



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Éwerton Jéferson Barbosa Ferreira

**Contribuições ao estudo do Movimento  
Browniano Quântico induzido por flutuações  
quânticas de vácuo em teorias escalares**

João Pessoa

2024



Éwerton Jéferson Barbosa Ferreira

**Contribuições ao estudo do Movimento Browniano  
Quântico induzido por flutuações quânticas de vácuo em  
teorias escalares**

Tese realizada sob a orientação do Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como complemento dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Professor Dr. Herondy Francisco Santana Mota

João Pessoa

2024

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

F383c Ferreira, Ewerton Jeferson Barbosa.

Contribuições ao estudo do Movimento Browniano Quântico induzido por flutuações quânticas de vácuo em teorias escalares / Ewerton Jeferson Barbosa Ferreira.  
- João Pessoa, 2024.  
243 f. : il.

Orientação: Herondy Francisco Santana Mota.  
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Teoria quântica. 2. Flutuações quânticas. 3. Vácuo quântico. 4. Função de Wightman. 5. Movimento Browniano quântico. 6. Movimento Browniano quântico induzido. I. Mota, Herondy Francisco Santana. II. Título.

UFPB/BC

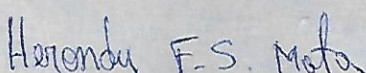
CDU 530.145(043)

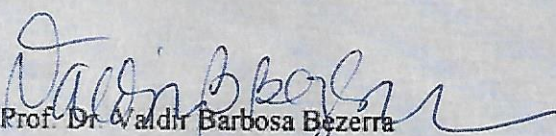


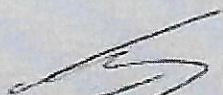
Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

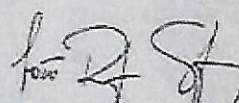
Ata da Sessão Pública da Defesa de tese de Doutorado do aluno  
Éwerton Jéferson Barbosa Ferreira, candidato ao Título de  
Doutor em Física na Área de Concentração Física de Partículas  
Elementares e Campos

Aos vinte e seis dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e quatro, às 14h00, na sala virtual [meet.google.com/gmp-dedi-hvt](https://meet.google.com/gmp-dedi-hvt), reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Física de Partículas Elementares e Campos, de **Éwerton Jéferson Barbosa Ferreira**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as) Herondy Francisco de Santana Mota (PPGF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Valdir Barbosa Bezerra (PPGF/UFPB), Albert Petrov (PPGF/UFPB), Vitorio Alberto De Lorenci (UNIFEI) e João Rafael Lúcio dos Santos (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Herondy Francisco de Santana Mota comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada "*Contribuições ao estudo do Movimento Browniano Quântico induzido por flutuações quânticas de vácuo em teorias escalares*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora João Pessoa, Paraíba, 26 de fevereiro de 2024.

  
Prof. Dr. Herondy Francisco de Santana Mota  
Orientador - PPGF/UFPB

  
Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra  
PPGF/UFPB

 / Albert Petrov  
Prof. Dr. Albert Petrov  
PPGF/UFPB

  
Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos  
UFCG

  
Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci  
UNIFEI



# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me permitir chegar até esse momento tão importante da minha vida, pois sem a sua proteção divina isso não seria possível.

Agradeço aos meus pais, Edilene e Edmilson, pelos seus esforços imensuráveis na minha criação, educação e proteção. Sou grato a ambos pela compreensão nos momentos de ausência, pelo apoio e constantes palavras de incentivo. A vitória de hoje é o simples reflexo do empenho de vocês, portanto, essa conquista também pertence a ambos.

Gostaria de expressar os meus agradecimentos ao meu orientador prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota pelo acompanhamento, disponibilidade, paciência e os conhecimentos repassados com tanta boa vontade. Um exemplo e uma referência profissional. Meu mais sincero obrigado.

Particularmente, gostaria de agradecer a alguns amigos que fiz durante o curso de doutorado. Sinceramente, aos amigos Klécio e Igor, pelo auxílio e ajuda na chegada em João Pessoa (JP), além dos amigos Mauro e Alisson, pela ajuda no último ano de doutorado em JP. Agradeço ao amigo Djardiel, que foi o primeiro amigo que fiz no doutorado e que se tornou um colega de estudos no primeiro ano. Também agradeço as amigas Giulia e Gislaine pela amizade. Enfim, a todos os amigos do Departamento de Física pelas discussões científicas, conhecimentos compartilhados, consideração e palavras de incentivo.

Agradeço aos professores do Departamento de Física, pelos conhecimentos transmitidos durante a minha permanência no Programa de Pós-graduação em Física. Gostaria de dedicar também alguns agradecimentos a todos os meus professores, desde o nível básico ao nível superior, pelo apoio durante a minha jornada acadêmica, que hoje se concretiza. As suas contribuições tornaram possível esse momento.

Aos funcionários do Departamento de Física, Coordenação e Secretaria do Programa de Pós-graduação em Física também agradeço, por sempre me tratarem com cordialidade.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro concedido, que foi crucial para o meu estabelecimento e permanência durante o curso de doutorado, possibilitando a segurança e os meios necessários para o desenvolvimento dos trabalhos.



*“Se pude enxergar a tão grande distância, foi  
subindo nos ombros de gigantes”.  
Sr. Isaac Newton (1642-1727).*



# Resumo

Segundo a Teoria Quântica de Campos, a matéria e suas interações são descritas por estruturas fundamentais denominadas de campos, os quais permeiam todo o Universo. Uma característica fundamental dos campos quânticos é que estes sempre flutuam. Nesse sentido, os conceitos de vácuo de acordo com as perspectivas clássica e da teoria quântica de campos são totalmente distintos. A primeira associa o vácuo a um estado de completo vazio. Por outro lado, o segundo ponto de vista, sugere que, na verdade, o vácuo (quântico) corresponde a uma estrutura caótica, em constante agitação e preenchido pelas flutuações quânticas de vácuo, decorrentes da criação e aniquilação de partículas virtuais. A real existência destas flutuações é um fato bem estabelecido. Sabe-se que as mesmas dão origem a fenômenos físicos, como os contemporâneos efeito Casimir e desvio de Lamb. Outro efeito, mais recente, é o movimento estocástico que partículas pontuais podem adquirir por influência destas flutuações quânticas de vácuo dos campos (ex. eletromagnético ou escalar). Esse fenômeno é conhecido na literatura como Movimento Browniano Quântico ou Movimento Browniano Quântico induzido (MBQI), em alusão ao Movimento Browniano clássico que uma partícula executa, quando se encontra suspensa em um fluido com temperatura finita. Esse é o tema central da presente tese. Após uma breve revisão sobre o formalismo necessário e os cálculos antecipados das funções de Wightman de frequência positiva, estudamos o MBQI em três cenários distintos. Seguindo uma abordagem *a la* Langevin, na primeira parte do trabalho, calculamos a dispersão de velocidades de uma partícula em um condensado de Bose-Einstein com desclinação, que simula o vácuo de um universo em expansão de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) com a presença de uma corda cósmica. De maneira geral, diferente do que se encontra na literatura, observamos anisotropias nas dispersões de velocidades por influência da desclinação. No segundo cenário, estudamos as influências de dois mecanismos de confinamento unidimensional sobre o MBQI de uma partícula acoplada a um campo escalar sem massa no espaço-tempo de Minkowski. No primeiro caso, visando complementar (e transcender) um paralelo observado na literatura, entre o MBQI por campo eletromagnético e escalar, investigamos o MBQI de uma partícula na presença de dois planos perfeitamente refletores sob condições de Dirichlet, Neumann e Mistas. No segundo caso estudamos os efeitos de uma compactificação unidimensional com condição quasiperiódica. Em cada situação as dispersões de velocidades e posição são calculadas, observando-se a existência de anisotropias e que o parâmetro associado ao confinamento (distância entre as placas e comprimento da compactificação) serve como uma escala natural para o sistema. Por último, analisamos o MBQI de uma partícula acoplada a um campo escalar sem massa em um espaço-tempo curvo. Tendo em vista as dificuldades técnicas, consideramos o universo de Einstein, uma versão simplificada de espaço-tempo curvo, que corresponde ao universo estático de FLRW com constante de curvatura positiva. Nesse último estudo, todas as

componentes da dispersão para o momento físico, assim como para os comprimentos físicos, são iguais, indicando uma manifestação das propriedades de isotropia e homogeneidade do modelo de universo.

**Palavras-chave:** flutuações quânticas. vácuo quântico. função de Wightman. movimento Browniano quântico. movimento Browniano quântico induzido.

# Abstract

According to Quantum Field Theory, matter and its interactions are described by fundamental structures called fields, which permeate the entire Universe. A fundamental characteristic of quantum fields is that they always fluctuate. In this sense, the concepts of vacuum according to the classical and quantum field theory perspectives is totally different. The first associates the vacuum with a state of complete emptiness. On the other hand, the second viewpoint suggests that, in fact, the (quantum) vacuum corresponds to a chaotic structure, in constant agitation and filled by quantum vacuum fluctuations, resulting from the creation and annihilation of virtual particles. The real existence of these fluctuations is a well-established fact. It is known that they give rise a physical phenomena, such as the Casimir effect and Lamb shift. Another, more recent, effect is the stochastic motion that point particles can obtain due to the influence of these quantum vacuum fluctuations of the fields (e.g. electromagnetic and scalar). This phenomenon is known in the literature as quantum Brownian motion or induced quantum Brownian motion (IQBM), in reference to the classical Brownian Motion that a particle performs, when it is suspended in a fluid with a finite temperature. This is the central theme of this thesis. After a brief review of the necessary formalism and previous calculations of the positive frequency Wightman functions, we study the IQBM in three different scenarios. Following a *a la* Langevin approach, in the first part of the work, we calculate the velocity dispersion of a particle in a Bose-Einstein condensate with disclination, which simulates the vacuum of an expanding universe of Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) with the presence of a cosmic string. In general, unlike what is found in the literature, we observe anisotropies in the velocity dispersions due to the influence of disclination. In the second scenario, we study the influences of two one-dimensional confinement mechanisms on the IQBM of a particle coupled to a massless scalar field in Minkowski spacetime. In the first case, aiming complement (and transcend) a parallel observed in the literature, between the IQBM by electromagnetic and scalar fields, we investigated the IQBM of a particle in the presence of two perfectly reflecting planes under Dirichlet, Neumann and mixed conditions. In the second case, we study the effects of a one-dimensional compactification with a quasiperiodic condition. In each situation, the velocity and positions dispersions are calculated, observing the existence of anisotropies and that the parameter related to confinement (distance between planes and compactification length) works as a natural scale for the system. Finally, we analyze the IQBM of a particle coupled to a massless scalar field in a curved spacetime. In view of technical difficulties, we consider Einstein's universe, a simplified version of curved spacetime, which corresponds to the static FLRW universe with positive curvature constant. In this latest study, all dispersion components for the physical momentum, as well as for the physical lengths, are equal, indicating a manifestation of the isotropy and homogeneity properties of the universe model.

**Keywords:** quantum fluctuations. quantum vacuum. Wightman function. quantum Brownian motion. induced quantum Brownian motion.

# Lista de ilustrações

|                                                                                                                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1 – Exemplo de um sistema mecânico pontual. . . . .                                                                                                                       | 34  |
| Figura 2 – Exemplos de sistemas pontuais descritos por campos no limite do contínuo. . . . .                                                                                     | 37  |
| Figura 3 – Representação discreta de uma superfície contínua. . . . .                                                                                                            | 38  |
| Figura 4 – Ilustração do efeito que a operação $\delta\varphi$ produz sobre o comportamento do campo escalar $\varphi(x)$ . . . . .                                              | 42  |
| Figura 5 – Comportamento da energia em função do momento das excitações associadas aos campos escalares massivo e não massivo. . . . .                                           | 46  |
| Figura 6 – Representação ilustrativa de uma fonte pontual $\rho$ . . . . .                                                                                                       | 47  |
| Figura 7 – Origem do espaço-tempo globalmente cônico pela remoção do déficit angular induzido pela presença de uma corda cósmica. . . . .                                        | 69  |
| Figura 8 – Ilustração das formas de confinamento estudadas para o campo escalar não massivo em (3+1) dimensões no espaço-tempo de Minkowski. . . . .                             | 73  |
| Figura 9 – Planos paralelos atuando como um filtro dos modos do campo, satisfazendo uma condição de contorno particular de Dirichlet. . . . .                                    | 74  |
| Figura 10 – Espaço polar abstrato para as coordenadas de momento $k_y$ e $k_z$ . . . . .                                                                                         | 77  |
| Figura 11 – Ilustrações relativas ao espaço-tempo FRLW com parâmetro de curvatura $k = +1$ . . . . .                                                                             | 89  |
| Figura 12 – Representação para dois pontos espaciais definidos pelas coordenadas esféricas usuais e pelas coordenadas angulares do universo de Einstein. . . . .                 | 94  |
| Figura 13 – MAG baseado em um CBE anelar simulando um universo em expansão. . . . .                                                                                              | 98  |
| Figura 14 – Representação didática da formação da desclinação em materiais. . . . .                                                                                              | 99  |
| Figura 15 – Ilustração para uma possível interpretação das componentes $f_{\text{ext}}^i$ . . . . .                                                                              | 113 |
| Figura 16 – Comportamento do fator de escala $b^{\frac{1}{4}}(\eta)$ em função do tempo. . . . .                                                                                 | 116 |
| Figura 17 – Comportamento gráfico da dispersão de velocidades $\langle(\Delta\bar{v}^\rho)^2\rangle$ em função dos parâmetros $\chi$ e $\beta$ . . . . .                         | 120 |
| Figura 18 – Comportamento gráfico da dispersão de velocidades $\langle(\Delta\bar{v}^\phi)^2\rangle$ em função dos parâmetros $\chi$ e $\beta$ . . . . .                         | 125 |
| Figura 19 – Comportamento gráfico da dispersão de velocidades $\langle(\Delta\bar{v}^z)^2\rangle$ em função dos parâmetros $\chi$ e $\beta$ . . . . .                            | 128 |
| Figura 20 – Plano complexo para o campo escalar sujeito à condições quasiperiódicas. . . . .                                                                                     | 130 |
| Figura 21 – Estrutura bidimensional do grafeno e nanotubo de carbono. . . . .                                                                                                    | 131 |
| Figura 22 – Ilustração simplista do efeito Aharonov-Bohm. . . . .                                                                                                                | 132 |
| Figura 23 – Partícula pontual de massa $m$ e carga $g$ interagindo com um campo escalar sem massa $\varphi$ confinado unidimensionalmente em uma região de tamanho $a$ . . . . . | 136 |

|                                                                                                                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 24 – Comportamento gráfico da dispersão de velocidades perpendicular aos planos em função do tempo adimensional $\tau_a$ , para condições de Dirichlet (D), Neumann (N) e Mistas (DN e ND). . . . . | 138 |
| Figura 25 – Comportamento gráfico da dispersão de velocidades paralela aos planos em função do tempo adimensional $\tau_a$ , para condições de Dirichlet (D), Neumann (N) e Mistas (DN e ND). . . . .      | 140 |
| Figura 26 – Ilustração das divergências de <i>round trip</i> . . . . .                                                                                                                                     | 141 |
| Figura 27 – Ilustração do limite $x_a \ll 1$ . . . . .                                                                                                                                                     | 145 |
| Figura 28 – Comportamento da dispersão relativa em função do tempo $\tau_a$ para a coordenada perpendicular aos planos paralelos. . . . .                                                                  | 150 |
| Figura 29 – Partícula pontual de massa $m$ e carga $g$ interagindo com um campo escalar sem massa $\varphi$ confinado unidimensionalmente por uma condição de quasiperiodicidade. . . . .                  | 153 |
| Figura 30 – Comportamento gráfico da dispersão de velocidades para o caso das condições quasiperiódicas. . . . .                                                                                           | 155 |
| Figura 31 – Ilustração do espaço-tempo de Minkowski com uma dimensão espacial compactificada. . . . .                                                                                                      | 156 |
| Figura 32 – Comportamento dos polinômios de Bernoulli $B_2(\beta)$ e $B_4(\beta)$ como função de $\beta$ . . . . .                                                                                         | 158 |
| Figura 33 – Comportamento da dispersão relativa em função do tempo $\tau_a$ para as coordenadas não compactificadas e compactificada. . . . .                                                              | 161 |
| Figura 34 – Comportamento da dispersão renormalizada do momento físico da partícula em função do tempo adimensional $\tau_a$ . . . . .                                                                     | 173 |
| Figura 35 – Comportamento da dispersão relativa $\langle(\Delta\hat{\mathcal{J}}_i)^2\rangle_{\text{ren}}^*$ em função de $\tau_a$ . . . . .                                                               | 180 |
| Figura 36 – Contorno admitido para a integração na variável $\eta_1$ . . . . .                                                                                                                             | 202 |
| Figura 37 – Contorno admitido para a integração na variável $\eta_2$ . . . . .                                                                                                                             | 203 |

# Lista de tabelas

|          |                                                                                                                                                                                                    |     |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 1 | – Síntese comparativa entre dois possíveis conjuntos de modos para a expansão do campo quântico $\hat{\varphi}$ no espaço-tempo curvo. . . . .                                                     | 61  |
| Tabela 2 | – Relação entre a FWFP $W^+(x, x')$ para o campo escalar e outras funções de Green da teoria quântica de campos. . . . .                                                                           | 67  |
| Tabela 3 | – Símbolos de Christoffel não nulos para a métrica efetiva (4.29). . . . .                                                                                                                         | 112 |
| Tabela 4 | – Valores do limite superior para o tempo $\tau_a^{(j)}$ , para a dispersão da coordenada perpendicular aos planos, considerando diferentes valores para os parâmetros $\bar{g}$ e $x_a$ . . . . . | 151 |
| Tabela 5 | – Valores aproximados para o limite superior do tempo $\tau_a$ para as dispersões relativas associadas as componentes compactificada e não compactificada. . . . .                                 | 162 |
| Tabela 6 | – Símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ para o universo de Einstein. . . . .                                                                                                             | 166 |
| Tabela 7 | – Relação entre as componentes dos momentos físicos e de coordenadas. .                                                                                                                            | 172 |
| Tabela 8 | – Relação entre as componentes dos comprimentos físicos e coordenados. .                                                                                                                           | 178 |
| Tabela 9 | – Valores aproximados do tempo adimensional $\tau_a$ para o limite superior da condição de pequenos deslocamentos (6.45). . . . .                                                                  | 181 |



# Lista de abreviaturas e siglas

|          |                                                                                              |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| CBE      | Condensado de Bose-Einstein                                                                  |
| FLRW     | Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker                                                          |
| FWFP     | Função de Wightman de frequência positiva                                                    |
| FWFP-DNM | Função de Wightman de frequência positiva para condições do tipo Dirichlet, Neumann e Mistas |
| MAG      | Modelos análogos de gravidade                                                                |
| MBC      | Movimento Browniano clássico                                                                 |
| MBQI     | Movimento Browniano Quântico induzido                                                        |
| OHS      | Oscilador harmônico simples                                                                  |
| RH       | Radiação Hawking                                                                             |
| TQC      | Teoria Quântica de Campos                                                                    |
| VEV      | Valor esperado no estado de vácuo                                                            |



# Lista de publicações

1. FERREIRA, E. J. B.; MELLO, E. R. B.; MOTA, H. F. S. Quantum Brownian motion for a particle in analog expanding cosmologies in the presence of disclination. **Physical Review D**, v. 105, n. 12, p. 125014, 2022.
2. FERREIRA, E. J. B.; GUEDES, E. M. B.; MOTA, H. F. S. Quantum Brownian motion induced by an inhomogeneous tridimensional space and a  $S^1 \times \mathbb{R}^3$  topological space-time. **Journal of High Energy Physics**, v. 2023, n. 4, p. 1-45, 2023.
3. FERREIRA, E. J. B.; MOTA, H. F. S. Quantum Brownian motion induced by a scalar field in Einstein's universe. **arXiv preprint arXiv:2311.15749**, 2023.

# Sumário

|          |                                                                                         |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                                       | <b>23</b> |
| <b>2</b> | <b>TEORIA QUÂNTICA DOS CAMPOS ESCALARES</b>                                             | <b>33</b> |
| 2.1      | Revisão sobre a mecânica clássica de sistemas pontuais e o conceito de campos clássicos | 33        |
| 2.2      | Teoria clássica de campos, equação de Klein-Gordon e quantização do campo escalar       | 40        |
| 2.3      | Quanto à normalização das soluções da equação Klein-Gordon                              | 51        |
| 2.4      | Generalização para o espaço-tempo curvo                                                 | 54        |
| <b>3</b> | <b>FUNÇÕES DE WIGHTMAN DE FREQUÊNCIA POSITIVA PARA O CAMPO ESCALAR SEM MASSA</b>        | <b>65</b> |
| 3.1      | Definições e expressões gerais                                                          | 65        |
| 3.2      | FWFP no espaço-tempo cilíndrico com corda cósmica e condição quasiperiódica             | 68        |
| 3.2.1    | Aspectos geométricos e modos normalizados                                               | 68        |
| 3.2.2    | FWFP para o campo escalar no espaço-tempo da corda cósmica com condição quasiperiódica  | 71        |
| 3.3      | FWFP para o campo escalar sem massa em (3+1) dimensões unidimensionalmente confinado    | 73        |
| 3.3.1    | Aspectos preliminares                                                                   | 73        |
| 3.3.2    | Condições de Dirichlet                                                                  | 76        |
| 3.3.3    | Condições de Neumann                                                                    | 80        |
| 3.3.4    | Condições Mistas                                                                        | 82        |
| 3.3.5    | Construção genérica para a FWFP-DNM                                                     | 85        |
| 3.3.6    | Condição quasiperiódica                                                                 | 86        |
| 3.4      | FWFP para o campo escalar no universo de Einstein                                       | 87        |
| 3.4.1    | Alguns aspectos geométricos                                                             | 87        |
| 3.4.2    | Universo de Einstein                                                                    | 91        |
| <b>4</b> | <b>MBQI EM UMA GEOMETRIA EFETIVA COM DESCLINAÇÃO</b>                                    | <b>97</b> |
| 4.1      | Motivação                                                                               | 97        |
| 4.2      | Geometrias efetivas em condensados de Bose-Einstein e espaço-tempo com desclinação      | 101       |
| 4.3      | Equações de movimento                                                                   | 110       |
| 4.4      | Estudo da dispersão de velocidades                                                      | 114       |

|            |                                                                                                    |            |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.4.1      | Componente $\rho$ . . . . .                                                                        | 117        |
| 4.4.2      | Componente $\phi$ . . . . .                                                                        | 122        |
| 4.4.3      | Componente $z$ . . . . .                                                                           | 126        |
| <b>5</b>   | <b>MBQI NO ESPAÇO-TEMPO PLANO COM CONFINAMENTO UNIDIMENSIONAL . . . . .</b>                        | <b>129</b> |
| <b>5.1</b> | <b>Motivação . . . . .</b>                                                                         | <b>129</b> |
| <b>5.2</b> | <b>Descrição do sistema físico e equações de movimento . . . . .</b>                               | <b>132</b> |
| <b>5.3</b> | <b>Confinamento por placas paralelas . . . . .</b>                                                 | <b>135</b> |
| 5.3.1      | Estudo da dispersão de velocidades . . . . .                                                       | 135        |
| 5.3.2      | Estudo da dispersão na posição e condição de pequenos deslocamentos . . . . .                      | 146        |
| <b>5.4</b> | <b>Confinamento por compactificação . . . . .</b>                                                  | <b>152</b> |
| 5.4.1      | Estudo da dispersão de velocidades . . . . .                                                       | 152        |
| 5.4.2      | Estudo da dispersão na posição e condição de pequenos deslocamentos . . . . .                      | 159        |
| <b>6</b>   | <b>MBQI NO UNIVERSO DE EINSTEIN . . . . .</b>                                                      | <b>163</b> |
| <b>6.1</b> | <b>Motivação . . . . .</b>                                                                         | <b>163</b> |
| <b>6.2</b> | <b>Descrição do sistema físico e equações de movimento . . . . .</b>                               | <b>164</b> |
| <b>6.3</b> | <b>Dispersão do momento . . . . .</b>                                                              | <b>167</b> |
| <b>6.4</b> | <b>Dispersão das coordenadas e análise da condição de pequenos deslocamentos . . . . .</b>         | <b>175</b> |
| <b>7</b>   | <b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .</b>                                                         | <b>183</b> |
|            | <b>APÊNDICES . . . . .</b>                                                                         | <b>191</b> |
|            | <b>APÊNDICE A – SOBRE A INVARIÂNCIA CONFORME DO CAMPO ESCALAR . . . . .</b>                        | <b>193</b> |
|            | <b>APÊNDICE B – DETALHES MATEMÁTICOS REFERENTES AO CAPÍTULO 4 . . . . .</b>                        | <b>197</b> |
| <b>B.1</b> | <b>Dinâmica de uma partícula pontual acoplada a um campo escalar sem massa . . . . .</b>           | <b>197</b> |
| <b>B.2</b> | <b>Soluções para a dupla integração nas dispersões . . . . .</b>                                   | <b>200</b> |
| <b>B.3</b> | <b>Métrica acústica para o BEC: inversão da matriz <math>g^{\mu\nu}</math> . . . . .</b>           | <b>204</b> |
|            | <b>APÊNDICE C – DETALHES MATEMÁTICOS REFERENTES AO CAPÍTULO 5 . . . . .</b>                        | <b>209</b> |
| <b>C.1</b> | <b>Equações de movimento . . . . .</b>                                                             | <b>209</b> |
| <b>C.2</b> | <b>Expressões aproximadas para a dispersão de velocidades no regime de tempos longos . . . . .</b> | <b>211</b> |

|            |                                                                                                                                     |            |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| C.2.1      | Caso das condições de Dirichlet, Neumann e Mistas . . . . .                                                                         | 211        |
| C.2.1.1    | Termos independentes da posição . . . . .                                                                                           | 212        |
| C.2.1.2    | Termos dependentes da posição . . . . .                                                                                             | 213        |
| C.2.2      | Caso da condição quasiperiódica . . . . .                                                                                           | 216        |
| <b>C.3</b> | <b>Expressões aproximadas para a dispersão de velocidades no regime de tempos pequenos . . . . .</b>                                | <b>217</b> |
| C.3.1      | Caso das condições de Dirichlet, Neumann e Mistas . . . . .                                                                         | 217        |
| C.3.1.1    | Termos independentes da posição . . . . .                                                                                           | 217        |
| C.3.1.2    | Termos dependentes da posição . . . . .                                                                                             | 219        |
| C.3.2      | Caso da condição quasiperiódica . . . . .                                                                                           | 221        |
| <b>C.4</b> | <b>Expressões aproximadas para a dispersão da coordenada espacial confinada e compactificada no regime de tempo longo . . . . .</b> | <b>222</b> |
| C.4.1      | Caso das condições de Dirichlet, Neumann e Mistas . . . . .                                                                         | 222        |
| C.4.1.1    | Termos independentes da posição . . . . .                                                                                           | 223        |
| C.4.1.2    | Termos dependentes da posição . . . . .                                                                                             | 224        |
| C.4.2      | Caso da condição de quasiperiodicidade . . . . .                                                                                    | 228        |
|            | <b>APÊNDICE D – DETALHES MATEMÁTICOS REFERENTES AO UNIVERSO DE EINSTEIN . . . . .</b>                                               | <b>231</b> |
| <b>D.1</b> | <b>Escalar de Ricci para o Universo de Einstein . . . . .</b>                                                                       | <b>231</b> |
| <b>D.2</b> | <b>Dedução das relações entre os momentos físicos e de coordenadas no universo de Einstein . . . . .</b>                            | <b>231</b> |
| <b>D.3</b> | <b>Dedução das relações entre os comprimentos físicos e de coordenadas no universo de Einstein . . . . .</b>                        | <b>233</b> |
| <b>D.4</b> | <b>Solução para as múltiplas integrais na Eq. (6.35) . . . . .</b>                                                                  | <b>233</b> |
|            | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>                                                                                                        | <b>235</b> |

# 1 Introdução

Em 1828 Robert Brown publica no *Philosophical Magazine* a síntese de uma série de observações realizadas por ele, entre os meses de junho e agosto de 1827, que em suas palavras versavam “sobre as partículas contidas nos grãos de pólen das plantas e a existência de moléculas ativas em corpos orgânicos e inorgânicos” [1]. No início de seus relatos Brown indica que, observando os grãos de pólen de uma planta imersa em água (a *Clarkia pulchella*), percebeu que pequenas partículas contidas nesses grãos de pólen apresentavam um pequeno movimento.

Seguindo seu programa de estudos, diferentes plantas foram investigadas e o movimento das partículas, em todos os casos, sempre foi observado. Uma vez que todas as plantas utilizadas nas observações estavam vivas, Brown suspeitou se esse fenômeno do movimento das partículas estaria, de algum modo, associado a essa condição. Então, em uma nova sequência de observações, Brown utilizou plantas secas, que até mesmo estavam preservadas por mais de 20 anos ou aproximadamente um século, e ainda assim constatou o movimento vívido, quando as amostras eram imersas em água (ou, em alguns casos, outra substância, como o álcool).

Brown [1] deixa claro em seu artigo que não foi o primeiro a relatar o movimento das partículas de pólen suspensas em água, porém, pelo que se entende a partir do seu trabalho, foi o primeiro a considerar esse fenômeno de forma mais detalhada e minuciosa. De fato, destaca-se que em suas investigações, além das partículas provenientes de plantas (vivas ou secas), diferentes materiais orgânicos e derivados, juntamente com minerais (substâncias inorgânicas), foram considerados, por exemplo, tecidos animais e vegetais, madeira fossilizada, carvão, vidro, pedras, terras e metais.

O fenômeno brevemente relatado acima ficou conhecido como movimento Browniano (MB) e foi explicado apenas no século seguinte por Albert Einstein [2], em 1905, que ofereceu um tratamento matemático para o problema. Baseado em argumentos probabilísticos de física estatística e em um tratamento via equação de difusão, Einstein encontrou que o valor médio para o deslocamento ao quadrado,  $\langle x^2 \rangle$ , associado a uma partícula Browniana esférica de raio  $a$ , suspensa em um fluido com temperatura  $T$  e viscosidade  $\eta$ , poderia ser estimado através da relação [2, 3, 4]

$$\langle x^2 \rangle = \frac{RT}{3\pi N_A a \eta} t, \quad (1.1)$$

onde  $t$  corresponde ao intervalo de tempo transcorrido na observação do fenômeno,  $R$  a constante universal dos gases e  $N_A$  representa número de Avogadro (número de moléculas por mol de uma substância arbitrária).

O resultado de Einstein mostrou uma forma direta de como encontrar uma estimativa para o número de Avogadro, visto que as demais grandezas em (1.1), exceto  $N_A$ , poderiam ser obtidas diretamente [4]. A concordância dos resultados de Einstein com a confirmação experimental do fenômeno foi um fator significativo para a época, pois forneceu grande suporte para a aceitação e existência física dos átomos como pequenos constituintes da matéria, um vez que permitiu estimar o número de Avogadro  $N_A$  [3]. Para o leitor interessado em obter mais detalhes sobre o tema do MB e os demais formalismos, recomendamos a leitura inicial dos artigos [4] e [3], além das Refs. [5] e [6]. Além disso, destaca-se que, antes de Einstein houveram grandes esforços de muitos pesquisadores para elucidar esse fenômeno (MB) – sobre este aspecto veja a nota (I) da Ref. [2, p. 86-88].

Em 1908, o físico francês P. Langevin propôs uma formulação matemática para o MB de uma partícula totalmente diferente da abordagem seguida por Einstein, mas capaz de prever o mesmo resultado para o deslocamento quadrático médio indicado na Eq. (1.1). Conforme a descrição de Langevin, em sua formulação completamente diferente, o movimento de uma partícula Browniana, suspensa e em equilíbrio térmico com um fluido qualquer, é descrito pela equação diferencial [7]

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\eta a \frac{dx}{dt} + X. \quad (1.2)$$

As quantidades  $m$ ,  $a$  e  $\eta$  já foram prontamente definidas anteriormente. Desde já adverte-se que, por questões de padronização e compatibilização da escrita, alteramos o rótulo original da fonte [7] para a viscosidade.

A Eq. (1.2), em essência, corresponde a 2ª lei de Newton, que fornece a dinâmica resultante de um corpo com massa  $m$ , sob a ação de múltiplas forças. O primeiro termo no lado direito,  $-6\pi\eta a \frac{dx}{dt}$ , representa uma força de atrito viscoso, sofrida pela partícula ao se movimentar pelo fluido. O segundo termo, a força  $X$ , representa o elemento inovador do formalismo de Langevin [7]. Em suas palavras, essa força complementar  $X$ , indiferentemente positiva e negativa, é responsável por descrever a frenética agitação observada para a partícula Browniana. Através de manipulações e argumentos físicos, Langevin demonstrou que a Eq. (1.2), de maneira simples, fornece como solução o resultado obtido por Einstein para  $\langle x^2 \rangle$ , isto é, a Eq. (1.1).

De acordo com o paradigma atual, no movimento Browniano clássico (MBC), o movimento estocástico adquirido pela partícula Browniana imersa (ou em suspensão) no fluido, com temperatura de equilíbrio  $T$ , se deve as frequentes colisões que a mesma sofre com as demais partículas (ou moléculas) de tamanho menor que compõem o fluido [5]. Esse ponto de vista, a respeito da ideia elementar do fenômeno, como originado pelas colisões, foi introduzido muito tempo antes dos trabalhos originais de Einstein [2].

A discussão do MB introduzida por Einstein surgiu em um período (1900–1927) no qual as bases da Mecânica Quântica, Eletrodinâmica Quântica e Teoria Quântica de

Campos estavam sendo estabelecidas. Conforme sugere França e Gomes [8], de certo modo, o trabalho do MB e as ideias subjacentes a este estão historicamente relacionados aos trabalhos precursores da mecânica quântica. De fato, o período compreendido entre os anos de 1900 e 1927 envolveu muitas discussões cruciais, como o problema da radiação de corpo negro, discutido por Planck, juntamente com outros pesquisadores da época, bem como a teoria da absorção e emissão da radiação proposta por Dirac. Embora tenhamos destacado esse período em particular, é importante ressaltar que, posteriormente a essa época muitos trabalhos e resultados fundamentais foram desenvolvidos. Visto que não é nosso objetivo delinear toda esta história, recomendamos o excelente texto encontrado na Ref. [9], o qual fornece um panorama histórico geral sobre o nascimento da Teoria Quântica de Campos.

Em meio aos debates acerca das ideias fundamentais da mecânica quântica, destacadas acima, outro aspecto emergente destas discussões foi a energia de ponto zero. De acordo com Milonni [10], em 1912 Planck apresentou uma segunda versão da sua teoria (sobre a radiação de um corpo negro) em que admitiu a contribuição de uma energia de ponto zero  $\frac{h\nu}{2}$  para a energia média  $U$  de um oscilador (com frequência  $\nu$ ) em equilíbrio térmico com um campo de radiação (a temperatura  $T$ ). A constante  $h$  representa a recém introduzida constante de Planck. Também, em 1913 Einstein e Otto Stern obtiveram um grande sucesso utilizando a energia de ponto zero para explicar uma redução aproximada de 2 cal/mol·K no calor específico molar de uma amostra de hidrogênio  $H_2$  à temperatura ambiente (5 cal/mol·K para  $T \approx 300$  K) quando sua temperatura era diminuída para cerca de  $T \approx 60$  K. De acordo com o conhecimento atual, embora a justificativa de Einstein e Stern para o fenômeno estivesse, em partes, equivocada, suas discussões foram favoráveis para a perspectiva e importância do conceito da energia de ponto zero nos fenômenos físicos. As evidências teóricas e experimentais apresentadas no decorrer do tempo sugeriam fortemente a existência da energia de ponto zero (consulte o Capítulo 1 da Ref. [10] para um visão global desse cenário).

Atualmente, a real existência dessa energia é bem estabelecida e está associada à energia do estado de vácuo dos campos quânticos. Além disso, sabe-se que a mesma é responsável por fenômenos físicos bem conhecidos na literatura, como por exemplo, o efeito Casimir [11] e o seu contemporâneo desvio de Lamb [12].

Por volta de 1928 a teoria mais completa e disponível para o átomo de hidrogênio previa que certos pares de estados excitados desse átomo deveriam ser degenerados, isto é, ter o mesmo valor de energia [9]. Entretanto, em 1947 W. E. Lamb e R. C. Retherford [12], usufruindo dos avanços nas técnicas experimentais em micro-ondas, reportaram que os estados  $2S_{\frac{1}{2}}$  e  $2P_{\frac{1}{2}}$  do átomo de hidrogênio, diferente da igualdade energética prevista pela teoria de Dirac, na verdade, possuíam uma diferença de energia. Essa diferença de energia é o que conhecemos hoje como o desvio de Lamb (*“Lamb shift”*).

Especificamente, Lamb e Retherford [12] constataram experimentalmente que a energia do estado  $2S_{\frac{1}{2}}$  era superior à energia do estado  $2P_{\frac{1}{2}}$ , com a diferença de energia correspondente à frequência aproximada de 1000 MHz. Uma explicação teórica para o fenômeno surgiu logo em seguida por H. A. Bethe [13], que atribuiu esse fenômeno ao efeito de interação do elétron com o campo de radiação, isto é, com o campo eletromagnético de vácuo. O leitor interessado em mais informações sobre o desvio de Lamb pode consultar a fonte original já citada, além do texto didático apresentado no Capítulo 3 da Ref. [10].

Possivelmente, o mais popular entre os fenômenos de vácuo quântico é o efeito Casimir, assim chamado após H. B. G. Casimir observar que as mudanças da energia de ponto zero do campo eletromagnético podem dar origem a uma força entre duas placas perfeitamente condutoras [11]. Em seus estudos, Casimir (1948) considerou uma placa quadrada, de área  $A = L^2$ , no interior de uma cavidade cúbica de paredes perfeitamente condutoras, com arestas medindo  $L$ , confinando os modos de oscilação de um campo eletromagnético. Comparando a energia entre as situações em que a placa encontrava-se paralelamente em (i) uma distância  $a$  muito próxima de uma das paredes da cavidade e (ii) em uma distância da ordem das dimensões das placas, isto é,  $L$ , Casimir obteve uma densidade de energia superficial sobre as placas tal que [11]

$$\frac{\delta E}{L^2} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720} \frac{1}{a^3}.$$

Para placas com dimensões fixas, essa densidade de energia por sua vez o permitiu estimar uma pressão sobre as placas:

$$P = \frac{F}{L^2} = \frac{d}{da} \left( \frac{\delta E}{L^2} \right) = \frac{\hbar c \pi^2}{240} \frac{1}{a^4}. \quad (1.3)$$

Como observado por Casimir, o resultado (1.3), que depende exclusivamente da distância entre as placas, permite concluir que as placas experimentam uma força (atrativa) devido à energia de ponto zero do campo eletromagnético.

Historicamente, a energia de ponto zero e as flutuações de vácuo foram predominantemente discutidas considerando apenas o campo eletromagnético, uma vez que os fenômenos e o conhecimento da época estavam centrados sobre essa quantidade física. Entretanto, conforme indica Milonni [10], qualquer campo que existe na natureza possui energia de ponto zero e, conseqüentemente, flutuações (quânticas) de vácuo associadas aos mesmos. Essa é uma energia fundamental associada aos graus de liberdade do campo quantizado e que independe de efeitos térmicos, isto é, persiste mesmo na situação particular (e ideal) de temperatura zero ( $T = 0$ ). Portanto, semelhante ao caso eletromagnético, é possível obter uma energia de Casimir associada às perturbações na energia de ponto zero de um campo escalar – veja, por exemplo, o Capítulo 10 da Ref. [14].

É instrutivo recordar que a concepção da realidade do mundo físico, atualmente aceita, é proveniente de estruturas fundamentais denominadas de campos. Tudo que

observamos, isto é, os fenômenos físicos associados à matéria e suas interações, são consequências da dinâmica destes campos. Nesse sentido, as partículas elementares (ex. elétron, próton, fóton, bósons, etc) são excitações de campos específicos que existem na natureza. As interações também são descritas por campos, através da troca de partículas mediadoras que “carregam” e transmitem a força que observa-se existir entre as partículas. Por exemplo, nessa perspectiva, duas partículas carregadas e separadas interagem por meio da troca de fótons, os quais são as partículas associadas ao campo (quântico) eletromagnético [9].

Tendo em vista que o espaço é preenchido por campos, o conceito moderno de vácuo é totalmente distinto da definição clássica. De acordo com a física clássica, o estado de vácuo para um campo escalar corresponde à solução  $\varphi(x) = 0$ , que na ocasião representa a configuração de mínima energia do sistema [14]. Por outro lado, a teoria quântica sugere que a concepção de um espaço verdadeiramente vazio é inconcebível. De fato, segundo as leis da mecânica quântica, no estado de vácuo, partículas virtuais são criadas e aniquiladas constantemente de forma espontânea. Portanto, o vácuo na verdade corresponde a uma estrutura caótica e em constante agitação. Essa criação e aniquilação de partículas é regulada pela relação de incerteza energia-tempo:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.4)$$

Em termos simples, a relação acima indica que uma partícula com uma energia  $\Delta E$  pode ser espontaneamente criada, mas sua existência está limitada ao intervalo de tempo  $\Delta t \sim \frac{\hbar}{2\Delta E}$  de modo que, instantaneamente, após esse intervalo de tempo esta deixa de existir [15]. Em outras palavras, um par de partículas virtuais (partícula e antipartícula) é criado, cada um com sua energia  $\Delta E$ , mas após o tempo  $\Delta t \sim \frac{\hbar}{2\Delta E}$  este par se aniquila sem deixar qualquer vestígio de sua existência. Contudo, se perturbações externas são realizadas no estado de vácuo é possível constatar a natureza física das suas flutuações quânticas, as quais se revelam através dos fenômenos físicos já mencionados. Vale ressaltar que, o conceito de um espaço vazio é um debate muito antigo e que foi empreendido por muitos filósofos, como Demócrito, Aristóteles, Descartes, além de outros, até a concepção moderna. Na antiguidade haviam pensadores que admitiam como verdadeira a existência de um espaço vazio no universo, como por exemplo Demócrito, e também aqueles que rejeitavam tal concepção, como Aristóteles – veja a Ref. [16] para maiores detalhes.

Além do efeito Casimir e do desvio de Lamb, existem outros fenômenos que estão associados as flutuações quânticas de vácuo – consulte o Capítulo 3 da Ref. [10]. Por questões de objetividade foram mencionados apenas os dois fenômeno já citados, visto que ambos são contemporâneos e comumente indicados na literatura. Contudo, outro fenômeno de vácuo quântico que tem sido investigado nas recentes décadas consiste no assim chamado movimento Browniano Quântico induzido.

Conforme mencionado anteriormente, os campos quânticos sempre flutuam em virtude da energia de ponto zero e flutuações quânticas do vácuo [10, 15]. Portanto, uma partícula pontual situada no espaço “vazio”, sob as perspectivas da mecânica quântica e da teoria quântica de campos, estará sujeita às influências de tais flutuações. Consequentemente, seus observáveis, como posição e momento (ou velocidade), podem adquirir uma contribuição randômica. Logo, tais observáveis tornam-se grandezas estocásticas, passíveis do cálculo de quantidades estatísticas, como o valor esperado e a dispersão, a fim de estimar os efeitos, bem como a amplitude, das contribuições de natureza quântica provenientes do vácuo.

À semelhança com o MBC, caso em que as dispersões da posição e velocidades da partícula Browniana são calculadas, sugere que a situação relatada acima pode servir como um análogo quântico para tal fenômeno. Em resumo, o movimento aleatório que uma partícula pontual adquire em virtude da sua interação com as flutuações de um campo quântico no estado de vácuo, conceitualmente, representa o que define-se como Movimento Browniano Quântico (MBQ) ou, de forma mais sugestiva, Movimento Browniano Quântico induzido (MBQI). É importante destacar que, enquanto no MBC o movimento estocástico da partícula Browniana é proveniente das colisões com as moléculas do fluido com temperatura  $T$ , no MBQI este se deve as flutuações quânticas de vácuo, que atuam como meio circundante e existem independente de efeitos térmicos ( $T = 0$ ).

O MBQI consiste em outro exemplo na lista dos fenômenos de vácuo quântico e nas recentes décadas foi investigado considerando diferentes cenários e aspectos. De fato, pouco tempo atrás o MBQI foi sugerido como um método local e acessível para identificar inomogeneidades globais do espaço [17], além de um possível indicador de orientabilidade espacial [18, 19, 20, 21]. A grosso modo, a ideia é utilizar o MBQI de uma partícula pontual (ou dipolo elétrico) acoplado a um campo eletromagnético no espaço-tempo de Minkowski com seção espacial modificada, configurando diferentes topologias. Assim, a análise do comportamento da dispersão de velocidades da partícula em função do tempo pode servir como um indicador de inomogeneidade e orientabilidade.

Conforme explicado, a ideia elementar do fenômeno consiste em uma partícula pontual no estado de vácuo interagindo com um campo quântico eletromagnético ou escalar, os quais geralmente são considerados na presença de placas ou planos refletores, uma vez que tais elementos excitam os efeitos do vácuo quântico. Por exemplo, as Refs. [22] e [23] analisam o MBQI pelo campo eletromagnético em uma partícula pontual, respectivamente, na presença de uma e duas placas condutoras perfeitamente refletoras. Em ambos os casos as dispersões de velocidades e posição, como funções do tempo, são analisadas. Os efeitos térmicos no cenário de uma placa, desse mesmo modelo, são investigados na Ref. [24]. Utilizando uma abordagem distinta e um sistema conceitualmente análogo, e sem placas, os efeitos térmicos também foram discutidos na Ref. [25].

Muitos aspectos desses sistemas foram analisados, a fim de trazer realidade física ao problema, como por exemplo, a natureza quântica da partícula como pacote de onda [26] e os efeitos da implementação dos mecanismo de *switching* ou *switching functions* (funções de troca) [27, 28, 29]. Basicamente, esses mecanismos dizem respeito sobre a rapidez do processo de medida da dispersão de velocidades ou, de maneira equivalente, o tempo de transição entre os estados de vácuo sem planos e na presença de planos.

Quanto ao MBQI por campo escalar, as pesquisas seguem uma linha de investigações semelhante ao caso eletromagnético. Por exemplo, na Ref. [30] foi investigado o MBQI de uma partícula pontual interagindo com um campo escalar sem massa na presença de um plano pontual perfeitamente refletor, enquanto que na Ref. [31] são estudados os efeitos das funções *switching* em um modelo tridimensional no espaço-tempo de Minkowski.

Na Ref. [32] um modelo mais geral foi considerado, onde foi investigado o MBQI de uma partícula acoplada a um campo escalar massivo em  $(D + 1)$  dimensões na presença de um plano refletor juntamente com as funções *switching*. Além disso, em complemento, na Ref. [33] foram examinados os efeitos térmicos do MBQI devido a um campo escalar massivo em  $(D + 1)$  dimensões com um plano perfeitamente refletor e funções *switching*. É importante destacar que, recentemente, um aspecto diferente foi investigado na Ref. [34], onde os autores estudaram o MBQI unidimensional de uma partícula pontual acoplada com um campo escalar sem massa na presença de um plano parcialmente refletor.

A partir dos breves relatos indicados acima, observa-se que as pesquisas sobre o MBQI por campos eletromagnético e escalar possuem um paralelo de modo que muitos dos elementos mencionados foram investigados em ambos os casos. Entretanto, no caso do campo escalar, a admissão de dois planos paralelos sob diferentes condições de contorno, além de Dirichlet, até o nosso conhecimento, ainda não foi explorado. Nesse sentido, no Capítulo 5 oferecemos um contribuição que visa preencher esse paralelo.

O presente trabalho foi elaborado buscando oferecer um texto técnico, objetivo e autocontido quanto ao ferramental matemático e aos resultados apresentados. Do ponto de vista conceitual, as discussões desenvolvidas no Capítulo 2, formalmente em nível de revisão, estão divididas em duas partes principais: (i) espaço-tempo plano, Seções 2.1, 2.2 e 2.3; e (ii) espaço-tempo curvo, Seção 2.4. A fim de manter a organização, ambas as discussões são realizadas separadamente.

Conforme será visto, muitas das estruturas matemáticas do espaço-tempo curvo são análogas as expressões particulares do espaço-tempo plano, de modo que, frequentemente, são obtidas por meio de comparação ou substituição do tensor métrico de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  por um tensor métrico dependente de um sistema de coordenadas arbitrário  $g_{\mu\nu}(x)$ . Entretanto, vale ressaltar que, essa aparente e simples substituição provoca complexas modificações nas equações de movimento do sistema e na teoria de quantização do campo.

Essencialmente, as Seções 2.1, 2.2 e 2.3 compõem uma revisão sobre os conceitos elementares da mecânica Lagrangiana e Hamiltoniana de sistemas pontuais (discretos), cuja extensão para o tratamento de sistemas contínuos nos conduz naturalmente ao conceito de campo escalar. Nesse sentido, a fim de ganhar familiaridade com os métodos revisados, além de antecipar alguns dos modelos estudados ao longo do trabalho, apresentamos algumas teorias escalares e suas correspondentes equações de movimento, isto é, equações de Klein-Gordon. Em seguida, é discutido sumariamente o processo de quantização do campo escalar no espaço-tempo plano, além da condição de normalização para as soluções da equação de Klein-Gordon. Por fim, na Seção 2.4, estendemos todas as construções matemáticas (previamente apresentadas) e suas ideias subjacentes para o espaço-tempo curvo, uma vez que serão utilizadas para o estudo do MBQI em um cenário de espaço-tempo curvo (Capítulo 6).

No Capítulo 3 todas as funções de Wightman de frequência positiva utilizadas no decorrer do trabalho são detalhadamente calculadas para o campo escalar sem massa. Embora seu conteúdo seja predominantemente técnico, essa parte do trabalho tem como justificativa o fato de que a função de Wightman é uma quantidade indispensável para os nossos estudos do MBQI. Além disso, realizar o cálculo da função de Wightman em meio as discussões do MBQI, possivelmente, provocaria uma quebra de raciocínio e compreensão dos desenvolvimentos. Logo, destinar uma parte específica para estas discussões torna o texto mais fluído e contínuo, além de nos permitir redigir um texto detalhado, instrutivo e autocontido. Destaca-se que, na Seção 3.3.5 propomos uma construção muito útil para a função de Wightman, que nos permitirá estudar o MBQI de uma partícula pontual interagindo com um campo escalar sem massa confinado unidimensionalmente por dois planos perfeitamente refletores e sob diferentes configurações de condições de contorno, que até o nosso conhecimento ainda não haviam sido exploradas na literatura.

De maneira geral, os Capítulos 4, 5 e 6 compõem as partes originais desta tese, nos quais descrevemos em detalhes os resultados referentes as nossas humildes contribuições para a literatura sobre o tema do MBQI por campos escalares, os quais foram organizados e divulgados nas Refs. [35], [36] e [37].

Motivados pela capacidade dos modelos análogos de gravidade [38, 39], construídos com sistemas de matéria condensada, em simular fenômenos astrofísicos, como por exemplo a radiação Hawking [40], expansão cosmológica [41] e espaços com curvaturas não triviais [42, 43, 44], no Capítulo 4 estudamos o MBQI de uma partícula em um Condensado de Bose-Einstein com desclinação e expansão assintótica plana. Esse sistema corresponde ao análogo do modelo de universo de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) com a presença de uma corda cósmica. A proposta de estudo para o MBQI no contexto dos modelos análogos de gravidade não é uma ideia nova, e já foi explorada teoricamente por Bessa e colaboradores [45], admitindo apenas os efeitos da expansão simulada e

a presença de planos refletores sob condições de Dirichlet. Contudo, no Capítulo 4, investigamos um sistema similar, mas admitindo na ocasião a presença da desclinação no meio. Será visto que a implementação de tal elemento acarretará em expressões distintas para as componentes da dispersão de velocidades da partícula, indicando uma quebra das propriedades de isotropia e homogeneidade, diferente do que foi obtido na Ref. [45].

De maneira geral, no Capítulo 5 investigamos o MBQI de uma partícula acoplada com um campo escalar confinado unidimensionalmente por dois mecanismos distintos: (i) dois planos perfeitamente refletores e (ii) compactificação. A grosso modo, essas duas formas de confinamento correspondem a análise de 6 possíveis configurações distintas de condições de contorno, especificamente, 4 configurações no caso dos planos paralelos e 2 particulares no caso da compactificação.

Realizando uma busca na literatura pertinente, percebemos que existe um paralelo entre as investigações do MBQI por campos escalares e eletromagnético, bem como o fato de que apenas no caso do campo eletromagnético as influências de duas placas, sob condições de Dirichlet, foram analisadas. Então, na Seção 5.3, visando estreitar e complementar tal paralelo na literatura, estudamos o MBQI de uma partícula pontual no espaço-tempo de Minkowski devido as flutuações de um campo escalar sem massa confinado por dois planos paralelos, sob a influência das condições de Dirichlet, Neumann e Mistas (Dirichlet-Neumann e Neumann-Dirichlet). Essas são as 4 configurações indicadas no parágrafo anterior. O confinamento realizado pelos planos fornece uma escala natural de comprimento para o sistema, a qual corresponde a distância de separação  $a$  entre os planos, que permite estimar todas as quantidades físicas relevantes em unidades de  $a$ . Constata-se que, o estudo realizado se mostra consistente, visto que, nos limites apropriados, resultados da literatura são recuperados.

No caso do mecanismo de confinamento por compactificação, Seção 5.4, também implementamos uma condição de quasiperiodicidade por meio de uma fase  $\beta$ , a qual foi introduzida visando generalizar o estudo, uma vez que nos permite interpolar continuamente os resultados do MBQI entre as situações particulares do campo escalar sob condições periódicas e antiperiódicas. Esses casos particulares, periódico e antiperiódico, representam as 2 configurações que mencionamos anteriormente. Tal condição de contorno, até o nosso conhecimento, ainda não havia sido explorada no contexto do MBQI. Conforme será observado na Seção 5.4, os resultados possuem uma forte dependência com o parâmetro  $\beta$ , que os torna negativos ou positivos dependendo dos valores que o mesmo pode assumir no intervalo  $0 \leq \beta < 1$ . Além disso, semelhante ao caso das placas, o comprimento da compactificação fornece uma escala natural para o sistema.

Concluindo as investigações, no Capítulo 6 consideramos um espaço-tempo FLRW estático com curvatura positiva, o qual define o universo de Einstein. No Capítulo 4 a simetria conforme nos permitiu transportar os cálculos para o espaço-tempo localmente

plano, sem expansão e com desclinação (corda cósmica). Entretanto, embora o universo de Einstein suporte a simetria conforme, este não é plano e nem mesmo está conformemente relacionado a um espaço-tempo plano. Portanto, no Capítulo 6, conduzimos um estudo do MBQI no cenário de um espaço-tempo curvo.

Conforme indicado por Dowker e Critchley [46], o universo de Einstein é a forma mais simples de espaço-tempo curvo que se origina por modificações na métrica do espaço-tempo de Minkowski. De fato, como será visto na Seção 3.4.2, a função de Wightman para o campo escalar no universo de Einstein possui uma grande semelhança com o que encontramos no espaço-tempo plano de Minkowski. Logo, tendo em vista as dificuldades matemáticas emergentes de um espaço-tempo curvo arbitrário, o universo de Einstein consiste em um ótimo modelo para desenvolver uma análise inicial do problema. Um resultado digno de nota é que, nesse espaço-tempo, as componentes das dispersões para os momentos físicos e comprimentos físicos são iguais, o que é interpretado como uma consequência das propriedades de homogeneidade e isotropia que o universo de Einstein possui [47, 48], uma vez que, em essência, corresponde a um caso particular do modelo FLRW. Semelhante ao que acontece no Capítulo 5, o raio do universo (compacto) de Einstein,  $a_0$ , surge como uma escala natural do sistema que, novamente, servirá de base para comparação e escrita de algumas das quantidades físicas.

Finalmente, no Capítulo 7, apresentamos um resumo sobre cada estudo desenvolvido ao longo desta tese (nos Capítulos 4, 5 e 6) juntamente com os principais resultados obtidos, além de possíveis perspectivas que, a princípio, em um futuro próximo, podem ser examinadas.

## 2 Teoria quântica dos campos escalares

Esse capítulo consiste em uma breve revisão das relações fundamentais da Teoria Clássica de Campos que são utilizadas no processo de quantização dos campos, algo que nos conduz naturalmente ao que chamamos de Teoria Quântica de Campos (TQC). Por questões de objetividade, nossas discussões estarão concentradas sobre campos escalares, embora alguns pontos da discussão sejam gerais e aplicáveis a outros campos, por exemplo, campos escalares complexos. Além disso, destaca-se que, não é nosso objetivo realizar uma revisão minuciosa sobre todo o formalismo da TQC, mas apresentar de uma forma técnica e prática as relações essenciais que utilizaremos ao longo desse trabalho, comentando qualitativamente os pontos principais, afim de tornar o texto moderadamente autocontido. Mais detalhes podem ser obtidos nas referências citadas ao longo do texto, as quais nos baseamos para a construção do texto.

### 2.1 Revisão sobre a mecânica clássica de sistemas pontuais e o conceito de campos clássicos

Na Mecânica Clássica a descrição de um sistema pontual ou de partícula, em especial suas equações de movimento, pode ser realizada utilizando três formalismos: o (i) newtoniano; (ii) lagrangiano e (iii) hamiltoniano. Todos esses equivalentes entre si, quanto as previsões do comportamento dos sistemas em função do tempo, como deve ser. A seguir, apresentaremos de forma objetiva cada um dos formalismos listados. Mais detalhes sobre os temas (ii) e (iii) podem ser encontrados, por exemplo, na Ref. [49], sob a qual nos baseamos fundamentalmente, assim como na Ref. [50].

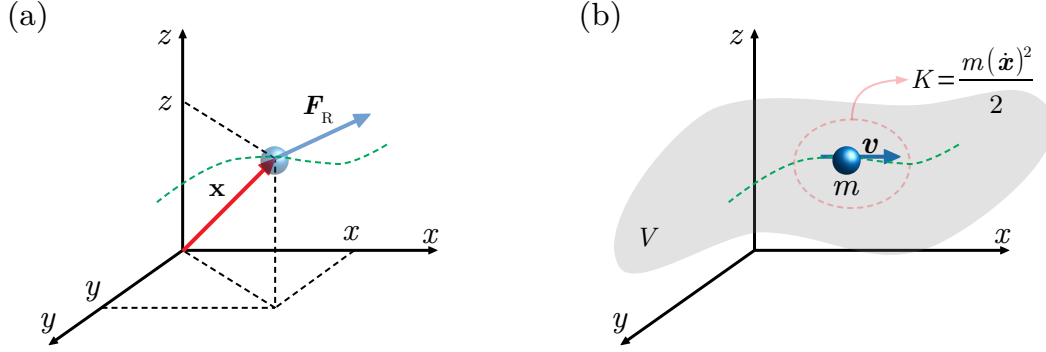
A mecânica newtoniana é baseada no conceito de força e para um sistema pontual qualquer, digamos uma partícula de massa  $m$ , declara que o seu comportamento em função do tempo é descrito pela equação

$$\mathbf{F}_R = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{F}_R$  representa a força resultante que atua sobre o corpo e  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  sua posição no espaço em função do tempo. Veja a Figura 1a para uma ilustração. A Eq. (2.1) é conhecida como segunda lei de Newton. Uma característica marcante da abordagem via o conceito de força é o caráter vetorial dessa quantidade. Aqui convencionamos que quantidades escritas em negrito representam vetores, ou seja,  $\mathbf{F}_R \equiv \vec{F}_R$ ,  $\mathbf{p} = \vec{p}$  e  $\mathbf{x} = \vec{x}$ .

De maneira alternativa, e equivalente, os formalismos lagrangiano e hamiltoniano são baseados em uma descrição energética do problema. A descrição consiste na espe-

Figura 1 – Exemplo de um sistema mecânico pontual.



Legenda: Uma partícula pontual de massa  $m$  viaja pelo espaço. Em (a) temos uma visão newtoniana desse sistema enquanto que (b) apresenta a visão energética dos formalismos lagrangiano e hamiltoniano. Fonte: Produzido pelo autor, 2024.

cificação das funções escalares  $K$  e  $V$ , que representam as energias cinética e potencial, respectivamente, associadas ao sistema em estudo.

Formalmente, segundo a abordagem lagrangiana o sistema físico em estudo é descrito por uma função escalar

$$L(q, \dot{q}, t), \quad (2.2)$$

chamada lagrangiana, a qual depende do tempo  $t$  e dos parâmetros

$$q = q(t) = \{q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots, q_N(t)\} \quad (2.3)$$

e

$$\dot{q} = \dot{q}(t) = \{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dot{q}_3(t), \dots, \dot{q}_N(t)\}, \quad (2.4)$$

denominados de coordenadas generalizadas,  $q$ , e velocidades generalizadas,  $\dot{q}$ . O ponto sobre as quantidades representa uma diferenciação com respeito ao tempo e o índice  $N$  corresponde ao número de coordenadas e velocidades generalizadas associadas à descrição do sistema. O termo “generalizado” é usado porque o parâmetro  $q$  pode representar tanto coordenadas de posição como ângulos. A função  $L$  em (2.2) também é escrita em termos de  $K$  e  $V$  conforme a relação [49, 50]

$$L = K - V. \quad (2.5)$$

As equações de movimento do sistema são extraídas de  $L$  através da minimização da quantidade física chamada de ação, representada pela letra  $S$  e definida como a integral de  $L$  entre dois instantes de tempo sucessivos, a saber,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L, \quad (2.6)$$

com  $t_f > t_i$ . Uma vez que  $L$  tem unidade de energia, a ação  $S$  possui unidade de energia vezes tempo.

A minimização da ação, também referida como princípio de Hamilton ou da mínima ação, diz que a variação da ação de um sistema em movimento entre os instantes  $t_i$  e  $t_f$  é mínima [49, 50, 51]. Matematicamente, essa condição pode ser expressa como

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \delta L = 0. \quad (2.7)$$

É possível mostrar que a variação da ação  $S$  acima fornece o conjunto de relações fundamentais

$$\frac{dL}{dq_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{q}_i} \right) = 0, \quad (2.8)$$

conhecidas como equações de Euler-Lagrange. Não vamos derivar a expressão (2.8), porém após a introdução do conceito de campos, faremos essa dedução no contexto de sistemas contínuos, que segue os mesmos princípios.

Especificada a lagrangiana  $L$ , que representa a configuração energética do sistema, a partir da Eq. (2.8) encontramos as equações de movimento que governam a evolução temporal do sistema. Por exemplo, a lagrangiana para uma partícula de massa  $m$  viajando com velocidade  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  na presença de um potencial arbitrário  $V$  [49], Figura 1b, é tal que

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - V(\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

O primeiro termo consiste na energia cinética da partícula devido ao seu estado de movimento e  $V(x)$  um termo de energia potencial. Por conveniência temos admitido a equivalência de rótulo  $q \equiv \mathbf{x}$  a fim de recuperar a semelhança entre resultados. Essa equação, exceto pelo termo de potencial, será considerada em investigações futuras, no Capítulo 5, quando estudarmos uma partícula pontual acoplada com um campo escalar.

Substituindo (2.9) em (2.8), obtemos, para cada coordenada,

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\nabla_i V, \quad (2.10)$$

que é uma possível representação da 2ª lei de Newton (2.1) no caso de forças conservativas.

De maneira alternativa, também podemos descrever os sistemas mecânicos através da função  $H(p, q, t)$ , denominada de hamiltoniana. Essa função,  $H$ , depende do tempo  $t$ , das coordenadas generalizadas  $q$  e do assim chamado momento canônico ou conjugado  $p$ , definido por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.11)$$

A hamiltoniana  $H$  está relacionada a lagrangiana  $L$  por meio da relação [49]

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t). \quad (2.12)$$

A soma é realizada sobre todas as  $N$  coordenadas  $q_i$  e seus momentos conjugados  $p_i$  conforme a definição (2.11). As equações de movimento para o sistema são obtidas mediante o par de equações

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.13)$$

e

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (2.14)$$

que são conhecidas como as equações de Hamilton. A fim de checar a consistência entre os formalismos, a partir das Eqs. (2.9), (2.11) e (2.12), com  $i = 1, 2, 3$  e  $q = \{q_1, q_2, q_3\} = \{x, y, z\}$ , encontramos que

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(q). \quad (2.15)$$

Logo, para as equações de movimento do sistema, utilizando as relações (2.13) e (2.14), obtemos

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m} \quad (2.16)$$

e

$$\dot{p}_i = -\nabla_i V. \quad (2.17)$$

Na Eq. (2.15) usamos (2.11) para substituir  $\dot{q}_i$  por  $p_i$ . Observa-se que a Eq. (2.16) consiste na definição trivial do momento e (2.17) recupera as expressões destacadas no formalismo lagrangiano, Eq. (2.9), e newtoniano, Eq. (2.1). A mudança entre os formalismos lagrangiano e hamiltoniano, para a descrição de um sistema mecânico, pode ser vista como uma transformada de Legendre entre as variáveis conjugadas  $p_i$  e  $\dot{q}_i$ . Para uma discussão detalhada sobre esse aspecto veja, por exemplo, as Refs. [50, p. 334-343] e [51, p. 212-217].

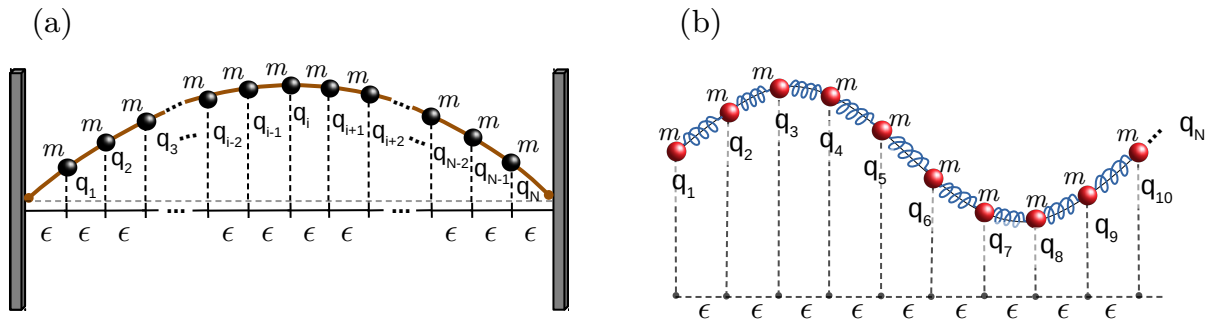
As ideias inerentes de cada formalismo que temos introduzido são válidas tanto para sistemas de uma única partícula – Figura 1 – como para aqueles compostos por um conjunto de  $N$  partículas, caso em que são necessárias  $q_N$  coordenadas generalizadas para sua descrição segundo o formalismo lagrangiano. Se a abordagem hamiltoniana é utilizada, além das  $q_N$  coordenadas, também são requeridos  $p_N$  momentos para definir o sistema físico [49].

Para uma situação cuja descrição do sistema envolve um número muito grande de coordenadas  $q_i(t)$ , torna-se conveniente para descrevê-lo utilizarmos objetos matemáticos conhecidos como campos. O típico e geral conceito de um campo consiste em uma função com valores bem definidos a cada ponto  $\mathbf{x}$  do espaço e que representa sistemas contínuos, ou seja, com infinitos graus de liberdade [51]. O número de graus de liberdade, para teorias

sem vínculos, corresponde ao próprio número de coordenadas necessárias para especificar a configuração de um sistema.

A corda vibrante é um claro exemplo de sistema contínuo, que pode ser visualizada como o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  de um conjunto de massas pontuais igualmente espaçadas por uma distância  $\epsilon$  – veja a Ref. [51, p. 319-323]. Também podemos citar um conjunto de osciladores idênticos acoplados, cuja distância de separação  $\epsilon$  tende a zero – confira a Ref. [52, p. 21-22]. Na Figura 2 dispomos uma ilustração de ambos os sistemas mencionados.

Figura 2 – Exemplos de sistemas pontuais descritos por campos no limite do contínuo.



Legenda: Em ambos os casos, o limite contínuo  $\epsilon \rightarrow 0$  acontece com a densidade linear  $m/\epsilon$  fixa. Fonte: As figuras (a) e (b) foram reproduzidas e modificadas, nessa ordem, das Refs. [51, p. 321] e [52, p. 21].

Vamos considerar uma rede quadrada, na qual cada ponto (sítio) possui uma coordenada generalizada  $q_i(t)$  e está equidistante de seus vizinhos por um comprimento fixo  $\epsilon$  – veja a Figura 3a. Se o espaçamento  $\epsilon$  tende a zero, o índice discreto  $i$ , localizando cada sítio, torna-se um índice contínuo referente a própria posição  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$  de cada ponto do sistema, descrito por  $q_i(t)$  em um instante de tempo fixo  $t$  qualquer. Além disso, a rede discreta torna-se uma superfície contínua. Matematicamente, no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos a equivalência [53]

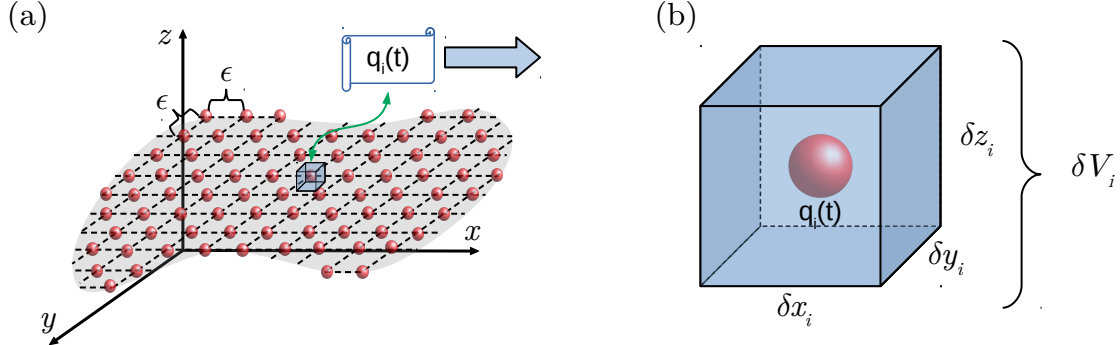
$$q_i(t) \rightarrow q_i(t) \equiv \varphi(\mathbf{x}_i, t) \quad (2.18)$$

e

$$\dot{q}_i(t) \rightarrow \dot{q}_i(t) \equiv \dot{\varphi}(\mathbf{x}_i, t). \quad (2.19)$$

A notação  $\mathbf{x}_i$  indica que cada sítio  $i$  está localizado na posição  $\mathbf{x}$ , ou seja, possui coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$ . O ponto sobre as quantidades, como sabemos, representa uma derivada temporal da variável. A função  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  corresponde ao que chamamos de campo e para cada conjunto de pontos  $(\mathbf{x}_i, t)$  possui um valor bem definido. Essa abordagem que apresentaremos em seguida para a transição de um sistema discreto para um contínuo é baseada na Ref. [53].

Figura 3 – Representação discreta de uma superfície contínua.



Legenda: A superfície em (a) pode ser discretizada em  $i$  células com volumes iguais  $\delta V_i = \delta x_i \delta y_i \delta z_i$  centrados sobre  $q_i(t)$ , como exposto em (b). Temos que  $\{q_i\} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ , com  $q_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$  etc. Fonte: produzido pelo autor baseado na Ref. [53, p. 28].

Se a cada sítio da rede estão associadas as quantidades  $L_i$  e  $H_i$ , a lagrangiana e hamiltoniana totais do sistema serão dadas através das somas

$$L = \sum_i L_i \quad (2.20)$$

e

$$H = \sum_i H_i. \quad (2.21)$$

Em virtude do limite infinitesimal  $\epsilon \rightarrow 0$ , é conveniente descrever cada sítio da rede centrando cada ponto em células com volumes iguais  $\delta V_i$ , conforme a Figura 3b. Então, introduzindo os conceitos de densidades de lagrangiana

$$\mathcal{L}_i = \frac{L_i}{\delta V_i} \quad (2.22)$$

e hamiltoniana

$$\mathcal{H}_i = \frac{H_i}{\delta V_i} \quad (2.23)$$

em cada sítio, as quantidades totais referentes ao sistema por completo, Eqs. (2.20) e (2.21), podem ser escritas como

$$L = \sum_i \delta V_i \mathcal{L}_i \quad (2.24)$$

e

$$H = \sum_i \delta V_i \mathcal{H}_i. \quad (2.25)$$

Uma vez que os volumes  $\delta V_i$  são iguais e as quantidades  $L_i$  e  $H_i$  dependem das coordenadas  $q_i$ , consequentemente as densidades  $\mathcal{L}_i$  e  $\mathcal{H}_i$  podem variar a cada sítio e, por essa razão, temos os índices nas expressões (2.22) e (2.23).

No limite  $\delta V_i \rightarrow 0$ , percebe-se que

$$\lim_{\delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \delta V_i \equiv \int d^3 \mathbf{x}. \quad (2.26)$$

Logo, para as Eqs. (2.24) e (2.25) encontramos que

$$L = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \quad (2.27)$$

e

$$H = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H}(\varphi, \pi), \quad (2.28)$$

com a densidade de hamiltoniana  $\mathcal{H}$  dada por [53]

$$\mathcal{H}(x) = \pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi), \quad (2.29)$$

onde definimos a versão contínua do momento canônico, Eq. (2.11), por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)}. \quad (2.30)$$

Nas expressões acima temos desprezado o subscrito  $i$  em virtude do limite  $\delta V_i \rightarrow 0$  (e  $\epsilon \rightarrow 0$ ), pois nesse regime  $\mathbf{x}_i$  corresponde a própria posição  $\mathbf{x}$ . Os intervalos das integrais em (2.27) e (2.28) se estendem sobre todo o espaço, para o sistema em um instante de tempo  $t$  [53]. Se houver mais de um campo no sistema além de  $\varphi$ , digamos a presença dos campos  $\psi$  e  $\phi$  no interior de cada célula, na Eq. (2.29) devemos somar todos os termos de momentos conforme a versão discreta (2.12), isto é, devemos adicionar os termos  $\pi_\psi \dot{\psi}$  e  $\pi_\phi \dot{\phi}$  com  $\pi_\psi = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\psi}$  e  $\pi_\phi = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}$ .

No estabelecimento das Eqs. (2.27), (2.28), (2.29) e (2.30) utilizamos a notação quadrvetorial

$$x^\mu = (x^0, x^i) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}) \quad (2.31)$$

e

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_i) = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (2.32)$$

Por questões de generalidade, ao estabelecermos a Eq. (2.27) assumiu-se a possibilidade de que a densidade de lagrangiana pode depender das derivadas com respeito ao tempo e espaço. Formalmente,  $x^0 = ct$  e  $\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{c \partial t}$ , onde  $c$  corresponde a constante da velocidade da luz no vácuo. Entretanto, exceto quando necessário, utilizaremos o sistema de unidades naturais, cuja convenção estabelece que  $c = \hbar = 1$ .

A teoria quântica dos campos é fundamentalmente descrita pelas densidades de lagrangiana  $\mathcal{L}$  e hamiltoniana  $\mathcal{H}$ . Para alguns propósitos uma quantidade é mais

conveniente ao invés da outra. Entretanto, conforme mostram as relações (2.29) e (2.30), ambas estão relacionadas e se obtivermos uma podemos encontrar a outra. Aqui, por uma questão de conveniência com as quantidades estudadas e os métodos utilizados, estaremos concentrados sobre a formulação lagrangiana dos sistemas. A seguir, antes de discutirmos o processo de quantização do campo  $\varphi(x)$ , vamos introduzir um pouco de formalismo acerca da quantidade  $\mathcal{L}$  ainda no nível clássico, mas acentuando detalhes inerentes à quantização descrita posteriormente.

Para finalizar essa seção gostaríamos de fazer um breve esclarecimento sobre a terminologia que será usada e que é comum encontrar em textos versando sobre os temas aqui discutidos. Conforme observado, Eq. (2.5),  $L$  tem unidade de energia, enquanto que  $\mathcal{L}$ , Eqs. (2.22) e (2.27), possui unidade de densidade de energia. Por esse motivo  $\mathcal{L}$  é chamada de densidade de lagrangiana. Contudo, é comum, para simplificar a escrita e evitar a repetição, rotular  $\mathcal{L}$  como a própria lagrangiana. Outro detalhe é que em alguns contextos utiliza-se a terminologia “teoria” para se referir a lagrangiana. Essa linguagem ocorre em virtude de  $\mathcal{L}$  conter toda a informação de um sistema, ou seja, toda a teoria capaz de descrever o seu comportamento.

## 2.2 Teoria clássica de campos, equação de Klein-Gordon e quantização do campo escalar

Recapitulando a discussão anterior, vimos que no caso de sistemas contínuos a descrição é feita em termos de campos, que são funções matemáticas dependentes das coordenadas do espaço-tempo (posição e tempo). A versão contínua da lagrangiana  $L$  é chamada de densidade de lagrangiana, a qual geralmente representamos pela letra caligráfica  $\mathcal{L}$ . Anteriormente observou-se que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \quad (2.33)$$

Confira a Eq. (2.27). Embora a expressão acima não seja o caso mais geral, é bem conhecido que apenas uma dependência explícita de  $\mathcal{L}$  com respeito ao campo e sua derivada é suficiente para descrever grande parte dos problemas físicos [53]. De fato, essa estrutura para a densidade de lagrangiana nos conduz a equações diferenciais de segunda ordem para a dinâmica dos campos. Esse fato motiva a sua escolha, uma vez que, equações diferenciais de segunda ordem são típicas da maioria dos problemas físicos (ex. 2ª lei de Newton, oscilador harmônico, equação de propagação das ondas, equação de Poisson, equação de Laplace, etc.). É importante destacar que, na Eq. (2.33)  $\mathcal{L}$  não depende explicitamente das coordenadas  $x^\mu$ , todavia possui uma dependência implícita através do campo, pois  $\varphi = \varphi(x)$ . A dependência do campo com as coordenadas será omitida durante as manipulações a fim de simplificar a notação e escrita das expressões.

Considerando as Eqs. (2.6) e (2.33) podemos escrever a ação  $S$  em termos da densidade de lagrangiana, obtendo como resultado

$$\begin{aligned} S &= \int dt L = \int dt \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \\ S &= \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi), \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde identificamos o elemento de quadrivolume  $d^4x = dt d^3\mathbf{x}$ . Quanto aos limites de integração na Eq. (2.34), para a variável  $t$  consideram-se dois instantes de tempo arbitrários,  $t_i$  e  $t_f$  com  $t_i < t_f$ . Para a integral no espaço considera-se todo o intervalo compreendido pelas coordenadas do elemento de volume  $d^3\mathbf{x}$ .

Ainda que a forma específica da função  $\mathcal{L}$  na Eq. (2.34) não tenha sido especificada, conhecendo sua dependência funcional, podemos encontrar um resultado geral e bem conhecido da Teoria Clássica de Campos, a saber, a equação de Euler-Lagrange. A variação da ação (2.34) nos fornece a expressão

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] \delta(\partial_\mu\varphi) \right\}. \quad (2.35)$$

Algumas manipulações matemáticas no último termo da Eq. (2.35) podem ser realizadas, nos permitindo reescrevê-lo de um forma mais conveniente e de particular interesse. O primeiro passo é observar que as operações da variação funcional e derivada parcial atuando sobre o campo comutam, isto é,  $\delta(\partial_\mu\varphi) = \partial_\mu(\delta\varphi)$ . Em seguida, utilizando a regra da cadeia, podemos escrever

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] \partial_\mu(\delta\varphi) = \partial_\mu \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] (\delta\varphi) \right\} - \left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] \right\} (\delta\varphi). \quad (2.36)$$

Assim, diante das observações anteriores, encontramos que

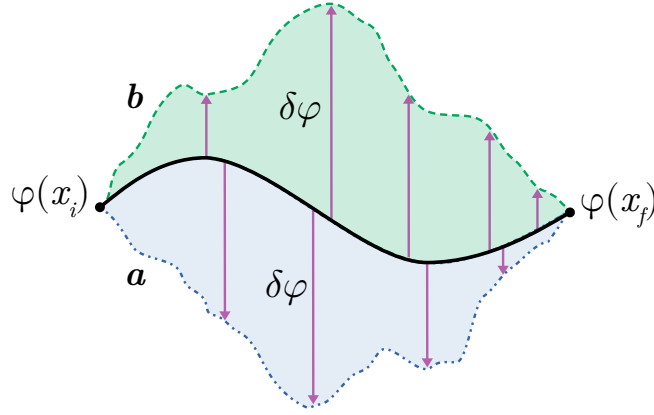
$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] \right\} (\delta\varphi) + \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] (\delta\varphi) \right\} \Big|_{x_i}^{x_f}. \quad (2.37)$$

Observando o lado direito da equação acima, nota-se que as manipulações realizadas anteriormente nos permitiram evidenciar a variação do campo  $\delta\varphi$  em todos os membros do integrando, além de gerar um termo de superfície (último termo da expressão).

Uma vez que a operação  $\delta\varphi$  representa uma variação no próprio campo escalar, em outras palavras, uma modificação na estrutura da função  $\varphi$  para um ponto fixo  $x$ , nota-se que o último termo de (2.37) é nulo, pois nos extremos, isto é, nos pontos inicial e final, a variação do campo é nula – veja a Figura 4 para uma ilustração. Portanto,

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] \right\} (\delta\varphi). \quad (2.38)$$

Figura 4 – Ilustração do efeito que a operação  $\delta\varphi$  produz sobre o comportamento do campo escalar  $\varphi(x)$ .



Legenda: Na figura,  $a$  e  $b$  exemplificam duas variações no comportamento da função escalar  $\varphi(x)$ , cuja amplitude da variação  $\delta\varphi(x)$  muda ponto a ponto, exceto nos extremos  $\varphi(x_i)$  e  $\varphi(x_f)$ , onde  $x_i$  e  $x_f$  demarcam os pontos inicial e final, respectivamente. Fonte: produzido pelo autor, 2024.

A Eq. (2.38) representa a variação da ação construída a partir da densidade de lagrangiana (2.33). Conforme visto, o princípio de Hamilton, Eq. (2.7), nos fornece naturalmente as equações de movimento que governam o comportamento de um sistema. De acordo com esse princípio, a extremização da ação deve ser tal que  $\delta S = 0$ . Com isso em mente, observando a Eq. (2.38) percebe-se que  $\delta\varphi$  consiste em uma variação arbitrária, que pode assumir qualquer valor. Portanto, para que  $\delta S = 0$ , somos levados a conclusão de que todo o termo entre chaves deve ser igual a zero. Assim, encontramos que [51, 52, 53, 54],

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] = 0. \quad (2.39)$$

A equação acima é um resultado geral, válido para qualquer densidade de lagrangiana que depende do campo e sua primeira derivada, que foram as únicas considerações admitidas durante a dedução – confira as Eqs. (2.33) e (2.34). A Eq. (2.39), assim como sua dedução, corresponde à versão contínua da Eq. (2.8). Como sabemos, essa expressão é conhecida como equação de Euler-Lagrange e consiste em uma relação bem conhecida dentro dos formalismos da Mecânica Lagrangiana e da Teoria Clássica de Campos.

Em termos práticos, dada uma função  $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ , que representa um sistema físico, que por sua vez é descrito por um campo escalar real  $\varphi(x)$ , utilizando a Eq. (2.39), podemos obter as equações de movimento para o campo  $\varphi(x)$  simplesmente realizando as derivadas convenientes de  $\mathcal{L}$ . Uma vez obtidas as equações diferenciais governando a dinâmica do campo e suas soluções, podemos prosseguir com o processo de quantização do campo, que segue uma estrutura bem definida.

Diante do nosso interesse em sistemas descritos por campos escalares reais, antes de discutirmos a quantização dos campos, é instrutivo apresentarmos brevemente alguns exemplos, a fim de ganhar experiência com os conceitos introduzidos, bem como adiantar alguns dos elementos que serão utilizados futuramente nesse trabalho. Por simplicidade, vamos realizar as discussões considerando um espaço-tempo plano ou de Minkowski, isto é, vamos negligenciar os possíveis efeitos da curvatura do espaço (gravidade). A generalização para o espaço-tempo curvo, no qual incluímos os efeitos da gravidade, é deixada para um momento posterior desse trabalho. Contudo, é importante frisar que as discussões realizadas no espaço-tempo plano tornarão a generalização para o espaço-tempo curvo mais natural e compreensiva, uma vez que muitas das modificações são diretas e partem dos resultados referentes ao espaço-tempo plano.

A densidade de lagrangiana mais geral possível para uma teoria descrita por um campo escalar real  $\varphi(x)$  no espaço de Minkowski tem a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \mathcal{U}(\varphi). \quad (2.40)$$

O primeiro termo no lado direito da equação acima é identificado como a parte cinética do campo escalar  $\varphi(x)$ , enquanto que o segundo membro,  $\mathcal{U}(\varphi)$ , representa, de forma genérica, termos devido a presença de potenciais, que comumente dependem apenas do campo. O termo cinético diz respeito sobre a propagação do campo pelo espaço, enquanto que o potencial, por sua vez, representa os diferentes tipos de modificações energéticas que podem alterar a propagação do campo, como por exemplo, efeitos de auto-interação e interações internas ou externas. É instrutivo recordar que, a quantidade  $\mathcal{L}$  consiste em uma densidade de energia, consequentemente podemos dizer que  $\mathcal{U}$  corresponde a uma densidade de energia potencial.

Substituindo a Eq. (2.40) nas equações de Euler-Lagrange (2.39), encontramos que o campo  $\varphi(x)$  satisfaz a equação de movimento

$$\square \varphi(x) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi}, \quad (2.41)$$

onde o objeto matemático  $\square$  é denominado de operador caixa (“box”) ou, formalmente, operador d’Alembertiano no espaço-tempo plano, o qual é dado pela expressão

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2}, -\nabla^2 \right). \quad (2.42)$$

Nas expressões acima  $\eta^{\mu\nu}$  corresponde a representação contravariante para as componentes do tensor métrico covariante  $\eta_{\mu\nu}$  do espaço-tempo de Minkowski, cuja representação matricial é

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Dizemos que a assinatura do tensor métrico  $\eta_{\mu\nu}$  é negativa com a notação compacta  $(+ - - -)$ , refletindo os sinais da diagonal principal. Também, é possível utilizarmos uma assinatura positiva, de modo que os sinais da diagonal em (2.43) são invertidos, isto é,  $(- + + +)$ . Ambas as assinaturas mencionadas satisfazem a propriedade fundamental

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = I, \quad (2.44)$$

com  $I$  no lado direito representando uma matriz identidade  $4 \times 4$ , em consequência de  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . Note que (2.42) segue imediatamente de (2.32) e (2.43).

Conforme discutido acima, a estrutura matemática que o potencial  $\mathcal{U}(\varphi)$  pode assumir define diferentes teorias, ao passo que admite efeitos distintos, podendo tornar a descrição do sistema físico cada vez mais realístico. Por exemplo, se o potencial  $\mathcal{U}(\varphi)$  em (2.41) assume a forma particular

$$\mathcal{U}(\varphi) \equiv \mathcal{U}_0(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \quad (2.45)$$

de modo que a densidade de lagrangiana correspondente (2.40) torna-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \quad (2.46)$$

encontramos que, a equação de movimento que governa o comportamento do campo  $\varphi(x)$ , em função das coordenadas do espaço-tempo  $x$ , é dada por

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0. \quad (2.47)$$

Observando a definição do operador  $\square$  em (2.42) e utilizando o método da separação de variáveis, é possível mostrar que possíveis soluções da Eq. (2.47) são as ondas planas

$$\varphi(x) = N e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.48)$$

com  $\omega$  representando as frequências da solução, definidas por

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2, \quad (2.49)$$

e  $\mathbf{k}$  o vetor momento (ou número de onda), tal que  $|\mathbf{k}|^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$  e  $\mathbf{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k}$ . A letra  $N$  representa uma constante de normalização arbitrária, que pode ser obtida de forma que as soluções (2.48) componham um conjunto ortonormal (ortogonal e normal). Uma vez que a condição de normalização para as soluções (2.48), que permite obter o valor de  $N$ , possui sutilezas inerentes ao processo de quantização do campo escalar, sua discussão será realizada em uma seção exclusiva apresentada posteriormente.

As soluções (2.48) também são chamadas de modos normais, ou simplesmente modos, e quando a teoria clássica descrita pela lagrangiana (2.46) é quantizada, dizemos que  $m$  representa a massa das excitações do campo  $\varphi$ , as quais por sua vez são interpretadas como partículas.

O resultado (2.47) é conhecido como *equação de Klein-Gordon* para um campo escalar massivo e, historicamente, surgiu como uma das primeiras equações obtidas com o objetivo de encontrar uma equação relativística para a função de onda da mecânica quântica [54, p. 59-60]. No contexto da Teoria Quântica de Campos ela descreve o comportamento de partículas elementares sem spin, a saber, os mésons, como por exemplo, os píons (representados pela letra grega  $\pi$ ) [51, 55]. A título de informação, historicamente o méson foi proposto por Yukawa como a partícula mediadora da força nuclear forte, responsável por manter prótons e nêutrons coesos no núcleo atômico. Contudo, posteriormente, através do estudo de raios cósmicos, concluiu-se que na verdade existem dois tipos de mésons: os píons, que são as partículas mediadoras descritas pela teoria de Yukawa, e os múons, simbolicamente representados através da letra grega  $\mu$  [56, p. 18-20].

A partir da Eq. (2.41) nota-se que, a configuração  $\mathcal{U} = 0$  é o caso mais simples que podemos encontrar e corresponde a teoria utilizada para descrever um campo escalar real não massivo. Essa configuração é representada pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi), \quad (2.50)$$

que conduz a equação de propagação da onda no vácuo

$$\square \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = 0, \quad (2.51)$$

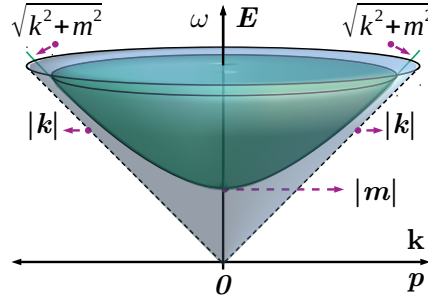
cujas soluções para  $\varphi(x)$  ainda correspondem as ondas planas (2.48), porém com a relação de dispersão dada por (2.49) tomando o limite  $m = 0$ , isto é,

$$\omega = |\mathbf{k}|. \quad (2.52)$$

Nota-se imediatamente que (2.50) corresponde ao caso particular  $m = 0$  da Eq. (2.46). Nessa ocasião as excitações do campo  $\varphi(x)$  podem descrever partículas não massivas, como por exemplo, os fônons em uma rede de átomos ou perturbações em fluidos. Esse modelo de teoria, Eq. (2.50), surgirá em nossos estudos no Capítulo 4, quando estivermos estudando a simulação do movimento Browniano Quântico induzido em geometrias efetivas.

Em teoria quântica as frequências são compreendidas como as próprias energias, em virtude das relações  $E = \hbar\omega$  e  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . De fato, quando as unidades naturais são utilizadas,  $c = \hbar = 1$ , constata-se nitidamente as equivalências  $E \equiv \omega$  e  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{k}$ . Portanto, de acordo com a Eq. (2.52), a energia associada as excitações (partículas) não massivas possui um comportamento linear com o momento  $\mathbf{k}$  de tal maneira que uma excitação com momento nulo possui uma energia igual a zero. Por outro lado, para excitações massivas, conforme a relação de dispersão (2.49), se  $\mathbf{k} = 0$  o valor mínimo da energia é igual a  $E = \omega = |m|$ , que corresponde a energia de repouso relativística (recorde que  $E = mc^2$ ). O comportamento das energias para ambos os casos, ou seja, das relações de dispersão (2.49) e (2.52), está exposto na Figura 5. É interessante notar que, conforme a Figura 5, a

Figura 5 – Comportamento da energia em função do momento das excitações associadas aos campos escalares massivo e não massivo.



Legenda: A curva sólida corresponde ao caso massivo, Eq. (2.49), enquanto que a curva tracejada representa o caso não massivo, Eq. (2.52). Em virtude das relações  $E = \hbar\omega$ ,  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  e o uso das unidades naturais  $c = \hbar = 1$  os conceitos dos observáveis  $(\omega, \mathbf{k})$  são tomados como sinônimos para  $(E, \mathbf{p})$ . Fonte: produzido pelo autor com base na Ref. [54, p. 65-66].

massa tem um papel significativo para regimes de baixos momentos ( $\mathbf{k} \ll m$ ), mas quando  $\mathbf{k} \gg m$  sua influência torna-se cada vez mais sutil.

As densidades de lagrangiana (2.46) e (2.50) dizem respeito a configuração de um campo escalar  $\varphi(x)$ , massivo e não massivo, respectivamente, que se propaga livremente pelo espaço, isto é, não sofre influências de outros campos, fontes externas ou de efeitos de autointeração. Portanto, descrevem partículas que não interagem entre si [54]. Quando existem fontes externas, ou seja, quando o campo escalar  $\varphi$  interage com uma fonte externa, a homogeneidade de (2.47) é violada devido ao surgimento de um termo extra no lado direito. Por exemplo, se considerarmos um potencial com a forma

$$\mathcal{U}(\varphi) = \mathcal{U}_0(\varphi) - \rho(x)\varphi(x), \quad (2.53)$$

o qual implica em uma densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \rho\varphi, \quad (2.54)$$

ao contrário da Eq. (2.47), através das equações de Euler-Lagrange (2.39), obtemos

$$(\square + m^2)\varphi(x) = \rho(x). \quad (2.55)$$

Por questões de generalidade estamos considerando o caso massivo. Obviamente, o caso não massivo é obtido através do limite  $m = 0$  nas expressões acima. Essa teoria será utilizada no Capítulo 5 quando estudarmos o movimento Browniano Quântico induzido de uma partícula pontual acoplada ao campo escalar  $\varphi$  não massivo.

Na densidade de lagrangiana, interações entre campos e fontes são representadas através do produto entre o campo e a fonte, aqui representada por  $\rho$ , conforme exposto na Eq. (2.54). Observando a Eq. (2.55) percebemos que no lado esquerdo existe uma expressão apenas em termos do campo, enquanto que no lado direito encontra-se a presença

exclusiva da fonte, a qual impede que o campo se propague livremente como as ondas planas (2.48). Em princípio, a estrutura matemática que  $\rho(x)$  pode assumir é arbitrária e depende apenas da forma como a interação acontece. Por exemplo, no Capítulo 5 utilizaremos uma fonte do tipo [57]

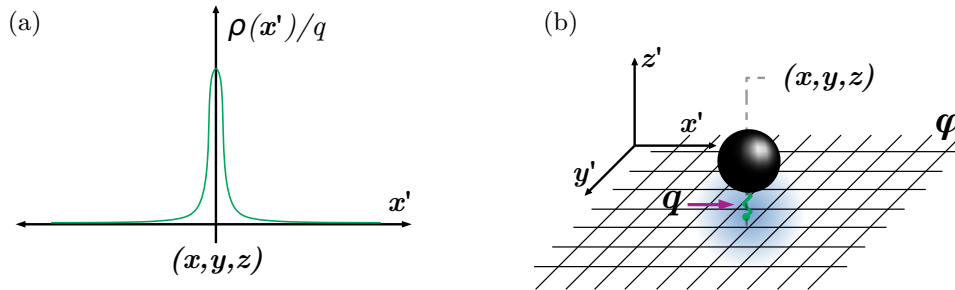
$$\rho(x) = q\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \quad (2.56)$$

onde  $q$  representa a intensidade do acoplamento entre a fonte e o campo escalar e  $\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$  é a bem conhecida função delta de Dirac em 3 dimensões [58, 59, 60], a saber,

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z'). \quad (2.57)$$

Essa estrutura corresponde a uma densidade de carga pontual  $q$  semelhante ao eletromagnetismo – confira [60, p. 27]. Portanto, o termo  $\rho\varphi$ , com  $\rho$  dado por (2.55), representa a interação entre uma fonte (ou carga) pontual e um campo escalar  $\varphi$ . Uma representação ilustrativa dessa interação é mostrada na Figura 6. É importante destacar que na Eq. (2.56) as coordenadas espaciais  $\mathbf{x}'$  e  $\mathbf{x}$  são funções do tempo, isto é,  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t)$  e  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ . Por questões de simplificação a dependência temporal nas coordenadas espaciais foi omitida e a notação quadrvetorial  $x = (t, \mathbf{x})$  foi utilizada.

Figura 6 – Representação ilustrativa de uma fonte pontual  $\rho$ .



Legenda: Em (a) temos o comportamento de  $\rho(x')/q$  em função da posição  $\mathbf{y}$ , que corresponde a uma função delta de Dirac centrada em  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ . Enquanto isso, em (b) dispomos uma representação do campo  $\varphi$ , ilustrado pela grade, sob o efeito da fonte pontual  $\rho$ , cujo efeito também age nas vizinhanças de sua localização  $\mathbf{x}$ . Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Na Figura 6a um esboço para o comportamento da distribuição (2.56) é mostrado, o qual corresponde a própria função delta de Dirac, uma vez que o parâmetro  $q$  é uma constante. Portanto, a fonte consiste em uma estrutura pontual localizada com a qual o campo interage localmente, mas também sente seus efeitos em uma vizinhança próxima – Figura 6b. Na verdade, como sabemos, a delta corresponde a um pico infinito e localizado, na ocasião em  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ , cuja área total corresponde a unidade. Apenas para fins de ilustração estamos representando a Delta como um perfil simétrico, fino e tipo gaussiano, com é feito rotineiramente em alguns livros textos, em virtude das possíveis equivalências matemáticas entre a delta e outras funções matemáticas – confira por exemplo [59, p. 83-95]

Muito do que foi discutido até o momento está no domínio da teoria clássica de campos, ainda que por vezes tenhamos introduzido moderadamente algum comentário sobre os aspectos quânticos das teorias apresentadas. Agora, vamos apresentar os desenvolvimentos da TQC para o campo escalar, que serão necessários no presente trabalho.

O procedimento de quantização canônica do campo escalar  $\varphi(x)$  segue uma metodologia simples e bem definida. Conforme pode-se constatar na literatura, Refs. [52, 53, 54, 61, 14], em primeiro lugar devemos escrever a densidade de lagrangiana que representa o sistema que desejamos estudar. Um vez especificada a quantidade  $\mathcal{L}$ , calculamos o momento canônico da teoria através da Eq. (2.30). Em seguida, promovemos o campo clássico  $\varphi(x)$  e seu momento conjugado  $\pi(x)$  ao status de operadores mediante a prescrição

$$\varphi(x) \rightarrow \hat{\varphi}(x) \quad (2.58a)$$

e

$$\pi(x) \rightarrow \hat{\pi}(x). \quad (2.58b)$$

Ao longo desse trabalho operadores são identificados com um acento circunflexo. Além disso, ambos os operadores,  $\hat{\varphi}(x)$  e  $\hat{\pi}(x)$ , devem satisfazer as relações fundamentais de comutação [53, 61]

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.59a)$$

e

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{x}', t)] = [\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)] = 0. \quad (2.59b)$$

Note que as relações de comutação acima são avaliadas em um mesmo instante de tempo.

Por fim, após o estabelecimento das relações acima, o campo quântico  $\hat{\varphi}(x)$  é construído através da combinação linear [61]

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{\sigma} [\hat{a}_{\sigma} \varphi_{\sigma}(x) + \hat{a}_{\sigma}^{\dagger} \varphi_{\sigma}^{*}(x)] \quad (2.60)$$

A expressão acima é conhecida como a expansão em modos do campo quântico (escalar)  $\hat{\varphi}(x)$  e tem um papel central no processo de quantização do campo clássico  $\varphi(x)$ . Na sequência, vamos discutir cada um dos objetos presentes nessa estrutura matemática e os seus significados.

O índice  $\sigma$  no somatório da Eq. (2.60) simboliza o conjunto de todos os momentos associados as soluções  $\varphi_{\sigma}(x)$  e seus respectivos intervalos. Por exemplo, para a solução (2.48) temos que  $\sigma = \mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$ , com  $k_x = k_y = k_z = [-\infty, +\infty]$ . A somatória, por sua vez, indica uma instrução de soma sobre todos os momentos  $\sigma$  envolvidos, os quais podem ser discretos ou contínuos, ou seja,

$$\sum_{\sigma} = \left\{ \int d^3 \mathbf{x}; \sum_n \int dk_y dk_z; \dots \right\}. \quad (2.61)$$

Os intervalos de cada uma das somas acima (discreta ou contínua) dependerá das condições de contorno aplicadas as soluções  $\varphi_\sigma(x)$ . As funções escalares  $\varphi_\sigma(x)$  e sua conjugada  $\varphi_\sigma^*(x)$ , denominadas como modos, são identificadas pelo conjunto  $\sigma$  e satisfazem igualmente a equação de Klein-Gordon (2.47). Para cada configuração do conjunto de momentos  $\sigma$  existe um único par  $\varphi_\sigma(x)$  e  $\varphi_\sigma^*(x)$ , com frequência  $\omega_\sigma$  dada por (2.49). Os detalhes matemáticos subjacentes a construção (2.60) serão melhor compreendidos no Capítulo 3, no qual calcularemos as funções de Wightman de frequência positiva para o campo escalar em diferentes situações.

Nota-se que a estrutura da Eq. (2.60) é tal que  $\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}^\dagger(x)$ , garantindo a hermiticidade do operador de campo e que o mesmo, portanto, representa um observável físico [62], consonante as leis da mecânica quântica não relativística. Como já foi argumentado anteriormente, as excitações do campo são compreendidas como partículas, com momento  $\mathbf{p} = \mathbf{k} \equiv \sigma$  e energia  $E = \omega = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ . A conexão com o mundo das partículas também está incorporada na Eq. (2.60) através dos coeficientes  $\hat{a}_\sigma$  e  $\hat{a}_\sigma^\dagger$ , denominados de operadores de aniquilação e criação, respectivamente. Esses coeficientes são independentes das coordenadas  $x^\mu$  e satisfazem as relações de comutação [61, 62]

$$[\hat{a}_\sigma, \hat{a}_{\sigma'}] = [\hat{a}_\sigma^\dagger, \hat{a}_{\sigma'}^\dagger] = 0 \quad (2.62a)$$

e

$$[\hat{a}_\sigma, \hat{a}_{\sigma'}^\dagger] = \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (2.62b)$$

O símbolo  $\delta_{\sigma\sigma'}$  na Eq. (2.62b) corresponde a uma função delta de Kronecker, tal que  $\delta_{\sigma\sigma'} = 1$  para  $\sigma = \sigma'$  e  $\delta_{\sigma\sigma'} = 0$  para  $\sigma \neq \sigma'$ .

A quantização do campo escalar possui um estreita relação de analogia com a quantização do oscilador harmônico simples (OHS) – veja, por exemplo, o Capítulo 4 de [14] ou ainda o Capítulo 9 de [63]. Semelhante ao OHS, o operador  $\hat{a}_\sigma$  reduz a energia de um estado com momento  $\sigma$  em uma unidade de  $\hbar\omega_\sigma$  enquanto que  $\hat{a}_\sigma^\dagger$  adiciona uma unidade de  $\hbar\omega_\sigma$  a energia do estado com momento  $\sigma$ . Utilizando esses operadores, é possível construir qualquer estado  $|n_\sigma\rangle$  através da aplicação sucessiva de  $\hat{a}_\sigma$  e  $\hat{a}_\sigma^\dagger$ , observando suas álgebras particulares [61]

$$\hat{a}_\sigma|0\rangle = 0, \quad \forall \sigma, \quad (2.63a)$$

$$\hat{a}_\sigma|n_\sigma\rangle = \sqrt{n}|(n-1)_\sigma\rangle \quad (2.63b)$$

e

$$\hat{a}_\sigma^\dagger|n_\sigma\rangle = \sqrt{n+1}|(n+1)_\sigma\rangle. \quad (2.63c)$$

Conforme exposto em (2.63a) o estado de vácuo, denotado por  $|0\rangle$ , consiste no estado em que não há a presença de partículas e corresponde à configuração mais fundamental possível para o estado do campo quântico  $\hat{\varphi}(x)$ . Não existem estados “abaixo” de  $|0\rangle$ , apenas acima.

Nas expressões anteriores  $|n_\sigma\rangle$  corresponde a um estado com  $n$  partículas (ou quantas de energia) com momento  $\sigma$ . Esse estado pode ser alcançado a partir da aplicação sucessiva do operador  $\hat{a}_\sigma^\dagger$  sobre o estado de vácuo  $|0\rangle$ , matematicamente [63]

$$|n_\sigma\rangle = \frac{(\hat{a}_\sigma^\dagger)^{n_\sigma}}{\sqrt{n_\sigma!}}|0\rangle. \quad (2.64)$$

Observando (2.64), um estado contendo  $n_{\sigma_0}$  partículas idênticas com momento  $\sigma_0$ ,  $n_{\sigma_1}$  partículas com momento  $\sigma_1$ ,  $n_{\sigma_2}$  partículas com momento  $\sigma_2$ , e assim sucessivamente, pode ser construído através da relação [14]

$$|n_{\sigma_0}, n_{\sigma_1}, n_{\sigma_2}, \dots, n_{\sigma_j}\rangle = \prod_{i=0}^j \frac{(\hat{a}_{\sigma_i}^\dagger)^{n_{\sigma_i}}}{\sqrt{(n_{\sigma_i})!}}|0\rangle, \quad (2.65)$$

onde a notação simplificada  $|0\rangle = |0, 0, 0, \dots, 0\rangle$  foi usada. Note que cada operador  $\hat{a}_{\sigma_i}^\dagger$ , bem como  $\hat{a}_{\sigma_i}$ , só altera o número de partículas  $n_{\sigma_i}$  do estado. Explicitamente, seguem a álgebra [63]

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{a}_{\sigma_i} \\ \hat{a}_{\sigma_i}^\dagger \end{array} \right\} |n_{\sigma_0}, n_{\sigma_1}, \dots, n_{\sigma_i}, \dots, n_{\sigma_j}\rangle = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{n_{\sigma_i}} \\ \sqrt{n_{\sigma_i} + 1} \end{array} \right\} |n_{\sigma_0}, n_{\sigma_1}, \dots, n_{\sigma_i} \mp 1, \dots, n_{\sigma_j}\rangle \quad (2.66)$$

Da mesma forma como acontece no problema do OHS, todos os possíveis estados na forma  $|n_{\sigma_0}, n_{\sigma_1}, \dots, n_{\sigma_j}\rangle$  compõem uma base, que por sua vez gera o espaço de Hilbert da teoria.

A expansão (2.60) corresponde a forma mais geral para as soluções do campo de Klein-Gordon  $\hat{\varphi}(x)$  e as funções  $\varphi_\sigma(x)$  constituem uma base ortonormalizada através da construção [61, 63]

$$(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma'}) = -i \int d^3\mathbf{x} [\varphi_\sigma(\partial_t \varphi_{\sigma'}^*) - (\partial_t \varphi_\sigma) \varphi_{\sigma'}^*], \quad (2.67)$$

que também, por vezes, é identificada como o produto escalar ou interno entre duas soluções arbitrárias ( $\varphi_\sigma$  e  $\varphi_{\sigma'}$ ) da equação de Klein-Gordon. O produto escalar (2.67) possui as seguintes propriedades

$$(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma'}) = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (2.68a)$$

$$(\varphi_\sigma^*, \varphi_{\sigma'}^*) = -\delta_{\sigma\sigma'} \quad (2.68b)$$

e

$$(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma'}^*) = 0. \quad (2.68c)$$

A Eq. (2.68a) representa a condição de normalização para as soluções provenientes da equação de Klein-Gordon, Eqs. (2.47) e (2.48). O sinal negativo em (2.68b) tem origem devido a unidade imaginária em (2.67). A Eq. (2.68c) mostra a ortogonalidade entre os

modos  $\varphi_\sigma$  e seus complexos conjugados  $\varphi_\sigma^*$ , para qualquer configuração de momento  $\sigma$ . Além disso, a função  $\delta_{\sigma\sigma'}$  nas Eqs. (2.68a) e (2.68b) corresponde a uma notação simbólica, que pode representar tanto uma função delta de Kronecker, para os casos em que o índice  $\sigma$  é discreto, como uma função delta de Dirac, se o índice  $\sigma$  é contínuo.

A fim de amenizar a percepção de artificialidade imposta pela apresentação direta de (2.67), a seguir, fornecemos uma discussão matemática que conduz a essa condição de normalização. Para mais detalhes e uma maior compreensão dos aspectos físicos envolvidos na discussão seguinte recomendamos as Refs. [54], Capítulo 6, e [55], Capítulo 1.4.

## 2.3 Quanto à normalização das soluções da equação Klein-Gordon

De modo a tornar a seguinte argumentação objetiva e clara, além de ganhar intuição para o estabelecimento de algumas das relações que serão apresentadas, vamos iniciar recordando alguns dos conceitos elementares da Mecânica Quântica não-relativística. De acordo com o formalismo ondulatório da mecânica quântica, uma partícula de massa  $m$ , sob a influência de um potencial arbitrário  $V$ , é descrita por uma função de onda  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ , cuja evolução temporal é dada pela equação diferencial

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi(\mathbf{x}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.69)$$

conhecida como equação de Schrödinger dependente do tempo, ou simplesmente, equação de Schrödinger. A expressão entre parênteses corresponde ao operador hamiltoniano  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V$ , com a prescrição  $\hat{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$ .

O módulo ao quadrado da função de onda  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  em (2.69) fornece a densidade de probabilidade de encontrarmos uma partícula em uma certa região do espaço, com volume  $d^3\mathbf{x}$ , no tempo particular  $t$ , isto é,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 = \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi^*(\mathbf{x}, t). \quad (2.70)$$

Essa interpretação estatística da função de onda requer que a densidade de probabilidade seja normalizada conforme a relação [58, p. 9]

$$\int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{x} |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 = 1. \quad (2.71)$$

Apesar da dependência temporal da função de onda em (2.69) e, conseqüentemente, explicita em (2.70), é possível mostrar que, uma vez normalizada, a solução  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  permanece normalizada para qualquer instante de tempo. Em outras palavras, a constante de normalização obtida via (2.71) para  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ , solução da Eq. (2.69), é independente do tempo. Além disso, é possível mostrar que na equação de Schrödinger (2.69) está codificada uma equação de continuidade para a densidade de probabilidade [64, p. 101], a

saber,

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.72)$$

com  $\rho(\mathbf{x}, t)$  dado por (2.70) e o vetor corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ , ou fluxo de probabilidade, definido pela relação

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = -\frac{i\hbar}{2m} \{ \Psi^*(\mathbf{x}, t) [\nabla \Psi(\mathbf{x}, t)] - [\nabla \Psi^*(\mathbf{x}, t)] \Psi(\mathbf{x}, t) \}. \quad (2.73)$$

A expressão (2.72) revela a conservação da densidade de probabilidade. Para o seu estabelecimento primeiro derivamos  $\rho(\mathbf{x}, t)$  com respeito ao tempo e utilizamos (2.69) para substituir as derivadas temporais da função de onda. O restante da demonstração consiste em usar a regra da cadeia para reorganizar as derivadas e identificar as expressões correspondentes [58].

Semelhante ao caso de Schrödinger apresentado acima, também podemos deduzir uma equação da continuidade a partir da equação de Klein-Gordon. Seja  $\varphi_\sigma(x)$  uma solução arbitrária com momento  $\sigma$ . Multiplicando (2.47) pela esquerda por  $\varphi_\sigma^*(x)$  e subtraindo o resultado por seu complexo conjugado, após as simplificações, encontramos

$$\varphi_\sigma^* \square \varphi_\sigma - \varphi_\sigma \square \varphi_\sigma^* = 0. \quad (2.74)$$

A fim de manter a coerência do presente discurso é importante lembrar que o campo escalar é real, isto é, nos fornece valores reais em cada ponto do espaço-tempo. Entretanto, como observamos em (2.48), suas soluções podem ser complexas, logo, considerar a operação de conjugação em (2.74) não é uma trivialidade ou até mesmo estranha no contexto do campo escalar real.

Utilizando a regra da cadeia, a partir da Eq. (2.74), segue que

$$\frac{\partial \rho_{\text{KG}}(x)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{KG}}(x) = 0, \quad (2.75)$$

com

$$\rho_{\text{KG}}(x) = -i \left[ \varphi_\sigma(x) \frac{\partial \varphi_\sigma^*(x)}{\partial t} - \varphi_\sigma^*(x) \frac{\partial \varphi_\sigma(x)}{\partial t} \right] \quad (2.76)$$

e

$$\mathbf{J}_{\text{KG}}(x) = -i [\varphi_\sigma^*(x) \nabla \varphi_\sigma(x) - \varphi_\sigma(x) \nabla \varphi_\sigma^*(x)]. \quad (2.77)$$

No início dessa seção, a partir da discussão com a equação de Schrödinger, foi observado que (i) a densidade de probabilidade  $\rho$ , Eq. (2.70), está relacionada a uma equação de continuidade, Eq. (2.72), e que (ii) a integral de  $\rho$  sobre todo o espaço (ou uma região de volume finito) fornece a condição de normalização (2.71). Tendo em vista as conclusões (i) e (ii), somos tentados a estabelecer o mesmo paralelo para o caso das

relações provenientes da equação de Klein-Gordon. Entretanto, como será discutido, ainda que as estruturas matemáticas sugestionem, essa correspondência não pode ser feita diretamente. A respeito da observação (i) o motivo é que  $\rho$  não é positiva definida e, portanto, não pode ser interpretada como uma genuína densidade de probabilidade, como acontece no caso de Schrödinger. De fato, com o auxílio das Eqs. (2.48) e (2.49), a partir da Eq. (2.76), encontramos

$$\rho_{\text{KG}} = 2\omega_\sigma |N|^2 = \pm 2|N|^2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (2.78)$$

indicando que a quantidade  $\rho_{\text{KG}}$  pode assumir valores negativos. Vale ressaltar que, embora a interpretação probabilística para  $\rho_{\text{KG}}$  não seja possível, a relação de conservação entre as quantidades  $\rho_{\text{KG}}$  e  $\mathbf{J}_{\text{KG}}$ , expressa por (2.75), ainda é garantida, além de representar a independência temporal de  $\rho_{\text{KG}}$  [55].

No que concerne à observação (ii), nota-se que a integral de  $\rho_{\text{KG}}$  possui um valor bem definido apenas para soluções  $\varphi_\sigma(x)$  confinadas em regiões de volume finito. Realmente, tomando mais uma vez (2.48) como exemplo, a partir da Eq. (2.76) nota-se que, após as derivadas com respeito ao tempo, as exponenciais se cancelam devido a conjugação complexa, restando apenas uma integral sobre o elemento de volume  $d^3\mathbf{x}$ , ou seja,

$$\int d^3\mathbf{x} \rho_{\text{KG}} = 2\omega |N|^2 \int d^3\mathbf{x}. \quad (2.79)$$

Assim, quando a solução é confinada, digamos em um cubo com arestas de comprimento  $L$  e volume  $V = L^3$ , obtemos que  $\int d^3\mathbf{x} = V$  e podemos extrair o valor de  $N$  para a normalização, mas se a integral se estende por todo o espaço ( $V \rightarrow \infty$ ), então, o resultado diverge e a normalização não é factível. Portanto, o paralelo entre os casos não relativístico e relativístico, representados respectivamente pelas equações de Schrödinger e Klein-Gordon, é inconsistente, visto que as observações (i) e (ii) não se concretizam.

De acordo com os comentários no parágrafo anterior a origem matemática para a possível divergência é o cancelamento entre as exponenciais. Contudo, a estrutura de  $\rho_{\text{KG}}$  (2.76), junto a esse fato, nos fornece um bom palpite de como resolver esse impasse, a fim de obter uma condição de normalização adequada para as soluções da equação de Klein-Gordon. Uma inspeção mais minuciosa revela que o cancelamento não é apenas devido a conjugação em (2.76), mas também porque os momentos  $\sigma$  são iguais. Assim, se considerarmos um desenvolvimento análogo ao anterior, porém admitindo duas soluções com momentos distintos, digamos  $\varphi_\sigma$  e  $\varphi_{\sigma'}$ , é possível mostrar que a integral da quantidade

$$\tilde{\rho}_{\text{KG}}(x) = -i \left[ \varphi_\sigma(x) \frac{\partial \varphi_{\sigma'}^*(x)}{\partial t} - \varphi_{\sigma'}^*(x) \frac{\partial \varphi_\sigma(x)}{\partial t} \right] \quad (2.80)$$

sobre todo o espaço é bem definida. Note que  $\tilde{\rho}_{\text{KG}}$  no limite  $\sigma' \rightarrow \sigma$  recupera a expressão usual para  $\rho_{\text{KG}}$ . A Eq. (2.80) surge a partir da subtração entre as relações  $\varphi_{\sigma'}^*(\square + m^2)\varphi_\sigma =$

0 e  $\varphi_\sigma(\square + m^2)\varphi_{\sigma'}^* = 0$ , cujo resultado consiste em (2.74) com a troca de  $\varphi_\sigma^*$  por  $\varphi_{\sigma'}^*$ , seguindo com a manipulação das derivadas através da regra da cadeia.

A integral de (2.80) define o produto escalar entre duas soluções distintas para a equação de Klein-Gordon (2.47) com momentos distintos, o qual foi apresentado em (2.67), a saber,

$$(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma'}) = \int d\mathbf{x} \rho_{\text{KG}} = -i \int d\mathbf{x} \left[ \varphi_\sigma(x) \frac{\partial \varphi_{\sigma'}^*(x)}{\partial t} - \varphi_{\sigma'}^*(x) \frac{\partial \varphi_\sigma(x)}{\partial t} \right] = \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (2.81)$$

Para estabelecer a última igualdade utilizamos a propriedade (2.68a). O significado da função delta  $\delta_{\sigma\sigma'}$  já foi comentado na seção anterior. A Eq. (2.81) nos permite normalizar tanto as soluções espacialmente restritas como as soluções que existem sobre todo o espaço.

A fim de exemplificar a consistência da construção matemática (2.81), vamos normalizar as soluções de ondas planas, ou de partículas livres, dadas pela Eq. (2.48). Substituindo (2.48) em (2.81), após as simplificações, encontramos que

$$(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma'}) = (2\pi)^3 (\omega + \omega') e^{-i(\omega - \omega')t} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \quad (2.82)$$

onde a representação integral para a função delta de Dirac foi utilizada. Observando (2.82), para que tenhamos um resultado diferente de zero  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  e, conseqüentemente, em virtude de (2.49),  $\omega = \omega'$ . Logo, a partir da Eq. (2.82) percebe-se que o valor da constante N para que os modos (2.48), junto ao seus complexos conjugados, formem uma base ortonormal deve ser

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}, \quad (N \in \mathbb{R}). \quad (2.83)$$

Os comentários que foram desenvolvidos nessa seção tiveram como objetivo central oferecer uma possível linha de raciocínio que motiva o estabelecimento da expressão (2.67), a qual utilizaremos frequentemente ao longo desse trabalho. Nesse sentido, as discussões buscaram apresentar a condição de normalização fazendo alguns paralelos com as relações da mecânica quântica não relativística, com as quais estamos habituados e que talvez por esse motivo (2.82) possa causar estranheza à primeira vista. Então, ainda que a explanação apresentada não seja uma prova matemática formal, acreditamos que possivelmente ela reduz esta impressão de artificialidade.

## 2.4 Generalização para o espaço-tempo curvo

As discussões realizadas nas últimas seções foram desenvolvidas considerando um espaço-tempo com geometria plana, isto é, no espaço-tempo de Minkowski. Agora, vamos generalizar as argumentações e estender os resultados para uma geometria de espaço-tempo arbitrária. Além disso, de modo a preservar a estrutura textual e a ordem de apresentação

que foi desenvolvida na Seção 2.1, vamos iniciar com a dedução de uma equação de movimento simplificada para uma partícula pontual em um sistema de coordenadas arbitrário, a qual em essência pode ser considerada como uma generalização da 2ª lei de Newton no espaço-tempo plano (2.1), expressa de maneira equivalente pelas Eqs. (2.10) e (2.17) nos formalismos lagrangiano e hamiltoniano.

Conforme visto, a Eq. (2.9) especifica a função lagrangiana que representa uma partícula pontual de massa  $m$  movendo-se com velocidade  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  por uma região com energia potencial  $V(\mathbf{x})$ . Com base na notação tensorial, podemos escrever:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - V(\mathbf{x}), \\ &= \frac{m}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - V(x^j). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Na expressão acima  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^k)$  é uma função das coordenadas e corresponde a generalização de  $\eta_{\mu\nu}$  para o espaço-tempo curvo. O tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  codifica e carrega consigo todas as informações relativas a geometria do espaço-tempo ao qual está relacionado.

Considerando a expressão (2.84), para os respectivos termos das equações de Euler-Lagrange (2.8), encontramos que [47]

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{m}{2} g_{ij,k} \dot{x}^i \dot{x}^j - V_{,k}, \quad (2.85a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = m g_{ik} \dot{x}^i$$

e, consequentemente,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) = m(g_{ik} \ddot{x}^i + g_{ik,j} \dot{x}^i \dot{x}^j). \quad (2.85b)$$

Para obter os resultados (2.85) utilizou-se a regra da cadeia, uma vez que  $g_{ij}$  é função das coordenadas  $x^k$ , além da troca conveniente de índices mudos. Assim, a partir das Eqs. (2.8) e (2.85), encontramos que [47, 65]

$$\begin{aligned} m \left( g_{ik} \ddot{x}^i + g_{ik,j} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{1}{2} g_{ij,k} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) + V_{,k} &= 0, \\ \therefore m \ddot{x}^r + m \Gamma_{ij}^r \dot{x}^i \dot{x}^j &= -g^{rk} V_{,k}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

O resultado acima foi estabelecido explorando a liberdade da troca e ajuste dos índices mudos, bem como a propriedade de simetria do tensor métrico.

Os coeficientes  $\Gamma_{ij}^r$  identificados na Eq. (2.86) são conhecidos como símbolos de Christoffel e têm origem fundamentada na arbitrariedade do sistema de coordenadas, isto é, em virtude da curvatura do espaço-tempo. Estes símbolos são computados em função das componentes do tensor métrico através da relação [48]

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} (g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}), \quad (2.87)$$

na qual  $g^{\mu\nu}(x)$  simboliza os coeficientes da matriz de representação do tensor métrico contravariante, que corresponde a matriz inversa de  $g_{\mu\nu}(x)$  e obedece a identidade

$$g_{\mu\nu}(x)g^{\mu\nu}(x) = I. \quad (2.88)$$

Note que a identidade acima representa a generalização de (2.44) para o espaço-tempo curvo. Além disso, em (2.85), (2.86) e (2.87) as vírgulas simbolizam derivadas parciais, de modo que  $g_{\alpha\nu,\beta} = \partial_\beta(g_{\alpha\nu})$ .

A Eq. (2.86) corresponde à forma da 2ª lei de Newton para um espaço-tempo descrito por um sistema de coordenadas arbitrário. Comparando as Eqs. (2.10) e (2.86) observa-se que, o primeiro termo no lado esquerdo de (2.86) representa a forma usual do espaço plano, enquanto que a segunda contribuição, proporcional a  $\Gamma_{ij}^r$ , inclui uma correção exclusiva devido ao espaço curvo. Além disso, como podemos verificar através das equações acima, é oportuno comentar que, o termo devido a  $\Gamma_{ij}^r$  pode ser interpretado como uma força (fictícia) [47], que possui uma origem geométrica.

Prosseguindo, no tocante ao formalismo para campos, o nosso ponto de partida corresponde à ação  $S$ , pois essa quantidade, aliada ao princípio de Hamilton, Eq. (2.7), nos fornece as equações de movimento da teoria. No que concerne ao espaço-tempo curvo, a teoria da relatividade nos ensina que as derivadas, de maneira geral, são covariantes e os elementos de quadrivolume invariantes têm a forma  $\sqrt{-g}d^4x$ . Portanto, no espaço-tempo curvo a ação  $S$  invariante é dada pela expressão [66, 65, 67]

$$S = \int d^4x \bar{\mathcal{L}}(\varphi, \nabla_\mu \varphi), \quad (2.89)$$

com

$$\bar{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \mathcal{L}(\varphi, \nabla_\mu \varphi). \quad (2.90)$$

Antes de proceder com as demais generalizações das estruturas matemáticas desenvolvidas na Seção 2.2, vamos fazer alguns comentários a respeito dos elementos da equação acima.

O fator  $g$  em (2.90) corresponde ao determinante da matriz de representação do tensor métrico (covariante)  $g_{\mu\nu}(x)$  escrito em um geometria arbitrária, a saber,

$$g = \text{Det}[g_{\mu\nu}(x)]. \quad (2.91)$$

O objeto matemático  $\nabla_\mu$  em (2.89) e (2.90) é chamado de derivada covariante e para um quadri vetor qualquer, digamos  $A^\mu$ , é definido pela expressão [48]

$$\nabla_\beta A^\mu = \partial_\beta A^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha, \quad (2.92)$$

onde  $\partial_\beta$  corresponde a derivada parcial e os coeficientes  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  são contribuições devido a curvatura do espaço-tempo, os quais são computados através da relação (2.87).

De maneira análoga à metodologia delineada na Seção 2.2, é possível mostrar que a minimização da ação (2.89) com respeito ao campo  $\varphi$  nos permite obter a versão para o espaço-tempo curvo das equações de Euler-Lagrange [65, 66]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \nabla_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \varphi)} \right] = 0. \quad (2.93)$$

Comparando as Eqs. (2.39) e (2.93) nota-se que a mudança ocorre apenas na diferenciação do campo, com  $\partial_\nu \rightarrow \nabla_\mu$ . Uma vez que  $\varphi(x)$  é um campo escalar, a derivada covariante é equivalente a própria derivada parcial. Entretanto, na Eq. (2.89), a notação foi mantida por uma formalidade e prevendo o fato de que o termo entre colchetes na Eq. (2.93) é um quadrvetor, logo a derivada  $\nabla_\mu$  dessa quantidade obedecerá a relação (2.92), que é diferente da derivada parcial.

Na Seção 2.2 apresentamos a densidade de lagrangiana para um campo escalar massivo e livre, Eq. (2.46), cuja equação de movimento associada é a célebre equação de Klein-Gordon, Eq. (2.47). A expressão que representa a generalização dessa teoria para o espaço-tempo curvo é dada por (2.90) com

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \varphi) (\nabla_\nu \varphi) - m^2 \varphi^2 - \xi R \varphi^2 \right]. \quad (2.94)$$

Em paralelo com (2.46) identificamos que o primeiro termo de (2.94) corresponde a generalização do termo cinético do campo escalar no espaço-tempo curvo. Como pode ser observado o termo de massa permanece inalterado.

O fator extra  $\xi R \varphi^2$  diz respeito sobre o acoplamento entre o campo escalar  $\varphi$  e os efeitos da gravidade [61], a qual é resultado das deformidades no espaço-tempo. Em outras palavras, o estudo de uma teoria no espaço-tempo curvo deve levar em conta a contribuição dos efeitos gravitacionais, visto que a gravidade, como entendemos hoje, é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. O parâmetro  $\xi$  é denominado de constante de acoplamento e

$$R = R(x) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.95)$$

é o conhecido escalar de Ricci que, como mostra a relação acima, pode ser obtido por meio do tensor de Ricci [47]

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\beta,\mu}^\beta - \Gamma_{\mu\nu,\beta}^\beta + \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha, \quad (2.96)$$

cujos símbolos  $\Gamma_{\nu\beta}^\beta$  são definidos por (2.87).

A partir das Eqs. (2.93) e (2.94), separadamente, encontramos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -(m^2 + \xi R) \varphi \quad (2.97a)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \varphi)} = g^{\mu\nu} \nabla_\nu \varphi. \quad (2.97b)$$

Note que a derivada de  $\mathcal{L}$  é com respeito a dependência explícita do campo  $\varphi$  e sua derivada covariante  $\nabla_\mu \varphi$ , conforme exposto em (2.89) e (2.90). Portanto, substituindo (2.97) em (2.93) obtemos [61, 67]

$$(\square + m^2 + \xi R)\varphi(x) = 0, \quad (2.98)$$

que corresponde a equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo se propagando em um espaço-tempo curvo, isto é, na presença da gravidade. Para estabelecer o resultado acima utilizamos a identidade [48, 47]

$$\nabla_\nu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu) \quad (2.99)$$

e a identificação do operador d'Alembertiano no espaço-tempo curvo [61, 67, 47]

$$\square \varphi = \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \varphi) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \varphi). \quad (2.100)$$

Diferente do caso relativo ao espaço-tempo plano, Eqs. (2.47) e (2.48), a Eq. (2.98) não pode ser resolvida de maneira geral, ou seja, sem antes especificarmos  $g_{\mu\nu}$  e, conseqüentemente, as quantidades  $\square \varphi$  e  $R$ , em virtude das relações (2.95) e (2.100). De fato, é necessário definirmos a geometria (“forma”) do espaço-tempo através do qual o campo escalar  $\varphi(x)$  se propaga. A dependência de  $g_{\mu\nu}$  com as coordenadas  $x^\mu$  torna a estrutura de  $\square \varphi$  não trivial, além de  $R$ , nos impedindo de solucionar (2.98) para quaisquer formas de  $\square \varphi$  e  $R$ , uma vez que ambas as quantidades podem depender das coordenadas.

Como discutido no parágrafo acima, embora não seja possível solucionar imediatamente (2.98), como fizemos para o caso de Minkowski na Seção 2.2, as soluções provenientes de (2.98) devem ser normalizadas. Para obtermos a condição de normalização referente ao espaço-tempo curvo partimos do caso plano, Eq. (2.67), com a filosofia de substituir as derivadas usuais por derivadas covariantes,  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ , e o elemento de quadrivolume por seu correspondente covariante,  $d^4x \rightarrow \sqrt{-g} d^4x$ . Nesse sentido, o produto escalar entre duas soluções da Eq. (2.98) é dado pela expressão [61, 63]

$$(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma'}) = -i \int \sqrt{-g_S} [\varphi_\sigma (\nabla_\mu \varphi_{\sigma'}^*) - \varphi_{\sigma'}^* (\nabla_\mu \varphi_\sigma)] n^\mu dS = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (2.101)$$

onde  $n^\mu$  é um vetor unitário ortogonal a hipersuperfície do tipo-espaço  $S$ , com elemento de volume covariante  $\sqrt{-g_S} dS$ . O fator  $\sqrt{-g_S}$  corresponde ao determinante da métrica relativa à hipersuperfície  $S$ .

O produto escalar (2.101) satisfaz igualmente todas as propriedades do espaço plano, Eqs. (2.68), e é independente da escolha da hipersuperfície  $S$ , logo admitiremos a

hipersuperfície  $n^\mu = (n^0, n^i) = (1, 0)$  de modo que

$$(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma'}) = -i \int \sqrt{-g_{S_t}} [\varphi_\sigma (\nabla_0 \varphi_{\sigma'}^*) - \varphi_{\sigma'}^* (\nabla_0 \varphi_\sigma)] dS_t = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (2.102)$$

com o rótulo  $S_t$  simbolizando a hipersuperfície definida por um valor de tempo  $t$  constante, a qual possui uma maior similaridade com a expressão do espaço plano (2.67). Em (2.101) e (2.102), uma vez que o campo é escalar  $\nabla_\mu \equiv \partial_\mu$ , mas por uma questão de formalidade temos mantido a notação covariante.

A equação de Klein-Gordon para um campo escalar sem massa no espaço-tempo curvo é obtida imediatamente a partir de (2.98) tomando o limite  $m = 0$ , o que resulta em

$$(\square + \xi R)\varphi(x) = 0. \quad (2.103)$$

O parâmetro  $\xi$ , que estabelece o acoplamento entre o campo escalar e os efeitos da gravidade, em princípio é arbitrário e pode assumir qualquer valor. Contudo, na literatura destacam-se dois valores especiais [61, 63, 67], são estes:

- (i)  $\xi = 0$ , que define o caso conhecido como acoplamento mínimo, no qual os efeitos da interação entre o campo escalar e a gravidade são desconsiderados. Note que, nesse caso particular, embora o termo proporcional a  $\xi$  não ofereça contribuições, o espaço-tempo não é plano, pois  $\square$  também leva em conta a geometria do espaço, como pode ser visto a partir de (2.100);
- (ii) existe também o caso denominado de conformemente acoplado, situação na qual, para um espaço-tempo com  $n$  dimensões,

$$\xi = \xi(n) = \frac{(n-2)}{4(n-1)}. \quad (2.104)$$

Para o caso de (3+1) dimensões,  $n = 4$ , constata-se que  $\xi = 1/6$ . Essa estrutura, Eq. (2.104), assim como sua terminologia, é identificada a partir da propriedade de simetria conforme que a Eq. (2.103) obedece. A Eq. (2.104) será deduzida no Apêndice A considerando um caso particular de espaço-tempo a fim de minimizar a impressão de artificialidade imposta pela sua apresentação direta.

Suponhamos dois sistemas de coordenadas distintos, caracterizados pelas métricas  $\bar{g}_{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu}$ . Para transformações da métrica que satisfazem a relação

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (2.105)$$

a expressão (2.103) mantém sua forma se o campo também obedece a lei de transformação

$$\bar{\varphi}(x) = \Omega^{\frac{(2-n)}{2}} \varphi(x). \quad (2.106)$$

Matematicamente, quando as leis de transformações (2.105) e (2.106) são consideradas mostra-se que [61, 68]

$$(\bar{\square} + \xi \bar{R})\bar{\varphi} = \Omega^{\frac{(2-n)}{2}}(\square + \xi R)\varphi(x), \quad (2.107)$$

de modo que  $(\bar{\square} + \xi \bar{R})\bar{\varphi} = 0$  implica em (2.103), com  $\xi$  dado pela Eq. (2.104). De acordo com a Eq. (2.107) resolver a equação no sistema definido por  $\bar{g}_{\mu\nu}$  pode ser feito considerando a solução no sistema de  $g_{\mu\nu}$ .

A Eq. (2.105) é conhecida como transformação conforme e relaciona duas métricas (ou espaços-tempos) que em tese diferem por uma função das coordenadas  $\Omega(x)$ , denominada de fator conforme, que é uma função real, finita, contínua e não nula [61]. Nesse sentido, considerando os resultados acima, dizemos que a equação de Klein-Gordon para um campo escalar sem massa, Eq. (2.103), é invariante por transformações conformes – Eq. (2.107) com (2.105) e (2.106). Destaca-se que, a invariância conforme considera o valor da constante  $\xi$  dado por (2.104). Alguns detalhes da prova matemática sobre os aspectos da invariância conforme e das relações decorrentes dessa simetria podem ser encontrados em [68]. No Apêndice A oferecemos uma prova baseada no caso particular do espaço-tempo conformemente plano, no qual as estruturas (2.104) e (2.107) surgem naturalmente como consequências das leis de transformações (2.105) e (2.106).

Para quantizar o campo escalar  $\varphi(x)$  no espaço-tempo curvo seguimos o mesmo procedimento descrito anteriormente para o espaço-tempo plano, porém, é claro, considerando agora as estruturas matemáticas generalizadas para o espaço-tempo curvo que temos apresentado. A fim de tornar claro o paralelo, vamos relembrar ponto a ponto o procedimento:

- (i) promovemos o campo clássico  $\varphi(x)$  e seu momento conjugado  $\pi(x)$  ao posto de operadores conforme as prescrições (2.58) e impomos que ambos os operadores satisfaçam as relações fundamentais de comutação (2.59) para tempos iguais, com o momento conjugado definido por (2.30). Devemos observar que a delta em (2.59) na presente ocasião refere-se a uma função delta no espaço-tempo curvo, ou seja, a relação de comutação é tal que [63]

$$[\hat{\varphi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = i \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\sqrt{-g}}; \quad (2.108)$$

- (ii) obtemos as soluções da equação de Klein-Gordon (2.98) e as normalizamos por meio da Eq. (2.102), para que o conjunto de modos  $\{\varphi\} = \{\varphi_\sigma; \varphi_\sigma^*\}$  formem uma base ortonormal, satisfazendo todas as propriedades expostas em (2.68);
- (iii) utilizando como base o conjunto ortonormal  $\{\varphi\}$ , construídos conforme (ii), expandimos o operador de campo quântico  $\hat{\varphi}(x)$  como uma combinação linear dos

operadores  $\hat{a}_\sigma$  e  $\hat{a}_\sigma^\dagger$  segundo (2.60), com os operadores  $\hat{a}_\sigma$  e  $\hat{a}_\sigma^\dagger$  satisfazendo as relações de comutação (2.62).

Como sabemos das discussões precedentes, são os operadores  $\hat{a}_\sigma$  e  $\hat{a}_\sigma^\dagger$  que nos permitem estabelecer as características de partículas associadas ao campo quântico  $\hat{\varphi}(x)$ . O passo seguinte da metodologia delineada acima seria a definição do estado de vácuo da teoria, obedecendo as algebras (2.63), (2.64), (2.65) e (2.66). No entanto, para um espaço-tempo curvo arbitrário a definição do estado de vácuo não é única, além de simples, como no espaço-tempo de Minkowski.

Reformulando o comentário do parágrafo anterior, a liberdade de escolha do conjunto  $\{\varphi_\sigma; \varphi_\sigma^*\}$  mais os operadores  $\hat{a}_\sigma$  e  $\hat{a}_\sigma^\dagger$  para a construção do operador de campo como em (2.60) e a definição unívoca do estado de vácuo, Eq. (2.63), é perdida quando o processo de quantização é realizado no espaço-tempo curvo. Consequentemente, é possível existir outro conjunto de modos  $\{\bar{\varphi}_\sigma; \bar{\varphi}_\sigma^*\}$  e operadores  $\hat{b}_\sigma$  e  $\hat{b}_\sigma^\dagger$ , obedecendo igualmente as propriedades (2.68) e (2.63), que permitem expandir  $\hat{\varphi}(x)$  conforme (2.60). É importante ressaltar que, ambos os conjuntos representam o mesmo campo  $\hat{\varphi}(x)$  e possuem as mesmas características físicas: operadores de criação (aniquilação) criam (destroem) partículas em suas respectivas bases e seus estados de vácuo, ainda que distintos, não contém partículas, como deve ser. Para uma melhor compreensão veja a Tabela 1, onde essas ideias estão sistematizadas em um quadro comparativo com as principais relações.

Tabela 1 – Síntese comparativa entre dois possíveis conjuntos de modos para a expansão do campo quântico  $\hat{\varphi}$  no espaço-tempo curvo.

| Conjunto de base             | $\{\varphi\} = \{\varphi_\sigma; \varphi_\sigma^*\}$                                                                                                                      | $\{\bar{\varphi}\} = \{\bar{\varphi}_\sigma; \bar{\varphi}_\sigma^*\}$                                                                                                                       |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Expansão do campo            | $\hat{\varphi}(x) = \sum_\sigma (\hat{a}_\sigma \varphi_\sigma + \hat{a}_\sigma^\dagger \varphi_\sigma^*)$                                                                | $\hat{\varphi}(x) = \sum_\sigma (\hat{b}_\sigma \bar{\varphi}_\sigma + \hat{b}_\sigma^\dagger \bar{\varphi}_\sigma^*)$                                                                       |
| Relações ortonormais da base | $(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma'}) = -(\varphi_\sigma^*, \varphi_{\sigma'}^*) = \delta_{\sigma\sigma'}$<br>$(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma'}^*) = 0$                  | $(\bar{\varphi}_\sigma, \bar{\varphi}_{\sigma'}) = -(\bar{\varphi}_\sigma^*, \bar{\varphi}_{\sigma'}^*) = \delta_{\sigma\sigma'}$<br>$(\bar{\varphi}_\sigma, \bar{\varphi}_{\sigma'}^*) = 0$ |
| Relações de comutação        | $[\hat{a}_\sigma, \hat{a}_{\sigma'}] = [\hat{a}_\sigma^\dagger, \hat{a}_{\sigma'}^\dagger] = 0$<br>$[\hat{a}_\sigma, \hat{a}_{\sigma'}^\dagger] = \delta_{\sigma\sigma'}$ | $[\hat{b}_\sigma, \hat{b}_{\sigma'}] = [\hat{b}_\sigma^\dagger, \hat{b}_{\sigma'}^\dagger] = 0$<br>$[\hat{b}_\sigma, \hat{b}_{\sigma'}^\dagger] = \delta_{\sigma\sigma'}$                    |
| Estado de vácuo              | $ 0\rangle_\varphi$<br>$\hat{a}_\sigma  0\rangle_\varphi = 0, \forall \sigma$<br>$\hat{a}_\sigma^\dagger  0\rangle_\varphi =  1_\sigma\rangle_\varphi$                    | $ 0\rangle_{\bar{\varphi}}$<br>$\hat{b}_\sigma  0\rangle_{\bar{\varphi}} = 0, \forall \sigma$<br>$\hat{b}_\sigma^\dagger  0\rangle_{\bar{\varphi}} =  1_\sigma\rangle_{\bar{\varphi}}$       |

Legenda: De maneira geral os conjuntos  $\{\varphi\}$  e  $\{\bar{\varphi}\}$  são distintos, assim como os operadores  $\hat{a}_\sigma$  ( $\hat{a}_\sigma^\dagger$ ) e  $\hat{b}_\sigma$  ( $\hat{b}_\sigma^\dagger$ ), além de  $|0\rangle_\varphi \neq |0\rangle_{\bar{\varphi}}$ . No quadro acima  $|1_\sigma\rangle_\varphi$  e  $|1_\sigma\rangle_{\bar{\varphi}}$  representam um estado contendo 1 partícula com momento  $\sigma$ . A notação  $\{ ; \}$  simboliza os elementos de cada conjunto de quantidades, e não comutadores. Por esse motivo a notação  $;$  foi usada para fazer distinção dos comutadores, definidos usualmente como  $\{A, B\} = AB + BA$ .

A existência de múltiplos e diferentes estados de vácuo, como exemplificado na Tabela 1, permite chegar a conclusão de que no espaço-tempo curvo dois observadores distintos podem não perceber o mesmo estado de vácuo de um sistema. Uma vez que  $\hat{\varphi}$  é o mesmo, pode-se estabelecer uma relação entre as quantidades de ambos os conjuntos  $\{\varphi\}$  e  $\{\bar{\varphi}\}$ . Na linguagem da mecânica quântica, podemos obter a lei de transformação entre as bases vetoriais distintas  $\{\varphi\}$  e  $\{\bar{\varphi}\}$ . Através de tais transformações, por exemplo, observa-se que se o sistema está no estado de vácuo descrito pela base  $\{\varphi\}$ , situação em que não há partículas, o mesmo pode conter partículas com respeito ao estado de vácuo definido pela base  $\{\bar{\varphi}\}$  – matematicamente  $\hat{a}_\sigma|0\rangle_\varphi = 0$ , mas  $\hat{a}_\sigma|0\rangle_{\bar{\varphi}} \neq 0$ . Esse fato exemplifica de maneira simples um fenômeno conhecido como a produção de partículas. Por questões de objetividade o tema produção de partículas não será abordado aqui. Para maiores detalhes sobre as ideias apresentadas, assim como exemplos, recomendamos: os livros textos [61], Capítulo 3; [14], Capítulos 3, 4.1-4 e 6.1-5; [63]; e para um texto mais específico sobre o tema produção de partículas veja [69].

O conjunto de soluções normalizadas que utilizamos para expandir o operador de campo são construídas de forma que podemos identificá-las como modos de frequência positiva. Especificamente, buscamos escrever  $\varphi_\sigma$  com a estrutura separável [63]

$$\varphi_\sigma(x) = R_\omega(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (2.109)$$

onde a função  $R_\omega(\mathbf{x})$  representa de maneira generalista a parte espacial da solução mais possíveis constantes de normalização. Note que, a parte espacial também pode depender de  $\omega$  e por esse motivo o subscrito foi adicionado. Soluções respeitando a estrutura (2.109) podem ser descritas como modos de frequência positiva fixando  $\omega > 0$ .

No espaço-tempo plano a estrutura (2.109) é facilmente obtida, uma vez que as equações de Klein-Gordon (2.47) e (2.51) descrevem ondas planas. Em termos matemáticos, tomando como exemplo as soluções (2.48), que satisfazem a Eq. (2.109), essa condição nos diz que

$$i\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial t} = \omega\varphi_\sigma, \text{ com } \omega > 0. \quad (2.110)$$

Lembre da equação de Schrödinger (2.69),  $i\hbar\partial_t\varphi_\sigma = \hat{H}\varphi_\sigma$ , de forma que (2.110) possui um “autovalor” positivo de  $\hbar\omega$  para o operador energia  $\hat{H}$ . O complexo conjugado desse resultado mostra que os modos  $\varphi_\sigma^*$  possuem um valor associado de  $-\omega$  e por isso são denominados como modos (ou estado) de frequência (ou energia) negativa. Essa é apenas uma terminologia, e na verdade os estados de energia negativa correspondem a antipartículas com energia positiva – a anergia das partículas e antipartículas são positivas. Veja a discussão em [54, p. 61-62]. É interessante observar que a expansão (2.60) considera ambos os casos, ou seja, consiste em uma superposição dos estados de partículas e antipartículas. Como estamos lidando com um campo escalar real o operador  $\hat{a}_\sigma(\hat{a}_\sigma^\dagger)$  refere-se tanto a partículas como antipartículas [54].

Em termos práticos, no espaço-tempo plano, o fato de que as componentes do tensor métrico ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ) independem das coordenadas nos proporciona a oportunidade de resolver a equação de Klein-Gordon de maneira direta, pelo método da separação separáveis. Entretanto, no caso do espaço-tempo curvo essa facilidade não está a nossa disposição, pois de maneira geral  $g_{\mu\nu}$  depende das coordenadas, logo as soluções para (2.98) podem não concordar com a estrutura (2.109) e, conseqüentemente, não satisfazer (2.110). Para métricas que satisfazem as condições [63]

$$g_{\mu 0} = 0 \quad (2.111a)$$

e

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0, \quad (2.111b)$$

é possível estabelecer um conjunto de modos ortonormalizados com a forma (2.109) e que, portanto, satisfazem imediatamente a condição (2.110). As relações (2.111) mostram que a métrica é independente do tempo e nesse caso dizemos que a mesma define um espaço-tempo estático. Podemos facilmente interpretar cada uma das condições (2.111). A Eq. (2.111a) expressa a exigência de que a coordenada temporal não se misture com as demais coordenadas espaciais, enquanto que (2.111b) impõe que as componentes do tensor métrico devem ser independentes do tempo.



### 3 Funções de Wightman de frequência positiva para o campo escalar sem massa

Um elemento fundamental para os cálculos do valor esperado no estado de vácuo (VEV) de alguns observáveis físicos é a função de Wightman de frequência positiva (FWFP). Com o seu auxílio podemos obter quantidades como o VEV do operador campo ao quadrado,  $\langle \hat{\phi}^2 \rangle$ , tensor energia-momento,  $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ , e o VEV para a dispersão de velocidades de uma partícula pontual interagindo com um campo escalar (real) sem massa, como veremos nos Capítulos 4, 5 e 6. Tendo em vista a sua relevância e frequente utilização no presente trabalho, a seguir, faremos uma breve revisão sobre essa quantidade. Também, vamos calcular as expressões para a FWFP em situações particulares, as quais são definidas pela implementação de diferentes configurações, como geometrias não triviais e condições de contorno. Embora seja uma discussão técnica, esse capítulo se justifica na proposta de construir um texto contínuo e autocontido no tocante a todos os elementos que são necessários para as discussões posteriores. Desde já, enfatizamos que não é nosso objetivo revisar toda a teoria das funções de Green, mas dar um enfoque maior para uma delas em particular: a FWFP. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências citadas ao longo do texto.

#### 3.1 Definições e expressões gerais

Na Teoria Quântica de Campos é bem conhecido o fato de que o valor esperado no estado de vácuo (VEV) para o produto de um número arbitrário de operadores de campo pode ser reduzido e identificado como funções de Green [61]. Especificamente, quantidades como  $\langle 0 | \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 | 0 \rangle$  ou, de maneira geral,  $\langle 0 | \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \dots \hat{\phi}_n | 0 \rangle$ , estão relacionadas às funções de Green. Em virtude do constante surgimento no decorrer desse trabalho, uma função de Green particular que estaremos interessados é a função de Wightman de frequência positiva (FWFP), a qual é definida pela expressão

$$W^+(x, x') = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0 \rangle, \quad (3.1)$$

onde  $\hat{\phi}(x)$  e  $\hat{\phi}(x')$  são dois operadores de campo, construídos conforme (2.60), para dois pontos arbitrários do espaço-tempo, identificados pelas coordenadas  $x = (\mathbf{x}, t)$  e  $x' = (\mathbf{x}', t')$ . Diferentes notações podem ser encontradas na literatura para representar as funções de Wightman. Por exemplo, as Refs. [61, 67] usam o rótulo  $G$ , enquanto que a Ref. [70] utiliza a notação  $W$ . Por questões de conveniência utilizaremos ao longo deste trabalho a representação  $W$ , além de que nas seções seguintes o sobrescrito “+” será omitido a fim de simplificar a notação, deixando implícita a sua presença.

Utilizando a expansão (2.60) para os operadores de campo em (3.1), podemos reescrever a expressão para  $W^+$  em termos dos modos  $\varphi_\sigma$ . Então, após a distribuição dos termos, encontramos que

$$\begin{aligned} W^+(x, x') = & \sum_{\sigma, \sigma'} \langle 0 | [\hat{a}_\sigma \hat{a}_{\sigma'} \varphi_\sigma(x) \varphi_{\sigma'}(x') + \hat{a}_\sigma \hat{a}_{\sigma'}^\dagger \varphi_\sigma(x) \varphi_{\sigma'}^*(x') \\ & + \hat{a}_\sigma^\dagger \hat{a}_{\sigma'} \varphi_\sigma^*(x) \varphi_{\sigma'}(x') + \hat{a}_\sigma^\dagger \hat{a}_{\sigma'}^\dagger \varphi_\sigma^*(x) \varphi_{\sigma'}^*(x')] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Os modos  $\varphi_\sigma(x)$  em (3.2) podem ser permutados com os operadores e os valores esperados  $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$ , sem quaisquer efeitos sobre os resultados, uma vez que são funções escalares. Além disso, observando as álgebras dos operadores de criação  $\hat{a}_\sigma^\dagger$  e aniquilação  $\hat{a}_\sigma$  expostas em (2.63), nota-se que

$$\langle 0 | a_\sigma a_{\sigma'}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | a_\sigma | 1_{\sigma'} \rangle = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (3.3a)$$

$$\langle 0 | a_\sigma^\dagger a_\sigma | 0 \rangle = \langle 0 | a_\sigma^\dagger(0) | 0 \rangle = 0 \quad (3.3b)$$

e

$$\langle 0 | a_\sigma a_\sigma | 0 \rangle = \langle 0 | a_\sigma^\dagger a_\sigma^\dagger | 0 \rangle = 0. \quad (3.3c)$$

Portanto, utilizando os resultados (3.3) em (3.2), obtemos a expressão que é tipicamente apresenta na literatura para a FWFP, isto é,

$$W^+(x, x') = \sum_{\sigma} \varphi_\sigma(x) \varphi_\sigma^*(x'). \quad (3.4)$$

O símbolo de soma na Eq. (3.4), como sabemos, corresponde a uma notação representativa que nos instrui a somar sobre todos os números quânticos  $\sigma$  da solução, podendo representar tanto integrais, se o índice for contínuo, como somatórias, se o índice for discreto – confira novamente a Eq. (2.61).

A importância que a FWFP possui no cálculo do VEV dos observáveis também pode ser exemplificada observando a conexão que a mesma possui com outras funções de Green bem conhecidas da teoria quântica de campos. A Tabela 2 reúne algumas destas expressões, as quais exibem a relação particular que a FWFP possui com outras funções de Green. Em termos práticos, tais relações nos mostram que, uma vez encontrada a expressão para  $W^+(x, x')$ , podemos obter indiretamente outras funções de Green desejadas utilizando as expressões convenientes expostas na Tabela 2.

É instrutivo observar que a quantidade  $W^+$  também pode ser pensada como uma soma de amplitudes no espaço dos momentos. Esse raciocínio encontra suporte em uma possível interpretação que as funções de Green possuem, que é a equivalência com o propagador de partículas em mecânica quântica – para mais detalhes sobre o assunto veja, por exemplo, os Capítulos 16 e 17 da Ref. [54]. Resumidamente, o propagador nos informa

Tabela 2 – Relação entre a FWFP  $W^+(x, x')$  para o campo escalar e outras funções de Green da teoria quântica de campos.

|                                  |                                                          |
|----------------------------------|----------------------------------------------------------|
| FWF negativa $W^-$               | $W^- = (W^+)^*$                                          |
| Função de Hadamard $G^{(1)}$     | $G^{(1)} = 2\text{Re}(W^+)$                              |
| Função de Green retardada $G_r$  | $G_r = -2\theta(t - t')\text{Im}(W^+)$                   |
| Função de Green avançada $G_a$   | $G_a = 2\theta(t' - t)\text{Im}(W^+)$                    |
| Função de Green de Feynman $G_F$ | $G_F = i\{\theta(t - t')[W^+] - \theta(t' - t)[W^+]^*\}$ |

Legenda: Por simplicidade a dependência das funções com as coordenadas de espaço-tempo  $(x, x')$  foi omitida. Nas expressões acima, as notações  $\text{Re}(z)$ ,  $\text{Im}(z)$  e  $z^*$  significam que devemos considerar a parte real, imaginária e o complexo conjugado da quantidade  $z$ , respectivamente. A função  $\theta(t) = 1$  se  $t > 0$  e nula para  $t < 0$ . A sigla FWF na primeira linha corresponde a expressão: “função de Wightman de frequência” (positiva ou negativa). Fonte: construída pelo autor com base nos resultados da Ref. [67, p. 82].

sobre a amplitude de transição  $\mathcal{A}$  correspondente ao processo de uma partícula sair de um estado inicial  $|\mathbf{x}', t'\rangle$  para um estado final  $|\mathbf{x}, t\rangle$  com  $t > t'$ . Portanto, de acordo com as leis da mecânica quântica, a amplitude desse processo é dada por  $\mathcal{A} = \langle \mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t' \rangle$ , que pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \langle \mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t' \rangle = \sum_{\sigma} \langle \mathbf{x}, t | \sigma \rangle (\langle \mathbf{x}', t' | \sigma \rangle)^* \\
&= \sum_{\sigma} \varphi_{\sigma}(x) \varphi_{\sigma}^*(x') = W^+(x, x'),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde a famosa relação de completeza

$$\sum_{\sigma} |\sigma\rangle \langle \sigma| = 1$$

foi utilizada, para projetar o produto interno no espaço dos momentos  $\sigma$  e, em seguida, identificamos as soluções  $\langle \mathbf{x}, t | \sigma \rangle = \varphi_{\sigma}(x)$ , com a notação quadrivetorial  $x = (\mathbf{x}, t)$ . Então, como estamos considerando o estado de vácuo, a Eq. (3.5) pode representar a amplitude referente ao processo no qual uma partícula é criada no estado de vácuo, no ponto  $x'$ , e posteriormente aniquilada, em um ponto  $x$ .

A partir da Eq. (3.4) indubitavelmente percebe-se que a dependência da FWFP com os modos implica que diferentes soluções para  $\varphi_{\sigma}(x)$  produzem diferentes expressões para  $W^+(x, x')$ . Essencialmente, como veremos, a modificação estrutural das soluções ocorre como consequência das alterações na geometria ou topologia do espaço, as quais podem ser implementadas através de condições de contorno ou espaços-tempos não triviais. Em ambas as situações a propagação dos modos pelo espaço é distorcida. Na sequência, vamos resolver a equação de Klein-Gordon para o campo escalar sem massa em diferentes situações e, em seguida, utilizar as soluções normalizadas para construir as respectivas FWFP através da Eq. (3.4).

## 3.2 FWFP no espaço-tempo cilíndrico com corda cósmica e condição quasiperiódica

### 3.2.1 Aspectos geométricos e modos normalizados

De acordo com a teoria do “*Big bang*” o Universo emergiu de uma fase inicial extremamente densa e quente. À medida em que o Universo expandiu, sua temperatura (assim como a densidade) diminuiu, permitindo a formação de estruturas micro e macroscópicas, como partículas, átomos, estrelas, galáxias, etc [71]. Um remanescente desse estado primordial que observamos atualmente é a radiação cósmica de fundo [47]. Aliada ao mecanismo de quebra espontânea de simetria, as variações de temperatura, isto é, transições de fase, pelas quais o Universo passou, podem ter gerado outras estruturas que (em tese) possivelmente ainda estão presentes no Universo atual, como por exemplo, as cordas cósmicas [72].

Um modelo simplificado de corda cósmica assume que a mesma consiste em uma linha com espessura zero capaz de gerar um campo suficientemente fraco, de modo que a descrição matemática pela gravidade linearizada é aplicável [73]. Nessas aproximações, o espaço-tempo de uma corda cósmica paralela ao eixo  $z$  é descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (3.6)$$

onde  $\rho \geq 0$ ,  $z \in [-\infty, +\infty]$  e a coordenada angular  $\phi \in [0, 2\pi/p]$ , com

$$p = (1 - 4G\mu)^{-1} \quad (3.7)$$

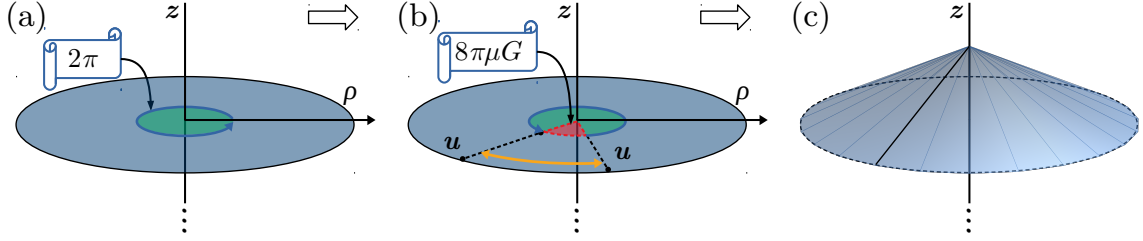
escrito em termos da constante gravitacional newtoniana  $G$  e densidade linear de energia  $\mu$  da corda cósmica. Na aproximação de campo fraco  $G\mu \ll 1$ .

A expressão (3.6) possui uma estrutura semelhante a de um elemento de linha para um espaço-tempo plano em coordenadas cilíndricas. Entretanto, de acordo com a Eq. (3.7), o espaço-tempo não é verdadeiramente cilíndrico, uma vez que a coordenada  $\phi$  possui um déficit angular de  $8\pi G\mu$ , o qual revela a presença da corda cósmica. Em outras palavras, a manifestação da corda, bem como seus efeitos, estão codificados no parâmetro  $G\mu$  [73, 74].

Na vizinhança da corda cósmica o espaço-tempo é localmente plano, mas do ponto de vista global dizemos que o espaço-tempo é cônico [74]. Uma imagem geométrica desse aspecto está exposta na Figura 7, em que após a remoção do arco  $8\pi G\mu$  do plano polar usual ( $2\pi$ ) as faces de corte são unidas para formar a geometria de espaço-tempo cônica.

Após a sùmula geométrica realiza acima, vamos resolver a equação de Klein-Gordon para um campo escalar sem massa (2.103) em (3+1) dimensões, minimamente acoplado ( $\xi = 0$ ), no espaço-tempo cilíndrico com a presença da corda cósmica, isto é, considerando

Figura 7 – Origem do espaço-tempo globalmente cônico pela remoção do déficit angular induzido pela presença de uma corda cósmica.



Legenda: Em (a) encontra-se a representação usual do espaço cilíndrico, no qual  $\rho \geq 0$ ,  $z = [-\infty, +\infty]$  e  $\phi^* = [0, 2\pi]$ . Após a remoção do arco  $8\pi G\mu$  e junção das faces de corte  $u$ , conforme mostrado em (b), o plano circular é convertido em um cone, segundo a ilustração (c). Fonte: produzido pelo autor com base na referência [74].

o elemento de linha (3.6). De acordo com as Eqs. (2.103), (2.100) e (3.6), devemos resolver a equação diferencial

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\varphi}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2\varphi}{d\phi^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (3.8)$$

Por motivos que serão esclarecidos no Capítulo 4, vamos manter explicitamente a velocidade da luz em nossas expressões, além de utilizar o rótulo  $c_0$  para essa quantidade.

Em virtude da ausência de termos cruzados em (3.8) podemos admitir o *ansatz* de soluções separáveis

$$\varphi(x) = T(t)R(\rho)\Phi(\phi)Z(z), \quad (3.9)$$

que permite isolar a dependência de cada variável em membros distintos. Logo, a substituição de (3.9) em (3.8) nos fornece como resultado:

$$\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Phi\rho^2} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{1}{Tc_0^2} \frac{d^2T}{dt^2}. \quad (3.10)$$

A Eq. (3.10) mostra uma relação entre quatro equações diferenciais com variáveis distintas e independentes, porém vinculadas. Para que essa relação seja possível, cada equação diferencial deve ser igual a uma constante de separação particular. Portanto, admitindo diferentes constantes de separação, constatamos que

$$T(t)\Phi(\phi)Z(z) = Ne^{-i\omega t + ik_\phi\phi + ik_z z} \quad (3.11)$$

e que a função  $R$  obedece a equação diferencial

$$\frac{d^2R}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dR}{ds} + R \left( 1 - \frac{k_\phi^2}{s^2} \right) = 0, \quad (3.12)$$

com  $s = \ell\rho$  e  $\ell^2 = (\omega/c_0)^2 - k_z^2$ , onde  $\ell$  representa uma constante de separação associada à parte  $R$  da solução. Na Eq. (3.11),  $N$  representa uma constante arbitrária. Os parâmetros

$\omega$ ,  $k_\phi$  e  $k_z$  são constantes de separação, as quais nessa ordem são identificadas como a frequência e os momentos associados as coordenadas  $\phi$  e  $z$ .

A estrutura da Eq. (3.12) corresponde a uma equação diferencial de Bessel [59, 75], que admite como soluções as funções de Bessel de primeiro tipo

$$R(s) = R(\ell\rho) = J_{|k_\phi|}(\ell\rho), \quad (3.13)$$

com o momento  $|k_\phi|$  correspondendo a ordem da função. O módulo em (3.13) surge devido a possibilidade de que a constante  $k_\phi$  em (3.12) possa assumir valores negativos. Então, a partir das Eqs. (3.9), (3.11) e (3.13), segue que

$$\varphi(x) = N e^{-i\omega t + i k_\phi \phi + i k_z z} J_{|k_\phi|}(\ell\rho) \quad (3.14)$$

são as soluções para (3.8).

No espaço-tempo da corda cósmica a periodicidade da coordenada angular é tal que dois pontos  $\phi$  e  $\phi + 2\pi/p$  coincidem. Aqui, vamos impor condições de contorno quasiperiódicas sobre a solução  $\varphi(x)$ , as quais obedecem a relação matemática

$$\varphi(t, \rho, \phi, z) = e^{-2\pi\beta i} \varphi\left(t, \rho, \phi + \frac{2\pi}{p}, z\right). \quad (3.15)$$

A variável  $\beta$  é chamada de constante ou parâmetro de quasiperiodicidade e pode assumir quaisquer valores dentro do intervalo  $0 \leq \beta < 1$ . Os valores particulares  $\beta = 0$  e  $\beta = 1/2$  recuperam as condições de contorno periódicas,  $\varphi(t, \rho, \phi, z) = \varphi(t, \rho, \pi + 2\pi/p, z)$ , e anti periódicas,  $\varphi(t, \rho, \phi, z) = -\varphi(t, \rho, \pi + 2\pi/p, z)$ . Quando a solução (3.14) é submetida a condição (3.15), encontra-se que o momento relativo a coordenada  $\phi$  deve satisfazer à igualdade:

$$k_\phi = p(m + \beta),$$

com  $m$  inteiro. Note que  $k_\phi$  pode assumir valores não inteiros. Portanto,

$$\varphi(x) = N e^{-i\omega t + i p(m+\beta)\phi + i k_z z} J_{p|m+\beta|}(\ell\rho). \quad (3.16)$$

A constante de normalização  $N$  em (3.16) pode ser obtida através da Eq. (2.102), observando que  $\partial_t \varphi = -i\omega$ ,  $\partial_t \varphi^* = +i\omega$  e  $g = -\rho^2$ . Após as devidas simplificações, encontramos que as soluções normalizadas para (3.8) são

$$\varphi_\sigma(x) = \left( \frac{p \ell \hbar c_0^2}{8\pi^2 \omega} \right) e^{-i\omega t + i p(m+\beta)\phi + i k_z z} J_{p|m+\beta|}(\ell\rho), \quad (3.17)$$

com  $\ell^2 = (\omega/c_0)^2 - k_z^2$  e o subscrito  $\sigma$  identificando o conjunto de números quânticos associados a solução, especificamente,  $\sigma = (\ell, m, k_z)$ .

### 3.2.2 FWFP para o campo escalar no espaço-tempo da corda cósmica com condição quasiperiódica

Utilizando os modos (3.17) e a Eq. (3.4) podemos calcular a FWFP para o campo escalar sem massa no espaço-tempo cilíndrico com a presença de uma corda cósmica, sujeito a condições de contorno do tipo quasiperiódicas. Então, observando que

$$\sum_{\sigma} \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_0^{\infty} d\ell, \quad (3.18)$$

temos que

$$W = \frac{\hbar p c_0^2}{8\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_0^{\infty} d\ell \frac{\ell}{\omega} e^{-i\omega\Delta t + ip(m+\beta)\Delta\phi + ik_z\Delta z} J_{p|m+\beta|}(\ell\rho) J_{p|m+\beta|}(\ell\rho'), \quad (3.19)$$

Pazões práticas foram definidas as quantidades  $\Delta t = t - t'$ ,  $\Delta\phi = \phi - \phi'$ ,  $\Delta z = z - z'$  e omitiu-se a dependência de  $W$  com as coordenadas no lado esquerdo da expressão.

As integrais em (3.19) podem ser calculadas de forma simples através dos resultados 3.325 e 6.633(2) da Ref. [75], cujas expressões, nessa ordem, são

$$\int_0^{\infty} dx e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}} \quad (3.20a)$$

e

$$\int_0^{\infty} dx x e^{-s^2 x^2} J_{\nu}(\alpha x) J_{\nu}(\gamma x) = \frac{1}{2s^2} e^{-\frac{(\alpha^2 + \gamma^2)}{4s^2}} I_{\nu}\left(\frac{\alpha\gamma}{2s^2}\right), \quad (3.20b)$$

com  $a, b, \alpha, \gamma > 0$ ,  $\text{Re}(\nu) > -1$ ,  $|\text{Arg}(s)| < \pi/4$  e  $I_{\nu}(z)$  representando a função de Bessel de argumento imaginário. Então, desenvolvendo a Eq. (3.19) com o auxílio das relações (3.20), encontramos que

$$W = \frac{\hbar p c_0}{8\pi^2 \rho \rho'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ip(m+\beta)\Delta\phi} \int_0^{\infty} dx e^{-\frac{\delta x}{2\rho\rho'}} I_{p|m+\beta|}(x), \quad (3.21)$$

cujas variável de integração  $x = \rho\rho'/2c_0^2 s^2$  e definimos a quantidade

$$\delta = \rho^2 + \rho'^2 + \Delta z^2 + c_0^2 \Delta\tau^2, \quad (3.22)$$

na qual  $\Delta\tau = i\Delta t$ . Com o intuito de manter as discussões compreensíveis e objetivas, é importante descrevermos moderadamente os procedimentos matemáticos que foram utilizados entre as Eqs. (3.19) e (3.21). Primeiro, utilizamos (3.20a) para desacoplar os momentos reunidos na frequência  $\omega$  e separar as integrais em (3.19) para cada variável. Em seguida, a Eq. (3.20b) é aplicada para resolver a integral na variável  $\ell$ . Finalmente, a integração em  $k_z$  é computada, observando sua estrutura de integral do tipo gaussiana.

Podemos simplificar ainda mais a Eq. (3.21) utilizando o resultado [76, 77]

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\beta, p, \xi) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ipm\Delta\phi} I_{p|m+\beta|}(\xi) \\ &= \frac{1}{p} \sum_m e^{\xi \cos(\frac{2m\pi}{p} - \Delta\phi)} e^{i\beta(2m\pi - p\Delta\phi)} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=-1}^1 j e^{j(i\pi p\beta)} \int_0^\infty dy \mathcal{K}_j(\xi, p, \beta, y, \Delta\phi),\end{aligned}\quad (3.23)$$

no qual o somatório em  $m$  no lado direito é restrito a condição

$$-\frac{p}{2} + \frac{\Delta\phi}{(2\pi/p)} \leq m \leq \frac{p}{2} + \frac{\Delta\phi}{(2\pi/p)} \quad (3.24a)$$

e

$$\mathcal{K}_j(\xi, p, \beta, y, \Delta\phi) = \frac{\{\cosh[py(1-\beta)] - \cosh(p\beta y)e^{-ip(\Delta\phi+j\pi)}\}}{e^{\xi \cosh(y)}\{\cosh(py) - \cos[p(\Delta\phi+j\pi)]\}}. \quad (3.24b)$$

Assim, identificando as variáveis correspondentes e substituindo a estrutura (3.23) na Eq. (3.21), após a solução das integrais na variável  $x$  e devidas simplificações, encontramos que

$$\begin{aligned}W(x, x') &= \frac{\hbar c_0}{4\pi^2} \sum_m \frac{1}{\sigma_m} e^{2\pi m\beta i} \\ &\quad - \frac{\hbar c_0 p e^{ip\beta\Delta\phi}}{8\pi^3 i} \int_0^\infty dy \frac{1}{\sigma_y} \mathcal{F}(\beta, p, \Delta\phi, y),\end{aligned}\quad (3.25)$$

onde definimos a função auxiliar

$$\mathcal{F}(\beta, p, \Delta\phi, y) = \sum_{j=-1}^1 j e^{j(i\pi p\beta)} \frac{\{\cosh[py(1-\beta)] - \cosh(p\beta y)e^{-ip(\Delta\phi+j\pi)}\}}{\{\cosh(py) - \cos[p(\Delta\phi+j\pi)]\}} \quad (3.26)$$

juntamente com as quantidades

$$\sigma_m = \delta - 2\rho\rho' \cos\left(\frac{2m\pi}{p} - \Delta\phi\right) \quad (3.27a)$$

e

$$\sigma_y = \delta + 2\rho\rho' \cosh(y). \quad (3.27b)$$

Recordando a definição de  $\delta$  em (3.22), nota-se que as Eqs. (3.27) têm estruturas semelhantes a separações de espaço-tempo.

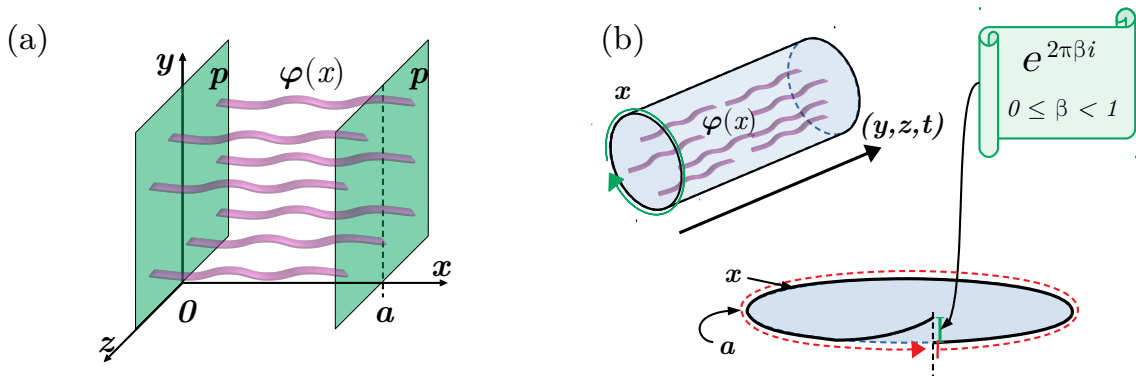
A Eq. (3.25) corresponde a FWFP para um campo escalar sem massa em um espaço-tempo cilíndrico, com a presença de uma corda cósmica idealizada e sujeito a condições de contorno quasiperiódicas. Esse resultado será utilizado no Capítulo 4, quando estivermos estudando o movimento Browniano Quântico induzido em uma geometria efetiva, desenvolvida considerando um meio com desclinação, que possui uma analogia com o espaço-tempo das cordas cósmicas no contexto gravitacional.

### 3.3 FWFP para o campo escalar sem massa em $(3+1)$ dimensões unidimensionalmente confinado

#### 3.3.1 Aspectos preliminares

A configuração geral para este cenário consiste em um campo escalar não massivo  $\varphi(x)$  se propagando pelo espaço-tempo de Minkowski em  $(3+1)$  dimensões. Os modos do campo estão limitados unidimensionalmente de duas formas distintas: (i) por dois planos paralelos perfeitamente refletores, situados sobre o eixo cartesiano  $x$ , e (ii) confinados mediante uma condição de quasiperiodicidade na direção  $x$ , por um comprimento finito  $a$ . Ambas as configurações estão ilustradas na Figura 8.

Figura 8 – Ilustração das formas de confinamento estudadas para o campo escalar não massivo em  $(3+1)$  dimensões no espaço-tempo de Minkowski.



Legenda: Na configuração (a) os modos do campo escalar  $\varphi(x)$  referentes a componente  $x$  estão confinados por dois planos paralelos ( $p$ ) situados em  $x = 0$  e  $x = a$ . No cenário (b) a componente  $x$  do campo escalar é compactificada em uma região de comprimento finito  $a$  e sua periodicidade é modificada por uma fase dependente do parâmetro  $\beta$ , que é chamado de constante de quasiperiodicidade. Fonte: produzido pelo autor, 2024.

No caso dos planos paralelos, estaremos interessados em estudar quatro configurações distintas que podem ser formadas utilizando as típicas condições de contorno de Dirichlet e Neumann. Juntamente com suas estruturas matemáticas, são estas:

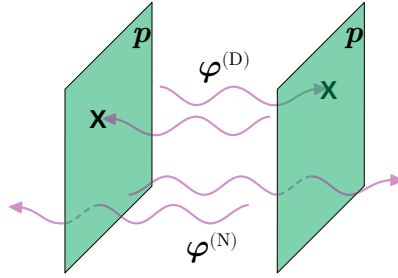
1. Condições puras de Dirichlet (D),

$$\varphi(t, x, y, z)|_{x=0} = \varphi(t, x, y, z)|_{x=a} = 0; \quad (3.28a)$$

2. Condições puras de Neumann (N),

$$\left[ \frac{\partial \varphi(t, x, y, z)}{\partial x} \right] \Big|_{x=0} = \left[ \frac{\partial \varphi(t, x, y, z)}{\partial x} \right] \Big|_{x=a} = 0; \quad (3.28b)$$

Figura 9 – Planos paralelos atuando como um filtro dos modos do campo, satisfazendo uma condição de contorno particular de Dirichlet.



Legenda: Dois planos perfeitamente refletoras  $p$  são sensíveis e intransponíveis para os modos que satisfazem a condição de Dirichlet,  $\varphi^{(D)}$ , mas indiferentes para modos livres dessa condição, por exemplo, satisfazendo condições de Neumann,  $\varphi^{(N)}$ . Fonte: produzido pelo autor, 2024.

### 3. Condições mistas (M),

#### 3.1 Dirichlet-Neumann (DN),

$$\varphi(t, x, y, z)|_{x=0} = \left[ \frac{\partial \varphi(t, x, y, z)}{\partial x} \right] \Big|_{x=a} = 0, \quad (3.28c)$$

#### 3.2 Neumann-Dirichlet (ND),

$$\left[ \frac{\partial \varphi(t, x, y, z)}{\partial x} \right] \Big|_{x=0} = \varphi(t, x, y, z)|_{x=a} = 0. \quad (3.28d)$$

Quando dizemos puras estamos nos referindo ao fato de que a condição em particular é aplicada a ambos os planos.

De maneira geral, para os casos envolvendo condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Mistas, a configuração do sistema será sempre descrita pela ilustração apresentada na Figura 8a, porém cada uma das condições mencionadas implicará em mudanças particulares inerentes de sua própria natureza. Além disso, as condições de contorno impostas sobre os planos podem ser interpretadas como filtros, que nos permitem sondar como cada “tipo” de modo contribui para o resultado final.

Para fins de exemplo, considere a Figura 9. Se uma condição de Dirichlet é utilizada sobre um plano, todos os modos satisfazendo essa condição de contorno,  $\varphi^{(D)}$ , serão nulos sobre a fronteira, em outras palavras, estão confinados na região de dimensão finita. Por outro lado, embora as expressões não mostrem explicitamente, a presença dos modos que não satisfazem a condição particular de Dirichlet está implícita, por exemplo, aqueles satisfazendo condições de Neumann,  $\varphi^{(N)}$ . Portanto,  $\varphi^{(N)}$  está livre para deixar a região compacta, uma vez que não obedece a condição de Dirichlet, ou seja, não é filtrado pela fronteira. Em síntese, as fronteiras tornam-se sensíveis apenas aos modos que são selecionados por cada condição de contorno.

Outra possibilidade de realizar o confinamento do campo é através da implementação de condições periódicas, tais que  $\varphi(x) = \varphi(x + a)$ , ou antiperiódicas,  $\varphi(x) = -\varphi(x + a)$ , onde  $a$  é o comprimento da compactificação. Aqui estaremos interessados em uma condição similar, mas com uma sutil modificação, que se resume na introdução de uma fase na condição periódica, a saber,

$$\varphi(x) = e^{-2\pi\beta i} \varphi(x + a). \quad (3.29)$$

Essa é a condição de contorno quasiperiódica que apresentamos anteriormente, confira a Eq. (3.15), mas agora implementada em um espaço-tempo plano, com o parâmetro de quasiperiodicidade  $0 \leq \beta < 1$ .

A condição quasiperiódica pode ser visualizada como um espaço-tempo compactificado na direção  $x$  e que possui uma topologia  $S^1$ , enquanto as demais coordenadas,  $y, z$  e  $t$ , perfazem um espaço do tipo  $\mathbb{R}^3$  – confira a Figura 8b para uma ilustração. A implementação da fase, através do parâmetro de quasiperiodicidade  $\beta$ , nos permite realizar uma análise genérica, em que são contemplados tanto os casos particulares periódico ( $\beta = 0$ ) e antiperiódico ( $\beta = 1/2$ ) como situações não triviais, em que  $\varphi(x) \neq \varphi(x + a)$ .

Semelhante ao caso anterior iniciamos o problema resolvendo a equação de Klein-Gordon, que na ocasião, isto é, para um campo escalar não massivo no espaço-tempo de Minkowski, corresponde a Eq. (2.51) da Seção 2.2. Por uma questão de plena compreensão vamos reproduzi-la novamente:

$$\square\varphi(x) = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi(x) = 0, \quad (3.30)$$

cujas soluções, como sabemos, são as ondas planas

$$\varphi(x) = N e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (3.31)$$

onde  $\omega = |\mathbf{k}|$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_x x + k_y y + k_z z$  e  $N$  é a constante de normalização, obtida via condição (2.67) e (2.68a). Em termos gerais, para obter (3.31) seguimos à risca o método utilizado na seção anterior. Assumimos soluções separáveis  $\varphi(x) = Q(x)R(y)S(z)T(t)$ , o que nos fornece um conjunto de quatro equações diferenciais de segunda ordem independentes, cujas soluções são facilmente obtidas. Então, o produto das soluções particulares encontradas compõe a Eq. (3.31), que representa os modos com frequência positiva para o campo escalar sem massa.

Para todos os casos dessa subseção a forma geral das soluções corresponde a Eq. (3.31). Além disso, muitos dos detalhes referentes aos cálculos da função de Wightman para cada um destes casos são compartilhados. Portanto, tendo em vista estas semelhanças, para evitar a repetição, na sequência faremos em detalhes o caso das condições de Dirichlet, enquanto que para os demais casos seremos um pouco mais objetivos nas passagens semelhantes, obviamente, comentando os passos e indicando, se necessário, as leves alterações nos desenvolvimentos.

### 3.3.2 Condições de Dirichlet

Aplicando a condição de Dirichlet (3.28a) sobre as soluções (3.31) e utilizando a Eq. (2.67) para normalizá-las, nos permite encontrar que

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 a \omega_n}} \sin(k_n x) e^{-i\omega_n t + i k_y y + i k_z z}, \quad (3.32)$$

onde  $\omega_n^2 = k_n^2 + k_y^2 + k_z^2$ ,  $-\infty < k_y, k_z < \infty$  e  $k_n = \frac{n\pi}{a}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Note que a aplicação das condições de Dirichlet para os dois planos produziu uma mudança estrutural na Eq. (3.31) por meio da uma espécie de seleção ou filtragem dos modos, de tal maneira que a componente  $x$  dos momentos tornou-se discreta. O subíndice  $\sigma$  rotula o conjunto de números quânticos associados aos modos, isto é,  $\sigma = (n, k_y, k_z)$ .

De posse dos modos, a FWFP associada será dada pela Eq. (3.4) com o símbolo da somatória

$$\sum_\sigma \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z, \quad (3.33)$$

em virtude dos intervalos das variáveis de momento na Eq. (3.32). Assim,

$$W^{(D)} = \frac{1}{4\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sin(k_n x) \sin(k_n x') \frac{e^{-i\omega_n \Delta t + i \vec{\rho} \cdot \Delta \vec{l}}}{\omega_n}, \quad (3.34)$$

onde foram definidas, convenientemente, as quantidades  $\vec{\rho} = k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$ ,  $\Delta \vec{l} = \Delta y \hat{y} + \Delta z \hat{z}$ ,  $\Delta t = (t - t')$ ,  $\Delta y = (y - y')$  e  $\Delta z = (z - z')$ . O índice superior no lado esquerdo foi adicionado para identificar a condição de contorno particular.

A dupla integral na expressão anterior pode ser facilmente resolvida se as coordenadas de momento  $k_y$  e  $k_z$  são tratadas engenhosamente como um espaço abstrato bidimensional do tipo polar. Utilizando esse artifício matemático podemos definir o raio  $\rho^2 = k_y^2 + k_z^2$ , tal que  $0 \leq \rho \leq \infty$ , e em seguida estabelecer a correspondência entre os elementos de área  $dk_y dk_z \equiv d\rho d\theta$ , com o ângulo polar  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Veja a Figura 10 para uma representação desse espaço abstrato. Então, com base nesse artifício e no resultado

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{iz \cos(\theta)} = 2\pi J_0(z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad (3.35)$$

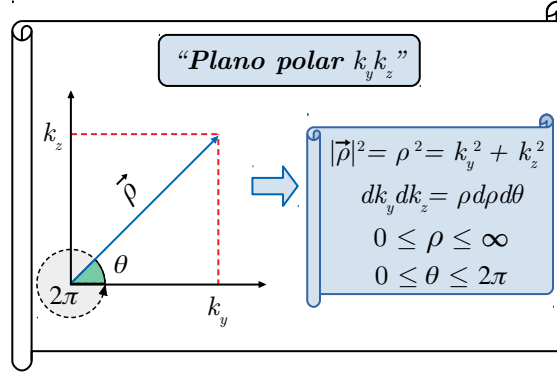
podemos escrever

$$W^{(D)} = \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty d\rho \rho J_0(\rho \Delta l) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) \sin(k_n x') \frac{e^{-i\omega_n \Delta t}}{\omega_n}, \quad (3.36)$$

onde  $J_0(z)$  é a função de Bessel de primeiro tipo [75].

Observando que a somatória em (3.36) atua sobre uma função com estrutura genérica

$$F(n) = \sin(k_n x) \sin(k_n x') \frac{e^{-i\omega_n \Delta t}}{\omega_n}, \quad (3.37)$$

Figura 10 – Espaço polar abstrato para as coordenadas de momento  $k_y$  e  $k_z$ .

Fonte: produzido pelo autor, 2024.

podemos utilizar a fórmula de Abel-Plana [78]

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \frac{1}{2}F(0) + \int_0^{\infty} dh F(h) + i \int_0^{\infty} dh \frac{[F(+ih) - F(-ih)]}{(e^{2\pi h} - 1)}, \quad (3.38)$$

para converter a soma em integral. A grosso modo, o efeito que a Eq. (3.38) produz em nossas expressões é a conversão do índice discreto  $n$  em uma variável contínua  $h$ . Assim, observando que  $F(0) = 0$ , diante das Eqs. (3.36), (3.37) e (3.38), encontramos que

$$\begin{aligned} W^{(D)} = & \frac{1}{2\pi a} \int_0^{\infty} d\rho \rho J_0(\rho \Delta l) \left\{ \int_0^{\infty} dh \sin\left(\frac{h\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{h\pi x'}{a}\right) \frac{e^{-i\omega_n \Delta t}}{\omega_n} \right. \\ & \left. + i \int_0^{\infty} dh \frac{\sin\left(\frac{ih\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{ih\pi x'}{a}\right)}{(e^{2\pi h} - 1)} \left[ \frac{e^{-i\omega_{+ih} \Delta t}}{\omega_{+ih}} - \frac{e^{-i\omega_{-ih} \Delta t}}{\omega_{-ih}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Em virtude da relação entre as variáveis contínuas  $\rho$  e  $h$  no interior das quantidades  $\omega_{\pm ih}$ , o uso da fórmula de Abel-Plana exige uma atenção especial no segundo termo da Eq. (3.39), no sentido de escolhermos a raiz correta para  $\omega_{\pm ih}$ . Pode-se observar que

$$\omega_{\pm ih} = \begin{cases} \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{h\pi}{a}\right)^2}, & \text{para } h < \frac{\rho a}{\pi}, \\ \pm i \sqrt{\left(\frac{h\pi}{a}\right)^2 - \rho^2}, & \text{para } h > \frac{\rho a}{\pi}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Do ponto de vista matemático, esse detalhe é crucial, pois envolve uma mudança de comportamento das funções no integrando de (3.39). Note que na região  $0 \leq h \leq \frac{\rho a}{\pi}$  temos  $\omega_{\pm ih} \in \mathbb{R}$ , logo os fatores  $e^{-i\omega_{\pm ih}} = \cos(\Delta\omega_{\pm ih}) - i \sin(\Delta\omega_{\pm ih})$  são funções senoidais, bem comportadas e que oscilam entre valores finitos. Por outro lado, na região  $\frac{\rho a}{\pi} \leq h \leq \infty$  temos que  $\omega_{\pm ih} \in \mathbb{C}$  e, conseqüentemente,  $e^{-i\omega_{\pm ih}} \equiv e^{\pm\omega_{\pm ih}} = \cosh(\Delta\omega_{\pm ih}) \pm \sinh(\Delta\omega_{\pm ih})$ , que são funções hiperbólicas, cujo comportamento é divergente para grandes argumentos.

Diante das observações acima, a Eq. (3.40) mostra que no intervalo  $0 \leq h \leq \frac{\rho a}{\pi}$  a contribuição proveniente do segundo termo em (3.39) é nula, pois haverá um cancelamento

entre as quantidades devido a diferença de sinais. Então, com base nessas observações conclui-se que

$$W^{(D)} = W_1^{(D)} + W_2^{(D)}, \quad (3.41)$$

onde definimos

$$W_1^{(D)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty ds \sin(sx) \sin(sx') \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + s^2}} e^{-i\Delta t \sqrt{\rho^2 + s^2}} J_0(\rho \Delta l) \quad (3.42a)$$

e

$$W_2^{(D)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\rho \rho J_0(\rho \Delta l) \int_\rho^\infty ds \frac{\sin(isx) \sin(isx') \cosh(\Delta t \sqrt{s^2 - \rho^2})}{(e^{2as} - 1) \sqrt{s^2 - \rho^2}}. \quad (3.42b)$$

A decomposição acima é útil tanto em um sentido prático como para fins de clareza e organização nos desenvolvimentos, pois permite desenvolver cada contribuição separadamente, algo que faremos na sequência. Além disso, para o estabelecimento de ambas as Eqs. (3.42a) e (3.42b), introduzimos convenientemente a nova variável  $s = \frac{h\pi}{a}$ , visto que tal procedimento simplifica as expressões.

Na expressão de  $W_1^{(D)}$ , a contribuição proveniente da integral em  $\rho$  pode ser calculada com o auxílio do resultado [79, p. 203]

$$\int_0^\infty dx \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \left\{ \begin{array}{l} \sin(b\sqrt{x^2 + z^2}) \\ \cos(b\sqrt{x^2 + z^2}) \end{array} \right\} J_0(cx) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{e^{-z\sqrt{c^2 - b^2}}}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad (3.43)$$

com  $\text{Re}(z) > 0$  e  $0 < b < c$ , além da aplicação da fórmula de Euler  $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$ , para decomposição do termo exponencial. Seguidamente, a integração em  $s$  é resolvida por meio da relação [75, p. 488]

$$\int_0^\infty dx e^{-\gamma x} \sin(zx) \sin(wx) = \frac{2\gamma zw}{[\gamma^2 + (z+w)^2][\gamma^2 + (z-w)^2]}, \quad (3.44)$$

observando que  $4zw = [\gamma^2 + (z+w)^2] - [\gamma^2 + (z-w)^2]$ . Portanto, identificando cada quantidade na Eq. (3.42a) correspondente aos parâmetros livres nas relações (3.43) e (3.44), após alguma álgebra, obtemos que

$$W_1^{(D)} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{\Delta \bar{r}^2} \right), \quad (3.45)$$

onde foram definidas as separações  $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2$  e  $\Delta \bar{r}^2 = \Delta \bar{x}^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2$ , com  $\Delta x = (x - x')$  e  $\Delta \bar{x} = (x + x')$ .

Para  $W_2^{(D)}$  devemos ser cuidadosos com a permutação das integrais em  $\rho$  e  $s$ , pois observa-se que o limite inferior da integração em  $s$  corresponde a variável da integração sobre  $\rho$ . Simbolicamente, o integrando é representado por uma função genérica de duas variáveis  $f(\rho, s)$ . Logo, utilizando a identidade [75, p. 608]

$$\int_0^\lambda dz \int_z^\lambda dw f(z, w) = \int_0^\lambda dw \int_0^w dz f(z, w), \quad (3.46)$$

com  $\lambda = \infty$ , é possível inverter a ordem das integrais em (3.42b) com segurança. Note que essa manipulação corresponde a uma mudança na região de integração. Então, aplicando a identidade (3.46), podemos escrever

$$\begin{aligned} W_2^{(D)} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{\sin(isx) \sin(isx')}{(e^{2as} - 1)} \int_0^s d\rho \frac{\rho \cosh(\Delta t \sqrt{s^2 - \rho^2})}{\sqrt{s^2 - \rho^2}} J_0(\rho \Delta l) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{\sin(isx) \sin(isx')}{(e^{2as} - 1)} \frac{\sin(\alpha s)}{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

com  $\alpha^2 = \Delta l^2 - \Delta t^2$  e  $\Delta l^2 = \Delta y^2 + \Delta z^2$ . Para estabelecer a segunda igualdade da equação acima utilizamos o resultado [79, p. 201]

$$\int_0^\gamma dw \frac{w \cos(b\sqrt{\gamma^2 - w^2})}{\sqrt{\gamma^2 - w^2}} J_0(cw) = \frac{\sin(\gamma\sqrt{b^2 + c^2})}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad (3.48)$$

com  $\gamma > 0$  e a equivalência  $\cos(iw) = \cosh(w)$ .

Diante da identidade trigonométrica

$$2 \sin(isx) \sin(isx') = \cosh(s\Delta x) - \cosh(s\Delta \bar{x}), \quad (3.49)$$

observa-se que  $W_2^{(D)}$  pode ser dividida em duas contribuições, as quais são facilmente resolvidas através da relação [75, p. 523]

$$\int_0^\infty dw \frac{\sin(Aw) \cosh(\beta w)}{(e^{\gamma w} - 1)} = \frac{-A}{2(A^2 + \beta^2)} + \frac{\pi}{2\gamma} \frac{\sinh\left(\frac{2\pi A}{\gamma}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{2\pi A}{\gamma}\right) - \cos\left(\frac{2\pi \beta}{\gamma}\right)\right]}, \quad (3.50)$$

tal que  $\text{Re}(\gamma) > |\text{Re}(\beta)|$ . Portanto, a partir das Eqs. (3.47), (3.49) e (3.50)

$$\begin{aligned} W_2^{(D)} &= -W_1^{(D)} \\ &+ \frac{1}{8\pi a\alpha} \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi\Delta x}{a}\right)\right]} - \frac{\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi\Delta \bar{x}}{a}\right)\right]} \right\}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde  $W_1^{(D)}$  é dado pela Eq. (3.45).

Considerando os resultados obtidos para  $W_1^{(D)}$  e  $W_2^{(D)}$ , respectivamente, Eqs. (3.45) e (3.51), de acordo com (3.41) encontramos que a FWFP será

$$W^{(D)} = \frac{1}{8\pi a\alpha} \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi\Delta x}{a}\right)\right]} - \frac{\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi\Delta \bar{x}}{a}\right)\right]} \right\}. \quad (3.52)$$

Tomando  $\sigma = 2\pi$  na identidade [75, p.48]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\sigma}}{[(n-\beta)^2 + \gamma^2]} = \frac{\pi e^{i\beta(\sigma-2\pi)} \sinh(\gamma\sigma) + e^{i\beta\sigma} \sinh[\gamma(2\pi-\sigma)]}{\gamma [\cosh(2\pi\gamma) - \cos(2\pi\beta)]} \quad (3.53)$$

e identificando  $\gamma = \alpha/2a$  e  $\beta = \Delta x/2a$  encontramos, por exemplo, que o primeiro termo no lado direito da Eq. (3.52) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\frac{\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi\Delta x}{a}\right)\right]} = \frac{2a\alpha}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(\Delta x - 2an)^2 + \alpha^2]}. \quad (3.54)$$

O mesmo se aplica para o segundo termo de  $W^{(D)}$ , mas na ocasião  $\beta \equiv \Delta\bar{x}/2a$ , o que corresponde a fazermos a troca  $\Delta x \rightarrow \Delta\bar{x}$  no resultado (3.54).

Diante da equivalência exposta em (3.54), encontramos que a FWFP para condições de Dirichlet será dada por

$$W^{(D)}(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f_n(\Delta r) - f_n(\Delta\bar{r})], \quad (3.55)$$

com

$$f_n(\Delta r) = \frac{1}{(\Delta x - 2an)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2} \quad (3.56a)$$

e

$$f_n(\Delta\bar{r}) = \frac{1}{(\Delta\bar{x} - 2an)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2}. \quad (3.56b)$$

Antes de prosseguir para o próximo caso vamos fazer alguns comentários sobre a solução obtida para  $W^{(D)}(x, x')$ . Uma possível questão sobre a forma final em que deixamos a FWFP para as condições de Dirichlet é: por que optamos por (3.55), a qual inclui uma operação de soma infinita, ao invés da Eq. (3.52), que não possui a somatória? Embora (3.52) seja uma expressão legítima para  $W^{(D)}$ , a razão da escolha se deve ao fato de que, para nossos propósitos, a estrutura de (3.55) é preferível, pois permite extrair diretamente a contribuição divergente de nossas expressões. De fato, note que a contribuição  $\frac{1}{4\pi^2} f_0(\Delta r)$ , que representa a FWFP para o espaço-tempo de Minkowski, é divergente no limite de coincidência,  $x \rightarrow x'$ , enquanto que os demais termos na Eq. (3.55) são finitos. Por exemplo, o termo  $\frac{1}{4\pi^2} f_0(\Delta\bar{r})$ , que representa a contribuição de um único plano em  $x = 0$ , é regular no limite de coincidência. Assim, uma vez que em TQC os infinitos são comuns, e precisão ser removidos, mediante um processo de renormalização, a Eq. (3.55) nos permite fazer isso de uma forma direta e consistente, pois a identificação da divergência é imediatamente compreendida ser devido ao termo de Minkowski, que por sua vez é facilmente identificado.

### 3.3.3 Condições de Neumann

Considerando a condição de Neumann (3.28b) para as soluções (3.31), encontramos que os modos normalizados via Eq. (2.67) são dados por

$$\varphi_\sigma(x) = c_n \cos(k_n x) e^{-i\omega_n t + i k_y y + i k_z z}, \quad (3.57)$$

com as frequências  $\omega_n^2 = k_n^2 + k_y^2 + k_z^2$ ,  $k_n = \frac{n\pi}{a}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) e as constantes

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{8\pi^2 a \omega_n}}, & n = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 a \omega_n}}, & n \geq 1. \end{cases} \quad (3.58)$$

Semelhante ao caso anterior, o conjunto de números quânticos associados aos modos (3.57) é definido por  $\sigma = (n, k_y, k_z)$ . Contudo, note que nessa ocasião a estrutura da solução geral  $\varphi_\sigma(x)$  considera apenas os modos pares na componente  $x$ . Também, percebe-se que existe uma distinção entre a constante de normalização  $c_n$  para  $n = 0$  e  $n \geq 1$ .

Em paralelo ao que foi desenvolvido no caso anterior, para obter a FWFP referente às condições de Neumann, iniciamos substituindo os modos (3.57) na relação geral (3.4), com o símbolo de soma

$$\sum_{\sigma} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z.$$

Então, após uma organização dos termos, encontramos

$$W^{(N)} = \frac{1}{4\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \cos(k_n x) \cos(k_n x') \frac{e^{-i\omega_n \Delta t + ik_y \Delta y + ik_z \Delta z}}{\omega_n}, \quad (3.59)$$

com  $c_{n=0}^* = 1/2$  e  $c_{n \geq 1}^* = 1$ . Além disso, a identidade trigonométrica

$$\cos(k_n x) \cos(k_n x') = \cos(k_n \Delta \bar{x}) + \sin(k_n x) \sin(k_n x') \quad (3.60)$$

nos permite escrever para (3.59) a seguinte decomposição:

$$W^{(N)} = W_1^{(N)} + W^{(D)}, \quad (3.61)$$

com

$$W_1^{(N)} = \frac{1}{4\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \cos(k_n \Delta \bar{x}) \frac{e^{-i\omega_n \Delta t + ik_y \Delta y + ik_z \Delta z}}{\omega_n} \quad (3.62)$$

e  $W^{(D)}$  dada pela Eq. (3.55) ou, de maneira equivalente, por (3.52). A origem da contribuição de Dirichlet  $W^{(D)}$  em (3.61) é uma consequência do segundo termo no lado direito da identidade (3.60) aliada ao fato de que para  $n = 0$  temos  $c_{n \geq 1}^* = 1$  e  $\sin(k_n x) = 0$ .

Poderíamos seguir um caminho similar ao que foi adotado no caso de Dirichlet, porém uma alternativa mais viável e econômica para a solução da Eq. (3.62), em termos de cálculos matemáticos, consiste no uso da identidade

$$\frac{e^{-\omega_n \Delta \tau}}{\omega_n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} ds e^{-\omega_n^2 s^2 - \frac{\Delta \tau^2}{4s^2}}, \quad (3.63)$$

a qual pode ser deduzida a partir da Eq. (3.20a).

A princípio, o uso da identidade (3.63) em (3.62) pode parecer inconveniente, visto que introduz mais uma integração na fórmula de  $W_1^{(N)}$ . Entretanto, a sua implementação nos permite desacoplar os momentos de maneira que as integrais nas variáveis  $k_y$  e  $k_z$  são computadas separadamente como simples integrações gaussianas. Então, diante do exposto, a expressão resultante será

$$W_1^{(N)} = \frac{1}{2\pi a \alpha} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi \Delta \bar{x}}{a}\right) e^{-\left(\frac{\pi \Delta \bar{x}}{a}\right)n} \right],$$

que através da relação [75, p. 51]

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nz) e^{-nw} = \frac{\sinh(w)}{[\cosh(w) - \cos(z)]},$$

com  $w > 0$ , pode ser escrita na forma

$$W_1^{(N)} = \frac{1}{4\pi a \alpha} \frac{\sinh\left(\frac{\pi \alpha}{a}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi \alpha}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi \Delta \bar{x}}{a}\right)\right]}. \quad (3.64)$$

Em vista da relação (3.61) e dos resultados (3.52) e (3.64), a FWFP para o campo escalar sem massa sujeito as condições de Neumann será dada por

$$W^{(N)}(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f_n(\Delta r) + f_n(\Delta \bar{r})]. \quad (3.65)$$

As funções auxiliares  $f_n(\Delta r)$  e  $f_n(\Delta \bar{r})$  estão definidas nas Eqs. (3.56a) e (3.56b). Novamente temos a presença de uma somatória com intervalos infinitos na expressão para a função de Wightman. Essa soma está associada a reflexão infinita dos modos entre os planos situados na direção  $x$  [61], conforme ilustrado pela Figura 8a. Observando as Eqs. (3.55) e (3.65) nota-se que a mudança entre os casos de Dirichlet e Neumann ocorre apenas por um sinal no segundo termo das expressões.

### 3.3.4 Condições Mistas

No caso em que as condições mistas do tipo Dirichlet-Neumann (3.28c) são aplicadas as soluções (3.31), encontramos que

$$\varphi_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 a \omega_n}} \sin(k_n x) e^{-i\omega_n t + i k_y y + i k_z z}, \quad (3.66)$$

com as frequências dadas pela estrutura usual  $\omega = |\mathbf{k}|$  e o momento na direção confinada agora definido por  $k_n = (2n+1)\frac{\pi}{2a}$ , com  $n = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Além disso, note que as soluções já estão devidamente normalizadas conforme a condição (2.67).

A função de Wightman associada as soluções (3.66) será obtida através da expressão geral (3.4) com

$$\sum_{\sigma} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z. \quad (3.67)$$

Observando as Eqs. (3.66) e (3.32) nota-se certa similaridade estrutural entre ambas as expressões e que, portanto, muito do desenvolvimento de (3.66) será análogo ao que foi explicitado para (3.32) na Seção 3.3.2. Logo, para evitar uma repetição excessiva, seremos mais diretos quanto as passagens similares. Seguindo os mesmos passos, encontramos que

a função de Wightman será, em forma de expressão, igual a Eq. (3.36), mas com a soma sobre os números quânticos definida pela Eq. (3.67), ou seja,

$$W^{(\text{DN})} = \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty d\rho \rho J_0(\rho \Delta l) \sum_{n=0}^\infty \sin(k_n x) \sin(k_n x') \frac{e^{-i\omega_n \Delta t}}{\omega_n}. \quad (3.68)$$

Diante da estrutura que o momento na direção confinada assume no presente caso,  $k_n = (2n+1)\frac{\pi}{2a}$ , torna-se conveniente utilizarmos uma versão alternativa da fórmula de Abel-Plana (3.38), a qual também pode ser expressa da seguinte maneira [78]:

$$\sum_{n=0}^\infty F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty dh F(h) - i \int_0^\infty dh \frac{[F(+ih) - F(-ih)]}{(e^{2\pi h} + 1)}. \quad (3.69)$$

Portanto, com a relação apresentada acima seremos capazes de converter o somatório presente na Eq. (3.68) em integrais definidas. Após realizarmos algumas simplificações, todas semelhantes as que já temos comentado até então, é possível mostra que

$$W^{(\text{DN})} = W_1^{(\text{DN})} + W_2^{(\text{DN})}, \quad (3.70)$$

com  $W_1^{(\text{DN})} = W_1^{(\text{D})}$  e

$$W_2^{(\text{DN})} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{\sin(isx) \sin(isx') \sin(\alpha s)}{(e^{2as} + 1) \alpha}. \quad (3.71)$$

A Eq. (3.70) é consequência direta do uso das Eqs. (3.68) e (3.69), enquanto que (3.71) é estabelecida com o auxílio das relações (3.40), (3.46) e (3.48), além da redefinição de variável  $s = \frac{h\pi}{a}$ . Note que as Eqs. (3.47) e (3.71) diferem por um sinal no denominador.

Para resolver a integração em (3.71) utilizamos novamente a identidade trigonométrica (3.49) e a relação [75, p. 523]

$$\int_0^\infty dw \frac{\sin(Aw) \cosh(\beta w)}{(e^{\gamma w} + 1)} = \frac{A}{2(A^2 + \beta^2)} - \frac{\pi}{\gamma} \frac{\sinh\left(\frac{\pi A}{\gamma}\right) \cos\left(\frac{\pi \beta}{\gamma}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{2\pi A}{\gamma}\right) - \cos\left(\frac{2\pi \beta}{\gamma}\right)\right]}, \quad (3.72)$$

tal que  $\text{Re}(\gamma) > |\text{Re}(\beta)|$ . Logo, identificando as quantidades  $A = \alpha$ ,  $\gamma = 2a$  e  $\beta = (\Delta x, \Delta \bar{x})$ , encontramos que

$$\begin{aligned} W_2^{(\text{DN})} &= -W_1^{(\text{DN})} \\ &+ \frac{1}{4\pi a\alpha} \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{2a}\right) \cos\left(\frac{\Delta x \pi}{2a}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi\Delta x}{a}\right)\right]} - \frac{\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) \cos\left(\frac{\Delta \bar{x} \pi}{2a}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi\Delta \bar{x}}{a}\right)\right]} \right\}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Por fim, escolhendo  $\sigma = \pi$  na identidade (3.53) é possível mostrar, por exemplo, que vale a seguinte igualdade:

$$\frac{\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi\Delta x}{2a}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi\Delta x}{a}\right)\right]} = \frac{a\alpha}{\pi} \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{(-1)^n}{[(\Delta x - 2an)^2 + \alpha^2]}. \quad (3.74)$$

Consequentemente, a partir das Eq. (3.70), (3.73) e (3.74), encontramos que

$$W^{(\text{DN})}(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n [f_n(\Delta r) - f_n(\Delta \bar{r})]. \quad (3.75)$$

As funções  $f_n(\Delta r)$  e  $f_n(\Delta \bar{r})$  já foram definidas anteriormente em (3.56). Essa é a FWFP para um campo escalar sem massa no espaço-tempo de Minkowski, na presença de dois planos refletores, sujeito a condições de contorno mistas do tipo Dirichlet-Neumann.

Para a configuração mista do tipo Neumann-Dirichlet (ND) os modos (3.31) resultantes da aplicação das condições de contorno (3.28d), devidamente normalizados por (2.67), são

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 a \omega_n}} \cos(k_n x) e^{-i\omega_n t + i k_y y + i k_z z}. \quad (3.76)$$

Na equação acima tanto as frequências  $\omega_n$  como os momentos  $(k_n, k_y, k_z)$  são iguais as definições da condição DN.

A distinção entre os modos DN (3.66) e ND (3.76) produzirá algumas distinções sutis nos resultados da FWFP (3.75), porém a metodologia utilizada na solução é semelhante aos casos anteriores e, portanto, vamos apenas descrever o processo ordenadamente. Primeiro, utilizamos coordenadas do tipo polares para resolver as integrais em  $k_y$  e  $k_z$ , seguido pelo uso do resultado (3.35). Segundo, em virtude da estrutura dos momentos discretos, ainda podemos utilizar a fórmula de Abel-Plana (3.69) para eliminar o somatório. Após essas duas etapas de cálculos mais o uso da identidade (3.40), encontramos que a FWFP para as condições ND assume a forma

$$W^{(\text{ND})} = W_1^{(\text{ND})} + W_2^{(\text{ND})}, \quad (3.77)$$

onde

$$\begin{aligned} W_1^{(\text{ND})} &= \frac{1}{2\pi^2 \alpha} \int_0^\infty \cos(sx) \cos(sx') e^{-\alpha s} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{\Delta \bar{r}^2} \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

e

$$W_2^{(\text{ND})} = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{\cos(isx) \cos(isx') \sin(\alpha s)}{(e^{2as} + 1) \alpha}. \quad (3.79)$$

Quanto à contribuição do termo  $W_1^{(\text{ND})}$  exposta em (3.78), para determinar a primeira igualdade utilizamos o resultado (3.43), que pode ser escrito conforme a segunda igualdade através da relação [75, p. 488]

$$\int_0^\infty dx e^{-\gamma x} \cos(zx) \cos(wx) = \frac{\gamma(\gamma^2 + z^2 + w^2)}{[\gamma^2 + (z+w)^2][\gamma^2 + (z-w)^2]}.$$

A parcela  $W_2^{(\text{ND})}$ , proveniente do segundo fator na fórmula de Abel-Plana, assume a forma (3.79) após utilizamos a identidade (3.46) que, consequentemente, nos permite fazer o uso da relação (3.48). Diante da identidade trigonométrica

$$2 \cos(isx) \cos(isx') = \cosh(s\Delta x) + \cosh(s\Delta \bar{x})$$

e da relação (3.72), após a identificação dos parâmetros correspondentes em cada expressão, encontramos

$$W_2^{(\text{ND})} = -W_1^{(\text{ND})} + \frac{1}{4\pi a\alpha} \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{2a}\right) \cos\left(\frac{\Delta x\pi}{2a}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi\Delta x}{a}\right)\right]} + \frac{\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) \cos\left(\frac{\Delta \bar{x}\pi}{2a}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi\Delta \bar{x}}{a}\right)\right]} \right\}. \quad (3.80)$$

Finalmente, a partir das Eqs. (3.77), (3.78) e (3.80), encontramos que a FWFP para o campo escalar não massivo com condições mistas do tipo ND (3.28d) será dada pela expressão

$$W^{(\text{ND})}(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n [f_n(\Delta r) + f_n(\Delta \bar{r})]. \quad (3.81)$$

Todas as quantidades na expressão acima já foram definidas anteriormente. É interessante notar o paralelismo que existe entre as expressões para a FWFP com condições de Dirichlet, Neumann, Dirichlet-Neumann e Neumann-Dirichlet. Assim como nos casos de condições puras de Dirichlet e Neumann, os casos mistos Dirichlet-Neumann e Neumann-Dirichlet diferem por um sinal entre suas estruturas particulares.

### 3.3.5 Construção genérica para a FWFP-DNM

Nas prévias subseções obtivemos expressões particulares para a FWFP relativa a um campo escalar sem massa confinado unidimensionalmente por dois planos, separados por uma distância fixa no espaço-tempo de Minkowski – confira novamente a Figura 8a para uma imagem desse sistema. A partir dos resultados finais, a saber, Eqs. (3.55), (3.65), (3.75) e (3.81), observamos que todas as expressões possuem uma estrutura similar e que dependem das funções da separação espacial  $f_n(\Delta r)$  e  $f_n(\Delta \bar{r})$ , Eqs. (3.56a) e (3.56b), respectivamente. Além disso, todas elas possuem um coeficiente multiplicativo à frente das quantidades  $f_n$  que pode ser fixo ou variável. Os coeficientes fixos ocorrem para os casos de Dirichlet e Neumann, os quais são  $\pm 1$  e ambos independentes dos valores de  $n$ . Por outro lado, no caso das condições mistas (DN ou ND) existe uma dependência dos coeficientes com o índice discreto  $n$ , especificamente na forma  $(-1)^n$ , o qual muda de sinal para valores pares ou ímpares de  $n$ .

Tendo em vista as observações acima, por construção, podemos definir uma FWFP que reúne todas as três condições de contorno. Em outras palavras, podemos organizar os

resultados  $W^{(D)}$ ,  $W^{(N)}$ ,  $W^{(DN)}$  e  $W^{(ND)}$  em uma única expressão matemática, a saber,

$$W^{(i)}(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \gamma_n^{(i)} f_n(\Delta r) + \delta_n^{(i)} f_n(\Delta \bar{r}) \right], \quad (3.82)$$

onde definimos convenientemente os coeficientes

$$\gamma_n^{(i)} = [\gamma_n^{(D)}, \gamma_n^{(N)}, \gamma_n^{(DN)}, \gamma_n^{(ND)}] = [+1, +1, (-1)^n, (-1)^n] \quad (3.83a)$$

e

$$\delta_n^{(i)} = [\delta_n^{(D)}, \delta_n^{(N)}, \delta_n^{(DN)}, \delta_n^{(ND)}] = [-1, +1, (-1)^{n+1}, (-1)^n]. \quad (3.83b)$$

A partir de agora vamos rotular a equação acima como FWFP-DNM em virtude dos resultados que ela reúne. Em termos práticos, a expressão acima é muito útil no sentido de que operações temporais e espaciais sobre a mesma, como por exemplo, integrações ou derivadas, atuam exclusivamente sobre as funções  $f_n$ . Portanto, observáveis que dependem da FWFP-DNM podem ser estudados para três condições distintas de uma única vez com a seleção apropriada dos coeficientes  $\gamma_n^{(i)}$  e  $\delta_n^{(i)}$ . É importante enfatizar que a estrutura acima é referente ao espaço-tempo plano.

### 3.3.6 Condição quasiperiódica

Aplicando a condição de quasiperiodicidade (3.29) para as soluções (3.31), encontramos que os modos devidamente normalizados via relação (2.67) são dados por

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2 a \omega_n}} e^{-i\omega_n t + ik_n x + ik_y y + ik_z z}, \quad (3.84)$$

com as autofrequências  $\omega_n^2 = k_n^2 + k_y^2 + k_z^2$ ,  $-\infty \leq k_y, k_z \leq +\infty$  e  $k_n = \frac{2\pi(n+\beta)}{a}$  tal que  $n = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . Analogamente aos casos anteriores, o conjunto de números quânticos é constituído por um índice discreto ( $n$ ) e dois índices contínuos ( $k_y, k_z$ ), especificamente,  $\sigma = (n, k_y, k_z)$ .

Substituindo (3.84) em (3.4) vamos encontrar a função de Wightman referente à condição quasiperiódica. Novamente, podemos utilizar o artifício das coordenadas polares para resolver as integrais nas variáveis de momento  $k_y$  e  $k_z$ , além do resultado (3.35), de maneira que ao final encontramos

$$W^{(\beta)} = \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty d\rho \rho \frac{e^{-i\omega_n \Delta t + ik_n \Delta x}}{\omega_n} J_0(\rho \Delta l).$$

Através da fórmula de Euler para a exponencial complexa e o resultado (3.43), podemos resolver a integração na variável  $\rho$ , de tal forma que

$$W^{(\beta)} = \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{ik_n \Delta x - \alpha |k_n|}.$$

O módulo no momento discreto é uma consequência direta das restrições que acompanham o expressão (3.43). Semelhante aos casos anteriores, um índice superior ( $\beta$ ) foi adicionado no lado esquerdo das expressões para identificar a função de Wightman associada à condição de contorno em questão.

Observando que  $|k_n| = +k_n$  para  $n = [0, +\infty]$  e  $|k_n| = -k_n$  para  $n = [-\infty, -1]$ , com a ajuda de um software de manipulação algébrica, após algumas simplificações é possível mostrar que

$$W^{(\beta)} = \frac{1}{4\pi a \alpha} \frac{\left\{ \sinh[\alpha_a(1 - \beta)] e^{i\beta \Delta x_a} + \sinh(\alpha_a \beta) e^{i\Delta x_a(\beta-1)} \right\}}{[\cosh(\alpha_a) - \cos(\Delta x_a)]}, \quad (3.85)$$

onde por praticidade na notação definiram-se as quantidades  $\alpha_a = \frac{2\pi\alpha}{a}$  e  $\Delta x_a = \frac{2\pi\Delta x}{a}$ .

A equação anterior possui uma semelhança estrutural notável quando comparada com a identidade (3.53). Fazendo uma correspondência entre as respectivas grandezas nestas duas expressões, isto é, Eqs. (3.53) e (3.85), obtemos que

$$W^{(\beta)}(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi\beta ni} g_n(\Delta r) \quad (3.86)$$

com

$$g_n(\Delta r) = \frac{1}{(\Delta x - 2an)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2}. \quad (3.87)$$

A Eq. (3.86) corresponde a FWFP para um campo escalar sem massa submetido a uma condição de quasiperiodicidade, Eq. (3.29), cujo efeito total sobre as soluções é impor uma compactificação na coordenada espacial  $x$ , por um comprimento fixo  $a$ , além de alterar a periodicidade do campo por um fator de fase entre as soluções.

## 3.4 FWFP para o campo escalar no universo de Einstein

### 3.4.1 Alguns aspectos geométricos

Cosmologia é uma ciência que busca a compreensão do universo em larga escala, isto é, em dimensões da ordem de  $10^9$  anos luz. Além disso, é um ramo da Física que tem evoluído significativamente nas recentes décadas devido aos avanços tecnológicos, viabilizando a construção de novos instrumentos e o desenvolvimento de métodos cada vez mais precisos e sofisticados para a observação do universo, além de seus constituintes e fenômenos. Brevemente falando, para descrever o Universo a cosmologia parte de algumas considerações sobre o Universo em larga escala: (i) a dominância da força da gravidade; (ii) o Universo e suas estruturas em larga escala são tratados como um fluido (cósmico) perfeito; e (iii) o Universo é visto ser aproximadamente homogêneo e isotrópico. Vale ressaltar que, todas essas questões estão relacionadas a fatos constados observacionalmente,

a saber, a expansão acelerada do universo, a radiação cósmica de fundo e a distribuição de aglomerados de galáxias [47]. Todas essas informações, isto é, expansão acelerada, isotropia e homogeneidade, estão essencialmente codificadas no elemento de linha

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\tau^2, \quad (3.88)$$

com

$$d\tau^2 = a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2] \right\}. \quad (3.89)$$

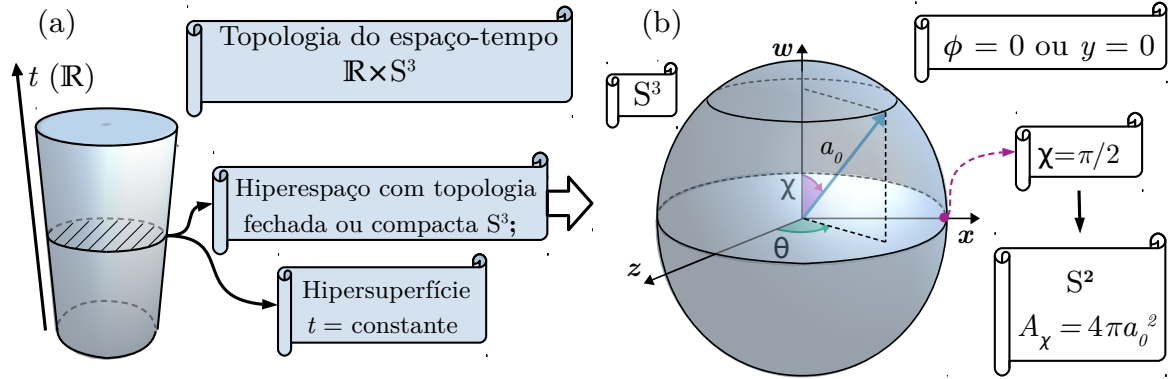
A Eq. (3.88) é conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e  $a(t)$  é uma função do tempo real, chamada de fator de escala, o qual determina a forma da expansão acelerada do Universo. Essa é a métrica padrão da cosmologia. Na Eq. (3.89), a variável  $k$  é denominada de parâmetro de curvatura e pode assumir três valores específicos,  $k = (-1, 0, +1)$ , os quais caracterizam diferentes geometrias e topologias para o espaço-tempo, mas todos igualmente isotrópicos e homogêneos [47, 48]. Na sequência, por questões de objetividade e propósito, estaremos interessados no caso particular  $k = +1$  e vamos apresentar brevemente algumas de suas principais propriedades geométricas, que serão úteis no sentido de estimular os raciocínios de analogia apresentados posteriormente. A discussão abaixo pode ser encontrada em vários livros texto, como por exemplo nas Refs. [71], [80] e [81], sobre as quais nos baseamos fundamentalmente.

Tomando  $k = +1$  na Eq. (3.89) percebemos a existência de uma singularidade para o ponto  $r = 1$ . Então, a fim de contornar esse problema, é conveniente admitir a transformação de coordenada  $r = \sin(\psi)$ , de modo que  $dr = \cos(\psi)d\psi$  e  $\cos^2(\psi) = 1 - r^2$ . Portanto, nesse novo sistema de coordenadas  $(\chi, \theta, \phi)$ , a seção espacial  $d\tau^2$  do elemento de linha (3.88) será dado pela expressão

$$d\tau_\chi^2 = a^2(t) \left\{ d\chi^2 + \sin^2(\chi)[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2] \right\}. \quad (3.90)$$

O universo de Einstein é caracterizado pelo elemento de linha (3.88) com a seção espacial definida pela Eq. (3.90). A fim de analisar algumas propriedades geométricas referentes ao triespço (3.90) vamos nos concentrar sobre uma hipersuperfície definida por um instante de tempo constante arbitrário  $t_0$ , de modo que  $a(t = t_0)$  possui um valor constante, o qual rotulamos por  $a_0$ .

Uma primeira observação que pode ser feita sobre o triespço (3.90) é que este corresponde a uma estrutura de espaço-tempo fechado ou compacto. De fato, para o conjunto de coordenadas utilizado em (3.89), especificamente  $\{d\tau\} = \{0 \leq r \leq \infty; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ , o espaço-tempo corresponde ao FLRW usual. Por outro lado, após a mudança de coordenadas  $\{d\tau\} \rightarrow \{d\tau_\chi\} = \{0 \leq \psi \leq \pi; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$  o espaço torna-se compacto, pela substituição do raio infinito  $r$  por um “raio finito e compacto” associado ao ângulo  $0 \leq \chi \leq \pi$ . Consequentemente, sua topologia de espaço-tempo, isto é,

Figura 11 – Ilustrações relativas ao espaço-tempo FRLW com parâmetro de curvatura  $k = +1$ .

Legenda: A imagem (a) mostra uma representação topológica total do universo de Einstein. A figura (b) exibe o caso particular  $\phi = 0$  ou  $(y = 0)$  do espaço Euclidiano quadridimensional, no qual a seção espacial do universo de Einstein com topologia  $S^3$  pode ser imersa. A área de uma superfície  $\chi$  constante, cuja topologia é  $S^2$ , possui uma semelhança estrutural com a área de uma esfera em coordenadas usuais  $(r, \theta, \phi)$ , com  $a_0$  fazendo o papel do raio  $r$ . Fonte: produzido pelo autor com base nas Ref. [71, p. 320] e [80, p. 44].

a topologia do espaço-tempo definido pelo elemento de linha (3.88), com a seção espacial (3.90), é do tipo  $\mathbb{R} \times S^3$ , onde  $\mathbb{R}$  associa o conjunto dos reais para os valores do tempo cósmico  $t$  e  $S^3 \equiv S^1 \times S^1 \times S^1$  os espaços compactos (finitos) das coordenadas angulares  $(\chi, \theta, \phi)$  – veja a Figura 11 para uma representação ilustrativa.

Uma imagem do triespaço (3.90) pode ser obtida observando que este pode ser imerso em um espaço quadridimensional Euclidiano com coordenadas do tipo cartesianas:

$$\begin{aligned} w &= a_0 \cos(\chi), \\ x &= a_0 \sin(\chi) \sin(\theta) \cos(\phi), \\ y &= a_0 \sin(\chi) \sin(\theta) \sin(\phi), \\ z &= a_0 \sin(\chi) \cos(\theta), \end{aligned} \quad (3.91)$$

onde  $a_0 = a(t_0)$ . De fato, a partir desse conjunto de coordenadas, é possível mostrar que

$$dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\chi^2 \quad (3.92)$$

e

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a_0^2. \quad (3.93)$$

A Eq. (3.91) mostra a validade do processo de imersão do triespaço (3.90) no espaço Euclidiano quadridimensional definido pelas coordenadas (3.91). Note que a transformação das coordenadas (3.91) é semelhante ao que fazemos no espaço plano com coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  e esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , porém na ocasião estamos realizando uma conversão das coordenadas cartesianas quadridimensionais  $(w, x, y, z)$  para coordenadas do tipo hiperesféricas  $(a_0, \chi, \theta, \phi)$ .

A estrutura da Eq. (3.93) sugere que o espaço quadridimensional  $(w, x, y, z)$  pode ser visto como uma hipersfera com raio constante  $a_0$ , que também pode ser denominada de 3-esfera ou triesfera, com a notação topológica  $S^3$ . Essa mesma notação é aplicada para o caso usual de uma esfera no espaço Euclidiano, a qual pode ser chamada de 2-esfera ou biesfera e possui a representação topológica  $S^2$ . A grosso modo e em poucas palavras, uma 2-esfera consiste de uma esfera em um espaço tridimensional, enquanto que uma 3-esfera, por analogia, representa uma esfera em um espaço quadridimensional.

No caso particular  $\phi = 0$ , esse espaço torna-se análogo ao de uma esfera no espaço Euclidiano usual, isto é, em três dimensões – veja a Figura 11a. Entretanto, é importante estar atento ao fato de que a semelhança é apenas visual, pois essa “superfície esférica”, definida pelas coordenadas  $(w, x, y, z) = (w, x, 0, z)$ , possui peculiaridades totalmente distintas. Por exemplo, a área e o volume compreendido por uma superfície definida por um valor arbitrário constante de  $\chi$  são, respectivamente,

$$A_\chi = \int_0^\pi d\theta [a_0 \sin(\chi)] \times \int_0^{2\pi} d\phi [a_0 \sin(\chi) \sin(\theta)] = 4\pi a_0^2 \sin^2(\chi) \quad (3.94)$$

e

$$V_\chi = \int_\pi^0 d\chi a_0 \times \int_0^\pi d\theta [a_0 \sin(\chi)] \times \int_0^{2\pi} d\phi [a_0 \sin(\chi) \sin(\theta)] = 2\pi^2 a_0^3. \quad (3.95)$$

Ambas as expressões acima diferem em estrutura quando comparadas as equações para a área e volume de uma superfície esférica ( $4\pi r^2$  e  $\frac{4\pi r^3}{3}$ ). Como deve ser, uma vez que tais expressões pertencem a dois espaços distintos. Contudo, é curioso que a potência numérica no parâmetro  $a_0$  seja compatível com a grandeza em questão, ou seja,  $a_0^2$  para a área e  $a_0^3$  para o volume. Além disso, observa-se que  $A_\chi$  no ponto  $\chi = \pi/2$  corresponde exatamente a área de uma superfície esférica. É em virtude das similaridades indicadas nas expressões acima, por exemplo, Eqs. (3.93), (3.94) e (3.95), que o parâmetro constante  $a_0$  é chamado de raio do universo. Essas observações nos mostram que o espaço-tempo do universo de Einstein, ainda que distinto, possui certas semelhanças com o espaço-tempo plano de Minkowski.

Por fim, após essa breve análise geométrica sobre o triespaço (3.90), definido por uma hipersuperfície de tempo constante, por uma questão de clareza, gostaríamos de estabelecer explicitamente a forma completa do elemento de linha que define o universo estático de Einstein:

$$ds_{\text{UE}}^2 = dt^2 - a_0^2 \left\{ d\chi^2 + \sin^2(\chi) [d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2] \right\}, \quad (3.96)$$

onde o intervalo de cada coordenada é tal que  $0 \leq t \leq \infty$ ,  $0 \leq \chi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Note que os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  coincidem com as coordenadas esféricas usuais do espaço plano. Como já foi mencionado,  $a_0$  corresponde ao chamado raio do universo e nesse modelo de universo o fator de escala possui unidades de comprimento. Além disso, o subscrito “UE” trata-se de um acrônimo introduzido para rotular e identificar (3.96) como o elemento de linha que representa o espaço-tempo do universo de Einstein.

### 3.4.2 Universo de Einstein

Conforme exposto na Seção 2.4, a equação de Klein-Gordon para um campo escalar no espaço-tempo curvo é dada pela Eq. (2.98). Então, utilizando o elemento de linha (3.96), nota-se que os modos do campo escalar no universo de Einstein são soluções da equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{a_0^2 \sin^2(\chi)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \chi} \left[ \sin^2(\chi) \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} \right] + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right\} + M^2 \varphi = 0, \quad (3.97)$$

onde por praticidade rotulamos a “massa efetiva”  $M^2 = m_F^2 + \xi R$ . É importante destacar que, em princípio, o escalar de Ricci pode depender das coordenadas do espaço-tempo. Logo, sob estas circunstâncias, a solução da Eq. (3.97) poderia ser modificada e seguir um caminho diferente do que será apresentado a seguir. Entretanto, no presente cenário o escalar de Ricci é uma constante e pode ser assimilado na massa efetiva  $M^2$  sem prejuízos ou perda de generalidade.

Para resolver a Eq. (3.97) supomos que as soluções  $\varphi$  são separáveis, isto é, obedecem a decomposição  $\varphi(x) = T(t)R(\chi)\Theta(\theta)F(\phi)$ . Esse *ansatz* nos permite desacoplar as quatro soluções de modo a resolvê-las separadamente. Seguindo esse procedimento, encontra-se que a solução referente a parte temporal será

$$T(t) = T_0 e^{-i\omega t}, \quad (3.98)$$

onde  $T_0$  é uma constante e  $\omega^2 = (k/a)^2 + M^2$ . A princípio  $\omega$  e  $k$  surgem como constantes de separação, em consequência da admissão de soluções separáveis. Entretanto, como veremos, elas estarão relacionadas as autofrequências e momentos (números quânticos) dos modos  $\varphi(x)$ . Em vista dessa relação, novamente estamos escolhendo soluções de frequência ou energia positiva.

Os desenvolvimentos das equações diferenciais referentes as partes angulares  $\Theta(\theta)$  e  $F(\phi)$  revelam que o produto das suas soluções corresponde aos harmônicos esféricos:

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) \equiv \Theta(\theta)F(\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}. \quad (3.99)$$

Na equação acima  $P_\ell^m(z)$  são as funções de Legendre associadas [59, p. 771], com  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $\ell = \{0, 1, 2, \dots\}$  e  $-\ell \leq m \leq \ell$ . De certa forma, esse resultado para as contribuições das coordenadas  $\theta$  e  $\phi$  poderia ser esperado, uma vez que, mesmo no universo de Einstein, ambas correspondem as variáveis angulares usuais do sistema de coordenadas esféricas.

Por fim, para resolvermos a equação diferencial referente a função  $R(\chi)$ , a qual tem a forma explícita [82]

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \left[ \sin^2(\chi) \frac{\partial R}{\partial \chi} \right] + [k^2 \sin^2(\chi) - \ell(\ell+1)]R = 0,$$

devemos assumir que  $R(\chi) = \sin^\ell(\chi)f(\chi)$ , onde  $f(\chi)$  é uma função a ser determinada. Assim, encontramos a expressão equivalente e associada

$$\sin^2(\chi)f'' + 2(\ell + 1)\sin(\chi)\cos(\chi)f' + [k^2 - \ell(\ell + 2)]\sin^2(\chi)f = 0,$$

que sob a mudança de variável  $z = \cos(\chi)$  assume a seguinte forma:

$$(1 - z^2)f'' - [2(\ell + 1) + 1]zf' + [k^2 - \ell(\ell + 2)]f = 0. \quad (3.100)$$

A linha nas equações acima representa simbolicamente uma operação de derivada com respeito a variável  $z$ .

O resultado (3.100) guarda certa semelhança com a equação diferencial

$$(1 - z^2)\frac{d^2g(z)}{dz^2} - (2\alpha + 1)\frac{dg(z)}{dz} + m(2\alpha + m)g(z) = 0, \quad (3.101)$$

cujas soluções são as funções  $C_m^{(\alpha)}(x)$ , denominadas de polinômios ultraesféricos [83] ou polinômios de Gegenbauer [75]. Traçando a correspondência  $m \rightarrow (n - \ell)$  e  $\alpha \rightarrow (\ell + 1)$  na Eq. (3.101) e identificando  $k \equiv n(n + 2)$ , concluímos que  $f(z) = C_{n-\ell}^{\ell+1}(z)$ , logo [82, 84, 85]

$$R(\chi) = \sin^\ell(\chi)C_{n-\ell}^{\ell+1}(\cos(\chi)). \quad (3.102)$$

Assim, a partir das Eqs. (3.98), (3.99) e (3.102), segue que

$$\varphi(t, \chi, \theta, \phi) = N \sin^\ell(\chi)C_{n-\ell}^{\ell+1}(\cos(\chi))Y_\ell^m(\theta, \phi)e^{-i\omega_n t}. \quad (3.103)$$

Utilizando a Eq. (2.102), a constante de normalização  $N$  em (3.103) pode ser facilmente determinada, com o auxílio das condições de ortogonalidade para os harmônicos esféricos [59],

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta)[Y_\ell^m(\theta, \phi)]^* Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}, \quad (3.104)$$

e para os polinômios de Gegenbauer [75, p. 993],

$$\int_{-1}^1 dz (1 - z^2)^{\lambda-1/2} C_j^\lambda(z) C_k^\lambda(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k, \\ \frac{\pi 2^{1-2\lambda} \Gamma(j + 2\lambda)}{j!(\lambda + j)[\Gamma(\lambda)]^2}, & \text{quando } j = k \ (\lambda \neq 0). \end{cases} \quad (3.105)$$

A partir das Eqs. (3.103), (2.102), (3.104), e (3.105), as soluções da Eq. (3.97) devidamente normalizadas são

$$\varphi_\sigma(t, \chi, \theta, \phi) = N_{n\ell} \sin^\ell(\chi)C_{n-\ell}^{\ell+1}(\cos(\chi))Y_\ell^m(\theta, \phi)e^{-i\omega_n t}, \quad (3.106)$$

com

$$N_{n\ell} = \left\{ \frac{2^{2\ell}(n+1)(n-\ell)![\Gamma(\ell+1)]^2}{\pi a_0^3 \omega_n \Gamma(\ell+m+2)} \right\}^{1/2}. \quad (3.107)$$

As autofrequências  $\omega_n$  são definidas pela relação

$$\omega_n = \left[ \frac{n(n+2)}{a_0^2} + M^2 \right]^{1/2}, \quad (3.108)$$

com  $M^2 = m_F^2 + \xi R$  e o conjunto de números quânticos  $\sigma = (n, m, \ell)$ . As soluções (3.106) correspondem aos modos normalizados de um campo escalar (massivo) que se propaga por um espaço-tempo cuja geometria é definida pelo Universo estático de Einstein. Na sequência, vamos admitir a massa do campo nos desenvolvimentos, porém, semelhante aos casos anteriores, apenas o limite não massivo das expressões será considerado em nossas investigações.

A FWFP correspondente aos modos (3.106) será dada pela expressão (3.4), com a soma sobre os números quânticos definida por

$$\sum_{\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \sum_{m=-\ell}^{+\ell}.$$

Portanto, conforme exposto na Ref. [85], utilizando os teoremas da adição para os harmônicos esféricos [59, p. 797],

$$P_{\ell}(\cos(\gamma)) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \phi) [Y_{\ell}^m(\theta', \phi')]^*,$$

e para os polinômios de Gegenbauer [75, p. 992],

$$\begin{aligned} C_n^{\lambda}(\cos(\psi) \cos(\vartheta) + \sin(\psi) \sin(\vartheta) \cos(\varphi)) \\ = \frac{\Gamma(2\lambda-1)}{[\Gamma(\lambda)]^2} \sum_{\ell=0}^n \frac{2^{2\ell}(n-\ell)![\Gamma(\lambda+\ell)]^2}{\Gamma(2\lambda+n+\ell)} (2\lambda+2\ell-1) \\ \times \sin^{\ell}(\psi) \sin^{\ell}(\vartheta) C_{n-\ell}^{\lambda+\ell}(\cos(\psi)) C_{n-\ell}^{\lambda+\ell}(\cos(\vartheta)) C_{\ell}^{\lambda-1/2}(\cos(\varphi)), \end{aligned}$$

com  $\psi, \vartheta$  e  $\varphi$  reais e  $\lambda \neq 1/2$ , encontramos que

$$W(x, x') = \frac{1}{4\pi^2 a_0^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)e^{-i\omega_n \Delta t}}{\omega_n} C_n^1(\cos(\alpha)), \quad (3.109)$$

com

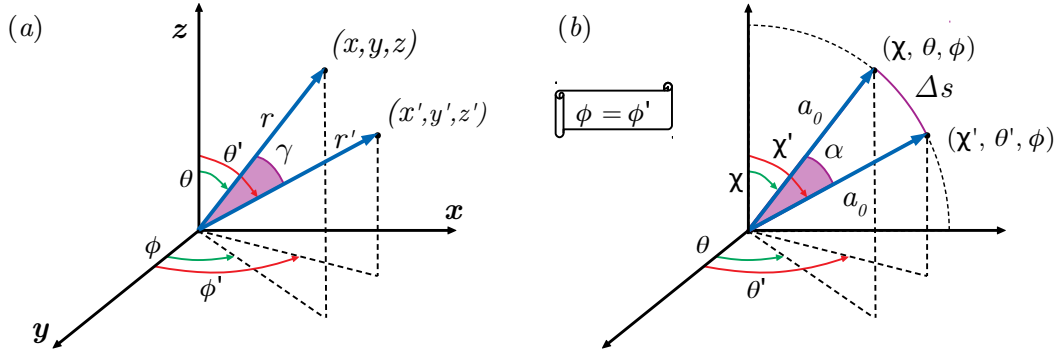
$$\cos(\alpha) = \cos(\chi) \cos(\chi') + \sin(\chi) \sin(\chi') \cos(\gamma) \quad (3.110)$$

e

$$\cos(\gamma) = \cos(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\phi - \phi'). \quad (3.111)$$

Outro elemento importante para o estabelecimento da Eq. (3.109) é a propriedade de equivalência  $C_{\ell}^{1/2}(z) = P_{\ell}(z)$ , onde  $P_{\ell}(z)$  corresponde ao polinômio de Legendre de grau  $\ell$  na variável  $z$  [75]. Além disso,  $\Delta t = (t - t')$  e  $\omega_n$  corresponde a Eq. (3.108).

Figura 12 – Representação para dois pontos espaciais definidos pelas coordenadas esféricas usuais e pelas coordenadas angulares do universo de Einstein.



Legenda: (a) O ângulo  $\gamma$  representa a separação angular entre dois pontos arbitrários no espaço, definidos pelas coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  e  $(r', \theta', \phi')$  ou, de maneira equivalente, pelas coordenadas cartesianas  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  e  $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ . Por analogia, em (b) o ângulo  $\alpha$  mede a separação angular entre dois pontos no universo de Einstein, definidos pelas coordenadas angulares  $(\chi, \theta, \phi)$  e  $(\chi', \theta', \phi')$ . Na figura (b)  $\phi = \phi'$ , de modo que podemos visualizar  $\alpha$  de maneira análoga a representação em (a). O comprimento de arco  $\Delta s$  (distância geodésica espacial), representado no espaço abstrato em (b), está relacionado ao raio  $a_0$  através do ângulo  $\alpha$  conforme a relação  $\Delta s = \alpha a_0$ . Fonte: produzido pelo autor, 2024.

A Figura 12 mostra o significado dos ângulos  $\gamma$  e  $\alpha$ , nessa ordem, presentes nas Eqs. (3.110) e (3.111). Como exposto na Figura 12a, o ângulo  $\gamma$  representa a separação angular entre dois vetores cartesianos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$ , que podem ser representados alternativamente pelos conjuntos de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  e  $(r', \theta', \phi')$ , cujos setores angulares  $(\theta, \phi)$  e  $(\theta', \phi')$  localizam os pontos em relação ao sistema de eixos fixo, enquanto que as coordenadas radiais  $r$  e  $r'$  demarcam a distância de cada ponto em relação a origem. Por analogia, na Figura 12b, o ângulo  $\alpha$  corresponde a separação angular entre dois pontos do espaço-tempo definidos pelas coordenadas angulares  $(\chi, \theta, \phi)$  e  $(\chi', \theta', \phi')$  [86]. Uma vez que o raio do universo é constante, podemos expressar o ângulo de separação  $\alpha$  em termos da distância geodésica espacial como  $\alpha = \Delta s / a_0$ .

A partir da Eq. (2.104) segue que, para o caso do campo escalar conformemente acoplado  $\xi = 1/6$ . Além disso, diante do elemento de linha (3.96) é possível mostrar que o  $R = 6a_0^2$  – veja o Apêndice D.1. Consequentemente, as autofrequências (3.108) nos permitem estabelecer que  $a_0^2 \omega^2 = (n+1)^2 + a_0^2 m_F^2$ . Então, em virtude dessas observações e da propriedade dos polinômios de Gegenbauer [75, p. 992]

$$C_n^1(\cos(\alpha)) = \frac{\sin[(n+1)\alpha]}{\sin(\alpha)},$$

a Eq. (3.109) pode ser reescrita como

$$W(x, x') = \frac{1}{4\pi^2 a_0^2 \sin(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(k\alpha)}{\sqrt{k^2 + a_0^2 m_F^2}} e^{-i\Delta\tau \sqrt{k^2 + a_0^2 m_F^2}}, \quad (3.112)$$

onde rotulamos  $\Delta\tau = \Delta t / a_0$  e temos redefinido o índice de soma, tal que  $k = n + 1$ .

Diante da estrutura da Eq. (3.112), identificando

$$F(k) \equiv \frac{k \sin(k\alpha)}{\sqrt{k^2 + a_0^2 m_F^2}} e^{-i\Delta\tau \sqrt{k^2 + a_0^2 m_F^2}},$$

podemos utilizar novamente a fórmula de Abel-Plana (3.38) e encontrar que

$$W = W_0 + W_1, \quad (3.113)$$

com

$$W_0 = \frac{1}{4\pi^2 a_0^2 \sin(\alpha)} \int_0^\infty dr \frac{r \sin(r\alpha)}{\sqrt{r^2 + a_0^2 m_F^2}} e^{-i\Delta\tau \sqrt{r^2 + a_0^2 m_F^2}} \quad (3.114)$$

e

$$W_1 = \frac{-1}{2\pi^2 a_0^2 \sin(\alpha)} \int_{r_0}^\infty dr \frac{r \sin(r\alpha)}{(e^{2\pi r} - 1)} \frac{\cosh(\Delta\tau \sqrt{r^2 - a_0^2 m_F^2})}{\sqrt{r^2 - a_0^2 m_F^2}}, \quad (3.115)$$

com  $r_0 = a_0 m_F$ . Na Eq. (3.115), semelhante aos casos anteriores, já utilizamos a observação sobre o sinal correto para a raiz no integrando, que em resumo nos diz que a raiz  $\sqrt{(\pm ir)^2 + a_0^2 m_F^2}$  é real para  $0 \leq r \leq a_0 m_F$  e complexa no intervalo  $a_0 m_F \leq r \leq \infty$ .

A integral em (3.114) pode ser computada através do resultado [75, p. 491]

$$\int_0^\infty dz \frac{z \sin(bz)}{\sqrt{\gamma^2 + z^2}} e^{-w \sqrt{\gamma^2 + z^2}} = \frac{\gamma b}{\sqrt{w^2 + b^2}} K_1(\gamma \sqrt{w^2 + b^2})$$

com a correspondência  $b = \alpha$ ,  $\gamma = a_0 m_F$  e  $w = i\Delta\tau$ , além da relação [79, p. 730]

$$K_1(iz) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(z),$$

onde  $H_\nu^{(2)}(z)$  é chamada de função de Hankel ou Bessel de terceiro tipo, enquanto que  $K_\nu(z)$  pode ser denominada variadamente como função de Macdonald ou função de Bessel com argumento imaginário [75, 79]. Assim, obtém-se que

$$W_0 = \frac{im_F}{8\pi a_0 \sin(\alpha)} \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta t^2 - \Delta s^2}} H_1^{(2)}(m_F \sqrt{\Delta t^2 - \Delta s^2}). \quad (3.116)$$

Da mesma forma, a contribuição (3.115) pode ser desenvolvida com o auxílio da representação exponencial da função  $\sinh(z)$  em conjunto com a relação [87, p. 372]

$$\int_w^\infty dz \frac{z^\epsilon e^{pz}}{\sqrt{z^2 - w^2}} \cosh(c \sqrt{z^2 - w^2}) = \frac{(wp)^\epsilon}{(p^2 - c^2)^{\epsilon/2}} K_\epsilon(w \sqrt{p^2 - c^2}), \quad (3.117)$$

sujeita as condições  $\{\epsilon = 0 \text{ ou } 1; w > 0; \text{Re}(p) > |\text{Re}(c)|\}$ , além da equivalência

$$\frac{1}{(e^{2\pi k} - 1)} \equiv \sum_{n=1}^\infty e^{-(2\pi k)n}. \quad (3.118)$$

Portanto, seguindo a descrição acima, isto é, empregando as expressões (3.117) e (3.118) em (3.115), após algum trabalho algébrico encontramos que

$$W_1 = \frac{im_F}{8\pi a_0 \sin(\alpha)} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{(\Delta s + 2\pi a_0 n)}{\sqrt{\Delta t^2 - (\Delta s + 2\pi a_0 n)^2}} H_1^{(2)}(m_F \sqrt{\Delta t^2 - (\Delta s + 2\pi a_0 n)^2}) \quad (3.119)$$

Por fim, a partir dos resultados (3.116) e (3.119), encontramos que a FWFP para um campo escalar real com massa  $m_F$  no universo de Einstein será dada por

$$W(x, x') = \frac{im_F}{8\pi a_0 \sin\left(\frac{\Delta s}{a}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\Delta s + 2\pi a_0 n)}{\sigma_n} H_1^{(2)}(m_F \sigma_n), \quad (3.120)$$

onde definimos a separação do espaço-tempo

$$\sigma_n^2 = \Delta t^2 - (\Delta s + 2\pi a_0 n)^2. \quad (3.121)$$

Observando que

$$\epsilon H_1^{(2)}(\epsilon)|_{\epsilon \ll 1} = \frac{2i}{\pi} + \left\{ \frac{1}{2} - \frac{i}{2\pi} [-1 + 2\gamma - \ln(4) + 2\ln(\epsilon)] \right\} \epsilon^2 + \dots, \quad (3.122)$$

onde  $\gamma \approx 0.577216$  corresponde a constante de Euler, podemos encontrar a FWFP para um campo escalar sem massa no universo de Einstein, a saber,

$$W(x, x') = -\frac{1}{4a_0\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\Delta s + 2\pi a_0 n)}{\sin\left(\frac{\Delta s}{a_0}\right) \sigma_n^2}. \quad (3.123)$$

Esse resultado, assim como (3.120), é consistente com a Ref. [88]. Em virtude das dificuldades matemáticas impostas pela estrutura da FWFP (3.120), por questões de simplicidade e de um estudo inicial, vamos considerar o limite não massivo (3.123) em nossas futuras análises.

## 4 MBQI em uma geometria efetiva com desclinação

Nessa parte vamos estudar o MBQI no cenário dos chamados modelos análogos de gravidade, os quais em síntese são sistemas baseados na propagação de perturbações acústicas por fluidos, capazes de reproduzir efeitos que simulam fenômenos físicos gravitacionais (ex. horizonte de eventos em buracos negros e radiação Hawking). Inicialmente, algumas ideias gerais serão apresentadas a fim de contextualizar e motivar o presente estudo. Em seguida, os elementos necessários para a composição do sistema são construídos e, por fim, o VEV da dispersão de velocidades é estudado.

### 4.1 Motivação

A Relatividade Geral assim como a Teoria quântica de Campos em espaços curvos fazem previsões teóricas sobre fenômenos muito sutis e particulares, por exemplo, as ondas gravitacionais e a radiação Hawking (RH), de modo que qualquer experimento, destinado a estudar as propriedades físicas associadas a tais eventos, necessita indubitavelmente de tecnologias precisas e avançadas. As ondas gravitacionais, previstas em teoria a muito tempo, apenas nas recentes décadas foram detectadas experimentalmente [89]. Por outro lado, a RH até então não foi estudada empiricamente, pois uma grande barreira nessa direção é a sua pequena magnitude. A razão por trás dessa ínfima quantidade se deve ao fato de que a temperatura Hawking  $T_H$  é inversamente proporcional a massa  $M$  do buraco negro ao qual ela está associada [14, 47, 90]:

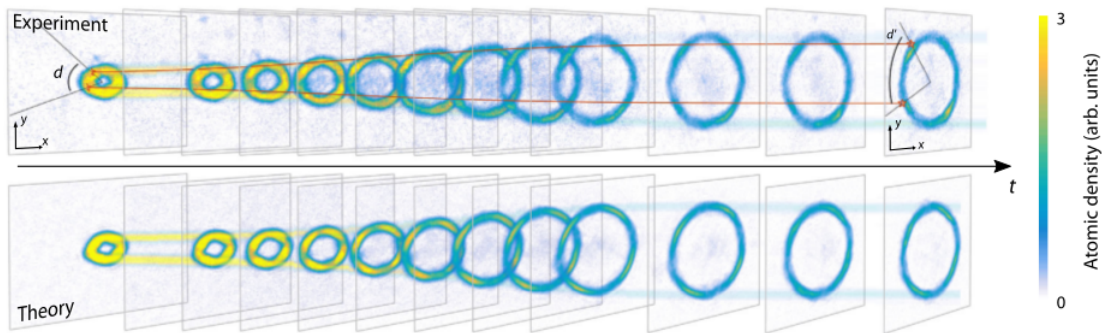
$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \frac{1}{M},$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck,  $G$  a constante da gravitação universal,  $c$  a velocidade da luz e  $k_B$  a constante de Boltzmann. Para fins de exemplo, considerando um buraco negro com uma massa solar ( $M = M_\odot \approx 2 \times 10^{30} \text{kg}$ ) percebe-se que  $T_H = T_{HM_\odot} \sim 10^{-8} \text{ K}$ . Então, comparando  $T_{HM_\odot}$  com o valor da radiação cósmica de fundo,  $T = 2.7 \text{ K}$ , nota-se a dificuldade técnica de distinguir e observar esse efeito em um sistema gravitacional real. Além disso, de maneira geral,  $T_H$  é muito menor que  $10^{-8} \text{ K}$ , pois as massas dos buracos negros são muito maiores que uma massa solar. O primeiro buraco negro reconhecido, o Cygnus x-1, por exemplo, tinha cerca de  $15M_\odot$  de modo que  $T_H \sim 10^{-9} \text{ K}$  [47]. Contudo, RH (análoga) tem sido estudada no contexto dos modelos análogos de gravidade (MAG), um cenário no qual essa quantidade foi medida, veja por exemplo a Ref. [40].

Após o trabalho de W. G. Unruh [91], os MAG atraíram o interesse da comunidade devido a capacidade de mimetizarem sistemas astrofísicos e alguns de seus fenômenos, em particular a RH citada anteriormente. No nível mais elementar, estes sistemas são compostos por fluxos de fluidos, como a água, através dos quais a propagação das perturbações acústicas (o som) possui analogia com a propagação da luz pelo espaço-tempo. Para uma revisão e consulta dos detalhes sobre o tema dos MAG recomendamos as Refs. [38] e [39]. Mesmo nesse nível clássico, estudos muito elaborados para fenômenos distintos já foram desenvolvidos, como, por exemplo, superradiância [92] ou ainda mecanismos de instabilidade no núcleo das estrelas em colapso [93].

A analogia dos MAG também pode ser explorada em sistemas mais complexos, tais como sistemas da matéria condensada, mais especificamente nos Condensados de Bose-Einstein (CBE). Simplificadamente, um CBE consiste em um gás de bósons resfriado a uma temperatura extremamente baixa. Além da observação da RH em MAG baseados em CBE [40], a capacidade de manipular os CBE adquirida ao longo do tempo tem permitido o desenvolvimento de experimentos cada vez mais sofisticados. Como exemplo, podemos citar a modelagem de um universo em expansão relatada na Ref. [41], na qual utilizando um CBE com formato de anel, Figura 13, entre outras coisas, os autores investigam o redshift de fônons em analogia ao redshift de fótons em cosmologia. Além disso, é interessante assinalar que o surgimento de pares de vórtices também é uma questão relatada pelos autores.

Figura 13 – MAG baseado em um CBE anelar simulando um universo em expansão.

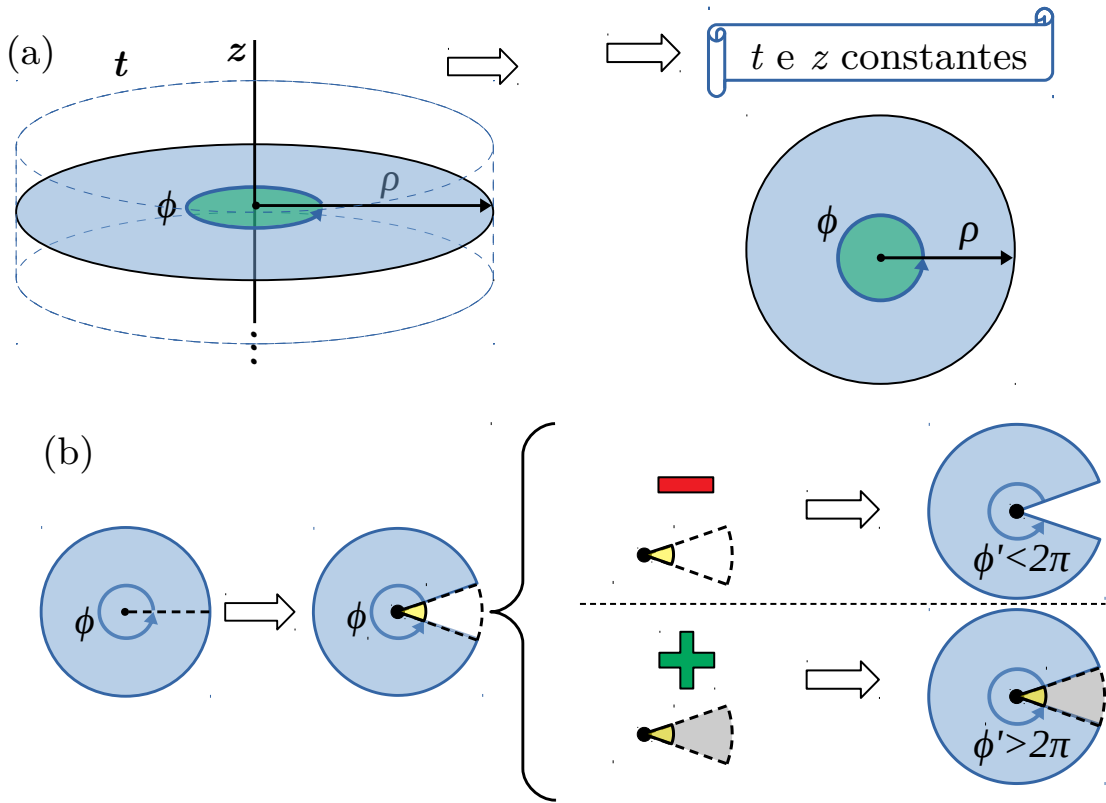


Legenda: Na imagem acima são mostrados os resultados teóricos (“theory”) e experimentais (“experiment”) para a expansão da densidade atômica (“Atomic density”), medida em unidades arbitrárias (“arb. units.”). As letras  $d$  e  $d'$  são, nessa ordem, as distâncias inicial e final após o processo de expansão. Fonte: retirado de [41, p. 2].

Uma excelente explicação que também nos permite enxergar a formação de defeitos em materiais, como a desclinação, pode ser encontrada em [94] e que, para fins de exemplo, será resumida brevemente. Vamos considerar uma seção reta de um material elástico com formato cilíndrico centrado no eixo  $z$ , o qual obviamente é melhor descrito pelas coordenadas cilíndricas, conforme a Figura 14a. De acordo com as explicações em [94],

a desclinação pode ser visualizada como a remoção ou adição de uma fatia do material em questão, de modo que o ângulo resultante de uma volta entorno do eixo  $z$ , após esse processo de retirada ou acréscimo, será menor ou maior quando comparado com o valor usual de  $2\pi$ , isto é, sem o defeito. Nos casos em que o ângulo resultante do processo é menor (maior) do que  $2\pi$ , significa que uma fatia de material foi removida (adicionada), o que do ponto de vista geométrico corresponde a um déficit (acrécimo) angular. Essas ideias estão ilustradas de maneira didática na Figura 14b. Além disso, como é ressaltado, o núcleo do defeito coincide exatamente com o eixo de simetria, isto é, com o eixo  $z$ .

Figura 14 – Representação didática da formação da desclinação em materiais.



Legenda: (a) Um corte é feito em uma seção reta de um cilindro e em seguida (b) uma fatia pode ser retirada (imagem superior) ou adicionada (imagem inferior), o que em ambos os casos ocasiona na origem da desclinação no material. O círculo escuro no centro das imagens em (b) indica a localização do defeito formado. Fonte: produzido pelo autor com base na Ref. [94].

De acordo com os comentários anteriores sistemas de matéria condensada são um campo fértil para estabelecer modelos análogos que simulem alguns sistemas astrofísicos e seus fenômenos. De fato, cordas cósmicas são defeitos (topológicos) que, em princípio, se formaram nas transições de fase pelas quais o Universo passou após o *Big bang* e a redução de temperatura subsequente. Alguns efeitos que possivelmente podem indicar sua presença são, por exemplo, a observação de efeitos de lentes gravitacionais e a emissão de ondas gravitacionais e partículas altamente energéticas [74].

É bem conhecido atualmente que tais objetos, as cordas cósmicas, possuem fortes analogias em sistemas de matéria condensada como os vórtices em super fluidos [95], além de cristais líquidos nemáticos com desclinação [96]. A título de informação, os cristais líquidos são materiais que compartilham algumas características das substâncias líquidas assim como propriedades cristalinas, por exemplo, fluidez, anisotropia e arranjos moleculares periódicos e ordenados em uma direção particular [97].

Foi mostrado na Ref. [96] que a propagação de um raio de luz por um cristal líquido na fase nemática com a presença do defeito desclinação (d), percebe uma geometria efetiva que é descrita pelo elemento de linha

$$ds^2 = d\rho^2 + \alpha_d \rho^2 d\phi^2, \quad (4.1)$$

onde  $\rho$  representa a coordenada radial do modelo e a constante  $\alpha_d$  corresponde a um parâmetro escrito em termos dos índices de refração ordinário e extraordinário do meio, tal que  $\alpha_d > 1$ . Destaca-se que, algumas das variáveis da fonte original foram renomeadas a fim de recuperar as expressões conhecidas e apresentadas anteriormente. Conforme bem observado pelos autores, a Eq. (4.1) corresponde a uma seção reta do espaço-tempo (efetivo) da corda cósmica (3.6), definida pelos valores de  $t$  e  $z$  constantes, com o ângulo efetivo  $\phi' \equiv \alpha_d \phi$ . No caso de meios nemáticos com a presença de vórtices (v) o elemento de linha ainda tem a forma de (4.1), mas com  $\alpha_d \rightarrow \alpha_v = \alpha_d^{-1}$  e, conseqüentemente,  $\alpha_v < 1$ .

Diante do exposto, sobre as potencialidades dos MAG em sistemas de matéria condensada, um pensamento natural seria idealizar um estudo do MBQI de uma partícula no cenário dos MAG. Uma pesquisa nessa direção já foi desenvolvida na Ref. [45], na qual investiga-se o MBQI de uma partícula pontual escalar em um espaço-tempo FLRW em expansão, simulado por um CBE, na presença de um e dois planos paralelos. Além disso, na Ref. [98] um problema semelhante foi estudado, em que é analisado o MBQI de uma partícula no espaço-tempo cosmológico FRLW na presença de uma corda cósmica.

Com base nas pesquisas destacadas acima, percebe-se a oportunidade de investigar o MBQI de uma partícula escalar sem massa em um MAG simulando um universo em expansão FLRW na presença de uma corda cósmica. Essa é uma possibilidade que, até o nosso conhecimento, ainda não havia sido explorada. Portanto, a presente pesquisa [35] encontra ampla motivação, visto que tais sistemas análogos, conforme exposto, podem ser mais acessíveis de um ponto de vista prático, além de possivelmente fornecer alguma intuição sobre as questões que ainda necessitam de uma maior compreensão.

Para estabelecer a analogia com o universo FLRW, semelhante a Ref. [45], utilizaremos como sistema um CBE em expansão conforme, enquanto que a corda cósmica no modelo será introduzida considerando a presença da desclinação no meio. Além disso, visando tornar o estudo um pouco mais geral, condições de quasiperiodicidade também são impostas para a variável angular do campo escalar.

## 4.2 Geometrias efetivas em condensados de Bose-Einstein e espaço-tempo com desclinação

Em poucas palavras, a condensação de Bose-Einstein é um fenômeno no qual as partículas de um gás de bósons, quando submetido a temperaturas extremamente baixas, aglomeram-se no estado de mais baixa energia do sistema, isto é, no seu estado fundamental. A produção de um gás quântico dessa natureza exige técnicas de resfriamento e aprisionamento muito sofisticadas que, a grosso modo, envolvem a combinação de campos magnéticos e a incidência de lasers sobre os átomos da amostra – para mais detalhes veja, por exemplo, as Refs. [99] e [100]. Quanto a descrição física desse sistema (quântico e de muitos corpos), esta pode ser realizada através do formalismo da segunda quantização, no qual os campos associados ao sistema são promovidos ao posto de operadores. Nesse âmbito, um gás formado por  $N$  bósons com massa  $m$  e fracamente interagentes pode ser descrito pela hamiltoniana efetiva [101, 102, 103]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (4.2a)$$

com

$$\hat{H}_0 = \int d\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{x}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \quad (4.2b)$$

e

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{U}{2} \int d\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t). \quad (4.2c)$$

Nas Eqs. (4.2b) e (4.2c),  $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$  e  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$  são os operadores de campo e representam os bósons no condensado. Para um instante de tempo  $t$  qualquer, enquanto  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$  cria um bóson na posição  $\mathbf{x}$  o operador  $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$  aniquila um bósons em  $\mathbf{x}$ . Ambos os operadores satisfazem as relações de comutação [101]

$$[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.3a)$$

$$[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (4.3b)$$

e

$$[\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = 0. \quad (4.3c)$$

É instrutivo observar a semelhança que o termo entre colchetes na Eq. (4.2b) possui com a equação de Schrödinger (2.69). O hamiltoniano de partícula única  $\hat{H}_0$ , isto é, não interagente, pode ser interpretado como a contribuição resultante dos  $N$  bósons individuais presentes no condensado, visto que a integral soma todos os bósons contidos no volume  $d\mathbf{x}$ . Além disso,  $V_{\text{ext}}$  representa um potencial externo ao sistema, que afeta igualmente todas as partículas do gás, por exemplo, o potencial de confinamento [101, 102, 103].

O termo de interação  $\hat{H}_{\text{int}}$ , dado pela Eq. (4.2c), consiste em uma aproximação, a qual considera apenas colisões binárias entre as partículas do condensado. Esse potencial interatômico é comumente utilizado para sistemas bem diluídos em regimes de baixas energias (temperaturas), situação em que apenas as colisões átomo-átomo são relevantes e modeladas como interações de curtas distâncias [102, 103]. Portanto, nesse caso, o hamiltoniano de interação assume a forma exposta na Eq. (4.2c) e o potencial de interação  $U$  é escrito em termos do comprimento de espalhamento  $a$  conforme a expressão [101]

$$U = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (4.4)$$

Destaca-se que o comprimento de espalhamento  $a$  terá um papel central nos desenvolvimentos futuros, pois será através desse parâmetro que a velocidade das perturbações acústicas no condensado será definida como função do tempo.

Dado um operador arbitrário  $\hat{\mathcal{O}}$ , a equação de Heisenberg determina que a sua evolução temporal será governada pela equação

$$i\hbar \frac{d\hat{\mathcal{O}}}{dt} = [\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}], \quad (4.5)$$

com o hamiltoniano  $\hat{H}$  responsável pela evolução temporal. Portanto, de acordo com as Eqs. (4.2a) e (4.5), para obter a dinâmica do operador  $\hat{\psi}$  é necessário calcular os comutadores  $[\hat{\psi}, \hat{H}_0]$  e  $[\hat{\psi}, \hat{H}_{\text{int}}]$ .

A partir das Eqs. (4.2b), (4.2c) e (4.3) é uma questão de álgebra mostrar que

$$[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{H}_0] = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{x}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \quad (4.6a)$$

e

$$[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{H}_{\text{int}}] = U |\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)|^2 \hat{\psi}(\mathbf{x}, t). \quad (4.6b)$$

Assim, utilizando os resultados (4.6) e as Eqs. (4.2a) e (4.5), a dinâmica do operador de campo  $\hat{\psi}$ , associado aos bósons do condensado, será dada pela equação [101, 102, 103]

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{x}) + U \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \right] \hat{\psi}(\mathbf{x}, t). \quad (4.7)$$

Conforme mencionado, o comportamento exato do CBE é descrito pela Eq. (4.7), mas em virtude do grande número de constituintes do condensado a solução dessa expressão torna-se extremamente complicada e inviável, seja por métodos analíticos ou numéricos. Contudo, diante da ocupação coletiva dos átomos no estado fundamental, é possível seguir uma abordagem aproximada em que a solução  $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$  admite a decomposição

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t) + \delta\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t). \quad (4.8)$$

De acordo com essa metodologia, a contribuição  $\psi(\mathbf{x}, t)$  na expressão acima representa uma parte clássica do operador de campo  $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ , a qual é equivalente ao valor médio

$\langle \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \rangle = \psi(\mathbf{x}, t)$ . Por outro lado, o termo  $\delta \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$  corresponde a parte quântica do operador, com valor médio nulo:  $\langle \delta \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$ . Nesse tratamento, o módulo ao quadrado do campo clássico  $\psi(\mathbf{x}, t)$  é identificado como a densidade atômica do condensado:  $\rho = n_0/V = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2$ , com  $n_0$  representando o número de átomos no estado fundamental e  $V$  o volume do condensado [102]. Além disso, a contribuição  $\delta \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$  pode ser interpretada como pequenas flutuações de natureza quântica ou térmica. A decomposição (4.8) é uma abordagem de campo médio conhecida como aproximação de Bogoliubov [101].

Segundo a Ref. [103], a motivação para estabelecer a Eq. (4.8) está no fato da ocupação dominante (macroscópica) dos átomos no estado fundamental do sistema. Para um condensado com  $n_{\mathbf{p}}$  átomos, o estado fundamental na condensação é tal que  $n_0 \gg n_{\mathbf{p} \neq 0}$ . Assim, a partir da Eq. (2.66) segue que

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_0^\dagger \end{array} \right\} |n_0, n_1, \dots, n_p\rangle = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{n_0} \\ \sqrt{n_0 + 1} \end{array} \right\} |n_0 \mp 1, n_1, \dots, n_p\rangle \\ \approx \sqrt{n_0} |n_0, n_1, \dots, n_p\rangle, \quad (n_0 \gg n_{p \neq 0}), \quad (4.9)$$

em que  $n_0$  corresponde ao número de partículas no estado fundamental do condensado, com momento  $\mathbf{p} = 0$ . Por questões de conveniência e simplicidade, a notação introduzida no Capítulo 2 foi modificada a fim de tornar os argumentos mais intuitivos.

A Eq. (4.9) mostra que, nesse limite, os operadores de criação  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$  e aniquilação  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$  têm aproximadamente o mesmo autovalor constante  $\sqrt{n_0}$  e podem ser ambos identificados como constantes. Negligenciando por um instante as variações temporais e considerando a expansão  $\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$  para o operador de campo, na qual  $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$  são funções de onda de partícula única, com momento  $\mathbf{p}$  e confinadas em uma região de volume finito  $V$ , por exemplo, em uma caixa cúbica. Então, com base na Eq. (4.9), é possível notar que

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{\mathbf{p} \\ (\mathbf{p} \neq 0)}} \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}. \quad (4.10)$$

Diante do resultado (4.9) duas conclusões podem ser inferidas. Primeiro, observa-se que o estado fundamental corresponde a uma quantidade clássica, a qual é equivalente a densidade de átomos no estado fundamental do condensado. Segundo, os demais estados excitados, isto é, com  $\mathbf{p} \neq 0$ , podem ser enxergados como pequenas flutuações quânticas ou térmicas, visto que os átomos ocupam predominantemente o estado com momento nulo. Note que a contribuição devido a  $\mathbf{p} \neq 0$  ainda é quântica, porque o limite da aproximação (4.9) é aplicável apenas ao estado fundamental, visto que  $n_0 \pm 1 \approx n_0$  para  $n_0 \gg 1$ . Entretanto, os estados excitados são minimamente populosos e, conseqüentemente, essa aproximação não é admissível. Com base em ambas as observações relatadas, nota-se que, na verdade,  $\rho$  representa a própria densidade do condensado, visto que as contribuições provenientes de  $\mathbf{p} \neq 0$  em (4.10) são desprezíveis frente a magnitude de  $\sqrt{\rho}$ .

A generalização dos argumentos apresentados acima, isto é, envolvendo a dependência temporal, culmina na expressão (4.8) e todas as suas propriedades mencionadas anteriormente. Mais detalhes sobre a aproximação (4.8) podem ser encontrados na Ref. [103], sobre a qual nos baseamos. Além disso, para complemento, bem como um exemplo de aplicação, recomendamos também a consulta do capítulo 42 da Ref. [54].

Perante o exposto, utilizando as Eqs. (4.7) e (4.8), além de ignorar as contribuições do termo flutuante  $\delta\hat{\Psi}$ , podemos estabelecer a seguinte expressão:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{x}) + U|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{x}, t), \quad (4.11)$$

conhecida como equação de Gross-Pitaevskii, ou ainda equação de Schrödinger não linear, em virtude da sua semelhança com a expressão usual da mecânica quântica, Eq. (2.69), e devido ao termo não linear  $U|\psi|^2$  originado pela interação interatômica dos átomos no condensado. Diferente de (4.7), que envolve operadores, a Eq. (4.11) está escrita em termos de uma função de onda clássica, que descreve o comportamento coletivo dos átomos no estado fundamental do condensado.

Matematicamente, para observar a produção de um espaço-tempo efetivo curvo para as perturbações acústicas no condensado devemos recordar da situação com fluidos clássicos, cujo ponto de partida são as equações da continuidade e Euler para a dinâmica dos fluidos [38]. Expressões “hidrodinâmicas” similares para o CBE podem ser obtidas imediatamente considerando a seguinte representação para o campo:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{n(\mathbf{x}, t)} e^{i\theta(\mathbf{x}, t)}, \quad (4.12)$$

conhecida na literatura como representação de Madelung [102]. Na Eq. (4.12), as quantidades  $n(\mathbf{x}, t)$  e  $\theta(\mathbf{x}, t)$  são, respectivamente, campos clássicos reais de densidade e fase. A seguir, os desenvolvimentos matemáticos introduzidos para a construção do espaço-tempo efetivo no condensado estão alinhados com a Ref. [101], sobre a qual nos baseamos fundamentalmente.

Substituindo a transformação do campo (4.12) na Eq. (4.11), após alguma álgebra, encontramos que

$$\begin{aligned} -\hbar\sqrt{n} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + \left[ \frac{\hbar}{2\sqrt{n}} \left( \frac{\partial n}{\partial t} \right) \right] i &= \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \sqrt{n} \nabla \theta \cdot \nabla \theta - \nabla^2 \theta + \frac{2m}{\hbar^2} \left( \sqrt{n} V_{\text{ext}} + n^{3/2} U \right) \right] \\ &\quad - i \frac{\hbar^2}{2m} \left[ 2(\nabla \sqrt{n}) \cdot \nabla \theta + \sqrt{n} \nabla^2 \theta \right]. \end{aligned}$$

Para que o resultado acima seja válido as partes reais e imaginárias em ambos os lados devem ser idênticas. Então, igualando as devidas quantidades obtêm-se:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (n \nabla \theta) = 0 \quad (4.13a)$$

e

$$\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} + V_{\text{ext}} + nU + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \theta|^2 = 0. \quad (4.13b)$$

Nesse nível, a Eq. (4.13a) corresponde a expressão análoga para a equação da continuidade dos fluidos, com a definição do campo de velocidade

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta. \quad (4.14)$$

Por outro lado a Eq. (4.13b), é semelhante a equação de Euler para um fluido não viscoso e irrotacional, escrita na forma de Hamilton-Jacobi, exceto pela contribuição extra identificada como um potencial quântico (segundo termo no lado esquerdo) [38]. É instrutivo notar que  $\mathbf{v}$ , conforme a definição (4.14), possui de fato unidades de velocidade, dado que  $[\hbar/m] = L^2/T$  e  $[\nabla \theta] = 1/L$ , com  $L$  e  $T$ , nessa ordem, representando figurativamente as unidades de comprimento e tempo.

Com o objetivo de estudar o comportamento da propagação das perturbações acústicas no condensado considera-se a linearização das Eqs. (4.13), que consiste em assumir as seguintes prescrições:

$$n \rightarrow n_0 + \hat{n}_1 \quad (4.15a)$$

e

$$\theta \rightarrow \theta_0 + \hat{\theta}_1. \quad (4.15b)$$

As correspondências acima indicam que ambas as grandezas,  $n$  e  $\theta$ , possuem pequenas flutuações,  $\hat{n}_1$  e  $\hat{\theta}_1$ , em torno de valores fixos e bem definidos,  $n_0$  e  $\theta_0$ . Então, substituindo as Eqs. (4.15) nas Eqs. (4.13) e mantendo apenas os termos de primeira ordem nas perturbações, encontram-se o par de equações

$$\frac{\partial \hat{n}_1}{\partial t} + \frac{\hbar}{m} \nabla \cdot [n_0 \nabla \hat{\theta}_1 + \hat{n}_1 \nabla \theta_0] = 0 \quad (4.16a)$$

e

$$\hbar \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial t} + \tilde{U} \hat{n}_1 + \frac{\hbar^2}{m} \nabla \theta_0 \cdot \nabla \hat{\theta}_1 = 0, \quad (4.16b)$$

onde definiram-se os operadores

$$\tilde{U} \hat{n}_1 = \left[ U - \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{D}_2 \right] \hat{n}_1 \quad (4.17a)$$

e

$$\tilde{D}_2 \hat{n}_1 = -\frac{1}{2} n_0^{-3/2} (\nabla^2 \sqrt{n}) \hat{n}_1 + \frac{1}{2\sqrt{n_0}} \nabla^2 \left( \frac{\hat{n}_1}{\sqrt{n}} \right). \quad (4.17b)$$

Observando as Eqs. (4.16a) e (4.16b) nota-se que ambas as expressões dependem essencialmente dos parâmetros  $\hat{n}_0$ ,  $\hat{\theta}_0$ ,  $\hat{n}_1$  e  $\hat{\theta}_1$ . A partir da Eq. (4.16b) percebe-se a possibilidade de isolar  $\hat{n}_1$  de modo a escrevê-lo em termos de  $\hat{\theta}_0$  e  $\hat{\theta}_1$ :

$$\hat{n}_1 = -\hbar \tilde{U}^{-1} \left[ \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\theta}_1 \right]. \quad (4.18)$$

Então, substituindo (4.18) em (4.16a), após algumas simplificações é possível estabelecer o seguinte resultado:

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \hat{\theta}_1) = 0, \quad (4.19)$$

com a definição dos objetos

$$f^{00} = -\tilde{U}^{-1}, \quad (4.20a)$$

$$f^{i0} = -v^i \tilde{U}^{-1}, \quad (4.20b)$$

$$f^{0j} = -\tilde{U}^{-1} v^j, \quad (4.20c)$$

e

$$f^{ij} = \frac{n_0}{m} \delta^{ij} - v^i \tilde{U}^{-1} v^j. \quad (4.20d)$$

Na Eq. (4.18) foi utilizada a definição do campo de velocidades estabelecida em (4.14), logo nas Eqs. (4.20)  $\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta_0$  e representa um campo de velocidades de fundo fixo, isto é, sem perturbações [101]. No presente caso, estamos trabalhando com um sistema físico real em  $(3 + 1)$  dimensões. Entretanto, as Eqs. (4.19) e (4.20) podem ser estendidas para um caso geral de  $(d + 1)$  dimensões, de modo que os índices  $\mu, \nu = (0, 1, 2, \dots, d)$  enquanto que  $i, j = (1, 2, \dots, d)$ , para  $d$  dimensões espaciais.

A estrutura compacta da Eq. (4.19) possui uma incrível semelhança com a equação de movimento para um campo escalar sem massa em um espaço-tempo curvo minimamente acoplado a gravidade ( $\xi = 0$ ) – confira as Eqs. (2.98) e (2.100). Contudo, a princípio, essa analogia é simples e puramente formal, pois os objetos  $f^{\mu\nu}$  são operadores. De fato, nota-se que todas as Eqs. (4.20) dependem de  $\tilde{U}$ , Eq. (4.17a), que por sua vez depende do operador diferencial  $\tilde{D}_2$ , definido pela Eq. (4.17b), além da função clássica  $U$ . Consequentemente, não é possível associar  $f^{\mu\nu}$  a definição de uma métrica efetiva com significado físico, isto é, que representa uma geometria de espaço-tempo análogo.

A origem do empecilho relatado no parágrafo acima está no operador  $\tilde{D}_2$ , porém, em certas circunstâncias, este pode ser descartado ou desenvolvido de maneira conveniente, permitindo estabelecer uma legítima métrica efetiva para as perturbações acústicas no condensado. Entre os procedimentos possíveis, o mais simples consiste em negligenciar a contribuição  $\tilde{D}_2$ . Essa abordagem é denominada de aproximação quasiclássica, também nomeada como aproximação acústica ou hidrodinâmica [101]. A motivação física por trás de tal procedimento está no fato de que  $\tilde{D}_2$  é multiplicado por um fator de  $\hbar^2$ , logo este termo fornece um ajuste fino e de alta ordem. Então, para uma teoria aproximada, podemos desprezá-lo [102]. Em outras palavras, mantemos apenas termos de primeira ordem em  $\hbar$ , pois de acordo com a Eq. (4.14) a velocidade  $\mathbf{v}$  é proporcional a constante  $\hbar$  (por essa razão o nome “quasiclássico”). Outras aproximações podem ser encontradas na Ref. [102].

Implementando a aproximação descrita acima, em que  $\tilde{D}_2 \rightarrow 0$  e  $\tilde{U} \rightarrow U$ , consequentemente, todas as componentes  $f^{\mu\nu}$ , dispostas em (4.20), tornam-se funções escalares, visto que passam a depender exclusivamente do potencial  $U$ , Eq. (4.4), e das componentes da velocidade de fundo  $\mathbf{v}$ . Logo, nesse limite, a Eq. (4.19) possui um significado físico e pode-se escrever

$$f^{\mu\nu} = -U^{-1}M^{\mu\nu}, \quad (4.21)$$

com a definição da matriz

$$M^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & v^j \\ \dots & \cdot & \dots \\ v^i & \vdots & -(c^2\delta^{ij} - v^iv^j) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

e a velocidade do som no condensado

$$c^2 = \frac{n_0 U}{m}. \quad (4.23)$$

É importante ressaltar que nesse estágio dos desenvolvimentos a matriz  $f^{\mu\nu}$ , definida pelas Eqs. (4.21) e (4.22), corresponde a uma matriz quadrada de ordem  $(d+1)$ , com  $d$  representando o número de dimensões espaciais do modelo. É esclarecedor observar a coerência das unidades na Eq. (4.23), dado que  $[U/m] = L^5 T^{-2}$  e  $[n_0] = L^{-3}$ .

A partir da associação  $f^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ , sugerida pela Eq. (4.19), com a aproximação quasiclássica, é possível mostrar que as perturbações na fase da função de onda do condensado experimentam um espaço-tempo curvo aparente, cuja geometria é caracterizada pela métrica efetiva [101]

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{n_0}{cm}\right)^{\frac{2}{(d-1)}} \begin{bmatrix} -(c^2 - v^2) & \vdots & -v_j \\ \dots & \cdot & \dots \\ -v_i & \vdots & \delta_{ij} \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Todas as quantidades expostas na expressão acima já foram previamente definidas. No Apêndice B.3 encontram-se alguns detalhes sobre a dedução da Eq. (4.24). De maneira geral, esse resultado mostra a possibilidade de construir um modelo análogo de gravidade utilizando um CBE, semelhante ao que ocorre para os modelos com fluidos clássicos. A seguir, a Eq. (4.24) será utilizada para estabelecer um espaço-tempo efetivo capaz de simular um cenário gravitacional com corda cósmica.

Para simular uma métrica plana FLRW da cosmologia, utilizando a métrica efetiva (ou acústica) dada pela Eq. (4.24), duas rotas distintas podem ser seguidas. A primeira, rotulada por “explosões”, consiste em admitir explosões no meio fluido. Já a segunda forma considera uma velocidade de propagação do som variável, além de presumir o meio fluido estático [38, 104]. O segundo método é bem estabelecido e comumente utilizado na

literatura, conforme pode ser observado, por exemplo, nas Refs. [101], [35], [45] e [105]. Portanto, seguindo a tendência da literatura, essa abordagem também será utilizada em nossos desenvolvimentos. Além disso, consonante a essas fontes, a dependência temporal na velocidade do som será introduzida através do comprimento de espalhamento  $a$ , ou seja, a partir das Eqs. (4.23) e (4.4), será admitido que

$$c^2(t) = \frac{n_0 U(t)}{m} = \frac{4\pi\hbar^2 n_0}{m^2} a(t), \quad (4.25)$$

mantendo os demais parâmetros ( $n_0$  e  $\mathbf{v}$ ) constantes. É importante enfatizar que, nesse estágio do estudo, essa consideração não modifica nenhum dos desenvolvimentos matemáticos e resultados anteriores.

Nessa abordagem, a simulação de um espaço-tempo efetivo FLRW plano está diretamente relacionada a capacidade de controlar a velocidade do som no condensado, que por sua vez está associada ao controle da interação entre os átomos através do comprimento de espalhamento. De maneira conveniente, as variações na velocidade do som podem ser modeladas através da introdução de uma função auxiliar  $b(t)$ , também chamada de função de escala, tal que [101]

$$c^2(t) = \left( \frac{4\pi\hbar^2 n_0 a_0}{m^2} \right) b(t) = \frac{n_0 U_0}{m} b(t), \quad (4.26)$$

com  $U_0 = U(t = t_0)$  e  $a_0 = a(t = t_0)$  representando, nessa ordem, um valor constante para o potencial de contato e o comprimento de espalhamento para um tempo inicial  $t_0$ . Podemos imaginar o instante de tempo  $t_0$  como um tempo de referência, por exemplo, o tempo em que se deu início ao experimento, situação na qual os valores para os parâmetros do condensado são identificados como fixos [106]. A partir da Eq. (4.26) fica claro que para a configuração inicial  $b(t_0) = 1$ . Além disso, é facilmente percebido que a função de escala  $b(t)$  pode ser escrita em termos da velocidade do som no meio segundo a relação

$$b(t) = \left[ \frac{c(t)}{c_0} \right]^2, \quad (4.27)$$

com  $c_0 = c(t = t_0)$ . Destaca-se que as Eqs. (4.26) e (4.27) resultam diretamente da correspondência matemática  $a(t) = a_0 b(t)$ , a qual em palavras indica que as variações temporais do parâmetro  $a$  são descritas em termos da função  $b(t)$ , que modula o valor fixo  $a_0$  em função do tempo.

Dado que todos os parâmetros do condensado são mantidos constantes, com exceção da velocidade do som, definida em (4.26), considerando as discussões acima e uma situação na qual a velocidade do meio é nula, isto é,  $\mathbf{v} = 0$ , a partir da métrica (4.24), obtém-se o seguinte elemento de linha efetivo [101, 45]:

$$d\tilde{s}_{\text{ef}}^2 = \Omega_0^2 \left[ -b^{\frac{1}{2}}(t) c_0^2 dt^2 + b^{-\frac{1}{2}}(t) \delta_{ij} dx^i dx^j \right], \quad (4.28a)$$

com

$$\Omega_0^2 = \frac{n_0}{mc_0}. \quad (4.28b)$$

Apesar da introdução de variações na velocidade do som o condensado permanece em repouso, logo a velocidade de fundo do meio é zero [106].

Em virtude da constante dimensional  $\Omega_0^2$ , observando a Eq. (4.28a) nota-se que, o elemento de linha anterior não possui unidades de comprimento ao quadrado. Entretanto, como indicado pela Ref. [45], as unidades podem ser facilmente recuperadas redefinindo o elemento de linha através da parametrização  $ds_{\text{ef}}^2 := \Omega_0^{-2} d\tilde{s}_{\text{ef}}^2$ . Esse procedimento não produz perdas de generalidade, uma vez que  $\Omega_0$  é um fator constante. Portanto, dessa maneira obtemos o novo elemento de linha

$$ds_{\text{ef}}^2 = -b^{\frac{1}{2}}(t)c_0^2 dt^2 + b^{-\frac{1}{2}}(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (4.29)$$

A Eq. (4.29) representa um legítimo elemento de linha (efetivo) da relatividade, o qual possui unidades de comprimento ao quadrado. No presente capítulo pretende-se estudar o MBQI de uma partícula em um meio com desclinação, isto é, de um átomo no condensado. Nesse seguimento, com base nas discussões apresentadas nas Seções 3.2.1 e 4.1, tendo em vista a simetria cilíndrica da métrica efetiva de um meio com desclinação, assim como das cordas cósmicas, é conveniente identificar a seção espacial

$$\delta_{ij}dx^i dx^j = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (4.30)$$

com  $\rho \geq 0$ ,  $\phi \in [0, \frac{2\pi}{p}]$  e  $z \in [-\infty, +\infty]$ . Aqui o parâmetro  $p$  pode assumir valores reais, positivos e maiores ou menores do que a unidade (diferente das cordas cósmicas em que  $p > 1$ ). Nos casos em que  $p \neq 1$  diz-se que há uma desclinação no meio ou, no contexto dos modelos análogos, existe a presença de uma corda cósmica. Em todo caso, a presença de tais defeitos é introduzida através de uma modificação na coordenada angular  $\phi$ . Vale ressaltar que o cenário  $p = 1$  caracteriza um meio sem desclinação ou um espaço-tempo sem corda cósmica.

Para finalizar esta seção gostaríamos de evidenciar que o elemento de linha (4.29) admite uma simetria conforme, quando implementa-se a transformação de tempo conforme

$$dt = b^{-\frac{1}{2}}(\eta)d\eta, \quad (4.31)$$

resultando em

$$ds_{\text{ef}}^2 = b^{-\frac{1}{2}}(\eta) \left[ -c_0^2 d\eta^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \right]. \quad (4.32)$$

A Eq. (4.32) corresponde ao elemento de linha para um espaço-tempo efetivo FLRW da cosmologia na presença de uma desclinação, que por sua vez está conformemente relacionado ao espaço-tempo efetivo localmente plano com desclinação através do fator conforme  $b^{-\frac{1}{2}}(t)$ . Como será visto adiante, a simetria conforme exibida pelas Eqs. (4.31) e (4.32) terá um papel crucial nos cálculos da dispersão de velocidades associada a partícula Browniana no condensado.

### 4.3 Equações de movimento

Para estudar o MBQI de uma partícula pontual em um espaço-tempo FLRW na presença de uma corda cósmica devemos considerar a expressão [45, 98, 35, 107]

$$m(x) \left[ \ddot{x}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right] = q \left[ g^{\beta\alpha} + \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right] \nabla_\alpha \varphi(x). \quad (4.33)$$

A Eq. (4.33) descreve o movimento de uma partícula pontual de massa  $m$  e carga  $q$  em um espaço-tempo curvo arbitrário, acoplada com um campo escalar  $\varphi$  [108]. Nessa equação,  $x^\beta = x^\beta(\tau)$  representa as componentes do quadrivetor posição da partícula, as quais são funções do tempo próprio  $\tau$  (que parametriza a sua linha de universo). O ponto sobre as coordenadas representa uma derivada com respeito a  $\tau$ . Uma dedução matemática da Eq. (4.33) é apresentada no Apêndice B.1. Conforme discutido no Apêndice B.1, o primeiro termo no lado direito de (4.33) é suscetível a uma mudança de sinal, que depende exclusivamente da assinatura da métrica. Contudo, no presente caso, em virtude da assinatura de (4.29), esta mudança não ocorre.

Os símbolos  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  em (4.33) são computados em função das componentes do tensor métrico através da Eq. (2.87). Além disso, o termo entre parênteses no seu lado esquerdo corresponde a derivada intrínseca ou absoluta [109] do quadrivetor velocidade  $u^\beta = \dot{x}^\beta$ , a qual é definida como

$$\frac{Du^\beta}{d\tau} = \frac{du^\beta}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta u^\mu u^\nu. \quad (4.34)$$

Conforme revisado breve e didaticamente no Apêndice B.1, a massa  $m$  em (4.33) é uma quantidade dinâmica e pode variar com respeito as coordenadas  $x^\beta(\tau)$  da partícula segundo a equação diferencial

$$\frac{dm}{d\tau} = -u^\alpha \nabla_\alpha \varphi(x). \quad (4.35)$$

De acordo com a Ref. [108] a variação da massa exposta acima pode ser escrita na forma

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{1}{12}(1 - 6\xi)q^2 R - q^2 u^2 \int_\infty^{\tau^-} \nabla_\mu G_{\text{ret}}(x(\tau), x(\tau')) d\tau'. \quad (4.36)$$

O parâmetro  $\xi$  representa uma constante de acoplamento,  $R$  o escalar de Ricci e  $\tau^-$  uma modificação no limite superior da integração que evita o comportamento singular da função de Green retardada  $G_{\text{ret}}$ . Observando o primeiro termo no lado direito da Eq. (4.36) percebe-se nitidamente que, se o espaço-tempo é plano ( $R = 0$ ) ou conformemente plano ( $R \neq 0$  e  $\xi = 1/6$ ) sua contribuição será nula para ambas as situações. Embora não seja tão evidente quanto o primeiro, segundo a Ref. [108], o termo integral em (4.36) também é nulo para esses casos. Então, conclui-se que as variações da massa, relatadas acima, são inexistentes quando o espaço-tempo é plano ou conformemente plano.

Diante das discussões acima e dado que nossa geometria de espaço-tempo é localmente plana, a partir das Eqs. (4.33), (4.34) e (4.36), podemos escrever:

$$m \frac{Du^\beta}{d\tau} = qg^{\beta\alpha} \nabla_\alpha \varphi + f_{\text{ext}}^\beta. \quad (4.37)$$

O termo de força  $f_{\text{ext}}^\beta$  foi adicionado com o intuito de generalizar a expressão incluindo os efeitos de possíveis interações externas ao sistema. Esse resultado também pode ser obtido assumindo que o campo  $\varphi$  admite como decomposição a soma de duas contribuições: uma de natureza clássica e não-flutuante, cuja contribuição é representada por  $f_{\text{ext}}^\beta$ ; e outra puramente quântica ( $qg^{\beta\alpha} \nabla_\alpha \varphi$ ), que varia randomicamente. Nesse sentido, em espírito a Eq. (4.37) é similar a equação de Langevin para o movimento Browniano clássico. Além disso, sob essa perspectiva,  $f_{\text{ext}}^\beta$  atua como uma força clássica que tende a cessar o movimento aleatório, enquanto que o primeiro termo no lado direito de (4.37) é responsável pelo movimento estocástico da partícula.

Em nosso estudo do MBQI estaremos concentrados em um regime de velocidades não relativístico. Logo, pode-se admitir com boa aproximação que, o tempo próprio  $\tau$  e coordenado  $t$  são aproximadamente iguais, visto que  $d\tau = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} dt$  e  $v \ll c$ . Vale ressaltar que, no contexto dos MAGs a velocidade do som no meio fluido desempenha o papel da velocidade da luz no espaço-tempo real. Portanto, no presente cenário, esse regime é compreendido como uma situação na qual a velocidade da partícula Browniana é muito menor do que a velocidade das perturbações acústicas no CBE.

A partir das Eqs. (4.29) e (2.87) é possível mostrar que os únicos símbolos de Christoffel não nulos são aqueles mostrados na Tabela 3. A partir desses símbolos nota-se que a solução para a Eq. (4.37) não é uma tarefa simples, uma vez que existe uma mistura de componentes nas equações particulares. Todavia, admitindo uma força externa cujas componentes são

$$f_{\text{ext}}^\beta = [f_{\text{ext}}^0, f_{\text{ext}}^\rho, f_{\text{ext}}^\phi, f_{\text{ext}}^z] = [0, m\Gamma_{\phi\phi}^\rho u^\phi u^\phi, 2m\Gamma_{\rho\phi}^\phi u^\rho u^\phi, 0], \quad (4.38)$$

a Eq. (4.37) é grandemente simplificada, de modo que encontramos

$$m \frac{du^i}{dt} - \frac{m}{2} \frac{b}{b} u^i = qg^{ij} \nabla_j \varphi. \quad (4.39)$$

Devido ao limite não relativístico, de agora em diante, apenas as componentes espaciais da equação de movimento serão consideradas. Além disso, em consonância com a Ref. [45], as propriedades de homogeneidade e isotropia do universo FLRW nos permitem escolher, sem perda de generalidade, uma direção particular  $i$  para a análise do movimento.

Como sabemos, as contribuições de  $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$  são provenientes da curvatura do espaço-tempo, em outras palavras, têm um origem geométrica. Logo, assumir (4.38) é razoável, visto que a geometria do espaço-tempo é satisfatoriamente descrita pela Relatividade.

Tabela 3 – Símbolos de Chirstoffel não nulos para a métrica efetiva (4.29).

|                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Gamma_{0\rho}^\rho = \Gamma_{\rho 0}^\rho = \Gamma_{0\phi}^\phi = \Gamma_{\phi 0}^\phi = \Gamma_{0z}^z = \Gamma_{z0}^z = -\frac{1}{4c_0} \frac{\dot{b}(t)}{b(t)}$ |
| $\Gamma_{\phi\phi}^\rho = -\rho$                                                                                                                                    |
| $\Gamma_{\rho\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\rho}^\phi = \frac{1}{\rho}$                                                                                                  |

Legenda: O ponto sobre o fator de escalar representa uma derivada com respeito ao tempo. Conforme mostram os resultados acima, os símbolos de Christoffel são simétricos com respeito aos índices inferiores, isto é,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$ . Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Contudo, antes de prosseguir, é essencial no momento introduzir uma pequena motivação física sobre a escolha de  $f_{\text{ext}}^\beta$ .

Anteriormente, sem muitos detalhes, foi mencionado que  $f_{\text{ext}}^i$  está associada a contribuições de natureza clássica. Agora vamos expor alguns detalhes que motivam essa associação. Por exemplo, considerando as componentes  $u^\rho$  e  $u^\phi$  como as velocidades radial  $v$  e angular  $\omega = \frac{v}{\rho}$ , respectivamente, a partir da Eq. (4.38) e dos resultados na Tabela 3, constata-se que  $f_{\text{ext}}^\rho$  corresponde a uma força centrípeta:

$$f_{\text{ext}}^\rho = m\Gamma_{\phi\phi}^\rho u^\phi u^\phi = -m\frac{v^2}{\rho},$$

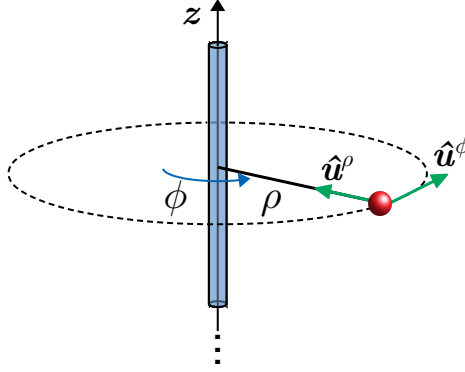
com  $\rho$  representando a distância radial da partícula até o núcleo do defeito (ou corda cósmica no sentido gravitacional). Do mesmo modo, encontra-se que a componente  $f_{\text{ext}}^\phi = -2f_{\text{ext}}^\rho/\rho$ , a qual aparenta ser uma densidade linear de força ao longo da direção radial. Nesse último caso, lembre que, essas são forças de coordenadas, logo existe a possibilidade de que suas estruturas matemáticas não tenham uma correspondência direta com as expressões habituais, como aconteceu para a componente  $f_{\text{ext}}^\rho$ . Esse é um detalhe que será observado posteriormente a fim de obter a dispersão de velocidades físicas para a partícula. Em ambos os casos, nota-se que  $f_{\text{ext}}^i$  é apreciável apenas em regiões próximas ao defeito.

A estrutura clássica obtida a partir de  $f_{\text{ext}}^\rho$  sugere que  $f_{\text{ext}}^i$ , de maneira geral, é uma força clássica de perfil fixo e bem definida. Assim, a escolha inicial (4.38) é coerente e no contexto do movimento Browniano,  $f_{\text{ext}}^i$ , representa de forma legítima uma força não-flutuante, isto é, que não possui natureza quântica e estocástica. Em outras palavras, a Eq. (4.38) é conveniente no sentido de que permite estudar a dispersão de velocidades associada exclusivamente as flutuações quânticas do campo de fase. É interessante observar que a Eq. (4.38) elimina todas as contribuições de origem geométrica em (4.37) e mantém apenas os efeitos da expansão, os quais estão codificados no fator de escalar  $b(t)$ .

De acordo com a Ref. [45], que discute um sistema similar, a força  $f_{\text{ext}}^i$  é responsável por “ligar” as partículas de maneira que cancela localmente todos os efeitos da expansão

simulada no sistema. Consequentemente, as partículas não sentem a expansão acontecer. Uma interpretação similar em um contexto gravitacional, para partículas eletricamente carregadas, é fornecida em [107]. Nesse sentido, aqui  $f_{\text{ext}}^i$  também desempenha um papel semelhante, visto que lembra uma força centrípeta, a qual em princípio tende a ligar a partícula pontual e a corda. A Figura 15 fornece uma ilustração sobre essas ideias.

Figura 15 – Ilustração para uma possível interpretação das componentes  $f_{\text{ext}}^i$ .



Legenda: Na figura acima  $\rho$  corresponde a distância radial da partícula ao eixo vertical  $z$ , enquanto que  $\hat{u}^\rho$  e  $\hat{u}^\phi$  são vetores unitários. Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Observando que para uma constante  $s$  qualquer

$$b^{-s} \frac{d}{dt}(u^i b^s) = \frac{du^i}{dt} + s \frac{\dot{b}}{b} u^i,$$

podemos reescrever (4.39) como

$$mb^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} (u^i b^{-\frac{1}{2}}) = qg^{ij} \nabla_j \varphi.$$

Integrando essa expressão entre dois instantes de tempo sucessivos  $t_0$  e  $t$  encontra-se imediatamente a equação da velocidade. Assumindo que a partícula está em repouso no tempo inicial  $t_0$ , isto é, que  $u^i(t_0) = 0$ , obtemos

$$u^i(x) = \frac{qb^{\frac{1}{2}}(t)}{m} \int_{t_0}^t dt b^{-\frac{1}{2}}(t) g^{ij} \nabla_j \varphi. \quad (4.40)$$

A Eq. (4.40) fornece o comportamento da velocidade coordenada de uma partícula pontual em função do tempo  $t$ , movendo-se por um espaço-tempo efetivo FLRW com desclinação. É importante destacar que, as informações sobre a presença do defeito (análogo da corda cósmica) e da expansão estão codificadas em  $g^{ij}$  e no fator de escala  $b(t)$ , respectivamente. Também, como será visto, as modificações do espaço-tempo pela presença do defeito influenciam na forma da correlação entre os campos, ou seja, na função de Wightman.

## 4.4 Estudo da dispersão de velocidades

Ao longo desse trabalho estaremos interessados em calcular a dispersão dos observáveis associados a partícula Browniana (ex. velocidade ou momento e posição). Essa quantidade física será o indicativo da existência do movimento Browniano Quântico induzido sobre a partícula pelas flutuações quânticas de vácuo dos campos.

De acordo com os métodos estatísticos, dado um observável qualquer  $\hat{\mathcal{O}}$ , que pode assumir diferentes valores, o cálculo da dispersão é uma maneira conveniente de obter uma medida sobre o espalhamento da distribuição dos valores do observável em torno do seu valor médio [110]. No formalismo da mecânica quântica, para um estado arbitrário  $|\Omega\rangle$ , a dispersão é definida pela expressão

$$\langle(\Delta\hat{\mathcal{O}})^2\rangle = \langle(\hat{\mathcal{O}} - \langle\hat{\mathcal{O}}\rangle)^2\rangle \quad (4.41)$$

$$= \langle\hat{\mathcal{O}}^2\rangle - \langle\hat{\mathcal{O}}\rangle^2, \quad (4.42)$$

com

$$\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle = \langle\Omega|\hat{\mathcal{O}}|\Omega\rangle$$

e

$$\langle\hat{\mathcal{O}}^2\rangle = \langle\Omega|\hat{\mathcal{O}}\hat{\mathcal{O}}|\Omega\rangle.$$

De acordo com a Eq. (4.42), pode-se inferir que uma dispersão nula significa a ausência de quaisquer desvios em relação ao valor médio, em outras palavras, o observável possui um valor constante. Se  $|\Omega\rangle$  é auto estado de  $\hat{\mathcal{O}}$ , também obtém-se que  $\langle(\Delta\hat{\mathcal{O}})^2\rangle = 0$  [111]. Além disso, uma vez que no lado esquerdo existe uma quantidade positiva (devido ao quadrado) conclui-se que, necessariamente,  $\langle\hat{\mathcal{O}}^2\rangle \geq \langle\hat{\mathcal{O}}\rangle^2$ . A dispersão também pode ser chamada como variância, ou ainda desvio médio quadrático, porque nesse último caso o operador  $\Delta\hat{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{O}} - \langle\hat{\mathcal{O}}\rangle$  em (4.41), cujo valor médio é nulo,  $\langle\Delta\hat{\mathcal{O}}\rangle = 0$ , estima o desvio dos valores de  $\hat{\mathcal{O}}$  a partir do seu valor médio  $\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle$ .

No panorama da TQC, quando os observáveis são proporcionais ao operador de campo, é conveniente reescrever a Eq. (4.42) da seguinte forma:

$$\langle(\Delta\hat{\mathcal{O}})^2\rangle = \lim_{x' \rightarrow x} [\langle\hat{\mathcal{O}}(x)\hat{\mathcal{O}}(x')\rangle - \langle\hat{\mathcal{O}}(x)\rangle\langle\hat{\mathcal{O}}(x')\rangle]. \quad (4.43)$$

A operação do limite na expressão acima é conhecida como limite de coincidência dos observáveis  $\hat{\mathcal{O}}(x)$  e  $\hat{\mathcal{O}}(x')$ , ela estabelece a igualdade entre as Eqs. (4.42) e (4.43). O segundo termo no lado direito da Eq. (4.43) comumente se anula, pois em boa parte dos casos  $\hat{\mathcal{O}}(x) \propto \hat{\varphi}(x)$ ,  $\partial_\mu \hat{\varphi}(x)$ ,  $\sum \hat{\varphi}(x)$  ou  $\int \hat{\varphi}(x)$ , de modo que o VEV  $\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle \propto \langle\hat{\varphi}\rangle = 0$ , porque conforme a Eq. (2.60) temos  $\langle\hat{\varphi}\rangle = 0$ , uma vez que  $\langle\hat{a}_\sigma\rangle = \langle\hat{a}_\sigma^\dagger\rangle = 0$ . A estrutura matemática do termo entre colchetes na Eq. (4.43) também sugere que a dispersão pode ser visualizada como uma função de correlação para o observável  $\hat{\mathcal{O}}$  [54, 14].

Diante do exposto, agora podemos obter a dispersão de velocidades associada à partícula Browniana no condensado. Implementando a prescrição quântica  $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$  na Eq. (4.40) segue imediatamente que  $u^i \rightarrow \hat{u}^i$ . Portanto, observando que

$$\langle \hat{u}^i(x) \rangle = \frac{qb^{\frac{1}{2}}(t)}{m} \int_{t_0}^t dt b^{-\frac{1}{2}}(t) g^{ij} \nabla_j \langle \hat{\varphi} \rangle = 0, \quad (4.44)$$

a partir das Eqs. (4.40) e (4.43), encontra-se que a dispersão de velocidades no estado de vácuo  $|0\rangle$  será dada por

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{u}^i)^2 \rangle &= \lim_{x' \rightarrow x} \left[ \langle \hat{u}^i(x) \hat{u}^i(x') \rangle - \langle \hat{u}^i(x) \rangle \langle \hat{u}^i(x') \rangle \right] \\ &= \frac{q^2 b(t)}{m^2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_1 b^{-\frac{1}{2}}(t_1) b^{-\frac{1}{2}}(t_2) g_1^{ij} g_2^{ij'} \partial_j \partial_{j'} W(x, x')_{\text{FLRW+d}}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

O objeto  $W(x, x')_{\text{FLRW+d}} = \langle \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \rangle$  corresponde a função de Wightman de frequência positiva para um campo escalar sem massa  $\hat{\varphi}(x)$  no espaço-tempo efetivo FLRW com desclinação (ou corda cósmica). Essa quantidade está associada ao espaço-tempo definido pelas Eqs. (4.29) e (4.30). Nota-se que, em vista das Eqs. (4.42), (4.43) e (4.44), a Eq. (4.45) também corresponde ao VEV da velocidade ao quadrado. Por questões de simplicidade, de agora em diante a notação do limite será omitida.

Em virtude da simetria conforme exibida pelo espaço-tempo efetivo (4.32), é possível obter a expressão para  $W(x, x')_{\text{FLRW+d}} = \langle \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \rangle$  em termos da função de Wightman para o espaço-tempo efetivo localmente plano com desclinação  $W(x, x')_{\text{d}}$ , a qual foi calculada na Seção 3.2 e cuja expressão final é dada pela Eq. (3.25). De fato, de acordo com as discussões da Seção 2.4, sobre as transformações conformes (2.105) o campo deve se transformar segundo a Eq. (2.106). Logo, no presente caso, a partir da Eq. (4.32), é possível identificar o fator conforme  $\Omega = b^{-\frac{1}{4}}$  de modo que

$$\varphi(x)_{\text{FLRW+d}} = b^{\frac{1}{4}}(\eta) \varphi(x)_{\text{d}}$$

e, conseqüentemente,

$$W(x, x')_{\text{FLRW+d}} = b^{\frac{1}{4}}(\eta_1) b^{\frac{1}{4}}(\eta_2) W(x, x')_{\text{d}}. \quad (4.46)$$

Implementando a transformação de tempo conforme (4.31) na Eq. (4.45) e utilizando o resultado (4.46), encontra-se que

$$\langle (\Delta \hat{u}^i)^2 \rangle = \frac{q^2 b(\eta)}{m^2} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_2 \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 b^{-\frac{3}{4}}(\eta_1) b^{-\frac{3}{4}}(\eta_2) g_1^{ij} g_2^{ij'} \partial_j \partial_{j'} W(x, x')_{\text{d}}, \quad (4.47)$$

com  $x = (\eta_1, \rho_1, \phi_1, z_1)$  e  $x' = (\eta_2, \rho_2, \phi_2, z_2)$ . A Eq. (4.47) fornece a dispersão de velocidades para uma partícula em um espaço-tempo efetivo em expansão conforme na presença da desclinação. A função de Wightman  $W(x, x')_{\text{d}}$  é dada pela Eq. (3.25) e os coeficientes  $g^{ij}$  pela métrica efetiva associada ao elemento de linha conforme (4.32).

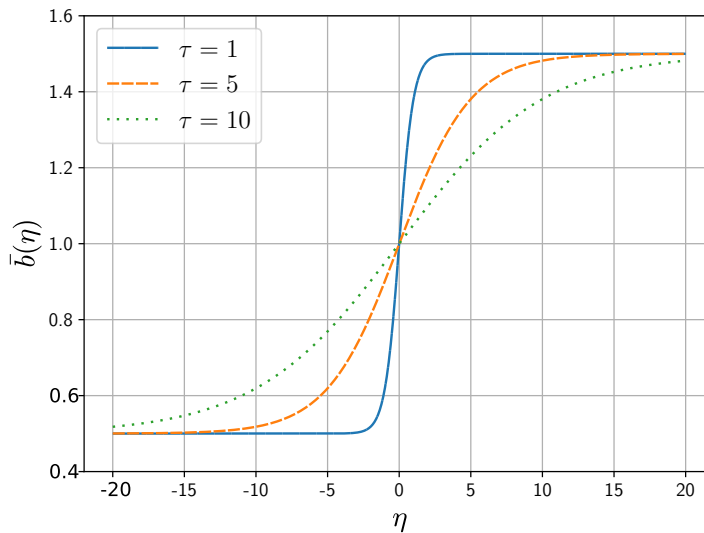
Nesse momento, é crucial perceber a correspondência entre os cenários efetivo (do modelo com o CBE) e real do espaço-tempo. O condensado à temperatura zero simula um vácuo quântico para os fônons, que são as excitações acústicas criadas no meio. Assim, nota-se que essa situação é análoga ao que acontece no espaço-tempo legítimo, no qual o espaço vazio representa um vácuo para os campos quânticos [41]. Além disso, na Eq. (4.47), a quantidade  $W(x, x')_d$  também inclui condições de quasiperiodicidade. De acordo com as argumentações da Ref. [35], a inclusão da quasiperiodicidade possivelmente indica efeitos de interações no sistema.

A Eq. (4.47) mostra claramente o algoritmo que deve ser seguido para encontrar a expressão final da dispersão de velocidades. Todos os elementos dessa expressão,  $W_d$  e  $g^{ij}$ , já foram especificados anteriormente, com exceção da função adimensional  $b(\eta)$ . Como sabemos, essa função é responsável por modelar a expansão ou, de maneira equivalente, a variação da velocidade do som no condensado. Aqui, vamos considerar o fator de escala assintoticamente plano

$$b^{\frac{1}{4}}(\eta) = b_0^{\frac{1}{4}} + b_1^{\frac{1}{4}} \tanh\left(\frac{\eta}{\tau}\right), \quad (4.48)$$

cujos comportamento está ilustrado na Figura 16. Na Eq. (4.48) o parâmetro  $\tau$  representa um tempo constante que fixa a taxa de expansão. As constantes adimensionais  $b_0^{\frac{1}{4}}$  e  $b_1^{\frac{1}{4}}$ , podem ser escritas em termos dos valores assintóticos  $b^{\frac{1}{4}}(\pm\infty)$ , com a restrição  $b_0^{\frac{1}{4}} > b_1^{\frac{1}{4}}$  a fim de evitar singularidades no elemento de linha (4.32), isto é, para que  $b^{\frac{1}{4}}(\eta) \neq 0$ . Esse é um fator de escala bem conhecido e utilizado na literatura [107, 45, 35, 105], uma vez que oferece a possibilidade de resolver a Eq. (4.47) analiticamente.

Figura 16 – Comportamento do fator de escala  $b^{\frac{1}{4}}(\eta)$  em função do tempo.



Legenda: Gráfico em unidades de  $\bar{b}(\eta) = b^{\frac{1}{4}}(\eta)/b_0^{\frac{1}{4}}$ . Todas as curvas admitem o mesmo valor para a razão  $\lambda = b_1^{\frac{1}{4}}/b_0^{\frac{1}{4}} = 1/2$ . Fonte: produzido pelo autor, 2024.

### 4.4.1 Componente $\rho$

A partir das Eqs. (4.47) e (4.32) a dispersão de velocidades associada a componente  $\rho$  será dada por

$$\langle (\Delta \hat{v}^\rho)^2 \rangle = \frac{q^2 b_f^{\frac{1}{2}}}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_1) b^{-\frac{1}{4}}(\eta_2) \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} W(x, x')_d. \quad (4.49)$$

Antes de prosseguir é oportuno fazer alguns esclarecimentos sobre a Eq. (4.49), visto que tais detalhes serão comuns para as demais componentes. Para o estabelecimento da expressão acima foi utilizada a relação entre a velocidade física  $v^i$  e coordenada  $u^i$  que, para a componente  $\rho$ , consiste na relação  $v^\rho = b^{-\frac{1}{4}} u^\rho$ . Quanto aos limites de integração, estes foram estendidos de  $(\eta_0, \eta)$  para  $(-\infty, +\infty)$  a fim de resolver as integrais analiticamente. Esse último passo consiste em uma aproximação e está baseado no interesse de analisar o comportamento do sistema no regime de tempos longos, ou seja, muito após a expansão acontecer. Então, nesse limite, o fator de escala  $b^{\frac{1}{4}}(\eta)$  assume um valor final constante  $b_f^{\frac{1}{4}} = b^{\frac{1}{4}}(\eta = \infty) = b_0^{\frac{1}{4}} + b_1^{\frac{1}{4}}$ , configurando uma situação na qual os efeitos da expansão cessaram ou estão ausentes. Enfatiza-se que, adiante, esses mesmos procedimentos e suas justificativas serão aplicados diretamente as demais componentes, de modo que, para evitar redundâncias, a discussão minuciosa de tais aspectos estará implícita.

Substituindo a Eq. (3.25) na Eq. (4.49), encontra-se que

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{v}^\rho)^2 \rangle &= \frac{\hbar c_0 q^2 b_f^{\frac{1}{2}}}{4\pi^2 m^2} \left[ \sum_m e^{2\pi\beta m i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_2) \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_1) \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \frac{1}{\sigma_m} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p e^{p\beta\Delta\phi i}}{2\pi i} \int_0^\infty dy \mathcal{F} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_2) \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_1) \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \frac{1}{\sigma_y} \right], \quad (4.50) \end{aligned}$$

com as funções  $\mathcal{F}$ ,  $\sigma_m$  e  $\sigma_y$  dadas pelas Eqs. (3.26), (3.27a) e (3.27b), respectivamente. Note que as permutações entre as quantidades contidas em  $W_d$  com as operações de integração e derivada foram possíveis porque a dependência temporal está restrita apenas aos fatores de  $\sigma_m$  e  $\sigma_y$ , além de que  $\mathcal{F}$  independe de  $\rho$ . A dependência funcional de  $\mathcal{F}$  foi omitida com o intuito de simplificar a notação.

Observando as derivadas

$$\begin{aligned} \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \sigma_m^{-1} &= \frac{[\rho_2 - \rho_1 \cos(\frac{2m\pi}{p} - \Delta\phi)] [\rho_1 - \rho_2 \cos(\frac{2m\pi}{p} - \Delta\phi)]}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + a_m^2]^3} \\ &\quad + \frac{2 \cos(\frac{2m\pi}{p} - \Delta\phi)}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + a_m^2]^2} \end{aligned} \quad (4.51)$$

e

$$\partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \sigma_y^{-1} = \frac{[\rho_2 + \rho_1 \cosh(y)] [\rho_1 + \rho_2 \cosh(y)]}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + a_m^2]^3} + \frac{2 \cosh(y)}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + a_m^2]^2}, \quad (4.52)$$

nota-se que devemos resolver integrais do tipo

$$A_\gamma(\mu) = (-1)^\gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_1) \frac{1}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - a_\mu^2]^\gamma}, \quad (4.53a)$$

com o fator de escala  $b^{-\frac{1}{4}}$  dado pelo inverso da Eq. (4.48) e os parâmetros

$$a_\mu^2 = (a_m^2, a_y^2), \quad (4.53b)$$

$$a_m^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos\left(\frac{2m\pi}{p} - \Delta\phi\right) + \Delta z^2 \quad (4.53c)$$

e

$$a_y^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cosh(y) + \Delta z^2. \quad (4.53d)$$

De acordo com os desenvolvimentos do Apêndice B.2, a solução para a Eq. (4.53a) é obtida através do método dos resíduos e fornece como resultado

$$A_\gamma(\mu) = \frac{4\pi^2\tau^2}{(\pi c_0\tau)^{2\gamma}} \frac{\sinh^4(g)}{b_1^{\frac{1}{2}}} S_\gamma(\mu), \quad (4.54a)$$

com

$$S_\gamma(\mu) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{[r^2 + \Lambda_\mu^2]^\gamma} \quad (4.54b)$$

e

$$\Lambda_\mu^2 = \frac{a_\mu^2}{(\pi c_0\tau)^2}. \quad (4.54c)$$

A constante  $g$  que aparece no argumento da função hiperbólica em (4.54a) é definida em termos dos parâmetros  $b_0^{\frac{1}{4}}$  e  $b_1^{\frac{1}{4}}$  conforme a relação

$$g = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}\right), \quad (4.55)$$

com  $\alpha^2 = b_0^{\frac{1}{4}}/b_1^{\frac{1}{4}} > 0$ .

Substituindo as derivadas (4.51) e (4.52) na Eq. (4.50) e utilizando o resultado geral (4.54a) para as devidas integrais, que surgem na forma da Eq. (4.53a), após a simplificação dos fatores comuns, no limite de coincidência encontramos que

$$\begin{aligned} \langle(\Delta\hat{v}^\rho)^2\rangle &= \frac{2\hbar q^2 b_f^{\frac{1}{2}}}{m^2\pi^4 c_0^3\tau^2} \frac{\sinh^4(g)}{b_1^{\frac{1}{2}}} \left[ \sum_m e^{2\pi\beta m i} s_m(\chi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{p}{2\pi i} \int_0^\infty dy \mathcal{F}(\beta, p, 0, y) s_y(\chi) \right], \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde por praticidade foram definidas as funções auxiliares

$$s_m(\chi) = 4\chi^2 \sin^4\left(\frac{m\pi}{p}\right) S_3(m, \chi) - 2\sin^2\left(\frac{m\pi}{p}\right) S_2(m, \chi) + S_2(m, \chi), \quad (4.57a)$$

e

$$s_y(\chi) = 4\chi^2 \cosh^4\left(\frac{y}{2}\right) S_3(y, \chi) - 2\cosh^2\left(\frac{y}{2}\right) S_2(y, \chi) + S_2(y, \chi), \quad (4.57b)$$

além da variável adimensional

$$\chi = \frac{2\rho}{\pi c_0\tau}. \quad (4.57c)$$

As somatórias  $S_\gamma$  nas Eqs. (4.57a) e (4.57b) são dadas pela Eq. (4.54b). A notação originalmente introduzida em (4.54b) foi ligeiramente modificada a fim de explicitar a dependência que  $S_\gamma$  possui com a variável  $\chi$ , devido a sua relação com a quantidade  $a_\mu^2$ . De fato, a partir das Eqs. (4.54c), (4.53c) e (4.53d) observa-se que no limite de coincidência

$$\lim_{x' \rightarrow x} \Lambda_\mu^2 = [\Lambda_m^2, \Lambda_y^2] = \left[ \chi^2 \sin^2 \left( \frac{m\pi}{p} \right), \chi^2 \cosh^2 \left( \frac{y}{2} \right) \right]. \quad (4.58)$$

Logo,  $S_\gamma$  depende explicitamente de  $\chi$ , além das variáveis  $m$ ,  $y$  e do parâmetro  $p$  associado a desclinação no condensado. Destaca-se que, os colchetes na Eq. (4.58) não representam uma operação de comutação, e foram utilizados para representar de forma compacta as quantidades  $\Lambda_m$  e  $\Lambda_y$ .

A Eq. (4.56) ainda pode ser simplificada de modo a obtermos uma expressão prática para as análises subsequentes, especialmente para fins de gráficos. Nesse sentido, é conveniente definir

$$\langle (\Delta \bar{v}^\rho)^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{v}^\rho)^2 \rangle \left[ \frac{2\hbar q^2 b_f^{\frac{1}{2}}}{m^2 \pi^4 c_0^3 \tau^2} \frac{\sinh^4(g)}{b_1^{\frac{1}{2}}} \right]^{-1}, \quad (4.59)$$

uma vez que todos os fatores multiplicativos em (4.56) são constantes. Portanto, a partir das Eqs. (4.56) e (4.59) podemos escrever

$$\langle (\Delta \bar{v}^\rho)^2 \rangle = 2\zeta(3) + 2 \sum_{m=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} \cos(2\pi\beta m) s_m(\chi) - \frac{p}{2\pi i} \int_0^\infty dy \mathcal{F}(\beta, p, 0, y) s_y(\chi), \quad (4.60)$$

a qual representa a dispersão de velocidades adimensional associada a componente  $\rho$ , para a partícula Browniana no condensado com desclinação. O comportamento gráfico da Eq. (4.60) em função do parâmetro  $\chi$ , Eq. (4.57c), está exposto na Figura 17a. Visando clarificar a estrutura desse resultado vamos explicar brevemente a sua composição.

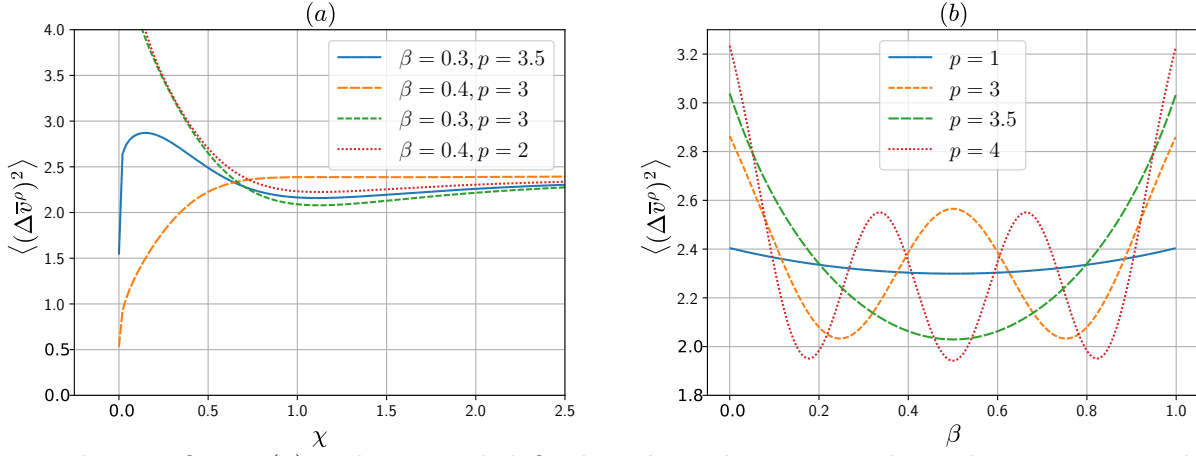
A contribuição proveniente do termo  $m = 0$  foi explicitada na Eq. (4.60), uma vez que essa parcela é constante. A função  $\mathcal{F}(\beta, p, 0, y)$  é dada pela Eq. (3.26) no limite de coincidência, cuja forma explícita é

$$\mathcal{F}(\beta, p, 0, y) = 2i \left\{ \frac{\cosh[py(1-\beta)] \sin(\pi p\beta) + \cosh(p\beta y) \sin[p\pi(1-\beta)]}{\cosh(py) - \cos(p\pi)} \right\}. \quad (4.61)$$

As funções auxiliares  $s_m$  e  $s_y$  na Eq. (4.60), são dadas pelas Eqs. (4.57a) e (4.57b), com as somas  $S_\gamma$  definidas conforme a expressão (4.54b) e escritas em termos do parâmetro adimensional  $\Lambda_\mu^2$ , Eq. (4.54c), que no limite de coincidência é dado pela Eq. (4.58).

Na transição da Eq. (4.56) para a Eq. (4.60) o somatório, regulado inicialmente pela desigualdade (3.24a), foi reescrito observando que  $s_m$  é uma função par com respeito ao índice de soma  $m$ . Além disso, a notação  $\left[\frac{p}{2}\right]$  indica que apenas a parte inteira da razão  $\frac{p}{2}$  deve ser considerada.

Figura 17 – Comportamento gráfico da dispersão de velocidades  $\langle(\Delta\bar{v}^\rho)^2\rangle$  em função dos parâmetros  $\chi$  e  $\beta$ .



Legenda: Na figura (a) cada curva é definida pelos valores particulares dos parâmetros de quasiperiodicidade  $\beta$  e desclinação  $p$ . A figura (b) admite como exemplo o caso  $\chi = 1$  para todos os valores indicados de  $p$ . Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Inicialmente, observa-se que o resultado para dispersão  $\langle(\Delta\bar{v}^\rho)^2\rangle$ , em essência, é composto por duas contribuições: uma constante e outra que depende dos parâmetros associados a quasiperiodicidade  $\beta$  e desclinação  $p$ . Como sabemos  $0 \leq \beta < 1$ , enquanto que o parâmetro  $p$  nos sistemas de matéria condensada pode assumir valores tais que  $p \geq 0$  [112], ou seja, pode assumir valores menores que a unidade. O termo constante é uma consequência imediata da escolha do fator de escala  $b^{\frac{1}{4}}(\eta)$ , em outras palavras, devido as efeitos da expansão assintoticamente plana (Figura 16) simulada no condensado.

Quanto as contribuições variáveis nota-se que, para  $p < 2$  o somatório em (4.60) é ausente, pois essa situação fornece um valor fora do intervalo compreendido pela soma, dado que  $m$  é um número inteiro. Por exemplo, se  $p = 1$ , a soma será nula e, portanto, a dispersão passa a depender exclusivamente da constante  $2\zeta(3)$  e do termo integral em (4.60), o qual na ocasião oferece uma contribuição quasiperiódica pura.

Em relação ao parâmetro  $\beta$ , percebe-se que, no caso periódico ( $\beta = 0$ ) a dispersão torna-se uma função exclusiva da desclinação  $p$ , uma vez que  $\mathcal{F}$  torna-se dependente apenas de  $p$ , semelhante as expressões de  $s_m$  e  $s_y$ . Constata-se também que, no caso antiperiódico ( $\beta = \frac{1}{2}$ ) a contribuição integral será nula para qualquer valor par de  $p$ . Em síntese, a contribuição da função  $\mathcal{F}$  com respeito aos parâmetros  $\beta$  e  $p$ , definida conforme (4.61), pode ser resumida da seguinte forma:

$$\mathcal{F}(\beta, p, 0, y) = \begin{cases} \mathcal{F}(0, p_{\text{int}}, 0, y) = 0, \forall p \text{ inteiro}, \\ \mathcal{F}(\frac{1}{2}, p_{\text{par}}, 0, y) = 0, \forall p \text{ par}. \end{cases} \quad (4.62)$$

As informações relatadas nos dois últimos parágrafos serão compartilhadas pelas demais componentes da dispersão de velocidades que serão obtidas adiante.

A partir da Figura 17a nota-se que a dispersão  $\langle(\Delta\bar{v}^\rho)^2\rangle$  possui um comportamento não trivial próximo da origem  $\chi = 0$  ( $\rho = 0$ ), isto é, próximo ao núcleo do defeito. Além disso, este comportamento é de tal maneira que, para cada configuração referente ao par de valores  $(\beta, p)$ , as curvas da dispersão podem aumentar ou diminuir. Contudo, na medida em que  $\chi$  assume valores cada vez maiores, todas as curvas tendem para um valor constante, independente dos valores de  $\beta$  e  $p$ .

O valor constante relatado acima representa a situação periódica ( $\beta = 0$ ) e sem desclinação ( $p = 1$ ), pois nesse caso  $p < 2$  anula o somatório em (4.60) ao passo que  $\beta = 0$  e  $p = 1$  anulam o termo integral, conforme mostra a Eq. (4.62). A princípio, é tentador interpretar essa contribuição constante,  $2\zeta(3)$ , como análoga ao vácuo de Minkowski. Entretanto, essa associação está equivocada, pois o vácuo (puro) de Minkowski sempre oferece uma contribuição divergente no limite de coincidência ( $x' \rightarrow x$ ). Na verdade, a origem do termo constante em nossas expressões se deve ao processo de expansão do condensado. Em outras palavras, devido a função  $b^{\frac{1}{4}}(\eta)$ . Em certo sentido, a função  $b^{\frac{1}{4}}(\eta)$  no presente caso desempenha um papel similar aos mecanismos conhecidos na literatura como “*switching functions*”, os quais regularizam típicas divergências nos modelos considerados – veja, por exemplo, a Ref. [31] e as fontes lá citadas. Sob à luz desse último aspecto levantado, é importante destacar que, os nossos resultados são válidos unicamente para regimes de tempos infinitamente longos, e nada podemos dizer sobre a dispersão para valores finitos de tempo.

A Figura 17b exibe o comportamento da dispersão em função do parâmetro  $\beta$ , para o caso particular  $\chi = 1$  ou ainda, de acordo com a Eq. (4.57c), para a distância circunvizinha  $\rho = \frac{\pi c_0 \tau}{2}$ . Esse gráfico revela qual o maior ou menor valor que a dispersão (4.60) pode atingir com respeito ao parâmetro de quasiperiodicidade  $\beta$ , mantendo fixas a desclinação  $p$  e a distância  $\chi$ .

O comportamento assintótico da dispersão de velocidades  $\rho$  longe da origem é intuitivo e, de certo modo, já esperado. O núcleo do defeito está localizado em  $\chi = 0$  e seus efeitos são apreciáveis apenas em uma vizinhança próxima. Então, para pontos suficientemente distantes dessa região o seu efeito é negligenciável e está ausente (restando apenas a contribuição constante). No contexto das cordas cósmicas, os efeitos do campo gravitacional gerado pela corda são relevantes apenas em pontos circunjacentes, porém, longe desse objeto tornam-se fracos e irrelevantes.

Um último ponto que gostaríamos de discutir consiste na convergência ou divergência das curvas mostradas na Figura 17a, isto é, sobre o comportamento da dispersão na origem ou centro da desclinação  $\chi = 0$ . Em primeiro lugar, a partir das Eqs. (4.57a), (4.54b) e (4.58), observa-se que  $s_m(\chi = 0)$  é finita, logo a contribuição divergente em nossas expressões é proveniente do termo integral na Eq. (4.60). Portanto, vamos considerar apenas o integrando da Eq. (4.60) no limite  $\chi \rightarrow 0$ .

No limite  $y \gg 1$  pode-se utilizar a aproximação  $\cosh(y) \approx e^y/2$  de modo que, para a Eq. (4.61), encontra-se

$$\mathcal{F}_{(y \gg 1)} \stackrel{*}{=} 2i \left\{ \sin(\pi p \beta) e^{-p\beta y} + \sin[\pi p(1 - \beta)] e^{-p(1-\beta)y} \right\} \quad (4.63)$$

e para a função auxiliar  $s_y(0)$ , Eq. (4.57b),

$$s_{y \gg 1}(0) \stackrel{*}{=} -\frac{\zeta(3)}{2} e^y + \zeta(3). \quad (4.64)$$

A notação  $\stackrel{*}{=}$  nas Eqs. (4.63) e (4.64) tem a finalidade de indicar que a igualdade está condicionada a uma situação especial, na ocasião  $y \gg 1$ . Nesse ponto deve-se observar que  $\mathcal{F}_{(y \gg 1)}$  por si só é convergente, para grandes valores de  $y$ , pois  $0 \leq \beta < 1$  e  $p > 0$ .

Considerando as Eqs. (4.63) e (4.64), para o integrando  $I_\rho = \mathcal{F} s_y$  na Eq. (4.60), segue que

$$I_{\rho(y \gg 1)} \stackrel{*}{=} -\zeta(3)i \left\{ \sin(\pi p \beta) e^{(1-p\beta)y} + \sin[\pi p(1 - \beta)] e^{[1-p(1-\beta)]y} \right\} + \zeta(3) \mathcal{F}_{y \gg 1}. \quad (4.65)$$

De acordo com a Eq. (4.63), o último termo da expressão acima não oferece nenhuma divergência, visto que a função  $\mathcal{F}_{(y \gg 1)}$  é finita. Entretanto, as exponenciais no primeiro termo da Eq. (4.65), dependendo da combinação dos valores de  $p$  e  $\beta$ , podem convergir ou não. É fácil ver que a convergência do integrando é atingida quando ambas as relações

$$p\beta > 1 \quad (4.66a)$$

e

$$p(1 - \beta) > 1 \quad (4.66b)$$

são satisfeitas. De fato, se qualquer uma das desigualdades (4.66) for violada o resultado diverge, pois nesse caso um termo da Eq. (4.65) converge enquanto que o outro diverge no limite  $y \rightarrow \infty$ . Assim, por exemplo, para a curva  $(\beta; p) = (0.4; 3)$  na Figura 17 a condição (4.66a) fornece  $1.2 > 1$  ao mesmo tempo que (4.66b) retorna  $1.8 > 1$ . Logo, essa curva é convergente, dado que satisfaz ambas as condições (4.66). Por outro lado, considerando a curva  $(\beta; p) = (0.4; 2)$  as relações (4.66a) e (4.66b) retornam os valores 0.8 e 1.2, respectivamente. Então, diante desses resultados, nota-se que uma das condições, Eq. (4.66b), foi violada, logo, a curva  $(\beta; p) = (0.4; 2)$  é divergente.

#### 4.4.2 Componente $\phi$

Semelhante ao caso anterior, a dispersão de velocidades na componente  $\phi$  é obtida utilizando as Eqs. (4.47) e (4.32), de modo que

$$\langle (\Delta \hat{v}^\phi)^2 \rangle = \frac{q^2 b_f^{\frac{1}{2}}}{m^2 \rho_1 \rho_2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_1) b^{-\frac{1}{4}}(\eta_2) \partial_{\phi_1} \partial_{\phi_2} W(x, x')_d, \quad (4.67)$$

na qual a relação  $v^\phi = \rho b^{-\frac{1}{4}} u^\phi$ , entre as velocidades coordenada  $u^\phi$  e física  $v^\phi$ , foi empregada. Como sabemos, o fator de escala  $b^{-\frac{1}{4}}(\eta)$  corresponde ao inverso da Eq. (4.48). Deve-se notar também que, os limites de integração  $(\eta_0, \eta)$  já foram estendidos para os valores assintóticos  $(-\infty, +\infty)$ , com as mesmas justificativas discutidas anteriormente.

Diferente do algoritmo indicado pela Eq. (4.67), a saber, derivar sucessivamente com respeito ao par de variáveis  $(\phi_1, \phi_2)$  e realizar a dupla integração, vamos seguir um método alternativo, o qual é baseado nos desenvolvimentos do Apêndice A da Ref. [98]. A motivação para esta mudança se encontra no fato de que a dependência da função de Wightman com respeito a coordenada  $\phi$  está contida tanto no fator exponencial como nas funções  $\sigma_m$  e  $\mathcal{F}$  – conforme observa-se a partir da Eq. (3.25). Então, o procedimento direto, sugerido pela Eq. (4.67), torna-se inconveniente, pois pela regra da cadeia estas operações produzem muitos termos, tornando a expressão demasiadamente grande e complicada para ser manuseada.

Levando em conta a Eq. (3.21), observa-se que

$$\partial_{\phi_1} \partial_{\phi_2} W_d = \frac{\hbar c_0 p}{8\pi^2 \rho_1 \rho_2} \int_0^\infty dx e^{-\frac{x\delta}{2\rho_1 \rho_2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p^2 (m + \beta)^2 e^{ip(m+\beta)\Delta\phi} I_{p|m+\beta|}(x). \quad (4.68)$$

É oportuno nesse momento enfatizar o comentário anterior de que utilizando a Eq. (3.25) as derivadas atuam em mais termos quando comparadas com a ação sobre a Eq. (3.21), cujo resultado final está mostrado na Eq. (4.68). Logo, nota-se a praticidade e conveniência do método seguido.

As funções de Bessel modificadas são soluções da equação diferencial

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2) w = 0, \quad (4.69)$$

com  $w = [I_{\pm\nu}(z), K_\nu(z)]$  – veja, por exemplo, a Ref. [83, p. 374]. Portanto, utilizando a Eq. (4.69), podemos reescrever a Eq. (4.68) da seguinte forma:

$$\partial_{\phi_1} \partial_{\phi_2} W_d^{\text{l.c.}} = \frac{\hbar c_0 p}{8\pi^2 \rho^2} \int_0^\infty dx e^{-\frac{x\delta}{2\rho^2}} \left( x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - x^2 \right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_{p|m+\beta|}(x). \quad (4.70)$$

Como as derivadas  $\partial_{\phi_1}$  e  $\partial_{\phi_2}$  já foram realizadas, o limite de coincidência (l.c.) espacial,  $(\rho_1, \phi_1, z_1) \rightarrow (\rho_2, \phi_2, z_2)$ , já foi implementado antecipadamente, visto que não afeta os resultados finais e facilita as operações. Também, a fim de simplificar a notação, redefiniu-se o rótulo  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  nas expressões.

O somatório na Eq. (4.70) corresponde a identidade (3.23) avaliada no limite de coincidência. Assim, substituindo (3.23) em (4.70), após realizar as derivadas e permutar

a ordem das integrais, encontramos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \partial_{\phi_1} \partial_{\phi_2} W_d^{\text{l.c.}} = & \frac{\hbar c_0 p}{8\pi^2 \rho^2} \sum_m e^{2\pi\beta m i} \left\{ -\sin^2\left(\frac{2m\pi}{p}\right) \int_0^\infty dx x^2 e^{-\left[\frac{\delta}{2\rho^2} - \cos\left(\frac{2m\pi}{p}\right)\right]x} \right. \\ & \left. + \cos\left(\frac{2m\pi}{p}\right) \int_0^\infty dx x e^{-\left[\frac{\delta}{2\rho^2} - \cos\left(\frac{2m\pi}{p}\right)\right]x} \right\} \\ & - \frac{\hbar c_0 p}{16\pi^3 \rho^2 i} \int_0^\infty \mathcal{F} \left\{ \sinh^2(y) \int_0^\infty dx x^2 e^{-\left[\frac{\delta}{2\rho^2} + \cosh(y)\right]x} \right. \\ & \left. - \cosh(y) \int_0^\infty dx x e^{-\left[\frac{\delta}{2\rho^2} + \cosh(y)\right]x} \right\}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Na equação anterior, todas as integrações com respeito a variável  $x$  são facilmente computadas usando o resultado [75, p. 340]

$$\int_0^\infty dx x^k e^{-\Theta x} = \frac{k!}{\Theta^{k+1}}, \quad \text{Re}(\Theta) > 0, \quad (4.72)$$

com a identificação apropriada dos parâmetros  $k$  e  $\Theta$ . Além disso, as devidas soluções para as integrais em (4.71) são simplificadas utilizando as Eqs. (3.22), (4.53c) e (4.53d) no limite de coincidência espacial. Então, a partir das Eqs. (4.71) e (4.72), após a simplificação dos fatores comuns e organização do resultado, é possível mostrar que

$$\begin{aligned} \partial_{\phi_1} \partial_{\phi_2} W_d^{\text{l.c.}} = & \frac{\hbar c_0 \rho^2}{2\pi^2} \left\{ \sum_m e^{2\pi\beta m i} \left[ \frac{\cos\left(\frac{2m\pi}{p}\right)}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + a_m^2]^2} - \frac{4\rho^2 \sin^2\left(\frac{2m\pi}{p}\right)}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + a_m^2]^3} \right] \right. \\ & \left. - \frac{p}{2\pi i} \int_0^\infty dy \mathcal{F} \left[ \frac{4\rho^2 \sinh^2(y)}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + a_y^2]^3} - \frac{\cosh(y)}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + a_y^2]^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

onde a função  $\mathcal{F}$  é dada pela Eq. (4.61).

Substituindo (4.73) na Eq. (4.67) constata-se novamente a presença de integrais com a estrutura exibida na Eq. (4.53a), as quais surgiram no decorrer da análise para a dispersão  $\langle(\Delta\bar{v}^\rho)^2\rangle$ . Isso ocorre em consequência da dependência temporal estar confinada nos denominadores da Eq. (4.73), nos permitindo comutar a ordem das integrações em (4.67) e identificar a Eq. (4.53a). Assim, a partir das Eqs. (4.67), (4.73) e (4.53a), juntamente com as soluções (4.54a), é possível mostrar que, no limite de coincidência,

$$\begin{aligned} \langle(\Delta\bar{v}^\phi)^2\rangle = & 2\zeta(3) + 2 \sum_{m=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} \cos(2\pi\beta m) h_m(\chi) \\ & + \frac{p}{2\pi i} \int_0^\infty dy \mathcal{F}(\beta, p, 0, y) h_y(\chi), \end{aligned} \quad (4.74)$$

com a definição da quantidade

$$\langle(\Delta\bar{v}^\phi)^2\rangle = \langle(\Delta\hat{v}^\phi)^2\rangle \left[ \frac{2\hbar q^2 b_f^{\frac{1}{2}}}{m^2 \pi^4 c_0^3 \tau^2} \frac{\sinh^4(g)}{b_1^{\frac{1}{2}}} \right]^{-1} \quad (4.75)$$

e das funções auxiliares

$$h_m(\chi) = \cos\left(\frac{2\pi m}{p}\right) S_2(m, \chi) - \chi^2 \sin^2\left(\frac{2\pi m}{p}\right) S_3(m, \chi) \quad (4.76a)$$

e

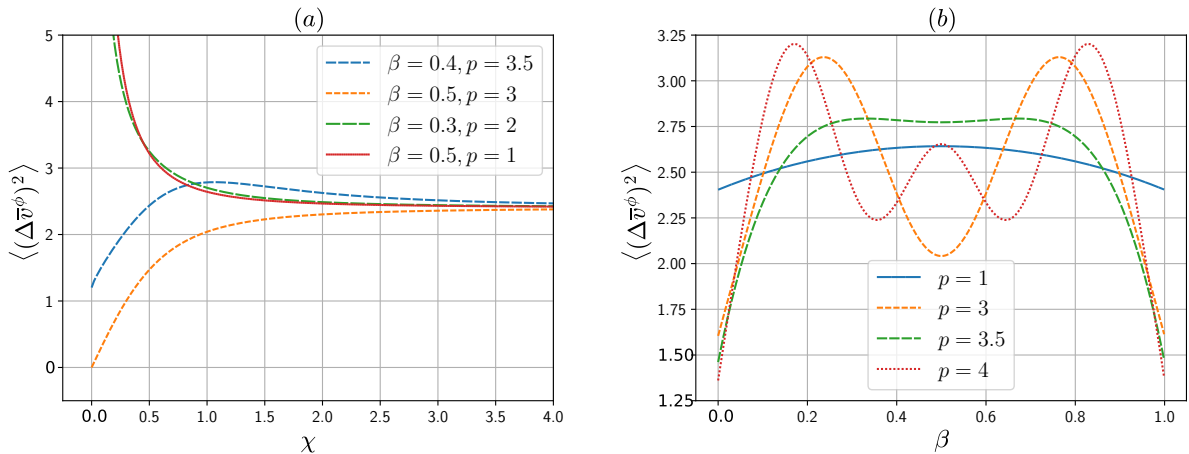
$$h_y(\chi) = \cosh(y) S_2(y, \chi) - \chi^2 \sinh^2(y) S_3(y, \chi). \quad (4.76b)$$

As somatórias  $S_\gamma$  em (4.76a) e (4.76b) são definidas pela Eq. (4.54b), com  $\Lambda_\mu$  dado pela Eq. (4.58). A função  $\mathcal{F}$  é definida conforme a Eq. (4.61) e satisfaz a relação (4.62), para valores particulares de  $p$  e  $\beta$ .

A Eq. (4.74) corresponde a dispersão de velocidades adimensional referente a componente  $\phi$ , Eq. (4.75), que está relacionada ao plano de uma seção reta do espaço-tempo efetivo (da corda). Semelhante ao caso anterior, o termo  $m = 0$  foi explicitado com a finalidade de manter a simetria das expressões, em que existe uma parte constante,  $2\zeta(3)$ , e outra dependente dos parâmetros  $p$  e  $\beta$ . A contribuição constante  $2\zeta(3)$  provém dos efeitos de expansão, os quais são simulados pelas variações da velocidade do som no condensado, e modelados pela função  $b^{\frac{1}{4}}(\eta)$  – Eq. (4.48) e Figura 16.

A Figura 18a mostra o comportamento gráfico de  $\langle(\Delta\bar{v}^\phi)^2\rangle$  como função da variável adimensional  $\chi$ , para diferentes valores de  $p$  e  $\beta$ . Por outro lado, a Figura 18b exibe a dispersão em função do parâmetro de quasiperiodicidade  $\beta$  mantendo  $\chi$  constante, o qual revela a situação com a maior (ou menor) dispersão em um ponto particular  $\rho$  e quando o meio possui uma desclinação  $p$ . Imediatamente nota-se que, a Figura 18b possui um comportamento inverso ao que foi observado na Figura 17b, mas preserva o mesmo perfil oscilatório constatado anteriormente.

Figura 18 – Comportamento gráfico da dispersão de velocidades  $\langle(\Delta\bar{v}^\phi)^2\rangle$  em função dos parâmetros  $\chi$  e  $\beta$ .



Legenda: Na figura (a) cada curva é definida pelos valores particulares dos parâmetros de quasiperiodicidade  $\beta$  e desclinação  $p$ . A figura (b) admite como exemplo o caso  $\chi = 1$  para todos os valores indicados de  $p$ . Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Novamente, a dispersão possui um comportamento não trivial próximo da origem ( $\chi = 0$ ), mas para pontos distantes o suficiente a mesma torna-se constante, independente de quaisquer configurações, conforme revelado pela Figura 18a. O comportamento singular é proveniente da contribuição integral em (4.74). De fato, para  $\chi = 0$  encontra-se que  $h_m(0) = \zeta(3) \cos\left(\frac{2m\pi}{p}\right)$  e  $h_y(0) = \zeta(3) \cosh(y)$ . Logo, o termo da somatória será finito, mas o integrando poderá oferecer uma contribuição divergente. Com base na análise desenvolvida na seção anterior, vamos estudar o integrando  $I_\phi = \mathcal{F}h_y$  no limite  $\chi \rightarrow 0$  (o ponto da divergência) e  $y \gg 1$ , para descobrir sob quais condições obtemos resultados finitos ou singulares.

No limite  $y \gg 1$  podemos utilizar a aproximação  $\cosh(y) \approx e^y/2$ , de modo que a função  $\mathcal{F}$  será dada pela Eq. (4.63). Então, dado que  $h_y(0) = \zeta(3) \cosh(y) \approx \zeta(3)e^y/2$ , encontramos que

$$I_{\phi(y \gg 1)} \stackrel{*}{=} \zeta(3)i \left\{ \sin(\pi p \beta) e^{(1-p\beta)y} + \sin[\pi p(1-\beta)] e^{[1-p(1-\beta)]y} \right\}. \quad (4.77)$$

O integrando  $I_{\phi(y \gg 1)}$  revela que a convergência do resultado é atingida se, e somente se, ambas as condições  $p\beta > 1$  e  $p(1-\beta) > 1$  são satisfeitas. Essas condições correspondem as mesmas desigualdades obtidas na seção anterior, a saber, Eqs. (4.66a) e (4.66b). Assim, por exemplo, a curva  $(\beta, p) = (0.4; 3.5)$  fornece  $p\beta = 1.4 > 1$  e  $p(1-\beta) = 2.1 > 1$ , logo, é convergente. Por outro lado, a curva  $(\beta, p) = (0.5; 1)$  retorna  $p\beta = 0.5 < 1$  e  $p(1-\beta) = 0.5 < 1$ , indicando que a curva será divergente na origem. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para as demais curvas da Figura 18. Por fim, ressalta-se que ambas as condições (4.66) devem ser satisfeitas, e quando apenas uma destas é violada o resultado em questão será divergente, pois enquanto uma exponencial na Eq. (4.77) vai para zero a outra tenderá para o infinito – esse é o caso, por exemplo, da curva  $(\beta, p) = (0.3; 2)$ .

#### 4.4.3 Componente $z$

Para computar a dispersão de velocidades associada a componente  $z$  seguimos o mesmo procedimento adotado para a componente  $\rho$ . A partir das Eqs. (4.47) e (4.32), inicialmente encontra-se que

$$\langle (\Delta \hat{v}^z)^2 \rangle = \frac{q^2 b_f^{\frac{1}{2}}}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_1) b^{-\frac{1}{4}}(\eta_2) \partial_{z_1} \partial_{z_2} W(x, x')_d, \quad (4.78)$$

com as funções  $b^{\frac{1}{4}}(\eta)$  e  $W(x, x')_d$  dadas pelas Eqs. (4.48) e (3.25). Semelhante aos casos anteriores, os limites de integração foram estendidos para as regiões assintóticas  $\pm\infty$ , a fim de resolver as integrais analiticamente. Além disso, a dispersão (4.78) é referente a velocidade física  $v^z = b^{-\frac{1}{4}}u^z$ .

Substituindo a expressão (3.25) para  $W(x, x')_d$  na Eq. (4.78) encontra-se

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{v}^z)^2 \rangle &= \frac{\hbar c_0 q^2 b_f^{\frac{1}{2}}}{4\pi^2 m^2} \left[ \sum_m e^{2\pi\beta m i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_2) \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_1) \partial_{z_1} \partial_{z_2} \frac{1}{\sigma_m} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p e^{p\beta\Delta\phi i}}{2\pi i} \int_0^\infty dy \mathcal{F} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_2) \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_1) \partial_{z_1} \partial_{z_2} \frac{1}{\sigma_y} \right]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Novamente, a permuta entre as integrais foi possível porque a dependência das expressões com a coordenada  $z$  está retida na função  $\sigma_y$ . Para as derivadas necessárias da função de Wightman exibidas acima, segue que

$$\partial_{z_1} \partial_{z_2} \sigma_m^{-1} = \frac{-8\Delta z^2}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + a_m^2]^3} + \frac{2}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + a_m^2]^2} \quad (4.80a)$$

e

$$\partial_{z_1} \partial_{z_2} \sigma_y^{-1} = \frac{-8\Delta z^2}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + a_y^2]^3} + \frac{2}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + a_y^2]^2}. \quad (4.80b)$$

Perante as integrais na Eq. (4.79), o intervalo  $\Delta z$ , nas Eqs. (4.80), pode ser visto como uma constante. Logo, a partir das Eqs. (4.79) e (4.80) observa-se que, as integrais que devem ser resolvidas possuem a mesma estrutura encontrada nas discussões precedentes. Portanto, identificando as integrais (4.53a) na Eq. (4.79) e utilizando o resultado (4.54a), após a simplificação dos fatores comuns, podemos estabelecer o seguinte resultado no limite de coincidência:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \bar{v}^z)^2 \rangle &= 2\zeta(3) + 2 \sum_{m=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} \cos(2\pi\beta m) S_2(m, \chi) \\ &\quad - \frac{p}{2\pi i} \int_0^\infty dy \mathcal{F}(\beta, p, 0, y) S_2(y, \chi), \end{aligned} \quad (4.81)$$

com

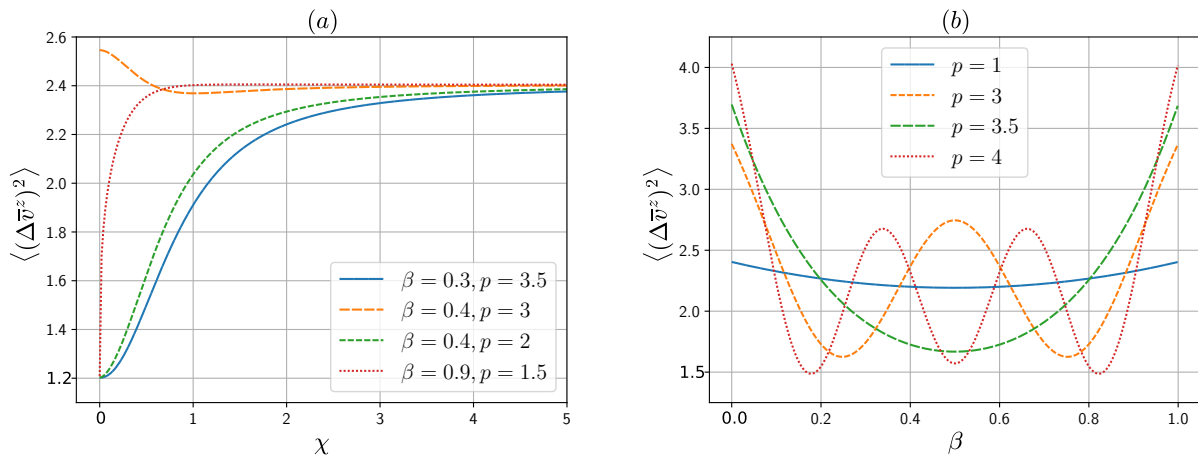
$$\langle (\Delta \bar{v}^z)^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{v}^z)^2 \rangle \left[ \frac{2\hbar q^2 b_f^{\frac{1}{2}}}{m^2 \pi^4 c_0^3 \tau^2} \frac{\sinh^4(g)}{b_1^{\frac{1}{2}}} \right]^{-1}. \quad (4.82)$$

Na Eq. (4.81) as somas  $S_2(m, \chi)$  e  $S_2(y, \chi)$  são definidas pelas Eqs. (4.54b) e (4.58), já a função  $\mathcal{F}$  é dada pela Eq. (4.61). Semelhante a Eq. (4.59), por razões práticas, definiu-se a quantidade (4.82), dado que todos os fatores multiplicativos são constantes. Com respeito a notação utilizada, todas as definições e propriedades matemáticas já foram esclarecidas anteriormente.

A Eq. (4.81) corresponde a dispersão de velocidades para a componente  $z$ , que é a direção paralela a linha de declinação. Esse resultado segue a mesma simetria apresentada pelos casos anteriores, nos quais existem duas contribuições: uma constante e outra variável, que depende dos parâmetro  $p$  e  $\beta$ . O comportamento para a dispersão  $\langle (\Delta \bar{v}^z)^2 \rangle$  em função de  $\chi$  está exibido na Figura 19a, para diferentes valores de  $p$  e  $\beta$ . Também, na Figura 19b

mostra-se o comportamento da dispersão como função da quasiperiodicidade  $\beta$ , para valores arbitrários da desclinação  $p$  e mantendo a distância  $\chi$  constante. Nota-se que os gráfico da dispersão em função da constante  $\beta$  para as componentes  $\rho$  e  $z$ , Figuras 17b e 19b, são similares e possuem um formato de “u” ou “w”. Entretanto, ambos diferem da componente  $\phi$ , Figura 18b, que tem um formato inverso. Contudo, vale destacar que, apesar dessa leve distinção, todos possuem um perfil oscilante. Possivelmente, essa assimetria gráfica se deve a alteração que a coordenada angular sofre em razão da desclinação.

Figura 19 – Comportamento gráfico da dispersão de velocidades  $\langle(\Delta\bar{v}^z)^2\rangle$  em função dos parâmetros  $\chi$  e  $\beta$ .



Legenda: Na figura (a) cada curva é definida pelos valores particulares dos parâmetros de quasiperiodicidade  $\beta$  e desclinação  $p$ . A figura (b) admite como exemplo o caso  $\chi = 1$  para todos os valores indicados de  $p$ . Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Em virtude da simplicidade do integrando em (4.81) a análise sobre a convergência das curvas para dispersão torna-se igualmente simples. Na origem  $\chi = 0$ , a função  $\mathcal{F}_{y \gg 1}$  é por si mesma convergente, como discutido abaixo da Eq. (4.63). Além disso, de acordo com a Eq. (4.54b), a soma  $S_2$  no limite  $\chi \rightarrow 0$  produz uma constante, a saber  $\zeta(3)$ . Portanto, a partir da Eq. (4.63), percebe-se facilmente que o integrando  $I_z = \mathcal{F}S_2 = \zeta(3)\mathcal{F}$ , avaliado em  $\chi = 0$  e no limite  $y \gg 1$ , será convergente, como pode ser constatado pelas curvas da Figura 19a.

## 5 MBQI no espaço-tempo plano com confinamento unidimensional

Diferente do estudo anterior, desenvolvido sobre uma geometria efetiva, nesse capítulo vamos investigar o MBQI de uma partícula pontual acoplada a um campo escalar sem massa no espaço-tempo plano em  $(3 + 1)$  dimensões, na presença de dois planos perfeitamente refletivos e sujeito a uma condição de quasiperiodicidade. Como elementos inovadores, serão considerados diferentes condições de contorno sobre os planos, além das condições de Dirichlet usualmente aplicadas. Nesse cenário, inicialmente as equações de movimento serão deduzidas e em seguida utilizadas para o estudo de ambas as dispersões de velocidades e posições da partícula, além da análise da assim chamada condição de pequenos deslocamentos.

### 5.1 Motivação

Antes de iniciar as análises, visando manter o padrão textual adotado, gostaríamos de elencar brevemente alguns comentários físicos e matemáticos, os quais estão alinhados aos objetivos do presente estudo. A ideia principal dessa motivação é tornar as investigações subsequentes menos artificiais, ainda que as mesmas estejam em um nível de primeiros princípios, isto é, em um estágio de investigação elementar, que nos permite observar com atenção apenas os detalhes superficiais do problema.

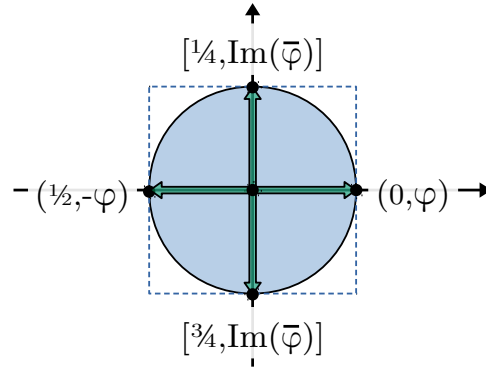
Recapitulando as discussões da Seção 3.3.1, a condição de contorno do tipo Dirichlet fixa o valor do campo sobre a superfície, enquanto que a condição de Neumann fixa a derivada do campo na direção normal à superfície. No contexto do eletromagnetismo, por exemplo, a condição de Dirichlet define o valor do potencial elétrico sobre a superfície de interesse, enquanto que a condição de Neumann estabelece a densidade de cargas sobre a superfície [60, 59]. Essas estruturas matemáticas foram definidas na Seção 3.3.1 para um campo escalar  $\varphi$ , que nesse panorama seria o correspondente do potencial elétrico – confira as Eqs. (3.28a) e (3.28b).

Situações envolvendo as condições de contorno de Dirichlet são comuns nos estudos da eletrostática como, por exemplo, no problema do cálculo do potencial elétrico devido a uma carga pontual situada a uma distância fixa de um plano condutor com potencial nulo – veja a Seção 3.2 da Ref. [113]. Problemas com condições de Neumann são menos usuais, porém de acordo com a Ref. [114] estes surgem quando correntes estacionárias estão presentes em meios Ôhmicos. Para mais detalhes sobre este aspecto, veja o comentário no final da página 200 da Ref. [114], bem como a Seção 9.4 dessa mesma fonte.

Anteriormente também foram definidas as chamadas condições mistas (aplicáveis somente em situações com duas superfícies), Eqs. (3.28c) e (3.28d). Nesse último caso, a motivação para considerar tais construções, isto é, Eqs. (3.28c) e (3.28d), baseia-se na proposta de realizar um estudo de nível fundamental, buscando investigar as consequências de uma configuração exótica, em que cada plano refletor possui propriedades distintas. Com base nas discussões da Seção 3.3.2, de maneira geral, os planos sujeitos a cada condição de contorno são interpretados como filtros, que influenciam e selecionam apenas modos particulares do campo escalar.

Na Seção 3.3.2 definimos de forma elementar as condições de contorno do tipo quasiperiódicas, a saber, Eq. (3.29). Recapitulando, a ideia central desta condição, sob a perspectiva matemática, é fornecer uma generalização das análises, além dos casos particulares de soluções periódicas ( $\beta = 0$ ) e antiperiódicas ( $\beta = \frac{1}{2}$ ). A Figura 20 mostra uma representação desse mecanismo de generalização, em que a depender do valor do parâmetro de quasiperiodicidade  $\beta$  podemos recuperar os casos conhecidos (periódicos e antiperiódicos) e explorar situações exóticas ( $\beta \neq 1, \frac{1}{2}$ ).

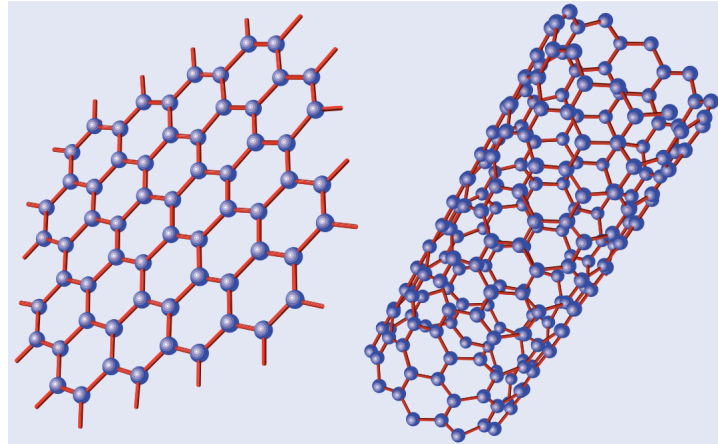
Figura 20 – Plano complexo para o campo escalar sujeito à condições quasiperiódicas.



Legenda: Na imagem acima são destacados os pontos  $(\beta, \bar{\varphi})$ , com  $\bar{\varphi} = e^{-2\pi\beta i}\varphi$  e  $\text{Im}(\bar{\varphi})$  simbolizando a parte complexa do campo escalar  $\bar{\varphi}$ . Nos casos particulares  $\beta = 0$  e  $\beta = \frac{1}{2}$  temos  $\bar{\varphi} = \varphi$  e  $\bar{\varphi} = -\varphi$ , respectivamente, recuperando os casos periódicos e antiperiódicos. Nas regiões intermediárias ( $\beta \neq 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ) o campo é composto por uma parte real e outra complexa. Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Um exemplo físico mais “palpável” que podemos citar consiste no emprego da condição de quasiperiodicidade em sistemas de matéria condensada, especificamente, em nanotubos de carbono (folhas de grafeno enroladas em formato cilíndrico) – Figura 21. De acordo com a Ref. [115], quando o campo espinorial  $\psi$  em um nanotubo está sujeito a condição de contorno  $\psi(t, z_1, z_2) = e^{-2\pi\beta i}\psi(t, z_1, z_2 + L)$ , para  $\beta = 0$  o nanotubo é metálico, mas se  $\beta = \pm\frac{1}{3}$  o nanotubo é semicondutor. Quanto a notação,  $L$  representa o comprimento da direção compactificada (do cilindro) e  $z_i$  ( $i = 1, 2$ ) as devidas coordenadas espaciais do modelo. Nesse cenário, a energia de Casimir tem sido investigada, tanto para campos fermiônicos [115] como escalares [116].

Figura 21 – Estrutura bidimensional do grafeno e nanotubo de carbono.



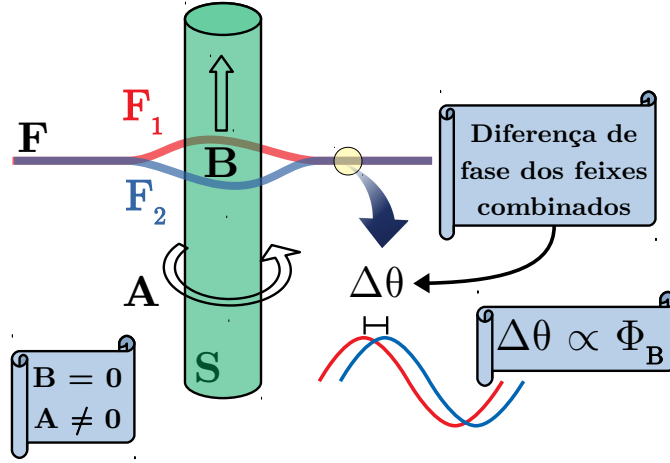
Legenda: Na imagem acima cada esfera representa um átomo de carbono ligado aos demais, formando uma estrutura atômica com formato exagonal ou do tipo favo de mel (“*honeycomb*”). À esquerda encontra-se a estrutura atômica (bidimensional) do grafeno, cuja dobradura em formato cilíndrico produz o nanotubo de carbono mostrado à direita. Fonte: reproduzido e modificado da Ref. [117, p. 4].

Em termos de estrutura a condição quasiperiódica lembra o problema do efeito Aharonov-Bohm, em que dois feixes de partículas (elétrons) se movendo por uma região de campo magnético  $\mathbf{B}$  nulo sofrem uma interferência, a qual é proveniente do potencial vetor  $\mathbf{A}$  – veja a Figura 22 para uma ilustração. Essa interferência está codificada em uma fase  $\theta$  na função de onda dos elétrons,  $e^{i\theta}\Psi$ , que é proporcional à integral de linha do potencial vetor e, conseqüentemente, ao fluxo do campo magnético  $\Phi_{\mathbf{B}}$  (existente apenas na região em que as partículas não têm acesso) – para mais detalhes, veja por exemplo, [118, p. 343-349].

Como exemplo, podemos mencionar ainda que, a condição quasiperiódica também tem sido discutida no contexto da Mecânica Estatística, como uma forma de generalizar e estudar as implicações de uma estatística intermediária entre os casos particulares e bem conhecidos das estatísticas para bósons e férmions – veja por exemplo as Refs. [119] e [120]. Vale ressaltar que, nestes exemplos a condição de quasiperiodicidade está associada à temperatura. Além disso, é comentado que a fase da periodicidade tem um papel semelhante ao de um campo de gauge constante.

Em vista do exposto, somos motivados a supor que a condição quasiperiódica, além de generalizar as expressões, possivelmente pode ser compreendida como uma forma de simular algum tipo de interação no sistema, ou ainda, conforme a Figura 2, pode implicar em uma mudança da natureza do campo de escalar real (neutro) para complexo (carregado), quando  $\beta \neq (0, \frac{1}{2})$ . A primeira dessas hipóteses possui um maior suporte, visto que a fase  $\beta$  modifica a relação de dispersão, em outras palavras, altera a propagação dos modos e, portanto, podendo ser resultado de alguma interação no sistema.

Figura 22 – Ilustração simplista do efeito Aharonov-Bohm.



Legenda: Um feixe de elétrons (**F**) parte (da esquerda para à direita) em direção a uma região contendo um longo solenoide (**S**), cujo campo magnético na região externa é zero e no seu interior possui um valor uniforme **B**. Na região externa do solenoide o potencial vetor **A** é diferente de zero. O feixe principal é dividido de modo que os feixes **F**<sub>1</sub> e **F**<sub>2</sub> seguem por lados opostos e recombinam-se em seguida. Quando os feixes divididos **F**<sub>1</sub> e **F**<sub>2</sub> se encontram, estes apresentam uma diferença de fase  $\Delta\theta$ , proporcional ao fluxo magnético  $\Phi_B$ . Fonte: elaborado pelo autor com base na Ref. [118, p. 346-347].

A seguir vamos estudar o MBQI de uma partícula admitindo as diferentes condições de contorno mencionadas nessa seção. Quanto as condições sobre os dois planos refletor (Dirichlet, Neumann e Mistas) o objetivo será generalizar e estender os casos conhecidos na literatura. Por outro lado, a análise do MBQI sob a influência da condição quasiperiódica, até o nosso conhecimento, ainda não havia sido considerada na literatura e, por esse motivo, compôs boa parte da originalidade desta tese, cujos resultados foram apresentados na Ref. [36].

## 5.2 Descrição do sistema físico e equações de movimento

Seguindo o formalismo da TQC, o ponto de partida, como sempre, consiste em obter as equações de movimento associadas ao sistema. Conforme temos visto ao longo desse trabalho, a extremização da ação  $S$ , que representa um sistema particular, fornece todas as equações necessárias que descrevem a sua dinâmica. Portanto, a ação total que devemos considerar é dada por

$$S_{\text{tot}} = S_{\varphi} + S_p + S_{\text{int}}, \quad (5.1)$$

com

$$S_{\varphi} = \int dt \int dV \frac{(\partial_{\mu}\varphi)(\partial^{\mu}\varphi)}{2}, \quad (5.2a)$$

representado a ação do campo escalar sem massa,

$$S_p = \int dt \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2}, \quad (5.2b)$$

a ação da partícula (Browniana), de massa  $m$  e velocidade  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ , e por fim

$$S_{\text{int}} = -g \int dt \int dV \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi, \quad (5.2c)$$

definindo a ação que descreve a forma da interação entre a partícula e o campo escalar  $\varphi$ , cuja intensidade do acoplamento é estimada pela constante  $g$ . Quanto aos limites de integração nas Eqs. (5.2), para as integrais no tempo  $dt$  estas variam de um tempo inicial qualquer (digamos  $t_0$ ) até um instante posterior ( $t'$ ). As integrais sobre o elemento de volume  $dV$  a princípio se estendem sobre todo o espaço, exceto quando condições de contorno são impostas sobre a existência do campo em regiões finitas. Note que a estrutura da interação (5.2c) já foi discutida anteriormente, confira a Eq. (2.56). O modelo de estudo definido pela ação clássica (5.1) é bem conhecido e utilizado com frequência na literatura para estudar o MBQI em diversas circunstâncias [57, 31, 30, 29, 32, 33].

A ação clássica (5.1) descreve completamente o modelo que será utilizado nas investigações seguintes. Variando a ação  $S_{\text{tot}}$  com respeito ao campo  $\varphi$  encontra-se que o mesmo obedece a equação não-homogênea

$$\square\varphi = -g\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \quad (5.3)$$

com o operador d'Alembertiano  $\square$  dado pela Eq. (2.42). Aqui, seguindo a literatura, vamos assumir que a influência da partícula sobre a dinâmica do campo escalar é fraca o suficiente para ser negligenciada de maneira que o erro introduzido seja desprezível [30]. Assim, com base nesse pressuposto, a partir da Eq. (5.3), segue que

$$\square\varphi \approx 0, \quad (5.4)$$

mostrando que  $\varphi$  satisfaz a equação de Klein-Gordon para um campo escalar sem massa (3.30), cuja solução geral corresponde as ondas planas (3.31). Se condições de contorno são impostas de modo a confinar o campo em uma dimensão espacial, situação considerada adiante, as ondas planas (3.31) são modificadas conforme as discussões na Seção 3.3.

Do mesmo modo, variando a ação (5.1) com respeito a coordenada de posição  $x_i$  encontramos a expressão

$$m \frac{dv_i}{dt} = -g \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}, \quad (5.5)$$

com  $i = (x, y, z)$ , cuja integração fornece a equação

$$v_i(\tau, \mathbf{x}) = -\frac{g}{m} \int_0^\tau dt \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}, \quad (5.6)$$

que governa o comportamento da componente  $v_i$  da velocidade da partícula. Na Eq. (5.6) foi assumida a hipótese clássica de que a velocidade inicial da partícula é nula, isto é, que  $v_i = 0$  para  $t = 0$ . Além disso, a variável  $\tau$  em (5.6) representa simbolicamente um instante de tempo arbitrário  $\tau > 0$ . O Apêndice C.1 contém alguns detalhes sobre as deduções das Eqs. (5.3) e (5.5). Note que, nesse caso, os efeitos da curvatura do espaço-tempo e variação da massa estão ausentes, uma vez que o espaço-tempo é plano.

Uma das simplificações que também será implementada no modelo estudado é que as partículas Brownianas em questão se movem lentamente, de modo que a dependência temporal das coordenadas espaciais em (5.6) pode ser negligenciada [22, 23, 24, 27, 26, 28, 29, 30, 31]. Em outras palavras, que seus deslocamentos são pequenos o suficiente para suportar essa hipótese simplificadora com a introdução de um erro desprezível. De fato, uma descrição precisa, em princípio, deve levar em conta a existência dessa possível dependência temporal que as coordenadas de posição possuem, ou seja, que  $x_i = x_i(t)$ . Como será visto, essa suposição implicará em restrições sobre a validade dos nossos resultados e, com o objetivo de manter a clareza das exposições, os detalhes dessa discussão serão realizados após o estudo da dispersão de velocidades em seções exclusivas.

Para obter a dispersão em cada componente da velocidade da partícula, por influência das flutuações quânticas do campo escalar, primeiro devemos quantizar a Eq. (5.6) através da prescrição quântica  $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ , que instantaneamente fornece  $v_i \rightarrow \hat{v}_i$ . Esse é um procedimento necessário para “ativar” as flutuações quânticas de vácuo, pois devemos lembrar que o campo clássico  $\varphi$  não flutua. Portanto, quantizando a Eq. (5.6) através do método indicado e utilizando a Eq. (4.43), com  $\hat{\mathcal{O}} \equiv \hat{v}_i$ , encontra-se que

$$\langle (\Delta \hat{v}_i)^2 \rangle_{\text{ren}} = \lim_{x \rightarrow x'} [\langle \hat{v}_i(x) \hat{v}_i(x') \rangle - \langle \hat{v}_i(x) \rangle \langle \hat{v}_i(x') \rangle]_{\text{div}} \quad (5.7)$$

$$= \frac{g^2}{m^2} \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x_i} W_{\text{ren}}(x, x'). \quad (5.8)$$

Para estabelecer o resultado acima foi utilizado o fato de que o VEV  $\langle \hat{v}_i \rangle = 0$  e, na segunda linha, também foi omitida a notação do limite de coincidência espacial – conforme a notação formal mostrada na expressão de origem (4.43) e Eq. (5.7).

Nas Eqs. (5.7) e (5.8) o subscrito “ren” indica, de maneira geral, que um processo de regularização foi implementado a fim de renormalizar o observável  $\langle (\Delta \hat{v}_i)^2 \rangle$ , de modo que no limite de coincidência  $x' \rightarrow x$  um resultado finito seja obtido. No campo da TQC esse é um procedimento comum e necessário, visto que resultados contendo divergências (infinitos) podem surgir, quando lidamos com observáveis dependentes do produto de campos, ou seja, funções de Green em geral [61].

Diferentes métodos de renormalização podem ser seguidos e estes dependem tanto da abordagem utilizada em um estudo como da estrutura do espaço-tempo em questão, isto é, se o mesmo é plano ou curvo – veja as discussões, por exemplo, na Ref. [61]. Aqui,

em virtude das estruturas matemáticas com as quais lidamos, será utilizada uma técnica conhecida como separação de ponto (tradução do inglês “*point-splitting*”). Em resumo, esse procedimento consiste em redefinir um produto de campos no mesmo ponto – ex.  $\varphi(x)^2 = \varphi(x)\varphi(x)$  – como campos avaliados em pontos diferentes –  $\varphi(x)^2 = \varphi(x)\varphi(x')|_{x'=x}$ . Por esse motivo o nome separação de pontos. Em seguida as devidas operações são efetuadas admitindo a nova estrutura,  $\varphi(x)\varphi(x')$ , devendo ao final tomar o limite de coincidência  $x' = x$  para recuperar a construção inicial –  $\varphi(x)^2$ . Após realizar essa troca e subtrair apropriadamente o fator identificado como causador da divergência (“div”), obtém-se o resultado renormalizado [86]. Em essência essa é a ideia contida na estrutura das Eqs. (5.7) e (5.8).

Em nossas expressões (referentes ao espaço-tempo plano) o fator divergente é bem conhecido e facilmente identificado como oriundo do vácuo de Minkowski, o qual na TQC é definido como o espaço-tempo vazio, através do qual os campos quânticos se propagam livremente, isto é, sem qualquer tipo de perturbação originada, por exemplo, pela presença de planos refletoras (condições de contorno), efeitos térmicos, alterações da topologia, efeitos de expansão (*backgrounds* dependentes do tempo), etc. Matematicamente, a forma explícita da FWFP para o campo escalar sem massa referente a contribuição do vácuo de Minkowski é dada pela expressão

$$W_0(x, x') = \frac{1}{4\pi^2 [\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2]} = \frac{1}{4\pi^2} f_0(\Delta r) = \frac{1}{4\pi^2} g_0(\Delta r),$$

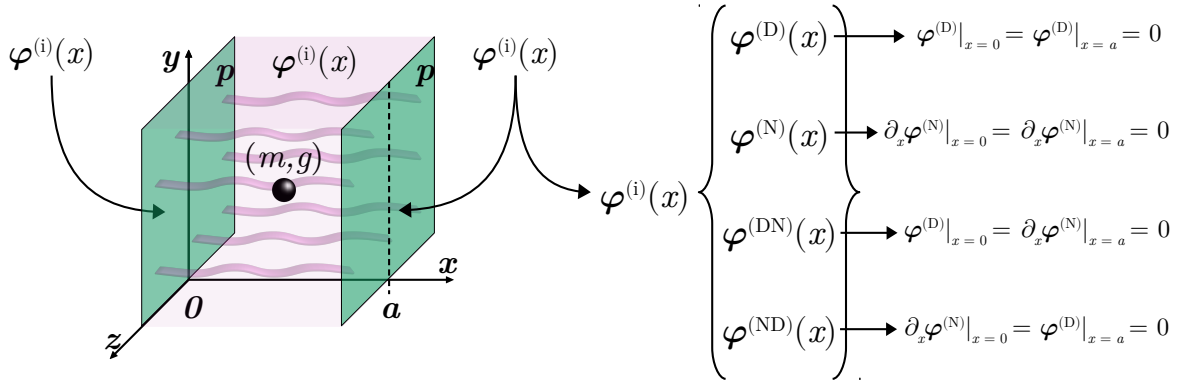
onde as últimas igualdades foram estabelecidas utilizando as definições (3.56a) e (3.87). Note que no limite de coincidência  $x' \rightarrow x$  os intervalos  $\Delta x_i = (x_i - x'_i)$ , com  $x_i = \{t, x, y, z\}$ , se anulam e  $W_0 \rightarrow \infty$ . Então, desde já adianta-se que, nesse capítulo as funções de Wightman renormalizadas,  $W_{\text{ren}}$ , são obtidas subtraindo os termos  $\frac{1}{4\pi^2} f_0(\Delta r)$  e  $\frac{1}{4\pi^2} g_0(\Delta r)$  das devidas expressões finais da Seção 3.3, pois conforme discutido essas são as únicas partes divergentes dos resultados e correspondem, ambas  $\frac{1}{4\pi^2} f_0(\Delta r)$  e  $\frac{1}{4\pi^2} g_0(\Delta r)$ , a contribuição divergente do vácuo de Minkowski há pouco relatada.

## 5.3 Confinamento por placas paralelas

### 5.3.1 Estudo da dispersão de velocidades

Nessa primeira parte, estamos interessados em estudar o MBQI de uma partícula pontual devido as flutuações quânticas de vácuo de um campo escalar sem massa, com o qual a mesma interage, confinado unidimensionalmente por duas fronteiras planas perfeitamente refletoras, sujeitas a diferentes condições de contorno. A Figura 23 apresenta um esboço geral do sistema considerado. Além disso, as análises serão desenvolvidas no espaço-tempo de Minkowski em  $(3 + 1)$  dimensões.

Figura 23 – Partícula pontual de massa  $m$  e carga  $g$  interagindo com um campo escalar sem massa  $\varphi$  confinado unidimensionalmente em uma região de tamanho  $a$ .



Legenda: Os dois planos perfeitamente refletoras  $p$ , situados sobre o eixo cartesiano  $x$ , nas posições  $x = 0$  e  $x = a$ , confinam os modos do campo escalar  $\varphi^{(i)}$ , o qual está sujeito à diferentes condições de contorno  $i$  sobre os planos, a saber, Dirichlet (D), Neumann (N) e Mistas (DN e ND). Fonte: produzido pelo autor, 2024.

De acordo com a Eq. (5.8), para estudar o MBQI no cenário descrito acima, representado na Figura 23, necessitamos da função de Wightman correspondente a cada uma das configurações indicadas, ou seja, para o campo escalar sem massa sob condições de Dirichlet, Neumann e Mistas. Estas expressões foram deduzidas em detalhes na Seção 3.3 e reunidas em uma construção única rotulada como FWFP-DNM, Eq. (3.82), que será utilizada na sequência. Para obter a dispersão de velocidades associada a componente paralela aos planos, isto é, direção  $i = x$ , primeiro é importante observar que

$$\left. \frac{\partial^2 W_{\text{ren}}^{(i)}}{\partial x \partial x'} \right|_{x'=x} = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(i)} \left[ \frac{1}{(4(an)^2 - \Delta t^2)^2} - \frac{16(an)^2}{(4(an)^2 - \Delta t^2)^3} \right] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} \left[ \frac{1}{(4x_n^2 - \Delta t^2)^2} - \frac{16x_n^2}{(4x_n^2 - \Delta t^2)^3} \right] \right\}, \quad (5.9)$$

com  $\Delta t = (t - t')$  e  $x_n = x - an$ . O resultado (5.9) é obtido derivando sucessivamente a Eq. (3.82) com respeito as variáveis  $x$  e  $x'$ , conforme solicitado pela Eq. (5.8). Além disso, na Eq. (5.9) o limite de coincidência espacial já foi implementado, visto que as operações sobre o setor espacial já foram realizadas. Destaca-se que, a linha no símbolo de soma significa que o termo  $n = 0$  da expressão foi removido do intervalo. De acordo com as discussões anteriores, essa contribuição é removida com o intuito de regularizar as expressões, visto que no limite de coincidência produz uma singularidade no resultado.

A partir das Eqs. (5.8) e (5.9) segue que

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)} &= \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \left\{ \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(i)} \left[ \frac{1}{(4(an)^2 - \Delta t^2)^2} - \frac{16(an)^2}{(4(an)^2 - \Delta t^2)^3} \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} \left[ \frac{1}{(4x_n^2 - \Delta t^2)^2} - \frac{16x_n^2}{(4x_n^2 - \Delta t^2)^3} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Observando que os integrandos da dispersão  $\langle(\Delta\hat{v}_x)^2\rangle_{\text{ren}}$  são funções de  $\Delta t \equiv \xi$ , podemos utilizar a identidade [30, 31]

$$\int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \mathcal{G}(|t-t'|) = 2 \int_0^\tau d\xi (\tau-\xi) \mathcal{G}(\xi) \quad (5.11)$$

para reduzir a dupla integração em (5.10). Então, utilizando a identidade (5.11) na Eq. (5.10) e dispoendo dos resultados

$$\int_0^\tau d\eta \frac{(\tau-\eta)}{(4r^2-\eta^2)^2} = \frac{\tau}{32r^3} \ln\left(\frac{2r+\tau}{2r-\tau}\right) \quad (5.12a)$$

e

$$\int_0^\tau d\eta \frac{(\tau-\eta)}{(4r^2-\eta^2)^3} = \frac{\tau^2}{128r^4(4r^2-\tau^2)} + \frac{3\tau}{512r^3} \ln\left(\frac{2r+\tau}{2r-\tau}\right), \quad (5.12b)$$

com  $r = (an, x_n)$ , podemos estabelecer o seguinte resultado:

$$\langle(\Delta\hat{v}_x)^2\rangle_{\text{ren}}^{(i)} = -\frac{g^2}{16\pi^2 m^2 a^2} \left[ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(i)} R(n, \tau_a) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} R(x_a - n, \tau_a) \right], \quad (5.13)$$

onde definiram-se as funções auxiliares

$$R(r, \tau_a) = P(r, \tau_a) + Q(r, \tau_a), \quad (5.14a)$$

$$P(r, \tau_a) = \frac{2\tau_a^2}{r^2(4r^2 - \tau_a^2)} \quad (5.14b)$$

e

$$Q(r, \tau_a) = \frac{\tau_a}{2r^3} \ln\left(\frac{2r+\tau_a}{2r-\tau_a}\right)^2. \quad (5.14c)$$

A Eq. (5.13) corresponde à dispersão de velocidades (renormalizada) da partícula na direção perpendicular aos dois planos perfeitamente refletos, que confinam unidimensionalmente o campo escalar sem massa sob diferentes condições de contorno, alterando as suas flutuações quânticas de vácuo. Essa expressão está convenientemente escrita em termos dos parâmetros adimensionais

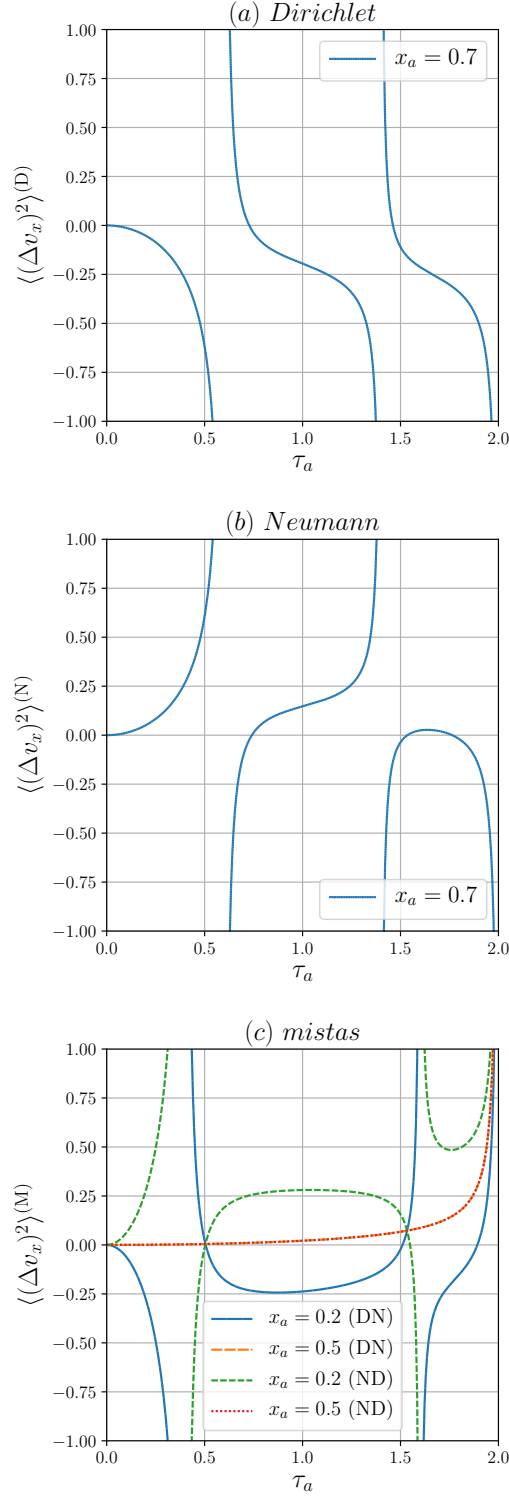
$$\tau_a = \frac{\tau}{a} \quad (5.15a)$$

e

$$x_a = \frac{x}{a}, \quad (5.15b)$$

associados, nessa ordem, ao tempo de observação e a posição da partícula com respeito ao comprimento de separação entre os planos. O uso das definições (5.15a) em (5.13) fornece uma maior generalidade para as expressões, dado que são comparadas com um parâmetro constante e arbitrário do sistema, o qual corresponde a distância  $a$  entre os planos. Nesse sentido, a constante  $a$  atua como uma escala natural para as grandezas do sistema. O comportamento de  $\langle(\Delta\hat{v}_x)^2\rangle_{\text{ren}}^{(i)}$  em função do tempo está exposto na Figura 24, para as devidas condições de contorno.

Figura 24 – Comportamento gráfico da dispersão de velocidades perpendicular aos planos em função do tempo adimensional  $\tau_a$ , para condições de Dirichlet (D), Neumann (N) e Mistas (DN e ND).



Legenda: Gráfico traçado em unidades de  $\langle (\Delta v_x)^2 \rangle^{(i)} = \langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)} \left( \frac{ma}{g} \right)^2$ , para valores arbitrários da posição relativa  $x_a = x/a$ . Linhas verticais indicando pontos de descontinuidade das funções foram removidos através de cortes na função, a fim de melhorar os aspectos visuais das curvas. Fonte: produzido pelo autor, 2024.

O tempo de observação (5.15a) refere-se ao intervalo de tempo em que a partícula pontual interage com as flutuações quânticas de vácuo do campo escalar, o qual inicia instantaneamente em  $t = 0$  e termina imediatamente em  $t = \tau$ . Tendo em vista a definição (5.15b), percebe-se prontamente que, os valores para o parâmetro  $x_a$  são restringidos pela desigualdade  $0 \leq x_a \leq 1$ , pois a coordenadas  $x$  está limitada à região de tamanho  $a$ . Antes de discutirmos quaisquer aspectos físicos associados a dispersão de velocidades, vamos obter a dispersão referente à componente paralela aos planos, pois muitas das observações realizadas adiante são compartilhadas por todas as componentes de  $\langle (\Delta \hat{v}_i)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)}$ .

Para  $i = y$ , semelhante ao caso anterior, a partir da Eq. (3.82), inicialmente devemos encontrar a derivada conveniente da FWFP-DNM considerando a direção  $i = y$ , cujo resultado no limite de coincidência é

$$\left. \frac{\partial^2 W_{\text{ren}}^{(i)}}{\partial y \partial y'} \right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n^{(i)}}{[4(an)^2 - \Delta t^2]^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_n^{(i)}}{[4x_n^2 - \Delta t^2]^2} \right\}. \quad (5.16)$$

Logo, substituindo (5.16) na Eq. (5.8) com  $i = y$ , temos

$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}} = \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \left\{ \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n^{(i)}}{[4(an)^2 - \Delta t^2]^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_n^{(i)}}{[4x_n^2 - \Delta t^2]^2} \right\}. \quad (5.17)$$

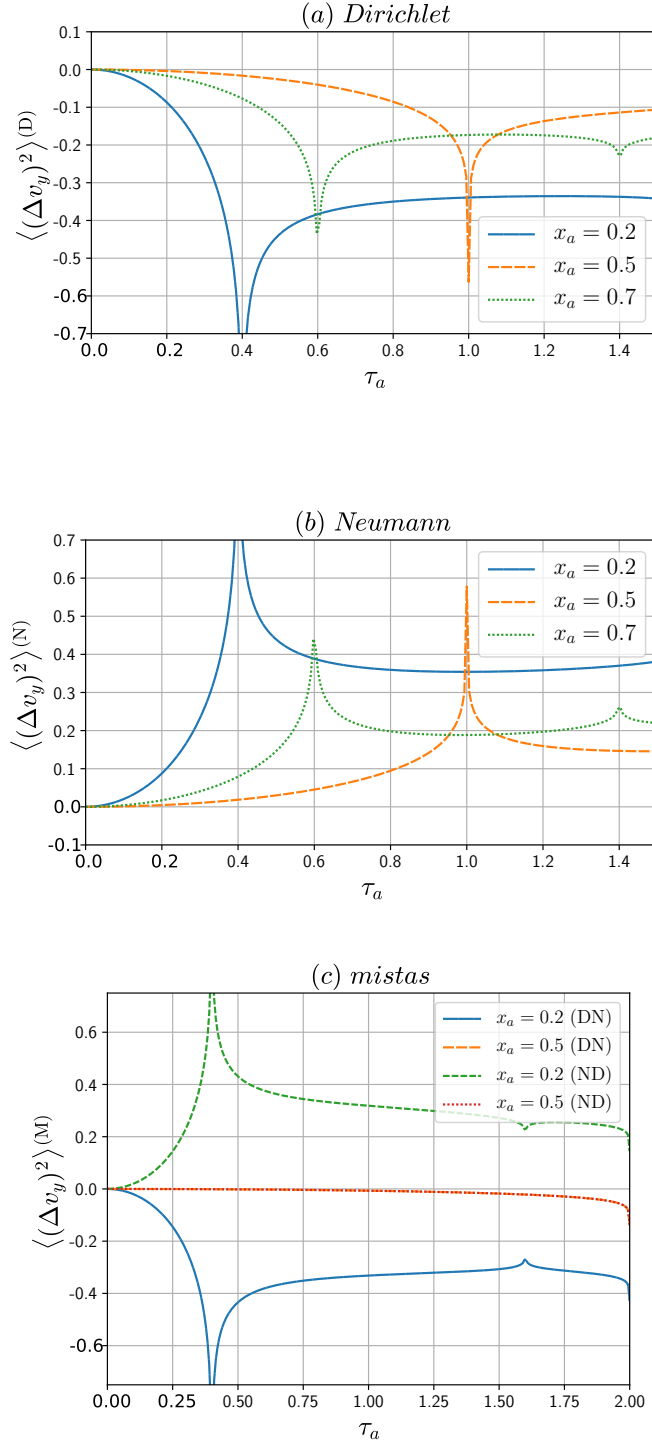
Utilizando novamente a identidade (5.11), podemos converter a dupla integral na Eq. (5.17) em uma integração simples, a qual pode ser diretamente resolvida empregando o resultado (5.12a), de modo que, após organizar os devidos termos, obtém-se

$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)} = \frac{g^2}{32\pi^2 m^2 a^2} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(i)} Q(n, \tau_a) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} Q(x_a - n, \tau_a) \right\}, \quad (5.18)$$

onde foram utilizadas as definições da função auxiliar  $Q(r, \tau_a)$ , Eq. (5.14c), e dos parâmetros adimensionais  $\tau_a$  e  $x_a$ , Eqs. (5.15). A Eq. (5.18) corresponde a dispersão de velocidades da partícula associada à componente  $y$ , a qual é perpendicular aos planos paralelos. Esse resultado representa igualmente a componente  $z$  da dispersão, bastando fazer a troca  $y \rightarrow z$ , ou seja,  $\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)} = \langle (\Delta \hat{v}_z)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)}$ . Em virtude dessa igualdade entre as expressões para as componentes perpendiculares  $y$  e  $z$ , nas discussões seguintes, apenas a componente  $y$  será examinada, subentendendo-se que as mesmas análises se aplicam à componente  $z$ . O comportamento de  $\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)}$  está exposto na Figura 25, para cada uma das condições de contorno utilizadas.

O primeiro ponto a ser discutido sobre as expressões obtidas consiste na possibilidade de recuperar os resultados da literatura, assim como estendê-los moderadamente. Para condições de Dirichlet observa-se que a contribuição  $n = 0$ , proveniente do segundo somatório no lado direito das Eqs. (5.13) e (5.18), corresponde aos resultados da literatura para o MBQI devido a um plano perfeitamente refletor [31]. De fato, a contribuição  $\frac{1}{4\pi^2} f_0(\Delta \bar{r})$  da Eq. (3.82) corresponde à FWFP para um campo escalar sem massa na

Figura 25 – Comportamento gráfico da dispersão de velocidades paralela aos planos em função do tempo adimensional  $\tau_a$ , para condições de Dirichlet (D), Neumann (N) e Mistas (DN e ND).



Legenda: Gráfico traçado em unidades de  $\langle (\Delta v_y)^2 \rangle^{(i)} = \langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}} \left( \frac{ma}{g} \right)^2$ , para valores arbitrários da posição relativa  $x_a = x/a$ . A componente  $\langle (\Delta v_z)^2 \rangle^{(i)}$  possui os mesmos perfis gráficos. Os “bicos” nas devidas curvas representam pontos de descontinuidade. Fonte: produzido pelo autor, 2024.

presença de um plano perfeitamente refletor situado em  $x = 0$ , logo esse termo indubitavelmente deve reproduzir os resultados para a dispersão de velocidades de uma partícula imersa em tal sistema. A partir das Eqs. (5.13) e (5.18) é possível mostrar que

$$\left[ \frac{g^2 \delta_n^{(D)} R(x_a - n, \tau_a)}{16\pi^2 m^2 a^2} \right] \Big|_{n=0} = -\frac{g^2}{16\pi^2 m^2 x^2} \left[ \frac{2\tau^2}{(x^2 - \tau^2)} + \frac{\tau}{2x} \ln \left( \frac{2x + \tau}{2x - \tau} \right)^2 \right] \quad (5.19a)$$

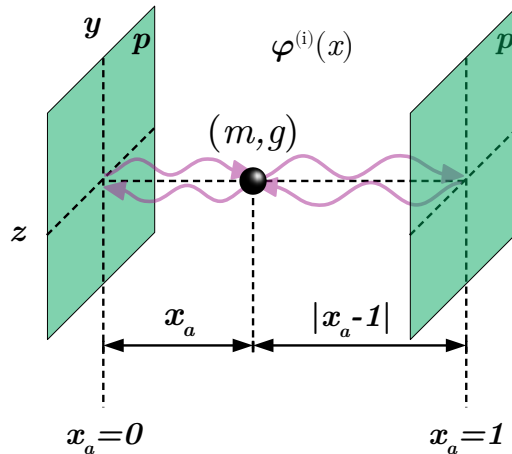
e

$$\left[ \frac{g^2 \delta_n^{(D)} Q(x_a - n, \tau_a)}{32\pi^2 m^2 a^2} \right] \Big|_{n=0} = -\frac{g^2}{32\pi^2 m^2 x^2} \frac{\tau}{2x} \ln \left( \frac{2x + \tau}{2x - \tau} \right)^2, \quad (5.19b)$$

os quais são equivalentes aos resultados encontrados na literatura – veja as Eqs. (4.1) e (4.2) da Ref. [31]. Esse fato mostra a consistência dos resultados obtidos até o momento. Além disso, as relações (5.19) mostram que se as condições de Neumann são empregadas sobre as fronteiras os resultados têm um sinal oposto, visto que  $\delta_n^{(N)} = -\delta_n^{(D)} = +1$ .

Observando as Figuras 24 e 25 nota-se a presença de divergências para alguns valores específicos de  $\tau_a$ , os quais merecem uma atenção especial. Inicialmente, através das Eqs. (5.13) e (5.18), é possível identificar que existem dois tipos de divergências, a saber, quando  $\tau_a = 2n$  e  $\tau_a = 2|x_a - n|$ . Imediatamente constata-se que, diferente de  $\tau_a = 2n$ , a relação  $\tau_a = 2|x_a - n|$  depende da posição relativa  $x_a$ . Duas divergências típicas das expressões são verificadas e merecem destaque, são estas  $x_a = 0$  e  $x_a = 1$ , que são os pontos nos quais os planos estão idealmente localizados. É instrutivo observar que, para  $x_a = 0$  ambas as relações preveem a mesma divergência, ou seja,  $\tau_a = 2n$ . De maneira geral, essas divergências são identificadas como divergências de “round trip”, as quais são definidas como o tempo que um sinal de luz gasta para realizar uma viagem de ida e volta partindo da partícula, situada em  $x_a$ , até os planos refletor, localizados em  $x_a = 0$  e  $x_a = 1$  [22, 23] – veja a Figura 26 para uma ilustração.

Figura 26 – Ilustração das divergências de *round trip*.



Legenda: Partícula pontual de massa  $m$  e carga  $g$  situada na posição  $x_a$  relativa ao plano ( $p$ ) em  $x_a = 0$  e  $|x_a - 1|$  em relação ao plano localizado em  $x_a = 1$ . Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Considerando as discussões acima, nas Figuras 24 e 25, constata-se, por exemplo, nos casos de Dirichlet e Neumann, que para o modo  $n = 0$  o termo dependente da posição prevê uma divergência para o valor  $\tau_a = 1,4$  quando a partícula está situada na posição  $x_a = 0,7$ . Da mesma forma, para  $n = 1$  o termo independente da posição indica que haverá um comportamento singular em  $\tau_a = 2$  ao passo que a contribuição dependente de  $x_a$  fornece uma divergência antecipada em  $\tau_a = 0,6$ . É interessante observar que no caso das condições mistas, Figuras 24c e 25c, existe uma simetria quanto ao ponto médio do conjunto ( $x_a = 0,5$ ), a qual revela que as condições mistas DN e ND são equivalentes para essa configuração particular. Contudo, apesar das semelhanças, vale destacar que, em cada configuração o sistema apresenta um comportamento não trivial com respeito ao tempo.

Foi indicado na literatura que uma possível causa das divergências sobre os planos se deve a posição fixa das fronteiras, as quais em um tratamento mais realístico podem flutuar devido aos efeitos de incerteza quântica [22, 30, 23]. O leitor interessado no assunto pode consultar, por exemplo, a Ref. [121], na qual os autores, considerando um campo escalar sem massa, entre outras coisas, mostram que, assumindo flutuações na posição de uma fronteira idealmente fixa, é possível eliminar divergências associadas ao VEV renormalizado dos observáveis campo ao quadrado,  $\langle\hat{\varphi}^2\rangle$ , e densidade de energia,  $\langle\rho\rangle$ .

Outra forma de regularização para estas típicas divergências, que surgem nos sistemas de MBQI, são as chamadas funções de troca (*switching functions*), as quais têm sido discutidas extensivamente na literatura [27, 28, 31, 32]. Além da posição fixa das fronteiras, outra idealização comum nos modelos consiste no fato de que a partícula inicia e finaliza instantaneamente a sondagem das flutuações quânticas do campo com o qual interage. Entretanto, em situações reais, é necessário um tempo para que a partícula inicie a sondagem efetiva dos efeitos das flutuações, visto que também existirá um intervalo de tempo associado a mudança da partícula de um estado de vácuo sem planos para um estado de vácuo com planos refletores. Nas investigações, esse aspecto realista é introduzido através das funções de troca (ou transição). Contudo, o mesmo não será abordado ao longo dessa tese, e no âmbito destas discussões, nossos desenvolvimentos se referem apenas ao caso idealizado de transições repentinas (*sudden switching*), situação em que o tempo de troca é nulo. Para mais detalhes recomendam-se as fontes já citadas.

Dando sequência as análises, motivados pelo análogo clássico, vamos verificar a estrutura das expressões para  $\langle(\Delta\hat{v}_x)^2\rangle_{\text{ren}}^{(i)}$  e  $\langle(\Delta\hat{v}_y)^2\rangle_{\text{ren}}^{(i)}$  nos regimes de tempo curto ( $\tau_a \ll 1$ ) e longo ( $\tau_a \gg 1$ ), dado que em muitas situações o conhecimento de um sistema nesses regimes pode revelar propriedades fundamentais, permitindo realizar previsões sobre o seu comportamento e estimativas. Iniciando com o caso  $\tau_a \ll 1$ , considerando os resultados do Apêndice C.3.1, encontramos para a direção perpendicular aos planos que

$$\langle(\Delta\hat{v}_x)^2\rangle_{\text{ren}}^{(J)} \simeq -\frac{g^2\tau_a^2}{16\pi^2m^2a^2} \left\{ 3\zeta(4) - \delta^{(J)} \frac{\pi^4}{2} [2 + \cos(2\pi x_a)] \csc^4(\pi x_a) \right\} \quad (5.20a)$$

e

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(M)} \simeq \frac{g^2 \tau_a^2}{128 \pi^2 m^2 a^2} \left\{ 21 \zeta(4) - \delta^{(M)} \pi^4 [11 + \cos(2\pi x_a)] \cot(\pi x_a) \csc^3(\pi x_a) \right\}, \quad (5.20b)$$

enquanto que para a direção paralela, temos,

$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(J)} \simeq \frac{g^2 \tau_a^2}{32 \pi^2 m^2 a^2} \left\{ 2 \zeta(4) + \delta^{(J)} \frac{\pi^4}{3} [2 + \cos(2\pi x_a)] \csc^4(\pi x_a) \right\} \quad (5.21a)$$

e

$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(M)} \simeq -\frac{g^2 \tau_a^2}{128 \pi^2 m^2 a^2} \left\{ 7 \zeta(4) + \delta^{(M)} \frac{\pi^4}{3} [11 + \cos(2\pi x_a)] \cot(\pi x_a) \csc^3(\pi x_a) \right\}. \quad (5.21b)$$

No conjunto de Eqs. (5.20) e (5.21) definiram-se convenientemente os símbolos  $\delta^{(J)} = [\delta^{(D)}, \delta^{(N)}] = [-1, +1]$  e  $\delta^{(M)} = [\delta^{(DN)}, \delta^{(ND)}] = [+1, -1]$ . Observando esses resultados percebe-se que, para o regime  $\tau_a \ll 1$ , todas as dispersões, nos instantes iniciais da sua evolução temporal, são proporcionais a  $\tau_a^2$ , indicando uma espécie de comportamento parabólico, o qual pode ser observado nas Figuras 24 e 25. É importante destacar que nas aproximações utilizamos apenas os termos de ordem  $\tau_a^2$ , em virtude do regime estudado. Além disso, nota-se que, para essa configuração inicial, apenas as divergências  $x_a = 0$  e  $x_a = 1$  se revelam nas expressões.

No MBC a dispersão de velocidades associada à partícula Browniana de massa  $m$ , suspensa em um fluido com temperatura  $T$ , atinge um valor constante para um tempo de observação suficientemente grande, a saber,  $3k_B T/m$ , onde  $k_B$  corresponde à constante de Boltzmann. Esse resultado mostra que a partícula Browniana atingiu o equilíbrio térmico com o meio fluido circundante [122]. Então, motivados por esse fato, vamos verificar as expressões resultantes do regime  $\tau_a \gg 1$ , a fim de encontrar expressões independentes do tempo. Considerando os resultados do Apêndice C.2.1, a partir das Eqs. (5.13) e (5.18), nesse regime, podemos mostra que, para a componente perpendicular

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(J)} \simeq -\frac{g^2}{8 \pi^2 m^2 a^2} \left[ \frac{\pi^2}{3} + \frac{4}{3 \tau_a^2} - \delta^{(J)} \pi^2 \csc^2(\pi x_a) \right] \quad (5.22a)$$

e

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(M)} \simeq \frac{g^2}{8 \pi^2 m^2 a^2} \left[ \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{3 \tau_a^2} - \delta^{(M)} \pi^2 \cot(\pi x_a) \csc(\pi x_a) \right], \quad (5.22b)$$

ao passo que para a direção paralela encontra-se

$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(J)} \simeq \frac{g^2}{8 \pi^2 m^2 a^2} \left[ \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{3 \tau_a^2} + \delta^{(J)} \pi^2 \csc^2(\pi x_a) \right] \quad (5.23a)$$

e

$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(M)} \simeq -\frac{g^2}{8 \pi^2 m^2 a^2} \left[ \frac{\pi^2}{6} + \frac{4}{3 \tau_a^2} + \delta^{(M)} \pi^2 \cot(\pi x_a) \csc(\pi x_a) \right]. \quad (5.23b)$$

Embora representem um regime distinto, semelhante ao caso anterior, as Eqs. (5.22) e (5.23) conservam as divergências sobre os planos. De fato, as funções cossecante

e cotangente são indefinidas para os argumentos 0 e  $\pi$ . Todas as expressões possuem uma dependência temporal através do fator comum  $4/3\tau_a^2$ , porém esta é desprezível para  $\tau_a \gg 1$ . Portanto, como esperado e de forma análoga ao MBC, as dispersões tendem para um valor constante, o qual nas devidas situações é modificado pela contribuição da condição de contorno particular.

Para finalizar as investigações dessa seção, gostaríamos de analisar algumas situações particulares dos resultados obtidos até o momento, o que nos permitirá verificar a sua consistência e recuperar resultados da literatura. Na Ref. [31], entre outras coisas, foi investigado o MBQI de uma partícula na presença de um plano perfeitamente refletor situado em  $x = 0$  sob condições de Dirichlet. No cenário “*sudden*”, para o regime de tempos longos, os autores mostraram que a dispersão de velocidades da partícula nas direções perpendicular e paralela ao plano são identicamente dadas por

$$-\frac{g^2}{8\pi^2 m^2 x^2}. \quad (5.24)$$

Na fonte de origem o plano está situado sobre o eixo  $z$ , entretanto, por questões de compatibilidade com a notação utilizada, estamos alterando o rótulo, uma vez que esta mudança não causa perdas de generalidade ou distorções de significado. A Eq. (5.24) resulta das Eqs. (5.19) considerando uma expansão em  $x/\tau \ll 1$ .

O resultado (5.24) oferece uma excelente oportunidade para comentarmos um aspecto importante relacionado ao VEV renormalizado de observáveis em TQC, que será recorrente ao longo desta tese. Note que a dispersão, Eq. (4.42), é uma quantidade positiva definida, assim, a princípio, o resultado negativo (5.24) parece estranho e inconsistente com a definição de origem da quantidade. As Figuras 24 e 25 mostram que o mesmo pode acontecer para as Eqs. (5.13) e (5.18).

De acordo com a Eq. (5.7), de maneira geral, nota-se que, a dispersão renormalizada consiste em uma subtração entre a dispersão sob o efeito das condições de contorno (ex. planos) e a dispersão livre de quaisquer condições de contorno (espaço vazio), que oferece a contribuição infinita para os resultados. Assim, conforme elucidado pelas Refs. [30] e [22], um resultado negativo pode ser atribuído a presença da condição de contorno, que reduz a dispersão. Em outras palavras, a dispersão na situação considerando as condições de contorno torna-se menor quando comparada com o seu resultado sem a implementação das condições de contorno.

Em conformidade com esses argumentos, a Ref. [67] sugere que também podemos interpretar o resultado negativo dos VEV como uma consequência do processo de renormalização, o qual possivelmente causa no observável uma perda das suas propriedades físicas. Na literatura estes resultados negativos para VEV também são conhecidos como efeitos de subvácio, os quais indicam uma supressão das flutuações quânticas de vácuo – consulte as fontes [123] e [124] para maiores detalhes sobre esse fenômeno.

A partir das Eqs. (5.22) e (5.23), as quais são condizentes com o regime de tempos longos, considerando  $x_a \ll 1$ , até a ordem mais significativa, encontramos

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(J)} = \frac{g^2}{8\pi^2 m^2} \left[ \frac{\pi^2}{3a^2} (1 - \delta^{(J)}) + \frac{4}{3a^2 \tau_a^2} - \frac{\delta^{(J)}}{a^2 x_a^2} \right] \quad (5.25a)$$

e

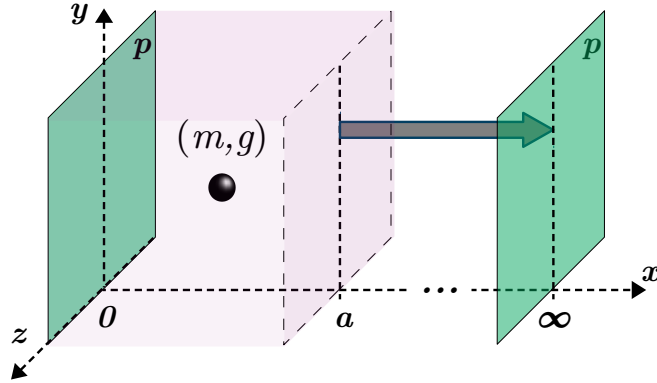
$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(J)} = \frac{g^2}{8\pi^2 m^2} \left[ \frac{\pi^2}{3a^2} (1 + \delta^{(J)}) + \frac{4}{3a^2 \tau_a^2} + \frac{\delta^{(J)}}{a^2 x_a^2} \right]. \quad (5.25b)$$

Para condições puras de Dirichlet  $\delta^{(D)} = -1$ , logo, tomando o limite  $(\tau, a) \rightarrow \infty$ , temos

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(D)} = \langle (\Delta v_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(D)} \simeq -\frac{g^2}{8\pi^2 m^2 x^2}, \quad (5.26)$$

que corresponde ao resultado da literatura há pouco mencionado – Eq. (5.24). Conforme ilustrado pela Figura 27, o limite  $x_a \ll 1$ , implementado nas Eqs. (5.22) e (5.23), significa que o plano situado em  $x = a$  foi deslocado para uma posição muito distante do plano localizado em  $x = 0$ . Em uma situação ideal, deslocado para o infinito. Consequentemente, a partícula experimenta apenas os efeitos das flutuações quânticas do campo escalar na presença do plano refletor em  $x = 0$ , que corresponde ao arranjo estudado na Ref. [31]. Assim, essa é a razão da igualdade observada entre os resultados, como deve ser.

Figura 27 – Ilustração do limite  $x_a \ll 1$ .



Legenda: Ao mover o plano  $p$  situado em  $x = a$  para o infinito, o conjunto resultante equivale ao de uma partícula na presença de um único plano perfeitamente refletor, situado em  $x = 0$ . Fonte: produzido pelo autor, 2024.

A análise acima nos motiva a cogitar que tomando o limite  $x_a \ll 1$  no caso das condições mistas devemos nos deparar com situações semelhantes. De fato, expandindo as Eqs. (5.22b) e (5.23b) para  $x_a \ll 1$  e considerando apenas os termos mais significativos, após tomar o limite  $(\tau, a) \rightarrow \infty$  nas expressões resultantes, obtém-se que

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(M)} = \langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(M)} \simeq -\frac{g^2 \delta^{(M)}}{8\pi^2 m^2 x^2}. \quad (5.27)$$

O resultado acima revela que, para as condições mistas do tipo DN  $\delta^{(\text{DN})} = +1$  e, portanto, o resultado (5.26) é recuperado. Essa igualdade pode ser facilmente entendida sob à luz das discussões anteriores. Inicialmente é crucial lembrar que, a configuração mista DN nos diz que condições de Dirichlet são aplicadas ao plano em  $x = 0$  e condições de Neumann são impostas sobre o plano situado em  $x = a$ . Quando  $x_a \ll 1$ , isto é, no limite  $a \rightarrow \infty$ , o plano sob condições de Neumann é levado para o infinito, como ilustrado didaticamente na Figura 27. Consequentemente, o conjunto restante consiste em uma partícula pontual na presença de um plano (em  $x = 0$ ) sob condições de Dirichlet e, por essa razão, recupera-se o resultado (5.26). O mesmo raciocínio pode ser seguido para o caso das condições de Neumann juntamente com as condições mistas do tipo Neumann-Dirichlet (ND). Além disso, um paralelismo similar também acontece para as expressões do regime  $\tau_a \ll 1$ .

### 5.3.2 Estudo da dispersão na posição e condição de pequenos deslocamentos

Para obter a expressão geral para a dispersão na posição da partícula utilizamos o fato de que  $v_i = dx_i/dt$  e integramos ambos os lados da Eq. (5.6), de modo que encontramos

$$x_i(\tau, \mathbf{x}) = -\frac{g}{m} \int_0^\tau dt \int_0^t dt' \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (5.28)$$

a qual pressupõe  $x_i(t = 0) = 0$ , ou seja, uma posição inicial nula para a partícula no tempo inicial. Vale lembrar que essa é uma hipótese clássica. Portanto, dado que  $\langle \hat{\varphi} \rangle = 0$ , a partir das Eqs. (4.43) e (5.28), segue que

$$\langle (\Delta \hat{x}_i)^2 \rangle_{\text{ren}} = \frac{g^2}{m^2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \int_0^t dt_1 \int_0^{t'} dt_2 \frac{\partial^2}{\partial x_{i_1}' \partial x_{i_2}'} W_{\text{ren}}(x_1, x_2). \quad (5.29)$$

A expressão acima nos permitirá calcular a dispersão renormalizada para as coordenadas espaciais da partícula, induzida pelas flutuações quânticas do campo escalar sem massa  $\varphi$  na presença dos dois planos paralelos.

Antes de iniciarmos os cálculos, torna-se útil e prático, para os nossos propósitos, observar as definições das quantidades

$$I_g(u, \tau) = \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \int_0^t dt_1 \int_0^{t'} dt_2 g(u, \Delta t) \quad (5.30a)$$

e

$$I_k(u, \tau) = \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \int_0^t dt_1 \int_0^{t'} dt_2 k(u, \Delta t), \quad (5.30b)$$

com os núcleos

$$g(u, \Delta t) = \frac{1}{[u^2 - \Delta t^2]^2} \quad (5.31a)$$

e

$$k(u, \Delta t) = \frac{1}{[u^2 - \Delta t^2]^2} - \frac{4u^2}{[u^2 - \Delta t^2]^3}, \quad (5.31b)$$

cujos resultados são, respectivamente,

$$I_g(u, \tau) = \frac{\tau^2}{6u^2} + \frac{\tau^3}{12u^3} \ln \left( \frac{\tau + u}{\tau - u} \right)^2 + \frac{1}{12} \ln \left( \frac{\tau^2 - u^2}{u^2} \right)^2 \quad (5.32a)$$

e

$$I_k(u, \tau) = \frac{\tau^2}{6u^2} - \frac{\tau^3}{6u^3} \ln \left( \frac{\tau + u}{\tau - u} \right)^2 + \frac{1}{12} \ln \left( \frac{\tau^2 - u^2}{u^2} \right)^2, \quad (5.32b)$$

para  $\Delta t = (t_1 - t_2)$ . A motivação para a definição dos núcleos  $k(u, \Delta t)$  e  $g(u, \Delta t)$  parte da percepção de que suas estruturas matemáticas são semelhantes as estruturas gerais resultantes das segundas derivadas da FWFP em nossas expressões.

Substituindo (5.9) na Eq. (5.29) encontramos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)} &= \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \int_0^t dt_1 \int_0^{t'} dt_2 \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(i)} k(2an, \Delta t) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} k(2x_n, \Delta t) \right] \\ &= \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(i)} I_k(2an, \tau) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} I_k(2x_n, \tau) \right]. \end{aligned} \quad (5.33)$$

onde foi identificada a definição do núcleo  $k(u, \Delta t)$ , Eq. (5.31b), com  $u = (2an, 2x_n)$ , e em seguida a definição da integral  $I_k$ , Eq. (5.32b). Portanto, utilizando o resultado (5.32b), após alguma álgebra e organização das expressões resultantes é possível mostra que

$$\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)} = \frac{g^2}{24\pi^2 m^2} \left[ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(i)} A(n, \tau_a) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} A(x_a - n, \tau_a) \right], \quad (5.34)$$

onde por praticidade definiram-se as funções auxiliares

$$A(r, \tau_a) = D(r, \tau_a) + E(r, \tau_a) + H(r, \tau_a), \quad (5.35a)$$

$$D(r, \tau_a) = \ln \left( \frac{\tau_a^2 - 4r^2}{4r^2} \right)^2, \quad (5.35b)$$

$$E(r, \tau_a) = \frac{\tau_a^2}{2r^2}, \quad (5.35c)$$

e

$$H(r, \tau_a) = \frac{-\tau_a^3}{4r^3} \ln \left( \frac{\tau_a + 2r}{\tau_a - 2r} \right)^2. \quad (5.35d)$$

A Eq. (5.34) corresponde a dispersão para a coordenada  $x$ , a qual é perpendicular aos planos. As Eqs. (5.34) e (5.35) estão escritas em termos dos parâmetros adimensionais  $\tau_a$  e  $x_a$ , nessa ordem, definidos pelas Eqs. (5.15a) e (5.15b).

De forma similar, para a componente paralela aos planos, a partir das Eqs. (5.29) e (5.16), identificando os núcleos  $g$  e as devidas integrais  $I_g$ , temos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{y})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)} &= \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \int_0^t dt_1 \int_0^{t'} dt_2 \left[ \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(i)} g(2an, \Delta t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} g(2x_n, \Delta t) \right] \\ &= \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \left[ \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(i)} I_g(2an, \tau) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} I_g(2x_n, \tau) \right], \end{aligned} \quad (5.36)$$

que através da Eq. (5.32a) nós permite encontrar

$$\langle (\Delta \hat{y})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)} = \frac{g^2}{24\pi^2 m^2} \left[ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(i)} \bar{A}(n, \tau_a) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} \bar{A}(x_a - n, \tau_a) \right], \quad (5.37)$$

com a função auxiliar

$$\bar{A}(r, \tau_a) = D(r, \tau_a) + E(r, \tau_a) - \frac{1}{2} H(r, \tau_a) \quad (5.38)$$

e as funções  $D$ ,  $E$  e  $H$  dadas pelas Eqs. (5.35b), (5.35c) e (5.35d), respectivamente.

A partir dos resultados (5.34) e (5.37), novamente observa-se a presença das divergências, que ocorreram anteriormente para as dispersões de velocidade, Eqs. (5.13) e (5.18), quando  $\tau_a = 2n$  e  $\tau_a = 2|x_a - n|$ . Entretanto, diferente da situação anterior, nota-se que no presente caso a componente paralela aos planos é regular. Isso é facilmente observado a partir da estrutura matemática das funções auxiliares  $A$  e  $\bar{A}$ , as quais, para o presente propósito, podem ser escritas como:

$$A(r, \tau_a) = \frac{\tau_a^2}{2r^2} - \frac{\tau_a^3}{4r^3} \ln(\tau_a + 2r)^2 + \ln\left(\frac{\tau_a + 2r}{4r^2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\tau_a^3}{4r^3}\right) \ln(\tau_a - 2r)^2 \quad (5.39a)$$

e

$$\bar{A}(r, \tau_a) = \frac{\tau_a^2}{2r^2} + \frac{\tau_a^3}{8r^3} \ln(\tau_a + 2r)^2 + \ln\left(\frac{\tau_a + 2r}{4r^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\tau_a^3}{8r^3}\right) \ln(\tau_a - 2r)^2. \quad (5.39b)$$

Analisando as expressões acima constata-se que a divergência tem origem no último termo do lado direito, quando  $\tau_a = 2r$ . Contudo, no caso de  $\bar{A}$ , Eq. (5.39b), o fator multiplicativo cancela a divergência, em virtude da diferença de sinais, algo que não acontece para  $A$ , conforme observa-se na Eq. (5.39a).

Anteriormente, foi admitido, sem muitos detalhes, que o regime de velocidades que estudamos deve ser tal que o movimento da partícula Browniana é lento o suficiente para desprezar as possíveis dependências temporais nas coordenadas espaciais da partícula – confira o parágrafo seguinte a Eq. (5.6). Portanto, as expressões para a dispersão de velocidades são válidas para velocidades que satisfazem esse critério. Conforme adiantado, essa hipótese, a qual nos referimos como condição de pequenos deslocamentos, terá alguns impactos sobre os nossos resultados.

Intuitivamente, a premissa de que a posição da partícula deve variar lentamente, nos diz que a dispersão, definida nas Eqs. (4.41) e (4.42), deve ser minimizada. De fato, de acordo com o conceito desta grandeza ela estima o espalhamento das medidas de uma grandeza distribuídas em torno de seu valor médio. Portanto, se as variações da posição da partícula são tomadas como mínimas, isto quer dizer que os valores estão distribuídos nas proximidades do valor médio, logo, neste caso, a dispersão tende a ser mínima. Matematicamente, a condição de pequenos deslocamentos pode ser expressa pela relação [22, 30]

$$\frac{|\langle (\Delta \hat{x}_i)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(j)}|}{x^2} \ll 1, \quad (5.40)$$

a qual qualitativamente nos diz que o módulo da dispersão da posição relativa deve ser muito menor que a unidade.

Uma maneira direta para verificar a validade da condição (5.40) é dividir as Eqs. (5.34) e (5.37) por  $x^2$  e traçar o gráfico das expressões resultantes, além de observar as influências dos parâmetros livres das expressões, que na ocasião correspondem as grandezas  $g$ ,  $m$ ,  $x_a$  e  $\tau_a$ . Portanto, procedendo dessa forma e definindo o parâmetro de carga adimensional

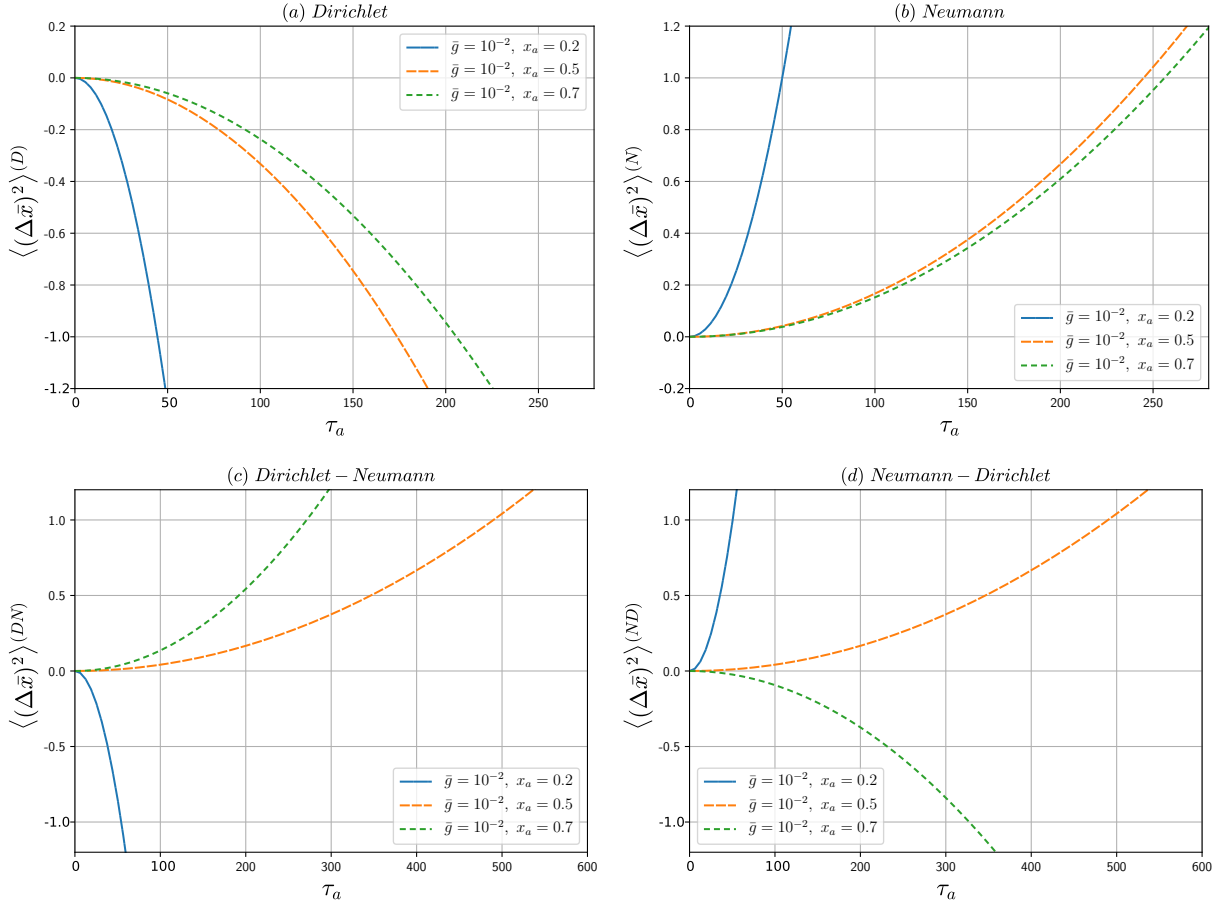
$$\bar{g} = \frac{g}{am}, \quad (5.41)$$

na Figura 28 é mostrado o comportamento da dispersão relativa (5.40) para a coordenada  $x$  em função do tempo  $\tau_a$ , considerando como exemplo o valor  $\bar{g} = 10^{-2}$  e diferentes valores de  $x_a$ . Com base nesse raciocínio, podemos concluir que o limite superior da condição (5.40) será definido pelo ponto de intersecção entre as curvas da dispersão relativa e as linhas horizontais  $\pm 1$ . Portanto, em virtude da condição de pequenos deslocamentos, os valores aceitáveis de tempo  $\tau_a$  devem estar abaixo do valor fixado pelo ponto de intersecção. Se estes critérios são satisfeitos, a condição (5.40) encontra boa margem de validade.

Na Tabela 4, Parte A, também mostramos os valores aproximados de  $\tau_a$  para o limite superior da condição de pequenos deslocamentos, os quais foram extraídos graficamente. Para aferir esses valores utilizamos um procedimento muito primitivo, que consiste em realizar um “zoom” no ponto de intersecção entre a dispersão relativa e as linhas horizontais  $\pm 1$ . Contudo, apesar do método grosseiro empregado, este oferece uma concordância razoável para os nossos resultados, além de permitir extrair conclusões aceitáveis. Também, afim de mostrar o efeito que o parâmetro  $\bar{g}$  possui sobre os resultados, o caso particular  $\bar{g} = 10^{-3}$  foi adicionado. Observando os dados da tabela percebe-se imediatamente que, quanto menor o valor assumido para  $\bar{g}$ , maior será o valor para o limite superior de  $\tau_a$ .

Uma expressão analítica que prevê os devidos valores (aproximados) de  $\tau_a$ , exibidos na Parte A da Tabela 4, pode ser obtida através das expressões para a dispersão da coordenada de posição perpendicular aos planos no regime de tempos longos. Utilizando os

Figura 28 – Comportamento da dispersão relativa em função do tempo  $\tau_a$  para a coordenada perpendicular aos planos paralelos.



Legenda: Conforme as legendas, cada uma das curvas mostradas acima considera um valor particular para  $x_a$ , mas todas admitem o mesmo valor para o parâmetro  $\bar{g} = \frac{g}{ma} = 10^{-2}$ . Por questões de simplicidade definiu-se o rótulo  $\langle (\Delta \bar{x})^2 \rangle^{(j)} := \frac{\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(j)}}{x^2}$  para o eixo vertical. Fonte: produzido pelo autor, 2024.

resultados do Apêndice C.4, podemos mostrar que no regime de tempos longos a condição (5.40) nos permite extrair a seguinte relação:

$$\tau_a^{(j)} \ll \frac{4\sqrt{3}x_a}{\bar{g}\sqrt{|h^{(j)}(x_a)|}}, \quad (5.42)$$

onde para as condições de Dirichlet e Neumann

$$h^{(J)}(x_a) = -1 + \delta^{(J)}3 \csc^2(\pi x_a) \quad (5.43a)$$

e para as condições mistas

$$h^{(M)}(x_a) = \frac{1}{2} - \delta^{(M)}3 \cot(\pi x_a) \csc(\pi x_a), \quad (5.43b)$$

com os coeficientes  $\delta^{(J)} = [\delta^{(D)}, \delta^{(N)}] = [-1, +1]$  e  $\delta^{(M)} = [\delta^{(DN)}, \delta^{(ND)}] = [+1, -1]$ .

Tabela 4 – Valores do limite superior para o tempo  $\tau_a^{(j)}$ , para a dispersão da coordenada perpendicular aos planos, considerando diferentes valores para os parâmetros  $\bar{g}$  e  $x_a$ .

| Parte A   |       |             |             |             |             |
|-----------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\bar{g}$ | $x_a$ | (D)         | (N)         | (DN)        | (ND)        |
| $10^{-2}$ | 0.2   | 44.52456    | 49.98398    | 54.24018    | 50.50610    |
| $10^{-2}$ | 0.5   | 173.81479   | 244.95202   | 490.01965   | 489.90280   |
| $10^{-2}$ | 0.7   | 205.75056   | 256.18831   | 271.36713   | 327.39830   |
| $10^{-3}$ | 0.2   | 445.87440   | 499.89202   | 542.43711   | 505.11814   |
| $10^{-3}$ | 0.5   | 1,737.32398 | 2,449.49068 | 4,900.14736 | 4,898.98026 |
| $10^{-3}$ | 0.7   | 2,056.86223 | 2,561.88441 | 2,713.66182 | 3,274.03633 |
| Parte B   |       |             |             |             |             |
| $10^{-2}$ | 0.2   | 44.52863    | 49.98932    | 54.24540    | 50.51258    |
| $10^{-2}$ | 0.5   | 173.20508   | 244.94897   | 489.89794   | 489.89794   |
| $10^{-2}$ | 0.7   | 205.23990   | 256.18834   | 271.35622   | 327.40381   |
| $10^{-3}$ | 0.2   | 445.28630   | 499.89321   | 542.45403   | 505.12585   |
| $10^{-3}$ | 0.5   | 1,732.05080 | 2,449.48974 | 4,898.97948 | 4,898.97948 |
| $10^{-3}$ | 0.7   | 2,052.39909 | 2,561.88346 | 2,713.56226 | 3,274.03813 |

Legenda: As Partes A e B, nessa ordem, mostram os resultados obtidos graficamente e utilizando a Eq. (5.42), para as condições de Dirichlet (D), Neumann (N), Dirichlet-Neumann (DN) e Neumann-Dirichlet (ND). Aqui, por simplicidade e conveniência matemática, consideramos cinco casas decimais após a vírgula. Fonte: produzido pelo autor, 2024.

A partir da Eq. (5.42) nota-se imediatamente que os parâmetros adimensionais  $\tau_a$  e  $\bar{g}$  são inversamente proporcionais, logo, reforçando o comentário anterior de que, reduzindo  $\bar{g}$  aumenta-se o valor limite para  $\tau_a$ . A Parte B da Tabela 4 mostra os valores obtidos através da Eq. (5.42), os quais apresentam uma concordância razoável com os resultados encontrados graficamente, expostos na Parte A. É importante enfatizar que a Eq. (5.42) decorre de uma aproximação, assim uma concordância precisa não é esperada. Entretanto, nota-se que as discrepâncias, entre os valores fornecidos por ambos os métodos citados, são relativamente pequenas. Logo, para os propósitos do presente trabalho tais valores são suficientes, uma vez que revelam a ordem de grandeza correta dos valores de tempo necessários para a análise de validade dos resultados.

Levando em conta as discussões anteriores, para finalizar essa subseção, vamos analisar a validade dos nossos resultados. Na Seção 5.3.1 estudamos a dispersão de velocidades da partícula na presença dos planos paralelos, cujos comportamentos estão mostrados nas Figuras 24 e 25, para o intervalo de tempo  $0 \leq \tau_a \leq 2$ . Para a discussão seguinte, vamos considerar, por exemplo, o caso particular definido pela configuração dos parâmetros  $\bar{g} = 10^{-3}$  e  $x_a = 0.5$ , ou seja, uma situação em que a carga adimensional tem um valor da ordem de  $10^{-3}$  e a partícula está situada no ponto médio entre os planos. Nesse caso, diante dos valores expostos na Tabela 4, nota-se que, o intervalo de tempo

$\Delta\tau_a = 2$ , usado nos gráficos de  $\langle(\Delta\hat{v}_i)^2\rangle_{\text{ren}}^{(j)}$ , corresponde aproximadamente a 0,115%, 0,082% e 0,041% dos valores limites para as condições de Dirichlet, Neumann e Mistas. Esses valores percentuais,  $P_{\Delta\tau_a}$ , são obtidos através da expressão

$$P_{\Delta\tau_a} = \frac{\Delta\tau_a \times 100\%}{\tau_a^{(j)}}, \quad (5.44)$$

onde  $\Delta\tau_a$  corresponde ao intervalo de tempo usado no gráfico de  $\langle(\Delta\hat{v}_i)^2\rangle_{\text{ren}}^{(j)}$  e  $\tau_a^{(j)}$  representa o valor do limite superior que  $\tau_a^{(j)}$ , Tabela 4, pode atingir para as diferentes condições de contorno (j=D, N, DN e ND).

Em síntese, o intervalo utilizado  $\Delta\tau_a = 2$ , para a configuração  $\bar{g} = 10^{-3}$  e  $x_a = 0.5$ , está inserido no intervalo percentual aproximado 0.04% – 0.12%. Esse intervalo percentual, em todos os casos menor que 1%, mostra que os nossos resultados satisfazem a condição de pequenos deslocamentos com boa margem de aplicabilidade. Para fins de exemplo e complemento das discussões, se a configuração  $\bar{g} = 10^{-2}$  e  $x_a = 0.5$  é admitida, através de uma análise similar constata-se que,  $\Delta\tau_a = 2$  está em um intervalo percentual um pouco maior, a saber, 0.4% – 1.2% (uma ordem de grandeza maior).

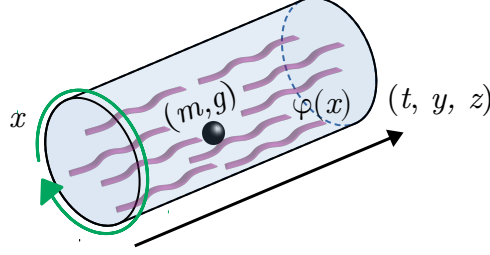
Os dados apresentados expõem nitidamente que o parâmetro  $\bar{g}$ , para quaisquer condições de contorno, tem um papel fundamental quanto à validade dos resultados, uma vez que reduzindo o seu valor maior será a margem de aplicabilidade e confiança dos resultados. É importante destacar que na Ref. [30] os autores obtiveram uma conclusão semelhante, estudando o MBQI de uma partícula por um campo escalar sem massa em  $(1 + 1)$  dimensões no espaço-tempo de Minkowski, sob condições de Dirichlet. Finalmente, gostaríamos de enfatizar que os resultados discutidos anteriormente são aproximados, mas têm seu mérito, visto que nos permitem obter conclusões apuradas e coerentes com casos encontrados na literatura.

## 5.4 Confinamento por compactificação

### 5.4.1 Estudo da dispersão de velocidades

Nessa seção vamos estudar o MBQI de uma partícula interagindo com um campo escalar sem massa sujeito à condição de contorno do tipo quasiperiódica, no espaço-tempo de Minkowski em  $(3 + 1)$  dimensões. Esse sistema está representado didaticamente na Figura 29, a qual mostra que a condição de quasiperiodicidade está associada a coordenada espacial  $x$  (compactificada em uma região de comprimento  $a$ ). Desde já frisamos que, em virtude das semelhanças com os desenvolvimentos anteriores, as passagens matemáticas análogas serão realizadas sem maiores detalhes, ou até mesmo omitidas, quando idênticas.

Figura 29 – Partícula pontual de massa  $m$  e carga  $g$  interagindo com um campo escalar sem massa  $\varphi$  confinado unidimensionalmente por uma condição de quasiperiodicidade.



Legenda: Os modos do campo escalar  $\varphi(x)$  são tais que obedecem a condição de quasiperiodicidade (3.29), a qual está associada à coordenada cartesiana  $x$ , que possui um comprimento de compactificação  $a$ . Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Conforme os estudos da Seção 5.3.1, observando que para a coordenada associada à compactificação temos, no limite de coincidência espacial,

$$\left. \frac{\partial^2 W_{\text{ren}}^{(\beta)}}{\partial x \partial x'} \right|_{x'=x} = \frac{1}{2\pi^2} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi\beta ni} \left\{ \frac{1}{[(an)^2 - \Delta t^2]^2} - \frac{4(an)^2}{[(an)^2 - \Delta t^2]^3} \right\}, \quad (5.45)$$

a partir das Eqs. (5.8), (5.45) e da identidade (5.11), segue que

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} = \frac{g^2}{\pi^2 m^2} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi\beta ni} \int_0^\tau d\eta (\tau - \eta) \left\{ \frac{1}{[(an)^2 - \eta^2]^2} - \frac{4(an)^2}{[(an)^2 - \eta^2]^3} \right\}. \quad (5.46)$$

Utilizando os resultados (5.12a) e (5.12b), com  $r \equiv \frac{an}{2}$ , podemos resolver diretamente a Eq. (5.46). Então, após algumas simplificações algébricas e organização das expressões resultantes, podemos escrever

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} = -\frac{g^2}{\pi^2 m^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} U(n, \beta, \tau_a), \quad (5.47)$$

com as funções auxiliares

$$U(n, \beta, \tau_a) = S(n, \beta, \tau_a) + T(n, \beta, \tau_a), \quad (5.48a)$$

$$S(n, \beta, \tau_a) = \frac{\tau_a^2 \cos(2\pi\beta n)}{n^2(n^2 - \tau_a^2)} \quad (5.48b)$$

e

$$T(n, \beta, \tau_a) = \frac{\tau_a \cos(2\pi\beta n)}{2n^3} \ln \left( \frac{n + \tau_a}{n - \tau_a} \right)^2. \quad (5.48c)$$

A Eq. (5.47) corresponde a dispersão de velocidades associada à componente  $x$ , que é a coordenada espacial sujeita à compactificação.

Nota-se que, no presente caso, a dispersão depende exclusivamente do parâmetro de quasiperiodicidade  $\beta$  e do tempo adimensional  $\tau_a = \frac{\tau}{a}$ , o qual é definido conforme a Eq. (5.15a), mas no presente caso  $a$  representa o comprimento da compactificação. O comportamento de  $\langle(\Delta\hat{v}_x)^2\rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}$  como função de  $\tau_a$  está exposto na Figura 30, para diferentes valores de  $\beta$ . Devemos observar que, semelhante ao caso estudado na subseção anterior, o confinamento nos forneceu uma escala natural para o sistema, que na ocasião corresponde ao comprimento da compactificação, permitindo-nos estimar o tempo em unidades de  $a$ .

Em paralelo ao caso dos planos refletos, antes de iniciarmos as discussões vamos encontrar a dispersão associada a coordenada não compactificada. Para a coordenada  $y$ , considerando a Eq. (5.8) com  $i = y$  e o resultado da dupla derivada, no limite de coincidência espacial,

$$\left.\frac{\partial^2 W_{\text{ren}}^{(\beta)}}{\partial y \partial y'}\right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi\beta ni} \frac{1}{[(an)^2 - \Delta t^2]^2}, \quad (5.49)$$

por meio da identidade (5.11), encontramos que

$$\langle(\Delta\hat{v}_y)^2\rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} = \frac{g^2}{\pi^2 m^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi\beta ni} \int_0^\tau d\eta (\tau - \eta) \frac{1}{[(an)^2 - \eta^2]^2}.$$

Então, utilizando a Eq. (5.12a) a integral anterior pode ser resolvida sem muitos esforços, permitindo-nos escrever, com as devidas simplificações,

$$\langle(\Delta\hat{v}_y)^2\rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} = \frac{g^2}{2\pi^2 m^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} T(n, \beta, \tau_a), \quad (5.50)$$

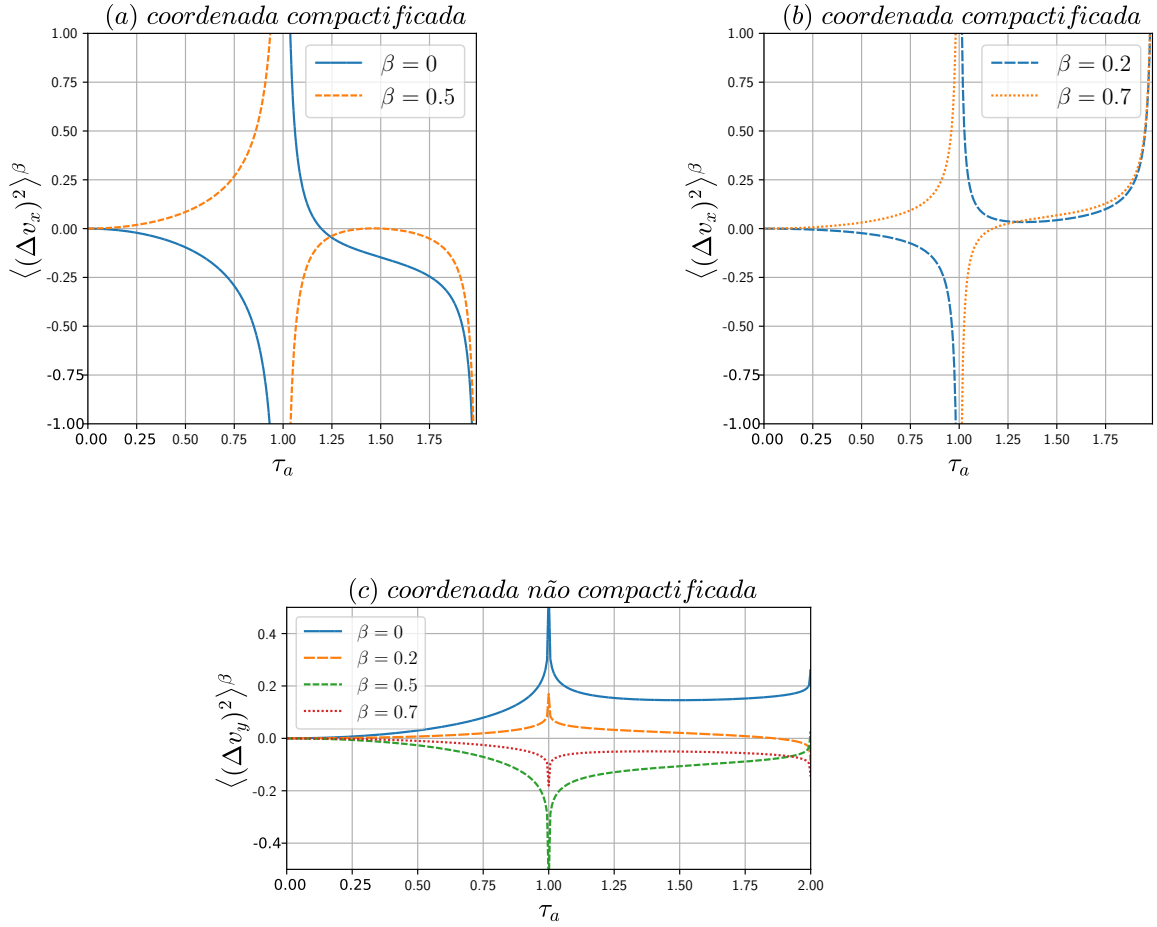
onde utilizamos a definição da função  $T(n, \beta, \tau_a)$ , Eq. (5.48c). A Eq. (5.50) corresponde a dispersão de velocidades da partícula referente à direção não compactificada  $y$  (o mesmo resultado segue para a componente  $z$ , bastando fazer a troca de rótulos). O comportamento da Eq. (5.50) em função do tempo  $\tau_a$  está exposto na Figura 30. Além disso, semelhante à Eq. (5.47), a dispersão  $\langle(\Delta\hat{v}_y)^2\rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}$  depende inteiramente dos parâmetros  $\beta$  e  $\tau_a$ .

Observando as Eqs. (5.47) e (5.50) nota-se que, em oposição ao sistema de planos paralelos, Figura 23 e Eqs. (5.13) e (5.18), as dispersões para o caso das condição quasiperiódica não possuem qualquer dependência com as coordenadas espaciais do modelo (ex.  $x$ ,  $y$  ou  $z$ ). A razão dessa independência se deve ao fato de que a condição quasiperiódica compacta todo o eixo  $x$  em um tamanho finito  $a$ , permitindo que os modos se propaguem por toda a extensão desse espaço compacto. Por outro lado, no caso dos planos paralelos, com condições de Dirichlet, Neumann e mistas, os modos também são confinados em uma região de tamanho  $a$ , mas a coordenada  $x$  não existe fora dessa região finita.

Tendo em vista que as condições de quasiperiodicidade também funcionam como uma espécie de confinamento para os modos do campo escalar, como sabemos das discussões anteriores, consequentemente, divergências são esperadas. A partir das estruturas

matemáticas das Eqs. (5.47) e (5.50), especificamente, Eqs. (5.48b) e (5.48c), pode-se concluir que as dispersões possuem divergências associadas aos valores inteiros de tempo, isto é, quando  $\tau_a = n$ . Estas divergências podem ser observadas na Figura 30, por exemplo, para os valores particulares  $\tau_a = 1$  e  $\tau_a = 2$ .

Figura 30 – Comportamento gráfico da dispersão de velocidades para o caso das condições quasiperiódicas.



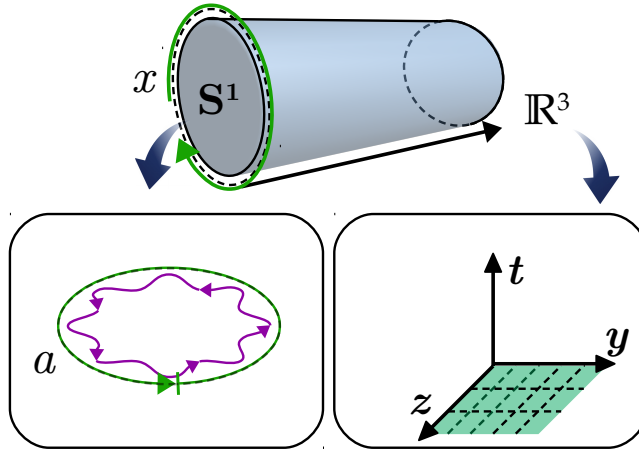
Legenda: As figuras (a) e (b) mostram os gráficos da dispersão associada a coordenada compactificada, enquanto a figura (c) exibe o gráfico da coordenada não compactificada. As componentes  $y$  e  $z$  são similares. As legendas em cada caso indicam os valores particulares assumidos para a constante  $\beta$ . Todas as curvas foram traçadas considerando unidades de  $\langle (\Delta v_{x,y})^2 \rangle^\beta = \langle (\Delta \hat{v}_{x,y})^2 \rangle_{\text{ren}}^\beta \left( \frac{ma}{g} \right)^2$ . Os bicos mostrados pelas figuras representam pontos de descontinuidade. Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Neste momento é oportuno fazermos um breve comentário sobre os efeitos de cada parâmetro na condição de quasiperiodicidade. A compactificação da coordenada  $x$ , introduzida pelo comprimento  $a$ , produz as divergências temporais observadas. Já o efeito da quasiperiodicidade no campo escalar, inserida através da fase proporcional a  $\beta$ , produz uma modulação dos resultados, permitindo que os mesmos adquiram valores

positivos ou negativos. Todos estes aspectos podem ser verificados na Figura 30. Como sabemos, os valores  $\beta = 0$  e  $\beta = \frac{1}{2}$  correspondem aos casos particulares do campo escalar (e consequentemente do MBQI) sob condições periódicas e antiperiódicas. Na linguagem das Refs. [119] e [120], a condição quasiperiódica nos permite interpolar continuamente os resultados entre os casos periódico e antiperiódico.

Embora a natureza do sistema quasiperiódico seja diferente do modelo com planos paralelos, a interpretação dessas singularidades são semelhante ao que foi discutido anteriormente. Entretanto, motivados pela topologia  $S^1 \times \mathbb{R}^3$  do espaço compactificado, Figura 31, torna-se conveniente interpretar as divergências  $\tau_a = n$  como o tempo que um sinal luminoso gasta para realizar uma volta completa (ou múltiplas) na circunferência de comprimento  $a$  – Figura 31, quadro inferior esquerdo. É instrutivo comentar que interpretações e resultados similares foram discutidos na Ref. [17] para o MBQI de uma partícula devido as flutuações quânticas de um campo eletromagnético, cuja seção espacial do espaço-tempo possui uma topologia não trivial conhecida como  $E^{16}$ , a qual em essência é estabelecida utilizando a função de dois pontos (3.86), com a seção espacial (3.87). Para mais detalhes consulte a fonte original.

Figura 31 – Ilustração do espaço-tempo de Minkowski com uma dimensão espacial compactificada.



Legenda: O espaço-tempo completo possui uma topologia  $S^1 \times \mathbb{R}^3$ . Na imagem (superior) a coordenada  $x$  está compactificada em uma região de comprimento finito  $a$ , cuja topologia é do tipo  $S^1$  (quadro inferior esquerdo), por outro lado as demais coordenadas compõem um espaço do tipo  $\mathbb{R}^3$  (quadro inferior direito). Fonte: produzido pelo autor, 2024.

De forma a manter o paralelo em nossas investigações, vamos analisar as dispersões para os regimes de tempos pequenos e longos. Para o regime de tempos pequenos, isto é,  $\tau_a \ll 1$ , a partir da Eq. (5.47) e dos resultados do Apêndice C.3, a dispersão de velocidades na direção compactificada é dada, aproximadamente, por

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} \simeq \frac{g^2 \tau_a^2 \pi^2}{m^2 a^2} B_4(\beta), \quad (5.51)$$

onde  $B_n(z)$  corresponde ao polinômio de Bernoulli de ordem  $n$  na variável  $z$  [75]. Embora a Eq. (5.51) seja geral, do ponto de vista didático, é pertinente destacarmos as expressões referentes os casos particulares periódico (p) e antiperiódico (ap). Logo, usando o fato de que  $B_4(0) = -\frac{1}{30}$  e  $B_4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{240}$ , segue que

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(p)} \simeq -\frac{g^2 \tau_a^2 \pi^2}{30m^2 a^2} \quad (5.52a)$$

e

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(ap)} \simeq \frac{7g^2 \tau_a^2 \pi^2}{240m^2 a^2}. \quad (5.52b)$$

Analogamente, utilizando os resultado do Apêndice C.3, podemos mostra que, a partir da Eq. (5.50), a dispersão de velocidades associada a direção não compactificada será dada pela expressão

$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} \simeq -\frac{g^2 \tau_a^2 \pi^2}{3m^2 a^2} B_4(\beta), \quad (5.53)$$

com

$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(p)} \simeq \frac{g^2 \tau_a^2 \pi^2}{90m^2 a^2} \quad (5.54a)$$

para o caso periódico e

$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(ap)} \simeq -\frac{7g^2 \tau_a^2 \pi^2}{720m^2 a^2} \quad (5.54b)$$

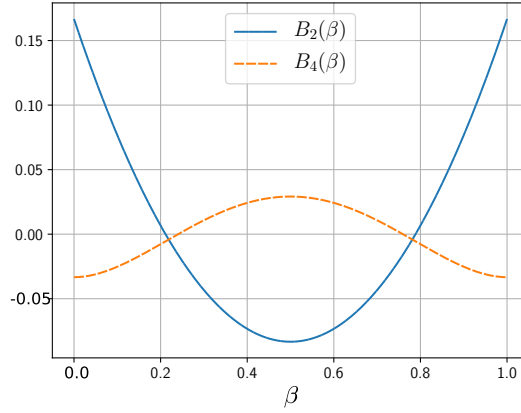
para o caso antiperiódico.

As Eqs. (5.51) e (5.53) revelam que, semelhante ao caso dos planos paralelos, todas as componentes da dispersão de velocidades no regime  $\tau_a \ll 1$  são proporcionais a  $\tau_a^2$ . Além disso, nesse regime, nota-se que, as dispersões de velocidades associadas as direções não compactificas e compactificada possuem uma relação tal que  $\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} = -\left(\frac{1}{3}\right) \langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}$ .

Em virtude da proporcionalidade com o polinômio de Bernoulli  $B_4(\beta)$  o sinal das dispersões de velocidades nesse regime depende diretamente do valor que o parâmetro de quasiperiodicidade  $\beta$  assume. Conforme exposto na Figura 32,  $B_4(\beta)$  pode assumir valores tanto positivos como negativos. De acordo com as raízes da equação

$$B_4(\beta) = \beta^2(\beta - 1)^2 - \frac{1}{30} = 0,$$

observa-se que  $B_4(\beta) > 0$  apenas para os valores de  $\beta$  no intervalo  $\beta_- \leq \beta \leq \beta_+$ , com  $\beta_{\pm} = [1 \pm (1 - 4r)^{1/2}]/2$  e  $r = 1/\sqrt{30}$ . É importante assinalar que, em princípio,  $B_4(\beta) = 0$  possui quatro raízes, porém as únicas raízes compatíveis com a física do problema são  $\beta_{\pm}$ , dado que não contradizem a definição inicial  $0 \leq \beta < 1$ . Para  $\tau_a \ll 1$ , a Eq. (5.51) em conjunto com a Figura 32 nos mostra que,  $\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}$  atinge seu valor máximo e mínimo quando  $\beta = \frac{1}{2}$  e  $\beta = 0$ , respectivamente. Por outro lado,  $\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}$ , Eq. (5.53), atinge seu valor máximo para  $\beta = 0$  e mínimo para  $\beta = \frac{1}{2}$ .

Figura 32 – Comportamento dos polinômios de Bernoulli  $B_2(\beta)$  e  $B_4(\beta)$  como função de  $\beta$ .

Legenda: De acordo com as definições, o parâmetro de quasiperiodicidade  $\beta$  pode assumir valores tais que  $0 \leq \beta < 1$ . Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Adotando as mesmas justificativas apresentadas anteriormente, também é do nosso interesse estudar as dispersões de velocidades no regime de tempos longos, a fim de completar as análises dos regimes assintóticos. Considerando os resultados do Apêndice C.2, a dispersão de velocidades associada a direção  $x$  no regime  $\tau_a \gg 1$  é dada, aproximadamente, pela expressão

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} \simeq -\frac{g^2}{\pi^2 m^2 a^2} \left[ \pi^2 B_2(\beta) + \frac{1}{6\tau_a^2} \right], \quad (5.55)$$

com o casos especiais

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\text{p})} \simeq -\frac{g^2}{6\pi^2 m^2 a^2} \left[ \pi^2 + \frac{1}{\tau_a^2} \right] \quad (5.56a)$$

e

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\text{ap})} \simeq -\frac{g^2}{6\pi^2 m^2 a^2} \left[ -\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{\tau_a^2} \right]. \quad (5.56b)$$

Por outro lado, para a dispersão de velocidades referente a direção  $y$  (ou  $z$ ) temos

$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} \simeq \frac{g^2}{\pi^2 m^2 a^2} \left[ \pi^2 B_2(\beta) - \frac{1}{6\tau_a^2} \right], \quad (5.57)$$

com

$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\text{p})} \simeq \frac{g^2}{6\pi^2 m^2 a^2} \left[ \pi^2 - \frac{1}{\tau_a^2} \right] \quad (5.58a)$$

e

$$\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\text{ap})} \simeq -\frac{g^2}{6\pi^2 m^2 a^2} \left[ \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{\tau_a^2} \right]. \quad (5.58b)$$

As Eqs. (5.55) e (5.57) correspondem, nessa ordem, as expressões resultantes para a dispersão de velocidades associadas as direções compactificada e não compactificadas no regime de tempo  $\tau_a \gg 1$ .

Nota-se que, o segundo termo no lado direito das Eqs. (5.55) e (5.57),  $\frac{-g^2}{6\pi^2 m^2 \tau^2}$ , é desprezível frente ao regime  $\tau_a \gg 1$ , indicado que as expressões tendem para um valor constante, a saber,

$$\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\text{ap})} = -\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\text{ap})} \approx -\frac{g^2 B_2(\beta)}{m^2 a^2} \quad (\tau_a \rightarrow \infty).$$

O termo proporcional a  $\frac{1}{\tau^2}$  em ambas as dispersões, há pouco mencionado, é independente dos parâmetros de compactificação  $a$  e quasiperiodicidade  $\beta$ . Nota-se ainda que, essa pequena contribuição tende a fortalecer  $\langle (\Delta \hat{v}_x)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}$ , tornando-a mais negativa, enquanto que para  $\langle (\Delta \hat{v}_y)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}$  tende a enfraquecer o resultado.

Diferente do regime estudado anteriormente, para  $\tau_a \gg 1$  observa-se que as dispersões estão sujeitas a uma mudança de sinal e intensidade, regulada pelo parâmetro de quasiperiodicidade  $\beta$ , através do polinômio de Bernoulli  $B_2(\beta)$ , cujo comportamento é mostrado na Figura 32. Um resultado interessante a ser destacado consiste no fato de que para os valores específicos  $\beta = (3 \pm \sqrt{3})/6$ , os quais são raízes da equação  $B_2(\beta) = \beta(\beta - 1) + \frac{1}{6} = 0$ , a contribuição dependente do tempo define o sinal de ambas as dispersões e, na medida em que  $\tau_a \gg 1$ , estas tornam-se nulas. Por fim, gostaríamos de mencionar que os resultados negativos obtidos nessa seção, para as dispersões de velocidades, são justificados conforme a Seção 5.3.1 – para recordar consulte a discussão seguinte a Eq. (5.24).

#### 5.4.2 Estudo da dispersão na posição e condição de pequenos deslocamentos

Para calcular a dispersão das coordenadas não compactificadas e compactificada seguimos uma metodologia similar a que foi empregada na Seção 5.3.2. Inicialmente, utilizamos a expressão geral (5.29) em conjunto com as derivadas (5.45) e (5.49). Em seguida, identificamos as devidas integrais, definidas em (5.30) com os núcleos (5.31), e usamos as igualdades (5.32) para estabelecer cada resultado.

A partir das Eqs. (5.29) e (5.45), com o auxílio das Eqs. (5.31b) e (5.30b), para a coordenada compactificada  $x$ , temos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} &= \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \int_0^t dt_1 \int_0^{t'} dt_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi\beta ni} \kappa(an, \Delta t), \\ &= \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi\beta ni} I_k(an, \tau). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Recorrendo ao resultado (5.32b), podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} &= \left( \frac{g}{\pi m} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi\beta n) \left[ \frac{\tau_a^2}{6n^2} + \frac{1}{12} \ln \left( \frac{\tau_a^2 - n^2}{n^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau_a^3}{6n^3} \ln \left( \frac{\tau_a + n}{\tau_a - n} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.60)$$

A Eq. (5.60) representa a dispersão para a coordenada espacial  $x$  da partícula, que corresponde a coordenada compactificada.

Procedendo da forma similar, para a coordenada não compactificada  $y$  (ou  $z$ ), as Eqs. (5.29), (5.49), (5.31a) e (5.30a) nos permitem escrever

$$\begin{aligned}\langle(\Delta\hat{y})^2\rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} &= \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \int_0^t dt_1 \int_0^{t'} dt_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi\beta ni} g(an, \Delta t), \\ &= \frac{g^2}{2\pi^2 m^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi\beta ni} I_g(an, \tau)\end{aligned}\quad (5.61)$$

Então, dispondo da Eq. (5.32a), prontamente obtém-se

$$\begin{aligned}\langle(\Delta\hat{y})^2\rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} &= \langle(\Delta\hat{z})^2\rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} \\ &= \left(\frac{g}{\pi m}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi\beta n) \left[ \frac{\tau_a^2}{6n^2} + \frac{1}{12} \ln\left(\frac{\tau_a^2 - n^2}{n^2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_a^3}{12n^3} \ln\left(\frac{\tau_a + n}{\tau_a - n}\right)^2 \right],\end{aligned}\quad (5.62)$$

que corresponde a dispersão para as coordenadas espaciais não compactificadas da partícula. Observando a Eq. (5.60) percebe-se a presença das típicas divergências  $\tau_a = n$ , que foram analisadas e devidamente justificadas quando estudamos a dispersão de velocidades da partícula – Seção 5.4.1. Em síntese, levando em conta a topologia do espaço-tempo quasiperiódico, argumentou-se que estas divergências podem ser entendidas como o tempo de viagem que um sinal luminoso gasta para realizar uma volta completa em uma circunferência de comprimento  $a$  – confira a Figura 31. Por outro lado, constata-se que a componente não compactificada (5.62) é finita para  $\tau_a = n$ . O motivo da finitude de  $\langle(\Delta\hat{y})^2\rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}$ , bem como de  $\langle(\Delta\hat{z})^2\rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}$ , para  $\tau_a = n$ , tem a mesma explicação que o caso dos planos paralelos: a combinação entre os termos logarítmicos se cancelam, eliminando a divergência.

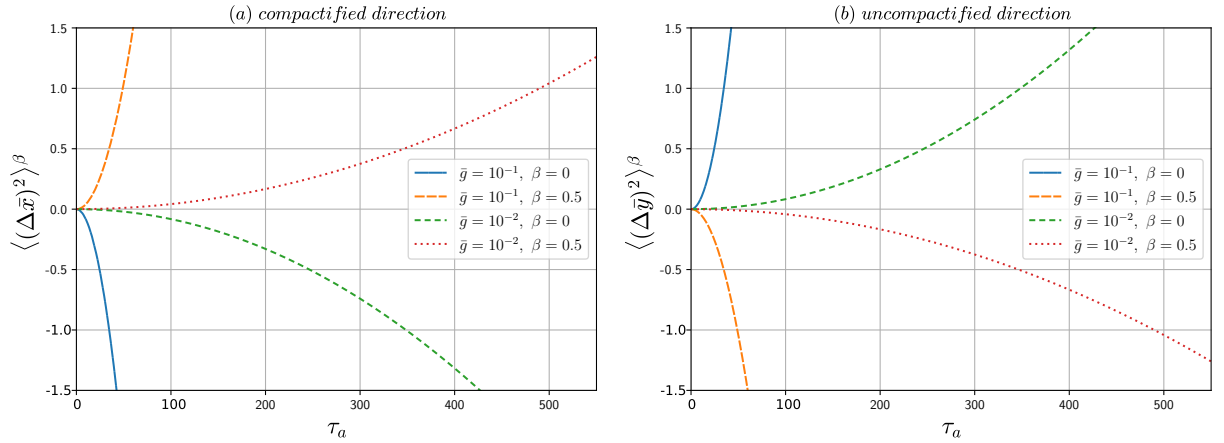
Para definir uma dispersão relativa (adimensional), a fim de analisar a condição de pequenos deslocamentos, podemos dividir a dispersão das coordenadas de posição pelo comprimento da compactificação, o qual fornece uma escala natural para as quantidades do sistema. Esse procedimento é coerente, visto que as dispersões independem de quaisquer coordenadas espaciais e o único parâmetro de comprimento disponível para comparação é o comprimento da compactificação  $a$ . Portanto, com base nas discussões realizadas na Seção 5.3.2, a condição de pequenos deslocamentos no presente caso é expressa pela relação matemática

$$\left| \frac{\langle(\Delta\hat{x}_i)^2\rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}}{a^2} \right| \ll 1, \quad (5.63)$$

com  $i = x, y, z$  e  $x_i = (x_x, x_y, x_z) = (x, y, z)$ . Além disso, desde já destaca-se que, tendo em vista as semelhanças com as investigações passadas, seremos mais objetivos quanto aos métodos empregados nas análises seguintes.

Como sabemos, das discussões anteriores, os valores de tempo  $\tau_a$  para os quais a condição (5.63) é satisfeita podem ser observados graficamente usando as Eqs. (5.60) e (5.62). Embora o método seja aproximado, este nos permite ter uma noção sobre os regimes de tempo para os quais a condição de pequenos deslocamento (5.63) é válida. Então, utilizando a definição do parâmetro de carga adimensional  $\bar{g}$ , Eq. (5.41), na Figura 33 mostramos o comportamento da dispersão relativa para as coordenadas compactificada e não compactificada, considerando valores arbitrários para  $\bar{g}$  e  $\beta$ .

Figura 33 – Comportamento da dispersão relativa em função do tempo  $\tau_a$  para as coordenadas não compactificadas e compactificada.



Legenda: Por questões de simplicidades definimos  $\langle (\Delta \bar{x}_i)^2 \rangle^{(\beta)} := \frac{\langle (\Delta \hat{x}_i)^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}}{a^2}$  para o eixo vertical. Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Conforme visto, os valores que não violam a condição (5.63) estão abaixo do ponto de intersecção entre as curvas das dispersões relativas e as linhas horizontais  $\pm 1$  na Figura 33. O valor deste ponto de intersecção fornece o limite superior da condição. Nas Colunas A e B da Tabela 5 estão expostos os valores aproximados para os pontos de intersecção entre as linhas  $\pm 1$  e as dispersões relativas das coordenadas compactificada e não compactificada, respectivamente. Diferentes valores de  $\bar{g}$  e  $\beta$  são considerados, a fim de verificar a influência de ambos os parâmetros nos resultados. Por exemplo, observando as duas primeiras linhas da Tabela 5, nota-se que, mantendo  $\bar{g}$  fixo, o parâmetro da quasiperiodicidade  $\beta$  pode aumentar moderadamente a margem de tempo para a validade da condição.

Conforme sugerido na Seção 5.3.2, considerando a expressão para a dispersão nas coordenadas no regime de tempos longos ( $\tau_a \gg 1$ ), a partir da Eqs. (5.60) e (5.62), podemos encontrar uma relação matemática que fornece uma estimativa para os valores de tempo  $\tau_a$  que limitam a validade da condição (5.63). Nesse sentido, utilizando os resultados do Apêndice C.4, podemos mostrar que os valores de tempo para os quais a

Tabela 5 – Valores aproximados para o limite superior do tempo  $\tau_a$  para as dispersões relativas associadas as componentes compactificada e não compactificada.

| $\bar{g}$ | $\beta$ | A         | B         | C         |
|-----------|---------|-----------|-----------|-----------|
| $10^{-1}$ | 0       | 34.68574  | 34.67490  | 34.64101  |
| $10^{-1}$ | 0.5     | 49.01173  | 48.97372  | 48.98979  |
| $10^{-2}$ | 0       | 348.57922 | 348.41947 | 346.41016 |
| $10^{-2}$ | 0.5     | 489.95807 | 489.95444 | 489.89794 |

Legenda: Nas colunas A e B estão dispostos os valores aproximados aferidos pelo método gráfico, para as coordenadas compactificada e não compactifica, enquanto na coluna C são mostrados os valores obtidos por meio da Eq. (5.64). Aqui, por simplicidade e conveniência matemática, consideramos cinco casas decimais após a vírgula. Fonte: produzido pelo autor, 2024.

condição (5.63) é válida estão limitados pela relação

$$\tau_a \ll \frac{\sqrt{2}}{\bar{g}\sqrt{|B_2(\beta)|}}. \quad (5.64)$$

Inicialmente nota-se que, semelhante a Eq. (5.42), os parâmetros  $\tau_a$  e  $\bar{g}$  são inversamente proporcionais. Logo, mais uma vez nos deparamos com a conclusão de que quanto menor  $\bar{g}$  maior será a margem para  $\tau_a$  e, conseqüentemente, a aplicabilidade dos resultados. A coluna C da Tabela 5 exibe os valores de  $\tau_a$  obtidos através da Eq. (5.64), os quais se mostram em concordância com os valores aproximados obtidos por meio do método gráfico (colunas A e B).

Quanto à validade dos resultados, tomando como exemplo a configuração  $\bar{g} = 10^{-2}$ , o intervalo de tempo  $\Delta\tau_a = 2$ , usado nos gráficos da Figura 30, corresponde a cerca de 0.6% e 0.4% do valor estabelecido como o limite superior de tempo para a validade da condição (5.63), para os casos periódico e antiperiódico, respectivamente. Estes valores percentuais são calculados utilizando a Eq. (5.44), com o denominador dado pelos valores de  $\tau_a$  dispostos na Tabela 5. Portanto, tendo em vista que  $\Delta\tau_a = 2$  corresponde a menos de 1% dos valores limites para  $\tau_a$ , concluímos que os resultados para a dispersão de velocidades, estudada na Seção 5.4.1, concordam de maneira satisfatória com a hipótese da condição de pequenos deslocamentos.

## 6 MBQI no universo de Einstein

Em essência, nos Capítulos 4 e 5 investigamos o MBQI em geometrias de espaço-tempo conformemente plano e plano, respectivamente. Embora no Capítulo 4 tenhamos considerado um espaço-tempo FLRW conforme com a presença de um defeito, as simetrias conformes nos permitiram transportar o cálculo para um espaço-tempo cilíndrico com um déficit angular. Em resumo, a simetria conforme facilitou as operações técnicas. No presente capítulo vamos investigar o MBQI em um cenário cuja geometria é definida pelo universo de Einstein, que é um modelo de espaço-tempo legitimamente curvo e que também admite a simetria conforme. Assim, o presente estudo oferece mais uma contribuição para a literatura sobre o tema MBQI por campos escalares, que até o nosso conhecimento ainda não havia sido explorado considerando essa geometria de espaço-tempo e, por esse motivo, culminou no conjunto de resultados publicados na Ref. [37].

### 6.1 Motivação

No Capítulo 4, antes dos desenvolvimentos necessários para a análise do MBQI, uma pequena motivação foi introduzida, objetivando justificar o estudo teórico empreendido naquele momento e amenizar a sua artificialidade. Entre as ideias apresentadas, citamos uma fonte, Ref. [41], na qual um condensado anelar em expansão foi realizado, podendo simular alguns dos efeitos que ocorrem em consequência da expansão do universo. Nesse sentido, visando sempre a padronização estrutural do texto, além de oferecer alguma motivação para os estudos desse capítulo, gostaríamos de mencionar que, um experimento com um CBE bidimensional simulando um espaço-tempo com curvatura positiva e negativa ( $k = \pm 1$ ) foi desenvolvido na Ref. [42].

Sabemos, de discussões prévias (Seção 3.4.1), que a métrica utilizada pela Cosmologia para descrever o Universo consiste na métrica FLRW – Eq. (3.88). Além disso, a seção espacial deste modelo admite apenas três hipersuperfícies com geometrias distintas, as quais são definidas pelo parâmetro de curvatura  $k$ . São estas: plana ( $k = 0$ ); fechada ou compacta ( $k = +1$ ); e hiperbólica ou aberta ( $k = -1$ ) [48, 71]. Como bem relatado por [43], embora atualmente as evidências indiquem que a geometria do Universo é plana ( $k = 0$ ), na sua fase inicial, isto é, logo após o *Big bang*, a curvatura do Universo pode ter assumido um valor diferente de zero. Em outras palavras, podemos dizer que, em seus momentos iniciais o Universo pode ter passado por fases nas quais sua geometria era fechada ( $k > 0$ ) ou hiperbólica ( $k < 0$ ). Também, segundo [44], o acesso experimental direto aos eventos que remontam à época do Universo primordial são inconcebíveis, mas esse impasse não impede o estudo de tal cenário cosmológico graças à existência dos MAGs.

Na Ref. [42] os autores propõem e investigam as propriedades de um CBE bi-dimensional harmonicamente confinado, o qual foi mostrado ser capaz de simular um espaço-tempo curvo FLRW geral, isto é, que permite reproduzir espaços com curvatura positiva e negativa. No modelo (análogo) apresentado pelos autores a curvatura espacial  $k$  é definida pela distribuição da densidade atômica do condensado. Já os efeitos de expansão (do universo) no experimento são emulados através de variações controladas no comprimento de espalhamento da onda. Entre as investigações realizadas pelos autores, com o intuito de analisar a produção dos espaços de curvatura positiva e negativa, foram observadas as propagações dos pacotes de onda (fônons) pelo condensado, os quais foram excitados através da incidência de um laser na nuvem atômica.

O exemplo sumariamente mencionado acima nos mostra que, do ponto de vista experimental, um “modelo de brinquedo” para um Universo com curvatura positiva (ou negativa) é algo realizável. Logo, encontramos boa motivação para considerar o MBQI no universo de Einstein, algo que faremos em seguida. Mais detalhes a respeito dos relatos indicados acima podem ser encontrados na fonte original [42], sobre a qual nos baseamos fundamentalmente. Também, recomendam-se as referências [43] e [44], as quais fornecem um esboço geral, didático e instrutivo das investigações contidas na Ref. [42].

## 6.2 Descrição do sistema físico e equações de movimento

A ação total  $S_{\text{tot}}$  que descreve uma partícula pontual com massa  $m_0$  interagindo com um campo escalar sem massa  $\varphi(x)$  é dada pela expressão

$$S_{\text{tot}} = S_{\text{p}} + S_{\text{int}}, \quad (6.1a)$$

com

$$S_{\text{p}} = - \int m_0 d\tau \quad (6.1b)$$

e

$$S_{\text{int}} = \int q \varphi d\tau. \quad (6.1c)$$

De acordo com os desenvolvimentos do Apêndice B.1, variando a ação  $S_{\text{tot}}$  com respeito as coordenadas  $x^\alpha$  da partícula e exigindo que  $\delta S_{\text{tot}} = 0$ , encontramos as seguintes equações de movimento:

$$m(x) \left[ \ddot{x}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right] = q \left[ -\epsilon^{-1} g^{\beta\alpha} + \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right] \nabla_\alpha \varphi(x), \quad (6.2)$$

cujos símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$  são definidos pela Eq. (2.87). O ponto sobre as coordenadas simboliza a operação da derivada com respeito ao tempo próprio  $\tau$ . A constante  $q$  representa a carga da partícula ou ainda a medida da força do acoplamento (interação) entre a partícula e o campo escalar.

O parâmetro constante  $\epsilon$ , como sabemos, trata-se de uma generalização introduzida nos desenvolvimentos e diz respeito sobre a assinatura que a métrica pode assumir: (i)  $\epsilon = +1$ , se a assinatura em questão for  $(+ - - -)$  ou (ii)  $\epsilon = -1$  quando a assinatura  $(- + + +)$  é utilizada. Observando o elemento de linha do universo de Einstein (3.96) nota-se que no presente caso  $\epsilon = +1$ . Assim, a partir da Eq. (6.2), temos

$$m(x) \left[ \frac{du^\beta}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta u^\mu u^\nu \right] = q \left[ -g^{\beta\alpha} + u^\beta u^\alpha \right] \nabla_\alpha \varphi(x), \quad (6.3)$$

onde identificamos a definição da velocidade coordenada  $u^\beta = \dot{x}^\beta = dx^\beta/d\tau$ .

Diferente do Capítulo 4, agora a massa da partícula pode variar, em virtude da sua interação com o campo escalar em um espaço-tempo curvo arbitrário. Lembre que, embora o universo de Einstein comporte a simetria conforme este não é plano e, assim, por esse motivo, a variação da massa é diferente de zero. Na ocasião, segundo as discussões do Apêndice B.1, a massa efetiva em (6.3) é definida pela relação [108]

$$m(x) = m_0 - q\varphi(x) \quad (6.4a)$$

e obedece a equação diferencial

$$\frac{dm(x)}{d\tau} = -q\dot{x}^\alpha (\nabla_\alpha \varphi) = -qu^\alpha (\nabla_\alpha \varphi). \quad (6.4b)$$

Em (6.4a)  $m_0$  corresponde a massa constante da partícula, ou seja, o valor que a mesma teria sem a interação com o campo escalar.

Diante das Eqs. (6.3) e (6.4b), podemos escrever

$$\frac{dp^\beta}{d\tau} + m\Gamma_{\mu\nu}^\beta u^\mu u^\nu = -qg^{\beta\alpha} \nabla_\alpha \varphi + f_{\text{ext}}^\beta. \quad (6.5)$$

Na expressão acima, foi identificada a definição do momento coordenado  $p^\beta = mu^\beta$ . O termo de força externa  $f_{\text{ext}}^\beta$  foi adicionado com o intuito de incluir na descrição do sistema os efeitos de possíveis interações externas.

Em virtude da contração de índices presente no lado esquerdo da Eq. (6.5), observa-se que cada componente  $p^\beta$  do momento está acoplada as demais componentes  $p^\mu$  e velocidades  $u^\nu$ . Logo, a solução particular para cada componente do momento, ou velocidade, isto é, da Eq. (6.5), torna-se uma tarefa extremamente complexa, uma vez que não é possível desacoplar as equações individuais. De fato, diferente do que aconteceu no Capítulo 4, a estrutura não trivial dos símbolos  $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$  para o universo de Einstein, dispostos na Tabela 6, aumenta ainda mais a dificuldade do cálculo, uma vez que não permite nenhuma simplificação para as equações de movimento. Entretanto, apesar desses impasses, a consideração de algumas hipóteses nos permitem evoluir nos estudos.

A primeira simplificação consiste em assumir uma força externa clássica,  $f_{\text{ext}}^\beta$ , que é capaz de cancelar o termo das forças fictícias devido aos símbolos  $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$  no lado esquerdo

Tabela 6 – Símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$  para o universo de Einstein.

|                                                                                                          |                                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| $\Gamma_{\theta\theta}^\chi$                                                                             | $-\sin(\chi)\cos(\chi)$               |
| $\Gamma_{\phi\phi}^\chi$                                                                                 | $-\cos(\chi)\sin(\chi)\sin^2(\theta)$ |
| $\Gamma_{\chi\theta}^\theta, \Gamma_{\theta\chi}^\theta, \Gamma_{\chi\phi}^\phi, \Gamma_{\phi\chi}^\phi$ | $\cot(\chi)$                          |
| $\Gamma_{\phi\phi}^\theta$                                                                               | $-\sin(\theta)\cos(\theta)$           |
| $\Gamma_{\theta\phi}^\phi, \Gamma_{\phi\theta}^\phi$                                                     | $\cot(\theta)$                        |

Fonte: produzido pelo autor, 2024.

da Eq. (6.5). Logo, devemos admitir que

$$f_{\text{ext}}^\beta = m\Gamma_{\mu\nu}^\beta u^\mu u^\nu. \quad (6.6)$$

A segunda suposição considera que o regime de velocidades sobre o qual estaremos concentrados é não relativístico, ou seja, lidamos com situações em que  $p^i \ll mc\delta^{ij}$ . Assim, nesse regime, os intervalos de tempo próprio  $\tau$  e coordenado  $t$  são aproximadamente iguais. Também, será considerado que as partículas possuem movimentos lentos o suficientes para negligenciar a possível dependência temporal que, em princípio, suas coordenadas possuem, isto é,  $x^\mu(t) \approx x^\mu$ . Essa é uma hipótese bem estabelecida na literatura [22, 27, 26, 30, 28, 31, 107, 35, 36].

Implementando na Eq. (6.5) cada uma das simplificações indicadas no parágrafo anterior, juntamente com a Eq. (6.6), temos que

$$\frac{dp^i}{dt} = -qg^{ij}\nabla_j\varphi. \quad (6.7)$$

Conforme indicado em [98], no limite não relativístico as componentes espaciais da equação de movimento são mais relevantes, logo, por esse motivo, apenas o setor espacial das expressões será considerado daqui em diante.

A Eq. (6.7) fornece a expressão para a força que atua sobre a partícula pontual em decorrência de sua interação com ao campo escalar  $\varphi$ , além dos efeitos resultantes de uma força externa clássica  $f_{\text{ext}}^\beta$ , capaz de cancelar as contribuições geométricas devido ao espaço-tempo curvo, a qual é dada pela Eq. (6.6). A Eq. (6.7) pode ser integrada entre dois instantes de tempo sucessivos e arbitrários, para obter o momento  $p^i$  da partícula, de modo que

$$p^i(\tau) = p^i(0) - q \int_0^\tau dt g^{ij} \nabla_j \varphi. \quad (6.8)$$

Supondo que a partícula parte do repouso, isto é, que  $p^i(t) = 0$  para  $t = 0$ , a partir da Eq. (6.8), segue que

$$p^i(\tau) = -q \int_0^\tau dt g^{ij} \nabla_j \varphi. \quad (6.9)$$

Destaca-se que, nessa etapa do desenvolvimento, o parâmetro  $\tau$  em (6.9) representa um instante de tempo arbitrário, e não deve ser confundido com o tempo próprio. As Eqs. (6.8) e (6.9) são expressões clássicas, assim como a consideração de momento inicial nulo,  $p^i(0) = 0$ , admitida para o seu estabelecimento. Entretanto, como será visto na subseção seguinte, a Eq. (6.9) nos permitirá estudar a dispersão do momento induzida pelas flutuações quânticas do campo escalar  $\varphi$ .

### 6.3 Dispersão do momento

A partir da Eq. (6.9) podemos calcular a dispersão associada a cada componente  $p^i$  do momento. De acordo com a metodologia padrão que temos seguido nesse trabalho, primeiro quantizamos (6.9) com a prescrição quântica  $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ , que por sua vez implica em  $p^i \rightarrow \hat{p}^i$ . Portanto, a dispersão para a componente  $\hat{p}^i$  do momento, será dada por

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{p}^i)^2 \rangle_{\text{ren}} &= \lim_{x' \rightarrow x} \langle 0 | \hat{p}^i(x) \hat{p}^i(x') | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{p}^i(x) \hat{p}^i(x') | 0 \rangle_{\text{div}} \\ &= \lim_{x' \rightarrow x} q^2 \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt g^{ij} g^{i'j'} \partial_j \partial_{j'} W_{\text{ren}}(x, x'), \end{aligned} \quad (6.10)$$

com  $x = (t, \chi, \theta, \phi)$  e  $x' = (t', \chi', \theta', \phi')$ . Para o estabelecimento da expressão acima o resultado  $\langle \hat{p}^i \rangle = 0$  já foi utilizado, uma vez que  $\hat{p}^i \propto \hat{\varphi}$  e  $\langle \hat{\varphi} \rangle = 0$ . Como sabemos o subscrito “ren” indica que as quantidades devem ser renormalizadas, o que no presente caso consiste em subtrair o termo  $n = 0$  da função de Wightman (3.123). Por questões de simplificação, de agora em diante, a notação do limite em (6.10) será omitida, estando a mesma, portanto, subentendida.

Observando que a função de Wightman (3.123) possui uma dependência temporal na forma  $(t - t')^2$  e que os coeficientes métricos  $g^{ij}$  são independentes do tempo, diante da identidade (5.11), podemos reescrever a Eq. (6.10) na forma

$$\langle (\Delta \hat{p}^i)^2 \rangle_{\text{ren}} = 2q^2 \int_0^\tau d\eta (\tau - \eta) g^{ij} g^{i'j'} \partial_j \partial_{j'} W_{\text{ren}}(x, x'). \quad (6.11)$$

Comparando as Eqs. (6.10) e (6.11) notamos que o uso da identidade (5.11) nos permite obter uma expressão muito mais conveniente e simples para nossos propósitos, Eq. (6.11), visto que uma operação de integração foi reduzida.

Semelhante aos casos estudados anteriormente, a Eq. (6.11) expõe nitidamente o algoritmo que deve ser seguido para encontrar a dispersão do momento da partícula. Inicialmente devemos selecionar a componente  $i = (\chi, \theta, \phi)$ , que desejamos estudar. Em seguida, identificamos cada elemento  $g^{ij}$  do tensor métrico em (3.96) com o auxílio da identidade (2.88), os quais são dados por  $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ , uma vez que a métrica é diagonal. Então, realizamos as operações de derivadas e integral, mais o limite de coincidência, para obter a expressão final referente a dispersão do momento da partícula.

Seguindo a metodologia delineada no parágrafo anterior, tomando  $i = \chi$  na expressão geral (6.11) e usando  $g^{\chi\chi} = -a_0^{-2}$ , encontramos que

$$\begin{aligned}\langle(\Delta\hat{p}^\chi)^2\rangle_{\text{ren}} &= 2q^2 \int_0^\tau d\eta(\tau - \eta) g^{\chi\chi} g^{\chi'\chi'} \partial_{\chi'} \partial_{\chi'} W_{\text{ren}}(x, x'), \\ &= 2q^2 a_0^{-4} I_\chi(x, x'),\end{aligned}\tag{6.12}$$

onde por questões de praticidade definiu-se a integral

$$I_i(x, x') = \int_0^\tau d\eta(\tau - \eta) K_i(x, x'),\tag{6.13}$$

com o núcleo

$$K_i(x, x') = \partial_i \partial_{i'} W_{\text{ren}}(x, x').\tag{6.14}$$

Lembre que o parâmetro  $a_0$  é uma constante e, por essa razão, é possível extraí-lo do integrando em (6.12). Conforme mostram as Eqs. (6.14) e (6.13), para cada núcleo  $K_i(x, x')$  existe uma integral associada  $I_i(x, x')$  que devemos calcular a fim de obter a expressão correspondente para o observável  $\langle(\Delta\hat{p}^i)^2\rangle_{\text{ren}}$ . Ressalta-se que, o fator multiplicativo na Eq. (6.12), precisamente, deveria ser  $a_0^{-2} a_0'^{-2}$ , o qual apenas no limite de coincidência ( $x' \rightarrow x$ ) resulta no fator  $a_0^{-4}$  (que temos considerado). Contudo, uma vez que  $a_0$  é uma constante e não participa de nenhuma das operações envolvidas na Eq. (6.12), devidamente especificadas em (6.13) e (6.14), por questões de praticidade, optamos por escrever o resultado do limite de coincidência, visto que tal prática não causa nenhuma perda de generalidade nas expressões finais e nos resultados.

Para calcular o núcleo  $K_\chi$  utilizamos a expressão para a função de Wightman (3.123) renormalizada, isto é, excluindo o termo  $n = 0$  do intervalo de soma. Portanto, substituindo (3.123) em (6.14) encontramos

$$K_\chi = -\frac{1}{4\pi^2 a_0} \left[ \frac{a_0(6a_0^2 + \eta^2)}{3\eta^4} - \frac{1}{8a_0} \csc^4\left(\frac{\eta}{2a_0}\right) \right].\tag{6.15}$$

Para obter o resultado exposto em (6.15) para o núcleo  $K_\chi$ , após a realização da soma em (3.123) descartando o termo  $n = 0$ , inicialmente fazemos o limite de coincidência nas variáveis angulares  $\theta$  e  $\phi$ , visto que as mesmas não participam de quaisquer operações mostradas na Eq. (6.12). Em seguida, derivamos a expressão resultante do limite  $(\theta', \phi') \rightarrow (\theta, \phi)$  com respeito as variáveis restantes  $\chi$  e  $\chi'$ , com o limite  $\chi' \rightarrow \chi$  ao final.

Considerando o núcleo (6.15) em (6.13), encontramos que

$$I_\chi(\tau_a) = -\frac{1}{(12\pi)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{\tau_a^2} - 3 \csc^2\left(\frac{\tau_a}{2}\right) + 6 \ln \left[ \frac{\sin\left(\frac{\tau_a}{2}\right)}{\left(\frac{\tau_a}{2}\right)} \right]^2 \right\},\tag{6.16}$$

com o parâmetro de tempo adimensional  $\tau_a$  definido por

$$\tau_a = \frac{\tau}{a_0}.\tag{6.17}$$

Destaca-se que para obter as expressões das quantidades  $K_\chi$  e  $I_\chi$ , respectivamente Eqs. (6.15) e (6.16), um software de computação algébrica foi utilizado tanto para realizar as somas como para calcular as derivadas e integrais, além de simplificações necessárias.

A partir das Eqs. (6.12) e (6.16) constata-se que a dispersão da componente  $i = \chi$  do momento depende exclusivamente do tempo adimensional  $\tau_a$ , definido pela Eq. (6.17). Também, nota-se que, exceto por constantes multiplicativas, o comportamento de  $\langle (\Delta \hat{p}^\chi)^2 \rangle_{\text{ren}}$ , ou de maneira equivalente  $\langle (\hat{p}^\chi)^2 \rangle_{\text{ren}}$ , corresponde ao comportamento da função adimensional  $I_\chi(\tau_a)$ , dada pela Eq. (6.16). Em sùmula, a dispersão para a componente  $i = \chi$  do momento da partícula pontual é dada pela Eqs. (6.12) e (6.16), que unidas produzem explicitamente como resultado

$$\langle (\Delta \hat{p}^\chi)^2 \rangle_{\text{ren}} = 2q^2 a_0^{-4} I_\chi(\tau_a). \quad (6.18)$$

Antes de prosseguirmos, neste ponto, um comentário sobre as unidades de medidas é de extrema importância a fim de justificar uma aparente inconsistência em nossas expressões.

Observando atentamente as unidades na Eq. (6.18) nota-se que a mesma aparenta estar com as unidades incorretas, pois  $q$  e  $I_\chi$  são adimensionais e a constante  $a_0$  tem unidade de comprimento. Logo, como a expressão indica, o momento quadrático possui unidades de inverso de comprimento a quarta. Entretanto, como será esclarecido adiante, essa aparente inconsistência se deve ao fato de que a quantidade calculada em (6.18) corresponde ao momento de coordenadas, e não o momento físico (que possui unidades corretas). Essa questão será explicada em maiores detalhes futuramente nesse trabalho, especificamente, após os cálculos para as demais componentes da dispersão, dado que estas também apresentarão esse aparente problema. Portanto, a sua explicação será geral e evitará redundâncias ao longo do texto.

Semelhante ao caso anterior, escolhendo  $i = \theta$  na Eq. (6.11) e observando que o coeficiente  $g^{\theta\theta} = -a_0^{-2} \sin^{-2}(\chi)$ , encontramos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{p}^\theta)^2 \rangle_{\text{ren}} &= 2q^2 \int_0^\tau d\eta (\tau - \eta) g^{\theta\theta} g^{\theta'\theta'} \partial_{\theta'} \partial_{\theta'} W_{\text{ren}}(x, x'), \\ &= 2q^2 a_0^{-4} \sin^{-4}(\chi) I_\theta(x, x'), \end{aligned} \quad (6.19)$$

na qual identificamos as definições do núcleo  $K_\theta$  e da integral  $I_\theta$ , dados nessa ordem pelas Eqs. (6.13) e (6.14). Novamente, foi possível extrair as expressões dos coeficientes  $g^{\theta\theta}$  e  $g^{\theta'\theta'}$  do integrando em (6.19), devido a independência temporal desses elementos. Além disso, como apontado anteriormente, de maneira formal, o fator multiplicativo em (6.19) deveria ser  $a_0^{-2} \sin^{-2}(\chi) a_0'^{-2} \sin^{-2}(\chi')$ , que no limite de coincidência culmina no fator considerado, isto é, em  $a_0^{-4} \sin^{-4}(\chi)$ . Contudo, uma vez que tais fatores não participam das operações contidas em  $I_\theta$ , por questões de praticidade na notação e simplicidade, optamos por usar diretamente o resultado do limite de coincidência.

De acordo com a definição (6.13), para calcular a integral  $I_\theta$  antes devemos encontrar o núcleo  $K_\theta$ . Para isso, utilizamos as Eqs. (3.123) e (6.14), as quais nos fornecem

$$\begin{aligned} K_\theta &= -\frac{\sin^2(\chi)}{4\pi^2 a_0} \left[ \frac{a_0(6a_0^2 + \eta^2)}{3\eta^4} - \frac{1}{8a_0} \csc^4\left(\frac{\eta}{2a_0}\right) \right] \\ &= \sin^2(\chi) K_\chi \end{aligned} \quad (6.20)$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} I_\theta(\tau_a, \chi) &= -\frac{\sin^2(\chi)}{(12\pi)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{\tau_a^2} - 3 \csc^2\left(\frac{\tau_a}{2}\right) + 6 \ln \left[ \frac{\sin\left(\frac{\tau_a}{2}\right)}{\left(\frac{\tau_a}{2}\right)} \right]^2 \right\} \\ &= \sin^2(\chi) I_\chi(\tau_a). \end{aligned} \quad (6.21)$$

O núcleo de integração  $K_\theta$  é obtido seguindo uma metodologia similar a que foi descrita para componente  $\chi$ . Por questões de padronização e clareza nas argumentações, vamos reproduzi-la brevemente. Após a soma, realiza-se com antecedência o limite de coincidência  $(\chi', \phi') \rightarrow (\chi, \phi)$ , uma vez que as variáveis  $\chi$  e  $\phi$  não estão envolvidas nas operações de integral e derivadas da componente  $\theta$ . Em seguida, derivamos com respeito a  $\theta$  e  $\theta'$ , com o limite  $\theta' \rightarrow \theta$  ao final das derivadas. Essa sequência de operações resulta na expressão de  $K_\theta$ , que por sua vez, após a integração conveniente, conforme a Eq. (6.13), fornece a contribuição  $I_\theta$ . Diante da estrutura encontrada para  $K_\theta$  em (6.20), uma vez que  $\sin^2(\chi)$  é independente do tempo, é fácil perceber (sem cálculos adicionais) que o resultado para  $I_\theta$  corresponde ao produto de um fator  $\sin^2(\chi)$  por  $I_\chi(\tau_a)$ , conforme exposto em (6.21).

A partir da Eq. (6.19), considerando o resultado (6.21), a dispersão para a componente  $\theta$  do momento será dada por

$$\langle (\Delta \hat{p}^\theta)^2 \rangle_{\text{ren}} = 2q^2 a_0^{-4} \sin^{-2}(\chi) I_\chi(\tau_a). \quad (6.22)$$

Semelhante a componente  $\chi$ , o comportamento temporal de  $\langle (\Delta \hat{p}^\theta)^2 \rangle_{\text{ren}}$  corresponde ao comportamento da função  $I_\chi$ , definida pela Eq. (6.16). Porém, agora temos a presença de um fator angular, o qual torna a expressão de  $\langle (\Delta \hat{p}^\theta)^2 \rangle_{\text{ren}}$  mal definida para os valores de  $\chi = 0$  e  $\chi = \pi$ . Entretanto, o momento calculado acima corresponde ao momento de coordenadas, e como será visto adiante o momento físico não possui tais divergências angulares. Além disso, em virtude das estruturas matemáticas de (6.22) e (6.12), nota-se que as componentes  $\theta$  e  $\chi$  da dispersão do momento estão relacionadas segundo a expressão

$$\langle (\Delta \hat{p}^\theta)^2 \rangle_{\text{ren}} = \sin^{-2}(\chi) \langle (\Delta \hat{p}^\chi)^2 \rangle_{\text{ren}}.$$

Para a última componente da dispersão do momento, fixando  $i = \phi$  na Eq. (6.11), com  $g^{\phi\phi} = -a_0^{-2} \sin^{-2}(\chi) \sin^{-2}(\theta)$ , segue que

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{p}^\phi)^2 \rangle_{\text{ren}} &= 2q^2 \int_0^\tau d\eta (\tau - \eta) g^{\phi\phi} g^{\phi'\phi'} \partial_\phi \partial_{\phi'} W_{\text{ren}}(x, x'), \\ &= 2q^2 a_0^{-4} \sin^{-4}(\chi) \sin^{-4}(\theta) I_\phi(x, x') \end{aligned} \quad (6.23)$$

Utilizando as expressões (6.14) e (3.123), após as devidas operações, encontramos que o núcleo  $K_\phi$  será dado pela equação

$$\begin{aligned} K_\phi &= -\frac{\sin^2(\chi) \sin^2(\theta)}{4\pi^2 a_0} \left[ \frac{a_0(6a_0^2 + \eta^2)}{3\eta^4} - \frac{1}{8a_0} \csc^4\left(\frac{\eta}{2a_0}\right) \right] \\ &= \sin^2(\theta) K_\theta \\ &= \sin^2(\chi) \sin^2(\theta) K_\chi. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Para obter o resultado acima temos utilizado um procedimento similar ao que foi descrito para as duas componentes calculadas anteriormente. Efetuada a soma em (3.123) com a exclusão do termo  $n = 0$ , antecipadamente realiza-se o limite de coincidência  $(\chi', \theta') \rightarrow (\chi, \theta)$ , que corresponde ao par de variáveis ausentes nas operações. Na sequência deriva-se a expressão resultante com respeito a  $\phi$  e  $\phi'$ , finalizando as operações com o limite final  $\phi' \rightarrow \phi$  e sua simplificação.

Após a substituição do núcleo (6.24) em (6.13) e subsequente integração encontramos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} I_\phi(\tau_a, \chi, \theta) &= -\frac{\sin^2(\chi) \sin^2(\theta)}{(12\pi)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{\tau_a^2} - 3 \csc^2\left(\frac{\tau_a}{2}\right) + 6 \ln \left[ \frac{\sin\left(\frac{\tau_a}{2}\right)}{\left(\frac{\tau_a}{2}\right)} \right]^2 \right\} \\ &= \sin^2(\theta) I_\theta(\tau_a, \chi) \\ &= \sin^2(\chi) \sin^2(\theta) I_\chi(\tau_a). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Portanto, a partir das Eqs. (6.23) e (6.25) podemos estabelecer que a dispersão resultante para a coordenada  $\phi$  do momento da partícula será dada por

$$\langle (\Delta \hat{p}^\phi)^2 \rangle_{\text{ren}} = 2q^2 a_0^{-4} \sin^{-2}(\theta) \sin^{-2}(\chi) I_\chi(\tau_a). \quad (6.26)$$

De maneira análoga a componente  $\theta$ , a relação que existe entre  $K_\phi$  e  $I_\phi$  com as quantidades  $K_\chi$  e  $I_\chi$ , respectivamente, conforme mostrada pelas Eqs. (6.24) e (6.25), nos conduz sem muitos esforços ao resultado (6.26). Além disso, devido a essas simetrias estruturais entre as quantidades mencionadas, as dispersões para as componentes  $\chi$ ,  $\theta$  e  $\phi$  do momento estão intimamente relacionada. De fato, com base nas devidas expressões é possível verificar que

$$\langle (\Delta \hat{p}^\phi)^2 \rangle_{\text{ren}} = \sin^{-2}(\theta) \langle (\Delta \hat{p}^\theta)^2 \rangle_{\text{ren}} = \sin^{-2}(\chi) \sin^{-2}(\theta) \langle (\Delta \hat{p}^\chi)^2 \rangle_{\text{ren}}.$$

De acordo com (6.26), uma vez mais observa-se que o comportamento temporal da dispersão, na ocasião de  $\langle (\Delta \hat{p}^\phi)^2 \rangle_{\text{ren}}$ , é dado pela função adimensional  $I_\chi(\tau_a)$ , cuja expressão encontra-se em (6.16). Além disso, em paralelo com (6.22), divergências angulares também ocorrem em virtude das funções circulares em (6.26), especificamente para os casos em que  $[\chi, \theta] = [(0, 0); (0, \pi); (\pi, 0); (\pi, \pi)]$ . Porém, como será visto na sequência, tais divergências não aparecem no correspondente momento físico.

Conforme tem sido argumentado, as Eqs. (6.18), (6.22) e (6.26) correspondem as expressões para a dispersão do momento de coordenadas da partícula. Por essa razão apresentam uma aparente inconsistência de unidades. De fato, no sistema de unidades naturais o momento físico possui unidades de massa ou inverso de comprimento, logo o momento ao quadrado possui unidades de massa ou inverso de comprimento ao quadrado. Uma vez que  $a_0$  tem unidades de comprimento, observando as Eqs. (6.18), (6.22) e (6.26) nota-se que as mesmas possuem unidades de inverso de comprimento a quarta. Entretanto, tornamos a mencionar que tais relações correspondem as componentes do momento de coordenadas, logo uma incompatibilidade nas unidades é possível ocorrer de modo que um ajuste, embasado em argumentos físicos, é necessário – veja por exemplo a Ref. [98].

Diante do exposto, a fim de obter as expressões para a dispersão do momento físico, representado por  $p^i$  e que possui as unidades corretas, utilizamos as correspondências expostas na Tabela 7, as quais nos permitem escrever:

$$\langle (\Delta \hat{p}^\chi)^2 \rangle_{\text{ren}} = a_0^2 \langle (\Delta \hat{p}^\chi)^2 \rangle_{\text{ren}}, \quad (6.27a)$$

$$\langle (\Delta \hat{p}^\theta)^2 \rangle_{\text{ren}} = a_0^2 \sin^2(\chi) \langle (\Delta \hat{p}^\theta)^2 \rangle_{\text{ren}} \quad (6.27b)$$

e

$$\langle (\Delta \hat{p}^\phi)^2 \rangle_{\text{ren}} = a_0^2 \sin^2(\chi) \sin^2(\theta) \langle (\Delta \hat{p}^\phi)^2 \rangle_{\text{ren}}. \quad (6.27c)$$

No Apêndice D.2 apresentamos uma dedução detalha das relações mostradas na Tabela 7 para as devidas componentes dos momentos físicos  $p^i$  e de coordenadas  $p^i$ .

Tabela 7 – Relação entre as componentes dos momentos físicos e de coordenadas.

| Momento físico $p^i$ | Momento coordenado $p^i$             |
|----------------------|--------------------------------------|
| $p^\chi$             | $a_0 p^\chi$                         |
| $p^\theta$           | $a_0 \sin(\chi) p^\theta$            |
| $p^\phi$             | $a_0 \sin(\chi) \sin(\theta) p^\phi$ |

Fonte: Produzido pelo autor, 2024.

A partir das Eqs. (6.18), (6.22), (6.26) e (6.27) observa-se facilmente que

$$\langle (\Delta \hat{p}^\chi)^2 \rangle_{\text{ren}} = \langle (\Delta \hat{p}^\theta)^2 \rangle_{\text{ren}} = \langle (\Delta \hat{p}^\phi)^2 \rangle_{\text{ren}} = 2q^2 a_0^{-2} I_\chi(\tau_a),$$

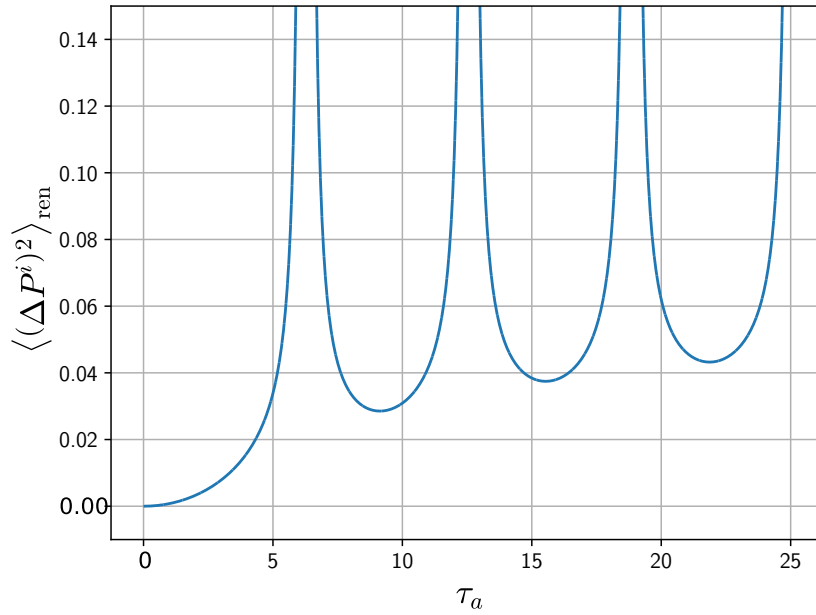
ou ainda, de uma forma simplificada e compacta,

$$\langle (\Delta \hat{p}^i)^2 \rangle_{\text{ren}} = 2q^2 a_0^{-2} I_\chi(\tau_a), \quad (6.28)$$

para  $i = \chi, \theta, \phi$  e  $I_\chi(\tau_a)$  dada pela Eq. (6.16). Em palavras, temos encontrado que a dispersão renormalizada para todas as componentes do momento físico são idênticas, isto

é, possuem o mesmo resultado e têm o mesmo comportamento. Agora, como pode-se verificar, as unidades na Eq. (6.28) estão corretas, pois  $a_0$  tem unidades de comprimento (ou inverso de massa) enquanto que a carga  $q$  e a função  $I_\chi(\tau_a)$  são adimensionais. O comportamento gráfico da Eq. (6.28) em função do tempo adimensional  $\tau_a$ , definido em (6.17), está mostrado na Figura 34.

Figura 34 – Comportamento da dispersão renormalizada do momento físico da partícula em função do tempo adimensional  $\tau_a$ .



Legenda: Gráfico em unidades de  $\langle (\Delta P^i)^2 \rangle_{\text{ren}} = \left(\frac{a_0}{q}\right)^2 \langle (\Delta \hat{p}^i)^2 \rangle_{\text{ren}}$ , com  $\tau_0 = \tau/a_0$  e  $i = \chi, \theta$  e  $\phi$ . Os picos abertos representam pontos divergentes. Fonte: Produzido pelo autor, 2024.

Uma primeira análise sobre a Eq. (6.28) revela que no limite  $\tau_a \rightarrow 0$  encontramos como resultado  $\langle (\Delta \hat{p}^\chi)^2 \rangle_{\text{ren}} = 0$ , o qual pode ser interpretado como a recuperação da condição clássica de momento inicial nulo, assumida em (6.9). Também, observa-se que no limite  $a_0 \rightarrow \infty$  ainda obtemos  $\langle (\Delta \hat{p}^\chi)^2 \rangle_{\text{ren}} = 0$ . Nesse último caso, o limite  $a_0 \rightarrow \infty$  corresponde ao limite do espaço-tempo de Minkowski, o qual é livre de fronteiras ou restrições sobre os modos do campo. Acontece que, no limite de coincidência, o termo de Minkowski é divergente e, portanto, deve ser subtraído a fim de regularizar os observáveis. Nesse sentido, após realizar tal procedimento o vácuo do espaço livre está ajustado como zero. Então, o resultado nulo para  $\langle (\Delta \hat{p}^\chi)^2 \rangle_{\text{ren}}$ , quando  $a_0 \rightarrow \infty$ , pode ser interpretado como uma consequência desse processo de regularização, pois as quantidades envolvidas nos cálculos das dispersões do momento são todas renormalizadas.

Mencionou-se na Seção 3.4.1 que o universo de Einstein (3.96) é homogêneo e isotrópico, assim como os demais espaços ( $k = -1, 0$ ) da métrica FLRW (3.88). Então, uma possível interpretação para o resultado (6.28) é que o mesmo representa uma manifestação

de tais propriedades. Na Ref. [45] um resultado similar foi obtido no contexto dos modelos análogos, para partículas ligadas por uma força externa em um espaço-tempo conformemente plano, no qual uma dispersão de velocidades idêntica para todas as componentes foi obtida. Além disso, como pode-se observar a partir da Figura 34, embora o perfil gráfico se mantenha entre intervalos de tempo consecutivos  $\Delta\tau = 2\pi a_0$ , a dispersão tende a crescer.

Em conformidade com que havia sido relatado anteriormente, nota-se que não existem divergências angulares nas expressões relativas ao momento físico – Eq. (6.28). Estas divergências são inerentes das expressões para os momentos de coordenadas – Eqs. (6.22) e (6.26). Contudo, a Eq. (6.28) possui divergências periódicas associadas ao comportamento não trivial de  $I_\chi(\tau_a)$  em função do tempo. É fácil observar a partir da Eq. (6.16) que as singularidades ocorrem para valores de  $\tau_a = 2\pi n$ , ou ainda na forma dimensional  $\tau = 2\pi a_0 n$ , com  $n \geq 1$  e inteiro.

As divergências temporais relatadas acima ocorrem devido à natureza fechada ou compacta da topologia do universo de Einstein, a qual representamos pela notação  $S^3 \times \mathbb{R}^1$ , cujos aspectos geométricos foram sinteticamente explorados na Seção 3.4.1. Com base nos estudos desenvolvidos no Capítulo 5, é aceitável imaginar que divergências dessa natureza são esperadas acontecer, uma vez que o sistema em questão é compacto (ou confinado). Então, em consequência dessa natureza fechada, as divergências surgem de forma semelhante ao caso dos modos confinados por planos paralelos ou por um mecanismo de compactificação, causando um efeito do tipo *round trip* [23, 22, 30]. Uma forma didática de enxergarmos a compactificação, por exemplo, é observar a substituição de variáveis realizada na transição de (3.88) para (3.90). De início temos  $0 \leq r \leq \infty$ , porém quando a mudança de variáveis  $r = \sin(\chi)$  é implementada o espaço infinito torna-se confinado a região finita  $0 \leq r \leq 1$ , visto que  $0 \leq \chi \leq \pi$ .

Um fato curioso é que a estrutura da expressão para os valores de tempo  $\tau = 2\pi a_0 n$  corresponde a múltiplos comprimentos de uma circunferência de raio  $a_0$ . Esta expressão pode ser obtida a partir da seção espacial (3.90). Para um instante de tempo fixo, tomando  $\chi$  e  $\theta$  constantes, encontramos que

$$\begin{aligned} C_\phi &= \int_0^{2\pi} a_0 \sin(\chi) \sin(\theta) d\phi \\ &= 2\pi a_0 \sin(\chi) \sin(\theta). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Logo, diante das observações anteriores e do resultado acima, podemos dizer que o efeito análogo das divergências de *round trip* na presente situação corresponde ao tempo que um sinal luminoso gasta para realizar uma volta completa na circunferência  $C_\phi = 2\pi a_0$ , definida por  $\chi = \theta = \frac{\pi}{2}$ . A Eq. (6.29) também exhibe a estrutura geométrica não trivial desse tipo de espaço-tempo, o qual mostra que o comprimento da circunferência  $C_\phi$  é máximo para  $\chi = \theta = \frac{\pi}{2}$  e mínimo quando  $\chi$  ou  $\theta$  assumem os valores 0 ou  $\pi$ .

## 6.4 Dispersão das coordenadas e análise da condição de pequenos deslocamentos

Em princípio, todas as coordenadas do espaço-tempo são funções do tempo, em outras palavras, podem variar com respeito ao tempo. Entretanto, no estabelecimento da Eq. (6.9), foi assumido que tais variações temporais são suficientemente pequenas de modo que tornam-se negligenciáveis. Essa abordagem aproximada nos permitiu realizar todos os desenvolvimentos apresentados nas seções anteriores. Contudo, como é bem conhecido a partir das discussões no Capítulo 5, a consideração de tal hipótese simplificadora, rotulada como condição de pequenos deslocamentos, induz automaticamente uma restrição sobre os resultados. A fim de analisar as restrições sobre os resultados obtidos até então, primeiro devemos encontrar a dispersão nas coordenadas.

Uma expressão para a evolução das coordenadas da partícula pode ser obtida a partir da relação para o momento  $p^i$ , Eq. (6.9), usando o fato de que  $u^i = dx^i/dt$ :

$$p^i = m(t) \frac{dx^i(t)}{dt} = -q \int_0^\tau dt g^{ij} \partial_i \varphi(y). \quad (6.30)$$

Na expressão acima o rótulo  $y$  representa a dependência do observável com respeito as coordenadas de espaço-tempo, isto é,  $y = (t, \chi, \theta, \phi)$ . A mudança nos rótulos, de  $x$  para  $y$ , foi realizada a fim de evitar possíveis confusões quanto a notação das expressões a seguir.

Utilizando a regra da cadeia podemos escrever

$$m \frac{dx^i}{dt} = \frac{d(mx^i)}{dt} - x^i \frac{dm}{dt}. \quad (6.31)$$

É importante lembrar que a massa, na presente situação, é uma quantidade variável e que depende do tempo – confira as Eqs. (6.4a) e (6.4b). Assim, substituindo (6.31) em (6.30) e integrando a expressão resultante, encontramos

$$m(\tau)x^i(y) - \int_0^\tau dt x^i(y) \frac{dm}{dt} = -q \int_0^\tau dt \int_0^t dt' g^{i'j'} \partial_{j'} \varphi(y'), \quad (6.32)$$

na qual também admitiu-se a suposição clássica  $x^i(0) = 0$ .

Em nosso estudo estamos trabalhando sob a hipótese de que o movimento da partícula é não relativístico e lento o suficiente para admitir que as coordenadas são aproximadamente independentes do tempo. Assim, sob esta perspectiva e com um erro negligenciável, podemos remover  $x^i$  do integrando no lado esquerdo da Eq. (6.32), o que nos permite estabelecer a seguinte expressão:

$$x^i(y) = -\frac{q}{m_0} \int_0^\tau dt \int_0^t dt' g^{i'j'} \partial_{j'} \varphi(y'). \quad (6.33)$$

Destaca-se que, para determinar o resultado acima, a definição da massa dinâmica (6.4a) foi utilizada. Note que a aproximação de coordenadas constantes no tempo eliminou

a massa dinâmica  $m(\tau)$  em nossas expressões, uma vez que em (6.33) temos apenas a presença da massa constante  $m_0$ .

Considerando o resultado (6.33) agora podemos encontrar uma expressão para a dispersão nas coordenadas da partícula. Para isso, primeiro devemos quantizar essa relação clássica através da prescrição quântica  $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ , que por sua vez implica na correspondência  $x^i \rightarrow \hat{x}^i$ . Assim, procedendo conforme indicado, encontramos que

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{x}^i)^2 \rangle_{\text{ren}} &= \lim_{y' \rightarrow y} \langle 0 | \hat{x}^i(y) \hat{x}^i(y') | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{x}^i(y) \hat{x}^i(y') | 0 \rangle_{\text{div}} \\ &= \lim_{y' \rightarrow y} \frac{q^2}{m_0^2} \int_0^\tau dr \int_0^\tau ds \int_0^r dt_1 \int_0^s dt_2 g_1^{ij} g_2^{ij} \partial_{j_1} \partial_{j_2} W_{\text{ren}}(y_1, y_2). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Portanto, as dispersões de coordenadas da partícula no universo de Einstein, devido as flutuações quânticas do campo escalar sem massa com o qual a mesma interage, serão dadas pela Eq. (6.34). Como indicado pela notação, a quantidade  $\langle (\Delta \hat{x}^i)^2 \rangle_{\text{ren}}$  já foi renormalizada através da subtração do termo divergente da função de Wightman.

Antes de procedermos com as soluções para as devidas componentes de  $\langle (\Delta \hat{x}^i)^2 \rangle_{\text{ren}}$ , gostaríamos de recapitular alguns pontos gerais e importantes, os quais serão úteis em todas as soluções, além de evitar redundâncias ao longo do texto. Como sabemos, das nossas experiências com o estudo da dispersão no momento, os coeficientes métricos em (6.34) são independentes do tempo, logo ambos podem ser removidos dos integrandos. A respeito desses fatores,  $g_1^{ij} g_2^{ij}$ , simplificando as formalidades da notação, utilizaremos o resultado do limite de coincidência,  $(g_1^{ij})^2 = (g_2^{ij})^2$ , visto que a prática não provoca perdas de generalidade nos resultados e expressões. Além disso, constata-se a partir de (6.34) que cada um dos núcleos  $K_j = \partial_{j_1} \partial_{j_2} W_{\text{ren}}$ , para  $j = (\chi, \theta, \phi)$ , são computados seguindo a mesma metodologia utilizada na seção anterior e produzem os mesmos resultados, isto é, Eqs. (6.15), (6.20) e (6.24), com a sutil modificação de que nestes resultados  $\eta \equiv (t_1 - t_2)$ .

De início, para a componente  $i = \chi$  a Eq. (6.34) nos fornece

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{\chi})^2 \rangle_{\text{ren}} &= \frac{q^2}{m_0^2} \int_0^\tau dr \int_0^\tau ds \int_0^r dt_1 \int_0^s dt_2 g_1^{\chi\chi} g_2^{\chi\chi} \partial_{\chi_1} \partial_{\chi_2} W_{\text{ren}}(y_1, y_2) \\ &= \frac{q^2}{m_0^2 a_0^4} \int_0^\tau dr \int_0^\tau ds \int_0^r dt_1 \int_0^s dt_2 K_\chi(y_1, y_2), \end{aligned} \quad (6.35)$$

onde a segunda igualdade é estabelecida utilizando o coeficiente  $g_1^{\chi\chi} = -a_0^2$  e a identificação do núcleo  $K_\chi$ , definido em (6.14).

Utilizando o resultado (D.15) do Apêndice D.4, para as solução das integrais em (6.35), encontramos que a dispersão renormalizada para a coordenada  $\chi$  será dada por

$$\langle (\Delta \hat{\chi})^2 \rangle_{\text{ren}} = -\frac{\bar{q}^2}{6\pi^2} \mathcal{F}(\tau_a), \quad (6.36)$$

com as definições do parâmetro de carga adimensional

$$\bar{q} = \frac{q}{a_0 m_0} \quad (6.37)$$

e da função auxiliar

$$\mathcal{F}(\tau_a) = \frac{\tau_a^2}{24} + \frac{\tau_a}{2} \cot\left(\frac{\tau_a}{2}\right) - 1 - \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\sin\left(\frac{\tau_a}{2}\right)}{\left(\frac{\tau_a}{2}\right)} \right]^2 + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_a} du u \ln \left[ \frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} \right]^2, \quad (6.38)$$

escrita em termos do tempo adimensional  $\tau_a$ . Antes de comentar quaisquer aspectos físicos sobre nossos resultados, vamos computar a dispersão para as demais componentes.

Para as componentes remanescentes  $i = \theta$  e  $i = \phi$ , a partir da Eq. (6.34), encontramos, nessa ordem,

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{\theta})^2 \rangle_{\text{ren}} &= \frac{q^2}{m_0^2} \int_0^\tau dr \int_0^\tau ds \int_0^r dt_1 \int_0^s dt_2 g_1^{\theta\theta} g_2^{\theta\theta} \partial_{\theta_1} \partial_{\theta_2} W_{\text{ren}}(y_1, y_2) \\ &= \frac{q^2}{m_0^2 a_0^4 \sin^4(\chi)} \int_0^\tau dr \int_0^\tau ds \int_0^r dt_1 \int_0^s dt_2 K_\theta(y_1, y_2) \end{aligned} \quad (6.39)$$

e

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{\phi})^2 \rangle_{\text{ren}} &= \frac{q^2}{m_0^2} \int_0^\tau dr \int_0^\tau ds \int_0^r dt_1 \int_0^s dt_2 g_1^{\phi\phi} g_2^{\phi\phi} \partial_{\phi_1} \partial_{\phi_2} W_{\text{ren}}(y_1, y_2) \\ &= \frac{q^2}{m_0^2 a_0^4 \sin^4(\chi) \sin^4(\theta)} \int_0^\tau dr \int_0^\tau ds \int_0^r dt_1 \int_0^s dt_2 K_\phi(y_1, y_2), \end{aligned} \quad (6.40)$$

nas quais foram utilizados os coeficientes  $g^{\theta\theta} = -a_0^{-2} \sin^{-2}(\chi)$  e  $g^{\phi\phi} = -a_0^{-2} \sin^{-2}(\chi) \sin^{-2}(\theta)$ , assim como os núcleos  $K_\theta$  e  $K_\phi$ .

A fim de obter a forma final das expressões para  $\langle (\Delta \hat{\theta})^2 \rangle_{\text{ren}}$  e  $\langle (\Delta \hat{\phi})^2 \rangle_{\text{ren}}$ , devemos resolver as quatro integrais definidas nas Eqs. (6.39) e (6.39). Contudo, uma observação atenta revela que nenhum cálculo a mais, além dos quais já foram realizados, é necessário. De fato, em virtude das relações que os núcleos  $K_\theta$  e  $K_\phi$  possuem com  $K_\chi$ , Eqs. (6.20) e (6.24) respectivamente, é direto identificar os resultados destas componentes como proporcionais ao resultado de  $\langle (\Delta \hat{\chi})^2 \rangle_{\text{ren}}$ . Por exemplo, para a componente  $i = \theta$ , uma vez realizadas as devidas operações sobre o núcleo, ou seja, derivadas e limites de coincidência, observa-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{\theta})^2 \rangle_{\text{ren}} &= \frac{q^2}{m_0^2 a_0^4 \sin^4(\chi)} \int_0^\tau dr \int_0^\tau ds \int_0^r dt_1 \int_0^s dt_2 K_\theta \\ &= \frac{q^2}{m_0^2 a_0^4 \sin^4(\chi)} \int_0^\tau dr \int_0^\tau ds \int_0^r dt_1 \int_0^s dt_2 \sin^2(\chi) K_\chi \\ &= \frac{\sin^2(\chi)}{\sin^4(\chi)} \underbrace{\left[ \frac{q^2}{m_0^2 a_0^4} \int_0^\tau dr \int_0^\tau ds \int_0^r dt_1 \int_0^s dt_2 K_\chi \right]}_{\langle (\Delta \hat{\chi})^2 \rangle_{\text{ren}}} \\ \langle (\Delta \hat{\theta})^2 \rangle_{\text{ren}} &= \csc^2(\chi) \langle (\Delta \hat{\chi})^2 \rangle_{\text{ren}} = -\frac{\bar{q}^2}{6\pi^2} \csc^2(\chi) \mathcal{F}(\tau_a). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Do mesmo modo, a partir das Eqs. (6.40) e (6.24), segue que

$$\langle (\Delta \hat{\phi})^2 \rangle_{\text{ren}} = \csc^2(\chi) \csc^2(\theta) \langle (\Delta \hat{\chi})^2 \rangle_{\text{ren}} = -\frac{\bar{q}^2}{6\pi^2} \csc^2(\chi) \csc^2(\theta) \mathcal{F}(\tau_a). \quad (6.42)$$

A função auxiliar  $\mathcal{F}(\tau_a)$  e os parâmetros adimensionais  $\bar{q}$  e  $\tau_a$  estão definidos nas Eqs. (6.38), (6.37) e (6.17), respectivamente.

Uma primeira observação que pode ser feita sobre os resultados (6.36), (6.41) e (6.42) diz respeito ao seu paralelismo com os resultados para as dispersões de momento (6.18), (6.22) e (6.26), estudadas na seção anterior. Em ambos os casos o comportamento temporal para todas as componentes da dispersão é controlado por uma função em comum de  $\tau_a$ , que no presente caso consiste na função  $\mathcal{F}(\tau_a)$ . Além disso, novamente existem divergências angulares associadas apenas as dispersões para as componentes  $i = \theta$  e  $i = \phi$ .

Diferente do que aconteceu anteriormente, os resultados nos mostram que agora não existem inconsistências dimensionais, pois  $\langle(\Delta\hat{\chi})^2\rangle_{\text{ren}}$ ,  $\langle(\Delta\hat{\theta})^2\rangle_{\text{ren}}$  e  $\langle(\Delta\hat{\phi})^2\rangle_{\text{ren}}$  são variáveis angulares e ambos os lados de suas expressões são adimensionais, uma vez que  $\bar{q}$  conforme a definição (6.37) é adimensional, bem como  $\mathcal{F}(\tau_a)$ . Contudo, podemos encontrar as dispersões para os comprimentos (ou distâncias) físicos (as)  $\hat{z}_i$  associados (as) a cada componente através das relações dispostas na Tabela 8, de maneira que:

$$\langle(\Delta\hat{z}_\chi)^2\rangle_{\text{ren}} = a_0 \langle(\Delta\hat{\chi})^2\rangle_{\text{ren}}, \quad (6.43a)$$

$$\langle(\Delta\hat{z}_\theta)^2\rangle_{\text{ren}} = a_0^2 \sin^2(\chi) \langle(\Delta\hat{\theta})^2\rangle_{\text{ren}} \quad (6.43b)$$

e

$$\langle(\Delta\hat{z}_\phi)^2\rangle_{\text{ren}} = a_0^2 \sin^2(\chi) \sin^2(\theta) \langle(\Delta\hat{\phi})^2\rangle_{\text{ren}}. \quad (6.43c)$$

Sabendo que  $a_0$  possui unidades de comprimento, as Eqs. (6.43) possuem unidades de comprimento ao quadrado, como dever ser. No Apêndice D.3 são oferecidos alguns detalhes para o estabelecimento das relações apresentadas na Tabela 8.

Tabela 8 – Relação entre as componentes dos comprimentos físicos e coordenados.

| Comprimento físico $\hat{z}^i$ | Comprimento coordenado $x^i$       |
|--------------------------------|------------------------------------|
| $\hat{z}^\chi$                 | $a_0 \chi$                         |
| $\hat{z}^\theta$               | $a_0 \sin(\chi) \theta$            |
| $\hat{z}^\phi$                 | $a_0 \sin(\chi) \sin(\theta) \phi$ |

Fonte: produzido pelo autor, 2024.

A partir das Eqs. (6.36), (6.41), (6.42) e (6.43) é facilmente deduzida a seguinte igualdade entre as componentes:

$$\langle(\Delta\hat{z}_\chi)^2\rangle_{\text{ren}} = \langle(\Delta\hat{z}_\theta)^2\rangle_{\text{ren}} = \langle(\Delta\hat{z}_\phi)^2\rangle_{\text{ren}} = a_0 \langle(\Delta\hat{\chi})^2\rangle_{\text{ren}},$$

que por sua vez pode ser escrita de forma simplificada como

$$\langle(\Delta\hat{z}_i)^2\rangle_{\text{ren}} = -\frac{a_0^2 \bar{q}^2}{6\pi^2} \mathcal{F}(\tau_a), \quad (6.44)$$

com  $i = \chi, \theta$  e  $\phi$ . Semelhante a Eq. (6.28), esse resultado obtido para os observáveis  $\langle(\Delta\hat{\mathcal{S}}_i)^2\rangle_{\text{ren}}$  é interpretado como uma manifestação das propriedades de homogeneidade e isotropia do universo de Einstein.

É instrutivo destacar uma vez mais a simetria que existe entre as dispersões para os momentos e comprimentos físicos: note que a Eq. (6.44) não apresenta as divergências angulares existentes nas Eqs. (6.41) e (6.42). O resultado (6.44), especificamente a função  $\mathcal{F}(\tau_a)$ , possui as mesmas divergências identificadas anteriormente, quando  $\tau = 2\pi a_0 n \forall n \geq 1$ . Nos limites  $\tau_a \rightarrow 0$  e  $a_0 \rightarrow \infty$  obtêm-se que  $\langle(\Delta\hat{\mathcal{S}}_i)^2\rangle_{\text{ren}} = 0$ . No primeiro desses casos ( $\tau_a \rightarrow 0$ ), o resultado é justificado como a recuperação da condição clássica  $x^i(0) = 0$  assumida inicialmente, enquanto que o segundo ( $a_0 \rightarrow \infty$ ), se deve a regularização das quantidades, que ajusta o estado vácuo dos observáveis para um valor nulo.

Anteriormente, foi mencionado que os resultados obtidos na Seção 6.3, assim como aqueles encontrados aqui, admitiram como simplificação que as coordenadas da partícula são aproximadamente constantes. Em outras palavras, essa admissão nos diz que os valores das coordenadas da partícula não variam apreciavelmente, logo os valores reais das suas coordenadas e o valor médio associado a cada uma delas são muito próximos. Consequentemente, a dispersão das coordenadas nesse regime será muito pequena. Então, conclui-se que, os resultados encontrados nesse capítulo tornam-se válidos apenas quando a dispersão das coordenadas assume valores muito pequenos. Além disso, a fim de satisfazer as limitações descritas, essa condição também implicará em vínculos sobre os parâmetros livres na equação da dispersão.

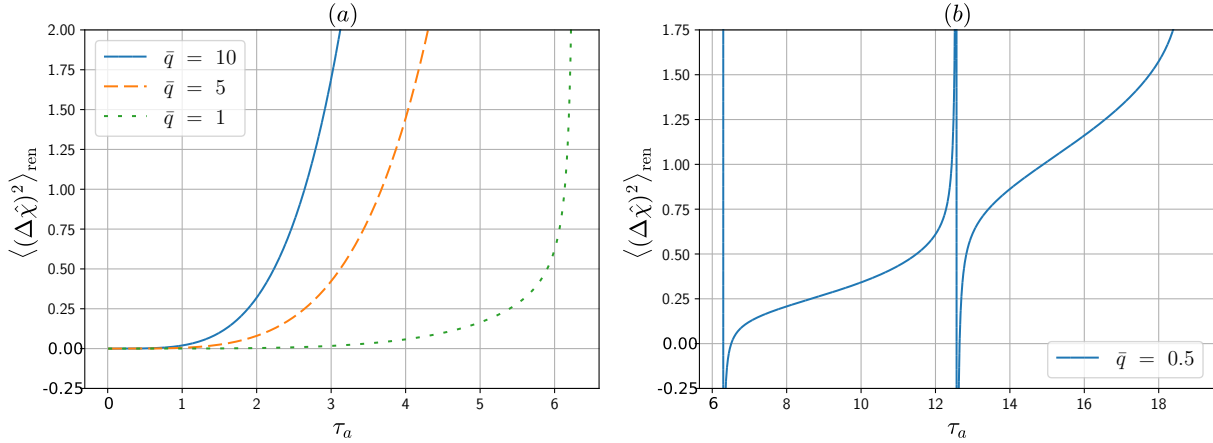
Semelhante ao Capítulo 5, para analisar a condição de pequenos deslocamentos, um método direto seria definir uma dispersão relativa (adimensional) e traçar o seu gráfico em função do tempo de modo a observar quais restrições os parâmetros livres da expressão devem obedecer, para garantir que o módulo da dispersão relativa seja menor que a unidade. A partir da Eq. (6.44), percebe-se que é possível estabelecer a dispersão relativa

$$\langle(\Delta\hat{\mathcal{S}}_i)^2\rangle_{\text{ren}}^* = \frac{\langle(\Delta\hat{\mathcal{S}}_i)^2\rangle_{\text{ren}}}{a_0^2} = -\frac{\bar{q}^2}{6\pi^2}\mathcal{F}(\tau_a) \ll 1, \quad (6.45)$$

onde  $\mathcal{F}(\tau_a)$  é dada pela Eq. (6.38). Note que a Eq. (6.45), válida para  $i = \chi, \theta$  e  $\phi$ , corresponde a dispersão da coordenada angular compacta  $\chi$ , Eq. (6.36).

A dispersão relativa (6.45) possui em essência alguma semelhança com o caso da compactificação estudado na Seção 5.4.2, em que as coordenadas físicas (Tabela 8) são comparadas com o único parâmetro de comprimento natural associado ao sistema, que na presente situação corresponde ao raio do universo de Einstein  $a_0$ . Como sabemos de discussões passadas, a igualdade na expressão acima, isto é,  $\langle(\Delta\hat{\mathcal{S}}_i)^2\rangle_{\text{ren}}^* = 1$  ou, de maneira equivalente,  $\langle(\Delta\hat{\chi})^2\rangle_{\text{ren}} = 1$ , indica o limite superior de validade da condição (6.45) e, portanto, dos resultados. A Figura 35 mostra o comportamento da Eq. (6.45) em função do tempo adimensional  $\tau_a$  para diferentes valores do parâmetro  $\bar{q}$ .

Figura 35 – Comportamento da dispersão relativa  $\langle(\Delta\hat{\chi}_i)^2\rangle_{\text{ren}}^*$  em função de  $\tau_a$ .



Legenda: Para as figuras acima, conforme as legendas, foram considerados os seguintes valores do parâmetro de carga adimensional: (a)  $\bar{q} = 10$ ,  $\bar{q} = 5$ ,  $\bar{q} = 1$  e (b)  $\bar{q} = 0, 5$ . As linhas verticais representam pontos de descontinuidade. Fonte: produzido pelo autor, 2024.

De acordo com a Figura 35, substituindo um valor arbitrário de  $\bar{q}$  na Eq. (6.45), o limite superior para a curva de  $\langle(\Delta\hat{\chi}_i)^2\rangle_{\text{ren}}^* = 1$  é atingido, por exemplo, quando  $\tau_a$  assume aproximadamente os valores dispostos na Tabela 9. Então, para cada um dos casos, quanto menor o intervalo de tempo admitido em nossas análises, frente a esses valores, melhor será a margem de validade dos resultados.

Por exemplo, escolhendo o valor  $\bar{q} = 10$ , cujo comportamento está exibido na Figura 35a, de acordo com a primeira linha da Tabela 9, para que os resultados tornem-se válidos, a condição (6.45) exige imediatamente que  $0 \leq \tau_a \leq 2,642$ . Portanto, diante dessa restrição, os resultados obtidos anteriormente tornam-se mais efetivos quando os intervalos de tempo considerados nas análises são tais que  $\tau_a < 2,642$ . Obviamente, valores fora desse intervalo ( $\tau_a > 2,642$ ) violam a condição, implicando que nesse regime os resultados possuem pouca validade, uma vez que (6.45) não é satisfeita. Na ocasião em que o valor de  $\bar{q}$  é alterado, digamos para  $\bar{q} = 5$ , situação mostrada pela curva tracejada na Figura 35a e segunda linha da Tabela 9, nota-se que o limite superior da condição (6.45) é estendido para  $0 \leq \tau_a \leq 3,675$ . Além disso, quando admite-se  $\bar{q} = 1$ , curva pontilhada na Figura 35a, constata-se que  $0 \leq \tau_a \leq 6.135 \approx 2\pi$ .

A tendência dos gráficos apresentados na Figura 35a revela que, independente do valor de  $\bar{q}$ , o limite superior da condição (6.45) é atingido inevitavelmente no intervalo  $0 \leq \tau_a \leq 2\pi$ . Contudo, observa-se que, conforme o parâmetro  $\bar{q}$  assume valores cada vez menores, o intervalo de tempo permitido, antes de saturar a condição (6.45), é amplificado. Também, podemos observar que, para um valor de tempo fixo  $\tau_a$ , a redução de  $\bar{q}$  implica diretamente em uma redução na amplitude do valor da dispersão relativa. Então, uma conclusão física que pode ser inferida desses resultados é que, quanto menor o valor do parâmetro de carga  $\bar{q}$  mais efetiva torna-se a condição de pequenos deslocamentos. Essa é

uma conclusão semelhante a que foi obtida na Ref. [30] para um modelo unidimensional, assim como no Capítulo 5 quando estudamos o MBQI de uma partícula em  $(3 + 1)$  dimensões acoplada a um campo escalar sem massa, sob diferentes formas de confinamento e condições de contorno no espaço-tempo plano [36].

Tabela 9 – Valores aproximados do tempo adimensional  $\tau_a$  para o limite superior da condição de pequenos deslocamentos (6.45).

| $\bar{q}$ | $\tau_a$ |
|-----------|----------|
| 10        | 2.642    |
| 5         | 3.675    |
| 1         | 6.135    |

Fonte: produzido pelo autor, 2024.

Até agora, a análise que realizamos para a condição de pequenos deslocamentos restringiu-se ao intervalo  $0 \leq \tau_a \leq 2\pi$ , Figura 35a. Entretanto, é importante assinalar que a mesma pode ser estendida moderadamente para os intervalos seguintes. Por exemplo, a Figura 35b mostra o comportamento da Eq. (6.42) considerando o intervalo de tempo  $2\pi \leq \tau_a \leq 6\pi$ , para o caso particular  $\bar{q} = 0, 5$ .

De acordo com as conclusões anteriores, na medida em que  $\tau_a$  cresce a validade dos resultados torna-se cada vez menor, uma vez que (6.45) também perde progressivamente sua efetividade. Para intervalos de tempo subsequentes aos que foram mostrados na Figura 35a, ou seja,  $\tau_a > 2\pi$ , essa conclusão ainda continua válida. Essa situação está exemplificada na Figura 35b. Obviamente, a validade é garantida enquanto  $\langle (\Delta \hat{\mathcal{S}}_i)^2 \rangle_{\text{ren}}^* < 1$ , e conforme o exemplo ilustrado na Figura 35b a condição atinge seu limite quando  $\tau_a \approx 15$ .



## 7 Conclusões e perspectivas

Ao longo dessa tese investigamos um fenômeno de vácuo quântico conhecido na literatura como Movimento Browniano Quântico (MBQ) ou Movimento Browniano Quântico induzido (MBQI). Semelhante aos populares e bem conhecidos efeito Casimir e desvio de Lamb, o MBQI consiste em uma manifestação dos efeitos das flutuações quânticas de vácuo que os campos quânticos possuem, independente da presença de efeitos térmicos. Em síntese, o MBQI é definido como o movimento estocástico adquirido por uma partícula pontual em consequência da sua interação com as flutuações quânticas de vácuo de um campo, por exemplo, escalar ou eletromagnético. A análise desse efeito é realizada calculando o valor esperado no estado de vácuo (VEV) para os observáveis associados a partícula, que em virtude das flutuações quânticas tornam-se grandezas estocásticas. Em analogia ao movimento Browniano Clássico (MBC), os típicos observáveis frequentemente analisados são a dispersão de velocidades e posição da partícula. Na presente tese, o MBQI foi investigado essencialmente em três cenários distintos: (i) nos modelos análogos de gravidade (MAG) – Capítulo 4; (ii) no espaço-tempo plano unidimensionalmente confinado – Capítulo 5; e (iii) em um espaço-tempo curvo – Capítulo 6.

No Capítulo 4 o MBQI foi estudado considerando um espaço-tempo efetivo do tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) assintoticamente plano com desclinação, o qual foi simulado em um condensado de Bose-Einstein (CBE). Esse cenário de MAG mimetiza um espaço-tempo gravitacional FLRW em expansão conforme na presença de uma corda cósmica. Visando introduzir uma maior generalidade ao modelo, condições de quasiperiodicidade também foram adicionadas.

Diferente dos resultados da literatura [45] encontramos que a presença da desclinação no meio (ou corda cósmica) quebra as propriedades de homogeneidade e isotropia, as quais são características do modelo de universo de FLRW. Embora todas as componentes da dispersão apresentem uma contribuição constante, conforme mostram as Eqs. (4.60), (4.74) e (4.81), estas possuem comportamentos distintos, como pode ser constatado a partir das Figuras 17, 18 e 19, portanto, indicando a quebra da homogeneidade e isotropia no modelo há pouco mencionada. O termo constante e igual  $2\zeta(3)$ , presente em cada uma das expressões da dispersão de velocidades, é originado pela expansão assintoticamente plana do meio, a qual foi simulada pelo fator conforme  $b^{\frac{1}{4}}(\eta)$ , Eq. (4.48), cujo comportamento está exposto na Figura 16. Além disso, essa contribuição constante corresponde ao caso em que o meio não apresenta desclinação ( $p = 1$ ) e o campo escalar obedece condições de contorno periódicas ( $\beta = 0$ ).

No Capítulo 4, foi observado um comportamento não trivial em todas as compo-

nentes de  $\langle(\Delta\bar{v}^i)^2\rangle$  para pontos próximos da origem, com  $i = (\rho, \phi, z)$ . Para  $\langle(\Delta\bar{v}^\rho)^2\rangle$  e  $\langle(\Delta\bar{v}^\phi)^2\rangle$ , foi mostrado que as curvas podem exibir um comportamento convergente próximo da origem quando os valores dos parâmetros da desclinação  $p$  e quasiperiodicidade  $\beta$  satisfazem igualmente ambas as desigualdades (4.66). No caso de  $\langle(\Delta\bar{v}^z)^2\rangle$ , em virtude da sua estrutura matemática simples, observa-se que as curvas sempre são regulares na origem. Contudo, apesar dos comportamentos distintos, para pontos distantes da origem ( $\chi \gg 1$ ) todas as dispersões tendem para um valor constante, independente dos valores de  $p$  e  $\beta$ . Esse comportamento assintótico é intuitivo, pois o núcleo do defeito está situado em  $\rho = 0$ , logo, seus efeitos são apreciáveis apenas nessa vizinhança. No sentido gravitacional, partículas localizadas em pontos distantes da corda cósmica não sentem os efeitos gravitacionais que a mesma produz.

Destaca-se que, as investigações realizadas no Capítulo 4 foram desenvolvidas admitindo um regime de tempo longo, de modo que as expressões de  $\langle(\Delta\bar{v}^\rho)^2\rangle$ ,  $\langle(\Delta\bar{v}^\phi)^2\rangle$  e  $\langle(\Delta\bar{v}^z)^2\rangle$  independem do tempo e são analisadas com respeito a distância radial  $\chi$ , definida pela Eq. (4.57c). Portanto, as discussões e interpretações extraídas do modelo de estudo considerado são válidas apenas em situações que envolvem grandes intervalos de tempo. Uma estimativa grosseira para esse regime de tempo seria, por exemplo,  $\eta \gg \tau$ , onde  $\tau$  representa a taxa de expansão – confira a Eq. (4.48). Nessa direção, uma perspectiva seria investigar a viabilidade de uma análise numérica das expressões, a fim de observar a evolução temporal do sistema, bem como a concordância com os resultados analíticos aqui apresentados. Poderíamos citar ainda a implementação de outros fatores de escala, além do caso assintoticamente plano utilizado nas discussões, de modo a observar, por exemplo, modificações na contribuição constante. Além disso, embora os CBE ofereçam a minimização de efeitos térmicos, devido o regime de baixas temperaturas necessárias para a sua formação, do ponto de vista técnico, uma perspectiva de trabalho seria a inclusão e análise dos efeitos térmicos no modelo.

Avançando em nossas investigações, no Capítulo 5 estudamos o MBQI de uma partícula devido a um campo escalar sem massa (*i*) na presença de dois planos perfeitamente refletorres, sob diferentes condições de contorno, e (*ii*) considerando condições quasiperiódicas. Em ambos os casos, a análise foi realizada no espaço-tempo plano (ou de Minkowski) em (3+1) dimensões. Contudo, vale ressaltar que, os mecanismos de confinamento e compactificação foram introduzidos apenas em uma coordenada espacial.

No sistema dos planos paralelos (Seção 5.3), representado sinteticamente pela Figura 23, encontramos expressões analíticas para a dispersão de velocidades da partícula pontual nas direções paralelas e perpendicular aos planos – Eqs. (5.13) e (5.18). A partir destas soluções, foi mostrado que, sob certas condições, resultados da literatura podem ser recuperados, a saber, as expressões para a dispersão de velocidades de uma partícula pontual devido a um campo escalar sem massa na presença de um plano perfeitamente

refletor sob condições de Dirichlet, Eqs. (5.19) e (5.26), as quais foram investigadas na Ref. [31]. Nesse sentido, os resultados apresentados estreitaram algumas das lacunas existentes no tema, bem como o paralelo entre as investigações empreendidas considerando campos escalares e eletromagnético, uma vez que diferentes configurações e condições de contorno foram estudadas, além da condição de Dirichlet frequentemente utilizada.

As Figuras 24 e 25 revelam que as dispersões  $\langle(\Delta\hat{v}_x)^2\rangle_{\text{ren}}^{(i)}$  e  $\langle(\Delta\hat{v}_y)^2\rangle_{\text{ren}}^{(i)}$  possuem um comportamento divergente para valores específicos do tempo adimensional  $\tau_a$ . Entre as infinitas divergências existentes, duas são prontamente identificadas e correspondem aos pontos de localização fixa dos planos refletores em  $x = 0$  e  $x = a$ . Foi percebido que, em ambas as expressões, existem divergências associadas exclusivamente ao tempo  $\tau_a = 2\pi n$  – primeiro termo no lado direito das Eqs. (5.13) e (5.18). Além disso, a adição do segundo plano da origem a uma divergência intermediária, que depende da posição relativa  $x_a$ , a saber,  $\tau_a = 2|x_a - n|$ . Em todo caso, com base na literatura [22, 23], estas foram interpretadas como o tempo que um sinal luminoso gasta para realizar uma viagem de ida e volta, partindo de um ponto arbitrário  $x_a$  até o plano, sendo o mesmo refletido instantaneamente pelo plano.

Ainda que as soluções para quaisquer instantes de tempo tenham sido obtidas, em analogia aos estudos do MBC, expressões para os regimes de tempos curtos e longos foram encontradas, visto que estas são duas situações de particular interesse. Em ambos os casos particulares,  $\tau_a \ll 1$  e  $\tau_a \gg 1$ , apenas as divergências principais associadas aos pontos  $x_a = 0$  e  $x_a = 1$  permaneceram nas expressões, que são as posições fixas e exatas nas quais os planos estão situados, ou seja,  $x = 0$  e  $x = a$ . Contudo, é importante destacar que, para  $\tau_a \ll 1$  as expressões comportam-se com  $\tau_a^2$ , Eqs. (5.20) e (5.21), enquanto que para o regime  $\tau_a \gg 1$ , Eqs. (5.22) e (5.23), tendem para um valor constante modificado pela contribuição das condições de contorno introduzidas.

Seguindo à risca o caso dos planos paralelos, estudamos o MBQI considerando condições de contorno quasiperiódicas. Nesse sistema, didaticamente ilustrado na Figura 29, encontramos expressões para a dispersão de velocidades associadas as direções compactificada ( $x$ ) e não compactificadas ( $y$  e  $z$ ), nessa ordem, Eqs. (5.47) e (5.50). Divergências também surgiram no modelo, para os valores de tempo  $\tau_a = n$ , porém sem qualquer relação com as coordenadas espaciais. Conforme justificado, estas ocorrem devido a topologia  $S^1 \times \mathbb{R}^3$  do espaço-tempo considerado e, no contexto das divergências de *round trip*, concluiu-se que as mesmas podem ser interpretadas como o tempo para um sinal luminoso realizar uma volta em uma circunferência de comprimento  $a$ .

Expressões para os regimes de tempo  $\tau_a \ll 1$  e  $\tau_a \gg 1$  também foram encontradas e foi observado que, semelhante ao caso dos planos paralelos, para tempos pequenos a dispersão é proporcional a  $\tau_a^2$ , Eqs. (5.51) e (5.53), enquanto que para tempos longos tende para um valor constante, conforme sugerem as Eqs. (5.55) e (5.57). De acordo com

a Figura 32, a depender do valor que o parâmetro de quasiperiodicidade  $\beta$  assume, uma mudança de sinal nas dispersões também pode acontecer.

Todas as análises comentadas acima, sobre o Capítulo 5, foram suportadas pela hipótese da condição de pequenos deslocamentos, a qual pressupõe um regime de velocidades no qual as possíveis variações temporais das coordenadas de posição da partícula são desprezíveis. A fim de investigar quais as implicações dessa hipótese, a dispersão na posição foi calculada e a sua análise subsequente (Seções 5.3.2 e 5.4.2) revelou que a carga adimensional  $\bar{g}$ , Eq. (5.41), deve assumir valores pequenos, para garantir a validade do regime assumido. Em outras palavras, mostrou-se que, quanto menores os valores para  $\bar{g}$ , melhores e mais efetivos tornam-se os resultados. Essa conclusão está de acordo com a literatura pertinente sobre o tema [30].

Em relação as contribuições do Capítulo 5, se assim podemos dizer, a mais notável foi a investigação do MBQI de uma partícula por um campo escalar sob condições quasiperiódicas, dado que, até o nosso conhecimento, este sistema ainda não havia sido estudado. Quanto as perspectivas referentes aos estudos do Capítulo 5, diante das discussões realizadas e com base na literatura da área, duas possibilidades são, a princípio, passíveis de investigação: a primeira consiste em analisar os efeitos de autointeração, enquanto que a segunda seria investigar os efeitos de troca (*switching functions*), na tentativa de eliminar as divergências observadas.

No Capítulo 5 a contribuição do termo de interação entre a partícula e o campo na equação de Klein-Gordon foi negligenciada supondo que a influência da partícula sobre a dinâmica do campo é desprezível. Aspirando uma abordagem mais realista, um próximo passo seria investigar as modificações advindas deste termo de fonte, ou ainda, nessa direção, analisar a introdução de outras formas de interação (ou acoplamento) entre a partícula e o campo, além da interação monopolar (5.2c) admitida nesse trabalho. É importante comentar que, tais apontamentos tratam-se de especulações para investigações futuras, as quais estão pautadas nos resultados aqui obtidos e os já existentes e ausentes na literatura. Contudo, deve-se ter em mente que, a análise minuciosa de tais objetivos pode revelar que, em termos práticos, os mesmos sejam inviáveis.

Semelhante ao Capítulo 4, a inclusão de efeitos térmicos também poderia ser pensada, visto que na literatura, até o nosso conhecimento, os casos do campo eletromagnético [24, 29] e escalar [33] foram tratados termicamente considerando apenas um plano refletor. Por fim, os efeitos das *switching functions* [32, 31, 28, 27] seriam outra possibilidade passível de investigação no cenário estudado ao longo do Capítulo 5, com o objetivo de observar as modificações e implicações que tais mecanismos de regularização das divergências poderiam impor sobre os resultados.

No Capítulo 6, última parte desta tese, o MBQI foi investigado em um cenário de espaço-tempo legitimamente curvo, especificamente, no universo de Einstein. Conforme

exposto na Seção 3.4.1, o universo de Einstein consiste em um espaço-tempo FLRW estático com constante de curvatura positiva ( $k = +1$ ). Seguindo uma metodologia similar a que foi apresentada nos casos anteriores, os observáveis estudados foram as dispersões de momento e coordenadas.

Diferente do que aconteceu no Capítulo 4, apesar da topologia não trivial do universo de Einstein, as propriedades de homogeneidade e isotropia foram preservadas, uma característica que é observada através das expressões para as dispersões renormalizadas dos momentos físicos,  $\langle(\Delta\hat{p}^i)^2\rangle_{\text{ren}}$ , e coordenadas físicas,  $\langle(\Delta\hat{\mathcal{J}}_i)^2\rangle_{\text{ren}}$ , associadas a partícula pontual. Ambos os observáveis apresentaram expressões idênticas para todas as componente  $i = \chi, \theta, \phi$ , conforme constata-se pelas Eqs. (6.28) e (6.44).

Nos casos em que  $\tau_a \rightarrow 0$  e  $a_0 \rightarrow \infty$  os observáveis físicos  $\langle(\Delta\hat{p}^i)^2\rangle_{\text{ren}}$  e  $\langle(\Delta\hat{\mathcal{J}}_i)^2\rangle_{\text{ren}}$  apresentam um valor nulo. O primeiro caso ( $\tau_a \rightarrow 0$ ) é interpretado como a recuperação das condições clássicas de momentos e posições iniciais nulas, assumidas para o estabelecimento das equações fundamentais (6.9) e (6.33). Por outro lado, quando o raio do universo de Einstein  $a_0 \rightarrow \infty$ , o espaço-tempo de Minkowski (ilimitado e livre de fronteiras) é recuperado, logo conclui-se que os resultados nulos para as dispersões se devem a regularização, que ajusta o vácuo de Minkowski como zero, subtraindo a sua usual contribuição divergente.

Os comportamentos gráficos das dispersões no momento físico e nas coordenadas físicas, mostrados nas Figuras 34 e 35, revelam que estes observáveis possuem singularidades associadas aos intervalos de tempo  $\tau = 2\pi a_0 n$ , com  $n \geq 1$  e inteiro. Este comportamento divergente das expressões se deve a topologia compacta ou fechada do universo de Einstein, que confina os modos do campo escalar nesse espaço hipersférico. Assim, no âmbito das discussões do Capítulo 5, esse confinamento produz divergências análogas de *round trip*, que na ocasião correspondem ao tempo gasto por um sinal luminoso para realizar uma volta completa na circunferência de comprimento  $C_\phi = 2\pi a_0$ , definida pelos valores  $\chi = \theta = \frac{\pi}{2}$ .

Semelhante ao Capítulo 5, nos desenvolvimentos do MBQI no universo de Einstein também foi admitida a hipótese da condição de pequenos deslocamentos, a qual na ocasião foi discutida detalhadamente na Seção 6.4. Para esse fim, definimos a dispersão relativa  $\langle(\Delta\hat{\mathcal{J}}_i)^2\rangle_{\text{ren}}^*$ , Eq. (6.45), que corresponde a expressão para  $\langle(\Delta\hat{\chi})^2\rangle_{\text{ren}}$ , Eq. (6.36).

Considerando diferentes valores para o parâmetro  $\bar{q}$ , a dispersão relativa  $\langle(\Delta\hat{\mathcal{J}}_i)^2\rangle_{\text{ren}}^*$  foi plotada em função do tempo adimensional  $\tau_a$ , definido como a razão entre o tempo  $\tau$  e o raio do universo de Einstein  $a_0$  – confira a Eq. (6.17). Os gráficos contidos na Figura 35, juntamente com os dados da Tabela 9, permitiram verificar de maneira direta que reduzindo a magnitude do parâmetro  $\bar{q}$ , definido na Eq. (6.37), aumentamos o intervalo de tempo permitido para as análises, antes de atingir o limite superior da condição  $|\langle(\Delta\hat{\mathcal{J}}_i)^2\rangle_{\text{ren}}| \ll 1$ , Eq. (6.45). Além disso, embora a análise desenvolvida tenha se concentrado no intervalo

$0 \leq \tau_a \leq 2\pi$ , foi explicado que essas conclusões são igualmente válidas para intervalos posteriores, isto é, para  $\tau_a > 2\pi$ .

Como perspectiva dos estudos realizados no Capítulo 6, para fins didáticos e do ponto de vista acadêmico, podemos pensar em estender as análises considerando a implementação das condições de Dirichlet e Neumann no modelo. Essa investigação já está em preparação e será divulgada futuramente. Do mesmo modo, uma análise térmica também pode ser cogitada.

Diante do exposto, por questões de clareza, é importante comentar uma assimetria que existe entre as investigações desenvolvidas nos Capítulos 4, 5 e 6. Com base na literatura pertinente, em todos os casos estudados, um dos pressupostos introduzidos foi a hipótese de que as partículas movem-se lentamente, de maneira que a dependência temporal das coordenadas pode ser negligenciada com um erro desprezível. De acordo com as discussões precedentes, essa suposição impõe restrições sobre as dispersões das coordenadas, a qual denominamos como condição de pequenos deslocamentos. Nos Capítulos 5 e 6 esse aspecto foi discutido em detalhes, levando a conclusão comum de que quanto menor o valor dos parâmetros adimensionais de carga, Eqs. (5.41) e (6.37), maior será a margem de validade dos resultados. Embora no Capítulo 4 essa hipótese (de pequenos deslocamentos) tenha sido assumida, os detalhes e implicações da sua introdução não foram analisados. A ausência dessa discussão se deve a dificuldade matemática das integrais associadas as dispersões de velocidades.

Para resolver as integrais da dispersão de velocidades, Eqs. (4.47), uma extensão assintótica dos limites de integração foi realizada, visto que o integrando nessas regiões é bem comportado. Desse modo, o método de resíduos foi aplicado, permitindo encontrar expressões analíticas para cada uma das componentes da dispersão de velocidades. Entretanto, o preço pago por essa abordagem é que as expressões obtidas nada dizem sobre o comportamento temporal das dispersões. De fato, como pode-se observar, as Eqs. (4.60), (4.74) e (4.81) dependem apenas do parâmetro de distância  $\chi$ , dado que  $p$  e  $\beta$  são constantes. Em síntese, a questão é que para encontrar a dispersão das coordenadas no Capítulo 4 deveríamos realizar quatro integrais consecutivas – na ocasião integrar duas vezes a Eq. (4.47) com respeito ao tempo. Porém, a estrutura matemática de tais integrandos torna a solução analítica inviável. Nesse sentido, é oportuno lembrar que a perspectiva de uma análise numérica pode, a princípio, fornecer alguma informação sobre a dispersão das coordenadas e dos vínculos da condição de pequenos deslocamentos. Além disso, a busca por outros fatores de escala também pode oferecer facilidades nas soluções das integrais. Assim, em virtude das dificuldades expostas, diferente dos Capítulos 5 e 6, no Capítulo 4 apenas a dispersão de velocidades foi analisada.

Por fim, gostaríamos de destacar que, embora muitas das discussões apresentadas nesta tese tenham ocorrido em um nível elementar, isto é, focando em aspectos mais

superficiais, que são típicos de uma primeira análise, estes constituíram material original suficiente para as publicações [35], [36] e [37], as quais em essências estão baseadas nas discussões dos Capítulos 4, 5 e 6, respectivamente.



## Apêndices



# APÊNDICE A – Sobre a invariância conforme do campo escalar

Anteriormente, foi visto que sob uma transformação conforme  $\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$  e, consequentemente,  $\bar{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2} g^{\mu\nu}$  e  $\bar{g} = \Omega^{2n} g$ , com  $\bar{g}$  e  $g$  representando os determinantes de cada métrica,  $n$  o número de dimensões do espaço-tempo e  $\Omega$  o fator conforme que conecta esses dois sistemas de coordenadas. Na sequência vamos mostrar que a equação de Klein-Gordon para o campo escalar sem massa, Eq. (2.103),

$$\bar{\square}\bar{\varphi} + \xi\bar{R}\bar{\varphi} = 0, \quad (\text{A.1})$$

é invariante sob as transformações conformes, quando o campo concomitantemente é parametrizado por uma potência adequado do fator conforme  $\Omega$ . Por simplicidade vamos considerar que

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

de modo que  $\bar{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2} \eta^{\mu\nu}$  e  $\bar{g} = \Omega^{-2n}$ , onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo plano em  $n$  dimensões. O caso geral, isto é,  $\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$  pode ser encontrado na referência [68], sobre a qual nos baseamos para a elaboração das discussões seguintes.

Considerando a transformação (A.2) o operador  $\bar{\square}$  segue a relação

$$\bar{\square}\varphi^* = (n-2)\Omega^{-3}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\Omega)(\partial_\nu\varphi^*) + \Omega^{-2}\square\varphi^*. \quad (\text{A.3})$$

Na expressão acima  $\varphi^*$  é uma função teste que utilizamos para verificar como o operador d'Alembertiano no espaço-tempo definido pela métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$ ,  $\bar{\square}$ , se transforma no espaço-tempo  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Em outras palavras, a relação acima nos mostra a expressão equivalente de  $\bar{\square}$  no espaço-tempo (plano) definido pela métrica  $\eta_{\mu\nu}$ . Além disso, temos identificado o operador d'Alembertiano no espaço-tempo plano  $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$  e, obviamente,  $\bar{\square} \neq \square$ .

Admitindo que, semelhante a métrica, o campo escalar obedece a lei de transformação

$$\varphi^* \equiv \bar{\varphi} = \Omega^s \varphi, \quad (\text{A.4})$$

com  $s$  constante, a partir da substituição de (A.4) em (A.3), encontramos que

$$\begin{aligned} \bar{\square}\bar{\varphi} &= s(s+n-3)\Omega^{s-4}\varphi\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\Omega)(\partial_\nu\Omega) + (2s+n-2)\Omega^{s-3}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\Omega)(\partial_\nu\varphi) \\ &\quad + s\Omega^{s-3}\varphi(\square\Omega) + \Omega^{s-2}\square\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A equação acima mostra a expressão resultante para a quantidade  $\bar{\square}\bar{\varphi}$  segundo as transformações (A.2) e (A.4).

Nota-se que para os valores particulares  $n = 2$  e  $s = 0$ , de modo que  $\varphi = \varphi$ , obtemos  $\bar{\square}\bar{\varphi} = \Omega^{-2}\square\varphi$ . Assim, na ocasião em que  $\bar{\square}\bar{\varphi} = 0$  igualmente temos  $\square\varphi = 0$ . Esse resultado demonstra a invariância da equação de Klein-Gordon sem massa em (1+1) dimensões sob as transformações conformes, para o valor da constante de acoplamento  $\xi = 0$ , situação que denominamos de acoplamento mínimo. Por outro lado, se  $n \neq 2$  não existirá um valor de  $s$  para o qual simultaneamente  $\bar{\square}\bar{\varphi} = \square\varphi = 0$ . Contudo, na sequência vamos mostrar que o escalar de Ricci sob a transformação (A.2) fornece uma liberdade de escolha entre os parâmetros livres  $s$  e  $\xi$ , que nos permite encontrar um resultado invariante para a equação de Klein-Gordon não massiva para todo  $n > 1$ .

Vamos verificar como se transformam as estruturas matemáticas dos símbolos de Christoffel, Eq. (2.87),

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{\bar{g}^{\sigma\mu}}{2} (\bar{g}_{\alpha\sigma,\beta} + \bar{g}_{\sigma\beta,\alpha} - \bar{g}_{\beta\alpha,\sigma}), \quad (\text{A.6})$$

tensor de Ricci, Eq. (2.96),

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}_{\nu\beta,\mu}^{\beta} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu,\beta}^{\beta} + \bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\beta} \bar{\Gamma}_{\beta\nu}^{\alpha} - \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\beta} \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} \quad (\text{A.7})$$

e escalar de Ricci  $\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu}$ . Diante de (A.2), para os símbolos (A.6) encontramos que

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} = \Omega^{-1} [\delta_{\alpha}^{\mu}(\partial_{\beta}\Omega) + \delta_{\beta}^{\mu}(\partial_{\alpha}\Omega) - \eta_{\sigma\mu}\eta_{\beta\alpha}(\partial_{\sigma}\Omega)], \quad (\text{A.8})$$

$$= \delta_{\alpha}^{\mu}\partial_{\beta}(\ln \Omega) + \delta_{\beta}^{\mu}\partial_{\alpha}(\ln \Omega) - \eta_{\sigma\mu}\eta_{\beta\alpha}\partial_{\sigma}(\ln \Omega). \quad (\text{A.9})$$

Para estabelecer a segunda linha usamos o fato de que  $\partial_{\mu}(\ln \Omega) = \Omega^{-1}\partial_{\mu}\Omega$ . Torna-se mais conveniente para as manipulações futuras utilizar (A.9), pois suas derivadas são organizadas de forma compacta, permitindo uma maior simplicidade para as simplificações dos termos comuns em (A.7), diferente de (A.8) que gera muitos termos quando a operação de derivada é aplicada. Para a derivada dos símbolos, a partir de (A.9), temos

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma}^{\mu} = \delta_{\alpha}^{\mu}\partial_{\gamma}\partial_{\beta}(\ln \Omega) + \delta_{\beta}^{\mu}\partial_{\gamma}\partial_{\alpha}(\ln \Omega) - \eta_{\sigma\mu}\eta_{\beta\alpha}\partial_{\gamma}\partial_{\sigma}(\ln \Omega). \quad (\text{A.10})$$

Utilizando os resultados (A.9) e (A.10) para computar cada uma das contribuições de (A.7), após as simplificações, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu} &= (n-2)(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\ln \Omega) + \eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\ln \Omega) + (2-n)(\partial_{\mu}\ln \Omega)(\partial_{\nu}\ln \Omega) \\ &\quad + (n-2)\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha}\ln \Omega)(\partial_{\beta}\ln \Omega). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Contraindo a expressão acima, vamos encontrar o seguinte resultado para o escalar de Ricci:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= 2(n-1)\Omega^{-2}\eta^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\ln \Omega) + (n-1)(n-2)\Omega^{-2}\eta^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\ln \Omega)(\partial_{\nu}\ln \Omega) \\ &= 2(n-1)\Omega^{-3}\eta^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\Omega) + (n-1)(n-4)\Omega^{-2}\eta^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\Omega)(\partial_{\nu}\Omega). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Uma vez encontrados todos os elementos necessários, vamos analisar (oportuna-mente) a estrutura que a quantidade

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{KG}} = \bar{\square}\bar{\varphi} + \xi\bar{R}\bar{\varphi} \quad (\text{A.13})$$

assume diante das transformações (A.2) e (A.4). Note que quando  $\bar{\mathcal{E}}_{\text{KG}} = 0$  recuperamos a equação de Klein-Gordon para o campo escalar sem massa (A.1). A partir das Eqs. (A.13), (A.5) e (A.12) a expressão resultante para  $\bar{\mathcal{E}}_{\text{KG}}$  tem a forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{\text{KG}} = & [s(s+n-3) + \xi(n-1)(n-4)]\Omega^{s-4}\varphi\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\Omega)(\partial_\nu\Omega) + [s + 2\xi(n-1)]\Omega^{s-3}\varphi(\square\Omega) \\ & + (2s+n-2)\Omega^{s-2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\Omega)(\partial_\nu\Omega) + \Omega^{s-2}\square\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Observando os coeficientes de (A.14) percebe-se que existe uma liberdade de escolha quanto aos parâmetros  $s$  e  $\xi$ , que a princípio são constantes arbitrárias. É fácil ver que as escolhas

$$s = -\frac{(n-2)}{2} \quad (\text{A.15})$$

e

$$\xi = \frac{-s}{2(n-1)} = \frac{(n-2)}{4(n-1)} \quad (\text{A.16})$$

anulam os três primeiros termos de (A.14) de maneira que

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{KG}} = \bar{\square}\bar{\varphi} + \xi\bar{R}\bar{\varphi} = \Omega^{s-2}\square\varphi. \quad (\text{A.17})$$

O lado direito de (A.17) diz respeito a quantidade  $\bar{\mathcal{E}}_{\text{KG}}$  no espaço-tempo definido pela métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , enquanto que o seu lado esquerdo diz respeito a quantidade  $\bar{\mathcal{E}}_{\text{KG}}$  escrita no espaço-tempo definido pela métrica  $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$  (que define o espaço-tempo plano).

Tomando  $\bar{\mathcal{E}}_{\text{KG}} = 0$  obtém-se a equação de Klein-Gordon para o campo escalar sem massa e, portanto, a Eq. (A.17) nos mostra como sua estrutura se transforma quando a métrica possui a simetria conforme, definida por (A.2), e o campo obedece a lei de transformação (A.4). Além disso, esse resultado mostra que se  $\bar{\varphi}$  resolve a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo definido por  $\bar{g}_{\mu\nu}$ ,

$$[\bar{\square} + \xi(n)\bar{R}]\bar{\varphi} = 0,$$

então  $\varphi$  satisfaz a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo  $g_{\mu\nu}$ ,

$$\Omega^{s-2}\square\varphi = 0 \Rightarrow \square\varphi = 0,$$

visto que  $\Omega$  é diferente de zero. Portanto, em virtude das relações da simetria conforme, é possível obter a solução para o espaço-tempo de  $\bar{g}_{\mu\nu}$  através da solução do campo no espaço-tempo de  $g_{\mu\nu}$ , uma vez que  $\bar{\varphi} = \Omega^s\varphi$ . Aproveitando o fato de que no espaço-tempo

plano o escalar de Ricci é zero, podemos escrever (A.17) de uma forma semelhante ao que é encontrado para o caso geral, em que  $\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^s g_{\mu\nu}$ , a saber,

$$[\bar{\square} + \xi(n)\bar{R}]\bar{\varphi} = \Omega^{s-2}[\square\varphi + \xi(n)R]\varphi, \quad (\text{A.18a})$$

$$[\bar{\square} + \xi(n)\bar{R}](\Omega^s\varphi) = \Omega^{s-2}[\square\varphi + \xi(n)R]\varphi \quad (\text{A.18b})$$

e

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{KG}} = \Omega^{s-2}\mathcal{E}_{\text{KG}}. \quad (\text{A.18c})$$

As constantes  $s$  e  $\xi$  são dadas em função do número de dimensões do espaço-tempo, respectivamente, Eqs. (A.15) e (A.16), enquanto que  $\mathcal{E}_{\text{KG}}$  corresponde a Eq. (A.13) sem a barra sobre as quantidades.

O conjunto de equações (A.18) nos mostram que  $\bar{\mathcal{E}}_{\text{KG}} = 0$  imediatamente implica que  $\mathcal{E}_{\text{KG}} = 0$  e podemos concluir que a equação de Klein-Gordon para o campo escalar sem massa é invariante sob transformações conformes, pois mantém sua estrutura  $(\bar{\mathcal{E}}_{\text{KG}}, \mathcal{E}_{\text{KG}})$  quando aplicamos as transformações (A.2) e (A.4). Por outro lado, a presença da massa na equação de Klein-Gordon quebra a invariância conforme, pois observa-se que a estrutura não é mantida, visto que o fator comum não é o mesmo para todos os termos, como acontece em (A.18). De fato, quando a massa está presente, é fácil ver que, através do mesmo procedimento descrito acima, encontraríamos as relações

$$\begin{aligned} (\bar{\square} + \xi\bar{R})\bar{\varphi} + m^2\bar{\varphi} &= \Omega^{s-2}(\square + \xi R)\varphi + m^2\Omega^s\varphi \\ (\bar{\square} + \xi\bar{R} + m^2)\bar{\varphi} &= \Omega^{s-2}(\square + \xi R + m^2\Omega^2)\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Observando as expressões acima percebe-se a distinção entre os termos, quando o fator comum é colocado em evidência para estabelecer a conclusão da invariância quanto à forma das expressões. A massa do campo é uma propriedade constante, logo não possui nenhuma lei de transformação entre os sistemas de coordenadas como a métrica e o campo. Assim, diante dessa distinção somos levados à conclusão de que a equação de Klein-Gordon para o campo escalar massivo não é invariante por transformações conformes.

Por fim, embora tenhamos assumido o caso particular conformemente plano nas discussões precedentes,  $\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2\eta_{\mu\nu}$ , as conclusões delineadas acima são gerais e é possível mostrar que as mesmas relações (A.18) são obtidas para o caso geral em que  $\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \neq \Omega^2\eta_{\mu\nu}$  – confira, por exemplo, [68].

## APÊNDICE B – Detalhes matemáticos referentes ao Capítulo 4

### B.1 Dinâmica de uma partícula pontual acoplada a um campo escalar sem massa

A fim de manter os argumentos claros e objetivos, bem como expor a consistência das expressões apresentadas, antes de iniciar a discussão principal desse apêndice, vamos recapitular alguns elementos isolados.

A ação  $S_p$  para uma partícula pontual em um sistema de coordenadas arbitrário é dada pela expressão [108, 71]

$$S_p = - \int d\tau m_0, \quad (\text{B.1})$$

na qual a constante  $m_0$  representa a massa da partícula e  $d\tau$  um elemento diferencial de tempo próprio. O intervalo da integração acima, o qual foi omitido, considera dois instantes de tempo sucessivos e arbitrários.

O tempo próprio é definido como o tempo medido por uma partícula (observador) seguindo a sua linha de universo (a trajetória que a mesma descreve pelo espaço-tempo), em outras palavras, no seu próprio referencial. Para um sistema de referência centrado e fixo na partícula, denominado de referencial próprio, as coordenadas de espaço-tempo atreladas a mesma são tais que  $x^\mu = (x^0, x^i) = (c\tau, 0)$ , com  $\tau$  definindo o tempo próprio e  $\mathbf{x}$  as coordenadas do espaço tridimensional [47]. Enquanto isso, outro referencial inercial, utilizando as coordenadas  $x'^\mu$ , pode constatar para as coordenadas da partícula  $x'^\mu = (x'^0, x'^i) = (ct, \mathbf{x}')$ . Portanto, sendo o elemento de linha  $ds^2$  um invariante, isto é,  $ds^2 = ds'^2$ , define-se matematicamente o intervalo de tempo próprio pela relação [47, 71]

$$d\tau^2 = ds^2. \quad (\text{B.2})$$

Como é bem conhecido, e já relatado ao longo desse trabalho, existe uma liberdade de escolha quanto a assinatura da métrica para se estudar relatividade. Por simplicidade, vamos considerar o espaço-tempo plano para as explicações seguintes. Acontece que, é possível trabalhar tanto com a assinatura

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = +c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 \quad (\text{B.3a})$$

como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2. \quad (\text{B.3b})$$

Simbolicamente utilizam-se as notações  $(+---)$  e  $(-+++)$  para representar as assinaturas das métricas nas Eqs. (B.3a) e (B.3b), respectivamente. Essa simbologia faz referência aos sinais da diagonal principal da matriz de representação do tensor métrico, com elementos  $g_{\mu\nu}$ . A escolha das assinaturas (B.3) trata-se de uma conveniência matemática, mas têm implicações sobre a definição de algumas quantidades.

A partir das Eqs. (B.2) e (B.3) nota-se que, considerando a assinatura  $(+---)$ , Eq. (B.3a), a definição do tempo próprio corresponde à Eq. (B.2). Por outro lado se a assinatura  $(-+++)$  é utilizada, Eq. (B.3b), a definição do tempo próprio é tal que  $c^2 d\tau = -ds^2$ . Em síntese, o tempo próprio pode ser definido pela relação matemática:

$$d\tau = \sqrt{\epsilon ds^2} = \begin{cases} \epsilon = +1 & \text{para a assinatura } (+---) \\ \epsilon = -1 & \text{para a assinatura } (-+++). \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Para complemento, recomenda-se a leitura do Capítulo 3 da Ref. [47], sobre a qual também temos nos baseado para a elaboração da discussão acima.

Admitindo que a partícula de massa  $m_0$  interage com um campo escalar sem massa  $\varphi$ , a ação  $S_{\text{int}}$  descrevendo essa interação é dada por [108]

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} &= \int \rho(x) \varphi(x) d\tau \\ &= \int q \varphi d\tau, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

onde na segunda igualdade utilizou-se a definição

$$\rho(x) = \int q \delta^{(4)}(y - x) \sqrt{-g} d^4 y, \quad (\text{B.6a})$$

além da propriedade de filtragem da função delta de Dirac no espaço-tempo curvo [108]

$$\int \delta^{(4)}(y - x) f(y) \sqrt{-g} d^4 y = f(x). \quad (\text{B.6b})$$

O modelo de interação monopolar (B.6a) tem sido utilizado com frequência para estudar o MBQI em modelos com campo escalar – veja, por exemplo, as Refs. [57] e [36]. Note que a definição (B.6a) é equivalente a uma distribuição de carga  $q$  localiza em um ponto  $x$  do espaço-tempo. Além disso, pode ser enxergada como uma fonte pontual externa, conforme temos relatado no Capítulo 2.

A partir das Eqs. (B.1) e (B.5), a ação total  $S_{\text{tot}}$ , que descreve a dinâmica de uma partícula pontual interagindo com um campo escalar sem massa, será dada por

$$\begin{aligned} S_{\text{tot}} &= S_{\text{p}} + S_{\text{int}} \\ &= - \int (m_0 - q\varphi) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Comparando a estrutura das Eqs. (B.1) e (B.7), conforme observado por [125], nota-se que (B.7) pode ser interpretada como a ação de uma partícula pontual de massa variável. Nesse caso temos que

$$m = m(x) = m_0 - q\varphi(x). \quad (\text{B.8})$$

Utilizando a definição geral (B.4) para o tempo próprio e a definição da massa dinâmica (B.8), a ação (B.7) pode ser escrita na forma comum

$$S_{\text{tot}} = \int L(x^\mu, \dot{x}^\mu) d\lambda, \quad (\text{B.9a})$$

com a identificação da lagrangiana efetiva

$$L(x^\mu, \dot{x}^\mu) = m(x^\mu) \sqrt{\epsilon g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (\text{B.9b})$$

Nas Eqs. (B.9a) e (B.9b) o ponto indica uma derivada com respeito a variável  $\lambda$ , que por sua vez representa um parâmetro arbitrário utilizado para parametrizar a linha de universo da partícula, isto é, sua trajetória no espaço-tempo.

Conforme as discussões e desenvolvimentos do Capítulo 2, variando a ação (B.9a) com respeito a coordenada  $x^\alpha(\lambda)$  da partícula e utilizando o princípio da mínima ação,  $\delta S_{\text{tot}} = 0$ , é possível mostrar que  $L(x^\mu, \dot{x}^\mu)$ , de maneira geral, satisfaz as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0, \quad (\text{B.10})$$

a partir das quais podemos extrair as equações de movimento do sistema.

Visto que a massa  $m$  agora é uma quantidade que depende explicitamente das coordenadas  $x^\mu$ , utilizando a expressão (B.9b), encontram-se os seguintes resultados:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\epsilon m}{H} g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu \quad (\text{B.11a})$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = -qH(\partial_\alpha \varphi) + \frac{\epsilon m}{2H} g_{\mu\nu, \alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (\text{B.11b})$$

Por questões de praticidade na notação definiu-se a quantidade  $H = H(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \sqrt{\epsilon g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ . Agora, se o parâmetro  $\lambda$  é considerado equivalente ao tempo próprio da partícula, ou seja, tomando  $\lambda = \tau$ , observa-se que:

$$d\tau = \sqrt{\epsilon g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda \Rightarrow \frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{d\tau}{d\tau} = \sqrt{\epsilon g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = 1, \quad \therefore H = 1. \quad (\text{B.12})$$

Assim, considerando (B.12), as Eqs. (B.11) assumem as formas simplificadas

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \epsilon m g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu \quad (\text{B.13a})$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = -q(\partial_\alpha \varphi) + \frac{\epsilon m}{2} g_{\mu\nu, \alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (\text{B.13b})$$

Substituindo os resultados (B.13) na Eq. (B.10), após algumas simplificações, encontra-se a seguinte expressão:

$$m g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu + m \left( g_{\mu\alpha, \nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \alpha} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \left( \frac{q}{\epsilon} \right) (\partial_\alpha \varphi) - \left( \frac{dm}{d\tau} \right) g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu. \quad (\text{B.14})$$

A Eq. (B.14) pode ser reduzida para uma forma final mais simples e conveniente desenvolvendo alguns de seus termos. Devido a liberdade de escolha para os índices mudos, nota-se que é possível escrever

$$\left(g_{\mu\alpha,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha}\right)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{1}{2}(g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \quad (\text{B.15})$$

Além disso, utilizando a definição da massa efetiva (B.8) encontra-se que

$$\begin{aligned} \frac{dm}{d\tau} &= \frac{d(m_0 - q\varphi)}{d\tau} = -q \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \right) \left( \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \\ &= -q(\partial_\alpha\varphi)\dot{x}^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Assim, substituindo os resultados (B.15) e (B.16) na Eq. (B.14) e multiplicando toda a expressão por  $g^{\beta\alpha}$ , é possível mostrar que

$$m(x) \left[ \ddot{x}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right] = q \left[ -\epsilon^{-1} g^{\beta\alpha} + \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right] \nabla_\alpha \varphi(x), \quad (\text{B.17})$$

onde identificamos a definição dos símbolos de Christoffel (2.87) e da função delta de Kronecker  $\delta_\mu^\beta = g_{\mu\alpha}g^{\beta\alpha}$ . Além disso, na equação acima utilizamos o fato de que o campo é escalar para escrever  $\partial_\alpha\varphi = \nabla_\alpha\varphi$ .

A Eq. (B.17) fornece a dinâmica de uma partícula pontual acoplada a um campo escalar sem massa em um espaço-tempo curvo. Esta é utilizada nos Capítulos 4 e 6. A constante  $\epsilon$  pode assumir os valores  $\pm 1$ , a depender da assinatura utilizada para a métrica, conforme explicitado na relação (B.4). No caso em que  $\epsilon = -1$  recuperamos o resultado encontrado em [108]. A massa  $m(x)$  em (B.17), definida pela Eq. (B.8), adquire uma dependência com as coordenadas do espaço-tempo em virtude de sua interação com o campo  $\varphi$ . O ponto representa uma derivada com respeito ao tempo. É possível identificar  $\dot{x}^\mu = u^\mu$ , onde  $u^\mu$  corresponde ao quadri vetor velocidade da partícula.

## B.2 Soluções para a dupla integração nas dispersões

Nesse apêndice vamos resolver integrais na forma

$$A_\gamma(\mu) = (-1)^\gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_1) \frac{1}{\left[ c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - a_\mu^2 \right]^\gamma} \quad (\text{B.18})$$

com

$$b^{-\frac{1}{4}}(\eta_i) = \frac{1}{b_0^{\frac{1}{4}} + b_1^{\frac{1}{4}} \tanh\left(\frac{\eta_i}{\tau}\right)}, \quad (\text{B.19a})$$

$$a_\mu^2 = [a_m^2, a_y^2], \quad (\text{B.19b})$$

$$a_m^2 = \Delta z^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos\left(\frac{2m\pi}{p} - \Delta\phi\right) \quad (\text{B.19c})$$

e

$$a_y^2 = \Delta z^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cosh(y). \quad (\text{B.19d})$$

A seguir, o método dos resíduos será aplicado de maneira direta e nenhuma revisão sobre esse tema será feita, logo assume-se que o leitor tenha conhecimento de tal formalismo. Os detalhes elementares sobre o método dos resíduos podem ser encontrados, por exemplo, nas Ref. [126] e [59]. Além disso, os desenvolvimentos subsequentes são baseados no Apêndice B.2 da Ref. [107].

Em virtude da estrutura das integrais em (B.18), isto é, o contorno simétrico (fechado), podemos usar o método de resíduos para solucionar cada uma das integrais. De acordo com a teoria dos resíduos a integral na variável  $\eta_1$  possui dois polos reais de ordem  $\gamma$  em  $c_0\eta_1 = c_0\eta_2 \pm a_\mu$  e polos de primeira ordem (simples) na função tangente hiperbólica  $\tanh(\eta_1/\tau) = -\alpha^2$ , com  $\alpha^2 = b_0^{\frac{1}{4}}/b_1^{\frac{1}{4}}$ .

Os polos associados a função tangente hiperbólica na verdade constituem um conjunto infinito de polos. Utilizando a representação logarítmica [83, 75]

$$\operatorname{arctanh}(z) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right) \quad (\text{B.20})$$

e a propriedade de periodicidade  $\tanh(z + k\pi i) = \tanh(z)$ , para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , é possível mostrar que os infinitos polos relacionados a tangente hiperbólica em (B.18) são dados pela relação

$$\eta_{1k} = \eta_{10} + \tau k \pi i, \quad (\text{B.21a})$$

tal que  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , com as quantidades

$$\eta_{10} = -\frac{\tau \pi i}{2} - \tau g \quad (\text{B.21b})$$

e

$$g = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} \right). \quad (\text{B.21c})$$

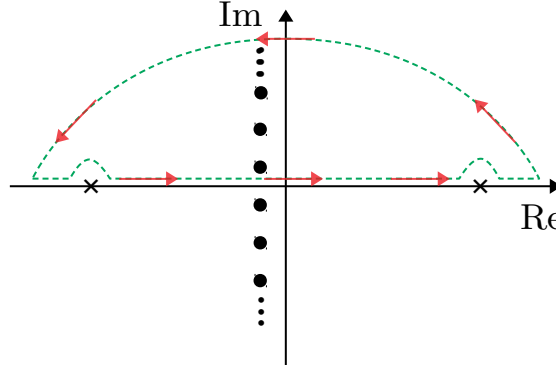
Na presente situação, é conveniente escolher um contorno que permite “livrar” os polos de ordem  $\gamma$ , uma vez que as regras para polos simples são mais fáceis de se trabalhar. Com isso em mente, seguindo o contorno mostrado na Figura 36, o resíduo  $R(z_0)$  do integrando no polo  $z_0$  pode ser facilmente computado pela regra [126]

$$R(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z), \quad (\text{B.22})$$

na qual  $f(z)$  é uma função arbitrária com um polo simples em  $z = z_0$  e que representa de forma simbólica o integrando da variável  $\eta_1$  em (B.18).

Denominando  $h(\eta_1) = b_0^{\frac{1}{4}} + b_1^{\frac{1}{4}} \tanh(\eta_1/\tau)$  e observando que  $h(\eta_{1k}) = 0$ , pois  $\eta_{1k}$  são polos, podemos expandir a função  $h(\eta_1)$  em série de Taylor em torno do ponto  $\eta_{1k}$ :

$$\begin{aligned} h(\eta_1) &= h(\eta_{1k}) + \frac{(\eta_1 - \eta_{1k})}{1!} h'(\eta_{1k}) + \dots \\ &= (\eta_1 - \eta_{1k}) \frac{b_1^{\frac{1}{4}}}{\tau} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\eta_{1k}}{\tau} \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Figura 36 – Contorno admitido para a integração na variável  $\eta_1$ .

Legenda: O símbolo  $\times$  representa os polos reais  $c_0\eta_1 = c_0\eta_2 \pm a_\mu$ , enquanto que  $\bullet$  simboliza os polos  $\eta_{1k}$ . Fonte: Produzido pelo autor, 2024.

Na expansão acima apenas o termo da derivada primeira contribuirá para o resultado final, porque após o uso da regra (B.22) o fator  $(\eta_1 - \eta_{1k})$  em (B.23) é simplificado, enquanto que nos demais termos de ordem superior ele permanece e, conseqüentemente, no limite  $\eta_1 \rightarrow \eta_{1k}$  todos estes são anulados.

De acordo com o método dos resíduos, vale a seguinte relação:

$$\oint_C f(z) = 2\pi i \sum \text{Resíduo}[f(z), C] \quad (\text{B.24})$$

A expressão acima diz que, a integral da função  $f(z)$  no contorno fechado  $C$  é igual ao produto  $2\pi i$  vezes o resíduo da função  $f(z)$  no interior do contorno  $C$ . Além disso, pode haver um sinal negativo se o contorno escolhido tem sentido horário, uma vez que o sentido da integração sobre o contorno  $C$  é anti-horário [126]. É importante observar que o resíduo considerado em (B.24), como indicado pelo símbolo de soma, corresponde ao resíduo da função devido a todos os polos de  $f(z)$  compreendidos pelo contorno  $C$ .

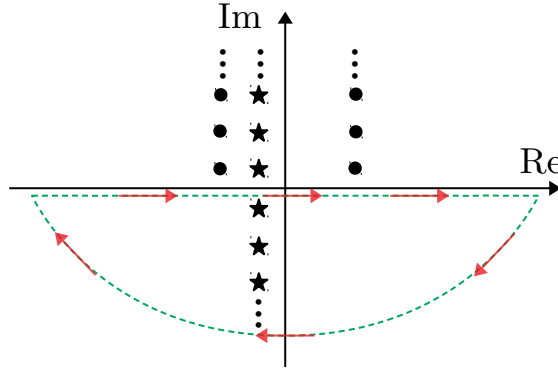
Considerando o contorno indicado pela Figura 36 e as Eqs. (B.22), (B.23) e (B.24), encontra-se que

$$A_\gamma(\mu) = (-1)^\gamma \frac{2\pi i \tau}{b_1^{\frac{1}{4}}} \sum_{k=1}^{\infty} \cosh\left(\frac{\eta_{1k}}{\tau}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 b^{-\frac{1}{4}}(\eta_2) \frac{1}{[c_0^2(\eta_{1k} - \eta_2)^2 - a_\mu^2]^\gamma}. \quad (\text{B.25})$$

Enfatiza-se que o surgimento do somatório em (B.25) é devido a definição do método dos resíduos em (B.24).

Observando a estrutura da integração em (B.25) nota-se que é possível replicar o raciocínio anterior para sua solução. Agora existem  $k$ -polos de ordem  $\gamma$  em  $c_0\eta_2 = c_0\eta_{1k} \pm a_\mu$ , além do conjunto infinito de polos

$$\eta_{2\ell} = \eta_{20} + \tau \ell \pi i \quad (\text{B.26})$$

Figura 37 – Contorno admitido para a integração na variável  $\eta_2$ .

Legenda: O símbolo  $\bullet$  representa os polos  $c_0\eta_2 = c_0\eta_{1k} \pm a_\mu$ , enquanto que  $\star$  simboliza os polos  $\eta_{2\ell} = \eta_{2\ell} + \tau\ell\pi i$ . Fonte: Produzido pelo autor, 2024.

associados a tangente hiperbólica, com  $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e  $\eta_{20} = \eta_{10}$ . Contudo, agora é conveniente escolher o contorno mostrado na Figura 37, que envolve apenas os polos simples devido a tangente hiperbólica.

De forma semelhante define-se  $\bar{h}(\eta_2) = b_0^{\frac{1}{4}} + b_1^{\frac{1}{4}} \tanh(\eta_2/\tau)$ , cuja expansão em série de Taylor em torno do ponto  $\eta_{2\ell}$  fornece

$$\bar{h}(\eta_2) = (\eta_2 - \eta_{2\ell}) \frac{b_1^{\frac{1}{4}}}{\tau} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\eta_{2\ell}}{\tau}\right) + \dots \quad (\text{B.27})$$

Portanto, admitindo o contorno da Figura 37 e considerando as Eqs. (B.24), (B.25) e (B.27), após algumas simplificações, obtém-se que

$$A_\gamma(\mu) = \frac{4\pi^2\tau^2}{(\pi c_0\tau)^{2\gamma}} \frac{\sinh^4(g)}{b_1^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{-\infty} \frac{1}{[(k-\ell)^2 + \Lambda_\mu^2]^\gamma}, \quad (\text{B.28})$$

na qual foi definida a quantidade

$$\Lambda_\mu^2 = \left( \frac{a_\mu}{c_0\pi\tau} \right)^2. \quad (\text{B.29})$$

O duplo somatório em (B.28) pode ser substituído por um único somatório utilizando uma mudança de índices ( $\ell \rightarrow -\tilde{\ell}$ ) e observando o comportamento (padrão) dos primeiros termos da série produzida pelo duplo somatório. Então, procedendo desta maneira encontra-se que

$$A_\gamma(\mu) = \frac{4\pi^2\tau^2}{(\pi c_0\tau)^{2\gamma}} \frac{\sinh^4(g)}{b_1^{\frac{1}{2}}} S_\gamma(\mu), \quad (\text{B.30})$$

com a definição da soma

$$S_\gamma(\mu) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{[r^2 + \Lambda_\mu^2]^\gamma}. \quad (\text{B.31})$$

Todas as quantidades expostas no resultado acima já foram definidas anteriormente. A Eq. (B.30) corresponde ao resultado para as integrações com a forma apresentada em (B.18).

### B.3 Métrica acústica para o BEC: inversão da matriz $g^{\mu\nu}$

Nesse apêndice os detalhes matemáticos cruciais para o estabelecimento da Eq. (4.24) serão apresentados. Por questões de comodidade e clareza da apresentação, vamos reproduzir as Eq. (4.21) e (4.22), respectivamente,

$$f^{\mu\nu} = -U^{-1}M^{\mu\nu} \quad (\text{B.32a})$$

e

$$M^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & v^j \\ \dots & \cdot & \dots \\ v^i & \vdots & -(c^2\delta^{ij} - v^i v^j) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.32b})$$

A partir da Eq. (B.32a), tomando o determinante em ambos os lados, segue imediatamente que

$$\text{Det}(f^{\mu\nu}) = (U)^{-(d+1)}\text{Det}(M^{\mu\nu}). \quad (\text{B.33})$$

O resultado acima foi estabelecido com o auxílio da propriedade dos determinantes  $\text{Det}(\epsilon A) = \epsilon^\alpha \text{Det}(A)$ , para uma matriz quadrada  $A$ , de ordem  $\alpha$  e qualquer constante  $\epsilon$ . Como será visto, a maior parte do desenvolvimento desse apêndice se resume, basicamente, em realizar operações adequadas sobre a matriz  $M^{\mu\nu}$ .

Observando a estrutura da matriz  $M^{\mu\nu}$ , especificamente a entrada  $M^{00} = 1$ , podemos utilizar a regra de Chió para calcular o seu determinante. Para uma definição objetiva do método de Chió veja a Ref. [127, p. 259]. Explicitamente, segundo a Eq. (B.32b), a matriz  $M^{\mu\nu}$  tem a forma

$$M^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & v_x & v_y & v_z & \dots & v_w \\ v_x & -(c^2 - v_x^2) & v_x v_y & v_x v_z & \dots & v_x v_w \\ v_y & v_y v_x & -(c^2 - v_y^2) & v_y v_z & \dots & v_y v_w \\ v_z & v_z v_x & v_z v_y & -(c^2 - v_z^2) & \dots & v_z v_w \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_w & v_w v_x & v_w v_y & v_w v_z & \dots & -(c^2 - v_w^2) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

Então, de acordo com a regra de Chió, o determinante da matriz  $M^{\mu\nu}$  será igual ao determinante da matriz

$$N^{ij} = -c^2 I_{d \times d}^{ij},$$

onde  $I_{d \times d}^{ij}$  representa a matriz identidade de ordem  $d$ . Note que, ambas as matrizes  $M^{\mu\nu}$  e  $N^{ij}$  são quadradas, mas com ordens distintas, especificamente  $(d+1)$  e  $d$ , nessa ordem. Assim,

$$\text{Det}(M^{\mu\nu}) = \text{Det}(N^{ij}) = (-c^2)^d. \quad (\text{B.35})$$

Conforme discutido no Capítulo 4, no regime da aproximação quasiclássica, é possível estabelecer a igualdade

$$f^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.36})$$

com  $g = \text{Det}(g_{\mu\nu})$ . Observando que  $\text{Det}(g^{\mu\nu}) = g^{-1}$ , a operação do determinante em ambos os lados dessa relação fornece

$$\sqrt{-g} = [-\text{Det}(f^{\mu\nu})]^{\frac{1}{(d-1)}}. \quad (\text{B.37})$$

Portanto, a partir das Eqs. (B.32a) e (B.36) podemos escrever

$$g^{\mu\nu} = -\frac{U^{-1}}{\sqrt{-g}}M^{\mu\nu},$$

que com o auxílio das Eqs. (B.37), (B.33) e (B.35), após as devidas simplificações, assume a forma

$$g^{\mu\nu} = -\left(\frac{c^d}{U}\right)^{-\frac{2}{(d-1)}}M^{\mu\nu}. \quad (\text{B.38})$$

A partir da Eq. (B.38) é uma questão de álgebra matricial mostrar que

$$g_{\mu\nu} = -\left(\frac{c^d}{U}\right)^{\frac{2}{(d-1)}}(M^{\mu\nu})^{-1}, \quad (\text{B.39})$$

com  $(M^{\mu\nu})^{-1}$  representando a matriz inversa de  $M^{\mu\nu}$ , definida de forma compacta e expandida nas Eqs. (B.32b) e (B.34), respectivamente. Para encontrar a matriz inversa  $g_{\mu\nu}$  na Eq. (B.39) primeiro multiplicamos a Eq. (B.38) pela esquerda por  $g_{\mu\nu}$  e fazemos uso da identidade  $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = I$ . Em seguida, realizamos um procedimento similar, em que multiplica-se a expressão resultante pela direita com a matriz  $(M^{\mu\nu})^{-1}$  e novamente utiliza-se a propriedade  $M^{\mu\nu}(M^{\mu\nu})^{-1} = I$ .

Para determinar a inversa da matriz  $M^{\mu\nu}$  é conveniente utilizar o método de inversão de Gauss-Jordan. Basicamente, a ideia da técnica consiste em realizar operações coordenadas entre as linhas da matriz de interesse de modo a transformá-la na matriz identidade. Em seguida, aplica-se o mesmo conjunto sequencial de operações sobre a matriz identidade, de modo que, ao final do processo, encontra-se a matriz inversa desejada. Para uma noção mais detalhada do método veja, por exemplo, a Ref. [59, p. 185-186].

A seguir, por questões de clareza e objetividade, vamos destacar cada uma das operações realizadas, apresentando o resultado de sua aplicação sobre a matriz inicial – Eq. (B.34). Comumente, os livros textos apresentam a matriz para inversão e a matriz identidade lado a lado, permitindo visualizar instantaneamente os efeitos das operações realizadas em ambas. Entretanto, em consequência da estrutura extensa da matriz  $M^{\mu\nu}$ , Eq. (B.34), primeiro vamos realizar as operações que transformam  $M^{\mu\nu}$  na matriz identidade e em seguida reproduzir as mesmas operações sobre a matriz identidade.

**1ª OPERAÇÃO:** Subtrair das linhas  $L_2, L_3, L_4, \dots$  e  $L_\alpha$  os produtos  $v_x L_1, v_y L_1, v_z L_1, \dots$  e  $v_w L_1$ , respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & v_x & v_y & v_z & \dots & v_w \\ 0 & -c^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ \vdots \\ L_\alpha \end{matrix}.$$

Por particidade, as linhas serão devidamente identificadas ao lado de cada matriz.

**2ª OPERAÇÃO:** Multiplicar as linhas  $L_2, L_3, L_4, \dots$  e  $L_\alpha$  por  $-c^{-2}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & v_x & v_y & v_z & \dots & v_w \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ \vdots \\ L_\alpha \end{matrix}.$$

**3ª OPERAÇÃO:** Realizar a sequência de operações  $L_1 - v_x L_2, L_1 - v_y L_3, L_1 - v_z L_4, \dots$  e  $L_1 - v_w L_\alpha$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ \vdots \\ L_\alpha \end{matrix}.$$

Conforme explicitado anteriormente, agora devemos reproduzir as mesmas 3 operações destacadas sobre a matriz identidade  $I_{\alpha \times \alpha}$ , com  $\alpha = d + 1$ , de maneira que ao final vamos encontrar a matriz inversa desejada. Portanto, considerando a matriz identidade  $I_{\alpha \times \alpha}$ , temos o seguinte.

**1ª OPERAÇÃO:** Subtrair das linhas  $L_2, L_3, L_4, \dots$  e  $L_\alpha$  os produtos  $v_x L_1, v_y L_1, v_z L_1, \dots$  e  $v_w L_1$ , respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -v_x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -v_y & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_w & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ \vdots \\ L_\alpha \end{matrix}.$$

**2ª OPERAÇÃO:** Multiplicar as linhas  $L_2, L_3, L_4, \dots$  e  $L_\alpha$  por  $-c^{-2}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_x c^{-2} & -c^{-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_y c^{-2} & 0 & -c^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ v_z c^{-2} & 0 & 0 & -c^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_w c^{-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & -c^{-2} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ \vdots \\ L_\alpha \end{matrix}.$$

**3ª OPERAÇÃO:** Realizar a sequência de operações  $L_1 - v_x L_2, L_1 - v_y L_3, L_1 - v_z L_4, \dots$  e  $L_1 - v_w L_\alpha$ :

$$\begin{bmatrix} 1 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + \dots + v_w^2)c^{-2} & v_x c^{-2} & v_y c^{-2} & v_z c^{-2} & \dots & v_w c^{-2} \\ v_x c^{-2} & -c^{-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_y c^{-2} & 0 & -c^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ v_z c^{-2} & 0 & 0 & -c^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_w c^{-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & -c^{-2} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ \vdots \\ L_\alpha \end{matrix}.$$

Evidenciando o fator comum  $c^{-2}$  e identificando o módulo da velocidade  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + \dots + v_w^2$ , temos que

$$(M^{\mu\nu})^{-1} = c^{-2} \begin{bmatrix} (c^2 - v^2) & \vdots & v^j \\ \dots\dots\dots & \cdot & \dots \\ v^i & \vdots & -\delta_{ij} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.40})$$

Esse resultado corresponde à inversa da matriz (B.32b).

Considerando as Eqs. (B.39) e (B.40), além da expressão para a velocidade do som  $c^2 = Un_0/m$ , é uma questão de álgebra mostrar que

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{n_0}{cm} \right)^{\frac{2}{(d-1)}} \begin{bmatrix} -(c^2 - v^2) & \vdots & -v_j \\ \dots\dots\dots & \cdot & \dots \\ -v_i & \vdots & \delta_{ij} \end{bmatrix}.$$

Portanto, em vista do resultado acima, demonstramos detalhadamente a Eq. (4.24), que corresponde à matriz de representação para as componentes do tensor métrico covariante  $g_{\mu\nu}$ , o qual está associado ao espaço-tempo curvo efetivo percebido pelas flutuações de fase na função de onda do condensado.



# APÊNDICE C – Detalhes matemáticos

## referentes ao Capítulo 5

### C.1 Equações de movimento

Por questões de comodidade e facilitação dos argumentos, vamos reproduzir as Eqs. (5.1) e (5.2), a saber,

$$S_{\text{tot}} = S_{\varphi} + S_{\text{p}} + S_{\text{int}}, \quad (\text{C.1})$$

com

$$S_{\varphi} = \int dt \int dV \frac{(\partial_{\mu}\varphi)(\partial^{\mu}\varphi)}{2}, \quad (\text{C.2a})$$

$$S_{\text{p}} = \int dt \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} \quad (\text{C.2b})$$

e

$$S_{\text{int}} = -g \int dt \int dV \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\varphi. \quad (\text{C.2c})$$

Cada uma das quantidades expostas nas expressões acima já foram apropriadamente definidas na Seção 5.2. De maneira geral, a ação (C.1) depende explicitamente das coordenadas de espaço-tempo  $x_i$ , do campo escalar  $\varphi$  e das derivadas do campo  $\partial_{\mu}\varphi$ .

Para a variação da ação com respeito ao campo  $\varphi$ , tratado nesse processo como variável explícita, é crucial observar que a ação da partícula  $S_{\text{p}}$ , Eq. (C.2b), depende (explicitamente) apenas das coordenadas  $x_i$ . Logo, a variação desse termo com respeito ao campo oferece uma contribuição nula. Para os demais termos,  $S_{\varphi} + S_{\text{int}}$ , é possível identificar a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{(\partial_{\mu}\varphi)(\partial^{\mu}\varphi)}{2} - g\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\varphi. \quad (\text{C.3})$$

Tendo em vista as discussões da Seção 2.2, para uma densidade de lagrangiana dependente do campo e sua primeira derivada, Eq. (2.33), valem as equações de Euler-Lagrange (2.39), ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_{\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\varphi)} \right] = 0. \quad (\text{C.4})$$

Então, considerando (C.3) e (C.4) é uma questão de derivar as quantidades, para encontrar as contribuições individuais

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -g\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi,$$

de modo que a equação de movimento para o campo escalar sem massa  $\varphi$ , associado a ação (C.1), será dada por

$$\square \varphi = -g\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (\text{C.5})$$

O mesmo raciocínio apresentado acima pode ser aplicado para encontrar as equações de movimento associadas a partícula pontual. Observando que  $S_\varphi$  depende exclusivamente das derivadas do campo, e que estas são tratadas como variáveis independentes, sua contribuição para a variação da ação com respeito as coordenadas  $x_i$  é nula. Então, os demais termos nos permitem escrever

$$\begin{aligned} S_p + S_{\text{int}} &= \int dt \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + -g \int dt \int dV \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi \\ &= \int dt \left[ \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - g\varphi(\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

e identificar a lagrangiana

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - g\varphi(\mathbf{x}), \quad (\text{C.7})$$

que possui a mesma estrutura da Eq. (2.9) com  $V(\mathbf{x}) = g\varphi(\mathbf{x})$ . Observe a eliminação da integral de volume em (C.6) pela função delta de Dirac. Portanto, utilizando as equações de Euler-Lagrange na versão de sistemas pontuais, Eq. (2.8),

$$\frac{dL}{dq_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{dq_i} \right) = 0, \quad (\text{C.8})$$

com  $q_i = x_i$ , temos

$$\frac{dL}{dx_i} = -g \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (\text{C.9})$$

e

$$\frac{dL}{d\dot{x}_i} = m\dot{x}_i. \quad (\text{C.10})$$

Reunindo ambas as contribuições acima, Eqs. (C.9) e (C.10), conforme exige a Eq. (C.8), encontra-se como resultado final

$$m \frac{dv_i}{dt} = -g \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (\text{C.11})$$

onde foi identificada a velocidade  $v_i = \dot{x}_i$ . Assim, diante dos resultados (C.5) e (C.11) as discussões desse apêndice estão concluídas.

## C.2 Expressões aproximadas para a dispersão de velocidades no regime de tempos longos

### C.2.1 Caso das condições de Dirichlet, Neumann e Mistas

Nessa primeira parte desse apêndice vamos analisar a expressão  $R(r, \tau_a)$ , Eq. (5.14a), no regime de tempos longos, isto é, para  $\tau_a \gg 1$ . Por questões de objetividade e levando em conta que a dispersão paralela, Eq. (5.18), é escrita em termos da função  $Q(r, t)$ , Eq. (5.14c), vamos desenvolver cada contribuição de  $R(r, \tau_a)$  separadamente. Antes de proceder é útil e prático definirmos as seguintes seguintes quantidades:

$$R^{(i)} = P^{(i)} + Q^{(i)}, \quad (\text{C.12})$$

e

$$R_{x_a}^{(i)} = P_{x_a}^{(i)} + Q_{x_a}^{(i)}, \quad (\text{C.13})$$

com

$$P^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(i)} P(n, \tau_a), \quad (\text{C.14})$$

$$Q^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(i)} Q(n, \tau_a), \quad (\text{C.15})$$

$$P_{x_a}^{(i)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} P(x_a - n, \tau_a) \quad (\text{C.16})$$

e

$$Q_{x_a}^{(i)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} Q(x_a - n, \tau_a), \quad (\text{C.17})$$

onde o índice “i” indica a condição de contorno em questão, a saber, i=(D, N, DN, ND). As definições acima nos auxiliam a estudar isoladamente as contribuições independentes e dependentes da posição  $x_a$ . A função  $P(r, \tau_a)$  está definida na Eq. (5.14b), ao passo que os coeficientes  $\gamma_n^{(i)}$  e  $\delta_n^{(i)}$  estão definidos nas Eqs. (3.83a) e (3.83b), respectivamente. Para garantir a organização do texto e tornar claro o método utilizado em nossos desenvolvimentos, subseções particulares serão dedicadas para as quantidades  $R^i$ , que independem de  $x_a$ , e  $R_{x_a}^{(i)}$ , as quais dependem da posição  $x_a$ . Além disso, a fim de evitar a repetição excessiva de referências ao longo do texto, desde já destacamos que todas as relações matemáticas utilizadas para as manipulações das expressões podem ser encontradas nas Refs. [75] e [87], a partir das quais foram retiradas.

### C.2.1.1 Termos independentes da posição

Para o regime de tempos longos, ou seja,  $\tau_a \gg 1$  a Eq. (C.14) pode ser propriamente escrita na forma

$$P^{(i)} = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2}{\tau_a} \right)^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^{(i)}}{n^{2-2k}}, \quad (\text{C.18})$$

onde foi utilizada uma expansão em série para o denominador de  $P^{(i)}$ .

No caso das condições de Dirichlet e Neumann  $\gamma_n^{(D)} = \gamma_n^{(N)} = 1$ . Logo, uma vez que esses coeficientes são independentes do índice de soma, encontra-se que

$$P^{(J)} = -\frac{\pi^2}{3} + \frac{4}{\tau_a^2}, \quad (\text{C.19})$$

para os termos dominantes, com  $J=(D,N)$ . Para estabelecer o resultado acima, foi utilizada a relação da Zeta de Riemann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \zeta(p), \quad \text{Re}(p) > 1, \quad (\text{C.20})$$

e o fato de que  $\zeta(-2m) = 0$ , onde  $m$  representa um número natural.

Para as condições de contorno mistas, observando que  $\gamma_n^{(DN)} = \gamma_n^{(ND)} = (-1)^n$ , a partir da Eq. (C.18), obtemos

$$P^{(M)} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{4}{\tau_a^2}, \quad (\text{C.21})$$

para os termos dominantes, com  $M=(DN,ND)$ . Para estabelecer o resultado anterior usamos a relação

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^p} = (1 - 2^{1-p}) \zeta(p), \quad \text{Re}(p) > 0, \quad (\text{C.22})$$

além do fato já mencionado de que  $\zeta(-2m) = 0$ , para todo  $m$  natural.

Para a função  $Q^{(i)}$ , seguindo um procedimento similar, primeiro reescrevemos a Eq. (C.15) na forma

$$Q^{(i)} = \tau_a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \left( \frac{2}{\tau_a} \right)^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^{(i)}}{n^{4-2k}}, \quad (\text{C.23})$$

onde foi utilizada a seguinte expansão em série para o logaritmo natural:

$$\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)}, \quad x^2 < 1. \quad (\text{C.24})$$

Agora, usando as mesmas relações e propriedades aplicadas anteriormente para a quantidade  $P^{(i)}$ , a saber, Eqs. (C.20) e (C.22), podemos encontrar para as condições de Dirichlet e Neumann

$$Q^{(J)} = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{8}{3\tau_a^2} \quad (\text{C.25})$$

e

$$Q^{(M)} = -\frac{\pi^2}{3} - \frac{8}{3\tau_a^2} \quad (C.26)$$

para as condições mistas.

A partir da Eq. (C.12) e dos resultados (C.19), (C.21), (C.25), (C.26), podemos estabelecer

$$R^{(J)} = \frac{\pi^2}{3} + \frac{4}{3\tau_a^2} \quad (C.27)$$

e

$$R^{(M)} = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{4}{3\tau_a^2}, \quad (C.28)$$

com  $J=(D,N)$  para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann ao passo que  $M=(DN, ND)$  representa ambas as condições mistas, ou seja, vale para as configurações DN e ND.

### C.2.1.2 Termos dependentes da posição

Para o termo  $P_{x_a}^{(i)}$ , Eq. (C.16), no regime de tempos longos,  $\tau_a \gg 1$ , podemos escrever

$$P_{x_a}^{(i)} = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2}{\tau_a} \right)^{2k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_n^{(i)}}{(x_a - n)^{2-2k}}, \quad (C.29)$$

onde novamente consideramos uma expansão em série para o denominador de  $P_{x_a}^{(i)}$ . No caso das condições de Dirichlet e Neumann  $\delta_n^{(D)} = -1$  e  $\delta_n^{(N)} = 1$ , respectivamente. Nota-se que, esses coeficientes diferem entre si apenas por um sinal e ambos são independentes do índice de soma. Assim, a partir da Eq. (C.29), podemos escrever

$$\begin{aligned} P_{x_a}^{(J)} &= -2\delta^{(J)} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2}{\tau_a} \right)^{2k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x_a - n)^{2-2k}} \\ &= -2\delta^{(J)} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2}{\tau_a} \right)^{2k} \left[ \frac{-1}{x_a^{2-2k}} + \sum_{j=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + jx_a)^{2-2k}} \right], \end{aligned} \quad (C.30)$$

com  $\delta^{(J)} = [\delta^{(D)}, \delta^{(N)}] = [-1, +1]$ . A segunda igualdade é obtida dividindo o somatório inicial em duas partes, uma com intervalo positivo e outra com intervalo negativo. Em seguida, o índice de soma do intervalo negativo é renomeado. Finalmente, as duas parcelas resultantes, com denominadores de sinais opostos, são escritas de forma compacta por meio da somatória em  $j$ .

Utilizando a relação

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^s} = \zeta(s, a), \quad \text{Re}(s) > 1, \quad (C.31)$$

na Eq. (C.30) obtemos que

$$P_{x_a}^{(J)} = -2\delta^{(J)} \left[ -\frac{x_a^{-2}}{[1 - (2x_a/\tau_a)^2]} + \left(\frac{2}{\tau_a}\right)^2 \sum_{j=\pm 1} \sum_{m=-1}^{\infty} \left(\frac{2}{\tau_a}\right)^{2m} \zeta(-2m, jx_a) \right], \quad (\text{C.32})$$

onde realizamos a soma do primeiro termo e renomeamos o índice de soma no segundo membro.

Por fim, fazendo uso da relação entre a zeta e os polinômios de Bernoulli

$$\zeta(-n, q) = -\frac{B_{n+1}(q)}{n+1}, \quad (\text{C.33})$$

onde  $n$  é um inteiro não negativo, e da propriedade dos polinômios de Bernoulli

$$(-1)^n B_n(-x) = B_n(x) + nx^{n-1}, \quad (\text{C.34})$$

após algum trabalho algébrico, além de simplificações, encontramos que

$$P_{x_a}^{(J)} = -\delta^{(J)} 2\pi^2 \csc^2(\pi x_a). \quad (\text{C.35})$$

Para as condições de contorno do tipo mistas  $\delta_n^{(\text{DN})} = (-1)^{n+1}$  e  $\delta_n^{(\text{ND})} = (-1)^n$ . Então, a partir da (C.29) temos que

$$\begin{aligned} P_{x_a}^{(\text{M})} &= 2\delta^{(\text{M})} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\tau_a}\right)^{2k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x_a - n)^{2-2k}}, \\ &= 2\delta^{(\text{M})} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\tau_a}\right)^{2k} \left[ -\frac{1}{x_a^{2-2k}} + \sum_{j=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + jx_a)^{2-2k}} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

onde  $\delta^{(\text{M})} = [\delta^{(\text{DN})}, \delta^{(\text{ND})}] = [+1, -1]$ . Destaca-se que para estabelecer a segunda igualdade realizamos um procedimento similar ao que foi usado para  $P^{(J)}$  – para os detalhes consulte o texto abaixo da Eq. (C.30).

Através da relação

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+a)^s} = 2^{-s} \left[ \zeta\left(s, \frac{a}{2}\right) - \zeta\left(s, \frac{a+1}{2}\right) \right], \quad \text{Re}(s) > 0, \quad (\text{C.37})$$

a soma sobre  $n$  na Eq. (C.36) pode ser executada e, após uma mudança de índices adequada, usar a (C.33) para escrever a expressão resultante em termos dos polinômios de Bernoulli. Portanto, considerando as Eqs. (C.35), (C.37), (C.33) e a identidade

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x), \quad (\text{C.38})$$

encontramos que

$$P_{x_a}^{(\text{M})} = \delta^{(\text{M})} 2\pi^2 \cot(\pi x_a) \csc(\pi x_a). \quad (\text{C.39})$$

Para a função  $Q_{x_a}^{(i)}$  podemos escrever uma expressão similar as estruturas que temos visto até então, a saber,

$$Q_{x_a}^{(i)} = 2\tau_a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \left(\frac{2}{\tau_a}\right)^{2k-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_n^{(i)}}{(n-x_a)^{4-2k}}, \quad (\text{C.40})$$

onde a Eq. (C.24) foi utilizada. Dado que todas as manipulações matemáticas são similares aos desenvolvimentos realizados até o momento, a fim de evitar repetições, na sequência seremos mais sucintos.

Para as condições de Dirichlet e Neumann, temos

$$\begin{aligned} Q_{x_a}^{(J)} &= \tau_a^2 \delta^{(J)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \left(\frac{2}{\tau_a}\right)^{2k} \left[ -\frac{1}{x_a^{4-2k}} + \sum_{j=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+jx_a)^{4-2k}} \right], \\ &= \delta^{(J)} 4\pi^2 \csc^2(\pi x_a). \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

Na expressão acima, a primeira igualdade foi estabelecida utilizando a Eq. (C.31) para realizar a soma sobre o índice  $n$  e em seguida a Eq. (C.33) foi empregada para expressar a solução em termos dos polinômios de Bernoulli. Na sequência, a identidade (C.34) foi usada para desenvolver a expressão resultante e obter a segunda igualdade. Além disso, os seguintes resultados também foram utilizados

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{2k}}{2k-1} = y \operatorname{arctanh}(y) \quad (\text{C.42a})$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{2k+3} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} \operatorname{arctanh}(y). \quad (\text{C.42b})$$

No caso das condições mistas, temos que

$$\begin{aligned} Q_{x_a}^{(M)} &= -\tau_a^2 \delta^{(J)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \left(\frac{2}{\tau_a}\right)^{2k} \left[ -\frac{1}{x_a^{4-2k}} + \sum_{j=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+jx_a)^{4-2k}} \right], \\ &= -\delta^{(M)} 4\pi^2 \cot(\pi x_a) \csc(\pi x_a). \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Novamente, para estabelecer o resultado acima seguimos um procedimento similar ao que foi empregado na situação anterior. Primeiro, usamos a Eq. (C.37) para realizar a soma no índice  $n$  e em seguida Eq. (C.33) para escrever o resultado em termos dos polinômios de Bernoulli. Por fim, o cálculo é concluído através das identidades (C.34) e (C.38), além das Eqs. (C.42).

Diante dos resultados para cada uma das funções dependentes da posição  $x_a$ , especificamente, Eqs. (C.35), (C.39), (C.41) e (C.43), para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann encontramos que

$$R_{x_a}^{(J)} = \delta^{(J)} 2\pi^2 \csc^2(\pi x_a), \quad (\text{C.44})$$

enquanto que para as condições de contorno do tipo mistas obtemos

$$R_{x_a}^{(M)} = -\delta^{(M)} 2\pi^2 \cot(\pi x_a) \csc(\pi x_a), \quad (\text{C.45})$$

com  $\delta^{(J)} = [\delta^{(D)}, \delta^{(N)}] = [-1, +1]$  e  $\delta^{(M)} = [\delta^{(DN)}, \delta^{(ND)}] = [+1, -1]$ .

### C.2.2 Caso da condição quasiperiódica

Semelhante a abordagem introduzida para o caso dos planos paralelos (Seção C.2.1), inicialmente, definimos convenientemente a quantidade

$$U(\beta, \tau_a) = \sum_{n=1}^{\infty} U(n, \beta, \tau_a) = S(\beta, \tau_a) + T(\beta, \tau_a), \quad (\text{C.46})$$

com

$$S(\beta, \tau_a) = \sum_{n=1}^{\infty} S(n, \beta, \tau_a) \quad (\text{C.47})$$

e

$$T(\beta, \tau_a) = \sum_{n=1}^{\infty} T(n, \beta, \tau_a). \quad (\text{C.48})$$

As funções  $U(n, \beta, \tau_a)$ ,  $S(n, \beta, \tau_a)$  e  $T(n, \beta, \tau_a)$  mostradas acima estão definidas nas Eqs. (5.48a), (5.48b) e (5.48c), respectivamente.

Para desenvolver a Eq. (C.47) é crucial observar que podemos escrever

$$S(\beta, \tau_a) = -\frac{1}{(\tau_a)^2} \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{1}{(\tau_a)^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\beta n)}{n^{-2m}}, \quad (\text{C.49})$$

onde temos considerado uma expansão em série para o denominador e renomeado os índices de soma. Agora, o primeiro termo da Eq. (C.49),  $m = -1$ , pode ser resolvido por meio da relação

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n} \left( \frac{x}{2\pi} \right), \quad (\text{C.50})$$

onde  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , e  $B_n(z)$  são os polinômios de Bernoulli de ordem  $n$  na variável  $z$ . O restante dos termos da série na Eq. (C.49) podem ser computados usando a fórmula da série para a função cosseno,

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad (\text{C.51})$$

e observando a propriedade da zeta  $\zeta(-2n) = 0$ , onde  $n = 1, 2, \dots$ . Assim, prosseguindo conforme indicado, obtemos

$$S(\beta, \tau_a) = -\pi^2 B_2(\beta) + \frac{1}{2\tau_a^2}. \quad (\text{C.52})$$

De modo similar, utilizando a Eq. (C.24), para a função  $T(\beta, \tau_a)$ , temos que

$$T(\beta, \tau_a) = \frac{2}{\tau_a^2} \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{\tau_a^{-2m}}{(2m+3)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi\beta n) n^{2m}, \quad (\text{C.53})$$

que a partir das Eqs. (C.50) e (C.51), seguindo os mesmos argumentos apresentados anteriormente, fornece

$$T(\beta, \tau_a) = 2\pi^2 B_2(\beta) - \frac{1}{3\tau_a^2}. \quad (\text{C.54})$$

Diante dos resultados (C.52) e (C.54), a partir da Eq. (C.46), segue que

$$U(\beta, \tau_a) = \pi^2 B_2(\beta) + \frac{1}{6\tau_a^2}. \quad (\text{C.55})$$

É importante enfatizar que a equação acima corresponde a expressão resultante da Eq. (C.46) para o regime de tempos longos, isto é,  $\tau_a \gg 1$ .

### C.3 Expressões aproximadas para a dispersão de velocidades no regime de tempos pequenos

Nesse apêndice, as expressões  $R(n, \tau_a)$  e  $R(x_a - n, \tau_a)$  serão analisadas no regime dos valores de tempo pequenos, isto é, quando  $\tau_a \ll 1$ . A metodologia adotada é semelhante a que foi delineada no Apêndice C.2 e todas as relações matemáticas usadas a seguir podem ser encontradas nas Refs. [75], [79] e [87]. Além disso, uma vez que o método seguido é semelhante ao que foi usado na análise anterior, para o regime de tempo longo, aqui seremos mais objetivos quanto aos detalhes, mas indicaremos todos os passos cruciais quando necessário.

#### C.3.1 Caso das condições de Dirichlet, Neumann e Mistas

##### C.3.1.1 Termos independentes da posição

Primeiro, escrevemos a Eq. (C.14) na forma

$$P^{(i)} = \frac{\tau_a^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^{(i)}}{n^{2k+4}}. \quad (\text{C.56})$$

Agora, observando que para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann os coeficientes  $\gamma_n^{(D)} = \gamma_n^{(N)} = 1$ , a partir das Eqs. (C.20) and (C.56), obtemos que

$$P^{(J)} = \frac{8}{\tau_a^2} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{2m} \zeta(2m), \quad (\text{C.57})$$

onde o índice de soma foi renomeado. Utilizando o resultado

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k t^{2k} \zeta(2k) = -\frac{\pi t}{2} \begin{cases} \cot(\pi t) \\ \coth(\pi t) \end{cases}, \quad |t| < 1, \quad (\text{C.58})$$

encontramos que

$$P^{(J)} = -\frac{\pi^2}{3} + \frac{4}{\tau_a^2} - \frac{2\pi}{\tau_a} \cot\left(\frac{\pi\tau_a}{2}\right), \quad (\text{C.59})$$

com  $J=(D,N)$ .

No caso das condições de contorno do tipo mistas  $\gamma_n^{(DN)} = \gamma_n^{(ND)} = (-1)^n$  e, consequentemente, a partir da Eq. (C.56), temos que

$$P^{(M)} = \frac{\tau_a^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k+4}}, \quad (C.60)$$

que utilizando a Eq. (C.22) fornece

$$P^{(M)} = -\frac{8}{\tau_a^2} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{2m} \zeta(2m) + \frac{16}{\tau_a^2} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{\tau_a}{4}\right)^{2m} \zeta(2m). \quad (C.61)$$

Então, considerando a Eq. (C.58) na expressão acima, encontramos que

$$P^{(M)} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{4}{\tau_a^2} - \frac{\pi}{\tau_a} \csc\left(\frac{\pi\tau_a}{4}\right) \sec\left(\frac{\pi\tau_a}{4}\right), \quad (C.62)$$

para  $M=(DN, ND)$ .

Analogamente, a partir da Eq. (C.15) podemos escrever

$$Q^{(i)} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^{(i)}}{n^{2k+2}}, \quad (C.63)$$

que para as condições de Dirichlet e Neumann fornece

$$Q^{(J)} = \frac{16}{\tau_a^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{(2m-3)} \left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{2m}, \quad (C.64)$$

onde as Eqs. (C.24) e (C.20) foram utilizadas, além de uma redefinição no índice de soma.

Para as condições de contorno mistas, a partir da (C.63), temos

$$Q^{(M)} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k+2}}, \quad (C.65)$$

que por meio da Eq. (C.22) pode ser escrita como

$$Q^{(M)} = \frac{16}{\tau_a^2} \left[ -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{(2m-3)} \left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{2m} + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{(2m-3)} \left(\frac{\tau_a}{4}\right)^{2m} \right]. \quad (C.66)$$

Utilizando os resultados obtidos para as quantidades  $P^{(i)}$  e  $Q^{(i)}$  podemos facilmente encontrar a função correspondente  $R^{(i)}$  no limite de tempos pequenos. Dado que estamos trabalhando em um regime de tempo tal que  $\tau_a \ll 1$ , para a série da função  $Q^{(i)}$ , é suficiente considerarmos apenas o termo principal nas séries de potências do parâmetro  $\tau_a$ . Assim, para as condições de Dirichlet e Neumann, Eqs. (C.59) e (C.64), encontramos que

$$\begin{aligned} R^{(J)} &= -\frac{\pi^2}{3} + \frac{4}{\tau_a^2} - \frac{2\pi}{\tau_a} \cot\left(\frac{\pi\tau_a}{2}\right) + \tau_a^2 \zeta(4), \\ &\simeq \frac{3\tau_a^2}{2} \zeta(4). \end{aligned} \quad (C.67)$$

Por outro lado, para as condições mistas, Eqs. (C.62) e (C.66), obtemos

$$\begin{aligned} R^{(M)} &= \frac{\pi^2}{6} + \frac{4}{\tau_a^2} - \frac{\pi}{\tau_a} \csc\left(\frac{\pi\tau_a}{4}\right) \sec\left(\frac{\pi\tau_a}{4}\right) - \frac{7\tau_a^2}{8}\zeta(4), \\ &\simeq -\frac{21\tau_a^2}{16}\zeta(4). \end{aligned} \quad (C.68)$$

Enfatiza-se que, em ambos os casos, Eqs. (C.67) e (C.68), as expressões são válidas apenas para valores de tempo tais que  $\tau_a \ll 1$ .

### C.3.1.2 Termos dependentes da posição

A partir da Eq. (C.16), primeiramente escrevemos

$$P_{x_a}^{(i)} = \frac{\tau_a^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{2k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_n^{(i)}}{(n-x_a)^{2k+4}}. \quad (C.69)$$

Considerando as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, com  $\delta_n^{(D)} = -1$  e  $\delta_n^{(N)} = 1$ , respectivamente, podemos dividir o somatório na Eq. (C.69) em duas partes e em seguida renomear o índice de soma da parcela com o intervalo negativo. Procedendo desse modo, encontramos que

$$P_{x_a}^{(J)} = \delta^{(J)} \left[ -\frac{\tau_a^2}{2x_a^4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_a}{2x_a}\right)^{2k} + \frac{8}{\tau_a^2} \sum_{j=\pm 1} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{2m} \zeta(2m, jx_a) \right], \quad (C.70)$$

com  $\delta^{(J)} = [\delta^{(D)}, \delta^{(N)}] = [-1, +1]$ . Entre as Eqs. (C.69) e (C.70), antes de renomear o índice de soma utilizamos a Eq. (C.31) para realizar a soma sobre o índice  $n$ .

O primeiro termo no lado direito da Eq. (C.70) pode ser diretamente calculado ao passo que o segundo termo pode ser computado utilizando a representação integral

$$\zeta(z, q) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1} e^{-qt}}{1 - e^{-t}} dt. \quad (C.71)$$

Portanto, seguindo conforme o indicado, temos

$$P_{x_a}^{(J)} = -\delta^{(J)} \left\{ 2\pi^2 \csc^2(\pi x_a) + \frac{2\pi}{\tau_a} \left[ \cot \left[ \frac{\pi(\tau_a - 2x_a)}{2} \right] + \cot \left[ \frac{\pi(\tau_a + 2x_a)}{2} \right] \right] \right\}. \quad (C.72)$$

Para as condições mistas, a partir da Eq. (C.69), segue que

$$P_{x_a}^{(M)} = -\delta^{(M)} \frac{\tau_a^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{2k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-x_a)^{2k+4}}. \quad (C.73)$$

Consequentemente, usando a Eq. (C.37) encontramos

$$\begin{aligned} P_{x_a}^{(M)} &= \delta^{(M)} \left\{ \frac{\tau_a^2}{2x_a^4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_a}{2x_a}\right)^{2k} \right. \\ &\quad \left. - \frac{8}{\tau_a^2} \sum_{j=\pm 1} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{\tau_a}{4}\right)^{2m} \left[ \zeta\left(2m, \frac{jx_a}{2}\right) - \zeta\left(2m, \frac{1+jx_a}{2}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (C.74)$$

Utilizando a Eq. (C.71) na expressão anterior podemos executar as somas do segundo membro no lado direito e, conseqüentemente, as devidas integrais. Então, após algum trabalho algébrico, encontra-se que

$$P_{x_a}^{(M)} = \delta^{(M)} \left\{ 2\pi^2 \cot(\pi x_a) \csc(\pi x_a) + \frac{2\pi}{\tau_a} \left[ \csc \left[ \frac{\pi(2x_a + \tau_a)}{2} \right] - \csc \left[ \frac{\pi(2x_a - \tau_a)}{2} \right] \right] \right\}, \quad (C.75)$$

com  $\delta^{(M)} = [\delta^{(DN)}, \delta^{(ND)}] = [+1, -1]$ .

Para a função  $Q_{x_a}^{(i)}$ , a partir da Eq. (C.17), temos

$$Q_{x_a}^{(i)} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \left( \frac{\tau_a}{2} \right)^{2k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_n^{(i)}}{(n-x_a)^{2k+2}}. \quad (C.76)$$

No caso das condições de contorno de Dirichlet e Neumann

$$Q_{x_a}^{(J)} = \delta^{(J)} \frac{16}{\tau_a^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(2m-3)} \left( \frac{\tau_a}{2} \right)^{2m} \left[ -\frac{1}{x_a^{2m}} + \sum_{j=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+jx_a)^{2m}} \right], \quad (C.77)$$

que a partir da Eq. (C.31) nos fornece o seguinte resultado:

$$Q_{x_a}^{(J)} = \delta^{(J)} \left[ -\frac{\tau_a}{2x_a^3} \ln \left( \frac{2x_a + \tau_a}{2x_a - \tau_a} \right)^2 + \frac{16}{\tau_a^2} \sum_{j=\pm 1} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(2m, jx_a)}{(2m-3)} \left( \frac{\tau_a}{2} \right)^{2m} \right]. \quad (C.78)$$

Para o caso das condições mistas a função  $Q_{x_a}^{(M)}$  assume uma forma semelhante a Eq. (C.77), a saber,

$$Q_{x_a}^{(M)} = -\delta^{(M)} \frac{16}{\tau_a^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(2m-3)} \left( \frac{\tau_a}{2} \right)^{2m} \left[ -\frac{1}{x_a^{2m}} + \sum_{j=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+jx_a)^{2m}} \right], \quad (C.79)$$

a qual por meio da Eq. (C.37) fornece

$$Q_{x_a}^{(M)} = \delta^{(M)} \left\{ \frac{\tau_a}{2x_a^3} \ln \left( \frac{2x_a + \tau_a}{2x_a - \tau_a} \right)^2 - \frac{16}{\tau_a^2} \sum_{j=\pm 1} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(2m-3)} \left( \frac{\tau_a}{4} \right)^{2m} \left[ \zeta \left( 2m, \frac{jx_a}{2} \right) - \zeta \left( 2m, \frac{1+jx_a}{2} \right) \right] \right\}. \quad (C.80)$$

Finalmente, de posse das expressões úteis para  $P_{x_a}^{(i)}$  e  $Q_{x_a}^{(i)}$ , podemos utilizar a Eq. (C.13) para construir as funções  $R_{x_a}^{(i)}$ . Portanto, para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, a partir das Eqs. (C.72) e (C.78), encontramos

$$\begin{aligned} R_{x_a}^{(J)} &= \delta^{(J)} \left\{ -2\pi^2 \csc^2(\pi x_a) - \frac{2\pi}{\tau_a} \left[ \cot \left[ \frac{\pi(\tau_a - 2x_a)}{2} \right] + \cot \left[ \frac{\pi(\tau_a + 2x_a)}{2} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau_a}{2x_a^3} \ln \left( \frac{2x_a + \tau_a}{2x_a - \tau_a} \right)^2 + \tau_a^2 [\zeta(4, x_a) + \zeta(4, -x_a)] \right\}, \\ &\simeq \delta^{(J)} \left\{ \frac{\tau_a^2 \pi^4}{2} [2 + \cos(2\pi x_a)] \csc^4(\pi x_a) \right\}, \end{aligned} \quad (C.81)$$

enquanto que para as condições de contorno mistas, a partir das Eqs. (C.75) e (C.80), temos

$$\begin{aligned}
 R_{x_a}^{(M)} &= \delta^{(M)} \left\{ 2\pi^2 \cot(\pi x_a) \csc(\pi x_a) + \frac{2\pi}{\tau_a} \left[ \csc \left[ \frac{\pi(2x_a + \tau_a)}{2} \right] + \csc \left[ \frac{\pi(2x_a - \tau_a)}{2} \right] \right] \right. \\
 &\quad + \frac{\tau_a}{2x_a^3} \ln \left( \frac{2x_a + \tau_a}{2x_a - \tau_a} \right)^2 - \frac{\tau_a^2}{16} \left[ \zeta \left( 4, \frac{x_a}{2} \right) + \zeta \left( 4, \frac{-x_a}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. - \zeta \left( 4, \frac{1+x_a}{2} \right) - \zeta \left( 4, \frac{1-x_a}{2} \right) \right] \right\}, \\
 &\simeq \delta^{(M)} \left\{ \frac{-\tau_a^2 \pi^4}{8} [11 + \cos(2\pi x_a)] \cot(\pi x_a) \csc^3(\pi x_a) \right\}, \tag{C.82}
 \end{aligned}$$

com  $\delta^{(J)} = [\delta^{(D)}, \delta^{(N)}] = [-1, +1]$  e  $\delta^{(M)} = [\delta^{(DN)}, \delta^{(ND)}] = [+1, -1]$ . Destaca-se que, nas expressões acima, apenas os termos principais para as séries da função  $Q_{x_a}^{(i)}$  foram considerados, uma vez que lidamos com o regime de tempo  $\tau_a \ll 1$ .

### C.3.2 Caso da condição quasiperiódica

A função  $S(\beta, \tau_a)$ , definida na Eq. (C.47), pode ser desenvolvida observando que

$$S(\beta, \tau_a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_a^2 \cos(2\pi\beta n)}{n^2(n^2 - \tau_a^2)} = \frac{1}{\tau_a^2} \sum_{m=2}^{\infty} (\tau_a)^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\beta n)}{n^{2m}}, \tag{C.83}$$

onde em primeiro lugar consideramos uma expansão em série para o denominador e renomeamos o índice de soma da expressão resultante. Assim, utilizando a relação (C.50) na Eq. (C.83), encontramos que

$$S(\beta, \tau_a) = -\frac{1}{2\tau_a^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m (2\pi\tau_a)^{2m}}{(2m)!} B_{2m}(\beta), \tag{C.84}$$

onde  $B_{2m}(\beta)$  são os polinômios de Bernoulli de ordem  $2m$  na variável  $\beta$ .

De maneira análoga, para a função  $T(\beta, \tau_a)$ , Eq. (C.48), fazendo uso da relação (C.24) e redefinindo o índice de soma, encontramos que

$$T(\beta, \tau_a) = \frac{2}{\tau_a^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tau_a^{2m}}{(2m-3)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\beta n)}{n^{2m}}, \tag{C.85}$$

que mediante a Eq. (C.50) fornece

$$T(\beta, \tau_a) = -\frac{1}{\tau_a^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m (2\pi\tau_a)^{2m}}{(2m-3)(2m)!} B_{2m}(\beta). \tag{C.86}$$

Finalmente, a partir das Eqs. (C.46), (C.84) e (C.86) podemos encontrar a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned}
 U(\beta, \tau_a) &= -\frac{1}{2\tau_a^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(2m-1)(-1)^m (2\pi\tau_a)^{2m}}{(2m-3)(2m)!} B_{2m}(\beta), \\
 &\simeq -\pi^4 \tau_a^2 B_4(\beta), \tag{C.87}
 \end{aligned}$$

onde apenas o termo principal da série foi considerado, visto que  $\tau_a \ll 1$ . Vale ressaltar que, as expressões obtidas nessa parte são válidas apenas para o regime de tempos pequenos.

## C.4 Expressões aproximadas para a dispersão da coordenada espacial confinada e compactificada no regime de tempo longo

A seguir vamos expor alguns detalhes cruciais para o estabelecimento das dispersões associadas a coordenada espacial  $x$  no regime de tempos longos, uma vez que tais expressões fornecem o resultado a partir do qual pode-se inferir a relação matemática para a condição de pequenos deslocamentos. A fim de evitar a repetição excessiva, imediatamente informamos que as identidades matemáticas usadas nas manipulações podem ser encontradas nas referências [87], [79] e [75]. Do contrário, citaremos explicitamente a origem da relação.

### C.4.1 Caso das condições de Dirichlet, Neumann e Mistas

Inicialmente, por questões práticas e de clareza nos desenvolvimentos, é conveniente definirmos as quantidades independentes da posição

$$A^{(i)} = E^{(i)} + H^{(i)} + D^{(i)}, \quad (\text{C.88})$$

$$E^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(i)} E(n, \tau_a), \quad (\text{C.89a})$$

$$H^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(i)} H(n, \tau_a) \quad (\text{C.89b})$$

e

$$D^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(i)} D(n, \tau_a), \quad (\text{C.89c})$$

assim como as quantidades dependentes da posição relativa  $x_a$

$$A_{x_a}^{(i)} = E_{x_a}^{(i)} + H_{x_a}^{(i)} + D_{x_a}^{(i)}, \quad (\text{C.90})$$

$$E_{x_a}^{(i)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} E(x_a - n, \tau_a), \quad (\text{C.91a})$$

$$H_{x_a}^{(i)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} H(x_a - n, \tau_a) \quad (\text{C.91b})$$

e

$$D_{x_a}^{(i)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} D(x_a - n, \tau_a). \quad (\text{C.91c})$$

As estruturas matemáticas das funções auxiliares  $D(r, \tau_a)$ ,  $E(r, \tau_a)$  e  $H(r, \tau_a)$  estão definidas nas Eqs. (5.35b), (5.35c) e (5.35d), respectivamente, enquanto que os coeficientes  $\gamma_n^{(i)}$  e  $\delta_n^{(i)}$  são dados pelas Eqs. (3.83a) e (3.83b).

#### C.4.1.1 Termos independentes da posição

Para  $E^{(i)}$ , Eq. (C.89a), nota-se que este termo pode ser facilmente resolvido utilizando as Eqs. (C.20) e (C.22) para obter, nessa ordem, os resultados referentes as condições de Dirichlet, Neumann e Mistas. De fato, as Eqs. (C.89a) e (C.20) fornecem para ambas as condições de Dirichlet e Neumann

$$E^{(J)} = \frac{(\tau_a \pi)^2}{12}, \quad (C.92)$$

com  $J=(D,N)$ . Por outro lado, combinando as Eqs. (C.89a) e (C.22), para as condições mistas, segue que

$$E^{(M)} = -\frac{(\tau_a \pi)^2}{24}, \quad (C.93)$$

com  $M=(DN, ND)$ . Observe que, se  $\tau_a \ll 1$  as Eqs. (C.92) e (C.93) representam pequenas contribuições, mas no regime  $\tau_a \gg 1$  estas são de grande importância para os resultados.

Para  $H^{(i)}$ , Eqs. (C.89b) e (5.35d), observa-se a semelhança que sua expressão possui com a definição da quantidade  $Q^{(i)}$ , Eqs. (C.15) e (5.14c), desenvolvida no cálculo da dispersão de velocidades. Assim, a partir das Eqs. (5.14c), (5.35d), (C.89b) e (C.15) verifica-se que

$$H^{(i)} = -\frac{\tau_a^2}{2} Q^{(i)}. \quad (C.94)$$

Logo, utilizando a relação acima e os resultados (C.25) e (C.26) é direto encontrar que, para as condições de Dirichlet e Neuman,

$$H^{(J)} = -\frac{(\pi \tau_a)^2}{3} + \frac{4}{3} \quad (C.95)$$

e para as condições mistas

$$H^{(M)} = +\frac{(\pi \tau_a)^2}{6} + \frac{4}{3}, \quad (C.96)$$

os quais são ambos os resultados para  $H^{(i)}$  no regime de tempos longos.

Quanto a contribuição  $D^{(i)}$ , Eq. (C.89c), para o regime  $\tau_a \gg 1$ , podemos escrever

$$D^{(i)} = D_1^{(i)} + D_2^{(i)}, \quad (C.97)$$

com

$$D_1^{(i)} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{2}{\tau_a} \right)^{2k} n^{2k} \quad (C.98a)$$

e

$$D_2^{(i)} = -4 \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^{(i)}}{n^s} \ln \left( \frac{2n}{\tau_a} \right). \quad (C.98b)$$

Para estabelecer (C.98) utilizamos a relação

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k. \quad (\text{C.99})$$

Utilizando as Eqs. (C.20) e (C.22), em conjunto com a propriedade  $\zeta(-2m) = 0$ , para  $m = 1, 2, 3, \dots$ , além do resultado

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \ln(ka) = \zeta(s) \ln(a) - \zeta'(s), \quad (\text{C.100})$$

podemos encontrar para as condições de Dirichlet e Neumann

$$D^{(\text{J})} = -2 \ln(\pi \tau_a). \quad (\text{C.101})$$

Por outro lado, utilizando a Eq. (C.22) e a relação

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^s} \ln(k) = 2^{1-s} \zeta(s) \ln(2) + (1 - 2^{1-s}) \zeta'(s), \quad (\text{C.102})$$

após algumas manipulações algébricas, é possível obter

$$D^{(\text{M})} = -2 \ln\left(\frac{\pi \tau_a}{4}\right) \quad (\text{C.103})$$

para as condições de contorno mistas.

Diante dos resultados obtidos para as funções  $D^{(\text{i})}$ ,  $E^{(\text{i})}$  e  $H^{(\text{i})}$ , podemos construir as quantidades  $A^{(\text{i})}$ , Eq. (C.88). Assim, a partir das Eqs. (C.88), (C.92), (C.95) e (C.101), para as condições de Dirichlet e Neumann, temos

$$A^{(\text{J})} = -2 \ln(\pi \tau_a) - \frac{(\pi \tau_a)^2}{4} + \frac{4}{3} \quad (\tau_a \gg 1). \quad (\text{C.104})$$

Do mesmo modo, utilizando a Eq. (C.88) e os resultados (C.93), (C.96) e (C.103), para as condições mistas obtemos

$$A^{(\text{M})} = -2 \ln\left(\frac{\pi \tau_a}{4}\right) + \frac{(\pi \tau_a)^2}{8} + \frac{4}{3} \quad (\tau_a \gg 1). \quad (\text{C.105})$$

As Eqs. (C.104) e (C.105) correspondem as expressões resultantes para a função  $A^{(\text{i})}$  no regime de tempos longos.

#### C.4.1.2 Termos dependentes da posição

Para  $E_{x_a}^{(\text{i})}$ , Eq. (C.91a), observando as identidades

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^n} = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \cot(a\pi), \quad (n \geq 2) \quad (\text{C.106a})$$

e

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+a)^n} = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \csc(a\pi), \quad (n \geq 1) \quad (\text{C.106b})$$

a partir da Eq. (5.35c), encontramos

$$E_{x_a}^{(J)} = \delta^{(J)} \frac{(\pi\tau_a)^2}{2} \csc^2(\pi x_a), \quad (\text{C.107})$$

para as condições de Dirichlet e Neumann, e

$$E_{x_a}^{(M)} = -\delta^{(M)} \frac{(\pi\tau_a)^2}{2} \cot(\pi x_a) \csc(\pi x_a), \quad (\text{C.108})$$

para as condições mistas, com  $\delta^{(J)} = [\delta^{(D)}, \delta^{(N)}] = [-1, +1]$  e  $\delta^{(M)} = [\delta^{(DN)}, \delta^{(ND)}] = [+1, -1]$ . Para sermos mais específicos, a Eq. (C.106a) é utilizada para estabelecer o resultado referente as condições de Dirichlet e Neumann, Eq. (C.107), ao passo que a Eq. (C.106b) é aplicada para o caso das condições mistas, Eq. (C.108).

De maneira similar ao que foi visto anteriormente, Eq. (C.94), diante da semelhança estrutural entre as funções  $H_{x_a}^{(i)}$ , Eqs. (C.91b) e (5.35d), e  $Q_{x_a}^{(i)}$ , Eqs. (C.17) e (5.14c), verifica-se a igualdade

$$H_{x_a}^{(i)} = -\frac{\tau_a^2}{2} Q_{x_a}^{(i)}, \quad (\text{C.109})$$

que a partir dos resultados (C.41) e (C.43) nos permite imediatamente encontrar

$$H_{x_a}^{(J)} = -\delta^{(J)} 2(\pi\tau_a)^2 \csc^2(\pi x_a) \quad (\text{C.110})$$

para as condições de Dirichlet e Neumann e

$$H_{x_a}^{(M)} = \delta^{(M)} 2(\pi\tau_a)^2 \cot(\pi x_a) \csc(\pi x_a) \quad (\text{C.111})$$

para as condições mistas.

Para a função  $D_{x_a}^{(i)}$ , Eq. (C.91c), é conveniente primeiro escrevermos

$$D_{x_a}^{(i)} = D_{x_a(1)}^{(i)} + D_{x_a(2)}^{(i)}, \quad (\text{C.112})$$

com

$$D_{x_a(1)}^{(i)} = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} \ln \left\{ 1 - \left[ \frac{2(x_a - n)}{\tau_a} \right]^2 \right\} \quad (\text{C.113a})$$

e

$$D_{x_a(2)}^{(i)} = -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} \ln \left[ \frac{4(x_a - n)^2}{\tau_a^2} \right]. \quad (\text{C.113b})$$

Utilizando a Eq. (C.99) para reescrever (C.113a), além de dividir o somatório em  $n$ , juntamente com uma mudança de índices, é possível mostrar que empregando as Eqs. (C.31), (C.33) e (C.34), após alguma álgebra, a contribuição  $D_{x_a(1)}^{(J)} = 0$ . Também, seguindo um procedimento similar, para  $D_{x_a(1)}^{(M)}$ , utilizando as Eqs. (C.99), (C.37), (C.33), (C.34) e (C.38) encontra-se que  $D_{x_a(1)}^{(M)} = 0$ . Portanto, em síntese segue que a contribuição  $D_{x_a(1)}^{(i)} = 0$  no regime  $\tau_a \gg 1$ , para as condições de Dirichlet, Neumann e mistas.

Para estudar a contribuição  $D_{x_a(2)}^{(i)}$ , no regime  $\tau_a \gg 1$ , é conveniente reescrevê-la na forma equivalente

$$D_{x_a(2)}^{(i)} = -2\delta_0^{(i)} \ln \left( \frac{4x_a^2}{\tau_a^2} \right) - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} \ln \left( \frac{4n^2}{\tau_a^2} \right) - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(i)} \ln \left( 1 - \frac{x_a}{n} \right)^2. \quad (\text{C.114})$$

Para condições de Dirichlet e Neumann, temos

$$D_{x_a(2)}^{(J)} = -4\delta^{(J)} \ln \left( \frac{2x_a}{\tau_a} \right) - 8\delta^{(J)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{2n}{\tau_a} \right) - 2\delta^{(J)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[ 1 - \left( \frac{x_a}{n} \right)^2 \right]^2. \quad (\text{C.115})$$

Uma contribuição finita para o primeiro somatório no lado direito da Eq. (C.115) pode ser obtida através de uma prescrição de tal modo a utilizar a Eq. (C.100). Já o último somatório, pode ser desenvolvido utilizando a Eq. (C.99) e a relação

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k} \zeta(2k) = \ln[\pi t \csc(t\pi)] \quad (|t| < 1). \quad (\text{C.116})$$

Então, seguindo os passos indicados, encontramos que

$$D_{x_a(2)}^{(J)} = 4\delta^{(J)} \ln \left[ \frac{\csc(\pi x_a)}{2} \right]. \quad (\text{C.117})$$

De maneira similar, para as condições mistas, primeiro notamos que  $D_{x_a(2)}^{(M)}$  pode ser escrita como

$$D_{x_a(2)}^{(M)} = 4\delta^{(M)} \ln \left( \frac{2x_a}{\tau_a} \right) + 8\delta^{(M)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{2n}{\tau_a} \right) + 2\delta^{(M)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[ 1 - \left( \frac{x_a}{n} \right)^2 \right]^2. \quad (\text{C.118})$$

Novamente, uma contribuição finita para o primeiro termo do lado direito da Eq. (C.118) pode ser obtida através de uma prescrição conveniente para o uso combinado das Eqs. (C.102) e (C.22). Em outras palavras, a combinação das Eqs. (C.22) e (C.102) nos permite obter uma relação que é capaz de extrair uma contribuição finita do primeiro somatório no lado direito da Eq. (C.118), com uma prescrição adequada. O último termo pode ser desenvolvido de maneira direta implementando as Eqs. (C.99), (C.22) e (C.117). Portanto, de acordo com esses apontamentos, após algumas simplificações e organização dos resultados, encontramos

$$D_{x_a(2)}^{(M)} = -2\delta^{(J)} \ln \left[ \cot^2 \left( \frac{\pi x_a}{2} \right) \right]. \quad (\text{C.119})$$

Considerando os resultados (C.117) e (C.119), de acordo com a Eq. (C.112), para as condições de Dirichlet e Neumann obtemos

$$D_{x_a}^{(J)} = 2\delta^{(J)} \ln \left[ \frac{\csc^2(\pi x_a)}{4} \right] \quad (\text{C.120})$$

e para as condições mistas

$$D_{x_a}^{(M)} = -2\delta^{(J)} \ln \left[ \cot^2 \left( \frac{\pi x_a}{2} \right) \right]. \quad (\text{C.121})$$

Encontrados os devidos resultados para as funções  $D_{x_a}^{(i)}$ ,  $E_{x_a}^{(i)}$  e  $H_{x_a}^{(i)}$ , podemos construir as quantidades  $A_{x_a}^{(i)}$  somando cada contribuição. Assim, a partir das Eqs. (C.90), (C.107), (C.110) e (C.120), para as condições de Dirichlet e Neumann, temos

$$A_{x_a}^{(J)} = \delta^{(J)} \left\{ -\frac{3(\pi\tau_a)^2}{2} \csc^2(\pi x_a) + 2 \ln \left[ \frac{\csc^2(\pi x_a)}{4} \right] \right\} \quad (\tau_a \gg 1). \quad (\text{C.122})$$

Do mesmo modo, utilizando os resultados (C.108), (C.111) e (C.121), encontramos para as condições mistas

$$A_{x_a}^{(M)} = \delta^{(M)} \left\{ \frac{3(\pi\tau_a)^2}{2} \cot(\pi x_a) \csc(\pi x_a) - 2 \ln \left[ \cot^2 \left( \frac{\pi x_a}{2} \right) \right] \right\} \quad (\tau_a \gg 1). \quad (\text{C.123})$$

De posse dos resultados para as contribuições  $A^{(i)}$  e  $A_{x_a}^{(i)}$ , respectivamente, Eqs. (C.104), (C.105), (C.122) e (C.123), podemos construir a expressão correspondente para  $\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)}$ , Eq. (5.34), no regime de tempos longos. Portanto, a partir das Eqs. (5.34), (C.104) e (C.122), encontramos para as condições de Dirichlet e Neumann

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(J)} = & \frac{g^2}{24\pi^2 m^2} \left\{ -4 \ln(\pi\tau_a) - \frac{(\pi\tau_a)^2}{2} + \frac{8}{3} \right. \\ & \left. + \delta^{(J)} \left[ \frac{3(\pi\tau_a)^2}{2} \csc^2(\pi x_a) - 2 \ln \left( \frac{\csc^2(\pi x_a)}{4} \right) \right] \right\} \quad (\text{C.124}) \end{aligned}$$

e utilizando as Eqs. (5.34), (C.105) e (C.123), para as condições mistas, obtemos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(M)} = & \frac{g^2}{24\pi^2 m^2} \left\{ -4 \ln \left( \frac{\pi\tau_a}{4} \right) + \frac{(\pi\tau_a)^2}{4} + \frac{8}{3} \right. \\ & \left. - \delta^{(M)} \left[ \frac{3(\pi\tau_a)^2}{2} \cot(\pi x_a) \csc(\pi x_a) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \ln \left( \cot^2 \left( \frac{\pi x_a}{2} \right) \right) \right] \right\}, \quad (\text{C.125}) \end{aligned}$$

com  $\delta^{(J)} = [\delta^{(D)}, \delta^{(N)}] = [-1, +1]$  e  $\delta^{(M)} = [\delta^{(DN)}, \delta^{(ND)}] = [+1, -1]$ .

Observando as Eqs. (C.124) e (C.125) nota-se que para  $\tau_a \gg 1$  as contribuições dominantes são provenientes dos termos proporcionais a  $\tau_a^2$ . Logo, através destas contribuições dominantes e da restrição imposta pela condição de pequenos deslocamentos (5.40), é possível obter uma expressão analítica capaz de fornecer os valores aproximados do tempo  $\tau_a$  que limitam a validade da condição (5.40), a saber, Eq. (5.42).

Por fim, gostaríamos de comentar que seguindo os mesmos procedimentos somos capazes de encontrar a dispersão referente a coordenada não confinada  $y$ , isto é,  $\langle (\Delta \hat{y})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(i)}$ , no regime de  $\tau_a \gg 1$ . Além disso, isto pode ser realizado sem muitos esforços, uma vez que a construção da quantidade  $\bar{A}(r, \tau_a)$ , Eq. (5.38), é escrita em termos das funções  $D$ ,  $E$  e  $H$  todas avaliadas em detalhes nesse apêndice para o regime  $\tau_a \gg 1$ .

### C.4.2 Caso da condição de quasiperiodicidade

Seguindo o mesmo raciocínio das seções precedentes, objetivando manter a clareza dos desenvolvimentos e tendo em vista a estrutura da Eq. (5.60), inicialmente é prático definirmos a função

$$O(\beta, \tau_a) = Y(\beta, \tau_a) + V(\beta, \tau_a) + L(\beta, \tau_a), \quad (\text{C.126})$$

com

$$Y(\beta, \tau_a) = \frac{\tau_a^2}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\beta n)}{n^2}, \quad (\text{C.127a})$$

$$V(\beta, \tau_a) = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi\beta n) \ln \left( \frac{\tau_a^2 - n^2}{n^2} \right)^2 \quad (\text{C.127b})$$

e

$$L(\beta, \tau_a) = -\frac{\tau_a^3}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\beta n)}{n^3} \ln \left( \frac{\tau_a + n}{\tau_a - n} \right)^2. \quad (\text{C.127c})$$

O termo  $Y(\beta, \tau_a)$ , Eq. (C.127a), pode ser calculado de maneira direta utilizando a Eq. (C.50), de modo que obtém-se como resultado

$$Y(\beta, \tau_a) = \frac{(\pi\tau_a)^2}{6} B_2(\beta), \quad (\text{C.128})$$

onde  $B_2(\beta)$  corresponde ao polinômio de Bernoulli de segunda ordem na variável  $\beta$ . É importante destacar que o resultado (C.128) independe de qualquer limite ( $\tau_a \gg 1$  ou  $\tau_a \ll 1$ ). Entretanto, para valores de tempo tais que  $\tau_a \ll 1$  sua contribuição é pequena, mas para valores  $\tau_a \gg 1$  produz uma contribuição significativa.

Para calcularmos a quantidade  $V(\beta, \tau_a)$ , Eq. (C.127b), no limite  $\tau_a \gg 1$ , primeiro é conveniente reescrevermos sua expressão na forma equivalente

$$V(\beta, \tau_a) = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi\beta n) \left[ \ln \left( 1 + \frac{n}{\tau_a} \right) + \ln \left( 1 - \frac{n}{\tau_a} \right) - 2 \ln \left( \frac{n}{\tau_a} \right) \right]. \quad (\text{C.129})$$

A contribuição da soma para os primeiros dois termos no lado direito da Eq. (C.129) pode ser desenvolvida utilizando as Eqs. (C.99), (C.51) e (C.20) com a propriedade  $\zeta(-2m) = 0$ , para  $m$  inteiro e positivo. Procedendo desta maneira observa-se que a contribuição dos dois primeiros termos é nula. Já o último termo no lado direito da Eq. (C.129) pode ser desenvolvido por meio das Eqs. (C.51) e (C.100) mais a propriedade (Ref. [128], Eq. 32)

$$\zeta'(-2n) = \frac{(-1)^n \zeta(2n+1)(2n)!}{2^{2n+1} \pi^{2n}},$$

com  $n \geq 1$  inteiro, e do resultado

$$\sum_{k=1}^{\infty} t^{2k+1} \zeta(2k+1) = \frac{1}{2} - \frac{\pi t}{2} \cot(\pi t) - \mathbf{C}t - t\psi(t+1), \quad (|t| < 1). \quad (\text{C.130})$$

Na Eq. (C.130)  $\mathbf{C} = 0,5772156649 \dots$  representa a constante de Euler e  $\psi(t)$  corresponde a função Psi, a qual por definição é escrita como a derivada do logarítmo da função gamma, isto é,  $\psi(t) = \frac{d \ln[\Gamma(t)]}{dt}$ .

Considerando as discussões acima, somos capazes de mostrar que a contribuição proveniente da função  $V(\beta, \tau_a)$  no regime  $\tau_a \gg 1$  é dada, aproximadamente, por

$$V(\beta, \tau_a) = \frac{1}{6} \left[ \ln(2\pi\tau_a) - \frac{1}{2\beta} + \frac{\pi}{2} \cot(\beta\pi) + \mathbf{C} + \psi(\beta + 1) \right]. \quad (\text{C.131})$$

Por fim, para resolver a contribuição  $Y(\beta, \tau_a)$ , Eq. (C.128), inicialmente utilizamos a Eq. (C.24) para reescrever o logaritmo em termos de uma série de potências de  $\frac{n}{\tau_a}$ . Então, após uma troca de índice conveniente e explicitarmos o único termo negativo na dupla série, podemos utilizar as Eqs. (C.51) e (C.50) com a propriedade  $\zeta(-2m) = 0$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$ , para estabelecer o seguinte resultado:

$$L(\beta, \tau_a) = -\frac{2(\pi\tau_a)^2}{3} B_2(\beta) + \frac{1}{9}. \quad (\text{C.132})$$

Diante dos resultados para as contribuições  $Y(\beta, \tau_a)$ ,  $V(\beta, \tau_a)$  e  $L(\beta, \tau_a)$ , a partir das Eqs. (C.126), (C.128), (C.131) e (C.132), segue que

$$O(\beta, \tau_a) = -\frac{(\pi\tau_a)^2}{2} B_2(\beta) - \frac{1}{6} \left[ \ln(2\pi\tau_a) - \frac{1}{2\beta} + \frac{\pi}{2} \cot(\beta\pi) + \mathbf{C} + \psi(\beta + 1) \right] + \frac{1}{9}. \quad (\text{C.133})$$

Consequentemente, tendo em vista a dependência da dispersão para a coordenada compactificada  $x$ , Eq. (5.60), com a função  $O(\beta, \tau_a)$ , Eq. (C.126), podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)} \approx & \left( \frac{g}{\pi m} \right)^2 \left\{ -\frac{(\pi\tau_a)^2}{2} B_2(\beta) - \frac{1}{6} \left[ \ln(2\pi\tau_a) - \frac{1}{2\beta} + \frac{\pi}{2} \cot(\beta\pi) \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{C} + \psi(\beta + 1) \right] + \frac{1}{9} \right\}, \quad (\text{C.134}) \end{aligned}$$

que corresponde a uma expressão aproximada referente ao regime de tempos longos, isto é, para  $\tau_a \gg 1$ . Semelhante ao caso dos planos paralelos, observa-se que as contribuições dominantes são provenientes dos termos proporcionais a  $\tau_a^2$ . Admitindo apenas as contribuições de  $\tau_a^2$  na Eq. (C.134) e a definição da condição de pequenos deslocamentos (5.63), é possível obter uma relação analítica que fornece os valores aproximados para  $\tau_a$  que limitam a validade da condição (5.63), a saber, Eq. (5.64). Destaca-se que, uma expressão semelhante para a dispersão da coordenada não compactificada pode ser obtida de maneira direta aproveitando os resultados desse apêndice, em virtude da semelhança estrutural que  $\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}$  e  $\langle (\Delta \hat{y})^2 \rangle_{\text{ren}}^{(\beta)}$  possuem.



# APÊNDICE D – Detalhes matemáticos referentes ao Universo de Einstein

Nesse apêndice são apresentados alguns dos detalhes matemáticos para o cálculo de quantidades associadas a geometria do universo de Einstein.

## D.1 Escalar de Ricci para o Universo de Einstein

Uma vez que a métrica associada ao elemento de linha do universo estático de Einstein (3.96) é diagonal, observa-se que

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{\chi\chi} R_{\chi\chi} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi}, \quad (\text{D.1})$$

com  $R_{\mu\nu}$  dado por (2.96).

Inicialmente, observando a Tabela 6 percebe-se que  $\Gamma_{\mu\nu}^0 = \Gamma_{0\nu}^\beta = \Gamma_{\mu 0}^\beta = 0$  para todo  $\beta, \mu, \nu$ . Então, após um pouco de álgebra é possível mostrar que:

1.  $R_{00} = 0$ . Esse resultado é uma consequência direta da nulidade dos símbolos de Cristoffel previamente comentada, isto é,  $\Gamma_{\mu\nu}^0 = \Gamma_{0\nu}^\beta = \Gamma_{\mu 0}^\beta = 0$ ;
2.  $R_{\chi\chi} = \Gamma_{\theta\chi,\chi}^\theta + \Gamma_{\phi\chi,\chi}^\phi + \left(\Gamma_{\theta\chi}^\theta\right)^2 + \left(\Gamma_{\phi\chi}^\phi\right)^2 = -2$ ;
3.  $R_{\theta\theta} = \Gamma_{\phi\theta,\theta}^\phi - \Gamma_{\theta\theta,\chi}^\chi + \Gamma_{\theta\theta}^\chi \Gamma_{\chi\theta}^\theta + \Gamma_{\theta\theta}^\phi \Gamma_{\phi\theta}^\phi - \Gamma_{\chi\phi}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^\chi = -2 \sin^2(\chi)$ ;
4.  $R_{\phi\phi} = -\Gamma_{\phi\phi,\chi}^\chi - \Gamma_{\phi\phi,\theta}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\chi \Gamma_{\chi\phi}^\phi + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi - \Gamma_{\chi\theta}^\theta \Gamma_{\phi\phi}^\chi = -2 \sin^2(\chi) \sin^2(\theta)$ .

Portanto, utilizando os resultados acima para o tensor de Ricci e identificando cada componente da representação contravariante  $g^{\mu\nu}$  da métrica associada ao elemento de linha (3.96), de acordo com a Eq. (D.1), simplificando a expressão resultante, obtém-se  $R = 6a_0^{-2}$ .

## D.2 Dedução das relações entre os momentos físicos e de coordenadas no universo de Einstein

Nesse apêndice vamos obter as relações dispostas na Tabela 7, para as componentes do momento físico  $p^i$  e de coordenadas  $p^i$ .

Seja  $ds^2 = dt^2 - a^2 d\tau^2$  um elemento de linha genérico, no qual  $a^2 d\tau^2$  representa de forma arbitrária a seção espacial do espaço-tempo em questão. Em coordenadas cartesianas  $d\tau^2/dt^2$  define a velocidade de coordenadas  $u$  ao quadrado:

$$\begin{aligned}\frac{d\tau^2}{dt^2} &= \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \\ &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.\end{aligned}\quad (\text{D.2})$$

Por outro lado, a combinação  $a^2 d\tau^2/dt^2$  define o quadrado da velocidade física  $v$ :

$$\begin{aligned}a^2 \frac{d\tau^2}{dt^2} &= a^2 \frac{dx^2}{dt^2} + a^2 \frac{dy^2}{dt^2} + a^2 \frac{dz^2}{dt^2} \\ &= (au^x)^2 + (au^y)^2 + (au^z)^2 \\ &= (v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2.\end{aligned}\quad (\text{D.3})$$

Com base nessas breves informações destacadas acima, podemos traçar um raciocínio análogo para o elemento de linha do universo de Einstein (3.96), a fim de identificar as devidas componentes das velocidades físicas e de coordenadas, que por sua vez nos permitirão estabelecer as relações entre os momentos físicos e de coordenadas. Considerando as argumentações prévias, a partir da Eq. (3.96), podemos escrever

$$\frac{ds_{\text{UE}}^2}{dt^2} = 1 - a_0^2 \frac{d\chi_\chi^2}{dt^2}, \quad (\text{D.4})$$

com  $d\chi_\chi^2$  dado por (3.90) e  $a_0$  constante. Expandindo a seção espacial em (D.4) temos que

$$\frac{ds_{\text{UE}}^2}{dt^2} = 1 - a_0^2 \underbrace{\left(\frac{d\chi^2}{dt^2}\right)}_{(u^\chi)^2} - a_0^2 \sin^2(\chi) \underbrace{\left(\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)}_{(u^\theta)^2} - a_0^2 \sin^2(\chi) \sin^2(\theta) \underbrace{\left(\frac{d\phi^2}{dt^2}\right)}_{(u^\phi)^2} \quad (\text{D.5})$$

$$= 1 - \underbrace{(a_0 u^\chi)^2}_{(v^\chi)^2} - \underbrace{\left[a_0 \sin(\chi) u^\theta\right]^2}_{(v^\theta)^2} - \underbrace{\left[a_0 \sin(\chi) \sin(\theta) u^\phi\right]^2}_{(v^\phi)^2}. \quad (\text{D.6})$$

Conforme as Eqs. (D.5) e (D.6), podemos estabelecer as seguintes relações, para as componentes das velocidades físicas  $v^i$  e de coordenadas  $u^i$ :

$$v^\chi = a_0 u^\chi, \quad (\text{D.7a})$$

$$v^\theta = a_0 \sin(\chi) u^\theta \quad (\text{D.7b})$$

e

$$v^\phi = a_0 \sin(\chi) \sin(\theta) u^\phi. \quad (\text{D.7c})$$

Multiplicando as relações (D.7) pela massa  $m$  e identificando as expressões para as componentes dos momentos físicos  $p^i = mv^i$  e de coordenadas  $p^i = mu^i$ , com  $i = (\chi, \theta, \phi)$ , obtemos as expressões dispostas na Tabela 7, as quais são utilizadas para obter o VEV das componentes do momento físico ao quadrado.

### D.3 Dedução das relações entre os comprimentos físicos e de coordenadas no universo de Einstein

Semelhante ao que foi feito na Seção D.2, para estabelecer as relações entre os comprimentos físicos e coordenados no universo de Einstein, partimos do elemento de linha (3.96), especificamente nos concentrando sobre o módulo da seção espacial (3.90).

A partir da Eq. (3.90), considerando um instante de tempo fixo, de modo que  $a(t) = a_0$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} d\tau_\chi^2 &= a_0^2 \left\{ d\chi^2 + \sin^2(\chi) [d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2] \right\} \\ &= \underbrace{(a_0 d\chi)^2}_{d\tilde{\chi}^2} + \underbrace{[a_0 \sin(\chi) d\theta]^2}_{d\tilde{\theta}^2} + \underbrace{[a_0 \sin(\chi) \sin(\theta) d\phi]^2}_{d\tilde{\phi}^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

que nos permite extrair de maneira direta os elementos de distâncias ou comprimentos físicos  $d\tilde{z}_i = [d\tilde{\chi}, d\tilde{\theta}, d\tilde{\phi}] = [a_0 d\chi, a_0 \sin(\chi) d\theta, a_0 \sin(\chi) \sin(\theta) d\phi]$ . Portanto, indentifica-se que, as relações de correspondência entre os comprimentos físicos e coordenados são:

$$\tilde{\chi} = a_0 \chi, \quad (\text{D.9a})$$

$$\tilde{\theta} = a_0 \sin(\chi) \theta \quad (\text{D.9b})$$

e

$$\tilde{\phi} = a_0 \sin(\chi) \sin(\theta) \phi. \quad (\text{D.9c})$$

Essas são as expressões apresentadas na Tabela 8. Para métricas diagonais, isto é, na forma  $ds^2 = g_{ii} dx^i dx^i$ , com  $g_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$ , como é o caso da Eq. (3.96), a relação entre as distâncias físicas  $\tilde{z}_i$  (as quais são invariantes) e de coordenadas  $dx^i$  são dadas pela relação geral  $d\tilde{z}_i = \sqrt{|g_{ii}|} dx^i$  – veja, por exemplo, [47, p. 52].

### D.4 Solução para as múltiplas integrais na Eq. (6.35)

Nesse apêndice vamos apresentar algumas das etapas referentes a solução das múltiplas integrais presentes na Eq. (6.35), que por questões de praticidade matemática rotulamos por

$$\Theta = \int_0^\tau dr \int_0^s ds \Theta_{12}(r, s), \quad (\text{D.10})$$

com

$$\Theta_{12}(r, s) = \int_0^r dt_1 \int_0^s dt_2 \left\{ \frac{a_0 [6a_0^2 + (t_1 - t_2)^2]}{3(t_1 - t_2)^4} - \frac{1}{8a_0} \csc^4 \left( \frac{t_1 - t_2}{2a_0} \right) \right\}, \quad (\text{D.11})$$

cujos resultados serão de fundamental importância para o estabelecimento da dispersão na coordenada  $\chi$ , assim como para as demais coordenadas. Note que o integrando em (D.11) corresponde ao núcleo  $K_\chi$ , dado pela Eq. (6.15) com  $\eta \equiv (t_1 - t_2)$ .

Com o auxílio de um *software* de computação algébrica podemos resolver a dupla integração em (D.11), que após algumas simplificações resulta em

$$\begin{aligned} \Theta_{12} = \frac{a_0}{36} \left\{ 1 + \frac{12a_0^2}{r^2} - 3 \csc^2 \left( \frac{r}{2a_0} \right) + 12 \ln \left[ \frac{\sin \left( \frac{r}{2a_0} \right)}{\left( \frac{r}{2a_0} \right)} \right] \right. \\ + \frac{12a_0^2}{s^2} - 3 \csc^2 \left( \frac{s}{2a_0} \right) + 12 \ln \left[ \frac{\sin \left( \frac{s}{2a_0} \right)}{\left( \frac{s}{2a_0} \right)} \right] \\ \left. - \frac{12a_0^2}{(r-s)^2} + 3 \csc^2 \left( \frac{r-s}{2a_0} \right) - 12 \ln \left[ \frac{\sin \left( \frac{r-s}{2a_0} \right)}{\left( \frac{r-s}{2a_0} \right)} \right] \right\}. \quad (\text{D.12}) \end{aligned}$$

Substituindo o resultado (D.12) para  $\Theta_{12}(r, s)$  em (D.10), nota-se que as integrais isoladas nas variáveis  $r$  e  $s$  fornecem a mesma contribuição, uma vez que a estrutura dos integrandos em (D.10), bem como os limites de integração, são idênticos. Então, é suficiente calcular apenas um dos termos e multiplicar o seu resultado por um fator de dois. Assim, considerando esses apontamentos, somos conduzidos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{a_0 \tau^2}{36} + \frac{a_0 \tau}{18} \int_0^\tau dr \left\{ \frac{12a_0^2}{r^2} - 3 \csc^2 \left( \frac{r}{2a_0} \right) + 12 \ln \left[ \frac{\sin \left( \frac{r}{2a_0} \right)}{\left( \frac{r}{2a_0} \right)} \right] \right\} \\ - \frac{a_0}{36} \int_0^\tau dr \int_0^\tau ds \left\{ \frac{12a_0^2}{(r-s)^2} - 3 \csc^2 \left( \frac{r-s}{2a_0} \right) + 12 \ln \left[ \frac{\sin \left( \frac{r-s}{2a_0} \right)}{\left( \frac{r-s}{2a_0} \right)} \right] \right\}, \quad (\text{D.13}) \end{aligned}$$

que através do uso da identidade (5.11) se reduz a forma

$$\Theta = \frac{a_0 \tau^2}{36} + \frac{a_0}{18} \int_0^\tau d\eta \eta \left\{ \frac{12a_0^2}{\eta^2} - 3 \csc^2 \left( \frac{\eta}{2a_0} \right) + 12 \ln \left[ \frac{\sin \left( \frac{\eta}{2a_0} \right)}{\left( \frac{\eta}{2a_0} \right)} \right] \right\}. \quad (\text{D.14})$$

Por fim, por questões de conveniência matemática vamos resolver os dois primeiros termos no lado direito da Eq. (D.14) e realizar uma mudança de variáveis no último termo, tal que  $\eta = a_0 u$ . Portanto, seguindo esses procedimentos, após algumas simplificações, encontramos que

$$\Theta = \frac{a_0^3}{3} \left\{ \frac{\tau^2}{12a_0^2} + \frac{\tau}{a_0} \cot \left( \frac{\tau}{2a_0} \right) - 2 - \ln \left[ \frac{\sin \left( \frac{\tau}{2a_0} \right)}{\left( \frac{\tau}{2a_0} \right)} \right]^2 + \int_0^{\frac{\tau}{a_0}} du u \ln \left[ \frac{\sin \left( \frac{u}{2} \right)}{\left( \frac{u}{2} \right)} \right]^2 \right\}. \quad (\text{D.15})$$

Esse é o resultado que utilizamos na Eq. (6.35) para obter a dispersão da componente angular  $\chi$  associada a partícula. Note que, embora  $\Theta$  tenha unidades de comprimento ao cubo, sua combinação com os fatores multiplicativos no lado direito de  $\langle (\Delta \hat{\chi})^2 \rangle_{\text{ren}}$  produzirá um resultado adimensional.

## Referências

- 1 BROWN, R. Xxvii. A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The philosophical magazine*, Taylor & Francis, v. 4, n. 21, p. 161–173, 1828. Citado na página 23.
- 2 EINSTEIN, A. *Investigation on the theory of the Brownian movement*. Editor por R. Fürth e Traduzido por A.D. Copwer. USA: Dover Publications, 1956. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- 3 SALINAS, S. R. Einstein e a teoria do movimento Browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 2, p. 263–269, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- 4 SILVA, J. M. d.; LIMA, J. Quatro abordagens para o movimento Browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 29, p. 25–35, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- 5 PATHRIA, R. Fluctuation. In: \_\_\_\_\_. *Statistical Mechanics*. 2. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1996. p. 452–494. Citado na página 24.
- 6 REIF, F. Irreversible processes and fluctuations. In: \_\_\_\_\_. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. International student edition. Japan: McGraw-Hill Book Company, 1965. p. 548–604. Citado na página 24.
- 7 LEMONS, D. S.; GYTHIEL, A. Paul Langevin’s 1908 paper “On the theory of Brownian motion”[“sur la théorie du mouvement brownien,” *cr acad. sci.(paris)* 146, 530–533 (1908)]. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 65, n. 11, p. 1079–1081, 1997. Citado na página 24.
- 8 FRANÇA, H. M.; GOMES, G. G. Einstein e a dança dos grãos de pólen. *Revista USP*, n. 66, p. 44–53, 2005. Citado na página 25.
- 9 WEINBERG, S. The search for unity: Notes for a history of quantum field theory. *Daedalus*, JSTOR, p. 17–35, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 27.
- 10 MILONNI, P. *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics*. Boston: Academic Press, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 25, 26, 27 e 28.
- 11 CASIMIR, H. B. On the attraction between two perfectly conducting plates. In: *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* [S.l.: s.n.], 1948. v. 51, p. 793. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- 12 JR, W. E. L.; RETHERFORD, R. C. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. *Physical Review*, APS, v. 72, n. 3, p. 241, 1947. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- 13 BETHE, H. A. The electromagnetic shift of energy levels. *Physical Review*, APS, v. 72, n. 4, p. 339, 1947. Citado na página 26.

- 14 MUKHANOV, V.; WINITZKI, S. *Introduction to Quantum Effects in Gravity*. Reino Unido: Cambridge University Press, 2017. Citado 8 vezes nas páginas 26, 27, 48, 49, 50, 62, 97 e 114.
- 15 SCHMITZ, W. Particles, fields and forces: A conceptual guide to quantum field theory and the standard model. In: \_\_\_\_\_. Alemanha: Springer International Publishing, 2019. (The Frontiers Collection), cap. Propagators and Virtual Particles, p. 113–143. ISBN 9783030128784. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=wXeUDwAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- 16 MARTINS, R. A. *O éter ou o nada: Ainda se estuda a existência de uma entidade invisível que preenche todo o espaço*. Data de acesso: 19 de dez. de 2023. Disponível em: <<https://www.ghtc.usp.br/server/pdf/Sci-Am-eter-2.PDF>>. Citado na página 27.
- 17 BESSA, C. H. G.; REBOUCAS, M. J. Electromagnetic vacuum fluctuations and topologically induced motion of a charged particle. *Class. Quant. Grav.*, v. 37, n. 12, p. 125006, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 156.
- 18 LEMOS, N. A.; REBOUCAS, M. J. Inquiring electromagnetic quantum fluctuations about the orientability of space. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, n. 7, p. 618, 2021. Citado na página 28.
- 19 LEMOS, N. A.; REBOUCAS, M. J. Orientability of space from electromagnetic quantum fluctuations. In: *16th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories*. [S.l.: s.n.], 2021. Citado na página 28.
- 20 LEMOS, N. A.; MÜLLER, D.; REBOUCAS, M. J. Probing time orientability of spacetime. 11 2022. Citado na página 28.
- 21 LEMOS, N. A.; MÜLLER, D.; REBOUCAS, M. J. Probing spatial orientability of a Friedmann-Robertson-Walker spatially flat spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 2, p. 023528, 2022. Citado na página 28.
- 22 YU, H.; FORD, L. Vacuum fluctuations and brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary. *Physical Review D*, APS, v. 70, n. 6, p. 065009, 2004. Citado 9 vezes nas páginas 28, 134, 141, 142, 144, 149, 166, 174 e 185.
- 23 YU, H.; CHEN, J. Brownian motion of a charged test particle in vacuum between two conducting plates. *Physical Review D*, APS, v. 70, n. 12, p. 125006, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 28, 134, 141, 142, 174 e 185.
- 24 YU, H.-w.; CHEN, J.; WU, P.-x. Brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary at finite temperature. *JHEP*, v. 02, p. 058, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 28, 134 e 186.
- 25 HSIANG, J.-T.; WU, T.-H.; LEE, D.-S. Brownian motion of a charged particle in electromagnetic fluctuations at finite temperature. *Foundations of Physics*, Springer, v. 41, p. 77–87, 2011. Citado na página 28.
- 26 SERIU, M.; WU, C.-H. Smearing effect due to the spread of a probe particle on the brownian motion near a perfectly reflecting boundary. *Physical Review A*, APS, v. 80, n. 5, p. 052101, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 29, 134 e 166.

- 27 SERIU, M.; WU, C.-H. Switching effect on the quantum brownian motion near a reflecting boundary. *Physical Review A*, APS, v. 77, n. 2, p. 022107, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 29, 134, 142, 166 e 186.
- 28 LORENCI, V. D.; RIBEIRO, C.; SILVA, M. Probing quantum vacuum fluctuations over a charged particle near a reflecting wall. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 10, p. 105017, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 29, 134, 142, 166 e 186.
- 29 LORENCI, V. A. D.; RIBEIRO, C. C. H. Remarks on the influence of quantum vacuum fluctuations over a charged test particle near a conducting wall. *JHEP*, v. 04, p. 072, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 29, 133, 134 e 186.
- 30 LORENCI, V. D.; JR, E. M.; SILVA, M. Quantum brownian motion near a point-like reflecting boundary. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 2, p. 027702, 2014. Citado 12 vezes nas páginas 29, 133, 134, 137, 142, 144, 149, 152, 166, 174, 181 e 186.
- 31 CAMARGO, G. et al. Vacuum fluctuations of a scalar field near a reflecting boundary and their effects on the motion of a test particle. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 7, p. 1–17, 2018. Citado 13 vezes nas páginas 29, 121, 133, 134, 137, 139, 141, 142, 144, 145, 166, 185 e 186.
- 32 CAMARGO, G. H. S. et al. Vacuum induced dispersions on the motion of test particles in D+1 dimensions. *Phys. Rev. D*, v. 100, n. 6, p. 065014, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 29, 133, 142 e 186.
- 33 CAMARGO, G. H. S. et al. Probing thermal fluctuations through scalar test particles. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, n. 5, p. 424, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 29, 133 e 186.
- 34 RIBEIRO, C. C. H.; LORENCI, V. A. D. Quantum vacuum fluctuations near a partially reflecting boundary: Brownian motion of a test charge as probe. *Phys. Rev. D*, v. 107, n. 7, p. 076007, 2023. Citado na página 29.
- 35 FERREIRA, E. J. B.; MELLO, E. R. B. de; MOTA, H. F. S. Quantum Brownian motion for a particle in analog expanding cosmologies in the presence of disclination. *Phys. Rev. D*, v. 105, n. 12, p. 125014, 2022. Citado 7 vezes nas páginas 30, 100, 108, 110, 116, 166 e 189.
- 36 FERREIRA, E. J. B.; GUEDES, E. M. B.; MOTA, H. F. S. Quantum brownian motion induced by an inhomogeneous tridimensional space and a  $S^1 \times \mathbb{R}^3$  topological space-time. *JHEP*, v. 04, p. 111, 2023. Citado 6 vezes nas páginas 30, 132, 166, 181, 189 e 198.
- 37 FERREIRA, E. J. B.; MOTA, H. F. S. Quantum Brownian motion induced by a scalar field in Einstein's universe. 11 2023. Citado 3 vezes nas páginas 30, 163 e 189.
- 38 BARCELO, C.; LIBERATI, S.; VISSER, M. Analogue gravity. *Living reviews in relativity*, v. 14, n. 1, p. 1–159, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 30, 98, 104, 105 e 107.
- 39 FACCIO, D. et al. *Analogue gravity phenomenology: analogue spacetimes and horizons, from theory to experiment*. [S.l.]: Springer, 2013. v. 870. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 98.

- 40 STEINHAEUER, J. Observation of quantum hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 12, n. 10, p. 959–965, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 30, 97 e 98.
- 41 ECKEL, S. et al. A rapidly expanding Bose-Einstein condensate: an expanding universe in the lab. *Physical Review X*, v. 8, n. 2, p. 021021(1)–021021(13), 2018. Citado 4 vezes nas páginas 30, 98, 116 e 163.
- 42 VIERMANN, C. et al. Quantum field simulator for dynamics in curved spacetime. *Nature*, v. 611, n. 7935, p. 260–264, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 30, 163 e 164.
- 43 BENINI, L. Ultracold atoms visit curved universes. *Nature Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 19, n. 1, p. 12–12, 2023. Citado 3 vezes nas páginas 30, 163 e 164.
- 44 WEINFURTER, S. Superfluid system hosts early-Universe dynamics. *Nature*, v. 611, n. 7935, p. 238–239, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 30, 163 e 164.
- 45 BESSA, C. H. G. et al. Quantum brownian motion in an analog friedmann-robertson-walker geometry. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 8, p. 085020, 2017. Citado 11 vezes nas páginas 30, 31, 100, 108, 109, 110, 111, 112, 116, 174 e 183.
- 46 DOWKER, J.; CRITCHLEY, R. Vacuum stress tensor in an Einstein universe: Finite-temperature effects. *Physical Review D*, APS, v. 15, n. 6, p. 1484, 1977. Citado na página 32.
- 47 ADLER, R. *General Relativity and Cosmology: A First Encounter*. Alemanha: Springer International Publishing, 2021. (Graduate Texts in Physics). ISBN 9783030615741. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Y8UWEAAAQBAJ>>. Citado 11 vezes nas páginas 32, 55, 56, 57, 58, 68, 88, 97, 197, 198 e 233.
- 48 SCHUTZ, B. F. *A First Course in General Relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 32, 55, 56, 58, 88 e 163.
- 49 NETO, J. B. *Mecânica Newtoniano, Lagrangiana e Hamiltoniana*. 1ª. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004. 431 p. Citado 4 vezes nas páginas 33, 34, 35 e 36.
- 50 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. 3ª. ed. [S.l.]: Addison Wesley, 2002. 638 p. Citado 4 vezes nas páginas 33, 34, 35 e 36.
- 51 LEMOS, N. *Mecânica Analítica*. 2ª. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007. 386 p. ISBN 9788588325241. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XpOS2eOdDR4C>>. Citado 5 vezes nas páginas 35, 36, 37, 42 e 45.
- 52 KAKU, M. Quantum field theory: A modern introduction. In: \_\_\_\_\_. New York: Oxford University Press, 1993. cap. Quantum Fields and Renormalization, p. 1–208. Citado 3 vezes nas páginas 37, 42 e 48.
- 53 MANDL, F.; SHAW, G. Quantum field theory. In: \_\_\_\_\_. 2ª. ed. United Kingdom: John Wiley & Sons, 2010. cap. Lagrangian Field Theory, p. 25–38. Citado 6 vezes nas páginas 37, 38, 39, 40, 42 e 48.
- 54 LANCASTER, T.; BLUNDELL, S. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. 1ª. ed. United States of America: Oxford University Press, 2014. Citado 9 vezes nas páginas 42, 45, 46, 48, 51, 62, 66, 104 e 114.

- 55 GREINER, W. Relativistic quantum mechanics: wave equations. In: \_\_\_\_\_. 3<sup>a</sup>. ed. Alemanha: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000. cap. Relativistic Wave Equation for Spin-0 Particles: The Klein-Gordon Equation and Its Applications, p. 1–98. Citado 3 vezes nas páginas 45, 51 e 53.
- 56 GRIFFITHS, D. Introduction to elementary particles. In: \_\_\_\_\_. 2<sup>a</sup>, rev.. ed. Alemanha: Wiley-VCH, 2008. cap. Historical Introduction to the Elementary Particles, p. 13–58. ISBN 978-3-527-40601-2. Citado na página 45.
- 57 GOUR, G.; SRIRAMKUMAR, L. Will small particles exhibit Brownian motion in the quantum vacuum? *Found. Phys.*, v. 29, p. 1917–1949, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 47, 133 e 198.
- 58 GRIFFITHS, D. J. Introduction to quantum mechanics. In: \_\_\_\_\_. Estados Unidos: Prentice Hall, 1995. cap. The wave function, p. 1–19. Citado 3 vezes nas páginas 47, 51 e 52.
- 59 ARFKEN, G.; WEBER, H. *Mathematical Methods For Physicists International Student Edition*. Elsevier Science, 2005. ISBN 9780080470696. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=tNtijk2iBSMC>>. Citado 8 vezes nas páginas 47, 70, 91, 92, 93, 129, 201 e 205.
- 60 JACKSON, J. D. *Classical Eletrodynamics*. 3<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 129.
- 61 BIRRELL, N.; DAVIES, P. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984. Citado 11 vezes nas páginas 48, 49, 50, 57, 58, 59, 60, 62, 65, 82 e 134.
- 62 MANDL, F.; SHAW, G. Quantum field theory. In: \_\_\_\_\_. 2<sup>a</sup>. ed. United Kingdom: John Wiley & Sons, 2010. cap. The Klein-Gordon Field, p. 39–54. Citado na página 49.
- 63 CARROLL, S. Spacetime and geometry: An introduction to general relativity. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. cap. Quantum Field Theory in Curved Spacetime, p. 376–421. Citado 7 vezes nas páginas 49, 50, 58, 59, 60, 62 e 63.
- 64 SAKURAI, J. Modern quantum mechanics. In: \_\_\_\_\_. Rev. ed. Estados Unidos: Addison-Wesley, 1994. cap. Quantum Daynamics, p. 68–151. Citado na página 51.
- 65 HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. General relativity: An introduction for physicists. In: \_\_\_\_\_. New York: Cambridge University Press, 2006. cap. A variational approach to general relativity, p. 524–554. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 57.
- 66 CARROLL, S. Spacetime and geometry: An introduction to general relativity. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. cap. Gravitation, p. 151–192. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.
- 67 STEPHEN, A. F. *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. Citado 6 vezes nas páginas 56, 58, 59, 65, 67 e 144.

- 68 WALD, R. M. General relativity. In: \_\_\_\_\_. Estados Unidos: University of Chicago Press, 1984. cap. Appendix D: Conformal Transformations, p. 445–449. Citado 3 vezes nas páginas 60, 193 e 196.
- 69 FORD, L. H. Cosmological particle production: a review. *Rept. Prog. Phys.*, v. 84, n. 11, 2021. Citado na página 62.
- 70 ROMAN, P. *Introduction to Quantum Field Theory*. New York: John Wiley & Sons, 1969. Citado na página 65.
- 71 D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. Alemanha: Clarendon Press, 1992. ISBN 9780198596868. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=yqcT3VICuvMC>>. Citado 5 vezes nas páginas 68, 88, 89, 163 e 197.
- 72 VILENKIN, A. Cosmic strings. *Physical Review D*, APS, v. 24, n. 8, p. 2082, 1981. Citado na página 68.
- 73 VILENKIN, A.; SHELLARD, E. Cosmic strings and other topological defects. In: \_\_\_\_\_. Reino Unido: Cambridge University Press, 1994. cap. String Gravity, p. 182–219. Citado na página 68.
- 74 COPELAND, E. J.; KIBBLE, T. Cosmic strings and superstrings. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society Publishing, v. 466, n. 2115, p. 623–657, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 68, 69 e 99.
- 75 GRADSHTEYN, I.; RYZHIK, I. *Table of Integrals, Series, and Products*. Estados Unidos: Elsevier, 2007. Citado 18 vezes nas páginas 70, 71, 76, 78, 79, 82, 83, 84, 92, 93, 94, 95, 124, 157, 201, 211, 217 e 222.
- 76 MELLO, E. R. Bezerra de et al. Vacuum currents induced by a magnetic flux around a cosmic string with finite core. *Physical Review D*, APS, v. 91, n. 6, p. 064034, 2015. Citado na página 72.
- 77 FARIAS, K. E. L. de; MOHAMMADI, A.; MOTA, H. F. S. Boundary effects on classical liquid density fluctuations. *Physical Review D*, APS, v. 104, n. 4, p. 045015, 2021. Citado na página 72.
- 78 SAHARIAN, A. A. The Generalized Abel-Plana formula with applications to Bessel functions and Casimir effect. 8 2007. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 83.
- 79 PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, I. A.; MARICHEV, O. I. *Integrals and series: special functions*. [S.l.]: CRC press, 1986. v. 2. Citado 5 vezes nas páginas 78, 79, 95, 217 e 222.
- 80 ISLAM, J. An introduction to mathematical cosmology. In: \_\_\_\_\_. 2ª. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 2004. cap. The Robertson-Walker metric, p. 37–59. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 89.
- 81 HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. General relativity: An introduction for physicists. In: \_\_\_\_\_. New York: Cambridge University Press, 2006. cap. The Friedmann-Robertson-Walker geometry, p. 355–385. Citado na página 88.
- 82 FORD, L. Quantum vacuum energy in general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 11, n. 12, p. 3370, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 92.

- 83 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. U.S. Government Printing Office, 1970. (Applied mathematics series, v. 55, N° 1972). ISBN 9780160002021. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ZboM5tOFWtsC>>. Citado 3 vezes nas páginas 92, 123 e 201.
- 84 FORD, L. Quantum vacuum energy in a closed universe. *Physical Review D*, APS, v. 14, n. 12, p. 3304, 1976. Citado na página 92.
- 85 OZCAN, M. Green's function for a n-dimensional closed, static universe and with a spherical boundary. 6 2001. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 93.
- 86 OZCAN, M. Casimir energy density for spherical universes in n-dimensional spacetime. *Class. Quant. Grav.*, v. 23, p. 5531–5546, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 135.
- 87 PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, I. A.; MARICHEV, O. I. *Integrals and series: elementary functions*. [S.l.]: Taylor & Francis, 1986. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 95, 211, 217 e 222.
- 88 DOWKER, J.; CRITCHLEY, R. Covariant Casimir calculations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 9, n. 4, p. 535, 1976. Citado na página 96.
- 89 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. Citado na página 97.
- 90 LORENCI, V. A. D.; KLIPPERT, R. Non gravitational black holes. *Braz. J. Phys.*, v. 34, p. 1367–1373, 2004. Citado na página 97.
- 91 UNRUH, W. G. Experimental black-hole evaporation? *Physical Review Letters*, v. 46, n. 21, p. 1351–1353, 1981. Citado na página 98.
- 92 TORRES, T. et al. Rotational superradiant scattering in a vortex flow. *Nature Physics*, v. 13, n. 9, p. 833–838, 2017. Citado na página 98.
- 93 FOGLIZZO, T. et al. Shallow water analogue of the standing accretion shock instability: experimental demonstration and a two-dimensional model. *Physical Review Letters*, APS, v. 108, n. 5, p. 051103(1)–051103(4), 2012. Citado na página 98.
- 94 PADUA, A. de; PARISIO-FILHO, F.; MORAES, F. Geodesics around line defects in elastic solids. *Phys. Lett. A*, v. 238, p. 153–158, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 99.
- 95 KIBBLE, T. Phase-transition dynamics in the lab and the universe. *Physics Today*, AIP Publishing, v. 60, n. 9, p. 47–52, 2007. Citado na página 100.
- 96 SÁTIRO, C.; MORAES, F. A liquid crystal analogue of the cosmic string. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 20, n. 33, p. 2561–2565, 2005. Citado na página 100.
- 97 ANDRIENKO, D. Introduction to liquid crystals. *Journal of Molecular Liquids*, Elsevier, v. 267, p. 520–541, 2018. Citado na página 100.

- 98 MOTA, H. F. S.; MELLO, E. R. Bezerra de. Induced brownian motion by the friedmann–robertson–walker spacetime in the presence of a cosmic string. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 135, n. 1, p. 1–18, 2020. Citado 5 vezes nas páginas 100, 110, 123, 166 e 172.
- 99 BAGNATO, V. S. A condensação de Bose-Einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 19, n. 1, p. 11–26, 1997. Citado na página 101.
- 100 MUNIZ, S. R. *Desenvolvimento experimental para produção e estudo de gases quânticos: condensação de Bose-Einstein*. Tese (Doutorado em Ciências: Física Básica) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002. Citado na página 101.
- 101 JAIN, P. et al. Analog model of a Friedmann-Robertson-Walker universe in Bose-Einstein condensates: Application of the classical field method. *Physical Review A*, APS, v. 76, n. 3, p. 033616, 2007. Citado 7 vezes nas páginas 101, 102, 103, 104, 106, 107 e 108.
- 102 BARCELO, C.; LIBERATI, S.; VISSER, M. Analogue gravity from bose-einstein condensates. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 18, n. 6, p. 1137, 2001. Citado 5 vezes nas páginas 101, 102, 103, 104 e 106.
- 103 DALFOVO, F. et al. Theory of bose-einstein condensation in trapped gases. *Reviews of modern physics*, APS, v. 71, n. 3, p. 463, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 101, 102, 103 e 104.
- 104 BARCELO, C.; LIBERATI, S.; VISSER, M. Analogue models for frw cosmologies. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 12, n. 09, p. 1641–1649, 2003. Citado na página 107.
- 105 ANACLETO, M. A. et al. Stochastic motion in an expanding noncommutative fluid. *Physical Review D*, APS, v. 103, n. 12, p. 125023, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 108 e 116.
- 106 WEINFURTNER, S. et al. On the phenomenon of emergent spacetimes: An instruction guide for experimental cosmology. *arXiv preprint arXiv:0804.1346*, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 108 e 109.
- 107 BÉSSA, C. H. G.; BEZERRA, V. B.; FORD, L. H. Brownian motion in robertson–walker spacetimes from electromagnetic vacuum fluctuations. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 50, n. 6, p. 062501, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 110, 113, 116, 166 e 201.
- 108 POISSON, E.; POUND, A.; VEGA, I. The motion of point particles in curved spacetime. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 14, p. 1–190, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 110, 165, 197, 198 e 200.
- 109 HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. General relativity: An introduction for physicists. In: \_\_\_\_\_. New York: Cambridge University Press, 2006. cap. Vector calculus on manifolds, p. 53–91. Citado na página 110.
- 110 REIF, F. Introduction to statistical methods. In: \_\_\_\_\_. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. International student edition. Japan: McGraw-Hill Book Company, 1965. p. 1–46. Citado na página 114.

- 111 SAKURAI, J. Modern quantum mechanics. In: \_\_\_\_\_. Rev. ed. Estados Unidos: Addison–Wesley, 1994. cap. Fundamental concepts, p. 1–67. Citado na página 114.
- 112 FARIAS, K. E. L. de; MOTA, H. F. S. Quantum vacuum fluctuation effects in a quasi-periodically identified conical spacetime. *Phys. Lett. B*, v. 807, p. 135612, 2020. Citado na página 120.
- 113 GRIFFITHS, D. J. Eletrodinâmica. In: \_\_\_\_\_. 3<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011. cap. Técnicas especiais, p. 78–112. Citado na página 129.
- 114 ZANGWILL, A. *Modern Electrodynamics*. Reino Unido: Cambridge University Press, 2013. (Modern Electrodynamics). ISBN 9780521896979. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=tEYSUegp9WYC>>. Citado na página 129.
- 115 SAHARIAN, A. A. Topological Casimir Effect in Nanotubes and Nanoloops. In: *9th Conference on Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions (QFEXT 09): Devoted to the Centenary of H. B. G. Casimir*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 470–474. Citado na página 130.
- 116 FENG, C.-J.; LI, X.-Z.; ZHAI, X.-H. Casimir Effect under Quasi-Periodic Boundary Condition Inspired by Nanotubes. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 29, p. 1450004, 2014. Citado na página 130.
- 117 NETO, A. C.; GUINEA, F.; PERES, N. M. Drawing conclusions from graphene. *Physics world*, IOP Publishing, v. 19, n. 11, p. 33, 2006. Citado na página 131.
- 118 GRIFFITHS, D. J. Introduction to quantum mechanics. In: \_\_\_\_\_. Estados Unidos: Prentice Hall, 1995. cap. The adiabatic approximation, p. 323–351. Citado 2 vezes nas páginas 131 e 132.
- 119 BORGES, P. F.; BOSCHI-FILHO, H.; FARINA, C. Generalized partition functions and interpolating statistics. *Modern Physics Letters A*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 13, n. 11, p. 843–852, apr 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142%2Fs0217732398000917>>. Citado 2 vezes nas páginas 131 e 156.
- 120 BORGES, P. F.; BOSCHI-FILHO, H.; FARINA, C. Quasiperiodic fields and Bose-Einstein condensation. *ArXiv preprint*, 1998. Disponível em: <[hep-th/9812045](https://arxiv.org/abs/hep-th/9812045)>. Citado 2 vezes nas páginas 131 e 156.
- 121 FORD, L. H.; SVAITER, N. F. Vacuum energy density near fluctuating boundaries. *Phys. Rev. D*, v. 58, p. 065007, 1998. Citado na página 142.
- 122 PATHRIA, R. Statistical mechanics. In: \_\_\_\_\_. 2<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Elsevier Science, 1996. cap. Fluctuations, p. 452–494. Citado na página 143.
- 123 LORENCI, V. A. D.; FORD, L. H. Subvacuum effects on light propagation. *Phys. Rev. A*, v. 99, n. 2, p. 023852, 2019. Citado na página 144.
- 124 WU, T.-H.; HSIANG, J.-T.; LEE, D.-S. Subvacuum effects of the quantum field on the dynamics of a test particle. *Annals Phys.*, v. 327, p. 522–541, 2012. Citado na página 144.
- 125 NOBLE, A. et al. Self-force on a charged particle in an external scalar field. *New J. Phys.*, v. 23, n. 11, p. 115007, 2021. Citado na página 198.

- 126 BOAS, M. L. Mathematical methods in the physical sciences. In: \_\_\_\_\_. 3<sup>a</sup>. ed. EUA: John Wiley & Sons, 2006. cap. Functions of a Complex Variable, p. 666–721. Citado 2 vezes nas páginas 201 e 202.
- 127 DANTE, L. R. Matemática. In: \_\_\_\_\_. 1<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Editora Ática, 2009. cap. Determinantes, p. 254–265. Citado na página 204.
- 128 SONDOW, J.; WEISSTEIN, E. W. *Riemann Zeta Function*. MathWorld—A Wolfram Web Resource. Data de acesso: 20 de nov. de 2023. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html>. Citado na página 228.