSTA, 2017):

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{\partial v} \oint_{\partial v} \frac{\partial (E\mathbf{x})}{\partial x} \partial v \quad (2.15)$$

Sabendo que na equação (2.15) o tensor de deformação macroscópico E é constante, então para condições de contorno homogêneas em deformação, teremos:

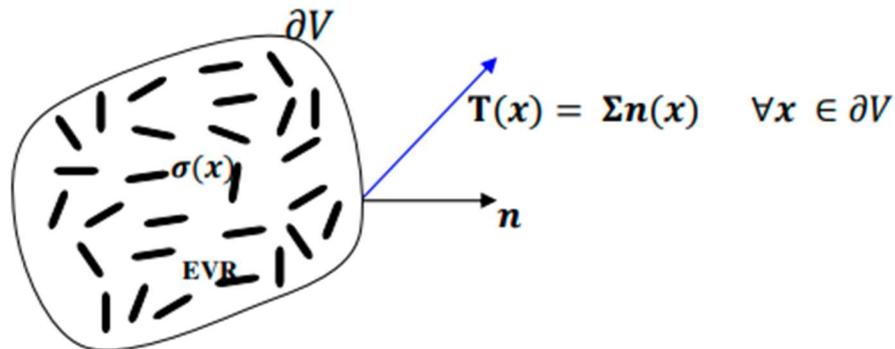
$$E = \langle \varepsilon \rangle \quad (2.16)$$

Logo, as deformações médias em um EVR são idênticas as deformações constantes aplicadas no contorno u (MOREIRA, 2019).

- **Condição de contorno homogênea em tensão:** Tensões superficiais são admitidas prescritas no contorno Γ (Figura 2.5), dadas por (COSTA, 2017):

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \Sigma \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

Figura 2.5: Condições de contorno homogêneas em tensão aplicadas no EVR



Fonte: COSTA (2017)

Sendo Σ o tensor de tensão macroscópica conhecida e constante, já $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ é o vetor normal ao contorno do EVR.

A média volumétrica da tensão aplicada no EVR, aplicando o teorema da divergência em (2.1) e considerando as tensões superficiais (2.17), é dada por (COSTA, 2017):

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{\partial v} \oint \Sigma n(x) \partial v \quad (2.18)$$

Sabendo que na equação (2.18) o tensor de deformação macroscópico Σ é constante, então para condições de contorno homogêneas em tensão, teremos

$$\langle \sigma \rangle = \Sigma \quad (2.19)$$

Logo, as condições de contorno homogênea de tensão aplicada em u geram um campo de tensão no EVR cuja média é igual a tensão constante aplicada em u (MOREIRA, 2019)

2.2.4 Relações constitutivas para materiais compósitos

Podemos obter relações constitutivas efetivas de materiais compósitos através da relação entre tensão e deformação média. A partir da lei de Hooke, teremos as seguintes relações constitutivas para tensão do compósito, matriz e inclusão, respectivamente (BARBOSA, 2010):

$$\langle \sigma \rangle = \bar{C} : \langle \varepsilon \rangle \quad (2.20)$$

$$\langle \sigma \rangle_m = C_m : \langle \varepsilon \rangle_m \quad (2.21)$$

$$\langle \sigma \rangle_i = C_i : \langle \varepsilon \rangle_i \quad (2.22)$$

Onde \bar{C} é o tensor de rigidez de quarta ordem efetiva do material e C_m e C_i representam o tensor de rigidez da matriz e inclusão respectivamente. O anexo A apresenta a matriz de rigidez para um material isotrópico (CHEN et al, 1982).

De maneira semelhante, ao desenvolvimento para tensão, teremos as seguintes relações constitutivas para deformação do compósito, matriz e inclusão, respectivamente (BARBOSA, 2010):

$$\langle \varepsilon \rangle = \bar{D} : \langle \sigma \rangle \quad (2.23)$$

$$\langle \varepsilon \rangle_m = D_m : \langle \sigma \rangle_m \quad (2.24)$$

$$\langle \varepsilon \rangle_i = D_i : \langle \sigma \rangle_i \quad (2.25)$$

Onde \bar{D} , D_m e D_i são tensores de flexibilidade do compósito, matriz e inclusão, respectivamente. Os tensores de flexibilidade são dados pelo inverso do tensor de rigidez, conforme apresentada nas equações (2.26) - (2.28) (BARBOSA, 2010).

$$\bar{D} = \bar{C}^{-1} \quad (2.26)$$

$$D_m = C_m^{-1} \quad (2.27)$$

$$D_i = C_i^{-1} \quad (2.28)$$

Reescrevendo a equação (2.12), isolando a parte referente a matriz teremos:

$$f_m \langle \sigma_m \rangle = \langle \sigma \rangle - \sum_{i=1}^n f_i \langle \sigma_i \rangle \quad (2.29)$$

Substituindo $\langle \sigma \rangle$ da equação (2.20), $\langle \sigma \rangle_m$ da equação (2.21) e $\langle \sigma \rangle_i$ da equação (2.22) na equação (2.29), teremos:

$$f_m C_m : \langle \varepsilon \rangle_m = \bar{C} : \langle \varepsilon \rangle - \sum_{i=1}^n f_i C_i : \langle \varepsilon \rangle_i \quad (2.30)$$

Utilizando a equação (2.13) em (2.30), obtemos a equação básica da micromecânica válida para o regime elástico, representado em (2.31).

$$(\bar{C} - C_m) : \langle \varepsilon \rangle = \sum_{i=1}^n f_i (C_i - C_m) : \langle \varepsilon \rangle_i \quad (2.31)$$

Expressando a equação (2.31) em função do tensor de flexibilidade, teremos

$$(\bar{D} - D_m) : \langle \sigma \rangle = \sum_{i=1}^n f_i (D_i - D_m) : \langle \sigma_i \rangle \quad (2.32)$$

No anexo B é apresentado as relações entre as principais constantes elásticas de um material isotrópico. Já no anexo C é mostrado as relações de simetria para os casos de material isotrópico e transversalmente isotrópico, bem como as equações utilizadas para determinar as propriedades do material (ABOUDI et al, 2013; BUNSELL et al, 2021; CHEN et al, 1982).

2.2.5 Tensor de concentração de tensão e deformação

De acordo com Hill (1963), podemos relacionar as deformações médias macroscópicas com a deformação média nas fases, através do tensor de concentração de Deformação (A), conforme mostrado abaixo:

$$\langle \varepsilon_m \rangle = A_m : \langle \bar{\varepsilon} \rangle \quad (2.33)$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = A_i : \langle \bar{\varepsilon} \rangle \quad (2.34)$$

A dedução do tensor de concentração em deformação e tensão para compósitos bifásicos é apresentada por Costa (2017). Isolando os termos referente a deformação na inclusão da equação (2.31), teremos:

$$\langle \varepsilon \rangle_i = \frac{1}{f_i} (C_i - C_m)^{-1} : (\bar{C} - C_m) : \langle \varepsilon \rangle \quad (2.35)$$

De maneira análoga, teremos a seguinte equação para o caso da matriz:

$$\langle \varepsilon \rangle_m = \frac{1}{f_m} (C_i - C_m)^{-1} : (\bar{C} - C_m) : \langle \varepsilon \rangle \quad (2.36)$$

Através das equações (2.35) e (2.36), definimos o tensor de concentração de deformação para a inclusão e a matriz, conforme mostrado abaixo:

$$A_i = \frac{1}{f_i} (C_i - C_m)^{-1} : (\bar{C} - C_m) \quad (2.37)$$

$$A_m = \frac{1}{f_m} (C_i - C_m)^{-1} : (\bar{C} - C_m) \quad (2.38)$$

O tensor de concentração de deformação A , é de quarta ordem e relaciona as deformações macro e microscópicas. A solução do problema de homogeneização está baseada na definição deste tensor (LORENCI, 2013).

De maneira similar, através da equação (2.32), teremos que os tensores de concentração de tensão, serão:

$$B_i = \frac{1}{f_i} (D_i - D_m)^{-1} : (\bar{D} - D_m) \quad (2.39)$$

$$B_m = \frac{1}{f_i} (D_i - D_m)^{-1} : (\bar{D} - D_m) \quad (2.40)$$

Logo, as tensões efetivas se relacionam com as tensões médias de cada fase, por meio dos tensores de concentração de tensão correspondentes, conforme segue abaixo:

$$\langle \sigma_m \rangle = B_m : \langle \bar{\sigma} \rangle \quad (2.41)$$

$$\langle \sigma_i \rangle = B_i : \langle \bar{\sigma} \rangle \quad (2.42)$$

É possível definir uma relação entre os tensores de concentração de tensão e deformação da matriz e da inclusão, por meio das equações (2.43) e (2.44):

$$(1 - f_i)A_m + f_i A_i = I \quad (2.43)$$

$$(1 - f_i)B_m + f_i B_i = I \quad (2.44)$$

Onde I é o tensor identidade de quarta ordem.

2.2.6 Problema da inclusão equivalente de Eshelby

Eshelby (1957), em seu trabalho, considerou uma inclusão elipsoidal Ω , contida em um meio elástico infinito isotrópico de mesmo material. Ele admitiu que se está região Ω , sofrer uma mudança espontânea na sua geometria de maneira que, houvesse a ausência do material circundante, corresponderia a deformações de transformação livres de tensão, conhecidas como eigenstrain (ε^*). De maneira simples, através de passos lógicos imaginários de corte, deformação e colagem, é possível determinar o campo elástico resultante.

O nome Eigenstrain é utilizado na micromecânica para representar deformações inelásticas, como deformações térmicas, deformações de transformação de fase, deformação elástica e plásticas (QU; CHERKAOUI, 2006).

Segue abaixo os passos da solução de Eshelby (1957). Em seguida também é apresentado visualmente essa sequência lógica na figura 2.6 (RYU; LEE; JUNG; KIM, 2019):

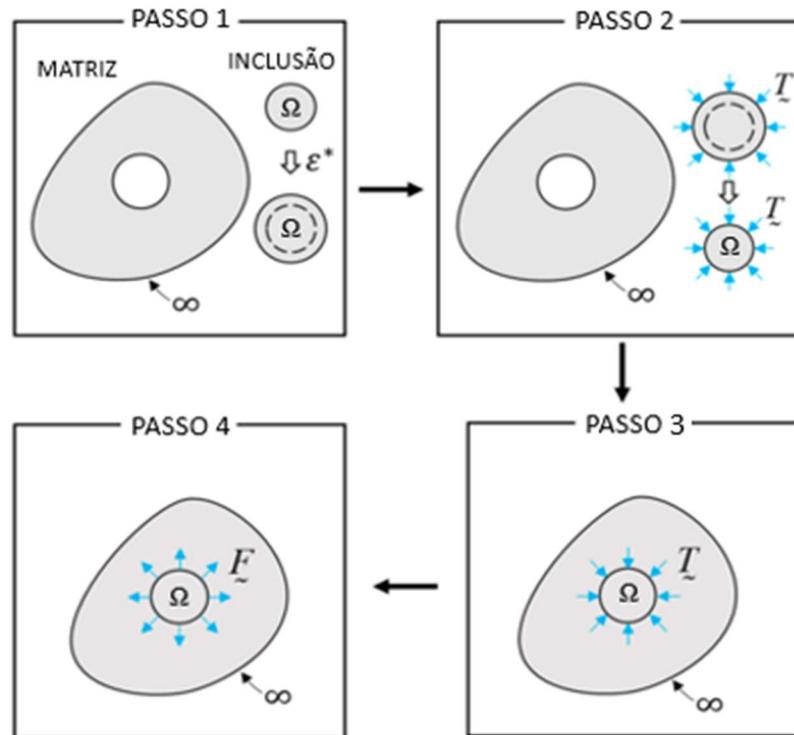
- Passo 1: Considerar uma matriz infinita com uma inclusão inserida, ambas de mesmo material. Em seguida, realizar o recorte da inclusão e retirá-la da matriz. Após a inclusão ser retirada da matriz ela sofre deformações de transformação livre de tensão, denominada de eigenstrain (ε^*).
- Passo 2: Forças são aplicadas na inclusão para que ela seja posicionada novamente na matriz.
- Passo 3: Após a inclusão ser inserida novamente na matriz, forças de reação iguais e opostas são geradas e há a deformação da matriz e inclusão.
- Passo 4: Como a inclusão agora está restrita pela matriz, a deformação na inclusão será uniforme e é relacionada ao eigenstrain por meio de um tensor denominado de tensor de Eshelby, conforme é apresentado a seguir:

$$\varepsilon_{ij}^c = s_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}^* \quad (2.45)$$

O tensor de Eshelby de quarta ordem depende apenas do tensor de rigidez do meio homogêneo e da geometria da inclusão (ABDIN, 2015). O anexo D apresenta o tensor de

quarta ordem de Eshelby e como deve ser calculado os seus componentes de acordo com o tipo de geometria da inclusão.

Figura 2.6: Resolução do problema de Eshelby.



Fonte: Adaptado de RYU, LEE, JUNG, KIM (2019).

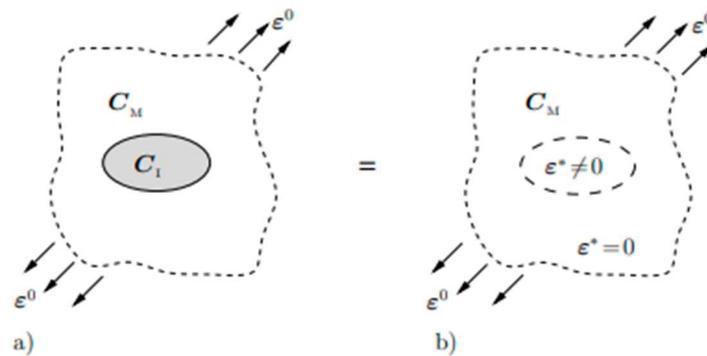
No método da inclusão equivalente proposto por Eshelby (1957) as constantes elásticas da inclusão foram consideradas iguais às da matriz. O resultado de maior importância obtido por Eshelby, é que o campo de tensão e deformação dentro da inclusão é uniforme quando o eigenstrain for também uniforme (MURA, 1982).

Se considerarmos um material heterogêneo, ou seja, onde suas propriedades são espacialmente variáveis, será preciso realizar a substituição da heterogeneidade por uma inclusão, com as mesmas propriedades do material circundante, que estará submetida a um eigenstrains (ε^*) equivalente, ou seja, o ε^* é introduzido para simular a heterogeneidade do problema inicial. Em outras palavras, é necessário criar um problema de inclusão, de maneira que ao ajustarmos o valor de ε^* , tenhamos o mesmo campo de tensão do problema

inicial de heterogeneidade. Esse eigenstrain equivalente é calculado conforme a equação (2.46) (QU; CHERKAOUI, 2006; GROSS; SEELIG, 2018).

$$\varepsilon^* = -[S + (C_i - C_m)^{-1} : C_m]^{-1} : \varepsilon_0 \quad (2.46)$$

Figura 2.7: a) Heterogeneidade elipsoidal, b) Material homogêneo com eigenstrain



Fonte: GROSS; SEELIG (2018)

2.3 Modelos de homogeneização dos campos médios

Os modelos de homogeneização dos campos médios utilizam os dados das propriedades dos constituintes que formam o material heterogêneo como dados de entrada. As técnicas de homogeneização deste modelo são baseadas no resultado obtido por Eshelby (1957) considerando que os constituintes são isotrópicos, elásticos e há uma junção perfeita entre a matriz e a inclusão (GOLLING; ÖSTLUND; OLDENBURG, 2013).

2.3.1 Dilute Suspension

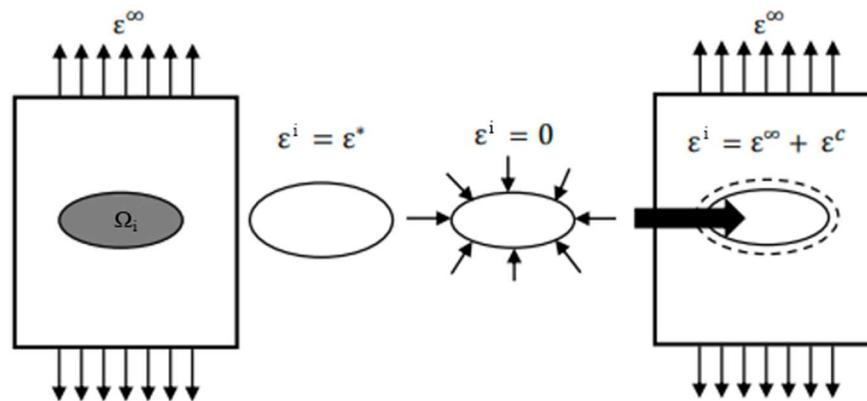
No modelo de homogeneização Dilute Suspension, consideramos que as inclusões estão distribuídas em uma matriz homogênea, sendo as interações entre elas e com a fronteira do EVR, desprezadas. Sendo assim, levamos em conta que cada inclusão estará localizada em um domínio infinito e sujeito a um campo uniforme de deformação. Para

desconsiderarmos estas interações, é necessário que as dimensões características das heterogeneidades sejam pequenas quando comparadas às distâncias entre elas e da distância da fronteira do EVR. A matriz de rigidez efetiva do material heterogêneo definida através do método Dilute Suspension é dada, conforme a equação (2.47) (ESCUADERO, 2004; DUTRA, 2012; LORENCI, 2013; ABDIN, 2015).

$$\bar{C} = C_m + f_i(C_i - C_m): A_i^{dil} \quad (2.47)$$

Para encontrarmos A_i^{dil} , utilizaremos o conceito de eigenstrain, aplicado a uma heterogeneidade com domínio Ω_i , e propriedades C_i , como é apresentado na figura 2.8. Aplicando uma deformação de campo distante ε^∞ , a inclusão sofrerá uma deformação ε^i . Para podermos aplicar o método proposto por Eshelby (1957), substituímos a heterogeneidade por uma inclusão equivalente com a rigidez C_m , de maneira que as tensões e deformações σ^i e ε^i , respectivamente, na heterogeneidade sejam iguais às da inclusão equivalente (ABDIN, 2015)

Figura 2.8: Princípio da transformação de Eshelby



Fonte: ABDIN (2015)

A matriz de restrição levará ao surgimento de uma deformação fictícia (ε^c). Logo a deformação final na inclusão equivalente será dada pela soma da deformação aplicada externamente e da deformação fictícia, conforme a equação (2.48).

$$\varepsilon^i = \varepsilon^\infty + \varepsilon^c = \varepsilon^\infty + S\varepsilon^* \quad (2.48)$$

A tensão na inclusão equivalente é dada pela equação (2.49), resolvendo de maneira direta o problema de localização para uma única heterogeneidade inserida em uma matriz infinita (MURA, 1987 Apud ABDIN, 2015).

$$\sigma_i = C_i(\varepsilon^\infty + S\varepsilon^*) = C_m(\varepsilon^\infty + S\varepsilon^* - \varepsilon^*) \quad (2.49)$$

Utilizando as equações (2.48) e (2.49), estabelecemos uma relação entre a deformação na inclusão e a deformação global.

$$\varepsilon^i = [I + SC_m^{-1}(C_i - C_m)]^{-1}\varepsilon^\infty \quad (2.50)$$

Logo, sabendo que o tensor de concentração de deformação relaciona a deformação média na inclusão com a deformação macroscópica, teremos a partir da equação (2.50) que A_i^{dil} , é dado por:

$$A_i^{dil} = [I + SC_m^{-1}(C_i - C_m)]^{-1} \quad (2.51)$$

O método Dilute Suspension só pode ser utilizado para baixas frações volumétricas da fase de reforço, na prática para valores inferiores a 10% (ESCUADERO, 2004).

2.3.2 Auto-Consistente

O modelo de homogeneização Auto Consistente, utiliza o método da inclusão equivalente de Eshelby (1957), para determinar as propriedades do material heterogêneo.

Para aplicação deste método consideramos apenas uma inclusão envolvida por um material efetivo (ALMEIDA; ROMÃO; CAVALCANTE; SANTOS, 2010). Este modelo foi proposto por Hill (1965a) e Budiansky (1965) e permite assumir que o material da matriz possui as mesmas propriedades do material efetivo desejado, sendo este último com propriedades a serem definidas (GRAMOLL; FREED; WALKER, 1991).

Neste modelo é utilizado um esquema iterativo para que o problema seja solucionado. No primeiro passo adotamos uma estimativa inicial para o tensor constitutivo do material composto e em seguida calculamos os valores para o tensor de Eshelby e para o tensor de concentração de deformação. No segundo passo utilizamos estes valores e definimos um novo valor para o tensor constitutivo do material, de acordo com a equação (2.52). O processo se repete a cada interação até que haja convergência do problema (ESCUADERO, 2004; ABDIN, 2015).

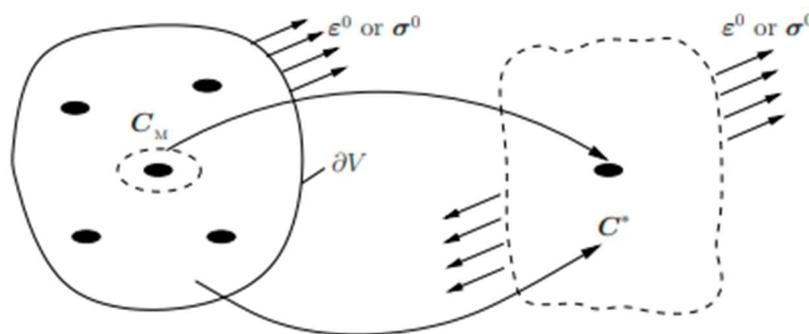
$$\bar{C}_{n+1} = C_m + f_i(C_i - C_m): [I - \bar{S}_n^\Omega: \bar{C}_n^{-1}: (\bar{C}_n - C_i)]^{-1} \quad (2.52)$$

Como condições iniciais para este método, temos:

$$\bar{C}_1 = C_m \quad (2.53)$$

$$\bar{S}_1^\Omega = S^\Omega \quad (2.54)$$

Figura 2.9: Método Auto Consistente



Fonte: GROSS; SEELIG (2018)

2.3.3 Mori-Tanaka

Em 1973, Mori e Tanaka, propuseram uma abordagem onde era relacionada as tensões e deformações da inclusão com as da matriz em um compósito. Benveniste (1987), reformulou o modelo de Mori e Tanaka (1973), através da utilização do conceito de inclusão equivalente em termos de um tensor mais compacto, denominado de tensor de concentração de deformação ou tensão de Mori-Tanaka, conforme equação (2.55). (LIU; HUANG, 2014). O método de Mori-Tanaka reformulado por Benveniste, considera a interação entre as inclusões, supondo que cada uma delas é afetada pela presença das outras de maneira indireta por meio da deformação total da matriz (LORENCI, 2013; ABDIN, 2015)

$$A_i^{mt} = A_i^{dil} [(1 - f_i)I + f_i A_i^{dil}]^{-1} \quad (2.55)$$

Logo, o tensor constitutivo de rigidez do material homogeneizado pelo método de Mori-Tanaka reformulado por Benveniste, será dado conforme a equação (2.56).

$$\bar{C} = C_m f_i + (C_i - C_m) \left[A_i^{dil} [(1 - f_i)I + f_i A_i^{dil}]^{-1} \right] \quad (2.55)$$

2.3.4 Esquema diferencial

McLaughlin (1977), propôs o método de homogeneização conhecido como esquema diferencial. A formulação geral deste método também pode ser encontrada em Hashin (1988). Este modelo leva em consideração a interação entre as inclusões através do uso de uma estratégia que consiste na execução de um processo incremental de inserção de frações volumétricas infinitesimais da fase da inclusão, sendo a cada passo realizado a homogeneização e calculados o tensor de Eshelby e o tensor constitutivo de rigidez efetiva (SANTOS JUNIOR, 2008).

O modelo de esquema diferencial é representado por uma equação diferencial ordinária não-linear.

$$\frac{d\bar{C}}{df_i} = \frac{1}{(1-f_i)} [C_i - C_{(f_i)}] : A_i^{dil} \quad (2.56)$$

2.4 Influência das direções das inclusões nas propriedades elásticas de materiais heterogêneos

Para o caso de inclusões curtas e desalinhadas, a geometria e distribuição espacial delas, exercem grande influência nas propriedades dos materiais heterogêneos. Este tipo de material com inclusões distribuídas randomicamente, apresenta a vantagem de ter menor custo de produção (JUN, SUN, 2001a).

Giordano (2003), apresenta em seu trabalho, uma maneira de calcular o tensor de concentração de deformação para o caso de inclusões desalinhadas.

$$\langle A_i \rangle_{\psi}^d = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Onde α e β , dependem dos coeficientes do tensor de concentração de deformação inicial da inclusão, sendo calculados conforme as equações (2.58) e (2.59).

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{1}{5} A_{1111} + \frac{1}{5} A_{2222} + \frac{1}{5} A_{3333} + \frac{2}{15} A_{1313} + \frac{2}{15} A_{2323} + \frac{2}{15} A_{1313} + \frac{1}{15} A_{1122} \\ & + \frac{1}{15} A_{1133} + \frac{1}{15} A_{2211} + \frac{1}{15} A_{2233} + \frac{1}{15} A_{3311} + \frac{1}{15} A_{3322} \quad (2.58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{1}{15} A_{1111} + \frac{1}{15} A_{2222} + \frac{1}{15} A_{3333} - \frac{1}{15} A_{1313} - \frac{1}{15} A_{2323} - \frac{1}{15} A_{1313} + \frac{2}{15} A_{1122} \\ & + \frac{2}{15} A_{1133} + \frac{2}{15} A_{2211} + \frac{2}{15} A_{2233} + \frac{2}{15} A_{3311} + \frac{2}{15} A_{3322} \quad (2.59) \end{aligned}$$

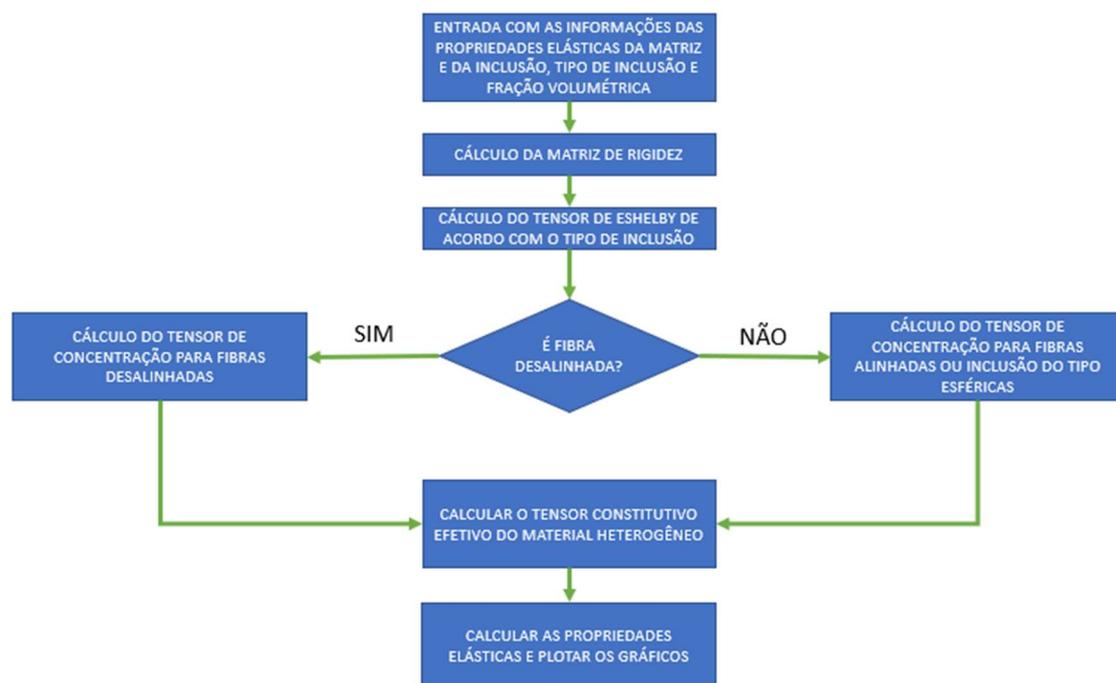
Logo, o tensor $\langle A_i \rangle_{\psi}^d$, será utilizado ao calcularmos o tensor de rigidez efetivo de material heterogêneo para o caso de inclusões desalinhadas.

3. Metodologia

Neste trabalho, inicialmente foi feito um estudo sobre os conceitos da micromecânica de materiais heterogêneos e modelos de homogeneização dos campos médios para diferentes tipos de inclusão, que foram: esférica, fibras alinhadas e desalinhadas, conforme representado na figura 2.2. Consideramos que os constituintes são isotrópicos, elásticos e há uma junção perfeita entre a matriz e a inclusão.

Com base no estudo bibliográfico realizado, foi elaborado um algoritmo constituído de funções responsáveis por determinar as propriedades efetivas elásticas de materiais heterogêneos utilizando as 4 principais técnicas de homogeneização, que são: Dilute Suspension, Auto-Consistente, Mori-Tanaka e Esquema diferencial para os casos de inclusão esférica, fibras alinhadas e desalinhadas. A figura 3.1 mostra o algoritmo para o método Mori-Tanaka, como exemplo.

Figura 3.1: Algoritmo para o método de Mori-Tanaka



Fonte: Autor.

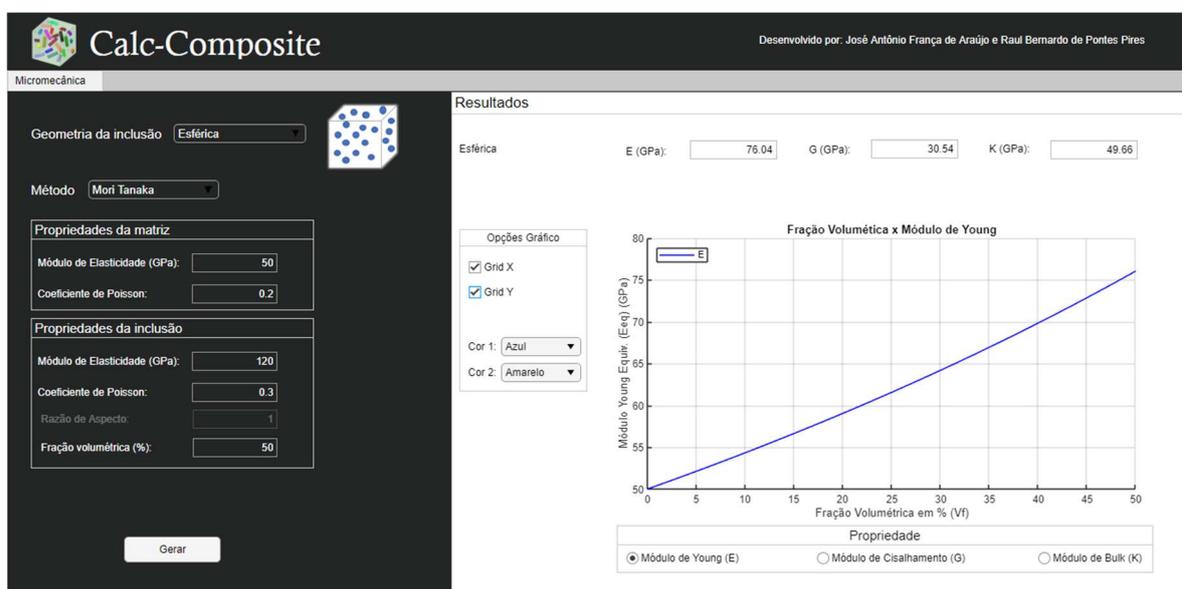
Com base nesse algoritmo, utilizamos a linguagem de programação MATLAB para o desenvolvimento do software, denominado de Calc-Composite, criado para facilitar as análises da influência da geometria da inclusão e a comparação entre os métodos de

homogeneização que serão realizadas nesse trabalho e para servir de ferramenta de estudo e desenvolvimento de materiais heterogêneos. A validação do código foi feita através de comparação com resultados encontrados em outros trabalhos e com o software DIGIMAT.

3.1 Estrutura e funcionamento

O software desenvolvido foi dividido em duas áreas para facilitar o entendimento de seu funcionamento por parte dos usuários. A primeira área corresponde a parte da interface gráfica onde é definido as propriedades do material heterogêneo a ser analisado e o método de homogeneização. Na segunda parte é reservado uma área para a exibição dos resultados das propriedades homogeneizadas. Segue abaixo uma visão geral da interface gráfica do software e em seguida é explicado com mais detalhes cada campo do programa.

Figura 3.2: Visão geral da interface gráfico do software Calc-Composite



Fonte: Autor.

- **Área de entrada de dados:** Nesta seção o usuário deverá indicar qual o formato da inclusão (Esférica, fibras alinhadas ou desalinhadas) e o método de homogeneização (Esquema diferencial, Mori-Tanaka, Auto-consistente ou Dilute

suspension). Deverá ser fornecido também pelo usuário as propriedades da matriz e da inclusão. Para a matriz será informado o módulo de elasticidade em GPa e o coeficiente de Poisson do material que a constitui e para o material da inclusão deverá ser indicado também duas propriedades já citadas, a fração volumétrica desta fase e caso estejamos trabalhando com fibras alinhadas ou desalinhadas, iremos preencher o campo razão de aspecto da fibra. Este último campo estará desabilitado quando o tipo de inclusão esférica for selecionado.

Figura 3.3: Área de entrada de dados do usuário

Geometria da inclusão

Método

Propriedades da matriz

Módulo de Elasticidade (GPa):

Coeficiente de Poisson:

Propriedades da inclusão

Módulo de Elasticidade (GPa):

Coeficiente de Poisson:

Razão de Aspecto:

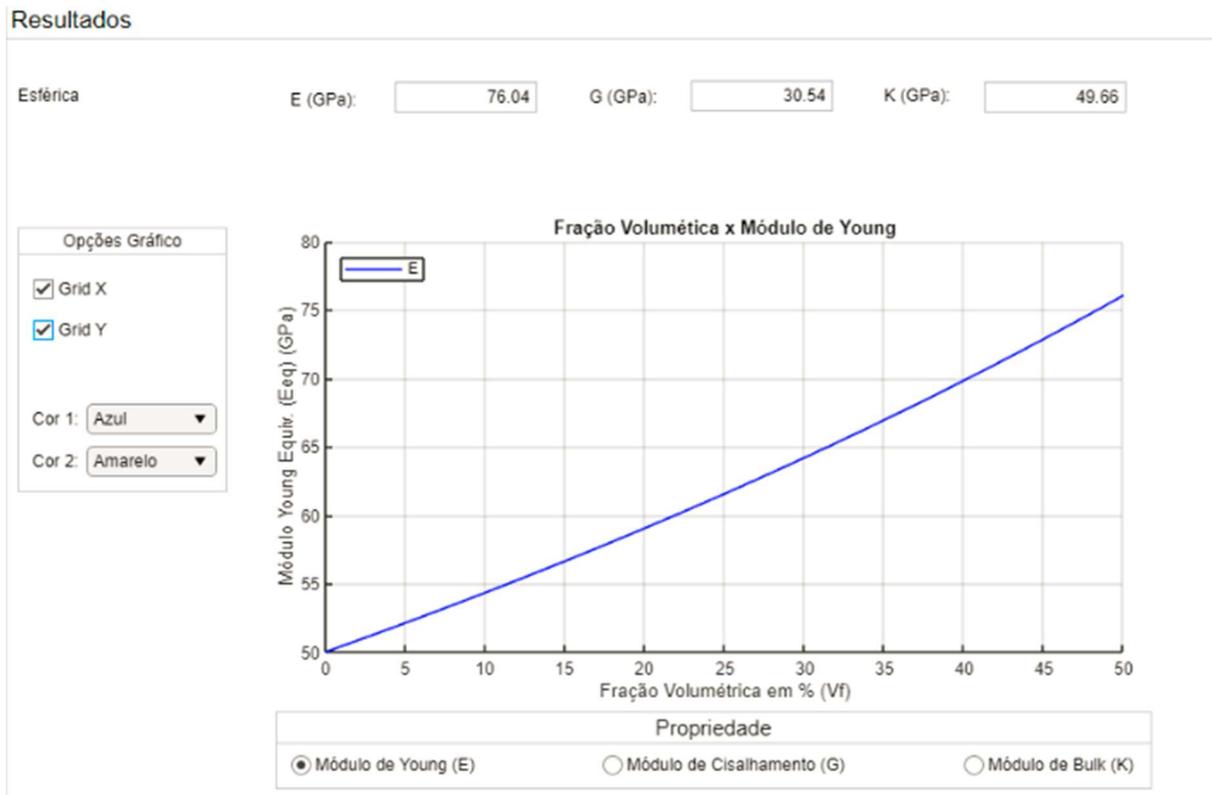
Fração volumétrica (%):

Fonte: Autor.

- **Área de resultados:** Nesta área são apresentados os resultados das propriedades homogeneizadas. Na parte superior é exibido o tipo de inclusão escolhida e os valores do módulo de Young, módulo de cisalhamento e módulo de Bulk para a fração volumétrica definida pelo usuário. É também apresentado ao usuário, um gráfico das propriedades elásticas variando com a fração volumétrica de 0% até o valor informado nos dados de entrada. Abaixo do gráfico estão as opções de seleção das propriedades que são exibidas. No lado esquerdo do gráfico, está

presente as opções de configuração visual do gráfico, onde é possível definir se haverá as linhas de grade ou não no eixo X e Y e as cores da linha 1 e 2. A linha dois só existirá no caso de fibras alinhadas, tendo em vista que as propriedades variam com a direção neste caso, ou seja, anisotrópico.

Figura 3.4: Área de exibição dos resultados os Calc-composite



Fonte: Autor

4. Resultados

Neste capítulo serão mostrados os resultados obtidos no presente trabalho. Iniciaremos com a validação do código desenvolvido e logo após será feita a comparação entre os métodos implementados no software e com resultados experimentais. Iremos apresentar alguns exemplos para analisar as propriedades elásticas efetivas dos materiais heterogêneos. Em todos os exemplos será considerado a perfeita junção entre a inclusão e a matriz, desconsiderando, desta forma, a presença das propriedades de interface.

4.1 Validação do código

Neste tópico será feita a validação do código dos métodos Dilute suspension, Auto-consistente, Mori-Tanaka (método utilizado pelo software DIGIMAT) e Esquema diferencial.

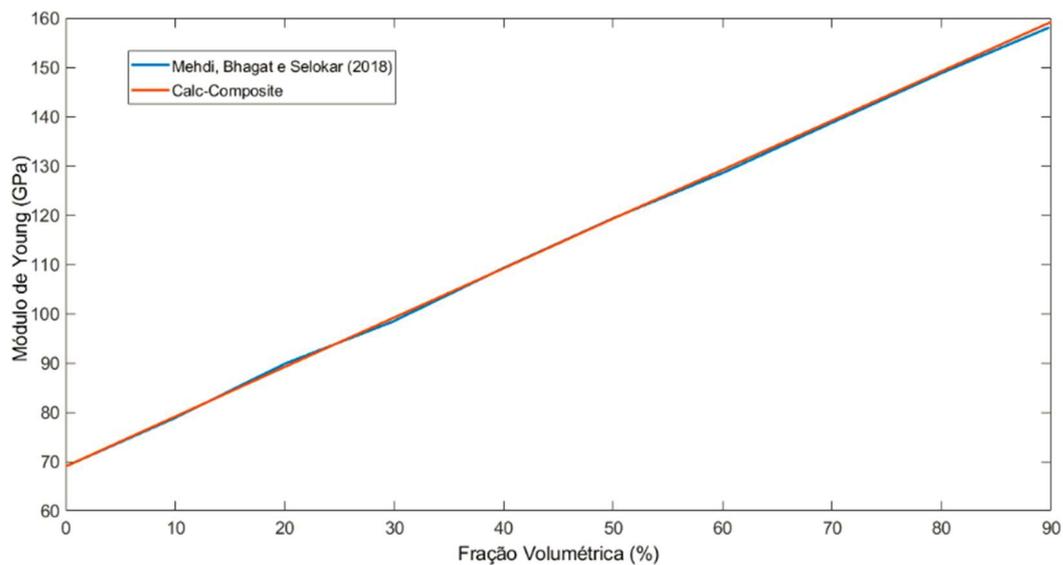
4.1.1 Dilute suspension

Os resultados obtidos através do software desenvolvido neste trabalho, utilizando a opção de método de homogeneização Dilute suspension, foram confrontados com os adquiridos no estudo de Mehdi, Bhagat e Selokar (2018). A geometria da inclusão utilizada neste exemplo é esférica. Na tabela 1 são apresentadas as propriedades elásticas dos constituintes do compósito. A propriedade analisada foi o módulo de Young, variando a fração volumétrica de 0 a 90%.

Tabela 1: Propriedades elásticas do nanocompósito de matriz de alumínio e inclusões esféricas de alumina

Parâmetros do material	Unidade	Valor
Matriz		
Módulo de Young	GPa	69
Coefficiente de Poisson		0.345
Inclusão		
Módulo de Young	GPa	400
Coefficiente de Poisson		0.25

Figura 4.1: Módulo de Young obtidos pelo método Dilute suspension para Inclusão esférica



Fonte: Autor

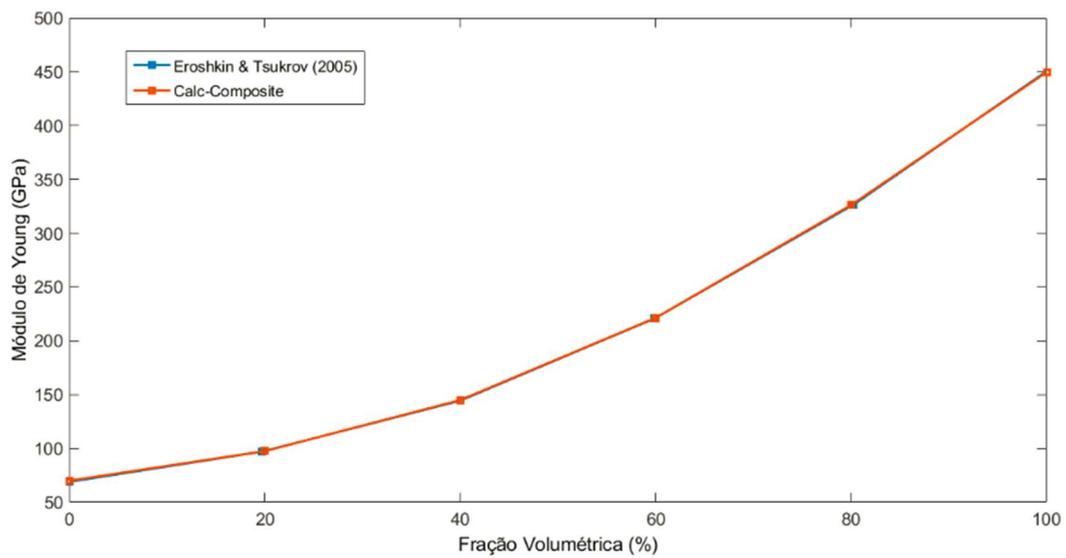
4.1.2 Auto-consistente

Para validar o método de homogeneização Auto-consistente do Cal-Composite, confrontamos os resultados obtidos com os de Eroshkin e Tsukrov (2005). As propriedades do material heterogêneo analisado para este exemplo são apresentadas na tabela 2. A geometria da inclusão é esférica. Gráficos para o módulo de Young e cisalhamento foram plotados com frações volumétricas variando de 0 a 100%.

Tabela 2: Propriedades elásticas do nanocompósito SiC/Al

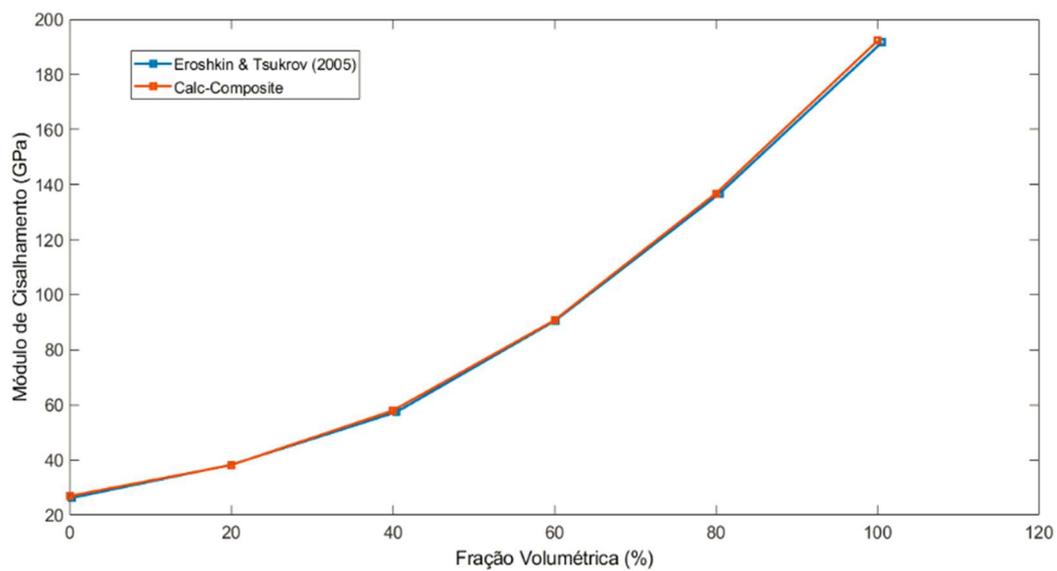
Parâmetros do material	Unidade	Valor
Matriz		
Módulo de Young	GPa	70
Coefficiente de Poisson		0.3
Inclusão		
Módulo de Young	GPa	450
Coefficiente de Poisson		0.17

Figura 4.2: Módulo de Young obtidos pelo método Auto-Consistente para inclusão esférica



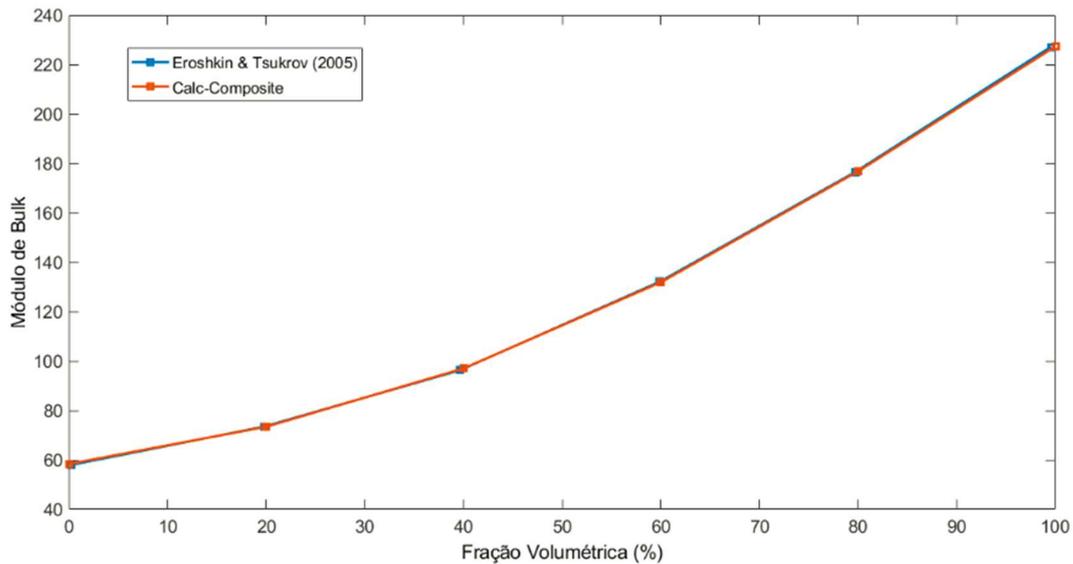
Fonte: Autor

Figura 4.3: Módulo de Cisalhamento obtidos pelo método Auto-Consistente para inclusão esférica



Fonte: Autor

Figura 4.4: Módulo de Bulk obtidos pelo método Auto-Consistente para inclusão esférica



Fonte: Autor

4.1.3 Mori-Tanaka (DIGIMAT)

A validação do método Mori-Tanaka foi realizada através da comparação de resultados obtidos por meio do software DIGIMAT, pois ele utiliza essa técnica para realizar a homogeneização das propriedades elásticas efetivas de um material heterogêneo.

- **Inclusão esférica:** Para o caso de inclusão esférica, foi utilizado como exemplo o nanocompósito alumina/epóxi que possui as propriedades elásticas conforme a tabela 3. Gráficos para o módulo de Young e cisalhamento, com frações volumétricas variando de 0 a 50%, foram plotados para validação com o DIGIMAT.

Tabela 3: Propriedades elásticas do nanocompósito alumina/epóxi

Parâmetros do material	Unidade	Valor
Matriz		
Módulo de Young	GPa	3.12
Coefficiente de Poisson		0.35
Inclusão		
Módulo de Young	GPa	386
Coefficiente de Poisson		0.22

Figura 4.5: Módulo de Young obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão esférica

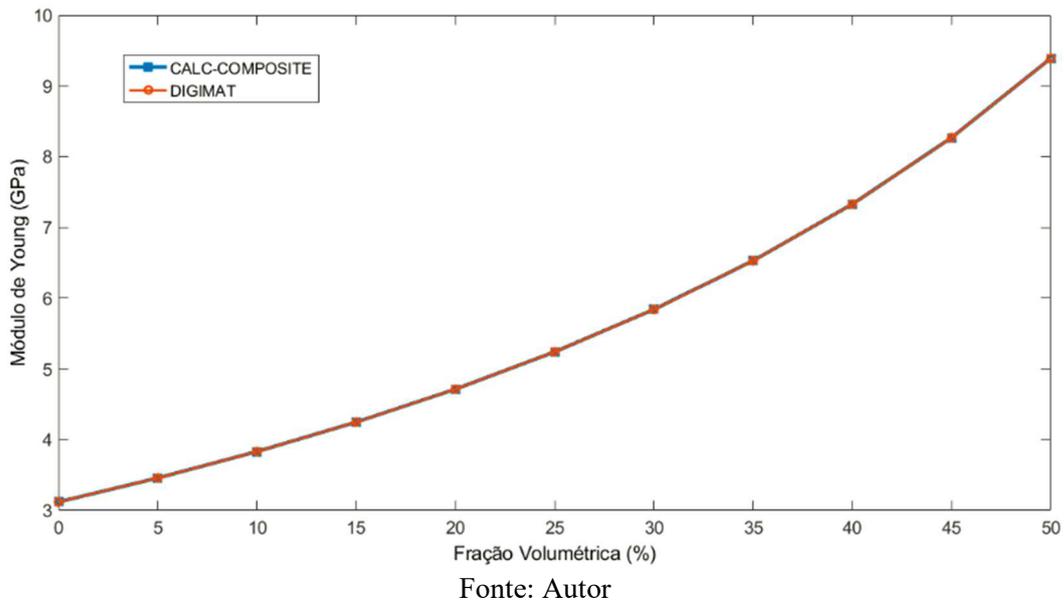
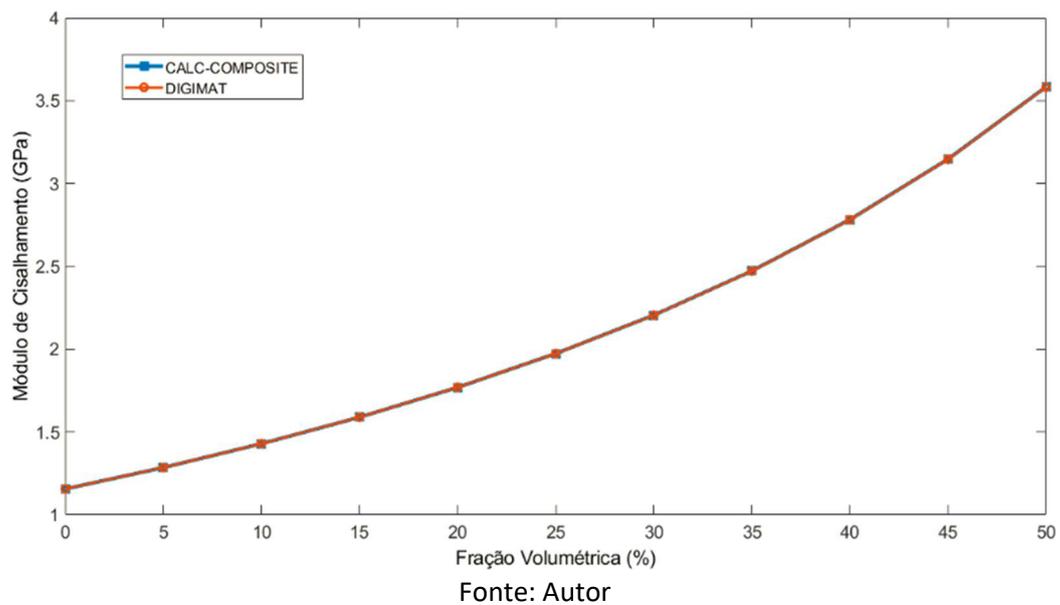


Figura 4.6: Módulo de cisalhamento obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão esférica

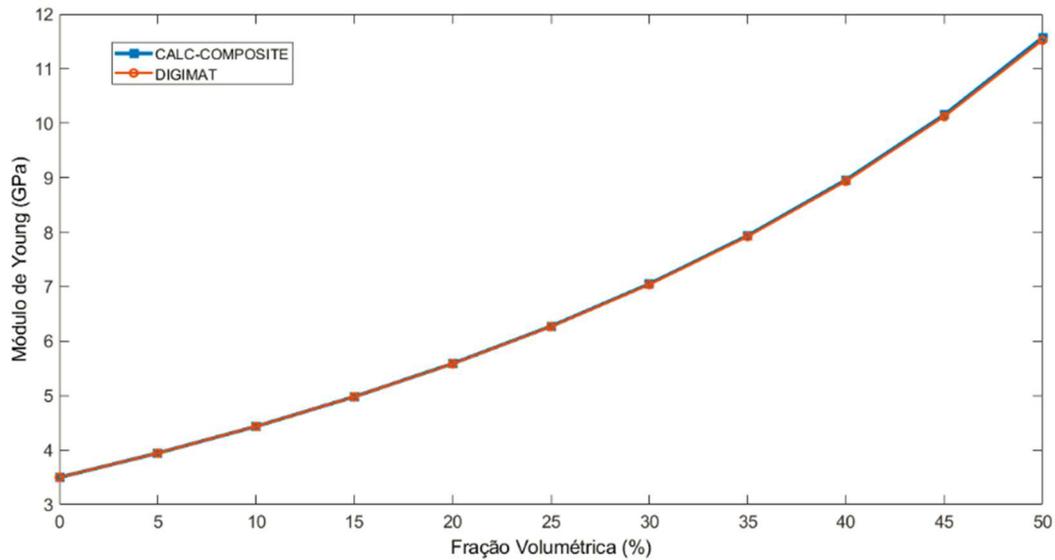


- Fibra desalinhada:** Para este caso temos fibras distribuídas randomicamente e desalinhadas no espaço. O compósito utilizado como exemplo para analisar esta configuração possui propriedades elásticas conforme mostrado na tabela 4. A razão de aspecto da inclusão foi de 3. Gráficos para o módulo de Young, cisalhamento e Bulk, com frações volumétricas variando de 0 a 50%, foram plotados para validação com o DIGIMAT.

Tabela 4: Propriedades elásticas do nanocompósito grafite/epóxi

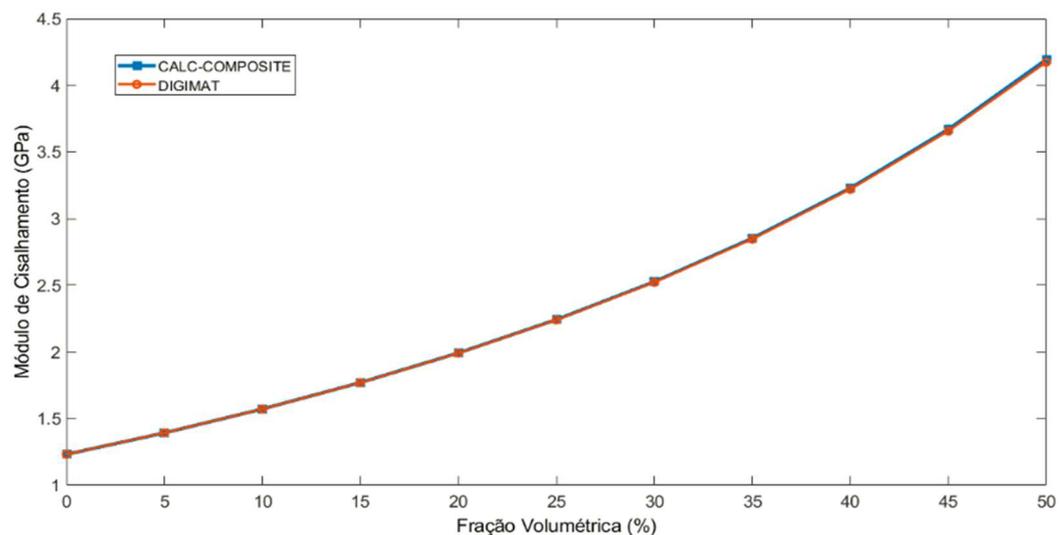
Parâmetros do material	Unidade	Valor
Matriz		
Módulo de Young	GPa	3.12
Coefficiente de Poisson		0.35
Inclusão		
Módulo de Young	GPa	386
Coefficiente de Poisson		0.22

Figura 4.7: Módulo de Young obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão fibras desalinhas



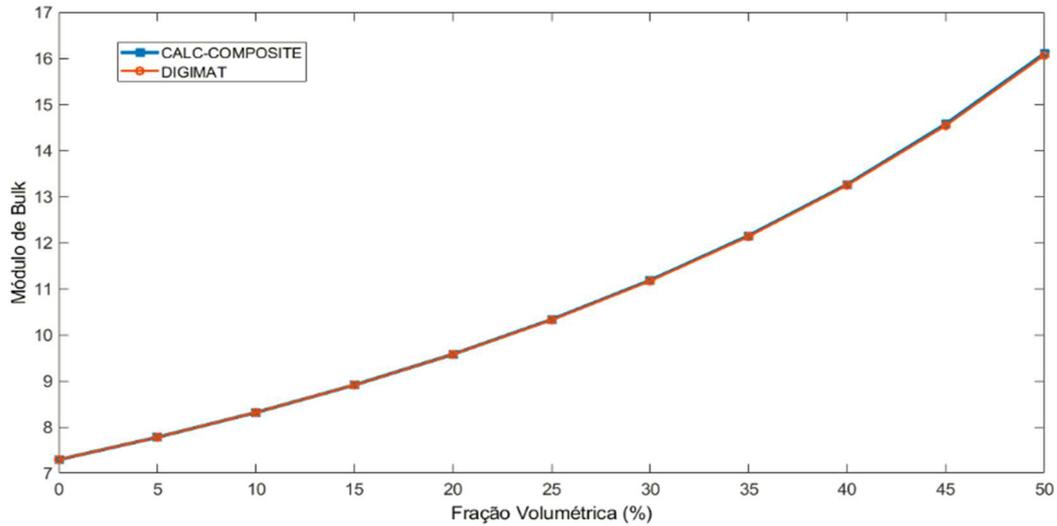
Fonte: Autor

Figura 4.8: Módulo de cisalhamento obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão fibras desalinhas



Fonte: Autor

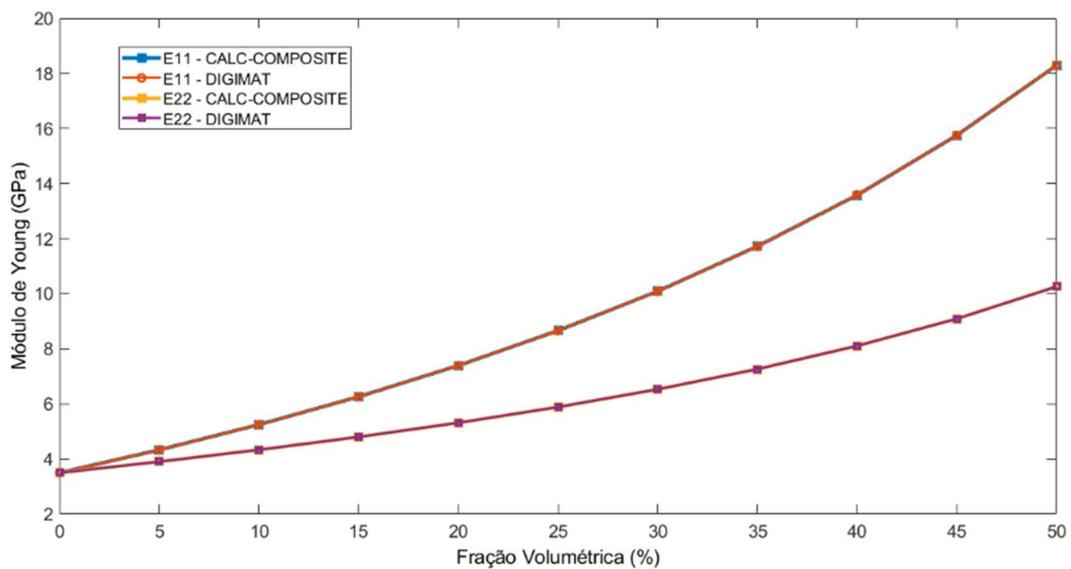
Figura 4.9: Módulo de Bulk obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão fibras desalinhas



Fonte: Autor

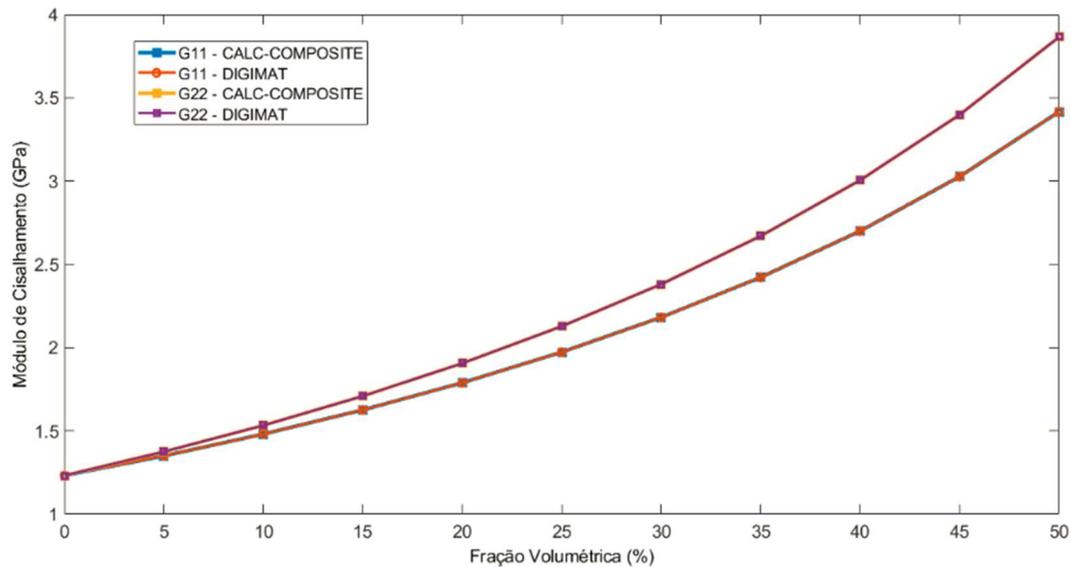
- Fibra alinhada:** O exemplo utilizado para validar a geometria de inclusão de fibra alinhada, utiliza os dados presentes na tabela 4. Para este caso temos fibras distribuídas randomicamente e alinhadas no espaço com razão de aspecto igual a 3. Gráficos para o módulo de Young e cisalhamento, com frações volumétricas variando de 0 a 50%, foram plotados para validação com o DIGIMAT.

Figura 4.10: Módulo de Young obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão fibras alinhadas



Fonte: Autor

Figura 4.11: Módulo de Cisalhamento obtidos pelo método Mori-Tanaka para inclusão fibras alinhadas

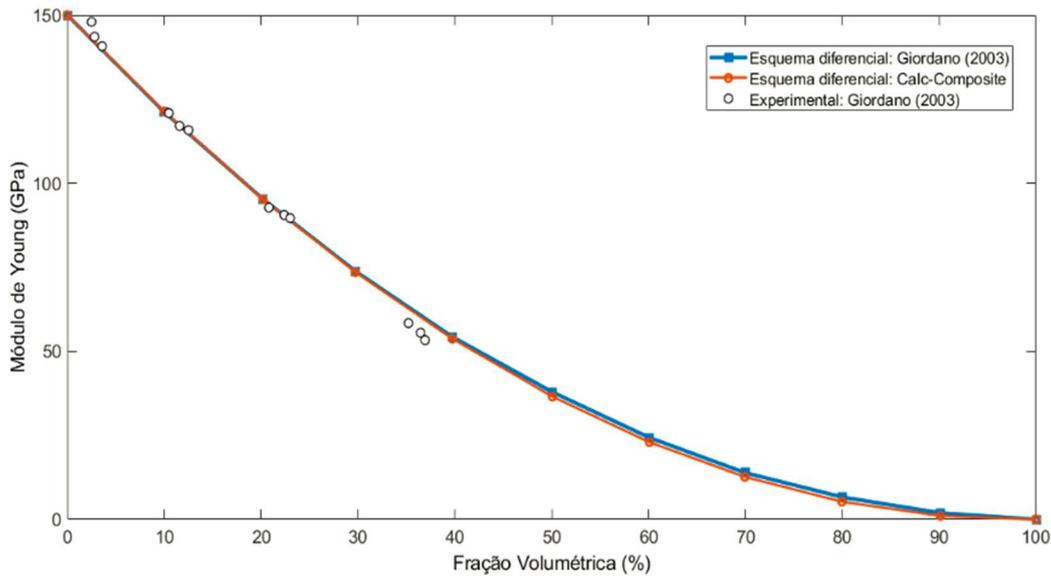


Fonte: Autor

4.1.4 Esquema diferencial

Giordano (2003), em seu trabalho, aborda a caracterização elástica de materiais heterogêneos com inclusões elipsoidais orientadas aleatoriamente no espaço através do método de esquema diferencial. Em um de seus exemplos, são apresentados resultados obtidos por método experimental e esquema diferencial, a variação do módulo de Young de acordo com a fração volumétrica para um material poroso, onde os poros possuem o formato de esfera e a sua matriz é de óxido de gadolínio (Gd_2O_3) e que possui $E = 150$ GPa e $\nu = 0,29$. Para os poros consideramos que o módulo de Young e o coeficiente de Poisson são aproximadamente zero. Estes resultados foram utilizados para confrontar os obtidos através do software desenvolvido, o Calc-Composite.

Figura 4.12: Módulo de Young obtido através do método esquema diferencial para material com poros esféricos



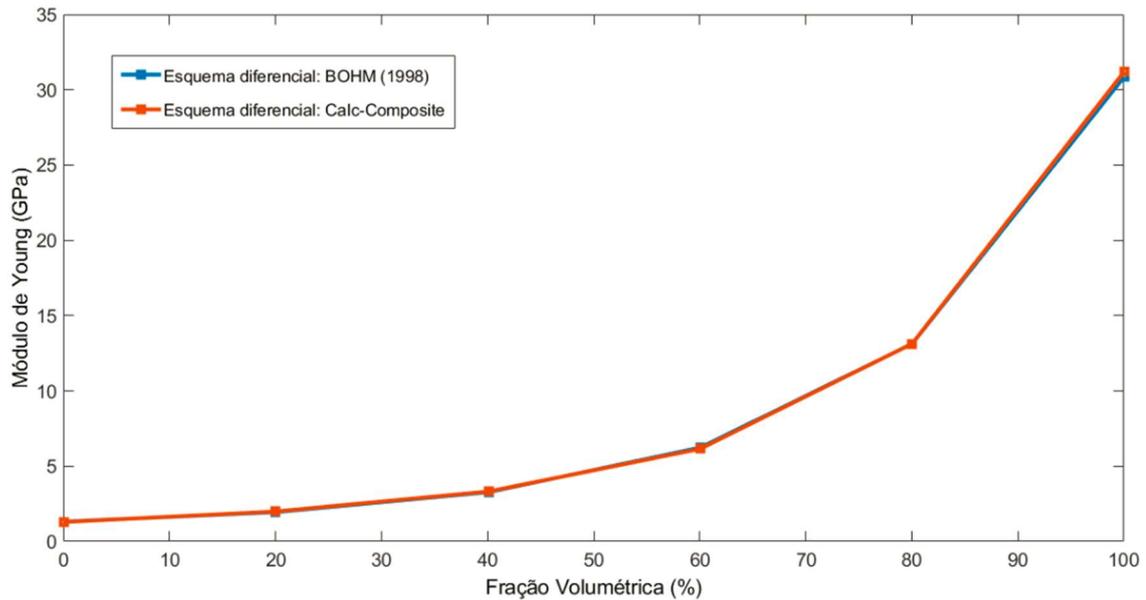
Fonte: Autor

Bohm (1998), apresenta a variação do módulo de cisalhamento de acordo com o valor de fração volumétrica de um compósito bifásico constituído de uma matriz de epóxi e partículas de vidro. As propriedades desse material são apresentadas na tabela 5. O comportamento do módulo de cisalhamento foi investigado a partir do método de homogeneização Esquema diferencial. Os resultados presentes no trabalho de Bohm (1998) foram utilizados para confrontar com os obtidos através do Cal-Composite, com o intuito de validar o algoritmo e estão presentes na figura 4.13.

Tabela 5: Propriedades elásticas dos constituintes do compósito vidro/epóxi

Parâmetros do material	Unidade	Valor
Matriz		
Módulo de Young	GPa	3.12
Coefficiente de Poisson		0.35
Inclusão		
Módulo de Young	GPa	386
Coefficiente de Poisson		0.22

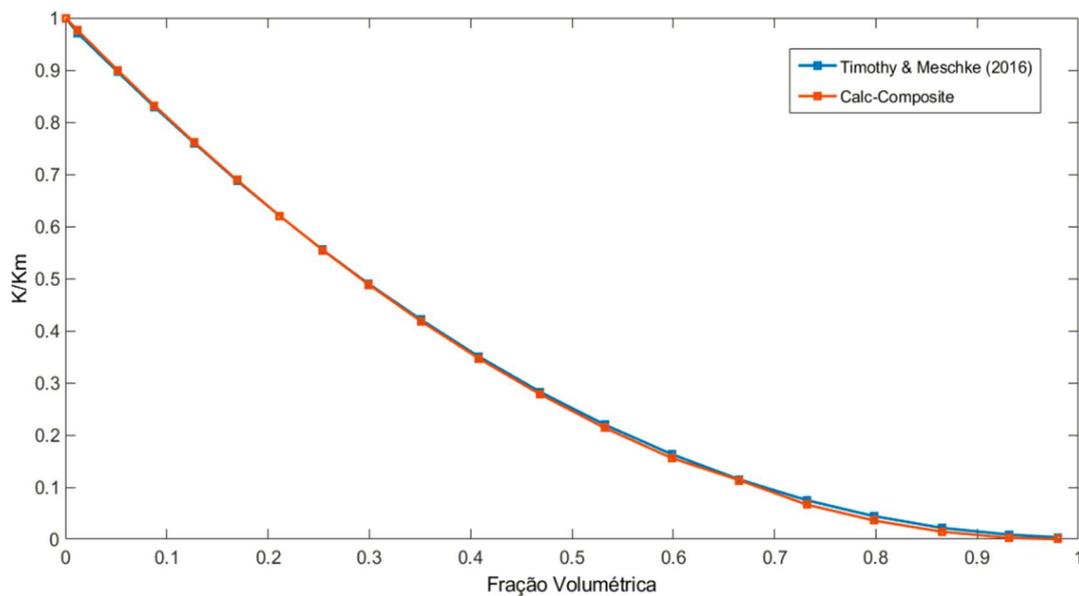
Figura 4.13: Módulo de cisalhamento obtido através do esquema diferencial



Fonte: Autor

Timothy e Meschke (2016), analisaram os resultados obtidos para o módulo de Bulk de um material com poros de formato esférico e com uma matriz onde as suas propriedades elásticas são dadas pela relação $\frac{k_m}{G_m} = \frac{4}{3}$, sendo K_m e G_m , módulo de Bulk e módulo de cisalhamento, respectivamente.

Figura 4.14: Módulo de Bulk obtido através do método esquema diferencial para um material de poros esféricos



Fonte: Autor

4.2 Análise comparativa dos modelos micromecânicos com o MEF

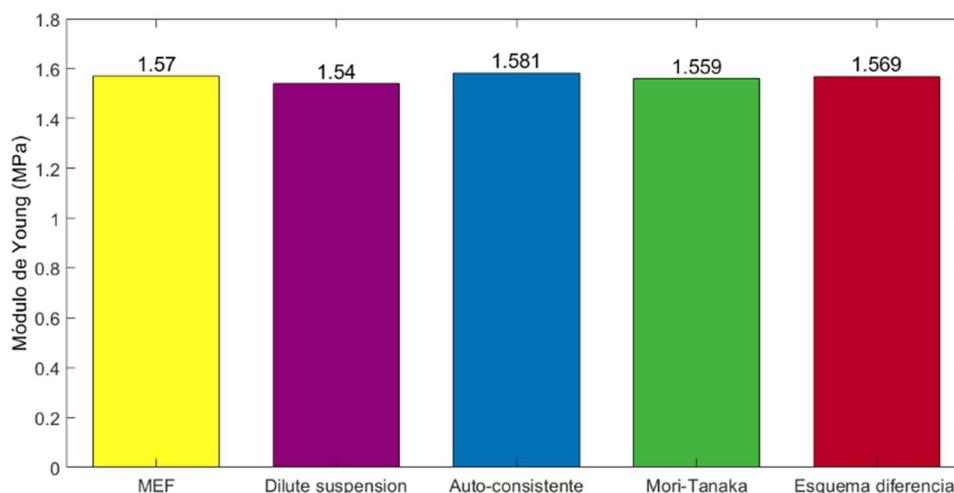
Evangelista Junior et al (2003), determinou em seu trabalho o módulo de Young efetivo para uma mistura areia-asfalto através do método de elementos finitos. Nesta mistura, utilizada como estudo de caso por ele, o teor do aglutinante é 91,27% e o do agregado 8,73%. O ligante foi produzido na PETROBRAS de Fortaleza a partir do petróleo venezuelano Bachaquero. As propriedades desse material heterogêneo são apresentadas na tabela 6.

Tabela 6: Propriedades elásticas da mistura areia-asfalto

Parâmetros do material	Unidade	Valor
Matriz		
Módulo de Young	Mpa	1,32
Coefficiente de Poisson		0.30
Inclusão		
Módulo de Young	Mpa	40,50
Coefficiente de Poisson		0.20

Com o intuito de realizar uma análise comparativa entre os resultados obtidos pelo MEF, apresentados por Evangelista Junior et al (2003), e os calculados através dos modelos micromecânicos implementados no Calc-Composite, foi plotado um gráfico de barras contendo os valores de módulo de Young efetivo para cada uma das técnicas.

Figura 4.15: Comparativo do módulo de Young efetivo obtido por MEF e pelos modelos micromecânicos



Fonte: Autor

Como pode ser observado, o esquema diferencial é o modelo micromecânico que apresenta resultado mais próximo dos obtidos através do MEF, com uma diferença de apenas 0,06%. Já o dilute suspension foi o método que mostrou maior amplitude ao compararmos com o MEF, cerca de 1,91%

4.3 Comparação entre os métodos de homogeneização

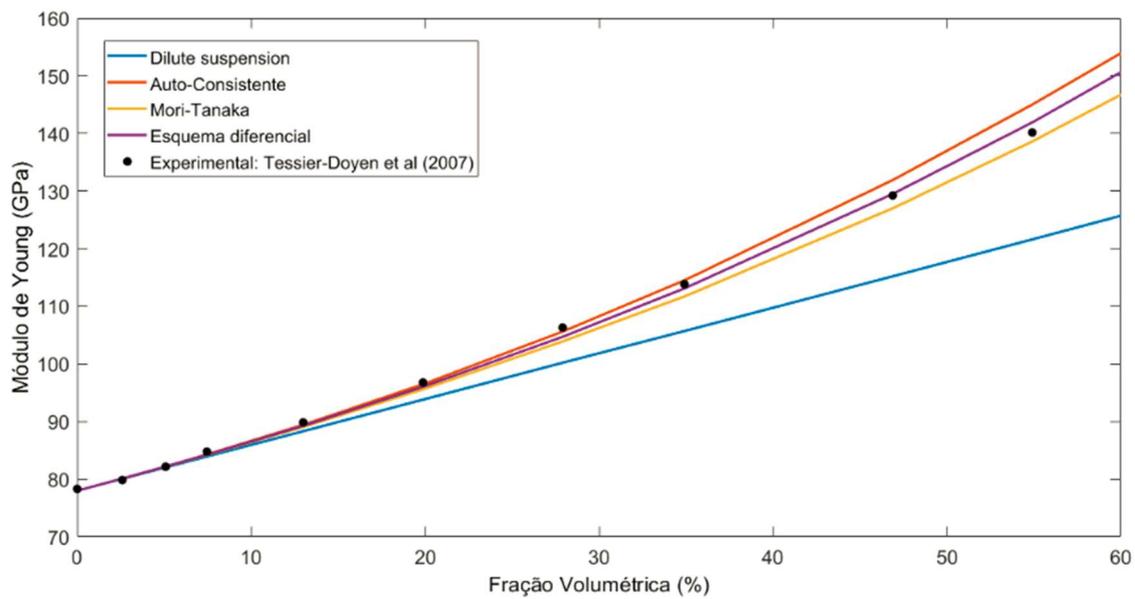
Com o intuito de avaliar a precisão dos métodos de homogeneização abordados neste trabalho em relação a fração volumétrica da inclusão, utilizamos os resultados obtidos experimentalmente por Tessier-Doyen et al (2007) para realizar um estudo comparativo. Eles estudaram o comportamento do módulo de Young com a variação de fração volumétrica da fase de reforço de um compósito de matriz vítrea e inclusões esféricas de alumina distribuídas de maneira randômica. A tabela 7 apresenta as propriedades elásticas do material.

Tabela 7: Propriedades elásticas do compósito: Experimental x modelos micromecânicos

Parâmetros do material	Unidade	Valor
Matriz		
Módulo de Young	GPa	78
Coefficiente de Poisson		0.21
Inclusão		
Módulo de Young	GPa	240
Coefficiente de Poisson		0.24

Na figura 4.16, é realizado a comparação dos módulos de Young obtidos experimentalmente com os calculados por meio dos modelos micromecânicos dos campos médios.

Figura 4.16: Comparação do módulo de Young: Experimental x Analítico



Fonte: Autor

Através da análise comparativa presente no gráfico mostrado na imagem 4.16, é possível identificar que:

- O modelo dilute suspension está limitado a baixas frações volumétricas de inclusão, cerca de 10%;
- No modelo auto-consistente, as respostas foram satisfatórias para frações volumétricas de até 35%;
- Para o modelo Mori-Tanaka, houve uma boa precisão na resposta para uma fração volumétrica de até 20%;
- O esquema diferencial foi o método que apresentou melhor precisão quando comparado aos resultados experimentais, com boa precisão para frações volumétricas de inclusão de até aproximadamente 45%.

4.4 Estudo da influência da geometria

Neste tópico, será avaliado a influência da geometria da inclusão no módulo de Young efetivo do compósito de matriz epóxi e fase de reforço de boro com propriedades presentes na tabela 8. As inclusões analisadas estão distribuídas randomicamente e possuem geometria esférica, fibras alinhadas e desalinhadas,

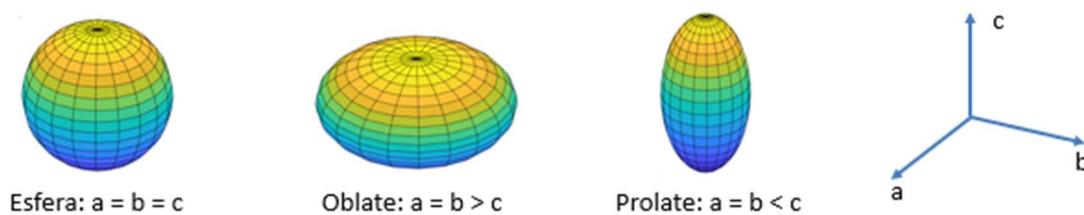
podendo apresentar-se nesses dois últimos citados com formato oblate (razão de aspecto menor que 1) ou prolata (razão de aspecto maior que 1). A figura 4.17 exhibe os tipos de esferoides.

O estudo da influência da geometria foi realizado através dos resultados obtidos do Calc-Composite, utilizando o método de homogeneização Esquema diferencial. Para auxiliar a análise foram construídos gráficos que mostram a variação do módulo de Young efetivo de acordo com a variação da fração volumétrica em um intervalo de 0 a 50%.

Tabela 8: Propriedades elásticas do compósito Epóxi/Boro

Parâmetros do material	Unidade	Valor
Matriz		
Módulo de Young	GPa	4.14
Coefficiente de Poisson		0.35
Inclusão		
Módulo de Young	GPa	414
Coefficiente de Poisson		0.20

Figura 4.17: Representação dos tipos de esferoides: Esfera, prolata e oblate

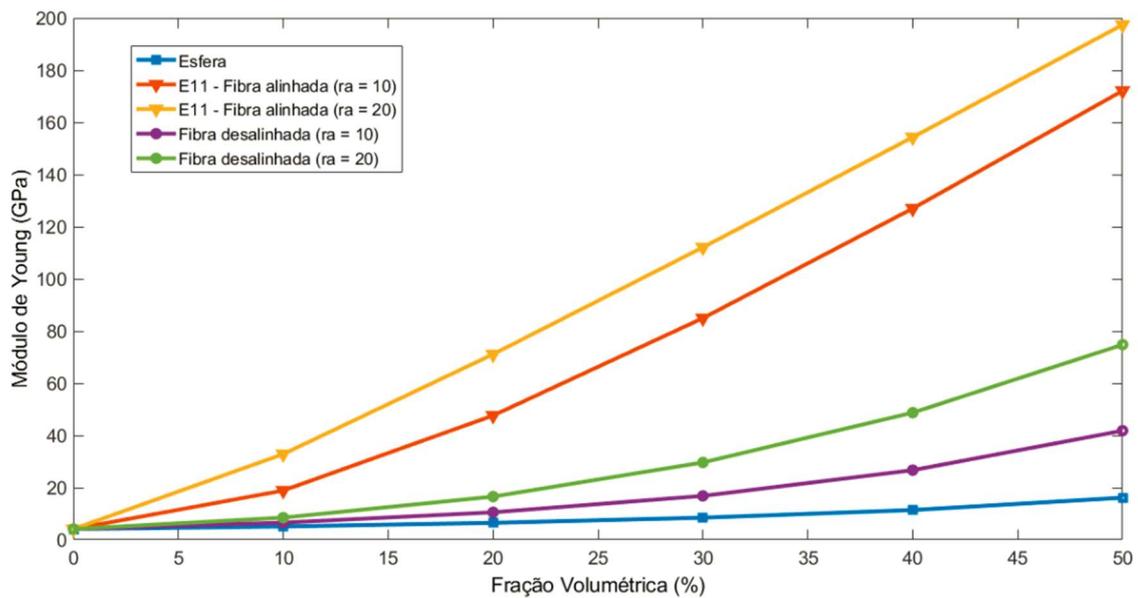


Fonte: Autor

Na figura 4.18 é apresentado o comportamento do módulo de Young efetivo para esfera e fibras alinhadas e desalinhadas do tipo prolata, ou seja, com razões de aspecto maiores que 1. Para o caso de fibras alinhadas é mostrado apenas os valores do módulo de Young referente a direção longitudinal das fibras, que neste caso é a E_{11} , sendo essa a direção de maior rigidez. A partir da figura 4.18, é possível notar que a configuração de fibras alinhadas possui maior rigidez que fibras desalinhadas e esferas. Ao compararmos o caso de fibras desalinhadas com

esferas, é notado que a rigidez para fibras desalinhadas possui uma rigidez significativamente maior que o de esfera para frações volumétricas maiores que 10%. Podemos extrair também a partir do gráfico mostrado na imagem 4.18 que quanto maior que 1 for a razão de aspecto das inclusões maior será a rigidez do material.

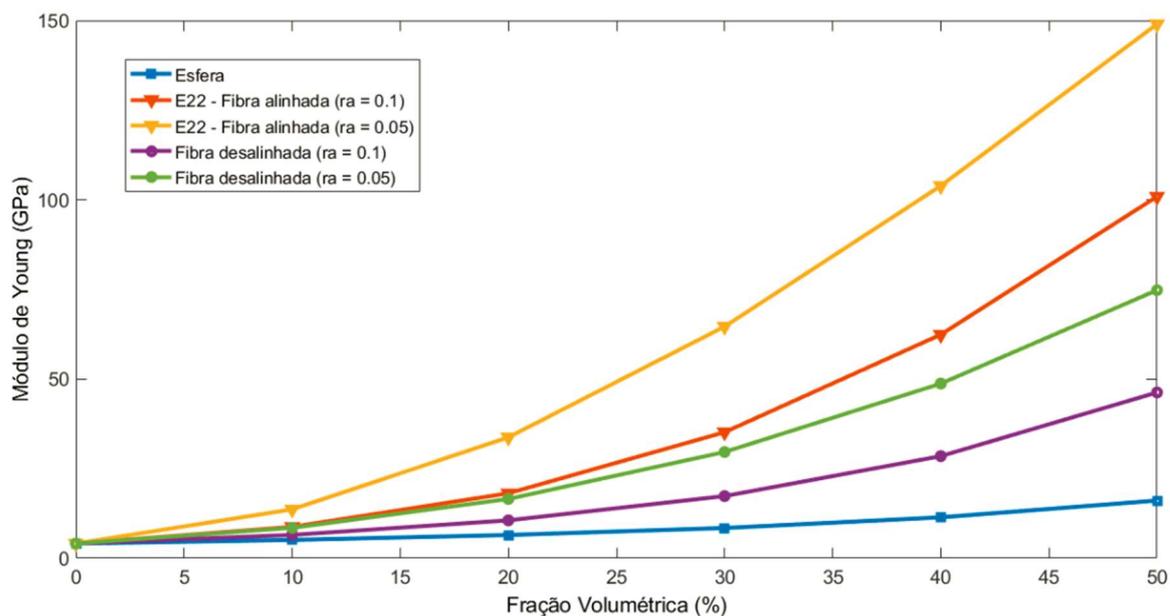
Figura 4.18: Influência da geometria da inclusão para razões de aspecto maiores que 1



Fonte: Autor

Na figura 4.19, é apresentado as respostas do módulo de Young em função da fração volumétrica para os casos de inclusões esférica e fibras alinhadas e desalinhadas do tipo oblato, ou seja, com razões de aspecto menores que 1. Para o caso de fibras alinhadas é mostrado apenas os valores do módulo de Young referente a direção longitudinal das fibras, que neste caso é a E_{22} , sendo ela a direção de maior rigidez. Realizando uma análise comparativa entre os diferentes de tipos de inclusão presentes no gráfico da figura 4.19, é notado que as fibras alinhadas apresentam maiores valores de módulo de Young efetivo. As fibras desalinhadas apresentam rigidez significativamente maior que o caso de inclusões esféricas para frações volumétricas maiores que 10%. A rigidez aumenta à medida que o valor da razão de aspecto se distancia de 1 para esquerda.

Figura 4.19: Influência da geometria da inclusão para razões de aspecto menores que 1

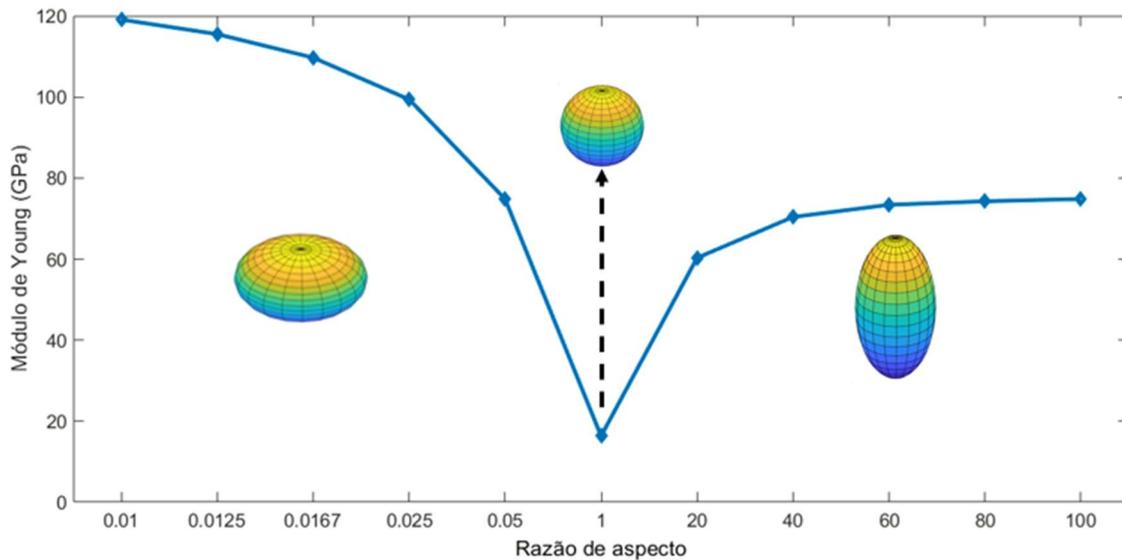


Fonte: Autor

Visto que nos gráficos anteriores, identificamos que o formato e a disposição das inclusões apresentam influência no comportamento elástico dos materiais heterogêneos, foi elaborado um gráfico que mostra a variação dessa propriedade em função da razão de aspecto para um compósito de propriedades conforme a tabela 8 com fração volumétrica de 50% e com inclusões desalinhadas utilizando o método de homogeneização Esquema diferencial, para uma melhor visualização da influência da razão de aspecto, um dos fatores importantes para o módulo de Young efetivo.

A figura 4.20 apresenta esse comportamento, onde é notado que para fibras com formatos prolate, razões de aspectos maiores que 40 não alteram de maneira significativa o módulo de Young efetivo. Já para o caso de fibras com formato oblate, a diminuição da razão de aspecto a partir de 0,0125 não gera um aumento considerável na rigidez do material.

Figura 4.20: Influência da razão de aspecto



Fonte: Autor

5. Conclusão

Foi desenvolvido um software, designado de Calc-Composite, que possui a funcionalidade de avaliar as propriedades elásticas efetivas de um material bifásico por meio dos principais métodos de homogeneização da micromecânica para inclusões de diferentes geometrias e configuração espacial. O algoritmo do software foi validado por meio de resultados obtidos de outros trabalhos encontrados na literatura e em outros softwares consolidados no mercado. Foi realizada comparação das técnicas de homogeneização dos campos médios com resultados experimentais, sendo o esquema diferencial a técnica que apresentou maior concordância. Além disto, os resultados do Calc-Composite, utilizando todas as opções de método de homogeneização, foram confrontados com a técnica do MEF, apresentando ótima convergência entre as diferentes técnicas, em especial quando utilizado o método de esquema diferencial, sendo ele o que apresentou menor diferença quando comparado ao MEF. Logo, os métodos implementados no Calc-Composite, se mostram como uma alternativa a outras técnicas, com a vantagem de possuir baixo custo computacional. Além dos estudos comparativos também foi feita uma análise da influência da geometria, onde fibras alinhadas, no sentido longitudinal a elas,

apresentam maior rigidez que fibras desalinhadas e esferas. Sendo observado também que quão maior for a distância da razão de aspecto, tanto pela direita quanto pela esquerda de 1, maior será o valor da rigidez, chegando a um valor onde o aumento ou diminuição da razão de aspecto não irá gerar um crescimento significativo na rigidez.

Portanto, todos os objetivos traçados no capítulo 1, foram cumpridos. O software desenvolvido poderá ser utilizado pela comunidade acadêmica para aprofundamento do estudo de materiais compósitos e porosos, de maneira geral para materiais heterogêneos bifásicos. Foi concedido o certificado de registro de programa de computador para o software Calc-Composite. No capítulo 6 são apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

6. Trabalhos futuros

1. Estudo sobre homogeneização para materiais elastoplásticos;
2. Homogeneização para materiais heterogêneos de múltiplas geometrias de inclusão;
3. Desenvolvimento de uma versão web para o Calc-Composite;
4. Análise dos efeitos de interface;
5. Estudo sobre a utilização dos métodos de homogeneização para propagação de trincas e materiais porosos.

7. Referências

ABDIN, Y. Micro-Mechanics Based Fatigue Modelling of Composites Reinforced With Straight and Wavy Short Fibers. 312 p. Tese (Doutorado) — KU LEUVEN, Leuven, 2015. 21, 29, 30, 52, 69, 95, 124

ABOUDI, J.; ARNOLD, S. M.; BEDNARCYK, B. A. Micromechanics of Composite Materials. [s.n.], 2013. 1006 p. ISBN 9780123977595. Disponível em: <<https://www.elsevier.com/books/micromechanics-of-composite-materials/aboudi/978-0-12-397035-0>>

BARBOSA, Anderson Henrique. Contribuição ao estudo sobre a obtenção do módulo de elasticidade do concreto utilizando modelagem micromecânica. 2010. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Pernambuco, [S. l.], 2010. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/5128/1/arquivo2392_1.pdf. Acesso em: 13 jan. 2022.

BOHM, H. J. A Short Introduction to Basic Aspects of Continuum Micromechanics. Vienna, 1998. v. 207.

BUDIANSKY, B. On the elastic moduli of some hererogeneous materials. Mech. Phys. Solids, v. 13, n. 02, p. 1–5, 1965. 31, 48

BUNSELL, A. R et al. Fundamentals of Fibre Reinforced Composite Materials. In: BUNSELL, A. R. Fundamentals of Fibre Reinforced Composite Materials. [S. l.: s. n.], 2021. cap. 5.

CHEN, W.F., SALLEB. A. Constitutive equations for engineering materials. New York, John Wiley e Sons, 1982. V.1 : Elasticity and Modeling, p. 1-181 .

CHEN, Zhangxing; HUANG, Tianyu; SHAO, Yimin; LI, Yang; XU, Hongyi; AVERY, Katherine; ZENG, Danielle; CHEN, Wei; SU, Xuming. Multiscale finite element modeling of sheet molding compound (SMC) composite structure based on stochastic mesostructure reconstruction. Composite Structures, [S. l.], v. 188, p. 25-38, 15 mar. 2018. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.039>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0263822317330738>. Acesso em: 5 jan. 2022.

COSTA, Esdras Jonathan Honorato. Homogeneização de compósitos reforçados por fibras considerando efeitos de interfaces. 2017. 151 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2017. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/1795>. Acesso em: 10 nov. 2019.

D., CALLISTER.Jr., W. *Ciência e Engenharia de Materiais - Uma Introdução*. [Digite o Local da Editora]: Grupo GEN, 2020. 9788521637325. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521637325/>. Acesso em: 21 nov. 2021.

DANTAS, David Anderson Cardoso. Abordagem micromecânica da resistência de meios porosos. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Alagoas, [S. l.], 2013. Disponível em: <http://200.17.114.109/jspui/bitstream/riufal/3501/1/Abordagem%20micromec%a2nica%20da%20resist%aancia%20de%20meios%20porosos.pdf>. Acesso em: 16 ago. 2021.

DUTRA, Vanessa Fátima Passa. Um modelo constitutivo para o concreto reforçado com fibras de aço via teoria da homogeneização. 2012. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, [S. l.], 2012. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/56585/000860743.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 23 ago. 2021.

ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 241, n. 1226, p. 376–396, Aug. 1957. ISSN 0080- 4630. Disponível em: < <https://www.jstor.org/stable/100095>>.

EROSHKIN, O.; TSUKROV, I. On micromechanical modeling of particulate composites with inclusions of various shapes. *International Journal of Solids and Structures*, v. 42, n. 2, p. 409–427, 2005. ISSN 00207683. 55

EVANGELISTA JUNIOR, F.; SOUZA, F. V.; CAVALCANTE NETO, J. B.; SOARES, J. B. Computational modeling approach for homogenization techniques based on the finite element method. In: XXIV IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING. Ouro Preto, Brazil, 2003.

GIORDANO, S. Differential schemes for the elastic characterisation of dispersions of randomly oriented ellipsoids. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, v. 22, n. 6, p. 885–902, 2003. ISSN 09977538. 32, 50, 52, 53

GOLLING, S.; ÖSTLUND, R.; OLDENBURG, M. Implementation of homogenization scheme for hardening, localization and fracture of steel with tailored material properties. *Proceedings: 4th International Conference Hot Sheet Metal Forming of High Performance Steel*, June 9 - 12 2013, p. 75–82, 2013

Gramoll K, Freed A, Walker K. An overview of self-consistent methods for fiber reinforced composites. NASA Tech Memo NASA-TM-103713, E-5946, NAS 115103713 1991.
(<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19910009919/downloads/19910009919.pdf>)

GROSS, D.; SEELIG, T. *Fracture mechanics with an Introduction to Micromechanics*. 3. ed. [S.l.]: Springer International, 2018. ISSN 26883627. ISBN 9783319710891. 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231.

HILL, R. A Self-Consistent Mechanics of Composite Materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 13, n. 4, p. 213–222, 1965. 31, 48, 68, 74

JAIN, Atul. Micro and mesomechanics of fibre reinforced composites using mean field homogenization formulations: A review. *Materials Today Communications*, [s. l.], v. 21, 31 dez. 2019. DOI <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2019.100552>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S2352492819303022>. Acesso em: 5 jan. 2022.

JU, J. W.; SUN, L. Z. Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part I: Micromechanics-based formulation. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, n. 2, p. 183–201, 2001. ISSN 00207683. 35, 52

LIM, Hyoung Jun; CHOI, Hoil; ZHU, Fei-Yan; KERKES, Tomas Webbe; YUN, Gun Jin. Multiscale damage plasticity modeling and inverse characterization for particulate composites. *Mechanics of Materials*, [s. l.], v. 149, 20 out. 2020. DOI <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103564>. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167663620306062?casa_token=J28W11HZQKUAAAAA:7ccuF120ogHI3Texe43n4qrnwLbU4aYFGWWCn_iDnVUEbNn10ajwv5Ch2P7ydzle-spl-TBl#bib6. Acesso em: 30 dez. 2021.

LIU, L.; HUANG, Z. A Note on mori-tanaka's method. *Acta Mechanica Solida Sinica*, v. 27, n. 3, p. 234–244, 2014. ISSN 18602134. 49

LOPES, Bruno.Leonardy. S. *Polímeros reforçados por fibras vegetais uma revisão sobre esses compósitos*. [Digite o Local da Editora]: Editora Blucher, 2017. 9788580392920. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580392920/>. Acesso em: 21 nov. 2021.

LORENCI, Giordano Von Saltiel. *Formulação micromecânica do comportamento poroelástico de um meio rochoso fraturado*. 2013. Dissertação (Mestre em Engenharia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, [S. l.], 2013. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/79809/000898736.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 jan. 2022.

M. Hori and S. Nemat-Nasser, “Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites,” *Mech. Mater.*, vol. 14, no. 3, pp. 189–206, 1993.

MCLAUGHLIN, R. A study of the differential scheme for composite materials. *International Journal of Engineering Science*, v. 15, n. 4, p. 237–244, 1977. ISSN 00207225. 31, 49

Mehdi, Misba & Bhagat, Atul & Selokar, G.R. (2018). Evaluation of Effective Elastic Moduli Using Micromechanics. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 455. 012116. 10.1088/1757-899X/455/1/012116.

MOREIRA, Matheus Madrid. *UMA METODOLOGIA PARA AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE COMPÓSITOS COM MICROESTRUTURA MULTIFÁSICA*. 2019. Dissertação (Mestre em Engenharia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, [S. l.], 2019. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/220973/001125056.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 jan. 2022.

MORI, T.; TANAKA, K. Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions. p. 1–4, 1973. 25, 31, 32, 34, 36, 37, 38, 49, 68, 71

MURA, T. Micromechanics of defects in solids. [S.l.: s.n.], 1982. ISBN 9789401185486. 29, 30, 50, 95

NETO, Flávio. L.; PARDINI, Luiz. C. Compósitos estruturais: Ciência e Tecnologia. [Digite o Local da Editora]: Editora Blucher, 2016. 9788521210795. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521210795/>. Acesso em: 29 dez. 2021.

QU, J.; CHERKAOUI, M. Fundamentals of Micromechanics of Solids. [S.l.]: John Wiley, 2006. ISBN 9780471464518. 22, 29, 30, 47, 48, 49, 50, 51.

RYU, Seunghwa; LEE, Sangryun; JUNG, Jiyoung; LEE, Jinyeop; KIM, Youngsoo. Micromechanics-Based Homogenization of the Effective Physical Properties of Composites With an Anisotropic Matrix and Interfacial Imperfections. *Frontiers in Materials*, [s. l.], v. 6, 1 mar. 2019. DOI 10.3389/fmats.2019.00021. Disponível em: <https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fmats.2019.00021>. Acesso em: 15 dez. 2021.

SANTOS JUNIOR, Arnaldo dos. Um Estudo sobre Estimativas de Erro de Modelagem em Estruturas de Materiais Heterogêneos. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Alagoas, [S. l.], 2008. Disponível em: https://ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec/dissertacoes_arquivos/Dissertacoes/Arnaldo%20dos%20Santos%20Junior.pdf. Acesso em: 9 fev. 2022.

SMITH, William. F.; HASHEMI, Javad. Fundamentos de Engenharia e Ciência dos Materiais. [Digite o Local da Editora]: Grupo A, 2012. 9788580551150. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580551150/>. Acesso em: 21 nov. 2021.

TAVARES, J. R. A. V.; SILVA, R. M. S. Estudo experimental e numérico do módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson efetivo do concreto. *Revista Científica do IFAL*, v. 1, n. 4, 2012. 42

Tessier-Doyen, Nicolas & Glandus, J. & Huger, Marc. (2007). Experimental and numerical study of elastic behavior of heterogeneous model materials with spherical inclusions. *Journal of Materials Science*. 42. 5826-5834. 10.1007/s10853-006-1386-8.

TIAN, Wenlong; FU, M.W.; QI, Lehua; RUAN, Haihui. Micro-mechanical model for the effective thermal conductivity of the multi-oriented inclusions reinforced composites with imperfect interfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, [s. l.], v. 148, 28 fev. 2020. DOI <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.119167>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931019350859>. Acesso em: 10 jan. 2022.

TIMOTHY, J. J.; MESCHKE, G. International Journal of Solids and Structures A cascade continuum micromechanics model for the effective elastic properties of porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, v. 83, p. 1–12, 2016. 23, 48, 57

VIEIRA, Camila de Sousa. Homogeneização térmica e elástica de compósitos periódicos com interfases. 2018. Tese (Doutorado em materiais) - Universidade Federal de Alagoas, [S. l.], 2018. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/3801/1/Homogeneiza%C3%A7%C3%A3o%20t%C3%A9rmica%20e%20el%C3%A1stica%20de%20comp%C3%B3sitos%20peri%C3%B3dicos%20com%20interfases.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2021.

ANEXO A – MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UM MATERIAL ISOTRÓPICO

A matriz de rigidez de um material isotrópico, em função das propriedades elásticas do material, como coeficiente de Poisson e módulo de Young, é dada conforme equação abaixo:

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Esta matriz pode ser utilizada para os materiais da matriz e inclusão, ou seja, C_m e C_i , respectivamente, alterando apenas as propriedades de cada um deles.

ANEXO B – RELAÇÕES DE PROPRIEDADES ELÁSTICAS PARA MATERIAIS ISOTRÓPICOS

O quadro mostrado na figura 33, apresenta as relações entre os parâmetros elásticos de um material isotrópico.

Figura B.1: Relações de propriedades elásticas de um material isotrópico

	Módulo de Young (E)	Módulo de Cisalhamento (G)	Coefficiente de Poisson(ν)	Módulo de Bulk (K)	Constante de Lamé (λ)
E, G	E	G	$\frac{E - 2G}{2G}$	$\frac{GE}{9G - 3E}$	$\frac{G(E - 2G)}{3G - E}$
E, ν	E	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	ν	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$	$\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$
E, K	E	$\frac{3KE}{9K - E}$	$\frac{3K - E}{6K}$	K	$\frac{K(9K - 3E)}{9K - E}$
G, ν	$2G(1 + \nu)$	G	ν	$\frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$	$\frac{2G\nu}{1 - 2\nu}$
G, K	$\frac{9GK}{3K + G}$	G	$\frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$	K	$K - \frac{2G}{3}$
G, λ	$\frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$	G	$\frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$	$\lambda + \frac{2G}{3}$	λ
ν, K	$3K(1 - 2\nu)$	$\frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$	ν	K	$\frac{3K\nu}{1 + \nu}$
K, λ	$\frac{9K(K - \lambda)}{3K - \lambda}$	$\frac{3(K - \lambda)}{2}$	$\frac{\lambda}{3K - \lambda}$	K	λ

Fonte: Adaptado de Aboudi et al. (2013).

ANEXO C – SIMETRIA MATERIAL

- **Material isotrópico:** Quando tensionado em todas as direções, as repostas são sempre as mesmas. As propriedades são idênticas independentemente da direção. Temos duas constantes independentes.

$$\{ \sigma \} = [C] \{ \varepsilon \} \quad (C.1)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (C.2)$$

A matriz de rigidez $[C]$ é dada conforme foi apresentado em (A.1).

Sabendo que:

$$\bar{D} = \bar{C}^{-1} \quad (C.3)$$

Teremos:

$$[D] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

Logo, as propriedades efetivas de um material isotrópico são calculadas conforme as equações abaixo:

$$\bar{E} = \frac{1}{D_{11}} \quad (C.5)$$

$$\bar{G} = \frac{\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}}{2} \quad (\text{C.6})$$

$$\bar{K} = \frac{\bar{C}_{11} + 2\bar{C}_{12}}{3} \quad (\text{C.7})$$

- **Material transversalmente isotrópico:** Há 5 constantes independentes

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{11} \\ \mathcal{E}_{22} \\ \mathcal{E}_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Reescrevendo (C.8) em função da matriz de flexibilidade:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{11} \\ \mathcal{E}_{22} \\ \mathcal{E}_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{11} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(D_{11} - D_{12}) & 0 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & D_{44} & 0 \\ & & & & & D_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

Sendo a matriz de flexibilidade representada abaixo:

$$[\bar{D}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu'}{E'} & \frac{-\nu'}{E'} & \frac{1}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Onde:

E : Módulo de elasticidade no plano de isotropia.

E' : Módulo de elasticidade na direção normal ao plano de isotropia.

G : Módulo de cisalhamento no plano de isotropia.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{C.11})$$

G' : Módulo de elasticidade na direção normal ao plano de isotropia.

ν : Módulo de elasticidade no plano de isotropia.

ν' : Módulo de elasticidade na direção normal ao plano de isotropia.

A partir de (D.10), podemos calcular as propriedades efetivas de um material isotrópico transversal.

$$\bar{E} = \frac{1}{D_{11}} \quad (\text{C.12})$$

$$\bar{E}' = \frac{1}{D_{33}} \quad (\text{C.13})$$

$$\bar{G} = \frac{1}{D_{55}} \quad (\text{C.14})$$

$$\bar{G}' = \frac{1}{D_{44}} \quad (\text{C.15})$$

$$\nu = -E \cdot D_{12} \quad (\text{C.16})$$

$$\nu' = -E' \cdot D_{32} \quad (\text{C.17})$$

$$\bar{K} = \frac{E'}{3(1-2\nu')} \quad (\text{C.18})$$

ANEXO D – TENSOR DE ESHELBY E A GEOMETRIA DAS INCLUSÕES

O tensor de Eshelby de quarta ordem depende apenas do tensor de rigidez do meio homogêneo e da geometria da inclusão, sendo calculado conforme equação abaixo (ABDIN, 2015).

$$\varepsilon_{ij}^{\Omega} = S_{ijkl}^{\Omega} : \varepsilon_{kl}^* \quad (D.1)$$

Devido ao fato de relacionar dois tensores de deformação simétricos, o tensor de Eshelby satisfaz simetrias menores, de acordo com o que é mostrado abaixo:

$$1. S_{ijkl}^{\Omega} = S_{jikl}^{\Omega} = S_{ijlk}^{\Omega} \quad (D.2)$$

$$2. S_{ijkl}^{\Omega} \neq S_{klij}^{\Omega} \quad (D.3)$$

De maneira reduzida, teremos o tensor de Eshelby, conforme é apresentado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{\Omega} \\ \varepsilon_{22}^{\Omega} \\ \varepsilon_{33}^{\Omega} \\ \varepsilon_{23}^{\Omega} \\ \varepsilon_{31}^{\Omega} \\ \varepsilon_{21}^{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111}^{\Omega} & S_{1122}^{\Omega} & S_{1133}^{\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211}^{\Omega} & S_{2222}^{\Omega} & S_{2233}^{\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311}^{\Omega} & S_{3322}^{\Omega} & S_{3333}^{\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2S_{2323}^{\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{1313}^{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1212}^{\Omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \\ \varepsilon_{33}^* \\ \varepsilon_{23}^* \\ \varepsilon_{31}^* \\ \varepsilon_{21}^* \end{bmatrix} \quad (D.4)$$

• INCLUSÃO ESFEROIDAL

$$S_{1111}^{\Omega} = \frac{1}{2(1-\nu_m)} \left\{ 1 - 2\nu_m + \frac{3\alpha^2-1}{\alpha^2-1} - \left[1 - 2\nu_m + \frac{3\alpha^2}{\alpha^2-1} \right] g \right\} \quad (D.5)$$

$$S_{2222}^{\Omega} = S_{3333}^{\Omega} = \frac{1}{8(1-\nu_m)} \frac{3\alpha^2}{\alpha^2-1} + \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left[1 - 2\nu_m - \frac{9}{4(\alpha^2-1)} \right] g \quad (D.6)$$

$$S_{p(22,33)}^{\Omega} = S_{3322}^{\Omega} = \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2-1)} - \left[1 - 2\nu_m + \frac{3}{4(\alpha^2-1)} \right] g \right\} \quad (\text{D.7})$$

$$S_{2211}^{\Omega} = S_{3311}^{\Omega} = -\frac{1}{2(1-\nu_m)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} + \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left\{ \frac{3\alpha^2}{\alpha^2-1} - (1 - 2\nu_m) \right\} g \quad (\text{D.8})$$

$$S_{1122}^{\Omega} = S_{1133}^{\Omega} = -\frac{1}{2(1-\nu_m)} \left[1 - 2\nu_m + \frac{1}{\alpha^2-1} \right] + \frac{1}{2(1-\nu_m)} \left[1 - 2\nu_m + \frac{3}{3(\alpha^2-1)} \right] g \quad (\text{D.9})$$

$$S_{2323}^{\Omega} = S_{3232}^{\Omega} = \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2-1)} + \left[1 - 2\nu_m - \frac{3}{4(\alpha^2-1)} \right] g \right\} \quad (\text{D.10})$$

$$S_{p(12),p(12)}^{\Omega} = S_{p(13),p(13)}^{\Omega} = \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left\{ 1 - 2\nu_m - \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1} - \frac{1}{2} \left[1 - 2\nu_m - \frac{3(\alpha^2+1)}{\alpha^2-1} \right] g \right\} \quad (\text{D.11})$$

Onde:

P (...): Todas as possíveis permutações dos índices do tensor.

ν_m : Coeficiente de Poisson da matriz.

α : Razão de aspecto da inclusão, dada pela equação abaixo.

$$\alpha = \frac{1}{d} \quad (\text{D.12})$$

Para $\alpha = 1$, a inclusão é esférica

g: Parâmetro que depende da geometria da inclusão, dado conforme equações abaixo

- Prolate ($\alpha > 1$)

$$g = \frac{\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}} \left[\alpha(\alpha^2-1)^{1/2} - \cosh^{-1}\alpha \right] \quad (\text{D.13})$$

- Oblate ($\alpha < 1$)

$$g = \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}} [\cos^1 \alpha - \alpha(1-\alpha^2)^{1/2}] \quad (\text{D.14})$$

- **INCLUSÃO ESFÉRICA**

$$S_{1111}^{\Omega} = S_{2222}^{\Omega} = S_{3333}^{\Omega} = \frac{7-5\nu_m}{15(1-\nu_m)} \quad (\text{D.15})$$

$$S_{1122}^{\Omega} = S_{2233}^{\Omega} = S_{3311}^{\Omega} = S_{1133}^{\Omega} = S_{2211}^{\Omega} = S_{3232}^{\Omega} = \frac{5\nu_m-1}{15(1-\nu_m)} \quad (\text{D.16})$$

$$S_{1212}^{\Omega} = S_{2323}^{\Omega} = S_{3131}^{\Omega} = \frac{4-5\nu_m}{15(1-\nu_m)} \quad (\text{D.17})$$