



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Física  
Programa de Pós-Graduação em Física

ÂNGELO FERNANDES DA SILVA FRANÇA

# **Reescalonamento Temporal e Método dos Parâmetros Ajustáveis como Atalhos para Adiabaticidade**

João Pessoa

2023

Ângelo Fernandes da Silva França

**Reescalamento Temporal e Método dos Parâmetros  
Ajustáveis como Atalhos para Adiabaticidade**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Dr. Bertúlio de Lima Bernardo

João Pessoa

2023

Ata da Sessão Pública da Defesa de tese de Doutorado do aluno Ângelo Fernandes da Silva França, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos trinta dias do mês de março do ano de dois mil e vinte e três, às 09:00, nas dependências do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Física da Matéria Condensada, de **Ângelo Fernandes da Silva França**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Bertúlio de Lima Bernardo (PPGF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Alexandre Rosas (PPGF/UFPB), Thierry Marcelino Passerat de Silans (PPGF/UFPB), Gabriel Horácio Aguilar (UFRJ) e André de Lima Moura (UFAL). Dando início aos trabalhos, o Prof. Bertúlio de Lima Bernardo comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada “*Reescalonamento Temporal e Método dos Parâmetros Ajustáveis como Atalhos para Adiabaticidade*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **30 de março de 2023**.

Documento assinado digitalmente  
 BERTULIO DE LIMA BERNARDO  
Data: 30/03/2023 12:17:37-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo  
Orientador

Documento assinado digitalmente  
 ALEXANDRE DA SILVA ROSAS  
Data: 31/03/2023 14:19:26-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alexandre Rosas  
PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente  
 ANDRE DE LIMA MOURA  
Data: 30/03/2023 15:17:41-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. André de Lima Moura  
UFAL

Documento assinado digitalmente  
 THIERRY MARCELINO PASSERAT DE SILANS  
Data: 31/03/2023 15:24:52-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Thierry Marcelino Passerat de Silans  
PPGF/UFPB



Prof. Dr. Gabriel Horácio Aguilar  
UFRJ

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

F814r França, Ângelo Fernandes da Silva.

Reescalonamento temporal e método dos parâmetros ajustáveis como atalhos para adiabaticidade / Ângelo Fernandes da Silva França. - João Pessoa, 2023.  
85 f. : il.

Orientação: Bertúlio de Lima Bernardo.  
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Controle quântico. 3. Teorema adiabático. 4. Atalhos para adiabaticidade. I. Bernardo, Bertúlio de Lima. II. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)

Dedico essa conquista à minha esposa Thaise Uchôa, aos meus pais José Carlos e Aurilene Gomes e aos meus irmãos José Carlos Filho, Adrielly Tayná.

# Agradecimentos

A Deus, pois sem Ele eu nada seria, pela Sua bondade e pelas imerecidas bênçãos derramadas sobre minha vida .

Ao meu orientador, Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo, pelo exemplo de profissional e por toda dedicação ao longo desses quatro anos. Muito obrigado!

À minha esposa Thaise Uchôa, por todo o apoio, confiança e incentivo durante esta jornada e por todos os momentos em que estive ao meu lado, me trazendo Paz e sendo meu porto seguro. Te amo!

À minha família, meus pais José Carlos e Aurilene e meus irmãos José Carlos Filho e Adrielly, por todo o apoio e incentivo durante esta etapa da minha vida. Amo vocês.

Aos meus avós, por sempre terem me ajudaram em meus estudos e aos meus familiares, de um modo geral, por todo incentivo e por sempre torcerem por mim. Muito obrigado!

Aos colegas do Grupo de Teoria Quântica: Andrea Freire, Willames Magalhães, Lukas Monteiro, Carlos Ribeiro e Acson Clementino. Em especial ao Jair Andrade pela parceria durante esses trabalhos que realizamos juntos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFPB, pela oportunidade da realização do doutorado em Física.

A todos os professores do PPG Física UFPB por contribuírem para a minha formação de doutor.

À banca examinadora por terem aceitado e dividido comigo este momento tão ‘ importante e esperado.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu chegasse até aqui. Muito Obrigado!

À CAPES pelo suporte financeiro.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”

Isaac Newton

# Resumo

Atalhos para a adiabaticidade (APA) são protocolos que aceleram uma dinâmica quântica adiabática, que por definição são dinâmicas que demandam um tempo longo de evolução, de modo a reproduzir os mesmos resultados, mas, em um intervalo de tempo mais curto. Tal encurtamento é de fundamental importância pois, devido o processo adiabático ocorrer de modo lento, torna o sistema sujeito a efeitos indesejados como a decoerência, ruídos externos e até mesmo transições entre os autoestados do hamiltoniano. Nesta tese estudamos alguns desses métodos de APA, em especial o método de reescalonamento temporal em que fazemos a ilustração nos casos do oscilador harmônico paramétrico e na inversão de população em um sistema de dois níveis, onde para este último caso realizamos uma análise da estabilidade do método. Desenvolvemos também uma nova proposta de APA denominada de método de parâmetros ajustáveis, onde, através de um termo adicionado ao hamiltoniano de referência é possível acelerar uma dinâmica adiabática. Tanto o método dos parâmetros ajustáveis quanto o de reescalonamento temporal não exigem qualquer informação acerca dos autoestados instantâneos do hamiltoniano de referência. Para ilustrarmos esta nova abordagem consideramos os cenários do oscilador harmônico paramétrico e o da inversão de spin.

**Palavras-chave:** Controle quântico, teorema adiabático, atalhos para adiabaticidade.

# Abstract

Shortcuts to adiabaticity (STA) are protocols that accelerate adiabatic quantum dynamics, which by definition are dynamics that require a long evolution time, in order to reproduce the same results, but in a shorter time interval. Such shortening is of fundamental importance because, due to the adiabatic process occurring slowly, it makes the system subject to caused effects such as decoherence, external noise and even transitions between the hamiltonian eigenstates. In this thesis we study some of these STA methods, in particular the time-rescaling method in which we make an illustration in the cases of the parametric harmonic oscillator and in the population inversion in a two-level system, where for the latter case we perform an analysis of the stability of the method. We also developed a new STA proposal called the tunable parameters method, where, through a term added to the reference Hamiltonian, it is possible to accelerate an adiabatic dynamics. Both the tunable parameters and the time-rescaling methods did not require any information about the instantaneous eigenstates of the reference Hamiltonian. To illustrate this new approach, we consider the parametric harmonic oscillator and spin inversion scenarios.

**Keywords:** Quantum control, adiabatic theorem, shortcuts to adiabaticity.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de uma evolução adiabática para uma partícula em uma caixa. No caso a) a largura da caixa é $L_0$ e a partícula está no estado fundamental. Em b) movemos a parede da caixa lentamente (regime adiabático) de modo que a largura é dada por $L_0 + vt$ , desta forma a partícula se mantém no estado fundamental. Em c) movemos a parede da caixa de forma rápida, $v' \gg v$ , de modo que, o sistema não acompanha a mudança e permanece no estado fundamental apenas durante um curto intervalo de tempo, ou seja, será uma combinação linear das várias autofunções para a caixa com a parede deslocada. . . . .	25
Figura 2 – Funções de onda (linhas sólidas) e níveis de energias (linhas tracejadas), para alguns valores de $n$ , da partícula em uma caixa em uma dimensão.	26
Figura 3 – Probabilidade de Transição entre o estado fundamental e $n = 1$ (linhas sólidas), $n = 2$ (linhas tracejadas) e $n = 3$ (linha pontilhada) para a aproximação adiabática (vermelha) e a solução exata (azul) em função de $v$ . Adaptado da referência [25]. . . . .	28
Figura 4 – Comportamento das funções $\Omega_R(t)$ , $\Delta(t)$ e $\Omega_a(t)$ com parâmetros $\Omega_0 = 2$ , $\beta = \sqrt{2}$ e $t_0 = 1$ . . . . .	42
Figura 5 – Evolução temporal das populações dos dois níveis atômicos para o protocolo contradiabático com o estado inicial $ 1\rangle$ e parâmetros $\Omega_0 = 2$ , $\beta = \sqrt{2}$ e $t_0 = 1$ . . . . .	43
Figura 6 – Comportamento da função de reescalonamento $f(\tau)$ para alguns valores do parâmetro de contração temporal $a$ com $t_f = 6$ . . . . .	47
Figura 7 – Comportamento de $f'(\tau)$ para alguns valores do parâmetro de contração temporal $a$ com $t_f = 6$ . . . . .	47
Figura 8 – Oscilador paramétrico com $\omega(t)$ crescente no tempo e que segue um protocolo adiabático. Fonte: Ref.[1] . . . . .	49
Figura 9 – Frequencia angular em função do tempo para alguns valores do parâmetro de contração temporal $a$ . A linha tracejada representa a frequência $\omega(t)$ do protocolo de referência. Em todos os casos assumimos $\omega_f = 6\omega_0$ .	50
Figura 10 – Dependência temporal do campo magnético para alguns valores do parâmetro $a$ , onde adotamos $B_0 = 1$ . . . . .	52
Figura 11 – Comportamento da frequência de Rabi $\Omega_R(t)$ e da dessintonia $\Delta(t)$ com parâmetros $\Omega_0 = \beta^2 = 2$ e $t_0 = 1$ . . . . .	55
Figura 12 – Comportamento temporal das populações dos níveis de energia atômicos com estado inicial $ n_+(0)\rangle \approx  1\rangle$ e parâmetros $\Omega_0 = \beta^2 = 2$ e $t_0 = 1$ . . . . .	56

Figura 13 – Dependência temporal da frequência de Rabi $\tilde{\Omega}_R$ e da dessintonia $\tilde{\Delta}$ para o protocolo TR. Em (a) o fator de contração temporal assume o valor $a = 2$ , enquanto em (b), temos $a = 10$ . Parâmetros: $\Omega_0 = \beta^2 = 2$ e $t_0 = 1$ . . . . .	57
Figura 14 – Evolução temporal das populações descritas pelas eq. (4.36) e (4.37) para o protocolo TR. Em (a) o fator de contração temporal assume o valor $a = 2$ , enquanto em (b), temos $a = 10$ . Parâmetros: $\Omega_0 = \beta^2 = 2$ e $t_0 = 1$ . . . . .	58
Figura 15 – Fidelidade ( $F = P_2$ ) versus erros sistemáticos: (a) na frequência de Rabi $\Omega_0 \rightarrow \Omega_0(1 + \epsilon)$ , e (b) na dessintonia $\beta^2 \rightarrow \beta^2(1 + \delta)$ . As linhas laranja e tracejada preta correspondem à dinâmica referente ao protocolo TR para os casos $a = 2$ e $a = 10$ , respectivamente. A linha azul tracejada corresponde à fidelidade de um pulso $\pi$ descrita por $F = \text{sen}^2[(1 + \epsilon)\pi/2]$ . Mesmos parâmetros que na figura 14. . . . .	59
Figura 16 – a) Comportamento temporal de um hamiltoniano arbitrário $\hat{H}(t)$ agindo no intervalo $\Delta t = t_f$ . b) Comportamento temporal de um hamiltoniano efetivo arbitrário $\hat{\mathcal{H}}(t)$ agindo no intervalo $\Delta t = t_f/a$ . Podemos observar que $\hat{\mathcal{H}}(0) = \hat{H}(0)$ e $\hat{\mathcal{H}}(t_f/a) = \hat{H}(t_f)$ . O parâmetro independente $\mathcal{A}$ do potencial auxiliar $\hat{\mathcal{V}}(t, a)$ contido em $\hat{\mathcal{H}}(t)$ é ajustado para garantir que as áreas representadas em a) e b) sejam iguais. . . . .	66
Figura 17 – Comportamento temporal de um hamiltoniano arbitrário $\hat{H}(t)$ . Quando reduzimos o tempo de evolução, provocamos uma diferença entre os hamiltonianos nos instantes $t_f$ e $t_f/a$ , respectivamente. Assim, para compensar essa diferença definimos $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{B} \equiv [\hat{H}(t_f) - \hat{H}(t_f/a)]a/t_f$ que está presente no potencial auxiliar e será o termo responsável por garantir que $\hat{\mathcal{H}}(t_f/a) = \hat{H}(t_f)$ . . . . .	67
Figura 18 – Comportamento temporal da frequência angular $\tilde{\omega}(t)$ em um regime de compressão para alguns valores do fator de contração temporal $a$ . A curva $a = 1$ equivale ao protocolo de referência, como de fato deveria ser. Assumimos aqui $\omega_f = 5\omega_0$ . . . . .	70
Figura 19 – Comportamento do campo magnético $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ responsável pela modulação do momento linear da partícula sujeita ao potencial harmônico para alguns valores do parâmetro de contração temporal $a$ . $B_0$ representa a intensidade do campo magnético constante do protocolo de referência. Podemos novamente perceber que $a = 1$ é equivalente ao protocolo de referência. . . . .	72

Figura 20 – Campo magnético dependente do tempo necessário para realizar a inversão de spin para alguns valores do fator de contração  $a$ . Podemos perceber que o caso  $a = 1$  é equivalente ao protocolo de referência. Notamos também que, quanto mais rápido ocorre o processo, o valor máximo da intensidade do campo magnético também aumenta. A intensidade do campo magnético de referência foi considerada  $B_0 = 2$ . . 76

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO E ORGANIZAÇÃO DA TESE</b>	<b>14</b>
<b>1.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização da Tese</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>TEOREMA ADIABÁTICO E APROXIMAÇÃO ADIABÁTICA</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>O Teorema Adiabático</b>	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Aproximação Adiabática</b>	<b>20</b>
<b>2.3</b>	<b>Condições para a Adiabaticidade</b>	<b>21</b>
2.3.1	Condição sobre o hamiltoniano $\hat{H}(t)$	21
2.3.2	Condição sobre o tempo de evolução	22
<b>2.4</b>	<b>Partícula em uma caixa unidimensional</b>	<b>24</b>
<b>3</b>	<b>ATALHOS PARA ADIABATICIDADE</b>	<b>29</b>
<b>3.1</b>	<b>Engenharia inversa baseada em invariantes</b>	<b>29</b>
3.1.1	Invariantes de Lewis-Riensenfeld	29
3.1.2	Engenharia Inversa	33
<b>3.2</b>	<b>Método Contradiabático</b>	<b>35</b>
3.2.1	Formulação de Demirplak e Rice	35
3.2.2	Formulação de Berry	37
3.2.3	Inversão de População em um Sistema de Dois Níveis	39
<b>4</b>	<b>REESCALONAMENTO TEMPORAL</b>	<b>44</b>
<b>4.1</b>	<b>Generalidades</b>	<b>44</b>
4.1.1	Função de reescalonamento $f(\tau)$	45
<b>4.2</b>	<b>Oscilador paramétrico</b>	<b>48</b>
<b>4.3</b>	<b>Inversão de população em um sistema de dois níveis</b>	<b>53</b>
4.3.1	Sistema de dois níveis	54
4.3.2	Aplicando o método de reescalonamento temporal	56
4.3.3	Estabilidade	58
<b>4.4</b>	<b>Comentários adicionais</b>	<b>60</b>
<b>5</b>	<b>PARÂMETROS AJUSTÁVEIS</b>	<b>61</b>
<b>5.1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>61</b>
<b>5.2</b>	<b>Método</b>	<b>62</b>
<b>5.3</b>	<b>Ajuste dos parâmetros <math>\mathcal{A}</math> e <math>\mathcal{B}</math></b>	<b>64</b>
5.3.1	Parâmetro $\mathcal{A}$	64
5.3.2	Parâmetro $\mathcal{B}$	66

5.4	Oscilador harmônico paramétrico . . . . .	68
5.5	Partícula de Spin $1/2$ em um campo magnético . . . . .	73
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .	77
6.1	Perspectivas . . . . .	78
	REFERÊNCIAS . . . . .	80

# 1 Introdução e organização da tese

## 1.1 Introdução

Nos últimos anos, a busca por métodos que possibilitem o controle da dinâmica de sistemas quânticos têm ganhado cada vez mais atenção e os resultados dessas pesquisas vem proporcionando avanços em diversas áreas, como por exemplo, física atômica e nuclear, computação quântica e no desenvolvimento de tecnologias quânticas [2–9]. Contudo, quando consideramos dinâmicas quânticas em que desejamos obter resultados com altas fidelidade e robustez nos deparamos com limitações impostas pelo teorema adiabático [10, 11]. Tal teorema, proposto por Born e Fock (1928), nos diz que: *Um sistema físico permanece em seu autoestado instantâneo, não degenerado, ao longo da evolução temporal, se sobre ele é aplicada uma perturbação suficientemente pequena.* Deste modo, evoluções ditas adiabáticas são processos que por definição demandam um tempo longo. Outro ponto acerca dos processos adiabáticos é que estes não permitem transições entre estados, sendo assim, uma vez que o sistema é preparado em um dado estado inicial, através dessa transformação, sabemos que o sistema evoluirá seguindo tal estado.

Devido à longa duração de um processo adiabático, efeitos indesejados como decoerência e ruídos externos podem acontecer a um determinado sistema quântico que segue essa evolução. Tais efeitos são muitas vezes não apenas indesejáveis, mas até mesmo prejudiciais. Assim, o desenvolvimento de técnicas para contornar o problema temporal imposto pelo teorema adiabático, e conseqüentemente minimizar estes efeitos indesejados, se transformou em uma importante fonte de pesquisas teóricas e experimentais [12–18]. Essas técnicas foram denominadas por Cheng (2010) [12] como atalhos para adiabaticidade (APA), em inglês *shortcuts to adiabaticity* (STA).

Atalhos para adiabaticidade são então, rotas rápidas para obter os mesmos resultados finais que transformações adiabáticas (lentas). A principal motivação para a aplicação dos métodos STA para sistemas quânticos é manipulá-los em escalas de tempo mais curtas que os tempos de evoluções dos processos adiabáticos. Entre os STA mais populares e estudados na literatura, podemos citar as abordagens de engenharia inversa usando os invariantes de Lewis-Riesenfeld (LR) [19], a técnica de avanço rápido (em inglês *fast-forward* - FF) [20–22], e o método contradiabático (CD) [23–25], sendo este último um dos métodos mais utilizados na literatura. Tais técnicas de atalhos são utilizadas em diversos tipos de aplicações, como por exemplo, controle da dinâmica quântica de um qubit em átomos frios [16], armadilhas de ions [26, 27], qubits supercondutores [28], computação quântica adiabática [29–31], sistemas de dois e três níveis [13, 32], entre outros.

Proposto por Demirplack e Rice [24, 25], e de forma independente por Berry [23], o

método contradiabático tem como ideia principal a determinação de um termo chamado hamiltoniano contra-diabático  $\hat{H}_{CD}(t)$ , ou simplesmente termo contradiabático, que deve ser adicionado ao hamiltoniano original (adiabático),  $\hat{H}(t)$  do problema de modo que o hamiltoniano efetivo, definido pela soma desses dois termos  $\hat{H}_{eff} = \hat{H}(t) + \hat{H}_{CD}(t)$ , imite a evolução adiabática desejada. O termo contradiabático é então definido por  $\hat{H}_{CD}(t) = i\hbar \sum_n (|\partial_t n_t\rangle \langle n_t| - \langle n_t|\partial_t n_t\rangle |n_t\rangle \langle n_t|)$ , onde  $|n_t\rangle$  são os autoestados instantâneos do hamiltoniano de referência, ou seja, para construir um protocolo contradiabático se faz necessário informação acerca dos autoestados instantâneos do protocolo de referência.

Recentemente, uma nova abordagem de STA foi proposta por Bernardo [1], chamado método de reescalonamento temporal, em inglês time-rescaling method (TR), que consiste em reescalonar a variável temporal, através da mudança  $t \rightarrow f(\tau)$ , no operador de evolução quântica a fim de encontrar dinâmicas rápidas que permitam reproduzir o mesmo estado final e condições de um processo quântico de referência. Entretanto, diferente do método contradiabático, o reescalonamento temporal é um método que não necessita de qualquer informação sobre os autoestados do hamiltoniano original. Um ponto importante sobre este método é que ele não impõe nenhuma restrição à dinâmica de referência, ou seja, não exige que esta seja adiabática. Contudo, quando a dinâmica de referência se trata de uma evolução adiabática, o método funciona como um STA. Já sobre o tempo de evolução, esse novo processo é regido por um parâmetro  $a$ , chamado fator de contração temporal, e para o caso em que  $a > 1$  temos que o tempo de evolução será  $a$  vezes mais rápido que o de referência.

O foco de interesse nessa tese é então, estudar alguns desses métodos de atalhos para adiabaticidade em especial a realização de aplicações utilizando o método de reescalonamento temporal. Além disso, também é apresentada nesta tese uma nova proposta de atalho para adiabaticidade, chamado de método dos parâmetros ajustáveis [33]. Tal proposta consiste em adicionar um termo potencial extra  $\tilde{V}(t)$  ao hamiltoniano de referência  $\hat{H}(t)$ , de modo que o efeito conjunto desses dois termos através de um hamiltoniano efetivo  $\hat{H}_{eff}(t) = \hat{H}(t) + \tilde{V}(t)$  é capaz de acelerar uma dinâmica quântica adiabática. Esse termo potencial extra é ajustado de acordo com cada problema abordado, daí o nome do método. Assim como o método de reescalonamento temporal não exige qualquer informação sobre os autoestados instantâneos do hamiltoniano de referência. O método dos parâmetros ajustáveis apresenta uma vantagem do ponto de vista experimental uma vez que não necessita de nenhuma manipulação nos campos/agentes do protocolo de referência, mas sim, a adição de uma nova interação independente através do termo extra. Por fim, a organização e estruturação da tese são tratadas a seguir.

## 1.2 Organização da Tese

Após a introdução, onde apresentamos e discutimos de forma sucinta as ideias relevantes que embasam este trabalho, a organização da tese se dará da seguinte forma:

- No Capítulo 2 realizamos uma revisão bibliográfica sobre o teorema adiabático em sua forma tradicional, onde discutimos as implicações físicas presentes nas dinâmicas que obedecem a tal teorema. Após isso apresentamos as condições de validade que tais evoluções adiabáticas devem satisfazer. Por fim, realizamos e discutimos a aplicação do teorema adiabático no bem conhecido caso de uma partícula em uma caixa unidimensional.
- No Capítulo 3 apresentamos as principais ideias referentes aos atalhos para adiabaticidade e discutimos detalhadamente dois importantes métodos de STA. Especificamente, abordaremos o método de engenharia inversa baseada em invariantes de Lewis-Riesenfeld, e o método contradiabático, onde, para este último, reproduzimos o exemplo da inversão de população para um sistema de dois níveis.
- Em seguida, no Capítulo 4 realizamos uma revisão do método de reescalonamento temporal, onde detalhamos e discutimos a funcionalidade e as características do método. Em seguida, utilizamos o método em dois casos de grande interesse teórico e prático, sendo eles o oscilador harmônico paramétrico e a inversão de população em um sistema de dois níveis. Para este último exemplo, realizamos também uma análise sobre a estabilidade do método quando consideramos erros experimentais.
- No capítulo 5 apresentamos o método dos parâmetros ajustáveis. Método este que representa uma nova proposta de STA. Aqui descrevemos todas as características e funcionamento do método, bem como as diferenças entre este e os demais métodos discutidos nesta tese. Para ilustrar o funcionamento, realizamos a aplicação em dois exemplos: o oscilador harmônico paramétrico e a inversão de spin.
- Encerramos esta tese apresentando, no capítulo 6, as conclusões obtidas ao final da execução dos projetos que deram origem a este trabalho. Também discutimos brevemente sobre as possíveis extensões desse projeto, mencionando as perspectivas de estudos futuros.

## 2 Teorema Adiabático e Aproximação Adiabática

Neste capítulo será feita uma breve apresentação do Teorema Adiabático, na sua forma tradicional, bem como um detalhamento sobre a aproximação adiabática. Além disso são feitas as demonstrações matemáticas das condições necessárias para que tal aproximação seja válida, e discutiremos suas implicações físicas na dinâmica de um sistema quântico. É abordado também um exemplo de processo adiabático de uma partícula em uma caixa em uma dimensão.

### 2.1 O Teorema Adiabático

Sabemos que em geral, sistemas físicos estão sujeitos a interações causadas por agentes externos. Assim, ao estudarmos a dinâmica de um sistema estamos interessados em entender sua evolução quando sujeito a tais agentes. Em Mecânica Clássica, tal estudo é feito através das equações de movimento obtidas através das Leis de Newton, formalismo de Lagrange ou formalismo de Hamilton-Jacobi [34]. Já em Mecânica Quântica, a evolução de um sistema físico é regida pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck,  $\hat{H}(t)$  é o operador hamiltoniano e  $|\psi(t)\rangle$  é o estado do sistema. Em geral, a solução da equação de Schrödinger resulta em um sistema de equações diferenciais acopladas com coeficientes que podem depender do tempo. Ao resolvermos tal equação estamos interessados em determinar  $|\psi(t)\rangle$  que está sujeito ao hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  [35].

De modo geral, a evolução de um sistema quântico pode acontecer de diversas maneiras. Por exemplo, ocorrer transições entre diferentes níveis de energia ou alteração das probabilidades referentes a cada autoestado de energia. Contudo, uma possível evolução é tal que o sistema seja controlado de modo que, durante todo o protocolo de evolução, ele seja mantido no mesmo autoestado de energia. Essa é a essência do Teorema Adiabático que será discutido e demonstrado neste capítulo.

O Teorema Adiabático e as noções de evoluções adiabáticas são utilizadas em trabalhos [36–40], sendo recentemente utilizado em diversas pesquisas nas áreas de computação quântica adiabática e controle quântico [41–47]. Em sua versão tradicional, o Teorema adiabático foi primeiramente proposto por Born e Fock [10] em 1928 e posteriormente, em 1950, com uma demonstração matematicamente mais rigorosa, por Kato [11]. O enunciado proposto por Born e Fock é dado da seguinte forma:

**Teorema:** *Seja um sistema quântico governado por um hamiltoniano arbitrário dependente do tempo. Desta forma, o sistema físico é mantido em seu autoestado instantâneo se uma perturbação atuar sobre ele de forma suficientemente lenta e se o espectro do hamiltoniano for não-degenerado.*

O Teorema Adiabático nos diz então que, se o sistema é preparado em um autoestado  $|E_n(t_0)\rangle$  de  $\hat{H}(t_0)$ , em um tempo  $t_f$  posterior, após uma evolução suficientemente lenta do hamiltoniano, o sistema terá evoluído para o autoestado  $|E_n(t_f)\rangle$  de  $\hat{H}(t_f)$ . É importante ressaltar que a evolução adiabática não garante que as autoenergias nos instantes  $t$  e  $t_0$  sejam iguais, em geral  $E_n(t_0) \neq E_n(t_f)$ . O sistema evoluirá seguindo no mesmo autoestado, ou seja, sem transições entre níveis de energia.

Vamos a partir de agora demonstrar o Teorema Adiabático (TA), em sua forma tradicional. Seja  $|\psi(t)\rangle$  o estado evoluído do sistema que é solução da Equação de Schrödinger (2.1). Podemos, sem perda de generalidade, expandir esse estado como combinação linear dos autoestados instantâneos de  $\hat{H}(t)$ , cuja forma mais geral é

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{i\theta_n(t)} |E_n(t)\rangle, \quad (2.2)$$

com  $\theta(t)$ , sendo a fase dinâmica, definida por

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt', \quad (2.3)$$

onde, por simplicidade, escolhemos  $t_0 = 0$ .

A fase dinâmica está relacionada com o modo com que as autoenergias variam com o tempo [35]. É fácil observarmos que, se estivermos tratando de casos estacionários, a fase dinâmica se reduz a  $\theta_n(t) = -E_n t / \hbar$ , que implicará em uma evolução usual quando o hamiltoniano é independente do tempo.

Ainda sobre a eq. (2.2),  $c_n(t)$  são coeficientes complexos, cujo módulo quadrado nos informa a probabilidade de, ao realizarmos uma medida de energia, obtermos o valor  $E_n(t)$ . Os autoestados associados  $\{|E_n(t)\rangle\}$  formam uma base ortonormal instantânea de  $\hat{H}(t)$ , que satisfaz a seguinte equação de autovalores

$$\hat{H}(t) |E_n(t)\rangle = E_n(t) |E_n(t)\rangle. \quad (2.4)$$

Vamos ainda considerar o caso geral em que  $[\hat{H}(t), \hat{H}(t')] \neq 0$  e que os autovalores são não degenerados [11].

Substituindo a expressão do estado evoluído (2.2) na equação de Schrödinger (2.1), ficamos com

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left[ \sum_n c_n(t) e^{i\theta_n(t)} |E_n(t)\rangle \right] = \hat{H}(t) \sum_n c_n(t) e^{i\theta_n(t)} |E_n(t)\rangle. \quad (2.5)$$

Aplicando a regra da derivada do produto do termo da esquerda e considerando a equação de autovalores (2.4), temos

$$i\hbar \sum_n \left[ \dot{c}_n(t) |E_n(t)\rangle + ic_n(t)\dot{\theta}_n(t) |E_n(t)\rangle + c_n(t) |\dot{E}_n(t)\rangle \right] e^{i\theta_n(t)} = \sum_n c_n(t) e^{i\theta_n(t)} E_n(t) |E_n(t)\rangle, \quad (2.6)$$

onde  $(\dot{\phantom{x}})$  representa a derivada com relação ao tempo.

Atuando  $\langle E_m(t)|$  pela esquerda, a Eq. (2.6) fica

$$\begin{aligned} \langle E_m(t)| i\hbar \sum_n \left[ \dot{c}_n(t) |E_n(t)\rangle + ic_n(t)\dot{\theta}_n(t) |E_n(t)\rangle + c_n(t) |\dot{E}_n(t)\rangle \right] e^{i\theta_n(t)} = \\ \langle E_m(t)| \sum_n c_n(t) e^{i\theta_n(t)} E_n(t) |E_n(t)\rangle \Rightarrow \\ i\hbar \sum_n \left[ \dot{c}_n(t)\delta_{mn} + ic_n(t)\dot{\theta}_n(t)\delta_{mn} + c_n(t) \langle E_m(t)|\dot{E}_n(t)\rangle \right] e^{i\theta_n(t)} = \sum_n c_n(t) e^{i\theta_n(t)} E_n(t)\delta_{mn}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde utilizamos a condição de ortonormalidade dos autoestados da base  $\langle E_m(t)|E_n(t)\rangle = \delta_{mn}$ , com  $\delta_{nm}$  sendo a delta de Kronecker.

Para darmos continuidade vamos levar em conta a propriedade da delta de Kronecker  $\sum_i \delta_{ij} b_i = b_j$ , como também que, da eq. (2.3),  $\dot{\theta}_n(t) = -E_n(t)/\hbar$ . Desta forma, a eq. (2.7) fica

$$i\hbar \left[ \dot{c}_m(t) e^{i\theta_m(t)} - \frac{i}{\hbar} c_m(t) E_m(t) e^{i\theta_m(t)} + \sum_n c_n(t) \langle E_m(t)|\dot{E}_n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} \right] = c_m(t) e^{i\theta_m(t)} E_m(t). \quad (2.8)$$

Podemos perceber que o segundo termo do lado esquerdo é igual ao termo do lado direito da igualdade. Assim, separando o somatório nos termos em que  $n = m$  e  $n \neq m$ , a equação anterior pode ser reescrita como

$$\dot{c}_m(t) = -c_m(t) \langle E_m(t)|\dot{E}_m(t)\rangle - \sum_{n \neq m} c_n(t) \langle E_m(t)|\dot{E}_n(t)\rangle e^{i\theta_{nm}}, \quad (2.9)$$

onde  $\theta_{nm} \equiv \theta_n - \theta_m$ .

Para obtermos uma expressão mais explícita para  $\langle E_m(t)|\dot{E}_n(t)\rangle$ , iremos recorrer novamente à equação de autovalores (2.4), onde iremos derivar com respeito ao tempo. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\hat{H}(t) |E_n(t)\rangle] &= \frac{d}{dt} [E_n(t) |E_n(t)\rangle] \Rightarrow \\ \dot{\hat{H}}(t) |E_n(t)\rangle + \hat{H}(t) |\dot{E}_n(t)\rangle &= \dot{E}_n(t) |E_n(t)\rangle + E_n(t) |\dot{E}_n(t)\rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Tomando o produto interno com  $\langle E_m(t)|$  na equação anterior, ficamos com

$$\langle E_m(t)| \dot{\hat{H}}(t) |E_n(t)\rangle + \langle E_m(t)| \hat{H}(t) |\dot{E}_n(t)\rangle = \dot{E}_n(t) \langle E_m(t)|E_n(t)\rangle + E_n(t) \langle E_m(t)|\dot{E}_n(t)\rangle. \quad (2.11)$$

Como o interesse é reescrever o segundo termo da equação (2.9), temos que o primeiro termo do lado direito da equação (2.11) se anula devido a ortonormalidade dos estados base. Assim, a equação anterior pode ainda ser reescrita como

$$\langle E_m(t) | \dot{\hat{H}}(t) | E_n(t) \rangle + E_m(t) \langle E_m(t) | \dot{E}_n(t) \rangle = E_n(t) \langle E_m(t) | \dot{E}_n(t) \rangle, \quad (2.12)$$

onde utilizamos o fato que  $\langle E_m(t) | \hat{H}(t) = \langle E_m(t) | E_m(t)$ . Desta forma, obtemos

$$\langle E_m(t) | \dot{E}_n(t) \rangle = \frac{\langle E_m(t) | \dot{\hat{H}}(t) | E_n(t) \rangle}{E_n(t) - E_m(t)}. \quad (2.13)$$

Substituindo a equação (2.13) em (2.9), temos

$$\dot{c}_m(t) = -c_m(t) \langle E_m(t) | \dot{E}_m(t) \rangle - \sum_{n \neq m} c_n(t) \frac{\langle E_m(t) | \dot{\hat{H}}(t) | E_n(t) \rangle}{E_n(t) - E_m(t)} e^{i\theta_{nm}}. \quad (2.14)$$

A relação acima é exata, e nos dá a dinâmica dos coeficientes  $c_m$ . Tal evolução possui contribuição de dois termos: o primeiro diz respeito à variação do m-ésimo autoestado  $|\dot{E}_m(t)\rangle$ , enquanto o segundo termo possui uma mistura entre o m-ésimo e n-ésimo autoestados, além da diferença de energias entre tais autoestados e a variação do hamiltoniano. Vale a pena ressaltar também que esse termo de mistura é o responsável por acoplar o sistema de equações diferenciais oriundas de (2.14).

Outro ponto importante é que a equação (2.14) é válida somente para os casos em que o espectro de energias é não degenerado, como estipulado pelo Teorema Adiabático. Embora seja possível obtermos uma expressão que envolva os casos em que o espectro é degenerado, generalizando o caso tradicional do Teorema Adiabático, não será discutida tal generalização neste trabalho.

## 2.2 Aproximação Adiabática

Ao impormos determinadas condições ao sistema, podemos tornar o segundo termo do lado direito em (2.14) negligenciável, desta forma, “eliminando” o termo de mistura entre os autoestados do hamiltoniano, desacoplando assim as equações diferenciais oriundas do Teorema Adiabático.

A Aproximação Adiabática consiste em impormos que a taxa com que  $\hat{H}(t)$  varia com o tempo seja muito menor que a diferença de energias  $E_n(t) - E_m(t)$  entre o n-ésimo e m-ésimo autoestado. Assim, a eq. (2.14) se torna

$$\dot{c}_m(t) \approx -c_m(t) \langle E_m(t) | \dot{E}_m(t) \rangle, \quad (2.15)$$

onde desconsideramos o segundo termo do lado direito da eq. (2.14). A justificativa e significado de desconsiderarmos este termo será esclarecida na seção seguinte.

Podemos resolver a eq. (2.15) de forma direta, obtendo o seguinte resultado

$$c_m(t) = c_m(0)e^{i\gamma_m(t)}, \quad (2.16)$$

com  $\gamma_n(t)$  sendo a fase geométrica ou fase de Berry [38], definida por

$$\gamma_m(t) = i \int_0^t \langle E_m(t) | \dot{E}_m(t) \rangle dt. \quad (2.17)$$

Note a partir eq.(2.16) que determinamos como ocorre a evolução dos coeficientes  $c_m(t)$ , onde, devido à aproximação adiabática, pudemos encontrar relações em que cada um deles evolui de forma independente. Podemos agora retornar à expressão para o estado evoluído  $|\psi(t)\rangle$ , eq. (2.2), e descrevermos seu comportamento em uma dinâmica adiabática,

$$|\psi(t)\rangle \approx \sum_n c_n(0) e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} |E_n(t)\rangle. \quad (2.18)$$

Um fato importante a ser observado sobre a expressão obtida acima é que, devido às condições impostas pela aproximação adiabática, não há mistura de autoestados, ou seja, não existem transições entre os níveis de energia.

## 2.3 Condições para a Adiabaticidade

Para encontrarmos uma solução para a evolução do estado segundo a aproximação adiabática, foi necessário realizarmos algumas considerações acerca da dinâmica do sistema para que pudéssemos desacoplar os coeficientes  $c'_n$ s e conseqüentemente obtermos uma solução aceitável. Faremos agora uma discussão e derivação de duas condições equivalentes, necessárias para que a aproximação adiabática seja válida [48, 49]

### 2.3.1 Condição sobre o hamiltoniano $\hat{H}(t)$

Durante a seção anterior foi mencionada e imposta a condição que a taxa com que o hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  varia com o tempo deve ser muito menor que diferença de energias entre o  $n$ -ésimo e  $m$ -ésimo autoestados. Em outras palavras, a dinâmica do sistema deve acontecer de forma lenta afim de garantir que não haja transição entre os autoestados de energia. Esta condição imposta sobre o hamiltoniano pode ser enunciada e expressa matematicamente por:

*Seja um hamiltoniano dependente do tempo  $\hat{H}(t)$ , a evolução do sistema pode ser descrita pela aproximação adiabática, se for obedecida a seguinte relação*

$$\max_{t \in [0, T]} \left| \frac{\langle E_m(t) | \dot{\hat{H}}(t) | E_n(t) \rangle}{E_n(t) - E_m(t)} \right| \ll 1, \quad \forall (n, m) \quad (2.19)$$

onde  $T$  é o tempo total da evolução.

### 2.3.2 Condição sobre o tempo de evolução

Da condição sobre o hamiltoniano, temos que, quanto menor for a diferença entre as autoenergias  $E_n(t)$  e  $E_m(t)$ , a mudança temporal no hamiltoniano deve ser ainda mais lenta, o que nos leva a um tempo de evolução muito grande. Desta forma, podemos nos fazer a seguinte pergunta: o quão grande deve ser o tempo total de evolução para que a aproximação adiabática seja válida? Para respondermos essa pergunta, vamos tomar como ponto de partida a equação (2.14) .

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [c_n(t)e^{-i\gamma_n(t)}] &= e^{-i\gamma_n(t)} [\dot{c}_n(t) - i\dot{\gamma}_n(t)c_n(t)] \\ &= e^{-i\gamma_n(t)} [\dot{c}_n(t) + \langle E_n(t) | \dot{E}_n(t) \rangle c_n(t)]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Desta forma, retornando para a (2.14) e substituindo (2.20), podemos reescrevê-la como

$$\frac{d}{dt} [c_n(t)e^{-i\gamma_n(t)}] = - \sum_{n \neq m} c_n(t) \frac{\langle E_m(t) | \hat{H}(t) | E_n(t) \rangle}{E_{nm}} e^{i\theta_{nm}} e^{-i\gamma_n(t)}, \quad (2.21)$$

com  $E_{nm}(t) \equiv E_n(t) - E_m(t)$ .

Vamos agora introduzir uma nova escala de tempo através da parametrização

$$s = \frac{t}{T}, \quad (2.22)$$

onde  $T$  é o tempo total da evolução. Escrevendo a eq. (2.21) em termos do parâmetro  $s$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial s} [c_n(s)e^{-i\gamma_n(s)}] = - \sum_{n \neq m} c_n(s) \frac{\langle E_m(s) | \partial_s \hat{H}(s) | E_n(s) \rangle}{E_{nm}} e^{i\omega_{nm}(s)} e^{-i\gamma_n(s)}, \quad (2.23)$$

onde  $\partial_s \equiv \partial/\partial s$ , com  $\omega_{nm}(s)$  e  $\gamma_n(s)$ , definidos respectivamente por

$$\omega_{nm}(s) = -\frac{1}{\hbar} \int^s E_{nm}(s') ds' \quad (2.24)$$

e

$$\gamma_n(s) = i \int^s \langle E_n(s') | \partial_s | E_n(s') \rangle ds'. \quad (2.25)$$

A grandeza  $\omega_{nm}(s)$  nada mais é que a diferença entre as fases dinâmicas  $\theta_n$  e  $\theta_m$ , enquanto  $\gamma_n(s)$  é a fase geométrica, ambas agora com relação ao novo parâmetro  $s$ .

Vamos definir também a seguinte variável

$$F_{nm}(s) = c_n \langle E_m(s) | \partial_s \hat{H} | E_n(s) \rangle e^{-i\gamma_n(s)}, \quad (2.26)$$

que ao substituirmos na eq. (2.23), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial s} [c_n(s)e^{-i\gamma_n(s)}] = - \sum_{n \neq m} \frac{F_{nm}(s)}{E_{nm}(s)} e^{i\omega_{nm}(s)}. \quad (2.27)$$

Integrando em em relação ao tempo parametrizado, ficamos com

$$\int_0^s \frac{\partial}{\partial s'} [c_n(s') e^{-i\gamma_n(s')}] ds' = - \sum_{n \neq m} \int_0^s \frac{F_{nm}(s')}{E_{nm}(s')} e^{iT\omega_{nm}(s')} ds'. \quad (2.28)$$

Antes de seguirmos com a resolução da integral, vamos reescrever o termo do lado direito da seguinte forma

$$\frac{F_{nm}(s)}{E_{nm}(s)} e^{iT\omega_{nm}(s)} = \frac{F_{nm}(s)}{[E_{nm}(s)]^2} E_{nm}(s) e^{iT\omega_{nm}(s)}. \quad (2.29)$$

Contudo, da definição de  $\omega_{nm}(s)$ , eq.(2.24), podemos facilmente observar que

$$E_{nm}(s) e^{iT\omega_{nm}(s)} = -\frac{i\hbar}{T} \frac{\partial}{\partial s} [e^{iT\omega_{nm}(s)}]. \quad (2.30)$$

Assim,

$$\frac{F_{nm}(s)}{E_{nm}(s)} e^{iT\omega_{nm}(s)} = -\frac{i\hbar}{T} \frac{F_{nm}(s)}{[E_{nm}(s)]^2} \frac{\partial}{\partial s} [e^{iT\omega_{nm}(s)}]. \quad (2.31)$$

Substituindo a equação acima em (2.28), temos

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{\partial}{\partial s'} [c_n(s') e^{-i\gamma_n(s')}] ds' &= \frac{i\hbar}{T} \sum_{n \neq m} \int_0^s \frac{F_{nm}(s')}{[E_{nm}(s')]^2} \frac{\partial}{\partial s'} [e^{iT\omega_{nm}(s')}] ds' \\ c_n(s) e^{-i\gamma_n(s)} - c_n(0) &= \frac{i\hbar}{T} \sum_{n \neq m} \int_0^s \left\{ \frac{\partial}{\partial s'} \left[ \frac{F_{nm}(s')}{[E_{nm}(s')]^2} e^{iT\omega_{nm}(s')} \right] + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial s'} \left[ \frac{F_{nm}(s')}{[E_{nm}(s')]^2} \right] e^{iT\omega_{nm}(s')} \right\} ds', \quad (2.32) \end{aligned}$$

onde aplicamos a técnica de integração por partes no lado direito da equação e também utilizamos o fato que  $\gamma_n(0) = 0$ . Daí,

$$\begin{aligned} c_n(s) e^{-i\gamma_n(s)} - c_n(0) &= \frac{i\hbar}{T} \sum_{n \neq m} \left[ \frac{F_{nm}(s)}{[E_{nm}(s)]^2} e^{iT\omega_{nm}} - \frac{F_{nm}(0)}{[E_{nm}(0)]^2} \right] + \\ &\quad \frac{i\hbar}{T} \sum_{n \neq m} \int_0^s \frac{\partial}{\partial s'} \left[ \frac{F_{nm}(s')}{[E_{nm}(s')]^2} \right] e^{iT\omega_{nm}(s')} ds'. \quad (2.33) \end{aligned}$$

Nosso intuito é encontrar uma expressão em que possamos ter uma evolução para os coeficientes  $c'_n s$  de forma desacoplada, ou seja, sem os termos de misturas entre os autoestados. Esta tarefa pode ser obtida se conseguirmos anular os termos do lado direito da igualdade.

Vamos começar pelo segundo termo do lado direito. O termo  $\frac{\partial}{\partial s'} \frac{F_{nm}(s')}{[E_{nm}(s')]^2}$  é integrável no intervalo  $[0, s]$ . Juntando isso com o fato de que, se considerarmos o tempo total de evolução  $T$  como sendo muito longo, podemos utilizar o lemma de Riemann-Lebesgue [50, 51], definido por

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int f(x) e^{i\xi x} dx \rightarrow 0, \quad (2.34)$$

que no nosso caso fica

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^s \frac{\partial}{\partial s'} \left[ \frac{F_{nm}(s')}{E_{nm}(s')^2} \right] e^{iT\omega_{nm}(s')} ds' \rightarrow 0. \quad (2.35)$$

Agora, para o primeiro termo do lado direito de (2.33), desejamos que ele seja cada vez mais negligenciável. Como estamos considerando o tempo de evolução como sendo muito longo ( $T \rightarrow \infty$ ), impomos a seguinte condição

$$\max_{s \in [0,1]} \left| \frac{1}{T} \frac{F_{nm}(s)}{E_{nm}(s)^2} \right| \ll 1, \quad (2.36)$$

ou ainda de forma mais explícita,

$$T \gg \max_{s \in [0,1]} \left| \frac{\langle E_m(s) | \partial_s \hat{H} | E_n(s) \rangle}{E_n(s) - E_m(s)} \right|, \quad (2.37)$$

que é a condição sobre tempo de evolução, conhecida também como vínculo temporal. A condição acima significa que o tempo de total de evolução, para que o sistema evolua segundo (2.18), se torna cada vez maior com a diminuição do gap energético.

Desta forma, uma vez satisfeita essa condição, a equação (2.33), retornando para o parâmetro  $t$ , fica

$$c_n(t) = c_n(0) e^{i\gamma_n(t)}, \quad (2.38)$$

que é o mesmo resultado da eq.(2.16). É importante ressaltar que, a validade e limites, bem como a generalização da aproximação adiabática têm sido fonte de diversos trabalhos [52–56].

## 2.4 Partícula em uma caixa unidimensional

Vamos agora realizar uma comparação entre os resultados obtidos através da aproximação adiabática e a solução exata para o bem conhecido exemplo de uma partícula em uma caixa em uma dimensão [57].

O potencial que governa esse sistema é descrito por

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq L \\ \infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.39)$$

onde  $L$  é a largura da caixa.

Resolvendo a equação de Schrödinger em uma dimensão, obtemos respectivamente, as seguintes expressões para autofunções e autoenergias,

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (2.40)$$

e

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2}. \quad (2.41)$$

A aproximação adiabática para este exemplo ocorre quando consideramos que uma das paredes da caixa é móvel e o comprimento da caixa aumenta (ou diminui) lentamente com velocidade constante  $v$ , de modo que a mudança na largura em um tempo  $t$  é dada por

$$L(t) = L_0 + vt, \quad (2.42)$$

onde  $L_0$  é o comprimento da caixa em  $t = 0$ .

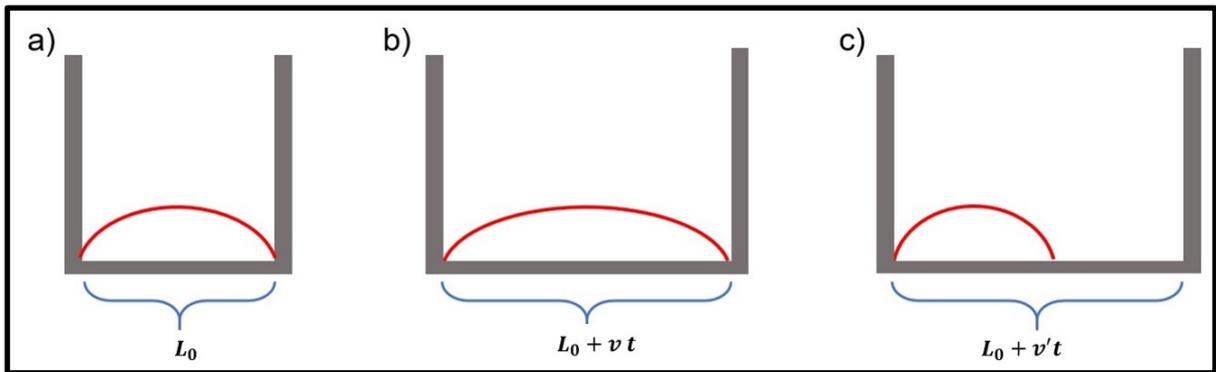


Figura 1 – Representação de uma evolução adiabática para uma partícula em uma caixa. No caso a) a largura da caixa é  $L_0$  e a partícula está no estado fundamental. Em b) movemos a parede da caixa lentamente (regime adiabático) de modo que a largura é dada por  $L_0 + vt$ , desta forma a partícula se mantém no estado fundamental. Em c) movemos a parede da caixa de forma rápida,  $v' \gg v$ , de modo que, o sistema não acompanha a mudança e permanece no estado fundamental apenas durante um curto intervalo de tempo, ou seja, será uma combinação linear das várias autofunções para a caixa com a parede deslocada.

Na Figura 1 temos uma representação gráfica da evolução adiabática para o problema da partícula em uma caixa. A Figura 1a representa a função de onda para o estado fundamental quando consideramos a largura da caixa como sendo  $L_0$ . Após isso, se movermos a parede da caixa de forma lenta a aproximação adiabática nos diz que o sistema será mantido no mesmo autoestado, como pode ser observado na Figura 1b. Se movermos a parede da caixa repentinamente, o sistema não consegue acompanhar a mudança do potencial permanecendo no estado fundamental apenas durante um curto período de tempo, de modo que podendo fazer qualquer afirmação sobre o estado do sistema após isso, Figura 1c. Nos casos b e c, a largura da caixa varia de acordo com a eq.(2.42).

Podemos também fazer uma análise sobre as modificações nos níveis de energias devido a essa mudança no comprimento/largura da caixa. Da eq. (2.41), podemos perceber

que uma mudança no comprimento da caixa promove uma modificação nas autoenergias (ver Figura 2), onde, no caso de uma expansão, as autoenergias diminuem e, no caso de compressão, as autoenergias aumentam.

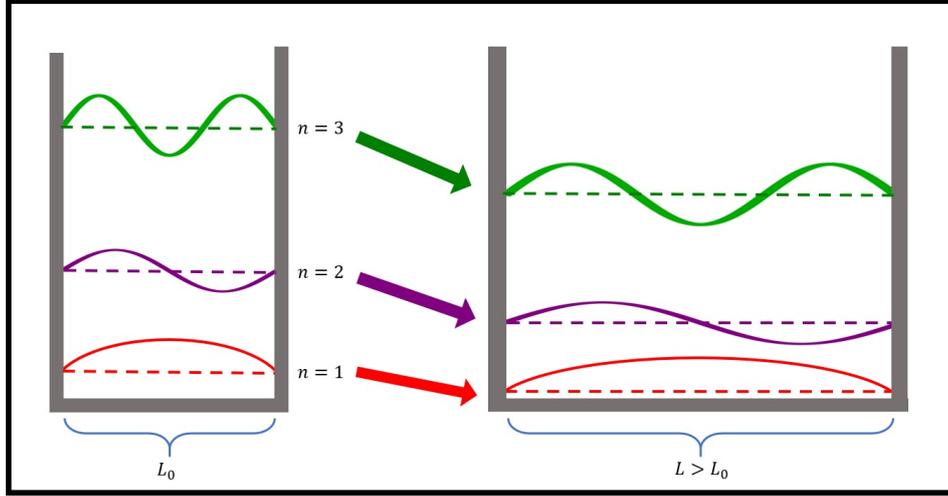


Figura 2 – Funções de onda (linhas sólidas) e níveis de energias (linhas tracejadas), para alguns valores de  $n$ , da partícula em uma caixa em uma dimensão.

Uma vez discutido como ocorre a evolução adiabática para este exemplo, podemos iniciar o tratamento matemático para encontrar o do estado que descreve a evolução desse sistema.

Em termos de autofunções, o estado obtido da aproximação adiabática (2.18), fica

$$\psi(t) = \sum_n c_n(0) e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \varphi_n(t). \quad (2.43)$$

Vamos agora calcular a fase dinâmica através da eq. (2.3), onde, com o auxílio da equação (2.42), ficamos com:

$$\begin{aligned} \theta_n(t) &= -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2} dt \\ &= -\frac{1}{\hbar} \int_{L_0}^L \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2 v} dL = -\frac{n^2 \hbar \pi^2}{2mv} \left[ -\frac{1}{L} \right]_{L_0}^L \\ &= \frac{n^2 \hbar \pi^2}{2mv} \left[ \frac{1}{L} - \frac{1}{L_0} \right] \\ \theta_n(L) &= \frac{n^2 \hbar \pi^2}{2mv} \frac{(L_0 - L)}{L_0 L}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Como  $\varphi(t)$  depende de  $t$  através de  $L(t)$ , a fase geométrica pode ser reescrita como [35]

$$\gamma_n(t) = i \int_{L_0}^L \left[ \int_0^L \left( \varphi_n \frac{d}{dL} \varphi_n \right) dx \right] dL, \quad (2.45)$$

onde usamos o fato que, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}\varphi_n = \frac{d\varphi_n}{dL} \frac{dL}{dt}. \quad (2.46)$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \gamma_n(t) &= i \int_{L_0}^L \left\{ \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \frac{d}{dL} \left[ \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right] dx \right\} dL \\ &= i \int_{L_0}^L \left\{ \int_0^L \left[ \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \left( -\frac{1}{L^2} \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left( \sqrt{\frac{L}{2}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) + n\pi x \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right) \right] dx \right\} dL. \end{aligned} \quad (2.47)$$

O resultado da integral interna é  $-\frac{\operatorname{sen}^2(n\pi)}{L}$ , contudo, como  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ , este termo se anula. Então,

$$\gamma_n(t) = i \int_{L_0}^L \{0\} dL = 0. \quad (2.48)$$

Uma vez calculadas a fase dinâmica e a fase geométrica, temos os seguintes resultados para os autoestados evoluídos  $\varphi_n(x, L)$  e estado  $\psi(x, L)$  considerando a aproximação adiabática

$$\varphi_n(x, L) = \exp \left[ i \frac{n^2 \hbar \pi^2 (L_0 - L)}{2mv L_0 L} \right] \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (2.49)$$

e

$$\psi(x, L) = \sum_n c_n(0) \exp \left[ i \frac{n^2 \hbar \pi^2 (L_0 - L)}{2mv L_0 L} \right] \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right). \quad (2.50)$$

As soluções exatas para este problema podem ser encontradas em [58] e são dadas por

$$\tilde{\varphi}_n(x, L) = \exp \left[ i \left( \frac{mvx^2}{2\hbar L} - \frac{n^2 \hbar \pi^2 (L - L_0)}{2mv L_0 L} \right) \right] \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (2.51)$$

e

$$\tilde{\psi}(x, L) = \sum_n c_n \exp \left[ i \left( \frac{mvx^2}{2\hbar L} - \frac{n^2 \hbar \pi^2 (L - L_0)}{2mv L_0 L} \right) \right] \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right). \quad (2.52)$$

Com as soluções adiabáticas (2.49) e (2.50), e exatas (2.51) e (2.52), podemos fazer uma comparação entre as probabilidades de transição para alguns estados, onde para isto vamos considerar que inicialmente o sistema se encontra no estado fundamental ( $n = 1$ ), de modo que,  $c_1(0) = 1$ .

Na Figura 3, temos o comportamento da probabilidade de transição do estado fundamental em função da velocidade da parede da caixa. As linhas vermelhas correspondem

às probabilidades utilizando o estado evoluído segundo a aproximação adiabática, onde a linha vermelha sólida corresponde à probabilidade de que o sistema se mantenha no estado fundamental ( $n = 1$ ), e a linha vermelha tracejada corresponde à probabilidade de haver transição para o primeiro estado excitado ( $n = 2$ ). Podemos perceber que, uma vez no estado fundamental, o sistema se mantém em tal autoestado, confirmando o Teorema Adiabático. As linhas azuis correspondem às probabilidades utilizando a solução exata. A linha sólida é a probabilidade do estado se manter no estado fundamental,  $n = 1$ , a linha azul tracejada é a probabilidade de haver transição entre  $n = 1$  e  $n = 2$  e, a linha azul pontilhada, a probabilidade da transição de  $n = 1$  para  $n = 3$ .

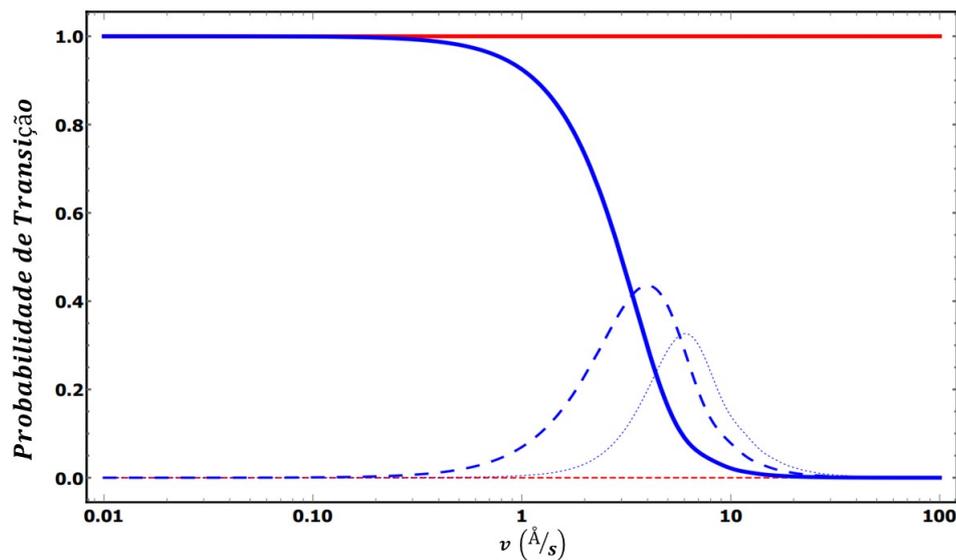


Figura 3 – Probabilidade de Transição entre o estado fundamental e  $n = 1$  (linhas sólidas),  $n = 2$  (linhas tracejadas) e  $n = 3$  (linha pontilhada) para a aproximação adiabática (vermelha) e a solução exata (azul) em função de  $v$ . Adaptado da referência [25].

Podemos perceber que a partir de um certo valor da velocidade  $v$  começam a aparecer transições entre o estado fundamental e os demais estados excitados. Contudo, podemos observar também que para valores de  $v < 0.2\text{Å}/s$ , o sistema se mantém no autoestado  $n = 1$ . Isso implica que a aproximação adiabática descreve de forma eficaz a dinâmica do sistema no regime lento (adiabático).

## 3 Atalhos para adiabaticidade

No capítulo anterior tratamos do Teorema Adiabático e das evoluções adiabáticas, onde foi apresentado as condições para que tais dinâmicas sejam realizadas e suas implicações. Uma das condições para que uma dinâmica adiabática ocorra é que o tempo de evolução necessita ser longo o suficiente. Desta forma, podemos nos fazer a seguinte pergunta: podemos, de alguma forma, obter o mesmo resultado que um processo adiabático, mas com tempo de evolução reduzido? Ou seja, teríamos alguma forma de termos o mesmo resultado, mas de forma mais rápida?

A resposta para esta pergunta é: sim. Esses métodos são chamados atalhos para adiabaticidade. Atalhos para adiabaticidade, do inglês shortcut to adiabaticity (STA) [12], são protocolos que aceleram a dinâmica quântica através rotas de não-adiabáticas, mas que reproduzem o mesmo resultado das evoluções adiabáticas. A utilização de atalhos para adiabaticidade para realizar tais dinâmicas em um intervalo mais curto proporciona uma diminuição de efeitos indesejados como, por exemplo, ruído externos e a decoerência.

Neste capítulo apresentaremos dois métodos de atalhos para adiabaticidade. Sendo eles: O método de Engenharia Reversa baseada em invariantes e o método Contra-diabático [23–25, 59]. Outro método de STA é o método de Reescalonamento Temporal [1] que será discutido com mais detalhes no próximo capítulo.

### 3.1 Engenharia inversa baseada em invariantes

#### 3.1.1 Invariantes de Lewis-Riesenfeld

Proposto por Lewis e Riesenfeld no ano de 1969 [19], o método de invariantes de Lewis-Riesenfeld consiste em considerarmos um sistema descrito por um hamiltoniano dependente do tempo  $\hat{H}(t)$  que é hermitiano. Após isso, assumimos a existência de um operador  $\hat{I}(t)$ , também hermitiano ( $\hat{I}(t)^\dagger = \hat{I}(t)$ ), e que satisfaça a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt}\hat{I}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{I}(t) + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{I}(t)] = 0. \quad (3.1)$$

A equação acima é a equação de movimento de Heisenberg para o operador  $\hat{I}(t)$ , que significa que a quantidade relacionada a este mesmo operador se conserva, daí o termo invariante.

Temos também que a evolução temporal de um estado  $|\psi(t)\rangle$  do sistema é governada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle. \quad (3.2)$$

Assim, multiplicando a equação (3.1) por  $|\psi(t)\rangle$  pela direita, temos

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial t} |\psi\rangle &= \hat{H}(t) [\hat{I}(t) |\psi(t)\rangle] - \hat{I}(t) [\hat{H}(t) |\psi(t)\rangle] , \\ i\hbar \frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial t} |\psi\rangle &= \hat{H}(t) [\hat{I}(t) |\psi(t)\rangle] - \hat{I}(t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle , \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\hat{I} |\psi(t)\rangle) &= \hat{H} (\hat{I} |\psi(t)\rangle) , \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde, para não sobrecarregar a notação, omitimos a dependência temporal dos operadores, ou seja, escrevemos  $\hat{I}(t) = \hat{I}$ .

A equação (3.3) significa que a atuação do operador invariante  $\hat{I}$  em um estado que obedece a equação (3.2) resulta em uma outra solução para a equação de Schrödinger, ou seja, a atuação do operador  $\hat{I}$  não altera a estrutura da solução. Outro ponto importante a ser ressaltado é que a equação (3.3) é válida para qualquer invariante, mesmo que este possua derivadas temporais. Contudo, por simplicidade, vamos assumir que  $\hat{I}(t)$  não possui derivada parcial com relação ao tempo [19].

Vamos assumir que o operador  $\hat{I}$  possui um conjunto completo de autovetores  $\{|\lambda, \kappa\rangle\}$ , e que obedece

$$\hat{I} |\lambda, \kappa\rangle = \lambda |\lambda, \kappa\rangle \quad (3.4)$$

e

$$\langle \lambda', \kappa' | \lambda, \kappa \rangle = \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{\kappa'\kappa}, \quad (3.5)$$

onde a primeira é a equação de autovalores para  $\hat{I}$  e a segunda representa a ortonormalidade dos autoestados  $\{|\lambda, \kappa\rangle\}$ , com  $\lambda$  relacionado com os autovalores e  $\kappa$  representa os outros números quânticos. Devido à hermiticidade do operador invariante  $\hat{I}$ , temos que seus autovalores  $\lambda$  são reais, ou seja,  $\lambda = \lambda^*$ .

Derivando a equação de autovalores (3.4) com relação ao tempo, temos

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle + \hat{I} \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle. \quad (3.6)$$

Multiplicando o resultado acima por  $\langle \lambda', \kappa' |$  pela esquerda, ficamos com

$$\begin{aligned} \langle \lambda', \kappa' | \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle + \langle \lambda', \kappa' | \hat{I} \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle &= \langle \lambda', \kappa' | \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle + \langle \lambda', \kappa' | \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle \\ \langle \lambda', \kappa' | \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle + \lambda' \langle \lambda', \kappa' | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle &= \frac{\partial \lambda}{\partial t} \langle \lambda', \kappa' | \lambda, \kappa\rangle + \lambda \langle \lambda', \kappa' | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle \\ \langle \lambda', \kappa' | \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle &= \frac{\partial \lambda}{\partial t} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\kappa\kappa'} + (\lambda - \lambda') \langle \lambda', \kappa' | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Vamos agora retornar para a equação (3.1) e multiplicá-la por  $|\lambda, \kappa\rangle$ . Temos então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle + \frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{I} |\lambda, \kappa\rangle - \frac{i}{\hbar} \hat{I} \hat{H} |\lambda, \kappa\rangle &= 0 \\ \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle + \lambda \frac{i}{\hbar} \hat{H} |\lambda, \kappa\rangle - \frac{i}{\hbar} \hat{I} \hat{H} |\lambda, \kappa\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Multiplicando agora o resultado anterior por  $\langle \lambda', \kappa' |$  pela esquerda encontramos

$$\begin{aligned} \langle \lambda', \kappa' | \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} | \lambda, \kappa \rangle + \lambda \frac{i}{\hbar} \langle \lambda', \kappa' | \hat{H} | \lambda, \kappa \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \lambda', \kappa' | \hat{I} \hat{H} | \lambda, \kappa \rangle &= 0 \\ \langle \lambda', \kappa' | \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} | \lambda, \kappa \rangle + \lambda \frac{i}{\hbar} \langle \lambda', \kappa' | \hat{H} | \lambda, \kappa \rangle - \lambda' \frac{i}{\hbar} \langle \lambda', \kappa' | \hat{H} | \lambda, \kappa \rangle &= 0 \\ i\hbar \langle \lambda', \kappa' | \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} | \lambda, \kappa \rangle &= (\lambda - \lambda') \langle \lambda', \kappa' | \hat{H} | \lambda, \kappa \rangle . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Na equação anterior, para o caso em que  $\lambda = \lambda'$ , temos que

$$\langle \lambda', \kappa' | \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} | \lambda, \kappa \rangle = 0 , \quad (3.10)$$

e da equação (3.7)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0. \quad (3.11)$$

Da relação acima podemos concluir que os autovalores do invariante  $\hat{I}$  são independentes do tempo. Além disso, uma vez que os autovalores são independentes do tempo, os autoestados  $|\lambda, \kappa\rangle$  devem ser dependentes do tempo, ou seja,  $|\lambda, \kappa\rangle = |\lambda, \kappa; t\rangle$ .

A partir disso, vamos agora investigar a relação entre os autoestados de  $\hat{I}$  e a solução da equação de Schrödinger. Para isso vamos voltar à equação (3.6), e vamos levar em conta (3.11). Ficamos então com

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = (\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle . \quad (3.12)$$

Multiplicando por  $\langle \lambda', \kappa'; t |$  pela esquerda, obtém-se

$$\langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = (\lambda - \lambda') \langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle . \quad (3.13)$$

Agora, substituindo (3.13) em (3.9), encontramos que

$$\begin{aligned} i\hbar(\lambda - \lambda') \langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle &= (\lambda - \lambda') \langle \lambda', \kappa'; t | \hat{H} |\lambda, \kappa; t\rangle \\ (\lambda - \lambda') \langle \lambda', \kappa'; t | \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right\} |\lambda, \kappa; t\rangle &= 0 . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Considerando agora o caso em que  $\lambda \neq \lambda'$ , temos

$$i\hbar \langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = \langle \lambda', \kappa'; t | \hat{H} |\lambda, \kappa; t\rangle . \quad (3.15)$$

É importante observar que a equação acima não é válida para o caso  $\lambda = \lambda'$  devido aos outros números quânticos representados por  $\kappa$  e  $\kappa'$ . Contudo, se a equação (3.15) for válida tanto para  $\lambda = \lambda'$  quanto para  $\lambda \neq \lambda'$ , podemos concluir que o autoestado  $|\lambda, \kappa; t\rangle$  é uma solução especial do estado geral do sistema  $|\psi(t)\rangle$ . Logo, ainda da equação (3.15), obtemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = \hat{H}(t) |\lambda, \kappa; t\rangle . \quad (3.16)$$

Desta forma, assumindo que o invariante  $\hat{I}$  não depende de derivadas com respeito ao tempo, podemos definir um novo conjunto de autoestados que diferem do conjunto inicial apenas por um fator de fase multiplicativo, ou seja,

$$|\lambda, \kappa; t\rangle \rightarrow e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} |\lambda, \kappa; t\rangle, \quad (3.17)$$

onde  $\alpha_{\lambda\kappa}(t)$  é uma função arbitrária, dependente do tempo e real. É importante ressaltarmos que, ao realizarmos esta mudança, não alteramos em nada as equações anteriores.

Para obtermos mais informações acerca das implicações dessa modificação, vamos primeiro tomar a derivada com respeito ao tempo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} |\lambda, \kappa; t\rangle \right) = i e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} \frac{d\alpha_{\lambda\kappa}(t)}{dt} |\lambda, \kappa; t\rangle + e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.15), ficamos com

$$i\hbar \langle \lambda', \kappa'; t | e^{-i\alpha_{\lambda'\kappa'}(t)} e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} \left\{ i \frac{d\alpha_{\lambda\kappa}(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \right\} |\lambda, \kappa; t\rangle = \langle \lambda', \kappa'; t | e^{-i\alpha_{\lambda'\kappa'}(t)} \hat{H} e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} |\lambda, \kappa; t\rangle. \quad (3.19)$$

Cancelando as exponenciais e considerando a ortonormalidade entre os autoestados, obtém-se

$$\begin{aligned} -\hbar \frac{d\alpha_{\lambda\kappa}(t)}{dt} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\kappa\kappa'} + i\hbar \langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle &= \langle \lambda', \kappa'; t | \hat{H} |\lambda, \kappa; t\rangle \\ \hbar \frac{d\alpha_{\lambda\kappa}(t)}{dt} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\kappa\kappa'} &= \langle \lambda', \kappa'; t | \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right\} |\lambda, \kappa; t\rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como mencionado anteriormente, a equação (3.15) é válida apenas para o caso  $\lambda \neq \lambda'$ , contudo, a escolha da fase é tal que o resultado seja mantido também para  $\lambda = \lambda'$ . Desta forma, fazendo essas considerações, a equação (3.20) resulta em

$$\hbar \frac{d\alpha_{\lambda\kappa}(t)}{dt} \delta_{\kappa\kappa'} = \langle \lambda, \kappa'; t | \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right\} |\lambda, \kappa; t\rangle. \quad (3.21)$$

Para que a equação acima seja satisfeita, devemos escolher o autoestado  $|\lambda, \kappa\rangle$  de modo que o lado direito seja anulado para  $\kappa \neq \kappa'$  uma vez que, o lado esquerdo será nulo devido à delta de Kronecker. Assim, podemos determinar a fase arbitrária através da equação

$$\hbar \frac{d\alpha_{\lambda\kappa}(t)}{dt} = \langle \lambda, \kappa; t | \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right\} |\lambda, \kappa; t\rangle, \quad (3.22)$$

ou ainda

$$\alpha_{\lambda\kappa}(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t \langle \lambda, \kappa; t | \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right\} |\lambda, \kappa; t\rangle dt. \quad (3.23)$$

A fase  $\alpha_{\lambda\kappa}$  é conhecida na literatura como fase de Lewis-Riesenfeld. Além disso, tal diagonalização na passagem de (3.21) para (3.22) é possível devido o operador  $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(t)$  ser hermitiano.

Por fim, uma vez que os autoestados  $|\lambda, \kappa; t\rangle_\alpha \equiv e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} |\lambda, \kappa; t\rangle$  satisfaçam a equação de Schrödinger, a solução geral  $|\psi(t)\rangle$  pode ser expandida nesta nova base, isto é,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\lambda, \kappa} c_{\lambda\kappa} |\lambda, \kappa; t\rangle_\alpha, \quad (3.24)$$

ou ainda

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\lambda, \kappa} c_{\lambda\kappa} e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} |\lambda, \kappa; t\rangle, \quad (3.25)$$

onde  $c_{\lambda\kappa}$  são os coeficientes da expansão e são independentes do tempo.

### 3.1.2 Engenharia Inversa

Suponha que se deseja conduzir um sistema de um hamiltoniano inicial  $\hat{H}(0)$  para um hamiltoniano final  $\hat{H}(t_f)$  de tal forma que as populações relacionadas com os níveis de energia nos instantes inicial e final sejam preservadas, e admitindo que durante o processo possam haver transições. Em outras palavras, durante o processo, podem existir transições entre os níveis de energias, mas, as populações dos níveis energéticos referentes ao instante inicial e final devem ser as mesmas que o protocolo adiabático. A engenharia inversa consiste em escrever o hamiltoniano dependente do tempo  $\hat{H}(t)$  em termos dos autovalores e autovetores do invariante  $\hat{I}(t)$ . Para isso, vamos definir  $\hat{I}(t)$  da seguinte forma

$$\hat{I}(t) = \sum_n |\phi_n(t)\rangle \lambda_n \langle \phi_n(t)|, \quad (3.26)$$

onde agora  $|\phi_n(t)\rangle$  e  $\lambda_n$  são respectivamente os autovetores e autovalores do invariante.

Vamos agora escrever o operador evolução temporal  $\hat{U}(0, t)$  da seguinte forma

$$\hat{U}(0, t) = \sum_n e^{i\alpha_n(t)} |\phi_n(t)\rangle \langle \phi_n(0)|, \quad (3.27)$$

que deve obedecer à equação de Schrödinger, ou seja,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(0, t) = \hat{H}(t)\hat{U}(0, t). \quad (3.28)$$

A escolha de  $\hat{U}(0, t)$  na forma da equação (3.27) é conveniente, pois podemos facilmente observar que, a menos da fase  $e^{i\alpha_n(t)}$ , o estado  $|\phi_n(t)\rangle$  nada mais é que o estado evoluído relativo à atuação de  $\hat{U}(0, t)$  em  $|\phi_n(0)\rangle$ .

A partir de agora, para simplificar a notação, vamos simplesmente escrever  $\hat{U}(0, t) \equiv \hat{U}(t)$ . Assim, utilizando a definição de  $\hat{U}(t)$  na forma da equação (3.27), temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t) = \sum_n e^{i\alpha_n(t)} \left\{ i |\phi_n(0)\rangle \dot{\alpha}_n(t) \langle \phi_n(t)| + |\dot{\phi}_n(t)\rangle \langle \phi_n(0)| \right\}, \quad (3.29)$$

onde os pontos ( $\dot{\phantom{x}}$ ) significam derivadas com respeito ao tempo e também consideramos que  $\langle \dot{\phi}_n(0) | = 0$ .

Podemos também, a partir da equação (3.28), escrever uma expressão para o hamiltoniano em termos do operador evolução temporal. Para isso, vamos multiplicar ambos os lados da equação (3.28) por  $\hat{U}^\dagger(t)$  pela direita. Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) \hat{U}^\dagger(t) &= \hat{H}(t) \hat{U}(t) \hat{U}^\dagger(t) \\ \hat{H}(t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) \hat{U}^\dagger(t), \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde utilizamos o fato de  $\hat{U}(t)$  ser unitário, ou seja,  $\hat{U}(t) \hat{U}^\dagger(t) = \mathcal{I}$  com  $\mathcal{I}$  sendo o operador identidade.

Desta forma, utilizando as equações (3.27), (3.29) e (3.30), chegamos à seguinte forma para o hamiltoniano

$$\hat{H}(t) = i\hbar \sum_n \left\{ i |\phi_n(t)\rangle \dot{\alpha}_n(t) \langle \phi_n(t)| + |\dot{\phi}_n(t)\rangle \langle \phi_n(t)| \right\}. \quad (3.31)$$

Uma vez definida a expressão para o hamiltoniano em termos dos autovetores do invariante  $\hat{I}(t)$ , podemos ter várias possibilidades de como este hamiltoniano vai influenciar o sistema, de acordo com o invariante que é escolhido, como por exemplo diferentes escolhas de fases de Lewis-Riesenfeld  $\alpha_n(t)$ . Em outras palavras, ao adotarmos a forma do invariante, estamos definindo a ação do hamiltoniano sobre o sistema. Algumas aplicações do método de engenharia inversa baseada em invariantes podem ser observadas nas referências [12, 19, 60–65].

Da equação de Heisenberg para  $\hat{I}(t)$ , eq. (3.1), temos que para tempos muito longos, por exemplo processos adiabáticos, que  $[\hat{I}(t), \hat{H}(t)] \approx 0$ . Ou seja, o invariante e o hamiltoniano compartilham um conjunto de autovetores simultâneos, desta forma, o processo regido pelo invariante também será aproximadamente adiabático.

Em geral, o invariante  $\hat{I}(t)$  não comuta com o hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  nos instantes iniciais e finais, ou seja,  $[\hat{I}(t_0), \hat{H}(t_0)] \neq 0$  e  $[\hat{I}(t_f), \hat{H}(t_f)] \neq 0$ . Contudo, quando impomos a comutatividade nesses mesmos instantes, isto é,  $[\hat{I}(t_0), \hat{H}(t_0)] = [\hat{I}(t_f), \hat{H}(t_f)] = 0$ , os autovetores do invariante e do hamiltoniano coincidem nos instantes inicial e final. Com isso, uma vez estabelecidas as condições do sistema e do hamiltoniano em  $t_0$  e  $t_f$ , podemos definir as condições de contorno necessárias para definirmos  $\hat{I}(t)$ , seus autovalores e autovetores e a fase  $\alpha_n(t)$ , fazendo com que o protocolo regido pelo invariante possua as mesmas propriedades que o hamiltoniano nos instantes inicial e final.

Um ponto importante a ser ressaltado é que a imposição da comutatividade entre  $\hat{I}(t)$  e  $\hat{H}(t)$ , nos instantes inicial e final, garante apenas que os autovetores coincidem nesses instantes. Durante o processo de evolução, tais autoestados podem evoluir de forma diferente. Contudo, quando consideramos o caso em que a evolução regida pelo invariante

acontece em um tempo mais curto, e se o protocolo original regido pelo hamiltoniano é um processo adiabático, podemos construir um processo STA através da engenharia inversa.

Em resumo, uma vez que o processo descrito pelo hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  é adiabático, e quando sabemos o comportamento e as propriedades do sistema nos instantes  $t_0$  e  $t_f$ , podemos definir um novo protocolo através de  $\hat{I}(t)$  de modo que tenhamos as mesmas condições no início e no final em um tempo mais curto. A ideia de engenharia inversa, baseada em invariantes, foi utilizada também como base para outros métodos de atalhos para adiabaticidade, em especial, podemos citar o método contradiabático que será estudado de forma mais detalhada na subseção seguinte.

## 3.2 Método Contradiabático

Desenvolvido por Demirplak e Rice [24, 25, 59], e posteriormente, de forma independente por Berry [23], o método contradiabático (CD), também conhecido como condução quântica sem transição (em inglês *transitionless quantum driving*), consiste em adicionarmos um hamiltoniano auxiliar  $H_{CD}(t)$  ao hamiltoniano do protocolo de referência,  $H_0(t)$ , de modo que a dinâmica do sistema resulte na mesma dinâmica que a evolução adiabática do protocolo de referência. Desta forma, o hamiltoniano total para o método contradiabático é dado por

$$H(t) = H_0(t) + H_{CD}(t). \quad (3.32)$$

Vamos agora demonstrar e discutir qual deve ser a forma para o potencial auxiliar  $H_{CD}(t)$ . Para isso, vamos discutir tanto a formulação de Demirplak e Rice, quanto a de Berry.

### 3.2.1 Formulação de Demirplak e Rice

Como ponto de partida da formulação do método contra-diabático proposto por Demirplak e Rice [24, 25], vamos considerar a seguinte equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_0(t)\rangle = H(t) |\psi_0(t)\rangle, \quad (3.33)$$

onde  $|\psi_0(t)\rangle$  é escrito em uma base ortonormal e estática.

O próximo passo é realizar uma mudança de base através da atuação de um operador unitário  $U(t)$ , de modo que  $|\psi_1(t)\rangle$  é o estado escrito nessa nova base. Do ponto de vista matemático, temos

$$|\psi_1(t)\rangle = U(t) |\psi_0(t)\rangle. \quad (3.34)$$

Devido à ortonormalidade da base de  $|\psi_0(t)\rangle$  e da unitariedade de  $U(t)$ , a base em que  $|\psi_1(t)\rangle$  é escrita, também é ortonormal. Além disso, devido à dependência temporal do operador  $U(t)$ , a base de  $|\psi_1(t)\rangle$  é dinâmica.

Utilizando a equação (3.34) e substituindo  $|\psi_0(t)\rangle$  em (3.33), obtém-se

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [U^\dagger(t) |\psi_1(t)\rangle] &= H(t)U^\dagger(t) |\psi_1(t)\rangle \\ i\hbar \frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t} |\psi_1(t)\rangle + i\hbar U^\dagger(t) \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1(t)\rangle &= H(t)U^\dagger(t) |\psi_1(t)\rangle. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Atuando  $U(t)$  pela esquerda, temos

$$\begin{aligned} i\hbar U(t) \frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t} |\psi_1(t)\rangle + i\hbar U(t)U^\dagger(t) \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1(t)\rangle &= U(t)H(t)U^\dagger(t) |\psi_1(t)\rangle \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1(t)\rangle &= \left\{ U(t)H(t)U^\dagger(t) - i\hbar U(t) \frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t} \right\} |\psi_1(t)\rangle. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Utilizando o fato que  $U(t)U^\dagger(t) = \mathcal{I}$ , com  $\mathcal{I}$  sendo o operador identidade, podemos ainda reescrever a equação (3.36) como

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1(t)\rangle = \left\{ U(t) \left[ H(t) - i\hbar \frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t} U(t) \right] U^\dagger(t) \right\} |\psi_1(t)\rangle. \quad (3.37)$$

Se estivermos considerando uma evolução adiabática, podemos prosseguir por dois caminhos. O primeiro é negligenciar o termo  $i\hbar \frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t} U(t)$  (aproximação adiabática). Uma outra forma de resolver este problema é adicionando um termo extra no hamiltoniano de modo a cancelar esse termo não desejado. Desta forma, vamos realizar seguinte mudança

$$H(t) \rightarrow H(t) + H_{CD}(t). \quad (3.38)$$

Esta mudança nada mais é do que a apresentada na equação (3.32). Ao realizarmos a adição do termo extra  $H_{CD}(t)$ , não alteramos a forma do operador  $U(t)$ .

Assim, a equação (3.39) fica

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1(t)\rangle = \left\{ U(t) \left[ H(t) + H_{CD}(t) - i\hbar \frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t} U(t) \right] U^\dagger(t) \right\} |\psi_1(t)\rangle. \quad (3.39)$$

Como mencionado anteriormente, o intuito de adicionarmos o hamiltoniano contradiabático  $H_{CD}$  é anular o termo não adiabático. Desta forma, impomos que

$$H_{CD}(t) = i\hbar \frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t} U(t), \quad (3.40)$$

Vamos escolher  $U(t)$  como em [59, 66].

$$U(t) = \sum_n e^{-\int_0^t \langle n_0(t') | \frac{\partial}{\partial t} | n_0(t') \rangle dt'} |n_0(t)\rangle \langle n_0(0)|. \quad (3.41)$$

Assim, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} U^\dagger(t) = \sum_n e^{\int_0^t \langle n_0(t') | \frac{\partial}{\partial t} | n_0(t') \rangle dt'} \left\{ -\langle n_0(t) | \frac{\partial}{\partial t} | n_0(t) \rangle |n_0(0)\rangle \langle n_0(t)| + |n_0(0)\rangle \frac{\partial}{\partial t} \langle n_0(t)| \right\}. \quad (3.42)$$

Na passagem anterior usamos o fato que  $\langle n_0(t) | \frac{\partial}{\partial t} | n_0(t) \rangle = -\frac{\partial \langle n_0(t) |}{\partial t} | n_0(t) \rangle$ , uma vez que  $\frac{\partial}{\partial t} \{ \langle n_0(t) | n_0(t) \rangle \} = 0$ .

Então, com o auxílio das equações (3.41) e (3.42) e após algum desenvolvimento matemático, encontramos  $H_{CD}(t)$  como

$$H_{CD}(t) = i\hbar \sum_n \left\{ -\langle n_0(t) | \frac{\partial}{\partial t} | n_0(t) \rangle | n_0(t) \rangle \langle n_0(t) | + | n_0(t) \rangle \frac{\partial}{\partial t} \langle n_0(t) | \right\}. \quad (3.43)$$

Ou ainda,

$$H_{CD}(t) = i\hbar \sum_n \{ -\langle n(t) | \partial_t n(t) \rangle | n(t) \rangle \langle n(t) | + | \partial_t n(t) \rangle \langle n(t) | \}, \quad (3.44)$$

onde, para simplificar a notação, retiramos o subíndice 0 e também escrevemos  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t$ . A expressão (3.44) é a forma mais conhecida do hamiltoniano contradiabático.

### 3.2.2 Formulação de Berry

A formulação proposta por Berry (2009) é um pouco mais simples [66]. O ponto de partida é o hamiltoniano de referência  $H_0(t)$ , definido por

$$H_0(t) = \sum_n E_n(t) | n(t) \rangle \langle n(t) |, \quad (3.45)$$

onde  $E_n(t)$  e  $| n(t) \rangle$  são, respectivamente, os autovalores e autoestados instantâneos de  $H_0(t)$ . Considerando ainda que  $H_0(t)$  está variando lentamente, a dinâmica do sistema segue a aproximação adiabática. Desta forma, a dinâmica do  $n$ -ésimo autoestado será dada por [67]

$$| \psi_n(t) \rangle = e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} e^{-\int_0^t \langle n(t') | \frac{\partial}{\partial t'} | n(t') \rangle dt'} | n(t) \rangle. \quad (3.46)$$

Estamos interessados em encontrar um hamiltoniano efetivo  $H_{eff}(t)$  de modo que a dinâmica regida por ele reproduza a mesma dinâmica que uma evolução adiabática. Desta forma, temos a seguinte equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial | \psi_n(t) \rangle}{\partial t} = H_{eff}(t) | \psi_n(t) \rangle. \quad (3.47)$$

Vamos agora definir o operador evolução temporal  $U(t)$  da seguinte maneira

$$U(t) = \sum_n | \psi_n(t) \rangle \langle \psi_n(0) |, \quad (3.48)$$

com  $| \psi_n(t) \rangle$  dado por (3.41). A escolha de  $U(t)$  nesta forma é conveniente, pois o resultado da atuação no estado inicial  $| \psi_n(0) \rangle$  nos fornece (3.46), ou seja,  $| \psi_n(t) \rangle = U(t) | \psi_n(0) \rangle$ . Além disso,  $U(t)$  deve obedecer

$$i\hbar \frac{\partial U(t)}{\partial t} = H_{eff} U(t) \quad (3.49)$$

, que nos leva à seguinte equação para  $H_{eff}(t)$

$$H_{eff}(t) = i\hbar \frac{\partial U(t)}{\partial t} U^\dagger(t). \quad (3.50)$$

O desenvolvimento realizado até o momento é análogo ao feito na engenharia inversa (EI), (3.28) e (3.30). Contudo, enquanto na engenharia inversa o operador  $U(t)$  é escrito em termos dos autoestados do invariante  $I(t)$ , aqui ele é escrito em termos dos autoestados do hamiltoniano de referência  $H_0(t)$  que gera uma dinâmica adiabática. Outra diferença se encontra na fase. No caso da EI se trata da fase de Lewis-Riesenfeld, dada por (3.23), enquanto para o caso que estamos tratando são as fases dinâmica e geométrica, definidas no capítulo 2, eq. (2.3) e (2.17).

Utilizando (3.42), o operador  $U(t)$  é escrito explicitamente como

$$U(t) = \sum_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} e^{-\int_0^t \langle n(t') | \frac{\partial}{\partial t} | n(t') \rangle dt'} |n(t)\rangle \langle n(0)|, \quad (3.51)$$

onde usamos o fato que  $|\psi_n(0)\rangle = |n(0)\rangle$ .

Derivando  $U(t)$  com relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(t)}{\partial t} = \sum_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} e^{-\int_0^t \langle n(t') | \frac{\partial}{\partial t} | n(t') \rangle dt'} \left\{ -\frac{i}{\hbar} E_n(t) |n(t)\rangle \langle n(0)| + \right. \\ \left. - \langle n(t) | \partial_t n(t) \rangle |n(t)\rangle \langle n(0)| + |\partial_t n(t)\rangle \langle n(0)| \right\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Além disso, de (3.51), temos

$$\begin{aligned} U^\dagger(t) &= \sum_n e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} e^{-\int_0^t \frac{\partial \langle n(t') |}{\partial t} | n(t') \rangle dt'} |n(0)\rangle \langle n(t)|, \\ U^\dagger(t) &= \sum_n e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} e^{\int_0^t \langle n(t') | \frac{\partial}{\partial t} | n(t') \rangle dt'} |n(0)\rangle \langle n(t)|, \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde, usamos novamente o fato que  $\langle n_0(t) | \frac{\partial}{\partial t} | n_0(t) \rangle = -\frac{\partial \langle n_0(t) |}{\partial t} | n_0(t) \rangle$ .

Desta forma, substituindo (3.52) e (3.53) em (3.52), encontramos

$$\begin{aligned} H_{eff} &= i\hbar \sum_n \sum_m e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} e^{-\int_0^t \langle n(t') | \frac{\partial}{\partial t} | n(t') \rangle dt'} e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_m(t') dt'} e^{\int_0^t \langle m(t') | \frac{\partial}{\partial t} | m(t') \rangle dt'} \times \\ &\times \left\{ -\frac{i}{\hbar} E_n(t) |n(t)\rangle \langle n(0)| - \langle n(t) | \partial_t n(t) \rangle |n(t)\rangle \langle n(0)| + |\partial_t n(t)\rangle \langle n(0)| \right\} |m(0)\rangle \langle m(t)|. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Podemos perceber que em todos os termos aparece o produto  $\langle n(0) | m(0) \rangle = \delta_{nm}$ . Desta forma, a equação (3.54) fica

$$H_{eff} = \sum_n E_n(t) |n(t)\rangle \langle n(t)| + i\hbar \sum_n \{ |\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)| - \langle n(t) | \partial_t n(t) \rangle |n(t)\rangle \langle n(t)| \}. \quad (3.55)$$

Da equação (3.45), temos que o primeiro termo de (3.55) nada mais é que o hamiltoniano de referência  $H_0(t)$ . Assim, podemos escrever  $H_{eff} = H_0(t) + H_{CD}(t)$  definindo

$$H_{CD}(t) = i\hbar \sum_n \{ |\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)| - \langle n(t)| \partial_t n(t)\rangle |n(t)\rangle \langle n(t)| \}, \quad (3.56)$$

onde,  $H_{CD}(t)$  é o hamiltoniano contradiabático. A equação (3.56) é idêntica à equação (3.44), assim, podemos afirmar que as formulações de Demirplak e Rice e de Berry são análogas. Adicionar o termo contradiabático nos permite imitar uma evolução adiabática, mas, sem a necessidade de submeter o tempo de evolução a algum tipo de vínculo como o apresentado na aproximação adiabática.

Para exemplificar a aplicação do método contradiabático, na subseção seguinte iremos aplicá-lo no bem conhecido sistema de dois níveis. Esta aplicação foi primeiramente proposta nas referências [13, 68].

### 3.2.3 Inversão de População em um Sistema de Dois Níveis

Seja  $\hat{H}_0(t)$  o hamiltoniano dependente do tempo que gera um processo adiabático em um sistema atômico de dois níveis por conta de uma interação com um laser. Tal hamiltoniano, pode ser escrito na base  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ , com  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  sendo os níveis atômicos fundamental e excitado, respectivamente. Desta forma  $\hat{H}_0(t)$  pode ser descrito como

$$\hat{H}_0(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\Delta(t) & \Omega_R(t)e^{i\varphi(t)} \\ \Omega_R(t)e^{-i\varphi(t)} & \Delta(t) \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

onde  $\Delta(t)$  é chamada dessintonia (ou do inglês, detuning),  $\Omega_R(t)$  é a frequência de Rabi e  $\varphi(t)$  uma fase dependente do tempo. A dessintonia é definida por  $\Delta(t) = \omega_L - \omega_0$ , onde  $\omega_L$  é a frequência do laser e  $\omega_0$  é a frequência de transição entre os níveis de energia do átomo. Já a frequência de Rabi é definida como  $\Omega_R(t) = \vec{d}_{ij} \cdot \vec{E}/\hbar$ , onde  $\vec{d}_{ij}$  é o momento de dipolo de transição  $i \rightarrow j$  e  $\vec{E}$  é o campo elétrico do laser.

Por simplicidade, vamos considerar  $\varphi = 0$ . Assim, fazendo esta consideração, (3.57) pode ser reescrita como

$$\hat{H}_0(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\Delta(t) & \Omega_R(t) \\ \Omega_R(t) & \Delta(t) \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

cujos autoestados instantâneos são

$$|n_+(t)\rangle = \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) |1\rangle + \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) |2\rangle \quad (3.59)$$

e

$$|n_-(t)\rangle = -\sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) |1\rangle + \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) |2\rangle, \quad (3.60)$$

onde  $\theta(t) = \arccos[-\Delta(t)/\Omega(t)]$  é chamado ângulo de mistura e  $\Omega(t) = \sqrt{\Delta^2(t) + \Omega_R^2(t)}$  é a frequência de Rabi generalizada. Além disso, as autoenergias são  $E_{\pm}(t) = \pm\hbar\Omega(t)/2$ .

Vamos assumir que o sistema é inicialmente preparado em um dos autoestados instantâneos do hamiltoniano, ou seja,  $|\psi_{\pm}(0)\rangle = |n_{\pm}(0)\rangle$ . Se considerarmos o estado inicial como  $|\psi_+(0)\rangle = |n_+(0)\rangle$ , as probabilidades da partícula ser encontrada nos níveis 1 e 2 serão respectivamente dadas por

$$P_1(t) = |\langle 1|n_+(t)\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.61)$$

e

$$P_2(t) = |\langle 2|n_+(t)\rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (3.62)$$

Uma vez descrita as generalizadas do nosso problema, vamos agora encontrar a forma explícita para o hamiltoniano contradiabático  $H_{CD}(t)$ . Vamos iniciar calculando a derivada temporal dos autoestados (3.59) e (3.60). Daí, temos

$$\partial_t |n_+(t)\rangle = -\sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \frac{\dot{\theta}(t)}{2} |1\rangle + \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \frac{\dot{\theta}(t)}{2} |2\rangle \quad (3.63)$$

e

$$\partial_t |n_-(t)\rangle = -\cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \frac{\dot{\theta}(t)}{2} |1\rangle - \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \frac{\dot{\theta}(t)}{2} |2\rangle, \quad (3.64)$$

onde  $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt}$ .

Vamos agora calcular o produto interno  $\langle n_{\pm}(t)|\partial_t n_{\pm}(t)\rangle$ . Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \langle n_{\pm}(t)|\partial_t n_{\pm}(t)\rangle &= \frac{\dot{\theta}(t)}{2} \left\{ -\cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \langle 1|1\rangle + \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \langle 2|2\rangle \right\} \\ \langle n_{\pm}(t)|\partial_t n_{\pm}(t)\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Precisamos também dos termos  $|\partial_t n_{\pm}(t)\rangle \langle n_{\pm}(t)|$ . Então,

$$\begin{aligned} |\partial_t n_+(t)\rangle \langle n_+(t)| &= \frac{\dot{\theta}(t)}{2} \left\{ \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) |1\rangle \langle 1| - \cos^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) |1\rangle \langle 2| + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) |2\rangle \langle 1| - \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) |2\rangle \langle 2| \right\} \end{aligned} \quad (3.66)$$

e

$$\begin{aligned} |\partial_t n_-(t)\rangle \langle n_-(t)| &= \frac{\dot{\theta}(t)}{2} \left\{ -\cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) |1\rangle \langle 1| - \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) |1\rangle \langle 2| + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) |2\rangle \langle 1| + \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) |2\rangle \langle 2| \right\} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Por fim, necessitaríamos calcular os termos  $|n_{\pm}(t)\rangle \langle n_{\pm}(t)|$ . Contudo, da eq. (3.65), temos  $\langle n_+(t)|\partial_t n_-(t)\rangle = \langle n_-(t)|\partial_t n_-(t)\rangle = 0$ . Então, utilizando este fato, ficamos com  $\langle n_{\pm}(t)|\partial_t n_{\pm}(t)\rangle |n_{\pm}(t)\rangle \langle n_{\pm}(t)| = 0$ . Utilizando a expressão (3.56) para o hamiltoniano  $H_{CD}(t)$ , e escrevendo explicitamente em termos da base de autoestados  $\{|n_+(t)\rangle, |n_-(t)\rangle\}$ , temos

$$H_{CD}(t) = i\hbar \{ |\partial_t n_+(t)\rangle \langle n_+(t)| + \langle n_+(t)|\partial_t n_+(t)\rangle |n_+(t)\rangle \langle n_+(t)| + \\ + |\partial_t n_-(t)\rangle \langle n_-(t)| + \langle n_-(t)|\partial_t n_-(t)\rangle |n_-(t)\rangle \langle n_-(t)| \} . \quad (3.68)$$

Substituindo as equações (3.65), (3.66) e (3.67) em (3.68), com as considerações mencionadas no parágrafo anterior, encontramos que

$$\hat{H}_{CD}(t) = i\hbar \frac{\dot{\theta}(t)}{2} \{ -|1\rangle \langle 2| + |2\rangle \langle 1| \} , \quad (3.69)$$

ou, na forma de matriz,

$$\hat{H}_{CD}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\dot{\theta}(t) \\ i\dot{\theta}(t) & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.70)$$

Este é o hamiltoniano contradiabático que deve ser adicionado de modo a reproduzir os resultados adiabáticos com um tempo de evolução menor que o processo adiabático gerado pelo hamiltoniano de referência, eq. (3.58).

O hamiltoniano efetivo,  $H_{eff}(t) = H_0(t) + H_{CD}(t)$ , será então dado por

$$\hat{H}_{eff}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\Delta(t) & \Omega_R(t) - i\Omega_a(t) \\ \Omega_R(t) + i\Omega_a(t) & \Delta(t) \end{pmatrix} , \quad (3.71)$$

onde definimos  $\Omega_a(t) \equiv \dot{\theta}(t) = \{\Omega_R(t)\dot{\Delta}(t) - \dot{\Omega}_R(t)\Delta(t)\}/\Omega(t)^2$ . Do ponto de vista prático, para conseguirmos a inversão de população, é necessário a adição de uma nova frequência  $\Omega_a$  para interagir com o sistema de dois níveis.

Para observarmos o comportamento das probabilidades de inversão de população, vamos considerar o esquema de passagem adiabática de Allen-Eberly (AE) [69, 70], onde a frequência de Rabi e a dessintonia são dadas respectivamente por

$$\Omega_R(t) = \Omega_0 \operatorname{sech} \left[ \frac{\pi(t - 4t_0)}{2t_0} \right] , \quad (3.72)$$

$$\Delta(t) = \left( \frac{2\beta^2 t_0}{\pi} \right) \tanh \left[ \frac{\pi(t - 4t_0)}{2t_0} \right] , \quad (3.73)$$

onde os parâmetros  $\Omega_0$  e  $\beta$  são constantes reais com dimensão de frequência, e  $t_0$  é uma constante que representa a escala de tempo característica da dinâmica. Um ponto importante a ser ressaltado é que a passagem adiabática AE requer um tempo infinitamente

longo para promover uma inversão de população completa (probabilidade igual a 1). Contudo, considerando o tempo de evolução igual a  $8t_0$ , conseguimos uma inversão de população com probabilidade maior que 0.999.

Utilizando a frequência de Rabi  $\Omega_R(t)$  e a dessintonia  $\Delta(t)$  dadas respectivamente pelas eqs. (3.72) e (3.73),  $\Omega_a(t)$  pode ser escrita explicitamente como

$$\Omega_a(t) = \frac{\Omega_0 \beta^2 \pi^2 \text{Cosh} \left[ \frac{\pi}{2t_0} (t - 4t_0) \right]}{2t_0^2 \beta^4 \text{Cosh} \left[ \frac{\pi}{t_0} (t - 4t_0) \right] + \pi^2 \Omega_0^2 - 2t_0 \beta^4}. \quad (3.74)$$

Na figura 4 temos o comportamento da frequência de Rabi  $\Omega_R(t)$  (linha vermelha), da dessintonia  $\Delta(t)$  (linha azul) e de  $\Omega_a(t)$  (linha verde) para a passagem adiabática de Allen-Eberly descritas respectivamente pelas eqs. (3.72), (3.73) e (3.74).

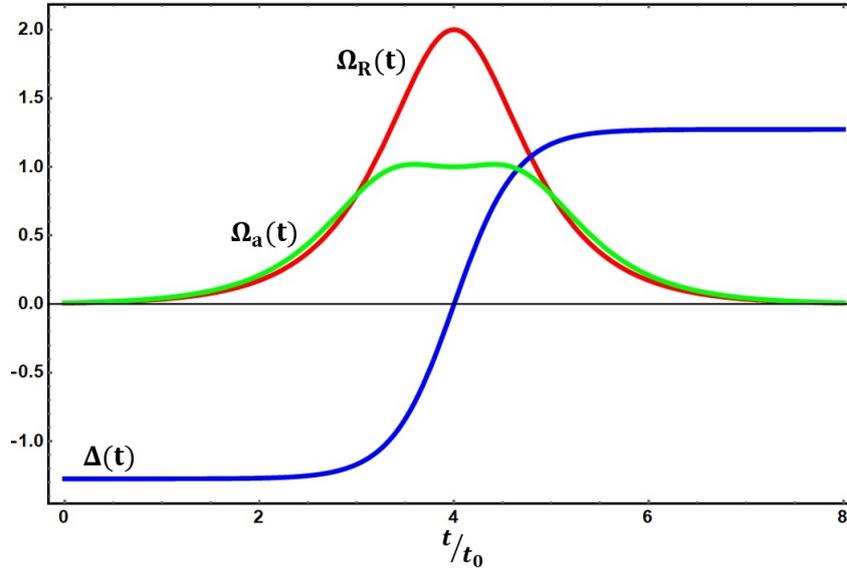


Figura 4 – Comportamento das funções  $\Omega_R(t)$ ,  $\Delta(t)$  e  $\Omega_a(t)$  com parâmetros  $\Omega_0 = 2$ ,  $\beta = \sqrt{2}$  e  $t_0 = 1$ .

Na figura 5 temos o comportamento das probabilidades de inversão para o protocolo contradiabático, representado pelo hamiltoniano efetivo, eq. (3.71). A linha verde representa a propabilidade da partícula ser encontrada no estado  $|1\rangle$ , que foi considerado como estado inicial. Já a linha laranja corresponde à probabilidade de encontrarmos a partícula no estado excitado  $|2\rangle$ . Podemos perceber também que para  $t = 4t_0$  temos 50% de probabilidade para cada nível, enquanto que em  $t = 8t_0$  temos a inversão total das populações.

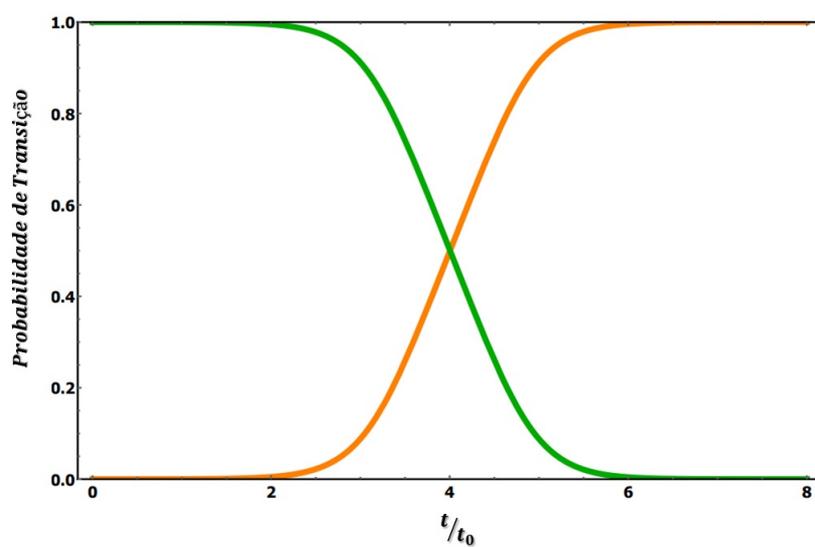


Figura 5 – Evolução temporal das populações dos dois níveis atômicos para o protocolo contradiabático com o estado inicial  $|1\rangle$  e parâmetros  $\Omega_0 = 2$ ,  $\beta = \sqrt{2}$  e  $t_0 = 1$ .

## 4 Reescalonamento temporal

Desenvolvido por Bernardo [1], o método de reescalonamento temporal, do inglês Time-Reescalng (TR), é uma nova proposta para acelerar dinâmicas quânticas através de uma mudança de variável no hamiltoniano de um protocolo de referência. Quando o hamiltoniano de referência gera uma dinâmica adiabática, este método funciona como um STA.

### 4.1 Generalidades

Como ponto de partida, vamos considerar um sistema quântico que evolui segundo um operador evolução temporal  $\hat{U}(t_f, t_0)$ , onde  $t_0$  e  $t_f$  são os tempos inicial e final do protocolo, respectivamente. Por simplicidade, vamos adotar  $t_0 = 0$ . Seja então  $\hat{H}(t)$  o hamiltoniano dependente do tempo para o protocolo de referência que governa o sistema. Assim, o operador  $\hat{U}(t_f, 0)$  deve obedecer à seguinte equação de Schrödinger

$$\hat{H}(t)\hat{U}(t_f, 0) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t_f, 0). \quad (4.1)$$

A solução da equação (4.1) para o caso em que o hamiltoniano comuta em diferentes tempos,  $[\hat{H}(t_i), \hat{H}(t_j)] = 0$  com  $(i \neq j)$ , é dada por [71]

$$\hat{U}(t_f, 0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^{t_f}\hat{H}(t)dt\right\}, \quad (4.2)$$

onde é considerado que  $\hat{U}(0, 0) = \mathcal{I}$ , sendo  $\mathcal{I}$  o operador identidade.

Vamos fazer agora o reescalonamento temporal através da mudança de variável  $t = f(\tau)$ . Desta forma, a equação acima pode ser reescrita como

$$\hat{U}(t_f, 0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(t_f)}\hat{H}[f(\tau)]f'(\tau)d\tau\right\}, \quad (4.3)$$

onde usamos o fato que  $dt = f'(\tau)d\tau$ , com  $f'(\tau)$  sendo a primeira derivada e  $f^{-1}(\tau)$  como sendo a inversa de  $f(\tau)$ , respectivamente.

Definindo  $\hat{\mathcal{H}}(\tau) \equiv \hat{H}[f(\tau)]f'(\tau)$  como sendo o hamiltoniano reescalonado, a (4.3) fica

$$\hat{U}[f^{-1}(t_f), f^{-1}(0)] = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(t_f)}\hat{\mathcal{H}}(\tau)d\tau\right\}. \quad (4.4)$$

Vamos chamar esse operador evolução temporal dado pela eq. (4.4) de operador evolução temporal reescalonado. Para o caso em que  $\hat{H}(t)$  não comuta em diferentes tempos, a solução para o operador reescalonado fica

$$\hat{U}[f^{-1}(t_f), f^{-1}(0)] = \hat{\mathcal{T}}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(t_f)}\hat{\mathcal{H}}(\tau)d\tau\right\}, \quad (4.5)$$

onde  $\hat{\mathcal{T}}$  é o operador de ordenação temporal.

Uma vez estabelecidas as expressões para o operador evolução temporal reescalado da eq. (4.4), e para o operador evolução do protocolo de referência, eq. (4.2), vamos investigar a atuação de cada um deles em um estado inicial arbitrário  $|\psi(0)\rangle$ . Daí,

$$|\psi(t_f)\rangle = \hat{U}(t_f, 0) |\psi(0)\rangle , \quad (4.6)$$

$$|\Psi(f^{-1}(t_f))\rangle = \hat{U}[f^{-1}(t_f), f^{-1}(0)] |\psi(0)\rangle . \quad (4.7)$$

Utilizando a mudança de variável feita anteriormente, podemos facilmente observar que as eqs. (4.6) e (4.7) são equivalentes. Desta forma, a atuação do operador  $\hat{U}(t_f, 0)$  e do operador  $\hat{U}[f^{-1}(t_f), f^{-1}(0)]$  em um mesmo estado inicial, irá reproduzir o mesmo estado final, então,  $|\psi(t_f)\rangle = |\Psi(f^{-1}(t_f))\rangle$ . Contudo, é importante ressaltar que tal equivalência só é verdadeira quando consideramos tais atuações durante os intervalos de tempo correspondentes, ou seja, para o caso da atuação do operador de evolução temporal no protocolo de referência, o intervalo de tempo será  $\Delta t = t_f - t_0 = t_f$ . Já para o caso da atuação do operador de evolução temporal reescalado, o intervalo de tempo deve ser  $\Delta\tau = f^{-1}(t_f) - f^{-1}(0)$ .

Um comentário relevante é que, dependendo da relação entre os intervalos de tempo  $\Delta\tau$  e  $\Delta t$ , podemos ter um protocolo TR (Time-Reescaloring) mais rápido ou mais lento que o protocolo de referência. Se  $\Delta\tau > \Delta t$ , teremos um protocolo mais lento. Entretanto, se  $\Delta\tau < \Delta t$ , teremos um protocolo mais rápido, funcionando assim como um atalho para obtermos o mesmo estado final desejado.

Ainda sobre os estados inicial  $|\psi(0)\rangle$  e final  $|\psi(t_f)\rangle$  do sistema, temos que eles não necessitam ser autoestados do hamiltoniano inicial e final, ou seja, o protocolo TR não depende dos autoestados instantâneos. Desta forma, não há nenhuma restrição ou imposição à dinâmica que se quer reproduzir. Contudo, caso o protocolo de referência seja uma transformação adiabática, o protocolo TR representará um processo mais rápido e equivalente ao de referência, ou seja, um atalho para adiabaticidade (STA). Desta forma, a partir de agora, vamos considerar o protocolo de referência como uma transformação adiabática.

#### 4.1.1 Função de reescalamento $f(\tau)$

Uma vez estabelecida as generalidades do método de reescalamento temporal, vamos agora descrever algumas propriedades para a função de reescalamento  $f(\tau)$ . Primeiramente, a liberdade de escolha da função  $f(\tau)$  é o ponto chave para estabelecermos a duração do protocolo TR, uma vez que, o intervalo  $\Delta\tau$  é definido pela inversa de  $f(\tau)$ .

Para que tenhamos sucesso em obter um STA, é necessário a escolha de uma função de reescalamento  $f(\tau)$  adequada e que satisfaça às seguintes condições:

- (i)  $f^{-1}(0) = t_0 = 0$ ,
- (ii)  $f^{-1}(t_f) < t_f$ ,
- (iii)  $\hat{\mathcal{H}}[f^{-1}(0)] = \hat{H}(0)$ ,
- (iv)  $\hat{\mathcal{H}}[f^{-1}(t_f)] = \hat{H}(t_f)$ .

A condição (i) simplesmente impõe que os instantes iniciais dos protocolos TR e de referência devem ser iguais. Já a condição (ii) garante que o protocolo TR é mais rápido ( $\Delta\tau < \Delta t$ ). As condições (iii) e (iv) significam que os hamiltonianos nos instantes iniciais e finais devem ser iguais.

Além disso, as condições (iii) e (iv) garantem que as condições externas sejam iguais no início e no final dos protocolos. Por exemplo, uma partícula de spin 1/2 sujeita a um campo magnético variável no tempo, devemos ter  $B(0) = B[f^{-1}(0)]$  e  $B(t_f) = B[f^{-1}(t_f)]$ . Ou ainda, se considerarmos um processo adiabático, onde o estado inicial seja um dos estados estacionários  $|n\rangle$  de  $\hat{H}(0)$ , após ocorrer tal processo, o estado final também deverá ser um estado estacionário  $|n'\rangle$ , mas agora de  $\hat{H}(t_f)$ .

Escolher uma função  $f(\tau)$  que satisfaça às duas primeiras condições é uma tarefa relativamente fácil. Entretanto para que as duas últimas condições sejam satisfeitas, vamos retornar à definição do hamiltoniano TR,  $\hat{\mathcal{H}}(\tau) = \hat{H}[f(\tau)]f'(\tau)$ . Então, devemos ter  $\hat{\mathcal{H}}[f^{-1}(0)] = \hat{H}(0)f'[f^{-1}(0)]$  e  $\hat{\mathcal{H}}[f^{-1}(t_f)] = \hat{H}(t_f)f'[f^{-1}(t_f)]$ . Desta forma, (iii) e (iv) são obtidas se  $f'[f^{-1}(0)] = f'[f^{-1}(t_f)] = 1$ .

Uma vez que a função de reescalamento  $f(\tau)$  obedeça todas as condições, podemos utiliza-la para escrever adequadamente o operador evolução temporal TR de modo que  $\hat{\mathcal{U}}[f^{-1}(t_f), f^{-1}(0)] = \hat{U}(t_f, 0)$  e, como mencionado anteriormente, garantindo assim a reprodução do mesmo estado final.

Por fim, uma função que obedece a todas estas condições é dada por

$$f(\tau) = a\tau - \frac{t_f}{2\pi a}(a-1) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi a}{t_f}\tau\right). \quad (4.8)$$

A função inversa de  $f(\tau)$  não pode ser escrita de forma explícita em termos das funções convencionais. Temos então que  $f^{-1}(0) = 0$  e  $f^{-1}(t_f) = t_f/a$ , onde  $a$  é chamado de fator de contração temporal, de modo que  $a > 1$  indica que o protocolo TR será realizado  $a$  vezes mais rápido que o de referência. Um ponto importante a ser ressaltado é que os valores de  $0 < a < 1$  também são possíveis, contudo, não fornecem qualquer aplicação tecnológica aparente uma vez que se produziria um tempo de duração maior que o protocolo original. Na figura 6 temos o gráfico da função  $f(\tau)$  para alguns valores do parâmetro de contração temporal  $a$ . Podemos perceber que para o caso em que  $a = 1$  vamos ter  $f(\tau) = t = \tau$ .

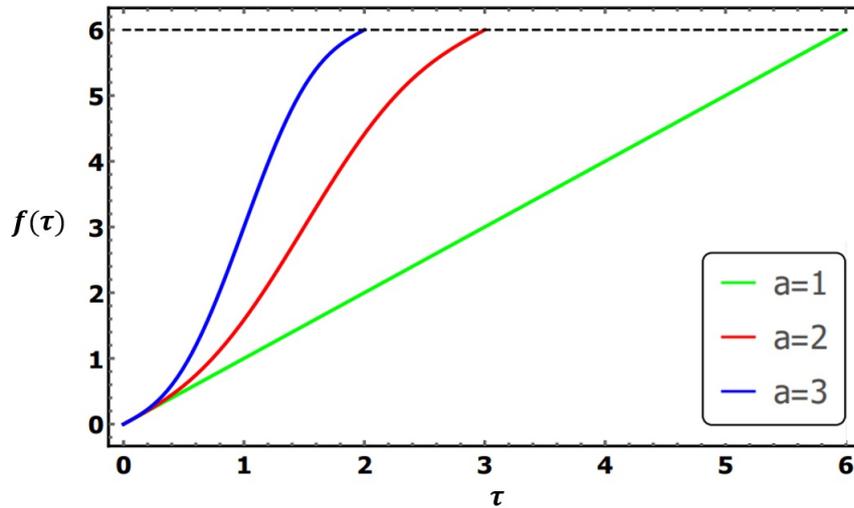


Figura 6 – Comportamento da função de reescalonamento  $f(\tau)$  para alguns valores do parâmetro de contração temporal  $a$  com  $t_f = 6$ .

A derivada de  $f(\tau)$  dada pela eq. (4.8) é escrita como

$$f'(\tau) = a - (a - 1) \cos\left(\frac{2\pi a}{t_f} \tau\right). \quad (4.9)$$

Com a derivada de  $f(\tau)$ , podemos facilmente observar que as condições sobre  $f'(\tau)$  são obedecidas, ou seja,  $f'(0) = 1$  e  $f'(t_f/a) = 1$ . Na figura 7, temos o comportamento de  $f'(\tau)$  para alguns valores de  $a$ .

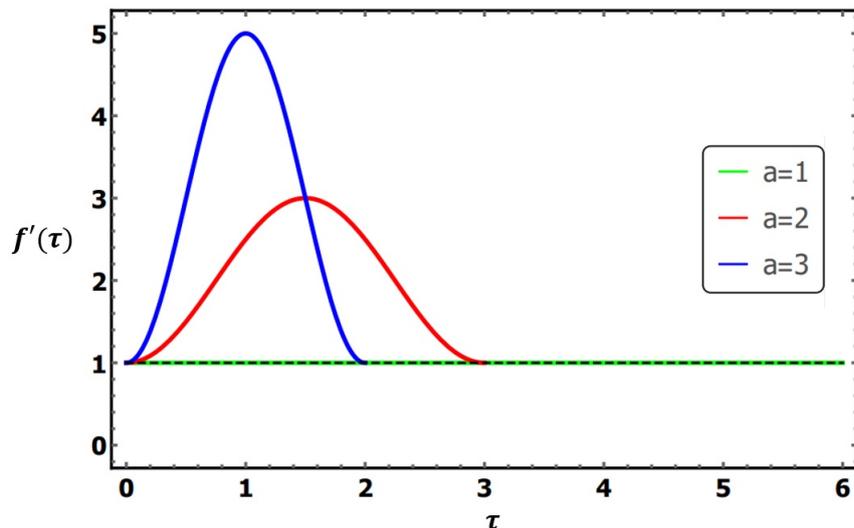


Figura 7 – Comportamento de  $f'(\tau)$  para alguns valores do parâmetro de contração temporal  $a$  com  $t_f = 6$ .

Uma vez que  $f(\tau)$  obedece todas as condições, o protocolo proposto pelo método de reescalonamento temporal pode ser utilizado como um atalho para adiabaticidade.

Entretanto, é importante ressaltar que esta solução dada pela eq. (4.8) não é única, podendo haver várias outras funções que possam também obedecer às condições e servindo como STA. Na referência [1] o autor apresenta também uma outra função  $f(\tau)$  que satisfaz todas as condições mencionadas, sendo essa uma função polinomial dada por:

$$f(\tau) = \frac{2(a^2 - a^3)}{t_f^2} \tau^3 + \frac{3(a^2 - a)}{t_f} \tau^2 + \tau. \quad (4.10)$$

Uma outra função de reescalonamento é proposta por Zhu et al. na ref. [32], onde  $f(\tau)$  é escrita combinando um termo linear e uma expansão de senos com  $N$  termos:

$$f(\tau) = a\tau + \sum_{n=1}^N C_n \operatorname{sen} \left[ \frac{2n\pi a}{t_f - t_i} \left( \tau - \frac{t_i}{a} \right) \right], \quad (4.11)$$

onde é imposta também a seguinte condição

$$\sum_{n=1}^N nC_n = \frac{(1-a)(t_f - t_i)}{2\pi a}. \quad (4.12)$$

Podemos observar que se considerarmos apenas um termo na soma ( $N = 1$ ) nas eqs. (4.11) e (4.12) e também considerarmos o tempo inicial  $t_i = 0$ , obtemos novamente a expressão para a função de reescalonamento, eq. (4.8).

Nas próximas subseções vamos aplicar o método de reescalonamento temporal em dois problemas: o oscilador paramétrico [1] e a inversão de população de um sistema de dois níveis [72].

## 4.2 Oscilador paramétrico

Como primeira aplicação vamos tratar do bem conhecido caso do oscilador paramétrico. Em tal sistema é considerado que um dos parâmetros como a massa ou a frequência angular dependem do tempo. É importante ressaltar que o oscilador paramétrico possui relevantes aplicações experimentais em especial as armadilhas iônicas como por exemplo as Paul traps [73–77].

O oscilador paramétrico é descrito pelo seguinte hamiltoniano dependente do tempo

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\hat{x}^2, \quad (4.13)$$

onde  $\hat{p}$  é o operador momento linear,  $\hat{x}$  é o operador posição,  $m$  é a massa do oscilador e  $\omega(t)$  é a frequência angular dependente do tempo. A dependência temporal do hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  se deve exclusivamente à frequência angular  $\omega(t)$ .

Vamos considerar que o sistema é submetido a um determinado protocolo adiabático em um intervalo de tempo  $t = 0$  a  $t = t_f$ . Para que o protocolo seja considerado adiabático, vamos considerar que o tempo de evolução é suficientemente longo de modo que obedeça o

teorema adiabático e que as populações em cada nível de energia devem ser as mesmas no início e no final do protocolo. É importante lembrar que a energia do oscilador harmônico quântico é dada por  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ . Dessa forma, se considerarmos o caso em que a frequência angular aumenta, o valor da energia em cada nível também irá aumentar, contudo, o número de partículas deve permanecer o mesmo (ver figura 8).

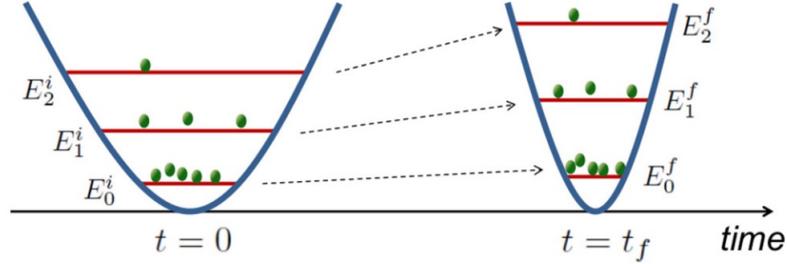


Figura 8 – Oscilador paramétrico com  $\omega(t)$  crescente no tempo e que segue um protocolo adiabático. Fonte: Ref.[1]

Iremos agora utilizar o método de reescalonamento temporal para diminuir a duração do protocolo de  $\tau = 0$  a  $\tau = t_f/a$ . Para isso vamos considerar a função de reescalonamento  $f(\tau)$  e a definição do hamiltoniano TR. Desta forma, temos que o hamiltoniano reescalonado fica

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}(\tau) &= \hat{H}[f(\tau)]f'(\tau), \\ \hat{\mathcal{H}}(\tau) &= \frac{\hat{p}^2}{2m}f'(\tau) + \frac{1}{2}m\omega^2[f(\tau)]f'(\tau)\hat{x}^2, \\ \hat{\mathcal{H}}(\tau) &= \frac{\hat{p}^2}{2m}f'(\tau) + \frac{1}{2}m\tilde{\omega}^2(\tau)\hat{x}^2,\end{aligned}\quad (4.14)$$

onde definimos a frequência angular TR como  $\tilde{\omega}^2(\tau) = \omega^2[f(\tau)]f'(\tau)$ . Desta forma a mudança de  $\omega(t)$  para  $\tilde{\omega}(\tau)$  significa uma modificação na intensidade e na dependência temporal dos campos que geram o potencial harmônico.

Vamos considerar o caso de uma compressão em que a frequência angular no protocolo de referência é dada por

$$\omega(t) = \omega_0 + (\omega_f - \omega_0) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{2t_f}\right), \quad (4.15)$$

onde  $\omega(t_f) = \omega_f$  e  $\omega(0) = \omega_0$  são as frequências nos instantes final e inicial, respectivamente. Por se tratar de uma compressão, temos  $\omega_f > \omega_0$ . Com a frequência dada pela equação (4.15), temos que  $\dot{\omega}(0) = \dot{\omega}(t_f) = 0$ , que são condições necessárias para que o potencial seja estático no início e no final do protocolo de compressão.

Assim, utilizando a função de reescalonamento  $f(\tau)$  dada pela eq. (4.8) e sua derivada, eq. (4.9), a frequência angular do protocolo TR será dada por

$$\tilde{\omega}(\tau) = \left[ a - (a - 1) \cos\left(\frac{2\pi a}{t_f}\tau\right) \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \omega_0 + (\omega_f - \omega_0) \operatorname{sen}^2\left[ \frac{\pi a}{2t_f}\tau - \left(\frac{a-1}{4a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi a}{t_f}\tau\right) \right] \right\}. \quad (4.16)$$

Ao analisarmos a eq. (4.16), podemos perceber que  $\tilde{\omega}(0) = \omega_0$  e  $\tilde{\omega}(t_f/a) = \omega_f$ . Estas são exatamente as mesmas condições inicial e final do protocolo de referência, respectivamente, mas, agora com um intervalo de tempo igual a  $t_f/a$ , ou seja, uma evolução mais rápida.

Na figura 9, temos as curvas para a frequência  $\tilde{\omega}(\tau)$  considerando alguns valores do parâmetro de contração temporal. Podemos perceber que para o caso em que  $a = 1$  (linha verde) a frequência angular do protocolo TR reproduz o mesmo comportamento que a frequência angular  $\omega(t)$  (linha tracejada) do protocolo de referência. Tal resultado está de acordo com o esperado, uma vez que, quando consideramos  $a = 1$ , a duração do protocolo TR é igual a duração do protocolo de referência  $\Delta\tau = \Delta t = t_f$ . Já para os casos em que  $a = 2$  (linha vermelha) e  $a = 4$  (linha azul) o protocolo TR reproduz o mesmo resultado final com intervalos de tempo iguais a  $\Delta\tau = 0.5t_f$  e  $\Delta\tau = 0.25t_f$ , respectivamente.

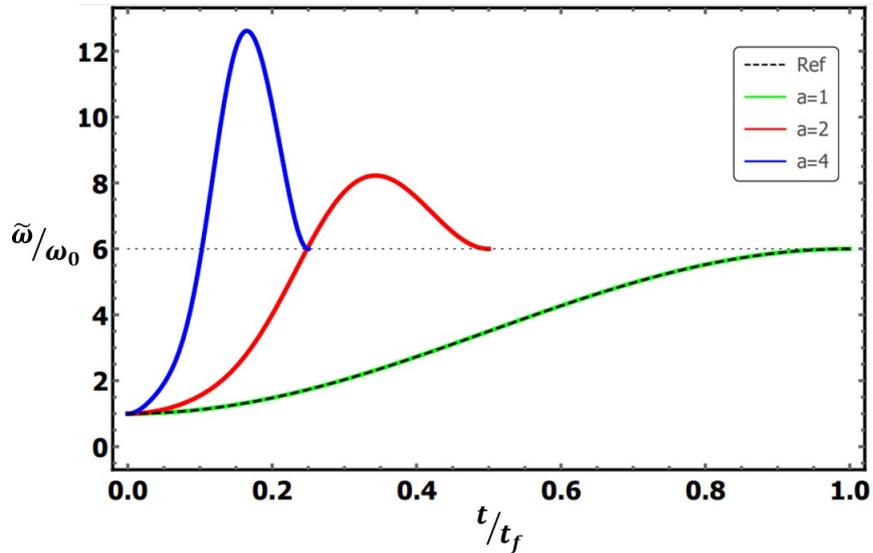


Figura 9 – Frequência angular em função do tempo para alguns valores do parâmetro de contração temporal  $a$ . A linha tracejada representa a frequência  $\omega(t)$  do protocolo de referência. Em todos os casos assumimos  $\omega_f = 6\omega_0$ .

Ainda sobre a figura 9, podemos notar que a intensidade da frequência angular, durante o processo, pode ultrapassar o valor da frequência final  $\omega_f$ . Entretanto, no final do protocolo, ou seja, no tempo  $t_f/a$ , o protocolo TR garante que  $\tilde{\omega}(t_f/a) = \omega_f$ . Para o caso  $a = 2$  e  $a = 4$  o valor máximo da frequência angular chegam aproximadamente a  $8.22\omega_0$  e  $12.6\omega_0$ , nos tempos  $t = 0.3431t_f$  e  $0.165t_f$ , respectivamente.

Retornando para a eq. (4.14), observamos que o termo cinético representado por  $\hat{p}^2/2m$  está sendo modulado pela derivada da função de reescalamento  $f'(\tau)$ , ou seja, no protocolo TR o termo cinético passaria a ser também dependente do tempo. Tal modulação pode ocorrer, por exemplo, se considerarmos que a partícula sujeita ao potencial harmônico possui uma carga elétrica  $q$ , o momento pode ser controlado a partir da aplicação de um campo magnético dependente do tempo  $B(\tau)$ .

Para entender como isso ocorre, vamos lembrar que, do eletromagnetismo clássico, uma partícula de carga  $q$  e massa  $m$ , sujeita a um campo magnético  $B(\tau)$  sofre a seguinte transformação  $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - qA(\tau)$ , onde  $A(\tau)$  é o potencial vetor magnético e obedece a relação  $B(\tau) = \nabla \times A(\tau)$ . Assim, considerando a modificação no hamiltoniano do protocolo TR, onde  $\hat{H}(t) \rightarrow \hat{H}[f(\tau)]f'(\tau)$  nos leva à seguinte relação

$$\begin{aligned} [\hat{p} - qA(\tau)]^2 &= \hat{p}^2 f'(\tau) \Rightarrow \\ A(\tau) &= \frac{\hat{p}}{q} [1 - f'(\tau)^{1/2}] \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde  $\hat{\mathbf{x}}$  é o vetor unitário que aponta na direção positiva de  $x$ . Tal consideração foi feita pois, a partícula está confinada em um potencial harmônio na direção  $x$ . Da eq. (4.17), temos que o primeiro termo do lado direito da igualdade não depende do tempo, assim, devido à invariância de gauge, a adição de um termo constante não é fisicamente relevante. Desta forma, considerando apenas o termo dependente do tempo em (4.17), podemos reescrever o potencial vetor como

$$A(\tau) = -B_0 y f'(\tau)^{1/2} \hat{\mathbf{x}}, \quad (4.18)$$

onde  $B_0$  é uma constante positiva com dimensão de campo magnético.

Utilizando a expressão para o potencial vetor (4.18), o campo magnético fica

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \nabla \times A(\tau), \\ B(\tau) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \times [-B_0 y f'(\tau)^{1/2} \hat{\mathbf{x}}], \\ B(\tau) &= -B_0 f'(\tau)^{1/2} \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}}, \\ B(\tau) &= B_0 f'(\tau)^{1/2} \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Um ponto para ser comentado é que, como a partícula está confinada na direção  $x$ , a dependência da coordenada  $y$  no potencial vetor (4.18) é irrelevante. Outro ponto é que, da eq. (4.19), temos que o campo magnético responsável pela modulação do momento linear da partícula, atua ao longo da direção  $z$ . Poderíamos também ter reescrito o potencial vetor como  $A(\tau) = -B_0 z f'(\tau)^{1/2} \hat{\mathbf{x}}$ , o que nos levaria a um campo magnético  $B(\tau) = -B_0 f'(\tau)^{1/2} \hat{\mathbf{y}}$ . Assim, para que o momento  $\hat{p}$  seja devidamente modulado, o campo magnético o qual a partícula está submetida deve estar em uma direção perpendicular à direção  $x$ . Substituindo a expressão para  $f'(\tau)$  dada pela (4.9), o campo magnético (4.19) fica

$$B(\tau) = B_0 \left[ a - (a - 1) \cos \left( \frac{2\pi a}{t_f} \tau \right) \right]^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.20)$$

onde podemos observar que  $B(0) = B(t_f/a) = B_0$ .

Para finalizar nossa análise, precisamos comentar o papel da constante  $B_0$ . Para isso, podemos notar que, na eq. (4.20), quando  $a = 1$ , ou seja, quando não há reescalonamento

temporal, o protocolo TR é igual ao protocolo de referência. Assim, temos que o protocolo de referência envolve a aplicação de um campo magnético constante tal que  $B_{ref} = B_0 \hat{z}$ . Em outras palavras, para que o campo magnético dado pela eq. (4.20) possa realizar a modulação do termo cinético no protocolo TR, se faz necessário que o protocolo de referência seja descrito tanto pela frequência angular  $\omega(t)$  quanto pelo campo magnético  $B_{ref}$ . Isto significa que  $B_0$  nada mais é que a intensidade do campo magnético no protocolo de referência. Também devemos salientar que o operador momento  $\hat{p}$  na equação (4.14) é então dado por  $\hat{p} = \hat{p}' - qA_{ref}$ , onde  $\hat{p}'$  é o operador momento da partícula livre de qualquer influência eletromagnética externa, e  $A_{ref}$  é o potencial vetor do protocolo de referência.

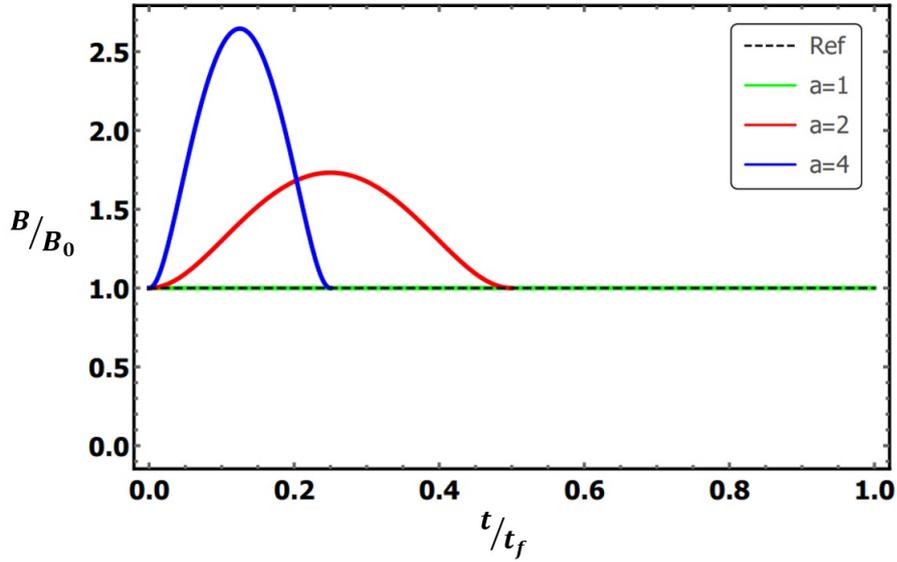


Figura 10 – Dependência temporal do campo magnético para alguns valores do parâmetro  $a$ , onde adotamos  $B_0 = 1$ .

Um ponto importante é que, embora o sistema trate de uma partícula se movendo ao longo do eixo  $\hat{x}$  e sujeito a um campo magnético na direção  $\hat{z}$  o que induziria uma força de Lorentz na direção  $\hat{y}$ , o sistema está confinado em uma dimensão, eixo  $\hat{x}$ . Deste modo, podemos desconsiderar os efeitos dessa força induzida.

Na figura 10 temos o comportamento do campo magnético do protocolo TR ao longo do tempo para alguns valores do parâmetro  $a$ . Podemos perceber que, como mencionado anteriormente, para o caso em que  $a = 1$  não existe reescalamento temporal, fazendo com que o protocolo TR seja exatamente igual ao protocolo de referência. Para os casos em que  $a > 1$ , semelhante ao caso da frequência angular  $\tilde{\omega}(\tau)$ , podemos observar que a intensidade do campo magnético aumenta até o intervalo de  $t_f/2a$  quando começa a diminuir até retornar à intensidade inicial  $B_0$  no tempo de duração  $t_f/a$ . Para os casos  $a = 2$  e  $a = 4$ , o máximo da intensidade do campo magnético chega aos valores aproximadamente de  $1.732B_0$  e  $2.646B_0$ , nos tempos  $t = 0.25t_f$  e  $0.125t_f$ , respectivamente.

Podemos então entender que para que o protocolo TR funcione de fato como um atalho, as intensidades da frequência angular  $\tilde{\omega}(\tau)$  e do campo magnético  $B(\tau)$  durante o processo podem adquirir valores diferentes dos estabelecidos pelo protocolo de referência. Mas, como dito anteriormente, ao final do protocolo TR, os valores para tais grandezas são os mesmos que no protocolo de referência, mas em uma duração de tempo menor. Caso haja alguma imprecisão nas condições iniciais (frequência inicial  $\omega_0$  e campo magnético inicial  $B_0$ ) ou durante o protocolo, o sistema pode não atingir a frequência final  $\omega_f$ , implicando em uma fidelidade menor que 1, ou seja, o sucesso da evolução será menor que 100%. Um estudo de como os erros nos parâmetros influenciam na fidelidade do sistema é realizado na seção seguinte.

### 4.3 Inversão de população em um sistema de dois níveis

O controle da dinâmica de sistemas de dois níveis que interagem com campos externos dependentes do tempo têm sido uma área de pesquisa com interesse relevante proporcionando aplicações no desenvolvimento várias tecnologias quânticas [4, 5, 7, 78, 79]. Uma das primeiras aplicações de um atalho para adiabaticidade em um sistema de dois níveis e três níveis, foi proposta por Chen et al. na ref. [13] utilizando o método contradiabático. Tal desenvolvimento, para o caso de dois níveis, foi apresentado no capítulo 3. Vamos agora apresentar a aplicação, que realizamos em nosso grupo, do método de reescalamento temporal na inversão de população de um sistema de dois níveis. Esta proposta foi publicada na referência [72] e é um dos resultados obtidos durante este doutorado.

Temos como objetivo, realizar a inversão completa das populações dos níveis de energia do sistema. Para realizar tal tarefa, é comum a utilização de pulsos ressonantes  $\pi$  [69] e pulsos compostos [80–82]. Embora tais protocolos promovam a inversão de população de forma rápida, são extremamente sensíveis à variações na área ou na intensidade dos pulsos. Outro meio de promover a inversão é a utilização da passagem adiabática [83] que, por sua vez, possui certa robustez em relação a imperfeições experimentais. Contudo, esta técnica necessita de uma evolução com uma duração de tempo relativamente longa, tornando-a vulnerável a fenômenos indesejados como a decoerência ou ruídos. Desta maneira, um atalho que promova esta inversão em um tempo mais curto e com uma certa robustez seria uma técnica extremamente útil.

Neste exemplo, vamos primeiramente descrever todo o protocolo adiabático de referência e em seguida, aplicar o método de reescalamento temporal. Após isso, faremos um estudo sobre a fidelidade do método TR [72].

### 4.3.1 Sistema de dois níveis

Inicialmente, vamos considerar que o hamiltoniano dependente do tempo de um sistema atômico de dois níveis interagindo com um laser é dado por

$$\hat{H}_0(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta(t) & \Omega_R(t)e^{i\varphi(t)} \\ \Omega_R(t)e^{-i\varphi(t)} & -\Delta(t) \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

onde  $\Delta(t)$  é a dessintonia definida por  $\Delta(t) = \omega_L - \omega_0$ , com  $\omega_L$  sendo a frequência do laser e  $\omega_0$  a frequência de transição entre os níveis de energia do átomo,  $\Omega_R(t)$  é a frequência de Rabi definida como  $\Omega_R(t) = \vec{d}_{ij} \cdot \vec{E}/\hbar$ , onde  $\vec{d}_{ij}$  é o momento de dipolo da transição  $i \rightarrow j$ , e  $\vec{E}$  é o campo elétrico do laser, e  $\varphi(t)$  uma fase dependente do tempo. Na eq. (4.21), o hamiltoniano  $\hat{H}_0(t)$  foi escrito na base  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ , com  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  sendo respectivamente os níveis atômicos fundamental e excitado.

Os autoestados instantâneos do hamiltoniano  $\hat{H}_0(t)$  são dados por

$$|n_+(t)\rangle = \text{sen} \left( \frac{\theta(t)}{2} \right) |1\rangle + e^{i\varphi} \cos \left( \frac{\theta(t)}{2} \right) |2\rangle \quad (4.22)$$

e

$$|n_-(t)\rangle = -e^{-i\varphi} \cos \left( \frac{\theta(t)}{2} \right) |1\rangle + \text{sen} \left( \frac{\theta(t)}{2} \right) |2\rangle, \quad (4.23)$$

onde  $\theta(t) = \arccos[-\Delta(t)/\Omega(t)]$  e  $\Omega(t) = \sqrt{\Delta^2(t) + \Omega_R^2(t)}$  é a chamada frequência de Rabi generalizada. Também temos que  $E_{\pm}(t) = \pm\hbar\Omega(t)/2$  são as autoenergias do sistema.

Por simplicidade, vamos adotar  $\varphi = 0$ . Assim, o hamiltoniano (4.21) e os autoestados (4.22) e (4.23) serão dados respectivamente por

$$\hat{H}_0(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega_R \\ \Omega_R & -\Delta \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

$$|n_+(t)\rangle = \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) |1\rangle + \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) |2\rangle \quad (4.25)$$

e

$$|n_-(t)\rangle = -\cos \left( \frac{\theta}{2} \right) |1\rangle + \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) |2\rangle, \quad (4.26)$$

onde, para não carregar a notação, omitimos a dependência temporal,  $\Omega_R = \Omega_R(t)$ ,  $\Delta = \Delta(t)$  e  $\theta = \theta(t)$ .

Considerado que o sistema se encontra inicialmente em um dos autoestados do hamiltoniano, ou seja,  $|\psi_{\pm}(0)\rangle = |n_{\pm}(0)\rangle$ , e assumindo que a condição de adiabaticidade  $|\Omega_R \dot{\Delta} - \dot{\Omega}_R \Delta| \ll |\Omega^3|$  é satisfeita [12, 68], a evolução temporal do sistema é descrita de acordo com a eq.(2.2) oriunda do teorema adiabático,

$$|\psi_{\pm}(t_f)\rangle = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^{t_f} E_{\pm}(t) dt \right\} |n_{\pm}(t)\rangle. \quad (4.27)$$

Vamos assumir que o sistema se inicia no estado  $|n_+(0)\rangle = |1\rangle$ . Assim, a evolução das populações dos níveis atômicos 1 e 2 serão

$$P_1^{\text{ad}}(t) = |\langle 1|n_+(t)\rangle|^2 = \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (4.28)$$

e

$$P_2^{\text{ad}}(t) = |\langle 2|n_+(t)\rangle|^2 = \text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (4.29)$$

Aqui, vamos considerar novamente o sistema de passagem adiabática de Allen-Eberly (AE) [69, 70], onde a frequência de Rabi e a dessintonia são dadas respectivamente por

$$\Omega_R(t) = \Omega_0 \text{sech}\left[\frac{\pi(t - 4t_0)}{2t_0}\right], \quad (4.30)$$

$$\Delta(t) = \left(\frac{2\beta^2 t_0}{\pi}\right) \tanh\left[\frac{\pi(t - 4t_0)}{2t_0}\right], \quad (4.31)$$

onde os parâmetros  $\Omega_0$  e  $\beta$  são constantes reais com dimensão de frequência, e  $t_0$  é uma constante que representa a escala de tempo característica da dinâmica. Como mencionado no capítulo 3, para promover uma inversão de população completa (probabilidade igual a 1), a passagem adiabática AE requer um tempo infinitamente longo. Mas, considerando o tempo de evolução igual a  $8t_0$ , conseguimos uma inversão de população bem-sucedida com probabilidade maior que 0.999.

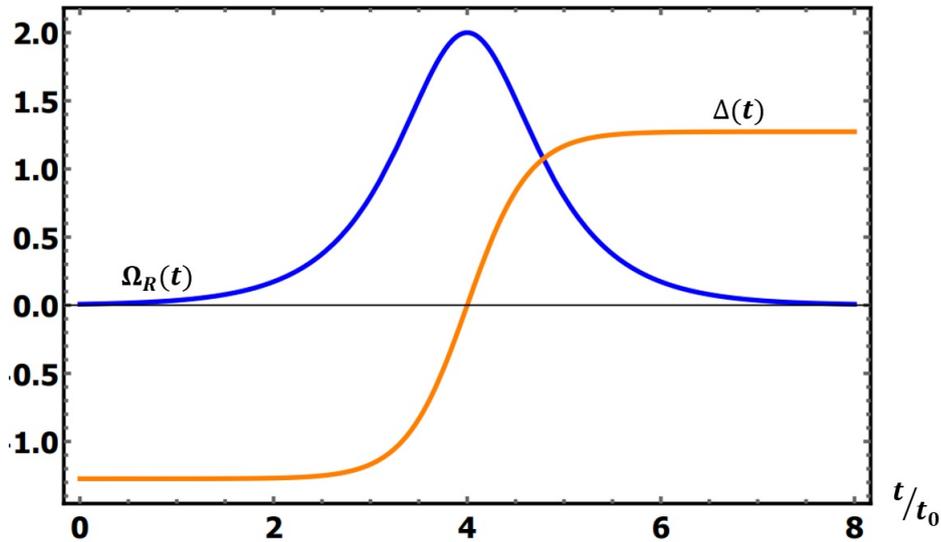


Figura 11 – Comportamento da frequência de Rabi  $\Omega_R(t)$  e da dessintonia  $\Delta(t)$  com parâmetros  $\Omega_0 = \beta^2 = 2$  e  $t_0 = 1$ .

Na figura 11, temos o comportamento temporal da frequência de Rabi  $\Omega_R(t)$  e da dessintonia  $\Delta(t)$  descritas pela passagem adiabática de Allen-Eberly, eq. (4.30) e (4.31),

respectivamente. Ainda dessas equações, podemos perceber que no tempo  $t = 0$ , temos  $\Omega_R(0) \approx 0$  e  $\Delta(0) \approx -4/\pi$  o que nos leva a um ângulo de mistura  $\theta(0) \approx \pi$ . Assim, a escolha de  $|n_+(0)\rangle$  como estado inicial, corresponde aproximadamente ao autoestado  $|1\rangle$ .

Enquanto isso, na figura 12, temos a evolução das populações dos níveis atômicos, onde a curva azul é descrita pela eq. (4.28) e a curva laranja é descrita pela eq. (4.29). Vemos que inicialmente a probabilidade de encontrarmos a partícula no estado  $|1\rangle$  é igual a aproximadamente 1, e para o estado  $|2\rangle$  aproximadamente igual a 0. Em  $t = 4t_0$ , temos iguais probabilidades para os estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , e em  $t = 8t_0$  temos a inversão de população, onde agora a probabilidade de encontrarmos a partícula no estado  $|2\rangle$  é aproximadamente 1, e para  $|1\rangle$  é aproximadamente 0.

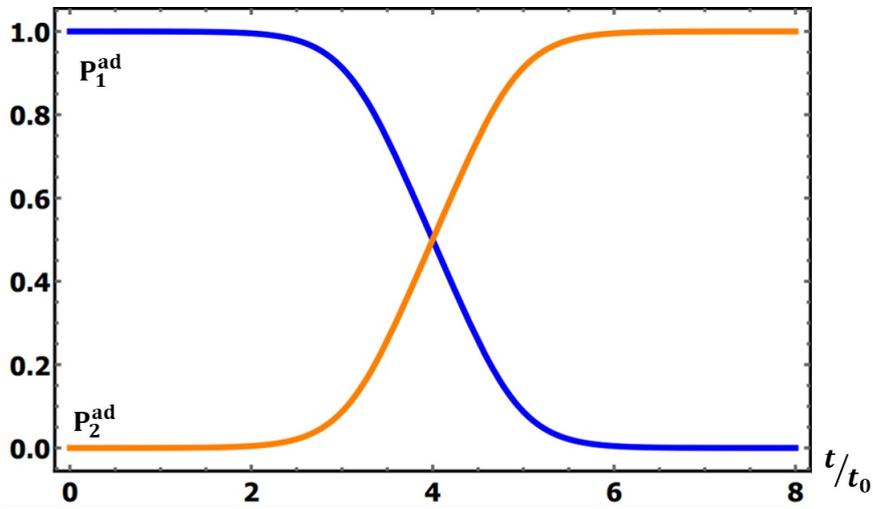


Figura 12 – Comportamento temporal das populações dos níveis de energia atômicos com estado inicial  $|n_+(0)\rangle \approx |1\rangle$  e parâmetros  $\Omega_0 = \beta^2 = 2$  e  $t_0 = 1$ .

### 4.3.2 Aplicando o método de reescalamento temporal

Uma vez descrito todo o protocolo de referência, podemos realizar a aplicação do método de reescalamento temporal. Primeiramente vamos escrever o operador hamiltoniano TR  $\hat{\mathcal{H}}(\tau) = \hat{H}(\tau)f'(\tau)$ . Desta forma, temos

$$\hat{\mathcal{H}}(\tau) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} & \tilde{\Omega}_R \\ \tilde{\Omega}_R & -\tilde{\Delta} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

onde  $\tilde{\Omega}_R$  é a frequência de Rabi TR definida por  $\tilde{\Omega}_R(\tau) = \Omega_R[f(\tau)]f'(\tau)$  e  $\tilde{\Delta}$  a dessintonia TR definida por  $\tilde{\Delta}(\tau) = \Delta[f(\tau)]f'(\tau)$ . Considerando a função de reescalamento temporal  $f(\tau)$  dada pela eq. (4.8), sua derivada  $f'(\tau)$  dada pela eq. (4.9) e a frequência de Rabi e dessintonia descritas pelas eq. (4.30) e (4.31), respectivamente, podemos escrever

explicitamente as expressões para  $\tilde{\Omega}_R(\tau)$  e  $\tilde{\Delta}(\tau)$ . Temos então que

$$\tilde{\Omega}_R(\tau) = \Omega_0 \left[ a - (a-1) \cos\left(\frac{2\pi a}{t_f} \tau\right) \right] \operatorname{sech} \left\{ \frac{\pi}{2t_0} \left[ a\tau - \frac{(a-1)}{2\pi a} t_f \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi a}{t_f} \tau\right) - 4t_0 \right] \right\}, \quad (4.33)$$

e

$$\tilde{\Delta}(\tau) = \left( \frac{2\beta^2 t_0}{\pi} \right) \left[ a - (a-1) \cos\left(\frac{2\pi a}{t_f} \tau\right) \right] \times \tanh \left\{ \frac{\pi}{2t_0} \left[ a\tau - \frac{(a-1)}{2\pi a} t_f \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi a}{t_f} \tau\right) - 4t_0 \right] \right\}. \quad (4.34)$$

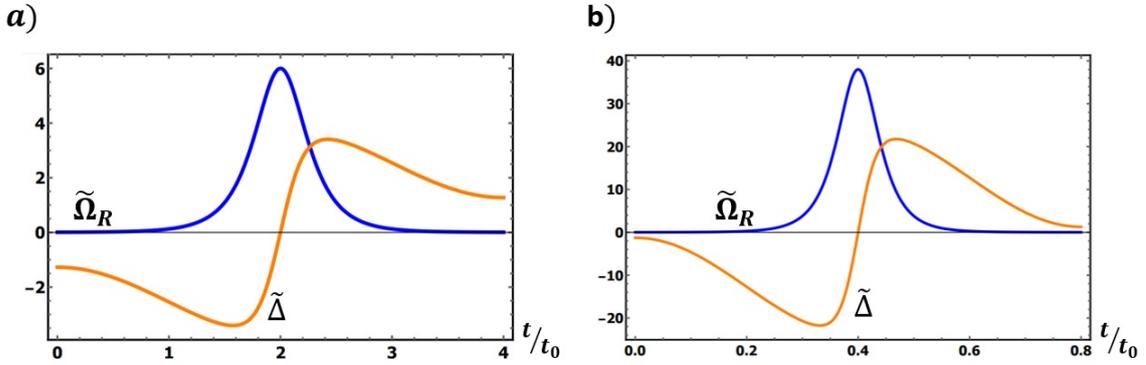


Figura 13 – Dependência temporal da frequência de Rabi  $\tilde{\Omega}_R$  e da dessintonia  $\tilde{\Delta}$  para o protocolo TR. Em (a) o fator de contração temporal assume o valor  $a = 2$ , enquanto em (b), temos  $a = 10$ . Parâmetros:  $\Omega_0 = \beta^2 = 2$  e  $t_0 = 1$

O comportamento temporal de  $\tilde{\Omega}_R$  e de  $\tilde{\Delta}$  pode ser visto na figura 13, onde o parâmetro de contração temporal assume os valores de  $a = 2$  em (a) e  $a = 10$  em (b). Podemos observar que o protocolo TR promove a evolução temporal  $a$  vezes mais rápido que o protocolo de referência. Outro ponto que pode ser observado é que o valor máximo de  $\tilde{\Omega}_R$  aumenta à medida que  $a$  também aumenta e que tal máximo ocorre sempre em  $t_f/2a$ , ou seja, sempre na metade da duração do protocolo. Desta forma, da eq. (4.33), temos que  $\tilde{\Omega}_R(t_f/2a) = \tilde{\Omega}_R^{MAX} = (2a-1)\Omega_0$  e, como  $\Omega_0$  representa o máximo da frequência de Rabi no protocolo de referência, o protocolo TR requer uma frequência com máximo  $2a-1$  vezes maior. Já com relação à dessintonia, temos que  $\tilde{\Delta}(t_f/2a) = 0$ , que é exatamente a ressonância entre a frequência do laser e a frequência de transição dos níveis atômicos.

Precisamos agora conferir se o protocolo TR consegue com sucesso promover a inversão de população em um tempo mais curto. Seria bastante intuitivo utilizarmos os estados descritos pelas eqs. (4.24) e (4.25), mas, tais relações são resultados da equação de Schrödinger referente ao hamiltoniano (4.24), ou seja, são estado obtidos a partir da utilização da aproximação adiabática. Assim, não podemos simplesmente realizar a mudança  $t \rightarrow f(\tau)$  diretamente nos estados.

Para estudar a evolução das populações, precisamos então calcular o estado diretamente da equação de Schrödinger para o hamiltoniano reescalonado  $\hat{\mathcal{H}}(\tau)$  e com  $\tilde{\Omega}_R$  e  $\tilde{\Delta}$  dadas respectivamente por (4.33) e (4.34), ou seja, precisamos resolver a equação

$$\hat{\mathcal{H}}(\tau) |\psi_{1,2}(\tau)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} |\psi_{1,2}(\tau)\rangle, \quad (4.35)$$

onde  $|\psi_{1,2}(\tau)\rangle$  são os autoestados de  $\hat{\mathcal{H}}(\tau)$ . Escolhendo o estado inicial como sendo  $|\psi_1(0)\rangle = |1\rangle$ , temos que a evolução temporal das populações dos níveis atômicos 1 e 2 serão dadas por

$$P_1^{\text{TR}}(\tau) = |\langle 1 | \psi_1(\tau) \rangle|^2, \quad (4.36)$$

$$P_2^{\text{TR}}(\tau) = |\langle 2 | \psi_1(\tau) \rangle|^2. \quad (4.37)$$

A eq. (4.35) não pode ser resolvida analiticamente, assim, calculamos a evolução temporal descritas pelas equações acima, numericamente. Tal resultado pode ser visto na figura 14, onde assumimos  $a = 2$  em (a) e  $a = 10$  em (b).

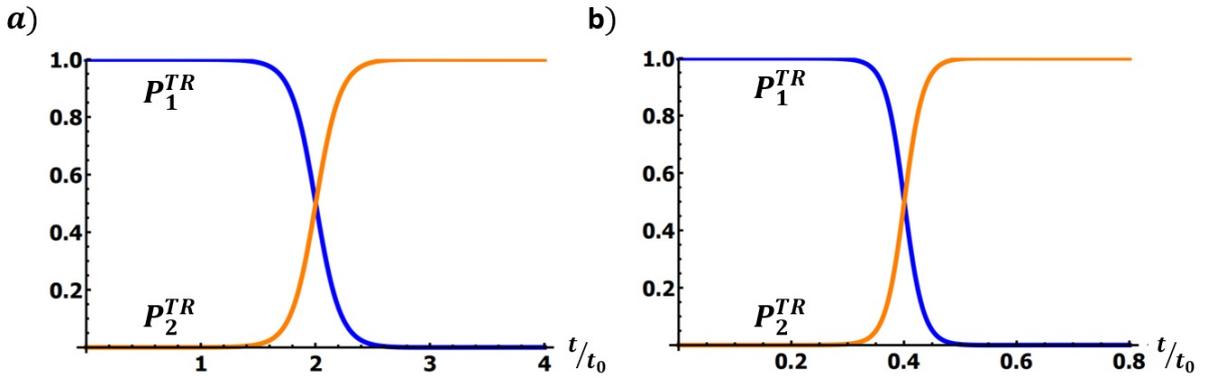


Figura 14 – Evolução temporal das populações descritas pelas eq. (4.36) e (4.37) para o protocolo TR. Em (a) o fator de contração temporal assume o valor  $a = 2$ , enquanto em (b), temos  $a = 10$ . Parâmetros:  $\Omega_0 = \beta^2 = 2$  e  $t_0 = 1$

Podemos perceber então que o método de reescalamento temporal consegue, com sucesso, promover a inversão de população  $a$  vezes mais rápido que o protocolo de referência, figura 12.

### 4.3.3 Estabilidade

Como visto, o método de reescalamento temporal reproduz com sucesso a inversão de população em um intervalo de tempo  $a$  vezes menor que o protocolo de referência. Contudo, como mencionado anteriormente, se faz necessário também que a dinâmica promovida pelo protocolo TR seja robusta e estável com relação a possíveis erros na manipulação

dos parâmetros externos, por exemplo, a frequência angular  $\tilde{\omega}(\tau)$  no exemplo do oscilador paramétrico, e a frequência de Rabi  $\tilde{\Omega}(\tau)$  e a dessintonia  $\tilde{\Delta}(\tau)$  no caso do sistema de dois níveis.

Vamos agora analisar a estabilidade da inversão de população descrita anteriormente. Para isso vamos considerar erros na frequência de Rabi e na dessintonia de modo que  $\Omega_0 \rightarrow \Omega_0(1 + \epsilon)$  e  $\beta^2 \rightarrow \beta^2(1 + \delta)$ , respectivamente. Para tal análise, vamos considerar a fidelidade  $F = P_2$  que é a probabilidade de obtermos com sucesso o estado  $|2\rangle$  após a realização do protocolo dado que este iniciou no estado  $|1\rangle$ . A figura 15 mostra o comportamento da fidelidade  $F$  quando consideramos tais erros. Em (a) temos o comportamento da fidelidade quando  $\Omega_0 \rightarrow \Omega_0(1 + \epsilon)$ , onde a linha laranja corresponde à fidelidade para o caso em que  $a = 2$ , a linha tracejada preta corresponde ao caso em que  $a = 10$  e a linha tracejada azul corresponde à fidelidade para um pulso  $\pi$  quando consideramos erros na frequência de Rabi  $\Omega_R \rightarrow \Omega_R(1 + \epsilon)$ , mantendo  $\Delta = 0$ . É importante ressaltar que o pulso  $\pi$  não representa um processo adiabático, e se trata de um pulso de difícil reprodução experimental, uma vez que, a tarefa de modular os campos para gera-lo é muito complicada. Para este último caso, a fidelidade é dada pela relação  $F = \text{sen}^2[(1 + \epsilon)\pi/2]$ . Em (b), temos também o comportamento de  $F$ , mas agora para o caso em que  $\beta^2 \rightarrow \beta^2(1 + \delta)$ , onde, novamente, a linha laranja corresponde à fidelidade para o caso em que  $a = 2$ , a linha tracejada preta corresponde ao caso em que  $a = 10$ .

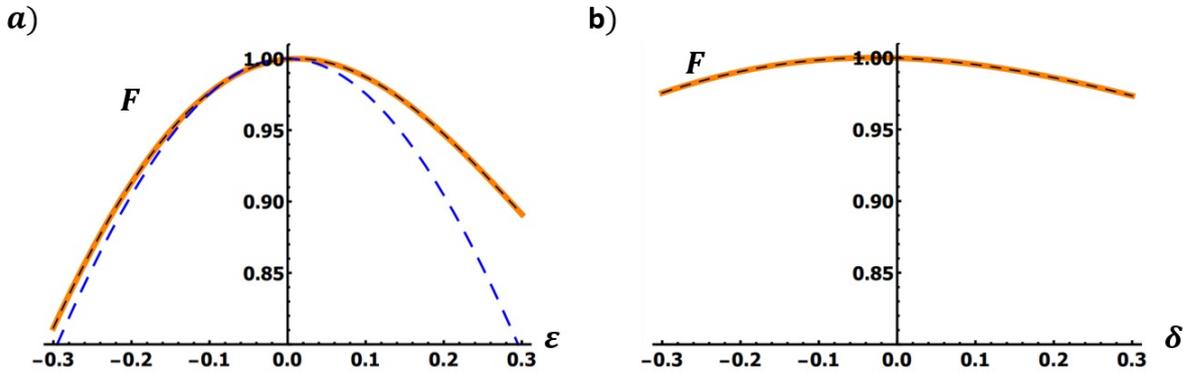


Figura 15 – Fidelidade ( $F = P_2$ ) versus erros sistemáticos: (a) na frequência de Rabi  $\Omega_0 \rightarrow \Omega_0(1 + \epsilon)$ , e (b) na dessintonia  $\beta^2 \rightarrow \beta^2(1 + \delta)$ . As linhas laranja e tracejada preta correspondem à dinâmica referente ao protocolo TR para os casos  $a = 2$  e  $a = 10$ , respectivamente. A linha azul tracejada corresponde à fidelidade de um pulso  $\pi$  descrita por  $F = \text{sen}^2[(1 + \epsilon)\pi/2]$ . Mesmos parâmetros que na figura 14.

Podemos perceber que, em ambos os casos o máximo da fidelidade, ou seja,  $F = 1$ , não ocorre nos pontos em que  $\epsilon = 0$  e  $\delta = 0$ . Isso deve-se ao fato que o protocolo TR, bem como a própria dinâmica de referência, possui probabilidade de inversão maior que 0.999, mas, não 1. Contudo, podemos ver que para erros de até 20% em  $\Omega_0$ , a figura 15a indica uma fidelidade  $F \geq 0.913$  quando  $\epsilon < 0$  e  $F \leq 0.947$  quando  $\epsilon > 0$ . Já na figura

15b, vemos que o protocolo TR é ainda mais estável em relação a erros na dessintonia, onde, considerando erros de até 20% temos uma fidelidade superior a 0.986.

Uma vez realizado o estudo da estabilidade, temos que o método de reescalamento temporal possui uma robustez semelhante a outros métodos de atalhos para adiabaticidade [84]. Além disso, pode ser observado que a fidelidade é independente do parâmetro de contração temporal  $a$ , ou seja, seu valor não é modificado para qualquer que seja o intervalo  $\Delta\tau = t_f/a$  utilizado no protocolo TR.

## 4.4 Comentários adicionais

Na ref. [32], é feito um estudo comparativo da inversão de populações com pulsos hiper-Gaussianos, onde um dos métodos utilizados é o método de reescalamento temporal. Como resultado, os autores concluem que o método de reescalamento temporal para o caso tratado apresenta uma boa fidelidade, bem como um comportamento suave durante a inversão de população.

Uma outra aplicação do método de reescalamento temporal pode ser vista na ref. [85]. Aqui, o protocolo TR é utilizado em mecânica quântica relativística, onde os autores conseguem aplicar o método para dinâmicas envolvendo a equação de Dirac.

Como demonstrado nos exemplos apresentados anteriormente, o método de reescalamento temporal não necessita de qualquer imposição sobre a dinâmica de referência do sistema. Outro fato importante que o torna vantajoso em relação a outros métodos é que não se faz necessário obter qualquer informação acerca dos autoestados instantâneos do hamiltoniano do protocolo de referência.

Ainda na ref. [72], é realizado um estudo sobre o custo termodinâmico de aplicação do protocolo TR. Como resultado, os autores apresentam que a média do trabalho para o protocolo TR é a mesma do protocolo de referência associado. Isso deve-se ao fato de que ambos os protocolos possuem os mesmos estados inicial e final. Além disso é demonstrado que as flutuações quânticas do trabalho são as mesmas para ambos os protocolos, uma vez que, além dos estados inicial e final, o método TR garante a igualdade do hamiltoniano nos instantes inicial e final.

## 5 Parâmetros ajustáveis

Publicado na referência [33], o método dos parâmetros ajustáveis se trata de uma proposta de atalho para adiabaticidade através da adição de um termo extra no hamiltoniano de referência. Este termo extra é descrito de uma forma geral, onde, para cada problema que se deseja abordar, é necessário o ajuste de dois parâmetros independentes. Tal método é também um dos resultados obtidos neste trabalho de tese.

Somar um novo termo ao hamiltoniano significa adicionar uma nova interação que, do ponto de vista experimental é mais fácil que realizar manipulações no hamiltoniano de referência. Embora a ideia geral do método em adicionar um novo termo ao hamiltoniano de referência seja a mesma que o método contradiabático, nosso método torna-se vantajoso, uma vez que, como veremos a seguir, e semelhante ao método de reescalonamento temporal, não se faz necessário qualquer informação acerca dos autoestados instantâneos do hamiltoniano original tornando-se assim um mecanismo independente do estado para acelerar a evolução de um estado quântico. Para ilustrar a funcionalidade desse método, vamos aplica-lo em dois sistemas relevantes: o oscilador paramétrico e a partícula de spin  $1/2$  em um campo magnético.

### 5.1 Preliminares

Considere um sistema quântico fechado que segue uma evolução temporal regida de acordo com o operador evolução temporal  $\hat{U}(t_f, t_0)$ , onde  $t_f$  e  $t_0$  são os tempos final e inicial da evolução, respectivamente. Tal operador deve ser unitário, ou seja,  $\hat{U}^\dagger(t_f, 0)\hat{U}(t_f, 0) = \mathcal{I}$ , sendo  $\mathcal{I}$  o operador identidade e onde, por simplicidade, adotamos  $t_0 = 0$ . Além disso, este operador deve satisfazer à equação de Schrödinger

$$\hat{H}(t)\hat{U}(t_f, 0) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t_f, 0), \quad (5.1)$$

onde  $\hat{H}(t)$  é o hamiltoniano dependente do tempo que rege o sistema. Considerando que o hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  comuta em diferentes tempos, a solução para a equação (5.1) é dada por

$$\hat{U}(t_f, 0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^{t_f}\hat{H}(t)dt\right]. \quad (5.2)$$

A unitariedade de  $\hat{U}(t_f, 0)$  pode ser facilmente verificada. Além disso, podemos ver que  $\hat{U}(0, 0) = \mathcal{I}$ , uma vez que  $\hat{U}(0, 0)|\psi(0)\rangle = \mathcal{I}|\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle$ , onde,  $|\psi(0)\rangle$  é um estado inicial arbitrário.

Para o caso em que  $\hat{H}(t)$  não comuta em diferentes tempos, a solução formal da eq. (5.1) para tal situação é

$$\hat{U}(t_f, 0) = \hat{\mathcal{T}} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^{t_f} \hat{H}(t) dt \right], \quad (5.3)$$

onde  $\hat{\mathcal{T}}$  é o operador de ordenação temporal. A atuação do operador evolução temporal em um estado quântico inicial arbitrário  $|\psi(0)\rangle$  produz o estado final  $|\psi(t_f)\rangle$ , ou seja,  $\hat{U}(t_f, 0) |\psi(0)\rangle = |\psi(t_f)\rangle$  [71, 86].

A partir de agora o operador evolução temporal dado pela eq. (5.2) e o hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  serão referidos como protocolo de referência. Além disso, como nosso foco é realizar um atalho para adiabaticidade, vamos considerar que o protocolo de referência se trata de uma evolução adiabática.

## 5.2 Método

Vamos agora introduzir as características gerais do método de parâmetros ajustáveis. Assim, considere que o  $\hat{H}(t)$  atua no sistema durante um intervalo de tempo  $\Delta t = t_f - t_0 = t_f$ . Nosso objetivo é realizar um protocolo que reproduza os mesmos resultados que o protocolo de referência em um tempo menor. O intervalo de tempo que estaremos considerando é tal que  $\Delta t = t_f/a$ , onde  $a$  é uma constante positiva chamada de parâmetro de contração temporal e que, assim como no método de reescalonamento temporal, representa quantas vezes mais rápido o novo protocolo será em relação ao de referência. Desse modo, se  $a = 2$  significa que o novo protocolo será duas vezes mais rápido que o de referência,  $a = 4$ , por sua vez, seria quatro vezes mais rápido, e assim por diante.

A essência do método de parâmetros ajustáveis (PA) é a adição de um potencial auxiliar  $\hat{V}(t)$  ao hamiltoniano de referência  $\hat{H}(t)$ . Assim, o hamiltoniano efetivo  $\hat{\mathcal{H}}(t)$  para o protocolo PA será dado por

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{H}(t) + \hat{V}(t). \quad (5.4)$$

Um ponto importante a se ressaltar é que apenas a atuação do potencial auxiliar não é capaz de reproduzir o protocolo de referência, mas sim a atuação do hamiltoniano efetivo  $\hat{\mathcal{H}}(t)$ , ou seja, a ação conjunta do hamiltoniano de referência  $\hat{H}(t)$  e do potencial  $\hat{V}(t)$ .

Como queremos que o processo rápido reproduza o mesmo estado final da dinâmica quântica para o caso de referência, em que o sistema evolui do estado inicial  $|\psi(0)\rangle$  para  $|\psi(t_f)\rangle$ , o hamiltoniano efetivo  $\hat{\mathcal{H}}(t)$  deve satisfazer às seguintes condições

$$\hat{\mathcal{H}}(0) = \hat{H}(0), \quad (5.5)$$

$$\hat{\mathcal{H}}(t_f/a) = \hat{H}(t_f). \quad (5.6)$$

A condição dada pela eq. (5.5) representa a equivalência entre os protocolos PA e de referência no instante inicial. Já a condição representada pela eq. (5.6) significa que o

hamiltoniano do protocolo PA no instante  $t_f/a$  deve ser igual ao do protocolo de referência no instante  $t_f$ , ou seja, o protocolo PA deve reproduzir o protocolo de referência em um tempo mais curto. Outro ponto importante sobre essas condições é que elas garantem que o sistema estará submetido à mesma influência externa no início e fim dos processos de referência e rápidos.

Das eqs. (5.4) e (5.6) nós temos que  $\hat{\mathcal{V}}(0) = 0$ , ou seja, o potencial auxiliar é nulo no início do protocolo. Além disso, temos que  $\hat{\mathcal{H}}(t_f/a) = \hat{H}(t_f/a) + \hat{\mathcal{V}}(t_f/a) = \hat{H}(t_f)$ . Agora, dado o estado inicial do sistema  $|\psi(0)\rangle$ , para garantir que o processo rápido sempre forneça o mesmo resultado final do protocolo de referência, simplesmente exigimos que os estados finais sejam iguais no final dos processos de referência e rápidos. Portanto, temos que

$$|\Psi(t_f/a)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t_f/a, 0) |\psi(0)\rangle, \quad (5.7)$$

onde  $\hat{\mathcal{U}}(t_f/a, 0)$  é o operador evolução temporal referente ao protocolo PA, que é dado por

$$\hat{\mathcal{U}}(t_f/a, 0) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^{t_f/a} \hat{\mathcal{H}}(t) dt \right]. \quad (5.8)$$

Sabemos que o estado evoluído  $|\psi(t_f)\rangle$  para o protocolo de referência é dado por  $|\psi(t_f)\rangle = \hat{U}(t_f, 0) |\psi(0)\rangle$ , com  $\hat{U}(t_f, 0)$  dado pela eq. (5.2). Como consideramos que ambos os protocolos possuem o mesmo estado inicial  $|\psi(0)\rangle$ , devemos ter o mesmo estado final, ou seja,  $|\Psi(t_f/a) = |\psi(t_f)\rangle$ . Estas considerações implicam então em uma outra condição que deve ser satisfeita

$$\hat{\mathcal{U}}(t_f/a, 0) = \hat{U}(t_f, 0). \quad (5.9)$$

É fundamental considerar que o potencial auxiliar depende do parâmetro de contração  $a$ , assim,  $\hat{\mathcal{V}}(t) \equiv \hat{\mathcal{V}}(t, a)$ , pois, como mencionado anteriormente, o fator  $a$  dita o quão curto é o tempo de duração do processo rápido. Desta maneira, temos também que o hamiltoniano efetivo fica  $\hat{\mathcal{H}}(t) \equiv \hat{\mathcal{H}}(t, a)$ .

Uma vez estabelecida as condições necessárias para que o protocolo PA tenha sucesso em funcionar como um STA, temos o seguinte ansatz para o potencial auxiliar

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{V}}(t, a) = & \hat{\mathcal{O}} \cos^2 \left[ 2^{-2+a} \pi \sin^2 \left( \frac{a\pi}{2} \right) \right] \left\{ \mathcal{A} \sin \left[ \frac{2\pi a}{t_f} t - \pi + \arccos \left( \frac{\mathcal{B}t_f}{\mathcal{A}2\pi a} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \mathcal{B}t + \mathcal{A} \sin \left[ \pi - \arccos \left( \frac{\mathcal{B}t_f}{\mathcal{A}2\pi a} \right) \right] \right\} + 2\hat{\mathcal{Q}}(a-1) \sin^2 \left( \frac{a\pi t}{t_f} \right), \quad (5.10) \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são parâmetros independentes que são ajustados de modo que as condições representadas pelas eqs. (5.5), (5.6) e (5.9), enquanto  $\hat{\mathcal{O}}$  e  $\hat{\mathcal{Q}}$  são operadores que serão adotados de acordo com os problemas a serem abordados. O significado e o modo como os parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são ajustados será desenvolvido na próxima subseção.

Para construir esse ansatz geral, foram considerados os seguintes pontos:

- i) suavidade do potencial em tempos próximos a 0 e  $t_f/a$ ;
- ii) a possibilidade de ajustar o tempo de duração da dinâmica, juntamente com os valores inicial e final do potencial auxiliar  $\hat{\mathcal{V}}(t, a)$ ;
- iii) o potencial é nulo quando  $a = 1$ .

O item *i*) significa que o potencial auxiliar deve ser suave no início e no final do protocolo, pois, do ponto de vista experimental, isso torna a execução do controle dos agentes externos responsáveis pela evolução mais facilmente reproduzíveis. Já o item *ii*) representa a ideia de ajustar os valores inicial e final do potencial auxiliar através dos parâmetros independentes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , bem como sua dependência do fator  $a$  ditando o quão rápido será o protocolo. Por fim, a condição *iii*) serve para garantir que no caso  $a = 1$  não temos modificação do tempo de evolução, em outras palavras, o protocolo PA e o protocolo de referência serão iguais, deste modo, o potencial auxiliar deve ser igual a zero,  $\hat{\mathcal{V}}(t, 1) = 0$ . Esta última condição é garantida pelo termo  $\cos^2 \left[ 2^{-2+a} \pi \sin^2 \left( \frac{a\pi}{2} \right) \right]$ .

O primeiro termo da eq. (5.10) garante as condições *i*) e *ii*), e estará relacionado com os termos explicitamente dependentes do tempo do hamiltoniano de referência. Já o segundo termo estará relacionado com os termos que não dependem explicitamente do tempo. Deste modo, conseguimos garantir também a igualdade entre os operadores evolução temporal do protocolo PA e de referência, eq. (5.9).

### 5.3 Ajuste dos parâmetros $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$

Como relatado pelo próprio nome do método, o ajuste dos parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  é a chave para o sucesso do método. Assim, uma vez apresentado as ideias gerais do método, vamos agora apresentar o significado físico e como acontece os ajustes de tais parâmetros independentes.

#### 5.3.1 Parâmetro $\mathcal{A}$

Vamos iniciar nossos ajustes de modo a garantir que o nosso método satisfaça à condição de igualdade entre os operadores evolução temporal dos protocolos PA e de referência. Para isso, vamos retornar às expressões do operador evolução temporal  $\hat{\mathcal{U}}(t_f/a, 0)$  referente ao protocolo PA dado pela eq. (5.8), e  $\hat{U}(t_f, 0)$  referente ao protocolo de referência, eq. (5.2). Substituindo essas expressões na condição dada pela eq. (5.9), chamamos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^{t_f/a} \hat{\mathcal{H}}(t) dt \right] &= \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^{t_f} \hat{H}(t) dt \right], \\ \int_0^{t_f/a} \hat{\mathcal{H}}(t) dt &= \int_0^{t_f} \hat{H}(t) dt. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Utilizando agora a expressão para o hamiltoniano efetivo, eq. (5.4), e substituindo na eq.(5.11) ficamos com

$$\int_0^{t_f/a} \hat{H}(t)dt + \int_0^{t_f/a} \hat{V}(t, a)dt = \int_0^{t_f} \hat{H}(t)dt. \quad (5.12)$$

Considerando que a integral pode ser compreendida geometricamente como a área sob a curva, onde no nosso caso, temos a curva de energia versus o tempo, a eq. (5.11) nos diz que as áreas abaixo das curvas representadas pelos hamiltonianos  $\hat{H}(t)$  no intervalo curto  $\Delta t = t_f/a$  e  $\hat{H}(t)$  no intervalo  $\Delta t = t_f$ , devem ser iguais. Além disso, se olharmos para a eq. (5.12), temos que o primeiro termo do lado esquerdo representa a contribuição na área do hamiltoniano de referência no intervalo compreendido entre 0 e  $t_f/a$ . Já o termo que contém o potencial auxiliar é responsável então por compensar a área referente ao hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  no intervalo entre  $t_f/a$  e  $t_f$ . Do ponto de vista matemático, partindo da eq. (5.12), temos

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f/a} \hat{V}(t, a)dt &= \int_0^{t_f} \hat{H}(t)dt - \int_0^{t_f/a} \hat{H}(t)dt, \\ \int_0^{t_f/a} \hat{V}(t, a)dt &= \int_0^{t_f/a} \hat{H}(t)dt + \int_{t_f/a}^{t_f} \hat{H}(t)dt - \int_0^{t_f/a} \hat{H}(t)dt, \\ \int_0^{t_f/a} \hat{V}(t, a)dt &= \int_{t_f/a}^{t_f} \hat{H}(t)dt, \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde utilizamos o fato de que  $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ . A eq. (5.13) nos afirma então que o potencial auxiliar é o responsável por compensar a “área faltando” devido ao encurtamento do tempo de evolução. Assim, o papel do parâmetro independente  $\mathcal{A}$ , contido no potencial auxiliar é garantir que as integrais (5.11) sejam iguais, ou seja, podemos entender esse parâmetro como um tipo de “normalização” da área, onde o termo de “normalização” aqui se refere à igualdade entre as áreas.

Na figura 16, temos um esquema geral representando geometricamente a igualdade das áreas entre os protocolos de referência, fig. 16 a) e do protocolo PA, fig. 16 b). Um ponto importante para ser ressaltado é que o hamiltoniano efetivo  $\hat{H}(t)$  não segue o mesmo “caminho” que o hamiltoniano de referência. Contudo, o método dos parâmetros ajustáveis garante apenas que o protocolo regido por  $\hat{H}(t)$  será igual ao hamiltoniano de referência nos instantes  $t = 0$  e  $t = t_f/a$ , condições (5.5) e (5.6). Além disso, uma vez que o tempo de evolução é menor, o formato da curva de  $\hat{H}(t)$  precisa ser modificado pelo potencial auxiliar para garantir a condição referente aos operadores evolução temporal, eq.(5.9), que por sua vez garantem que os estados evoluídos referentes à atuação de  $\hat{U}(t_f/a, 0)$  e  $\hat{U}(t_f, 0)$  em um mesmo estado inicial  $|\psi(0)\rangle$  serão iguais, ou seja,  $|\Psi(t_f/a)\rangle = |\psi(t_f)\rangle$ , sendo  $\hat{U}(t_f/a, 0)$  e  $|\Psi(t_f/a)\rangle$  referentes ao protocolo PA, e  $\hat{U}(t_f, 0)$  e  $|\psi(t_f)\rangle$  ao protocolo de referência, respectivamente.

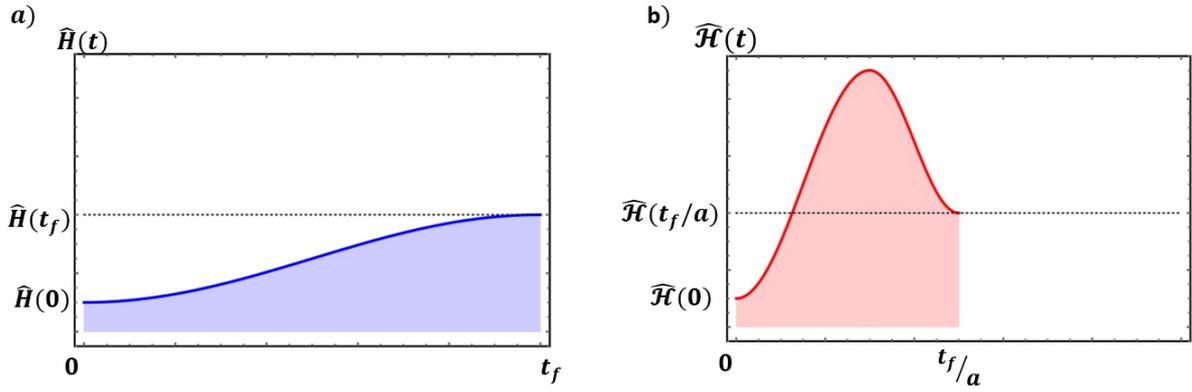


Figura 16 – a) Comportamento temporal de um hamiltoniano arbitrário  $\hat{H}(t)$  agindo no intervalo  $\Delta t = t_f$ . b) Comportamento temporal de um hamiltoniano efetivo arbitrário  $\hat{\mathcal{H}}(t)$  agindo no intervalo  $\Delta t = t_f/a$ . Podemos observar que  $\hat{\mathcal{H}}(0) = \hat{H}(0)$  e  $\hat{\mathcal{H}}(t_f/a) = \hat{H}(t_f)$ . O parâmetro independente  $\mathcal{A}$  do potencial auxiliar  $\hat{\mathcal{V}}(t, a)$  contido em  $\hat{\mathcal{H}}(t)$  é ajustado para garantir que as áreas representadas em a) e b) sejam iguais.

Para finalizarmos a análise a os significados dos termos e parâmetros do potencial auxiliar  $\hat{\mathcal{V}}(t, a)$ , temos que o termo  $2\hat{\mathcal{Q}}(a - 1) \text{sen}^2\left(\frac{a\pi t}{t_f}\right)$  na eq.(5.10) não contribui com o hamiltoniano efetivo nos instantes  $t = 0$  e  $t = t_f/a$ . Contudo, uma vez que ele está relacionado com os termos do hamiltoniano de referência que não dependem explicitamente do tempo, seu papel é garantir que a integral desses termos no intervalo curto igual a integral do intervalo original. Assim, o operador  $\hat{\mathcal{Q}}$  deverá ter o mesmo formato que os operadores contidos nos termos independentes do tempo.

### 5.3.2 Parâmetro $\mathcal{B}$

Como ponto de partida para o ajuste do parâmetro  $\mathcal{B}$ , vamos considerar os termos do hamiltoniano de referência que dependem explicitamente do tempo, onde podemos então observar o seu comportamento ao longo do tempo. Pensando em  $\hat{H}(t)$  como a energia do sistema, temos que no final do protocolo de referência, teremos um valor de energia referente ao hamiltoniano  $\hat{H}(t_f)$ . Como nosso intuito é encurtar o tempo de evolução, devemos observar que, em um tempo final igual a  $t_f/a$ , teremos uma energia referente ao hamiltoniano  $\hat{H}(t_f/a)$ , o que nos leva a uma diferença de energia entre tais instantes finais.

Na figura 17, temos o comportamento temporal de um hamiltoniano arbitrário  $\hat{H}(t)$ , onde podemos observar que quando consideramos um tempo mais curto, existe uma diferença entre os valores do hamiltoniano nos instantes finais do protocolo curto e de referência, ou seja,  $\hat{H}(t_f) - \hat{H}(t_f/a)$ . Deste modo, como queremos que o nosso hamiltoniano efetivo  $\hat{\mathcal{H}}(t)$  reproduza o mesmo resultado que o hamiltoniano de referência, condição

representada na eq.(5.6), precisamos compensar essa diferença. Tal compensação é feita através do potencial auxiliar quando definimos  $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{B} = [\hat{H}(t_f) - \hat{H}(t_f/a)]a/t_f$ . Assim, o parâmetro  $\mathcal{B}$  pode ser entendido como um “complemento” de energia para garantir a igualdade entre  $\hat{\mathcal{H}}(t_f/a)$  e  $\hat{H}(t_f)$ . Sobre o operador  $\hat{\mathcal{O}}$  podemos então inferir que ele terá a mesma forma que os operadores presentes no hamiltoniano de referência, fazendo assim com que o hamiltoniano efetivo tenha o mesmo formato que o de referência.

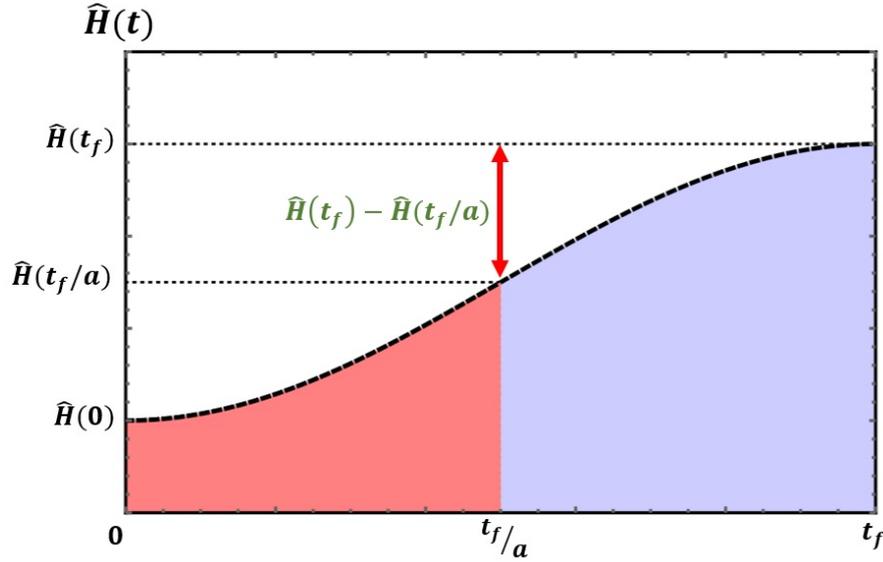


Figura 17 – Comportamento temporal de um hamiltoniano arbitrário  $\hat{H}(t)$ . Quando reduzimos o tempo de evolução, provocamos uma diferença entre os hamiltonianos nos instantes  $t_f$  e  $t_f/a$ , respectivamente. Assim, para compensar essa diferença definimos  $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{B} \equiv [\hat{H}(t_f) - \hat{H}(t_f/a)]a/t_f$  que está presente no potencial auxiliar e será o termo responsável por garantir que  $\hat{\mathcal{H}}(t_f/a) = \hat{H}(t_f)$ .

Da equação para a forma geral do potencial auxiliar, eq. (5.10), temos que nos instantes  $t = 0$  e  $t = t_f/a$  os termos com seno se anulam. Tal fato pode ser facilmente verificado se usarmos a identidade trigonométrica  $\sin(A \pm B) = \sin(A) \cos(B) \pm \cos(A) \sin(B)$ . Assim, o único termo que irá contribuir para o potencial nos instantes inicial e final será o termo  $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{B}t$ , uma vez que, para qualquer valor de  $a \neq 1$ , com  $a \in \mathbb{N}$ , temos  $\cos^2 \left[ 2^{-2+a} \pi \sin^2 \left( \frac{a\pi}{2} \right) \right] = 1$ . Então, através do ajuste do parâmetro  $\mathcal{B}$ , que estará relacionado com a diferença de energia devido ao encurtamento no tempo de evolução, garantimos de fato a igualdade entre os hamiltonianos efetivo e de referência no instante final. Além disso, podemos observar também que de fato no instante inicial, ou seja, em  $t = 0$  teremos  $\hat{\mathcal{V}}(0, a) = 0$ . Deste modo, as condições representadas pelas eqs. (5.5) e (5.6) são satisfeitas.

Um ponto a ser ressaltado é que, embora tenhamos apresentado primeiro o parâmetro  $\mathcal{A}$ , do ponto de vista prático realizamos primeiro o ajuste do parâmetro  $\mathcal{B}$  para depois ajustar o parâmetro  $\mathcal{A}$  através da eq. (5.13).

Vamos agora ilustrar nosso método, a seguir apresentando duas aplicações de impor-

tância fundamental e prática: o oscilador paramétrico e o sistema de spin 1/2 em um campo magnético.

## 5.4 Oscilador harmônico paramétrico

O oscilador paramétrico unidimensional é caracterizado pelo seguinte hamiltoniano dependente do tempo

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\hat{x}^2, \quad (5.14)$$

onde  $\hat{p}$  e  $\hat{x}$  são os operadores momento linear e posição, respectivamente,  $m$  é a massa do oscilador, e  $\omega(t)$  é a frequência angular. Vamos considerar como protocolo de referência o caso em que a frequência angular será dada por

$$\omega(t) = \omega_0 + (\omega_f - \omega_0) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{2t_f}\right), \quad (5.15)$$

Assim, podemos observar que a dependência temporal do hamiltoniano é devido exclusivamente à frequência angular  $\omega(t)$ . Além disso, temos que  $\omega(t)$  obedece às seguintes condições:  $\omega(0) = \omega_0$ ,  $\omega(t_f) = \omega_f$  e  $\dot{\omega}(0) = \dot{\omega}(t_f) = 0$ , onde  $\omega_0$  e  $\omega_f$  são as frequências no início e no final da evolução, respectivamente. Esta última condição significa que o potencial é estático no início e no final da transformação. Vamos também considerar um regime de compressão, o que implica  $\omega_f > \omega_0$ , que do ponto de vista prático significa um estreitamento do potencial harmônico.

Uma vez descrita as generalidades do protocolo de referência, desejamos agora construir um protocolo de compressão rápido através do método dos parâmetros ajustáveis que tenha o mesmo resultado que o protocolo descrito anteriormente. Para isso devemos primeiramente identificar os termos dependentes e independentes do tempo no protocolo de referência. Assim, da eq.(5.14), observamos que o termo cinético  $\hat{p}^2/2m$  é independente do tempo, enquanto o potencial harmônico,  $m\hat{x}^2\omega^2(t)/2$ , depende explicitamente do tempo. Deste modo, como descrito na seção anterior, para construir o potencial auxiliar  $\hat{V}(t, a)$ , precisamos definir o operador  $\hat{Q}$  que estará relacionado com os termos temporalmente independentes, e o operador  $\hat{O}$  que terá o mesmo formato que o termo dependente do tempo. Vamos definir então  $\hat{Q} = \hat{p}^2/2m$  e  $\hat{O} = m\hat{x}^2/2$ , que por sua vez nos levará à seguinte equação para o potencial  $\hat{V}(t, a)$

$$\begin{aligned} \hat{V}(t, a) = & \frac{m\hat{x}^2}{2} \cos^2 \left[ 2^{-2+a} \pi \operatorname{sen}^2 \left( \frac{a\pi}{2} \right) \right] \left\{ \mathcal{A} \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi a}{t_f} t - \pi + \arccos \left( \frac{\mathcal{B}t_f}{\mathcal{A}2\pi a} \right) \right] + \mathcal{B}t + \right. \\ & \left. + \mathcal{A} \operatorname{sen} \left[ \pi - \arccos \left( \frac{\mathcal{B}t_f}{\mathcal{A}2\pi a} \right) \right] \right\} + 2 \frac{\hat{p}^2}{2m} (a-1) \operatorname{sen}^2 \left( \frac{a\pi t}{t_f} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

O hamiltoniano efetivo  $\hat{\mathcal{H}}(t, a)$  que é responsável pelo protocolo rápido será então escrito como

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}(t, a) &= \hat{H} + \hat{V}(t, a), \\ \hat{\mathcal{H}}(t, a) &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\hat{x}^2\omega^2(t) + 2\frac{\hat{p}^2}{2m}(a-1)\text{sen}^2\left(\frac{a\pi t}{t_f}\right) + \frac{m\hat{x}^2}{2}\cos^2\left[2^{-2+a}\pi\text{sen}^2\left(\frac{a\pi}{2}\right)\right] \times \\ &\quad \times \left\{ \mathcal{A}\text{sen}\left[\frac{2\pi a}{t_f}t - \pi + \arccos\left(\frac{\mathcal{B}t_f}{\mathcal{A}2\pi a}\right)\right] + \mathcal{B}t + \mathcal{A}\text{sen}\left[\pi - \arccos\left(\frac{\mathcal{B}t_f}{\mathcal{A}2\pi a}\right)\right] \right\}, \\ \hat{\mathcal{H}}(t, a) &= \frac{\hat{p}^2}{2m}\left[1 + 2(a-1)\text{sen}^2\left(\frac{a\pi t}{t_f}\right)\right] + \frac{1}{2}m\hat{x}^2\tilde{\omega}^2(t, a),\end{aligned}\quad (5.17)$$

onde definimos a frequência modificada  $\tilde{\omega}(t, a)$ , dada por

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^2(t, a) &= \left[\omega_0 + (\omega_f - \omega_0)\text{sen}^2(\pi t/2t_f)\right]^2 + \cos^2\left[2^{-2+a}\pi\text{sen}^2\left(\frac{a\pi}{2}\right)\right] \times \\ &\quad \times \left\{ \mathcal{A}\text{sen}\left[\frac{2\pi a}{t_f}t - \pi + \arccos\left(\frac{\mathcal{B}t_f}{\mathcal{A}2\pi a}\right)\right] + \mathcal{B}t + \mathcal{A}\text{sen}\left[\pi - \arccos\left(\frac{\mathcal{B}t_f}{\mathcal{A}2\pi a}\right)\right] \right\},\end{aligned}\quad (5.18)$$

com  $[\omega_0 + (\omega_f - \omega_0)\text{sen}^2(\pi t/2t_f)]^2 = \omega^2(t)$ .

Vamos agora realizar os ajustes dos parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ . Iniciando pelo parâmetro  $\mathcal{B}$ , temos que  $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{B} = [\hat{H}(t_f) - \hat{H}(t_f/a)]a/t_f$ . Com  $\hat{\mathcal{O}} = m\hat{x}^2/2$ , ficamos com

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{O}}\mathcal{B} &= [\hat{H}(t_f) - \hat{H}(t_f/a)]\frac{a}{t_f}, \\ \frac{1}{2}m\hat{x}^2\mathcal{B} &= \left[\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\hat{x}^2\omega_f^2\right) - \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\hat{x}^2[\omega_0 + (\omega_f - \omega_0)\text{sen}^2(\pi/2a)]^2\right)\right]\frac{a}{t_f}, \\ \frac{1}{2}m\hat{x}^2\mathcal{B} &= \frac{1}{2}m\hat{x}^2\left\{\omega_f^2 - [\omega_0 + (\omega_f - \omega_0)\text{sen}^2(\pi/2a)]^2\right\}\frac{a}{t_f},\end{aligned}\quad (5.19)$$

Para que a eq.(5.19) seja verdadeira, devemos então ter que

$$\mathcal{B} = \left\{\omega_f^2 - [\omega_0 + (\omega_f - \omega_0)\text{sen}^2(\pi/2a)]^2\right\}\frac{a}{t_f}.\quad (5.20)$$

De (5.20) percebemos que o parâmetro  $\mathcal{B}$  depende exclusivamente do fator de contração temporal  $a$ . Isso se deve ao fato que, como definido na seção anterior, tal parâmetro está relacionado com a diferença de energias entre os instantes  $t_f$  e  $t_f/a$ . Sendo assim, para cada valor de  $a$ , o valor de  $\mathcal{B}$  deve mudar para garantir as condições referentes aos instantes inicial e final do protocolo rápido.

Agora, para ajustar o parâmetro  $\mathcal{A}$ , usamos a condição  $\hat{U}(t_f/a, 0) = \hat{U}(t_f, 0)$ , que nos leva à eq.(5.12). Substituindo as expressões para os hamiltonianos  $\hat{H}(t)$  e  $\hat{\mathcal{H}}(t, a)$ , eqs.(5.14) e (5.17), respectivamente, obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{1}{16\pi}\sec^2\left[2^{-2+a}\pi\text{sen}^2\left(\frac{a\pi}{2}\right)\right]\left\{16(1 + \pi^2)F(a)^2 - 8\pi F(a)G(a) + G(a)^2\right\},\quad (5.21)$$

com

$$F(a) = (\omega_0 - \omega_f) \cos^2 \left( \frac{\pi}{2a} \right) \left[ \omega_0 + 3\omega_f + (\omega_0 - \omega_f) \cos \left( \frac{\pi}{a} \right) \right] \cos^2 \left[ 2^{-2+a} \pi \sin^2 \left( \frac{a\pi}{2} \right) \right] \quad (5.22)$$

e

$$G(a) = -2\pi(a-1)(3\omega_0^2 + 3\omega_f^2 + 2\omega_0\omega_f) + 8a(\omega_0^2 - \omega_f^2) \sin \left( \frac{\pi}{a} \right) + a(\omega_f - \omega_0)^2 \sin \left( \frac{2\pi}{a} \right). \quad (5.23)$$

Podemos perceber que, assim como o parâmetro  $\mathcal{B}$ , o parâmetro  $\mathcal{A}$  também depende apenas do fator  $a$ . Tal fato é esperado, pois, quanto maior for o valor de  $a$ , maior será a diminuição no tempo de evolução do protocolo. Assim, é necessário que tais parâmetros se ajustem de acordo com o tempo de evolução.

Uma vez determinados os parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , eqs.(5.20) e (5.21), podemos perceber que  $\tilde{\omega}(0, a) = \omega_0$  e  $\tilde{\omega}(t_f/a, a) = \omega_f$  que, como esperado, são as mesmas condições para a frequência angular do protocolo de referência. Na figura 18 podemos ver o comportamento temporal da frequência angular  $\tilde{\omega}(t)$ , referente ao protocolo PA, para alguns valores do fator de contração temporal  $a$ .

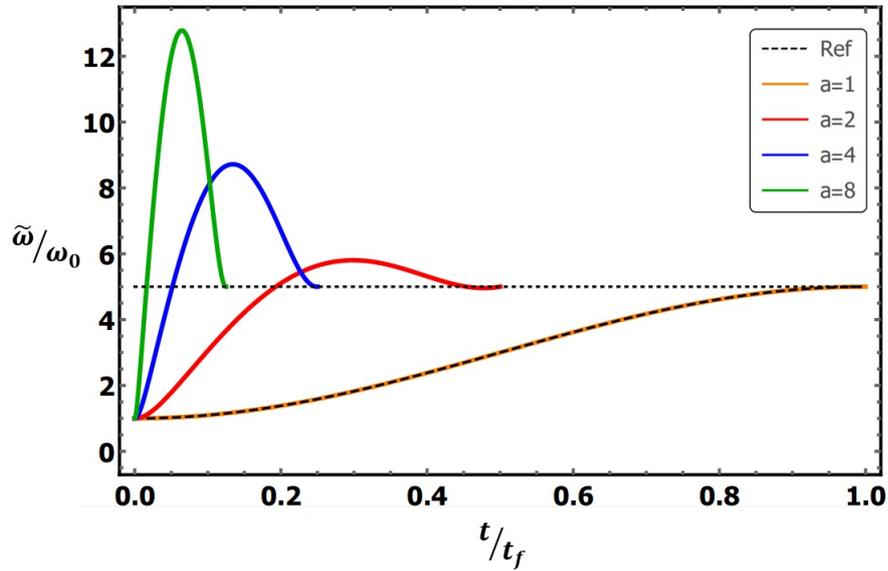


Figura 18 – Comportamento temporal da frequência angular  $\tilde{\omega}(t)$  em um regime de compressão para alguns valores do fator de contração temporal  $a$ . A curva  $a = 1$  equivale ao protocolo de referência, como de fato deveria ser. Assumimos aqui  $\omega_f = 5\omega_0$ .

Podemos observar que, de fato, o protocolo PA reproduz as mesmas condições que o protocolo de referência, mas, em um tempo mais curto. Entretanto, como podemos notar ainda na figura 18, o formato da curva da frequência angular  $\tilde{\omega}(t)$  difere da do protocolo

de referência. Do ponto de vista prático podemos entender que durante o processo de compressão há um estreitamento do potencial harmônico ultrapassando a frequência final  $\omega_f$  e após atingir um valor máximo, relaxa até atingir o valor desejado  $\omega_f$  no final do protocolo em  $t = t_f/a$ . Isso deve-se ao fato que o protocolo PA não impõe qualquer condição durante o processo, mas, garante que as condições sejam iguais às do protocolo de referência apenas no início e no final da evolução. Temos ainda que no protocolo PA, quanto menor for o tempo de evolução, maior será o valor máximo alcançado pela frequência angular durante o processo. Mesmo assim, ao final do processo, sempre é garantido que  $\tilde{\omega}(t_f/a) = \omega_f$ . O valor máximo para a frequência angular para os casos  $a = 2$ ,  $a = 4$  e  $a = 8$  chegam aproximadamente a  $5.8\omega_0$ ,  $8.72\omega_0$  e  $12.8\omega_0$ , nos tempos  $t = 0.3t_f$ ,  $t = 0.1344t_f$  e  $t = 0.06451t_f$ , respectivamente.

Retornando agora para o hamiltoniano efetivo  $\hat{H}(t)$ , eq. (5.17), temos que o termo cinético está sendo modelado pelo fator  $f(t) = 1 + 2(a - 1) \text{sen}^2(a\pi t/t_f)$ , onde facilmente podemos notar que  $f(0) = 1$  e  $f(t_f/a) = 1$  que garante as condições de igualdade entre os protocolos no início e no final da evolução, eqs. (5.5) e (5.6). A modulação no termo cinético pode acontecer de várias formas, mas, assim como o caso apresentado no método de Reescalamento temporal, vamos considerar que a partícula sujeita ao potencial harmônico possui carga elétrica  $q$  e estará sujeita a um campo magnético dependente do tempo  $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ . Neste caso, o momento pode ser controlado através da transformação  $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - q\mathbf{A}(t)$ , conhecida como acoplamento mínimo, onde  $\mathbf{A}(t)$  é o potencial vetorial dependente do tempo, que satisfaz a relação  $\tilde{\mathbf{B}}(t) = \nabla \times \mathbf{A}(t)$ . Com isso, o controle do momento linear do oscilador requer que

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\hat{p}}{q} [1 - f(t)^{1/2}] \hat{\mathbf{x}}, \quad (5.24)$$

onde  $\hat{\mathbf{x}}$  é o vetor unitário apontando na direção  $x$ . Devido à invariância de gauge, o primeiro termo no lado direito da eq. (5.24) não é fisicamente relevante, pois, é independente do tempo. Desta forma, vamos considerar apenas o termo que varia com o tempo. Podemos então reescrever o potencial vetor como  $\mathbf{A}(t) = zB_0 f(t)^{1/2} \hat{\mathbf{x}}$ , que está associado ao campo magnético dependente do tempo  $\tilde{\mathbf{B}}(t) = B_0 [f(t)]^{1/2} \hat{\mathbf{y}}$ , onde  $B_0$  é uma constante. Assim, temos que o campo magnético responsável pela modulação do momento  $\hat{p}$  deve ser perpendicular à direção da armadilha harmônica e será dado explicitamente por

$$\tilde{\mathbf{B}}(t) = B_0 \left[ 1 + 2(a - 1) \text{sen}^2 \left( \frac{a\pi t}{t_f} \right) \right]^{1/2} \hat{\mathbf{y}}. \quad (5.25)$$

Como o operador de momento é modulado por este campo magnético, isso significa que o operador momento no protocolo de referência descrito pela eq.(5.14) é representado por  $\hat{p} = \hat{p}' - q\mathbf{A}'$ , onde  $\hat{p}'$  e  $\mathbf{A}'$  são respectivamente o momento da partícula livre de influência eletromagnética e o potencial vetor devido ao campo magnético constante  $\mathbf{B} = B_0$  no protocolo de referência. Em outras palavras, a partícula do protocolo de referência será

uma partícula carregada e estará sujeita a um campo magnético constante de intensidade  $B_0$ . Assim como a seção 4.2, devido estarmos tratando de uma partícula confinada em uma dimensão, novamente vamos desconsiderar os efeitos da força de Lorentz.

Na figura 19 temos as curvas para o campo magnético  $\tilde{\mathbf{B}}(t)$  para alguns valores do fator  $a$ . Podemos observar primeiramente que recuperamos o protocolo de referência quando adotamos  $a = 1$ , ou seja,  $\tilde{\mathbf{B}} = B_0\hat{\mathbf{y}}$ . Tal fato é esperado pois implica que não há redução no tempo de evolução. Podemos perceber também que, independentemente do valor do fator de contração  $a$ , temos  $\tilde{\mathbf{B}}(0) = \tilde{\mathbf{B}}(\tau) = B_0$ , que são as condições necessárias para a equivalência dos protocolos PA e de referência no início e no final do processo. Outro fato que pode ser observado é que a intensidade do campo magnético atinge o valor máximo no instante  $t = t_f/2a$  e que tal máximo também depende do fator  $a$ , ou seja,  $\tilde{\mathbf{B}}(t_f/2a) = \tilde{\mathbf{B}}_{max} = \sqrt{2a-1}B_0$ . Deste modo temos que, quanto mais rápido for o protocolo PA, maior será o máximo do campo magnético  $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ .

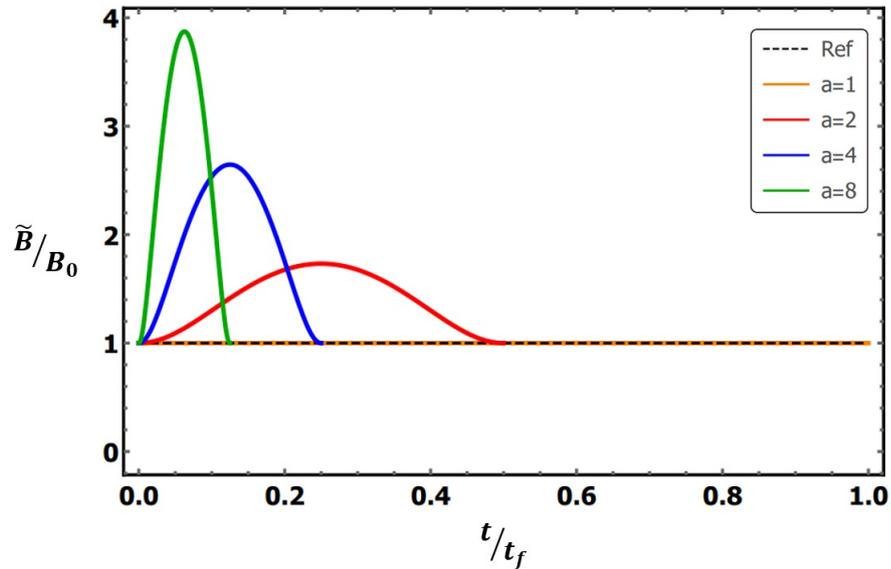


Figura 19 – Comportamento do campo magnético  $\tilde{\mathbf{B}}(t)$  responsável pela modulação do momento linear da partícula sujeita ao potencial harmônico para alguns valores do parâmetro de contração temporal  $a$ .  $B_0$  representa a intensidade do campo magnético constante do protocolo de referência. Podemos novamente perceber que  $a = 1$  é equivalente ao protocolo de referência.

Em suma, o encurtamento do tempo de evolução é feito então, através da adição do potencial  $\hat{\mathcal{V}}(t)$  fazendo com que o sistema seja descrito agora pelo hamiltoniano (5.17). Do ponto de vista experimental, para este caso, estamos tratando o sistema ainda como um potencial harmônico, mas com a frequência angular  $\tilde{\omega}(t)$  agora dada pela eq.(5.18), e com os parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  ajustados conforme as eqs. (5.21) e (5.20), respectivamente, além da manipulação do momento linear através do campo magnético, eq. (5.25). Como mencionamos no início do capítulo, para descrever um protocolo rápido utilizando o

método dos parâmetros ajustáveis, não foi necessário qualquer informação referente aos autoestados de  $\hat{H}(t)$ .

## 5.5 Partícula de Spin 1/2 em um campo magnético

Vamos agora aplicar o método dos parâmetros ajustáveis a um importante caso que é o de uma partícula submetida a um campo magnético externo dependente do tempo  $\mathbf{B}(t)$ . Este sistema é descrito pelo hamiltoniano

$$\hat{H}(t) = - \left( \frac{e}{m_e c} \right) \mathbf{B}(t) \cdot \hat{S}, \quad (5.26)$$

onde  $e$  é a carga elétrica elementar ( $e < 0$  para o elétron),  $m_e$  é a massa da partícula e  $c$  é a velocidade da luz [71]. Aqui consideramos a partícula como sendo um elétron. Por sua vez,  $\hat{S}$  é o vetor de spin da partícula que, em termos das matrizes de Pauli pode ser expresso como  $\hat{S} = \hbar/2(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ .

Para simplificar, vamos considerar o protocolo de referência como o caso em que o campo magnético é constante e orientado ao longo do eixo  $z$ ,  $\mathbf{B}(t) = B_0 \hat{z}$ . Assim, o hamiltoniano do protocolo torna-se

$$\hat{H} = \omega \hat{S}_z, \quad (5.27)$$

onde  $\omega \equiv |e|B_0/m_e c$  e os autovalores são  $E_{\pm} = \pm \hbar\omega/2$ . Deste modo, o operador evolução temporal para este sistema será dado por

$$\begin{aligned} \hat{U}(t_f, 0) &= \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^{t_f} \omega \hat{S}_z dt \right], \\ \hat{U}(t_f, 0) &= e^{-i\omega t_f/2} |+\rangle \langle +| + e^{i\omega t_f/2} |-\rangle \langle -|, \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde usamos o fato que  $\hat{S}_z = \hbar\hat{\sigma}_z/2 = \hbar(|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|)/2$ .

Vamos agora considerar que o sistema inicialmente se encontra no estado  $|\psi(0)\rangle = |S_x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$  e levando em conta que  $\hat{S}_z |\pm\rangle = \pm \hbar/2 |\pm\rangle$ , temos que a atuação do operador evolução temporal no estado inicial fica

$$\begin{aligned} |\psi(t_f)\rangle &= \hat{U}(t_f, 0) |\psi(0)\rangle, \\ |\psi(t_f)\rangle &= \left( e^{-i\omega t_f/2} |+\rangle \langle +| + e^{i\omega t_f/2} |-\rangle \langle -| \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle), \\ |\psi(t_f)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\omega t_f/2} |+\rangle + e^{i\omega t_f/2} |-\rangle \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

A equação (5.29) descreve o conhecido caso da precessão de spin. Vamos considerar que o instante final da evolução será dado por  $t_f = \pi/\omega$ . Assim, a eq. (5.29) fica

$$\begin{aligned} |\psi(\pi/\omega)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\pi/2} |+\rangle + e^{i\pi/\omega} |-\rangle \right), \\ |\psi(\pi/\omega)\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle), \\ |\psi(\pi/\omega)\rangle &= -i |S_x, -\rangle, \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde usamos o fato de que  $e^{i\pm\pi/2} = \pm i$  e que  $|S_x, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$ . A eq. (5.30) nos diz então que, após um intervalo  $\Delta t = \pi/\omega$  a interação da partícula com o campo magnético  $\mathbf{B}(t) = B_0\hat{\mathbf{z}}$ , a menos do fator global  $i$ , causa uma inversão de spin na direção  $x$ .

Agora nos voltamos para a investigação do protocolo rápido de acordo com o método dos parâmetros ajustáveis. Para isso, primeiro notamos que o hamiltoniano no protocolo de referência, eq. (5.27), é independente do tempo. Assim, conforme visto na seção 5.2, adotando  $\hat{\mathcal{O}} = \mathcal{B} = 0$  e  $\hat{\mathcal{Q}} = \omega\hat{S}_z$ , o potencial que deverá ser adicionado será dado por

$$\hat{\mathcal{V}}(t, a) = 2\omega\hat{S}_z(a-1)\sin^2\left(\frac{a\pi t}{t_f}\right). \quad (5.31)$$

Desse modo, o hamiltoniano efetivo  $\hat{\mathcal{H}}(t)$  fica

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(t, a) &= \omega\hat{S}_z + 2\omega\hat{S}_z(a-1)\sin^2\left(\frac{a\pi t}{t_f}\right), \\ \hat{\mathcal{H}}(t, a) &= \omega\hat{S}_z \left[ 1 + 2(a-1)\sin^2\left(\frac{a\pi t}{t_f}\right) \right], \\ \hat{\mathcal{H}}(t, a) &= \tilde{\omega}(t, a)\hat{S}_z, \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde definimos a frequência modificada  $\tilde{\omega}(t)$  como

$$\tilde{\omega}(t, a) = \omega \left[ 1 + 2(a-1)\sin^2\left(\frac{a\pi t}{t_f}\right) \right]. \quad (5.33)$$

Como a frequência  $\omega$  está relacionada ao campo magnético  $B_0$  através da relação  $\omega = |e|B_0/m_e c$ , podemos então escrever a frequência dependente do tempo  $\tilde{\omega}(t, a)$  em termos de um campo magnético  $\tilde{\mathbf{B}}(t, a)$ , tal que  $\tilde{\omega}(t, a) = |e|\tilde{\mathbf{B}}(t, a)/m_e c$ . Deste modo, utilizando essas relações na eq. (5.33), o campo magnético dependente do tempo  $\tilde{\mathbf{B}}(t, a)$  será dado por

$$\tilde{\mathbf{B}}(t, a) = B_0 \left[ 1 + 2(a-1)\sin^2\left(\frac{a\pi t}{t_f}\right) \right] \hat{\mathbf{z}}. \quad (5.34)$$

Podemos observar que  $\tilde{\mathbf{B}}(0, a) = \tilde{\mathbf{B}}(t_f/a, a) = B_0\hat{\mathbf{z}}$ , que nada mais são que as condições de contorno para os instantes inicial e final e que devem ser iguais aos do protocolo de referência. Podemos notar também que para  $a = 1$ , temos  $\tilde{\mathbf{B}}(t, 1) = B_0\hat{\mathbf{z}}$ , que é exatamente o protocolo de referência.

Vamos agora escrever o operador evolução temporal para o protocolo PA descrito pelo hamiltoniano  $\hat{\mathcal{H}}(t, a)$ , eq.(5.32), que será dado por

$$\begin{aligned} \hat{U}(t_f/a, 0) &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^{t_f/a} \hat{\mathcal{H}}(t, a) dt \right\}, \\ \hat{U}(t_f/a, 0) &= \exp \left\{ -\frac{i\hat{S}_z}{\hbar} \int_0^{t_f/a} \tilde{\omega}(t, a) dt \right\}, \\ \hat{U}(t_f/a, 0) &= \exp \left\{ -\frac{i\omega\hat{S}_z}{\hbar} t_f \right\}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Podemos notar que o termo do lado direito da eq.(5.35) nada mais é que o próprio operador evolução temporal do protocolo de referência, como de fato deveria ser, uma vez que a igualdade entre os operadores evolução temporal é uma das condições que deve ser obedecida. Considerando agora o intervalo  $\Delta t = t_f/a = \pi/a\omega$ , e considerando o estado inicial do sistema como sendo  $|\psi(0)\rangle = |S_x, +\rangle$ , o estado evoluído  $|\psi(\pi/a\omega)\rangle$  será dado por

$$\begin{aligned} |\psi(\pi/a\omega)\rangle &= \hat{U}(\pi/a\omega) |S_x, +\rangle, \\ |\psi(\pi/a\omega)\rangle &= \exp\left\{-\frac{i\hat{S}_z}{\hbar} \int_0^{\pi/a\omega} \tilde{\omega}(t, a) dt\right\} |S_x, +\rangle, \\ |\psi(\pi/a\omega)\rangle &= \exp\left\{-\frac{i\pi}{\hbar} \hat{S}_z\right\} |S_x, +\rangle, \\ |\psi(\pi/a\omega)\rangle &= -i |S_x, -\rangle. \end{aligned} \quad (5.36)$$

A equação (5.36) nos mostra então que a atuação do campo magnético  $\tilde{\mathbf{B}}(t, a)$ , dado pela eq. (5.34), produz a mesma inversão de spin que o protocolo de referência. Em outras palavras, através do protocolo PA, obtivemos o mesmo estado final que o protocolo de referência, mas, em um intervalo de tempo menor. O sucesso do método neste caso fica claro se considerarmos a fidelidade entre os estados iniciais e os estados finais nos protocolos de referência e rápido. Isso fornece

$$\langle \psi_{ref}(0) | \psi_{fast}(0) \rangle = \langle S_x, + | S_x, + \rangle = 1 \quad (5.37)$$

e

$$\langle \psi_{ref}(t_f) | \psi_{fast}(t_f/a) \rangle = \langle S_x, - | S_x, - \rangle = 1. \quad (5.38)$$

A eq.(5.37) é intuitiva, uma vez que consideramos o mesmo estado inicial para ambos os protocolos. Já na eq. (5.38) temos que de a fidelidade entre os estados finais dos protocolos de referência e PA é igual a 1, ou seja, conseguimos reproduzir, em um tempo mais curto, o mesmo estado final que o protocolo de referência.

Na figura 20 ilustramos o comportamento do campo magnético dependente do tempo  $\tilde{\mathbf{B}}(t, a)$ . Podemos observar que quanto menor o tempo de duração do protocolo, maior é o valor máximo da intensidade do campo magnético envolvido. O pico para o campo magnético  $\tilde{\mathbf{B}}_{max}$  ocorre sempre no instante  $t_f/2a$ . Além disso, o valor máximo é dado por  $\tilde{B}(t_f/2a) = \tilde{\mathbf{B}}_{max} = (2a - 1)B_0$ . Isso significa que uma dinâmica através do protocolo PA que é  $a$  vezes mais rápida que o protocolo de referência requer um pico para o campo magnético  $2a - 1$  vezes maior. Outro importante fato que podemos notar na figura 20 é que, para o caso de  $a = 1$ , temos um campo magnético constante igual ao caso original, como de fato deveria ser, uma vez que, para este caso os protocolos são equivalentes.

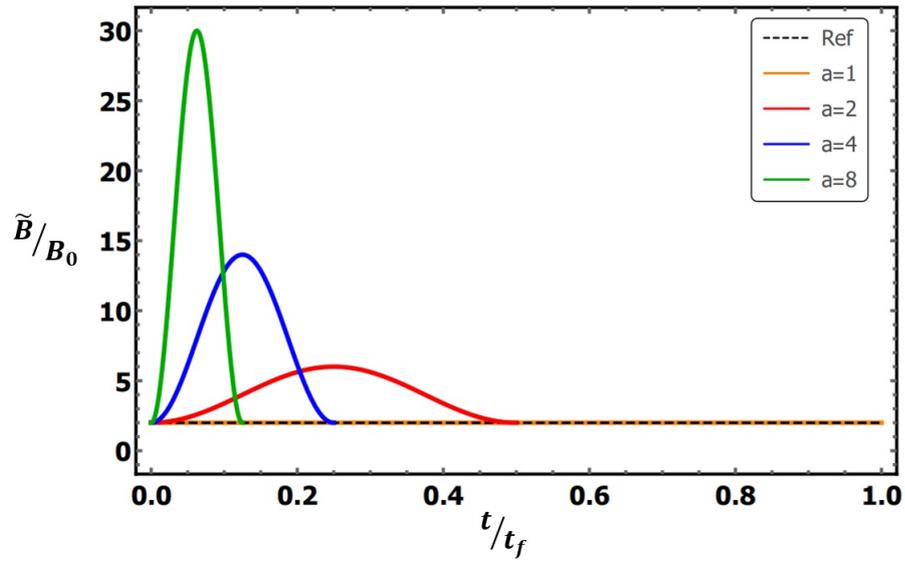


Figura 20 – Campo magnético dependente do tempo necessário para realizar a inversão de spin para alguns valores do fator de contração  $a$ . Podemos perceber que o caso  $a = 1$  é equivalente ao protocolo de referência. Notamos também que, quanto mais rápido ocorre o processo, o valor máximo da intensidade do campo magnético também aumenta. A intensidade do campo magnético de referência foi considerada  $B_0 = 2$ .

## 6 Conclusões e perspectivas

Nesta tese realizamos a aplicação do método de reescalonamento temporal [1] para obtermos a inversão de população em um sistema atômico de dois níveis [72] tendo como protocolo de referência a passagem adiabática de Allen-Eberly [69]. A utilização do método nos forneceu soluções analíticas para o comportamento temporal da frequência Rabi e da dessintonia que são adequados para alcançar uma inversão de população de forma rápida. Foi realizada também uma análise da estabilidade do método, onde obtivemos uma fidelidade superior a 0.913 para erros sistemáticos de até 20% na frequência de Rabi, e, quando tratamos erros de até 20% na dessintonia, obtivemos um protocolo ainda mais estável, com fidelidade superior a 0.986. Pudemos observar também que tais resultados de estabilidade são independentes do parâmetro de contração temporal  $a$ , fator esse que nos informa quantas vezes mais rápido será o novo protocolo em relação ao original. Deste modo temos que para tal dinâmica, o método se mostrou bastante robusto com relação a possíveis erros experimentais, independentemente do quão rápido seja o processo reescalonado. Tal robusteza, para este caso, é similar às apresentadas por outros métodos como o contradiabático e engenharia inversa [84].

Além dessa nova aplicação utilizando o método de reescalonamento temporal, apresentamos também uma nova proposta de atalho para adiabaticidade: o método de parâmetros ajustáveis [33]. Este método consiste na adição de um termo potencial ao hamiltoniano de referência de tal modo que esse termo é o responsável por realizar um encurtamento do tempo de evolução. Além disso, o termo do potencial extra é ajustado através de dois dos parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  de acordo com os problemas a serem abordados. Aqui também temos a presença do parâmetro ou fator de contração temporal  $a$ . Como ilustração do método, realizamos a aplicação nos problemas do oscilador harmônico paramétrico e na partícula de spin 1/2 em um campo magnético. Apesar da semelhança com o método de reescalonamento temporal, o método de parâmetros ajustáveis traz a ideia de acelerar a dinâmica quântica através da adição de um potencial, em vez da modulação do protocolo de referência. Isso pode fornecer vantagem experimental, uma vez que não necessitamos realizar qualquer manipulação do protocolo de referência, ou seja, a referência e os potenciais adicionados atuam de forma independente em uma realização experimental.

No primeiro exemplo conseguimos ter sucesso em reproduzir os mesmos resultados que o protocolo de referência em um intervalo de tempo menor. Observamos que a frequência angular para o novo protocolo em alguns instantes, durante o processo, pode até mesmo ultrapassar o valor da frequência final. Contudo, ao final do protocolo é garantido que obteremos o mesmo valor final do protocolo de referência. Por exemplo, para o fator de contração temporal  $a = 2$ , a frequência angular atinge um pico igual a  $5.8\omega_0$  no tempo

$t = 0.3t_f$ . Além disso, realizamos a modulação do termo cinético através da aplicação de um campo magnético externo cuja intensidade aumenta à medida que o tempo de evolução diminui, tendo seu máximo igual a  $\tilde{\mathbf{B}}_{max} = \sqrt{2a-1}B_0$  no instante  $t = t_f/2a$ . Já na segunda aplicação, o método de parâmetros ajustáveis nos fornece uma expressão analítica para um campo magnético dependente do tempo  $\tilde{B}(t)$  que é o responsável por realizar a inversão de spin. Para este caso encontramos que quanto mais rápido ocorre o protocolo modificado, maior será a intensidade necessária do campo magnético dependente do tempo para promover a inversão. O valor máximo para a intensidade do campo magnético é  $\tilde{\mathbf{B}}_{max} = (2a-1)B_0$ , também no instante  $t = t_f/2a$ . Neste segundo exemplo é demonstrado também que a fidelidade entre os estados inicial e final nos protocolos de referência e rápido é máxima, quando não consideramos erros nos parâmetros de controle.

Um fato importante a ser observado é que, tanto o método de reescalonamento temporal quanto o de parâmetros ajustáveis não requerem qualquer informação acerca dos autoestados instantâneos do hamiltoniano de referência. Tal fato torna-se uma vantagem em relação a outros métodos, por exemplo, o contradiabático, uma vez que a tarefa de obter esses autovetores geralmente é muito complicada. Além disso, vimos que, em ambos os métodos, o encurtamento do tempo de evolução da dinâmica de referência é em princípio arbitrário, sendo o parâmetro  $a$  o responsável por nos dizer quantas vezes mais rápido será o protocolo encurtado. Por fim, as ideias apresentadas em ambos os métodos podem ser aplicadas para melhorar o desempenho de muitas tecnologias e sistemas quânticos como, por exemplo, controle de sistemas atômicos, processamento de informação quântica e execução de ciclos termodinâmicos em máquinas quânticas [87–93].

## 6.1 Perspectivas

Em vista dos resultados apresentados nesta tese, seria de grande interesse continuar a exploração de aplicações envolvendo o método de reescalonamento temporal bem como o dos parâmetros ajustáveis. Em especial, é de interesse investigar a utilização de tais métodos para acelerar dinâmicas mais complexas como por exemplo sistema de três níveis [94, 95], modelo de Rabi quântico [96–98] e outros sistemas em que os autoestados do hamiltoniano dependente do tempo podem ser difíceis de calcular.

Outra possível perspectiva de estudo é que, em ambos os métodos apresentados, não é feita qualquer restrição acerca do quão rápido pode ser a nova dinâmica, ou seja, não há qualquer restrição no parâmetro de contração temporal  $a$ . Desse modo, a investigação da existência de algum limite do quão curto podem ser os tempos de evolução dos protocolos modificados, ou seja, se existe um valor máximo para o fator  $a$ , pode nos dar informações com relação a possíveis limites que tais métodos possam apresentar.

Com respeito ao método de reescalonamento temporal, podemos também investigar a

existência de outras funções de reescalonamento  $f(\tau)$ , bem como as características comuns ou individuais de tais funções, tendo em vista que a escolha conveniente da função de reescalonamento é fundamental para o sucesso do método.

Por fim, recentemente foi publicado na referência [99] um método onde, devido à analogia matemática entre a equação paraxial de Helmholtz e a equação de Schrodinger em duas dimensões, é possível descrever a evolução espacial de um campo óptico gaussiano através do formalismo de operadores. Deste modo, podemos investigar a aplicação do método de reescalonamento, que para este caso funcionaria como um encurtamento espacial ao longo da direção de propagação do feixe. Esse estudo poderia então ser aplicado por exemplo para a construção de fibras ópticas no sentido de economizar material. O artigo [99] também é um dos resultados obtidos durante as investigações deste trabalho de tese.

# Referências

- 1 BERNARDO, B. de L. Time-rescaled quantum dynamics as a shortcut to adiabaticity. *Physical Review Research*, APS, v. 2, n. 1, p. 013133, 2020.
- 2 DONG, D.; PETERSEN, I. R. Quantum control theory and applications: a survey. *IET control theory & applications*, IET, v. 4, n. 12, p. 2651–2671, 2010.
- 3 O’CONNELL, A. D. et al. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 464, n. 7289, p. 697–703, 2010.
- 4 VANDERSYPEN, L. M.; CHUANG, I. L. Nmr techniques for quantum control and computation. *Reviews of modern physics*, APS, v. 76, n. 4, p. 1037, 2005.
- 5 FRANK, S. van et al. Optimal control of complex atomic quantum systems. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 6, n. 1, p. 1–12, 2016.
- 6 BERNARDO, B. de L.; CANABARRO, A.; AZEVEDO, S. How a single particle simultaneously modifies the physical reality of two distant others: a quantum nonlocality and weak value study. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group UK London, v. 7, n. 1, p. 39767, 2017.
- 7 CHU, S. Cold atoms and quantum control. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 416, n. 6877, p. 206–210, 2002.
- 8 WOLLENHAUPT, M. et al. Quantum control and quantum control landscapes using intense shaped femtosecond pulses. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 52, n. 16, p. 2187–2195, 2005.
- 9 ALBASH, T.; LIDAR, D. A. Adiabatic quantum computation. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 90, n. 1, p. 015002, 2018.
- 10 BORN, M.; FOCK, V. Beweis des adiabatenatzes. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 51, n. 3, p. 165–180, 1928.
- 11 KATO, T. On the adiabatic theorem of quantum mechanics. *Journal of the Physical Society of Japan*, The Physical Society of Japan, v. 5, n. 6, p. 435–439, 1950.
- 12 CHEN, X. et al. Fast optimal frictionless atom cooling in harmonic traps: Shortcut to adiabaticity. *Physical review letters*, APS, v. 104, n. 6, p. 063002, 2010.
- 13 CHEN, X. et al. Shortcut to adiabatic passage in two-and three-level atoms. *Physical review letters*, APS, v. 105, n. 12, p. 123003, 2010.
- 14 CAMPO, A. D. Fast frictionless dynamics as a toolbox for low-dimensional bose-einstein condensates. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 96, n. 6, p. 60005, 2011.
- 15 SCHAFF, J.-F. et al. Fast optimal transition between two equilibrium states. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 3, p. 033430, 2010.
- 16 BASON, M. G. et al. High-fidelity quantum driving. *Nature Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 8, n. 2, p. 147–152, 2012.

- 17 STEFANATOS, D.; RUTHS, J.; LI, J.-S. Frictionless atom cooling in harmonic traps: A time-optimal approach. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 6, p. 063422, 2010.
- 18 CHOI, S.; ONOFRIO, R.; SUNDARAM, B. Optimized sympathetic cooling of atomic mixtures via fast adiabatic strategies. *Physical Review A*, APS, v. 84, n. 5, p. 051601, 2011.
- 19 JR, H. R. L.; RIESENFELD, W. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 10, n. 8, p. 1458–1473, 1969.
- 20 MASUDA, S.; NAKAMURA, K. Fast-forward of adiabatic dynamics in quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society Publishing, v. 466, n. 2116, p. 1135–1154, 2010.
- 21 MASUDA, S.; NAKAMURA, K. Acceleration of adiabatic quantum dynamics in electromagnetic fields. *Physical Review A*, APS, v. 84, n. 4, p. 043434, 2011.
- 22 TORRONTGUEI, E. et al. Shortcuts to adiabaticity: Fast-forward approach. *Physical Review A*, APS, v. 86, n. 1, p. 013601, 2012.
- 23 BERRY, M. V. Transitionless quantum driving. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 42, n. 36, p. 365303, 2009.
- 24 DEMIRPLAK, M.; RICE, S. A. Assisted adiabatic passage revisited. *The Journal of Physical Chemistry B*, ACS Publications, v. 109, n. 14, p. 6838–6844, 2005.
- 25 DEMIRPLAK, M.; RICE, S. A. Adiabatic population transfer with control fields. *The Journal of Physical Chemistry A*, ACS Publications, v. 107, n. 46, p. 9937–9945, 2003.
- 26 AN, S. et al. Shortcuts to adiabaticity by counterdiabatic driving for trapped-ion displacement in phase space. *Nature communications*, Nature Publishing Group UK London, v. 7, n. 1, p. 12999, 2016.
- 27 RICHERME, P. et al. Experimental performance of a quantum simulator: Optimizing adiabatic evolution and identifying many-body ground states. *Physical Review A*, APS, v. 88, n. 1, p. 012334, 2013.
- 28 WANG, T. et al. The experimental realization of high-fidelity ‘shortcut-to-adiabaticity’ quantum gates in a superconducting xmon qubit. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 20, n. 6, p. 065003, 2018.
- 29 LONG, G. et al. Experimental nmr realization of a generalized quantum search algorithm. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 286, n. 2-3, p. 121–126, 2001.
- 30 LONG, G. L.; XIAO, L. Experimental realization of a fetching algorithm in a 7-qubit nmr spin liouville space computer. *The Journal of Chemical Physics*, American Institute of Physics, v. 119, n. 16, p. 8473–8481, 2003.
- 31 CHUANG, I. L. et al. Experimental realization of a quantum algorithm. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 393, n. 6681, p. 143–146, 1998.

- 32 ZHU, J.-j. et al. Robust quantum control by smooth quasi-square pulses. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 55, n. 19, p. 194001, 2022.
- 33 FRANÇA, Â. F. da S.; ANDRADE, J. da S.; BERNARDO, B. de L. Speeding up quantum dynamics by adding tunable time-dependent Hamiltonians. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 21, n. 5, p. 1–12, 2022.
- 34 MARION, J. B. *Classical dynamics of particles and systems*. [S.l.]: Academic Press, 2013.
- 35 GRIFFITHS, D. J. Introduction to quantum mechanics. *Introduction to Quantum Mechanics*, 2016.
- 36 LANDAU, L. D. A theory of energy transfer ii. *Phys. Z. Sowjetunion*, v. 2, n. 46, p. 19, 1932.
- 37 GELL-MANN, M.; LOW, F. Bound states in quantum field theory. *Physical Review*, APS, v. 84, n. 2, p. 350, 1951.
- 38 BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 392, n. 1802, p. 45–57, 1984.
- 39 TEUFEL, S. *Adiabatic perturbation theory in quantum dynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003.
- 40 KATANAEV, M. Adiabatic theorem for finite dimensional quantum mechanical systems. *arXiv preprint arXiv:0909.0370*, 2009.
- 41 PILLET, P. et al. Adiabatic population transfer in a multilevel system. *Physical Review A*, APS, v. 48, n. 1, p. 845, 1993.
- 42 OREG, J.; HIOE, F.; EBERLY, J. Adiabatic following in multilevel systems. *Physical Review A*, APS, v. 29, n. 2, p. 690, 1984.
- 43 FARHI, E. et al. Quantum computation by adiabatic evolution. *arXiv preprint quant-ph/0001106*, 2000.
- 44 BIAMONTE, J. D.; LOVE, P. J. Realizable hamiltonians for universal adiabatic quantum computers. *Physical Review A*, APS, v. 78, n. 1, p. 012352, 2008.
- 45 AHARONOV, D. et al. Adiabatic quantum computation is equivalent to standard quantum computation. *SIAM review*, SIAM, v. 50, n. 4, p. 755–787, 2008.
- 46 HEN, I. Quantum gates with controlled adiabatic evolutions. *Physical Review A*, APS, v. 91, n. 2, p. 022309, 2015.
- 47 BACON, D.; FLAMMIA, S. T. Adiabatic gate teleportation. *Physical review letters*, APS, v. 103, n. 12, p. 120504, 2009.
- 48 SOUZA, P. J. et al. Computação quântica adiabática: Do teorema adiabático ao computador da d-wave. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 43, 2021.

- 49 SANTOS, A. C. d. Atalhos para adiabaticidade e aplicações em computação quântica. 2017.
- 50 GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of integrals, series, and products*. [S.l.]: Academic press, 2014.
- 51 CHURCHILL, R. V. et al. Fourier series and boundary value problems. McGraw-Hill book company, inc., 1941.
- 52 WANG, W.; GUO, Z.; CAO, H. An upper bound for the adiabatic approximation error. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, Springer, v. 57, n. 2, p. 218–224, 2014.
- 53 WANG, W. et al. An upper bound for the generalized adiabatic approximation error with a superposition initial state. *SCIENCE CHINA Physics, Mechanics & Astronomy*, Springer, v. 58, n. 3, p. 1–7, 2015.
- 54 DU, J. et al. Experimental study of the validity of quantitative conditions in the quantum adiabatic theorem. *Physical review letters*, APS, v. 101, n. 6, p. 060403, 2008.
- 55 AMIN, M. H. Consistency of the adiabatic theorem. *Physical review letters*, APS, v. 102, n. 22, p. 220401, 2009.
- 56 RIGOLIN, G.; ORTIZ, G. Adiabatic perturbation theory and geometric phases for degenerate systems. *Physical review letters*, APS, v. 104, n. 17, p. 170406, 2010.
- 57 LEE, S. Y. Adiabatic process in quantum mechanics. University of Chicago.
- 58 DOESCHER, S.; RICE, M. Infinite square-well potential with a moving wall. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 37, n. 12, p. 1246–1249, 1969.
- 59 DEMIRPLAK, M.; RICE, S. A. On the consistency, extremal, and global properties of counteradiabatic fields. *The Journal of chemical physics*, American Institute of Physics, v. 129, n. 15, p. 154111, 2008.
- 60 MARTÍNEZ-GARAOT, S. et al. Vibrational mode multiplexing of ultracold atoms. *Physical review letters*, APS, v. 111, n. 21, p. 213001, 2013.
- 61 GAO, X.-C.; XU, J.-B.; QIAN, T.-Z. Geometric phase and the generalized invariant formulation. *Physical Review A*, APS, v. 44, n. 11, p. 7016, 1991.
- 62 KIM, S.; SANTANA, A. E. d.; KHANNA, F. C. Generalized invariants and quantum evolution of open fermionic systems. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 272, n. 1-2, p. 46–52, 2000.
- 63 MAAMACHE, M. et al. Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-hermitian time-dependent hamiltonians. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 132, n. 9, p. 1–8, 2017.
- 64 DANTAS, C. M.; PEDROSA, I.; BASEIA, B. Harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency and a perturbative potential. *Physical Review A*, APS, v. 45, n. 3, p. 1320, 1992.

- 65 CHEN, X.; MUGA, J. G. Transient energy excitation in shortcuts to adiabaticity for the time-dependent harmonic oscillator. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 5, p. 053403, 2010.
- 66 GUÉRY-ODELIN, D. et al. Shortcuts to adiabaticity: Concepts, methods, and applications. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 91, n. 4, p. 045001, 2019.
- 67 CAMPO, A. del. Shortcuts to adiabaticity by counterdiabatic driving. *Physical review letters*, APS, v. 111, n. 10, p. 100502, 2013.
- 68 CHEN, X.; TORRONTEGUI, E.; MUGA, J. G. Lewis-riesenfeld invariants and transitionless quantum driving. *Physical Review A*, APS, v. 83, n. 6, p. 062116, 2011.
- 69 ALLEN, L.; EBERLY, J. H. *Optical resonance and two-level atoms*. [S.l.]: Courier Corporation, 1987. v. 28.
- 70 VITANOV, N.; GARRAWAY, B. Landau-zener model: Effects of finite coupling duration. *Physical Review A*, APS, v. 53, n. 6, p. 4288, 1996.
- 71 SAKURAI, J. J. *Advanced quantum mechanics*. [S.l.]: Pearson Education India, 2006.
- 72 ANDRADE, J. da S.; FRANÇA, A. F. da S.; BERNARDO, B. de L. Shortcuts to adiabatic population inversion via time-rescaling: stability and thermodynamic cost. *Sci Rep*, v. 12, n. 11538, 2022.
- 73 PEARSON, C. et al. Experimental investigation of planar ion traps. *Physical Review A*, APS, v. 73, n. 3, p. 032307, 2006.
- 74 MAJOR, F. G.; GHEORGHE, V. N.; WERTH, G. *Charged particle traps: physics and techniques of charged particle field confinement*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. v. 37.
- 75 PAUL, W. Electromagnetic traps for charged and neutral particles. *Reviews of modern physics*, APS, v. 62, n. 3, p. 531, 1990.
- 76 MIHALCEA, B. A quantum parametric oscillator in a radiofrequency trap. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 2009, n. T135, p. 014006, 2009.
- 77 MAKAROV, A. A. Resonance ejection from the paul trap: a theoretical treatment incorporating a weak octapole field. *Analytical chemistry*, ACS Publications, v. 68, n. 23, p. 4257–4263, 1996.
- 78 WISEMAN, H.; MILBURN, G. *Quantum measurement and control* cambridge university press: Cambridge. NY, USA, 2010.
- 79 ZHOU, B. B. et al. Accelerated quantum control using superadiabatic dynamics in a solid-state lambda system. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 13, n. 4, p. 330–334, 2017.
- 80 LEVITT, M. H. Composite pulses. *Progress in Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy*, Elsevier, v. 18, n. 2, p. 61–122, 1986.
- 81 COLLIN, E. et al. Nmr-like control of a quantum bit superconducting circuit. *Physical review letters*, APS, v. 93, n. 15, p. 157005, 2004.

- 82 TOROSOV, B. T.; GUÉRIN, S.; VITANOV, N. V. High-fidelity adiabatic passage by composite sequences of chirped pulses. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 23, p. 233001, 2011.
- 83 VITANOV, N. V. et al. Laser-induced population transfer by adiabatic passage techniques. *Annual review of physical chemistry*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 52, n. 1, p. 763–809, 2001.
- 84 RUSCHHAUPT, A. et al. Optimally robust shortcuts to population inversion in two-level quantum systems. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 14, n. 9, p. 093040, 2012.
- 85 ROYCHOWDHURY, A.; DEFFNER, S. Time-rescaling of dirac dynamics: Shortcuts to adiabaticity in ion traps and weyl semimetals. *Entropy*, MDPI, v. 23, n. 1, p. 81, 2021.
- 86 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum mechanics: non-relativistic theory*. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 3.
- 87 CHEN, Y.-H. et al. Efficient shortcuts to adiabatic passage for fast population transfer in multiparticle systems. *Physical Review A*, APS, v. 89, n. 3, p. 033856, 2014.
- 88 LU, M. et al. An effective shortcut to adiabatic passage for fast quantum state transfer in a cavity quantum electronic dynamics system. *Laser Physics*, IOP Publishing, v. 24, n. 10, p. 105201, 2014.
- 89 LACOUR, X. et al. Quantum logic gates by adiabatic passage. In: EDP SCIENCES. *Journal de Physique IV (Proceedings)*. [S.l.], 2006. v. 135, p. 209–210.
- 90 FARHI, E. et al. A quantum adiabatic evolution algorithm applied to random instances of an np-complete problem. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 292, n. 5516, p. 472–475, 2001.
- 91 REZAKHANI, A. T. et al. Quantum adiabatic brachistochrone. *Physical review letters*, APS, v. 103, n. 8, p. 080502, 2009.
- 92 CAMPO, A. d.; GOOLD, J.; PATERNOSTRO, M. More bang for your buck: Super-adiabatic quantum engines. *Scientific reports*, Springer, v. 4, n. 1, p. 1–5, 2014.
- 93 DENG, J. et al. Boosting work characteristics and overall heat-engine performance via shortcuts to adiabaticity: Quantum and classical systems. *Physical Review E*, APS, v. 88, n. 6, p. 062122, 2013.
- 94 SONG, X.-K. et al. Physically feasible three-level transitionless quantum driving with multiple schrödinger dynamics. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 5, p. 052324, 2016.
- 95 SONG, X.-K. et al. Robust stimulated raman shortcut-to-adiabatic passage with invariant-based optimal control. *Optics Express*, Optica Publishing Group, v. 29, n. 6, p. 7998–8014, 2021.
- 96 RABI, I. On the process of space quantization. *Physical Review*, APS, v. 49, n. 4, p. 324, 1936.
- 97 RABI, I. I. Space quantization in a gyrating magnetic field. *Physical Review*, APS, v. 51, n. 8, p. 652, 1937.

98 CHEN, Y.-H. et al. Shortcuts to adiabaticity for the quantum rabi model: Efficient generation of giant entangled cat states via parametric amplification. *Physical Review Letters*, APS, v. 126, n. 2, p. 023602, 2021.

99 SILVA, E. F. et al. Operator formalism for the propagation of paraxial electromagnetic fields. *Optics Communications*, Elsevier, v. 530, p. 129206, 2023.