



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Alguns estudos sobre a física de
buracos negros regulares e singulares
em cenários com nuvem e fluido de
cordas e quintessência**

Francinaldo Florencio do Nascimento

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Junho 2024

Francinaldo Florencio do Nascimento

Alguns estudos sobre a física de buracos negros regulares e singulares em cenários com nuvem e fluido de cordas e quintessência

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra

João Pessoa - PB

Junho - 2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N244a Nascimento, Francinaldo Florencio do.

Alguns estudos sobre a física de buracos negros regulares e singulares em cenários com nuvem e fluido de cordas e quintessência / Francinaldo Florencio do Nascimento. - João Pessoa, 2024.

285 f. : il.

Orientação: Valdir Barbosa Bezerra.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Buracos negros - Bardeen, Hayward e Frolov. 2. Nuvem de cordas. 3. Fluido de cordas. 4. Eletrodinâmica não-linear. 5. Quintessência. I. Bezerra, Valdir Barbosa. II. Título.

UFPB/BC

CDU 524.882(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de Doutorado do aluno Francinaldo Florencio do Nascimento, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos vinte e um dias do mês de junho do ano de dois mil e vinte e quatro, às 14h00, na sala virtual <https://meet.google.com/uok-tsx-pof>, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Gravitação e Cosmologia, de **Francinaldo Florencio do Nascimento**. A Banca Examinadora foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Valdir Barbosa Bezerra (PPGF/UFPB), orientador e presidente da Banca Examinadora, Fábio Leal de Melo Dahia (PPGF/UFPB), Herondy Francisco Santana Mota (PPGF/UFPB), Raimundo Silva Júnior (UFRN) e Celio Rodrigues Muniz (UECE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Valdir Barbosa Bezerra comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada "*Alguns estudos sobre a física de buracos negros regulares e singulares em cenários com nuvem e fluido de cordas e quintessência*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Ana Beatriz Cândido Vieira, Assistente em Administração, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **21 de junho de 2024**.

Documento assinado digitalmente
VALDIR BARBOSA BEZERRA
Data: 28/06/2024 08:30:11-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
Orientador - PPGF/UFPB

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
CELIO RODRIGUES MUNIZ
Data: 25/06/2024 13:39:58-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Celio Rodrigues Muniz
UECE

Documento assinado digitalmente
HERONDY FRANCISCO DE SANTANA MOTA
Data: 25/06/2024 21:30:37-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Raimundo Silva Júnior
UFRN

À minha adorável esposa Leonice (minha Maria), companheira de todas as horas.

Agradecimentos

A Deus por me conceder a vida. A nossa Senhora do Perpétuo Socorro que sempre passou a frente de meus estudos!

À minha família, e em especial, ao meu pai, minhas mães de coração, irmãos de sangue e coração, pelo amor e pela confiança que depositam em mim.

Quero agradecer aos meus amigos, Antônio e Júlio, que me ajudaram durante o período de preparação para as qualificações de doutorado, assim como tirando minhas dúvidas de física e matemática durante boa parte do doutorado.

Não posso esquecer de meus colegas de sala, Gislaine e Pedro, que sempre estiveram ao meu lado me orientando quando precisei.

Quero agradecer a todos os professores e a todas as pessoas que de forma direta ou indireta contribuíram para minha formação acadêmica.

Quero agradecer também a existência desse misterioso universo que nos fornece conteúdo para estudarmos. Aos grandes gigantes da Ciência, os quais minhas leituras sobre vida e obras influenciaram-me decididamente a estudar física.

Finalmente, não poderia esquecer de três pessoas que foram fundamentais para esta conquista:

O professor Valdir Bezerra pela orientação e contribuição no meu aprendizado, pela compreensão e pelas palavras de consolo e de motivação nas horas que mais precisei.

Ao Jefferson de Moraes Toledo pelas valorosas discussões.

E como diria Carl Sagan: “Diante da vastidão do tempo e da imensidão do universo, é um imenso prazer para mim dividir um planeta e uma época com você”; é com muito carinho e amor que dedico esta frase para vocês Marias (Maria minha mãe, Maria minha Vó e Maria minha esposa), companheiras de todas as horas.

Artigos referente ao conteúdo da tese

Artigos publicados em periódicos:

- NASCIMENTO, F. F.; BEZERRA, V. B.; TOLEDO, J. M. Some remarks on Hayward black hole surrounded by a cloud of strings. *Annals of Physics*, v. 460, p. 169548, 2024.

Artigo aceito para publicação:

- NASCIMENTO, F. F.; MORAIS, P. H.; TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Some remarks on Bardeen-AdS black hole surrounded by a fluid of strings. Artigo aceito para publicação no periódico *The General Relativity and Gravitation*.

Artigos já submetidos a periódicos:

- NASCIMENTO, F. F.; BEZERRA, V. B.; TOLEDO, J. M. Black hole with a cloud of strings and quintessence in a non-linear electrodynamics scenario. Artigo submetido ao periódico *EPJ Plus*.
- NASCIMENTO, F. F.; BEZERRA, V. B.; TOLEDO, J. M.; MARQUES, G. A. Some remarks on Hayward-AdS black hole surrounded by a fluid of strings. Artigo submetido ao periódico *The European Physical Journal C*.

Artigos a serem submetidos a periódicos:

- NASCIMENTO, F. F.; BEZERRA, V. B.; TOLEDO, J. M. Hayward-AdS black hole surrounded by perfect fluid dark matter. Artigo a ser submetido ao periódico *UNIVERSE*.
- NASCIMENTO, F. F.; BEZERRA, V. B.; TOLEDO, J. M. Bardeen-AdS black hole surrounded by perfect fluid dark matter. Artigo a ser submetido ao periódico *EPJ Plus*.
- NASCIMENTO, F. F.; BEZERRA, V. B.; TOLEDO, J. M.; MORAIS, P. H. Bardeen-Kiselev-(anti-)de Sitter charged black hole surround by a cloud of strings. Artigo a ser submetido ao periódico *The European Physical Journal C*.
- NASCIMENTO, F. F.; BEZERRA, V. B.; TOLEDO, J. M. Hayward-Kiselev-(anti-)de Sitter charged black hole surround by a cloud of strings. Artigo a ser submetido ao periódico *Annals of Physics*.

- NASCIMENTO, F. F.; BEZERRA, V. B.; TOLEDO, J. M. Some remarks on Frolov black hole surrounded by a cloud of strings. Artigo a ser submetido ao periódico International Journal of Modern Physics D.
- NASCIMENTO, F. F.; BEZERRA, V. B.; TOLEDO, J. M.; MARQUES, G. A. Some remarks on Frolov-AdS black hole surrounded by a fluid of strings. Artigo a ser submetido ao periódico The European Physical Journal Plus.

“Sê humilde para evitar o orgulho, mas voa alto para alcançar a sabedoria.”
(Santo Agostinho)

Resumo

Nesta tese, obtemos e estudamos algumas soluções de buracos negros regulares e singulares, com nuvem e fluido de cordas, e quintessência. Iniciamos fazendo uma breve revisão sobre buracos negros singulares e regulares. Revisitamos os buracos negros singulares de Schwarzschild e Reissner-Nordström, bem como os buracos negros regulares de Bardeen, Hayward e Frolov, analisando as singularidade, horizontes e termodinâmica. Na sequência, introduzimos os modelos de nuvem e fluido de cordas que serão usados como fontes de campos gravitacionais. A partir de então, generalizamos as soluções de Bardeen, Hayward e Frolov, considerando múltiplas fontes, com ênfase para a nuvem de cordas e para o fluido de cordas. As soluções obtidas foram analisadas em relação à regularidade e singularidade das métricas, com especial atenção para o papel da nuvem e do fluido de cordas no que diz respeito à preservação da regularidade das soluções consideradas, originalmente, a saber, as de Bardeen, Hayward e Frolov. Adicionalmente, foram investigados os horizontes, geodésicas, potencial efetivo e alguns aspectos da termodinâmica, de todas as soluções obtidas. Por fim, foi encontrada uma solução exata para um buraco negro num cenário no qual um campo eletromagnético não-linear é acoplado à gravidade de Einstein, na presença de nuvem de cordas e quintessência como fontes. Estudamos alguns aspectos relativos à termodinâmica do buraco negro assim obtido e mostramos como estas grandezas dependem da presença da nuvem de cordas e quintessência.

Palavras-chave: Buracos negros de Bardeen, Hayward e Frolov. Nuvem de cordas. Fluido de cordas. Eletrodinâmica não-linear. Quintessência.

Abstract

In this thesis, we obtain and study some solutions of regular and singular black holes, with cloud and fluid of strings, and quintessence. We begin by briefly reviewing singular and regular black holes. We revisit the singular black holes of Schwarzschild and Reissner-Nordström, as well as the regular black holes of Bardeen, Hayward and Frolov, analyzing singularities, horizons, and thermodynamics. Next, we introduce the cloud and fluid of strings models that will be used as sources of gravitational fields. We then generalized the Bardeen, Hayward and Frolov solutions, considering multiple sources, with emphasis on the cloud of strings and the fluid of strings. The solutions obtained were analyzed in relation to the regularity and singularity of the metrics, with special attention to the role of the cloud and the fluid of strings in preserving the regularity of the solutions originally considered, namely those of Bardeen, Hayward and Frolov. In addition, the horizons, geodesics, effective potential and some aspects of thermodynamics of all the solutions obtained were investigated. Finally, an exact solution was found for a black hole in a scenario in which a non-linear electromagnetic field is coupled to Einstein gravity, in the presence of a cloud of strings and quintessence as sources. We study some aspects of the thermodynamics of the black hole thus obtained and show how these quantities depend on the presence of the cloud of strings and quintessence.

Keywords: Bardeen, Hayward and Frolov black holes. Cloud of strings. Fluid of strings. Nonlinear Electrodynamics. Quintessence.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Interpretação padrão da solução exterior de Schwarzschild.	45
Figura 2 – Geodésicas nulas e cones de luz em coordenadas de Schwarzschild. Duas dimensões foram suprimidas.	46
Figura 3 – Partícula caindo no buraco negro no tempo τ e t	49
Figura 4 – Solução de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein.	50
Figura 5 – Massa do buraco negro de Schwarzschild em função da entropia $m(S)$	52
Figura 6 – Temperatura do buraco negro de Schwarzschild em função da entropia $T(S)$	53
Figura 7 – Capacidade térmica do buraco negro de Schwarzschild em função da entropia $C(S)$	54
Figura 8 – Campo elétrico radial de uma partícula pontual.	62
Figura 9 – Gráficos de g_{00} para as soluções de Reissner-Nordström e Schwarzschild.	64
Figura 10 – Gráficos das funções $1 + f$ e $1 - f$	66
Figura 11 – Solução de Reissner-Nordström ($Q^2 < m^2$) em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein.	67
Figura 12 – Massa do buraco negro de Reissner-Nordström em função da entropia $m(S)$	68
Figura 13 – Temperatura do buraco negro de Reissner-Nordström em função da entropia $T(S)$	69
Figura 14 – Capacidade térmica do buraco negro de Reissner-Nordström em função da entropia $C(S)$	70
Figura 15 – Estrela binária com um componente visível e um buraco negro.	71
Figura 16 – Imagem do buraco negro no centro da galaxia M87-foto: EHT Collaboration.	72
Figura 17 – Massa do buraco negro de Bardeen em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de q	79
Figura 18 – Temperatura do buraco negro de Bardeen em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de q	81
Figura 19 – Capacidade térmica do buraco negro de Bardeen em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de q	82
Figura 20 – Massa do buraco negro de Hayward em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de l	87
Figura 21 – Temperatura do buraco negro de Hayward em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de l	88
Figura 22 – Capacidade térmica do buraco negro de Hayward em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de l	89

Figura 23 – Massa do buraco negro de Frolov em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de l e $Q = 0.05$	92
Figura 24 – Temperatura do buraco negro de Frolov em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de l e $Q = 0.05$	93
Figura 25 – Capacidade térmica do buraco negro de Frolov em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de l e $Q = 0.05$	94
Figura 26 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro carregado de Bardeen-Kiselev-(anti-)de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas para diferentes valores de g , Λ e ω_q	128
Figura 27 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Bardeen para diferentes valores de g	129
Figura 28 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Bardeen-Kiselev para diferentes valores de g , ω_q , e α	130
Figura 29 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Bardeen com uma constante cosmológica para diferentes valores de g e Λ	131
Figura 30 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Bardeen com um campo eletromagnético para diferentes valores de g e Q	132
Figura 31 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Bardeen com nuvem de cordas para diferentes valores de g e a	133
Figura 32 – Potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-tempo ($L = 1$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de g , ω_q e Λ	139
Figura 33 – Potencial efetivo para geodésicas não-radiais nulas ($L = 0$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de g , ω_q e Λ	140
Figura 34 – Potencial efetivo para geodésicas radiais tipo-tempo ($J^2 = 0$ e $L = 1$), para diferentes valores de g , ω_q e Λ	141
Figura 35 – Potencial efetivo para geodésicas radiais nulas ($J^2 = 0$ e $L = 0$), para diferentes valores de g , ω_q e Λ	142
Figura 36 – O gráfico da esquerda mostra \dot{r}^2 para $E = 1$. O gráfico da direita mostra o potencial efetivo $V_{eff} = g(r)$	151
Figura 37 – Representação gráfica da temperatura T_κ para diferentes valores de q e b	154
Figura 38 – Representação gráfica da capacidade térmica C_p para diferentes valores de q e b	156
Figura 39 – Representação gráfica do diagrama de fase $P - v$ para diferentes valores de q e b	156
Figura 40 – Conjunto de representações gráficas da equação de estado para diferentes valores de b e q	158
Figura 41 – Representação gráfica da energia livre de Helmholtz para diferentes valores de q e b	159

Figura 42 – Conjunto de representações gráficas da equação de Helmholtz para diferentes valores de b e q	159
Figura 43 – Conjunto de representações gráficas da equação de Helmholtz para diferentes valores de b e q com um zoom numa região.	160
Figura 44 – A função $g(r)$ para $l = 1$ e diferentes valores de m : $m = 0$, $m < m_*$, $m = m_*$ e $m > m_*$	166
Figura 45 – Potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-tempo ($L = 1$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de a e l	170
Figura 46 – Potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-nulo ($L = 0$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de a e l	171
Figura 47 – Potencial efetivo para geodésicas radiais tipo-tempo ($J^2 = 0$ e $L = 1$), para diferentes valores de a e l	172
Figura 48 – Potencial efetivo para geodésicas radiais tipo-nulo ($J^2 = 0$ e $L = 0$), para diferentes valores de a e l	172
Figura 49 – Massa do buraco negro em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de a e l	175
Figura 50 – Temperatura do buraco negro em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de a e l	177
Figura 51 – Capacidade térmica em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de a e l	178
Figura 52 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro carregado de Hayward-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas para diferentes valores de l , Λ e ω_q	186
Figura 53 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Hayward para diferentes valores de l	187
Figura 54 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Hayward-Kiselev para diferentes valores de l , ω_q e α	187
Figura 55 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Hayward com constante cosmológica para diferentes valores de l e Λ	189
Figura 56 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Hayward com campo eletromagnético para diferentes valores de l e Q	190
Figura 57 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Hayward com nuvem de cordas para diferentes valores de l e a	191
Figura 58 – Potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-tempo ($L = 1$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de l , ω_q e Λ	196
Figura 59 – Potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-nulo ($L = 0$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de l , ω_q e Λ	197
Figura 60 – Potencial efetivo para geodésicas radiais tipo-tempo ($J^2 = 0$ e $L = 1$), para diferentes valores de l , ω_q e Λ	198

Figura 61 – Potencial efetivo para geodésicas radiais do tipo-nulo ($J^2 = 0$ e $L = 0$), para diferentes valores de l , ω_q e Λ	199
Figura 62 – O gráfico da esquerda mostra \dot{r}^2 para $E = 2$. O gráfico da direita mostra o potencial efetivo $V_{eff} = f(r)$	209
Figura 63 – Representação gráfica da temperatura T_κ para diferentes valores de q e b .	214
Figura 64 – Capacidade térmica a pressão constante C_P para diferentes valores de q e b	215
Figura 65 – Capacidade térmica a pressão constante C_P para $b = q = 0$ e diferentes valores de Λ	215
Figura 66 – Representação gráfica do comportamento $P - v$ da solução (6.247) a $T < T_c$, $T = T_c$ e $T > T_c$ e $q = b = 0, 2$	217
Figura 67 – Representação gráfica do comportamento $P - V$ da solução (6.247) a uma temperatura fixa e diferentes valores de q e b	218
Figura 68 – Representação gráfica do diagrama $P - v$ para diferentes valores de q e b .	218
Figura 69 – Representação gráfica da equação de estado para $b = 0.01$ e $q = 0.1$	219
Figura 70 – Representação gráfica da equação de estado para $b = 1$ e $q = 0.1$	219
Figura 71 – Representação gráfica do comportamento de $G - P$ para diferentes valores de q	221
Figura 72 – Representação gráfica do comportamento $G - P$ da solução (6.247) para diferentes valores de b	221
Figura 73 – Representação gráfica do comportamento $G - P$ da solução (6.247) para uma $T < T_c$, $T = T_c$ e $T > T_c$ com $q = 0.1$ e $b = 0.01$	222
Figura 74 – Representação gráfica do comportamento $G - P$ da solução (6.247) para uma $T < T_c$, $T = T_c$ e $T > T_c$ com $q = 0.1$ e $b = 1$	222
Figura 75 – Representação gráfica da equação de Gibbs para $b = 0.01$ e $q = 0.1$ com um zoom numa região.	223
Figura 76 – Representação gráfica da equação de Gibbs para $b = 1$ e $q = 0.1$ com um zoom numa região.	223
Figura 77 – O gráfico da esquerda mostra \dot{r}^2 para $E = 2$. O gráfico da direita mostra o potencial efetivo $V_{eff} = f(r)$	231
Figura 78 – Massa do buraco negro em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de a , Q e l	235
Figura 79 – Temperatura do buraco negro em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de a , Q e l	237
Figura 80 – Capacidade térmica em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de a , Q e l	238
Figura 81 – Representação gráfica de $f(r)$ em relação à coordenada radial para $Q = 0.05$ e diferentes valores de l , b , Λ e ϵ	244

Figura 82 – O gráfico da esquerda mostra \dot{r}^2 para $E = 2$. O gráfico da direita mostra o potencial efetivo $V_{eff} = f(r)$	246
Figura 83 – Massa do buraco negro em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de b e l	248
Figura 84 – Temperatura do buraco negro em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de b e l	248
Figura 85 – Capacidade térmica em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de b e l	248
Figura 86 – A função $f(r)$ para diferentes valores de k , α e a	257
Figura 87 – Massa do buraco negro em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de k , a e α	264
Figura 88 – Temperatura do buraco negro em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de k , a e α	265
Figura 89 – Capacidade térmica do buraco negro em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de k , a e α	267

Lista de quadros

Quadro 1 – Espaço-tempo que pode ser recuperado fazendo $q = \Lambda = 0$ na Eq. (5.141) e diferentes valores de β , b e ϵ	147
Quadro 2 – Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , p_c e $\frac{p_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de q e para $\epsilon = -1$ e $b = 0.1$	157
Quadro 3 – Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , p_c e $\frac{p_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de b e para $\epsilon = -1$ e $q = 0.1$	157
Quadro 4 – Espaço-tempo que pode ser recuperado fazendo $l = \Lambda = 0$ na Eq.(6.217) e diferentes valores de β , b e ϵ	205
Quadro 5 – Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , P_c e $\frac{P_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de q e para $\epsilon = -1$ e $b = 0.1$	218
Quadro 6 – Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , P_c e $\frac{P_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de b e para $\epsilon = -1$ e $q = 0.1$	219
Quadro 7 – Espaço-tempo que pode ser recuperado fazendo $l = Q = \Lambda = 0$ na Eq. (7.90) e diferentes valores de β , b e ϵ	244

Sumário

1	INTRODUÇÃO	29
I	SOBRE ALGUNS BURACOS NEGROS ESTÁTICOS SINGULARES E REGULARES	35
2	BURACOS NEGROS ESTÁTICOS SINGULARES NA RELATIVIDADE GERAL	37
2.1	Buraco negro de Schwarzschild: singularidades, horizontes e termodinâmica	37
2.1.1	Métrica estática e esfericamente simétrica	38
2.1.2	Solução de Schwarzschild	41
2.1.3	Singularidades e horizontes	43
2.1.4	Diagramas do espaço-tempo em coordenadas de Schwarzschild	45
2.1.5	Partícula caindo radialmente no buraco negro de Schwarzschild	47
2.1.6	Coordenadas de Eddington-Finkelstein	49
2.1.7	Termodinâmica do buraco negro	51
2.1.8	Buraco negro de Schwarzschild com constante cosmológica	54
2.2	Buraco negro de Reissner-Nordström: singularidades, horizontes e termodinâmica	55
2.2.1	Tensor de energia-momento para o campo eletromagnético	56
2.2.2	Equações acopladas de Einstein-Maxwell	59
2.2.3	Solução de Reissner-Nordström	62
2.2.4	Singularidades e horizontes	63
2.2.5	Diagrama do espaço-tempo da solução de Reissner-Nordström	65
2.2.6	Termodinâmica do buraco negro	68
2.2.7	Evidências observacionais para buracos negros	70
3	BURACOS NEGROS ESTÁTICOS REGULARES NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	73
3.1	Buraco negro regular de Bardeen	73
3.1.1	O espaço-tempo de Bardeen	74
3.1.2	Solução de Bardeen	75
3.1.3	Termodinâmica do buraco negro	78
3.2	Buraco negro regular de Hayward	81
3.2.1	O espaço-tempo de Hayward	82

3.2.2	Solução de Hayward	84
3.2.3	Termodinâmica do buraco negro	86
3.3	Buraco negro regular de Frolov	89
3.3.1	O espaço-tempo de Frolov	90
3.3.2	Termodinâmica do buraco negro	91
3.4	Outros buracos negros regulares	94
3.4.1	Buraco negro de De Sitter-Schwarzschild (Buraco negro de Dymnikova)	94
3.4.2	Buraco negro regular de Einstein-Bronnikov magneticamente carregado	95
3.4.3	Buraco negro regular de Ghosh-Culetu-Simpson-Visser (Eletrodinâmica não-linear)	96
3.4.4	Buraco negro regular de Kazakov-Solodukhin	96
3.4.5	Buraco negro regular de Simpson-Visser e buraco de minhoca atravessável	97

II GENERALIDADES: NUVEM DE CORDAS E FLUIDO DE CORDAS 99

4 NUVEM E FLUIDO DE CORDAS NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL 101

4.1	Modelo de nuvem de cordas	101
4.1.1	Nuvem de cordas	102
4.1.2	Condições de energia	105
4.1.3	Buraco negro estático com nuvem de cordas	106
4.1.3.1	Componentes do tensor de energia-momento	107
4.1.3.2	Solução de Letelier para a nuvem de cordas	109
4.2	Modelo de fluido de cordas	111
4.2.1	Fluido de cordas	111
4.2.2	Condições de energia	114
4.2.3	Buraco negro estático com fluido de cordas	116
4.2.3.1	Componentes do tensor de energia-momento	116
4.2.3.2	Solução de Letelier para o fluido de cordas	117

III BURACOS NEGROS REGULARES NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL COM NUVEM DE CORDAS E FLUIDO DE CORDAS 119

5	BURACO NEGRO DE BARDEEN COM NUVEM DE CORDAS E FLUIDO DE CORDAS	121
5.1	BN carregado de Bardeen-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas	121

5.1.1	Solução geral	121
5.1.2	Análise do escalar de Kretschmann	126
5.1.3	Condições de energia	134
5.1.4	Geodésicas do buraco negro	136
5.1.4.1	Movimento radial de uma partícula sem massa	138
5.1.4.2	Movimento radial de uma partícula massiva	138
5.1.4.3	Potencial Efetivo	140
5.2	Buraco negro de Bardeen-AdS com um fluido de cordas	141
5.2.1	Solução geral	142
5.2.2	Análise do escalar de Kretschmann	147
5.2.3	Geodésicas e Potencial Efetivo	149
5.2.4	Termodinâmica do buraco negro	152
5.2.4.1	Capacidade térmica	154
5.2.4.2	Equação de estado e variáveis termodinâmicas críticas	155
5.2.4.3	Energia livre de Helmholtz	158
6	BURACO NEGRO DE HAYWARD COM NUVEM DE CORDAS E FLUIDO DE CORDAS	161
6.1	Algumas observações sobre o buraco negro de Hayward rodeado por uma nuvem de cordas	161
6.1.1	Solução geral	161
6.1.2	Horizontes do buraco negro	165
6.1.3	Geodésicas do buraco negro	167
6.1.4	Potencial efetivo	169
6.1.5	Condições de energia	170
6.1.6	Termodinâmica do buraco negro	174
6.2	BN carregado de Hayward-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas	178
6.2.1	Solução geral	178
6.2.2	Análise do escalar de Kretschmann	184
6.2.3	Condições de energia	192
6.2.4	Geodésicas do buraco negro	194
6.2.4.1	Movimento radial de uma partícula sem massa	196
6.2.4.2	Movimento radial de uma partícula massiva	197
6.2.4.3	Potencial efetivo	198
6.3	Buraco negro de Hayward-AdS com um fluido de cordas	199
6.3.1	Solução geral	200
6.3.2	Análise do escalar de Kretschmann	205
6.3.3	Geodésicas e Potencial Efetivo	207
6.3.4	Termodinâmica do buraco negro	211

6.3.4.1	Capacidade térmica	214
6.3.4.2	Equação de estado e variáveis termodinâmicas críticas	216
6.3.4.3	Energia livre de Gibbs	220
7	BURACO NEGRO DE FROLOV COM NUVEM DE CORDAS E FLUIDO DE CORDAS	225
7.1	Algumas observações sobre o buraco negro de Frolov rodeado por uma nuvem de cordas	225
7.1.1	Solução geral	225
7.1.2	Análise do escalar de Kretschmann	229
7.1.3	Geodésicas e Potencial Efetivo	230
7.1.4	Condições de energia	232
7.1.5	Termodinâmica do buraco negro	234
7.1.5.1	Massa do buraco negro	234
7.1.5.2	Temperatura Hawking	236
7.1.5.3	Capacidade térmica	237
7.2	Buraco negro de Frolov-AdS com um fluido de cordas	239
7.2.1	Solução geral	239
7.2.2	Horizontes do buraco negro e análise do escalar de Kretschmann	244
7.2.3	Geodésicas e Potencial Efetivo	245
7.2.4	Termodinâmica do buraco negro	247
7.2.4.1	Massa do buraco negro	247
7.2.4.2	Temperatura Hawking	249
7.2.4.3	Capacidade térmica	250
8	BURACOS NEGROS COM NUVEM DE CORDAS E QUINTES-SÊNCIA NUM CENÁRIO DE ELETRODINÂMICA NÃO-LINEAR	253
8.1	Solução geral	253
8.2	Horizontes do buraco negro, regularidade e singularidade	256
8.2.1	Horizontes do buraco negro	256
8.2.2	Regularidade e Singularidade	257
8.3	Condições de energia	260
8.4	Termodinâmica do buraco negro	262
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	269
	REFERÊNCIAS	275

1 Introdução

Os buracos negros são objetos suficientemente massivos que criam uma região de onde nenhum objeto pode escapar, nem mesmo a luz [1]. A primeira e mais simples solução para os buracos negros foi obtida por Schwarzschild em 1916, resolvendo as equações de campo de Einstein para uma distribuição de matéria estática e esfericamente simétrica [2].

A sua generalização, para incluir a presença de campo eletromagnético como fonte, foi obtida por Reissner e Nordström [3, 4]. Passados quase cinquenta anos, Kerr [5] obteve uma generalização da solução de Schwarzschild, ao considerar rotação. Dois anos após a obtenção da solução de Kerr, foi obtida a sua generalização, com a inclusão, também, do campo eletromagnético como fonte, solução esta conhecida como de Kerr-Newman [6].

Vale ressaltar que as métricas correspondentes a essas soluções de buracos negros têm uma singularidade em $r = 0$, cuja existência cria algumas dificuldades para a Teoria da Relatividade Geral (TRG) porque, no ponto de singularidade, há uma incompletude do movimento geodésico e também as quantidades físicas divergem, e como consequência, as leis físicas são inválidas. Para resolver as dificuldades relacionadas com a singularidade das métricas e as suas consequências, foram propostos alguns modelos de espaço-tempo de buracos negros, que livres de singularidades, ou seja, são regulares. A primeira solução descrevendo um buraco negro regular, estático e esfericamente simétrico, data do final da década de 1960, tendo sido proposta por Bardeen [7].

Atualmente, existem várias métricas que descrevem buracos negros regulares estáticos, entre elas, podemos citar [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16], em especial, as propostas por Bardeen [7], Hayward [17] e Frolov [15], e que serão objeto de estudos nesta tese. A métrica do buraco negro de Hayward [17], por exemplo, é estática, não carregada e esfericamente simétrica. Vale a pena chamar a atenção para o fato que esta métrica se torna um espaço-tempo de De Sitter no centro do buraco negro e, portanto, não há singularidade em $r = 0$. Assintoticamente, isto é, quando $r \rightarrow \infty$, o espaço-tempo é plano.

As soluções regulares de buracos negros e as consequências interessantes que delas decorrem, inspiraram outras investigações relacionadas com tais buracos negros, como, por exemplo, as relativas às geodésicas [18, 19, 20, 21], efeito lente [22, 23], termodinâmica [24, 25, 26, 27, 28, 29] e modos quase-normais [30, 31, 32], dentre muitas outras. Desde então, os buracos negros têm atraído muita atenção e têm sido objeto de intensos estudos. Recentemente, experiências astrofísicas confirmaram a existência de buracos negros através da observação de uma sombra de buraco negro em M87 [33] ou, indiretamente, com a detecção de um sinal de onda gravitacional de uma fusão binária de buracos negros [34, 35].

Com base na ideia de que a natureza pode ser melhor representada com uso de

objetos com extensão, representado por uma coleção de cordas unidimensionais, e não por partículas pontuais, Letelier [36] introduziu um modelo invariante de gauge de uma nuvem de cordas, no final da década de 1970, tendo obtido uma generalização da solução de Schwarzschild no sentido de que corresponde ao espaço-tempo gerado por um corpo central, com certa massa, estático e esfericamente simétrico, rodeado por uma nuvem de cordas [36]. A solução assim obtida corresponde à de Schwarzschild, ligeiramente modificada, pois, apresenta um déficit de ângulo sólido que depende do parâmetro associado à presença da nuvem de cordas. Assim, os efeitos gravitacionais produzidos pela nuvem de cordas são de origem global. Como exemplo destes efeitos, mencionamos o fato de o raio do horizonte de eventos ser aumentado em relação ao raio de Schwarzschild.

Desde então, a nuvem de cordas esfericamente simétrica é considerada em muitos cenários de buracos negros, não só na relatividade geral [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46], mas também nas teorias modificadas da gravidade [47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55]. No que se refere aos buracos negros regulares, foram feitos alguns estudos considerando a presença de uma nuvem de cordas [44, 40, 39], e investigados alguns aspectos da termodinâmica, com destaque para o papel desempenhado pela nuvem [56, 57, 39].

É importante chamar a atenção para o fato de algumas análises astrofísicas terem sido realizadas a partir da sombra do Sgr. A, que foi detectada pelo Telescópio Horizonte de Eventos, supondo-se que este buraco negro está rodeado por uma nuvem de cordas, e com resultados interessantes [58].

Na década de 1990, Soleng obteve uma solução correspondente a um buraco negro rodeado por um fluido de cordas esfericamente simétrico [59], que tem uma pressão transversal proporcional à densidade de energia [60, 61]. Em alguns cenários, este fluido de cordas foi usado para tentar explicar as curvas planas de rotação das galáxias, ou, em outras palavras, o fluido de cordas foi usado para modelar os efeitos da suposta matéria escura [59].

Desde os trabalhos de Bekenstein [62] e Hawking [63, 64, 65], sabe-se que os buracos negros podem emitir radiação, portanto, podemos associar a estes objetos astrofísicos, temperatura e entropia. Assim, o estudo da termodinâmica tornou-se um tópico importante na física dos buracos negros, uma vez que pode fornecer uma ligação entre a Teoria da Relatividade Geral e a Mecânica Quântica. Neste cenário, as leis da termodinâmica de buracos negros foram estabelecidas [66]. A análise da termodinâmica de buracos negros regulares já foi realizada [67], destacando-se a influência das mesmas nas quantidades termodinâmicas. Em particular, a termodinâmica do buraco negro regular de Bardeen, Hayward e Frolov foram estudadas, com ênfase na característica principal destas, que é o fato de serem regulares [68, 69].

Recentemente, em soluções de buracos negros, nas quais a constante cosmológica está presente, foi feita uma associação entre esta e a pressão termodinâmica, com um volume

termodinâmico conjugado [70, 71, 72, 73, 74]. Esta hipótese deu início ao estudo da termodinâmica dos buracos negros, numa perspectiva que está sendo chamada de termoquímica de buracos negros. Nesta abordagem são analisadas a criticalidade termodinâmica do sistema e as suas transições de fase. Neste cenário, vários estudos foram realizados, tendo objeto os buracos negros regulares, particularmente, o de Bardeen [69].

Nesta tese, obteremos a solução correspondente aos buracos negros de Bardeen-AdS e Hayward-AdS rodeados por um fluido de cordas, correspondendo à análise de um cenário no qual o buraco negro regular está imerso em conteúdos de matéria que podem representar matematicamente a matéria escura (fluido de cordas) e a energia escura (constante cosmológica).

As observações astrofísicas sugerem que o universo está preenchido não só por bárions e matéria escura, mas também por energia escura, sendo esta última utilizada para compreender a atual fase de expansão acelerada do universo [75, 76, 77]. Foram desenvolvidos muitos modelos teóricos para explicar esta energia exótica, entre eles, a chamada quintessência, a qual pode ser descrita como um campo escalar que rola lentamente por uma barreira de potencial [78] se comportando como a inflação. A solução correspondente a um buraco negro estático rodeado de quintessência foi obtida por Kiselev [79]. A partir daí, vários estudos foram efetuados para determinar o papel desempenhado pela quintessência no comportamento de sistemas astrofísicos [49, 41, 80, 81, 82, 83].

Em meados da década de 1930, Born e Infeld propuseram uma generalização da eletrodinâmica de Maxwell [84, 85], de forma a remover a divergência de energia associada a uma carga pontual, na sua localização, e assim, tornando a sua auto-energia finita. Uma extensão da eletrodinâmica não-linear proposta por Born e Infeld [84, 85], para o quadro da TRG foi feita por Plebanski [86].

Vale a pena chamar a atenção para o fato dos buracos negros serem corpos gravitacionais que envolvem altas energias e fortes não-linearidades. Isso significa que, para considerar adequadamente o comportamento de partículas carregadas colocadas no espaço-tempo gerado por esse corpo gravitacional, o cenário recomendado inclui, necessariamente, o campo eletromagnético não-linear como uma possível fonte do campo gravitacional descrito pela TRG. Assim, é importante pensar na questão do acoplamento entre os campos gravitacional e eletromagnético não-linear. Neste contexto, uma solução estática e esféricamente simétrica foi obtida, há algumas décadas, por Pellicer e Torrence [87].

Considerando campos eletromagnéticos não-lineares como fontes físicas de buracos negros no contexto da TRG, é possível obter soluções regulares que obedecem à condição de energia fraca [10, 11]. As propriedades termodinâmicas dos buracos negros descritos por estas soluções foram estudadas [88, 56, 29], bem como muitas outras características [31, 89, 90, 88, 56, 91, 92, 93, 94].

Em resumo, o interesse em considerar o acoplamento de campos eletromagnéticos não-lineares com a gravidade é motivado pelo fato de ser possível obter vários espaços-tempos com geometrias de interesse físico, tanto regulares como singulares. Há várias publicações sobre este assunto, entre elas, citamos [16, 10, 95, 14, 96, 11, 97, 98, 99, 100, 101, 13, 102, 103, 104, 105, 106].

Esta tese está dividida em três partes. Na primeira parte, realizaremos uma breve revisão sobre buracos negros singulares e regulares em Teoria da Relatividade Geral. No capítulo 2, revisaremos os buracos negros de Schwarzschild e Reissner-Nordström e analisaremos as singularidades, horizontes e alguns aspectos da sua termodinâmica. No capítulo 3, estudaremos alguns buracos negros regulares que iremos considerar nesta tese, a saber, os de Bardeen [7], Hayward [17] e Frolov [15], explorando as propriedades geométricas dos espaços-tempo e a termodinâmica dos mesmos. Além disso, apresentaremos outros buracos negros regulares recorrentes na literatura.

Abordaremos, na segunda parte da tese, no capítulo 4, os modelos de nuvem de cordas e fluido de cordas proposto por Letelier [36, 107]. Discutiremos as condições de energia e a solução de Letelier [36, 107] esfericamente simétrica para ambos os modelos.

Na terceira e última parte desta tese, abordaremos alguns modelos de buracos negros regulares com nuvem de cordas e fluido de cordas na TRG. No capítulo 5, generalizaremos a métrica de Bardeen para múltiplas fontes, analisaremos o escalar de Kretschmann, as condições de energia e as geodésicas do buraco negro obtido. Ainda neste capítulo, obteremos uma solução que corresponde ao buraco negro de Bardeen com uma constante cosmológica, rodeado por um fluido de cordas. Algumas grandezas termodinâmicas serão obtidas e analisadas. Mostraremos como estas grandezas são modificadas para diferentes valores do parâmetro q associado à solução de Bardeen, bem como do parâmetro b associado à presença do fluido de cordas.

No capítulo 6, obteremos a métrica correspondente ao buraco negro de Hayward rodeado por uma nuvem de cordas. Analisaremos as consequências da nuvem de cordas na regularidade da solução obtida, bem como nas condições de energia. Além disso, serão investigados os horizontes, as geodésicas, o potencial efetivo e alguns aspectos da termodinâmica. Compararemos todos os resultados obtidos com os da literatura correspondentes ao buraco negro de Hayward num cenário no qual a nuvem de cordas está ausente. Generalizaremos a métrica de Hayward para múltiplas fontes analisando o escalar de Kretschmann, as condições de energia e as geodésicas do buraco negro obtido. Obteremos ainda a solução correspondente ao buraco negro de Hayward-AdS rodeado por um fluido de cordas. Investigaremos a influência do fluido de cordas nos horizontes dos buracos negros e na sua regularidade. Também descreveremos a termodinâmica do mesmo, evidenciando a temperatura Hawking, a capacidade térmica e a energia livre de Gibbs.

No capítulo 7, obteremos a métrica correspondente ao buraco negro de Frolov rodeado

por uma nuvem de cordas e por um fluido de cordas. Serão analisadas as consequências da nuvem e do fluido na regularidade das soluções obtidas. Examinaremos também alguns aspectos da termodinâmica associada a solução de Frolov com nuvem de cordas e a solução de Frolov-AdS com fluido de cordas.

Finalmente, no capítulo 8, encontraremos uma solução exata para um buraco negro num cenário em que um campo eletromagnético não-linear é acoplado à gravidade de Einstein, na presença de uma nuvem de cordas e quintessência como fontes. Neste panorama, serão discutidas as consequências destas fontes na regularidade e nos horizontes da solução, bem como nas condições de energia. Estudaremos alguns aspectos relativos à termodinâmica do buraco negro e mostraremos como estas grandezas dependem da presença da nuvem de cordas e quintessência, no cenário considerado.

Parte I

Sobre alguns buracos negros estáticos
singulares e regulares

2 Buracos negros estáticos singulares na relatividade geral

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) descreve a interação gravitacional associando-a à curvatura do espaço-tempo [108, 109]. Desde que foi proposta, a TRG tem sido testada e mostrou-se efetiva em descrever fenômenos relacionados à interação gravitacional. Como, por exemplo, a precessão do periélio de Mercúrio [110, 111] bem como a previsão de novos fenômenos, como desvio do raio de luz sob a ação de um campo gravitacional [112], e mais recentemente, a confirmação da existência de ondas gravitacionais, previstas pela TRG [113]. A confirmação observacional da existência de ondas gravitacionais representa um grande avanço, e que permitirá obter informações de objetos astrofísicos localizados muito distantes de nosso sistema solar.

Outra importante predição da TRG refere-se à existência de buraco negro [114]. Chamamos de buraco negro um corpo muito denso capaz de produzir uma gravidade tão intensa que nem a luz consegue escapar de sua atração [115]. Estes objetos astrofísicos destacam-se devido à sua estrutura causal, uma vez que a partir de uma determinada região, conhecida como horizonte de eventos, nenhuma partícula pode escapar dele [109]. Através da detecção de ondas gravitacionais, foi obtida informação de um vasto número de buracos negros, alguns com massas próximas de 5 massas solares e outros com massas até mais de 100 massas solares [116, 117, 118].

Uma das características de uma classe de soluções de buracos negros é a existência de singularidades físicas [119]. Nestas não existe física, por exemplo, as trajetórias das partículas não passam por elas [120]. Uma das formas de se verificar se em um dado espaço-tempo a métrica é singular é através da construção de invariantes a partir do tensor de Riemann, como por exemplo, o escalar de Kretschmann [108, 109].

Neste capítulo, iremos realizar um estudo sobre os buracos negros singulares de Schwarzschild e Reissner-Nordström. Demonstraremos em detalhes a solução, revisaremos as propriedades geométricas e analisaremos a termodinâmica destes buracos negros.

2.1 Buraco negro de Schwarzschild: singularidades, horizontes e termodinâmica

A solução de Schwarzschild [2] foi a primeira solução analítica das equações de Einstein. Ela recebeu esse nome em homenagem ao seu descobridor, Karl Schwarzschild (1873–1916) que foi um astrônomo e físico alemão e um dos fundadores da astrofísica moderna.

Schwarzschild encontrou a solução em 1915, um mês após a publicação da Teoria da Relatividade Geral.

Em 25 de novembro de 1915, Einstein apresentou a TRG, em um seminário na Academia Prussiana de Ciências, em Berlim. Quase um mês depois, em 22 de dezembro de 1915, Einstein recebeu um manuscrito de Schwarzschild. Einstein ficou agradavelmente surpreso ao saber que suas equações de campo da gravitação, apesar da complexidade, admitiam solução exata que foi obtida, elegantemente, por Schwarzschild. Ao final da carta a Einstein, comunicando sua descoberta, Schwarzschild escreveu: "... como você vê, a guerra me tratou gentilmente o suficiente, apesar da artilharia pesada, para permitir-me ficar longe de tudo e aproveitar essa caminhada na terra de suas ideias."

Em 1916, Einstein escreveu famosa carta a Schwarzschild, a respeito do resultado obtido:

"... Li a sua carta com o máximo de interesse. Não esperava que se pudesse formular a solução exata do problema de maneira tão simples. Gostei muito de seu tratamento matemático sobre o assunto. Na próxima quinta-feira apresentarei o trabalho à academia com algumas palavras e explicação".

Pouco tempo depois de sua solução ser publicada, Schwarzschild morre em 11 de maio de 1916, aos 42 anos, após contrair uma doença de pele que lhe afastou do serviço militar (vale lembrar que ele havia servido no exército alemão durante a Primeira Guerra Mundial) em março de 1916.

Portanto, foi em 1915 que Karl Schwarzschild, apresentou ao mundo a primeira solução exata para as equações de campo de Einstein da TRG. A solução de Schwarzschild também prevê a existência de um dos objetos astrofísicos mais fascinantes do universo, o Buraco Negro.

2.1.1 Métrica estática e esféricamente simétrica

A fim de obter a solução de Schwarzschild, adotaremos algumas convenções. Utilizaremos o sistema de coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) e usaremos o sistema de unidades geometrizadas, isto é, $c = G = 1$. Nesta tese adotaremos uma assinatura métrica dada por $(+ - - -)$. Com este sistema de coordenadas e por meio de um conjunto conveniente de transformações de coordenadas, podemos escrever o elemento de linha para um espaço-tempo isotrópico, na vizinhança de uma fonte esféricamente simétrica, sem perda de generalidades, na seguinte forma

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (2.1)$$

onde admitimos, inicialmente, que $\nu = \nu(r, t)$ e $\lambda = \lambda(r, t)$. Porém, quando assumimos

que a fonte é necessariamente estática, então as funções ν e λ dependerão, apenas, da coordenada radial, r .

Usando a expressão do elemento de linha dado pela Eq. (2.1), podemos especificar matricialmente todos os elementos do tensor métrico, da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

cujo correspondente contravariante é obtido invertendo-se os elementos da diagonal principal, haja visto que o tensor métrico é diagonal, ou seja,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

onde as letras gregas μ, ν, \dots denotam índices do espaço-tempo e variam de 0 a 3.

As equações de Einstein são

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},$$

ou

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, dado pelo lado esquerdo da Eq.(2.4), sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico, R o escalar de curvatura e $T_{\mu\nu}$ o tensor de energia-momento. A constante de acoplamento é definida por $\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}$, que em unidades geometrizadas fica $\kappa = 8\pi$.

Para o caso da solução de Schwarzschild, o tensor de energia-momento que aparece do lado direito da equação de Einstein é zero, pois estamos analisando o espaço ao redor da fonte. Assim, queremos obter a solução das equações de Einstein, na região exterior ao objeto massivo, estático e esféricamente simétrico. Logo, as equações de Einstein, nessa região, ficam

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0,$$

o que implica em:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

O tensor de Riemann é dado por

$$R_{\lambda\beta\gamma}^{\alpha} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \partial_{\beta}\Gamma_{\gamma\lambda}^{\alpha} + \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} - \Gamma_{\delta\beta}^{\alpha}\Gamma_{\gamma\lambda}^{\delta}, \quad (2.6)$$

onde $\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}$ são os símbolos de Christoffel.

Do tensor de Riemann, é possível obter o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma}. \quad (2.7)$$

Os símbolos de Christoffel são dados em termos das componentes do tensor métrico, como segue

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\beta}(\partial_{\nu}g_{\beta\mu} + \partial_{\mu}g_{\beta\nu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}). \quad (2.8)$$

Cálculo dos símbolos de Christoffel

Vamos, agora, calcular as componentes do símbolo de Christoffel. Em seguida, determinaremos as componentes não-nulas do tensor de Ricci. Ao final desse processo, teremos um conjunto de equações, que são, essencialmente, as equações de Einstein para um corpo com certa massa distribuída esfericamente e estática. Na sequência, resolveremos esse conjunto de equações não-lineares e acopladas.

As componentes não-nulas dos símbolos de Christoffel para a métrica estática dada pela Eq. (2.1), são

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}\nu', \\ \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot\theta, \\ \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}\nu'e^{\nu-\lambda}, \\ \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\lambda', \\ \Gamma_{22}^1 = -re^{-\lambda}, \\ \Gamma_{33}^1 = -r\sin^2\theta e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

onde a linha significa diferenciação em relação à variável r . O próximo passo é calcularmos as componentes do tensor de Ricci, dado pela equação Eq. (2.7). As únicas componentes não-nulas do tensor de Ricci para este caso, são dadas por

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right), \quad (2.10)$$

$$R_{11} = -\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r}, \quad (2.11)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} \left[\frac{r}{2} (\lambda' - \nu') - 1 \right] + 1, \quad (2.12)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22}. \quad (2.13)$$

Da Eq. (2.5), podemos escrever

$$\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} = 0, \quad (2.15)$$

$$e^{-\lambda} \left[\frac{r}{2} (\lambda' - \nu') - 1 \right] + 1 = 0. \quad (2.16)$$

2.1.2 Solução de Schwarzschild

Vamos, agora, resolver esse conjunto de equações não-lineares e acopladas dada pelas Eqs. (2.14)-(2.16). Subtraindo as Eqs. (2.15) e (2.14), obtemos que

$$\lambda + \nu = cte. \quad (2.17)$$

As funções $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ determinam a métrica, e esta contém informações acerca da natureza do espaço-tempo, através do tensor de curvatura. Numa região muito distante do corpo que gravita, a saber, $r \rightarrow \infty$, a curvatura deve tender a zero, e conseqüentemente, $\lambda(r)$ e $\nu(r)$ deverão ser nulos.

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \nu = \lambda = 0 \Rightarrow \lambda + \nu = 0. \quad (2.18)$$

Entretanto, se a Eq. (2.17) é válida para qualquer ponto do espaço e no infinito sabe-se que $\lambda + \nu = 0$, então é possível concluir que essa constante é necessariamente nula. Assim, temos

$$\lambda = -\nu \Rightarrow \lambda' = -\nu'. \quad (2.19)$$

Substituindo a Eq. (2.19) na Eq. (2.16), obtemos

$$\begin{aligned} e^\nu \left[\frac{r}{2}(-\nu' - \nu') - 1 \right] + 1 &= 0, \\ e^\nu \left[\frac{-2r\nu'}{2} - 1 \right] + 1 &= 0, \\ \frac{d}{dr}(e^\nu r) &= 1. \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da equação anterior, obtemos

$$e^\nu r = r + C.$$

Por questão de conveniência, escreveremos

$$e^\nu = 1 - \frac{C}{r}. \quad (2.20)$$

Usando a Eq. (2.19), podemos reescrever a Eq. (2.20) como

$$e^\lambda = \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1}. \quad (2.21)$$

Substituindo as Eqs. (2.20)-(2.21) na Eq. (2.1), obtemos o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (2.22)$$

Para $r \rightarrow \infty$, ou seja, para pontos muito distantes do objeto massivo, o que equivale a dizer que o campo gravitacional é fraco, esperamos obter a gravitação Newtoniana. Neste limite, temos

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}, \quad (2.23)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional Newtoniano dado por:

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \quad (2.24)$$

Substituindo a Eq. (2.24) na Eq. (2.23), obtemos

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}. \quad (2.25)$$

Da métrica (2.22), extrai-se que:

$$g_{00} = 1 - \frac{C}{r}. \quad (2.26)$$

Igualando as Eqs.(2.25) e (2.26), é possível determinarmos o valor da constante de integração C , que é dada por

$$C = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.27)$$

Substituindo a Eq. (2.27) na Eq. (2.22), obtemos finalmente a famosa solução de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.28)$$

Definindo a massa geométrica do corpo como:

$$m \equiv \frac{GM}{c^2}. \quad (2.29)$$

Podemos reescrever a Eq. (2.28) da seguinte forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.30)$$

A Eq. (2.30) representa o elemento de linha de Schwarzschild ou simplesmente solução de Schwarzschild. Esta solução foi a primeira solução analítica das equações de Einstein e representa a métrica de um espaço curvo quadridimensional gerado por um corpo com massa M , estático e esfericamente simétrico.

2.1.3 Singularidades e horizontes

A métrica de Schwarzschild representa a solução das equações de campo de Einstein, no vácuo, o que significa ser válida apenas na região externa ao corpo que gravita. Se considerarmos $m \rightarrow 0$ ou $r \rightarrow \infty$ na Eq. (2.30), recaímos na métrica de Minkowski:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.31)$$

A solução em questão possui singularidades. A adoção de coordenadas esféricas faz com que os eixos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ não sejam representados, já que, neles, a métrica se torna degenerada [108]. Estas singularidades são de coordenada e podem ser removidas através de uma simples transformação de coordenadas.

A métrica (2.30) também possui singularidades, a saber:

- Uma singularidade não removível na origem, isto é, em $r = 0$, também denominada de singularidade física, real ou intrínseca, que pode ser confirmada através do escalar de Kretschmann, calculado com o uso do tensor de Riemann, e definido da seguinte forma

$$K = R_{abcd}R^{abcd} = 48m^2 r^{-6}. \quad (2.32)$$

A divergência desta quantidade em um dado ponto, indica a presença de singularidade neste ponto. No caso de Schwarzschild, o escalar de Kretschmann diverge quando $r \rightarrow 0$, e, portanto, de acordo com este critério, em $r = 0$, a métrica é singular.

- E outra singularidade ocorre em $r = r_s = 2m$, sendo a mesma de natureza puramente matemática. Esta singularidade também é chamada de singularidade removível, já que a mesma pode ser removida mediante transformação de coordenadas. Esta singularidade está associada ao denominado raio de Schwarzschild, r_s , definido por

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} = 2m. \quad (2.33)$$

Este resultado faz menção a existência de uma superfície esférica conhecida como horizonte de eventos do buraco negro, de onde, classicamente, nada escapa, nem mesmo a luz.

Vale a pena ressaltar que a ideia clássica de que buracos negros apenas absorvem sem emitir nenhuma partícula ou radiação, tem se mostrado incorreta. Nos anos 1970, Hawking [121] mostrou que, quando são considerados efeitos quânticos, os buracos negros emitem partículas, produzindo um espectro térmico como um corpo negro. Nesse sentido, Bekenstein, Hawking e colaboradores mostraram que os buracos negros possuem propriedades semelhantes às da termodinâmica, e assim, podemos calcular entropia e outras grandezas termodinâmicas para os buracos negros, além de formular leis da termodinâmica para esses corpos [65, 66, 122, 123].

No caso de Schwarzschild, em $r = 0$ a curvatura torna-se infinita, indicando a presença de uma singularidade. Neste ponto, o próprio espaço-tempo não é definido. Este resultado levantou algumas hipóteses, como, por exemplo, de que esta solução seria “não física”, o que motivou a busca pela obtenção de soluções sem esta patologia, a saber, a singularidade física.

A solução de Schwarzschild é válida para todo $r > 0$, sendo chamada de buraco negro de Schwarzschild. Esta solução é perfeitamente válida para as equações de campo de Einstein, entretanto, observamos algumas propriedades bizarras. Para $r < r_s = 2m$, a coordenada radial de Schwarzschild, r , torna-se função do tempo, e o tempo por sua vez torna-se função do espaço.

Na superfície, $r = r_s = 2m$, demarca o que é chamado de horizonte de eventos de um buraco negro. Significa que caso a luz ultrapasse esse horizonte não terá mais a possibilidade de escapar do campo gravitacional. Qualquer objeto físico cujo raio R se torne menor ou igual ao seu raio de Schwarzschild, $r_s = 2m$, colapsará e tornar-se-á um buraco negro. Veja na Fig. 1, o diagrama esquemático das regiões associadas a essa solução.

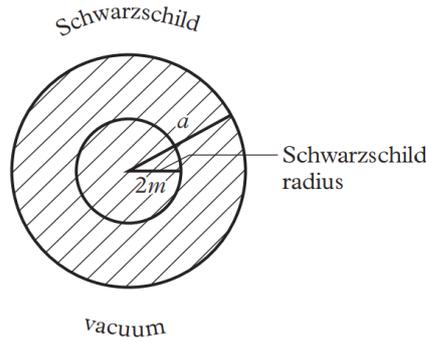


Figura 1 – Interpretação padrão da solução exterior de Schwarzschild.

2.1.4 Diagramas do espaço-tempo em coordenadas de Schwarzschild

Inicialmente, consideremos a classe de geodésicas radiais nulas definidas por [108]

$$ds^2 = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0. \quad (2.34)$$

Então, usando o princípio variacional, obtemos:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0, \quad (2.35)$$

onde o ponto denota a derivada com relação ao parâmetro afim u ao longo da geodésica nula. A equação de Euler-Lagrange correspondente a t é

$$\frac{d}{du} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0, \quad (2.36)$$

que após integração, fornece o seguinte resultado

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (2.37)$$

onde k é uma constante. Isolando \dot{t} na Eq. (2.37) e substituindo na Eq. (2.35), encontramos:

$$\dot{r} = \pm k, \quad (2.38)$$

Ao invés de encontrar a equação paramétrica dessas curvas, procuraremos diretamente por sua equação na forma $t = t(r)$. Então:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\frac{dt}{du}}{\frac{dr}{du}} \Rightarrow \frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}}. \quad (2.39)$$

Isolando \dot{t} na Eq. (2.37) e considerando a Eq. (2.38) com sinal positivo, podemos reescrever a Eq. (2.39) na seguinte forma

$$\frac{dt}{dr} = \frac{r}{r - 2m}, \quad (2.40)$$

cuja solução é

$$t = r + 2m \ln |r - 2m| + \text{constante}. \quad (2.41)$$

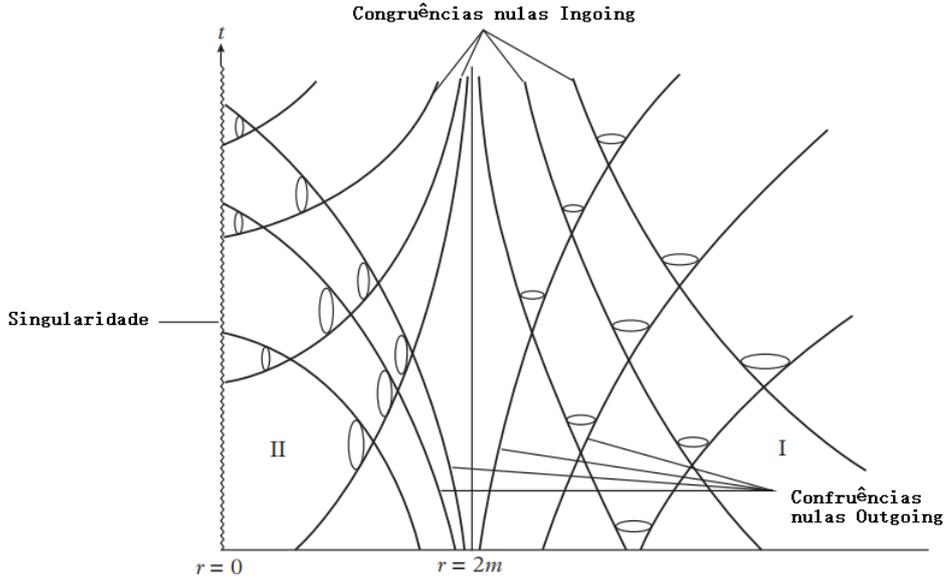


Figura 2 – Geodésicas nulas e cones de luz em coordenadas de Schwarzschild. Duas dimensões foram suprimidas.

Na região I, da Fig. 2, pela Eq. (2.40), concluímos que:

$$r > 2m \Rightarrow \frac{dr}{dt} > 0, \quad (2.42)$$

de modo que r aumenta à medida que t aumenta. Portanto, a Eq. (2.41) representa geodésicas nulas se distanciando do horizonte do buraco negro (congruência de geodésicas radiais nulas se afastando do horizonte de eventos (*outgoing*)). De forma análoga, o sinal negativo

$$t = -(r + 2m \ln |r - 2m| + \text{constante}), \quad (2.43)$$

representa geodésicas nulas se aproximando do horizonte de eventos (congruência de geodésicas radiais nulas que se aproximam (*ingoing*)).

Na Fig. 2, representamos ainda, para valores constantes de θ e ϕ , as geodésicas radiais nulas na métrica de Schwarzschild e o efeito da geometria do espaço-tempo nos cones de luz.

Observe que, sob a transformação $t \rightarrow -t$, geodésicas de “*ingoing*” e “*outgoing*” são trocadas, como seria de esperar. Essas congruências são usadas para desenhar um diagrama

de espaço-tempo da solução de Schwarzschild em coordenadas de Schwarzschild com duas dimensões suprimidas, conforme Fig. 2. O diagrama de espaço-tempo é desenhado para alguns valores constantes de θ e ϕ . Como o diagrama será o mesmo para todos os valores de θ e ϕ , devemos pensar em cada ponto (t, r) no diagrama como representando uma 2-esfera de área $4\pi r^2$.

Observe que, como $r \rightarrow \infty$, as geodésicas nulas fazem ângulos de 45° com o eixo horizontal como no espaço de Minkowski, pois a solução é assintoticamente plana.

Na região II, $r < 2m$, os cones de luz locais mudam de direção, tornando-se horizontais, pois as coordenadas t e r são, respectivamente, tipo-espaço e tipo-tempo, ou seja, invertem suas características. Por exemplo, a linha $t = \text{constante}$ é uma linha tipo-tempo na região II e, portanto, deve estar no cone de luz local. Um observador na região II não poderá permanecer em repouso, ou seja, em um valor constante de r , tendendo sempre a se mover em direção à singularidade em $r = 0$.

Este diagrama parece sugerir que um observador na região I movendo-se em direção à origem levaria uma quantidade infinita de tempo para atingir o raio de Schwarzschild $r = 2m$. Da mesma forma, o diagrama sugere que o mesmo é verdade para um raio de luz incidente (*ingoing*). No entanto, precisamos lembrar que as regiões I e II são espaços-tempos realmente distintos.

2.1.5 Partícula caindo radialmente no buraco negro de Schwarzschild

Consideremos a trajetória de uma partícula livre caindo radialmente num buraco negro estático e esfericamente simétrico. Ela se moverá ao longo de uma geodésica tipo-tempo dada pelas equações:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (2.44)$$

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 1, \quad (2.45)$$

onde o ponto agora significa diferenciação em relação a τ , que representa o tempo próprio ao longo da linha de mundo da partícula.

Diferentes escolhas da constante k correspondem a diferentes condições iniciais. Façamos a escolha $k = 1$, que corresponde uma partícula caindo do infinito com velocidade inicial zero, de modo que, para r grande, temos $\dot{t} \simeq 1$, isto é, assintoticamente $t \simeq \tau$. Por meio das Eqs. (2.44) e (2.45), é possível obtermos

$$\left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2 = \frac{r}{2m}. \quad (2.46)$$

Como estamos interessados em uma partícula caindo num buraco negro, então tirando a raiz quadrada negativa da equação anterior e integrando, encontramos

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{3(2m)^{1/2}}(r_0^{3/2} - r^{3/2}), \quad (2.47)$$

onde a partícula está em r_0 no tempo próprio τ_0 . Isso é, talvez, surpreendentemente, exatamente o mesmo que o resultado newtoniano clássico. Nenhum comportamento singular ocorre no raio de Schwarzschild e o corpo cai continuamente para $r = 0$ em um tempo próprio finito. Assim, verificamos que, no referencial da partícula em queda, o movimento continua até atingir a singularidade $r = 0$ num tempo finito.

Se, em vez disso, descrevermos o movimento em termos da coordenada temporal de Schwarzschild, então:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = - \left(\frac{r}{2m} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}. \quad (2.48)$$

Integrando, obtemos:

$$\begin{aligned} t - t_0 = & -\frac{2}{3(2m)^{1/2}}(r^{3/2} - r_0^{3/2} + 6mr^{1/2} - 6mr_0^{1/2}) \\ & + 2m \ln \frac{[r^{1/2} + (2m)^{1/2}][r_0^{1/2} - (2m)^{1/2}]}{[r_0^{1/2} + (2m)^{1/2}][r^{1/2} - (2m)^{1/2}]} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Para situações onde r_0 e r são muito maiores que $2m$, os resultados (2.47) e (2.49) são aproximadamente iguais, como deveríamos esperar. Se, no entanto, r é muito próximo de $2m$, então encontramos:

$$r - 2m = (r_0 - 2m)e^{-(t-t_0)/2m}, \quad (2.50)$$

de onde fica claro que

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow r - 2m \rightarrow 0, \quad (2.51)$$

de modo que $r = 2m$ é aproximado, mas nunca ultrapassado. As duas situações são ilustradas na Fig. 3.

A coordenada temporal t pode ser entendida como aquela medida por um referencial muito distante do buraco negro. Para esse referencial, a partícula em queda leva um tempo infinito para atingir o horizonte de eventos $r = 2m$. Porém, do ponto de vista da partícula em queda, a mesma cruza o horizonte de eventos $r = 2m$ e caminha em direção à singularidade $r = 0$ em um tempo próprio finito.

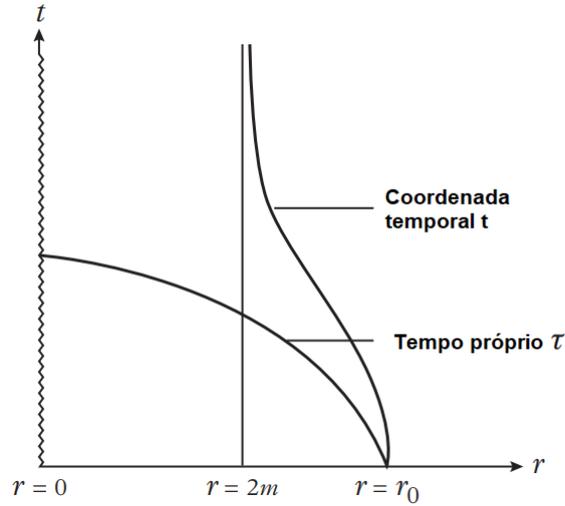


Figura 3 – Partícula caindo no buraco negro no tempo τ e t .

2.1.6 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Vamos expressar a solução de Schwarzschild em coordenadas de Eddington-Finkelstein. Para isso, é necessário mudarmos para uma nova coordenada de tempo em que as geodésicas radiais nulas se tornam linhas retas. Segue imediatamente da Eq. (2.41) que, para $r > 2m$, a mudança apropriada é dado por:

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2m \ln(r - 2m). \quad (2.52)$$

Nesse novo sistema de coordenadas, as geodésicas nulas que entram em direção ao buraco negro serão linhas retas que formam um ângulo de -45° em relação ao eixo r , já que teremos $\bar{t} = -r + \text{constante}$, conforme Fig. 4.

A derivada da Eq. (2.52) em relação a r , é

$$d\bar{t} = dt + \frac{2m}{r - 2m} dr. \quad (2.53)$$

Isolando dt na Eq. (2.53) e substituindo na Eq. (2.30), obtemos:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} d\bar{t}dr + \left[\frac{4m^2}{r(r - 2m)} - \frac{r}{r - 2m}\right] dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (2.54)$$

Somando e subtraindo uma unidade ao termo entre colchetes da Eq. (2.54), calculando o *m.m.c* e fazendo algumas simplificações, obtemos finalmente a métrica de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} d\bar{t}dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (2.55)$$

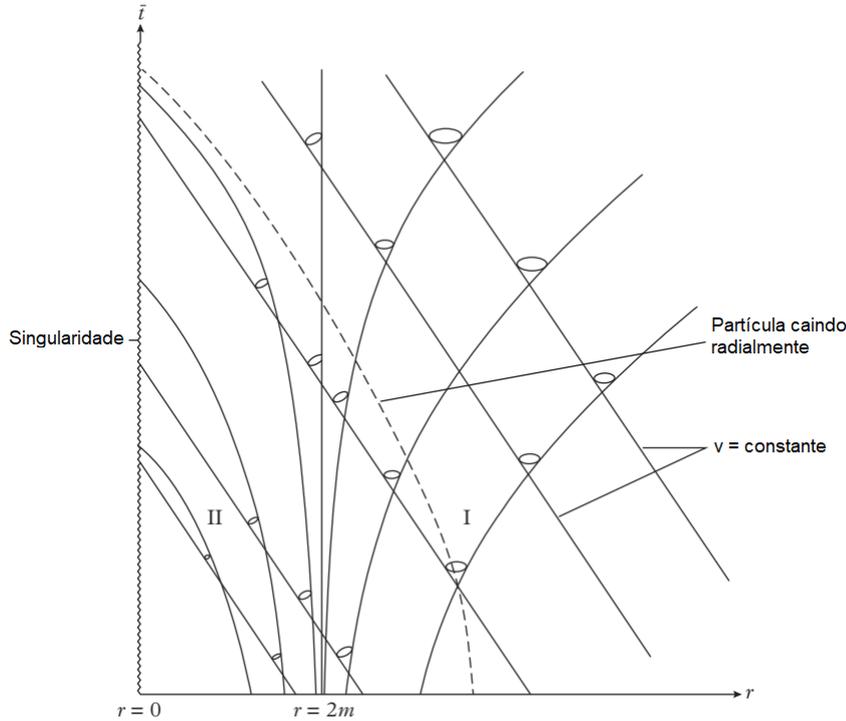


Figura 4 – Solução de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein.

Verificamos que a solução é agora regular em $r = 2m$ e analítica para qualquer valor de r compreendido no intervalo $0 < r < \infty$. Por esse motivo, dizemos que a Eq. (2.55) é a extensão analítica da Eq. (2.30).

Podemos ainda escrever a Eq. (2.55) de uma forma mais simples introduzindo uma coordenada nula

$$v = \bar{t} + r, \quad (2.56)$$

que, por razões históricas, é chamado de parâmetro de tempo avançado. Podemos escrever que:

$$dv = d\bar{t} + dr. \quad (2.57)$$

Isolando $d\bar{t}$ na equação anterior e elevando-o ao quadrado, obtemos:

$$d\bar{t}^2 = dv^2 - 2dvdr + dr^2. \quad (2.58)$$

Substituindo a Eq. (2.58) na Eq. (2.55), obtemos finalmente a métrica de Schwarzschild em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (2.59)$$

As componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ referente ao elemento de linha de Schwarzschild em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein é dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

cuja forma contravariante fica:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

2.1.7 Termodinâmica do buraco negro

Nesta seção, estudaremos a termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild, examinando o comportamento da massa, da temperatura Hawking e da capacidade térmica em função da entropia.

Massa do buraco negro

Seja r_h o raio do horizonte, assim temos que $f(r_h) = 0$, onde $f(r)$ é a componente g_{tt} da Eq. (2.30). Assim, podemos escrever a massa do buraco negro em termos de r_h através da seguinte equação:

$$m = \frac{r_h}{2}. \quad (2.62)$$

A área do horizonte pode ser calculado por:

$$A = \int \sqrt{-g} d\theta d\phi = 4\pi r_h^2. \quad (2.63)$$

Por outro lado, a entropia do buraco negro pode ser calculada através da lei das áreas [62], usando a relação

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_h^2. \quad (2.64)$$

Assim, usando a Eq. (2.64), podemos escrever o parâmetro de massa em função da entropia como

$$m = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi}}. \quad (2.65)$$

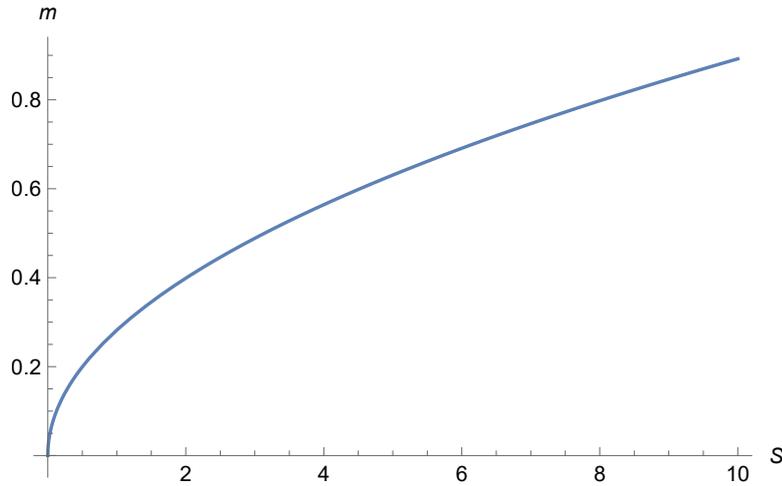


Figura 5 – Massa do buraco negro de Schwarzschild em função da entropia $m(S)$.

Na Fig. 5, representamos o comportamento do parâmetro de massa, m , em função da entropia do buraco negro, S . Para $S > 0$, a massa do buraco negro de Schwarzschild assume valores positivos e aumenta a medida que a entropia aumenta.

Temperatura Hawking

A gravidade superficial (κ) para o buraco negro pode ser calculada usando a seguinte expressão:

$$\kappa = \left. \frac{f'(r)}{2} \right|_{r_h}, \quad (2.66)$$

com $'$ denotando a derivada em relação à coordenada radial. Hawking mostrou que o buraco negro emite radiação e a sua temperatura correspondente, a temperatura Hawking, para um espaço-tempo estacionário, é dada por [64]:

$$T_\kappa = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (2.67)$$

Vale a pena lembrar que, para o espaço-tempo de vácuo com simetria esférica, a primeira lei da termodinâmica afirma que:

$$dm = T_f dS \rightarrow T_f = \frac{dm}{dS}, \quad (2.68)$$

onde m e S são, respectivamente, a energia total e a entropia do sistema, e T_f é a temperatura do buraco negro prevista pela primeira lei. Tendo em conta a lei da área dada pela Eq. (2.64), a primeira lei da termodinâmica fornece outra forma para calcularmos a temperatura Hawking válida para buracos negros singulares.

Assim, as temperaturas Hawking, T_κ e T_f , para o buraco negro de Schwarzschild

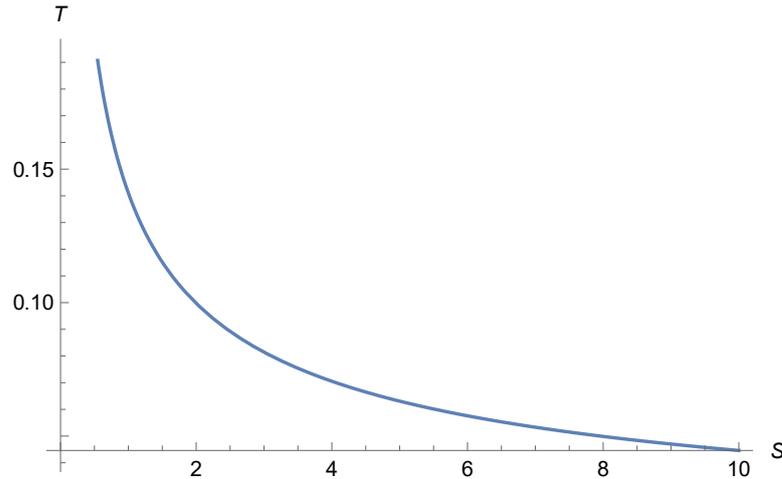


Figura 6 – Temperatura do buraco negro de Schwarzschild em função da entropia $T(S)$.

obtidas através das equações Eqs. (2.67) e (2.68), respectivamente, são equivalentes quando trabalhamos com soluções de vácuo.

Usando a Eq. (2.67) e com κ dado por (2.66), é possível calcular a temperatura Hawking, $T_\kappa = T$, para o buraco negro de Schwarzschild em função do raio do horizonte de eventos:

$$T = \frac{1}{4\pi r_h}. \quad (2.69)$$

Substituindo $r_h = (\frac{S}{\pi})^{1/2}$ na Eq. (2.69), obtemos finalmente a expressão da temperatura Hawking em função da entropia para o buraco negro de Schwarzschild:

$$T = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{S}}. \quad (2.70)$$

Na Fig. 6, representamos o comportamento do parâmetro de temperatura, T , em função da entropia do buraco negro, S . Nota-se que para o espaço-tempo de Schwarzschild o parâmetro de temperatura só apresenta valores positivos para $S > 0$ e que a medida que a entropia aumenta a temperatura diminui.

Capacidade Térmica

A capacidade térmica fornece informação sobre a estabilidade termodinâmica de um sistema. Podemos calcular a capacidade térmica do buraco negro a partir da seguinte expressão:

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)^{-1}. \quad (2.71)$$

Substituindo a Eq. (2.70) na Eq. (2.71), encontramos a seguinte expressão para a capacidade térmica em função da entropia do buraco negro:

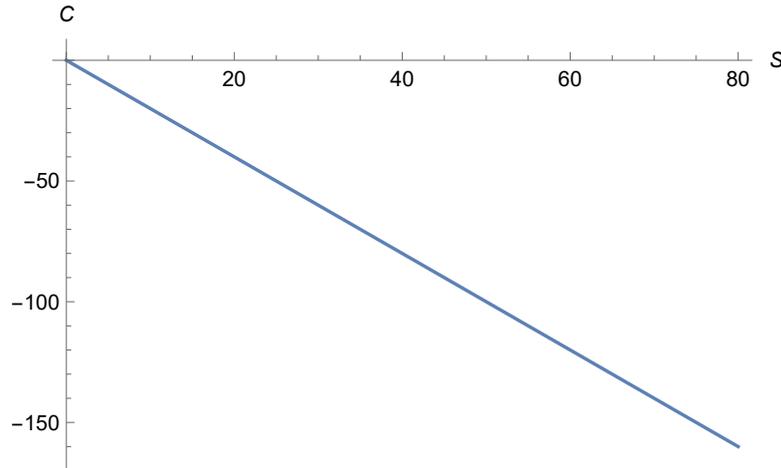


Figura 7 – Capacidade térmica do buraco negro de Schwarzschild em função da entropia $C(S)$.

$$C = -2S. \quad (2.72)$$

O comportamento da capacidade térmica em função da entropia é dado na Fig. 7. Neste caso, a capacidade térmica é negativa para $S > 0$, indicando um sistema termodinâmico instável.

2.1.8 Buraco negro de Schwarzschild com constante cosmológica

As equações de campo da TRG, que estabelecem uma relação entre conteúdo de matéria e energia à geometria do espaço-tempo, foram modificadas pelo próprio Albert Einstein em 1917 para conter uma constante cosmológica Λ . Visando permitir a existência de um universo estático, Einstein acrescentou a essa equação um termo proporcional à métrica, obtendo a equação de campo [108]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (2.73)$$

onde Λ é uma constante universal, podendo assumir valores positivos, negativos ou nulo.

Como a derivada covariante da métrica é nula ($\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$), o acréscimo do termo contendo a constante cosmológica não altera a conservação de energia. Em outras palavras, $\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = 0$.

Com a descoberta da expansão do universo por Edwin Hubble, na década de 1920, através da verificação do desvio para o vermelho da radiação emitida por estrelas distantes, a constante cosmológica foi abandonada e voltou a ser considerada com as observações de supernova no fim dos anos 1990 [124].

No final da década de 1990, a observação de Supernovas Tipo Ia (SN Ia) levou à

conclusão de que o universo se encontra num atual estágio de expansão acelerada [77]. Esses resultados levaram a uma importante mudança nos estudos de cosmologia, já que o universo não apenas está em expansão, mas se expande de maneira acelerada [78].

Dessa forma, para ser possível explicar esse fato, é necessário se introduzir um tipo de energia que provoca uma pressão negativa e que ficou conhecida na literatura como energia escura, sendo responsável por cerca de 70% do conteúdo de matéria-energia do universo [78]. Diversos modelos teóricos foram criados para se explicar essa energia escura. Um deles é o modelo de constante cosmológica [125], que havia sido introduzida pelo próprio Albert Einstein na tentativa de criar teoricamente um universo estático. Na visão contemporânea, a constante cosmológica é homogênea, possuindo o mesmo valor em qualquer região do universo, produz o efeito de sua expansão e tem sua origem associada à energia de vácuo.

Para o caso da solução de Schwarzschild com constante cosmológica, o tensor de energia-momento que aparece do lado direito da equação modificada de Einstein é zero. Assim, na ausência de fontes, as equações modificadas de Einstein resultam no seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (2.74)$$

2.2 Buraco negro de Reissner-Nordström: singularidades, horizontes e termodinâmica

Nesta seção, obteremos a mais simples generalização da solução de Schwarzschild, que consiste no campo gravitacional gerado por um corpo, com certa massa, distribuída numa região esférica, e com uma carga Q , de modo que na região externa ao corpo, o tensor energia-momento não é mais nulo. Essa solução correspondente a um buraco negro carregado, é conhecida como solução de Reissner-Nordström [3, 4]. Esta solução é obtida resolvendo-se as equações acopladas de Einstein-Maxwell para um espaço-tempo, esfericamente simétrico, estático, cujo conteúdo energético é dado pelo tensor de energia-momento do campo eletromagnético.

A métrica de Reissner-Nordström [3, 4] foi obtida pela primeira vez, em 1916, por Hans Reissner e posteriormente, de forma independente, por Gunnar Nordström em 1918. Assim, em trabalhos independentes, eles encontraram a primeira solução das equações de Einstein na presença de campo eletromagnético. Esta recebeu o nome de solução de Reissner-Nordström e corpos esfericamente simétricos, sem rotação e carregados eletricamente receberam o nome de buracos negros de Reissner-Nordström.

Inicialmente, justificaremos o tensor de energia-momento para o campo eletromagnético, $T_{\mu\nu}$, e em seguida resolveremos as equações de Einstein na presença desse campo.

2.2.1 Tensor de energia-momento para o campo eletromagnético

Vamos agora determinar o tensor de energia-momento para o campo eletromagnético. O tensor de campo eletromagnético em coordenadas esféricas é dado por:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_r & E_\theta & E_\phi \\ -E_r & 0 & -B_\phi & B_\theta \\ -E_\theta & B_\phi & 0 & -B_r \\ -E_\phi & -B_\theta & B_r & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

As componentes contravariantes do tensor de campo eletromagnético são dadas por:

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta},$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_r & -E_\theta & -E_\phi \\ E_r & 0 & -B_\phi & B_\theta \\ E_\theta & B_\phi & 0 & -B_r \\ E_\phi & -B_\theta & B_r & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

Vale ressaltar que o tensor de campo eletromagnético é um tensor anti-simétrico:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \quad (2.77)$$

Vamos agora fazer duas importantes considerações:

1. O campo elétrico deve ter somente componente radial, uma vez que estaremos considerando um objeto massivo, carregado, estático e esfericamente simétrico. Sendo assim, o campo elétrico deve ser independente das coordenadas t , θ e ϕ . Logo:

$$\begin{cases} F_{01} = -F_{10} = -F^{01} = E_r, \\ E_\theta = E_\phi = 0. \end{cases} \quad (2.78)$$

2. Para o campo magnético faremos duas considerações:

- (i) As equações de Maxwell preveem a inexistência de monopolos magnéticos, então não há uma fonte que gere uma componente magnética, B_r , na direção radial.
- (ii) Para o vácuo, a única forma de gerar um campo magnético é por meio da variação temporal do campo elétrico, porém, nesse problema, estamos considerando um campo elétrico independente do tempo, logo:

$$B_r = B_\theta = B_\phi = 0. \quad (2.79)$$

Portanto, com essas simplificações, o tensor de campo eletromagnético fica:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 & 0 \\ -E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

Utilizando as unidades geometrizadas, $c = G = 1$, as componentes do tensor de energia-momento do campo eletromagnético, numa região livre de fontes [108], é dado por:

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(-g^{cd} F_{ac} F_{bd} + \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right). \quad (2.81)$$

Note que T_{ab} possui traço nulo. Vamos demonstrar esse resultado importante, pois será útil para demonstração da métrica de Reissner-Nordström futuramente. Seja:

$$T = g^{ab} T_{ab}. \quad (2.82)$$

Substituindo a Eq. (2.81) na Eq. (2.82), temos:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4\pi} \left(-g^{ab} g^{cd} F_{ac} F_{bd} + \frac{1}{4} g^{ab} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right), \\ T &= \frac{1}{4\pi} \left(-g^{ab} F_a{}^d F_{bd} + F_{cd} F^{cd} \right), \\ T &= \frac{1}{4\pi} \left(-F^{bd} F_{bd} + F_{cd} F^{cd} \right). \end{aligned}$$

Como b é um índice mudo, então podemos renomeá-lo. Fazendo $b = c$, obtemos:

$$T = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{cd} F_{cd} + F_{cd} F^{cd} \right).$$

Dessa forma, é possível constatar que:

$$T = 0. \quad (2.83)$$

Sejam as equações de Einstein dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.84)$$

Multiplicando a Eq. (2.84) por $g^{\mu\nu}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R &= 8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \\ R - 2R &= 8\pi T, \\ R &= -8\pi T. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Usando a Eq. (2.85), podemos reescrever as equações de Einstein da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu} - 4\pi g_{\mu\nu} T, \\ R_{\mu\nu} &= 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Mas, $T_{\mu\nu}$, possui traço nulo conforme Eq. (2.83). Portanto, a Eq. (2.86) fica:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.87)$$

Componentes do tensor de energia-momento para o campo eletromagnético

Vamos agora determinar as componentes do tensor de energia-momento para o campo eletromagnético considerando que o tensor de campo eletromagnético é dado pela Eq. (2.80). Como a métrica é diagonal, então o tensor de energia-momento também será. Assim sendo, basta calcularmos as componentes T_{00} , T_{11} , T_{22} e T_{33} do tensor de energia-momento.

- Cálculo da componente T_{00}

Fazendo $a = 0$ e $b = 0$ na Eq. (2.81), obtemos:

$$T_{00} = \frac{1}{4\pi} \left(-g^{cd} F_{0c} F_{0d} + \frac{1}{4} g_{00} F_{cd} F^{cd} \right).$$

Conforme a Eq. (2.80), as únicas componentes não-nulas do tensor de campo eletromagnético são F_{01} e F_{10} . Usando a propriedade de anti-simetria do tensor de campo eletromagnético, Eq. (2.77), temos:

$$T_{00} = \frac{1}{4\pi} \left(-g^{11} F_{01} F_{01} + \frac{1}{2} g_{00} F_{01} F^{01} \right).$$

Mas, $F_{01} = -F^{01}$, logo:

$$T_{00} = \frac{1}{4\pi} \left(-e^{-\lambda} F_{01} F^{01} + \frac{1}{2} e^{\nu} F_{01} F^{01} \right). \quad (2.88)$$

- Cálculo da componente T_{11}

Fazendo $a = 1$ e $b = 1$ na Eq. (2.81), obtemos:

$$T_{11} = \frac{1}{4\pi} \left(-g^{cd} F_{1c} F_{1d} + \frac{1}{4} g_{11} F_{cd} F^{cd} \right).$$

Utilizando um raciocínio semelhante ao que foi feito antes, obtemos que:

$$T_{11} = \frac{1}{4\pi} \left(e^{-\nu} F_{01} F^{01} - \frac{1}{2} e^{\lambda} F_{01} F^{01} \right). \quad (2.89)$$

Analogamente,

- Cálculo da componente T_{22}

$$T_{22} = -\frac{1}{8\pi}r^2F_{01}F^{01}. \quad (2.90)$$

- Cálculo da componente T_{33}

$$T_{33} = \sin^2\theta T_{22}. \quad (2.91)$$

2.2.2 Equações acopladas de Einstein-Maxwell

Vamos agora resolver as equações acopladas de Einstein-Maxwell. Para isso utilizaremos a Eq. (2.87), cujas componentes não-nulas do tensor de Ricci são dadas pelas Eqs. (2.10)-(2.13), enquanto as componentes não-nulas do tensor de energia-momento do campo são dadas pelas Eqs. (2.88)-(2.91).

- **Cálculo da componente (0, 0)**

Considerando $a = 0$ e $b = 0$ na Eq. (2.87), obtemos:

$$R_{00} = 8\pi T_{00}. \quad (2.92)$$

Substituindo a Eq. (2.10) e a Eq. (2.88) na Eq. (2.92) e efetuando as devidas simplificações, obtemos:

$$\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} = -2e^{-\nu}F_{01}F^{01} + e^\lambda F_{01}F^{01}. \quad (2.93)$$

- **Cálculo da componente (1, 1)**

Considerando $a = 1$ e $b = 1$ na Eq. (2.87), obtemos:

$$R_{11} = 8\pi T_{11}. \quad (2.94)$$

Substituindo a Eq. (2.11) e a Eq. (2.89) na Eq. (2.94) e efetuando as devidas simplificações, temos:

$$-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} = 2e^{-\nu}F_{01}F^{01} - e^\lambda F_{01}F^{01}. \quad (2.95)$$

Somando as equações (2.93) e (2.95), obtemos:

$$\nu + \lambda = cte. \quad (2.96)$$

É razoável exigir que, longe da fonte de campo gravitacional, o espaço-tempo seja essencialmente Minkowskiano. Assim:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nu = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda = 0. \quad (2.97)$$

Portanto, se no infinito $\nu + \lambda = 0$ e sabe-se da Eq. (2.96) que $\nu + \lambda = cte$ para qualquer ponto do espaço, então concluímos que essa constante necessariamente deve ser nula.

$$\nu + \lambda = 0 \Rightarrow \nu = -\lambda. \quad (2.98)$$

Vamos agora determinar a componente (0,1) do tensor campo eletromagnético:

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (2.99)$$

Fazendo $\mu = 0$ e $\nu = 1$, na Eq. (2.99), obtemos:

$$F_{01} = g_{0\alpha}g_{1\beta}F^{\alpha\beta}.$$

Usando as Eqs. (2.2), (2.76)-(2.80) e (2.98), chegamos na seguinte relação:

$$F_{01} = g_{00}g_{11}F^{01},$$

$$F_{01} = -F^{01}. \quad (2.100)$$

Além disso, o tensor de Maxwell, $F_{\mu\nu}$, deve satisfazer as equações de Maxwell em regiões livres de fontes:

$$\nabla_{\nu}F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.101)$$

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\gamma]} = 0. \quad (2.102)$$

Sabe-se que a derivada covariante de um tensor de 2ª ordem contravariante é dado por:

$$\nabla_{\beta}A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}{}_{;\beta} = \partial_{\beta}A^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}A^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}A^{\mu\alpha}. \quad (2.103)$$

Usando a equação (2.103), podemos reescrever a Eq. (2.101) como:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu F^{\alpha\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu F^{\mu\alpha} = 0. \quad (2.104)$$

Resolvendo a Eq. (2.104) para $\mu = 0$ e considerando que as únicas componentes não-nulas do tensor de campo eletromagnético são $F_{01} = -F_{10} = -F^{01}$ e $F_{10} = -F_{01} = -F^{10}$, obtemos:

$$\partial_1 F^{01} + \Gamma_{01}^0 F^{01} + \Gamma_{11}^1 F^{01} + \Gamma_{21}^2 F^{01} + \Gamma_{31}^3 F^{01} = 0. \quad (2.105)$$

Usando os símbolos de Christoffel já calculados anteriormente, Eq. (2.9), e substituindo na Eq. (2.105), obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_1 F^{01} + \frac{\nu'}{2} F^{01} + \frac{\lambda'}{2} F^{01} + \frac{1}{r} F^{01} + \frac{1}{r} F^{01} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} F^{01} + F^{01} \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{2}{r} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Mas, sabe-se que $\nu' = -\lambda'$, então, a equação anterior torna-se:

$$\frac{d}{dr} F^{01} + \frac{2}{r} F^{01} = 0. \quad (2.106)$$

Suponhamos uma solução do seguinte tipo:

$$F^{01} = r^m, \quad (2.107)$$

$$\frac{d}{dr} F^{01} = m r^{m-1}. \quad (2.108)$$

Substituindo as Eqs. (2.107)-(2.108) na Eq. (2.106), obtemos:

$$m = -2. \quad (2.109)$$

Portanto, uma solução geral para Eq. (2.106) é dado por:

$$F^{01} = \frac{cte}{r^2}. \quad (2.110)$$

Dessa forma, a solução das equações de Maxwell para o tensor de campo eletromagnético é:

$$F^{01} = \frac{cte}{r^2}. \quad (2.111)$$

A Eq. (2.111) possui a forma do conhecido campo elétrico de uma carga pontual em unidades geometrizadas:

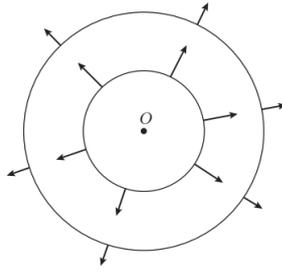


Figura 8 – Campo elétrico radial de uma partícula pontual.

$$E(r) = \frac{Q}{r^2}. \quad (2.112)$$

Sendo assim, denotaremos a constante que aparece na Eq. (2.111) de Q , logo:

$$F^{01} = -F_{01} = \frac{Q}{r^2}. \quad (2.113)$$

2.2.3 Solução de Reissner-Nordström

A componente (2,2) da equação de Einstein é dado por:

$$R_{22} = 8\pi T_{22}.$$

Substituindo as Eqs. (2.12) e (2.90) na equação anterior, obtemos:

$$e^{-\lambda} \left[\frac{r}{2} (\lambda' - \nu') - 1 \right] + 1 = -r^2 F_{01} F^{01}.$$

Usando as Eqs. (2.98) e (2.113), é possível escrever a equação anterior da seguinte forma:

$$e^\nu [r\nu' + 1] = 1 - \frac{Q^2}{r^2}. \quad (2.114)$$

Mas, $(e^\nu r)' = \frac{d}{dr}(e^\nu r) = e^\nu (r\nu' + 1)$, logo a Eq. (2.114) fica:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(e^\nu r) &= 1 - \frac{Q^2}{r^2}, \\ d(e^\nu r) &= \left(1 - \frac{Q^2}{r^2} \right) dr, \end{aligned}$$

que integrando em ambos os lados, obtemos:

$$e^\nu = 1 + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{cte}{r}. \quad (2.115)$$

Dado que umas das condições impostas a métrica de Reissner-Nordström era recair na métrica de Schwarzschild quando $Q = 0$ (que é equivalente a $T_{\mu\nu} = 0$), então inferimos que, na Eq. (2.115), o termo constante é igual a $-2m$. Portanto:

$$e^\nu = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (2.116)$$

Assim sendo, substituindo a Eq. (2.116) na Eq. (2.1) e considerando a Eq. (2.98), obtemos, finalmente, a solução de Reissner-Nordström:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (2.117)$$

que também pode ser escrita como:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.118)$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido, tal que $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, e

$$\Delta \equiv r^2 - 2mr + Q^2. \quad (2.119)$$

Quando $Q = 0$, recaímos na métrica de Schwarzschild (2.30). Novamente identificamos m como sendo a massa geométrica do corpo. Na derivação desta solução, assumimos um corpo esfericamente simétrico, estático, além de uma solução assintoticamente plana.

2.2.4 Singularidades e horizontes

Faremos agora uma análise da divergência da métrica de Reissner-Nordström expressa na Eq. (2.117). Como vimos, a singularidade ocorre onde a métrica diverge. Na métrica de Reissner-Nordström, $r = 0$ é também uma singularidade não removível, denominada de singularidade física, real ou intrínseca. Isso porque, para a origem do sistema de coordenadas, o escalar invariante de Kretschmann, calculado através do tensor de Riemann

$$K = R_{abcd}R^{abcd} = \frac{8}{r^8}(6m^2r^2 - 12mrQ^2 + 7Q^4), \quad (2.120)$$

diverge quando $r \rightarrow 0$.

Uma forma simples de analisarmos a divergência de uma métrica, em geral, é exatamente onde o fator g_{tt} se anula. Para a métrica de Reissner Nordström, isso ocorre justamente, ou quando $r = 0$, o qual é uma singularidade física, ou quando $\Delta = 0$, o qual é um ponto onde a coordenada é singular.

O nosso interesse é justamente o último caso, de modo que isto ocorre quando:

$$g_{tt} = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{r^2} = 0,$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + Q^2 = 0,$$

cujas raízes são calculadas facilmente pela fórmula de Bhaskara:

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2}. \quad (2.121)$$

Estes pontos são referidos como os horizontes de eventos do buraco negro: interno (r_-) e externo (r_+). Matematicamente, podemos expressar a Eq. (2.119) da seguinte forma:

$$\Delta \equiv r^2 - 2mr + Q^2 = (r - r_-)(r - r_+) \quad (2.122)$$

Resumidamente, apenas o ponto $r = 0$ é singular, isto é, representa uma singularidade intrínseca da geometria do espaço-tempo de Reissner-Nordström, enquanto os pontos representados pela Eq. (2.121) são singularidades coordenadas, o que significa dizer que ela é fruto da escolha do sistema de coordenadas. Na figura abaixo, plotamos g_{00} , no caso $m^2 > Q^2$, de Reissner-Nordström e comparamos com o coeficiente sg_{00} de Schwarzschild:

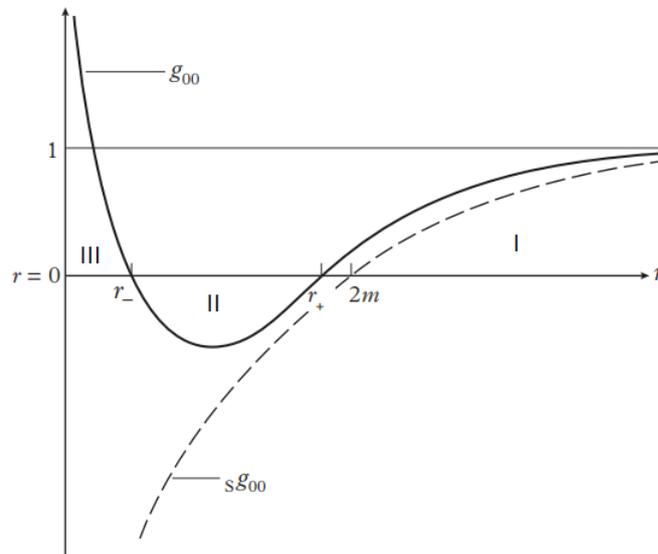


Figura 9 – Gráficos de g_{00} para as soluções de Reissner-Nordström e Schwarzschild.

O elemento de linha, Eq. (2.117), é regular nas regiões:

- (I) $r_+ < r < \infty$,
- (II) $r_- < r < r_+$,
- (III) $0 < r < r_-$.

Observe que só teremos horizonte de eventos se:

$$m^2 \geq Q^2. \quad (2.123)$$

Caso essa condição não seja satisfeita, o termo $\sqrt{m^2 - Q^2}$ não apresentará valores reais. Portanto, não haverá horizontes de forma que nada esconderá a singularidade localizada em $r = 0$ de um observador. Isso implica dizer que a singularidade pode ser vista pelo observador, neste caso dizemos que a singularidade é nua. Entretanto, a conjectura da censura cósmica, impede esse tipo de solução. Ela nos diz que todas as singularidades formadas de um colapso gravitacional estão necessariamente escondidas por horizontes de eventos; ou seja, são buracos negros. Assim, $m^2 < Q^2$ não representa uma solução física.

Já se $m^2 = Q^2$, teremos conforme a Eq. (2.121), a solução extrema de Reissner-Nordström $r_+ = r_- = m$, e a discussão será semelhante a que fizemos para a métrica de Schwarzschild.

Conforme Fig. 9, se $m^2 = Q^2$, então existem apenas as regiões I e III. As regiões são separadas pelas hiper-superfícies nulas $r = r_+$ e $r = r_-$. A situação em $r = r_+$ é bastante semelhante ao caso de Schwarzschild em $r = 2m$. As coordenadas t e r são tipo-tempo e tipo-espaço, respectivamente, nas regiões I e III, mas invertem suas características na região II. Assim, as regiões I e III são estáticas, mas a região II não. Como na solução de Schwarzschild, essas coordenadas sugerem que as regiões I, II e III aparecem totalmente desconectadas porque os cones de luz têm orientações totalmente diferentes em ambos os lados das hiper-superfícies nulas $r = r_{\pm}$.

2.2.5 Diagrama do espaço-tempo da solução de Reissner-Nordström

Nesta subseção, restringiremos nossa atenção ao importante caso em que $Q^2 < m^2$. Para este caso, a métrica (2.117) apresenta problemas nos pontos $r = r_{\pm}$. O que ocorre nesta situação é as coordenadas serem singulares, similar ao caso de Schwarzschild para $r = 2m$. O problema com o sistema de coordenadas em questão é que $dt/dr \rightarrow \infty$ ao longo das geodésicas radiais nulas que se aproximam de $r = r_{\pm}$.

Podemos considerar as geodésicas radiais nulas, das quais θ e ϕ são constantes, e, desta forma, $ds^2 = 0$. Isso implica em:

$$\frac{(r - r_-)(r - r_+)}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{(r - r_-)(r - r_+)} dr^2 = 0,$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{r^2}{(r - r_-)(r - r_+)}.$$

Ao integrar a equação anterior, temos dois tipos de geodésicas: que se aproximam (*ingoing*) ou que se afastam (*outgoing*) do buraco negro.

$$t = \pm \left(r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-) \right). \quad (2.124)$$

Definindo para $r > r_+$ a nova coordenada temporal

$$\bar{t} = t + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-), \quad (2.125)$$

o elemento de linha toma a seguinte forma:

$$ds^2 = (1 - f)d\bar{t}^2 - 2f d\bar{t}dr - (1 + f)dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.126)$$

onde, por conveniência, definimos:

$$f = 1 - g_{00} = \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2}. \quad (2.127)$$

Esta forma da métrica é regular para todos os valores positivos de r e novamente tem uma singularidade intrínseca em $r = 0$. As condições para as geodésicas radiais nulas são:

$$\dot{\theta} = \dot{\phi} = ds^2 = 0. \quad (2.128)$$

Estas levam a uma família de geodésicas nulas de entrada (*ingoing*)

$$\bar{t} + r = \text{constante}, \quad (2.129)$$

e uma família de geodésicas nulas de saída (*outgoing*) cuja equação diferencial é:

$$\frac{d\bar{t}}{dr} = \frac{1 + f}{1 - f}. \quad (2.130)$$

Agora as componentes da métrica estão bem definidas em r_+ e r_- nesse sistema de coordenadas. Note que podemos construir um diagrama do espaço-tempo para esse caso, sem haver, a necessidade de resolvermos as equações $1 + f$ e $1 - f$. Os gráficos destas funções estão representados na Fig. 10.

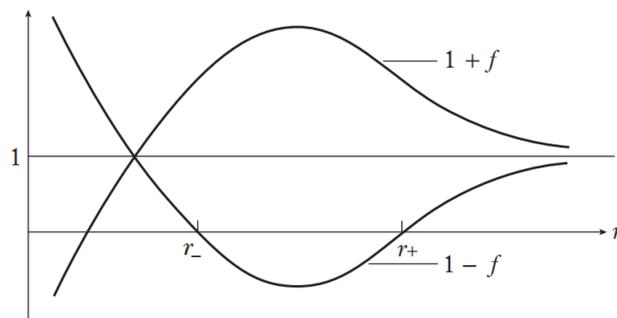


Figura 10 – Gráficos das funções $1 + f$ e $1 - f$.

Inicialmente, note que com r crescendo para o infinito f vai a zero, desta forma, a inclinação é de 45° e $dt/dr \rightarrow 1$, sendo justamente o comportamento do cone de luz no espaço-tempo plano, como seria de esperar para uma solução assintoticamente plana.

- Na região I, com r vindo do infinito, $1 + f$ aumenta, enquanto, $1 - f$ diminui; com isso a inclinação aumenta até que no ponto $r = r_+$, $1 - f$ se anula e a inclinação se torna infinita.
- Na região II, a inclinação aumenta com r partindo de $-\infty$, em $r = r_+$, e passa para um valor negativo em $r = \frac{Q^2}{m}$, e depois diminui novamente para $-\infty$ quando r se aproxima de r_- .
- Na região III, a inclinação diminui de $+\infty$ para 1, onde os gráficos se cruzam, e continua decrescendo até zero, onde o gráfico $1 + f$ cruza o eixo r . A inclinação então diminui mediante valores negativos de r até atingir -1 na origem.

Com essas informações, podemos desenhar o diagrama de espaço-tempo da Fig. 11. Fica claro pelos cones de luz em $r = r_+$ que nenhum sinal de luz pode escapar da região II para a região I. Assim, a superfície $r = r_+$ é um horizonte de eventos. Na região II, os cones de luz são inclinados em direção à singularidade $r = 0$, e, portanto, qualquer partícula que entre na região II se moverá necessariamente em direção ao centro até cruzar $r = r_-$ ou alcançá-lo assintoticamente. Na região III, os cones de luz não são mais inclinados para o centro e conseqüentemente as partículas não precisam cair na singularidade. Na verdade, ocorre o contrário, pois as partículas neutras não podem atingir a singularidade.

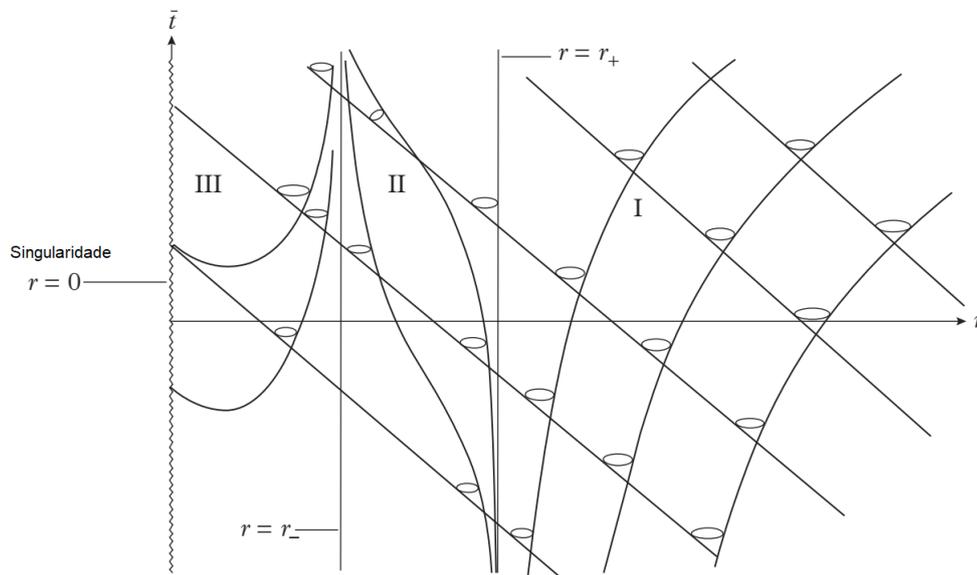


Figura 11 – Solução de Reissner-Nordström ($Q^2 < m^2$) em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein.

Abaixo, escrevemos ainda a métrica de Reissner-Nordström em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (2.131)$$

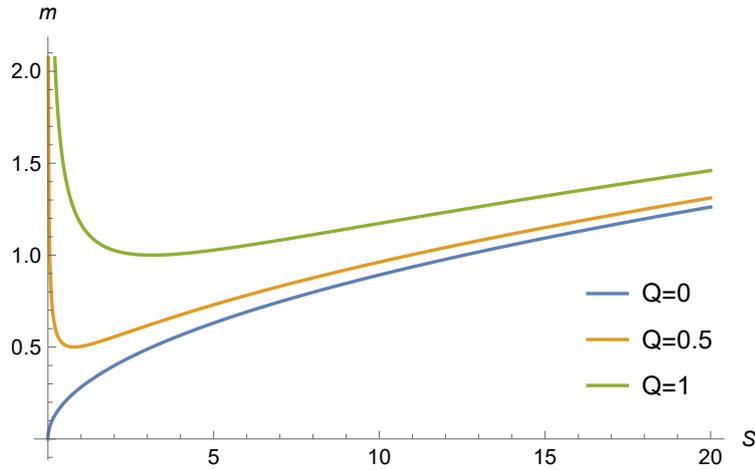


Figura 12 – Massa do buraco negro de Reissner-Nordström em função da entropia $m(S)$.

de modo que agora a métrica está bem definida em todos os pontos, exceto em $r = 0$, e com isso o problema da pseudo-singularidade também foi resolvido.

2.2.6 Termodinâmica do buraco negro

A seguir, trataremos da termodinâmica do buraco negro de Reissner-Nordström, analisando o comportamento da massa, da temperatura Hawking e da capacidade térmica em função da entropia.

Massa do buraco negro

Seja r_h o raio do horizonte, assim temos que $f(r_h) = 0$, onde $f(r)$ é a componente g_{tt} da Eq. (2.117). Assim, podemos escrever a massa do buraco negro em termos de r_h através da seguinte equação:

$$m = \frac{r_h^2 + Q^2}{2r_h}. \quad (2.132)$$

Podemos escrever o parâmetro de massa em função da entropia como

$$m = \frac{\pi Q^2 + S}{2\sqrt{\pi}\sqrt{S}}. \quad (2.133)$$

Na Fig. 12, representamos o comportamento do parâmetro de massa, m , em função da entropia do buraco negro, S . Para $S > 0$, a massa do buraco negro de Reissner-Nordström assume apenas valores positivos.

Temperatura Hawking

Usando a Eq. (2.67) e com κ dado por (2.66), é possível calcular a temperatura Hawking, T , para o buraco negro de Reissner-Nordström em função do raio do horizonte de eventos:

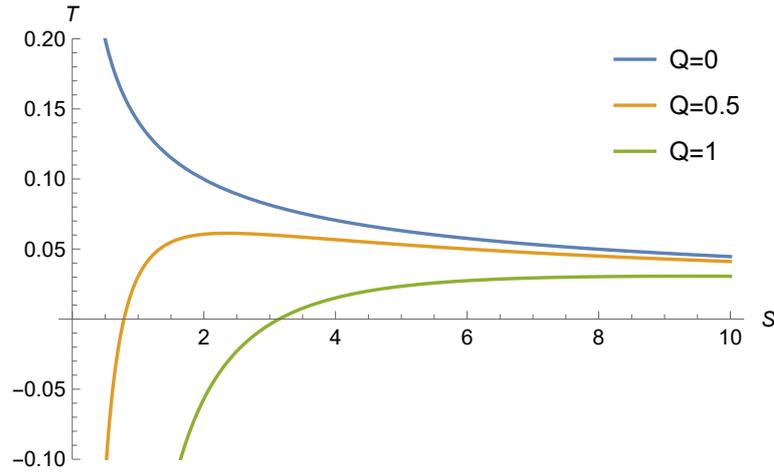


Figura 13 – Temperatura do buraco negro de Reissner-Nordström em função da entropia $T(S)$.

$$T = \frac{r_h^2 - Q^2}{4\pi r_h^3}. \quad (2.134)$$

Substituindo $r_h = (\frac{S}{\pi})^{1/2}$ na Eq. (2.134), obtemos finalmente a expressão da temperatura Hawking em função da entropia para o buraco negro de Reissner-Nordström:

$$T = \frac{S - \pi Q^2}{4\sqrt{\pi} S^{3/2}}. \quad (2.135)$$

Na Fig. 13, representamos o comportamento do parâmetro de temperatura, T , em função da entropia do buraco negro, S . Nota-se que, para o espaço-tempo de Reissner-Nordström, o parâmetro de temperatura pode assumir valores positivos e negativos a depender dos valores de entropia considerados.

Capacidade térmica

Substituindo a Eq. (2.135) na Eq. (2.71), encontramos a seguinte expressão para a capacidade térmica em função da entropia do buraco negro:

$$C = -\frac{2S(\pi Q^2 - S)}{3\pi Q^2 - S}. \quad (2.136)$$

O comportamento da capacidade térmica em função da entropia é dado na Fig. 14. Concluimos haver valores de S para os quais a capacidade térmica é positiva, assim como há valores para os quais a capacidade térmica é negativa. Em outras palavras, o buraco negro de Reissner-Nordström pode ser termodinamicamente estável ou instável e sua estabilidade está relacionada aos valores de carga Q .

O comportamento qualitativo do gráfico mostra a existência de transições de fase, nas quais a capacidade térmica diverge, e estas transições estão associadas a variação do

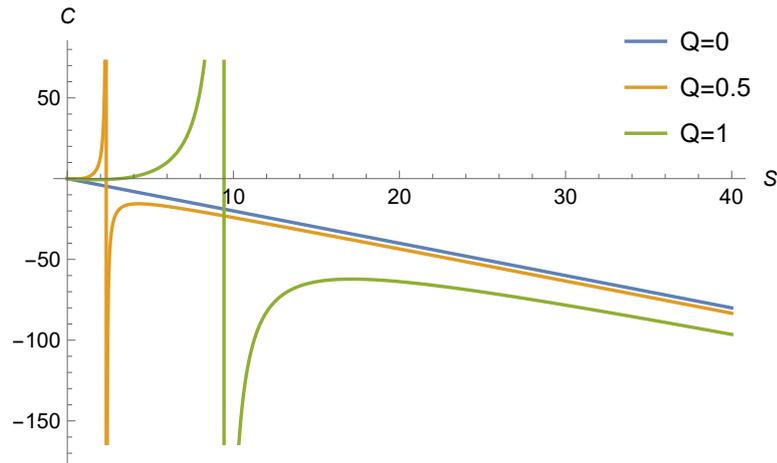


Figura 14 – Capacidade térmica do buraco negro de Reissner-Nordström em função da entropia $C(S)$.

parâmetro relacionado a carga Q . Quando aumentamos a intensidade da carga, a região onde ocorre a transição de fase é deslocada para direita, conforme pode ser visto na Fig. 14. Na ausência de campo eletromagnético, $Q = 0$, a Eq. (2.136) reduz-se a $C = -2S$, como esperado para o caso do espaço-tempo de Schwarzschild.

2.2.7 Evidências observacionais para buracos negros

Observar um buraco negro diretamente é impossível. No entanto, é certamente possível inferir a existência de um buraco negro através de seus efeitos gravitacionais em seus arredores. Atualmente existem inúmeras evidências para a existência de buracos negros que descreveremos brevemente abaixo. Para mais detalhes, ver [126].

A primeira dessas evidências vem de binários de raios-x; estes são duplas estrelas com uma estrela padrão e uma segunda companheira compacta e invisível. Ao estudar o movimento da estrela padrão, pode-se deduzir a massa da companheira invisível e, se for muito maior que a massa máxima que uma estrela pode ter sem entrar em colapso, então não poderá ser uma estrela de nêutrons e sim uma boa candidata a buraco negro. O buraco negro sugará a matéria de seu parceiro visível, formando um disco de acreção, e as regiões internas quentes produzirão intensas rajadas de raios-x formadas pela radiação síncrotron pouco antes da matéria em espiral desaparecer no buraco, conforme Fig. 15.

Foi a descoberta em 1971 das rápidas variações da fonte de raios-x Cygnus X1 por telescópios a bordo do satélite Uhuru que forneceu a primeira evidência da provável existência de buracos negros. O componente visível é uma estrela supergigante, e o estudo detalhado dos raios-x levou à conclusão de que o corpo invisível é um objeto compacto com massa superior a nove massas solares. Como se acredita que as massas máximas de anãs brancas e estrelas de nêutrons sejam aproximadamente 1.4 e 4 massas solares, respectivamente, então a conclusão mais simples é que o objeto é um buraco negro. Desde

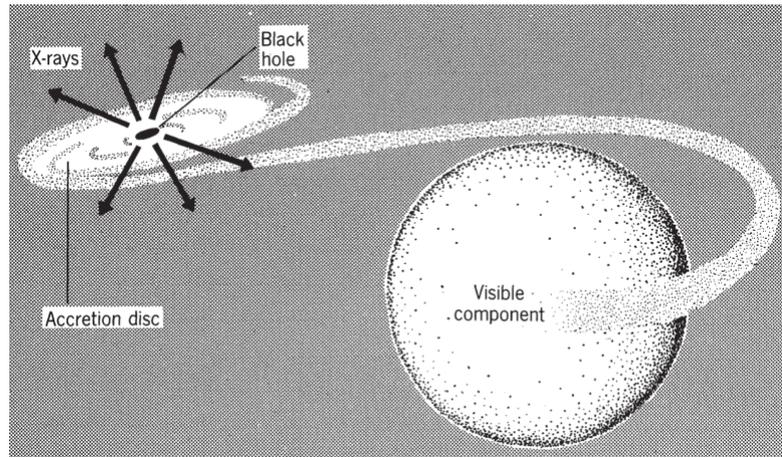


Figura 15 – Estrela binária com um componente visível e um buraco negro.

1971, vários outros candidatos a buracos negros foram encontrados em binários de raios-x [108].

Uma confirmação mais direta da existência de buracos negros vem da observação da radiação gravitacional. Em setembro de 2015, o LIGO mediu ondas gravitacionais consistentes com as previsões teóricas para a radiação produzida pela fusão de dois buracos negros de cerca de 36 e 29 massas solares. Desde então, foram observados muitos outros eventos de ondas gravitacionais que estão consoante as previsões da relatividade geral e a existência de buracos negros [108].

Embora os buracos negros tenham sido originalmente pensados como vindos do colapso de estrelas individuais, agora há evidências consideráveis de que muitas galáxias têm buracos negros supermassivos em seu centro. Os astrônomos usam o termo *galáxia ativa* para descrever galáxias com características incomuns, tal como a emissão de linha espectral incomum e emissão de rádio muito forte.

Estudos teóricos e observacionais mostraram que a atividade nesses núcleos galácticos ativos (AGNs) pode ser explicada pela presença de buracos negros supermassivos, que podem ser milhões de vezes mais massivos que os estelares. Os modelos desses AGNs consistem em um buraco negro central que pode ser milhões ou bilhões de vezes mais massivo que o Sol.

Em particular, observando os movimentos próprios das estrelas perto do centro de nossa própria Via Láctea, pode-se deduzir que existe no centro um objeto com uma massa de cerca de 2.6 milhões de massas solares e um raio de no máximo 2^{10} km, conforme a referência [108]. Embora o limite superior do raio seja maior que o raio de Schwarzschild, isso é um forte indicativo da existência de um buraco negro, pois não há outros cenários plausíveis para confinar tanta massa invisível a um volume tão pequeno [108].

Outras evidências diretas da existência de buracos negros supermassivos no centro

das galáxias vêm do Event Horizon Telescope (EHT). O EHT é um projeto de nível global cujo foco é estudar o horizonte de eventos ligados a buracos negros supermassivos. Conta com cerca de 300 cientistas e uma rede de telescópios espalhados pelo planeta. A ideia é olhar para a imagem do disco de acreção de um AGN e compará-la com a imagem substancialmente distorcida devido à lente gravitacional extrema do buraco negro, conforme previsto pela relatividade geral. Após a observação de um potencial buraco negro no centro da galáxia Messier 87 (M87) em 2017, o projeto EHT passou dois anos analisando os dados e em 2019 divulgou uma imagem que concordava muito bem com as previsões teóricas da relatividade geral [108].

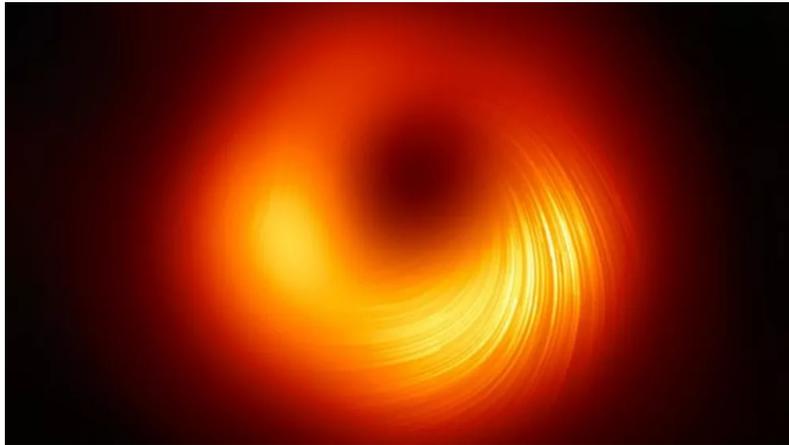


Figura 16 – Imagem do buraco negro no centro da galáxia M87-foto: EHT Collaboration.

3 Buracos negros estáticos regulares na Teoria da Relatividade Geral

O que caracteriza um buraco negro é a presença de um horizonte de eventos [109]. Desta forma, é possível a existência de soluções sem singularidades, como os buracos negros regulares. A primeira métrica do espaço-tempo de um buraco negro regular esfericamente simétrico data do final da década de 1960, e foi proposta por Bardeen [7]. Atualmente, existem várias métricas diferentes de buracos negros regulares estáticos, além da de Bardeen [7], entre as quais, podemos mencionar as que são consideradas nos artigos [7, 15, 10, 11, 12, 13, 14, 16].

As soluções de buracos negros regulares e as consequências interessantes que delas decorrem inspiraram outras investigações relacionadas com tais buracos negros, como, por exemplo, as relativas às geodésicas [18, 19, 20, 21], efeito de lente [22, 23], termodinâmica [24, 25, 26, 27, 28, 29] e modos quase-normais [30, 31, 32].

Neste capítulo, realizaremos um estudo sobre os buracos negros regulares de Bardeen, Hayward e Frolov. Justificaremos as soluções, estudaremos as propriedades geométricas e analisaremos a termodinâmica destes buracos negros. Além disso, apresentaremos outros buracos negros regulares recorrentes na literatura.

3.1 Buraco negro regular de Bardeen

Os primeiros passos para a construção de soluções para as equações de Einstein sem singularidades foram dados nos anos sessenta do século passado. Sakharov [127], por exemplo, a partir de um estudo da formação de estruturas num universo jovem em expansão, mostrou que se a densidade de energia da matéria, ρ , e a pressão da matéria, p , relacionam-se por $p = -\rho$, então a aglomeração de matéria bariônica não produzirá divergência em ρ . Ou seja, mesmo que ocorra a aglomeração de matéria permanece finita.

A partir do resultado de Sakharov, Bardeen [7], propôs a primeira métrica de buraco negro sem singularidade, a qual é esfericamente simétrica e difere da solução de Schwarzschild [2], quando escrita na mesma forma algébrica da solução de Schwarzschild, por ter uma massa efetiva, $M(r)$, que depende da coordenada radial. O buraco negro de Bardeen foi o primeiro exemplo de um buraco negro sem uma singularidade.

Décadas após a sua publicação, a métrica de Bardeen continua a ser investigada. Em [103] mostra-se que o buraco negro de Bardeen tem uma origem, ou seja, pode ser interpretado como uma solução exata das equações do campo gravitacional, com uma

fonte que corresponde a um campo eletromagnético não-linear.

Nesta seção, analisaremos a métrica correspondente ao buraco negro de Bardeen e analisaremos suas propriedades.

3.1.1 O espaço-tempo de Bardeen

A solução proposta por Bardeen [7] escrita na forma da solução de Schwarzschild [2] apresenta uma massa que não é uma constante m , mas uma função que é designada $M(r)$, e depende da coordenada radial. A função $M(r)$ foi escolhida de tal forma que a métrica de Bardeen seja reduzida, nas proximidades de $r = 0$, ao espaço-tempo De Sitter. Com este requisito, o espaço-tempo não apresenta singularidade em $r = 0$, como no caso da solução de Schwarzschild, e por isto, dizemos que a solução é regular. Este é um objeto compacto com um horizonte de eventos e sem uma singularidade [128].

Considere a métrica abaixo com simetria esférica que descreve um buraco negro estático:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (3.1)$$

tal expressão descreve a solução de Schwarzschild, com $f(r)$ escrito na forma

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (3.2)$$

com m a massa do buraco e negro. A solução de Bardeen tem essa mesma forma algébrica dada pela Eq.(3.2), a saber,

$$f(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \quad (3.3)$$

com

$$M(r) = \frac{mr^3}{(r^2 + q^2)^{3/2}}, \quad (3.4)$$

onde m é interpretado como o parâmetro de massa, enquanto q é considerado um tipo de carga [103]. Podemos observar na Eq. (3.4) que, se $r \rightarrow \infty$, $M(r) \rightarrow m$. Assim, muito longe do buraco negro, a solução de Bardeen é análoga à solução de Schwarzschild.

Para a métrica de Bardeen, o comportamento do escalar de Kretschmann é dada por

$$K = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{12m^2}{(r^2 + q^2)^7}(8q^8 - 4q^6r^2 + 47q^4r^4 - 12q^2r^6 + 4r^8), \quad (3.5)$$

e nos limites apropriados, temos os seguintes resultados:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = 96 \frac{m^2}{q^6}. \quad (3.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (3.7)$$

Neste caso, ao contrário do escalar de Kretschmann da métrica de Schwarzschild, (2.32), o limite para $r \rightarrow 0$, para o escalar de Kretschmann do buraco negro de Bardeen, é finito. Assim, a métrica do buraco negro de Bardeen é regular, segundo critérios que usam o escalar de Kretschmann para estudar a regularidade ou singularidade.

Usando a métrica de Bardeen, é possível obter as seguintes componentes do tensor de Einstein [7]:

$$G_t^t = G_r^r = \frac{6mq^2}{(q^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (3.8)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = \frac{3mq^2(2q^2 - 3r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}}, \quad (3.9)$$

onde de acordo com Beato e Garcia [103] o termo q é interpretado como carga magnética num cenário da eletrodinâmica não-linear.

Para $r \rightarrow 0$, podemos escrever

$$M(r) \approx \frac{mr^3}{q^3}, \quad (3.10)$$

e então

$$f(r) \approx 1 - Cr^2, \quad (3.11)$$

com $C = \frac{2m}{q^3}$ sendo uma constante positiva. Portanto, a solução de Bardeen [7], para $r \approx 0$ é análoga a do espaço-tempo de De Sitter.

3.1.2 Solução de Bardeen

Estamos interessados em obter a solução associada ao espaço-tempo de Bardeen. Neste sentido, analisaremos esta solução no contexto da TRG. A ação que descreve a TRG minimamente acoplada com um campo eletromagnético não-linear é dada por:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g}R + \int d^4x \sqrt{-g}L(F), \quad (3.12)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$ (com G sendo a constante gravitacional Newtoniana e c sendo a velocidade da luz), $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante do tensor métrico, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura, dado pela contração do tensor de Ricci e $L(F)$ é a Lagrangiana da teoria eletromagnética não-linear.

A Lagrangiana da teoria eletromagnética não-linear $L(F)$ [44, 103] é descrita por

$$L(F) = \frac{24\sqrt{2}mq^2}{\kappa^2 \left(\sqrt{\frac{2q^2}{F}} + 2q^2 \right)^{5/2}}. \quad (3.13)$$

A Lagrangiana é uma função do escalar eletromagnético não-linear $F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}/4$, onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell-Faraday. Para um espaço-tempo esfericamente simétrico e apenas magneticamente carregado, a única componente não-nula de $F_{\mu\nu}$ é [103, 16, 129, 130]

$$F_{23} = q \sin\theta, \quad (3.14)$$

e o escalar F é

$$F = \frac{q^2}{2r^4}, \quad (3.15)$$

onde q é a carga magnética.

Variando a ação (3.12) com relação à métrica, encontramos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}^B, \quad (3.16)$$

onde o tensor de energia-momento de Bardeen ($T_{\mu\nu}^B$) é obtido por meio da expressão abaixo [44, 16]:

$$T_{\mu\nu}^B = g_{\mu\nu}L(F) - \frac{\partial L}{\partial F} F_{\mu}^{\alpha} F_{\nu\alpha}. \quad (3.17)$$

Para um espaço-tempo esfericamente simétrico, temos o seguinte ansatz:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (3.18)$$

Usando a expressão do elemento de linha dado pela Eq. (3.18), podemos especificar matricialmente todos os elementos do tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

As únicas componentes não-nulas do tensor de Ricci para o caso de um objeto massivo, estático e esfericamente simétrico são as componentes da diagonal principal, dadas por:

$$R_{00} = \frac{f(r)f''(r)}{2} + \frac{f(r)f'(r)}{r}, \quad (3.20)$$

$$R_{11} = -\frac{f''(r)}{2f} - \frac{f'(r)}{rf(r)}, \quad (3.21)$$

$$R_{22} = 1 - f(r) - rf'(r), \quad (3.22)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22}. \quad (3.23)$$

Para calcular as componentes do tensor de Einstein utilizaremos a seguinte equação:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (3.24)$$

Inicialmente, determinemos o escalar de curvatura:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}. \quad (3.25)$$

Substituindo as Eqs. (3.19), (3.20)-(3.23) na Eq. (3.25), após algumas simplificações, obtemos:

$$R = f''(r) + \frac{4f'(r)}{r} + \frac{2f(r)}{r^2} - \frac{2}{r^2}. \quad (3.26)$$

Assim, a componente G_{00} do tensor de Einstein pode ser obtida fazendo $\mu = 0$ e $\nu = 0$ na Eq. (3.24):

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R. \quad (3.27)$$

Substituindo as Eqs.(3.19), (3.20) e (3.26) na Eq. (3.27), obtemos:

$$G_{00} = -\frac{f(r)f'(r)}{r} - \frac{f(r)^2}{r^2} + \frac{f(r)}{r^2}. \quad (3.28)$$

Da mesma forma, é possível calcular as outras componentes não-nulas do tensor de Einstein:

$$G_{11} = \frac{f'(r)}{rf(r)} - \frac{1}{r^2f(r)} + \frac{1}{r^2}, \quad (3.29)$$

$$G_{22} = \frac{1}{2}r^2f''(r) + rf'(r). \quad (3.30)$$

As componentes (0, 0) e (2, 2) do tensor de energia-momento de Bardeen ($T_{\mu\nu}^B$), são dadas, respectivamente, por:

$$T_{00}^B = \frac{f(r)}{\kappa^2} \left(\frac{6mq^2}{(r^2 + q^2)^{5/2}} \right), \quad (3.31)$$

$$T_{22}^B = \frac{1}{\kappa^2} \left(-\frac{3mq^2 r^2 (2q^2 - 3r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}} \right). \quad (3.32)$$

Substituindo as Eqs. (3.28)-(3.32) na Eq. (3.16), obtemos as seguintes equações diferenciais

$$-\frac{a}{r^2} - \frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{6mq^2}{(q^2 + r^2)^{5/2}} = 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{2}r^2 f''(r) + r f'(r) + \frac{3mq^2 r^2 (2q^2 - 3r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}} = 0. \quad (3.34)$$

Multiplicando a Eq. (3.33) por r^2 e a Eq. (3.34) por 2, somando os resultados, conseguimos:

$$1 - f(r) + r f'(r) + r^2 f''(r) + \frac{6mq^2 r^2 (2q^2 - 3r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}} - \frac{6mq^2 r^2}{(q^2 + r^2)^{5/2}} = 0. \quad (3.35)$$

Resolvendo a equação diferencial acima, obtemos:

$$f(r) = 1 - \frac{2mr^2}{(q^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{C_1}{r} + C_2 r, \quad (3.36)$$

onde podemos adotar $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$. Assim, simplificando e substituindo a Eq. (3.36) na Eq. (3.18), finalmente obtemos a solução para o buraco negro regular de Bardeen:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr^2}{(q^2 + r^2)^{3/2}} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2mr^2}{(q^2 + r^2)^{3/2}} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.37)$$

Note que, se $q = 0$, reobtemos a métrica singular de Schwarzschild dado pela Eq. (2.30).

3.1.3 Termodinâmica do buraco negro

Nesta seção, estudaremos a termodinâmica do buraco negro de Bardeen, examinando o comportamento da massa, da temperatura Hawking e da capacidade térmica em função da entropia.

Massa do buraco negro

Seja r_h o raio do horizonte, assim temos que $f(r_h) = 0$, onde $f(r)$ é a componente g_{tt} da Eq. (3.37). Assim, podemos escrever a massa do buraco negro em termos de r_h através da seguinte equação:

$$m = \frac{(r_h^2 + q^2)^{3/2}}{2r_h^2}, \quad (3.38)$$

que é a massa do buraco negro de Bardeen escrita em termos do raio do horizonte. Fazendo $q = 0$, recobramos a massa do buraco negro de Schwarzschild.

Podemos escrever o parâmetro de massa em função da entropia como

$$m = \frac{\pi \left(q^2 + \frac{S}{\pi} \right)^{3/2}}{2S}. \quad (3.39)$$

Na Fig. 17, representamos o comportamento do parâmetro de massa em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações.

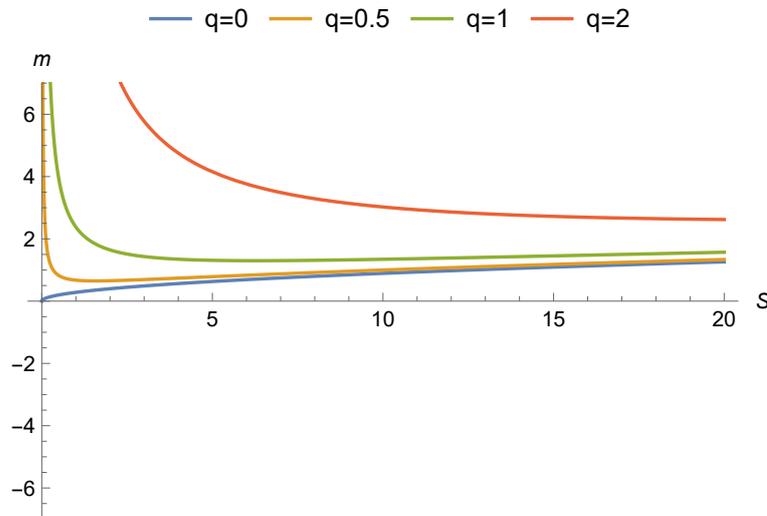


Figura 17 – Massa do buraco negro de Bardeen em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de q .

Observe que, para o buraco negro de Schwarzschild, ($q = 0$), o parâmetro de massa apresenta apenas valores positivos para valores positivos de entropia, S . Se consideramos o buraco negro de Bardeen, é possível notar que o parâmetro de massa também apresenta valores positivos para valores positivos de entropia, S .

Temperatura Hawking

A gravidade superficial (κ) para o buraco negro de Bardeen pode ser calculada usando a seguinte expressão:

$$\kappa = \frac{f'(r)}{2} \Big|_{r_h}, \quad (3.40)$$

com ' denotando a derivada com respeito a coordenada radial. Hawking mostrou que o buraco negro emite radiação e sua temperatura correspondente, temperatura Hawking, para o espaço-tempo estacionário, é dado por [64]:

$$T_\kappa = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (3.41)$$

Para o espaço-tempo de vácuo com simetria esférica, a primeira lei da termodinâmica diz que:

$$dm = T_f dS \rightarrow T_f = \frac{dm}{dS}, \quad (3.42)$$

com m e S representando a energia total e entropia do sistema, respectivamente, e T_f sendo a temperatura do buraco negro prevista na primeira lei. Considerando a lei da área dado pela Eq. (2.64), a primeira lei da termodinâmica não fornece uma forma correta de calcular a temperatura de buracos negros regulares [131, 132].

Assim, a temperatura Hawking, T_κ e T_f , para o buraco negro de Bardeen, obtidas através das equações Eqs. (3.41) e (3.42), respectivamente, não são equivalentes, ou seja, a primeira lei, dada pela Eq. (3.42), não é apropriada para calcular a temperatura correta para buracos negros regulares, uma vez que, tais buracos negros não são soluções de vácuo.

Usando a Eq. (3.41) com κ dado por (3.40), é possível calcular a temperatura Hawking, $T_\kappa = T$, para o buraco negro de Bardeen, da seguinte forma:

$$T = -\frac{2q^2 - r_h^2}{4\pi q^2 r_h + 4\pi r_h^3}. \quad (3.43)$$

Substituindo $r_h = (\frac{S}{\pi})^{1/2}$ na Eq. (3.43), obtemos a expressão da temperatura Hawking em função da entropia para o buraco negro regular de Bardeen:

$$T = \frac{S - 2\pi q^2}{4\sqrt{\pi}\sqrt{S}(\pi q^2 + S)}. \quad (3.44)$$

Na Fig. 18, representamos o comportamento do parâmetro de temperatura, T , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações. Nota-se que para o espaço-tempo de Schwarzschild ($q = 0$) o parâmetro de temperatura só apresenta valores positivos para $S > 0$. Quando consideramos o espaço-tempo de Bardeen, já é possível notar que o parâmetro de temperatura apresentará valores positivos e negativos dependendo dos parâmetros do buraco negro.

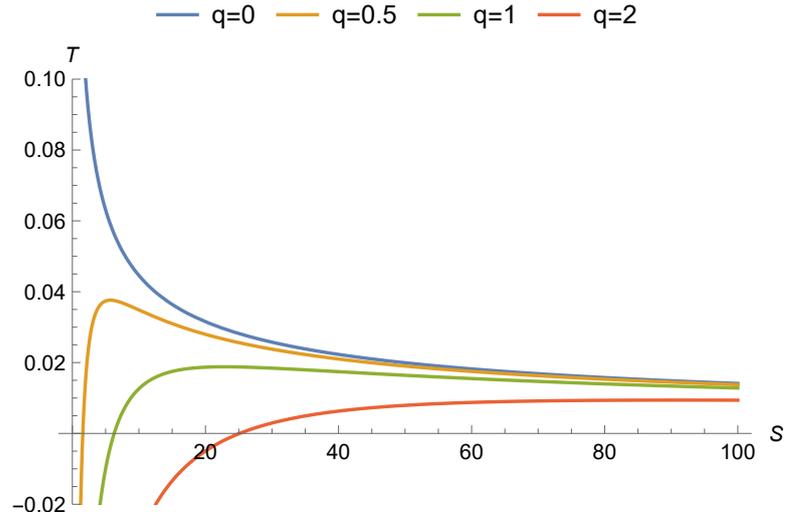


Figura 18 – Temperatura do buraco negro de Bardeen em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de q .

Capacidade térmica

A capacidade térmica fornece dados sobre a estabilidade termodinâmica de um sistema. Podemos estimar a capacidade térmica do buraco negro de Bardeen a partir da expressão:

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)^{-1}. \quad (3.45)$$

Substituindo a Eq. (3.44) na Eq. (3.45), encontramos a seguinte expressão para a capacidade térmica em função da entropia do buraco negro:

$$C = -\frac{2S(2\pi q^2 - S)(\pi q^2 + S)}{2\pi^2 q^4 + 7\pi q^2 S - S^2}. \quad (3.46)$$

O comportamento da capacidade térmica em função da entropia, para diferentes valores de q , é dado na Fig. 19. Para $q = 0$, a Eq. (3.46) reduz-se a $C = -2S$, como esperado para o caso do espaço-tempo de Schwarzschild. Neste caso, a capacidade térmica é negativa para $S > 0$, indicando um sistema termodinâmico instável.

Quando consideramos o espaço-tempo de Bardeen, existem valores da entropia para os quais a capacidade térmica adquire valores positivos. Isto significa que o buraco negro de Bardeen pode ser instável ou estável a depender dos valores de entropia considerados.

3.2 Buraco negro regular de Hayward

A métrica do buraco negro de Hayward [17] é estática, não carregada e esfericamente simétrica. Foi proposta em 2005 por Sean Alan Hayward. Vale ressaltar que esta métrica se

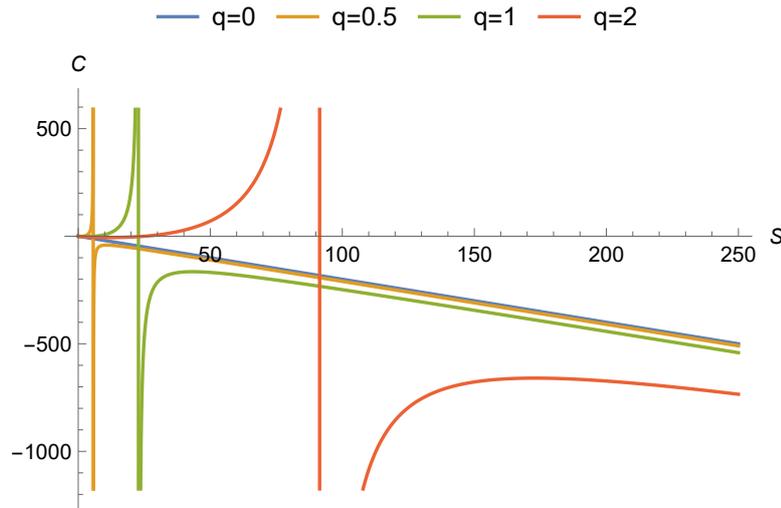


Figura 19 – Capacidade térmica do buraco negro de Bardeen em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de q .

torna um espaço-tempo de De Sitter nas vizinhanças de $r = 0$, logo, não há singularidade em $r = 0$. Além disso, à medida que $r \rightarrow \infty$, ela tende à métrica de Minkowski.

Originalmente, a métrica do buraco negro de Hayward foi obtida a partir das equações de Einstein modificadas, sendo que o parâmetro que aparece na solução está relacionado com o nível de energia na região próxima do horizonte do buraco negro [17], que pode ser interpretado como uma constante a atuar neste espaço-tempo. Por outro lado, a solução do buraco negro de Hayward também pode ser obtida no contexto da teoria da relatividade geral acoplada à eletrodinâmica não-linear [10, 11], caso em que o parâmetro mencionado já não é uma constante universal, mas uma carga magnética.

Nesta seção, analisaremos a métrica correspondente ao buraco negro de Hayward e analisaremos suas propriedades.

3.2.1 O espaço-tempo de Hayward

A métrica do buraco negro não-singular (regular) obtida por Hayward [17] é dada por

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (3.47)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. A função $f(r)$ é dada por

$$f(r) = 1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}, \quad (3.48)$$

com l e m sendo constantes positivas. Além disso, podemos observar a regularidade da métrica de Hayward calculando o escalar de Kretschmann, dado por:

$$\begin{aligned}
K &= R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&= \frac{48m^2(r^{12} - 4r^9q^3 + 18r^6q^6 - 2r^3q^9 + 2q^{12})}{(r^3 + q^3)^6}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

No limite $r \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0} K &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{48m^2(r^{12} - 4r^9q^3 + 18r^6q^6 - 2r^3q^9 + 2q^{12})}{(r^3 + q^3)^6} \\
&= \frac{96m^2}{q^6}.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Então, pelos critérios adotados quando usamos o escalar de Kretschmann para analisar a existência de singularidades, a métrica de Hayward é regular na vizinhança de $r = 0$.

Usando a métrica dada pela Eq. (3.47), podemos obter as seguintes componentes do tensor de Einstein [17]:

$$G_t^t = G_r^r = \frac{12l^2m^2}{(r^3 + q^3)^2}, \tag{3.51}$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = -\frac{24(r^3 - l^2m)l^2m^2}{(r^3 + q^3)^3}, \tag{3.52}$$

onde

$$q^3 \equiv 2l^2m, \tag{3.53}$$

que através das equações de Einstein, são proporcionais ao tensor de energia-momento da fonte.

Na solução de Hayward, a função $f(r)$ pode também ser escrita como:

$$f(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \tag{3.54}$$

onde

$$M(r) = \frac{mr^3}{(r^3 + q^3)}, \tag{3.55}$$

é uma espécie de massa efetiva do buraco negro, que é função da coordenada radial e q^3 é dado pela Eq. (3.53). Podemos observar que, se $r \rightarrow \infty$, $M(r) \rightarrow m$. Assim, muito longe do buraco negro, a solução de Hayward é análoga à solução de Schwarzschild.

Para $r \rightarrow 0$, podemos escrever

$$M(r) \approx \frac{mr^3}{q^3}, \quad (3.56)$$

e então

$$f(r) \approx 1 - Cr^2, \quad (3.57)$$

com $C = \frac{2m}{q^3}$ sendo uma constante positiva. Observe que a métrica do espaço-tempo com $f(r)$ dado pela Eq. (3.57) é similar ao espaço-tempo de De Sitter. Assim, o buraco negro de Hayward tem um núcleo interno com comportamento semelhante à métrica de De Sitter [17].

3.2.2 Solução de Hayward

Estamos interessados em obter a solução que descreve o espaço-tempo de Hayward. Neste sentido, analisaremos esta solução no contexto da TRG.

A ação que descreve a TRG minimamente acoplada com um campo eletromagnético não-linear é dada por:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} L(F), \quad (3.58)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$, $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante do tensor métrico, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura, dado pela contração do tensor de Ricci e $L(F)$ é a Lagrangiana da teoria eletromagnética não-linear.

A Lagrangiana da teoria eletromagnética não-linear $L(F)$ [16, 26, 133, 134, 135], associada com o espaço-tempo de Hayward [17], é descrito por,

$$L(F) = \frac{6}{\kappa^2 l^2} \frac{(2l^2 F)^{\frac{3}{2}}}{[1 + (2l^2 F)^{\frac{3}{4}}]^2}. \quad (3.59)$$

A Lagrangiana é uma função não-linear do escalar eletromagnético $F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell-Faraday. Para um espaço-tempo esfericamente simétrico e apenas magneticamente carregado, a única componente não-nula de $F_{\mu\nu}$ é [16]

$$F_{23} = q \sin\theta, \quad (3.60)$$

e o escalar F é

$$F = 2F_{23}F^{23} = \frac{2q^2}{r^4}, \quad (3.61)$$

onde q é a carga magnética. Na Eq. (3.59), l é o parâmetro de Hayward, cujo valor, em princípio, está restrito ao intervalo $0 \leq l < \infty$. É importante notar que, no seu trabalho original, Hayward considerou este parâmetro da ordem do comprimento de Planck, e foi então relacionado com uma carga magnética através da definição [16, 26, 133, 134, 135]

$$q = \frac{\sqrt[3]{r_s^2 l}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4m^2 l}}{2}. \quad (3.62)$$

Aqui, $r_s = 2GM/c^2 = 2m$ é o raio clássico de Schwarzschild, M é a massa-energia gravitacional do sistema e m é a massa geométrica. Portanto, a condição requerida $q > 0$ corresponde a solução do buraco negro com $l > 0$.

Assim, substituindo a Eq. (3.62) na Eq. (3.61), obtemos:

$$F = \frac{\sqrt[3]{r_s^4 l^2}}{2r^4} = \frac{\sqrt[3]{2} (lm^2)^{2/3}}{r^4}, \quad (3.63)$$

e assim, apesar das potências fracionárias de F no Lagrangiano (3.59), a teoria está bem definida.

Portanto, variando a ação (3.58) com respeito a métrica, encontramos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}^H, \quad (3.64)$$

onde o tensor de energia-momento de Hayward ($T_{\mu\nu}^H$) é obtido por meio da expressão abaixo [16]:

$$T_{\mu\nu}^H = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L(F) - 2\frac{\partial L}{\partial F}F_{\mu}^{\alpha}F_{\nu\alpha}. \quad (3.65)$$

As componentes (0, 0) e (2, 2) do tensor de energia-momento de Hayward ($T_{\mu\nu}^H$) é dado por:

$$T_{00}^H = \frac{f(r)}{2}L(F) = \frac{6f(r)(2l^2F)^{3/2}}{2\kappa^2 l^2 [(2l^2F)^{3/4} + 1]^2} = \frac{f(r)}{\kappa^2} \frac{12l^2 m^2}{(2l^2 m + r^3)^2}. \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned}
T_{22}^H &= \frac{1}{2} g_{22} L(F) - 2 \frac{\partial L}{\partial F} F_{2\alpha} F_{2\alpha} \\
&= -\frac{r^2}{2} \frac{6}{\kappa^2 l^2} \frac{(2l^2 F)^{3/2}}{[1 + (2l^2 F)^{3/4}]^2} + \frac{2q^2}{r^2} \frac{18\sqrt{2}\sqrt{F}l}{\kappa^2 (2^{3/4} F^{3/4} l^{3/2} + 1)^3} \\
&= \frac{24l^2 m^2 r^2 (r^3 - l^2 m)}{\kappa^2 (2l^2 m + r^3)^3}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Substituindo as Eqs. (3.66)-(3.67) na Eq. (3.64), obtemos as seguintes equações diferenciais

$$\frac{1}{r^2} - \frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} - \frac{12l^2 m^2}{(2l^2 m + r^3)^2} = 0, \tag{3.68}$$

$$\frac{1}{2} r^2 f''(r) + r f'(r) - \frac{24l^2 m^2 r^2 (r^3 - l^2 m)}{(2l^2 m + r^3)^3} = 0. \tag{3.69}$$

Multiplicando a Eq. (3.68) por r^2 e a Eq. (3.69) por 2, somando os resultados, obtemos:

$$1 - a - f(r) + r f'(r) + r^2 f''(r) - \frac{12l^2 m^2 r^2}{(2l^2 m + r^3)^2} - \frac{48l^2 m^2 r^2 (r^3 - l^2 m)}{(2l^2 m + r^3)^3} = 0. \tag{3.70}$$

Resolvendo a equação diferencial acima, encontramos:

$$f(r) = 1 + \frac{4l^2 m^2}{2l^2 m r + r^4} + \frac{C_1}{r} + C_2 r, \tag{3.71}$$

onde podemos adotar $C_1 = -2m$ e $C_2 = 0$. Dessa forma, finalmente obtemos a solução de Hayward:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2 m}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2 m}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \tag{3.72}$$

Se fizermos $l = 0$ na Eq. (3.72), recobramos a solução de Schwarzschild (2.30).

3.2.3 Termodinâmica do buraco negro

A seguir, estudaremos a termodinâmica do buraco negro de Hayward, analisando o comportamento da massa, da temperatura Hawking e da capacidade térmica em função da entropia.

Massa do buraco negro

Seja r_h o raio do horizonte, assim temos que $f(r_h) = 0$, onde $f(r)$ é a componente g_{tt} da Eq. (3.72). Assim, podemos escrever a massa do buraco negro, em termos de r_h , através da seguinte equação:

$$m = \frac{r_h^3}{2(r_h^2 - l^2)}, \quad (3.73)$$

que é a massa do buraco negro de Hayward escrita em termos do raio do horizonte. Fazendo $l = 0$, recobramos a massa do buraco negro de Schwarzschild.

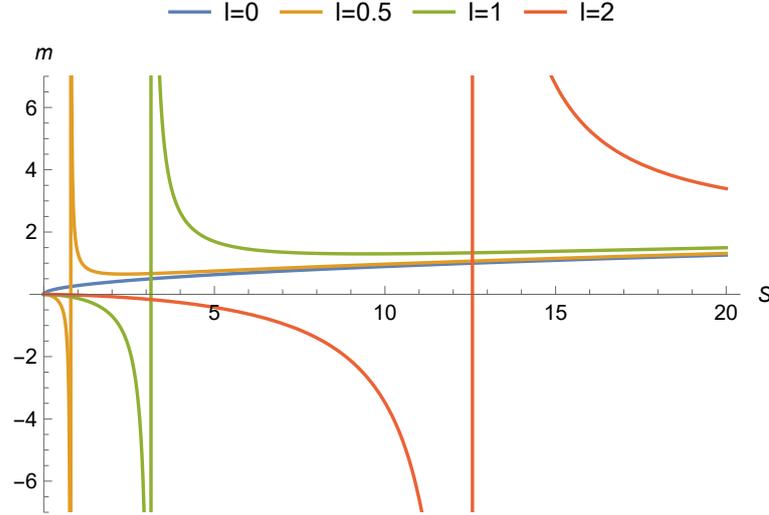


Figura 20 – Massa do buraco negro de Hayward em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de l .

Podemos escrever o parâmetro de massa em função da entropia como

$$m = -\frac{S^{3/2}}{\sqrt{\pi}(2\pi l^2 - 2S)}. \quad (3.74)$$

Na Fig. 20, representamos o comportamento do parâmetro de massa em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações.

Note que, para o buraco negro de Schwarzschild, ($l = 0$), o parâmetro de massa apresenta apenas valores positivos para valores positivos de entropia, S . Se consideramos o buraco negro de Hayward ($l > 0$), é possível perceber que o parâmetro de massa tem valores positivos e negativos dependendo dos valores de entropia escolhidos.

É importante salientar que, ao aumentarmos o parâmetro l , modificamos o ponto de transição de fase do buraco negro de Hayward.

Temperatura Hawking

A gravidade superficial (κ) para o buraco negro de Hayward pode ser calculada usando a seguinte expressão:

$$\kappa = \left. \frac{f'(r)}{2} \right|_{r_h}, \quad (3.75)$$

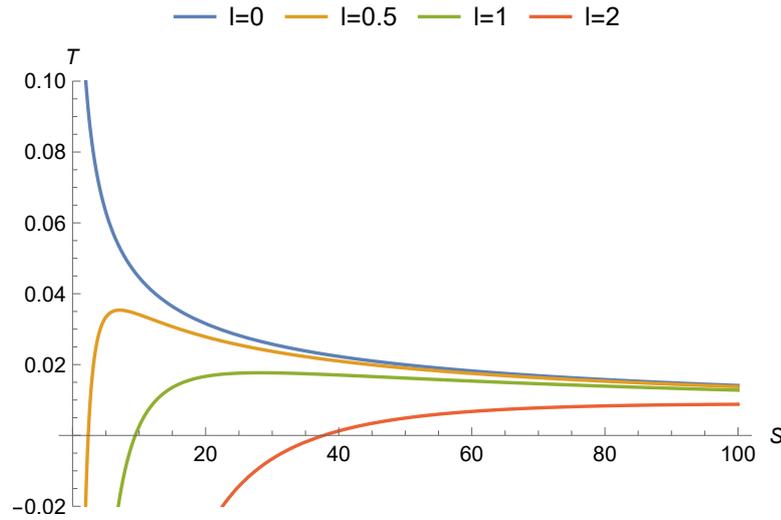


Figura 21 – Temperatura do buraco negro de Hayward em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de l .

com ' denotando a derivada com respeito a coordenada radial. A temperatura Hawking, para o espaço-tempo estacionário, é dado por [64]:

$$T_{\kappa} = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (3.76)$$

Usando a Eq. (3.76) com κ dado por (3.75), é possível calcular a temperatura Hawking, $T_{\kappa} = T$, para o buraco negro de Hayward:

$$T = \frac{r_h^2 - 3l^2}{4\pi r_h^3}. \quad (3.77)$$

Substituindo $r_h = (\frac{S}{\pi})^{1/2}$ na Eq. (3.77), obtemos a expressão da temperatura Hawking em função da entropia para o buraco negro de Hayward:

$$T = \frac{S - 3\pi l^2}{4\sqrt{\pi} S^{3/2}}. \quad (3.78)$$

Na Fig. 21, representamos o comportamento do parâmetro de temperatura, T , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações. Observe que, para o espaço-tempo de Schwarzschild ($l = 0$), o parâmetro de temperatura só apresenta valores positivos para $S > 0$. Quando consideramos o espaço-tempo de Hayward ($l > 0$), já é possível notar que, o parâmetro de temperatura apresentará valores positivos e negativos dependendo dos valores de entropia escolhidos.

Capacidade térmica

Podemos calcular a capacidade térmica do buraco negro de Hayward a partir da seguinte expressão:

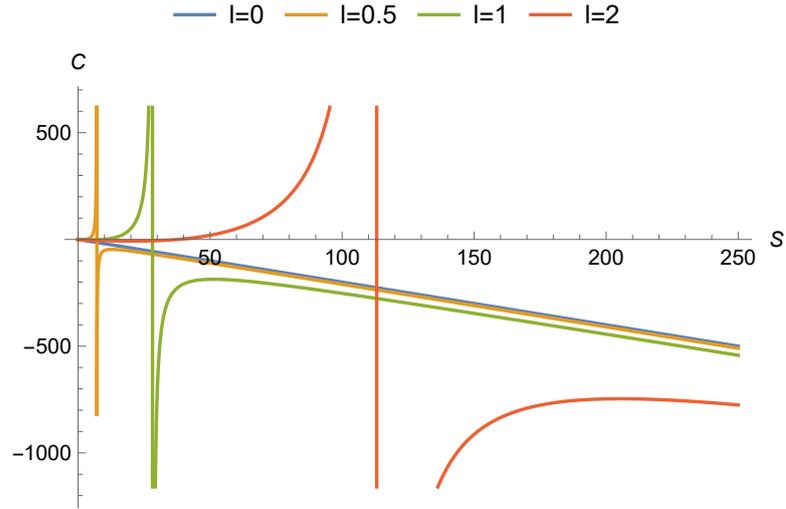


Figura 22 – Capacidade térmica do buraco negro de Hayward em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de l .

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)^{-1}. \quad (3.79)$$

Substituindo a Eq. (3.78) na Eq. (3.79), encontramos a seguinte expressão para a capacidade térmica em função da entropia do buraco negro:

$$C = -\frac{2S(S - 3\pi l^2)}{S - 9\pi l^2}. \quad (3.80)$$

O comportamento da capacidade térmica em função da entropia, para diferentes valores de l , é dado na Fig. 22. Para $l = 0$, a Eq. (3.80) reduz-se a $C = -2S$, como esperado para o caso do espaço-tempo de Schwarzschild. Neste caso, a capacidade térmica é negativa para $S > 0$, indicando um sistema termodinâmico instável.

Quando consideramos o espaço-tempo de Hayward ($l > 0$), existem valores da entropia para os quais a capacidade térmica adquire valores positivos ou negativos. Isto significa que o buraco negro de Hayward pode ser instável ou estável a depender dos valores de entropia considerados.

3.3 Buraco negro regular de Frolov

Uma generalização bem conhecida do buraco negro de Hayward, com a mesma motivação teórica inspirada na gravidade quântica e com um parâmetro de carga adicional, foi proposta por Valeri P. Frolov [15]. Nesta seção, analisaremos a métrica correspondente ao buraco negro de Frolov e analisaremos suas propriedades.

3.3.1 O espaço-tempo de Frolov

A métrica do buraco negro não-singular (regular) obtida por Frolov [15] é dada por

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (3.81)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. A função $f(r)$ é dada por

$$f(r) = 1 - \frac{r^2(2mr - Q^2)}{l^2(2mr + Q^2) + r^4}, \quad (3.82)$$

onde o parâmetro de carga adicional Q caracteriza um cabelo específico do buraco negro e satisfaz $0 < Q \leq 1$; e o comprimento abaixo do qual os efeitos da gravidade quântica se tornam importantes satisfaz $l \leq \sqrt{16/27}$ como no buraco negro de Hayward. Em princípio, Q admite uma interpretação em termos de carga elétrica medida por um observador situado no infinito, onde a métrica é assintoticamente plana [58]. No limite $l \rightarrow 0$, esta métrica reproduz a métrica de Reissner-Nordström [3, 4].

Além disso, podemos observar a regularidade da métrica de Frolov calculando o escalar de Kretschmann, dado por:

$$\begin{aligned} K &= R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} \\ &= + \frac{192l^2m^2Q^2r^{11}(15l^2m + 2r^3)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} \\ &+ \frac{8Q^2r^{16}(7Q^2 - 12mr)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} + \frac{24l^8Q^{12}}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} \\ &- \frac{32l^8mQ^8r(7mr + Q^2)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} + \frac{32l^6mQ^2r^5(96l^2m^4 + 19Q^6)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} \\ &+ \frac{80l^6Q^4r^4(24l^2m^4 - Q^6)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} + \frac{16l^4Q^2r^8(37Q^6 - 120l^2m^4)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} \\ &- \frac{16l^2mQ^4r^7(76l^4m^2 + 131l^2mr^3 - 34r^6)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} \\ &+ \frac{16l^2Q^6r^3(8l^6m^3 + 38l^4m^2r^3 - 80l^2mr^6 - 17r^9)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

No limite $r \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{24}{l^4}. \quad (3.84)$$

No limite $r \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (3.85)$$

O fato de que o escalar de Kretschmann é finito nas vizinhanças de $r = 0$, confirma a regularidade da solução, conforme os critérios já discutidos.

Usando a métrica dada pela Eq. (3.82), podemos obter as seguintes componentes do tensor de Einstein:

$$G_t^t = G_r^r = \frac{l^2 (12m^2 r^2 + 4mQ^2 r - 3Q^4) + Q^2 r^4}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^2}, \quad (3.86)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = \frac{24l^2 m^2 r^3 (l^2 m - r^3)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} + \frac{6l^2 Q^4 r (l^2 m + 2r^3)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} - \frac{Q^2 (l^4 (3Q^4 - 28m^2 r^2) + 6l^2 m r^5 + r^8)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3}, \quad (3.87)$$

que através das equações de Einstein, são proporcionais ao tensor de energia-momento da fonte.

3.3.2 Termodinâmica do buraco negro

A seguir, estudaremos a termodinâmica do buraco negro de Frolov, examinando o comportamento da massa, da temperatura Hawking e da capacidade térmica em função da entropia.

Massa do buraco negro

Seja r_h o raio do horizonte, assim temos que $f(r_h) = 0$, onde $f(r)$ é a componente g_{tt} da Eq. (3.81). Assim, podemos escrever a massa do buraco negro, em termos de r_h , através da seguinte equação:

$$m = \frac{Q^2 r_h^2 + r_h^4 + l^2 Q^2}{2(r_h^3 - l^2 r_h)}, \quad (3.88)$$

que é a massa do buraco negro de Frolov escrita em termos do raio do horizonte. Fazendo $Q = 0$, recobramos a massa do buraco negro de Hayward (3.73). Fazendo $l = 0$, recobramos a massa do buraco negro de Reissner-Nordström (2.132). Fazendo $l = Q = 0$, recobramos a massa do buraco negro de Schwarzschild (2.62).

Podemos escrever o parâmetro de massa em função da entropia como

$$m = \frac{\pi^2 (-l^2) Q^2 - S (\pi Q^2 + S)}{2\sqrt{\pi} \sqrt{S} (\pi l^2 - S)}. \quad (3.89)$$

Na Fig. 23, representamos o comportamento do parâmetro de massa em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações.

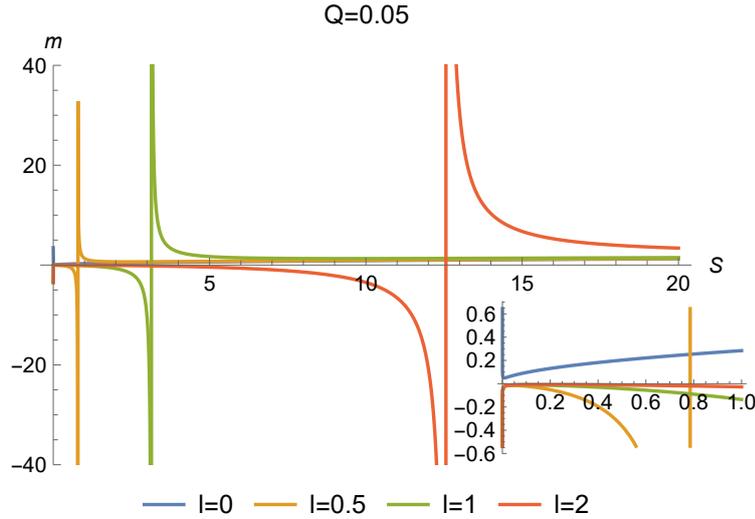


Figura 23 – Massa do buraco negro de Frolov em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de l e $Q = 0.05$.

Note que, para o buraco negro de Reissner-Nordström, ($l = 0$), o parâmetro de massa apresenta apenas valores positivos para valores positivos de entropia, S . Se consideramos o buraco negro de Frolov, é possível notar que o parâmetro de massa tem valores positivos e negativos dependendo dos parâmetros do buraco negro.

Temperatura Hawking

A gravidade superficial (κ) para o buraco negro de Frolov pode ser calculada usando a seguinte expressão:

$$\kappa = \left. \frac{f'(r)}{2} \right|_{r_h}, \quad (3.90)$$

com $'$ denotando a derivada com respeito a coordenada radial. A temperatura Hawking, para o espaço-tempo estacionário, é dado por [64]:

$$T_\kappa = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (3.91)$$

Usando a Eq. (3.91) com κ dado por (3.90), é possível calcular a temperatura Hawking, $T_\kappa = T$, para o buraco negro de Frolov:

$$T = \frac{-r_h^4 (3l^2 + Q^2) - 4l^2 Q^2 r_h^2 + r_h^6 + l^4 Q^2}{4\pi r_h^3 (r_h^4 + 2l^2 Q^2)}. \quad (3.92)$$

Substituindo $r_h = (\frac{S}{\pi})^{1/2}$ na Eq. (3.92), obtemos a expressão da temperatura Hawking em função da entropia para o buraco negro de Frolov:

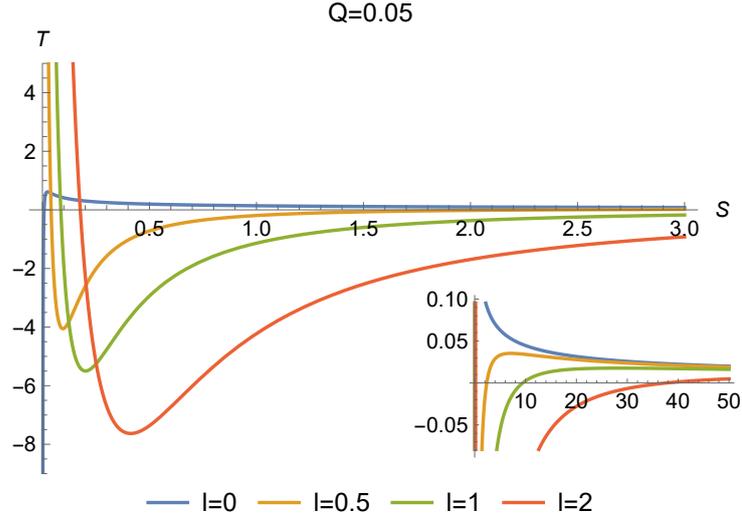


Figura 24 – Temperatura do buraco negro de Frolov em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de l e $Q = 0.05$.

$$T = \frac{\pi^3 l^4 Q^2 - \pi l^2 S (4\pi Q^2 + 3S) + S^2 (S - \pi Q^2)}{4\sqrt{\pi} S^{3/2} (2\pi^2 l^2 Q^2 + S^2)}. \quad (3.93)$$

Na Fig. 24, representamos o comportamento do parâmetro de temperatura, T , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações.

Nota-se que, para o espaço-tempo de Reissner-Nordström ($l = 0$), o parâmetro de temperatura apresenta valores positivos e negativos para $S > 0$. Quando consideramos o espaço-tempo de Frolov, também é possível notar que o parâmetro de temperatura apresentará valores positivos e negativos dependendo dos parâmetros do buraco negro.

Capacidade térmica

Podemos calcular a capacidade térmica do buraco negro de Frolov a partir da seguinte expressão:

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)^{-1}. \quad (3.94)$$

Substituindo a Eq. (3.93) na Eq. (3.94), encontramos a seguinte expressão para a capacidade térmica em função da entropia do buraco negro:

$$C = - \frac{2S (2\pi^2 l^2 Q^2 + S^2) (\pi^3 l^4 Q^2 - \pi l^2 S (4\pi Q^2 + 3S) + S^2 (S - \pi Q^2))}{6\pi^5 l^6 Q^4 + \pi^3 l^4 Q^2 S (13S - 8\pi Q^2) + \pi l^2 S^2 (2\pi^2 Q^4 - 26\pi Q^2 S - 9S^2) + S^4 (S - 3\pi Q^2)}. \quad (3.95)$$

O comportamento da capacidade térmica em função da entropia, para diferentes valores de l , é dado na Fig. 25.

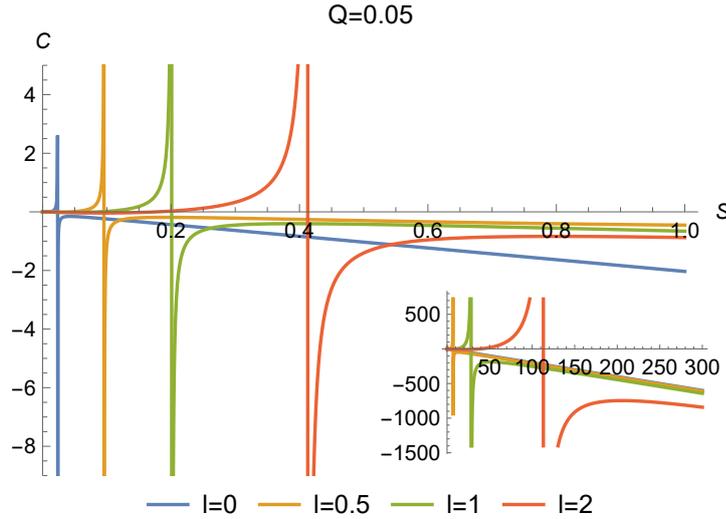


Figura 25 – Capacidade térmica do buraco negro de Frolov em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de l e $Q = 0.05$.

Para $l = 0$ a Eq. (3.95) reduz-se a Eq. (2.136), como esperado para o caso do espaço-tempo de Reissner-Nordström.

Quando consideramos o espaço-tempo de Frolov, existem valores da entropia para os quais a capacidade térmica adquire valores positivos. Isto significa que o buraco negro de Frolov pode ser instável ou estável a depender dos valores de entropia considerados.

3.4 Outros buracos negros regulares

A seguir, apresentaremos sucintamente alguns outros buracos negros regulares bastante frequentes na literatura.

3.4.1 Buraco negro de De Sitter-Schwarzschild (Buraco negro de Dymnikova)

Irina G. Dymnikova é uma física relativista que propôs em 1991 uma solução para um buraco negro não-singular de vácuo [8]. Assim, a métrica do buraco negro regular de Dymnikova é dada por [8]:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (3.96)$$

onde a função métrica $f(r)$ é dada por

$$f(r) = 1 - \frac{R_g(r)}{r}, \quad (3.97)$$

com

$$R_g(r) = r_g \left[1 - \exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right) \right], \quad (3.98)$$

e

$$r_*^3 = r_0^2 r_g = \frac{2r_0^2 Gm}{c^2}. \quad (3.99)$$

O parâmetro r_0 está conectado com ε_0 pela relação de De Sitter

$$r_0^2 = \frac{3c^2}{8\pi G\varepsilon_0}. \quad (3.100)$$

Das equações de Einstein é possível derivar as componentes do tensor de energia-momento para o buraco negro de Dymnikova [136]:

$$T_0^0 = T_1^1 = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{r^3}{r_0^2 r_g}\right); \quad (3.101)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{3r^3}{2r_0^2 r_g}\right) \exp\left(-\frac{r^3}{r_0^2 r_g}\right). \quad (3.102)$$

As Eqs. (3.96)-(3.98) representa a solução exata, esfericamente simétrica, das equações de Einstein que, para $r \gg r_*$, coincide praticamente com a solução de Schwarzschild e, para $r \ll r_*$, se comporta como a solução de Sitter.

3.4.2 Buraco negro regular de Einstein-Bronnikov magneticamente carregado

As teorias da Eletrodinâmica não-linear são extensões bem motivadas da Lagrangiana de Maxwell no regime de alta intensidade [137], e aparecem no limite de baixa energia de várias teorias bem conhecidas, incluindo a eletrodinâmica de Born-Infeld [85], bem como várias construções supersimétricas ou de cordas [138, 139, 140, 141]. Outra classe importante de buracos negros regulares surge no contexto da relatividade geral acoplada à eletrodinâmica não-linear de Bronnikov, onde a Lagrangiana desta última é dada por [16]:

$$\mathcal{L}(U) = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \cosh^{-2}[a(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/2)^{1/4}]. \quad (3.103)$$

A gravidade de Einstein-Bronnikov admite buracos negros regulares apenas se estes tiverem carga magnética e não-elétrica, ou seja, escolhendo uma configuração puramente magnética para o campo de gauge:

$$A_\mu = q_m \cos\theta \delta_\mu^\phi, \quad (3.104)$$

onde q_m é a carga magnética. Neste caso, a singularidade central é removida se o parâmetro $a = q_m^{3/2}/m$ diferir de zero.

Assim, a métrica do buraco negro não-singular (regular) de Einstein-Bronnikov magneticamente carregado é dada por [16]:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (3.105)$$

onde a função métrica $f(r)$ é dada por

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} \left(1 - \tanh \frac{q_m^2}{2mr} \right). \quad (3.106)$$

3.4.3 Buraco negro regular de Ghosh-Culetu-Simpson-Visser (Eletrodinâmica não-linear)

O buraco negro regular de Ghosh-Culetu-Simpson-Visser foi introduzido em [142, 96, 143], como um toy model de um buraco negro regular no sentido de Bardeen, onde o núcleo é assintoticamente Minkowski em vez de De Sitter: dito de outra forma, a densidade de energia e a pressão associadas assintam a zero em vez de um valor final determinado pela constante cosmológica efetiva do caso de De Sitter.

Embora o buraco negro regular de Ghosh-Culetu-Simpson-Visser seja introduzido de uma forma puramente fenomenológica, Simpson e Visser argumentaram em [143] que este espaço-tempo é matematicamente interessante devido à sua tratabilidade (os tensores de curvatura e invariantes assumem formas muito mais simples do que as dos buracos negros de Bardeen, Hayward e Frolov), e fisicamente interessante devido ao seu núcleo assintótico de Minkowski não-padrão.

Assim, a métrica do buraco negro regular de Ghosh-Culetu-Simpson-Visser é dada por [142, 96, 143]:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (3.107)$$

onde a função métrica $f(r)$ é dada por

$$f(r) = 1 - \frac{2me^{-g^2/2mr}}{r}. \quad (3.108)$$

Como mostrado em [144, 145] (e que será discutido posteriormente no capítulo 8 desta tese), o espaço-tempo descrito pela Eq. (3.108) pode ser obtido no contexto da relatividade geral acoplada a uma fonte proveniente da eletrodinâmica não-linear, com g associado à carga da eletrodinâmica não-linear.

3.4.4 Buraco negro regular de Kazakov-Solodukhin

O buraco negro de Kazakov-Solodukhin surge num modelo inspirado em cordas, onde as flutuações quânticas da métrica esfericamente simétrica e dos campos de matéria são

governadas pela ação 2D dilaton-gravity [146]. O buraco negro de Kazakov-Solodukhin constitui, então, um exemplo bem motivado de deformação quântica de um buraco negro de Schwarzschild.

Assim, a métrica do buraco negro regular de Kazakov-Solodukhin é dada por [146]:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (3.109)$$

onde a função métrica $f(r)$ é dada por

$$f(r) = -\frac{2m}{r} + \frac{\sqrt{r^2 - l^2}}{r}. \quad (3.110)$$

O parâmetro de cabelo $l > 0$ define a escala na qual as deformações quânticas do buraco negro de Schwarzschild deslocam a singularidade central para um raio finito, e caracteriza um cabelo universal. Em termos físicos, o que efetivamente ocorre é a singularidade ser espalhada por uma esfera bidimensional de área $4\pi l^2$. Embora se espere que l seja da ordem do comprimento de Planck, numa abordagem fenomenológica ele pode, em princípio, assumir qualquer valor positivo, como feito, por exemplo, em [147].

3.4.5 Buraco negro regular de Simpson-Visser e buraco de minhoca atravessável

Consideraremos agora uma métrica que engloba tanto um buraco negro regular como um regime de buraco de minhoca atravessável. Um buraco de minhoca é uma estrutura espaço-temporal (tipicamente semelhante a um túnel) com uma topologia não-trivial, que pode conectar duas regiões distantes do mesmo Universo ou dois Universos diferentes (ver, por exemplo, [148] para uma revisão dos buracos de minhocas astrofísicos).

Geralmente, o conteúdo de campo necessário para sustentar a geometria do buraco de minhoca requer uma violação da condição de energia nula [149, 150], seja na forma de matéria exótica ou de uma modificação da gravidade de Einstein. As configurações mais simples de buraco de minhoca apresentam duas “bocas” conectadas por uma “garganta”, mas estruturas mais complexas são possíveis.

Em [151], Simpson-Visser propôs uma extensão de um parâmetro do espaço-tempo de Schwarzschild que faz a interpolação entre este último e um buraco de minhoca atravessável, enquanto passa por uma geometria de um buraco negro regular. O espaço-tempo de Simpson-Visser é descrito pelas seguintes funções métricas:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - C(r)^2d\Omega^2, \quad (3.111)$$

onde as funções métricas $f(r)$ e $C(r)$ são dadas por

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}, \quad (3.112)$$

$$C(r) = r^2 + a^2. \quad (3.113)$$

onde o novo parâmetro deve satisfazer $a > 0$, e caracteriza um cabelo específico. Para $a = 0$, a Eq. (3.112) reduz-se ao espaço-tempo de Schwarzschild. Por outro lado, para $0 < a < 2m$, a métrica descreve o espaço-tempo de um buraco negro regular com uma garganta tipo-espaço unidirecional. Para $a = 2m$, o espaço-tempo corresponde ao de um buraco de minhoca unidirecional com uma garganta extremal nula. Finalmente, para $a > 2m$, a Eq. (3.112) descreve um buraco de minhoca atravessável com uma garganta tipo-tempo bidirecional. Notamos também que, quando $m = 0$, a equação (3.112) reduz-se à métrica do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov [152, 153]. O espaço-tempo de Simpson-Visser e as suas extensões têm sido objeto de grande atenção.

Parte II

Generalidades: Nuvem de cordas e fluido de cordas

4 Nuvem e fluido de cordas na Teoria da Relatividade Geral

A formulação de teorias baseadas em cordas parte do pressuposto de que a descrição da natureza é melhor compreendida em termos de objetos com extensão, e unidimensionais, as chamadas cordas, ao invés de objetos pontuais, as partículas. No cenário de cordas, as cordas cósmicas são conhecidas como defeitos topológicos unidimensionais previstas em teorias de campo. Estes teriam surgido como resultado de um processo de quebra espontânea de simetria devido às transições de fase ocorridas no universo primitivo.

Atualmente, sabe-se que a possível existência de cordas no universo é um fato que está em consonância com as observações cosmológicas. Dessa forma, é importante estudar a influência de nuvem de cordas como fonte de campo gravitacional em escalas astrofísica e cosmológica e, por conseguinte, analisar as soluções de buracos negros rodeados por nuvem de cordas [124].

Com base nessas ideias, na década de 1970, Patrício Letelier introduziu um modelo invariante de gauge construído a partir de nuvem de cordas e obteve uma série de soluções das equações de Einstein correspondentes a um espaço-tempo com simetria plana, cilíndrica e esférica [36]. Neste último caso, ele obteve a solução correspondente a um buraco negro estático, esfericamente simétrico, imerso numa nuvem de cordas, que nada mais é do que uma generalização do espaço-tempo de Schwarzschild, com um déficit de ângulo sólido [154].

Mais tarde, Letelier estendeu o modelo de nuvem de cordas, ao considerar a pressão exercida pelas cordas [107], o que corresponde a um cenário com fluido de cordas. Neste caso, foi obtida a solução das equações de Einstein com simetria esférica para o fluido de cordas.

É importante destacar que diversos estudos têm sido desenvolvidos no que tange a estas fontes (nuvem de cordas e fluido de cordas), no contexto da TRG [58]. Sendo assim, neste capítulo, discorreremos sobre o modelo de nuvem de cordas e fluido de cordas, dada a fundamental importância desses possíveis objetos astrofísicos na gravitação e na cosmologia.

4.1 Modelo de nuvem de cordas

O estudo das soluções das equações de Einstein considerando como fonte uma nuvem de cordas foi iniciado por Letelier [36], que apresentou as justificativas que seguem, para a

obtenção das soluções, neste cenário.

- (i) cordas relativísticas podem ser usadas para construir bons modelos para as interações;
- (ii) a possibilidade de se considerar o universo como descrito por uma coleção de objetos com extensão, e, portanto, não pontuais, ao invés de objetos pontuais (partículas).

4.1.1 Nuvem de cordas

Uma corda infinitesimalmente fina em movimento traça uma “superfície de mundo”, Σ , que pode ser descrita pela equação

$$x^\mu = x^\mu(\lambda^A), \quad A = 0, 1. \quad (4.1)$$

λ^0 e λ^1 são, respectivamente, parâmetros tipo-tempo e tipo-espaço. A métrica induzida nessa superfície, γ_{AB} , é dada por:

$$\gamma_{AB} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^B}. \quad (4.2)$$

A superfície de mundo da corda pode ser descrita por um bivector, $\Sigma^{\mu\nu}$, anti-simétrico, tal que:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^b}, \quad (4.3)$$

onde ϵ^{ab} é o símbolo de Levi-Civita bidimensional com $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$.

A ação de Nambu-Goto, que descreve a nuvem de cordas, S_{CS} , é dado por [36]:

$$S_{CS} = \int d^4x \sqrt{-g} L_{CS} = \int (-\gamma)^{1/2} \mathcal{M} d\lambda^0 d\lambda^1, \quad (4.4)$$

onde $\gamma \equiv \det \gamma_{AB}$. A Lagrangiana L_{CS} [36] é dada por:

$$L_{CS} = \mathcal{M} \sqrt{-\gamma} = \mathcal{M} \left(-\frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \right)^{1/2}, \quad (4.5)$$

sendo \mathcal{M} uma constante adimensional que caracteriza cada corda. O tensor de energia-momento associado a corda é

$$T^{\mu\nu} = 2 \frac{\partial L_{CS}}{\partial g_{\mu\nu}}, \quad (4.6)$$

que pode ser escrito na forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{\mathcal{M}}{(-\gamma)^{1/2}} \Sigma^{\mu\beta} \Sigma_{\beta}^{\nu}. \quad (4.7)$$

Pode-se verificar que o tensor de energia-momento associado a uma corda é proporcional ao bivector $\Sigma^{\mu\nu}$. Assim, podemos entendê-lo como uma “área” gerada pela superfície de mundo da corda e que, ponderada por uma densidade \mathcal{M} , relaciona-se ao conteúdo de energia-momento da configuração.

Consideraremos agora uma nuvem de cordas com superfície de mundo dado por

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\lambda^A, \xi, \eta), \quad (4.8)$$

onde ξ e η são variáveis que rotulam uma superfície de mundo particular e λ^A são parâmetros que descrevem a evolução dessa superfície de mundo particular.

Agora, em vez de uma única corda caracterizada pelo parâmetro \mathcal{M} , temos uma coleção de cordas (nuvem de cordas) caracterizada pela densidade própria, ρ , e cujo tensor de energia-momento pode ser escrito na forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{\rho}{(-\gamma)^{1/2}} \Sigma^{\mu\beta} \Sigma_{\beta}^{\nu}. \quad (4.9)$$

Pode-se verificar que para a nuvem de cordas, as seguintes quantidades são invariantes de gauge:

$$\rho(-\gamma)^{1/2}; \quad \rho \Sigma^{\mu\nu}; \quad \Sigma_{\mu\nu}/(-\gamma)^{1/2}. \quad (4.10)$$

Temos duas maneiras de caracterizar as cordas:

- (i) por sua superfície de mundo, i.é, $x^{\mu} = x^{\mu}(\lambda^A)$;
- (ii) por meio de uma superfície associada ao bivector $\Sigma^{\mu\nu}$.

Essa última caracterização é chamada de caracterização intrínseca, e é mais útil para nosso propósito. As condições para $\Sigma^{\mu\nu}$ estar numa superfície formando o bivector são [36]:

$$\Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]} = 0, \quad (4.11)$$

$$\nabla_{\mu} \Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]} = 0, \quad (4.12)$$

onde os colchetes indicam a anti-simetrização dos índices envolvidos.

A primeira condição, Eq. (4.11), nos diz que o bivector é simples, isto é, que pode ser escrito como:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{AB} X_A^\mu X_B^\nu. \quad (4.13)$$

Já a segunda condição, Eq. (4.12), afirma que dois vetores X_0 e X_1 ajustam-se para formar uma superfície,

$$X_A^\mu = \partial_A X^\mu. \quad (4.14)$$

Abaixo, seguem duas identidades que serão bastante úteis posteriormente:

$$\Sigma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Sigma_{\beta\nu} = \frac{3}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \partial_{[\alpha} \Sigma_{\beta\nu]} - \frac{1}{4} \nabla_\nu (\Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}), \quad (4.15)$$

$$\Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_{\alpha\beta} \Sigma^{\beta\nu} = \gamma \Sigma^{\nu\mu}. \quad (4.16)$$

A identidade (4.15) é válida para qualquer tensor anti-simétrico e a Eq. (4.16) é uma consequência das Eqs. (4.11), (4.2) e (4.3). A partir do tensor de energia-momento da nuvem de cordas, Eq. (4.9), e da identidade de Bianchi, temos:

$$\frac{\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \Sigma_\beta^\nu}{(-\gamma)^{1/2}} + \rho \Sigma^{\mu\beta} \nabla_\mu \left[\frac{\Sigma_\beta^\nu}{(-\gamma)^{1/2}} \right] = 0. \quad (4.17)$$

Multiplicando a Eq. (4.17) por $\Sigma_{\nu\alpha}/(-\gamma)^{1/2}$, conseguimos:

$$\frac{\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \Sigma_\beta^\nu \Sigma_{\nu\alpha}}{\gamma} = 0. \quad (4.18)$$

Para chegar a este resultado, utilizamos a Eq. (4.15) e a Eq. (4.11). Da Eq. (4.17) e (4.18), obtemos

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \Sigma_\beta^\nu = 0. \quad (4.19)$$

Utilizando a representação de $\Sigma^{\mu\nu}$ dada pela Eq. (4.3) e adaptando as coordenadas à parametrização, obtemos a “lei de conservação”

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.20)$$

Note que as Eqs. (4.20) e (4.11) implicam na Eq. (4.12). Das Eqs. (4.19) e (4.17), obtemos a equação de movimento para nuvem de cordas:

$$\Sigma^{\mu\beta}\nabla_{\mu}\left[\frac{\Sigma_{\beta}^{\nu}}{(-\gamma)^{1/2}}\right]=0. \quad (4.21)$$

Dessa forma, às equações de Einstein mais suas condições de integrabilidade para nuvem de cordas são

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\rho\frac{\Sigma_{\mu}^{\alpha}\Sigma_{\alpha\nu}}{(-\gamma)^{1/2}}. \quad (4.22)$$

4.1.2 Condições de energia

A seguir, apresentaremos as restrições que as diferentes condições de energia impõem ao bivector $\Sigma^{\mu\nu}$. As condições de energia são as seguintes [155] :

(a) **Condição fraca de energia**, compreendida como uma densidade local de energia, é dado por,

$$T^{\mu\nu}U_{\mu}U_{\nu}\geq 0, \quad (4.23)$$

onde U_{μ} é um vetor arbitrário tipo-tempo com norma maior que zero:

$$U_{\mu}U^{\mu}> 0. \quad (4.24)$$

Das Eqs. (4.9) e (4.23), encontramos a seguinte desigualdade:

$$\frac{\rho U_{\mu}\Sigma^{\mu\alpha}\Sigma_{\alpha}^{\nu}U_{\nu}}{(-\gamma)^{1/2}}\geq 0. \quad (4.25)$$

(b) **Condição dominante de energia**, está relacionada à densidade local de energia e a direção do fluxo local de energia, isto é,

$$T^{\mu\nu}U_{\mu}U_{\nu}> 0, \quad (4.26)$$

$$U_{\mu}T^{\mu\alpha}T_{\alpha}^{\nu}U_{\nu}\geq 0. \quad (4.27)$$

Da identidade (4.16), juntamente com as condições acima, obtemos o seguinte resultado:

$$\rho^2 U_{\mu}\Sigma^{\mu\alpha}\Sigma_{\alpha}^{\nu}U_{\nu}\geq 0. \quad (4.28)$$

(c) **Condição forte de energia** é expressa pela seguinte desigualdade

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)U^\mu U^\nu \geq 0. \quad (4.29)$$

Das Eqs. (4.24) e (4.9), encontramos que a Eq. (4.29) é equivalente a

$$\frac{\rho\hat{U}^\mu\Sigma_\mu^\alpha\Sigma_{\alpha\nu}\hat{U}^\nu}{(-\gamma)^{1/2}} > \rho(-\gamma)^{1/2}, \quad (4.30)$$

onde

$$\hat{U}^\mu = \frac{U^\mu}{(U^\alpha U_\alpha)^{1/2}}. \quad (4.31)$$

Note que as expressões (4.25), (4.28) e (4.30) são invariantes de gauge.

4.1.3 Buraco negro estático com nuvem de cordas

Obteremos, agora, a solução geral das equações de Einstein para uma nuvem de cordas com simetria esférica. Seja a métrica geral com simetria esférica e estática:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (4.32)$$

onde ν e λ são funções de r . A simetria do espaço-tempo em consideração determinam que a densidade ρ e o bivector $\Sigma_{\mu\nu}$ sejam funções dependentes somente da coordenada radial, r . Além disso, tal simetria restringe o bivector $\Sigma_{\mu\nu}$ a ter somente duas componentes independentes diferentes de zero, a saber, Σ^{01} e Σ^{10} .

A partir da lei da conservação, Eq. (4.20), podemos escrever que:

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\rho\Sigma^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.33)$$

Da Eq. (4.32), obtemos que:

$$g = -r^4 \sin^2\theta e^{\nu+\lambda}. \quad (4.34)$$

Substituindo a Eq. (4.34) na Eq. (4.33), após algumas simplificações, obtemos:

$$\Sigma^{01} = \frac{a}{\rho r^2} e^{-(\nu+\lambda)/2}, \quad (4.35)$$

onde a é uma constante de integração. Vamos agora determinar o valor da densidade invariante de gauge $(-\gamma)^{1/2}\rho$. Da Eq. (4.5), sabe-se que:

$$\Sigma^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu} = 2\gamma. \quad (4.36)$$

Devido à dependência radial do bivector e a simetria esférica que estamos considerando, concluímos que:

$$\gamma = \Sigma^{01}\Sigma_{01}, \quad (4.37)$$

onde

$$\Sigma_{01} = g_{00}g_{11}\Sigma^{01} = -\frac{ae^{(\nu+\lambda)/2}}{r^2\rho}. \quad (4.38)$$

Portanto, temos:

$$(-\gamma)^{1/2}\rho = \frac{a}{r^2}. \quad (4.39)$$

Concluimos assim, que a função γ é uma função que depende somente de r , $\gamma = \gamma(r)$.

4.1.3.1 Componentes do tensor de energia-momento

Para calcular as componentes do tensor energia-momento para nuvem de cordas, usaremos as Eqs. (4.9), (4.35) e (4.39). Fazendo $\mu = 0$ e $\nu = 0$, na Eq. (4.9), obtemos:

$$T^{00} = \frac{\rho\Sigma^{0\beta}}{(-\gamma)^{1/2}}g_{\beta\alpha}\Sigma^{\alpha 0}. \quad (4.40)$$

Como a única componente não-nula do bivector é $\Sigma^{01} = -\Sigma^{10}$, então, para $\alpha = \beta = 1$, obtemos:

$$T^{00} = \frac{\rho}{(-\gamma)^{1/2}}\Sigma^{01}g_{11}(-\Sigma^{01}). \quad (4.41)$$

Da Eq. (4.32), sabe-se que $g_{00} = e^\nu$ e $g_{11} = -e^\lambda$. Vale lembrar ainda que Σ^{01} é dado pela Eq. (4.35). Com essas considerações, a Eq. (4.41) resulta em

$$T^{00} = \frac{a^2 e^{-\nu}}{(-\gamma)^{1/2} \rho r^4}. \quad (4.42)$$

Mas $(-\gamma)^{1/2} \rho = a/r^2$, logo a Eq. (4.42) fica:

$$T^{00} = \frac{a e^{-\nu}}{r^2}. \quad (4.43)$$

A forma mista da componente (0,0) do tensor de energia-momento da nuvem de cordas pode ser obtida da seguinte maneira:

$$T_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu}, \quad (4.44)$$

$$T_0{}^0 = g_{00} T^{00} = e^\nu \frac{a e^{-\nu}}{r^2},$$

$$T_0{}^0 = \frac{a}{r^2}. \quad (4.45)$$

De forma análoga, obtemos:

$$T^{11} = -\frac{a e^{-\lambda}}{r}, \quad T_1{}^1 = \frac{a}{r^2}, \quad (4.46)$$

$$T^{22} = T^{33} = 0, \quad T_2{}^2 = T_3{}^3 = 0. \quad (4.47)$$

Sabe-se que as únicas componentes não-nulas do tensor de Einstein para o caso de um objeto massivo, estático e esfericamente simétrico, Eq. (4.32), são as componentes da diagonal principal, dadas por:

$$G_0^0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (4.48)$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (4.49)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right). \quad (4.50)$$

4.1.3.2 Solução de Letelier para a nuvem de cordas

Podemos escrever as equações de Einstein como:

$$G_{\mu}^{\nu} = \kappa T_{\mu}^{\nu}. \quad (4.51)$$

Considerando a constante de acoplamento $\kappa = 1$ e recorrendo às equações (4.45)-(4.50), obtemos as seguintes componentes não-nulas das equações de Einstein com nuvem de cordas:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{a}{r^2}, \quad (4.52)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{a}{r^2}, \quad (4.53)$$

$$\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) = 0. \quad (4.54)$$

Subtraindo as Eqs. (4.52) e (4.53), obtemos que:

$$\lambda = -\nu \Rightarrow \lambda' = -\nu'. \quad (4.55)$$

Somando as Eqs. (4.52) e (4.53) e considerando a Eq. (4.55), após algumas simplificações, encontramos:

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda'}{r} - e^{-\lambda} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{a}{r^2}. \quad (4.56)$$

Sem perda de generalidade, podemos escrever $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ em termos da função $f = f(r)$ através da seguinte expressão:

$$\nu = -\lambda = \ln(1 + f(r)), \quad (4.57)$$

cujas derivadas primeira e segunda são dadas, respectivamente, por:

$$\nu' = -\lambda' = \frac{f'}{1 + f}, \quad (4.58)$$

$$\nu'' = -\lambda'' = \frac{f''(1 + f) - f'^2}{(1 + f)^2}. \quad (4.59)$$

Substituindo as Eqs. (4.55), (4.57)-(4.58) na Eq. (4.56), obtemos, após algumas simplificações:

$$-\frac{1}{r^2}(rf' + f) = \frac{a}{r^2}. \quad (4.60)$$

Ao substituir as Eqs. (4.55), (4.58)-(4.59) na Eq. (4.54), encontramos:

$$f'' + \frac{2}{r}f' = 0. \quad (4.61)$$

Somando as Eqs. (4.60) e (4.61) e multiplicando o resultado por r^2 , obtemos a seguinte equação diferencial:

$$r^2 f'' + r f' - f - a = 0. \quad (4.62)$$

A solução geral da equação diferencial anterior é dado por:

$$f(r) = -a + \frac{C_1}{r} + rC_2, \quad (4.63)$$

Substituindo a Eq. (4.63) na Eq. (4.57) e adotando as constantes arbitrárias $C_1 = -2m$ e $C_2 = 0$, encontramos:

$$\nu = -\lambda = \ln \left[1 - a - \frac{2m}{r} \right]. \quad (4.64)$$

Dessa forma, substituindo a Eq. (4.64) na Eq. (4.32), obtemos finalmente a solução do buraco negro de Schwarzschild com nuvem de cordas, também conhecida como solução de Letelier:

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2m}{r} \right) dt^2 - \left(1 - a - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.65)$$

Essa métrica descreve a geometria do espaço-tempo que denotaremos de espaço-tempo de Letelier [36]. Ela representa o espaço-tempo associado a uma partícula de massa m , centrada na origem de um sistema de coordenadas e rodeada por cordas radiais, tendo, portanto, a nuvem de cordas simetria esférica.

É imediato verificar que, quando $a = 0$, recobramos o espaço-tempo de Schwarzschild (2.30). Quando $a \neq 0$, a solução é matematicamente análoga à de um buraco negro com um déficit de ângulo sólido [154].

Utilizando este resultado, podemos verificar que o raio do horizonte de eventos no espaço-tempo de Letelier será calculado por

$$r_h = \frac{2m}{1-a}, \quad a \neq 1. \quad (4.66)$$

Note que se $a \rightarrow 0$, o raio de Schwarzschild é reobtido. Por outro lado, se $a \rightarrow 1$, o raio do horizonte de eventos tende ao infinito. Se $a < 1$, a nuvem de corda aumenta o raio de Schwarzschild da partícula por uma quantidade de $(1 - a)^{-1}$, ou seja, a nuvem de cordas alarga o horizonte de eventos do buraco negro por um fator de $(1 - a)^{-1}$, quando comparamos à solução de Schwarzschild. Se $a > 1$, a Eq. (4.65) representa um espaço-tempo homogêneo.

Note também que se $m = 0$, então $r_h = 0$. O que significa dizer que a nuvem de corda sozinha não tem horizonte de eventos. Ela tem somente uma singularidade em $r = 0$. Isto pode ser visto a partir do fato de que

$$R = 2(-\gamma)^{1/2}\rho = \frac{2a}{r^2}, \quad (4.67)$$

$$K = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{4a^2}{r^4} + \frac{16am}{r^5} + \frac{48m^2}{r^6}. \quad (4.68)$$

Se negligenciarmos a nuvem de cordas $a = 0$, obtemos o escalar de Kretschmann dado na Eq. (2.32). Agora, calculemos o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty, \quad (4.69)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (4.70)$$

Observa-se que, se $m = 0$ e $a = 1$, continuamos a ter uma métrica bem comportada, como indicam (4.67) e (4.68). Este fato também pode ser visto fazendo uma simples mudança de coordenadas em (4.65).

4.2 Modelo de fluido de cordas

Nesta seção, apresentaremos uma generalização do modelo de nuvem de cordas por meio da introdução da pressão. Para isto, será introduzido o tensor energia-momento associado ao fluido de cordas, que contém o termo de pressão ou tensão [107].

4.2.1 Fluido de cordas

O tensor de energia-momento para a nuvem de partículas (fluido incoerente) é caracterizado apenas por uma parte cinética, isto é,

$$T^{\mu\nu} = K^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu, \quad (4.71)$$

onde u^μ é a velocidade de fluxo normalizada ($u^\mu u_\mu = 1$) e ρ é a densidade de energia de repouso da nuvem de poeira.

Usando a Eq. (4.71), podemos verificar que u^μ é um autovetor de $K^{\mu\nu}$, com autovalor ρ . Matematicamente, este fato é expresso através da seguinte equação

$$K^{\mu\nu}u_\nu = \rho u^\mu, \quad (4.72)$$

onde usamos a condição de normalização. Podemos dizer, então, que ρu^μ é a densidade de momento.

Suponhamos, agora, que a nuvem de partículas tem pressão. Esta nuvem de partículas nada mais é que um fluido perfeito. O tensor energia-momento para nuvem pode ser escrito, portanto, da seguinte forma [107, 156]

$$T^{\mu\nu} = K^{\mu\nu} + S^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + S^{\mu\nu}, \quad (4.73)$$

onde $S^{\mu\nu}$ é o tensor de stress. Para manter a interpretação de u^μ como sendo a velocidade de fluxo da nuvem de partículas, é necessário que u^μ seja autovetor de $T^{\mu\nu}$ com autovalor ρ . Esta condição é satisfeita desde que

$$S^{\mu\nu}u_\nu = 0. \quad (4.74)$$

O tensor mais simples que satisfaz a Eq. (4.74) é [155]

$$S^{\mu\nu} = -p h^{\mu\nu}, \quad (4.75)$$

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu, \quad (4.76)$$

ou seja, um tensor proporcional ao tensor de projeção $h^{\mu\nu}$, que projeta qualquer vetor numa direção perpendicular a u^μ . A pressão $p \geq 0$ é um fator de proporcionalidade entre o tensor de stress e o tensor de projeção. O sinal de menos nos diz que temos pressão em vez de tensão [155]. O tensor de energia-momento (4.73) com $S^{\mu\nu}$ dado por (4.75) é o tensor energia-momento habitual que descreve um fluido perfeito [156].

O equivalente a Eq. (4.71) para cordas é [36]

$$K^{\mu\nu} = \frac{\rho \sqrt{-\gamma} \Sigma^{\mu\lambda} \Sigma_\lambda^\nu}{(-\gamma)}, \quad (4.77)$$

onde $\Sigma^{\mu\nu}$ é um bivetor que forma uma superfície a medida que evolui e satisfaz as seguintes propriedades:

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\Sigma^{\nu\mu}, \quad (4.78)$$

$$\Sigma^{\mu[\alpha}\Sigma^{\beta\gamma]} = 0, \quad (4.79)$$

$$\nabla_{\mu}\Sigma^{\mu[\alpha}\Sigma^{\beta\gamma]} = 0, \quad (4.80)$$

cuja densidade da corda descrita covariantemente é dada por $\rho\sqrt{-\gamma}$, sendo γ escrita em termos do bivector $\Sigma^{\mu\nu}$, da seguinte forma:

$$\gamma \equiv \frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}. \quad (4.81)$$

Duas identidades bastante úteis que já foram mencionadas na seção anterior são:

$$\Sigma^{\mu}_{\alpha}\Sigma^{\alpha\beta}\Sigma_{\beta}^{\nu} = -\gamma\Sigma^{\mu\nu}, \quad (4.82)$$

$$\Sigma^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\Sigma_{\beta\nu} = \frac{3}{2}\Sigma^{\alpha\beta}\partial_{[\alpha}\Sigma_{\beta\nu]} - \frac{1}{4}\partial_{\nu}(\Sigma^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}). \quad (4.83)$$

É possível notar que a Eq. (4.77) e a Eq. (4.82), leva-nos a

$$K^{\mu\nu}\Sigma_{\nu}^{\lambda} = \rho\sqrt{-\gamma}\Sigma^{\mu\lambda}, \quad (4.84)$$

ou seja, Σ_{ν}^{λ} é um autotensor de (4.77) de autovalor $\rho\sqrt{-\gamma}$. O análogo da Eq. (4.73) para cordas é:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\rho\sqrt{-\gamma}\Sigma^{\mu\alpha}\Sigma_{\alpha}^{\nu}}{(-\gamma)} + S^{\mu\nu}, \quad (4.85)$$

onde $S^{\mu\nu}$ é o tensor de stress. Para que o bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ seja um autotensor de $T^{\mu\nu}$, dado pela Eq. (4.85), com autovalor $\rho\sqrt{-\gamma}$, é necessário ser satisfeito a seguinte condição:

$$S^{\mu\nu}\Sigma_{\nu}^{\lambda} = 0. \quad (4.86)$$

O tensor mais simples que satisfaz esta condição, Eq. (4.86), é um tensor proporcional ao tensor projeção $H^{\mu\nu}$. Tal tensor projeta qualquer direção no espaço que é perpendicular à superfície gerada por $\Sigma^{\mu\nu}$. Portanto,

$$S^{\mu\nu} = -qH^{\mu\nu}, \quad (4.87)$$

$$H^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \frac{\Sigma^{\alpha\nu}\Sigma_{\alpha}^{\mu}}{(-\gamma)}. \quad (4.88)$$

Neste ponto, não faremos nenhuma restrição ao fator de proporcionalidade q porque, quando se trata de cordas, não é claro que devemos preferir a pressão à tensão. Assim, o tensor de energia-momento para um fluido “perfeito” de cordas é

$$T^{\mu\nu} = \frac{(q + \sqrt{-\gamma}\rho)\Sigma^{\mu\alpha}\Sigma_{\alpha}^{\nu}}{(-\gamma)} - qg^{\mu\nu}. \quad (4.89)$$

A lei de conservação para o tensor energia-momento dado pela Eq. (4.89) é expressa da seguinte forma

$$\nabla_{\alpha}T^{\alpha\mu} = 0. \quad (4.90)$$

Usando as Eqs. (4.78)-(4.83) e (4.88)-(4.90), é possível obter os seguintes resultados:

$$(\rho\sqrt{\gamma} + q) \left(\frac{\Sigma^{\alpha\beta}}{\sqrt{-\gamma}} \right) \nabla_{\alpha} \left(\frac{\Sigma_{\beta\mu}}{\sqrt{-\gamma}} \right) = H^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu} q, \quad (4.91)$$

$$\nabla_{\alpha}(\rho\Sigma^{\alpha\nu}) + q\nabla_{\alpha} \left(\frac{\Sigma^{\alpha\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \right) = 0. \quad (4.92)$$

Nota-se que as Eqs. (4.91) e (4.92) são equações manifestamente invariantes de gauge. Observa-se também a semelhança destas equações com as equações correspondentes para fluidos perfeitos [156]. As Eqs. (4.91) e (4.92) também podem ser reescritas, respectivamente, do seguinte modo

$$\frac{\Sigma^{\alpha\beta}}{\sqrt{-\gamma}} \partial_{[\alpha}(\Sigma_{\beta\mu]}\sqrt{-\gamma}) = \frac{2}{3} H^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu} q, \quad (4.93)$$

$$\partial_{\alpha}(\sqrt{-g}\rho\Sigma^{\alpha\nu}) + q\partial_{\alpha} \left(\frac{\sqrt{-g}\Sigma^{\alpha\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \right) = 0. \quad (4.94)$$

4.2.2 Condições de energia

As restrições que as diferentes condições de energia impõe ao bivector $\Sigma^{\mu\nu}$, a densidade ρ e a grandeza q serão analisadas a seguir. As condições de energia mais naturais [107] são:

(a) **Condição fraca de energia**, compreendida como uma densidade local de energia, é dado por,

$$T^{\mu\nu}U_{\mu}U_{\nu} \geq 0, \quad (4.95)$$

onde U_μ é um vetor arbitrário tipo-tempo com norma maior que zero:

$$U_\mu U^\mu > 0. \quad (4.96)$$

Da Eq. (4.89) e (4.95), encontramos a seguinte desigualdade:

$$\frac{(\rho\sqrt{-\gamma} + q)\hat{U}^\mu \Sigma_\mu^\alpha \Sigma_{\alpha\nu} \hat{U}^\nu}{(-\gamma)} \geq q, \quad (4.97)$$

onde

$$\hat{U}^\mu \equiv \frac{U^\mu}{(U^\alpha U_\alpha)^{1/2}}. \quad (4.98)$$

(b) **Condição dominante de energia**, está relacionada à densidade local de energia e a direção do fluxo local de energia, isto é,

$$T^{\mu\nu} U_\mu U_\nu > 0, \quad (4.99)$$

$$U_\mu T^{\mu\alpha} T_\alpha{}^\nu U_\nu \geq 0. \quad (4.100)$$

Das Eqs. (4.89) e (4.82), juntamente com as condições acima, obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{(\rho\sqrt{-\gamma} + q)\hat{U}^\mu \Sigma_\mu^\alpha \Sigma_{\alpha\nu} \hat{U}^\nu}{(-\gamma)} > q, \quad (4.101)$$

$$\frac{[(\rho\sqrt{-\gamma})^2 - q^2]\hat{U}^\mu \Sigma_\mu^\alpha \Sigma_{\alpha\nu} \hat{U}^\nu}{(-\gamma)} + q^2 \geq 0. \quad (4.102)$$

(c) **Condição forte de energia** é expressa pela seguinte desigualdade

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) U^\mu U^\nu \geq 0. \quad (4.103)$$

Da Eq. (4.89) e (4.81), encontramos que (4.103) é equivalente a

$$\frac{(\rho\sqrt{-\gamma} + q)\hat{U}^\mu \Sigma_\mu^\alpha \Sigma_{\alpha\nu} \hat{U}^\nu}{(-\gamma)} \geq \rho\sqrt{-\gamma}. \quad (4.104)$$

Note que as expressões (4.97), (4.101)-(4.102) e (4.104) são invariantes de gauge e não excluem a possibilidade de q ser negativo (tensão). Dessa forma, a grandeza q pode representar, em princípio, tanto a pressão $q > 0$, quanto a tensão $q < 0$.

4.2.3 Buraco negro estático com fluido de cordas

A seguir, apresentaremos a solução das equações de Einstein obtidas por Letelier [107], que descreve o espaço-tempo gerado por um fluido de cordas esfericamente simétrico. As equações de Einstein para o tensor de energia-momento dado pela Eq. (4.89), é escrita na seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = - \left[\frac{(q + \rho\sqrt{-\gamma})\Sigma_{\mu\alpha}\Sigma^{\alpha}_{\nu}}{(-\gamma)} - qg_{\mu\nu} \right], \quad (4.105)$$

onde estamos considerando a constante de acoplamento κ igual a 1. Seja a métrica geral de simetria esférica e estática:

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (4.106)$$

onde ν e λ são funções de r . A simetria do espaço-tempo em consideração restringem a densidade ρ , a pressão q e o bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ como funções dependentes somente de r . As únicas componentes não-nulas do bivector são $\Sigma^{01} = -\Sigma^{10}$ e $\Sigma^{23} = -\Sigma^{32}$. A condição $\gamma < 0$ e a Eq. (4.79), nos dizem que, somente Σ^{01} deve ser considerado.

A Eq. (4.93) é satisfeita identicamente e a Eq. (4.94) reduz-se a:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \rho \Sigma^{01} \right) + q \frac{d}{dr} (r^2) = 0, \quad (4.107)$$

onde $\sqrt{-\gamma} = \Sigma^{01} e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}$ e o determinante da métrica (4.106) é $g = -r^4 \sin^2\theta e^{\nu+\lambda}$. Da Eq. (4.107), conseguimos:

$$\rho r^2 e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \Sigma^{01} = a - \int qd(r^2), \quad (4.108)$$

onde a é uma constante de integração. Podemos ainda reescrever a Eq. (4.108) da seguinte forma:

$$\rho\sqrt{-\gamma} = \frac{1}{r^2} \left[a - \int qd(r^2) \right] \geq 0. \quad (4.109)$$

4.2.3.1 Componentes do tensor de energia-momento

Considerando as Eqs. (4.89) e (4.108), é possível determinar as componentes não-nulas do tensor de energia-momento para o fluido de cordas. A componente T_0^0 será:

$$T_{\nu}^{\mu} = \frac{(q + \sqrt{-\gamma}\rho)\Sigma^{\mu\alpha}\Sigma_{\alpha\nu}}{(-\gamma)} - qg_{\nu}^{\mu},$$

$$T_0^0 = \frac{(q + \sqrt{-\gamma}\rho)\Sigma^{0\alpha}\Sigma_{\alpha 0}}{(-\gamma)} - qg_0^0. \quad (4.110)$$

Na Eq. (4.110), a soma em α resulta em $\Sigma^{01}\Sigma_{10}$, e da Eq. (4.81), sabe-se que $-\gamma = \Sigma^{01}\Sigma_{10}$. Com essas considerações, a Eq. (4.110) reduz-se a:

$$T_0^0 = \rho\sqrt{-\gamma}. \quad (4.111)$$

Substituindo a Eq. (4.109) na Eq. (4.111), obtemos a componente (0,0) do tensor de energia-momento para o fluido de cordas:

$$T_0^0 = \frac{1}{r^2} \left[a - \int qd(r^2) \right]. \quad (4.112)$$

De maneira análoga, é possível obter:

$$T_1^1 = \frac{1}{r^2} \left[a - \int qd(r^2) \right], \quad (4.113)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -q. \quad (4.114)$$

4.2.3.2 Solução de Letelier para o fluido de cordas

Podemos escrever as equações de Einstein como:

$$G_\mu^\nu = \kappa T_\mu^\nu. \quad (4.115)$$

Considerando a constante de acoplamento $\kappa = 1$ e recorrendo às equações (4.112)-(4.114), obtemos as seguintes componentes não-nulas das equações de Einstein com fluido de cordas:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} \left[a - \int qd(r^2) \right], \quad (4.116)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} \left[a - \int qd(r^2) \right], \quad (4.117)$$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) = -q. \quad (4.118)$$

Subtraindo as Eqs. (4.116) e (4.117), obtemos que:

$$\lambda = -\nu \Rightarrow \lambda' = -\nu'. \quad (4.119)$$

Assim, considerando a Eq. (4.119), as Eqs. (4.116) e (4.118) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{d}{dr} (e^{-\lambda} r) = 1 - a + \int qd(r^2), \quad (4.120)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} (e^{-\lambda} r) = 2rq. \quad (4.121)$$

A Eq. (4.121) decorre da Eq. (4.120), então podemos resolver apenas esta última equação cuja solução geral é:

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - a - \frac{2m}{r} + \int dr \int qd(r^2), \quad (4.122)$$

onde m é uma constante de integração. Dessa forma, substituindo a Eq. (4.122) na Eq. (4.106), obtemos a solução do buraco negro de Letelier com fluido de cordas.

$$\begin{aligned} ds^2 = & + \left(1 - a - \frac{2m}{r} + \int dr \int qd(r^2) \right) dt^2 \\ & - \left(1 - a - \frac{2m}{r} + \int dr \int qd(r^2) \right)^{-1} dr^2 \\ & - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Essa métrica descreve a geometria do espaço-tempo que denotaremos de espaço-tempo de Letelier com fluido de cordas [107]. Ela representa o espaço-tempo associado a uma partícula de massa m centrada na origem de um sistema de coordenadas e rodeada por um fluido de cordas com simetria esférica, no qual as cordas estão orientadas radialmente, possuem uma densidade ρ e a pressão (ou tensão) q diferente de zero.

É imediato verificar que, quando $q = 0$, recobramos o espaço-tempo de Letelier com nuvem de cordas (4.65) [36].

Parte III

Buracos Negros regulares na Teoria da
Relatividade Geral com nuvem de cordas e
fluido de cordas

5 Buraco negro de Bardeen com nuvem de cordas e fluido de cordas

A partir do resultado de Sakharov, James Bardeen [7] construiu a primeira métrica de buraco negro sem singularidade, a qual é esfericamente simétrica e difere da solução de Schwarzschild [2] por ter uma massa $M(r)$, que depende da coordenada radial. O buraco negro de Bardeen foi o primeiro exemplo de um buraco negro sem uma singularidade. Décadas após a sua publicação, a métrica de Bardeen continua a ser investigada [20, 24, 30, 44, 40, 157, 57]. Como visto anteriormente no capítulo 3, em [103] mostra-se que o buraco negro de Bardeen tem uma origem, ou seja, pode ser interpretado como uma solução exata das equações do campo gravitacional.

Uma vez que a métrica de Bardeen com nuvem de cordas já foi obtida por pesquisadores da universidade do Pará [44, 40], assim como já existe na literatura estudos acerca da métrica de Bardeen com quintessência e constante cosmológica [57, 24], nos limitaremos, nesse capítulo, a generalizar a métrica de Bardeen para múltiplas fontes, além de obtermos a solução de Bardeen-AdS com um fluido de cordas.

5.1 BN carregado de Bardeen-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas

Nesta seção, obteremos a métrica estática carregada de Bardeen-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas, resolvendo as equações de campo da relatividade geral. Faremos também uma análise do escalar de Kretschmann para a solução obtida, assim como para várias outras soluções particulares. Discutiremos as condições de energia associado a solução e as geodésicas do buraco negro.

5.1.1 Solução geral

A ação de Einstein-Hilbert na relatividade geral é a ação que produz as equações de campo de Einstein no vácuo por meio de um princípio variacional. Esta ação está essencialmente relacionada com a curvatura, descrevendo a geometria do espaço, que incluindo a constante cosmológica é dada por

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda), \quad (5.1)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi Gc^{-4}$, $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante do tensor métrico, Λ é a constante

cosmológica e $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura de Ricci, dado pela contração do tensor de Ricci.

As equações de Einstein com fontes de matéria são obtidas quando se adiciona uma Lagrangiana de matéria ao funcional S . Assim, para o modelo que descreveremos nesta seção, o conteúdo material pode ser obtido pela ação geral:

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} L(F) + \int d^4x \sqrt{-g} L_E + \int d^4x \sqrt{-g} L_{CS}. \quad (5.2)$$

A lagrangiana da teoria eletromagnética não-linear acoplada ao fluido quintessencial $L(F)$ [103, 57, 79] é descrita por,

$$L(F) = \frac{24\sqrt{2}mq^2}{\kappa^2 \left(\sqrt{\frac{2q^2}{F}} + 2q^2 \right)^{5/2}} - \frac{3\omega_q \alpha \left(\frac{2F}{q^2} \right)^{\frac{3(\omega_q+1)}{4}}}{\kappa^2}. \quad (5.3)$$

A Lagrangiana é uma função não-linear do escalar eletromagnético $F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}/4$, onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell-Faraday. Para um espaço-tempo esfericamente simétrico que está apenas carregado magneticamente, a única componente não-nula de $F_{\mu\nu}$ é [103, 16, 129, 130]

$$F_{23} = q \sin\theta, \quad (5.4)$$

e o escalar F é

$$F = \frac{q^2}{2r^4}, \quad (5.5)$$

onde q é a carga magnética.

A lagrangiana do campo eletromagnético L_E é dado por [108]:

$$L_E = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (5.6)$$

cujas componentes não-nulas do tensor de Maxwell para um objeto massivo, estático, esfericamente simétrico e carregado são:

$$F_{01} = F_{10} = -F^{01} = E_r = \frac{Q}{r^2}. \quad (5.7)$$

A ação de Nambu-Goto é usada para descrever objetos tipo-corda, dado por [36]

$$S_{CS} = \int d^4x \sqrt{-g} L_{CS} = \int (-\gamma)^{1/2} \mathcal{M} d\lambda^0 d\lambda^1. \quad (5.8)$$

Para nuvem de cordas, temos a seguinte Lagrangiana L_{CS} [36]:

$$L_{CS} = \mathcal{M} \sqrt{-\gamma} = \mathcal{M} \left(-\frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \right)^{1/2}, \quad (5.9)$$

onde \mathcal{M} é uma constante adimensional que caracteriza cada corda e γ é o determinante de γ_{AB} , o qual é uma métrica induzida na subvariedade dado por:

$$\gamma_{AB} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^B}, \quad (5.10)$$

onde $\Sigma^{\mu\nu}$ é um bivetor escrito como

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{AB} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^B}, \quad (5.11)$$

com ϵ^{AB} sendo o símbolo de Levi-Civita, $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$. Devido à simetria do espaço-tempo, a única componente não-nula do bivetor é $\Sigma^{01} = a/\rho r^2$ e ela depende exclusivamente da coordenada radial. É importante notar que a é uma constante de integração relacionada a cordas, sendo limitada ao intervalo $0 < a < 1$.

Portanto, a ação total que descreve a dinâmica do buraco negro carregado de Bardeen-Kiselev-(anti-) de Sitter com nuvem de cordas é dado por:

$$\begin{aligned} S &= S_{EH} + S_m \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} L(F) \\ &\quad + \int d^4x \sqrt{-g} L_E + \int d^4x \sqrt{-g} L_{CS}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Variando a ação (5.12) com relação à métrica, encontramos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 (T_{\mu\nu}^{BK} + T_{\mu\nu}^E + T_{\mu\nu}^{SC}), \quad (5.13)$$

onde o tensor de energia-momento de Bardeen-Kiselev ($T_{\mu\nu}^{BK}$), o tensor de energia-momento do campo eletromagnético ($T_{\mu\nu}^E$) e o tensor de energia-momento para nuvem de cordas ($T_{\mu\nu}^{CS}$) são dados, respectivamente, por [44, 108, 36]:

$$T_{\mu\nu}^{BK} = g_{\mu\nu}L(F) - \frac{\partial L}{\partial F}F_{\mu}^{\alpha}F_{\nu\alpha}, \quad (5.14)$$

$$T_{\mu\nu}^E = \frac{1}{\kappa^2} \left(-2g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right), \quad (5.15)$$

$$T_{\mu\nu}^{CS} = \frac{\rho\Sigma_{\mu}^{\beta}\Sigma_{\beta\nu}}{\kappa^2(-\gamma)^{1/2}}. \quad (5.16)$$

Para um espaço-tempo esfericamente simétrico, temos o seguinte ansatz:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (5.17)$$

Usando a expressão do elemento de linha dado pela Eq. (5.17), podemos especificar matricialmente todos os elementos do tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

As únicas componentes não-nulas do tensor de Ricci para o caso de um objeto massivo, estático e esfericamente simétrico, são as componentes da diagonal principal, dado por:

$$R_{00} = \frac{f(r)f''(r)}{2} + \frac{f(r)f'(r)}{r}, \quad (5.19)$$

$$R_{11} = -\frac{f''(r)}{2f} - \frac{f'(r)}{rf(r)}, \quad (5.20)$$

$$R_{22} = 1 - f(r) - rf'(r), \quad (5.21)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22}. \quad (5.22)$$

Para calcular as componentes do tensor de Einstein usaremos a seguinte equação:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (5.23)$$

Inicialmente, determinaremos o escalar de curvatura:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}. \quad (5.24)$$

Substituindo as Eqs. (5.18), (5.19)-(5.22) na Eq. (5.24), após algumas simplificações, obtemos:

$$R = f''(r) + \frac{4f'(r)}{r} + \frac{2f(r)}{r^2} - \frac{2}{r^2}. \quad (5.25)$$

Assim, a componente G_{00} do tensor de Einstein pode ser obtida fazendo $\mu = 0$ e $\nu = 0$ na Eq. (5.23):

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R. \quad (5.26)$$

Substituindo as Eqs. (5.18), (5.19) e (5.25) na Eq. (5.26), obtemos:

$$G_{00} = -\frac{f(r)f'(r)}{r} - \frac{f(r)^2}{r^2} + \frac{f(r)}{r^2}. \quad (5.27)$$

Analogamente, é possível calcular as demais componentes não-nulas do tensor de Einstein:

$$G_{11} = \frac{f'(r)}{rf(r)} - \frac{1}{r^2f(r)} + \frac{1}{r^2}, \quad (5.28)$$

$$G_{22} = \frac{1}{2}r^2f''(r) + rf'(r). \quad (5.29)$$

As componentes (0, 0) e (2, 2) do tensor de energia-momento de Bardeen-Kiselev ($T_{\mu\nu}^{BK}$), do tensor de energia-momento do campo eletromagnético ($T_{\mu\nu}^E$) e do tensor de energia-momento da nuvem de cordas ($T_{\mu\nu}^{CS}$) são dadas, respectivamente, por:

$$T_{00}^{BK} = \frac{f(r)}{\kappa^2} \left(\frac{6mq^2}{(r^2 + q^2)^{5/2}} - 3\omega_q \alpha r^{r-3\omega_q-3} \right). \quad (5.30)$$

$$T_{22}^{BK} = \frac{1}{\kappa^2} \left(-\frac{3mq^2r^2(2q^2 - 3r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}} - \frac{3\alpha\omega_q(3\omega_q + 1)r^{r-3\omega_q-1}}{2} \right). \quad (5.31)$$

$$T_{00}^E = \frac{f(r)}{\kappa^2} \frac{Q^2}{r^4}, \quad T_{22}^E = \frac{1}{\kappa^2} \frac{Q^2}{r^2}. \quad (5.32)$$

$$T_{00}^{CS} = \frac{f(r)}{\kappa^2} \frac{a}{r^2}, \quad T_{22}^{CS} = 0. \quad (5.33)$$

Substituindo as Eqs. (5.27)-(5.33) na Eq. (5.13), encontramos as seguintes equações diferenciais

$$-\frac{a}{r^2} - \frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \Lambda - \frac{6mq^2}{(q^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{Q^2}{r^4} + 3\alpha\omega_q r^{-3(\omega_q+1)} = 0, \quad (5.34)$$

$$\frac{1}{2}r^2 f''(r) + r f'(r) + \frac{3mq^2 r^2 (2q^2 - 3r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}} - \frac{Q^2}{r^2} + \Lambda r^2 + \frac{3}{2}\alpha\omega_q(3\omega_q + 1)r^{-3\omega_q-1} = 0. \quad (5.35)$$

Multiplicando a Eq. (5.34) por r^2 e a Eq. (5.35) por 2, somando os resultados, conseguimos:

$$\begin{aligned} & 1 - a - f(r) + r f'(r) + r^2 f''(r) \\ & + \frac{6mq^2 r^2 (2q^2 - 3r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}} - \frac{6mq^2 r^2}{(q^2 + r^2)^{5/2}} \\ & - \frac{3Q^2}{r^2} + 3\alpha\omega_q(3\omega_q + 2)r^{-3\omega_q-1} + \Lambda r^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Resolvendo a equação diferencial acima, temos:

$$f(r) = 1 - a - \frac{2mr^2}{(q^2 + r^2)^{3/2}} - \alpha r^{-3\omega_q-1} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{C_1}{r} + C_2 r, \quad (5.37)$$

onde podemos considerar, por conveniência, $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$. Assim, simplificando e substituindo a Eq. (5.37) na Eq. (5.17), finalmente obtemos a solução do buraco negro carregado de Bardeen-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas:

$$\begin{aligned} ds^2 = & + \left(1 - a - \frac{2mr^2}{(q^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2 \\ & - \left(1 - a - \frac{2mr^2}{(q^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-1} dr^2 \\ & - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Para o limite de $a \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ e $Q \rightarrow 0$, encontramos a solução de Bardeen-(anti-)de Sitter e para $q \rightarrow 0$, $a \rightarrow 0$ e $Q \rightarrow 0$, encontramos a solução de Kiselev-(anti-) de Sitter. Nas sessões seguintes consideraremos a Eq. (5.38) com $q = g$.

5.1.2 Análise do escalar de Kretschmann

Se queremos verificar a existência de singularidades nesta métrica, precisamos calcular o escalar de Kretschmann. Assim, para a métrica dada pela Eq. (5.38), o escalar de Kretschmann é

$$\begin{aligned}
K &= R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&= +\frac{4a^2}{r^4} + \frac{16am}{r^2(g^2+r^2)^{3/2}} + 8\alpha r^{-3\omega_q-5} \\
&+ \frac{12m^2(8g^8-4g^6r^2+47g^4r^4-12g^2r^6+4r^8)}{(g^2+r^2)^7} \\
&+ 4\alpha\Lambda\omega_q(3\omega_q-1)r^{-3(\omega_q+1)} + \frac{8\Lambda^2}{3} + \frac{8a\Lambda}{3r^2} \\
&+ \frac{24mQ^2(11g^2-4r^2)}{r^2(g^2+r^2)^{7/2}} + \frac{8\Lambda mg^2(4g^2-r^2)}{(g^2+r^2)^{7/2}} \\
&+ 3\alpha^2(27\omega_q^4+54\omega_q^3+51\omega_q^2+20\omega_q+4)r^{-6(\omega_q+1)} \\
&- 12\alpha Q^2(9\omega_q^2+13\omega_q+4)r^{-3\omega_q-7} + \frac{56Q^4}{r^8} \\
&+ \frac{12\alpha mr^{-3(\omega_q+1)}[2g^4\omega_q(3\omega_q-1)]}{(g^2+r^2)^{7/2}} - \frac{8aQ^2}{r^6} \\
&+ \frac{12\alpha mr^{-3(\omega_q+1)}[-g^2r^2(33\omega_q^2+37\omega_q+6)]}{(g^2+r^2)^{7/2}} \\
&+ \frac{12\alpha mr^{-3(\omega_q+1)}[2r^4(3\omega_q^2+5\omega_q+2)]}{(g^2+r^2)^{7/2}}.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Agora determinaremos o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

Para $-1 < \omega_q < -1/3$ (quintessencia), obtemos os seguintes limites:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty. \tag{5.40}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \tag{5.41}$$

Para $\omega_q = -4/3$ (phantom), obtemos os seguintes limites:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty. \tag{5.42}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \infty. \tag{5.43}$$

Assim, a solução geral tem uma singularidade na origem com uma curvatura regular quando $r \rightarrow \infty$ e $-1 < \omega_q < -1/3$ (quintessencia). Contudo, para $r \rightarrow \infty$ e $\omega_q = -4/3$ (phantom), a solução não é regular, como pode ser visto na Fig. 26.

Espaço-tempo de Bardeen

Fazendo $\alpha = 0$, $\Lambda = 0$, $Q = 0$ e $a = 0$ na Eq. (5.38), obtemos o espaço-tempo de Bardeen dado por:

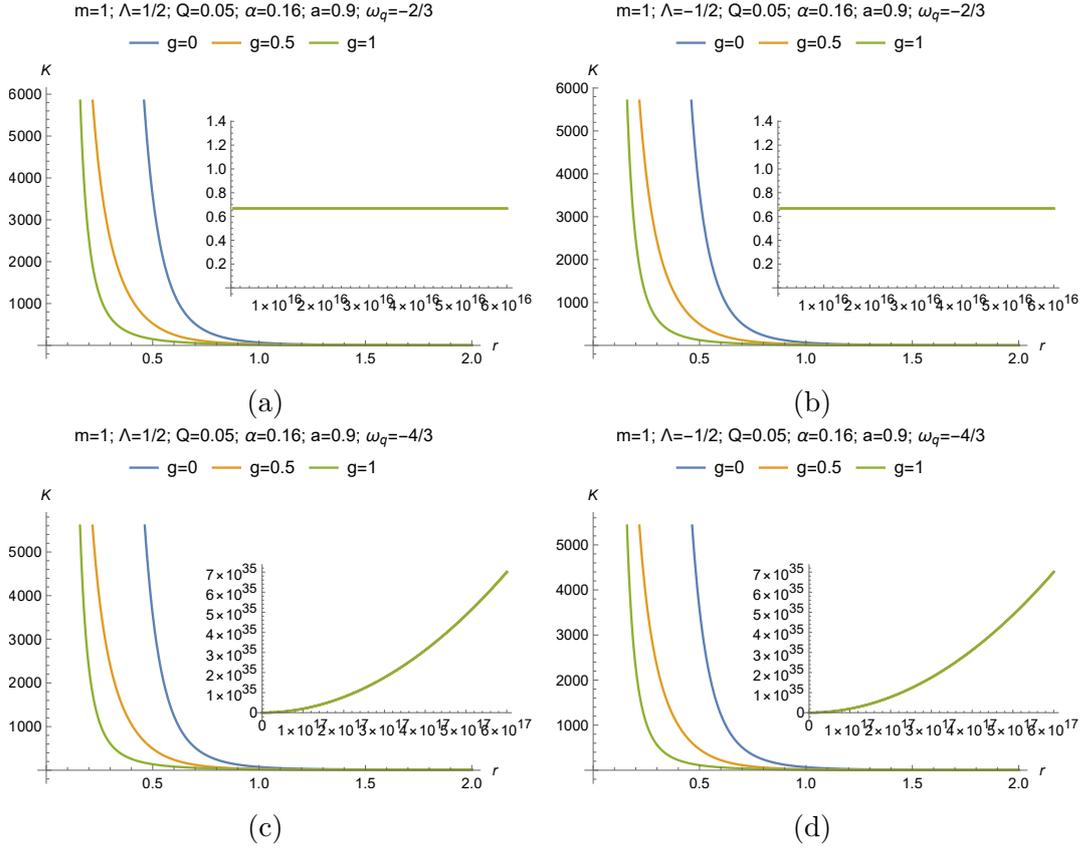


Figura 26 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro carregado de Bardeen-Kiselev-(anti-)de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas para diferentes valores de g , Λ e ω_q .

$$ds^2 = + \left(1 - \frac{2mr^2}{(g^2 + r^2)^{3/2}} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2mr^2}{(g^2 + r^2)^{3/2}} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (5.44)$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$K = \frac{12m^2 [8g^8 - 4g^6 r^2 + 47g^4 r^4 - 12g^2 r^6 + 4r^8]}{(g^2 + r^2)^7}. \quad (5.45)$$

Determinaremos agora o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{96m^2}{g^6}. \quad (5.46)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (5.47)$$

Assim, a análise do escalar de Kretschmann no limite de $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$ mostra-nos, como esperado, que o buraco negro de Bardeen é regular, isto é, não tem singularidade na origem $r = 0$ e é assintoticamente plano. Este comportamento está descrito na Fig. 27.

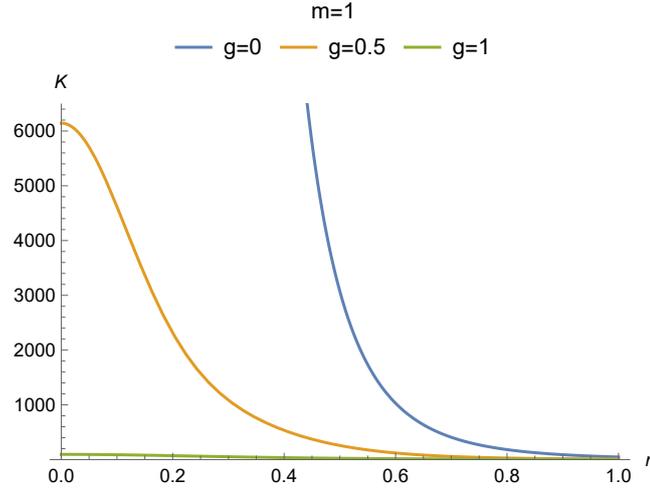


Figura 27 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Bardeen para diferentes valores de g .

Espaço-tempo de Bardeen-Kiselev

Fazendo $\Lambda = 0$, $Q = 0$ e $a = 0$ na Eq. (5.38), obtemos o espaço-tempo de Bardeen-Kiselev dado por:

$$ds^2 = + \left(1 - \frac{2mr^2}{(g^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2mr^2}{(g^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (5.48)$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$K = + \frac{12m^2 (8g^8 - 4g^6 r^2 + 47g^4 r^4 - 12g^2 r^6 + 4r^8)}{(g^2 + r^2)^7} + 3\alpha^2 (27w_q^4 + 54w_q^3 + 51w_q^2 + 20w_q + 4) r^{-6(w_q+1)} + \frac{12\alpha m r^{-3(w_q+1)} [2g^4 w_q (3w_q - 1)]}{(g^2 + r^2)^{7/2}} + \frac{12\alpha m r^{-3(w_q+1)} [-g^2 (33w_q^2 + 37w_q + 6) r^2]}{(g^2 + r^2)^{7/2}} + \frac{12\alpha m r^{-3(w_q+1)} [+2 (3w_q^2 + 5w_q + 2) r^4]}{(g^2 + r^2)^{7/2}}. \quad (5.49)$$

Agora determinaremos o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

Para $\omega_q = -2/3$ (quintessência), conseguimos os seguintes limites:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty, \quad (5.50)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (5.51)$$

Para $\omega_q = -4/3$ (phantom), temos os seguintes limites:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{96m^2}{g^6}, \quad (5.52)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \infty. \quad (5.53)$$

Assim, a análise do escalar de Kretschmann no limite de $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, cujo comportamento está descrito na Fig. 28, mostra-nos que:

- para $\omega_q = -2/3$ (quintessência), o buraco negro de Bardeen-Kiselev já não é mais regular, isto é, ele tem uma singularidade na origem $r = 0$; contudo, ele é assintoticamente plano.
- para $\omega_q = -4/3$ (phantom), a métrica do buraco negro de Bardeen-Kiselev é regular, isto é, não tem uma singularidade na origem $r = 0$; no entanto, ele não é assintoticamente plano quando $r \rightarrow \infty$.

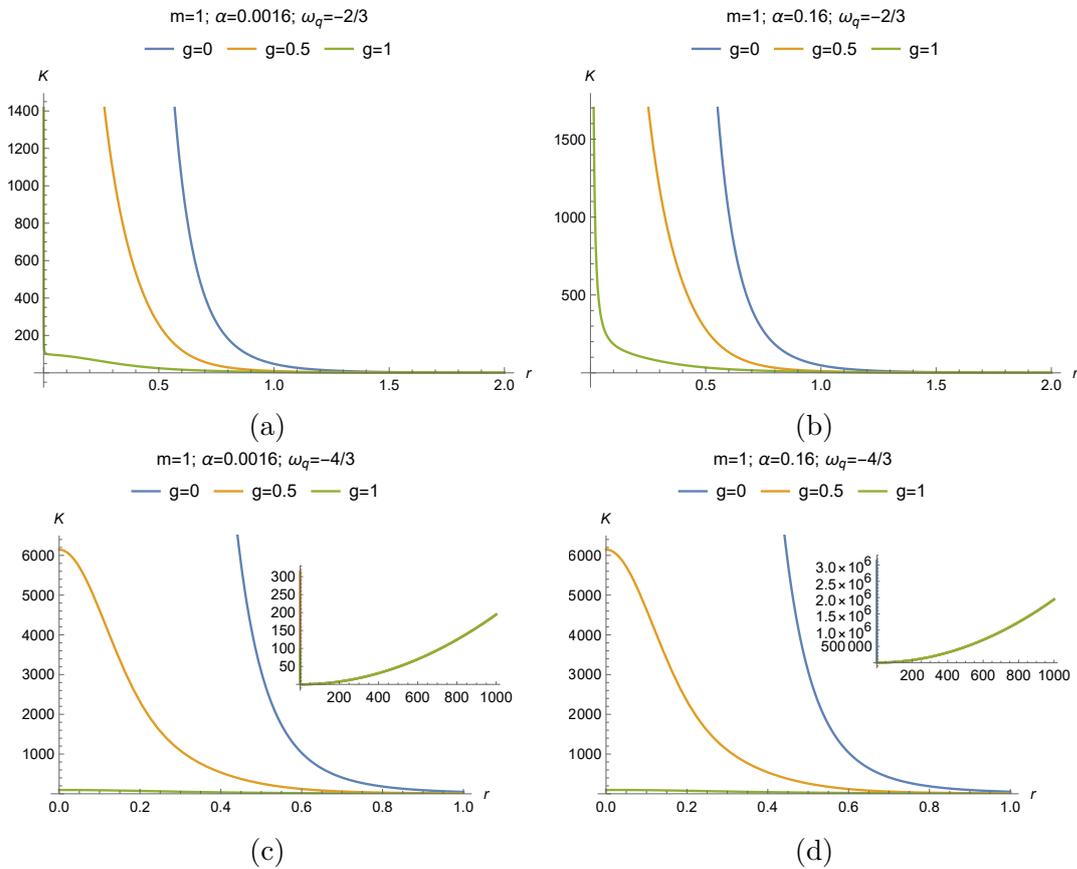


Figura 28 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Bardeen-Kiselev para diferentes valores de g , ω_q , e α .

Espaço-tempo de Bardeen com constante cosmológica

Fazendo $\alpha = 0$, $Q = 0$ e $a = 0$ na Eq. (5.38), obtemos o espaço-tempo de Bardeen com constante cosmológica, dado por:

$$ds^2 = + \left(1 - \frac{2mr^2}{(g^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2mr^2}{(g^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (5.54)$$

cujos escalar de Kretschmann é

$$K = + \frac{8\Lambda^2}{3} + \frac{8g^2\Lambda m (4g^2 - r^2)}{(g^2 + r^2)^{7/2}} + \frac{12m^2 (8g^8 - 4g^6r^2 + 47g^4r^4 - 12g^2r^6 + 4r^8)}{(g^2 + r^2)^7}. \quad (5.55)$$

Determinaremos agora o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{8\Lambda^2}{3} + \frac{32\Lambda m}{g^3} + \frac{96m^2}{g^6}, \quad (5.56)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \quad (5.57)$$

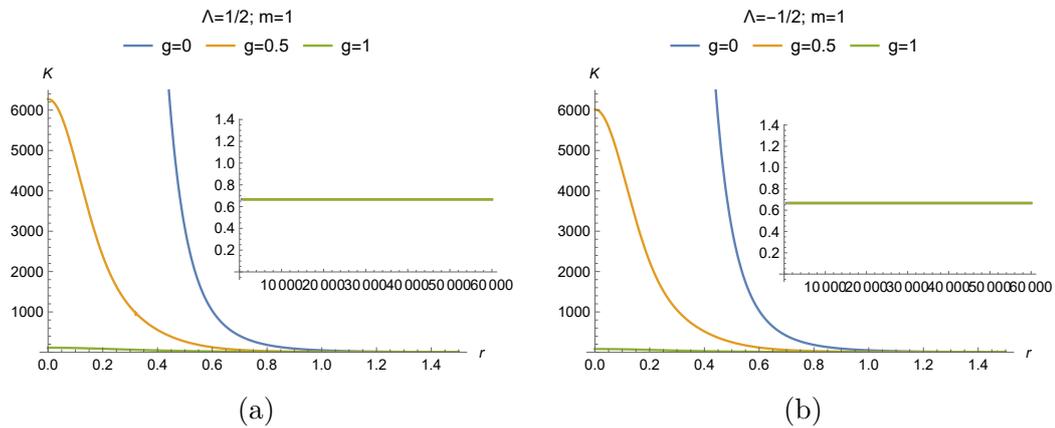


Figura 29 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Bardeen com uma constante cosmológica para diferentes valores de g e Λ .

Assim, concluímos que a inclusão da constante cosmológica ao buraco negro de Bardeen não afeta a regularidade da métrica como pode ser vista na Fig. 29.

Espaço-tempo de Bardeen com campo eletromagnético

Fazendo $\alpha = 0$, $\Lambda = 0$ e $a = 0$ na Eq. (5.38), obtemos o espaço-tempo de Bardeen com um campo eletromagnético, dado por:

$$\begin{aligned}
ds^2 = & + \left(1 - \frac{2mr^2}{(g^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 \\
& - \left(1 - \frac{2mr^2}{(g^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2,
\end{aligned} \tag{5.58}$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$\begin{aligned}
K = & + \frac{56Q^4}{r^8} + \frac{24mQ^2(11g^2 - 4r^2)}{r^2(g^2 + r^2)^{7/2}} \\
& + \frac{12m^2(8g^8 - 4g^6r^2 + 47g^4r^4 - 12g^2r^6 + 4r^8)}{(g^2 + r^2)^7}.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Determinaremos agora o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty, \tag{5.60}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \tag{5.61}$$

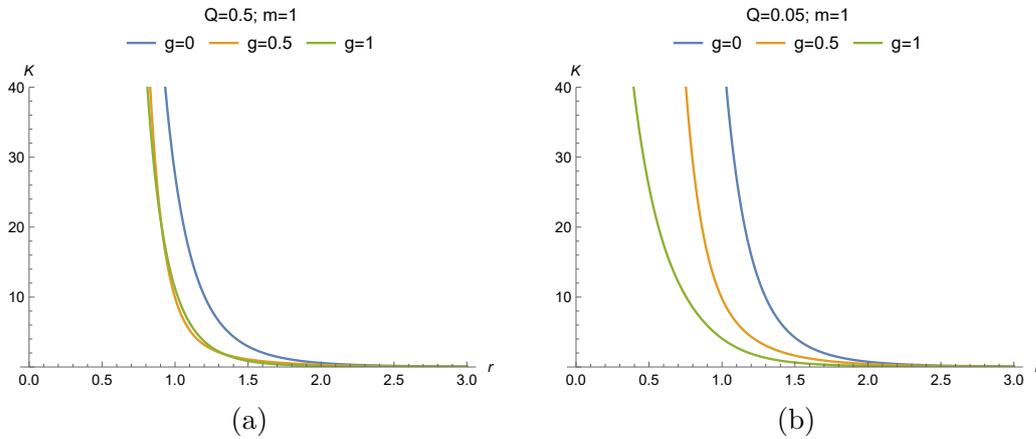


Figura 30 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Bardeen com um campo eletromagnético para diferentes valores de g e Q .

Assim, concluímos que a inclusão do campo eletromagnético no buraco negro de Bardeen afeta a regularidade da métrica fazendo-a singular na origem. A métrica permanece assintoticamente plana. Este comportamento pode ser visto na Fig. 30

Espaço-tempo de Bardeen com uma nuvem de cordas

Fazendo $\alpha = 0$, $\Lambda = 0$ e $Q = 0$ na Eq. (5.38), obtemos o espaço-tempo de Bardeen com nuvem de cordas, dado por:

$$ds^2 = + \left(1 - a - \frac{2mr^2}{(g^2 + r^2)^{3/2}} \right) dt^2 - \left(1 - a - \frac{2mr^2}{(g^2 + r^2)^{3/2}} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (5.62)$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$K = + \frac{4a^2}{r^4} + \frac{16am}{r^2 (g^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{12m^2 (8g^8 - 4g^6 r^2 + 47g^4 r^4 - 12g^2 r^6 + 4r^8)}{(g^2 + r^2)^7}. \quad (5.63)$$

Determinaremos agora o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty, \quad (5.64)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (5.65)$$

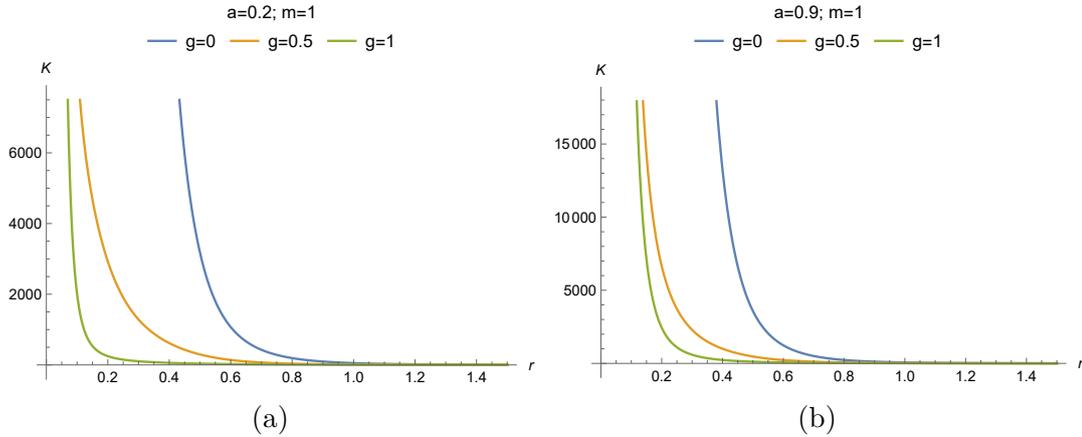


Figura 31 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Bardeen com nuvem de cordas para diferentes valores de g e a .

Assim, concluímos que a inclusão da nuvem de cordas no buraco negro de Bardeen afeta a regularidade da métrica fazendo-a singular na origem. A métrica permanece assintoticamente plana. O comportamento pode ser visto na Fig. 31.

Espaço-tempo de Bardeen-Kiselev com constante cosmológica

Da Eq. (5.39), verifica-se que, para o espaço-tempo de Bardeen-Kiselev com uma constante cosmológica ($a = 0$ e $Q = 0$), a métrica é regular apenas para alguns valores de ω_q .

Para $\omega_q = 2/3$ (quintessência) a solução é singular para $r \rightarrow 0$ e tem uma curvatura regular para $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty, \quad (5.66)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \quad (5.67)$$

Para $\omega_q = -4/3$ (phantom), a métrica é regular para $r \rightarrow 0$, porém a solução não é assintoticamente plana para $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{96m^2}{g^6} + \frac{32m\Lambda}{g^3} + \frac{8\Lambda^2}{3}, \quad (5.68)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \infty. \quad (5.69)$$

Para $\omega_q < -1$, temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{96m^2}{g^6} + \frac{32m\Lambda}{g^3} + \frac{8\Lambda^2}{3}. \quad (5.70)$$

Para $\omega_q > -1$, temos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \quad (5.71)$$

Para $\omega_q = -1$, temos os seguintes limites:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = 24b^2 + \frac{96m^2}{g^6} + \frac{96bm}{g^3} + 16b\Lambda + \frac{32m\Lambda}{g^3} + \frac{8\Lambda^2}{3}, \quad (5.72)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8}{3}(3b + \Lambda)^2. \quad (5.73)$$

Para $\omega_q = -1$, a métrica possui curvatura regular em todo espaço. É importante mencionar ainda que quando $\omega_q < -1$, a solução é regular quando $r \rightarrow 0$ e quando $\omega_q > -1$, é regular quando $r \rightarrow \infty$.

5.1.3 Condições de energia

É conhecido que os buracos negros regulares violam as condições de energia [158]. Uma vez que a introdução de uma nuvem de cordas, do fluido quintessencial, do campo eletromagnético e da constante cosmológica transformou a métrica do buraco negro numa solução singular, é essencial analisar as condições de energia da métrica obtida.

Para obter as condições de energia, precisamos identificar as componentes do tensor de energia-momento. Para $f > 0$, temos:

$$T_{\mu}^{\mu} = \text{diag}[\rho, -p_r, -p_t, -p_t], \quad (5.74)$$

onde ρ é a densidade de energia, p_r é a pressão radial e p_t é a pressão tangencial. Considerando as equações de Einstein e a Eq. (5.17), encontramos

$$\rho = \frac{1 - f(r) - rf'(r)}{\kappa^2 r^2}, \quad (5.75)$$

$$p_r = \frac{rf'(r) + f - 1}{\kappa^2 r^2}, \quad (5.76)$$

$$p_t = \frac{rf''(r) + 2f'(r)}{2\kappa^2 r}. \quad (5.77)$$

A partir de agora, identifiquemos a função $f(r)$ como

$$f(r) = \left(1 - a - \frac{2mr^2}{(g^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \right). \quad (5.78)$$

Há quatro condições de energia principais: a condição de energia fraca (WEC), a condição de energia forte (SEC), a condição de energia dominante (DEC) e a condição de energia nula (NEC) [159]. Estas condições são dadas pelas desigualdades [159, 40, 160]

$$NEC_{1,2} = WEC_{1,2} = SEC_{1,2} \Leftrightarrow \rho + p_{r,t} \geq 0, \quad (5.79)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow \rho + p_r + 2p_t \geq 0, \quad (5.80)$$

$$DEC_{1,2} \Leftrightarrow \rho - |p_{r,t}| \geq 0, \quad (5.81)$$

$$DEC_3 = WEC_3 \Leftrightarrow \rho \geq 0, \quad (5.82)$$

onde os índices 1 e 2 refere-se, respectivamente, as componentes radial e tangencial da pressão. O índice 3 diz respeito a terceira componente da pressão. Vemos que $DEC_{1,2} \Leftrightarrow ((NEC_{1,2}) \text{ e } (\rho - p_{r,t} \geq 0))$, por isso, substituímos $DEC_{1,2} \Rightarrow \rho - p_{r,t} \geq 0$.

No que se segue, vamos considerar $f(r) > 0$. Assim, as condições de energia são dadas pelas seguintes relações

$$NEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (5.83)$$

$$NEC_2 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{2Q^2}{\kappa^2 r^4} + \frac{15mg^2 r^2}{\kappa^2 (g^2 + r^2)^{7/2}} - \frac{9\alpha\omega_q (\omega_q + 1) r^{-3(\omega_q+1)}}{2\kappa^2} \geq 0, \quad (5.84)$$

$$WEC_3 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{Q^2}{\kappa^2 r^4} + \frac{\Lambda}{\kappa^2} + \frac{6mg^2}{\kappa^2 (g^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{3\alpha\omega_q r^{-3\omega_q-3}}{\kappa^2} \geq 0, \quad (5.85)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow \frac{2Q^2}{\kappa^2 r^4} - \frac{2\Lambda}{\kappa^2} + \frac{6mg^2(3r^2 - 2g^2)}{\kappa^2 (g^2 + r^2)^{7/2}} - \frac{3\alpha\omega_q(3\omega_q + 1)r^{-3(\omega_q+1)}}{\kappa^2} \geq 0, \quad (5.86)$$

$$DEC_1 \Leftrightarrow \frac{2a}{\kappa^2 r^2} + \frac{2Q^2}{\kappa^2 r^4} + \frac{2\Lambda}{\kappa^2} + \frac{12mg^2}{\kappa^2 (g^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{6\alpha\omega_q r^{-3\omega_q-3}}{\kappa^2} \geq 0, \quad (5.87)$$

$$DEC_2 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{2\Lambda}{\kappa^2} + \frac{3mg^2(4g^2 - r^2)}{\kappa^2 (g^2 + r^2)^{7/2}} + \frac{3\alpha\omega_q(3\omega_q - 1)r^{-3(\omega_q+1)}}{2\kappa^2} \geq 0. \quad (5.88)$$

Se considerarmos $-1 < \omega_q < -\frac{1}{3}$ e o limite $r \rightarrow \infty$, obtemos

$$NEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (5.89)$$

$$NEC_2 \Leftrightarrow 0, \quad (5.90)$$

$$WEC_3 \Leftrightarrow \frac{\Lambda}{\kappa^2}, \quad (5.91)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow -\frac{2\Lambda}{\kappa^2}, \quad (5.92)$$

$$DEC_1 \Leftrightarrow \frac{2\Lambda}{\kappa^2}, \quad (5.93)$$

$$DEC_2 \Leftrightarrow \frac{2\Lambda}{\kappa^2}. \quad (5.94)$$

Os resultados relativos às condições de energia mostram-nos que, no caso considerado, as condições de energia devem ser satisfeitas ou violadas consoante a relação entre os parâmetros. Analisando estas condições para valores muito grande da coordenada radial, concluímos que apenas as condições de energia nula serão satisfeitas e iguais a zero, enquanto as demais condições poderão ser ou não satisfeitas a depender dos valores que adotamos para a constante cosmológica. Vale a pena mencionar que se considerarmos o caso $f(r) < 0$, as conclusões sobre as condições de energia são as mesmas.

5.1.4 Geodésicas do buraco negro

Dada a métrica do espaço-tempo, a trajetória das partículas e da luz podem ser descritas pelo movimento geodésico. As equações geodésicas também podem ser obtidas a partir da Lagrangiana dada na equação

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

a qual, no espaço-tempo carregado de Bardeen-Kiselev-(anti-)de Sitter com nuvem de cordas, pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = +\frac{1}{2}f(r)\dot{t}^2 - \frac{1}{2}f(r)\dot{r}^2 - \frac{r^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2\theta\dot{\phi}^2), \quad (5.95)$$

onde o ponto representa a derivada com relação ao tempo próprio τ . Reescalando o parâmetro τ , podemos definir $L = 2\mathcal{L}$, que para geodésicas tipo-tempo, é igual a +1, para geodésicas tipo-espaço, é igual a -1 e é igual a 0 para geodésicas nulas [114].

As equações de Euler-Lagrange são dadas por

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (5.96)$$

Para $\mu = 0$ e $\mu = 3$ na Eq. (5.96), com \mathcal{L} dado por Eq. (5.95), conseguimos, respectivamente:

$$\dot{t} = \frac{E}{\left(1 - a - \frac{2mr^2}{(g^2+r^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)}, \quad (5.97)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{J}{r^2 \text{sen}^2\theta}, \quad (5.98)$$

onde E e J são constantes de movimento, que correspondem a vetores de killing ∂_t e ∂_ϕ , respectivamente. Podemos interpretar estas constantes como a energia E e o momento angular J da partícula que está movendo-se nas proximidades do buraco negro.

Restrinjamos a análise das geodésicas ao plano equatorial do buraco negro, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Fazendo isto, as Eqs. (5.97)-(5.98) são reduzidas a

$$\dot{t} = \frac{E}{\left(1 - a - \frac{2mr^2}{(g^2+r^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)}, \quad (5.99)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{J}{r^2}. \quad (5.100)$$

Substituindo as Eqs. (5.99) e (5.100) na Eq. (5.95), obtemos

$$E^2 = \dot{r}^2 + V_{eff}, \quad (5.101)$$

onde

$$V_{eff} = f(r) \left(\frac{J^2}{r^2} + L \right), \quad (5.102)$$

representa o potencial efetivo para o movimento geodésico no espaço-tempo carregado de Bardeen-Kiselev-(anti-)de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas.

Usando a relação

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{dr}{d\tau} \\ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \dot{t}^2 = \dot{r}^2 \end{aligned} \quad (5.103)$$

na Eq. (5.101) e usando as Eqs. (5.102) e Eq. (5.99), conseguimos

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = f(r)^2 \left[1 - \frac{f(r)}{E^2} \left(\frac{J^2}{r^2} + L \right) \right], \quad (5.104)$$

com $f(r)$ dado pela Eq. (5.78).

5.1.4.1 Movimento radial de uma partícula sem massa

Para o movimento radial ($J = 0$) de uma partícula sem massa ($L = 0$), a Eq. (5.78) pode ser escrita como

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = f(r)^2. \quad (5.105)$$

Substituindo a Eq. (5.78) na Eq. (5.105), obtemos a relação entre as coordenadas t e r , dadas por

$$\pm t = \int \frac{1}{f(r)} dr. \quad (5.106)$$

Usando a Eq. (5.101), podemos obter a relação entre a coordenada r e o tempo próprio τ para o movimento radial da partícula sem massa, dado por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= E^2, \\ \pm \tau &= \frac{r}{E}. \end{aligned} \quad (5.107)$$

5.1.4.2 Movimento radial de uma partícula massiva

Agora, consideremos o movimento de partículas massivas ($L = 1$) com trajetórias radiais ($J = 0$) nas proximidades do buraco negro. Da Eq. (5.104), obtemos

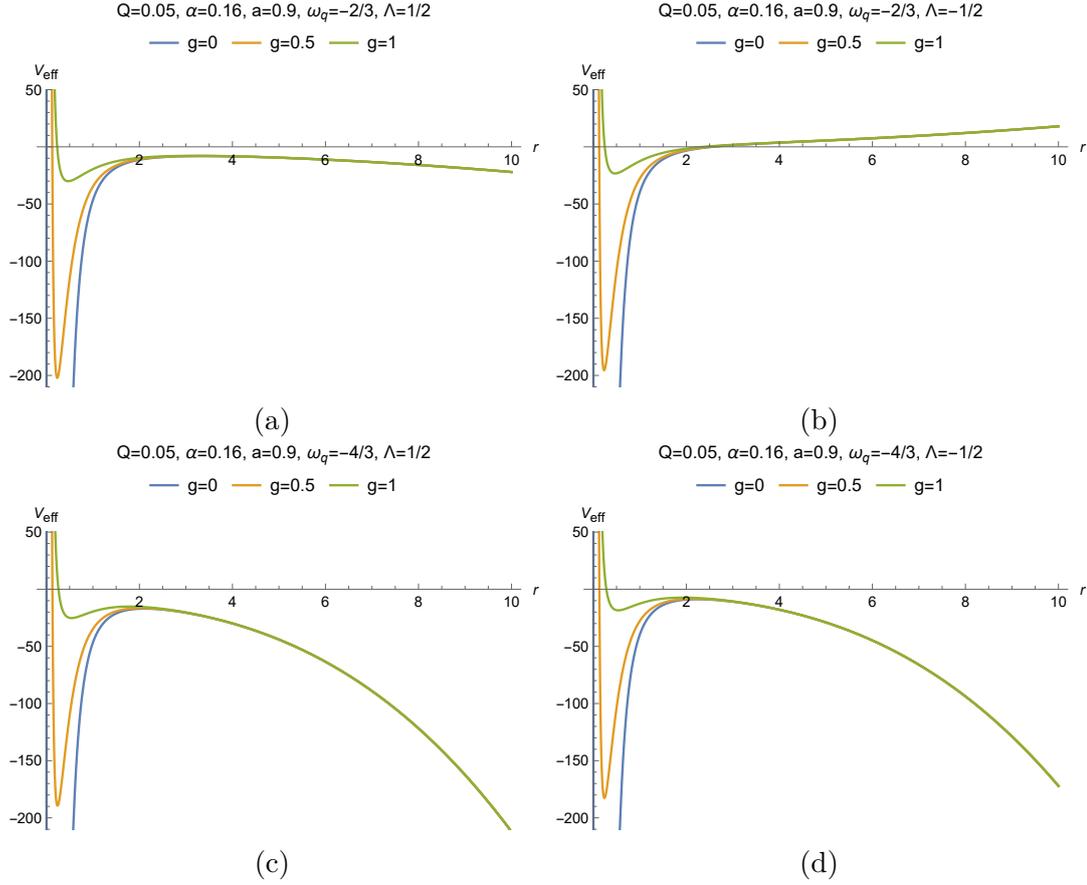


Figura 32 – Potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-tempo ($L = 1$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de g , ω_q e Λ .

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = f(r)^2 - \frac{f(r)^3}{E^2}. \quad (5.108)$$

Substituindo a Eq. (5.78) na Eq. (5.108), podemos encontrar a relação entre as coordenadas t e r para o movimento radial da partícula:

$$\pm t = \int \frac{dr}{\sqrt{f(r)^2 - \frac{f(r)^3}{E^2}}}. \quad (5.109)$$

Da Eq. (5.101), conseguimos a relação entre o tempo próprio τ e a coordenada radial r :

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - f(r),$$

$$\pm \tau = \int \frac{dr}{\sqrt{E^2 - f(r)}}. \quad (5.110)$$

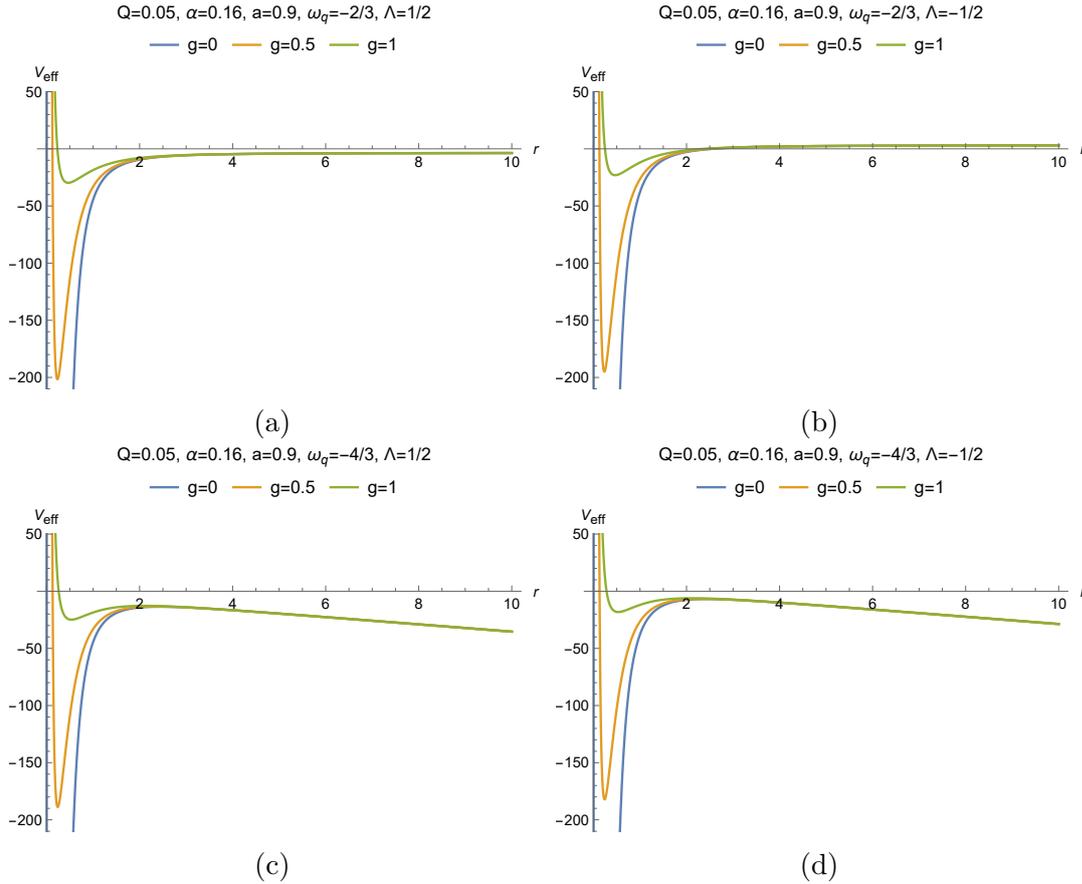


Figura 33 – Potencial efetivo para geodésicas não-radiais nulas ($L = 0$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de g , ω_q e Λ .

5.1.4.3 Potencial Efetivo

O comportamento do potencial efetivo (V_{eff}) do movimento geodésico, dado pela Eq. (5.102), pode dizer-nos sobre o comportamento de uma partícula massiva ou de uma partícula sem massa perto do buraco negro. Assim, nas Figs. 32 a 35, representamos os potenciais efetivos para diferentes valores de g , ω_q e Λ para geodésicas tipo-tempo e nulas. Em algumas figuras, representamos, em detalhes, o V_{eff} próximo do buraco negro (r próximo de zero).

Na Fig. 32, representamos o potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-tempo ($L = 1$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de g , ω_q e Λ . Podemos observar que, para $g = 0$, não existem geodésicas circulares estáveis, uma vez que os gráficos não apresentam um mínimo local para qualquer valor de Q , ω_q , Λ e a . Por outro lado, para $g > 0$, podemos observar a possibilidade da existência de geodésicas circulares estáveis, dependendo dos valores dos parâmetros Q , ω_q , Λ e a . Na região próxima do buraco negro, $V_{eff} \rightarrow +\infty$. Para regiões distantes do buraco negro, o potencial efetivo também diverge.

Para geodésicas não-radiais nulas ($J^2 = 20$ e $L = 0$), Fig. 33, podemos observar que, em todos os casos, $V_{eff} \rightarrow +\infty$ para regiões próximas do buraco negro, $r \rightarrow 0$. Para regiões

distantes do buraco negro, $r \rightarrow \infty$, o $V_{eff} \rightarrow \pm 3.3333$ (Figs. 33a e 33b), e $V_{eff} \rightarrow -\infty$ (Figs. 33c e 33d). Para $g = 0$, não existem geodésicas circulares estáveis, uma vez que os gráficos não mostram mínimos locais. A existência de órbitas circulares estáveis de uma partícula sem massa em torno do buraco negro depende de Q , ω_q , Λ e a , como se pode ver na Fig. 33.

Acerca do comportamento das geodésicas radiais tipo-tempo ($J^2 = 0$ e $L = 1$), a Fig. 34 mostra-nos que a estabilidade do movimento radial não se verifica para $g = 0$. Por outro lado, para $g > 0$, existirão sempre geodésicas estáveis.

Finalmente, podemos observar na Fig. 35 que, para geodésicas radiais nulas ($J^2 = 0$ e $L = 0$), o potencial efetivo é constante e igual a zero.

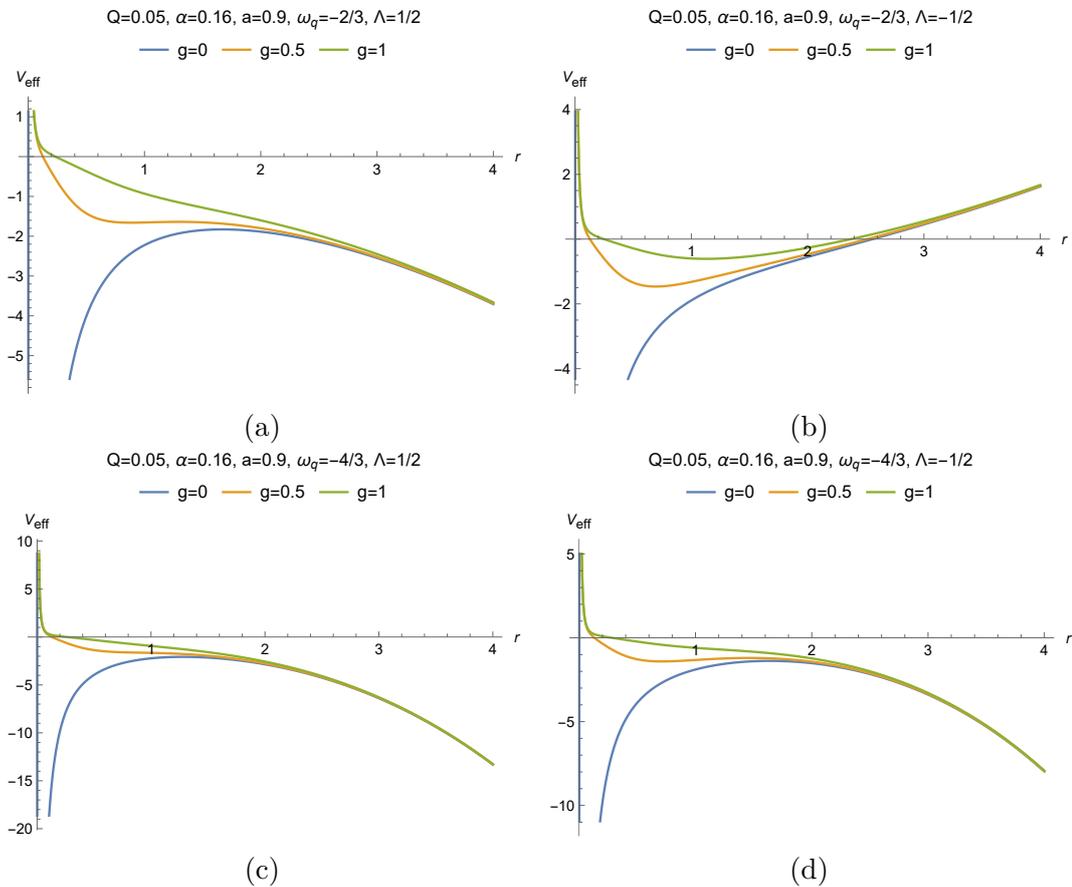


Figura 34 – Potencial efetivo para geodésicas radiais tipo-tempo ($J^2 = 0$ e $L = 1$), para diferentes valores de g , ω_q e Λ .

5.2 Buraco negro de Bardeen-AdS com um fluido de cordas

Nesta seção obteremos uma solução que corresponde ao buraco negro de Bardeen com uma constante cosmológica, rodeado por um fluido de cordas. Mostraremos ainda que a solução preserva ou não a regularidade da solução do buraco negro obtido, sendo uma característica da solução de Bardeen, dependendo dos valores do parâmetro β . Analisaremos

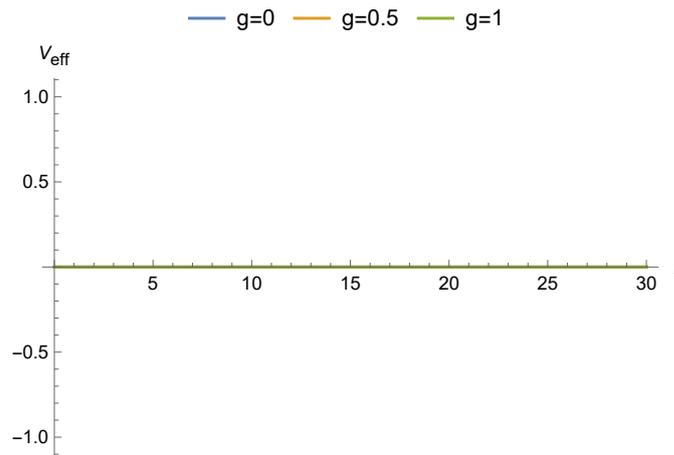


Figura 35 – Potencial efetivo para geodésicas radiais nulas ($J^2 = 0$ e $L = 0$), para diferentes valores de g , ω_q e Λ .

também a termodinâmica dessas soluções para $\beta = 2$, caso em que a matéria escura pode ser mimetizada e mostraremos haver uma incompatibilidade entre a temperatura obtida pela primeira lei e a obtida usando a gravidade superficial. Algumas grandezas termodinâmicas serão obtidas e analisadas, por exemplo, a pressão, a capacidade térmica e os pontos críticos, e mostraremos como estas grandezas se alteram para diferentes valores do parâmetro q associado à solução de Bardeen bem como do parâmetro b associado à presença do fluido de cordas. Finalmente, analisaremos a transição de fase usando a equação de estado e a energia livre de Helmholtz.

5.2.1 Solução geral

Começemos por considerar o espaço-tempo do buraco negro de Bardeen [69] que pode ser entendido como resultante da solução da equação de Einstein acoplada a um campo eletromagnético não-linear. Neste cenário, a fonte física deste buraco negro é um campo eletromagnético não-linear [103].

Nesta seção, obtemos uma classe de solução esfericamente simétrica que generaliza a solução original de Bardeen devido à presença de duas outras fontes, nomeadamente, a constante cosmológica e um fluido de cordas.

A ação que descreve adequadamente um sistema minimamente acoplado a um campo eletromagnético não-linear pode ser escrita como

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \mathcal{L}) \quad (5.111)$$

onde g é o determinante do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, R é o escalar de curvatura e \mathcal{L} é a densidade lagrangiana do campo eletromagnético não-linear [16].

A partir deste acoplamento entre os campos gravitacional e eletromagnético não-linear,

obtemos as seguintes equações [16], variando a ação dada pela Eq.(5.111), em relação à métrica

$$G_{\mu\nu} = 2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}(F)}{\partial F} F_{\mu\sigma} F_{\nu}^{\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \mathcal{L}(F) \right), \quad (5.112)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$. Neste caso, a equação do campo eletromagnético deve ser dada por

$$\nabla_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(F)}{\partial F} F^{\nu\mu} \right) = 0, \quad (5.113)$$

$$\nabla_{\mu} (*F^{\nu\mu}) = 0, \quad (5.114)$$

onde $F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu} A_{\nu]}$ descreve o campo eletromagnético e \mathcal{L} é uma função de $F = 1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$.

Na solução de Bardeen, a fonte, de acordo com Ayon-Beato e Garcia [103], vem da eletrodinâmica não-linear onde a densidade Lagrangiana é escrita como

$$\mathcal{L}(F) = \frac{3}{2sq^2} \left(\frac{\sqrt{2q^2 F}}{1 + \sqrt{2q^2 F}} \right)^{5/2}, \quad (5.115)$$

com q sendo interpretado como uma carga monopolar magnética, $\mathcal{L}(F)$ dado pela Eq. (5.115) representa uma fonte particular no quadro da eletrodinâmica não-linear sendo utilizado para derivar a solução do buraco negro de Bardeen. Na Eq. (5.115), s é definido por:

$$s \equiv \frac{|q|}{2m}, \quad (5.116)$$

onde q é interpretado como a carga monopolar de um campo magnético auto-gravitacional descrito num cenário de eletrodinâmica não-linear [103]. Assim, usando a Eq. (5.116), podemos obter as componentes do tensor energia-momento o qual é a fonte da solução do buraco negro de Bardeen [103], sendo dadas por

$$T_t^t = T_r^r = \frac{6mq^2}{(q^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (5.117)$$

$$T_{\theta}^{\theta} = T_{\phi}^{\phi} = \frac{3mq^2(2q^2 - 3r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}}. \quad (5.118)$$

Para considerarmos a constante cosmológica e o fluido de cordas, procedemos adicionando o termo $-\Lambda g_{\mu\nu}$ ao lado esquerdo da Eq. (5.112) e o tensor de energia-momento correspondente ao fluido de cordas ao lado direito da mesma equação, resultando em

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}(F)}{\partial F} F_{\mu\sigma} F_{\nu}^{\sigma} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} \mathcal{L}(F) \right) + T_{\mu\nu}^{\text{FS}}, \quad (5.119)$$

em que $T_{\mu\nu}^{\text{FS}}$ se refere ao tensor energia-momento do fluido de cordas. O lado direito da equação acima é um tensor energia-momento efetivo, com o primeiro termo associado às modificações das equações de Einstein devido ao acoplamento com um campo eletromagnético não-linear, e o segundo refere-se ao fluido de cordas.

Tensor de energia-momento do fluido de cordas $T_{\mu\nu}^{(FS)}$

A linha de mundo de uma partícula movendo-se com quadri-velocidade dada por $u^{\mu} = dx^{\mu}/d\lambda$, com λ sendo um parâmetro independente, pode ser descrito por $x = x(\lambda)$.

Por outro lado, se considerarmos, ao invés do movimento de uma partícula, o movimento de uma corda infinitesimalmente fina, a trajetória corresponderá a uma superfície de mundo bidimensional Σ , que pode ser obtida por [36]

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\lambda^a), \quad a = 0, 1, \quad (5.120)$$

com λ_0 e λ_1 sendo parâmetros tipo-tempo e tipo-espaço, respectivamente. Portanto, ao invés da quadri-velocidade, u^{μ} , temos um bivetor, $\Sigma^{\mu\nu}$, tal que [36]

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \lambda^b}. \quad (5.121)$$

Vale a pena ressaltar que, nesta superfície de mundo, haverá uma métrica induzida, γ_{ab} , com $a, b = 0, 1$, tal que,

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \lambda^b}. \quad (5.122)$$

O tensor de energia-momento associado a uma nuvem de poeira é dado por $T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu}$, sendo u^{μ} a quadri-velocidade normalizada e ρ a densidade própria do fluxo. Do mesmo modo, para uma nuvem de cordas, temos [36]

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{\Sigma^{\mu\beta} \Sigma_{\beta}^{\nu}}{(-\gamma)^{1/2}}, \quad (5.123)$$

onde $\gamma = \frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}$.

Agora, se considerarmos um fluido perfeito com pressão \tilde{p} , o mesmo pode ser descrito pelo tensor de energia-momento dado por $T^{\mu\nu} = (\rho + \tilde{p})u^{\mu}u^{\nu} - \tilde{p}g^{\mu\nu}$. Analogamente, considerando um fluido perfeito de cordas com pressão p , temos o seguinte tensor de

energia-momento [107]

$$T^{\mu\nu} = (p + \sqrt{-\gamma\rho}) \frac{\Sigma^{\mu\beta}\Sigma_{\beta}^{\nu}}{(-\gamma)} + pg^{\mu\nu}. \quad (5.124)$$

Considerando o tensor de energia-momento dado pela Eq. (5.124), Soleng obteve a métrica correspondente a um buraco negro estático rodeado por um fluido de cordas [59]. Então, assumimos que as componentes do tensor de energia-momento estão relacionadas através das equações

$$T_t^t = T_r^r, \quad (5.125)$$

$$T_t^t = -\beta T_{\theta}^{\theta} = -\beta T_{\phi}^{\phi}, \quad (5.126)$$

onde β é uma constante adimensional. O tensor de energia-momento cujas componentes são dadas pelas Eqs. (5.125)-(5.126), foi interpretado como estando associado a um tipo de fluido anisotrópico com simetria esférica [8, 161]. Nestas referências, foi interpretado como o tensor de energia-momento associado à polarização anisotrópica do vácuo num espaço-tempo esfericamente simétrico.

É importante chamar a atenção ao fato de que este tipo de tensor energia-momento é usado em diferentes cenários [162, 163, 164]. Em particular, na Ref. [162] é mostrado que as condições imposta pela Eq. (5.126) permite obter uma classe de soluções esfericamente simétricas das equações de campo de Einstein com dois parâmetros.

Para a obtenção da solução de Bardeen-AdS com fluido de cordas, vamos considerar as componentes do tensor energia-momento para o fluido de cordas dado por [165]:

$$T_t^t = T_r^r = -\frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}, \quad (5.127)$$

$$T_{\theta}^{\theta} = T_{\phi}^{\phi} = \frac{\epsilon}{\beta r^2} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}, \quad (5.128)$$

onde b é uma constante de integração positiva e $\epsilon = \pm 1$ determina o sinal da densidade de energia do fluido de cordas.

Solução do buraco negro de Bardeen com constante cosmológica e rodeado por um fluido de cordas

Consideremos agora a Eq. (5.112) com as modificações introduzidas pela adição da constante cosmológica, bem como do fluido de cordas, cujas componentes do tensor energia-momento para este fluido são dadas pelas Eq. (5.127) e Eq. (5.128). Mais precisamente, consideremos a Eq. (5.119).

O elemento de linha para um espaço-tempo estático, isotrópico e esfericamente simétrico, sem perda de generalidade, pode ser escrito da seguinte forma:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (5.129)$$

Assim, as equações de campo de Einstein para o caso em consideração, tendo em conta a presença da constante cosmológica e a fonte adicional correspondente ao fluido de cordas, podem ser escritas como

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{6mq^2}{(q^2 + r^2)^{5/2}} + \Lambda - \frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}, \quad (5.130)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{6mq^2}{(q^2 + r^2)^{5/2}} + \Lambda - \frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}, \quad (5.131)$$

$$\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) = \frac{3mq^2 (2q^2 - 3r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}} + \Lambda + \frac{\epsilon}{\beta r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}. \quad (5.132)$$

Subtraindo as Eqs. (5.130) e (5.131), obtemos que:

$$\lambda = -\nu \Rightarrow \lambda' = -\nu'. \quad (5.133)$$

Somando as Eqs. (5.130) e (5.131) e considerando a Eq. (5.133), após algumas simplificações, encontramos:

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda'}{r} - e^{-\lambda} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{6mq^2}{(q^2 + r^2)^{5/2}} + \Lambda - \frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}. \quad (5.134)$$

Agora, escrevamos as seguintes relações:

$$\nu = -\lambda = \ln(1 + f(r)). \quad (5.135)$$

Tendo em conta as Eqs. (5.133) e (5.135), podemos escrever as Eqs. (5.134) e (5.132), respectivamente, da seguinte forma:

$$-\frac{1}{r^2} (r f' + f) = \frac{6mq^2}{(q^2 + r^2)^{5/2}} + \Lambda - \frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}, \quad (5.136)$$

$$2 \frac{f'}{r} + f'' = -\frac{6mq^2 (2q^2 - 3r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}} - 2\Lambda - \frac{2\epsilon}{\beta r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}. \quad (5.137)$$

Somando as Eqs. (5.136) e (5.137) e multiplicando o resultado por r^2 , obtemos a seguinte equação diferencial:

$$r^2 f'' + r f' - f + \Lambda r^2 - \frac{6mq^2 r^2}{(q^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{6mq^2 r^2 (2q^2 - 3r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}} + \epsilon \left(\frac{\beta + 2}{\beta} \right) \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta} = 0, \quad (5.138)$$

cuja solução é dada por

$$f(r) = -\frac{2mr^2}{(q^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \begin{cases} \epsilon b[1 + 2 \log(r)]/2r & \text{for } \beta = 2, \\ \epsilon \beta (\beta - 2)^{-1} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta} & \text{for } \beta \neq 2. \end{cases} \quad (5.139)$$

Assim, substituindo a Eq. (5.139) na Eq. (5.135) e depois na Eq. (5.129), obtemos finalmente o buraco negro de Bardeen-AdS rodeado por um fluido de cordas, onde o elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = g(r) dt^2 - g(r)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (5.140)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. A função $g(r)$ é dada por

$$g(r) = 1 - \frac{2mr^2}{(q^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \begin{cases} \epsilon b[1 + 2 \log(r)]/2r & \text{for } \beta = 2, \\ \epsilon \beta (\beta - 2)^{-1} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta} & \text{for } \beta \neq 2. \end{cases} \quad (5.141)$$

Podemos recuperar algumas outras soluções a partir desta métrica se fizermos as seguintes escolhas apresentadas no Quadro (1).

Quadro 1 – Espaço-tempo que pode ser recuperado fazendo $q = \Lambda = 0$ na Eq. (5.141) e diferentes valores de β , b e ϵ

ϵ	b	β	espaço-tempo
1	\mathbb{R}^*	$\lim_{\beta \rightarrow \infty}$	Letelier
1	Q	1	Reissner-Nordström
1	$\Lambda^{-1/2}$	-1	de Sitter

A solução obtida, para o caso especial $\beta = 2$, é análoga à obtida recentemente para o buraco negro de Bardeen rodeado por um fluido perfeito de matéria escura [166].

Vale a pena chamar a atenção para o fato de, formalmente, a classe de soluções obtidas poder ser considerada como gerada por dois fluidos, com um tensor energia-momento efetivo, um correspondente à fonte eletromagnética não-linear e o outro ao fluido de cordas, e com uma constante cosmológica.

5.2.2 Análise do escalar de Kretschmann

Começamos fazendo uma análise preliminar da regularidade da métrica do espaço-tempo obtida do ponto de vista do invariante de curvatura escalar, especificamente, o escalar de Kretschmann. Em seguida, verifiquemos quais são as diferenças em relação ao buraco negro de Bardeen, que é regular em todo espaço. Façamos isso considerando os casos $\beta \neq 2$ e $\beta = 2$.

Para $\beta \neq 2$

Neste caso, o escalar de Kretschmann é

$$\begin{aligned}
K = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = & \\
& + \frac{8}{3}\Lambda^2 + \frac{8\Lambda m(4q^4 - q^2r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}} - \frac{8(\beta - 1)\Lambda\epsilon\left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}}{3\beta r^2} \\
& - \frac{16\beta m\epsilon\left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}}{(\beta - 2)r^2(q^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{32m\epsilon(r^2 - 2q^2)\left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}}{(\beta - 2)r^2(q^2 + r^2)^{5/2}} \\
& + \frac{12m^2(8q^8 - 4q^6r^2 + 47q^4r^4 - 12q^2r^6 + 4r^8)}{(q^2 + r^2)^7} \\
& - \frac{8(\beta + 2)m\epsilon(2q^4 - 11q^2r^2 + 2r^4)\left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}}{(\beta - 2)\beta r^2(q^2 + r^2)^{7/2}} \\
& + \frac{4[\beta(\beta^3 + 5\beta + 4) + 4]\epsilon^2\left(\frac{b}{r}\right)^{4/\beta}}{(\beta - 2)^2\beta^2r^4}.
\end{aligned} \tag{5.142}$$

Em seguida, determinaremos os limites do escalar de Kretschmann quando $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, para $q > 0$, $b > 0$ e Λ e $\epsilon \in \mathbb{R}$. A análise será efetuada apenas para alguns valores de β .

- Para $\beta < -1$, o escalar de Kretschmann diverge muito perto da origem e é finito numa região muito afastada do buraco negro.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty. \tag{5.143}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \tag{5.144}$$

- Para $\beta = -1$, o escalar de Kretschmann é finito e é dado por

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{8(q^3\epsilon - b^2(6m + \Lambda q^3))^2}{3b^4q^6}. \tag{5.145}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8(\epsilon - b^2\Lambda)^2}{3b^4}. \tag{5.146}$$

- Para $-1 < \beta < 0$, o escalar de Kretschmann é finito, perto da origem e diverge para pontos muito afastados do buraco negro, de acordo com

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{8(6m + \Lambda q^3)^2}{3q^6}. \tag{5.147}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \infty. \tag{5.148}$$

- Para $0 < \beta < 2$ e $\beta > 2$, o escalar de Kretschmann diverge muito perto da origem e tem valor finito para pontos muito afastados do buraco negro.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty. \quad (5.149)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \quad (5.150)$$

For $\beta = 2$

Agora, considerando o caso $\beta = 2$, obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} K = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = & \\ & \frac{8\Lambda^2}{3} + \frac{6b^2\epsilon^2}{r^6} + \frac{12b^2\epsilon^2 \log^2(r)}{r^6} - \frac{4b\Lambda\epsilon}{3r^3} \\ & + \frac{8\Lambda m q^2 (4q^2 - r^2)}{(q^2 + r^2)^{7/2}} - \frac{8bm\epsilon (q^4 + 14q^2r^2 - 2r^4)}{r^3 (q^2 + r^2)^{7/2}} \\ & + \frac{12m^2 (8q^8 - 4q^6r^2 + 47q^4r^4 - 12q^2r^6 + 4r^8)}{(q^2 + r^2)^7} \\ & - \frac{8b\epsilon \log(r) [b\epsilon (q^2 + r^2)^{7/2} - 9mq^2r^5 + 6mr^7]}{r^6 (q^2 + r^2)^{7/2}}, \end{aligned} \quad (5.151)$$

cujos limites $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, são

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty \text{ e } \lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \quad (5.152)$$

Note que estes limites são os mesmos obtidos para $0 < \beta < 2$ e $\beta > 2$.

Assim, estes resultados dizem-nos que a inclusão do fluido de cordas altera a regularidade da solução de Bardeen para os seguintes valores de β , tais que $\beta < -1$ e $\beta > 0$. Caso contrário, a regularidade da solução do buraco negro de Bardeen é preservada no intervalo $-1 \leq \beta < 0$.

5.2.3 Geodésicas e Potencial Efetivo

Consideremos agora a solução estática e esféricamente simétrica, Eq. (5.129), com $g(r)$ dado pela Eq. (5.141). Analisaremos as equações geodésicas considerando a ação geodésica e o princípio variacional para escrever um Lagrangiano que descreve a métrica como

$$2\mathcal{L} = g(r)\dot{t}^2 - \frac{1}{g(r)}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2. \quad (5.153)$$

O “ponto” representa a derivada em relação ao tempo próprio, τ . Por simplicidade, restringimos a análise das geodésicas ao plano equatorial do buraco negro, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Usando

as equações de Euler-Lagrange, obtemos

$$E = g(r)\dot{t}, \quad (5.154)$$

$$J = -r^2\dot{\phi}, \quad (5.155)$$

onde E e J são constantes de movimento que correspondem aos vetores de Killing ∂_t e ∂_ϕ , respectivamente. Podemos interpretar estas constantes como a energia E e o momento angular J da partícula que se move nas proximidades do buraco negro.

Reescalando o parâmetro τ , podemos definir $L = 2\mathcal{L}$, que, para geodésicas tipo-tempo, é igual a $+1$, para geodésicas tipo-espaço é igual a -1 e é igual a 0 para geodésicas nulas [114]. Substituindo as Eqs. (5.154) e (5.155) na Eq. (5.153), conseguimos

$$\dot{r}^2 = E^2 - V_{eff}, \quad (5.156)$$

onde

$$V_{eff} = g(r) \left(\frac{J^2}{r^2} + L \right). \quad (5.157)$$

Consideremos agora o problema da partícula massiva ($L = 1$) que cai radialmente ($J = 0$) no buraco negro. A equação do movimento geodésico radial dessa partícula teste é dada por

$$\dot{r}^2 = E^2 - g(r), \quad (5.158)$$

enquanto o potencial efetivo é o seguinte

$$V_{eff} = g(r). \quad (5.159)$$

Consideraremos os mesmos valores de β que foram analisados com o escalar de Kretschmann, a fim de termos algumas observações. Os gráficos para \dot{r}^2 e V_{eff} estão apresentados nas Fig. (36).

Comparemos agora os resultados previstos pelos valores do escalar de Kretschmann quando $r \rightarrow 0$, com as características das geodésicas, a saber, se são completas ou incompletas. Em primeiro lugar, consideremos os painéis superiores da Fig. (36).

Para $\beta = -1/2$ e $\beta = -1$ na Fig. (36b), a partícula teste consegue ultrapassar a barreira de potencial e atingir o ponto $r = 0$ num tempo finito. Este fato, do ponto de vista das características do espaço-tempo em relação à singularidade, é exatamente o que é previsto pelos valores do escalar de Kretschmann, que são finitos para estes valores de β .

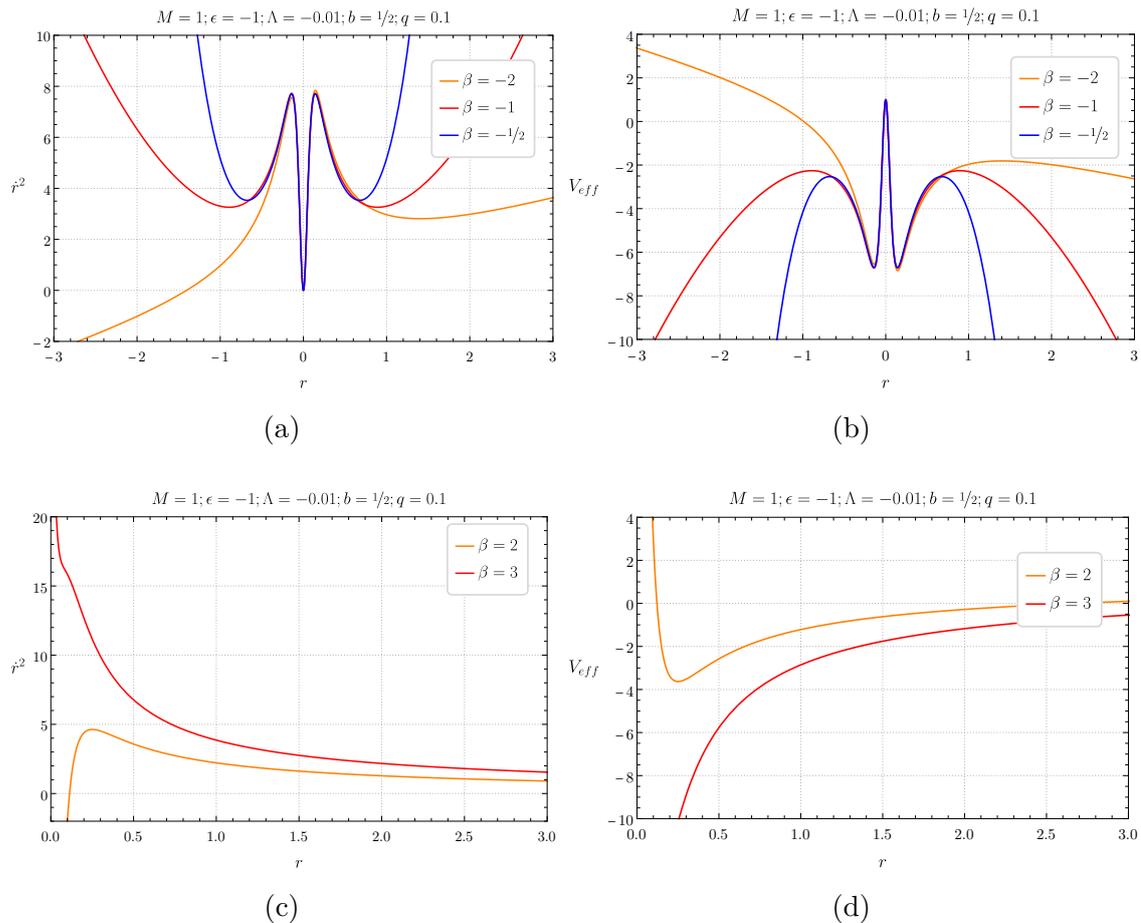


Figura 36 – O gráfico da esquerda mostra r^2 para $E = 1$. O gráfico da direita mostra o potencial efetivo $V_{eff} = g(r)$.

Por outro lado, para $\beta = -2$, o escalar de Kretschmann é infinito para $r \rightarrow 0$, enquanto, examinando a Fig. (36b), concluímos que a análise geodésica mostra que a partícula teste consegue ultrapassar a barreira de potencial e atingir o ponto $r = 0$ num tempo finito. Isto indica que as geodésicas são completas e, portanto, o espaço-tempo é regular.

Na Fig. (36d), podemos concluir que a partícula não pode atingir o ponto $r = 0$ num tempo finito, para ambos os valores de β . Isto indica que as geodésicas são incompletas e, portanto, o espaço-tempo é singular. Esta conclusão é confirmada pelo fato de que, para $\beta = 2$ e $\beta = 3$, o escalar de Kretschmann é infinito, quando $r \rightarrow 0$.

Em resumo, a análise das geodésicas, visando conhecer as características dos espaço-tempo relativamente à singularidade, pode confirmar ou não o que é previsto pelos resultados fornecidos pelo escalar de Kretschmann. Assim, para verificar eficazmente a existência ou não de singularidades no espaço-tempo é necessária uma análise da completude, ou incompletude geodésica.

5.2.4 Termodinâmica do buraco negro

Para o estudo da termodinâmica do buraco negro, o nosso ponto de partida é a primeira lei da termodinâmica dos buracos negros que no caso dos buracos negros carregados e estáticos, é dada por [167]

$$dM = T_H dS + \Phi_H dq + V_H dP, \quad (5.160)$$

em que M é a massa do buraco negro, Φ é o potencial magnético, P é a pressão termodinâmica e S é a entropia do sistema, que está relacionada com a área do buraco negro A pela equação

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_+^2. \quad (5.161)$$

A partir da primeira lei da termodinâmica, podemos obter a temperatura, o potencial magnético e o volume da seguinte forma:

$$T_H = \frac{\partial M}{\partial S}, \quad \Phi_H = \frac{\partial M}{\partial q} \text{ e } V_H = \frac{\partial M}{\partial P}. \quad (5.162)$$

Vale a pena chamar a atenção para duas considerações que assumiremos neste trabalho:

(i) focaremos na solução $\beta = 2$ uma vez que esta escolha pode representar a presença de matéria escura [59];

(ii) como vimos, $\epsilon = \pm 1$ representa o sinal da densidade do fluido de cordas. Neste trabalho, escolheremos o sinal negativo para ϵ , uma vez que, no caso em que $\beta \neq 2$, recuperamos os espaços-tempo descritos no Quadro (1). Para o caso em que $\beta = 2$, a escolha é feita por razões de consistência para ter o efeito da matéria escura.

Assim, com estas considerações, a Eq. (5.141) pode ser escrita como

$$g(r) = 1 - \frac{2mr^2}{(q^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{\epsilon b[1 + 2 \log(r)]}{2r}. \quad (5.163)$$

Podemos obter M a partir da condição $g(r_+) = 0$. Neste caso particular, a massa é dada por:

$$M = \frac{3b\epsilon(2 \log(r_+) + 1) - 2\Lambda r_+^3 + 6r_+}{12r_+^3 (q^2 + r_+^2)^{-3/2}}. \quad (5.164)$$

Agora, podemos determinar a temperatura utilizando a relação apropriada na Eq. (5.162). O resultado é

$$T_H = -\frac{\sqrt{q^2 + r_+^2}}{8\pi r_+^5} \left(bq^2\epsilon [6 \log(r_+) + 1] + 4q^2 r_+ - 2b\epsilon r_+^2 + 2\Lambda r_+^5 - 2r_+^3 \right). \quad (5.165)$$

Por outro lado, podemos obter a temperatura do buraco negro a partir da gravidade superficial, T_κ , a qual é dada por

$$T_\kappa = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (5.166)$$

com a gravidade superficial κ definida como

$$\kappa = \left. \frac{g'(r)}{2} \right|_{r=r_+}, \quad (5.167)$$

onde r_+ é o raio do horizonte de eventos. Agora, considerando a Eq. (5.163) e usando a expressão da massa do buraco negro dado pela Eq. (5.164), obtemos:

$$T_\kappa = \frac{2r_+ (ber_+ - 2q^2 - \Lambda r_+^4 + r_+^2) - bq^2\epsilon (6 \log(r_+) + 1)}{8\pi r_+^2 (q^2 + r_+^2)}. \quad (5.168)$$

Podemos notar que a temperatura T_κ é diferente de T_H assim como outras quantidades derivadas da primeira lei da termodinâmica terão o mesmo problema. Na literatura, alguns trabalhos consideram o ponto de partida para a termodinâmica, a gravidade superficial, e a entropia é dada por $dS = \frac{dM}{T}$ onde T é a temperatura definida pela Eq. (5.166) [168, 169, 39]. No entanto, outros trabalhos partem da primeira lei e utilizam a relação entre a entropia e a área [38, 170]. Essas duas abordagens levam aos mesmos resultados para alguns casos de buracos negros, como os buracos negros de Schwarzschild, entre outras configurações. No entanto, para situações em que o buraco negro é do tipo regular, essas abordagens divergem uma da outra. Para resolver este problema, é necessário modificar a primeira lei da termodinâmica antiga, introduzindo um fator de correção [131, 171]. A nova primeira lei é escrita como

$$d\mathcal{M} = TdS + \Phi dq + VdP, \quad (5.169)$$

onde

$$d\mathcal{M} = W(r_+, q)dM, \quad (5.170)$$

e $W(r_+, q)$ é o fator de correção, dado por

$$W(r_+, q) = \left(1 + 4\pi \int_{r_+}^{\infty} r^2 \frac{\partial T_0^0}{\partial M} \right), \quad (5.171)$$

e T_0^0 é uma das componentes do tensor energia-momento.

Agora, para o caso do buraco negro de Bardeen com uma constante cosmológica e rodeado por um fluido de cordas, as relações entre as temperaturas, o potencial magnético e o volume são as seguintes

$$T_\kappa = W(r_+, q)T_H = W(r_+, q)\frac{\partial M}{\partial S}, \quad (5.172)$$

$$\Phi = W(r_+, q)\Phi_H = W(r_+, q)\frac{\partial M}{\partial q}, \quad (5.173)$$

$$V = W(r_+, q)V_H = W(r_+, q)\frac{\partial M}{\partial P}, \quad (5.174)$$

com o fator $W(r_+, q)$, que é independente do parâmetro β , e dado por

$$W(r_+, q) = \frac{r_+^3}{(q^2 + r_+^2)^{3/2}}. \quad (5.175)$$

A Fig. 37a mostra a relação entre a temperatura e a carga magnética, q , que está associada ao buraco negro de Bardeen. Podemos observar que, se fixarmos um valor para r_+ , a temperatura diminui à medida que o parâmetro q aumenta. Na Fig. 37b é mostrado o comportamento da temperatura em termos do parâmetro b , associado à intensidade do fluido de cordas.

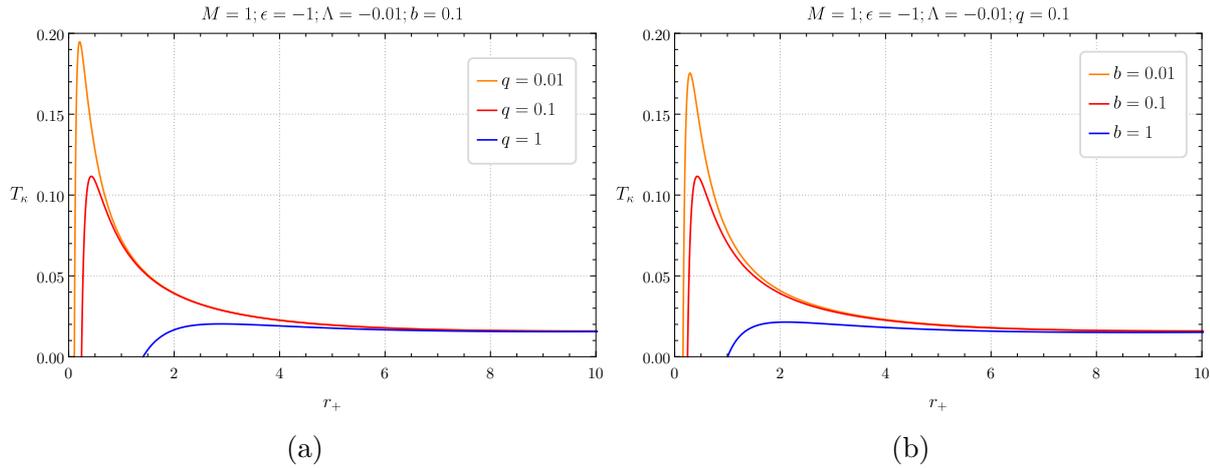


Figura 37 – Representação gráfica da temperatura T_κ para diferentes valores de q e b .

5.2.4.1 Capacidade térmica

No contexto da termodinâmica, a capacidade térmica de um corpo é definida pela relação, $Q/\Delta T$, entre o calor recebido e o correspondente incremento na sua temperatura ΔT . No limite $\Delta T \rightarrow 0$, e, para pequenas quantidades de calor, temos $Q = T\Delta S$, onde ΔS é o incremento, e a capacidade térmica é dada por $C = TdS/dT$.

É importante distinguir como o calor é recebido no sistema. Se o volume é constante, temos uma capacidade térmica isocórica C_v . Se a pressão for constante, temos a capacidade térmica isobárica C_P . A análise da capacidade térmica indica os cenários de estabilidade dos processos termodinâmicos, que requerem $C_P \geq C_v \geq 0$. Agora, a partir da termodinâmica dos buracos negros e considerando o caso de pressão constante, temos

$$C_P = T_\kappa \left. \frac{\partial S}{\partial T_\kappa} \right|_P. \quad (5.176)$$

Podemos escrever também esta capacidade térmica em termos do fator $W(r_+, q)$, como

$$C_P = W(r_+, q) \frac{\partial T_H}{\partial T_\kappa} \tilde{C}_P, \quad (5.177)$$

onde $\tilde{C}_P = T_H \frac{\partial S}{\partial T_H}$ é a capacidade térmica definida pela primeira lei usual. Assim, a capacidade térmica do buraco negro de Bardeen com constante cosmológica e rodeado por um fluido de cordas é

$$\begin{aligned} C_P = & \left\{ S (\pi q^2 + S) \left(2\sqrt{S} \left(-2\pi q^2 - \frac{\Lambda}{\pi} S^2 + S \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{\pi} + b\epsilon (2S - \pi q^2) - 3\pi^{3/2} b q^2 \epsilon \log \left(\frac{S}{\pi} \right) \right) \right\} \times \\ & \left\{ q^4 \left(2\pi^2 \sqrt{S} - 2\pi^{5/2} b \epsilon \right) - 2\sqrt{\pi} b S^2 \epsilon - \frac{\Lambda}{\pi} S^{7/2} \right. \\ & \left. - S^{5/2} + q^2 \left(\pi S^{3/2} \left(\frac{-3\Lambda}{\pi} S + 7 \right) - \pi^{3/2} b S \epsilon \right) \right. \\ & \left. + 3\pi^{3/2} b q^2 \epsilon (\pi q^2 + 2S) \log \left(\frac{S}{\pi} \right) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.178)$$

A relação entre a capacidade térmica e a entropia é mostrada na Fig. 38a para q variável e b fixo, e na Fig. 38b para o parâmetro b variável e q fixo. Conforme os gráficos, existem valores positivos e negativos de C_p , e estes resultados indicam que a solução é termodinamicamente estável para alguns valores da entropia. Outro resultado interessante é que para alguns valores de (q, b) temos duas descontinuidades, o que indica que temos duas transições de fase.

5.2.4.2 Equação de estado e variáveis termodinâmicas críticas

No estudo da termodinâmica, um assunto importante é a equação de estado, que pode ser analisada pelas equações de Van der Waals, considerando, aproximadamente, o comportamento de fluidos reais. Para isso, precisamos de um parâmetro termodinâmico relacionado à pressão mecânica dos buracos negros e, como proposto por Kastor e colaboradores [73], podemos considerar a constante cosmológica negativa como sendo um parâmetro termodinâmico, associado a pressão,

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (5.179)$$

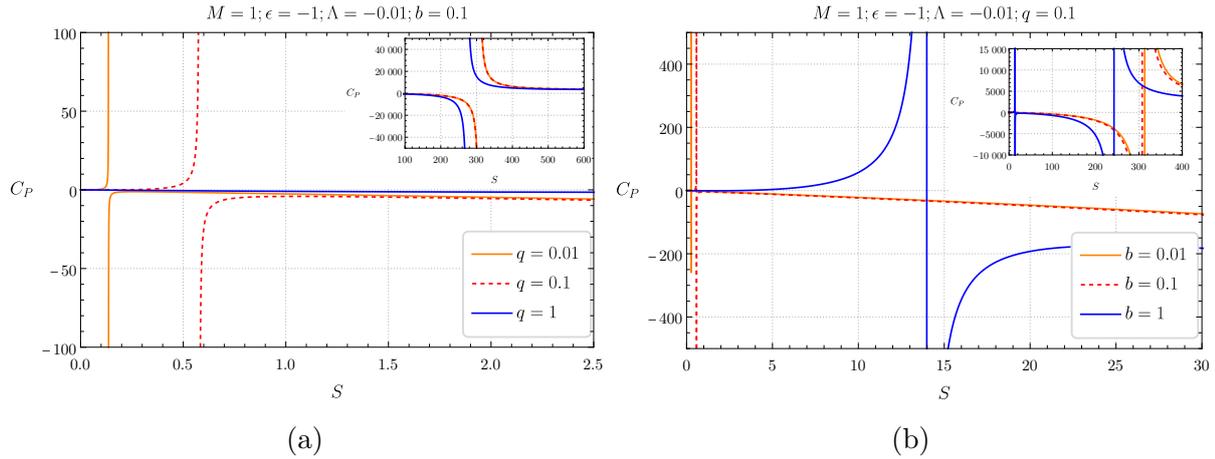


Figura 38 – Representação gráfica da capacidade térmica C_p para diferentes valores de q e b .

Seguiremos Kubiznack e Mann [172] para definir o volume específico como $v = 2l_P^2 r_+$, enquanto o comprimento de Planck é $l_P^2 = \frac{\hbar GN}{c^3}$. Portanto, a Eq. (5.166) relaciona pressão, temperatura e volume, permitindo-nos estudar as transições de fase do buraco negro num diagrama $P - v$. Em outras palavras, usaremos o raio do horizonte r_+ , em vez do volume termodinâmico V , que deve estar associado ao volume do fluido.

Substituindo a Eq. (5.179) em (5.168), e resolvendo em termos da pressão, obtemos

$$P = \frac{8\pi q^2 T - 2b\epsilon}{2\pi v^3} + \frac{24bq^2\epsilon \log\left(\frac{v}{2}\right) + 4bq^2\epsilon}{2\pi v^5} + \frac{4q^2}{\pi v^4} + \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2}. \quad (5.180)$$

O diagrama “ $P - v$ ” correspondente está representado na Fig. 39a e Fig. 39b, nas quais podemos observar que para valores de $q = 1$ ou $b = 1$ o ponto verde que indica o valor do ponto crítico é muito pequeno em comparação com as outras curvas com valores de q ou b menor que 1.

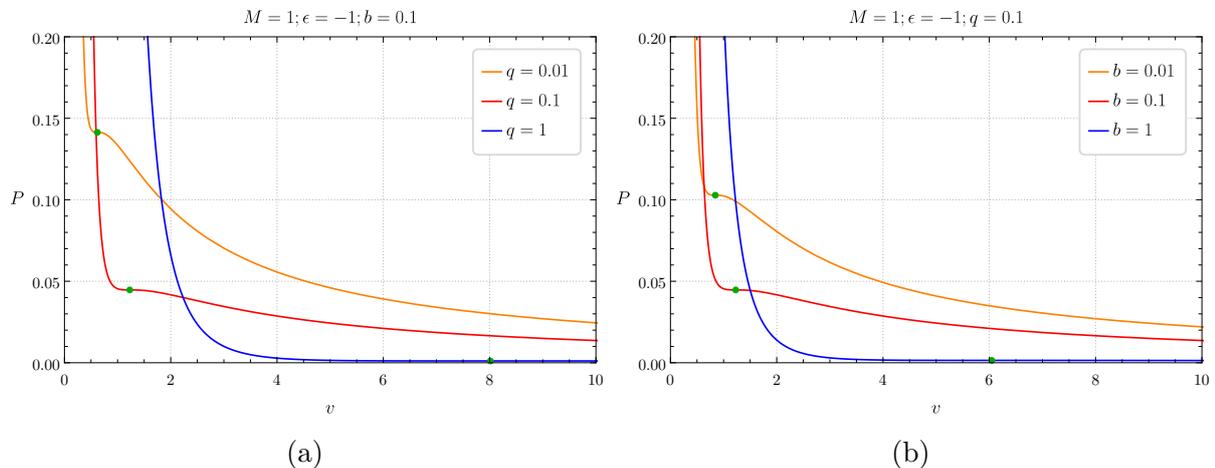


Figura 39 – Representação gráfica do diagrama de fase $P - v$ para diferentes valores de q e b .

No que segue, analisaremos os pontos críticos. Podemos determinar os pontos críticos através das condições abaixo:

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0. \quad (5.181)$$

Usando as Eqs. (5.180) e (5.181) chegamos ao seguinte resultado

$$96bq^4\epsilon \left(15 \log \left(\frac{v_c}{2} \right) - 8 \right) - 6b\epsilon v_c^4 + 192q^4 v_c + 4bq^2\epsilon v_c^2 \left(60 \log \left(\frac{v_c}{2} \right) - 17 \right) + 60q^2 v_c^3 - v_c^5 = 0, \quad (5.182)$$

para temperatura crítica, volume específico crítico e pressão crítica, T_c , v_c , e p_c , respectivamente. No entanto, estes valores só são encontrados numericamente, os quais apresentamos no Quadro (2) e (3). Os valores estão descritos para duas situações específicas, a saber: uma das quais considera diferentes valores para o parâmetro associado ao buraco negro de Bardeen q e a outra na qual considera diferentes valores para o parâmetro associado ao fluido de cordas b .

Quadro 2 – Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , p_c e $\frac{p_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de q e para $\epsilon = -1$ e $b = 0.1$

q	v_c	T_c	p_c	$\frac{p_c v_c}{T_c}$
0.01	0.618847	0.260476	0.141365	0.33586
0.1	1.22809	0.151917	0.0446783	0.361177
1	8.01563	0.0244046	0.00110936	0.364365

Quadro 3 – Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , p_c e $\frac{p_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de b e para $\epsilon = -1$ e $q = 0.1$

b	v_c	T_c	p_c	$\frac{p_c v_c}{T_c}$
0.01	0.84467	0.235913	0.102794	0.368048
0.1	1.22809	0.151917	0.0446783	0.361177
1	6.04524	0.0263607	0.00145462	0.333585

Com a equação de estado, podemos obter algumas informações sobre a transição de um buraco negro. O máximo e o mínimo de p em função de v são conhecidos como a curva spinodal. Esta curva separa a região (instável) de compressibilidade negativa da região de compressibilidade positiva (onde o estado pode ser estável ou metaestável). Esta curva é encontrada resolvendo T na Eq. (5.181) e substituindo-a na Eq. (5.180), o que resulta em

$$p_{spi.} = \frac{-32q^4(v - 2b\epsilon) + 4q^2v^2(2b\epsilon - 7v) - 96bq^2\epsilon(2q^2 + v^2) \log\left(\frac{v}{2}\right) + v^4(4b\epsilon + v)}{2\pi v^5(12q^2 + v^2)}. \quad (5.183)$$

Outra informação interessante sobre a transição de fase é dada pela construção de Maxwell. Esta análise indica o intervalo de miscibilidade, o qual é uma região de duas fases que separa as fases estáveis. No caso do fluido de van der Waals, este intervalo separa o líquido estável do vapor estável. No contexto da termodinâmica dos buracos negros, isto indica a região que separa as fases pequena e grande do buraco negro. Uma maneira simples de determinar graficamente o intervalo de miscibilidade é usar a construção de Maxwell de áreas iguais.

Podemos ver a curva spinodal e a construção de Maxwell para um diagrama de fase na Fig. 40. A linha azul é a isoterma crítica; as linhas laranja são as isotermas com temperaturas abaixo da temperatura crítica; e as linhas vermelhas são as isotermas com temperaturas acima da temperatura crítica. Além disso, a linha contínua roxa é a curva spinodal e a linha tracejada roxa é a linha de coexistência entre as fases.

Na Fig. 40, há transição de fase para $T < T_c$, enquanto para $T > T_c$ há uma única fase. Além disso, temos seis pontos, dos quais três pontos, a , c e e , possuem a mesma pressão p_0 e estão na linha tracejada roxa que representa a linha de coexistência entre duas fases. Já os pontos b e d são os pontos de máximo e mínimo, respectivamente, que estão na linha contínua roxa, que representa a curva spinodal. Podemos notar também que a área A_1 tem o mesmo valor que A_2 , como era de se esperar da construção de Maxwell.

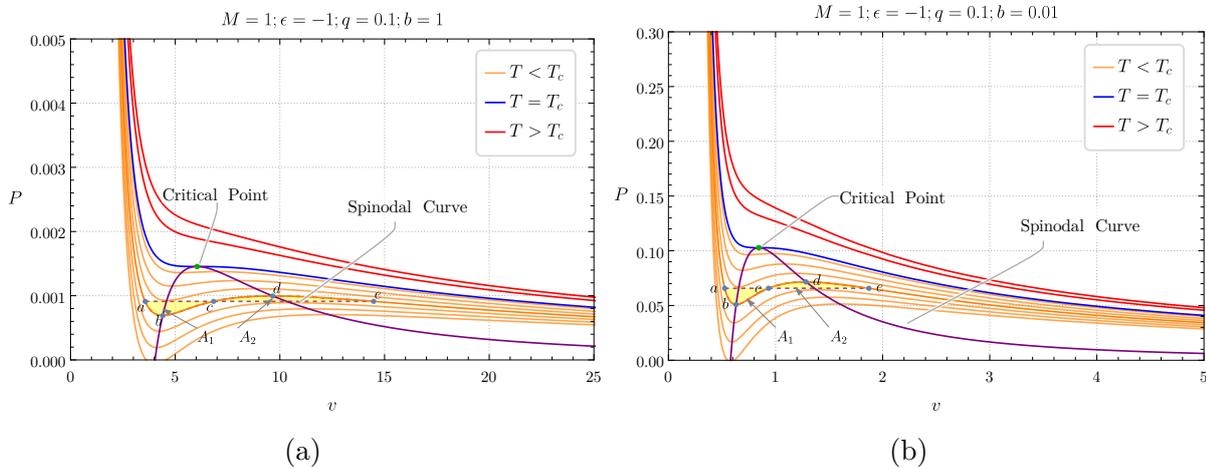


Figura 40 – Conjunto de representações gráficas da equação de estado para diferentes valores de b e q .

5.2.4.3 Energia livre de Helmholtz

A transição de fase também pode ser verificada pela análise da energia livre de Helmholtz, F , dada por

$$F = M - TS. \quad (5.184)$$

Onde M e S são dados pelas Eqs. (5.164) e (5.161), respectivamente, a partir do qual obtemos

$$F = \frac{b\epsilon(6 \log(r_+) + 1) + 8\pi T r_+^2 + 4r_+}{12r_+^5 (g^2 + r_+^2)^{-5/2}} - \pi T r_+^2. \quad (5.185)$$

Nas Figs. 41a e 41b mostramos o comportamento da energia livre de Helmholtz para diferentes valores de q e b com a temperatura crítica e os respectivos pontos críticos.

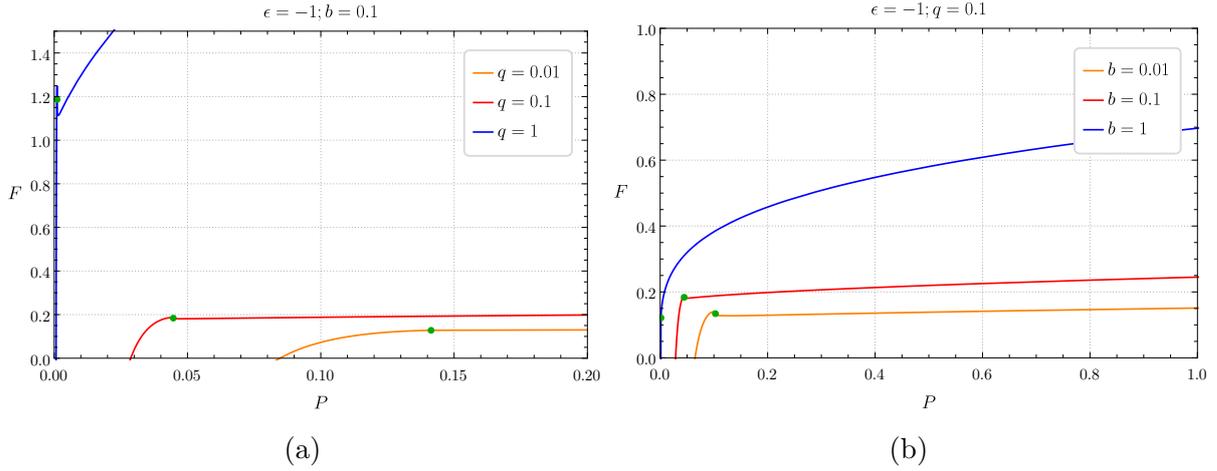


Figura 41 – Representação gráfica da energia livre de Helmholtz para diferentes valores de q e b .

Na Fig. 42 mostramos a energia livre de Helmholtz para diferentes valores de temperatura. Para $T < T_c$ temos uma transição de fase; quando a temperatura aumenta, as duas fases tornam-se apenas uma.

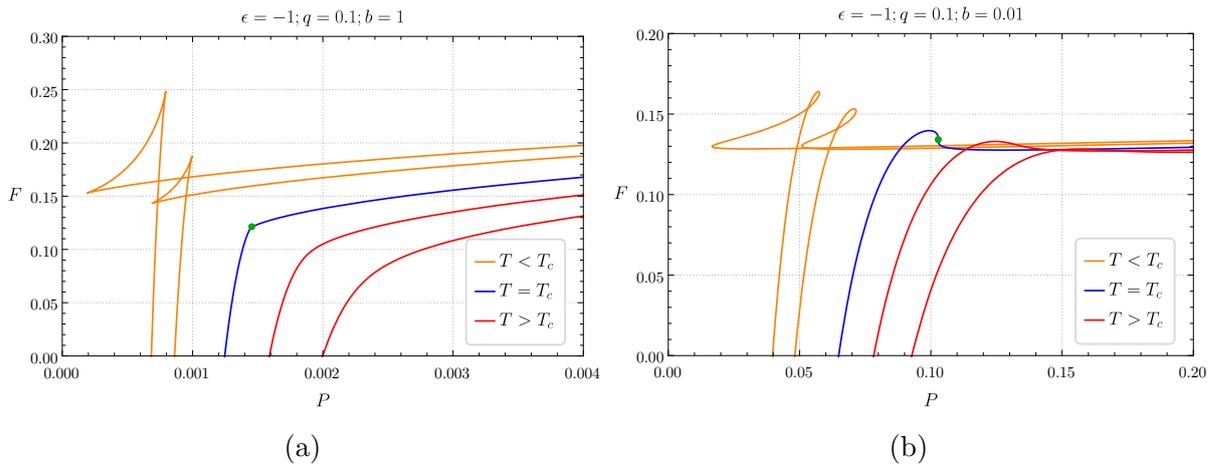


Figura 42 – Conjunto de representações gráficas da equação de Helmholtz para diferentes valores de b e q .

A Fig. 43 representa um zoom da Fig. 42. Neste último gráfico, usamos a mesma temperatura $T = 0,86T_c$ usada na Fig. 40 para o diagrama de fases. Repare que os pontos a, b, c, d e e indicam as regiões de transição de fase e as transições instável e estável.

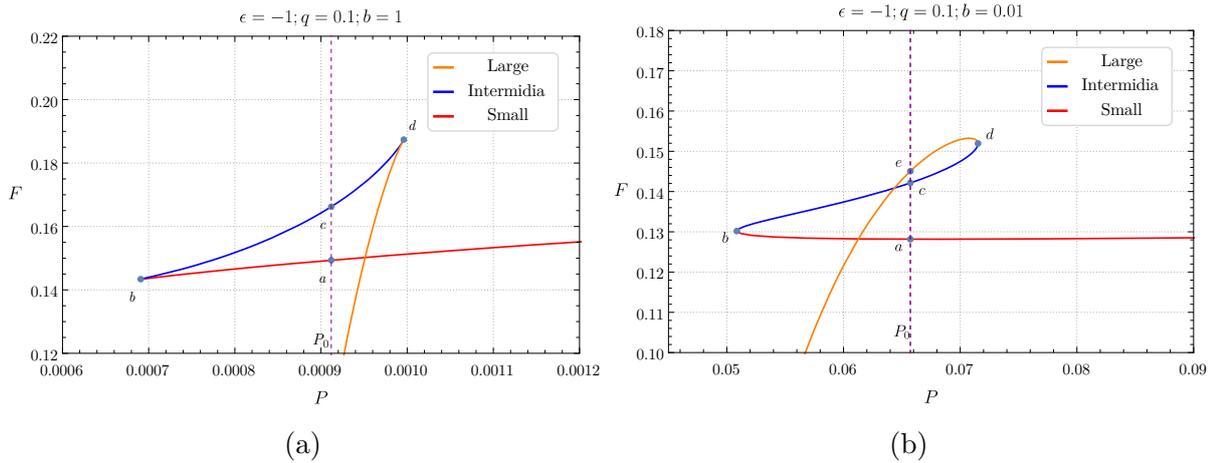


Figura 43 – Conjunto de representações gráficas da equação de Helmholtz para diferentes valores de b e q com um zoom numa região.

A equação de Helmholtz dá-nos informações sobre a transição de fase. Quando temos uma temperatura abaixo da temperatura crítica, a curva de $F \times P$ tem duas pontas que podem separar a transição de fase. Na Fig. 43, é possível notar esse comportamento. Observe que, na linha vermelha, temos os buracos negros pequenos; na linha azul, temos uma coexistência entre os buracos negros pequenos e grandes, indicada como um buraco negro intermediário; e finalmente, na linha laranja, temos o buraco negro grande. Além disso, os pontos a , c e e têm a mesma pressão, P_0 , pois esses pontos estão na mesma linha de coexistência.

É também possível observar que a energia livre de Helmholtz se altera quando variamos alguns parâmetros; estas variações refletem-se na transição de fase. Assim, quando fixamos $q = 0.1$, e mudamos $b = 1$ para $b = 0.01$, a linha azul diminui, o que indica que o intervalo do buraco negro intermediário diminui. Este efeito pode ser visto na Fig. 43a e na Fig. 43b.

6 Buraco negro de Hayward com nuvem de cordas e fluido de cordas

Para resolver as dificuldades relacionadas com a singularidade da curvatura e as suas consequências, foram propostos alguns modelos de espaço-tempo de buracos negros, cujas métricas e invariantes de curvatura não têm singularidade, ou seja, são regulares em todo espaço, em particular, na origem. Estas métricas correspondem ao que se designa por buracos negros regulares conforme já discutimos no capítulo 3.

Originalmente, a métrica do buraco negro de Hayward foi obtida a partir das equações de Einstein modificadas, sendo que o parâmetro que aparece na solução está relacionado com o nível de energia na região próxima do horizonte do buraco negro [17], que pode ser interpretado como uma constante a atuar neste espaço-tempo. Por outro lado, a solução do buraco negro de Hayward também pode ser obtida no contexto da Teoria da Relatividade Geral acoplada à eletrodinâmica não-linear [10, 11], caso em que o parâmetro mencionado já não é uma constante universal, mas sim uma carga magnética.

Neste capítulo, obteremos a solução do buraco negro de Hayward [17] num cenário com nuvem de cordas [39], generalizaremos a métrica de Hayward para múltiplas fontes, além de obtermos também a solução de Hayward-AdS com um fluido de cordas.

6.1 Algumas observações sobre o buraco negro de Hayward rodeado por uma nuvem de cordas

Nesta seção obteremos a métrica correspondente ao espaço-tempo do buraco negro de Hayward rodeado por uma nuvem de cordas. As consequências da nuvem de cordas na regularidade da solução obtida, bem como nas condições de energia, serão analisadas. Também serão investigados os horizontes, as geodésicas, o potencial efetivo e alguns aspectos da termodinâmica. Compararemos todos os resultados obtidos com os da literatura correspondentes ao buraco negro de Hayward, ou seja, num cenário onde a nuvem de cordas está ausente.

6.1.1 Solução geral

Estamos interessados em obter a solução que descreve o espaço-tempo de Hayward com uma nuvem de cordas. Desta forma, analisaremos esta solução no contexto da relatividade geral.

A ação que descreve a relatividade geral minimamente acoplada à matéria e à nuvem de cordas é dada por

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} L(F) + \int d^4x \sqrt{-g} L_{CS}, \quad (6.1)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$, $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante do tensor métrico, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura, dado pela contração do tensor de Ricci, $L(F)$ é a Lagrangiana da teoria electromagnética não-linear e L_{CS} é a Lagrangiana da nuvem de cordas.

A Lagrangiana da teoria eletromagnética não-linear $L(F)$ [16, 26, 133, 134, 135], associada ao espaço-tempo de Hayward [17], é descrita por,

$$L(F) = \frac{6}{\kappa^2 l^2} \frac{(2l^2 F)^{\frac{3}{2}}}{[1 + (2l^2 F)^{\frac{3}{4}}]^2}. \quad (6.2)$$

A Lagrangiana é uma função não-linear do escalar eletromagnético $F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell-Faraday. Para um espaço-tempo esfericamente simétrico que é apenas magneticamente carregado, a única componente diferente de zero de $F_{\mu\nu}$ é [16]

$$F_{23} = q \sin\theta, \quad (6.3)$$

e o escalar F é

$$F = 2F_{23}F^{23} = \frac{2q^2}{r^4}, \quad (6.4)$$

onde q é a carga magnética. Na Eq. (6.2), l é o parâmetro de Hayward, cujo valor, em princípio, será restrito ao intervalo $0 \leq l < \infty$. É de notar, no entanto, que, no seu trabalho original, Hayward considerou este parâmetro da ordem do comprimento de Planck, e foi então relacionado com uma carga magnética através da definição [16, 26, 133, 134, 135]

$$q = \frac{\sqrt[3]{r_s^2 l}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4m^2 l}}{2}. \quad (6.5)$$

Aqui, $r_s = 2GM/c^2 = 2m$ é o raio de Schwarzschild clássico, M é a massa gravitacional do sistema e m é a massa geométrica. Assim, a condição necessária $q > 0$ corresponde a uma solução de buraco negro com $l > 0$.

Assim, substituindo a Eq. (6.5) na Eq. (6.4), obtemos:

$$F = \frac{\sqrt[3]{r_s^4 l^2}}{2r^4} = \frac{\sqrt[3]{2} (lm^2)^{2/3}}{r^4}, \quad (6.6)$$

e assim, apesar das potências fracionárias de F na Lagrangiana (6.2), a teoria está bem definida.

A ação de Nambu-Goto é utilizada para descrever objetos semelhantes a cordas, dados por [36]

$$S_{CS} = \int d^4x \sqrt{-g} L_{CS} = \int (-\gamma)^{1/2} \mathcal{M} d\lambda^0 d\lambda^1. \quad (6.7)$$

Para a nuvem de cordas temos a seguinte Lagrangiana L_{CS} [36]:

$$L_{CS} = \mathcal{M} \sqrt{-\gamma} = \mathcal{M} \left(-\frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \right)^{1/2}, \quad (6.8)$$

onde \mathcal{M} é uma constante adimensional que caracteriza cada corda e γ é o determinante de γ_{AB} , sendo uma métrica induzida numa subvariedade dada por

$$\gamma_{AB} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^B}, \quad (6.9)$$

onde $x^\mu = x^\mu(\lambda^A)$ descreve a superfície de mundo da corda com λ^0 e λ^1 parâmetros tipo-tempo e tipo-espaço. $\Sigma^{\mu\nu}$ é um bivector escrito como

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{AB} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^B}, \quad (6.10)$$

com ϵ^{AB} sendo o símbolo de Levi-Civita, $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$. Devido à simetria do espaço-tempo, a única componente não-nula do bivector é $\Sigma^{01} = a/\rho r^2$ e depende exclusivamente da coordenada radial. Vale a pena notar que a é uma constante de integração relacionada com as cordas, estando limitada ao intervalo $0 < a < 1$.

Portanto, variando a ação (6.1) com respeito a métrica encontramos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa^2 (T_{\mu\nu}^H + T_{\mu\nu}^{CS}), \quad (6.11)$$

onde o tensor de energia-momento de Hayward ($T_{\mu\nu}^H$) e o tensor de energia-momento para uma nuvem de cordas ($T_{\mu\nu}^{CS}$) são obtidos, respectivamente, por meio das expressões abaixo [16, 36]:

$$T_{\mu\nu}^H = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L(F) - 2\frac{\partial L}{\partial F}F_{\mu}^{\alpha}F_{\nu\alpha}, \quad (6.12)$$

$$T_{\mu\nu}^{CS} = \frac{\rho\Sigma_{\mu}^{\beta}\Sigma_{\beta\nu}}{\kappa^2(-\gamma)^{1/2}}. \quad (6.13)$$

As componentes (0, 0) e (2, 2) do tensor energia-momento de Hayward ($T_{\mu\nu}^H$) e do tensor energia-momento para nuvem de cordas ($T_{\mu\nu}^{CS}$) são dadas, respectivamente, por:

$$T_{00}^H = \frac{f(r)}{2}L(F) = \frac{6f(r)(2l^2F)^{3/2}}{2\kappa^2l^2[(2l^2F)^{3/4}+1]^2} = \frac{f(r)}{\kappa^2}\frac{12l^2m^2}{(2l^2m+r^3)^2}. \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} T_{22}^H &= \frac{1}{2}g_{22}L(F) - 2\frac{\partial L}{\partial F}F_2^{\alpha}F_{2\alpha} \\ &= -\frac{r^2}{2}\frac{6}{\kappa^2l^2}\frac{(2l^2F)^{3/2}}{[1+(2l^2F)^{3/4}]^2} + \frac{2q^2}{r^2}\frac{18\sqrt{2}\sqrt{F}l}{\kappa^2(2^{3/4}F^{3/4}l^{3/2}+1)^3} \\ &= \frac{24l^2m^2r^2(r^3-l^2m)}{\kappa^2(2l^2m+r^3)^3}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$T_{00}^{CS} = \frac{f(r)}{\kappa^2}\frac{a}{r^2}, \quad T_{22}^{CS} = 0. \quad (6.16)$$

Substituindo as Eqs. (6.14)-(6.16) na Eq. (6.11), obtemos as seguintes equações diferenciais

$$\frac{1}{r^2} - \frac{a}{r^2} - \frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} - \frac{12l^2m^2}{(2l^2m+r^3)^2} = 0, \quad (6.17)$$

$$\frac{1}{2}r^2f''(r) + rf'(r) - \frac{24l^2m^2r^2(r^3-l^2m)}{(2l^2m+r^3)^3} = 0. \quad (6.18)$$

Multiplicando a Eq. (6.17) por r^2 e a Eq. (6.18) por 2, somando os resultados, obtemos:

$$1 - a - f(r) + rf'(r) + r^2f''(r) - \frac{12l^2m^2r^2}{(2l^2m+r^3)^2} - \frac{48l^2m^2r^2(r^3-l^2m)}{(2l^2m+r^3)^3} = 0. \quad (6.19)$$

Resolvendo a equação diferencial acima, temos

$$f(r) = 1 - a + \frac{4l^2m^2}{2l^2mr+r^4} + \frac{C_1}{r} + C_2r, \quad (6.20)$$

onde podemos adotar $C_1 = -2m$ e $C_2 = 0$. Assim, obtemos finalmente a solução de Hayward com uma nuvem de cordas:

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}\right) dt^2 - \left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (6.21)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Note que, se $a = 0$, obtemos a métrica de Hayward [17] dada pela Eq. (3.72). Se $l = 0$, a métrica (6.21) torna-se semelhante ao espaço-tempo de Letelier (4.65) [36].

Assim, para a métrica dada pela Eq. (6.21), o escalar de Kretschmann é

$$K = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{4a^2}{r^4} + \frac{16am}{q^3r^2 + r^5} + \frac{48m^2(r^{12} - 4r^9q^3 + 18r^6q^6 - 2r^3q^9 + 2q^{12})}{(r^3 + q^3)^6}. \quad (6.22)$$

Agora, determinemos o valor destes resultados nos limites $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{4a^2}{r^4} + \frac{16am}{q^3r^2 + r^5} + \frac{48m^2(r^{12} - 4r^9q^3 + 18r^6q^6 - 2r^3q^9 + 2q^{12})}{(r^3 + q^3)^6} \right) = \infty, \quad (6.23)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{4a^2}{r^4} + \frac{16am}{q^3r^2 + r^5} + \frac{48m^2(r^{12} - 4r^9q^3 + 18r^6q^6 - 2r^3q^9 + 2q^{12})}{(r^3 + q^3)^6} \right) = 0. \quad (6.24)$$

Portanto, a partir da análise do escalar de Kretschmann, no limite $r \rightarrow 0$, concluímos que a inclusão da nuvem de cordas influencia a métrica, destruindo a regularidade, e como consequência, introduzindo uma singularidade. Em outras palavras, a métrica do buraco negro de Hayward com uma nuvem de cordas é singular na origem ($r = 0$).

6.1.2 Horizontes do buraco negro

No que se segue, estudamos os horizontes do espaço-tempo do buraco negro de Hayward, dados pelo elemento de linha mostrado na Eq. (6.21). De agora em diante, identifiquemos a função $g(r)$ como

$$g(r) = 1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}. \quad (6.25)$$

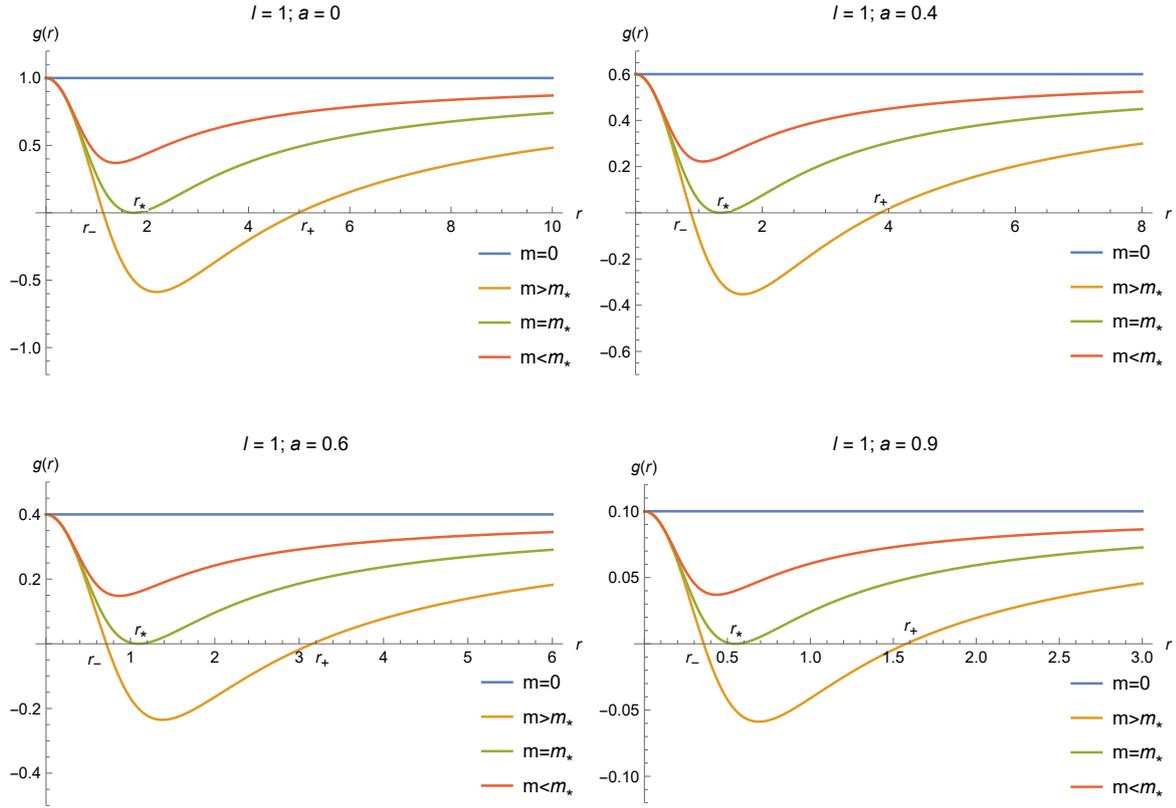


Figura 44 – A função $g(r)$ para $l = 1$ e diferentes valores de m : $m = 0$, $m < m_*$, $m = m_*$ e $m > m_*$.

Analisando as raízes da função $g(r)$, podemos obter uma massa crítica do buraco negro, dada por

$$m_* = \frac{3}{4}\sqrt{3}(1-a)^{3/2}l, \quad (6.26)$$

bem como um valor crítico para a coordenada radial, r , mostrado a seguir

$$r_* = \sqrt{3 - 3al}. \quad (6.27)$$

Considerando apenas valores positivos de r , se a massa do buraco negro for superior à massa crítica, $m > m_*$, $g(r)$ tem duas raízes reais. Se $m = m_*$, $g(r)$ tem uma única raiz real, que é igual a r_* . Finalmente, $g(r)$ não tem raízes reais para $m < m_*$. Se negligenciarmos a nuvem de cordas, $a = 0$, a massa crítica reduz-se a $m_* = (3\sqrt{3}/4)l$ e o raio crítico é $r_* = \sqrt{3}l$, quantidades já obtidas por Hayward [17]. O comportamento descrito de $g(r)$ pode ser observado na Fig. 44.

6.1.3 Geodésicas do buraco negro

Dada a métrica do espaço-tempo, a trajetória das partículas e da luz pode ser descrita pelo movimento geodésico. As equações geodésicas também podem ser obtidas a partir da Lagrangiana dada na equação

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

que, no espaço-tempo do buraco negro de Hayward com uma nuvem de cordas, pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} \right) \dot{t}^2 - \frac{1}{\left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} \right)} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right], \quad (6.28)$$

onde o ponto representa a derivada em relação ao tempo próprio τ . Reescalando o parâmetro τ , podemos definir $L = 2\mathcal{L}$, que, para geodésicas tipo-tempo, é igual a $+1$, para geodésicas tipo-espaço é igual a -1 e é igual a 0 para geodésicas nulas [114].

As equações de Euler-Lagrange são dadas por

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (6.29)$$

Fazendo $\mu = 0$ e $\mu = 3$ na Eq. (6.29), com \mathcal{L} dado por Eq. (6.28), obtemos, respectivamente:

$$\dot{t} = \frac{E}{\left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} \right)}, \quad (6.30)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{J}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (6.31)$$

onde E e J são constantes de movimento que correspondem aos vetores de Killing ∂_t e ∂_ϕ , respectivamente. Podemos interpretar estas constantes como a energia E e o momento angular J da partícula que se move nas proximidades do buraco negro.

Restrinjamos a análise das geodésicas ao plano equatorial do buraco negro, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Fazendo isso, as Eqs. (6.30)-(6.31) reduzem-se a

$$\dot{t} = \frac{E}{\left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} \right)}, \quad (6.32)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{J}{r^2}. \quad (6.33)$$

Substituindo as Eqs. (6.32) e (6.33) na Eq. (6.28), obtemos

$$E^2 = \dot{r}^2 + V_{eff}, \quad (6.34)$$

onde

$$V_{eff} = \left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}\right) \left(\frac{J^2}{r^2} + L\right), \quad (6.35)$$

representa o potencial efetivo para o movimento geodésico no espaço-tempo de um buraco negro de Hayward com uma nuvem de cordas.

Usando a relação

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{dr}{d\tau} \\ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \dot{t}^2 = \dot{r}^2, \end{aligned} \quad (6.36)$$

na Eq. (6.34) e utilizando as Eqs. (6.35) e (6.32), obtemos

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = g(r)^2 \left[1 - \frac{g(r)}{E^2} \left(\frac{J^2}{r^2} + L\right)\right]. \quad (6.37)$$

Movimento radial de uma partícula sem massa

Para o movimento radial ($J = 0$) de uma partícula sem massa ($L = 0$), a Eq. (6.37) pode ser escrita como

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = g(r)^2. \quad (6.38)$$

Substituindo a Eq. (6.25) na Eq. (6.38), obtemos a relação entre as coordenadas t e r , a qual é dada por

$$\pm t = \int \frac{1}{1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}} dr. \quad (6.39)$$

Usando a Eq. (6.34), podemos obter a relação entre a coordenada r e o tempo próprio τ para o movimento radial de uma partícula sem massa, a qual é dada por

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= E^2, \\ \pm \tau &= \frac{r}{E}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Movimento radial de uma partícula massiva

Agora, consideremos o movimento de partículas massivas ($L = 1$) em trajetórias radiais ($J = 0$) nas proximidades do buraco negro. Da Eq. (6.37), obtemos

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = g(r)^2 - \frac{g(r)^3}{E^2}. \quad (6.41)$$

Substituindo a Eq. (6.25) na Eq. (6.41), podemos encontrar a relação entre as coordenadas t e r para o movimento radial da partícula:

$$\pm t = \int \frac{dr}{\sqrt{\left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}\right)^2 - \frac{\left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}\right)^3}{E^2}}}. \quad (6.42)$$

Da Eq. (6.34), obtemos a relação entre o tempo próprio τ e a coordenada radial r :

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - g(r),$$

$$\pm\tau = \int \frac{dr}{\sqrt{E^2 - \left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}\right)}}. \quad (6.43)$$

6.1.4 Potencial efetivo

O comportamento do potencial efetivo (V_{eff}) do movimento geodésico, dado pela Eq. (6.35), pode nos dizer sobre o comportamento de uma partícula massiva ou de uma partícula sem massa próximo do buraco negro. Assim, nas Figs. 45 a 48, representamos os potenciais efetivos para diferentes valores de a e l para geodésicas tipo-tempo e nulas. Em algumas figuras, representamos, em detalhes, o V_{eff} perto do buraco negro (r perto de zero).

Na Fig. 45, representamos o potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-tempo ($L = 1$ e $J^2 = 20$). Podemos observar que, para $l = 0$, não existem geodésicas circulares estáveis, uma vez que os gráficos não mostram um mínimo local para qualquer valor de a . Por outro lado, para $l > 0$, podemos observar a possibilidade da existência de mínimos locais para o potencial efetivo, dependendo do valor do parâmetro da nuvem de cordas a .

Para geodésicas não-radiais tipo-nulo (Fig. 46), podemos observar que, em todos os casos, $V_{eff} \rightarrow 0$ para regiões distantes do buraco negro, $r \rightarrow \infty$. Para $l = 0$, não há geodésicas circulares estáveis, uma vez que os gráficos não mostram mínimo local. A existência de mínimo local do potencial efetivo do movimento de partículas sem massa em torno do buraco negro depende também do parâmetro da nuvem de cordas, como se pode ver na Fig. 46.

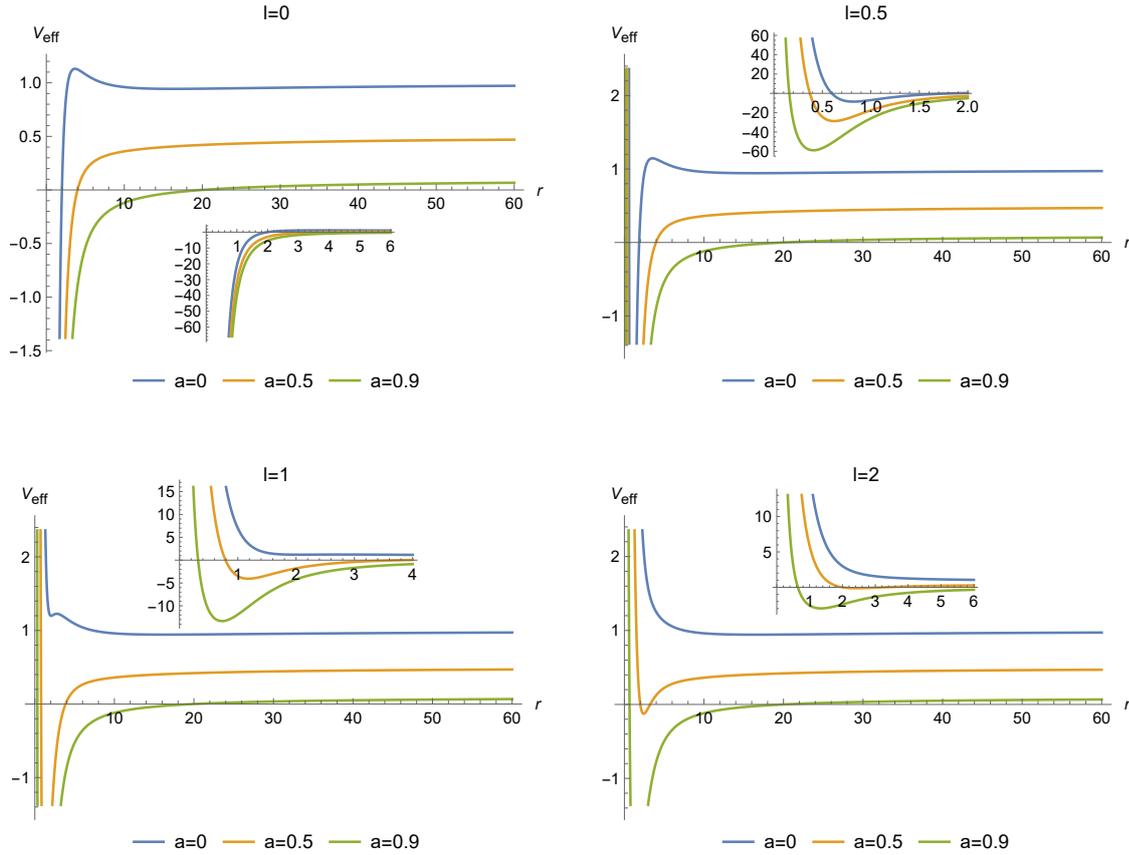


Figura 45 – Potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-tempo ($L = 1$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de a e l .

No que diz respeito ao comportamento das geodésicas radiais tipo-tempo, a Fig. 47 mostra-nos que a estabilidade do movimento radial não ocorre para $l = 0$. Por outro lado, para $l > 0$, existirão sempre geodésicas estáveis.

Finalmente, podemos observar na Fig. 48 que, para geodésicas radiais tipo-nulo ($J^2 = 0$ e $L = 0$), o potencial efetivo é constante e igual a zero, o que, no movimento radial, significa que partículas sem massa serão absorvidas pelo buraco negro.

6.1.5 Condições de energia

Sabe-se que os buracos negros regulares violam as condições de energia [158]. Uma vez que a introdução de uma nuvem de cordas transformou a métrica do buraco negro numa solução singular, é essencial analisar as condições de energia da métrica obtida.

O tensor de energia-momento pode ser escrito como

$$T_{\mu}^{\mu} = \text{diag}[\rho, -p_r, -p_t, -p_t], \quad (6.44)$$

em que ρ é a densidade de energia, p_r é a pressão radial e p_t é a pressão tangencial, dadas

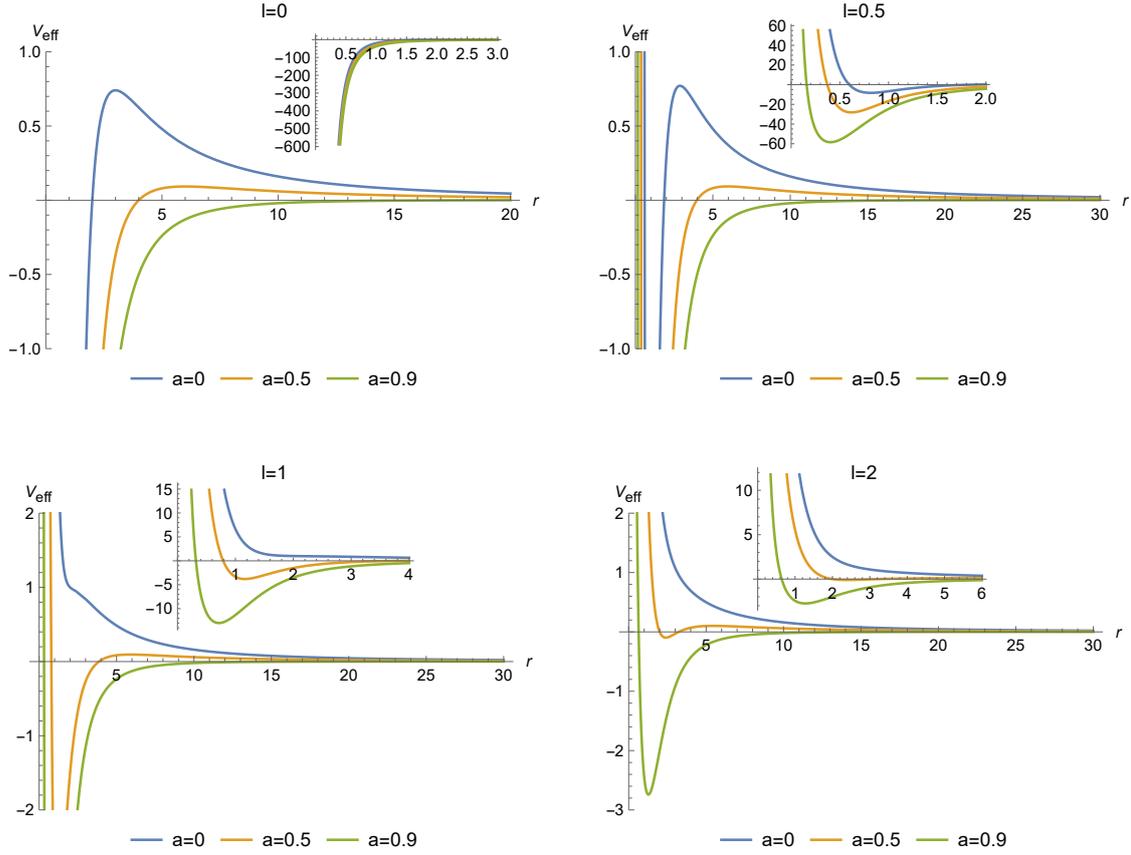


Figura 46 – Potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-nulo ($L = 0$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de a e l .

por

$$\rho = \frac{1 - g(r) - rg'(r)}{\kappa^2 r^2}, \quad (6.45)$$

$$p_r = \frac{rg'(r) + g - 1}{\kappa^2 r^2}, \quad (6.46)$$

$$p_t = \frac{rg''(r) + 2g'(r)}{2\kappa^2 r}. \quad (6.47)$$

Existem quatro condições principais de energia: a condição de energia fraca (WEC), a condição de energia forte (SEC), a condição de energia dominante (DEC) e a condição de energia nula (NEC) [159]. Estas condições podem ser escritas como [40, 160, 159]

$$NEC_{1,2} = WEC_{1,2} = SEC_{1,2} \Leftrightarrow \rho + p_{r,t} \geq 0, \quad (6.48)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow \rho + p_r + 2p_t \geq 0, \quad (6.49)$$

$$DEC_{1,2} \Leftrightarrow \rho - |p_{r,t}| \geq 0, \quad (6.50)$$

$$DEC_3 = WEC_3 \Leftrightarrow \rho \geq 0, \quad (6.51)$$

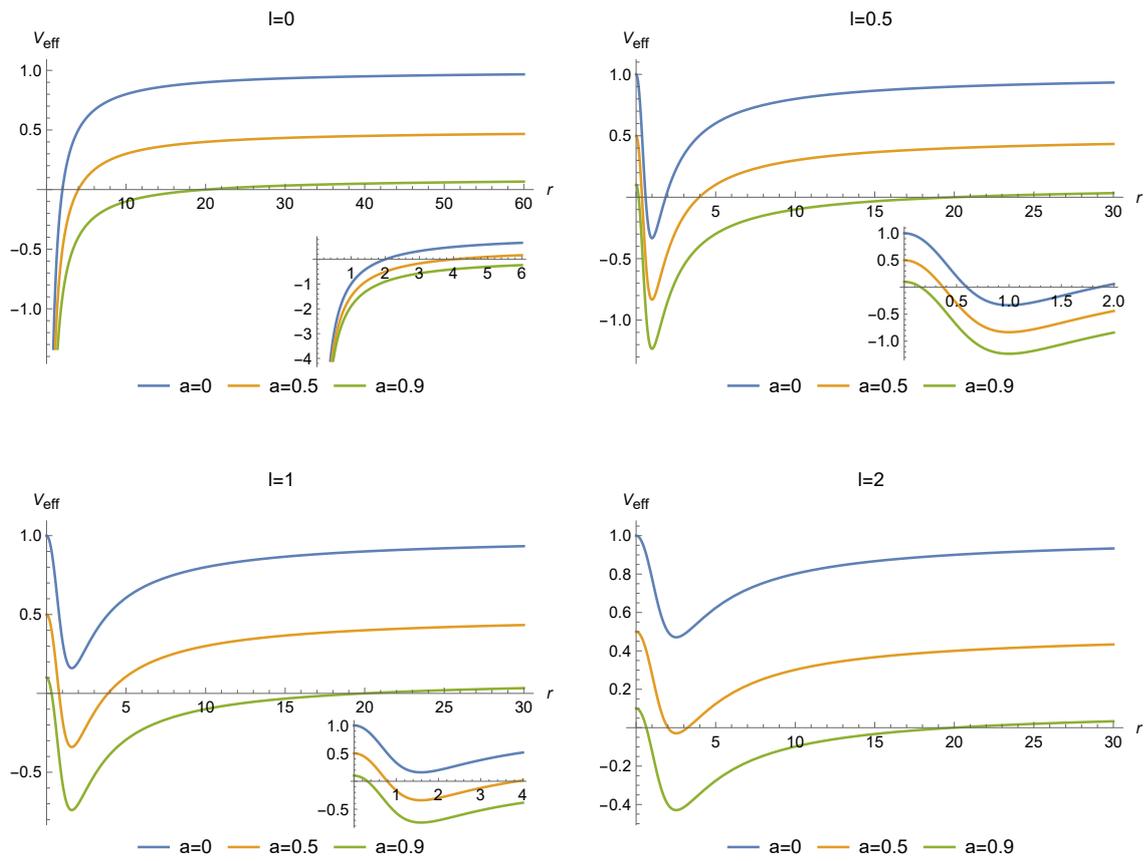


Figura 47 – Potencial efetivo para geodésicas radiais tipo-tempo ($J^2 = 0$ e $L = 1$), para diferentes valores de a e l .

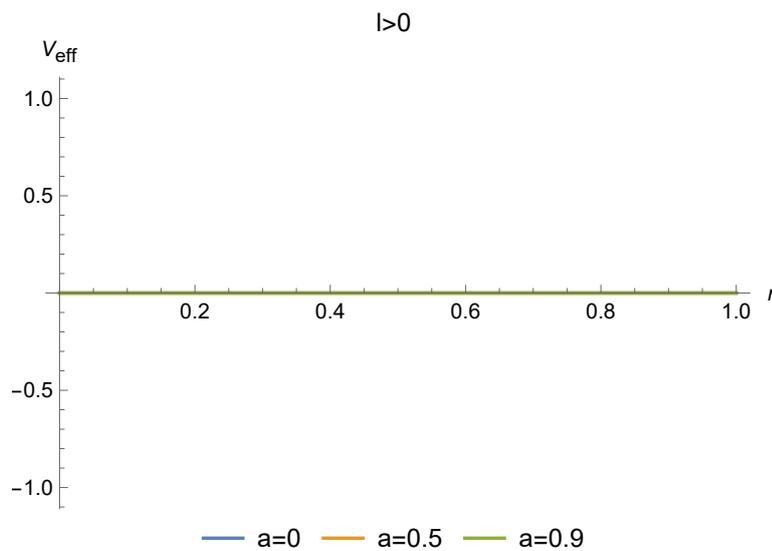


Figura 48 – Potencial efetivo para geodésicas radiais tipo-nulo ($J^2 = 0$ e $L = 0$), para diferentes valores de a e l .

onde os índices 1 e 2 se referem, respectivamente, às componentes radial e tangencial da pressão.

No que se segue, vamos considerar $g(r) > 0$. Assim, as condições de energia são dadas pelas seguintes relações

$$NEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (6.52)$$

$$NEC_2 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{36l^2 m^2 r^3}{\kappa^2 (2l^2 m + r^3)^3} \geq 0, \quad (6.53)$$

$$WEC_3 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{12l^2 m^2}{\kappa^2 (2l^2 m + r^3)^2} \geq 0, \quad (6.54)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow \frac{48m^2 (l^2 r^3 - l^4 m)}{\kappa^2 (2l^2 m + r^3)^3} \geq 0, \quad (6.55)$$

$$DEC_1 \Leftrightarrow \frac{2a}{\kappa^2 r^2} + \frac{24l^2 m^2}{\kappa^2 (2l^2 m + r^3)^2} \geq 0, \quad (6.56)$$

$$DEC_2 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} - \frac{12l^2 m^2 (r^3 - 4l^2 m)}{\kappa^2 (2l^2 m + r^3)^3} \geq 0. \quad (6.57)$$

Se considerarmos o limite $r \rightarrow \infty$, obtemos

$$NEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (6.58)$$

$$NEC_2 \Leftrightarrow 0, \quad (6.59)$$

$$WEC_3 \Leftrightarrow 0, \quad (6.60)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow 0, \quad (6.61)$$

$$DEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (6.62)$$

$$DEC_2 \Leftrightarrow 0. \quad (6.63)$$

Os resultados relativos às condições de energia mostram-nos que, no caso considerado, as condições de energia nula e fraca são claramente satisfeitas. As condições de energia dominante e forte devem ser satisfeitas ou violadas consoante a relação entre os parâmetros. Analisando estas condições para valores muito grande da coordenada radial, concluímos que todas elas são satisfeitas e curiosamente, todas as condições são iguais a zero. Vale a pena mencionar que se considerarmos o caso $g(r) < 0$, as conclusões sobre as condições de energia são as mesmas.

6.1.6 Termodinâmica do buraco negro

Nesta seção, estudamos a termodinâmica do buraco negro de Hayward com uma nuvem de cordas, examinando o comportamento da massa, da temperatura Hawking e da capacidade térmica em função da entropia.

Massa do buraco negro

Seja r_h o raio do horizonte, assim temos que $g(r_h) = 0$, onde $g(r)$ é dado pela Eq. (6.25). Assim, podemos escrever a massa do buraco negro em termos de r_h através da seguinte equação:

$$m = \frac{(1-a)r_h^3}{2(r_h^2 + (a-1)l^2)}, \quad (6.64)$$

escrito em termos do parâmetro que trata da presença da nuvem de cordas, a . Nota-se que se $a = 0$, recuperamos a massa do buraco negro regular de Hayward, sem a nuvem de cordas, em termos do raio do horizonte (3.73). Considerando $l = 0$ e $a = 0$ recuperamos a massa do buraco negro de Schwarzschild (2.62).

A área do horizonte pode ser calculada por

$$A = \int \sqrt{-g} d\theta d\phi = 4\pi r_h^2. \quad (6.65)$$

Por outro lado, a entropia do buraco negro pode ser calculada através da lei de área [62], usando a relação

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_h^2. \quad (6.66)$$

Assim, podemos escrever o parâmetro de massa em função da entropia como

$$m = \frac{(1-a)S^{3/2}}{2\pi^{3/2}\left(\frac{S}{\pi} + (a-1)l^2\right)}. \quad (6.67)$$

Na Fig. 49, representamos o comportamento do parâmetro de massa, m , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações.

Note que, para o buraco negro de Schwarzschild ($a = 0$ e $l = 0$), o parâmetro de massa só apresenta valores positivos para valores positivos da entropia, S . Comportamento semelhante é obtido quando ($l = 0$), assim voltamos ao cenário do buraco negro de Schwarzschild, mas agora, com uma nuvem de cordas, $0 < a < 1$. Se considerarmos o buraco negro de Hayward, é possível notar que o parâmetro de massa tem valores positivos e negativos dependendo dos parâmetros do buraco negro. Isto também se repete quando consideramos a nuvem de cordas no espaço-tempo do buraco negro de Hayward. É

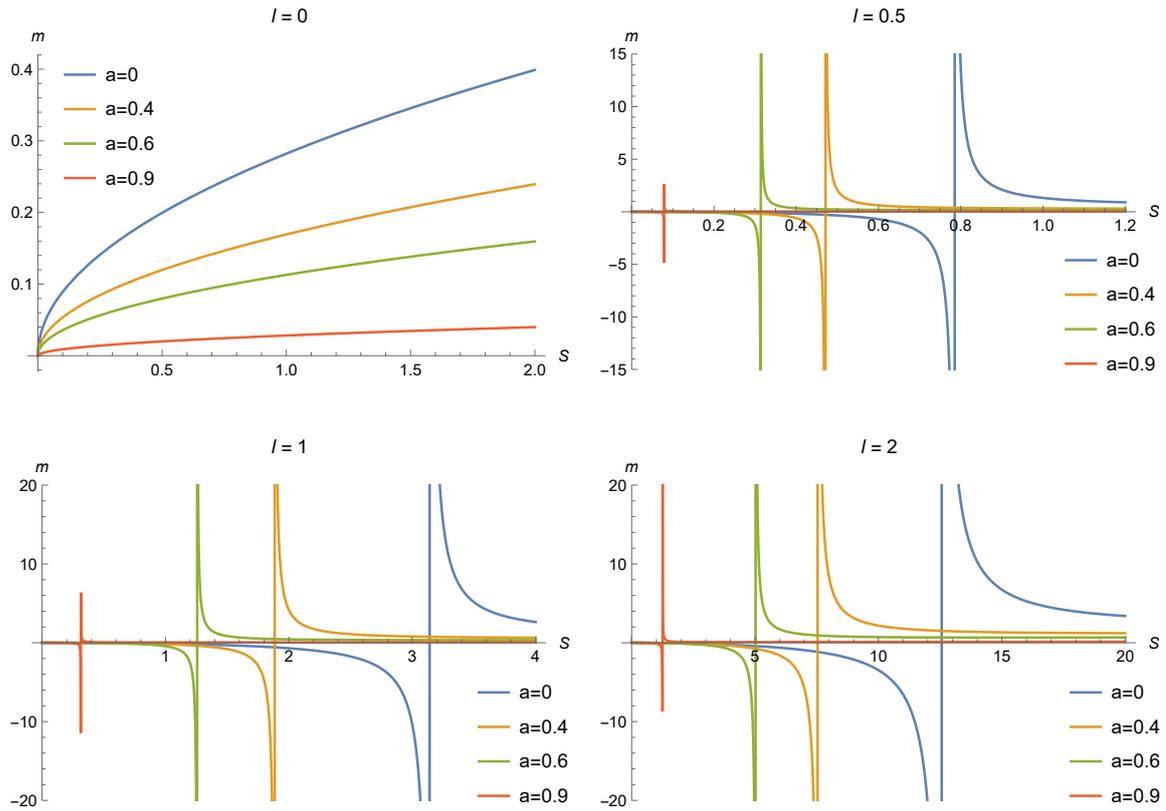


Figura 49 – Massa do buraco negro em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de a e l .

importante notar que o parâmetro da nuvem de cordas modifica o ponto de transição de fase para o buraco negro de Hayward rodeado por essa nuvem.

Temperatura Hawking

A gravidade superficial (κ) para o buraco negro de Hayward com uma nuvem de cordas pode ser calculada usando a seguinte expressão:

$$\kappa = \frac{g'(r)}{2} \Big|_{r_h}, \quad (6.68)$$

com $'$ denotando a derivada em relação à coordenada radial. Hawking mostrou que o buraco negro emite radiação, e que a sua temperatura correspondente, a temperatura Hawking, para um espaço-tempo estacionário, é dada por [64]:

$$T_\kappa = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (6.69)$$

É importante lembrar que para o espaço-tempo de vácuo com simetria esférica, a primeira lei da termodinâmica é dada por

$$dm = T_f dS \rightarrow T_f = \frac{dm}{dS}, \quad (6.70)$$

onde m e S são a energia total e a entropia do sistema, respectivamente, e T_f é a temperatura do buraco negro prevista na primeira lei. Tendo em conta a lei da área dada pela Eq. (6.66), a primeira lei da termodinâmica não fornece uma forma correta de calcular a temperatura de buracos negros regulares [131, 132].

Assim, a temperatura Hawking, T_κ e T_f , para o buraco negro de Hayward obtidas através das equações Eqs. (6.69) e (6.70), respectivamente, não são equivalentes, ou seja, a primeira lei, dada pela Eq. (6.70), não é apropriada para calcular a temperatura correta para buracos negros regulares, uma vez que tais buracos negros não são soluções de vácuo.

Usando a Eq. (6.69) com κ dado por (6.68), é possível calcular a temperatura Hawking, $T_\kappa = T$, para o buraco negro de Hayward com a nuvem de cordas:

$$T = \frac{mr_h(r_h^3 - 4l^2m)}{2\pi(r_h^3 + 2l^2m)^2}. \quad (6.71)$$

Colocando a Eq. (6.64) na Eq. (6.71), obtemos o seguinte resultado

$$T = \frac{(1-a)[r_h^2 + 3(a-1)l^2]}{4\pi r_h^3}. \quad (6.72)$$

Substituindo $r_h = (\frac{S}{\pi})^{1/2}$ na Eq. (6.72), obtemos finalmente a expressão da temperatura Hawking em função da entropia para o buraco negro de Hayward com a nuvem de cordas:

$$T = \frac{(1-a)\sqrt{\pi}[3(a-1)l^2 + \frac{S}{\pi}]}{4S^{3/2}}. \quad (6.73)$$

Na Fig. 50, representamos o comportamento do parâmetro de temperatura, T , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações. Nota-se que para o espaço-tempo de Schwarzschild ($a = 0$ e $l = 0$) o parâmetro de temperatura só apresenta valores positivos para $S > 0$. Analogamente, para o espaço-tempo de Letelier ($l = 0$ e $0 < a < 1$). Quando consideramos o espaço-tempo de Hayward ($l = 1$ e $a = 0$), já é possível notar que o parâmetro de temperatura apresentará valores positivos e negativos dependendo dos parâmetros do buraco negro. Isso também se repete quando consideramos a nuvem de cordas no espaço-tempo de Hayward ($l = 1$ e $0 < a < 1$).

Capacidade térmica

A capacidade térmica fornece informação sobre a estabilidade termodinâmica de um sistema. Podemos calcular a capacidade térmica do buraco negro de Hayward com a nuvem de cordas a partir da seguinte expressão:

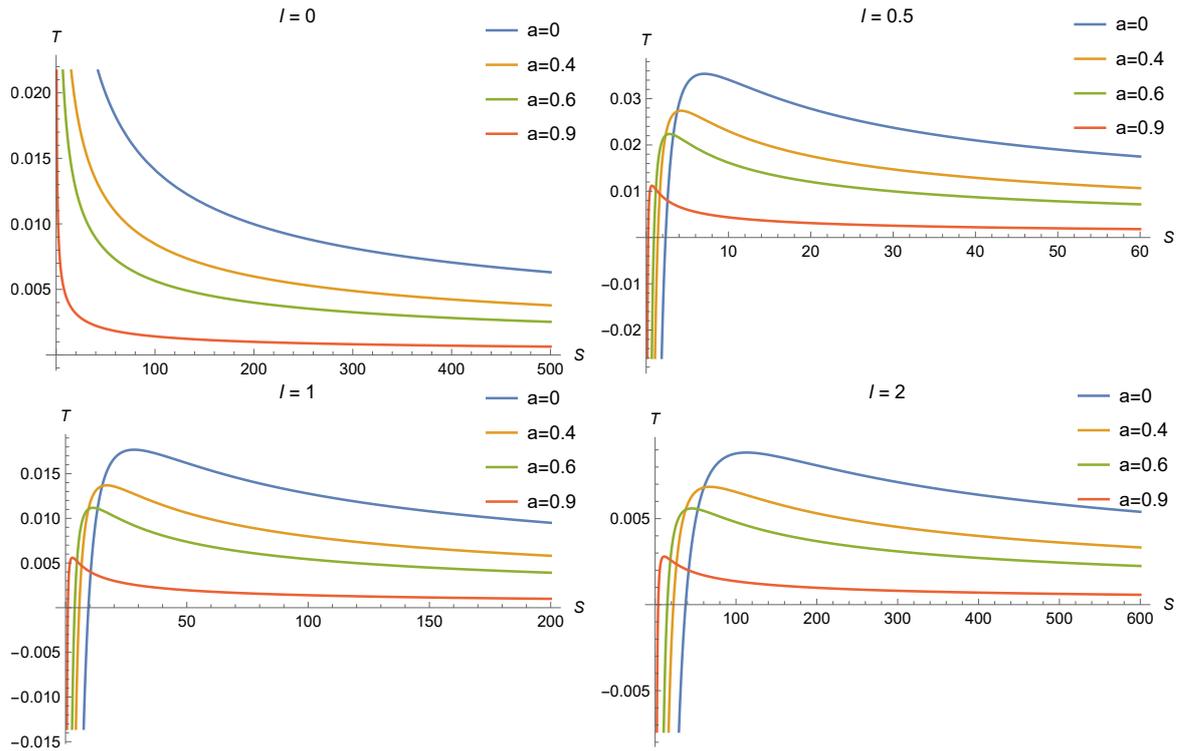


Figura 50 – Temperatura do buraco negro em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de a e l .

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)^{-1}. \quad (6.74)$$

Substituindo a Eq. (6.73) na Eq. (6.74), encontramos a seguinte expressão para a capacidade térmica em função da entropia do buraco negro:

$$C = -\frac{2S[3(a-1)l^2\pi + S]}{9(a-1)l^2\pi + S}. \quad (6.75)$$

O comportamento da capacidade térmica em função da entropia, para diferentes valores de l e a , é dado na Fig. 51. Para $l = 0$, a Eq. (6.75) reduz-se a $C = -2S$, como esperado para o caso do espaço-tempo de Schwarzschild. Neste caso, a capacidade térmica é negativa para $S > 0$, indicando um sistema termodinâmico instável.

Quando consideramos Hayward ($l = 1$, $a = 0$) e o espaço-tempo de Hayward com a nuvem de cordas ($l = 1$, $0 < a < 1$), existem valores para a entropia para os quais a capacidade térmica adquire valores positivos. Isto significa que o buraco negro de Hayward pode ser instável ou estável a depender dos valores de entropia considerados. É importante ressaltar que o parâmetro de cordas desempenha um papel importante no comportamento da capacidade térmica, modificando o ponto de transição de fase. Assim, ao contrário do buraco negro de Schwarzschild, o qual é termodinamicamente instável, o buraco negro de

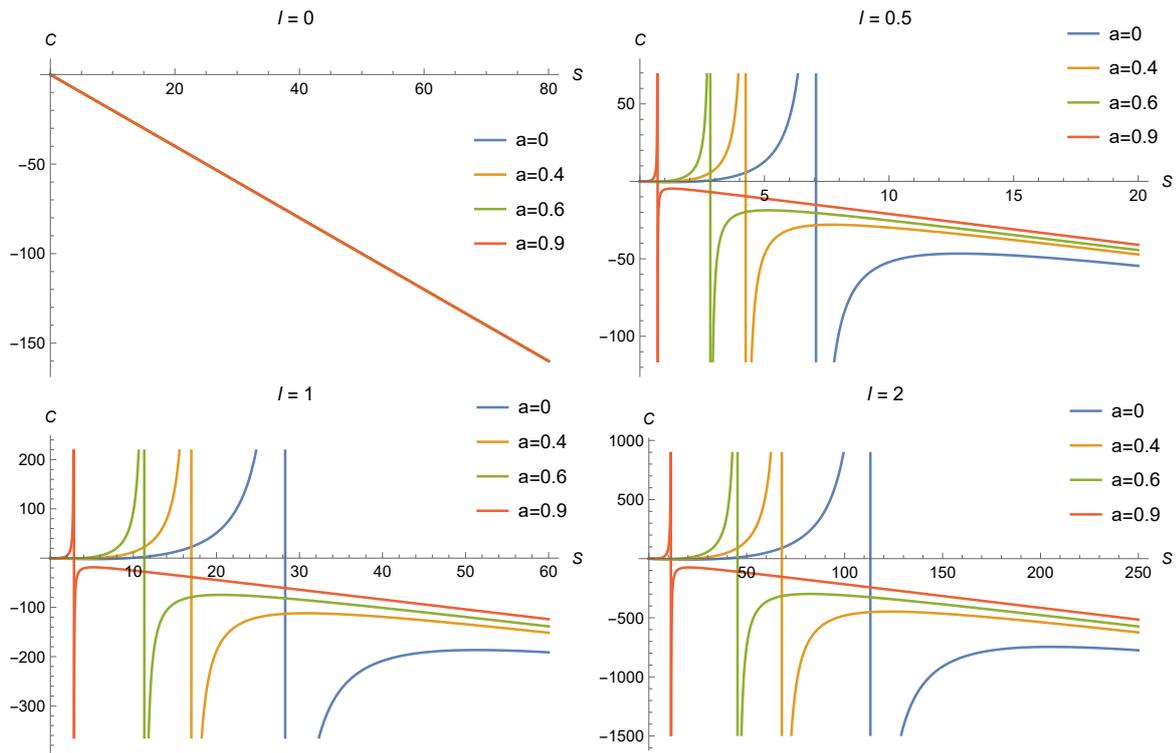


Figura 51 – Capacidade térmica em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de a e l .

Hayward e o buraco negro de Hayward com uma nuvem de cordas apresentam regiões de estabilidade, dependendo dos parâmetros escolhidos.

6.2 BN carregado de Hayward-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas

Nesta seção, obteremos a métrica estática carregada de Hayward-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeada por uma nuvem de cordas, resolvendo as equações de campo da relatividade geral. Faremos também uma análise do escalar de Kretschmann para a solução obtida, assim como para várias outras soluções particulares. Discutiremos as condições de energia associado a solução e as geodésicas do buraco negro.

6.2.1 Solução geral

A ação de Einstein-Hilbert na relatividade geral é a ação que produz as equações de campo de Einstein no vácuo por meio de um princípio variacional. Esta ação está essencialmente relacionada com a curvatura, descrevendo a geometria do espaço, que incluindo a constante cosmológica é dada por:

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda), \quad (6.76)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi Gc^{-4}$, $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante do tensor métrico, Λ é a constante cosmológica e $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura de Ricci, dado pela contração do tensor de Ricci.

As equações de Einstein com fontes de matéria são obtidas quando se adiciona uma Lagrangiana de matéria ao funcional S . Assim, para o modelo que descreveremos nesta seção, o conteúdo material pode ser obtido pela ação geral

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} L(F) + \int d^4x \sqrt{-g} L_E + \int d^4x \sqrt{-g} L_{CS}. \quad (6.77)$$

A Lagrangiana da teoria eletromagnética não-linear associada ao espaço-tempo de Hayward acoplado a um fluido quintessencial $L(F)$ [16, 26, 44, 17, 133, 134, 135, 79] é descrita por,

$$L(F) = \frac{6(2l^2F)^{3/2}}{\kappa^2 l^2 [1 + (2l^2F)^{3/4}]^2} - \frac{6\alpha\omega \left(\frac{F}{2q_m^2}\right)^{\frac{3(\omega+1)}{4}}}{\kappa^2}. \quad (6.78)$$

A Lagrangiana é uma função não-linear do escalar eletromagnético $F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell-Faraday. Para um espaço-tempo esfericamente simétrico que é apenas magneticamente carregado, a única componente diferente de zero de $F_{\mu\nu}$ é [16]

$$F_{23} = q_m \sin\theta, \quad (6.79)$$

e o escalar F é

$$F = 2F_{23}F^{23} = \frac{2q_m^2}{r^4}, \quad (6.80)$$

onde q_m é a carga magnética e l é o parâmetro de Hayward, ambos relacionados pela Eq. (6.5).

Assim, substituindo a Eq. (6.5) na Eq. (6.80), obtemos:

$$F = \frac{\sqrt[3]{r_s^4 l^2}}{2r^4} = \frac{\sqrt[3]{2} (lm^2)^{2/3}}{r^4}. \quad (6.81)$$

Para o campo eletromagnético, a Lagrangiana L_E é dado por [108]:

$$L_E = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (6.82)$$

cujas componentes não-nulas do tensor de Maxwell para um objeto massivo, estático, carregado e esfericamente simétrico são:

$$F_{01} = F_{10} = -F^{01} = E_r = \frac{Q}{r^2}. \quad (6.83)$$

A ação de Nambu-Goto é usada para descrever objeto tipo cordas, dado por [36]

$$S_{CS} = \int d^4x \sqrt{-g} L_{CS} = \int (-\gamma)^{1/2} \mathcal{M} d\lambda^0 d\lambda^1. \quad (6.84)$$

Para a nuvem de cordas temos a seguinte Lagrangiana L_{CS} [36]:

$$L_{CS} = \mathcal{M} \sqrt{-\gamma} = \mathcal{M} \left(-\frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \right)^{1/2}, \quad (6.85)$$

onde \mathcal{M} é uma constante adimensional que caracteriza cada corda e γ é o determinante de γ_{AB} , a qual é uma métrica induzida numa subvariedade dada por

$$\gamma_{AB} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^B}, \quad (6.86)$$

onde $x^\mu = x^\mu(\lambda^A)$ descreve a superfície de mundo da corda com λ^0 e λ^1 parâmetros tipo-tempo e tipo-espaco. $\Sigma^{\mu\nu}$ é um bivector escrito como

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{AB} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^B}, \quad (6.87)$$

com ϵ^{AB} sendo o símbolo de Levi-Civita, $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$. Devido à simetria do espaço-tempo, a única componente não-nula do bivector é $\Sigma^{01} = a/\rho r^2$ e depende exclusivamente da coordenada radial. Vale a pena notar que a é uma constante de integração relacionada com as cordas, estando limitada ao intervalo $0 < a < 1$.

Tal como uma partícula está associada a uma linha de mundo, uma corda está associada a uma superfície de mundo, descrita por $x^\mu(\lambda^A)$ onde λ^0 e λ^1 são parâmetros tipo-tempo e tipo-espaco.

Assim, a ação total que descreve a dinâmica do modelo de buraco negro carregado de Hayward-Kiselev-(anti-) de Sitter com nuvem de cordas é dada por

$$\begin{aligned} S &= S_{EH} + S_m \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} L(F) \\ &\quad + \int d^4x \sqrt{-g} L_E + \int d^4x \sqrt{-g} L_{CS}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Variando a ação (6.88) com relação à métrica, encontramos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2(T_{\mu\nu}^{HK} + T_{\mu\nu}^E + T_{\mu\nu}^{CS}), \quad (6.89)$$

onde o tensor de energia-momento de Hayward-Kiselev ($T_{\mu\nu}^{HK}$), o tensor de energia-momento para o campo eletromagnético ($T_{\mu\nu}^E$) e o tensor de energia-momento para a nuvem de cordas ($T_{\mu\nu}^{CS}$) são dados, respectivamente, por [16, 108, 36]:

$$T_{\mu\nu}^{HK} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L(F) - 2\frac{\partial L}{\partial F}F_{\mu}^{\alpha}F_{\nu\alpha}, \quad (6.90)$$

$$T_{\mu\nu}^E = \frac{1}{\kappa^2} \left(-2g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right), \quad (6.91)$$

$$T_{\mu\nu}^{CS} = \frac{\rho \Sigma_{\mu}^{\beta} \Sigma_{\beta\nu}}{\kappa^2(-\gamma)^{1/2}}. \quad (6.92)$$

Para um espaço-tempo esfericamente simétrico temos o seguinte ansatz:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (6.93)$$

Usando a expressão do elemento de linha dado pela Eq. (6.93), podemos especificar matricialmente todos os elementos do tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (6.94)$$

As únicas componentes não-nulas do tensor de Ricci para o caso de um objeto massivo, estático e esfericamente simétrico são as componentes da diagonal principal, dadas por:

$$R_{00} = \frac{f(r)f''(r)}{2} + \frac{f(r)f'(r)}{r}, \quad (6.95)$$

$$R_{11} = -\frac{f''(r)}{2f} - \frac{f'(r)}{rf(r)}, \quad (6.96)$$

$$R_{22} = 1 - f(r) - rf'(r), \quad (6.97)$$

$$R_{33} = \text{sen}^2\theta R_{22}. \quad (6.98)$$

Para calcular as componentes do tensor de Einstein utilizaremos a seguinte equação:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (6.99)$$

Inicialmente, determinemos o escalar de curvatura:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}. \quad (6.100)$$

Substituindo as Eqs. (6.94), (6.95)-(6.98) na Eq. (6.100), após algumas simplificações, obtemos:

$$R = f''(r) + \frac{4f'(r)}{r} + \frac{2f(r)}{r^2} - \frac{2}{r^2}. \quad (6.101)$$

Assim, a componente G_{00} do tensor de Einstein pode ser obtida fazendo $\mu = 0$ e $\nu = 0$ na Eq. (6.99):

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R. \quad (6.102)$$

Substituindo as Eqs. (6.94), (6.95) e (6.101) em (6.102), obtemos:

$$G_{00} = -\frac{f(r)f'(r)}{r} - \frac{f(r)^2}{r^2} + \frac{f(r)}{r^2}. \quad (6.103)$$

Analogamente, é possível calcular as outras componentes não-nulas do tensor de Einstein:

$$G_{11} = \frac{f'(r)}{rf(r)} - \frac{1}{r^2f(r)} + \frac{1}{r^2}, \quad (6.104)$$

$$G_{22} = \frac{1}{2}r^2f''(r) + rf'(r). \quad (6.105)$$

As componentes (0, 0) e (2, 2) do tensor de energia-momento de Hayward-Kiselev ($T_{\mu\nu}^{HK}$), do tensor de energia-momento para o campo eletromagnético ($T_{\mu\nu}^E$) e do tensor de energia-momento para a nuvem de cordas ($T_{\mu\nu}^{CS}$) são dados, respectivamente, por:

$$T_{00}^{HK} = \frac{12l^2m^2f(r)}{\kappa^2(2l^2m+r^3)^2} - \frac{3\alpha\omega f(r)r^{-3\omega-3}}{\kappa^2}. \quad (6.106)$$

$$T_{22}^{HK} = \frac{24l^2m^2r^2(r^3-l^2m)}{\kappa^2(2l^2m+r^3)^3} - \frac{3\alpha\omega(3\omega+1)r^{-3\omega-1}}{2\kappa^2}. \quad (6.107)$$

$$T_{00}^E = \frac{f(r)Q^2}{\kappa^2 r^4}, \quad T_{22}^E = \frac{1}{\kappa^2} \frac{Q^2}{r^2}. \quad (6.108)$$

$$T_{00}^{CS} = \frac{f(r)a}{\kappa^2 r^2}, \quad T_{22}^{CS} = 0. \quad (6.109)$$

Substituindo as Eqs. (6.103)-(6.109) na Eq. (6.89), obtemos as seguintes equações diferenciais

$$-\frac{a}{r^2} - \frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \Lambda - \frac{12l^2m^2}{(2l^2m+r^3)^2} - \frac{Q^2}{r^4} + 3\alpha\omega r^{-3\omega-3} = 0, \quad (6.110)$$

$$\frac{1}{2}r^2f''(r) + rf'(r) - \frac{24l^2m^2r^2(r^3-l^2m)}{(2l^2m+r^3)^3} - \frac{Q^2}{r^2} + \Lambda r^2 + \frac{3}{2}\alpha\omega(3\omega+1)r^{-3\omega-1} = 0. \quad (6.111)$$

Multiplicando a Eq. (6.110) por r^2 e a Eq. (6.111) por 2, somando os resultados, obtemos:

$$\begin{aligned} & 1 - a - f(r) + rf'(r) + r^2f''(r) \\ & - \frac{12l^2m^2r^2}{(2l^2m+r^3)^2} - \frac{48l^2m^2r^2(r^3-l^2m)}{(2l^2m+r^3)^3} \\ & - \frac{3Q^2}{r^2} + 3\alpha\omega(3\omega+2)r^{-3\omega-1} + \Lambda r^2 = 0. \end{aligned} \quad (6.112)$$

Resolvendo a equação diferencial acima, encontramos:

$$f(r) = 1 - a + \frac{4l^2m^2}{2l^2mr+r^4} + \frac{Q^2}{r^2} - \alpha r^{-3\omega-1} - \frac{\Lambda r^2}{3} + C_2r + \frac{C_1}{r}, \quad (6.113)$$

onde podemos adotar $C_1 = -2m$ e $C_2 = 0$. Assim, simplificando e substituindo a Eq. (6.113) na Eq. (6.93), obtemos finalmente a métrica do buraco negro carregado de Hayward-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas:

$$\begin{aligned}
ds^2 = & + \left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \right) dt^2 \\
& - \left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \right)^{-1} dr^2 \\
& - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2.
\end{aligned} \tag{6.114}$$

Para o limite $a \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ e $Q \rightarrow 0$, encontramos a solução Hayward-(anti-) de Sitter e para $l \rightarrow 0$, $a \rightarrow 0$ e $Q \rightarrow 0$, encontramos a solução de Kiselev-(anti-) de Sitter.

6.2.2 Análise do escalar de Kretschmann

Um critério para testar a existência de singularidades de uma métrica é examinar as quantidades invariantes de coordenadas construídas com $R_{\mu\nu}$ ou $R_{\mu\nu\sigma\rho}$. Existe um número finito de possibilidades para construir estes invariantes. Consideraremos uma delas, designada por escalar de Kretschmann dado por $K = R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}$.

Nesta seção, vamos calcular o escalar de Kretschmann para o buraco negro carregado de Hayward-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas, bem como para alguns casos particulares que é possível obter a partir da métrica geral. O objetivo é analisar a regularidade da métrica para diferentes configurações.

Espaço-tempo carregado de Hayward-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas

Se quisermos verificar a existência de singularidades para este espaço-tempo, basta calcular o escalar de Kretschmann. Assim, para a métrica dada pela Eq. (6.114), o escalar de Kretschmann é

$$\begin{aligned}
K &= R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&= \frac{4a^2}{r^4} + \frac{16am}{2l^2mr^2 + r^5} - \frac{8aQ^2}{r^6} + \frac{8a\Lambda}{3r^2} \\
&+ 8a\alpha r^{-3\omega_q-5} + 4\alpha\Lambda\omega_q(3\omega_q - 1)r^{-3(\omega_q+1)} \\
&+ \frac{48m^2 [32l^8m^4 - 16l^6m^3r^3 + 72l^4m^2r^6 - 8l^2mr^9 + r^{12}]}{(2l^2m + r^3)^6} \\
&+ \frac{8\Lambda [8\Lambda l^6m^3 + 12l^4m^2(4m + \Lambda r^3)]}{3(2l^2m + r^3)^3} + \frac{24\alpha mr^{-3(\omega_q+1)} [r^6(3\omega_q^2 + 5\omega_q + 2)]}{(2l^2m + r^3)^3} \\
&+ \frac{8\Lambda [6l^2mr^3(\Lambda r^3 - 2m) + \Lambda r^9]}{3(2l^2m + r^3)^3} + \frac{8Q^2 [56l^6m^3Q^2 + 84l^4m^2Q^2r^3]}{r^8(2l^2m + r^3)^3} \tag{6.115} \\
&+ \frac{8Q^2 [42l^2mr^6(2mr + Q^2) + r^9(7Q^2 - 12mr)]}{r^8(2l^2m + r^3)^3} \\
&+ 3\alpha^2 (27\omega_q^4 + 54\omega_q^3 + 51\omega_q^2 + 20\omega_q + 4) r^{-6(\omega_q+1)} \\
&+ \frac{24\alpha mr^{-3(\omega_q+1)} [4l^4m^2\omega_q(3\omega_q - 1)]}{(2l^2m + r^3)^3} - 12\alpha Q^2 (9\omega_q^2 + 13\omega_q + 4) r^{-3\omega_q-7} \\
&+ \frac{24\alpha mr^{-3(\omega_q+1)} [-2l^2mr^3(21\omega_q^2 + 23\omega_q + 4)]}{(2l^2m + r^3)^3}.
\end{aligned}$$

Vamos agora determinar o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

Para $\omega_q = -2/3$ (quintessência), obtemos os seguintes limites:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty, \tag{6.116}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \tag{6.117}$$

Para $\omega_q = -4/3$ (phantom), obtemos os seguintes limites:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty, \tag{6.118}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \infty. \tag{6.119}$$

Assim, a métrica geral tem uma singularidade na origem com uma curvatura regular quando $r \rightarrow \infty$ e $\omega_q = -2/3$ (quintessência). No entanto, para $r \rightarrow \infty$ e $\omega_q = -4/3$ (phantom), a solução não é regular, como se pode ver na Fig. 52.

Espaço-tempo de Hayward

Fazendo $\alpha = 0$, $\Lambda = 0$, $Q = 0$ e $a = 0$ na Eq. (6.114), obtemos o espaço-tempo de Hayward dado por:

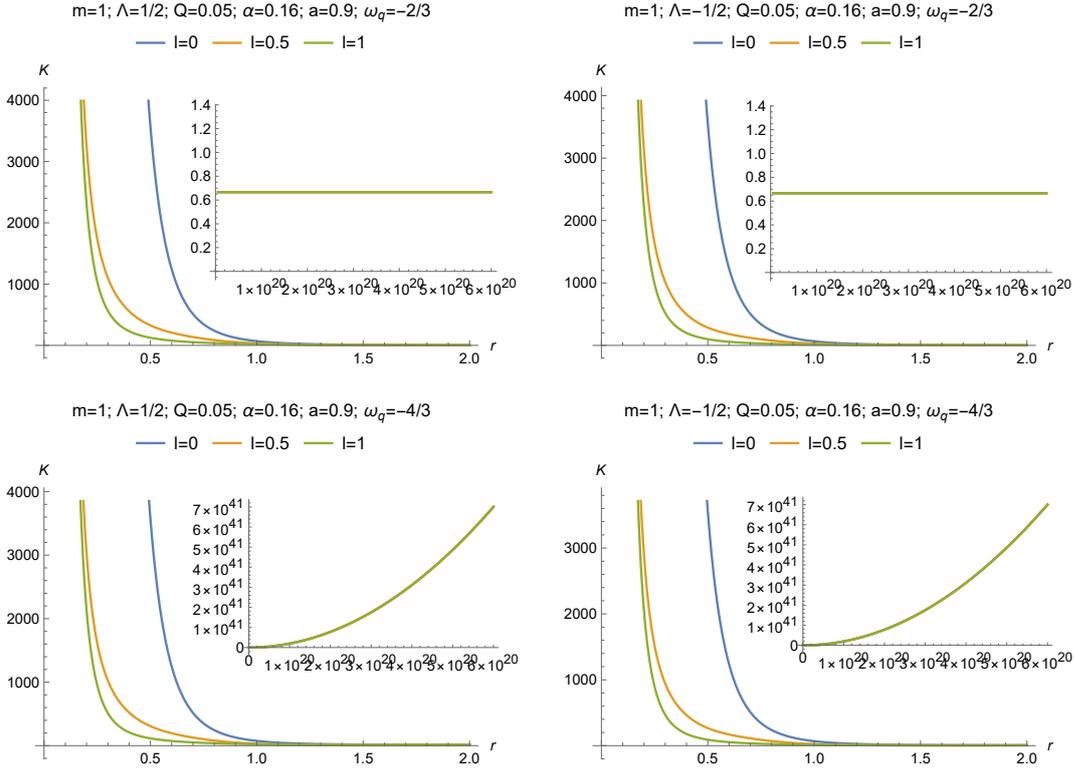


Figura 52 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro carregado de Hayward-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas para diferentes valores de l , Λ e ω_q .

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (6.120)$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$K = \frac{48m^2 [32l^8m^4 - 16l^6m^3r^3 + 72l^4m^2r^6 - 8l^2mr^9 + r^{12}]}{(2l^2m + r^3)^6}. \quad (6.121)$$

Vamos agora determinar o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{24}{l^4}, \quad (6.122)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (6.123)$$

Assim, a análise do escalar de Kretschmann no limite de $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$ mostra-nos, como esperado, que o buraco negro de Hayward é regular, isto é, não tem singularidade na origem $r = 0$ e é assintoticamente plano. Este comportamento está descrito na Fig. 53.

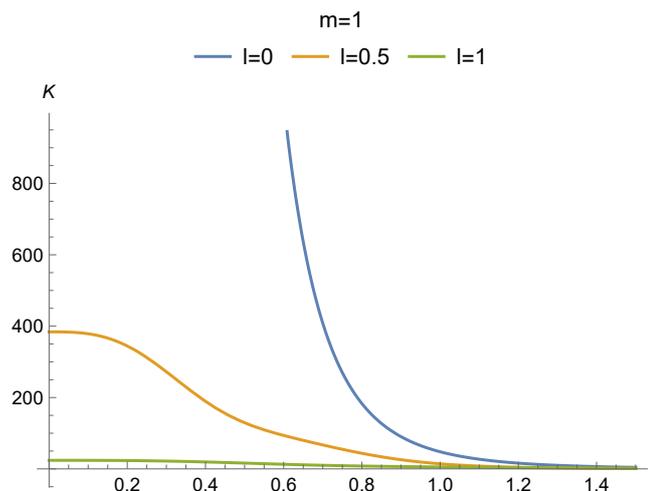


Figura 53 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Hayward para diferentes valores de l .

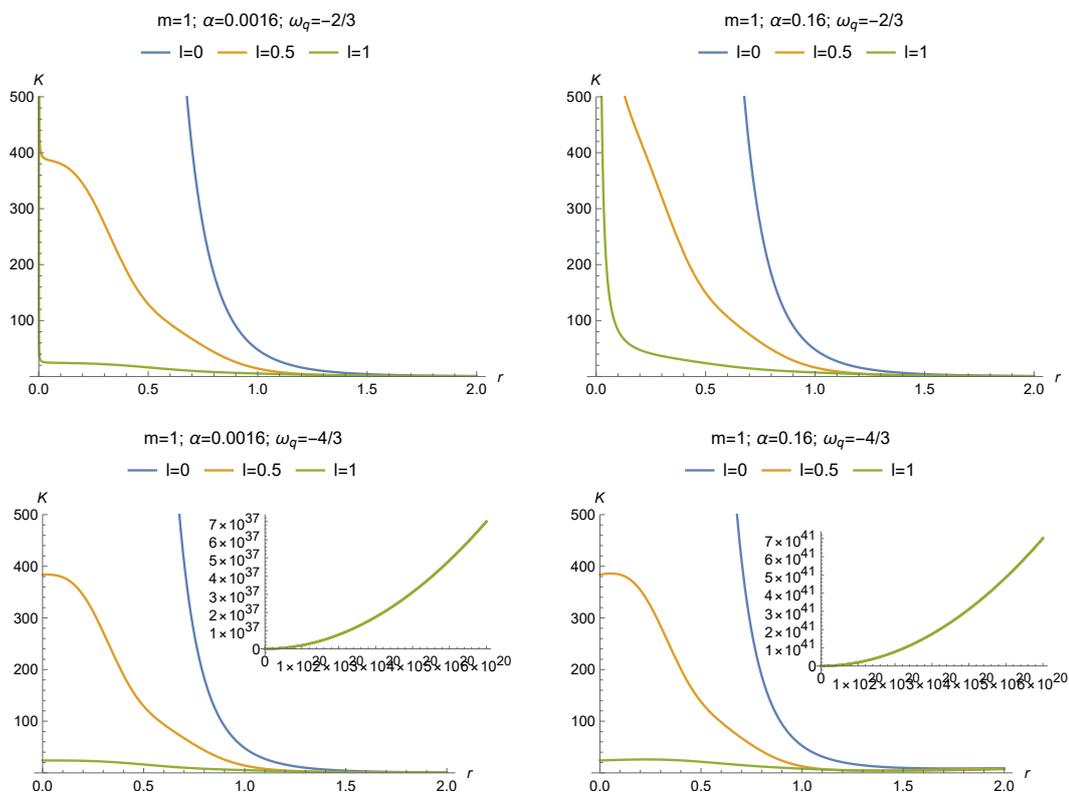


Figura 54 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Hayward-Kiselev para diferentes valores de l , ω_q e α .

Espaço-tempo de Hayward-Kiselev

Fazendo $\Lambda = 0$, $Q = 0$ e $a = 0$ na Eq. (6.114), obtemos o espaço-tempo de Hayward-Kiselev dado por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (6.124)$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$\begin{aligned} K = & \frac{48m^2 [32l^8m^4 - 16l^6m^3r^3 + 72l^4m^2r^6 - 8l^2mr^9 + r^{12}]}{(2l^2m + r^3)^6} \\ & + \frac{24\alpha mr^{-3(\omega_q+1)} [4l^4m^2\omega_q (3\omega_q - 1)]}{(2l^2m + r^3)^3} \\ & + \frac{24\alpha mr^{-3(\omega_q+1)} [-2l^2mr^3 (21\omega_q^2 + 23\omega_q + 4)]}{(2l^2m + r^3)^3} \\ & + \frac{24\alpha mr^{-3(\omega_q+1)} [r^6 (3\omega_q^2 + 5\omega_q + 2)]}{(2l^2m + r^3)^3} \\ & + 3\alpha^2 (27\omega_q^4 + 54\omega_q^3 + 51\omega_q^2 + 20\omega_q + 4) r^{-6(\omega_q+1)}. \end{aligned} \quad (6.125)$$

Vamos agora determinar o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

Para $\omega_q = -2/3$ (quintessência), obtemos os seguintes limites:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty, \quad (6.126)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (6.127)$$

Para $\omega_q = -4/3$ (phantom), obtemos os seguintes limites:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{24}{l^4}, \quad (6.128)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \infty. \quad (6.129)$$

Assim, a análise do escalar de Kretschmann no limite de $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, cujo comportamento está descrito na Fig. 54, mostra-nos que:

- para $\omega_q = -2/3$ (quintessência), o buraco negro de Hayward-Kiselev deixa de ser regular, ou seja, tem singularidade na origem $r = 0$; no entanto, é assintoticamente plano.

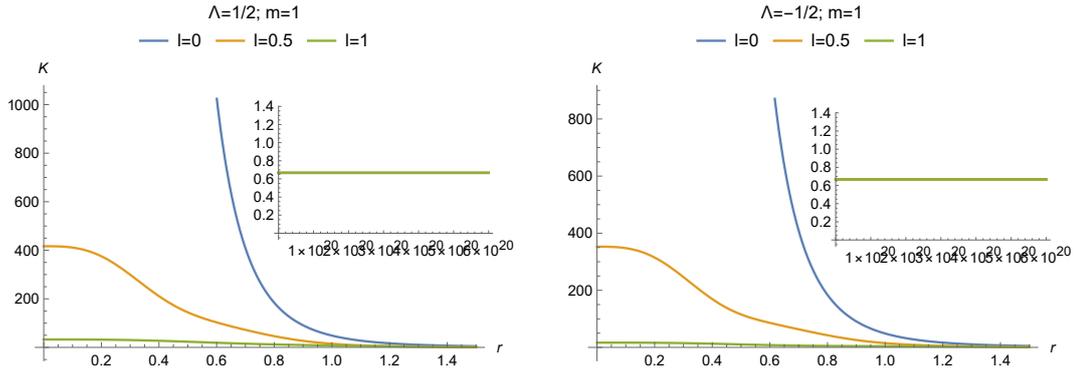


Figura 55 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Hayward com constante cosmológica para diferentes valores de l e Λ .

- para $\omega_q = -4/3$ (phantom), a métrica do buraco negro de Hayward-Kiselev é regular, ou seja, não tem singularidade na origem $r = 0$; no entanto, não é assintoticamente plano quando $r \rightarrow \infty$.

Espaço-tempo de Hayward com constante cosmológica

Fazendo $\alpha = 0$, $Q = 0$ e $a = 0$ na Eq. (6.114), obtemos o espaço-tempo de Hayward com constante cosmológica, dado por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (6.130)$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$K = \frac{48m^2 [32l^8m^4 - 16l^6m^3r^3 + 72l^4m^2r^6 - 8l^2mr^9 + r^{12}]}{(2l^2m + r^3)^6} + \frac{8\Lambda [8\Lambda l^6m^3 + 12l^4m^2(4m + \Lambda r^3) + 6l^2mr^3(\Lambda r^3 - 2m) + \Lambda r^9]}{3(2l^2m + r^3)^3}. \quad (6.131)$$

Vamos agora determinar o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{8(\Lambda l^2 + 3)^2}{3l^4}, \quad (6.132)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \quad (6.133)$$

Assim, concluímos que a inclusão da constante cosmológica ao buraco negro de Hayward não afeta a regularidade da métrica, como também se pode ver na Fig. 55.

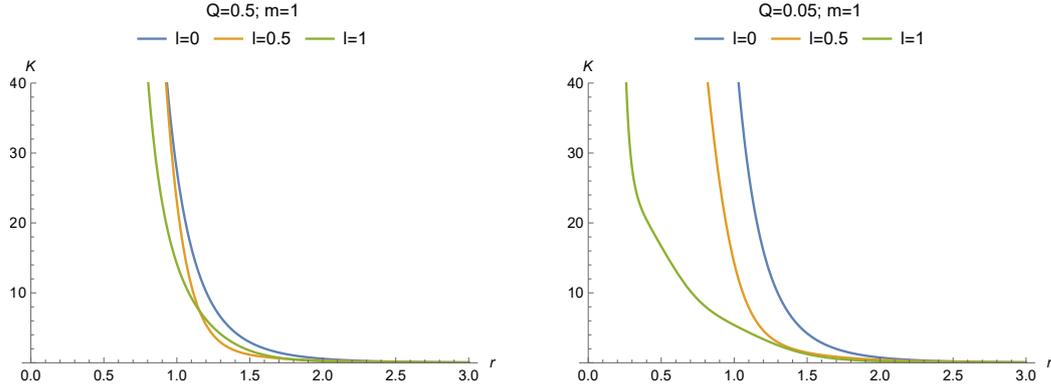


Figura 56 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Hayward com campo eletromagnético para diferentes valores de l e Q .

Espaço-tempo de Hayward com campo eletromagnético

Fazendo $\alpha = 0$, $\Lambda = 0$ e $a = 0$ na Eq. (6.114), obtemos o espaço-tempo de Hayward com campo eletromagnético, dado por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (6.134)$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$K = \frac{48m^2 [32l^8m^4 - 16l^6m^3r^3 + 72l^4m^2r^6 - 8l^2mr^9 + r^{12}]}{(2l^2m + r^3)^6} + \frac{8Q^2 [56l^6m^3Q^2 + 84l^4m^2Q^2r^3]}{r^8 (2l^2m + r^3)^3} + \frac{8Q^2 [42l^2mr^6 (2mr + Q^2) + r^9 (7Q^2 - 12mr)]}{r^8 (2l^2m + r^3)^3}. \quad (6.135)$$

Vamos agora determinar o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty, \quad (6.136)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (6.137)$$

Assim, concluímos que a inclusão do campo eletromagnético ao buraco negro de Hayward afeta a regularidade da métrica, tornando-a singular na origem. A métrica permanece assintoticamente plana. Este comportamento pode ser visto na Fig. 56

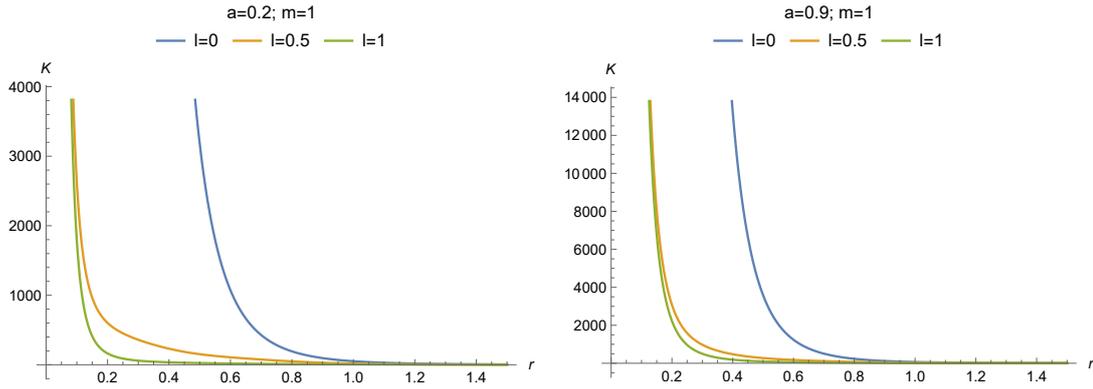


Figura 57 – Escalar de Kretschmann referente ao buraco negro de Hayward com nuvem de cordas para diferentes valores de l e a .

Espaço-tempo de Hayward com nuvem de cordas

Fazendo $\alpha = 0$, $\Lambda = 0$ e $Q = 0$ na Eq. (6.114), obtemos o espaço-tempo de Hayward com nuvem de cordas [39], dado por:

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}\right) dt^2 - \left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (6.138)$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$K = \frac{4a^2}{r^4} + \frac{16am}{2l^2mr^2 + r^5} + \frac{48m^2 [32l^8m^4 - 16l^6m^3r^3 + 72l^4m^2r^6 - 8l^2mr^9 + r^{12}]}{(2l^2m + r^3)^6}. \quad (6.139)$$

Vamos agora determinar o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty, \quad (6.140)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (6.141)$$

Assim, concluímos que a inclusão da nuvem de cordas ao buraco negro de Hayward afeta a regularidade da métrica, tornando-a singular na origem. A métrica permanece assintoticamente plana. Este comportamento pode ser visto na Fig. 57.

Espaço-tempo de Hayward-Kiselev com constante cosmológica

A partir da Eq. (6.115), verifica-se que, para o espaço-tempo de Hayward-Kiselev com constante cosmológica ($a = 0$ e $Q = 0$), o espaço-tempo é regular apenas para alguns valores de ω_q .

Para $-1 < \omega_q < -1/3$ (regime de quintessência) a solução é singular para $r \rightarrow 0$ e tem uma curvatura regular para $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty, \quad (6.142)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \quad (6.143)$$

Para $\omega_q = -4/3$ (phantom), a métrica é regular para $r \rightarrow 0$ e não tem uma curvatura regular para $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{8(\Lambda l^2 + 3)^2}{3l^4}, \quad (6.144)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \infty. \quad (6.145)$$

Para $\omega_q < -1$, temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{8(3 + \Lambda l^2)^2}{3l^4}. \quad (6.146)$$

Para $\omega_q > -1$, temos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \quad (6.147)$$

Para $\omega_q = -1$, temos os seguintes limites:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{8(3bl^2 + \Lambda l^2 + 3)^2}{3l^4}, \quad (6.148)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8}{3}(3b + \Lambda)^2. \quad (6.149)$$

Para este valor de ω_q , a métrica é regular em termos de curvatura em todo o espaço-tempo, uma vez que temos apenas um deslocamento da constante cosmológica.

É importante mencionar ainda que quando $\omega_q < -1$, a métrica é regular em $r \rightarrow 0$ e para $\omega_q > -1$ é regular em $r \rightarrow \infty$.

6.2.3 Condições de energia

Uma vez que a introdução de uma nuvem de cordas, do fluido quintessencial, do campo eletromagnético e da constante cosmológica transformou a métrica do buraco negro numa solução singular, é essencial analisar as condições de energia da métrica obtida.

Para obter as condições de energia, precisamos identificar as componentes do tensor energia-momento. Para $f > 0$, temos

$$T_{\mu}^{\mu} = \text{diag}[\rho, -p_r, -p_t, -p_t], \quad (6.150)$$

em que ρ é a densidade de energia, p_r é a pressão radial e p_t é a pressão tangencial. Considerando as equações de Einstein e a Eq. (6.93), encontramos

$$\rho = \frac{1 - f(r) - r f'(r)}{\kappa^2 r^2}, \quad (6.151)$$

$$p_r = \frac{r f'(r) + f - 1}{\kappa^2 r^2}, \quad (6.152)$$

$$p_t = \frac{r f''(r) + 2 f'(r)}{2 \kappa^2 r}. \quad (6.153)$$

De agora em diante, identifiquemos a função $f(r)$ como

$$f(r) = \left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \right). \quad (6.154)$$

Existem quatro condições principais de energia: a condição de energia fraca (WEC), a condição de energia forte (SEC), a condição de energia dominante (DEC) e a condição de energia nula (NEC) [159]. Estas condições são dadas pelas desigualdades [40, 160, 159]

$$NEC_{1,2} = WEC_{1,2} = SEC_{1,2} \Leftrightarrow \rho + p_{r,t} \geq 0, \quad (6.155)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow \rho + p_r + 2p_t \geq 0, \quad (6.156)$$

$$DEC_{1,2} \Leftrightarrow \rho - |p_{r,t}| \geq 0, \quad (6.157)$$

$$DEC_3 = WEC_3 \Leftrightarrow \rho \geq 0, \quad (6.158)$$

onde os índices 1 e 2 se referem, respectivamente, às componentes radial e tangencial da pressão. Vemos que $DEC_{1,2} \Leftrightarrow ((NEC_{1,2}) \text{ e } (\rho - p_{r,t} \geq 0))$, por isso, substituímos $DEC_{1,2} \Rightarrow \rho - p_{r,t} \geq 0$.

No que segue, vamos considerar $f(r) > 0$. Assim, as condições de energia são dadas pelas seguintes relações

$$NEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (6.159)$$

$$NEC_2 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{2Q^2}{\kappa^2 r^4} + \frac{36l^2 m^2 r^3}{\kappa^2 (2l^2 m + r^3)^3} - \frac{9\alpha\omega_q (\omega_q + 1) r^{-3(\omega_q+1)}}{2\kappa^2} \geq 0, \quad (6.160)$$

$$WEC_3 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{Q^2}{\kappa^2 r^4} + \frac{\Lambda}{\kappa^2} + \frac{12l^2 m^2}{\kappa^2 (2l^2 m + r^3)^2} - \frac{3\alpha\omega_q r^{-3(\omega_q+1)}}{\kappa^2} \geq 0, \quad (6.161)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow \frac{2Q^2}{\kappa^2 r^4} - \frac{2\Lambda}{\kappa^2} + \frac{48l^2 m^2 (r^3 - l^2 m)}{\kappa^2 (2l^2 m + r^3)^3} - \frac{3\alpha\omega_q (3\omega_q + 1) r^{-3(\omega_q+1)}}{\kappa^2} \geq 0, \quad (6.162)$$

$$DEC_1 \Leftrightarrow \frac{2a}{\kappa^2 r^2} + \frac{2Q^2}{\kappa^2 r^4} + \frac{2\Lambda}{\kappa^2} + \frac{24l^2 m^2}{\kappa^2 (2l^2 m + r^3)^2} - \frac{6\alpha\omega_q r^{-3\omega_q-3}}{\kappa^2} \geq 0, \quad (6.163)$$

$$DEC_2 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{2\Lambda}{\kappa^2} + \frac{12l^2 m^2 (4l^2 m - r^3)}{\kappa^2 (2l^2 m + r^3)^3} + \frac{3\alpha\omega_q (3\omega_q - 1) r^{-3(\omega_q+1)}}{2\kappa^2} \geq 0. \quad (6.164)$$

Se considerarmos $-1 < \omega_q < -\frac{1}{3}$ e o limite $r \rightarrow \infty$, obtemos

$$NEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (6.165)$$

$$NEC_2 \Leftrightarrow 0, \quad (6.166)$$

$$WEC_3 \Leftrightarrow \frac{\Lambda}{\kappa^2}, \quad (6.167)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow -\frac{2\Lambda}{\kappa^2}, \quad (6.168)$$

$$DEC_1 \Leftrightarrow \frac{2\Lambda}{\kappa^2}, \quad (6.169)$$

$$DEC_2 \Leftrightarrow \frac{2\Lambda}{\kappa^2}. \quad (6.170)$$

Os resultados relativos às condições de energia mostram-nos que, no caso considerado, as condições de energia devem ser satisfeitas ou violadas consoante a relação entre os parâmetros. Analisando estas condições para valores muito grande da coordenada radial, concluímos que apenas as condições de energia nula serão satisfeitas e iguais a zero, enquanto as demais condições poderão ser ou não satisfeitas a depender dos valores que adotamos para a constante cosmológica. Vale a pena mencionar que se considerarmos o caso $f(r) < 0$, as conclusões sobre as condições de energia são as mesmas.

6.2.4 Geodésicas do buraco negro

Dada a métrica do espaço-tempo, a trajetória das partículas e da luz pode ser descrita pelo movimento geodésico. As equações geodésicas também podem ser obtidas a partir da Lagrangiana dado pela equação

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

que, no espaço-tempo do buraco negro carregado de Hayward-Kiselev-(anti-) de Sitter com uma nuvem de cordas, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2 m} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right) \dot{t}^2 \\ & - \frac{1}{2} \left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2 m} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right)^{-1} \dot{r}^2 \\ & - \frac{r^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \end{aligned} \quad (6.171)$$

onde o ponto representa a derivada em relação ao tempo próprio τ . Reescalando o parâmetro τ , podemos definir $L = 2\mathcal{L}$, que, para geodésicas tipo-tempo, é igual a +1, para geodésicas tipo-espaço é igual a -1 e é igual a 0 para geodésicas nulas [114].

As equações de Euler-Lagrange são dadas por

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (6.172)$$

Fazendo $\mu = 0$ e $\mu = 3$ na Eq. (6.172), com \mathcal{L} dado pela Eq. (6.171), obtemos, respectivamente:

$$\dot{t} = \frac{E}{\left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q + 1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)}, \quad (6.173)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{J}{r^2 \sin^2\theta}, \quad (6.174)$$

onde E e J são constantes de movimento que correspondem aos vetores de Killing ∂_t e ∂_ϕ , respectivamente. Podemos interpretar estas constantes como a energia E e o momento angular J da partícula que se move nas proximidades do buraco negro.

Restrinjamos a análise das geodésicas ao plano equatorial do buraco negro, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Fazendo isso, as Eqs. (6.173)-(6.174) reduzem-se a

$$\dot{t} = \frac{E}{\left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q + 1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)}, \quad (6.175)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{J}{r^2}. \quad (6.176)$$

Substituindo as Eqs. (6.175) e (6.176) na Eq. (6.171), obtemos

$$E^2 = \dot{r}^2 + V_{eff}, \quad (6.177)$$

onde

$$V_{eff} = \left(1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q + 1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) \left(\frac{J^2}{r^2} + L\right), \quad (6.178)$$

representa o potencial efetivo para o movimento geodésico no espaço-tempo de um buraco negro carregado de Hayward-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas.

Usando a relação

$$\frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dr}{d\tau} \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \dot{t}^2 = \dot{r}^2, \quad (6.179)$$

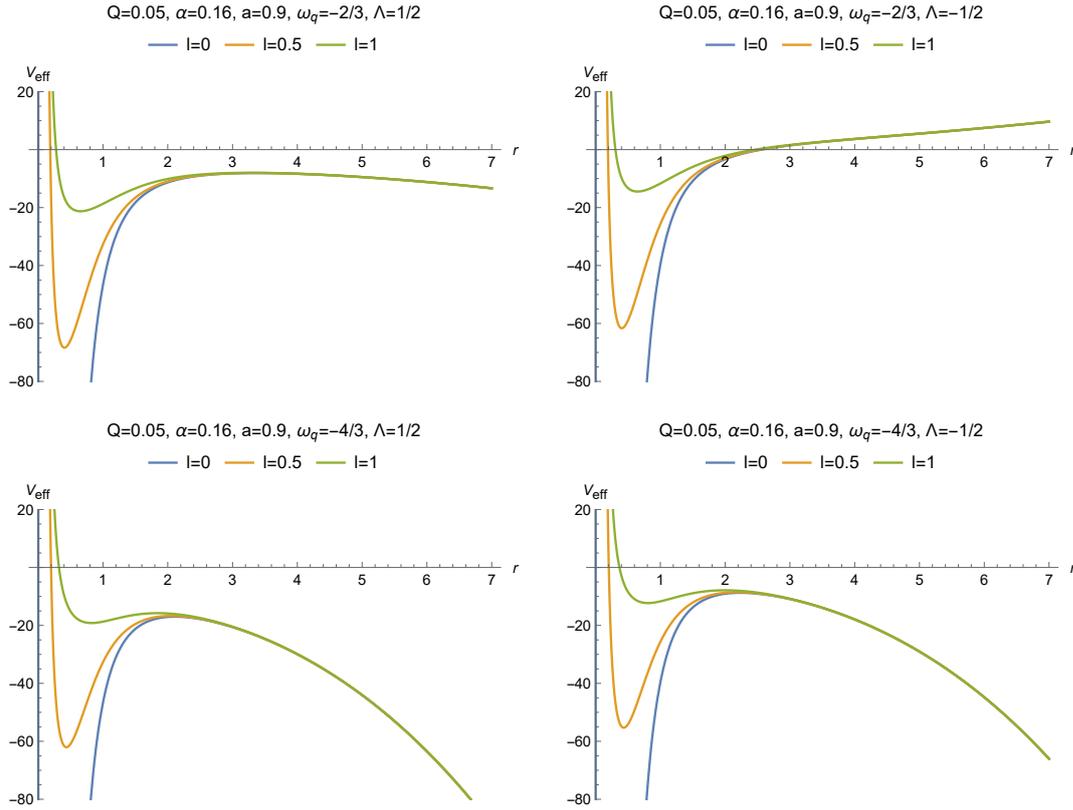


Figura 58 – Potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-tempo ($L = 1$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de l , ω_q e Λ .

na Eq. (6.177) e usando as Eqs. (6.178) e (6.175), conseguimos

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = f(r)^2 \left[1 - \frac{f(r)}{E^2} \left(\frac{J^2}{r^2} + L\right)\right], \quad (6.180)$$

com $f(r)$ dado pela Eq. (6.154).

6.2.4.1 Movimento radial de uma partícula sem massa

Para o movimento radial ($J = 0$) de uma partícula sem massa ($L = 0$), a Eq. (6.180) pode ser escrita como

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = f(r)^2. \quad (6.181)$$

Substituindo a Eq. (6.154) na Eq. (6.181), obtemos a relação entre as coordenadas t e r , a qual é dada por

$$\pm t = \int \frac{1}{1 - a - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q + 1}} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2} dr. \quad (6.182)$$

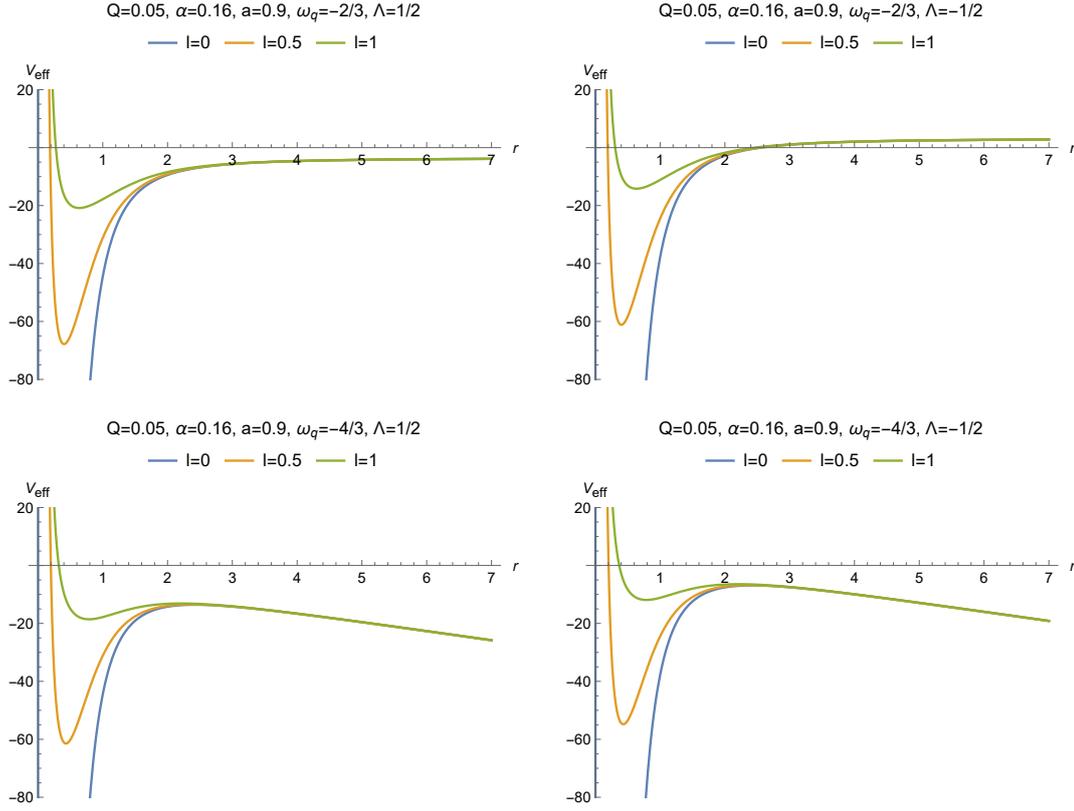


Figura 59 – Potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-nulo ($L = 0$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de l , ω_q e Λ .

Usando a Eq. (6.177), podemos obter a relação entre a coordenada r e o tempo próprio τ para o movimento radial de uma partícula sem massa, a qual é dada por

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2, \quad \pm\tau = \frac{r}{E}. \quad (6.183)$$

6.2.4.2 Movimento radial de uma partícula massiva

Agora, consideremos o movimento de partículas massivas ($L = 1$) em trajetórias radiais ($J = 0$) nas proximidades do buraco negro. Da Eq. (6.180), obtemos

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = f(r)^2 - \frac{f(r)^3}{E^2}. \quad (6.184)$$

Substituindo a Eq. (6.154) na Eq. (6.184), podemos encontrar a relação entre as coordenadas t e r para o movimento radial da partícula:

$$\pm t = \int \frac{dr}{\sqrt{f(r)^2 - \frac{f(r)^3}{E^2}}}. \quad (6.185)$$

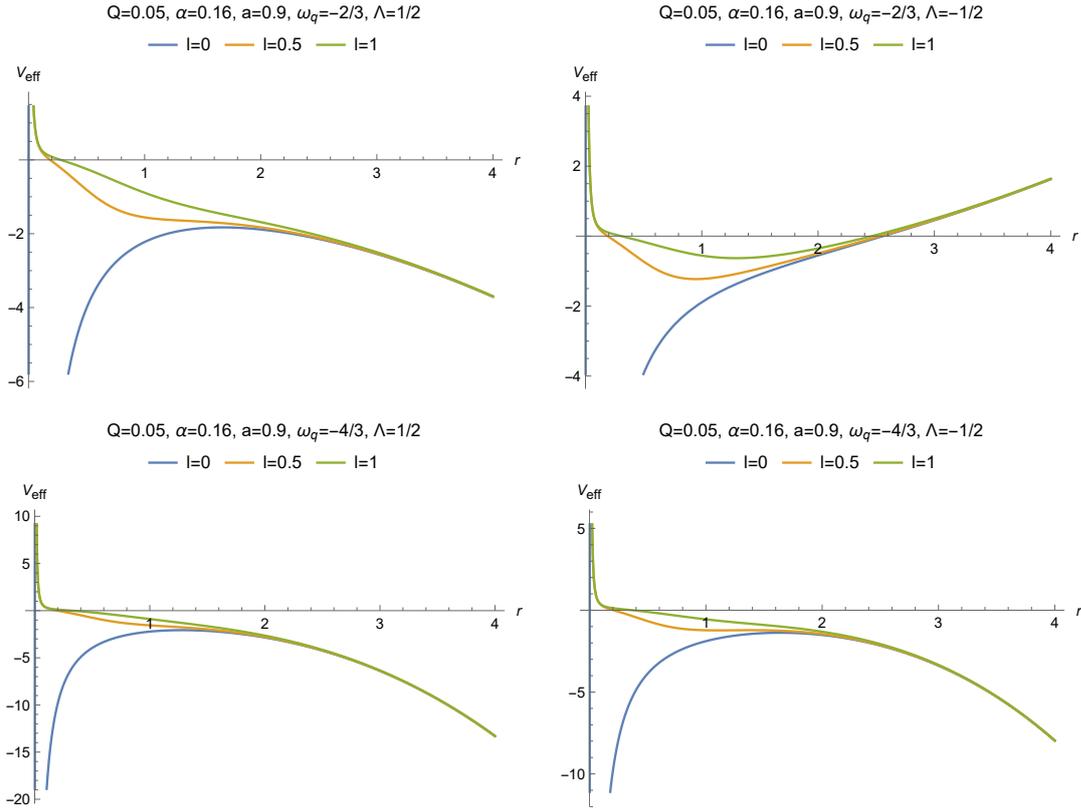


Figura 60 – Potencial efetivo para geodésicas radiais tipo-tempo ($J^2 = 0$ e $L = 1$), para diferentes valores de l , ω_q e Λ .

Da Eq. (6.177), obtemos a relação entre o tempo próprio τ e a coordenada radial r :

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - f(r),$$

$$\pm\tau = \int \frac{dr}{\sqrt{E^2 - f(r)}}. \quad (6.186)$$

6.2.4.3 Potencial efetivo

O comportamento do potencial efetivo (V_{eff}) do movimento geodésico, dado pela Eq. (6.178), pode dizer-nos sobre o comportamento de uma partícula massiva ou de uma partícula sem massa perto do buraco negro. Assim, nas Figs. 58 a 61, representamos os potenciais efetivos para diferentes valores de l , ω_q e Λ para geodésicas tipo-tempo e nulas. Em algumas figuras, representamos, em detalhes, o V_{eff} perto do buraco negro (r perto de zero).

Na Fig. 58, representamos o potencial efetivo para geodésicas não-radiais tipo-tempo ($L = 1$ e $J^2 = 20$), para diferentes valores de l , ω_q e Λ . Podemos observar que, para $l = 0$, não existem geodésicas circulares estáveis, uma vez que os gráficos não apresentam um mínimo local para qualquer valor de Q , ω_q , Λ e a . Por outro lado, para $l > 0$, podemos observar a possibilidade da existência de geodésicas circulares estáveis, dependendo dos

valores dos parâmetros Q , ω_q , Λ e a . Na região próxima do buraco negro, $V_{eff} \rightarrow +\infty$. Para regiões distantes do buraco negro, o potencial efetivo também diverge.

Para geodésicas não-radiais tipo nulo ($J^2 = 20$ e $L = 0$), Fig. 59, podemos observar que, em todos os casos, $V_{eff} \rightarrow +\infty$ para regiões próximas do buraco negro, $r \rightarrow 0$. Para regiões afastadas do buraco negro, $r \rightarrow \infty$, o $V_{eff} \rightarrow \pm 3,3333$ (gráficos da primeira linha) e $V_{eff} \rightarrow -\infty$ (gráficos da segunda linha). Para $l = 0$, não há geodésicas circulares estáveis, uma vez que os gráficos não mostram mínimos locais. A existência de órbitas circulares estáveis de uma partícula sem massa em torno do buraco negro depende de Q , ω_q , Λ e a , como se pode ver na Fig. 59.

No que diz respeito ao comportamento das geodésicas radiais tipo-tempo ($J^2 = 0$ e $L = 1$), a Fig. 60 mostra-nos que a estabilidade do movimento radial não ocorre para $l = 0$. Por outro lado, para $l > 0$, haverá sempre geodésicas estáveis.

Finalmente, podemos observar na Fig. 61 que, para geodésicas radiais tipo-nulo ($J^2 = 0$ e $L = 0$), o potencial efetivo é constante e igual a zero.

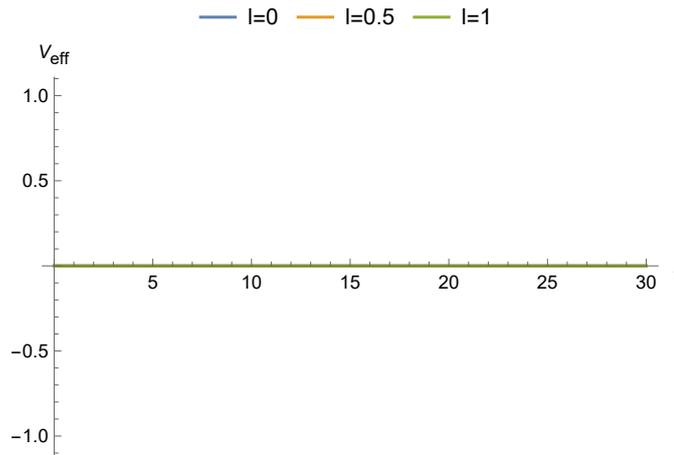


Figura 61 – Potencial efetivo para geodésicas radiais do tipo-nulo ($J^2 = 0$ e $L = 0$), para diferentes valores de l , ω_q e Λ .

6.3 Buraco negro de Hayward-AdS com um fluido de cordas

Nesta seção obteremos uma solução que corresponde ao buraco negro de Hayward com uma constante cosmológica, rodeado por um fluido de cordas. Mostraremos ainda que a solução preserva ou não a regularidade da solução do buraco negro obtido, a qual é uma característica da solução de Hayward, dependendo dos valores do parâmetro β . Analisaremos também a termodinâmica dessas soluções para $\beta = 2$, caso em que a matéria escura pode ser mimetizada e mostraremos haver uma incompatibilidade entre a temperatura obtida pela primeira lei e a obtida usando a gravidade superficial. Algumas grandezas termodinâmicas serão obtidas e analisadas, como a pressão, a capacidade térmica e os pontos críticos e

mostraremos ainda como estas grandezas se alteram para diferentes valores do parâmetro q associado à solução de Hayward bem como do parâmetro b associado à presença do fluido de cordas. Finalmente, analisaremos a transição de fase usando a equação de estado e a energia livre de Gibbs.

6.3.1 Solução geral

Vamos considerar o espaço-tempo do buraco negro de Hayward [17, 39] que pode ser entendido como resultante da solução da equação de Einstein acoplada a um campo eletromagnético não-linear. Neste cenário, a fonte física deste buraco negro é um campo eletromagnético não linear [26, 16, 133].

Nesta secção, obtemos uma solução esfericamente simétrica que generaliza a solução original de Hayward devido à presença de duas outras fontes, nomeadamente, a constante cosmológica e um fluido de cordas.

A ação que descreve adequadamente um sistema minimamente acoplado a um campo eletromagnético não-linear pode ser escrita como

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \mathcal{L}) \quad (6.187)$$

onde g é o determinante do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, R é o escalar de curvatura e \mathcal{L} é a densidade Lagrangiana do campo eletromagnético não-linear [16, 133, 26].

A partir deste acoplamento entre os campos gravitacional e eletromagnético não-linear, obtemos as seguintes equações [16], variando a ação dada pela Eq. (6.187), em relação à métrica

$$G_{\mu\nu} = 2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}(F)}{\partial F} F_{\mu\sigma} F_{\nu}^{\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \mathcal{L}(F) \right), \quad (6.188)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$.

Na solução de Hayward, a fonte vem da eletrodinâmica não-linear onde a densidade Lagrangiana é escrita como

$$\mathcal{L}(F) = \frac{6 (2l^2 F)^{3/2}}{\kappa^2 l^2 [1 + (2l^2 F)^{3/4}]^2}, \quad (6.189)$$

que representa a fonte particular da eletrodinâmica não-linear utilizada para derivar o buraco negro de Hayward. Na Eq. (6.189), l é o parâmetro de Hayward, cujo valor, em princípio, será restrito ao intervalo $0 \leq l < \infty$, e a Lagrangiana é uma função não-linear do escalar eletromagnético $F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell-Faraday. Para um espaço-tempo esfericamente simétrico que é apenas magneticamente carregado, a única componente diferente de zero de $F_{\mu\nu}$ é [16]

$$F_{23} = q_m \text{sen}\theta, \quad (6.190)$$

e o escalar F é

$$F = \frac{2q_m^2}{r^4}. \quad (6.191)$$

É de salientar que, no seu trabalho original, Hayward considerou o parâmetro l como sendo da ordem do comprimento de Planck, e foi então relacionado com uma carga magnética através da definição [26, 16, 133, 134, 135]

$$q_m = \frac{\sqrt[3]{r_s^2 l}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4m^2 l}}{2}. \quad (6.192)$$

Assim, é possível obter as seguintes componentes para o tensor de energia-momento de Hayward [17]:

$$T_t^t = T_r^r = \frac{12l^2 m^2}{(r^3 + 2l^2 m)^2}, \quad (6.193)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = -\frac{24(r^3 - l^2 m)l^2 m^2}{(r^3 + 2l^2 m)^3}, \quad (6.194)$$

onde (l, m) são constantes que assumiremos como positivas.

Para considerarmos a constante cosmológica e o fluido de cordas, procedemos adicionando o termo $-\Lambda g_{\mu\nu}$ ao lado esquerdo da Eq. (6.188) e o tensor momento-energia correspondente ao fluido de cordas ao lado direito da mesma equação, o que resulta em

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}(F)}{\partial F} F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} \mathcal{L}(F) \right) + T_{\mu\nu}^{\text{FS}}, \quad (6.195)$$

em que $T_{\mu\nu}^{\text{FS}}$ se refere ao tensor energia-momento do fluido de cordas. O lado direito da equação acima é um tensor energia-momento efetivo, com o primeiro termo associado às modificações das equações de Einstein devido ao acoplamento com um campo eletromagnético não-linear, e o segundo refere-se ao fluido de cordas.

Tensor de energia-momento do fluido de cordas $T_{\mu\nu}^{(FS)}$

A linha de mundo de uma partícula movendo-se com quadri-velocidade dada por $w^\mu = dx^\mu/d\lambda$, com λ sendo um parâmetro independente, pode ser descrito por $x = x(\lambda)$.

Por outro lado, se considerarmos, ao invés do movimento de uma partícula, o movimento de uma corda infinitesimalmente fina, a trajetória corresponderá a uma superfície de mundo bidimensional Σ , que pode ser obtida por [36]

$$x^\mu = x^\mu(\lambda^a), \quad a = 0, 1, \quad (6.196)$$

com λ_0 e λ_1 sendo parâmetros tipo-tempo e tipo-espaço, respectivamente. Portanto, ao invés da quadri-velocidade, u^μ , temos um bivetor, $\Sigma^{\mu\nu}$, tal que [36]

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^b}. \quad (6.197)$$

Vale a pena ressaltar que, nesta superfície de mundo, haverá uma métrica induzida, γ_{ab} , com $a, b = 0, 1$, tal que,

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^b}. \quad (6.198)$$

O tensor de energia-momento associado a uma nuvem de poeira é dado por $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$, sendo u^μ a quadri-velocidade normalizada e ρ a densidade própria do fluxo. Do mesmo modo, para uma nuvem de cordas, temos [36]

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{\Sigma^{\mu\beta} \Sigma_\beta^\nu}{(-\gamma)^{1/2}}, \quad (6.199)$$

onde $\gamma = \frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}$.

Agora, se considerarmos um fluido perfeito com pressão \tilde{p} , o mesmo pode ser descrito pelo tensor de energia-momento dado por $T^{\mu\nu} = (\rho + \tilde{p})u^\mu u^\nu - \tilde{p}g^{\mu\nu}$. Analogamente, considerando um fluido perfeito de cordas com pressão p , temos o seguinte tensor de energia-momento [107]

$$T^{\mu\nu} = (p + \sqrt{-\gamma}\rho) \frac{\Sigma^{\mu\beta} \Sigma_\beta^\nu}{(-\gamma)} + pg^{\mu\nu}. \quad (6.200)$$

Considerando o tensor de energia-momento dado pela Eq. (6.200), Soleng obteve a métrica correspondente a um buraco negro estático rodeado por um fluido de cordas [59]. Então, assumimos que as componentes do tensor de energia-momento estão relacionadas através das equações

$$T_t^t = T_r^r, \quad (6.201)$$

$$T_t^t = -\beta T_\theta^\theta = -\beta T_\phi^\phi, \quad (6.202)$$

onde β é uma constante adimensional. O tensor de energia-momento cujas componentes são dadas pelas Eqs. (6.201)-(6.202), foi interpretado como estando associado a um tipo de fluido anisotrópico com simetria esférica [8, 161]. Nestas referências, foi interpretado como o tensor de energia-momento associado à polarização anisotrópica do vácuo num espaço-tempo esféricamente simétrico.

É importante chamar a atenção ao fato de que este tipo de tensor energia-momento é usado em diferentes cenários [162, 163, 164]. Em particular, na Ref. [162] é mostrado que as condições imposta pela Eq. (6.202) permite obter uma classe de soluções esfericamente simétricas das equações de campo de Einstein com dois parâmetros.

Para a obtenção da solução de Hayward-AdS com fluido de cordas, vamos considerar as componentes do tensor energia-momento para o fluido de cordas dado por [165]:

$$T_t^t = T_r^r = -\frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}, \quad (6.203)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = \frac{\epsilon}{\beta r^2} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}, \quad (6.204)$$

onde b é uma constante de integração positiva e $\epsilon = \pm 1$ determina o sinal da densidade de energia do fluido de cordas.

Solução do buraco negro de Hayward com constante cosmológica e rodeado por um fluido de cordas

Consideremos agora a Eq. (6.188) com as modificações introduzidas pela adição da constante cosmológica, bem como do fluido de cordas, cujas componentes do tensor energia-momento para este fluido são dadas pelas Eq. (6.203) e Eq. (6.204). Mais precisamente, consideremos a Eq. (6.195).

O elemento de linha para um espaço-tempo isotrópico na vizinhança de uma fonte esfericamente simétrica, sem perda de generalidade, pode ser escrito da seguinte forma [108]:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (6.205)$$

onde assumiremos que a fonte é necessariamente estática, então os parâmetros ν e λ dependerão apenas da coordenada radial.

Assim, as equações de campo de Einstein para o caso em consideração, tendo em conta a presença da constante cosmológica e a fonte adicional correspondente ao fluido de cordas, podem ser escritas como

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{12l^2 m^2}{(r^3 + 2l^2 m)^2} + \Lambda - \frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}, \quad (6.206)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{12l^2 m^2}{(r^3 + 2l^2 m)^2} + \Lambda - \frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}, \quad (6.207)$$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) = -\frac{24(r^3 - l^2m)l^2m^2}{(r^3 + 2l^2m)^3} + \Lambda + \frac{\epsilon}{\beta r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}. \quad (6.208)$$

Subtraindo as Eqs. (6.206) e (6.207), obtemos que:

$$\lambda = -\nu \Rightarrow \lambda' = -\nu'. \quad (6.209)$$

Somando as Eqs. (6.206) e (6.207) e considerando a eq. (6.209), após algumas simplificações, obtemos:

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda'}{r} - e^{-\lambda} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{12l^2m^2}{(r^3 + 2l^2m)^2} + \Lambda - \frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}. \quad (6.210)$$

Agora, escrevamos as seguintes relações:

$$\nu = -\lambda = \ln(1 + f(r)). \quad (6.211)$$

Considerando as Eqs. (6.209) e (6.211), podemos escrever as Eqs. (6.210) e (6.208), respectivamente, da seguinte forma:

$$-\frac{1}{r^2}(rf' + f) = \frac{12l^2m^2}{(r^3 + 2l^2m)^2} + \Lambda - \frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}, \quad (6.212)$$

$$2\frac{f'}{r} + f'' = 48\frac{(r^3 - l^2m)l^2m^2}{(r^3 + 2l^2m)^3} - 2\Lambda - \frac{2\epsilon}{\beta r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}. \quad (6.213)$$

Somando as Eqs. (6.212) e (6.213) e multiplicando o resultado por r^2 , obtemos a seguinte equação diferencial:

$$r^2 f'' + rf' - f + \Lambda r^2 - \frac{12l^2m^2 r^2}{(r^3 + 2l^2m)^2} - 48\frac{(r^3 - l^2m)l^2m^2 r^2}{(r^3 + 2l^2m)^3} + \epsilon \left(\frac{\beta + 2}{\beta} \right) \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta} = 0, \quad (6.214)$$

cujas soluções são dadas por

$$f(r) = -\frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \begin{cases} \epsilon b[1 + 2\log(r)]/2r & \text{for } \beta = 2, \\ \epsilon \beta (\beta - 2)^{-1} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta} & \text{for } \beta \neq 2. \end{cases} \quad (6.215)$$

Assim, substituindo a Eq. (6.215) na Eq. (6.211) e depois na Eq. (6.205), obtemos finalmente a solução do buraco negro de Hayward-AdS rodeado por um fluido de cordas:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (6.216)$$

onde

$$f(r) = 1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2l^2m} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \begin{cases} \epsilon b[1 + 2 \log(r)]/2r & \text{for } \beta = 2, \\ \epsilon \beta(\beta - 2)^{-1} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta} & \text{for } \beta \neq 2. \end{cases} \quad (6.217)$$

Podemos recuperar algumas outras soluções a partir desta métrica se fizermos as seguintes escolhas apresentadas no Quadro (4).

Quadro 4 – Espaço-tempo que pode ser recuperado fazendo $l = \Lambda = 0$ na Eq.(6.217) e diferentes valores de β , b e ϵ

ϵ	b	β	espaço-tempo
1	\mathbb{R}^*	$\lim_{\beta \rightarrow \infty}$	Letelier
1	Q	1	Reissner-Nordström
1	$\Lambda^{-1/2}$	-1	de Sitter

6.3.2 Análise do escalar de Kretschmann

A existência de singularidades físicas na métrica do buraco negro pode ser analisada através do cálculo de um escalar, como o escalar de Kretschmann.

Para $\beta \neq 2$

Para a métrica dada pela Eq. (6.217), para $\beta \neq 2$, o escalar de Kretschmann é

$$\begin{aligned}
K = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = & \\
& + \frac{8m^2(r^3 - 4l^2m)^2}{(2l^2m + r^3)^4} + \frac{1024l^6m^5(l^2m - r^3)}{(2l^2m + r^3)^6} \\
& + \frac{8m^2r^6(444l^4m^2 - 44l^2mr^3 + 5r^6)}{(2l^2m + r^3)^6} \\
& + \frac{16m\epsilon\left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}(4l^2m - r^3)}{(\beta - 2)(2l^2mr + r^4)^2} + \frac{8\epsilon^2\left(\frac{b}{r}\right)^{4/\beta}}{(\beta - 2)^2r^4} \\
& - \frac{32m\epsilon\left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}(4l^4m^2 - 14l^2mr^3 + r^6)}{(\beta - 2)\beta r^2(2l^2m + r^3)^3} \\
& - \frac{16mr\epsilon\left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}(4(\beta - 4)l^2m + (\beta + 2)r^3)}{(\beta - 2)(2l^2m + r^3)^3} \\
& + \frac{16\Lambda^2}{9} - \frac{64(\beta - 1)l^4m^3\epsilon\left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}}{(\beta - 2)r^2(2l^2m + r^3)^3} \\
& + \frac{4(\beta^4 + 3\beta^2 + 4\beta + 4)\epsilon^2\left(\frac{b}{r}\right)^{4/\beta}}{(\beta - 2)^2\beta^2r^4} \\
& + \frac{16\Lambda m(r^3 - 4l^2m)^2}{3(2l^2m + r^3)^3} - \frac{8(\beta - 1)\Lambda\epsilon\left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}}{3\beta r^2} \\
& + \frac{8\Lambda^2}{9} + \frac{16\Lambda m(4l^2m - r^3)}{3(2l^2m + r^3)^2}.
\end{aligned} \tag{6.218}$$

Em seguida, determinaremos o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$ para $\beta \neq 2$, $\epsilon = +1$, $l > 0$, $b > 0$ e $\Lambda \in \mathbb{R}$. A análise será feita apenas para alguns valores de β .

(i) Para $\beta < -1$, o escalar de Kretschmann diverge muito próximo da origem e é finito em uma região muito distante do buraco negro.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty. \tag{6.219}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \tag{6.220}$$

(ii) Para $\beta = -1$, o escalar de Kretschmann é finito, sendo dado por

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{8(l^2 - b^2(\Lambda l^2 + 3))^2}{3b^4l^4}. \tag{6.221}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8(b^2\Lambda - 1)^2}{3b^4}. \tag{6.222}$$

(iii) Para $-1 < \beta < 0$, o escalar de Kretschmann é finito, próximo da origem, e diverge para pontos muito distantes do buraco negro

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{8(\Lambda l^2 + 3)^2}{3l^4}. \tag{6.223}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \infty. \quad (6.224)$$

(iv) Para $0 < \beta < 2$ e $\beta > 2$, o escalar de Kretschmann diverge muito próximo da origem e é finito em uma região muito distante do buraco negro.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty. \quad (6.225)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = \frac{8\Lambda^2}{3}. \quad (6.226)$$

Para $\beta = 2$

Para a métrica dada pela Eq. (6.217), para $\beta = 2$, o escalar de Kretschmann é

$$\begin{aligned} K &= R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} \\ &= + \frac{6b^2\epsilon^2}{r^6} + \frac{12b^2\epsilon^2 \log^2(r)}{r^6} + \frac{8\Lambda^2}{3} \\ &\quad - \frac{4b\epsilon}{l^2 r^3} - \frac{4b\Lambda\epsilon}{3r^3} + \frac{768l^2 m^3 (l^2 m - r^3)^3}{(2l^2 m + r^3)^6} \\ &\quad + \frac{96l^2 m^2 (2\Lambda l^2 m - 3b\epsilon)}{(2l^2 m + r^3)^3} \\ &\quad + \frac{8m(3b\epsilon + m(6 - 4\Lambda l^2))}{(2l^2 m + r^3)^2} + \frac{4b\epsilon}{l^2 (2l^2 m + r^3)} \\ &\quad + 8b\epsilon \log(r) \left(-\frac{b\epsilon}{r^6} - \frac{6m(r^3 - 4l^2 m)}{(2l^2 m + r^3)^3} \right). \end{aligned} \quad (6.227)$$

Vamos agora determinar o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K^{(\beta=2)} = \infty, \quad (6.228)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K^{(\beta=2)} = \frac{8\Lambda^2}{3}. \quad (6.229)$$

Assim, a análise do escalar de Kretschmann mostra que a inclusão do fluido de cordas pode ou não alterar a regularidade da métrica, dependendo dos valores que escolhermos para o parâmetro β .

6.3.3 Geodésicas e Potencial Efetivo

Consideremos agora a solução estática e esfericamente simétrica, Eq. (6.205), com $f(r)$ dado pela Eq. (6.217). Consideremos também a seguinte redefinição $q^3 \equiv 2l^2 m$. Analisaremos as equações geodésicas considerando a ação geodésica e o princípio variacional para escrever um Lagrangiano que descreve a métrica como

$$2\mathcal{L} = f(r)\dot{t}^2 - \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2. \quad (6.230)$$

O “ponto” representa a derivada em relação ao tempo próprio, τ . Por simplicidade, restringimos a análise das geodésicas ao plano equatorial do buraco negro, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Usando as equações de Euler-Lagrange, obtemos

$$E = f(r)\dot{t}, \quad (6.231)$$

$$J = -r^2\dot{\phi}, \quad (6.232)$$

onde E e J são constantes de movimento que correspondem aos vetores de Killing ∂_t e ∂_ϕ , respectivamente. Podemos interpretar estas constantes como a energia E e o momento angular J da partícula que se move nas proximidades do buraco negro.

Redimensionando o parâmetro τ , podemos definir $L = 2\mathcal{L}$, que, para geodésicas tipo-tempo, é igual a $+1$, para geodésicas tipo-espaço é igual a -1 e é igual a 0 para geodésicas nulas [114]. Substituindo as Eqs. (6.231) e (6.232) na Eq. (6.230), obtemos

$$\dot{r}^2 = E^2 - V_{eff}, \quad (6.233)$$

onde

$$V_{eff} = f(r) \left(\frac{J^2}{r^2} + L \right). \quad (6.234)$$

Consideremos agora uma partícula massiva ($L = 1$) que cai radialmente ($J = 0$) no buraco negro. A equação do movimento geodésico radial de uma partícula teste é dada por

$$\dot{r}^2 = E^2 - f(r), \quad (6.235)$$

enquanto o potencial efetivo é o seguinte

$$V_{eff} = f(r). \quad (6.236)$$

Usando a relação

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{dr}{d\tau} \\ \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \dot{t}^2 = \dot{r}^2, \end{aligned} \quad (6.237)$$

na Eq.(6.235) e considerando a Eq.(6.231), obtemos

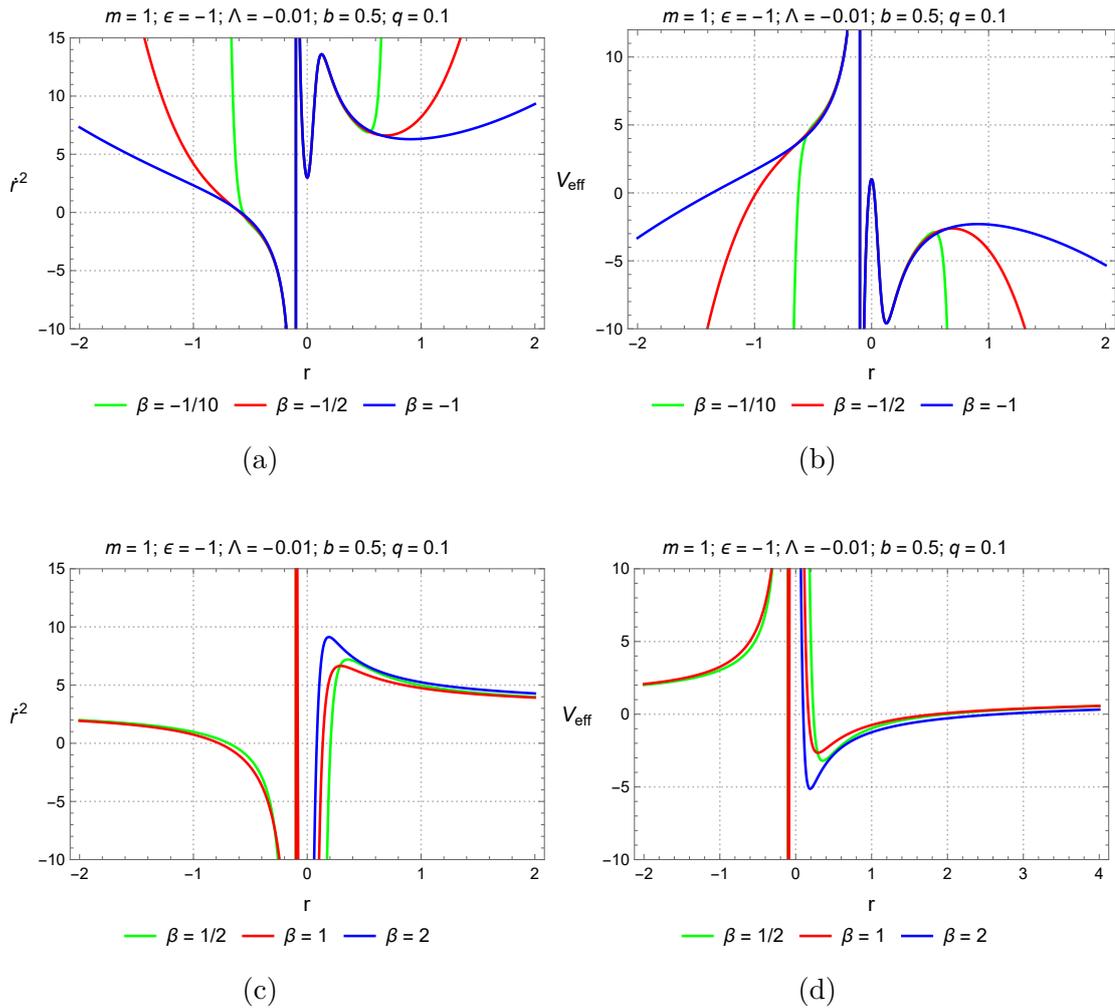


Figura 62 – O gráfico da esquerda mostra \dot{r}^2 para $E = 2$. O gráfico da direita mostra o potencial efetivo $V_{\text{eff}} = f(r)$.

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = f(r)^2 \left(1 - \frac{f(r)}{E^2}\right). \quad (6.238)$$

Substituindo a Eq.(6.217) na Eq.(6.238), podemos encontrar a relação entre as coordenadas t e r para o movimento radial da partícula:

$$\pm t = \int \frac{dr}{\sqrt{f(r)^2 - \frac{f(r)^3}{E^2}}}. \quad (6.239)$$

Da Eq.(6.235), conseguimos a relação entre o tempo próprio τ e a coordenada radial r :

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - f(r),$$

$$\pm \tau = \int \frac{dr}{\sqrt{E^2 - f(r)}}. \quad (6.240)$$

Para analisarmos a regularidade ou não da solução, precisamos obter o valor da integral dado pela Eq. (6.240) para uma geodésica que atinja o ponto $r = 0$. Assim, se considerarmos $r \approx 0$, obtemos

$$\pm\tau \approx \int \left[(\beta\epsilon(2-\beta)^{-1})^{1/2} \left(\frac{b}{r}\right)^{1/\beta} \right]^{-1} dr, \quad (6.241)$$

cujas solução aproximada é

$$\pm\tau \approx \frac{\beta b^{-1/\beta} r^{1+\frac{1}{\beta}}}{(\beta+1)\sqrt{\frac{\beta\epsilon}{2-\beta}}}. \quad (6.242)$$

Este resultado nos diz que a solução é proporcional a $r^{1+1/\beta}$, o que significa que a integral não diverge para $-1 < \beta < 0$. Assim, podemos concluir que o espaço-tempo é regular para $-1 < \beta < 0$. Procedendo de forma análoga, é possível verificar que o espaço-tempo é singular para $\beta = 2$ e para valores de β tais que $\beta < -1$ e $\beta > 0$.

Agora, consideremos a Eq. (6.240), para geodésicas radiais tipo-tempo descritas por uma partícula massiva que cai radialmente, caso em que temos que $f(r) = V_{eff}$. Assim, se considerarmos uma partícula com uma energia inferior ao máximo da barreira de potencial efetiva, então esta atingirá a barreira num dado valor da coordenada radial e retrocederá. Por outro lado, se essa energia for superior ao máximo, a partícula atingirá o centro num tempo finito. Neste caso, a partícula atingirá a singularidade para qualquer valor de $\beta > 0$ e $\beta < -1$, e como consequência, estes espaços-tempos são geodesicamente incompletos. Relativamente aos espaços-tempos correspondentes a $-1 < \beta < 0$, eles são geodesicamente completos.

Examinemos estas questões utilizando a Fig. (62). Nota-se que para $-1 \leq \beta < 0$, Fig. (62b), as partículas com energia suficiente atingem o topo da barreira e ainda têm energia cinética suficiente, viajam em todo o espaço-tempo, o que significa que o espaço-tempo é geodesicamente completo. No caso em que $\beta > 0$, Fig. (62d), o potencial efetivo tende para um valor infinitamente grande e a partícula recuará, o que significa que o espaço-tempo não será coberto e, portanto, as geodésicas são incompletas.

Na Fig. (62b), a partícula consegue ultrapassar a barreira de potencial e atingir o ponto $r = 0$ num tempo finito. Este fato, do ponto de vista das características do espaço-tempo em relação à singularidade, é exatamente o que é previsto pelos valores do escalar de Kretschmann, que são finitos para estes valores de β .

Na Fig. (62d), podemos concluir que a partícula não consegue atingir o ponto $r = 0$ num tempo finito. Isto indica que as geodésicas são incompletas e, portanto, o espaço-tempo é singular. Esta conclusão é confirmada pelo fato de que, para $\beta > 0$, o escalar de Kretschmann é infinito quando $r \rightarrow 0$.

Dentre os casos considerados, apenas os casos em que β está no intervalo $-1 \leq \beta < 0$

não há divergência de curvatura em $r = 0$, o que indica que o espaço-tempo é regular, para diferentes valores de β , neste intervalo, levando em conta o critério baseado nos invariantes escalares de curvatura para examinar a existência de singularidades da métrica. Por outro lado, quando β assume valores fora deste intervalo, o espaço-tempo é singular.

Em resumo, a análise das geodésicas, visando conhecer as características dos espaços-tempos em relação à singularidade, confirma o que é previsto pelos resultados fornecidos pelo escalar de Kretschmann, pelo menos nos casos considerados.

6.3.4 Termodinâmica do buraco negro

A primeira lei da termodinâmica do buraco negro para buracos negros carregados e estáticos é dada por [173]

$$dM = T_H dS + \Phi_H dq + V_H dP, \quad (6.243)$$

onde M é a massa do buraco negro, Φ_H é o potencial magnético, P é a pressão termodinâmica, escrita como [172]

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (6.244)$$

S é a entropia do sistema, que está relacionada com a área do horizonte do buraco negro A pela equação [62]

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_+^2. \quad (6.245)$$

A partir da primeira lei, podemos obter a temperatura, o potencial magnético e o volume da seguinte forma:

$$T_H = \frac{\partial M}{\partial S}, \quad \Phi_H = \frac{\partial M}{\partial q} \text{ e } V_H = \frac{\partial M}{\partial P}. \quad (6.246)$$

Vale a pena chamar a atenção para três considerações que assumiremos nesta subseção:

(i) focaremos na solução $\beta = 2$ uma vez que esta escolha pode representar a presença de matéria escura [59];

(ii) como vimos, $\epsilon = \pm 1$ representa o sinal da densidade do fluido de cordas. Aqui, escolheremos o sinal de ϵ como sendo negativo, uma vez que, no caso em que $\beta \neq 2$, recuperamos os espaços-tempos, que estão descritos na Tabela (4). Para o caso em que $\beta = 2$, a escolha é feita por razões de consistência para ter o efeito da matéria escura;

(iii) vamos também considerar a seguinte redefinição $q^3 \equiv 2l^2 M$. Uma vez fixado q^3 , estamos automaticamente fixando o produto ml^2 e não a massa em si. Isto pode ser feito

sem qualquer problema, é uma identificação perfeitamente válida. Se não redefinirmos o parâmetro, teremos uma ambiguidade no sentido em que teremos dois valores possíveis de pressão, um dos quais corresponde a uma situação que fisicamente não reflete a realidade.

Assim, com estas considerações, a Eq. (6.217) pode ser escrita como

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + q^3} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{\epsilon b[1 + 2 \log(r)]}{2r}. \quad (6.247)$$

Podemos obter M a partir da condição $f(r_+) = 0$.

$$M = \frac{(q^3 + r_+^3) [3b\epsilon(2 \log(r_+) + 1) - 2\Lambda r_+^3 + 6r_+]}{12r_+^3}. \quad (6.248)$$

Agora, podemos calcular a temperatura T_H utilizando a Eq. (6.245), a Eq. (6.246) e a Eq. (6.248), o que resulta em

$$T_H = -\frac{1}{8\pi r_+^5} [bq^3\epsilon(6 \log(r_+) + 1) - 2ber_+^3 + 4q^3r_+ + 2\Lambda r_+^6 - 2r_+^4]. \quad (6.249)$$

Hawking mostrou que os buracos negros emitem radiação e a sua temperatura correspondente é dada por [64]

$$T_\kappa = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (6.250)$$

para espaços-tempos estacionários. A gravidade superficial é definida por [174]

$$\kappa = \left. \frac{f'(r)}{2} \right|_{r=r_+}, \quad (6.251)$$

com $'$ denotando uma derivada relativa à coordenada radial e r_+ sendo o raio do horizonte de eventos. Agora, considerando a Eq. (6.247) e usando a massa do buraco negro dada pela Eq. (6.248), obtemos:

$$T_\kappa = -\frac{1}{8\pi r_+^2 (q^3 + r_+^3)} [bq^3\epsilon(6 \log(r_+) + 1) - 2ber_+^3 + 4q^3r_+ + 2\Lambda r_+^6 - 2r_+^4]. \quad (6.252)$$

Podemos observar que a temperatura T_κ é diferente de T_H . Além da temperatura, as outras grandezas derivadas da primeira lei da termodinâmica também apresentam problemas. Para resolver este problema, a primeira lei da termodinâmica do buraco negro precisa ser modificada [131, 132, 175, 44].

A primeira lei habitual surge num contexto em que a Lagrangiana da teoria não depende explicitamente da massa do buraco negro. Assim, ao construir a primeira lei para soluções com eletrodinâmica não-linear, as derivadas do tensor energia-momento devem ser consideradas e estas correções devem modificar a primeira lei de tal forma que as antigas quantidades termodinâmicas devem relacionar-se com as novas por meio de um fator de correção. A nova primeira lei é escrita como [131, 132, 175, 44]

$$d\mathcal{M} = TdS + \Phi dq + VdP, \quad (6.253)$$

onde

$$d\mathcal{M} = WdM, \quad (6.254)$$

e W é o fator de correção, dado por

$$W = \left(1 + 4\pi \int_{r_+}^{\infty} r^2 \frac{\partial T_0^0}{\partial M} dr \right), \quad (6.255)$$

e T_0^0 é uma das componentes do tensor energia-momento.

Agora, para o caso do buraco negro de Hayward com constante cosmológica e um fluido de cordas, a relação entre as temperaturas, o potencial magnético e o volume são

$$\begin{aligned} T_\kappa &= WT_H = W \frac{\partial M}{\partial S}, \\ \Phi &= W\Phi_H = W \frac{\partial M}{\partial q}, \\ V &= WV_H = W \frac{\partial M}{\partial P}, \end{aligned} \quad (6.256)$$

onde o fator W é dado por

$$W = W(r_+, q) = \frac{r_+^3}{q^3 + r_+^3}. \quad (6.257)$$

Na Fig. 63a, podemos observar o comportamento da temperatura T_κ para diferentes valores de q que indica a intensidade do parâmetro de Hayward. Podemos notar que, se fixarmos um valor para r_+ , a temperatura diminui à medida que o parâmetro q aumenta.

Na Fig. 63b o comportamento da temperatura é mostrado em termos do parâmetro b , que indica a intensidade do fluido de cordas. Para este caso, se definirmos um valor para o raio do horizonte de eventos r_+ , a temperatura T_κ diminui à medida que aumentamos os valores do parâmetro associado ao fluido de cordas b .

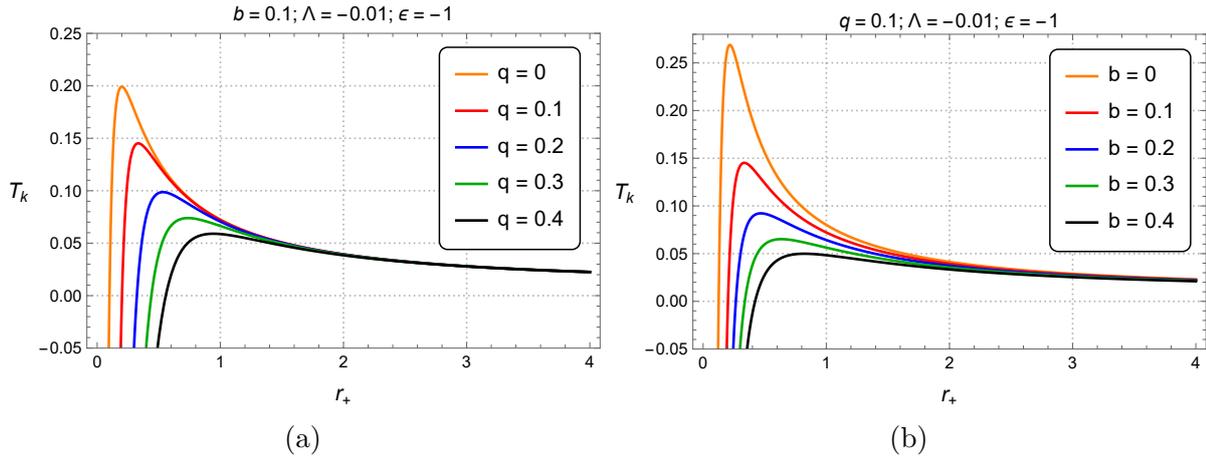


Figura 63 – Representação gráfica da temperatura T_κ para diferentes valores de q e b .

6.3.4.1 Capacidade térmica

A capacidade térmica fornece informações sobre a estabilidade termodinâmica de um sistema. É importante distinguir como o calor é recebido no sistema. Se o volume for constante, temos uma capacidade térmica isocórica C_v . Se a pressão for constante, temos uma capacidade térmica isobárica C_P .

Da termodinâmica clássica, sabemos que a estabilidade de um sistema termodinâmico requer $C_P \geq C_v \geq 0$. Agora, a partir da termodinâmica dos buracos negros, e considerando o caso da pressão constante, temos [176]

$$C_P = T_\kappa \left. \frac{\partial S}{\partial T_\kappa} \right|_P. \quad (6.258)$$

Podemos também escrever esta capacidade térmica em termos do fator de correção $W(r_+, q)$, dado por

$$C_P = W(r_+, q) \frac{\partial T_H}{\partial T_\kappa} \tilde{C}_P, \quad (6.259)$$

onde $\tilde{C}_P = T_H \frac{\partial S}{\partial T_H}$ é a capacidade térmica definida em termos da primeira lei habitual. Assim, a capacidade térmica do buraco negro de Hayward com constante cosmológica e rodeado por um fluido de cordas é

$$\begin{aligned}
C_P = & 2S \left(\pi^{3/2} q^3 + S^{3/2} \right) \left[\pi^3 b q^3 \epsilon + 4\pi^{5/2} q^3 \sqrt{S} - 2\pi S^2 \right. \\
& \left. + 6\pi^3 b q^3 \epsilon \log \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}} \right) - 2\pi^{3/2} b S^{3/2} \epsilon + 2\Lambda S^3 \right] \div \\
& \left[4\pi^{9/2} b q^6 \epsilon - 4\pi^4 q^6 \sqrt{S} - 20\pi^{5/2} q^3 S^2 + 2\pi S^{7/2} \right. \\
& \left. - \pi^3 b q^3 S^{3/2} \epsilon + 4\pi^{3/2} S^3 (b\epsilon + 2\Lambda q^3) + 2\Lambda S^{9/2} \right. \\
& \left. - 3\pi^3 b q^3 \epsilon \left(2\pi^{3/2} q^3 + 5S^{3/2} \right) \log \left(\frac{S}{\pi} \right) \right], \tag{6.260}
\end{aligned}$$

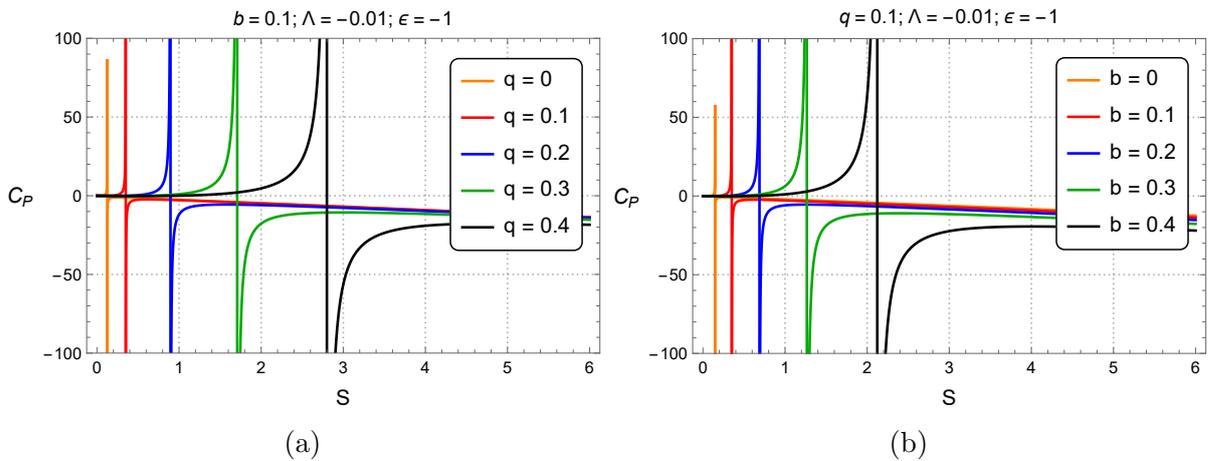


Figura 64 – Capacidade térmica a pressão constante C_P para diferentes valores de q e b .

cujo comportamento é mostrado nas Figs. 64-65, em função da entropia do buraco negro, para diferentes valores dos parâmetros de Hayward e do fluido de cordas.

Podemos concluir que existem valores de S para os quais a capacidade térmica é positiva, assim como existem valores para os quais a capacidade térmica é negativa. Em outras palavras, o buraco negro pode ser termodinamicamente estável ou instável e esta

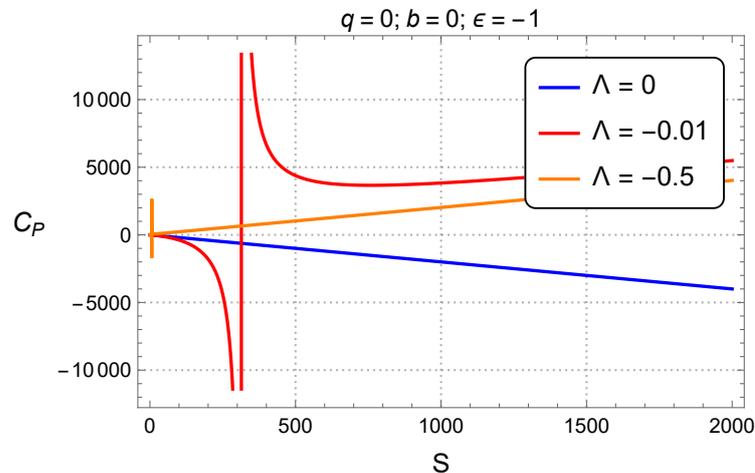


Figura 65 – Capacidade térmica a pressão constante C_P para $b = q = 0$ e diferentes valores de Λ .

estabilidade está relacionada com os valores de q e b . O ponto de transição, no qual a capacidade térmica diverge, muda quando variamos estes parâmetros.

Para $q = 0$, $b = 0$ e $\Lambda = 0$, a Eq. (6.260) reduz-se a $C_P = -2S$, como esperado para o caso do espaço-tempo de Schwarzschild. Neste caso, a capacidade térmica é negativa para $S > 0$, indicando um sistema termodinâmico instável. Considerando a situação $q = 0$ e $b = 0$, dependendo dos valores de Λ , podemos ter um sistema termodinamicamente estável ou instável para $S > 0$, como se pode ver na Fig. 65.

6.3.4.2 Equação de estado e variáveis termodinâmicas críticas

No espaço de fase estendido, podemos tratar a constante cosmológica como pressão termodinâmica e a sua quantidade conjugada como volume termodinâmico. Por conseguinte, utilizaremos as equações (6.244), (6.256)-(6.257).

Com as Eqs. (6.244) e (6.248), a massa pode ser reescrita como

$$M = \frac{(q^3 + r_+^3) [3b\epsilon (2 \log(r_+) + 1) + 16\pi P r_+^3 + 6r_+]}{12r_+^3}. \quad (6.261)$$

Utilizando as Eqs. (6.256)-(6.257) e (6.261), pode-se obter o volume termodinâmico como

$$V = W(r_+, q) \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{4\pi r_+^3}{3}. \quad (6.262)$$

Definamos agora $v = 2r_+$ [177], sendo o dobro do raio do horizonte e difere da definição habitual de volume específico em termodinâmica. Assim, substituindo $r_+ = v/2$ e $\Lambda = -8\pi P$ na Eq. (6.252), obtemos:

$$T(P, v) = - \frac{1}{2\pi v^2 (q^3 + \frac{v^3}{8})} \left[-\frac{1}{4}\pi P v^6 + 2q^3 v - \frac{v^4}{8} + bq^3 \epsilon \left(6 \log\left(\frac{v}{2}\right) + 1 \right) - \frac{1}{4}bv^3 \epsilon \right]. \quad (6.263)$$

Isolando P na equação anterior, obtemos a equação de estado:

$$P(T, v) = \frac{v^3 (-2b\epsilon + 2\pi T v^2 - v)}{2\pi v^6} + \frac{8q^3 (b\epsilon + 2\pi T v^2 + 2v) + 48bq^3 \epsilon \log\left(\frac{v}{2}\right)}{2\pi v^6}. \quad (6.264)$$

Para obter os pontos críticos, consideremos as seguintes condições:

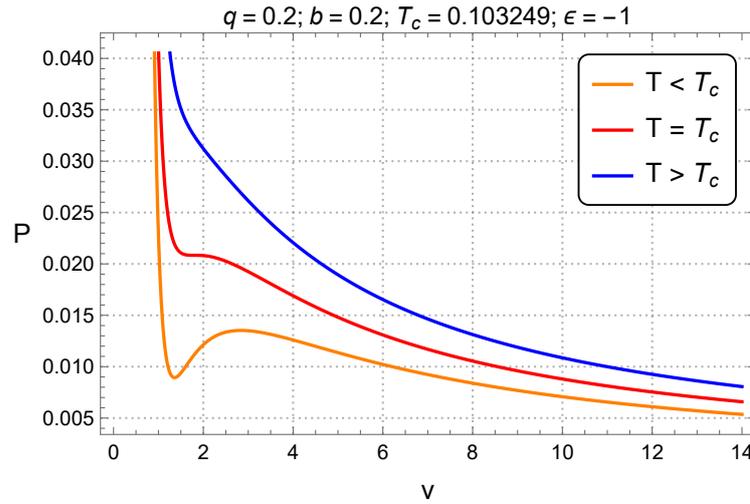


Figura 66 – Representação gráfica do comportamento $P - v$ da solução (6.247) a $T < T_c$, $T = T_c$ e $T > T_c$ e $q = b = 0, 2$.

$$\left. \frac{\partial P}{\partial v} \right|_{T=T_c} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right|_{T=T_c} = 0. \quad (6.265)$$

Usando a primeira condição, obtemos a seguinte relação entre a temperatura crítica de Hawking, T_c , e o volume específico crítico, v_c ,

$$T_c = \frac{-144bq^3\epsilon \log\left(\frac{v_c}{2}\right) + 3b\epsilon v_c^3 - 40q^3v_c + v_c^4}{\pi v_c^2 (v_c^3 + 32q^3)}. \quad (6.266)$$

Usando a Eq. (6.265) e a Eq. (6.264) podemos encontrar

$$\begin{aligned} & + \frac{1280q^6v_c - 4608bq^6\epsilon [-2\log(v_c) + 1 + \log(4)]}{\pi v_c^8 (v_c^3 + 32q^3)} \\ & + \frac{48bq^3\epsilon v_c^3 \left[15\log\left(\frac{v_c}{2}\right) - 1\right]}{\pi v_c^8 (v_c^3 + 32q^3)} \\ & + \frac{224q^3v_c^4 - 6b\epsilon v_c^6 - v_c^7}{\pi v_c^8 (v_c^3 + 32q^3)} = 0. \end{aligned} \quad (6.267)$$

Infelizmente, não é possível resolver a Eq. (6.267) analiticamente, mas se fixarmos alguns valores para os parâmetros q , b e ϵ , obtemos valores numéricos para T_c , P_c e v_c . Na Fig. 66 mostramos a isoterma considerando três casos, $T < T_c$, $T = T_c$ e $T > T_c$, onde T_c é a temperatura crítica. É evidente que a pressão é maior para valores de temperatura mais elevados. A uma temperatura fixa, a pressão aumenta à medida que a carga q e b aumentam, como se pode ver nas Figs. 67a-67b.

Apresentamos no Quadro (5) e (6) os valores das variáveis termodinâmicas críticas para duas situações específicas, uma das quais considera diferentes valores de q e a outra para diferentes valores de b , conforme descrito nas Figs. 68-70.

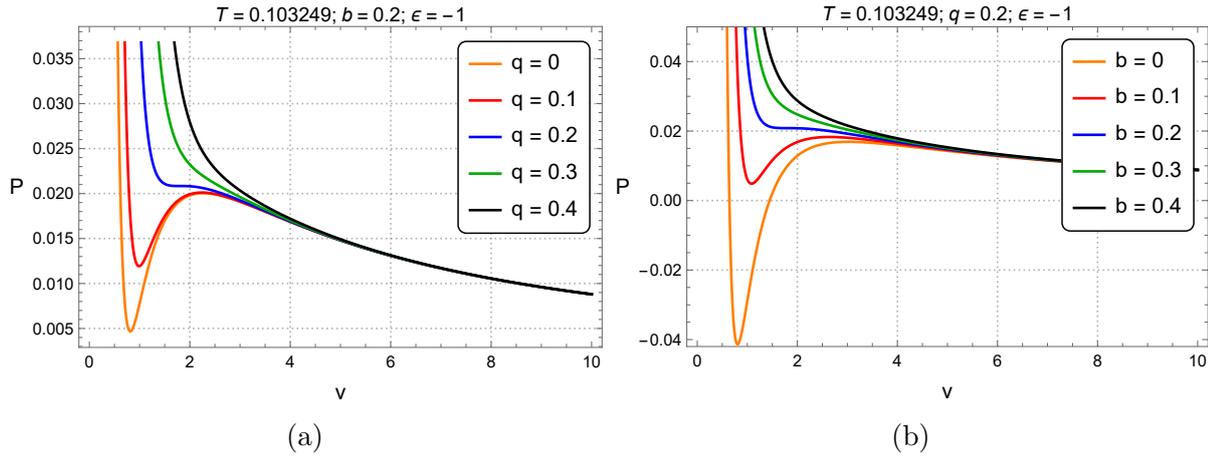


Figura 67 – Representação gráfica do comportamento $P - V$ da solução (6.247) a uma temperatura fixa e diferentes valores de q e b .

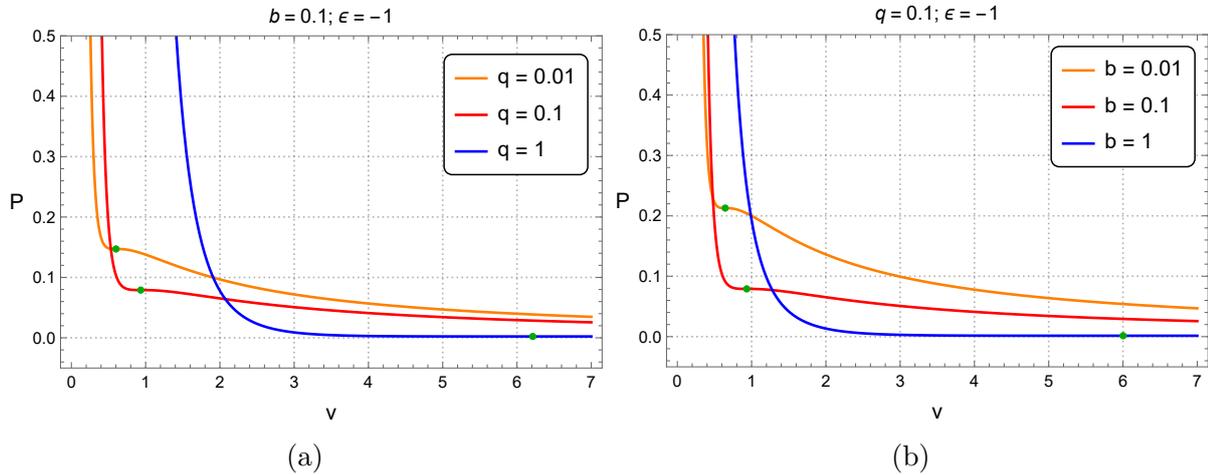


Figura 68 – Representação gráfica do diagrama $P - v$ para diferentes valores de q e b .

Quadro 5 – Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , P_c e $\frac{P_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de q e para $\epsilon = -1$ e $b = 0.1$

q	v_c	T_c	p_c	$\frac{p_c v_c}{T_c}$
0.01	0.601041	0.265051	0.147086	0.333538
0.1	0.933739	0.201772	0.079042	0.365783
1	6.21221	0.0359753	0.00225096	0.388695

A partir da equação de estado, podemos obter algumas informações sobre a transição de um buraco negro. O máximo e o mínimo de p em função de v são conhecidos como a curva spinodal. Esta curva separa a região (instável) de compressibilidade negativa da região de compressibilidade positiva (onde o estado pode ser estável ou metaestável). Esta curva é encontrada resolvendo T na Eq. (6.265) e substituindo-a na Eq. (6.264). Assim, obtemos:

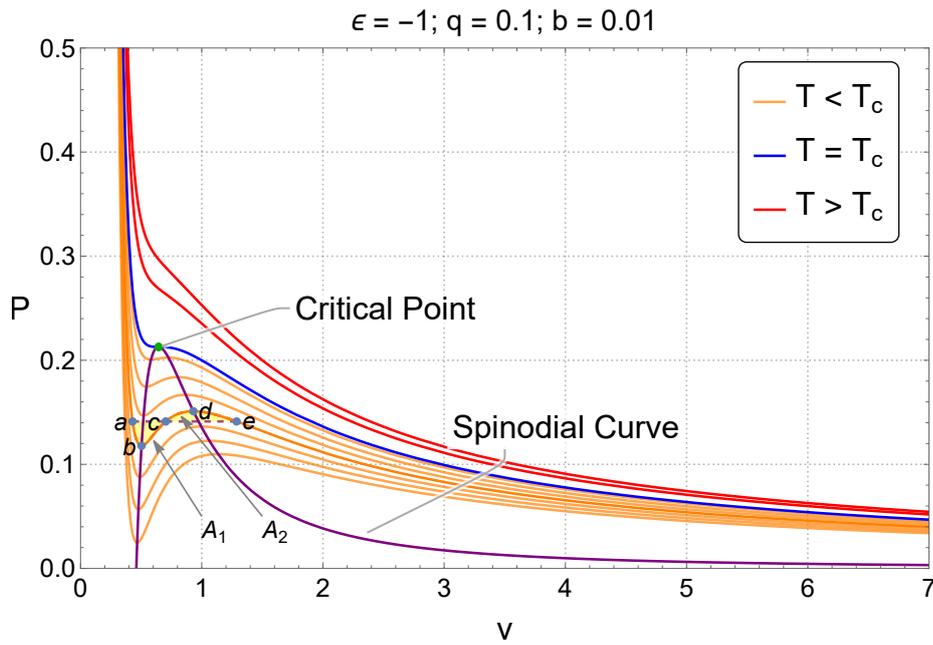


Figura 69 – Representação gráfica da equação de estado para $b = 0.01$ e $q = 0.1$.

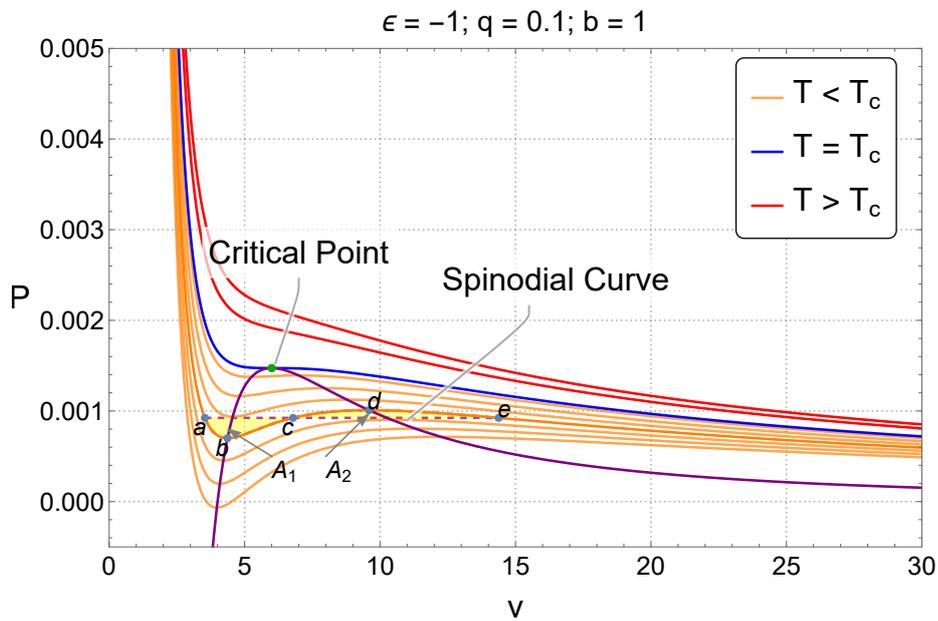


Figura 70 – Representação gráfica da equação de estado para $b = 1$ e $q = 0.1$.

Quadro 6 – Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , P_c e $\frac{P_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de b e para $\epsilon = -1$ e $q = 0.1$

b	v_c	T_c	P_c	$\frac{P_c v_c}{T_c}$
0.01	0.64471	0.350536	0.212805	0.391394
0.1	0.933739	0.201772	0.079042	0.365783
1	6.00278	0.0265186	0.00147273	0.333369

$$p = \frac{-128q^6(v - 2b\epsilon) - 8q^3v^3(b\epsilon + 10v)}{2\pi v^6(v^3 + 32q^3)} + \frac{v^6(4b\epsilon + v) - 48bq^3\epsilon(16q^3 + 5v^3)\log\left(\frac{v}{2}\right)}{2\pi v^6(32q^3 + v^3)}. \quad (6.268)$$

Nas Figs. 69-70, a linha azul é a isotérmica crítica; as linhas laranja são as isotérmicas com temperaturas abaixo da temperatura crítica; e as linhas vermelhas são as isotérmicas com temperaturas acima da temperatura crítica. Além disso, a linha roxa contínua é a curva spinodal, e a linha roxa tracejada é a linha de coexistência entre as fases.

Outra informação interessante sobre a transição de fase é dada pela construção de Maxwell. Esta análise indica o intervalo de miscibilidade, o qual é uma região de duas fases que separa as fases estáveis. No caso do fluido de Van der Waals, este intervalo separa o líquido estável do vapor estável. No contexto da termodinâmica do buraco negro, isto indica a região que separa as fases pequena e grande do buraco negro. Uma maneira simples de determinar graficamente o intervalo de miscibilidade é usar a construção de área igual de Maxwell.

Podemos visualizar a curva spinodal e a construção de Maxwell para um diagrama de fase nas Figs. 69-70, que têm transição de fase para $T < T_c$ e apresenta uma única fase para $T > T_c$. Além disso, temos seis pontos, dos quais três pontos, a , c e e , são os pontos com a mesma pressão p_0 , que estão sobre a linha tracejada roxa, a qual é a linha de coexistência entre duas fases, e os pontos b e d são os pontos de máximo e mínimo, que estão sobre a linha contínua roxa, a qual é a curva spinodal. Também podemos notar que a área A_1 tem o mesmo valor que A_2 , como era de se esperar da construção de Maxwell.

6.3.4.3 Energia livre de Gibbs

No espaço de fase estendido, a massa é interpretada como entalpia. Assim, a energia livre de Gibbs pode ser derivada como

$$G = H - TS = M - TS, \quad (6.269)$$

onde M , T e S são dados pelas Eqs. (6.248), (6.252) e (6.245), respectivamente. Usando também a Eq. (6.244), obtemos:

$$G = + \frac{bq^3\epsilon [6 \log(r_+) + 1]}{8(q^3 + r_+^3)} - \frac{2(br_+^3\epsilon + 8\pi Pr_+^6 - 2q^3r_+ + r_+^4)}{8(q^3 + r_+^3)} + \frac{(q^3 + r_+^3) [3b\epsilon(2 \log(r_+) + 1) + 16\pi Pr_+^3 + 6r_+]}{12r_+^3}. \quad (6.270)$$

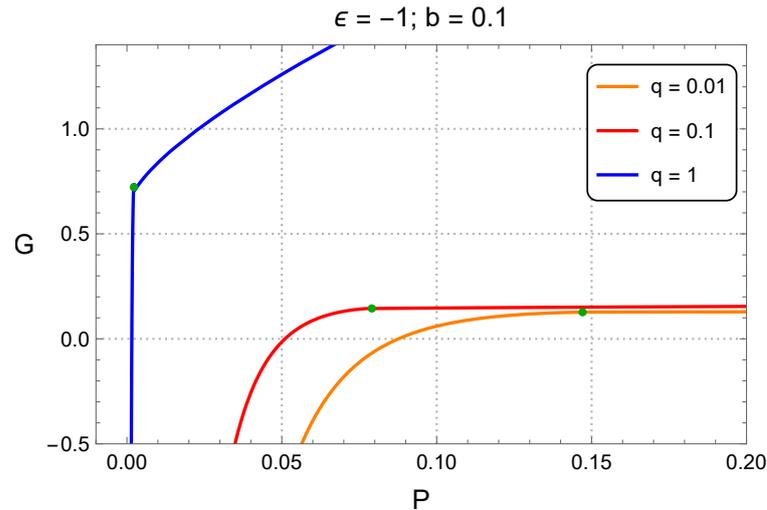


Figura 71 – Representação gráfica do comportamento de $G - P$ para diferentes valores de q .

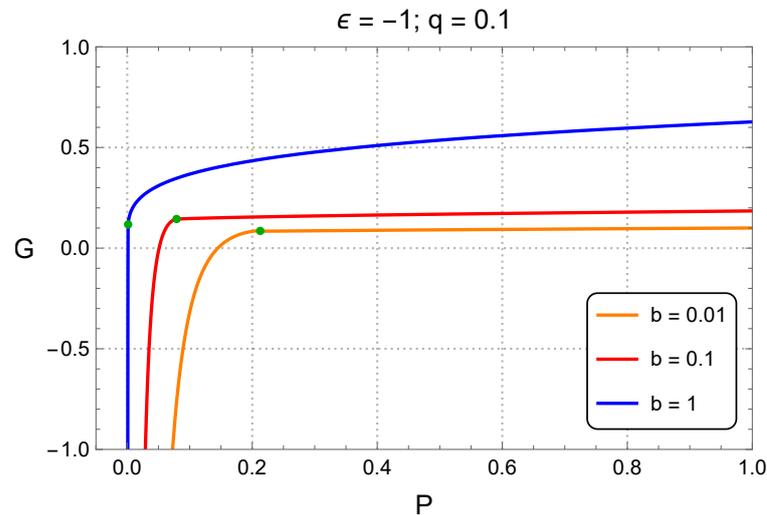


Figura 72 – Representação gráfica do comportamento $G - P$ da solução (6.247) para diferentes valores de b .

O comportamento da energia livre de Gibbs está representado nas Figs. 71-72 para diferentes valores de q e b com a temperatura crítica que pode ser identificada no Quadro (5)-(6).

Nas Figs. 73-74 mostramos a energia livre de Gibbs para diferentes valores de temperatura. Para $T < T_c$ temos uma transição de fase; quando a temperatura aumenta, as duas fases tornam-se apenas uma.

Agora, nas Figs. 75-76, fazemos um zoom nas Figs. 73-74, respectivamente. Nestes gráficos, usamos a mesma temperatura $T = 0,86T_c$ usada nas Figs. 69-70 para o diagrama de fase.

Repare que os pontos a, b, c, d e e indicam as regiões de transição de fase e as transições instável e estável. A equação de Gibbs nos dá informações sobre a transição de fase. Quando

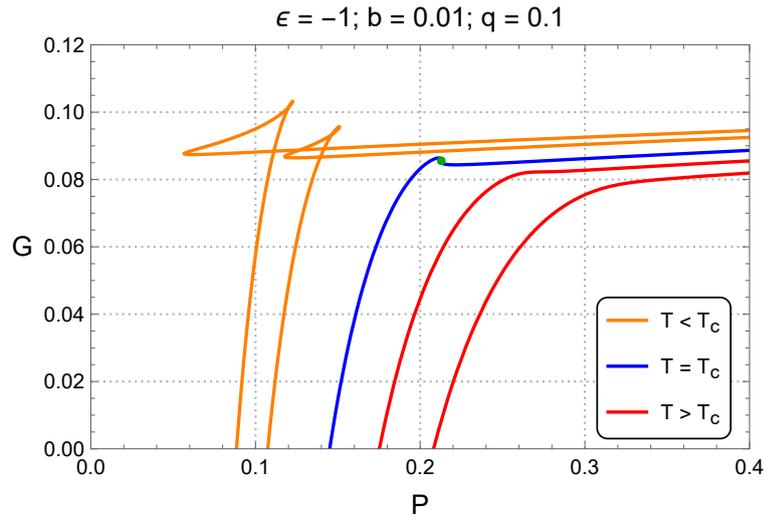


Figura 73 – Representação gráfica do comportamento $G - P$ da solução (6.247) para uma $T < T_c$, $T = T_c$ e $T > T_c$ com $q = 0.1$ e $b = 0.01$.

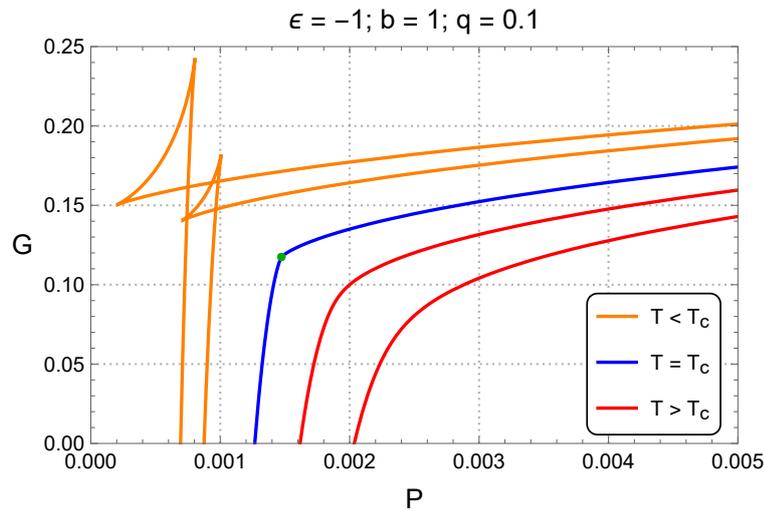


Figura 74 – Representação gráfica do comportamento $G - P$ da solução (6.247) para uma $T < T_c$, $T = T_c$ e $T > T_c$ com $q = 0.1$ e $b = 1$.

temos uma temperatura abaixo da temperatura crítica, a curva de $G \times P$ tem duas pontas que podem separar a transição de fase. Na Fig. 75, é possível notar esse comportamento.

Observe que, na linha vermelha, temos o pequeno buraco negro; na linha azul, temos uma coexistência entre o buraco negro pequeno e o grande, indicada como um buraco negro intermediário; e finalmente, na linha laranja, temos o buraco negro grande. Além disso, os pontos a , c e e têm a mesma pressão, P_0 , pois esses pontos estão na mesma linha de coexistência. Também é possível observar que a energia livre de Gibbs se altera quando variamos alguns parâmetros; estas variações são refletidas na transição de fase.

Assim, quando fixamos $q = 0.1$, que representa a intensidade do parâmetro de Hayward, e aumentamos o parâmetro do fluido de cordas de $b = 0.01$ para $b = 1$, a linha azul diminui, o que indica que o alcance do buraco negro intermédio diminui. Este efeito pode

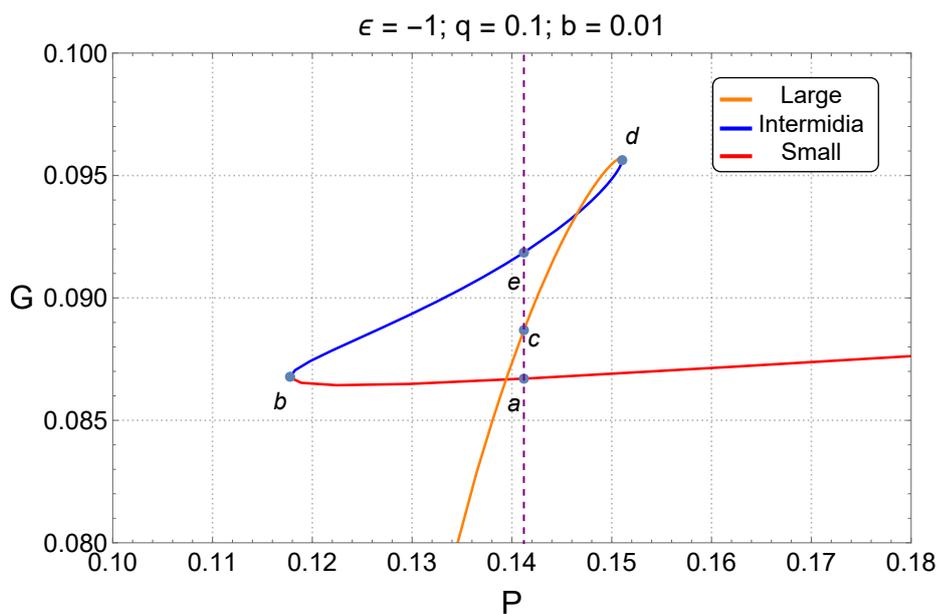


Figura 75 – Representação gráfica da equação de Gibbs para $b = 0.01$ e $q = 0.1$ com um zoom numa região.

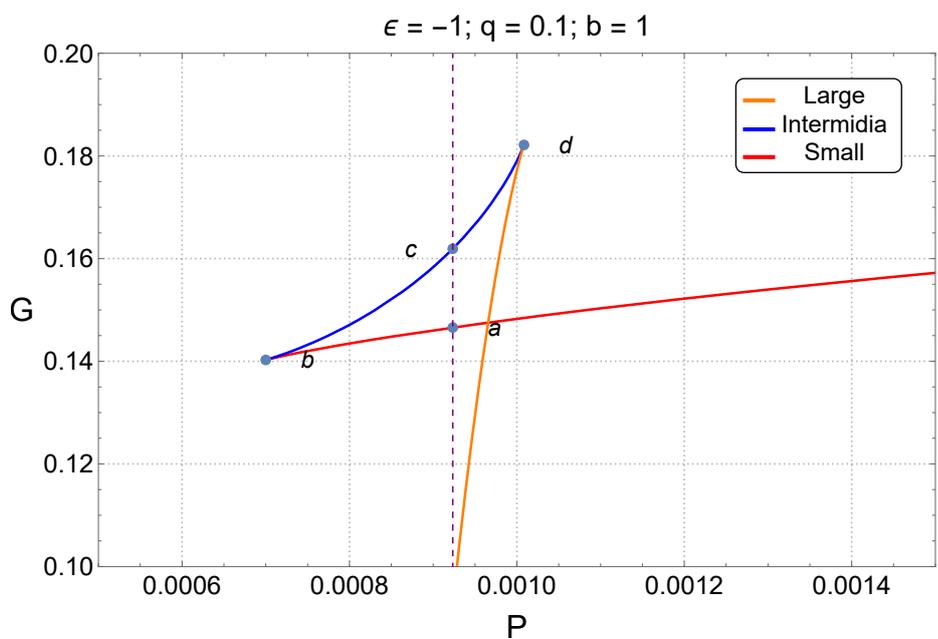


Figura 76 – Representação gráfica da equação de Gibbs para $b = 1$ e $q = 0.1$ com um zoom numa região.

ser observado na Fig. 75 e na Fig. 76.

7 Buraco negro de Frolov com nuvem de cordas e fluido de cordas

A métrica de Frolov [15] foi proposta em 2016 pelo físico russo Valeri P. Frolov, da universidade de Alberta, no Canadá. Neste capítulo temos como objetivo generalizar a métrica de Frolov num cenário com nuvem de cordas e fluido de cordas. Discutiremos o movimento geodésico e o potencial efetivo de partículas nas proximidades deste buraco negro e a termodinâmica das soluções propostas.

7.1 Algumas observações sobre o buraco negro de Frolov rodeado por uma nuvem de cordas

Nesta seção, temos como objetivo obter a métrica estática de Frolov com nuvem de cordas por meio da resolução das equações de campo da relatividade geral para o conteúdo de energia-momento associado a nuvem de cordas e o conteúdo de energia-momento obtido para a métrica de Frolov, já discutida na seção (3.3) desta tese.

7.1.1 Solução geral

O elemento de linha para um espaço-tempo isotrópico na vizinhança de uma fonte esfericamente simétrica, sem perda de generalidade, pode ser escrito da seguinte forma [108]:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (7.1)$$

onde assumiremos que a fonte é necessariamente estática, logo os parâmetros ν e λ dependerão apenas da coordenada radial.

As únicas componentes não-nulas do tensor de Einstein para o caso de um objeto massivo, estático e esfericamente simétrico são as componentes da diagonal principal, dadas por:

$$G_t^t = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (7.2)$$

$$G_r^r = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (7.3)$$

$$G_{\theta}^{\theta} = G_{\phi}^{\phi} = \frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right). \quad (7.4)$$

Tensor de energia-momento total

Para incorporar os modelos de Frolov e nuvem de cordas em nossa descrição, devemos obter os tensores de energia-momento de Frolov e da nuvem de cordas e, finalmente, unificá-los em uma só formulação.

Contudo, suporemos que estes tensores não interajam entre si. Assim, o tensor de energia-momento total é dado pela sobreposição linear dos tensores correspondentes:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(F)} + T_{\mu\nu}^{(CS)}. \quad (7.5)$$

Tensor de energia-momento de Frolov

Usando a métrica dada pela Eq. (3.82), podemos obter as seguintes componentes do tensor de Einstein:

$$G_t^t = G_r^r = \frac{l^2 (12m^2r^2 + 4mQ^2r - 3Q^4) + Q^2r^4}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^2}, \quad (7.6)$$

$$G_{\theta}^{\theta} = G_{\phi}^{\phi} = \frac{24l^2m^2r^3 (l^2m - r^3)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} + \frac{6l^2Q^4r (l^2m + 2r^3)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} - \frac{Q^2 (l^4 (3Q^4 - 28m^2r^2) + 6l^2mr^5 + r^8)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3}, \quad (7.7)$$

que através das equações de Einstein, são proporcionais ao tensor de energia-momento da fonte.

Tensor de energia-momento da nuvem de cordas

Para nuvem de cordas esfericamente simétrica, o tensor de energia-momento [36] é dado por:

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{\Sigma^{\mu\beta} \Sigma_{\beta}^{\nu}}{(-\gamma)^{1/2}}, \quad (7.8)$$

onde $\Sigma^{\mu\nu}$ representa a superfície de mundo da corda chamado de bivector, tal que:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \lambda^b}, \quad (7.9)$$

onde ϵ^{ab} é o símbolo de Levi-Civita bidimensional com $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$.

As componentes mistas não-nulas do tensor de energia-momento para nuvem de cordas são dadas por [36]:

$$T_0^0 = T_1^1 = \frac{a}{r^2}, \quad (7.10)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = 0. \quad (7.11)$$

Solução das equações de campo de Einstein

Usando as equações (7.2)-(7.4) referente as componentes não-nulas do tensor de Einstein juntamente com as equações (7.6)-(7.7) e (7.10)-(7.11) referente aos tensores de energia-momento para o espaço-tempo de Frolov e da nuvem de cordas, respectivamente, é possível escrever as seguintes equações de Einstein:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{a}{r^2} + \frac{l^2 (12m^2r^2 + 4mQ^2r - 3Q^4) + Q^2r^4}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^2}, \quad (7.12)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{a}{r^2} + \frac{l^2 (12m^2r^2 + 4mQ^2r - 3Q^4) + Q^2r^4}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^2}, \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) = &+ \frac{24l^2m^2r^3 (l^2m - r^3)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} \\ &+ \frac{6l^2Q^4r (l^2m + 2r^3)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} \\ &- \frac{Q^2 (l^4 (3Q^4 - 28m^2r^2) + 6l^2mr^5 + r^8)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Subtraindo as Eqs. (7.12) e (7.13), obtemos que:

$$\lambda = -\nu \Rightarrow \lambda' = -\nu'. \quad (7.15)$$

Somando as Eqs. (7.12) e (7.13) e considerando a Eq. (7.15), após algumas simplificações, obtemos:

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda'}{r} - e^{-\lambda} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{a}{r^2} + \frac{l^2 (12m^2r^2 + 4mQ^2r - 3Q^4) + Q^2r^4}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^2}. \quad (7.16)$$

Sem perda de generalidade, podemos escrever $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ em termos da função $f(r)$ através da seguinte expressão:

$$\nu = -\lambda = \ln(1 + f(r)), \quad (7.17)$$

e considerando as Eqs. (7.15) e (7.17), podemos reescrever as Eqs. (7.16) e (7.14), respectivamente, da seguinte forma:

$$-\frac{1}{r^2}(rf' + f) = \frac{a}{r^2} + \frac{l^2(12m^2r^2 + 4mQ^2r - 3Q^4) + Q^2r^4}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^2}, \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} 2\frac{f'}{r} + f'' &= -2\frac{24l^2m^2r^3(l^2m - r^3)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^3} \\ &\quad - 2\frac{6l^2Q^4r(l^2m + 2r^3)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^3} \\ &\quad + 2\frac{Q^2(l^4(3Q^4 - 28m^2r^2) + 6l^2mr^5 + r^8)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^3}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Somando as Eqs. (7.18) e (7.19) e multiplicando o resultado por r^2 , obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} r^2f'' + rf' - f - a - \frac{l^2r^2(12m^2r^2 + 4mQ^2r - 3Q^4) + Q^2r^6}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^2} \\ + \frac{48l^2m^2r^5(l^2m - r^3)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^3} + \frac{12l^2Q^4r^3(l^2m + 2r^3)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^3} \\ - \frac{2Q^2r^2(l^4(3Q^4 - 28m^2r^2) + 6l^2mr^5 + r^8)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^3} = 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

A solução geral da equação diferencial anterior é dado por:

$$f(r) = \frac{-2al^2mr^2 - al^2Q^2r - ar^5 + 4l^2m^2r + 2l^2mQ^2 + Q^2r^3}{r(2l^2mr + l^2Q^2 + r^4)} + \frac{C_1}{r} + C_2r, \quad (7.21)$$

onde, por conveniência, adotaremos as constantes arbitrárias como $C_1 = -2m$ e $C_2 = 0$. Simplificando, ficaremos com a seguinte solução:

$$f(r) = -a - \frac{(2mr - Q^2)r^2}{r^4 + (2mr + Q^2)l^2}. \quad (7.22)$$

Assim, substituindo a Eq. (7.22) na Eq. (7.17), obtemos:

$$\nu = -\lambda = \ln \left[1 - a - \frac{(2mr - Q^2)r^2}{r^4 + (2mr + Q^2)l^2} \right]. \quad (7.23)$$

Dessa forma, substituindo a Eq. (7.23) na eq. (7.1), obtemos finalmente a métrica de Frolov para um buraco negro com nuvem de cordas:

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left(1 - a - \frac{(2mr - Q^2)r^2}{r^4 + (2mr + Q^2)l^2} \right) dt^2 \\
& - \left(1 - a - \frac{(2mr - Q^2)r^2}{r^4 + (2mr + Q^2)l^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Note que se $Q = 0$, obtemos a métrica de Hayward com nuvem de cordas (6.21) [39]. Se $l = 0$, a métrica (7.24) torna-se similar ao espaço-tempo de Reissner-Nordström, dado pela Eq. (2.117).

7.1.2 Análise do escalar de Kretschmann

Se queremos verificar a existência de singularidades nesta métrica, precisamos calcular o escalar de Kretschmann. Assim, para a métrica dada pela Eq. (7.24), o escalar de Kretschmann é

$$\begin{aligned}
K = & R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} \\
= & + \frac{4a^2}{r^4} - \frac{16l^6Q^{10}r(2l^2m + 5r^3)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} + \frac{32l^6mQ^8r^2(19r^3 - 7l^2m)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} \\
& + \frac{16l^2Q^6r^3(8l^6m^3 + 38l^4m^2r^3 - 80l^2mr^6 - 17r^9)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} \\
& + \frac{16l^2mQ^4r^4(120l^6m^3 - 76l^4m^2r^3 - 131l^2mr^6 + 34r^9)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} \\
& + \frac{96mQ^2r^5(32l^8m^4 - 20l^6m^3r^3 + 30l^4m^2r^6 + 4l^2mr^9 - r^{12})}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} \\
& + \frac{48m^2r^6(32l^8m^4 - 16l^6m^3r^3 + 72l^4m^2r^6 - 8l^2mr^9 + r^{12})}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} \\
& + \frac{8Q^4(3l^8Q^8 + 74l^4Q^4r^8 + 7r^{16})}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^6} - \frac{8a(Q^2 - 2mr)}{l^2r^2(2mr + Q^2) + r^6}.
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Agora determinaremos o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty, \tag{7.26}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \tag{7.27}$$

Portanto, a partir da análise do escalar de Kretschmann, no limite $r \rightarrow 0$, concluímos que a inclusão da nuvem de cordas influencia a métrica, destruindo sua regularidade, e como consequência, introduzindo uma singularidade na origem ($r = 0$).

7.1.3 Geodésicas e Potencial Efetivo

Consideremos agora a solução estática e esfericamente simétrica, Eq. (7.1), com $f(r)$ dado pela Eq. (7.24). Analisaremos as equações geodésicas considerando a ação geodésica e o princípio variacional para escrever um Lagrangiano que descreve a métrica como

$$2\mathcal{L} = f(r)\dot{t}^2 - \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2. \quad (7.28)$$

O “ponto” representa a derivada em relação ao tempo próprio, τ . Por simplicidade, restringimos a análise das geodésicas ao plano equatorial do buraco negro, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Usando as equações de Euler-Lagrange, obtemos

$$E = f(r)\dot{t}, \quad (7.29)$$

$$J = -r^2\dot{\phi}, \quad (7.30)$$

onde E e J são constantes de movimento que correspondem aos vetores de Killing ∂_t e ∂_ϕ , respectivamente. Podemos interpretar estas constantes como a energia E e o momento angular J da partícula que se move nas proximidades do buraco negro.

Reescalando o parâmetro τ , podemos definir $L = 2\mathcal{L}$, que, para geodésicas tipo-tempo, é igual a +1, para geodésicas tipo-espaço é igual a -1 e é igual a 0 para geodésicas nulas [114]. Substituindo as Eqs. (7.29) e (7.30) na Eq. (7.28), conseguimos

$$\dot{r}^2 = E^2 - V_{eff}, \quad (7.31)$$

onde

$$V_{eff} = f(r) \left(\frac{J^2}{r^2} + L \right). \quad (7.32)$$

Consideremos agora o problema da partícula massiva ($L = 1$) que cai radialmente ($J = 0$) no buraco negro. A equação do movimento geodésico radial dessa partícula teste é dada por

$$\dot{r}^2 = E^2 - f(r), \quad (7.33)$$

enquanto o potencial efetivo é o seguinte

$$V_{eff} = f(r). \quad (7.34)$$

Os gráficos para \dot{r}^2 e V_{eff} estão apresentados na Fig.(77).

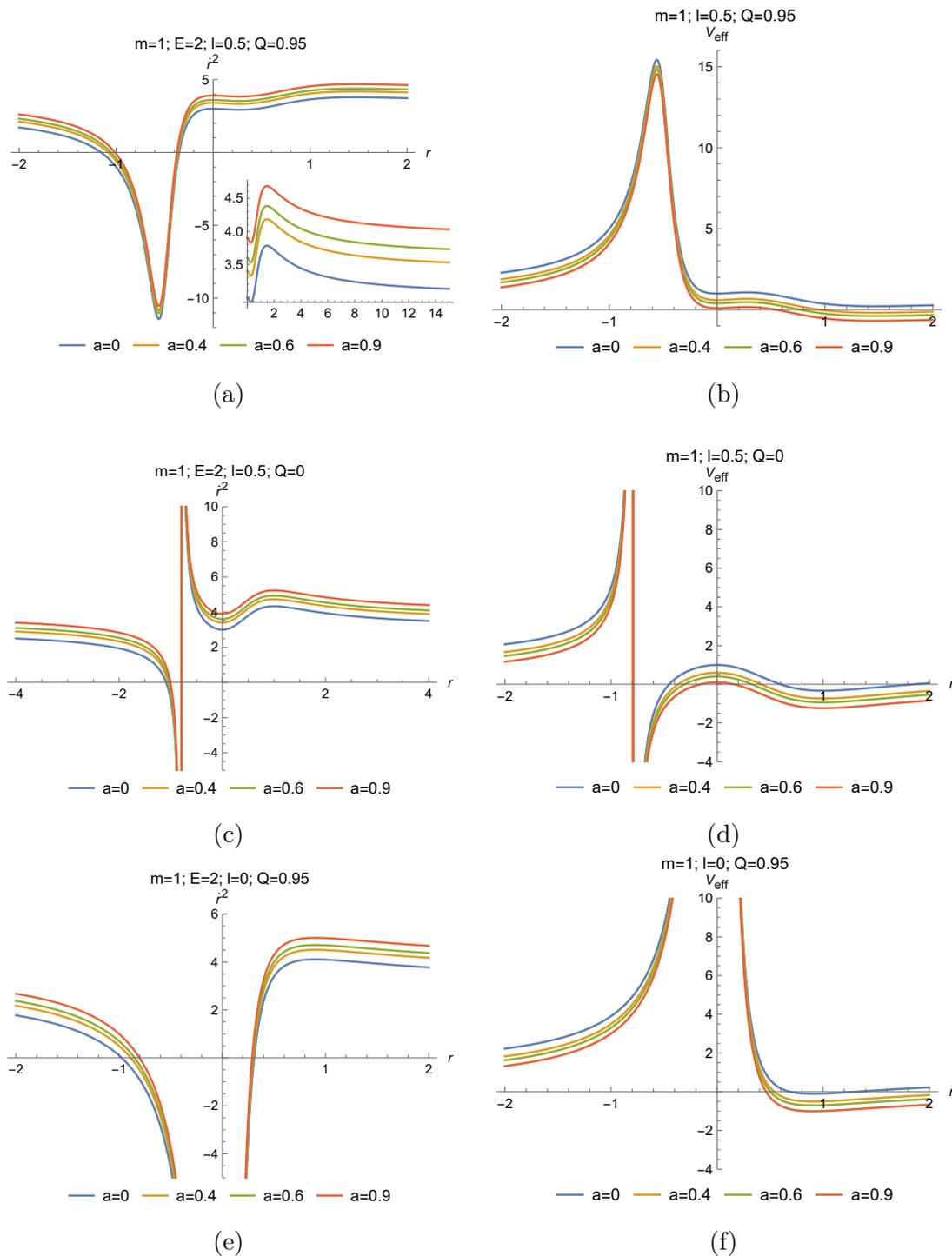


Figura 77 – O gráfico da esquerda mostra \dot{r}^2 para $E = 2$. O gráfico da direita mostra o potencial efetivo $V_{\text{eff}} = f(r)$.

Comparemos agora os resultados previstos pelos valores do escalar de Kretschmann quando $r \rightarrow 0$, com as características das geodésicas, a saber, se são completas ou incompletas.

Para o espaço-tempo de Frolov com nuvens de cordas ($0 < a < 1$) e sem nuvens de cordas ($a = 0$), Fig. 77b, a partícula teste consegue ultrapassar a barreira de potencial e atingir o ponto $r = 0$ num tempo finito. Isso indica que as geodésicas são completas e,

portanto, o espaço-tempo de Frolov e o espaço-tempo de Frolov com nuvens de cordas são regulares.

Esta conclusão, para o espaço-tempo de Frolov, é confirmada pelo fato de que, o escalar de Kretschmann é finito, quando $r \rightarrow 0$, (3.84). Porém, para o espaço-tempo de Frolov com nuvens de cordas, a análise das geodésicas sugere um espaço-tempo regular na origem, enquanto o escalar de Kretschmann diverge quando $r \rightarrow 0$, (7.26), sugerindo uma métrica singular na origem.

Na Fig. 77d, que representa o espaço-tempo de Hayward com nuvens de cordas ($0 < a < 1$) e sem nuvens de cordas ($a = 0$), podemos concluir que a partícula atinge o ponto $r = 0$ num tempo finito. Isto indica que as geodésicas são completas e, portanto, o espaço-tempo é regular na origem. Esta conclusão acerca do buraco negro de Hayward com nuvens de cordas não é confirmada pelo escalar de Kretschmann que é infinito, quando $r \rightarrow 0$, (6.23).

Na Fig. 77f, que representa o espaço-tempo de Reissner-Nordström, podemos concluir que a partícula não pode atingir o ponto $r = 0$ num tempo finito. Isto indica que as geodésicas são incompletas e, portanto, o espaço-tempo é singular na origem. Esta conclusão é confirmada pelo fato de que, o escalar de Kretschmann é infinito, quando $r \rightarrow 0$, (2.120).

Em resumo, a análise das geodésicas, visando conhecer as características do espaço-tempo relativamente à singularidade, pode confirmar ou não o que é previsto pelos resultados fornecidos pelo escalar de Kretschmann. Assim, para verificar eficazmente a existência ou não de singularidades no espaço-tempo é necessária uma análise da completude, ou incompletude geodésica.

7.1.4 Condições de energia

É conhecido que os buracos negros regulares violam as condições de energia [158]. Uma vez que a introdução de uma nuvem de cordas transformou a métrica do buraco negro numa solução singular, é essencial analisar as condições de energia da métrica obtida.

Para obter as condições de energia, precisamos identificar as componentes do tensor de energia-momento. Para $f > 0$, temos:

$$T_{\mu}^{\mu} = \text{diag}[\rho, -p_r, -p_t, -p_t], \quad (7.35)$$

onde ρ é a densidade de energia, p_r é a pressão radial e p_t é a pressão tangencial. Considerando as equações de Einstein e a Eq. (7.24), encontramos

$$\rho = \frac{1 - f(r) - r f'(r)}{\kappa^2 r^2}, \quad (7.36)$$

$$p_r = \frac{r f'(r) + f - 1}{\kappa^2 r^2}, \quad (7.37)$$

$$p_t = \frac{r f''(r) + 2 f'(r)}{2 \kappa^2 r}. \quad (7.38)$$

A partir de agora, identifiquemos a função $f(r)$ como

$$f(r) = 1 - a - \frac{(2mr - Q^2) r^2}{r^4 + (2mr + Q^2) l^2}. \quad (7.39)$$

Há quatro condições de energia principais: a condição de energia fraca (WEC), a condição de energia forte (SEC), a condição de energia dominante (DEC) e a condição de energia nula (NEC) [159]. Estas condições são dadas pelas desigualdades [159, 40, 160]

$$NEC_{1,2} = WEC_{1,2} = SEC_{1,2} \Leftrightarrow \rho + p_{r,t} \geq 0, \quad (7.40)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow \rho + p_r + 2p_t \geq 0, \quad (7.41)$$

$$DEC_{1,2} \Leftrightarrow \rho - |p_{r,t}| \geq 0, \quad (7.42)$$

$$DEC_3 = WEC_3 \Leftrightarrow \rho \geq 0, \quad (7.43)$$

onde os índices 1 e 2 refere-se, respectivamente, as componentes radial e tangencial da pressão. Vemos que $DEC_{1,2} \Leftrightarrow ((NEC_{1,2}) \text{ e } (\rho - p_{r,t} \geq 0))$, por isso, substituímos $DEC_{1,2} \Rightarrow \rho - p_{r,t} \geq 0$.

No que se segue, vamos considerar $f(r) > 0$. Assim, as condições de energia são dadas pelas seguintes relações

$$NEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (7.44)$$

$$NEC_2 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{2r(-4l^4 m Q^2 (mr + Q^2) + l^2 r^3 (18m^2 r^2 + 6m Q^2 r - 7Q^4) + Q^2 r^7)}{\kappa^2 (l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} \geq 0, \quad (7.45)$$

$$WEC_3 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{l^2 (12m^2 r^2 + 4m Q^2 r - 3Q^4) + Q^2 r^4}{\kappa^2 (l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^2} \geq 0, \quad (7.46)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow \frac{48l^2 m^2 r^3 (r^3 - l^2 m)}{\kappa^2 (l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} + \frac{2Q^2 (l^4 (-28m^2 r^2 - 6m Q^2 r + 3Q^4) + 6l^2 r^4 (mr - 2Q^2) + r^8)}{\kappa^2 (l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} \geq 0, \quad (7.47)$$

$$DEC_1 \Leftrightarrow \frac{2a}{\kappa^2 r^2} + \frac{l^2 (24m^2 r^2 + 8mQ^2 r - 6Q^4) + 2Q^2 r^4}{\kappa^2 (l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^2} \geq 0, \quad (7.48)$$

$$DEC_2 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{12l^2 m^2 r^3 (4l^2 m - r^3)}{\kappa^2 (l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} + \frac{l^4 (48m^2 Q^2 r^2 + 4mQ^4 r - 6Q^6) + 10l^2 Q^4 r^4}{\kappa^2 (l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} \geq 0. \quad (7.49)$$

Se considerarmos o limite $r \rightarrow \infty$, obtemos

$$NEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (7.50)$$

$$NEC_2 \Leftrightarrow 0, \quad (7.51)$$

$$WEC_3 \Leftrightarrow 0, \quad (7.52)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow 0, \quad (7.53)$$

$$DEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (7.54)$$

$$DEC_2 \Leftrightarrow 0. \quad (7.55)$$

Os resultados relativos às condições de energia mostram-nos que, no caso considerado, as condições de energia devem ser satisfeitas ou violadas consoante a relação entre os parâmetros. Analisando estas condições para valores muito grande da coordenada radial, concluímos que todas elas são satisfeitas e iguais a zero. Vale a pena mencionar que se considerarmos o caso $f(r) < 0$, as conclusões sobre as condições de energia são as mesmas.

7.1.5 Termodinâmica do buraco negro

Nesta seção, estudamos a termodinâmica do buraco negro de Frolov com uma nuvem de cordas, examinando o comportamento da massa, da temperatura Hawking e da capacidade térmica em função da entropia.

7.1.5.1 Massa do buraco negro

Seja r_h o raio do horizonte, assim temos que $f(r_h) = 0$, onde $f(r)$ é dado pela Eq. (7.39). Assim, podemos escrever a massa do buraco negro em termos de r_h através da seguinte equação:

$$m = -\frac{(a-1)r_h^4 + (a-1)l^2 Q^2 - Q^2 r_h^2}{2((a-1)l^2 r_h + r_h^3)}, \quad (7.56)$$

escrito em termos do parâmetro que trata da presença da nuvem de cordas, a . Nota-se que se $a = 0$, recuperamos a massa do buraco negro regular de Frolov, sem a nuvem de

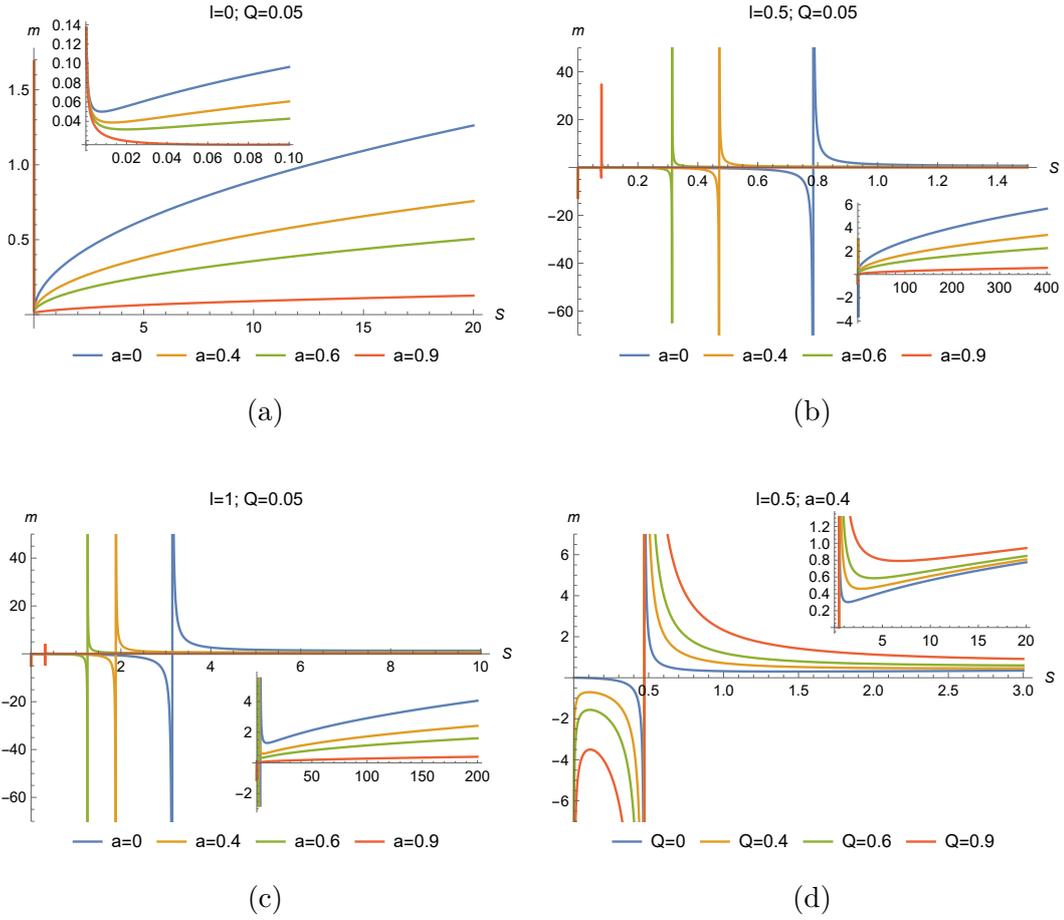


Figura 78 – Massa do buraco negro em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de a , Q e l .

cordas, em termos do raio do horizonte (3.88). Considerando $l = 0$ e $a = 0$ recuperamos a massa do buraco negro de Reissner-Nordström (2.132).

A área do horizonte pode ser calculada por

$$A = \int \sqrt{-g} d\theta d\phi = 4\pi r_h^2. \quad (7.57)$$

Por outro lado, a entropia do buraco negro pode ser calculada através da lei de área [62], usando a relação

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_h^2. \quad (7.58)$$

Assim, podemos escrever o parâmetro de massa em função da entropia como

$$m = \frac{S(-aS + \pi Q^2 + S) - \pi^2(a-1)l^2 Q^2}{2\sqrt{\pi}\sqrt{S}(\pi(a-1)l^2 + S)}. \quad (7.59)$$

Na Fig. 78, representamos o comportamento do parâmetro de massa, m , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações.

Na Fig. 78a, nota-se que, para o buraco negro de Reissner-Nordström ($a = 0$ e $l = 0$), o parâmetro de massa só apresenta valores positivos para valores positivos da entropia, S . Comportamento semelhante é obtido quando ($l = 0$), assim voltamos ao cenário do buraco negro de Reissner-Nordström, mas agora, com uma nuvem de cordas, $0 < a < 1$.

Nas Figs. 78b-78c, constatamos que, ao considerar o buraco negro de Frolov, é possível notar que o parâmetro de massa tem valores positivos e negativos dependendo dos parâmetros do buraco negro. Isto também se repete quando consideramos a nuvem de cordas no espaço-tempo do buraco negro de Frolov. É importante notar que o parâmetro da nuvem de cordas modifica o ponto de transição de fase para o buraco negro de Frolov rodeado por essa nuvem.

7.1.5.2 Temperatura Hawking

A gravidade superficial (κ) para o buraco negro de Frolov com uma nuvem de cordas pode ser calculada usando a seguinte expressão:

$$\kappa = \left. \frac{f'(r)}{2} \right|_{r_h}, \quad (7.60)$$

com ' denotando a derivada em relação à coordenada radial. Hawking mostrou que o buraco negro emite radiação e a sua temperatura correspondente, a temperatura Hawking, para um espaço-tempo estacionário, é dada por [64]:

$$T_\kappa = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (7.61)$$

Usando a Eq. (7.61) com κ dado por (7.60), é possível calcular a temperatura Hawking, $T_\kappa = T$, para o buraco negro de Frolov com a nuvem de cordas:

$$T = \frac{\pi^3(a-1)^2 l^4 Q^2 + \pi(a-1)l^2 S(4\pi Q^2 - 3(a-1)S) + S^2(-aS - \pi Q^2 + S)}{4\sqrt{\pi}S^{3/2}(2\pi^2 l^2 Q^2 + S^2)}. \quad (7.62)$$

Na Fig. 79, representamos o comportamento do parâmetro de temperatura, T , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações. Nota-se que para o espaço-tempo de Reissner-Nordström ($a = 0$ e $l = 0$) o parâmetro de temperatura pode apresentar valores positivos ou negativos para $S > 0$. Analogamente, para o espaço-tempo de Reissner-Nordström-Letelier ($l = 0$ e $0 < a < 1$). Na Fig. 79c, note que, ao considerarmos o espaço-tempo de Frolov ($l = 1$, $Q = 0.05$ e $a = 0$), também é possível perceber que o parâmetro de temperatura apresentará valores positivos e negativos dependendo dos

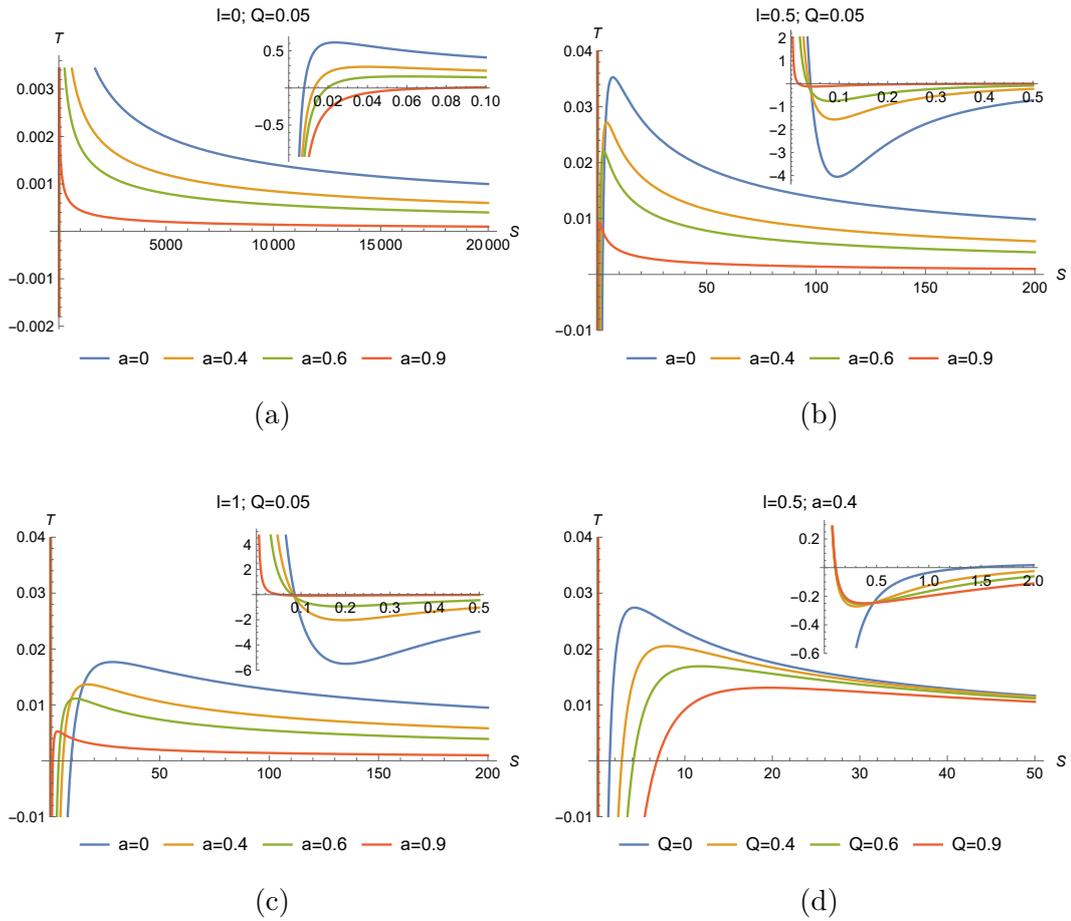


Figura 79 – Temperatura do buraco negro em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de a , Q e l .

parâmetros do buraco negro. Isso também se repete quando consideramos a nuvem de cordas no espaço-tempo de Frolov ($l = 1$, $Q = 0.05$ e $0 < a < 1$).

7.1.5.3 Capacidade térmica

Podemos calcular a capacidade térmica do buraco negro de Frolov com a nuvem de cordas a partir da seguinte expressão:

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)^{-1}. \quad (7.63)$$

Substituindo a Eq. (7.62) na Eq. (7.63), encontramos a seguinte expressão para a capacidade térmica em função da entropia do buraco negro:

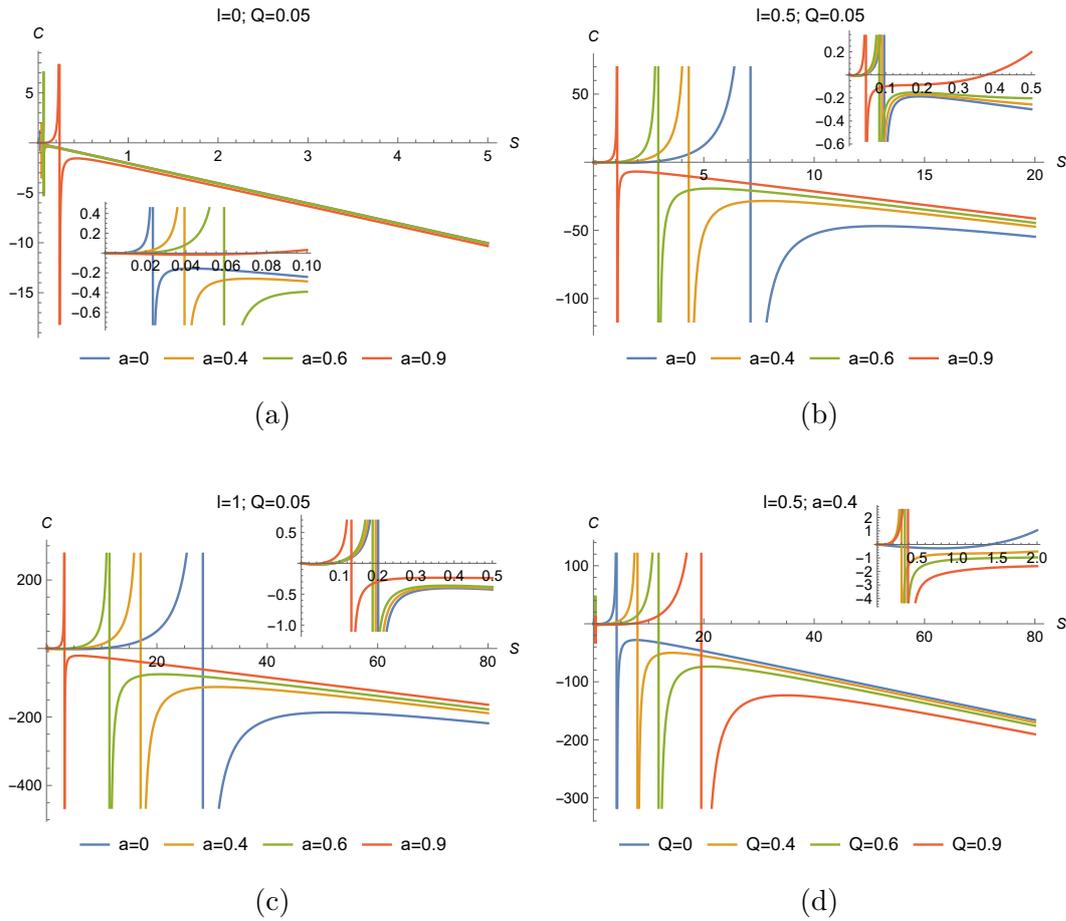


Figura 80 – Capacidade térmica em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de a , Q e l .

$$\begin{aligned}
C = & - [2S (2\pi^2 l^2 Q^2 + S^2) (\pi^3 (a-1) l^4 Q^2 + \pi (a-1) l^2 S (4\pi Q^2 - 3(a-1)S) \\
& + S^2 (-aS - \pi Q^2 + S))] / [6\pi^5 (a-1)^2 l^6 Q^4 + \pi^3 (a-1) l^4 Q^2 S (13(a-1)S + 8\pi Q^2) \\
& + \pi l^2 S^2 (26\pi (a-1) Q^2 S - 9(a-1)^2 S^2 + 2\pi^2 Q^4) + S^4 (-aS - 3\pi Q^2 + S)]
\end{aligned} \tag{7.64}$$

O comportamento da capacidade térmica em função da entropia, para diferentes valores de l , Q e a , é dado na Fig. 80. Para $l = 0$ e $a = 0$, a Eq.(7.64) reduz-se a $C = -2S (\pi Q^2 - S) / (3\pi Q^2 - S)$, como esperado para o caso do espaço-tempo de Reissner-Nordström. Neste caso, existe valores da entropia para os quais a capacidade térmica é positiva para $S > 0$, indicando um sistema termodinâmico estável.

Quando consideramos Frolov ($l = 1$, $Q = 0.05$ e $a = 0$) e o espaço-tempo de Frolov com a nuvem de cordas ($l = 1$, $Q = 0.05$ e $0 < a < 1$), existem valores para a entropia para os quais a capacidade térmica adquire valores positivos ou negativos. Isto significa que o buraco negro de Frolov pode ser instável ou estável a depender dos valores de entropia considerados. É importante ressaltar que o parâmetro de cordas desempenha um papel

importante no comportamento da capacidade térmica, modificando o ponto de transição de fase. Assim, semelhantemente ao buraco negro de Reissner-Nordström, o buraco negro de Frolov e o buraco negro de Frolov com uma nuvem de cordas apresentam regiões de estabilidade, dependendo dos parâmetros escolhidos.

7.2 Buraco negro de Frolov-AdS com um fluido de cordas

Nesta seção, obtemos a métrica correspondente ao buraco negro de Frolov com um fluido de cordas e constante cosmológica, resolvendo as equações de campo da relatividade geral.

7.2.1 Solução geral

O elemento de linha para um espaço-tempo isotrópico na vizinhança de uma fonte esfericamente simétrica, sem perda de generalidade, pode ser escrito da seguinte forma [108]:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (7.65)$$

onde assumiremos que a fonte é necessariamente estática, tal que os parâmetros ν e λ dependerão apenas da coordenada radial.

As equações de campo de Einstein, modificadas pela inclusão da constante cosmológica Λ , são dadas por [108]:

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (7.66)$$

onde, por uma questão de conveniência, consideraremos a constante de acoplamento $\kappa \equiv 8\pi G/c^4 = 1$.

Tensor de energia-momento total

O nosso objetivo é generalizar a métrica do buraco negro regular de Frolov, incluindo também a constante cosmológica e o fluido de cordas.

No entanto, assumiremos que estes tensores não interagem entre si. Assim, o tensor energia-momento total é dado pela sobreposição linear dos tensores correspondentes:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(F)} + T_{\mu\nu}^{(FS)}, \quad (7.67)$$

onde $T_{\mu\nu}^{(F)}$ e $T_{\mu\nu}^{(FS)}$ são os tensores de energia-momento de Frolov e do fluido de cordas, respectivamente.

Tensor de energia-momento de Frolov

Usando a métrica dada pela Eq. (3.82), podemos obter as seguintes componentes do tensor de Einstein:

$$G_t^t = G_r^r = \frac{l^2 (12m^2r^2 + 4mQ^2r - 3Q^4) + Q^2r^4}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^2}, \quad (7.68)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = \frac{24l^2m^2r^3 (l^2m - r^3)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} + \frac{6l^2Q^4r (l^2m + 2r^3)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} - \frac{Q^2 (l^4 (3Q^4 - 28m^2r^2) + 6l^2mr^5 + r^8)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3}, \quad (7.69)$$

que através das equações de Einstein, são proporcionais ao tensor de energia-momento da fonte.

Tensor de energia-momento do fluido de cordas

A linha de mundo de uma partícula movendo-se com quadri-velocidade dada por $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$, com λ sendo um parâmetro independente, pode ser descrito por $x = x(\lambda)$. Por outro lado, se considerarmos, ao invés do movimento de uma partícula, o movimento de uma corda infinitesimalmente fina, a trajetória corresponderá a uma superfície de mundo bidimensional Σ , que pode ser obtida por [36]

$$x^\mu = x^\mu(\lambda^a), \quad a = 0, 1, \quad (7.70)$$

com λ_0 e λ_1 sendo parâmetros tipo-tempo e tipo-espaço, respectivamente. Portanto, ao invés da quadri-velocidade, u^μ , temos um bivetor, $\Sigma^{\mu\nu}$, tal que [36]

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^b}. \quad (7.71)$$

Vale a pena ressaltar que, nesta superfície de mundo, haverá uma métrica induzida, γ_{ab} , com $a, b = 0, 1$, tal que,

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^b}. \quad (7.72)$$

O tensor de energia-momento associado a uma nuvem de poeira é dado por $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$, sendo u^μ a quadri-velocidade normalizada e ρ a densidade própria do fluxo. Do mesmo modo, para uma nuvem de cordas, temos [36]

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{\Sigma^{\mu\beta} \Sigma_\beta^\nu}{(-\gamma)^{1/2}}, \quad (7.73)$$

onde $\gamma = \frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}$.

Agora, se considerarmos um fluido perfeito com pressão \tilde{p} , o mesmo pode ser descrito pelo tensor de energia-momento dado por $T^{\mu\nu} = (\rho + \tilde{p})u^\mu u^\nu - \tilde{p}g^{\mu\nu}$. Analogamente, considerando um fluido perfeito de cordas com pressão p , temos o seguinte tensor de energia-momento [107]

$$T^{\mu\nu} = (p + \sqrt{-\gamma}\rho) \frac{\Sigma^{\mu\beta}\Sigma_\beta^\nu}{(-\gamma)} + pg^{\mu\nu}. \quad (7.74)$$

Considerando o tensor de energia-momento dado pela Eq. (7.74), Soleng obteve a métrica correspondente a um buraco negro estático rodeado por um fluido de cordas [59]. Então, assumimos que as componentes do tensor de energia-momento estão relacionadas através das equações

$$T_t^t = T_r^r, \quad (7.75)$$

$$T_t^t = -\beta T_\theta^\theta = -\beta T_\phi^\phi, \quad (7.76)$$

onde β é uma constante adimensional. O tensor de energia-momento cujas componentes são dadas pelas Eqs. (7.75)-(7.76), foi interpretado como estando associado a um tipo de fluido anisotrópico com simetria esférica [8, 161]. Nestas referências, foi interpretado como o tensor de energia-momento associado à polarização anisotrópica do vácuo num espaço-tempo esfericamente simétrico.

É importante chamar a atenção ao fato de que este tipo de tensor energia-momento é usado em diferentes cenários [162, 163, 164]. Em particular, na Ref. [162] é mostrado que as condições imposta pela Eq. (7.76) permite obter uma classe de soluções esfericamente simétricas das equações de campo de Einstein com dois parâmetros.

Para este trabalho, vamos considerar as componentes do tensor energia-momento para o fluido de cordas dado por [165]:

$$T_t^t = T_r^r = -\frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}, \quad (7.77)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = \frac{\epsilon}{\beta r^2} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}, \quad (7.78)$$

onde b é uma constante de integração positiva e $\epsilon = \pm 1$ determina o sinal da densidade de energia do fluido de cordas.

Solução das equações de campo de Einstein

As componentes não-nulas das equações de Einstein modificadas pela presença da constante cosmológica, obtidas pela métrica (7.65) considerando a superposição linear da Eq. (7.67), são dadas por

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = \frac{l^2 (12m^2 r^2 + 4mQ^2 r - 3Q^4) + Q^2 r^4}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^2} - \frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}, \quad (7.79)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = \frac{l^2 (12m^2 r^2 + 4mQ^2 r - 3Q^4) + Q^2 r^4}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^2} - \frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}, \quad (7.80)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) - \Lambda = & + \frac{24l^2 m^2 r^3 (l^2 m - r^3)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} \\ & + \frac{6l^2 Q^4 r (l^2 m + 2r^3)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} \\ & - \frac{Q^2 (l^4 (3Q^4 - 28m^2 r^2) + 6l^2 m r^5 + r^8)}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^3} \\ & + \frac{\epsilon}{\beta r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Subtraindo as Eqs. (7.79) e (7.80), obtemos que:

$$\lambda = -\nu \Rightarrow \lambda' = -\nu'. \quad (7.82)$$

Somando as Eqs. (7.79) e (7.80) e considerando a Eq. (7.82), após algumas simplificações, obtemos:

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda'}{r} - e^{-\lambda} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \Lambda = \frac{l^2 (12m^2 r^2 + 4mQ^2 r - 3Q^4) + Q^2 r^4}{(l^2 (2mr + Q^2) + r^4)^2} - \frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/\beta}. \quad (7.83)$$

Agora, consideremos a seguinte relação:

$$\nu = -\lambda = \ln(1 + f(r)). \quad (7.84)$$

Tendo em conta as Eqs. (7.82) e (7.84), podemos escrever as Eqs. (7.83) e (7.81), respectivamente, da seguinte forma:

$$-\frac{1}{r^2}(rf' + f) - \Lambda = \frac{l^2(12m^2r^2 + 4mQ^2r - 3Q^4) + Q^2r^4}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^2} - \frac{\epsilon}{r^2} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}, \quad (7.85)$$

$$\begin{aligned} 2\frac{f'}{r} + f'' + 2\Lambda = & -\frac{48l^2m^2r^3(l^2m - r^3)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^3} \\ & -\frac{12l^2Q^4r(l^2m + 2r^3)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^3} \\ & +\frac{2Q^2(l^4(3Q^4 - 28m^2r^2) + 6l^2mr^5 + r^8)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^3} \\ & -\frac{2\epsilon}{\beta r^2} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta}. \end{aligned} \quad (7.86)$$

Somando as Eqs. (7.85) e (7.86) e multiplicando o resultado por r^2 , obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} r^2f'' + rf' - f + \Lambda r^2 + \epsilon \left(\frac{\beta + 2}{\beta}\right) \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta} \\ -\frac{l^2r^2(12m^2r^2 + 4mQ^2r - 3Q^4) + Q^2r^6}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^2} \\ +\frac{48l^2m^2r^5(l^2m - r^3)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^3} + \frac{12l^2Q^4r^3(l^2m + 2r^3)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^3} \\ -\frac{2Q^2r^2(l^4(3Q^4 - 28m^2r^2) + 6l^2mr^5 + r^8)}{(l^2(2mr + Q^2) + r^4)^3} = 0, \end{aligned} \quad (7.87)$$

cuja solução é dada por:

$$f(r) = -\frac{r^2(2mr - Q^2)}{l^2(2mr + Q^2) + r^4} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \begin{cases} eb[1 + 2\log(r)]/2r & \text{for } \beta = 2, \\ \epsilon\beta(\beta - 2)^{-1} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta} & \text{for } \beta \neq 2. \end{cases} \quad (7.88)$$

Assim, substituindo a Eq. (7.88) na Eq. (7.84) e depois na Eq. (7.65), obtemos finalmente a métrica do buraco negro de Frolov-AdS rodeado por um fluido de cordas:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (7.89)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. A função $f(r)$ é dada por:

$$f(r) = 1 - \frac{r^2(2mr - Q^2)}{l^2(2mr + Q^2) + r^4} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \begin{cases} eb[1 + 2\log(r)]/2r & \text{for } \beta = 2, \\ \epsilon\beta(\beta - 2)^{-1} \left(\frac{b}{r}\right)^{2/\beta} & \text{for } \beta \neq 2. \end{cases} \quad (7.90)$$

Podemos recuperar algumas outras soluções a partir desta métrica se fizermos as seguintes escolhas apresentadas no Quadro (7).

Quadro 7 – Espaço-tempo que pode ser recuperado fazendo $l = Q = \Lambda = 0$ na Eq. (7.90) e diferentes valores de β , b e ϵ

ϵ	b	β	espaço-tempo
$-a$	\mathbb{R}^*	$\lim_{\beta \rightarrow \infty}$	Letelier
-1	Q	1	Reissner-Nordström
-1	$\Lambda^{-1/2}$	-1	de Sitter

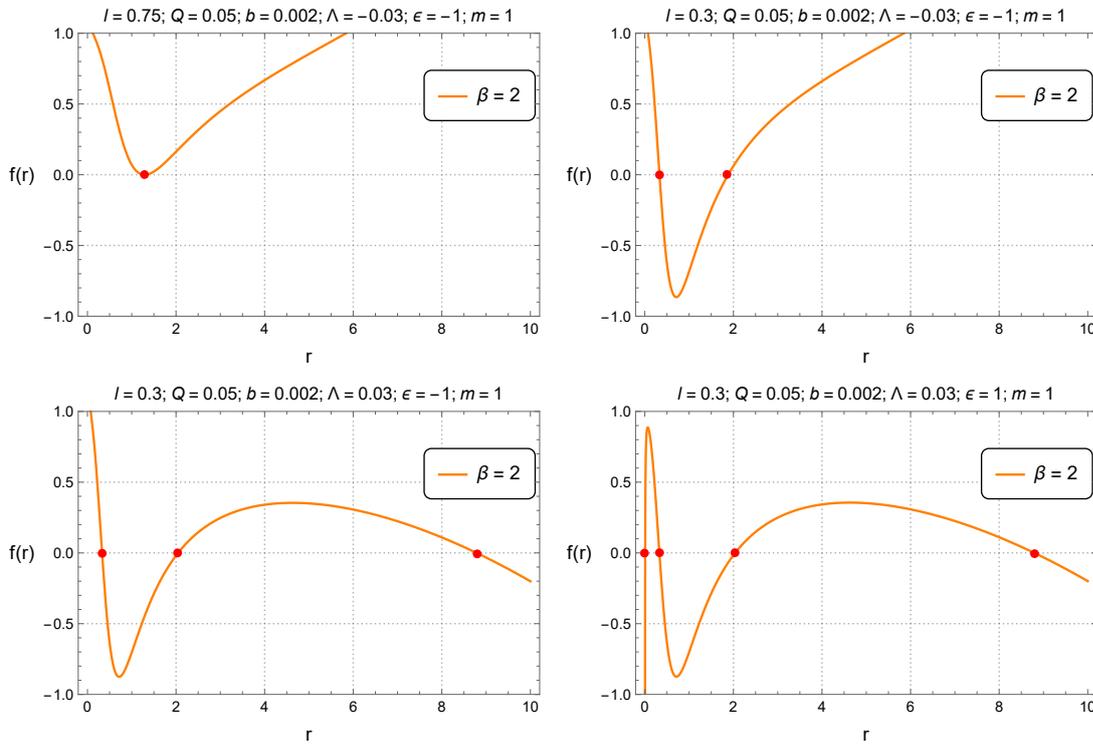


Figura 81 – Representação gráfica de $f(r)$ em relação à coordenada radial para $Q = 0.05$ e diferentes valores de l , b , Λ e ϵ .

7.2.2 Horizontes do buraco negro e análise do escalar de Kretschmann

Para obtermos os horizontes do buraco negro, resolvemos a equação $f(r) = 0$. No caso em consideração, não podemos obter expressões analíticas para o raio do horizonte. Na Fig. 81, representamos $f(r)$ para diferentes valores dos parâmetros considerados.

Vale a pena chamar a atenção para o fato de o número de horizontes depender dos valores dos parâmetros do buraco negro. Na Fig. 81, podemos observar que o número de horizontes pode ser até quatro para um buraco negro de Frolov com um fluido de cordas e constante cosmológica.

A existência de singularidades físicas na métrica do buraco negro podem ser analisadas através do cálculo de um escalar, como o escalar de Kretschmann. Analisaremos o escalar de Kretschmann, $K = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ para $\beta = 2$, a qual é a solução que discutiremos nas subseções posteriores.

Para a métrica dada pela Eq. (7.90), calculamos o escalar de Kretschmann ($K =$

$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$) para $\beta = 2$, através do software Wolfram Mathematica e obtivemos o seguinte resultado:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K^{(\beta=2)} = \infty, \quad (7.91)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K^{(\beta=2)} = \frac{8\Lambda^2}{3}. \quad (7.92)$$

Assim, a solução de Frolov perde sua regularidade na origem com a inclusão do fluido de cordas para $\beta = 2$, conforme confirmaremos na próxima seção com a análise do movimento geodésico e do potencial efetivo.

7.2.3 Geodésicas e Potencial Efetivo

Consideremos agora a solução estática e esfericamente simétrica dada pela Eq. (7.90). Analisaremos as equações geodésicas considerando a ação geodésica e o princípio variacional para escrever um Lagrangiano que descreve a métrica como

$$2\mathcal{L} = f(r)\dot{t}^2 - \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2. \quad (7.93)$$

O “ponto” representa a derivada em relação ao tempo próprio, τ . Por simplicidade, restrinjamos a análise das geodésicas ao plano equatorial do buraco negro, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Usando as equações de Euler-Lagrange, obtemos

$$E = f(r)\dot{t}, \quad (7.94)$$

$$J = -r^2\dot{\phi}, \quad (7.95)$$

onde E e J são constantes de movimento que correspondem aos vetores de Killing ∂_t e ∂_ϕ , respectivamente. Podemos interpretar estas constantes como a energia E e o momento angular J da partícula que se move nas proximidades do buraco negro.

Reescalando o parâmetro τ , podemos definir $L = 2\mathcal{L}$, que, para geodésicas tipo-tempo, é igual a +1, para geodésicas tipo-espaço é igual a -1 e é igual a 0 para geodésicas nulas [114]. Substituindo as Eqs. (7.94) e (7.95) na Eq. (7.93), conseguimos

$$\dot{r}^2 = E^2 - V_{eff}, \quad (7.96)$$

onde

$$V_{eff} = f(r) \left(\frac{J^2}{r^2} + L \right). \quad (7.97)$$

Consideremos agora o problema da partícula massiva ($L = 1$) que cai radialmente ($J = 0$) no buraco negro. A equação do movimento geodésico radial dessa partícula teste é dada por

$$\dot{r}^2 = E^2 - f(r), \quad (7.98)$$

enquanto o potencial efetivo é o seguinte

$$V_{eff} = f(r). \quad (7.99)$$

Os gráficos para \dot{r}^2 e V_{eff} estão apresentados na Fig.(82).

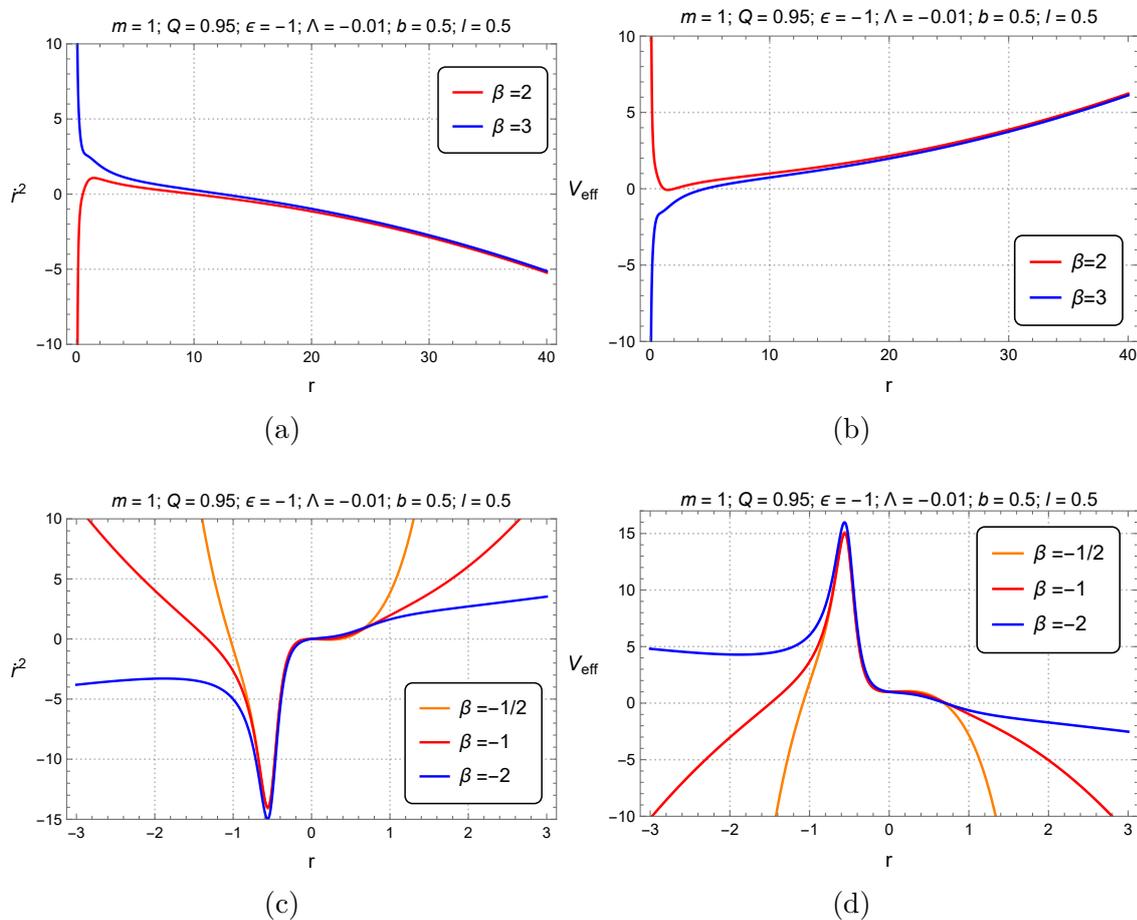


Figura 82 – O gráfico da esquerda mostra \dot{r}^2 para $E = 2$. O gráfico da direita mostra o potencial efetivo $V_{eff} = f(r)$.

Comparemos agora os resultados previstos pelos valores do escalar de Kretschmann quando $r \rightarrow 0$, com as características das geodésicas, a saber, se são completas ou incompletas.

Na Fig. (82b), podemos concluir que a partícula não pode atingir o ponto $r = 0$ num tempo finito, para ambos os valores de β . Isto indica que as geodésicas são incompletas e, portanto, o espaço-tempo é singular. Esta conclusão é confirmada pelo fato de que, para $\beta = 2$, o escalar de Kretschmann é infinito, quando $r \rightarrow 0$.

Para $\beta = -1/2$, $\beta = -1$ e $\beta = -2$ na Fig. (82d), a partícula teste consegue ultrapassar a barreira de potencial e atingir o ponto $r = 0$ num tempo finito. Isto indica que as geodésicas são completas e, portanto, o espaço-tempo é regular.

Em resumo, a análise das geodésicas, visando conhecer as características do espaço-tempo relativamente à singularidade, pode confirmar ou não o que é previsto pelos resultados fornecidos pelo escalar de Kretschmann. Assim, para verificar eficazmente a existência ou não de singularidades é necessária uma análise da completude, ou incompletude geodésica.

7.2.4 Termodinâmica do buraco negro

Nesta seção, estudamos a termodinâmica do buraco negro de Frolov-AdS com um fluido de cordas, examinando o comportamento da massa, da temperatura Hawking e da capacidade térmica em função da entropia.

Vale a pena chamar a atenção para duas considerações que assumiremos nesta subseção:

(i) Focaremos na solução $\beta = 2$ uma vez que esta escolha pode representar a presença de matéria escura [59];

(ii) Como vimos, $\epsilon = \pm 1$ representa o sinal da densidade do fluido de cordas. Aqui, escolheremos o sinal de ϵ como sendo negativo, uma vez que, no caso em que $\beta \neq 2$, recuperamos os espaços-tempos descritos na Tabela (7). Para o caso em que $\beta = 2$, a escolha é feita por razões de consistência para ter o efeito da matéria escura.

Assim, com estas considerações, a Eq. (7.90) pode ser escrita como

$$f(r) = 1 - \frac{r^2(2mr - Q^2)}{l^2(2mr + Q^2) + r^4} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{\epsilon b[1 + 2 \log(r)]}{2r}. \quad (7.100)$$

7.2.4.1 Massa do buraco negro

Seja r_h o raio do horizonte, assim temos que $f(r_h) = 0$, onde $f(r)$ é dado pela Eq. (7.100). Assim, podemos escrever a massa do buraco negro em termos de r_h através da seguinte equação:

$$m = \frac{l^2 Q^2 (3b\epsilon - 2\Lambda r_h^3 + 6r_h) + 6b\epsilon \log(r_h) (r_h^4 + l^2 Q^2) + r_h^3 (3b\epsilon r_h - 2\Lambda r_h^4 + 6r_h^2 + 6Q^2)}{2r_h (l^2 (-3b\epsilon + 2\Lambda r_h^3 - 6r_h) - 6bl^2\epsilon \log(r_h) + 6r_h^3)}, \quad (7.101)$$

escrita em termos do parâmetro que trata da presença do fluido de cordas, b . Nota-se que se $b = 0$, recuperamos a massa do buraco negro regular de Frolov-AdS, sem o fluido de cordas, em termos do raio do horizonte. Considerando $l = 0$, $\Lambda = 0$ e $b = 0$ recuperamos a massa do buraco negro de Reissner-Nordström, Eq. (2.132).

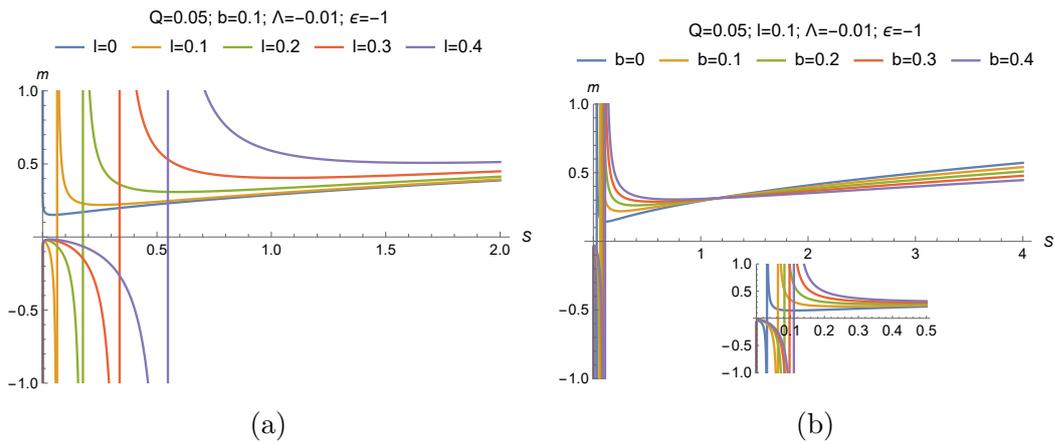


Figura 83 – Massa do buraco negro em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de b e l .

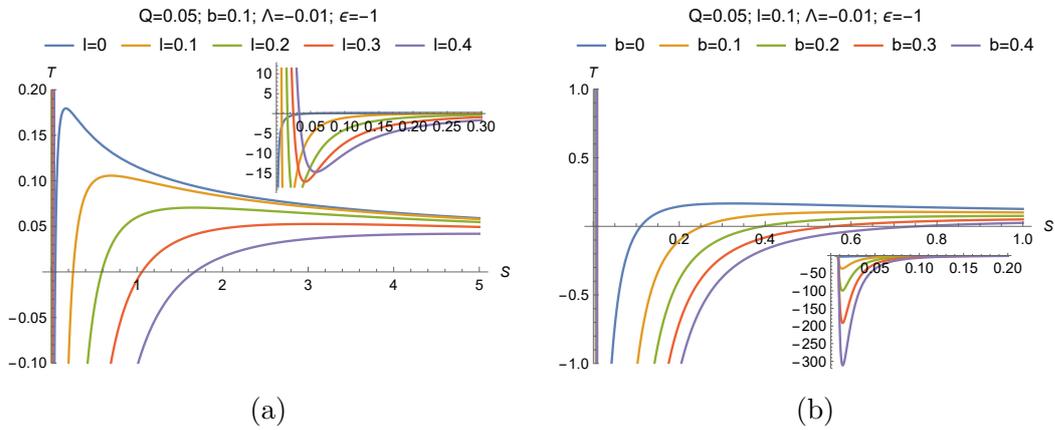


Figura 84 – Temperatura do buraco negro em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de b e l .

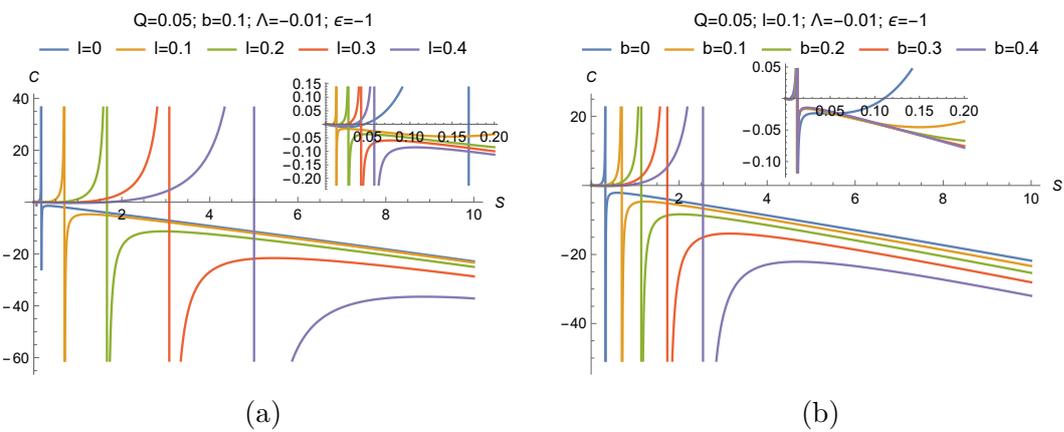


Figura 85 – Capacidade térmica em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de b e l .

A área do horizonte pode ser calculada por

$$A = \int \sqrt{-g} d\theta d\phi = 4\pi r_h^2. \quad (7.102)$$

Por outro lado, a entropia do buraco negro pode ser calculada através da lei de área [62], usando a relação

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_h^2. \quad (7.103)$$

Assim, podemos escrever o parâmetro de massa em função da entropia como

$$\begin{aligned} m = & [\pi^2 l^2 Q^2 (-3\pi^{3/2} b\epsilon + 2\Lambda S^{3/2} - 6\pi\sqrt{S}) \\ & + S^{3/2} (-3\pi^{3/2} b\sqrt{S}\epsilon - 6\pi^2 Q^2 + 2\Lambda S^2 - 6\pi S) \\ & - 3\pi^{3/2} b\epsilon \log\left(\frac{S}{\pi}\right) (\pi^2 l^2 Q^2 + S^2)] / \\ & [2\pi^{3/2} \sqrt{S} (l^2 (3\pi^{3/2} b\epsilon - 2\Lambda S^{3/2} + 6\pi\sqrt{S}) + 3\pi^{3/2} b l^2 \epsilon \log\left(\frac{S}{\pi}\right) - 6S^{3/2})]. \end{aligned} \quad (7.104)$$

Nas Figs. 83a-83b, representamos o comportamento do parâmetro de massa, m , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações. Note que, para o buraco negro de Frolov-AdS com fluido de cordas, o parâmetro de massa tem valores positivos e negativos dependendo dos parâmetros do buraco negro.

7.2.4.2 Temperatura Hawking

A gravidade superficial (κ) para o buraco negro de Frolov-AdS com um fluido de cordas pode ser calculada usando a seguinte expressão:

$$\kappa = \left. \frac{f'(r)}{2} \right|_{r_h}, \quad (7.105)$$

com $'$ denotando a derivada em relação à coordenada radial. Hawking mostrou que o buraco negro emite radiação e a sua temperatura correspondente, a temperatura Hawking, para um espaço-tempo estacionário, é dada por [64]:

$$T_\kappa = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (7.106)$$

Usando a Eq. (7.106) com κ dado por (7.105) e $f(r)$ dado pela Eq.(7.100) é possível calcular a temperatura Hawking, $T_\kappa = T$, para o buraco negro de Frolov-AdS com um fluido de cordas:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{144\pi^{7/2}S^{5/2}\left(2l^2Q^2 + \frac{S^2}{\pi^2}\right)} \left[36\pi^4l^4Q^2S - 12\Lambda S^5\left(\Lambda^2 + 3\right) + 36\pi S^4\left(2\Lambda^2 + 1\right) \right. \\
& + 4\pi^2S^3\left(\Lambda^2l^4Q^2 - 27l^2 - 9Q^2\right) + 36\pi^{3/2}bS^{7/2}\epsilon\left(\Lambda^2 + 2\Lambda^2\log\left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}\right) + 1\right) \\
& - 12\pi^{7/2}bl^2Q^2S^{3/2}\epsilon\left(\Lambda^2 + 2\left(\Lambda^2 + 9\right)\log\left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}\right) + 3\right) \\
& - 3\pi^3l^2S^2\left(36b^2\epsilon^2\log^2\left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}\right) + 36b^2\epsilon^2\log\left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}\right) + 9b^2\epsilon^2 + 8Q^2\left(\Lambda^2 + 6\right)\right) \\
& + 36\pi^{9/2}bl^4Q^2\sqrt{S}\epsilon\left(\log\left(\frac{S}{\pi}\right) + 1\right) \\
& \left. + 9\pi^5b^2l^4Q^2\epsilon^2\left(\log\left(\frac{S}{\pi}\right) + 1\right)^2 - 108\pi^{5/2}bl^2S^{5/2}\epsilon\left(\log\left(\frac{S}{\pi}\right) + 1\right) \right]. \tag{7.107}
\end{aligned}$$

Na Figs. 84a-84b, representamos o comportamento do parâmetro de temperatura, T , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações. Na Fig. 84a, nota-se que para o espaço-tempo de Reissner-Nordström-AdS com fluido de cordas ($l = 0$, $Q = 0.05$, $\Lambda = -0.01$ e $b = 0.1$), o parâmetro de temperatura apresenta valores positivos e negativos para $S > 0$. Analogamente, para o espaço-tempo de Frolov-AdS com fluido de cordas ($l \neq 0$, $Q = 0.05$, $\Lambda = -0.01$ e $b = 0.1$).

Na Fig. 84b, nota-se que para o espaço-tempo de Frolov-AdS sem fluido de cordas ($l = 0.1$, $Q = 0.05$, $\Lambda = -0.01$ e $b = 0$), o parâmetro de temperatura apresenta valores positivos e negativos para $S > 0$. Analogamente, para o espaço-tempo de Frolov-AdS com fluido de cordas ($l = 0.1$, $Q = 0.05$, $\Lambda = -0.01$ e $b \neq 0$).

7.2.4.3 Capacidade térmica

Podemos calcular a capacidade térmica do buraco negro de Frolov-AdS com um fluido de cordas a partir da seguinte expressão:

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)^{-1}. \tag{7.108}$$

Substituindo a Eq. (7.107) na Eq.(7.108), encontramos a seguinte expressão para a capacidade térmica em função da entropia do buraco negro:

$$\begin{aligned}
C = & \left[2S \left(2\pi^2 l^2 Q^2 + S^2 \right) \right. \\
& \left[-36\pi^{9/2} b l^4 Q^2 \sqrt{S} \epsilon - 36\pi^4 l^4 Q^2 S + 144\pi^3 l^2 Q^2 S^2 + 108\pi^2 l^2 S^3 + 36\pi^2 Q^2 S^3 - 36\pi S^4 \right. \\
& - 9\pi^5 b^2 l^4 Q^2 \epsilon^2 + 36\pi^{7/2} b l^2 Q^2 S^{3/2} \epsilon + 108\pi^{5/2} b l^2 S^{5/2} \epsilon - 36\pi^{3/2} b S^{7/2} \epsilon \\
& + 27\pi^3 b^2 l^2 S^2 \epsilon^2 + 12\pi^{7/2} b \Lambda^4 Q^2 S^{3/2} \epsilon + 24\pi^3 \Lambda^4 Q^2 S^2 - 72\pi \Lambda^2 S^4 + 36\Lambda S^5 \\
& - 36\pi^{3/2} b \Lambda^2 S^{7/2} \epsilon - 4\pi^2 \Lambda^2 l^4 Q^2 S^3 + 12\Lambda^2 l^2 S^5 \\
& + 108\pi^3 b^2 l^2 S^2 \epsilon^2 \log^2 \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}} \right) + 24\pi^{7/2} b l^2 Q^2 S^{3/2} \epsilon \left(\Lambda^2 + 9 \right) \log \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}} \right) \\
& - 18\pi^{3/2} b l^2 \epsilon \log \left(\frac{S}{\pi} \right) \left(\pi^3 l^2 Q^2 \left(\sqrt{\pi} b \epsilon + 2\sqrt{S} \right) - 3\pi^{3/2} b S^2 \epsilon + 2\Lambda S^{7/2} - 6\pi S^{5/2} \right) \\
& \left. \left. - 9\pi^5 b^2 l^4 Q^2 \epsilon^2 \log^2 \left(\frac{S}{\pi} \right) \right] / \right. \\
& \left[216\pi^6 l^6 Q^4 S - 288\pi^5 l^4 Q^4 S^2 + 468\pi^4 l^4 Q^2 S^3 + 72\pi^4 l^2 Q^4 S^3 - 936\pi^3 l^2 Q^2 S^4 \right. \\
& - 324\pi^2 l^2 S^5 - 108\pi^2 Q^2 S^5 + 144\pi^{13/2} b l^6 Q^4 \sqrt{S} \epsilon + 288\pi^{11/2} b l^4 Q^4 S^{3/2} \epsilon + 36\pi S^6 \\
& + 648\pi^{9/2} b l^4 Q^2 S^{5/2} \epsilon - 144\pi^{7/2} b l^2 Q^2 S^{7/2} \epsilon - 216\pi^{5/2} b l^2 S^{9/2} \epsilon + 72\pi^{3/2} b S^{11/2} \epsilon \\
& + 18\pi^7 b^2 l^6 Q^4 \epsilon^2 + 207\pi^5 b^2 l^4 Q^2 S^2 \epsilon^2 - 27\pi^3 b^2 l^2 S^4 \epsilon^2 - 48\pi^5 \Lambda^6 Q^4 S^2 \\
& - 336\pi^{7/2} b \Lambda^4 Q^2 S^{7/2} \epsilon - 552\pi^3 \Lambda^4 Q^2 S^4 + 360\pi^2 \Lambda^2 Q^2 S^5 + 72\pi \Lambda^2 S^6 + 36\Lambda S^7 \\
& + 216\pi^5 b^2 l^4 Q^2 S^2 \epsilon^2 \log \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}} \right) - 8\pi^4 \Lambda^2 l^6 Q^4 S^3 + 132\pi^2 \Lambda^2 l^4 Q^2 S^5 + 12\Lambda^2 l^2 S^7 \\
& - 108\pi^3 b^2 l^2 S^2 \epsilon^2 \log^2 \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}} \right) \left(2\pi^2 l^2 Q^2 + 5S^2 \right) \\
& + 6\pi^{3/2} b l^2 \epsilon \left[\right. \\
& + 2\pi^4 l^4 Q^4 \left(9\pi^{3/2} b \epsilon - 4\Lambda S^{3/2} + 24\pi \sqrt{S} \right) \\
& + 3\pi^2 l^2 Q^2 S^{3/2} \left(7\pi^{3/2} b \sqrt{S} \epsilon - 24\pi^2 Q^2 - 12\Lambda S^2 + 16\pi S \right) \\
& \left. - 3S^{7/2} \left(9\pi^{3/2} b \sqrt{S} \epsilon + 36\pi^2 Q^2 - 4\Lambda S^2 + 24\pi S \right) \right] \log \left(\frac{S}{\pi} \right) \\
& \left. + 9\pi^5 b^2 l^4 Q^2 \epsilon^2 \log^2 \left(\frac{S}{\pi} \right) \left(10\pi^2 l^2 Q^2 + 9S^2 \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.109}$$

Das Figs. 85a-85b, podemos concluir que existem valores de S para os quais a capacidade térmica é positiva, assim como existem valores para os quais a capacidade térmica é negativa. Em outras palavras, o buraco negro pode ser termodinamicamente estável ou instável e esta estabilidade está relacionada com os valores do parâmetro do fluido de cordas. É possível notar que, o ponto de transição, no qual a capacidade térmica diverge, muda quando variamos este parâmetro.

8 Buracos Negros com nuvem de cordas e quintessência num cenário de eletrodinâmica não-linear

Neste capítulo obteremos uma solução exata para um buraco negro num cenário em que um campo eletrodinâmico não-linear é acoplado à gravidade de Einstein, na presença de uma nuvem de cordas e quintessência como fontes. Neste cenário, serão discutidas as consequências destas fontes na regularidade e nos horizontes da solução, bem como nas condições de energia. Estudaremos alguns aspectos relativos à termodinâmica do buraco negro, tendo em conta a massa, a temperatura Hawking e a capacidade térmica, e mostraremos como estas grandezas dependem da presença da nuvem de cordas e quintessência, no cenário considerado.

8.1 Solução geral

Nesta seção, obteremos a métrica correspondente a um buraco negro estático com uma nuvem de cordas e quintessência num cenário de eletrodinâmica não-linear.

As equações de campo de Einstein no vácuo podem ser obtidas a partir da seguinte ação

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (8.1)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$, $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante do tensor métrico e $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura de Ricci.

As equações de Einstein com fontes de matéria são obtidas adicionando uma Lagrangiana de matéria ao funcional S . Assim, considerando a Lagrangiana da teoria eletromagnética não-linear acoplado ao fluido quintessencial, $L(F)$, e a Lagrangiana associada à nuvem de cordas, L_{CS} , temos que o conteúdo de matéria pode ser expresso pela seguinte ação

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} (L(F) + L_{CS}). \quad (8.2)$$

A Lagrangiana $L(F)$ descreve a eletrodinâmica não-linear acoplado ao fluido quintessencial com o escalar F dado por $F = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell-Faraday.

Assim, a ação total que descreve o buraco negro com quintessência e uma nuvem de cordas num cenário de eletrodinâmica não-linear é dada por

$$S = S_{EH} + S_m = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} (L(F) + L_{CS}). \quad (8.3)$$

Variando a ação (8.3) com relação à métrica, encontramos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2(T_{\mu\nu}^{NED} + T_{\mu\nu}^{CS}), \quad (8.4)$$

onde o tensor energia-momento da teoria eletromagnética não-linear ($T_{\mu\nu}^{NED}$) e o tensor energia-momento para a nuvem de cordas ($T_{\mu\nu}^{CS}$) são dados, respectivamente, por [36, 178]:

$$T_{\mu\nu}^{NED} = 2 \left(L(F)g_{\mu\nu} - \frac{\partial L(F)}{\partial F} F_{\mu}{}^{\alpha} F_{\nu\alpha} \right), \quad (8.5)$$

$$T_{\mu\nu}^{CS} = \frac{\rho \Sigma_{\mu}^{\beta} \Sigma_{\beta\nu}}{\kappa^2 (-\gamma)^{1/2}}. \quad (8.6)$$

A forma explícita da densidade lagrangiana da eletrodinâmica não-linear acoplado ao fluido quintessencial é dada por [56, 44]

$$L(F) = \frac{F e^{-\frac{k}{q} \sqrt{2q_m^2 F}}}{\kappa^2} - \frac{3}{2\kappa^2} \alpha \omega_q \left(\frac{2F}{q_m^2} \right)^{\frac{3(\omega_q+1)}{4}}, \quad (8.7)$$

onde $k = q_m^2/2m$ corresponde à carga não-linear de um campo magnético autogravitacional e m é o parâmetro de massa, relacionado com a massa do buraco negro. Para um espaço-tempo esfericamente simétrico alimentado apenas por uma carga magnética, a componente de $F_{\mu\nu}$ diferente de zero é $F_{23} = q_m \sin\theta$ e o escalar F é $F = \frac{q_m^2}{2r^4}$.

A ação de Nambu-Goto utilizada para descrever a corda é dada por [36]

$$S_{CS} = \int d^4x \sqrt{-g} L_{CS} = \int (-\gamma)^{1/2} \mathcal{M} d\lambda^0 d\lambda^1. \quad (8.8)$$

Para nuvem de cordas, temos [36]

$$L_{CS} = \mathcal{M} \sqrt{-\gamma} = \mathcal{M} \left(-\frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \right)^{1/2}, \quad (8.9)$$

onde \mathcal{M} é uma constante adimensional que caracteriza cada corda e γ é o determinante de γ_{AB} , o qual é a métrica induzida numa variedade dada por

$$\gamma_{AB} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^B}, \quad (8.10)$$

em que $x^\mu = x^\mu(\lambda^A)$ descreve a superfície de mundo das cordas com λ^0 e λ^1 sendo parâmetros tipo-tempo e tipo-espaço, respectivamente. A quantidade $\Sigma^{\mu\nu}$ pode ser escrita como

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{AB} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^B}, \quad (8.11)$$

com ϵ^{AB} sendo o símbolo de Levi-Civita, tal que $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$. Devido à simetria do espaço-tempo, a única componente não-nula da quantidade $\Sigma^{\mu\nu}$ é $\Sigma^{01} = a/\rho r^2$, que depende apenas da coordenada radial. Vale a pena notar que a é uma constante de integração relacionada com a intensidade da nuvem de cordas, assumindo valores no intervalo $0 < a < 1$.

Para um espaço-tempo esfericamente simétrico, a métrica geral pode ser escrita como

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (8.12)$$

No que diz respeito aos tensores de energia-momento do campo eletromagnético não-linear ($T_{\mu\nu}^{NED}$) com fluido quintessencial e da nuvem de cordas ($T_{\mu\nu}^{CS}$), as componentes não-nulas são dadas por

$$T_{00}^{NED} = \frac{2kmf(r)e^{-\frac{k}{r}}}{\kappa^2 r^4} - \frac{3\alpha\omega_q f(r)r^{-3\omega_q-3}}{\kappa^2}. \quad (8.13)$$

$$T_{11}^{NED} = -\frac{q^2(k-2r)e^{-\frac{k}{r}}}{2\kappa^2 r^3} - \frac{3}{2\kappa^2} \alpha\omega_q(3\omega_q+1)r^{-3\omega_q-1}. \quad (8.14)$$

$$T_{00}^{CS} = \frac{f(r)}{\kappa^2} \frac{a}{r^2}, \quad T_{11}^{CS} = 0. \quad (8.15)$$

Utilizando as Eqs. (8.13)-(8.15) e considerando o elemento de linha expresso pela Eq. (8.12), as equações de campo de Einstein serão escritas como

$$\begin{aligned} & 1 - a - f(r) + rf'(r) + r^2 f''(r) \\ & - \frac{2kme^{-\frac{k}{r}}}{r^2} + \frac{q^2 e^{-\frac{k}{r}}(k-2r)}{r^3} \\ & + 3\alpha\omega_q(3\omega_q+2)r^{-3\omega_q-1} = 0, \end{aligned} \quad (8.16)$$

cuja solução é

$$f(r) = 1 - a - \frac{2me^{-\frac{k}{r}}}{r} - \alpha r^{-3\omega_q-1} + C_2 r + \frac{C_1}{r}. \quad (8.17)$$

Na análise que será feita, apenas um caso será considerado, a saber, quintessência, que corresponde a $\omega_q = -2/3$. Neste caso, o quarto e o quinto termos da Eq. (8.17) podem ser combinados. Então, combinando também o terceiro e o último termos, podemos escrever $f(r)$ numa forma simplificada. Assim, substituindo esta forma simplificada de $f(r)$ na Eq. (8.12), obtemos finalmente a métrica do espaço-tempo correspondente a um buraco negro rodeado de quintessência e uma nuvem de cordas num cenário de eletrodinâmica não-linear acoplada à gravidade de Einstein.

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} - \frac{2m}{r}e^{-k/r}\right) dt^2 - \left(1 - a - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} - \frac{2m}{r}e^{-k/r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (8.18)$$

Note que na Eq. (8.18), a constante ω_q foi preservada, mas temos em mente que $\omega_q = -2/3$.

A métrica acima pode ser entendida como a solução da equação de campo de Einstein, na qual o campo gravitacional está acoplado a um campo de Maxwell não-linear, com duas fontes, a saber, a nuvem de cordas e a quintessência. A métrica também pode ser interpretada como sendo gerada no âmbito da Relatividade Geral, com três fontes físicas: um campo eletromagnético não-linear, uma nuvem de cordas e um fluido quintessencial. O nosso resultado, quando ambas as fontes são incluídas, nomeadamente a nuvem de cordas e a quintessência, é uma generalização de um resultado já publicado [56], que investigou o papel desempenhado pela presença da nuvem de cordas nas propriedades termodinâmicas, nos modos quasinormais e na sombra.

Como era de se esperar, no limite $k = 0$, a solução é reduzida à solução de Letelier com quintessência [38], e se $k = 0$ e $a = 0$, recuperamos a solução de Kiselev [79]. Se $k = 0$ e $\alpha = 0$, obtemos a solução de Letelier [36] e, finalmente, obtemos a solução de Schwarzschild [179] para $k = 0$, $a = 0$ e $\alpha = 0$.

8.2 Horizontes do buraco negro, regularidade e singularidade

8.2.1 Horizontes do buraco negro

Agora, investigaremos os horizontes do buraco negro que podem ser determinados resolvendo a seguinte equação:

$$f(r) = 1 - a - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} - \frac{2m}{r} e^{-k/r} = 0. \quad (8.19)$$

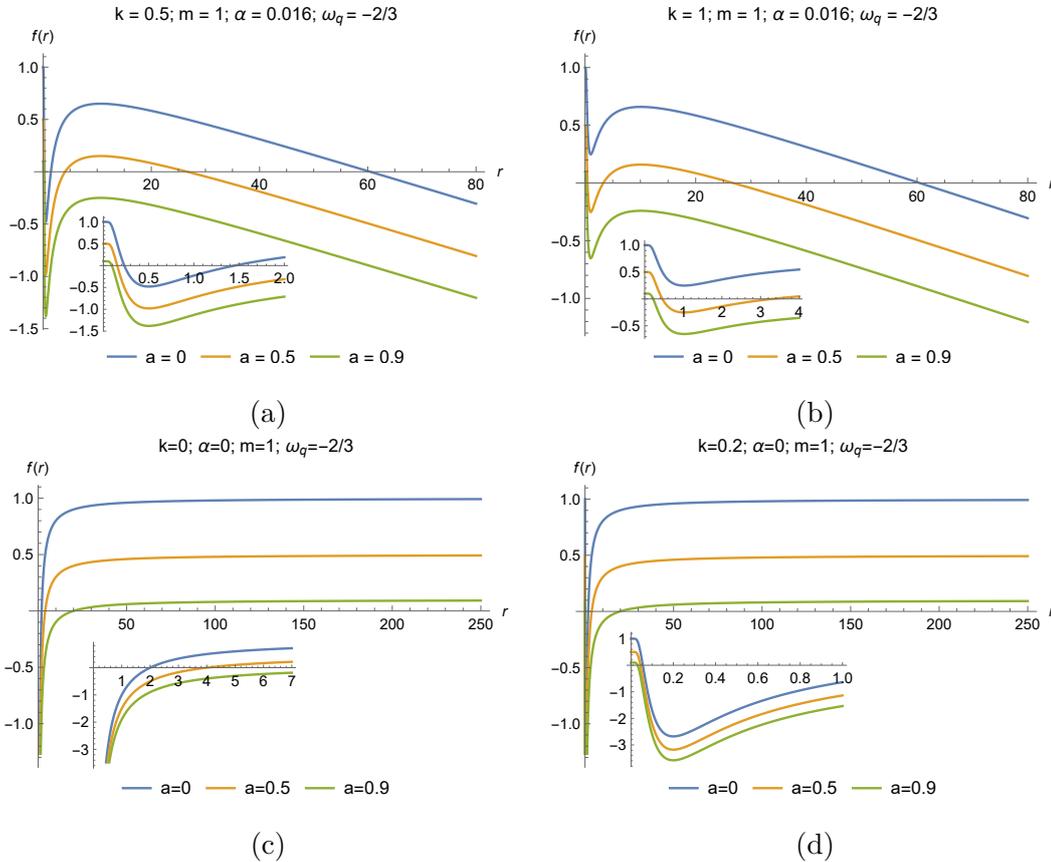


Figura 86 – A função $f(r)$ para diferentes valores de k , α e a .

Na Fig. 86, representamos a função $f(r)$ para diferentes valores de a , α , k e para $\omega_q = -2/3$, sendo o único caso a ser considerado. Os horizontes do buraco negro são definidos pelas raízes da função $f(r)$. É possível perceber que o buraco negro terá no máximo três horizontes.

8.2.2 Regularidade e Singularidade

A pesquisa visando saber se um dado buraco negro é regular ou singular pode ser feita por diferentes vias, como, por exemplo, investigando se existem ou não singularidades num invariante construído com o tensor de curvatura ou examinando se as geodésicas são extensíveis ou não.

Dentre estes dois procedimentos, a análise do comportamento do escalar construído com o tensor de curvatura, fornece-nos uma análise local e relativamente simples à existência ou não de singularidades.

Adotaremos o critério de testar a existência de singularidades de uma métrica examinando uma das quantidades invariantes de coordenadas construídas com $R_{\mu\nu}$ ou $R_{\mu\nu\sigma\rho}$.

Existe um número finito de possibilidades para construir estes invariantes. Consideremos uma delas, denominada escalar de Kretschmann, dada por $K = R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}$.

A seguir, calcularemos o escalar de Kretschmann e verificaremos se há singularidades, examinando o seu comportamento para $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Estes cálculos serão feitos em quatro casos diferentes, nomeadamente, uma solução de buraco negro acoplada a eletrodinâmica não-linear, o que equivale a considerar como fonte, um campo eletromagnético não-linear. Na sequência, adicionaremos uma nuvem de cordas como fonte, depois, substituiremos esta fonte por quintessência e, finalmente, adicionaremos a nuvem de cordas e a quintessência como fontes.

Solução do buraco negro acoplado a eletrodinâmica não-linear

Em primeiro lugar, considera-se o caso onde a nuvem de cordas e a quintessência estão ausentes. Assim, $a = 0$ e $\alpha = 0$, e a Eq. (8.18) transforma-se em

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}e^{-k/r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}e^{-k/r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (8.20)$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$K = \frac{4m^2 e^{-\frac{2k}{r}} (k^4 - 8k^3 r + 24k^2 r^2 - 24kr^3 + 12r^4)}{r^{10}}. \quad (8.21)$$

Calculando os limites do escalar de Kretschmann como $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = 0 \text{ e } \lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (8.22)$$

Estes resultados dizem-nos que a métrica que descreve o espaço-tempo de um buraco negro, obtida num cenário em que um campo eletromagnético não-linear é acoplado à gravidade de Einstein, é regular na origem, $r = 0$, ou seja, não possui singularidade neste ponto, confirmando os resultados da literatura [43]. Já a análise do resultado, quando $r \rightarrow \infty$, nos diz que o espaço-tempo é assintoticamente plano.

Solução do buraco negro acoplada a eletrodinâmica não-linear e a uma nuvem de cordas como fontes

Agora, consideramos a presença de uma nuvem de cordas. A solução correspondente é obtida assumindo que $\alpha = 0$ na Eq. (8.18). Assim, a métrica resultante é dada por:

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2m}{r}e^{-k/r}\right) dt^2 - \left(1 - a - \frac{2m}{r}e^{-k/r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (8.23)$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$K = \frac{4a^2}{r^4} + \frac{16ame^{-\frac{k}{r}}}{r^5} + \frac{4m^2e^{-\frac{2k}{r}}(k^4 - 8k^3r + 24k^2r^2 - 24kr^3 + 12r^4)}{r^{10}}. \quad (8.24)$$

Determinaremos agora o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty \text{ e } \lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (8.25)$$

Assim, concluímos que a inclusão da nuvem de cordas ao buraco negro da eletrodinâmica não-linear afeta a regularidade da métrica, tornando-a singular na origem [43]. A métrica permanece assintoticamente plana.

Solução do buraco negro acoplada a eletrodinâmica não-linear e a quintessência como fontes

Ao adotar $a = 0$ na Eq. (8.18), obtemos o espaço-tempo da eletrodinâmica não-linear com quintessência dada por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} - \frac{2m}{r}e^{-k/r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} - \frac{2m}{r}e^{-k/r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (8.26)$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$\begin{aligned} K = & + \frac{4m^2e^{-\frac{2k}{r}}(k^4 - 8k^3r + 24k^2r^2 - 24kr^3 + 12r^4)}{r^{10}} \\ & + 3\alpha^2(27\omega_q^4 + 54\omega_q^3 + 51\omega_q^2 + 20\omega_q + 4)r^{-6(\omega_q+1)} \\ & + 24\alpha m(3\omega_q^2 + 5\omega_q + 2)e^{-\frac{k}{r}}r^{-3(\omega_q+2)} \\ & - 48\alpha km(3\omega_q^2 + 4\omega_q + 1)e^{-\frac{k}{r}}r^{-3\omega_q-7} \\ & + 4\alpha k^2 m(9\omega_q^2 + 9\omega_q + 2)e^{-\frac{k}{r}}r^{-3\omega_q-8}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Vamos agora determinar o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

Para $\omega_q = -2/3$, obtemos os seguintes limites:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty \text{ e } \lim_{r \rightarrow \infty} K = 0. \quad (8.28)$$

Assim, a análise do escalar de Kretschmann no limite de $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$ mostra-nos que para $\omega_q = -2/3$, o buraco negro da eletrodinâmica não-linear com quintessência deixa de ser regular, ou seja, tem uma singularidade na origem $r = 0$; no entanto, é assintoticamente plano.

Solução de buraco negro acoplada a eletrodinâmica não-linear e uma nuvem de cordas e quintessência como fontes

O espaço-tempo da eletrodinâmica não-linear com quintessência e nuvem de cordas é dado pelo seguinte elemento de linha:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - a - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} - \frac{2m}{r}e^{-k/r}\right) dt^2 \\
 & - \left(1 - a - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} - \frac{2m}{r}e^{-k/r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2,
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

cujo escalar de Kretschmann é

$$\begin{aligned}
 K = & + \frac{4m^2 e^{-\frac{2k}{r}} (k^4 - 8k^3 r + 24k^2 r^2 - 24kr^3 + 12r^4)}{r^{10}} \\
 & + \frac{16ame^{-\frac{k}{r}}}{r^5} + 4\alpha k^2 m (9\omega_q^2 + 9\omega_q + 2) e^{-\frac{k}{r}} r^{-3\omega_q-8} \\
 & + \frac{4a^2}{r^4} + 3\alpha^2 \omega_q (27\omega_q^3 + 54\omega_q^2 + 51\omega_q + 20) r^{-6(\omega_q+1)} \\
 & - 48\alpha km (3\omega_q^2 + 4\omega_q + 1) e^{-\frac{k}{r}} r^{-3\omega_q-7} \\
 & + 24\alpha m (3\omega_q^2 + 5\omega_q + 2) e^{-\frac{k}{r}} r^{-3(\omega_q+2)} \\
 & + 4\alpha r^{-6(\omega_q+1)} (2ar^{3\omega_q+1} + 3\alpha).
 \end{aligned} \tag{8.30}$$

Vamos agora determinar o limite do escalar de Kretschmann com $r \rightarrow 0$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty. \tag{8.31}$$

Assim, concluímos que a inclusão da nuvem de cordas ao buraco negro da eletrodinâmica não-linear com quintessência afeta a regularidade da métrica, tornando-a singular na origem.

8.3 Condições de energia

No contexto da Relatividade Geral, as condições de energia foram introduzidas como restrições fisicamente razoáveis à matéria. Basicamente, são restrições relativas à densidade de energia local, que deve ser positiva, e à velocidade de corrente do fluido da matéria, que não pode ser superluminal. Existem quatro condições energéticas principais: a condição de energia fraca (WEC), a condição de energia forte (SEC), a condição de energia dominante (DEC) e a condição de energia nula. (NEC) [159].

Sabe-se que os buracos negros regulares violam as condições de energia [158]. Uma vez que a introdução de uma nuvem de cordas e quintessência transformou a métrica do buraco negro numa solução singular, é essencial analisar as condições de energia da métrica obtida.

Para analisar as condições de energia, precisamos identificar as componentes do tensor energia-momento, dadas da seguinte forma

$$T_{\mu}^{\mu} = \text{diag}[\rho, -p_r, -p_t, -p_t], \quad (8.32)$$

onde ρ é a densidade de energia, p_r é a pressão radial e p_t é a pressão tangencial. Considerando as equações de Einstein e a Eq. (8.12), encontramos

$$\rho = \frac{1 - f(r) - rf'(r)}{\kappa^2 r^2}, \quad (8.33)$$

$$p_r = \frac{rf'(r) + f - 1}{\kappa^2 r^2}, \quad (8.34)$$

$$p_t = \frac{rf''(r) + 2f'(r)}{2\kappa^2 r}. \quad (8.35)$$

De agora em diante, identifiquemos a função $f(r)$ como

$$f(r) = 1 - a - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} - \frac{2m}{r} e^{-k/r}. \quad (8.36)$$

Existem quatro condições principais de energia: a condição de energia fraca (WEC), a condição de energia forte (SEC), a condição de energia dominante (DEC) e a condição de energia nula (NEC) [159]. Estas condições são dadas pelas desigualdades [40, 159, 160]

$$NEC_{1,2} = WEC_{1,2} = SEC_{1,2} \Leftrightarrow \rho + p_{r,t} \geq 0, \quad (8.37)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow \rho + p_r + 2p_t \geq 0, \quad (8.38)$$

$$DEC_{1,2} \Leftrightarrow \rho - |p_{r,t}| \geq 0, \quad (8.39)$$

$$DEC_3 = WEC_3 \Leftrightarrow \rho \geq 0, \quad (8.40)$$

onde os índices 1 e 2 se referem, respectivamente, às componentes radial e tangencial da pressão. Vemos que $DEC_{1,2} \Leftrightarrow ((NEC_{1,2}) \text{ e } (\rho - p_{r,t} \geq 0))$, por isso, substituímos $DEC_{1,2} \Rightarrow \rho - p_{r,t} \geq 0$.

No que segue, vamos considerar $f(r) > 0$. Assim, as condições de energia são dadas pelas seguintes relações

$$NEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (8.41)$$

$$NEC_2 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} - \frac{kme^{-\frac{k}{r}}(k - 4r)}{\kappa^2 r^5} - \frac{9\alpha\omega_q(\omega_q + 1)r^{-3(\omega_q+1)}}{2\kappa^2} \geq 0, \quad (8.42)$$

$$WEC_3 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{2kme^{-\frac{k}{r}}}{\kappa^2 r^4} - \frac{3\alpha\omega_q r^{-3(\omega_q+1)}}{\kappa^2} \geq 0, \quad (8.43)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow -\frac{2kme^{-\frac{k}{r}}(k-2r)}{\kappa^2 r^5} - \frac{3\alpha\omega_q(3\omega_q+1)r^{-3(\omega_q+1)}}{\kappa^2} \geq 0, \quad (8.44)$$

$$DEC_1 \Leftrightarrow \frac{2a}{\kappa^2 r^2} + \frac{4kme^{-\frac{k}{r}}}{\kappa^2 r^4} - \frac{6\alpha\omega_q r^{-3\omega_q-3}}{\kappa^2} \geq 0, \quad (8.45)$$

$$DEC_2 \Leftrightarrow \frac{a}{\kappa^2 r^2} + \frac{k^2 me^{-\frac{k}{r}}}{\kappa^2 r^5} + \frac{3\alpha\omega_q(3\omega_q-1)r^{-3(\omega_q+1)}}{2\kappa^2} \geq 0. \quad (8.46)$$

Se considerarmos $-1 < \omega_q < -\frac{1}{3}$ e o limite $r \rightarrow \infty$, obtemos

$$NEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (8.47)$$

$$NEC_2 \Leftrightarrow 0, \quad (8.48)$$

$$WEC_3 \Leftrightarrow 0, \quad (8.49)$$

$$SEC_3 \Leftrightarrow 0, \quad (8.50)$$

$$DEC_1 \Leftrightarrow 0, \quad (8.51)$$

$$DEC_2 \Leftrightarrow 0. \quad (8.52)$$

Os resultados relativos às condições de energia mostram-nos que, no caso considerado, as condições de energia devem ser satisfeitas ou violadas consoante a relação entre os parâmetros. Analisando estas condições para valores muito grande da coordenada radial, concluímos que todas elas são satisfeitas e iguais a zero. Vale a pena mencionar que se considerarmos o caso $f(r) < 0$, as conclusões sobre as condições de energia são as mesmas.

8.4 Termodinâmica do buraco negro

Nesta seção, estudamos a termodinâmica do buraco negro com uma nuvem de cordas num cenário de eletrodinâmica não-linear, examinando o comportamento da massa, da temperatura Hawking e da capacidade térmica em função da entropia.

Massa do buraco negro

Para qualquer horizonte de raio r_h , sabemos que $f(r_h) = 0$. Esta condição nos fornece a seguinte massa

$$m = -\frac{1}{2} e^{\frac{k}{r_h}} r_h^{-3\omega_q} \left[(a-1)r_h^{3\omega_q+1} + \alpha \right], \quad (8.53)$$

escrito em termos dos parâmetros que codificam a presença da eletrodinâmica não-linear, da nuvem de cordas, bem como da quintessência. Nota-se que quando $k = 0$, $a = 0$, e $\alpha = 0$, recuperamos a massa do buraco negro de Schwarzschild em termos do raio do horizonte. Portanto, a expressão dada na Eq. (8.53) representa a massa (energia) do buraco

negro num cenário de eletrodinâmica não-linear, adequadamente modificada pela presença da nuvem de cordas e da quintessência.

A área do horizonte pode ser calculada por

$$A = \int \sqrt{-g} d\theta d\phi = 4\pi r_h^2. \quad (8.54)$$

Por outro lado, a entropia do buraco negro pode ser calculada através da lei da área [62]

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_h^2. \quad (8.55)$$

Assim, podemos escrever o parâmetro de massa em função da entropia como

$$m = \frac{e^{\frac{k\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}}} S^{-\frac{3\omega_q}{2}} \left[(1-a) S^{\frac{3\omega_q}{2} + \frac{1}{2}} - \alpha \pi^{\frac{3\omega_q}{2} + \frac{1}{2}} \right]}{2\sqrt{\pi}}, \quad (8.56)$$

cujo comportamento, em função da entropia, é mostrado na Fig. 87, para diferentes valores de k , a e α .

Na Fig. 87e, representa-se o comportamento do parâmetro de massa, m , em função da entropia do buraco negro, S , na ausência de quintessência ($\alpha = 0$) e eletrodinâmica não-linear ($k = 0$), ou seja, no espaço-tempo de Letelier. Verifica-se que, neste cenário, o parâmetro de massa tem apenas valores positivos, para $0 < a < 1$, e valores positivos da entropia, S . Comportamento análogo ocorre quando consideramos o espaço-tempo num cenário de eletrodinâmica não-linear, Fig. 87f. Quando adicionamos a quintessência, Figs. 87a-87c, o parâmetro de massa apresentará valores positivos e negativos dependendo dos parâmetros do buraco negro.

Temperatura Hawking

A gravidade superficial (κ) para os buracos negros com uma nuvem de cordas e quintessência num cenário de eletrodinâmica não-linear pode ser calculada utilizando a seguinte expressão:

$$\kappa = \frac{f'(r)}{2} \Big|_{r_h}, \quad (8.57)$$

com $'$ denotando a derivada em relação à coordenada radial. Hawking mostrou que o buraco negro emite radiação e a sua temperatura correspondente, a temperatura Hawking, para um espaço-tempo estacionário, é dada por [64]:

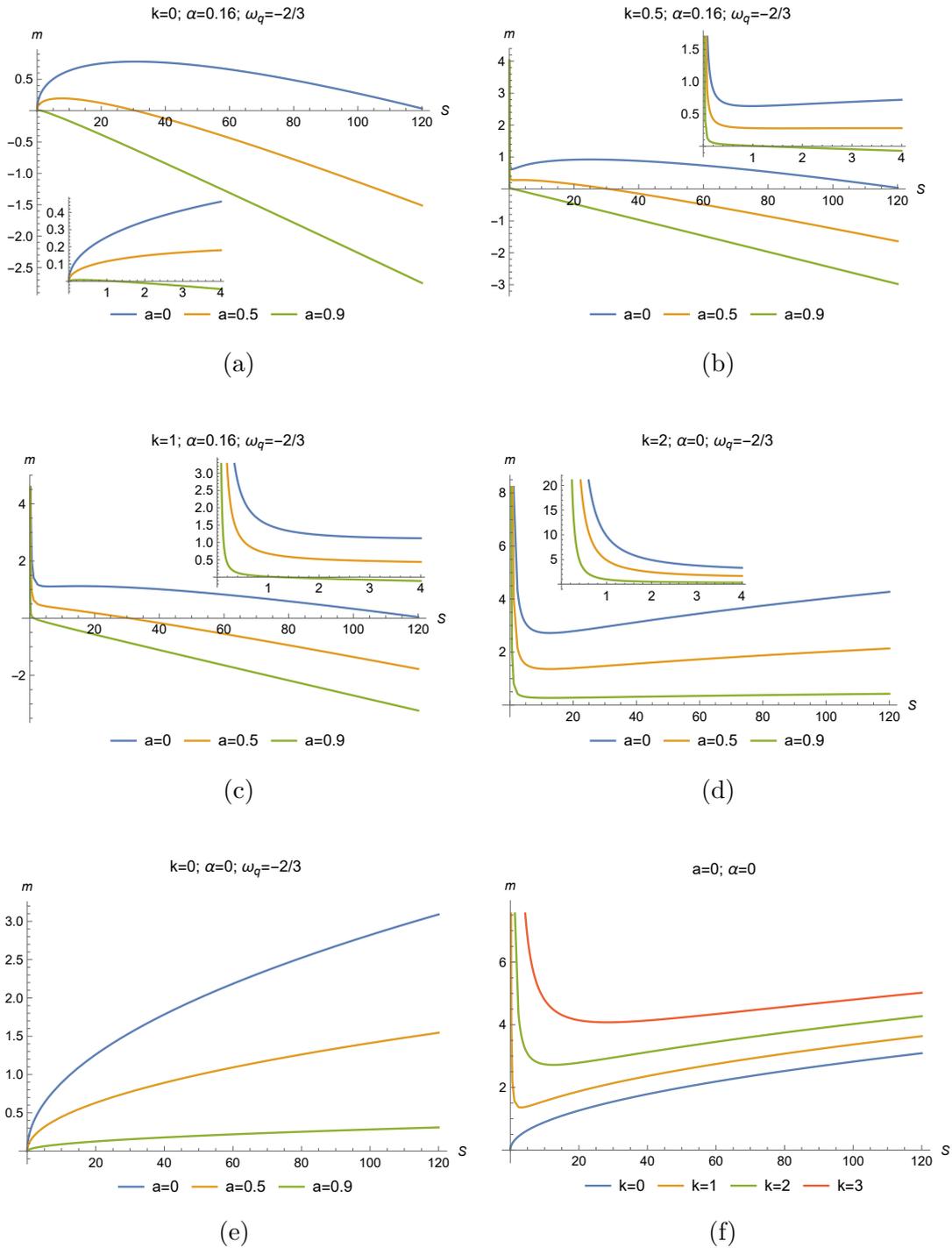


Figura 87 – Massa do buraco negro em função da entropia $m(S)$ para diferentes valores de k , a e α .

$$T_\kappa = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (8.58)$$

Usando a Eq. (8.58) com κ dado por (8.57), é possível calcular a temperatura Hawking, $T_\kappa = T$, para o buraco negro com nuvem de cordas, quintessência e eletrodinâmica não-linear:

$$T = \frac{S^{-\frac{3}{2}(\omega_q+1)}}{4\sqrt{\pi}} \left[k\sqrt{\pi}(a-1)S^{\frac{3\omega_q}{2}+\frac{1}{2}} - (a-1)S^{\frac{3\omega_q}{2}+1} + k\alpha\pi^{\frac{3\omega_q}{2}+1} + 3\alpha\omega_q\sqrt{S}\pi^{\frac{3\omega_q}{2}+\frac{1}{2}} \right]. \quad (8.59)$$

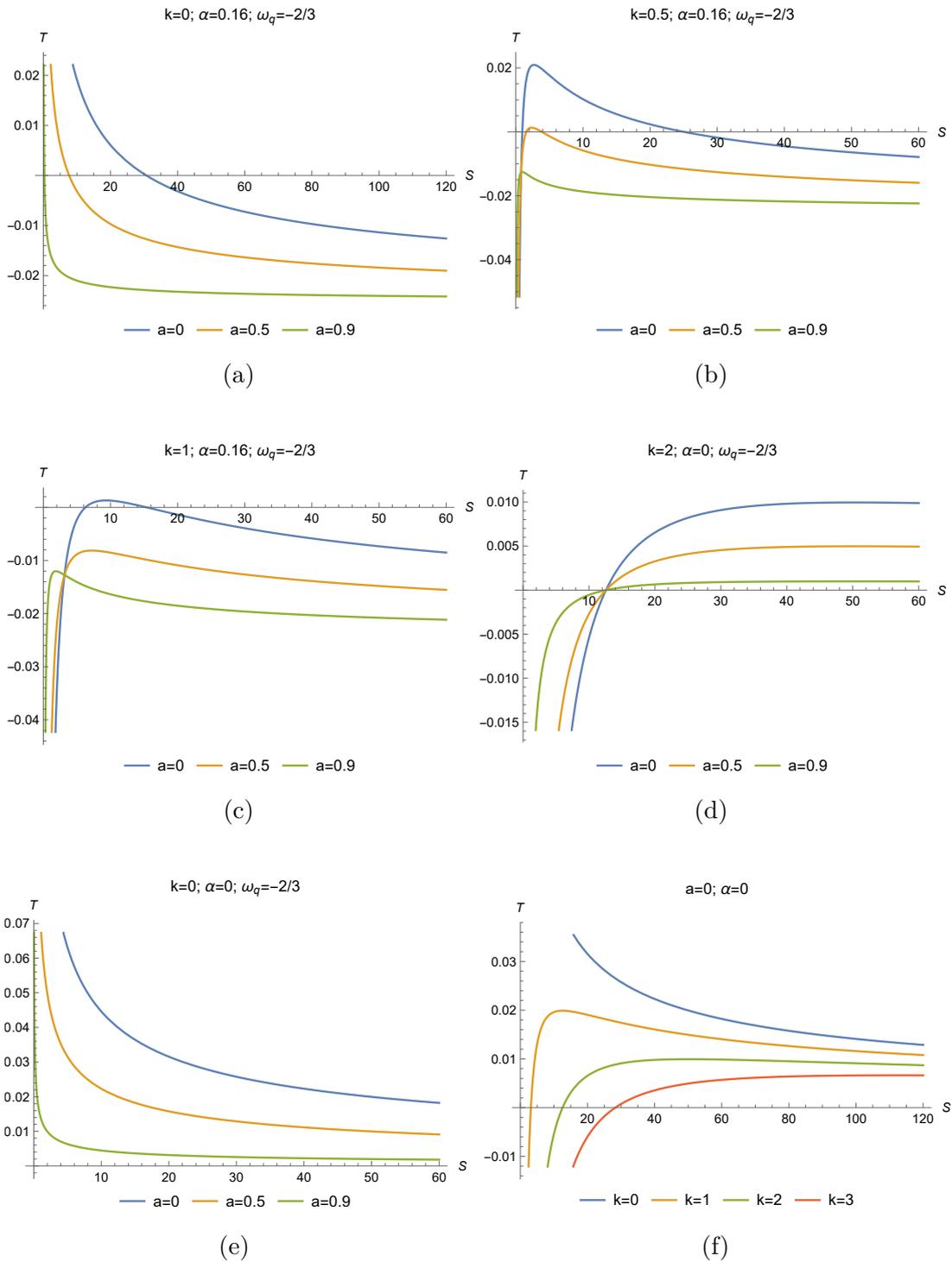


Figura 88 – Temperatura do buraco negro em função da entropia $T(S)$ para diferentes valores de k , a e α .

Na Fig. 88, representamos o comportamento do parâmetro de temperatura, T , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações. Nota-se que para o espaço-tempo de Schwarzschild ($k = 0$, $a = 0$ e $\alpha = 0$), o parâmetro de temperatura só apresenta valores positivos para $S > 0$. Analogamente, para o espaço-tempo de Letelier ($k = 0$, e $0 < a < 1$, $\alpha = 0$), como mostra a Fig. 88e.

Quando consideramos o espaço-tempo da eletrodinâmica não-linear ($a = 0$ e $\alpha = 0$), Fig. 88f, já é possível notar que o parâmetro de temperatura apresentará valores positivos e negativos para $S > 0$. Isso também ocorre quando se considera a nuvem de cordas e quintessência no espaço-tempo da eletrodinâmica não-linear ($\alpha = 0, 16$ e $0 < a < 1$).

Capacidade térmica

A capacidade térmica fornece informações sobre a estabilidade termodinâmica de um sistema. Podemos calcular a capacidade térmica dos buracos negros com uma nuvem de cordas e quintessência num cenário de eletrodinâmica não-linear a partir da seguinte expressão:

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)^{-1}. \quad (8.60)$$

Substituindo a Eq. (8.59) na Eq. (8.60), obtemos a seguinte expressão para a capacidade térmica do buraco negro em função da entropia (S):

$$C = \frac{2S\psi_1}{\psi_2 + \psi_3}, \quad (8.61)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \sqrt{\pi}(a-1)kS^{\frac{3\omega_q}{2}+\frac{1}{2}} - \left[(a-1)S^{\frac{3\omega_q}{2}+1} \right] \\ & + \alpha k \pi^{\frac{3\omega_q}{2}+1} + 3\alpha\sqrt{S}\pi^{\frac{3\omega_q}{2}+\frac{1}{2}}\omega_q, \end{aligned} \quad (8.62)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & -2\sqrt{\pi}(a-1)kS^{\frac{3\omega_q}{2}+\frac{1}{2}} \\ & + (a-1)S^{\frac{3\omega_q}{2}+1} - 3\alpha k \pi^{\frac{3\omega_q}{2}+1}, \end{aligned} \quad (8.63)$$

$$\begin{aligned} \psi_3 = & -3\alpha \left(\pi k + 2\sqrt{\pi}\sqrt{S} \right) \pi^{\frac{3\omega_q}{2}} \omega_q \\ & - 9\alpha\sqrt{S}\pi^{\frac{3\omega_q}{2}+\frac{1}{2}}\omega_q^2, \end{aligned} \quad (8.64)$$

cujos comportamentos são mostrados na Fig. 89, em função da entropia do buraco negro, para diferentes valores dos parâmetros da nuvem de cordas, da eletrodinâmica não-linear e da quintessência.

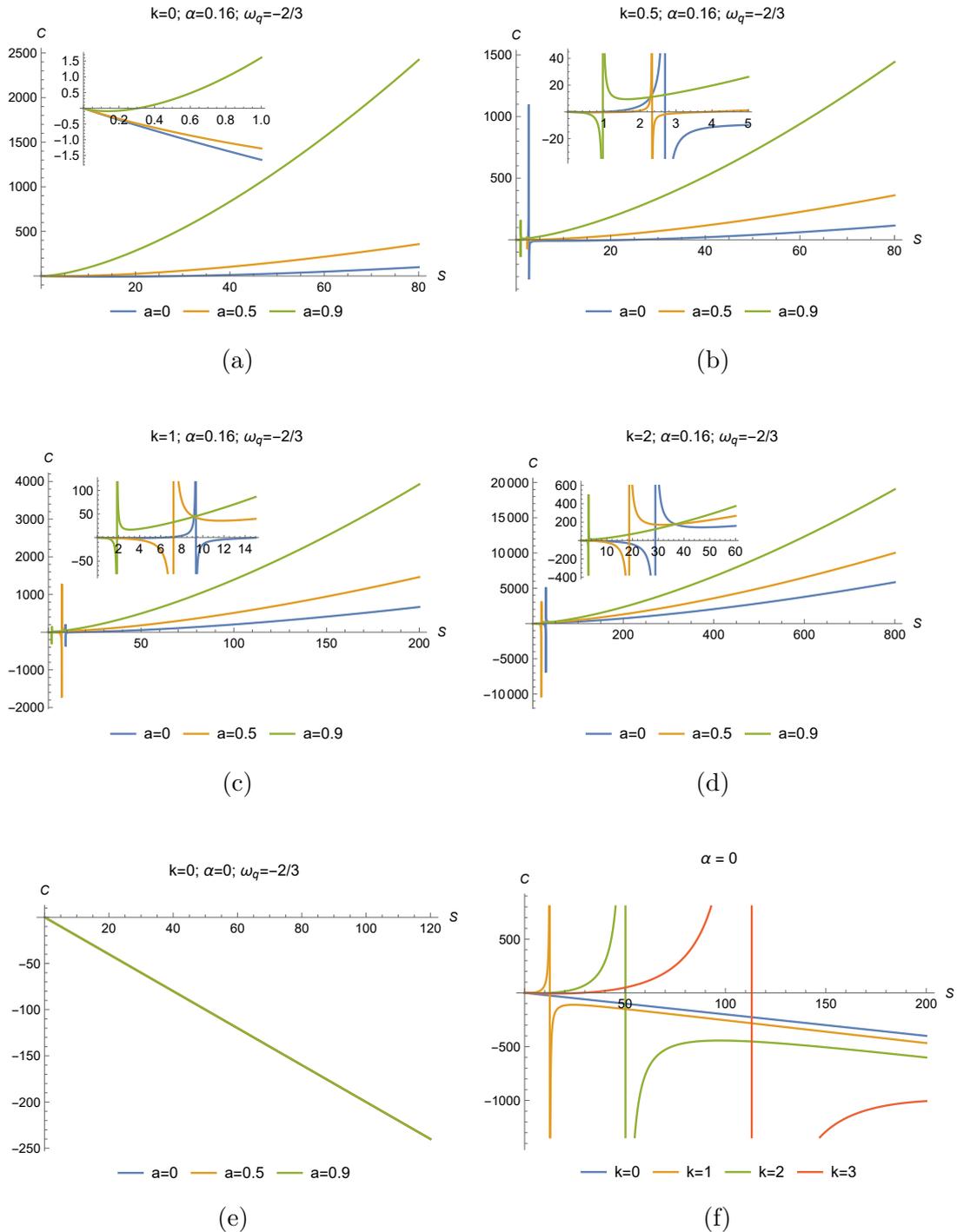


Figura 89 – Capacidade térmica do buraco negro em função da entropia $C(S)$ para diferentes valores de k , a e α .

Sabe-se que o sinal da capacidade térmica está relacionado com a estabilidade termodinâmica de um sistema. Se $C > 0$, o sistema é chamado de estável e chamado de instável se $C < 0$.

Da Fig. 89, podemos concluir que existem valores de S para os quais a capacidade térmica é positiva, assim como existem valores para os quais a capacidade térmica é

negativa. Em outras palavras, o buraco negro pode ser termodinamicamente estável ou instável e esta estabilidade está relacionada com os valores da nuvem de cordas, da eletrodinâmica não-linear e do parâmetro de quintessência. É perceptível que o ponto de transição, no qual a capacidade térmica diverge, muda quando variamos estes parâmetros.

Na ausência da quintessência ($\alpha = 0$) e da eletrodinâmica não-linear ($k = 0$), a Eq. (8.61) reduz-se a $C = -2S$, como esperado para o caso do espaço-tempo de Schwarzschild. Neste caso, a capacidade térmica é negativa para $S > 0$, indicando um sistema termodinâmico instável, como mostra a Fig. 89e.

Caso contrário, quando consideramos o efeito da nuvem de cordas, da eletrodinâmica não-linear e da quintessência, há valores da entropia para os quais a capacidade térmica adquire valores positivos.

É importante ressaltar que os parâmetros da nuvem de cordas e da eletrodinâmica não-linear desempenham um papel no comportamento da capacidade térmica, modificando o ponto de transição de fase, como mostrado nas Figs. 89b-89d e 89f, já que para $k = 0$, $\alpha = 0.16$ e $\omega_q = -2/3$ não há pontos de transição de fase, (89a).

9 Considerações finais

Nesta tese, obtivemos várias soluções de buracos negros, em cenários com nuvem de cordas, fluido de cordas e, em alguns casos, também quintessência e constante cosmológica, a partir de soluções regulares de buracos negros, a saber, os buracos negros de Bardeen, Hayward e Frolov. As soluções encontradas são, em certo sentido, generalizações das soluções de Bardeen, Hayward e Frolov, algumas das quais preservam, em determinadas condições, a característica mais importante destas últimas, qual seja, a regularidade da métrica nas vizinhanças de $r = 0$.

A primeira solução obtida foi a correspondente ao buraco negro de Bardeen com múltiplas fontes, a saber, nuvem de cordas, que rodeia o buraco negro, campo eletromagnético, constante cosmológica e quintessência, a qual denominamos buraco negro carregado de Bardeen-Kiselev-(anti-) de Sitter. Estes resultados estão apresentados no capítulo 5, seção 5.1.

Para essa solução, analisamos o escalar de Kretschmann, quando o parâmetro de quintessência assume valores no intervalo, $-1 < \omega_q < -1/3$, e verificamos que, a solução tem uma singularidade na origem, pois o escalar de Kretschmann diverge, e, ao mesmo tempo, esta quantidade é finita quando $r \rightarrow \infty$. Examinamos alguns casos particulares obtidos da solução geral (5.38) e constatamos que a regularidade da métrica de Bardeen se mantém para os seguintes espaços-tempo: Bardeen-Kiselev para $\omega_q = -4/3$, Bardeen com constante cosmológica e Bardeen-Kiselev com constante cosmológica para $\omega_q \leq -1$ e $\omega_q = -4/3$. Uma discussão acerca do potencial efetivo e geodésicas é apresentada na subseção 5.1.4.3.

Na seção 5.2, obtivemos e analisamos a solução do buraco negro de Bardeen-AdS rodeado por um fluido de cordas. Verificamos que a solução é regular apenas para valores de β no intervalo $-1 < \beta < 0$ e para $\beta = -1$. Para $\beta = 2$, que pode ser interpretado como uma solução que poderá descrever a matéria escura, o escalar de Kretschmann diverge na origem e, portanto, a métrica não é regular, neste ponto.

Também investigamos a termodinâmica do buraco negro para $\beta = 2$. Neste contexto, obtivemos duas temperaturas: T_H encontrada pela primeira lei da termodinâmica sem modificações e T_κ associada a gravidade superficial. Identificamos que estas grandezas não são equivalentes, o que nos levou a modificar a primeira lei introduzindo o fator $W(r_+, q)$ que conecta as duas temperaturas. Sobre a capacidade térmica em função da entropia, observamos que a mesma possui descontinuidades que indicam a existência de transição de fase, bem como que pode assumir valores positivos e negativos, o que indica haver regiões onde o buraco negro é termodinamicamente estável ($C_P > 0$) e instável ($C_P < 0$),

a depender dos valores de entropia (ver Figura 38). Calculamos a equação de estado da solução obtida, (5.180), e ilustramos o seu comportamento para diferentes valores dos parâmetros q e b , ver Figura 39. Juntamente com a equação de estado, obtivemos os valores críticos, que estão indicados nas Tabelas (2) e (3). Construimos também o diagrama de fases $P \times v$ para diferentes valores de temperatura, ilustrando a construção de Maxwell e a curva spinodal, conforme mostrado na Figura 40.

Por fim, analisamos a energia livre de Helmholtz e mostramos que a solução tem dois estados termodinamicamente estáveis, chamados buracos negros pequeno e grande, e uma terceira transição de fase, designada por buraco negro intermediário, sendo termodinamicamente instável. Verificar que a transição intermediária é pequena (grande) para valores grandes (pequenos) de q ou b (ver Figura 43). Os resultados obtidos, de fato, mostram-nos como a regularidade do sistema em consideração é afetada pela presença do fluido de cordas.

No capítulo 6, seção 6.1, analisamos as consequências da presença da nuvem de cordas na física do buraco negro de Hayward, rodeado por esta nuvem. Em primeiro lugar, no que se refere à singularidade ou não-singularidade (regularidade) da métrica do espaço-tempo, que pode ser analisada calculando o escalar de Kretschmann e tomando o limite apropriado, a saber, $r \rightarrow 0$, concluímos que este resultado é divergente. Isto significa que o espaço-tempo do buraco negro de Hayward, quando rodeado por uma nuvem de cordas, perde a sua regularidade na origem. Por outras palavras, a inclusão da nuvem de cordas em torno do buraco negro de Hayward torna este buraco negro singular, perdendo então a sua característica principal.

Em relação às possíveis raízes de $g(r)$, e considerando uma massa crítica, m_* , dada pela Eq. (6.26), temos três cenários diferentes, a saber: (i) a massa do buraco negro é superior à massa crítica, $m > m_*$, assim $g(r)$ tem duas raízes reais; (ii) a massa do buraco negro é igual à massa crítica, $m = m_*$, então, $g(r)$ tem uma única raiz real, que é igual a r_* ; e (iii) $m < m_*$, nesse caso, $g(r)$ não tem raízes reais.

O potencial efetivo (V_{eff}), dado pela Eq. (6.35), está representado nas Figuras 45 a 48, para diferentes valores de a e l , para geodésicas tipo-tempo e nulas. Como se pode ver, para alguns casos em que $l = 0$, não existem geodésicas circulares estáveis, independentemente dos valores de a . Por outro lado, para $l > 0$, podemos observar a possibilidade da existência de geodésicas circulares estáveis, dependendo do valor do parâmetro da nuvem de cordas, a .

Para geodésicas não-radiais tipo nulo (Fig. 46), podemos observar que, em todos os casos, $V_{eff} \rightarrow 0$ para regiões distantes do buraco negro, isto é, para $r \rightarrow \infty$. No caso em que $l = 0$, não existem geodésicas circulares estáveis. No entanto, existem órbitas circulares estáveis de partículas sem massa em torno do buraco negro, dependendo da presença da nuvem de cordas, como se pode ver na Fig. 46. Com relação ao comportamento das

geodésicas radiais tipo-tempo, mostrado na Fig. 47, para $l > 0$, existem geodésicas estáveis em todas as situações.

No que diz respeito às condições de energia, as mesmas são satisfeitas. Assintoticamente, todas as condições de energia são iguais a zero e conseqüentemente satisfeitas. Estes resultados foram explicitamente mostrados para o caso $g(r) > 0$, mas são os mesmos para $g(r) < 0$.

O comportamento do parâmetro de massa, m , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações, são muito semelhantes, como podemos ver na Fig. 49. Vale a pena chamar a atenção para o fato de que a forma se mantém, independentemente dos valores do parâmetro que codifica a presença da nuvem de cordas. A única diferença é um deslocamento para a esquerda, à medida que os valores deste parâmetro aumentam.

Ao considerar o espaço-tempo do buraco negro de Schwarzschild ($a = l = 0$), o parâmetro de temperatura só apresenta valores positivos para $S > 0$. O mesmo comportamento ocorre quando se adiciona uma nuvem de cordas ao espaço-tempo do buraco negro de Schwarzschild, nomeadamente, $l = 0$ e $0 < a < 1$. Agora, se for considerado o buraco negro de Hayward, $l = 1$ e $a = 0$, a temperatura assumirá valores positivos e negativos dependendo dos parâmetros do buraco negro. A mesma situação aparece quando se considera a presença de uma nuvem de cordas em Hayward.

A capacidade térmica assume valores positivos ou negativos, dependendo dos valores de entropia quando a nuvem de cordas está presente. Isto significa que o buraco negro de Hayward com uma nuvem de cordas pode ser instável ou estável dependendo dos valores de entropia considerados. Este comportamento é análogo ao que se obtém quando a nuvem está ausente. Caso contrário, o papel da nuvem de cordas é deslocar os gráficos para a esquerda.

É importante salientar que o parâmetro da nuvem de cordas tem um papel importante no comportamento da capacidade térmica, modificando os pontos das transições de fase, bem como na temperatura Hawking, massa do buraco negro, potencial efetivo, geodésicas e horizontes.

Na seção 6.2, obtivemos a solução para o buraco negro de Hayward com múltiplas fontes, a qual denominamos como buraco negro carregado de Hayward-Kiselev-(anti-) de Sitter rodeado por uma nuvem de cordas. Para essa solução, encontramos resultados muito parecidos ao que vimos na seção 5.1. Uma discussão acerca do potencial efetivo do movimento geodésico para a solução geral é feita na sub subseção 6.2.4.3.

Na seção 6.3, obtemos a solução correspondente ao buraco negro de Hayward-AdS com um fluido de cordas. Observamos que a solução apresentada pode recuperar algumas métricas conhecidas, como mostra a Tabela 4. A análise do escalar de Kretschmann mostra que a regularidade do buraco negro pode ser mantida ou não, dependendo do parâmetro

do fluido de cordas β .

Quanto à termodinâmica do buraco negro, a Fig. 63a mostra que, fixados todos os outros parâmetros, o aumento do parâmetro de Hayward q diminui a temperatura Hawking e, como consequência, diminui a emissão Hawking do buraco negro. Da mesma forma, o aumento do parâmetro de fluido de cordas b também diminui a temperatura Hawking do buraco negro, como mostra a Fig. 63b. A estabilidade termodinâmica do buraco negro também é definida com base nos valores de q , b e Λ , como pode ser visto nas Figs. 64a-64b.

No capítulo 7, obtivemos a solução correspondente ao buraco negro de Frolov com nuvem de cordas e fluido de cordas. Na seção 7.1, concluímos a partir da análise do escalar de Kretschmann, no limite $r \rightarrow 0$, que a inclusão da nuvem de cordas influencia a métrica, destruindo sua regularidade, e como consequência, introduzindo uma singularidade na origem ($r = 0$).

Nas Figs. 78b-78c, constatamos que, ao considerar o buraco negro de Frolov, é possível notar que o parâmetro de massa tem valores positivos e negativos dependendo dos parâmetros do buraco negro. Isto também se repete quando consideramos a nuvem de cordas no espaço-tempo de Frolov. É importante notar que o parâmetro da nuvem de cordas modifica o ponto de transição de fase para o buraco negro de Frolov rodeado por essa nuvem.

Na Fig. 79, representamos o comportamento do parâmetro de temperatura, T , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações. Nota-se que para o espaço-tempo de Reissner-Nordström ($a = 0$ e $l = 0$) o parâmetro de temperatura pode apresentar valores positivos ou negativos para $S > 0$. Analogamente, para o espaço-tempo de Reissner-Nordström-Letelier ($l = 0$ e $0 < a < 1$). Na Fig. 79c, nota-se que, ao considerarmos o espaço-tempo de Frolov ($l = 1$, $Q = 0.05$ e $a = 0$), também é possível perceber que o parâmetro de temperatura apresentará valores positivos e negativos dependendo dos parâmetros do buraco negro. Isso também se repete quando consideramos a nuvem de cordas no espaço-tempo de Frolov ($l = 1$, $Q = 0.05$ e $0 < a < 1$).

Quando consideramos Frolov ($l = 1$, $Q = 0.05$ e $a = 0$) e o espaço-tempo de Frolov com a nuvem de cordas ($l = 1$, $Q = 0.05$ e $0 < a < 1$), existem valores para a entropia para os quais a capacidade térmica adquire valores positivos ou negativos. Isto significa que o buraco negro de Frolov pode ser instável ou estável a depender dos valores de entropia considerados.

Na seção 7.2, concluímos, a partir da análise do escalar de Kretschmann, que a solução de Frolov perde sua regularidade na origem com a inclusão do fluido de cordas para $\beta = 2$. Nas Figs. 83a-83b, representamos o comportamento do parâmetro de massa, m , em função da entropia do buraco negro, S , em diferentes situações. Observa-se que, para o buraco negro de Frolov-AdS com fluido de cordas, o parâmetro de massa tem valores positivos e

negativos dependendo dos parâmetros do buraco negro.

Na Fig. 84b, percebe-se que para o espaço-tempo de Frolov-AdS sem fluido de cordas, o parâmetro de temperatura apresenta valores positivos e negativos para $S > 0$. Analogamente, para o espaço-tempo de Frolov-AdS com fluido de cordas. Das Figs. 85a-85b, podemos concluir que existem valores de S para os quais a capacidade térmica é positiva, assim como existem valores para os quais a capacidade térmica é negativa.

No capítulo 8, obtivemos a solução correspondente ao buraco negro com uma nuvem de cordas e quintessência em um cenário de eletrodinâmica não-linear. Avaliando o comportamento do parâmetro $f(r)$ na métrica da Eq. (8.18), podemos observar, na Fig. (86), que o número e a localização dos horizontes do buraco negro são determinados pelos parâmetros associados aos conteúdos de matéria. Para $k = 0$, $m = 1$, $\alpha = 0$, e $\omega_q = -2/3$, por exemplo, forma-se uma singularidade nua.

Na seção 8.4, analisamos as grandezas termodinâmicas do buraco negro obtido. O comportamento do parâmetro de massa e da temperatura Hawking como funções da entropia S estão representados, respectivamente, nas Figs. (87) e (88). No que diz respeito à capacidade térmica, podemos observar que o parâmetro da eletrodinâmica não-linear não influencia o comportamento da grandeza, determinando a existência de estabilidade/instabilidade termodinâmica.

Finalmente, é importante observar que, na ausência da interação eletrodinâmica não-linear ($k = 0$), recuperamos os resultados já obtidos na literatura relativos ao espaço-tempo de Letelier com quintessência [38].

Referências

- 1 WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010. Citado na página 29.
- 2 SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einstein'schen theorie. *Berlin. Sitzungsberichte*, v. 18, 1916. Citado 5 vezes nas páginas 29, 37, 73, 74 e 121.
- 3 REISSNER, H. Über die eigengravitation des elektrischen felde nach der einsteinschen theorie. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 355, n. 9, p. 106–120, 1916. Citado 3 vezes nas páginas 29, 55 e 90.
- 4 NORDSTRÖM, G. Een en ander over de energie van het zwaartekrachtveld volgens de theorie van einstein. In: KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM. [S.l.], 1918. Citado 3 vezes nas páginas 29, 55 e 90.
- 5 KERR, R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical review letters*, APS, v. 11, n. 5, p. 237, 1963. Citado na página 29.
- 6 NEWMAN, E. T. et al. Metric of a rotating, charged mass. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 6, n. 6, p. 918–919, 1965. Citado na página 29.
- 7 BARDEEN, J. M. Non-singular general-relativistic gravitational collapse. In: *Proc. Int. Conf. GR5, Tbilisi*. [S.l.: s.n.], 1968. v. 174, p. 174. Citado 6 vezes nas páginas 29, 32, 73, 74, 75 e 121.
- 8 DYMNIKOVA, I. Vacuum nonsingular black hole. *General relativity and gravitation*, Springer, v. 24, p. 235–242, 1992. Citado 5 vezes nas páginas 29, 94, 145, 202 e 241.
- 9 DYMNIKOVA, I. Spherically symmetric space–time with regular de sitter center. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 12, n. 06, p. 1015–1034, 2003. Citado na página 29.
- 10 AYON-BEATO, E.; GARCIA, A. Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics. *Physical review letters*, APS, v. 80, n. 23, p. 5056, 1998. Citado 6 vezes nas páginas 29, 31, 32, 73, 82 e 161.
- 11 AYON-BEATO, E.; GARCIA, A. New regular black hole solution from nonlinear electrodynamics. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 464, n. 1-2, p. 25–29, 1999. Citado 6 vezes nas páginas 29, 31, 32, 73, 82 e 161.
- 12 MARS, M.; MARTÍN-PRATS, M. M.; SENOVILLA, J. M. Models of regular schwarzschild black holes satisfying weak energy conditions. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 13, n. 5, p. L51, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 73.
- 13 SAJADI, S.; RIAZI, N. Nonlinear electrodynamics and regular black holes. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 49, p. 1–21, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 29, 32 e 73.

- 14 BALART, L.; VAGENAS, E. C. Regular black holes with a nonlinear electrodynamics source. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 12, p. 124045, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 29, 32 e 73.
- 15 FROLOV, V. P. Notes on nonsingular models of black holes. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 10, p. 104056, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 29, 32, 73, 89, 90 e 225.
- 16 BRONNIKOV, K. A. Regular magnetic black holes and monopoles from nonlinear electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 63, n. 4, p. 044005, 2001. Citado 16 vezes nas páginas 29, 32, 73, 76, 84, 85, 95, 122, 142, 143, 162, 163, 179, 181, 200 e 201.
- 17 HAYWARD, S. A. Formation and evaporation of nonsingular black holes. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 3, p. 031103, 2006. Citado 13 vezes nas páginas 29, 32, 81, 82, 83, 84, 161, 162, 165, 166, 179, 200 e 201.
- 18 ABBAS, G.; SABIULLAH, U. Geodesic study of regular hayward black hole. *Astrophysics and Space Science*, Springer, v. 352, p. 769–774, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 73.
- 19 CHIBA, T.; KIMURA, M. A note on geodesics in the hayward metric. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Oxford University Press, v. 2017, n. 4, p. 043E01, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 73.
- 20 ZHOU, S.; CHEN, J.; WANG, Y. Geodesic structure of test particle in bardeen spacetime. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 21, n. 09, p. 1250077, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 29, 73 e 121.
- 21 WEI, S.-W.; LIU, Y.-X.; FU, C.-E. Null geodesics and gravitational lensing in a nonsingular spacetime. *Advances in High Energy Physics*, Hindawi, v. 2015, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 73.
- 22 PEREZ-ROMAN, I.; BRETÓN, N. The region interior to the event horizon of the regular hayward black hole. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 50, p. 1–18, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 73.
- 23 EIROA, E. F.; SENDRA, C. M. Gravitational lensing by a regular black hole. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 28, n. 8, p. 085008, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 73.
- 24 SALEH, M.; THOMAS, B. B.; KOFANE, T. C. Thermodynamics and phase transition from regular bardeen black hole surrounded by quintessence. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 57, p. 2640–2647, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 29, 73 e 121.
- 25 RODRIGUE, K. K. J. et al. Thermodynamic phase transition and global stability of the regular hayward black hole surrounded by quintessence. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 35, n. 16, p. 2050129, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 73.
- 26 MOLINA, M.; VILLANUEVA, J. On the thermodynamics of the hayward black hole. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 38, n. 10, p. 105002, 2021. Citado 8 vezes nas páginas 29, 73, 84, 85, 162, 179, 200 e 201.
- 27 IGUCHI, H. Gravitational entropy of hayward black hole. *Annals of Physics*, Elsevier, p. 169331, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 73.

- 28 PAUL, P. et al. More exact thermodynamics of nonlinear charged ads black holes in 4d critical gravity. *Nuclear Physics B*, Elsevier, p. 116259, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 73.
- 29 SINGH, D. V.; BHARDWAJ, V. K.; UPADHYAY, S. Thermodynamic properties, thermal image and phase transition of einstein-gauss-bonnet black hole coupled with nonlinear electrodynamics. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 137, n. 8, p. 1–13, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 73.
- 30 FERNANDO, S.; CORREA, J. Quasinormal modes of the bardeen black hole: Scalar perturbations. *Physical Review D*, APS, v. 86, n. 6, p. 064039, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 29, 73 e 121.
- 31 FLACHI, A.; LEMOS, J. P. Quasinormal modes of regular black holes. *Physical Review D*, APS, v. 87, n. 2, p. 024034, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 73.
- 32 LIN, K.; LI, J.; YANG, S. Quasinormal modes of hayward regular black hole. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 52, p. 3771–3778, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 73.
- 33 AKIYAMA, K. et al. First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 875, n. 1, p. L4, 2019. Citado na página 29.
- 34 ABBOTT, B. et al. Ligo scientific collaboration and virgo collaboration (2016) gw150914: first results from the search for binary black hole coalescence with advanced ligo. physical review d 93 (12). issn 1550-2368. *PHYSICAL REVIEW D Phys Rev D*, American Physical Society, v. 93, p. 122003, 2016. Citado na página 29.
- 35 SIGG, D. The advanced ligo detectors in the era of first discoveries. In: SPIE. *Interferometry XVIII*. [S.l.], 2016. v. 9960, p. 72–80. Citado na página 29.
- 36 LETELIER, P. S. Clouds of strings in general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 20, n. 6, p. 1294, 1979. Citado 21 vezes nas páginas 30, 32, 101, 102, 103, 110, 112, 118, 123, 144, 163, 165, 180, 181, 201, 202, 226, 227, 240, 254 e 256.
- 37 BARBOSA, D.; BEZERRA, V. On the rotating letelier spacetime. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 48, p. 1–11, 2016. Citado na página 30.
- 38 COSTA, M. M. Dias e; TOLEDO, J.; BEZERRA, V. The letelier spacetime with quintessence: Solution, thermodynamics and hawking radiation. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 28, n. 06, p. 1950074, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 30, 153, 256 e 273.
- 39 NASCIMENTO, F.; BEZERRA, V.; TOLEDO, J. Some remarks on hayward black hole surrounded by a cloud of strings. *Annals of Physics*, Elsevier, p. 169548, 2023. Citado 6 vezes nas páginas 30, 153, 161, 191, 200 e 229.
- 40 RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. d. S. Embedding regular black holes and black bounces in a cloud of strings. *Physical Review D*, APS, v. 106, n. 8, p. 084016, 2022. Citado 7 vezes nas páginas 30, 121, 135, 171, 193, 233 e 261.

- 41 TOLEDO, J.; BEZERRA, V. Kerr–newman–ads black hole with quintessence and cloud of strings. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 52, p. 1–21, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- 42 BATOOL, M.; HUSSAIN, I. Null and timelike geodesics of the schwarzschild black hole with string cloud background. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 26, n. 05, p. 1741005, 2017. Citado na página 30.
- 43 SOOD, A. et al. Thermodynamic stability and p–v criticality of nonsingular-ads black holes endowed with clouds of strings. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 82, n. 3, p. 227, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 30, 258 e 259.
- 44 RODRIGUES, M. E.; VIEIRA, H. A. Bardeen solution with a cloud of strings. *Physical Review D*, APS, v. 106, n. 8, p. 084015, 2022. Citado 9 vezes nas páginas 30, 75, 76, 121, 123, 179, 212, 213 e 254.
- 45 GRAÇA, J. M. et al. Effects of a string cloud on the criticality and efficiency of ads black holes as heat engines. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, p. 1–12, 2018. Citado na página 30.
- 46 GHAFFARNEJAD, H.; FARSAM, M. The last lost charge and phase transition in schwarzschild ads minimally coupled to a cloud of strings. *The European Physical Journal Plus*, Springer Berlin Heidelberg, v. 134, n. 3, p. 110, 2019. Citado na página 30.
- 47 GHOSH, S. G.; PAPNOI, U.; MAHARAJ, S. D. Cloud of strings in third order lovelock gravity. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 4, p. 044068, 2014. Citado na página 30.
- 48 SINGH, D. V.; GHOSH, S. G.; MAHARAJ, S. D. Clouds of strings in 4d einstein–gauss–bonnet black holes. *Physics of the Dark Universe*, Elsevier, v. 30, p. 100730, 2020. Citado na página 30.
- 49 TOLEDO, J. d. M.; BEZERRA, V. Black holes with cloud of strings and quintessence in lovelock gravity. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, p. 1–12, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- 50 TOLEDO, J.; BEZERRA, V. Black holes with a cloud of strings in pure lovelock gravity. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 79, p. 1–9, 2019. Citado na página 30.
- 51 LI, Z.; ZHOU, T. Kerr black hole surrounded by a cloud of strings and its weak gravitational lensing in rastall gravity. *Physical Review D*, APS, v. 104, n. 10, p. 104044, 2021. Citado na página 30.
- 52 GRAÇA, J. M.; LOBO, I. P.; SALAKO, I. G. Cloud of strings in $\{f\}(\{R\})$ gravity. *Chinese Physics C*, v. 42, n. 6, p. 063105, 2018. Citado na página 30.
- 53 HERSCOVICH, E.; RICHARTE, M. G. Black holes in einstein–gauss–bonnet gravity with a string cloud background. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 689, n. 4-5, p. 192–200, 2010. Citado na página 30.
- 54 GHAFFARNEJAD, H.; YARAIE, E. Effects of a cloud of strings on the extended phase space of einstein–gauss–bonnet ads black holes. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 785, p. 105–111, 2018. Citado na página 30.

- 55 CAI, X.-C.; MIAO, Y.-G. Quasinormal modes and spectroscopy of a schwarzschild black hole surrounded by a cloud of strings in rastall gravity. *Physical Review D*, APS, v. 101, n. 10, p. 104023, 2020. Citado na página 30.
- 56 SINGH, D. V.; SHUKLA, A.; UPADHYAY, S. Quasinormal modes, shadow and thermodynamics of black holes coupled with nonlinear electrodynamics and cloud of strings. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 447, p. 169157, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 30, 31, 254 e 256.
- 57 RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. d. S.; VIEIRA, H. A. Bardeen-kiselev black hole with a cosmological constant. *Physical Review D*, APS, v. 105, n. 8, p. 084043, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 30, 121 e 122.
- 58 VAGNOZZI, S. et al. Horizon-scale tests of gravity theories and fundamental physics from the event horizon telescope image of sagittarius a. *Classical and Quantum Gravity*, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 30, 90 e 101.
- 59 SOLENG, H. H. Dark matter and non-newtonian gravity from general relativity coupled to a fluid of strings. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 27, p. 367–378, 1995. Citado 7 vezes nas páginas 30, 145, 152, 202, 211, 241 e 247.
- 60 SOLENG, H. H. Dark matter and nonNewtonian gravity from general relativity coupled to a fluid of strings. *Gen. Rel. Grav.*, v. 27, p. 367–378, 1995. Citado na página 30.
- 61 DYMNIKOVA, I. Vacuum nonsingular black hole. *Gen. Rel. Grav.*, v. 24, p. 235–242, 1992. Citado na página 30.
- 62 BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Physical Review D*, APS, v. 7, n. 8, p. 2333, 1973. Citado 7 vezes nas páginas 30, 51, 174, 211, 235, 249 e 263.
- 63 HAWKING, S. W. Black hole explosions? *Nature*, Nature Publishing Group, v. 248, n. 5443, p. 30–31, mar 1974. ISSN 00280836. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/248030a0>>. Citado na página 30.
- 64 HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975. Citado 10 vezes nas páginas 30, 52, 80, 88, 92, 175, 212, 236, 249 e 263.
- 65 HAWKING, S. W. Black holes and thermodynamics. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 13, n. 2, p. 191–197, jan 1976. ISSN 05562821. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.13.191>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 44.
- 66 BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. *The Four Laws of Black Hole Mechanics*. [S.l.], 1973. v. 31, n. 2, 161–170 p. Disponível em: <<https://projecteuclid.org/journals/communications-in-mathematical-physics/volume-31/issue-2/The-four-laws-of-black-hole-mechanics/cmp/1103858973.full>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 44.
- 67 MYUNG, Y. S.; KIM, Y.-W.; PARK, Y.-J. Thermodynamics of regular black hole. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 41, p. 1051–1067, 2009. Citado na página 30.

- 68 AKBAR, M.; SALEM, N.; HUSSEIN, S. Thermodynamics of the bardeen regular black hole. *Chinese Physics Letters*, IOP Publishing, v. 29, n. 7, p. 070401, 2012. Citado na página 30.
- 69 TZIKAS, A. G. Bardeen black hole chemistry. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 788, p. 219–224, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 142.
- 70 CALDARELLI, M. M.; COGNOLA, G.; KLEMM, D. Thermodynamics of kerr-newman-ads black holes and conformal field theories. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 17, n. 2, p. 399, 2000. Citado na página 31.
- 71 SHUANG, W. et al. The first law of thermodynamics of the (2+ 1)-dimensional banados–teitelboim–zanelli black holes and kerr–de sitter spacetimes. *Chinese Physics Letters*, IOP Publishing, v. 23, n. 5, p. 1096, 2006. Citado na página 31.
- 72 SEKIWA, Y. Thermodynamics of de sitter black holes: thermal cosmological constant. *Physical Review D*, APS, v. 73, n. 8, p. 084009, 2006. Citado na página 31.
- 73 KASTOR, D.; RAY, S.; TRASCHEN, J. Enthalpy and the mechanics of ads black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 26, n. 19, p. 195011, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 155.
- 74 DOLAN, B. P. The cosmological constant and black-hole thermodynamic potentials. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 28, n. 12, p. 125020, jun 2011. ISSN 02649381. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/28/12/125020><https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/28/12/125020/meta>>. Citado na página 31.
- 75 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The astronomical journal*, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998. Citado na página 31.
- 76 RIESS, A. G. et al. Bvri light curves for 22 type ia supernovae. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 117, n. 2, p. 707, 1999. Citado na página 31.
- 77 PERLMUTTER, S. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 55.
- 78 CALDWELL, R. An introduction to quintessence. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 30, p. 215–229, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 55.
- 79 KISELEV, V. Quintessence and black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 20, n. 6, p. 1187, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 31, 122, 179 e 256.
- 80 GHADERI, K.; MALAKOLKALAMI, B. Thermodynamics of the schwarzschild and the reissner–nordström black holes with quintessence. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 903, p. 10–18, 2016. Citado na página 31.
- 81 ABDUJABBAROV, A. et al. Shadow of the rotating black hole with quintessential energy in the presence of plasma. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 26, n. 06, p. 1750051, 2017. Citado na página 31.

- 82 GHOSH, S. G. et al. Lovelock black holes surrounded by quintessence. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, p. 1–8, 2018. Citado na página 31.
- 83 GUO, X.-Y. et al. Continuous phase transition and microstructure of charged ads black hole with quintessence. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 80, p. 1–13, 2020. Citado na página 31.
- 84 BORN, M.; INFELD, L. Quantum theory of the electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, The Royal Society London, v. 143, n. 852, p. 410, 1934. Citado na página 31.
- 85 BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 144, n. 852, p. 425–451, 1934. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 95.
- 86 PLEBAŃSKI, J. *Lectures on non-linear electrodynamics: an extended version of lectures given at the Niels Bohr Institute and NORDITA, Copenhagen, in October 1968*. [S.l.]: Nordita, 1970. v. 25. Citado na página 31.
- 87 PELLICER, R.; TORRENCE, R. Nonlinear electrodynamics and general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 10, n. 9, p. 1718–1723, 1969. Citado na página 31.
- 88 GONZALEZ, H. A.; HASSAINE, M.; MARTINEZ, C. Thermodynamics of charged black holes with a nonlinear electrodynamics source. *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 10, p. 104008, 2009. Citado na página 31.
- 89 PAULA, M. A. A. de; LEITE, L. C. dos S.; CRISPINO, L. C. B. Massless scalar scattering by a charged regular black hole. *Astronomische Nachrichten*, Wiley Online Library, v. 344, n. 1-2, p. e220115, 2023. Citado na página 31.
- 90 NOMURA, K.; YOSHIDA, D.; SODA, J. Stability of magnetic black holes in general nonlinear electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 101, n. 12, p. 124026, 2020. Citado na página 31.
- 91 PAULA, M. A. de et al. Electrically charged regular black holes in nonlinear electrodynamics: Light rings, shadows, and gravitational lensing. *Physical Review D*, APS, v. 108, n. 8, p. 084029, 2023. Citado na página 31.
- 92 MATYJASEK, J. Extremal limit of the regular charged black holes in nonlinear electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 70, n. 4, p. 047504, 2004. Citado na página 31.
- 93 LIANG, J. Strong gravitational lensing by regular electrically charged black holes. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 49, n. 11, p. 137, 2017. Citado na página 31.
- 94 RODRIGUES, M. E.; JUNIOR, E. L.; SILVA, M. V. d. S. Using dominant and weak energy conditions for build new classe of regular black holes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2018, n. 02, p. 059, 2018. Citado na página 31.

- 95 DYMNIKOVA, I. Regular electrically charged vacuum structures with de sitter centre in nonlinear electrodynamics coupled to general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 21, n. 18, p. 4417, 2004. Citado na página 32.
- 96 CULETU, H. On a regular charged black hole with a nonlinear electric source. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 54, p. 2855–2863, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 96.
- 97 KRUGLOV, S. Asymptotic reissner-nordström solution within nonlinear electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 4, p. 044026, 2016. Citado na página 32.
- 98 I, H. S.; D, A. G.; PLEBAŃSKI, J. Duality rotations and type d solutions to einstein equations with nonlinear electromagnetic sources. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 28, n. 9, p. 2171–2181, 1987. Citado na página 32.
- 99 D, A. G.; I, H. S.; PLEBAŃSKI, J. Type-d solutions of the einstein and born-infeld nonlinear-electrodynamics equations. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, Springer, v. 84, n. 1, p. 65–90, 1984. Citado na página 32.
- 100 AMIRABI, Z.; MAZHARIMOUSAVI, S. H. Black-hole solution in nonlinear electrodynamics with the maximum allowable symmetries. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 81, p. 1–6, 2021. Citado na página 32.
- 101 KRUGLOV, S. Nonlinear electrodynamics and magnetic black holes. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 529, n. 8, p. 1700073, 2017. Citado na página 32.
- 102 AYON-BEATO, E.; GARCIA, A. Non-singular charged black hole solution for non-linear source. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 31, n. 5, p. 629–633, 1999. Citado na página 32.
- 103 AYÓN-BEATO, E.; GARCIA, A. The bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 493, n. 1-2, p. 149–152, 2000. Citado 9 vezes nas páginas 32, 73, 74, 75, 76, 121, 122, 142 e 143.
- 104 MA, M.-S. Magnetically charged regular black hole in a model of nonlinear electrodynamics. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 362, p. 529–537, 2015. Citado na página 32.
- 105 STUHLÍK, Z.; SCHEE, J.; OVCHINNIKOV, D. Generic regular black holes related to nonlinear electrodynamics with maxwellian weak-field limit: Shadows and images of keplerian disks. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 887, n. 2, p. 145, 2019. Citado na página 32.
- 106 RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. d. S. Bardeen regular black hole with an electric source. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2018, n. 06, p. 025, 2018. Citado na página 32.
- 107 LETELIER, P. S. Fluids of strings in general relativity. *Il Nuovo Cimento B*, Società Italiana di Fisica, v. 63, n. 2, p. 519–528, jun 1981. ISSN 03693554. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/BF02755096>>. Citado 10 vezes nas páginas 32, 101, 111, 112, 114, 116, 118, 145, 202 e 241.

- 108 D'INVERNO, R.; VICKERS, J. *Introducing Einstein's Relativity: A Deeper Understanding*. [S.l.]: Oxford University Press, 2022. Citado 14 vezes nas páginas 37, 43, 45, 54, 57, 71, 72, 122, 123, 180, 181, 203, 225 e 239.
- 109 WALD, R. M. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984. v. 207. ISSN 02624079. ISBN 9780226870335. Disponível em: <<http://www.bibliovault.org/BV.landing.epl?ISBN=9780226870335>>. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 73.
- 110 EINSTEIN, A. Explanation of the perihelion motion of mercury by means of the general theory of relativity. In: *A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975*. [S.l.]: Harvard University Press, 1979. p. 820–825. Citado na página 37.
- 111 KRANIOTIS, G.; WHITEHOUSE, S. Compact calculation of the perihelion precession of mercury in general relativity, the cosmological constant and jacobi's inversion problem. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 20, n. 22, p. 4817, 2003. Citado na página 37.
- 112 CRISPINO, L. C.; KENNEFICK, D. J. A hundred years of the first experimental test of general relativity. *Nature Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 15, n. 5, p. 416–419, 2019. Citado na página 37.
- 113 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. Citado na página 37.
- 114 CHANDRASEKHAR, S. *The mathematical theory of black holes* oxford univ. Press New York, 1983. Citado 8 vezes nas páginas 37, 137, 150, 167, 195, 208, 230 e 245.
- 115 OHANIAN, H. C.; RUFFINI, R. *Gravitation and spacetime*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Citado na página 37.
- 116 ABBOTT, B. et al. Gwtc-1: a gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by ligo and virgo during the first and second observing runs. *Physical Review X*, APS, v. 9, n. 3, p. 031040, 2019. Citado na página 37.
- 117 ABBOTT, R. et al. Gwtc-2: compact binary coalescences observed by ligo and virgo during the first half of the third observing run. *Physical Review X*, APS, v. 11, n. 2, p. 021053, 2021. Citado na página 37.
- 118 ABBOTT, R. et al. Population of merging compact binaries inferred using gravitational waves through gwtc-3. *Physical Review X*, APS, v. 13, n. 1, p. 011048, 2023. Citado na página 37.
- 119 STOICA, O. C. et al. The geometry of black hole singularities. *Advances in High Energy Physics*, Hindawi, v. 2014, 2014. Citado na página 37.
- 120 BRONNIKOV, K. A.; RUBIN, S. G. *Black holes, cosmology and extra dimensions*. [S.l.]: World Scientific, 2013. Citado na página 37.
- 121 HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 43, n. 3, p. 199–220, aug 1975. ISSN 14320916. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/BF02345020>><<https://link.springer.com/10.1007/BF02345020>>. Citado na página 44.

- 122 BEKENSTEIN, J. D. Black holes and the second law. *Lettere Al Nuovo Cimento Series 2*, Società Italiana di Fisica, v. 4, n. 15, p. 737–740, aug 1972. ISSN 1827-613X. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/BF02757029><https://link.springer.com/10.1007/BF02757029>>. Citado na página 44.
- 123 BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 7, n. 8, p. 2333–2346, apr 1973. ISSN 05562821. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.7.2333><https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2333>>. Citado na página 44.
- 124 TOLEDO, J. d. M. et al. Estudos sobre buracos negros em cenários com nuvem de cordas e quintessência, na relatividade geral e na gravitação de lovelock. Universidade Federal da Paraíba, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 101.
- 125 LIMA, J. A. S. Alternative dark energy models: an overview. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 34, p. 194–200, 2004. Citado na página 55.
- 126 CARDOSO, V.; PANI, P. Testing the nature of dark compact objects: a status report. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 22, p. 1–104, 2019. Citado na página 70.
- 127 SAKHAROV, A. D. The initial stage of an expanding universe and the appearance of a nonuniform distribution of matter. *Sov. Phys. JETP*, v. 22, p. 241, 1966. Citado na página 73.
- 128 NEVES, J. Relatividade bem comportada: buracos negros regulares. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 39, 2017. Citado na página 74.
- 129 ZHANG, Y.; GAO, S. First law and smarr formula of black hole mechanics in nonlinear gauge theories. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 35, n. 14, p. 145007, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 122.
- 130 PLEBANSKI, J.; KRASINSKI, A. *An introduction to general relativity and cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 122.
- 131 MA, M.-S.; ZHAO, R. Corrected form of the first law of thermodynamics for regular black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 31, n. 24, p. 245014, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 80, 153, 176, 212 e 213.
- 132 MALUF, R.; NEVES, J. C. Thermodynamics of a class of regular black holes with a generalized uncertainty principle. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 10, p. 104015, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 80, 176, 212 e 213.
- 133 FAN, Z.-Y.; WANG, X. Construction of regular black holes in general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 12, p. 124027, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 84, 85, 162, 179, 200 e 201.
- 134 BRONNIKOV, K. A. Comment on “construction of regular black holes in general relativity”. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 12, p. 128501, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 84, 85, 162, 179 e 201.
- 135 TOSHMATOV, B.; STUHLÍK, Z.; AHMEDOV, B. Comment on “construction of regular black holes in general relativity”. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 2, p. 028501, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 84, 85, 162, 179 e 201.

- 136 DYMNIKOVA, I. De sitter-schwarzschild black hole: Its particlelike core and thermodynamical properties. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 5, n. 05, p. 529–540, 1996. Citado na página 95.
- 137 STEHLE, P.; DEBARYSHE, P. Quantum electrodynamics and the correspondence principle. *Physical Review*, APS, v. 152, n. 4, p. 1135, 1966. Citado na página 95.
- 138 FRADKIN, E.; TSEYTLIN, A. A. Non-linear electrodynamics from quantized strings. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 163, n. 1-4, p. 123–130, 1985. Citado na página 95.
- 139 TSEYTLIN, A. A. Vector field effective action in the open superstring theory. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 276, n. 2, p. 391–428, 1986. Citado na página 95.
- 140 BERN, Z.; MORGAN, A. Supersymmetry relations between contributions to one-loop gauge boson amplitudes. *Physical Review D*, APS, v. 49, n. 11, p. 6155, 1994. Citado na página 95.
- 141 JACOBSON, T. N.; VELDHUIS, T. T. Nonperturbative one-loop effective action for qed with yukawa couplings. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 33, n. 27, p. 1850157, 2018. Citado na página 95.
- 142 GHOSH, S. G. A nonsingular rotating black hole. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 75, n. 11, p. 532, 2015. Citado na página 96.
- 143 SIMPSON, A.; VISSER, M. Regular black holes with asymptotically minkowski cores. *Universe*, MDPI, v. 6, n. 1, p. 8, 2019. Citado na página 96.
- 144 KUMAR, R.; GHOSH, S. G. Photon ring structure of rotating regular black holes and no-horizon spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 38, n. 8, p. 085010, 2021. Citado na página 96.
- 145 SINGH, D. V.; GHOSH, S. G.; MAHARAJ, S. D. Exact nonsingular black holes and thermodynamics. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 981, p. 115854, 2022. Citado na página 96.
- 146 KAZAKOV, D.; SOLODUKHIN, S. On quantum deformation of the schwarzschild solution. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 429, n. 1, p. 153–176, 1994. Citado na página 97.
- 147 KOCHERLAKOTA, P.; REZZOLLA, L. Accurate mapping of spherically symmetric black holes in a parametrized framework. *Physical Review D*, APS, v. 102, n. 6, p. 064058, 2020. Citado na página 97.
- 148 BAMBI, C.; STOJKOVIC, D. Astrophysical wormholes. *Universe*, MDPI, v. 7, n. 5, p. 136, 2021. Citado na página 97.
- 149 MORRIS, M. S.; THORNE, K. S.; YURTSEVER, U. Wormholes, time machines, and the weak energy condition. *Physical Review Letters*, APS, v. 61, n. 13, p. 1446, 1988. Citado na página 97.
- 150 VISSER, M.; KAR, S.; DADHICH, N. Traversable wormholes with arbitrarily small energy condition violations. *Physical review letters*, APS, v. 90, n. 20, p. 201102, 2003. Citado na página 97.

- 151 SIMPSON, A.; MARTIN-MORUNO, P.; VISSER, M. Vaidya spacetimes, black-bounces, and traversable wormholes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 36, n. 14, p. 145007, 2019. Citado na página 97.
- 152 ELLIS, H. G. Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 14, n. 1, p. 104–118, 1973. Citado na página 98.
- 153 BRONNIKOV, K. Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta. Phys. Pol.*, p. B4, 1973. Citado na página 98.
- 154 BARRIOLA, M.; VILENKIN, A. Gravitational field of a global monopole. *Physical Review Letters*, APS, v. 63, n. 4, p. 341, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 110.
- 155 HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. *The large scale structure of space-time*. [S.l.]: Cambridge university press, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 105 e 112.
- 156 SYNGE, J. L. *Relativity: the general theory*. 1960. Citado 2 vezes nas páginas 112 e 114.
- 157 ATAMUROTOV, F. et al. Weak gravitational lensing around bardeen black hole with a string cloud in the presence of plasma. *Symmetry*, MDPI, v. 15, n. 4, p. 848, 2023. Citado na página 121.
- 158 ZASLAVSKII, O. Regular black holes and energy conditions. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 688, n. 4-5, p. 278–280, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 134, 170, 232 e 260.
- 159 KONTOU, E.-A.; SANDERS, K. Energy conditions in general relativity and quantum field theory. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 37, n. 19, p. 193001, 2020. Citado 6 vezes nas páginas 135, 171, 193, 233, 260 e 261.
- 160 VISSER, M. Lorentzian wormholes. from einstein to hawking. *Woodbury*, 1995. Citado 5 vezes nas páginas 135, 171, 193, 233 e 261.
- 161 SOLENG, H. H. Correction to einstein’s perihelion precession formula from a traceless, anisotropic vacuum energy. *General relativity and gravitation*, Springer, v. 26, p. 149–157, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 145, 202 e 241.
- 162 SALGADO, M. A Simple theorem to generate exact black hole solutions. *Class. Quant. Grav.*, v. 20, p. 4551–4566, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 145, 203 e 241.
- 163 GIAMBO, R. Anisotropic generalizations of de Sitter space-time. *Class. Quant. Grav.*, v. 19, p. 4399–4404, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 145, 203 e 241.
- 164 DYMNIKOVA, I. Cosmological term as a source of mass. *Class. Quant. Grav.*, v. 19, p. 725–740, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 145, 203 e 241.
- 165 TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Black holes with a fluid of strings. *Annals Phys.*, v. 423, p. 168349, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 145, 203 e 241.
- 166 ZHANG, H.-X. et al. Bardeen black hole surrounded by perfect fluid dark matter. *Chin. Phys. C*, v. 45, n. 5, p. 055103, 2021. Citado na página 147.

- 167 WALD, R. M. The Thermodynamics of Black Holes. *Living Reviews in Relativity*, Albert Einstein Institut, v. 4, n. 1, p. 6, dec 2001. ISSN 2367-3613. Disponível em: <<http://physics.uchicago.edu/trel.html#Waldwww.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-6waldhttp://www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-6wald/.http://link.springer.com/10.12942/lrr-2001-6>>. Citado na página 152.
- 168 CUNHA, M. S. et al. Black strings from dark matter. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 453, p. 169324, 2023. Citado na página 153.
- 169 MORAIS, P. et al. Thermodynamics and remnants of kiselev black holes in rainbow gravity. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 54, n. 1, p. 16, 2022. Citado na página 153.
- 170 TOLEDO, J. d. M.; BEZERRA, V. The reissner–nordström black hole surrounded by quintessence and a cloud of strings: thermodynamics and quasinormal modes. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 28, n. 01, p. 1950023, 2019. Citado na página 153.
- 171 VISSER, M. Dirty black holes: Entropy versus area. *Physical Review D*, APS, v. 48, n. 2, p. 583, 1993. Citado na página 153.
- 172 KUBIZŇÁK, D.; MANN, R. B. P- v criticality of charged ads black holes. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2012, n. 7, p. 1–25, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 156 e 211.
- 173 GUNASEKARAN, S.; KUBIZŇÁK, D.; MANN, R. B. Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and born-infeld vacuum polarization. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2012, n. 11, p. 1–43, 2012. Citado na página 211.
- 174 WALD, R. M. The thermodynamics of black holes. *Living reviews in relativity*, Springer, v. 4, p. 1–44, 2001. Citado na página 212.
- 175 SINGH, D. V.; SIWACH, S. Thermodynamics and pv criticality of bardeen-ads black hole in 4d einstein-gauss-bonnet gravity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 808, p. 135658, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 212 e 213.
- 176 DAVIES, P. C. The thermodynamic theory of black holes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 353, n. 1675, p. 499–521, 1977. Citado na página 214.
- 177 LI, G.-Q. Effects of dark energy on p–v criticality of charged ads black holes. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 735, p. 256–260, 2014. Citado na página 216.
- 178 GHOSH, S. G.; SINGH, D. V.; MAHARAJ, S. D. Regular black holes in einstein-gauss-bonnet gravity. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 10, p. 104050, 2018. Citado na página 254.
- 179 SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften*, p. 189–196, 1916. Citado na página 256.