UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA DE CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM INDIRETA SIMPLES

SUZANA FERREIRA DA SILVA

João Pessoa – Paraíba

Setembro de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SUZANA FERREIRA DA SILVA

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA DE CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM INDIRETA SIMPLES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra Rogéria Gaudencio do Rêgo

João Pessoa – Paraíba

Setembro de 2024

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586a Silva, Suzana Ferreira da.
Análise combinatória : uma proposta de classificação de problemas de contagem indireta simples / Suzana Ferreira da Silva. - João Pessoa, 2024.
56 p.

Orientação: Rogéria Gaudencio do Rêgo.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Pensamento combinatório. 2. Classificação de problemas de contagem. 3. Ensino de matemática. I. Rêgo, Rogéria Gaudencio do. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

SUZANA FERREIRA DA SILVA

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA DE CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM INDIRETA SIMPLES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra Rogéria Gaudencio do Rêgo

Aprovado(a) em: 04 / 09 /2024.

BANCA EXAMINADORA

Rogéria Gaudencio do Rêgo

Profa. Dra Rogéria Gaudencio do Rêgo - UFPB
(Orientadora)

Prof. Dr Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB
(Avaliador)

Prof. Dr Vinicius Martins Varella - UFPB
(Avaliador)

Dedico este trabalho aos meus pais, cujo amor, apoio incondicional e exemplos de dedicação e perseverança sempre foram minha maior fonte de inspiração.
E ao meu esposo, que esteve ao meu lado em todos os momentos, compreendendo minhas ausências e me incentivando a alcançar meus objetivos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder a vida e por tudo que me permitiu conquistar até aqui, sem Ele e a sua constante proteção eu nada seria. E a Nossa Senhora por ser minha fiel intercessora e em toda minha trajetória acadêmica me permitir sentir a sua presença e o seu colo acolhedor nos momentos de maiores dificuldades.

Aos meus pais, Damiana e Reginaldo, por serem meu porto seguro, meus maiores incentivadores e por proporcionarem todos os meios para que eu tivesse sempre a melhor educação, sem eles e sem o seu amor incondicional, eu não teria chegado até aqui. Eles que em cada momento, mesmo estando longe, fizeram-se presentes, me apoiando em cada decisão, alegrando-se em minhas conquistas, e me acalmando nos momentos de aflição.

Ao meu irmão, Natan, por ser a criança do sorriso mais lindo e puro que conheço e alegrar cada um dos meus dias, o seu abraço demorado e apertado sempre que eu chegava de uma longa e cansativa viagem, foram sem dúvidas uma grande motivação durante minha caminhada.

Ao meu esposo, Rodrigo, por ser minha maior inspiração profissional, por todo incentivo, apoio e compreensão.

À professora Rogéria por todos os ensinamentos, por sua dedicação incansável e paixão pelo ensino de Matemática, por seu compromisso em tornar os conteúdos matemáticos acessíveis e envolventes, por todas as conversas que me fizeram crescer não só como profissional mas também como ser humano e por aceitar ser minha orientadora e desempenhado esse papel com maestria.

Aos professores Bruno e Vinicius pela participação na banca examinadora e por todas as valiosas contribuições. Foi uma honra contar com profissionais tão competentes e inspiradores ao longo desta jornada.

Aos demais professores do curso, pois cada um foi de grande importância e contribuiu significativamente para minha formação acadêmica.

Aos meus colegas de curso por todos os momentos vividos durante os últimos anos e por todas as experiências compartilhadas.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização dessa conquista.

RESUMO

É notório que uma parcela significativa de alunos enfrenta desafios consideráveis no contexto da disciplina de Matemática. Diante dessa realidade, torna-se imprescindível que os educadores adotem estratégias e abordagens pedagógicas que visem facilitar o ensino e a compreensão dos conteúdos matemáticos. Nessa perspectiva, o presente trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta de classificação de problemas de contagem indireta simples que possa contribuir para a facilitação do ensino e da aprendizagem da Análise Combinatória, além de analisar sua aplicação por estudantes de uma turma do terceiro ano do Novo Ensino Médio de uma escola estadual do Município de Quixaba, Pernambuco. Para a elaboração do trabalho, conduzimos uma pesquisa de natureza qualitativa, do tipo estudo de campo. Utilizamos um questionário que foi aplicado em duas etapas, cada uma constituída por sete problemas, nos quais os estudantes foram instruídos a classificá-los de acordo com suas características. Na primeira etapa, o questionário foi aplicado sem que a proposta fosse apresentada, enquanto na segunda etapa o mesmo foi aplicado posteriormente à apresentação e discussão da proposta. As bases teóricas deste trabalho emergiram das discussões de Núñez (2018), Handaya (2017), Pessoa e Borba (2010), Oliveira (2017), Rêgo (2023) e de outros autores que fundamentam suas pesquisas nos processos de ensino e aprendizagem e na classificação de problemas. Além disso, os documentos que orientam a definição dos currículos da Educação Básica no Brasil também foram importantes na sustentação teórica deste estudo. Os resultados obtidos demonstraram a potencialidade da proposta, com um aumento considerável no número de acertos após sua apresentação e com os comentários positivos dos estudantes, destacando que a proposta auxiliou na classificação dos problemas.

Palavras-chaves: Pensamento Combinatório; Classificação de problemas de contagem; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

It is well-known that a significant portion of students face considerable challenges in the context of the Mathematics discipline. Given this reality, it becomes imperative for educators to adopt strategies and pedagogical approaches aimed at facilitating the teaching and understanding of mathematical content. In this perspective, the present work aimed to present a proposal for the classification of simple indirect counting problems that could contribute to facilitating the teaching and learning of Combinatorial Analysis, in addition to analyzing its application by students in a third-year class of the New High School at a state school in the Municipality of Quixaba, Pernambuco. To carry out the work, we conducted qualitative research of the field study type. We used a questionnaire that was applied in two stages, each consisting of seven problems, in which students were instructed to classify them according to their characteristics. In the first stage, the questionnaire was applied without the proposal being presented, while in the second stage, it was applied after the presentation and discussion of the proposal. The theoretical foundations of this work emerged from the discussions of Núñez (2018), Handaya (2017), Pessoa and Borba (2010), Oliveira (2017), Rêgo (2023), and other authors who base their research on teaching and learning processes and problem classification. Additionally, the documents that guide the definition of the Basic Education curricula in Brazil were also important in providing theoretical support for this study. The results obtained demonstrated the potential of the proposal, with a considerable increase in the number of correct answers after its presentation and positive comments from students, highlighting that the proposal helped in classifying problems.

Key-words: Combinatorial Thinking; Classification of counting problems; Teaching of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS E GRÁFICOS

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

NEM – Novo Ensino Médio

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO - APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA DA PESQUISA

No presente Capítulo, inicialmente trazemos uma breve justificativa para escolha do tema do nosso trabalho, evidenciando as motivações para sua escolha e a nossa questão de investigação. Em seguida, enunciamos os objetivos geral e específicos e, por fim, apresentamos a estrutura do nosso texto.

1.1 JUSTIFICATIVA

A Matemática é uma ciência dinâmica e em constante evolução, que desafia o intelecto humano e estimula a criatividade. No contexto educacional, seu ensino e aprendizado podem desempenhar um papel crucial na formação de indivíduos críticos, capazes de analisar, raciocinar logicamente e tomar decisões devidamente fundamentadas.

Nessa perspectiva, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) afirma que:

> O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. (Brasil, 2018, p. 265).

Encontra-se incluído nesse conhecimento matemático, o raciocínio combinatório, que surge como uma abordagem cognitiva essencial ao analisar contextos nos quais é necessário organizar elementos de conjuntos específicos para atender critérios particulares, como seleção ou ordenação dos elementos.

Nesses casos, o que se busca determinar é o número total de agrupamentos possíveis, delimitados seja de forma direta (caracterizada pela determinação do número de elementos de um conjunto pequeno, permitindo a enumeração de cada elemento individualmente) ou indireta (caracterizada pela determinação da quantidade de elementos de um conjunto sem a necessidade de contar cada um separadamente) (Borba, Rocha e Azevedo, 2015).

Esse raciocínio se faz importante, uma vez que é utilizado em muitas situações do cotidiano em que precisamos fazer diferentes escolhas, como o planejamento de cardápios em restaurantes, organização de eventos, ao determinar as possíveis combinações de convidados em mesas, planejamento de viagens, ao selecionar entre diferentes rotas, meios de transporte e opções de hospedagem, entre outras situações, “e, também, aplicado a diversas áreas do conhecimento (tais como Biologia, Química, Estatística, Ciências da Computação dentre outras)” (Borba, Rocha e Azevedo, 2015, p. 2).

No entanto, nossas experiências durante o Ensino Básico como estudante, como também as experiências em momentos de desenvolvimento de Estágio Docente Supervisionado e em programas como o de Residência Pedagógica, nos permitiram perceber dificuldades quando se trata do ensino de Análise Combinatória, além de resistência por parte dos alunos em relação a esse conteúdo.

Suas dificuldades eram expressas principalmente em relação à sua capacidade de tratar da classificação de problemas, ao não saber identificar o tipo de agrupamento em cada questão. Assim, podemos afirmar que essa foi a motivação primordial para a elaboração deste trabalho.

Levantamos como hipótese, com base em nossas experiências citadas, que um dos principais fatores para essa desmotivação era o método de abordagem dos problemas combinatórios, que priorizava a memorização de fórmulas em detrimento do desenvolvimento do raciocínio dos estudantes. Embora muitos associassem as fórmulas aos tipos de problema, enfrentavam dificuldades ao classificar problemas que requeriam raciocínio combinatório.

Para entendermos o(s) porquê(s) dessas dificuldades em relação à classificação de problemas, visto que o pensamento combinatório deve ser trabalhado desde os primeiros anos do Ensino Básico (Brasil, 2018), buscamos fontes que tratassem sobre o assunto.

Com base nos estudos que encontramos e nas nossas experiências, fomos motivadas a desenvolver este trabalho, o qual esperamos que possa contribuir para o ensino de Análise Combinatória e em especial para facilitar a classificação de problemas de contagem indireta simples e contribuir para as discussões de outros trabalhos sobre o tema.

É essencial que os alunos se sintam motivados a aprender os conteúdos matemáticos, visto que através desse interesse podem apresentar pleno desenvolvimento de suas potencialidades na disciplina. Nesse sentido, cabe ao professor buscar estratégias que despertem a curiosidade e o entusiasmo dos educandos, incentivando sua participação ativa no processo de aprendizagem matemática (Matos, 2023).

Considerando a temática geral exposta, nosso trabalho tem como foco responder a seguinte questão de investigação: Estratégias de classificação de problemas de Análise Combinatória podem auxiliar o ensino desse conteúdo na Educação Básica?

1.2 OBJETIVOS

Com o intuito de responder nossa questão de investigação, nosso trabalho possui os seguintes objetivos:

1.2.1 Objetivo geral

- Avaliar uma proposta de classificação de problemas de contagem indireta simples.

1.2.2 Objetivos específicos

- Apontar o desempenho dos estudantes na identificação dos tipos de problemas sobre análise combinatória após a discussão e reflexão sobre a classificação dos problemas.
- Comparar os resultados dos problemas aplicados antes e depois da discussão e reflexão sobre a classificação de problemas relativos à aprendizagem de análise combinatória.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro, trazemos uma breve apresentação e justificativa para a seleção do nosso tema; delineamos a pergunta que guiou nossa pesquisa; e estabelecemos nossos objetivos gerais e específicos.

No segundo Capítulo trazemos o referencial teórico, e nele foram abordados elementos sobre o Ensino de Análise Combinatória, e sobre as principais dificuldades encontradas no ensino deste conteúdo; trouxemos recortes dos documentos oficiais, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que fazem referência ao pensamento combinatório; e tratamos da classificação de problemas, com foco para os problemas combinatórios. Ainda no mesmo Capítulo, apresentamos uma proposta para identificação da natureza de problemas de contagem indireta simples.

No terceiro Capítulo apresentamos a Metodologia utilizada no desenvolvimento deste trabalho; os sujeitos envolvidos na pesquisa; o procedimento da pesquisa; e o instrumento aplicado.

No quarto Capítulo apresentamos e discutimos os resultados do instrumento respondido pelos estudantes, fazendo uma análise comparativa dos resultados das duas etapas que o constituem. O texto é encerrado com nossas Considerações Finais.

2. O REFERENCIAL TEÓRICO DO TRABALHO

Neste Capítulo apresentamos inicialmente uma argumentação teórica acerca do ensino de Análise Combinatória. Em seguida, tratamos sobre como o pensamento combinatório aparece em documentos oficiais (Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1999) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2018)), e, por fim, discorremos sobre a classificação de problemas com ênfase em problemas combinatórios simples.

2.1 ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

O pensamento combinatório pode ser caracterizado como uma abordagem mental utilizada na análise de situações em que, a partir de conjuntos específicos, é necessário organizar seus elementos seguindo critérios de contagem específicos, que podem envolver escolha e/ou ordenação dos elementos. Nesse contexto, busca-se determinar, direta ou indiretamente, o total de agrupamentos possíveis (Borba, Rocha e Azevedo, 2015).

Segundo Mello (2017), esse pensamento se destaca como aquele que demanda maior flexibilidade e criatividade por parte dos estudantes, sendo essencial para desenvolver habilidades adaptativas frente a problemas matemáticos e situações do mundo real, o que é de grande importância para o mundo contemporâneo.

O ensino de Análise Combinatória não está ligado apenas ao desenvolvimento de habilidades matemáticas, mas de habilidades que poderão ser úteis na resolução de problemas de diferentes campos de conhecimento. Nessa perspectiva, Roa e Navarro-Pelayo (2001) afirmam que,

> [O]s problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, teoria dos números, a teoria dos autônomos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatória(Roa e Navarro-Pelayo (2001) apud Gonçalves, 2014, p.12).

No entanto, mesmo a Análise Combinatória contribuindo com diversas áreas e apresentando uma grande abrangência, ainda existe uma grande resistência em relação a este conteúdo, uma vez que, segundo Sabo (2010), muitos professores o consideram difícil de ser ensinado e de difícil compreensão por parte dos estudantes. Como resultado, alguns educadores optariam por focar em outros tópicos considerados por eles mais acessíveis, deixando de lado a Análise Combinatória.

Outra dificuldade frequentemente encontrada em relação ao ensino de Análise Combinatória reside na tendência de priorizar o uso de fórmulas em detrimento do estímulo ao raciocínio autônomo dos alunos. O resultado é uma abordagem didática que muitas vezes se torna excessivamente presa à repetição mecânica de procedimentos, prejudicando a compreensão mais aprofundada e a aplicação prática do conteúdo. Conforme Morgado (1991, p.3),

> A aprendizagem dos conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas (Morgado, 1991, p.3)

Portanto, a abordagem da Análise Combinatória em sala de aula deve privilegiar a resolução de situações-problema concretas (Sturm, 1999). É essencial que as fórmulas surjam naturalmente durante o processo de resolução, como resultado das experiências dos alunos, sendo construídas gradualmente ao longo do aprendizado ao invés de serem apresentadas de forma isolada.

Ademais, estudos já realizados constataram que uma das principais dificuldades no ensino da Análise Combinatória encontra-se no fato de existir uma ampla diversidade de problemas. Logo, muitos estudantes enfrentam obstáculos ao tentar compreender e aplicar seus conhecimentos para identificar os distintos tipos de agrupamentos relacionados à contagem (Handaya, 2017).

Durante as aulas, ao serem propostas questões relacionadas aos diferentes tipos de agrupamento, separadamente, o aluno consegue aplicar as fórmulas e chegar à solução, no entanto, quando esses diferentes tipos de problemas aparecem juntos em uma única atividade, por exemplo, os estudantes têm dificuldade em interpretar e realizar a identificação do agrupamento ao qual determinado problema faz parte (Oliveira, 2017).

Segundo Handaya (2017, p.1),

> [...] existe uma grande variedade de tipos de problemas. Em Análise Combinatória é preciso saber diferenciar os tipos como combinação, arranjo, permutação e seus subtipos. Isso assusta a qualquer um. Embora a maioria dos currículos escolares do Ensino Médio não aborde todos os tipos de problemas, o fato é que o aluno precisa saber diferenciar pelo menos os mais básicos e reconhecer o tipo correto de cada problema. (Handaya, 2017, p.1)

Logo, identificar e compreender as nuances entre os diferentes tipos de agrupamentos pode ser desafiador para os alunos, uma vez que cada tipo de agrupamento envolve critérios específicos de organização dos elementos. Portanto, é fundamental oferecer aos alunos estratégias e exemplos variados que os ajudem a desenvolver essa habilidade de discriminação e aprofundamento conceitual.

Não há uma abordagem única e definitiva para o ensino desse conteúdo, no entanto, é imperativo aprimorar abordagens pedagógicas de modo a instigar mudanças perceptíveis na forma como os alunos produzem o conhecimento. É crucial que o processo de aprendizagem seja concebido como uma construção genuína conduzida pelo aluno, permitindo que ele elabore conhecimentos matemáticos de maneira contextualizada e significativa. Isso propicia o desenvolvimento de um pensamento dedutivo e lógico, habilidades essenciais para resolver uma variedade de desafios ao longo da vida (Gonçalves, 2014).

2.2 PENSAMENTO COMBINATÓRIO NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Neste tópico iremos tratar acerca de como ideias relacionadas ao pensamento combinatório e, particularmente, aos procedimentos de contagem direta e indireta (Permutações; Arranjos e Combinações) são encontradas em documentos que são usados na definição dos currículos escolares da Educação Básica brasileira, destacando os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular.

2.2.1 PENSAMENTO COMBINATÓRIO NOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997; 1998) constituíram um conjunto de diretrizes que abarcavam todas as áreas do conhecimento educacional, com o propósito de orientar o trabalho docente na Educação Básica. Estes documentos foram organizados em diferentes segmentos: 1° Ciclo (1° e 2° séries do Ensino Fundamental), 2° Ciclo (3° e 4° séries do Ensino Fundamental), 3° Ciclo (5° e 6° séries do Ensino Fundamental), 4° Ciclo (7° e 8° séries do Ensino Fundamental) e Ensino Médio.

Embora não tivessem "força de lei", pois constituíram apenas diretrizes para o ensino, os PCN exerceram grande influência na definição de vários elementos vinculados à Educação Básica, como os sistemas nacionais de avaliação e os livros didáticos das disciplinas escolares. Nas capas desses livros era possível observar selos que informavam que eles estavam de acordo com as orientações desses documentos.

Nos PCN, a disciplina de Matemática para o Ensino Fundamental foi estruturada em quatro blocos temáticos: Números e Operações: Espaço e Forma: Grandezas e Medidas; e Tratamento da Informação. Os conteúdos relacionados ao pensamento combinatório estavam situados tanto no bloco de "Números e Operações", quanto no bloco "Tratamento da Informação".

No Quadro 01 estão organizados os Conteúdos Conceituais e Procedimentais do Ensino Fundamental, localizados nesses blocos, para cada ciclo de ensino, que remetem ao pensamento combinatório.

Quadro 01. Pensamento Combinatório nos PCN do Ensino Fundamental

Ciclo	Bloco	Conteúdos Conceituais e Procedimentais
1° ciclo (1ª e 2ª séries do Ensino Fundamental)	Números e operações	-Utilização de diferentes estratégias para quantificar elementos de uma coleção: contagem, pareamento, estimativa e correspondência de agrupamentos. -Contagem em escalas ascendentes e descendentes de um em um, de dois em dois, de cinco em cinco, de dez em dez, etc., a partir de qualquer número dado. -Organização em agrupamentos para facilitar a contagem e a comparação entre grandes coleções.
2° ciclo (3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental)	Tratamento da Informação	-Identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais.
3° ciclo (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)	Números e Operações	-Resolução de problemas de contagem, incluindo os que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de esquemas e tabelas.
	Tratamento da Informação	-Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias.
4° ciclo (7ª e 8ª séries do	Números e Operações	-Resolução de situações-problema de contagem, que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias

Ensino Fundamental)		variadas, como a construção de diagramas, tabelas e esquemas sem a aplicação de fórmulas.
	Tratamento da Informação	-Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.

Fonte: BRASIL, 1999, pp.50-57

Para o segmento do Ensino Médio, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), na área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, englobavam os conhecimentos e habilidades relacionados às disciplinas de Biologia, Física, Química e Matemática, apresentavam os saberes a serem explorados nesta última etapa da Educação Básica, além de elencar competências e habilidades a serem nela desenvolvidas pelos estudantes.

No Tema 3 da disciplina de Matemática, denominado “Análise de Dados”, na unidade temática “Contagem: princípio multiplicativo; problemas de contagem”, é possível localizar três habilidades que tratavam diretamente sobre o pensamento combinatório (Quadro 2).

Quadro 02. Pensamento Combinatório nos PCNEM

Unidade Temática	Habilidades
Contagem	- Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos. - Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem. - Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

Fonte: Brasil, 2002, p. 125

Diante do exposto, constatamos que os Parâmetros Curriculares Nacionais, tanto do Ensino Fundamental quanto do Médio, abordavam com certo destaque o pensamento combinatório na Educação Básica, apontando habilidades e competências que abordam esse conteúdo a serem desenvolvidas pelos estudantes.

2.2.2 PENSAMENTO COMBINATÓRIO NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) é um documento normativo que estabelece os conhecimentos, competências e habilidades essenciais mínimos que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica no Brasil. Ela define Competências gerais e específicas por área e Habilidades correspondentes, para as etapas da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, buscando garantir uma educação de qualidade e equidade em todo o país.

A BNCC orienta a elaboração dos currículos escolares pelos sistemas de ensino e pelas escolas, visando promover uma formação integral dos estudantes, alinhada com os desafios contemporâneos e as demandas da sociedade (Brasil, 2018). Pelo fato de serem indicados no documento as competências e habilidades mínimas que os estudantes precisam desenvolver ao longo da Educação Básica, os currículos nela baseados podem fazer complementações, incluindo aspectos relativos a especificidades locais.

No documento, a área de Matemática é subdividida em cinco Unidades Temáticas: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e Probabilidade e Estatística. Essas Unidades são abordadas em todos os anos do Ensino Fundamental, ou seja, do 1º ao 9º ano. Dentro de cada ano escolar, as áreas mencionadas são organizadas em torno de Objetos de Conhecimento, os quais são vinculados às Habilidades que os estudantes devem desenvolver.

No Quadro 3 trazemos as Habilidades vinculadas aos Objetos de Conhecimento de cada unidade temática, para cada ano do Ensino Fundamental, as quais citam direta ou indiretamente elementos referentes ao pensamento combinatório.

Quadro 03. Pensamento combinatório na BNCC do Ensino Fundamental

1º Ano do Ensino Fundamental – Unidade temática: Números	
Objeto de conhecimento	**Habilidades**
Contagem de rotina; Contagem ascendente e descendente; Reconhecimento de números no contexto diário: indicação de quantidades, indicação de ordem ou indicação de código para a organização de informações.	(EF01MA01) Utilizar números naturais como indicador de quantidade ou de ordem em diferentes situações cotidianas e reconhecer situações em que os números não indicam contagem nem ordem, mas sim código de identificação.

Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação	(EF01MA02) Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias como o pareamento e outros agrupamentos. (EF01MA03) Estimar e comparar quantidades de objetos de dois conjuntos (em torno de 20 elementos), por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois) para indicar "tem mais", "tem menos" ou "tem a mesma quantidade".
Leitura, escrita e comparação de números naturais (até 100)	(EF01MA04) Contar a quantidade de objetos de coleções até 100 unidades e apresentar o resultado por registros verbais e simbólicos, em situações de seu interesse, como jogos, brincadeiras, materiais da sala de aula, entre outros.
2º Ano do Ensino Fundamental – Unidade temática: Números	
Leitura, escrita, comparação e ordenação de números de até três ordens pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e papel do zero)	(EF02MA02) Fazer estimativas por meio de estratégias diversas a respeito da quantidade de objetos de coleções e registrar o resultado da contagem desses objetos (até 1000 unidades).
4º Ano do Ensino Fundamental – Unidade temática: Números	
Problemas de contagem	(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
4º Ano do Ensino Fundamental – Unidade temática: Grandezas e medidas	
Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas.	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.
5º Ano do Ensino Fundamental – Unidade temática: Números	
Problemas de contagem do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?"	(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.
8º Ano do Ensino Fundamental – Unidade temática: Números	
O princípio multiplicativo da contagem	(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
8º Ano do Ensino Fundamental – Unidade temática: Probabilidade e estatística	
Princípio multiplicativo da contagem	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo [...].

Fonte: Brasil, 2018, pp. 276-319

As habilidades a serem desenvolvidas nos primeiros anos do Ensino Fundamental concentram-se predominantemente na contagem direta, na qual os alunos aprendem a determinar a quantidade de elementos em conjuntos pequenos, permitindo a enumeração de cada elemento individualmente. Este enfoque é fundamental para estabelecer uma base sólida de compreensão numérica e habilidades de contagem.

À medida que os alunos avançam para os anos finais do Ensino Fundamental, as habilidades começam a se concentrar mais na contagem indireta, onde a determinação da quantidade de elementos de um conjunto é feita sem a necessidade de contar cada um separadamente. Este progresso gradual na complexidade das habilidades de contagem reflete uma evolução no pensamento matemático dos alunos, preparando-os para enfrentar problemas mais complexos e abstratos.

No Ensino Médio a área de Matemática e suas Tecnologias organiza-se centrada em cinco Competências Específicas:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p.531).

Para cada Competência Específica estão associadas Habilidades correspondentes que devem ser desenvolvidas pelos estudantes durante todo o Ensino Médio. Para o trabalho em questão foram destacados na Base

Nacional Comum Curricular apenas os conteúdos voltados para o desenvolvimento do pensamento combinatório, sejam eles citados de forma direta ou indireta.

No Quadro 04 apresentamos a competência específica e as habilidades vinculadas a ela, que tratam da Análise Combinatória no Ensino Médio.

Quadro 04. Pensamento Combinatório na BNCC do Ensino Médio.

Competência Específica 3	**Habilidades**
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

Fonte**:** Brasil, 2018, p. 537

Conforme delineado pela BNCC, o pensamento combinatório é uma competência matemática fundamental que deve ser desenvolvida desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. As Habilidades destacadas nos Quadros 03 e 04 remetem ao pensamento combinatório e constituem direito de aprendizagem dos estudantes, podendo ser ampliadas, mas nunca reduzidas.

Pesquisas como a de Roa e Navarro-Pelayo (2001) apontam que introduzir o conceito de Análise Combinatória nas séries iniciais do Ensino Fundamental por meio da exploração de diferentes agrupamentos, sem necessariamente formalizar o estudo, pode simplificar a abordagem desse tópico no Ensino Médio. Os alunos que encontram maior dificuldade com esse tema são, segundo os autores citados, aqueles que nunca foram expostos a ele nas etapas iniciais da educação.

Como podemos observar pelos elementos apresentados nas Habilidades, implícita ou explicitamente vinculadas ao pensamento combinatório, presentes na BNCC, a recomendação é explorar procedimentos de contagem direta e indireta desde os anos iniciais, ampliando-se a natureza dos agrupamentos a serem contados ao longo da Educação Básica, bem como a representação de suas quantidades.

Pessoa e Borba (2010) defendem a ideia de que o aprimoramento do raciocínio combinatório é um processo gradual, que se estende ao longo de um período prolongado, sendo influenciado por fatores tanto dentro quanto fora do ambiente escolar. Este desenvolvimento é perceptível desde os estágios iniciais da educação formal, onde são observadas estratégias que revelam diferentes níveis de compreensão, os quais evoluem ao longo do tempo graças a uma variedade de experiências, sejam elas educacionais ou não. Essas experiências contribuem para uma maior organização e formalização na compreensão dos diversos aspectos da Análise Combinatória.

2.3 CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS E CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

Segundo Núñez (2018), a prática de classificação constitui um processo cognitivo fundamental que visa ordenar e categorizar elementos, como processos, fenômenos, substâncias e objetos, com base em critérios determinados previamente. Esse procedimento envolve a identificação e comparação de características específicas, entre outros métodos, a fim de atribuir a cada elemento sua devida posição dentro de um grupo, classe ou categoria estabelecida. Para Núñez (2018, p.164)

> [...] a classificação permite agrupar objetos, fatos ou fenômenos de acordo com um ou vários critérios determinados. É importante, nesse procedimento, considerar o critério que o determina: forma, tamanho, elementos que o integram.
> A classificação de um conjunto de elementos tem duas propriedades: as classes resultantes de uma classificação são mutuamente excludentes, ou seja, os elementos se situam em uma ou outra classe. A classificação dos elementos de um conjunto deve ser extensiva a todos seus elementos; isso significa que o elemento deve pertencer a uma classe. (Núñez, 2018, p.164)

Assim, no processo de classificação, é crucial estar ciente de que cada elemento em análise deve ser vinculado exclusivamente a uma classe específica e que todos os elementos considerados pertencem a alguma classe. Esse princípio fundamental garante que a classificação seja precisa e abrangente, sem deixar margem para ambiguidades ou sobreposições entre as diferentes categorias.

Núñez (2018) traz em seu trabalho o que ele denomina de “Modelo de Classificação Invariante Operacional”, o qual apresenta uma sequência de passos a serem seguidos para classificar determinado elemento. São eles: “Identificar os objetos de estudo; selecionar os critérios ou fundamentos da classificação; comparar os objetos; e agrupar os objetos em diferentes classes segundo os critérios definidos” (Núñez, 2018, p.164).

Ou seja, primeiramente o que se deve fazer é identificar aquilo que vai ser classificado. Em seguida estabelecer os critérios que serão utilizados para classificar o objeto de estudo e compará-lo com outros objetos, observando suas particularidades e características comuns, para que, enfim, possa ser realizada a classificação do objeto e ele possa ser inserido em determinado grupo, de acordo com os critérios estabelecidos.

Nesse contexto, saber classificar os diferentes problemas combinatórios desempenha um papel fundamental no processo de resolução e compreensão dos mesmos, como defende Handaya (2017). Ao categorizar os problemas com base em suas características e estruturas subjacentes, os alunos podem desenvolver uma visão mais clara e organizada das diferentes abordagens e técnicas necessárias para sua solução. Além disso, a classificação permite identificar padrões e regularidades nos problemas, facilitando a aplicação de estratégias eficazes e a formulação de hipóteses sobre possíveis soluções.

Para Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), existem cinco tipos de problemas combinatórios. São eles: 1- Problemas de Existência: consistem em observar se para determinado problema existe ou não solução; 2- Problemas de Enumeração: consistem em fazer uma lista de todos os elementos que atendem a uma condição estabelecida; 3- Problemas de Contagem: consistem em determinar a quantidade de soluções para determinado problema, sem precisar fazer a listagem de todas as soluções; 4- Problemas de Classificação: consistem em identificar a natureza do problema a partir de critérios estabelecidos anteriormente e 5- Problemas de Otimização: consistem em encontrar as melhores condições para resolver o problema em questão.

Para Oliveira (2017), os problemas de análise combinatória são divididos em dois grupos, um deles possui os problemas que exprimem uma ideia de ordenação e outro os problemas que expressam a ideia de escolha. Ou seja,

> Sempre que de alguma maneira, o problema nos levar a ordenar n objetos em n lugares, este problema tratará de permutação. E se, de alguma forma, o problema nos levar a escolher uma determinada quantidade p dentre uma quantidade n de objetos, $p < n$, então este o problema tratará de arranjo ou combinação (Oliveira, 2017, p. 25).

Segundo a autora, os problemas de permutação requerem a ordenação de objetos em lugares específicos, onde o número de objetos é igual ao número de lugares disponíveis. Por outro lado, os problemas de arranjo e combinação envolvem a escolha de uma quantidade menor de objetos dentre um conjunto maior de objetos.

Para Pessoa e Borba (2010), os problemas que envolvem o pensamento combinatório são classificados em quatro tipos: Produto Cartesiano; Permutação; Arranjo e Combinação. As autoras definem esses tipos de agrupamentos da seguinte forma:

> **1) PRODUTO CARTESIANO:** “Dados dois (ou mais) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto. A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado. O que caracteriza estes problemas é que dois ou mais conjuntos disjuntos são combinados para formar um terceiro conjunto”
> **2) PERMUTAÇÃO:** “Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as permutações”
> **3) ARRANJO:** “Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **$0 < p < n$,** sendo **p** e **n** números naturais; A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que de um grupo maior alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades, sendo importante na composição das possibilidades”
> **4) COMBINAÇÃO: “**Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **$0< p < n$**, **p** e **n** naturais; A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. De forma semelhante aos problemas de arranjo, tem-se um conjunto

> maior e dele são selecionados elementos para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades" (Pessoa e Borba, 2010, p. 4-5).

Logo, pelas definições de Pessoa e Borba (2010), o que diferencia cada agrupamento é o número de conjuntos que serão apresentados inicialmente em cada problema; o número de elementos desse(s) conjunto(s), usados em cada subgrupo; e se a ordenação dos elementos implica na geração, ou não, de um novo agrupamento.

Uma vez que os problemas tratam de Produto Cartesiano, os elementos dos agrupamentos são tomados em dois ou mais conjuntos distintos, enquanto para os demais tipos de problemas (Permutação; Arranjo e Combinação), os agrupamentos são feitos a partir de apenas um conjunto.

Nos problemas de Permutação todos os elementos do conjunto de partida são usados em cada subgrupo, o que não acontece para os problemas de Arranjo e Combinação. Esses não usam todos os elementos do conjunto inicial em cada subgrupo e no primeiro a ordem como os elementos estarão dispostos importa, ou seja, mudanças na ordem dos elementos definem um novo subgrupo, já no segundo caso a ordem não importa.

Existem outras possíveis classificações para os problemas combinatórios. No presente trabalho, assim como nos estudos de Pessoa e Borba (2010), serão considerados os problemas de Produto Cartesiano, Permutação, Arranjo e Combinação, e os agrupamentos apresentados serão simples, sem repetição.

Para efeito de complementação, a seguir indicamos os passos a serem seguidos para se chegar à fórmula matemática de cada um desses tipos de problemas. Esses procedimentos podem ser encontrados em Rêgo (2023). No entanto, é fundamental enfatizar que muitos problemas de análise combinatória podem ser resolvidos sem a necessidade de classificação e, ainda mais crucial, sem a utilização de fórmulas.

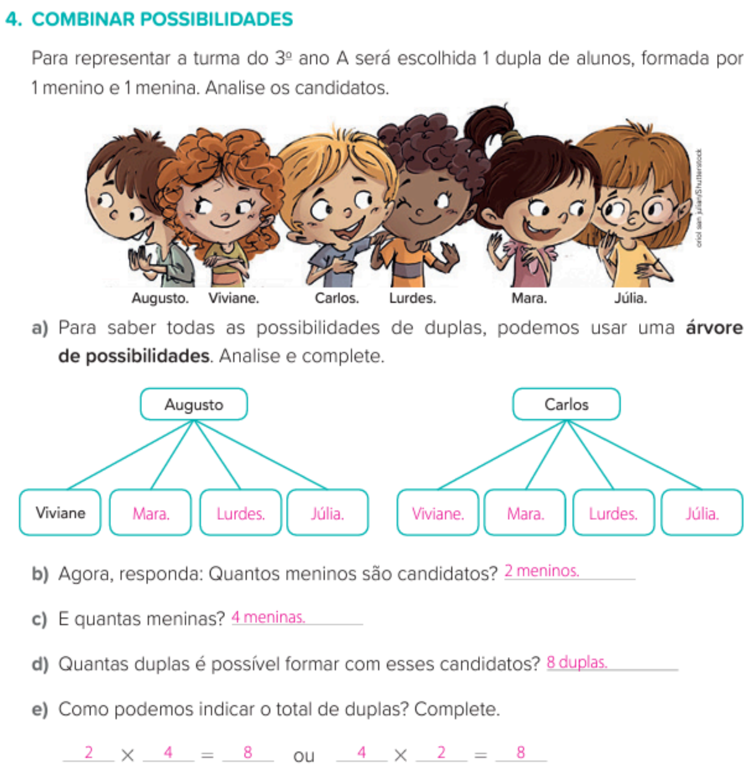
O uso de fórmulas deve ser reservado para situações em que as características essenciais de cada categoria estão bem definidas, levando em conta os critérios de seleção e a questão da ordem. Mesmo assim, o emprego de fórmulas só é justificado em problemas que não podem ser prontamente solucionados pelo Princípio Fundamental da Contagem (Rêgo, 2023).

O Princípio Fundamental da Contagem afirma que “Se um evento A puder ocorrer de m maneiras, um evento B puder ocorrer de n maneiras e A for independente de B, então a quantidade de maneiras em que os dois ocorrem simultaneamente, isto é, ao mesmo tempo, é m x n”. (Rêgo, 2023, p.10)

Já a definição de Produto Cartesiano é a seguinte: Se existem x elementos em um conjunto A e y elementos em um conjunto B e queremos saber todas as possíveis formas de combinar todos os elementos do primeiro conjunto com todos os elementos do segundo conjunto, teremos x elementos para a primeira escolha **e** y elementos para a segunda. Logo, PC(A x B) = x × y. A definição pode ser ampliada para qualquer número inicial de conjuntos.

Como exemplo de Produto Cartesiano podemos citar os problemas que estão presentes em livros didáticos de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, relacionados a uma das ideias associadas à multiplicação: a combinação (Figura 01).

Figura 01. Problema de multiplicação como combinação



4. COMBINAR POSSIBILIDADES

Para representar a turma do 3º ano A será escolhida 1 dupla de alunos, formada por 1 menino e 1 menina. Analise os candidatos.

Augusto. Viviane. Carlos. Lurdes. Mara. Júlia.

a) Para saber todas as possibilidades de duplas, podemos usar uma **árvore de possibilidades**. Analise e complete.

Augusto: Viviane, Mara., Lurdes., Júlia.

Carlos: Viviane., Mara., Lurdes., Júlia.

b) Agora, responda: Quantos meninos são candidatos? 2 meninos.

c) E quantas meninas? 4 meninas.

d) Quantas duplas é possível formar com esses candidatos? 8 duplas.

e) Como podemos indicar o total de duplas? Complete.

2 × 4 = 8 ou 4 × 2 = 8

Fonte: Dante e Viana, 2021, Vol.3, p.135

No problema temos dois conjuntos de partida: um formado por meninas e outro formado por meninos. A pergunta central a ser respondida é “Quantas duplas é possível formar com esses candidatos?”, considerando-se que cada dupla deve ser formada por uma menina e um menino.

No caso da Permutação Simples, que compreende a organização de agrupamentos formados por todos os elementos de um conjunto de partida, com elementos distintos, e cuja ordem dos elementos dos grupos importa, para calcular o número de agrupamentos que podemos formar com n elementos distintos a_1, a_2, a_3, ..., a_n, usamos o Princípio Multiplicativo, podendo raciocinar por meio do preenchimento de n casas vazias.

A primeira casa pode ser ocupada de n maneiras distintas; a segunda casa de n–1 maneiras distintas (excluindo-se das opções o elemento colocado na primeira casa); a terceira casa de n –2 maneiras distintas; (...) a n-ésima casa de duas maneiras distintas e a última casa de uma única maneira, logo, o número total de permutações distintas será: P(n) = n. (n-1).(n-2)...3.2.1 = n! (Rêgo, 2023).

No caso do Arranjo Simples, que corresponde aos agrupamentos que podem ser feitos com parte dos elementos distintos de um único conjunto de partida, cuja ordem nos agrupamentos, importa, denominando o número de arranjos de n objetos do conjunto (a_1, a_2, ... ,a_n), tomados de p em p, com p < n, organizamos a contagem usando o princípio multiplicativo, imaginando um conjunto de espaços vazios, correspondentes ao número de elementos que deve ter cada grupo: para escolher o elemento do primeiro espaço vazio temos n possibilidades: a_1, a_2, …,a_n; para qualquer um dos elementos escolhidos para o primeiro espaço há n-1 possibilidades de escolha para preenchermos o segundo espaço; para o terceiro espaço sobrarão n-2 possibilidades (pois temos que excluir os elementos que já ocupam os dois primeiros espaços); continuando esse procedimento, resulta que o número de possibilidades de escolher os p elementos é: A(n,p) = An,p = n ×(n -1)×(n - 2)×... ×(n - p +1) = n!/(n - p)! (Rêgo, 2023)

As combinações simples podem ser consideradas um tipo particular de arranjo simples, pois os agrupamentos formados nos arranjos são diferenciados pela ordem e pela natureza dos seus elementos. Na combinação simples esses arranjos seriam diferenciados apenas pela natureza de seus elementos, já que a ordem não importa.

Neste caso, dentre todos os A(n,p) arranjos com p elementos, existem p! desses arranjos com os mesmos elementos, assim, para obter a combinação de n elementos tomados p a p, deveremos dividir o número A(n,p) por p! para obter apenas o número de arranjos que contém conjuntos distintos, que é o que nos interessa, ou seja: C(n,p) = A(n,p) / p!. Como A(n,p) = n.(n -1).(n -2)...(n – p+1), então: C(n,p) = [n.(n -1).(n -2). …(n – p+1)] / p! . Multiplicando o numerador e o denominador por (n-p)! segue: C(n,p) = n! / p! (n-p)! (Rêgo, 2023)

Pesquisas realizadas por Oliveira (2017), mostraram que muitos estudantes expressaram encontrar desafios ao determinar qual dos tipos de agrupamentos citados anteriormente está envolvido em determinado problema, enfrentando obstáculos principalmente para diferenciar os problemas de arranjo dos problemas de combinação. Entretanto, a maioria afirmou ter habilidade para utilizar as fórmulas apropriadas e realizar os cálculos assim que o tipo de agrupamento é identificado.

2.4 UMA PROPOSTA PARA FACILITAR A IDENTIFICAÇÃO DA NATUREZA DE PROBLEMAS DE CONTAGEM INDIRETA SIMPLES

Considerando autores anteriormente citados, entendemos que, ao estudar o conteúdo de Análise Combinatória, uma das dificuldades dos estudantes é conseguir diferenciar os diferentes tipos de agrupamentos. Logo, no intuito de facilitar a classificação de problemas dessa natureza, desenvolvemos a proposta apresentada a seguir.

Com base nas definições de Pessoa e Borba (2010) para Permutação, Arranjo, Combinação e Produto Cartesiano e nos trabalhos de Oliveira (2014), identificamos que se faz necessária a realização de no máximo três perguntas na ordem apresentada a seguir, para ser possível classificar determinado problema de contagem indireta simples.

Primeira pergunta: Quantos são os conjuntos de partida? Caso a resposta seja um único conjunto de partida, o problema poderá ser de

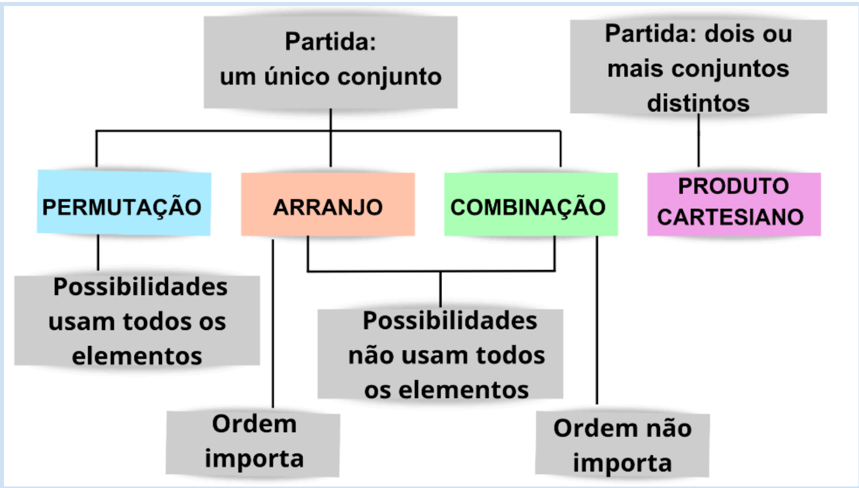
Permutação, ou de Arranjo, ou de Combinação. Caso a resposta seja dois ou mais conjuntos distintos de partida, o problema será de Produto Cartesiano.

Segunda pergunta: Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade? Caso a resposta seja SIM, o problema será de Permutação. Caso a resposta seja NÃO o problema poderá ser de Arranjo ou Combinação.

Terceira pergunta: A ordem como os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa (gera novas possibilidades)? Caso a resposta seja SIM, o problema é de Arranjo. Caso a resposta seja NÃO, o problema é de Combinação.

Para o estudante ter uma melhor visualização dos questionamentos que devem ser feitos para classificar determinado problema, elaboramos o esquema da Figura 02.

Figura 02. Esquema para classificação de problemas



Fonte: Elaborada pela autora (2024)

Nossa proposta consiste na realização das perguntas apresentadas e na utilização do esquema apresentado como ferramenta que poderá ser utilizada em sala de aula no auxílio à classificação de problemas combinatórios simples.

Vejamos, de forma mais detalhada, como realizar a aplicação da proposta a partir dos exemplos a seguir:

Exemplo 1: Quantos anagramas podemos formar com a palavra JORNAL?

Primeira pergunta: Quantos são os conjuntos de partida? Observamos que o conjunto de partida do problema são as letras da palavra JORNAL, logo, temos um único conjunto de partida. Portanto, o problema pode ou ser de Permutação, ou de Arranjo, ou de Combinação.

Segunda pergunta: Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade? Notamos que para formar cada anagrama da palavra JORNAL usaremos todas as letras, o que faremos é apenas uma transposição das mesmas. Concluímos assim, que o problema é de PERMUTAÇÃO e a terceira pergunta não precisará ser respondida.

Exemplo 2: Em uma escola, doze pessoas candidataram-se para ocuparem os cargos de diretor e vice-diretor. Existem quantas maneiras de fazer a escolha das pessoas que ocuparão esses cargos?

Primeira pergunta: Quantos são os conjuntos de partida? Notamos que o conjunto de partida do problema são as doze pessoas que se candidataram aos cargos. Então temos um único conjunto de partida. Logo, nosso problema será de Permutação, ou de Arranjo, ou de Combinação.

Segunda Pergunta: Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade? Observamos que em cada possibilidade de escolha teremos um diretor e um vice-diretor, ou seja, em cada possibilidade teremos duas pessoas das doze que se candidataram. Então, não usamos todos os elementos do conjunto em cada possibilidade. Portanto, nosso problema será de Arranjo ou Combinação.

Terceira pergunta: A ordem como os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa (gera novas possibilidades)? Observamos que uma diretoria que possui João como diretor e Maria como vice-diretora é diferente de uma diretoria que possui Maria como diretora e João como vice-diretor. Portanto, a ordem como os elementos estarão posicionados em cada possibilidade de escolha, importa. Assim, temos um problema de ARRANJO.

Exemplo 3: Em uma seleção para compor o time de futebol de um colégio houve vinte inscrições. Após a aplicação dos testes físicos, o treinador precisará escolher onze jogadores para compor o time. De quantos modos distintos a escolha poderá ser feita?

Primeira pergunta: Quantos são os conjuntos de partida? Notamos que o conjunto de partida do problema são as vinte pessoas que se inscreveram.

Então temos um único conjunto de partida. Logo, nosso problema será ou de Permutação, ou de Arranjo, ou de Combinação.

Segunda Pergunta: Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade? Observamos que para cada possibilidade de time escolhido teremos apenas onze jogadores, ou seja, em cada possibilidade onze dos vinte inscritos serão escolhidos, logo, em cada agrupamento não estarão todos os elementos do conjunto de partida. Portanto, nosso problema será de Arranjo ou Combinação.

Terceira pergunta: A ordem como os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa (gera novas possibilidades)? Notamos que o time formado pelos jogadores A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K será igual ao time formado pelos jogadores D, C, E, A, B, G, H, J, F, K e I; houve apenas uma mudança na ordem em que eles estão colocados, mas o time formado é o mesmo. Ou seja, a mudança na ordem dos elementos não gerou novas possibilidades. Portanto, a ordem não importa. Logo o problema será de COMBINAÇÃO.

Exemplo 4: Em um hotel existem três portões de entrada que dão para um saguão onde possuem seis elevadores. Um hóspede deverá se dirigir ao décimo andar utilizando-se um dos elevadores. De quantos modos diferentes ele poderá fazer seu trajeto desde a entrada do hotel e utilizando um dos elevadores?

Primeira pergunta: Quantos são os conjuntos de partida? Observamos que no problema em cada possibilidade de trajeto que o hóspede possui, ele deverá fazer duas escolhas: a porta de entrada e o elevador. Notamos que cada uma dessas escolhas estará associada a um conjunto de partida diferente, para escolha da porta de entrada ele deverá escolher um elemento no conjunto das portas de entrada e para escolha do elevador ele deverá escolher um elemento no conjunto formado por todos os elevadores. Portanto, temos dois conjuntos de partida, logo, o problema é de PRODUTO CARTESIANO e a segunda e terceira pergunta não precisarão ser respondidas.

Considerando o exposto, percebemos que a identificação do tipo de problema de Análise Combinatória pode ser realizada por meio das perguntas apresentadas. Quando o problema está relacionado a um Produto Cartesiano, sua identificação pode ser prontamente feita já na primeira pergunta. No caso de problemas que envolvem Permutação, é suficiente realizar a primeira e a segunda pergunta para determinar sua classificação. No entanto, para identificar problemas de Arranjo e Combinação, torna-se necessário realizar as três perguntas propostas.

3. METODOLOGIA DA PESQUISA

Para atingirmos nossos objetivos, optamos por uma abordagem predominantemente qualitativa em nossa pesquisa. Esse enfoque se justifica pelo fato de que não estamos interessados em aspectos que possam ser tratados estatisticamente, mas sim em uma análise mais profunda que se concentra na compreensão e interpretação dos dados coletados (Jezine, 2007).

Nossa pesquisa se enquadra no tipo estudo de campo, conforme os procedimentos de coleta de dados. Esse método implica em buscar informações diretamente junto à população alvo da pesquisa, possibilitando uma investigação mais direta e contextualizada do tema (Jezine, 2007).

3.1 OS SUJEITOS DA PESQUISA

A seleção dos participantes da pesquisa foi feita por conveniência, abrangendo um total de 32 estudantes matriculados em uma turma do 3° Ano do Novo Ensino Médio (NEM) de uma escola estadual situada no município de Quixaba, no interior do estado de Pernambuco, onde residimos. A pesquisa foi realizada com a autorização da Direção da escola e do professor de Matemática que leciona nas turmas.

3.2 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA E INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

Como procedimento metodológico para coleta de dados, foi aplicado um questionário elaborado pela pesquisadora. O questionário era composto por sete problemas objetivos de natureza combinatória simples, nos quais os estudantes foram solicitados a classificar cada um deles. Vale destacar que não estava sendo solicitado que encontrassem as respostas das questões, mas que apenas indicassem qual entendiam ser sua natureza. Cada problema apresentava quatro opções de resposta: Permutação; Arranjo; Combinação; e Produto Cartesiano, sendo que apenas uma das alternativas classificaria corretamente o problema.

A aplicação do questionário ocorreu em duas etapas distintas. Na primeira etapa, os estudantes responderam o questionário sem que a proposta de classificação de problemas de natureza combinatória, desenvolvido neste trabalho, fosse apresentada. O objetivo dessa etapa foi identificar as principais dificuldades encontradas pelos alunos apenas com base nos conhecimentos adquiridos até o momento da pesquisa.

Fornecemos aos estudantes 30 minutos para responderem às questões, e solicitamos que as resolvessem individualmente. Cada aluno foi instruído a criar um código composto por três letras e três algarismos, em qualquer ordem, e a anotá-lo na folha da primeira etapa. Após isso, recolhemos as respostas, garantindo que durante a aplicação da segunda etapa os alunos não tivessem acesso às respostas da primeira.

A segunda etapa ocorreu imediatamente após a entrega das respostas da primeira parte do questionário, quando a proposta de classificação desenvolvida neste trabalho foi apresentada aos estudantes, que foram solicitados a responder novamente às mesmas questões. Nessa etapa, os alunos utilizaram não apenas os conhecimentos adquiridos nos anos anteriores, mas também a proposta apresentada. Além disso, após o enunciado de cada questão, foram inseridas as três perguntas, conforme proposta do estudo, com o intuito de orientar a classificação dos problemas.

Mais uma vez, concedemos 30 minutos para os alunos responderem às questões. A resolução deveria ser feita individualmente, e cada aluno deveria usar o mesmo código informado na folha da primeira etapa na folha da segunda. Isso permitiu que identificássemos suas respostas nas duas etapas e pudéssemos compará-las, já que os estudantes não se identificaram pelo nome.

A primeira questão tinha o seguinte enunciado: “Quantos são os anagramas da palavra TESOURA?”, a resposta esperada era que o problema trata-se de uma PERMUTAÇÃO. Teve como objetivo verificar se o estudante identifica que existe um único conjunto de partida, sendo as letras da palavra TESOURA, e cada anagrama da palavra irá usar todas as letras, ou seja, em cada possibilidade são usados todos os elementos.

A segunda questão foi: “Um shopping possui 4 portões de entrada e 5 andares de estacionamento. De quantas maneiras diferentes um motorista poderá entrar no shopping escolhendo um dos portões e deixando seu carro em um dos andares de estacionamento?”, a resposta esperada era que o tipo de agrupamento em questão é dado por um PRODUTO CARTESIANO. Seu objetivo era que o aluno identificasse que existem dois conjuntos de partida diferentes, uma vez que para o motorista entrar no shopping ele precisa escolher um portão de entrada no conjunto dos portões e um andar do estacionamento no conjunto dos andares.

A terceira questão foi: “Quantas senhas de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 4, 6, 7 e 9?”, a resposta esperada era que o problema trata-se de um ARRANJO. Teve como objetivo verificar se o estudante identifica que existe um único conjunto de partida, neste caso, o conjunto formado pelos números 1, 3, 4, 6, 7 e 9; que não são utilizados todos os elementos em cada possibilidade, visto que existem seis números disponíveis, mas cada senha irá utilizar apenas quatro deles, e que a ordem como os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa, uma vez que a senha 1346 é diferente da senha 3146.

A quarta questão foi: “Um professor está selecionando estudantes para formar um time de cinco jogadores interessados em jogar futebol de salão e conseguiu que 35 alunos se inscrevessem. Assim, de quantas maneiras diferentes ele poderá formar esse time?”, a resposta esperada era que o problema trata-se de uma COMBINAÇÃO. Teve como objetivo verificar se o estudante identifica que existe um único conjunto de partida, neste caso, o conjunto formado pelos alunos que se inscreveram; que em cada possibilidade de time estarão apenas cinco dos trinta e cinco inscritos e que a ordem dos jogadores em cada time não importa, isto é, um time formado pelos jogadores A, B, C, D, e E é igual ao time formado pelos jogadores D, B, E, C e A.

A quinta questão foi: “Uma associação de moradores de um condomínio possui 20 membros. A direção dessa associação é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma direção?”, a resposta esperada era que agrupamento em questão é dado por um ARRANJO. A questão teve como objetivo verificar se o estudante identifica que existe um único conjunto de partida, neste caso, os vinte membros da associação, que em cada possibilidade de direção apenas quatro dos vinte membros participarão, e que a ordem como eles estarão em cada direção importa, uma vez que uma direção que possui o membro A como presidente, o membro B como vice-presidente, o membro C como secretário e o membro D como tesoureiro é diferente de uma direção que possui o membro B como presidente, o membro C como vice-presidente, o membro A como tesoureiro e o membro D como secretário.

A sexta questão foi: “Mariana possui 5 livros de romance, 2 livros de poesia e 1 livro de ficção. De quantas maneiras diferentes Mariana poderá organizar seus livros em uma estante?”, a resposta esperada era que o problema, trata-se de uma PERMUTAÇÃO. Teve como objetivo verificar se o estudante identifica que existe um único conjunto de partida, neste caso, os oito livros que Mariana possui, e que cada possibilidade de organização irá utilizar todos os livros.

A sétima questão foi: “Pedro chega a uma lanchonete e deseja comer uma tapioca com dois recheios. Sabendo que a lanchonete dispõe dos seguintes recheios: carne de sol, queijo, presunto, bacon, frango, ovo e atum. De quantas maneiras diferentes Pedro poderá montar sua tapioca?”, a resposta esperada era que o problema trata-se de uma COMBINAÇÃO. Teve como objetivo verificar se o estudante identifica que existe um conjunto de partida, neste caso, o conjunto formado pelos sete recheios; que em cada tapioca serão utilizados apenas dois dos sete recheios, e que a ordem não importa, isto é, uma tapioca que possui como recheios frango e bacon é igual uma tapioca com recheios de bacon e frango.

Nessa etapa foi acrescentada uma questão subjetiva com o seguinte enunciado: “O uso da proposta apresentada facilitou a classificação dos problemas?”. O objetivo desta questão foi avaliar a percepção dos alunos sobre a eficácia da proposta apresentada, buscando entender se ela realmente contribuiu para facilitar a classificação dos problemas.

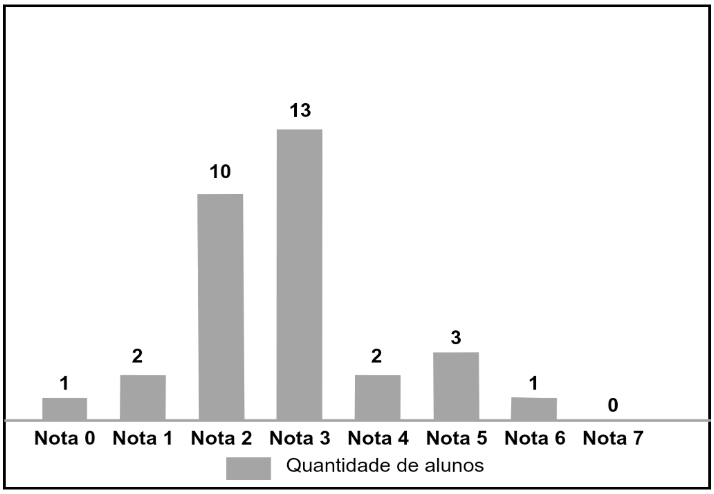
4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste Capítulo, apresentamos e discutimos os resultados da aplicação do nosso questionário, o qual foi realizado em duas etapas distintas. Inicialmente, destacamos os resultados obtidos na primeira etapa do questionário. Em seguida, discorremos sobre como a proposta desenvolvida neste trabalho foi apresentada aos estudantes. Por fim, trazemos os resultados obtidos na segunda etapa do questionário.

4.1 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA 1° ETAPA DO QUESTIONÁRIO

Na primeira etapa do questionário, solicitamos aos estudantes que classificassem os problemas das questões 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 com base no que lembravam do conteúdo estudado nos anos anteriores. Atribuímos uma nota de 0 a 7 a cada estudante (Gráfico 01), de modo que cada problema classificado corretamente recebia um ponto, enquanto os problemas classificados incorretamente recebiam zero pontos.

Gráfico 01. Notas dos estudantes na 1° Etapa



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Analisando o Gráfico 01 podemos concluir que as notas com as maiores frequências foram 3 e 2, respectivamente. O resultado não surpreende, pois, como afirmou Handaya (2017), uma das principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes em análise combinatória é distinguir os diferentes tipos de problemas.

Apesar do conteúdo já ter sido trabalhado em sala de aula, percebemos que o número de acertos foi muito baixo. Os maiores números de erros concentraram-se nas questões de Produto Cartesiano, Arranjo e Combinação, assim como observado nos trabalhos de Oliveira (2017).

Portanto, considerando as notas obtidas na 1ª Etapa, a média aritmética das notas da turma nesta etapa foi aproximadamente 2,8. É válido ressaltar também que, nesta etapa, nenhum estudante conseguiu classificar corretamente os sete problemas.

4.2 FASE DA APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA DESENVOLVIDA

Imediatamente após a aplicação da 1ª Etapa do questionário, a proposta desenvolvida neste trabalho, que visa facilitar a classificação de problemas de natureza combinatória, foi apresentada aos estudantes. Explicamos à turma que cada tipo de problema possui características específicas, o que é essencial para sua classificação, conforme destacado por Núñez (2018). Essas características podem ser discernidas seguindo as três perguntas centrais da proposta.

Os problemas de Produto Cartesiano podem ser identificados logo na primeira pergunta: "Quantos são os conjuntos de partida?", pois a principal característica desses problemas é que eles envolvem dois ou mais conjuntos distintos.

Os problemas de Permutação podem ser reconhecidos na segunda pergunta: "Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade?", já que esses problemas requerem que todos os elementos do conjunto inicial estejam presentes em cada agrupamento formado.

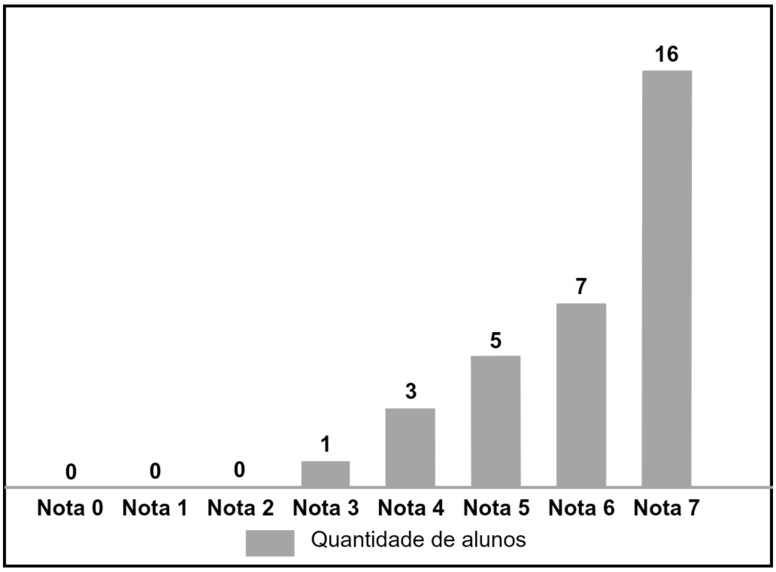
Por fim, os problemas de Arranjo e Combinação são identificados e diferenciados na terceira pergunta: "A ordem como os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa (gera novas possibilidades)?". Nos problemas de Arranjo, a ordem é importante, enquanto nos problemas de Combinação, a ordem não importa.

Durante a explicação da proposta, os estudantes puderam tirar suas dúvidas e mostraram-se bastante interessados, afirmando que nunca haviam estudado uma metodologia que facilitasse a identificação de cada tipo de problema.

4.3 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA 2° ETAPA DO QUESTIONÁRIO

Na segunda etapa do questionário, após apresentar a proposta desenvolvida neste trabalho aos estudantes, solicitamos que classificassem novamente os sete problemas apresentados na primeira etapa, desta vez utilizando a metodologia proposta como base. Cada aluno recebeu uma pontuação de 0 a 7 (Gráfico 02), conforme os mesmos critérios utilizados na primeira etapa.

Gráfico 02. Notas dos estudantes na 2° Etapa



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Observamos que as notas mais frequentes na segunda etapa foram 7 e 6, respectivamente, sugerindo um melhor desempenho por parte dos estudantes na classificação dos problemas. Além disso, a média aritmética das notas nessa etapa foi aproximadamente 6,1, indicando um aumento geral no acerto das classificações em comparação com a etapa anterior.

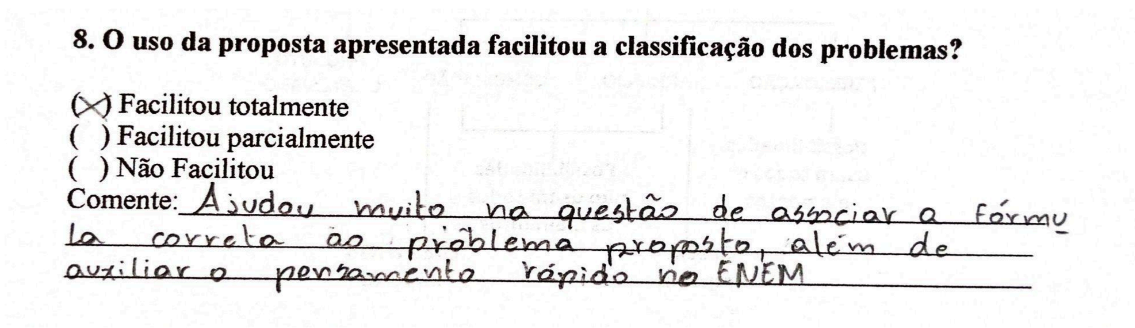
Destacamos que um total de 16 estudantes alcançaram a nota máxima de sete, o que não aconteceu na etapa anterior, esse número equivale à metade dos participantes, o que revela uma melhoria significativa no desempenho.

Para avaliar a percepção dos alunos sobre a eficácia da proposta apresentada, na segunda etapa do questionário introduzimos uma questão subjetiva, a Questão 8. Nela, os alunos foram solicitados a indicar se a proposta facilitou totalmente, facilitou parcialmente ou não facilitou a classificação dos problemas, além de fornecerem um comentário a respeito.

Dos 32 estudantes que participaram da pesquisa, nenhum indicou que a proposta não tenha facilitado a classificação dos problemas, enquanto seis estudantes mencionaram que a proposta facilitou parcialmente, e 26 estudantes afirmaram que a proposta facilitou totalmente.

Nas Figuras 03, 04 e 05 apresentamos recortes dos comentários de alguns estudantes, permitindo uma análise mais detalhada das percepções individuais em relação à proposta e sua influência na abordagem dos problemas.

Figura 03. Resposta 1 para a questão sobre a eficácia da proposta


8. O uso da proposta apresentada facilitou a classificação dos problemas?

(X) Facilitou totalmente
( ) Facilitou parcialmente
( ) Não Facilitou
Comente: Ajudou muito na questão de associar a fórmu
la correta ao problema proposto, além de
auxiliar o pensamento rápido no ENEM

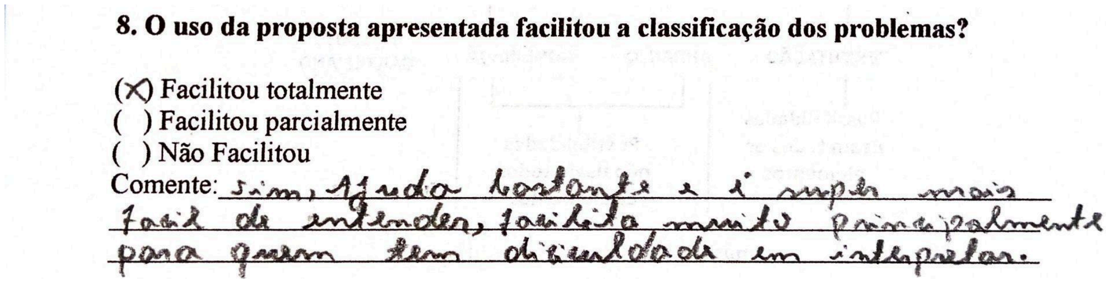
Fonte: Dados da pesquisa (2024)

No comentário evidenciado na Figura 03, o aluno destaca que a proposta facilita na identificação da fórmula adequada para cada problema, uma dificuldade comumente observada, como apontado por Oliveira (2017), quando diferentes tipos de problemas são apresentados em uma mesma atividade.

Além disso, o estudante ressalta a agilidade proporcionada pela proposta, particularmente relevante em avaliações como o Exame Nacional do

Ensino Médio (ENEM), que demandam uma resposta rápida e eficiente por parte do aluno. Essa observação sugere que a proposta não apenas melhora a compreensão dos problemas, mas também auxilia os estudantes no enfrentamento de desafios similares em situações de avaliação padronizada.

Figura 04. Resposta 2 para a questão sobre a eficácia da proposta



8. O uso da proposta apresentada facilitou a classificação dos problemas?

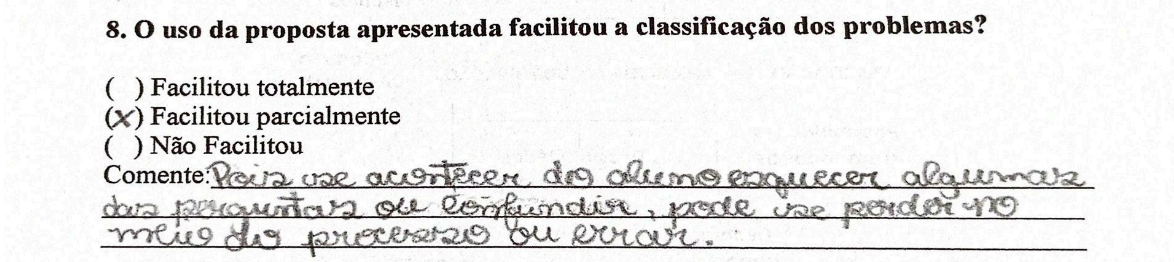
(X) Facilitou totalmente
( ) Facilitou parcialmente
( ) Não Facilitou
Comente: sim, ajuda bastante e é super mais fácil de entender, facilita muito principalmente para quem tem dificuldade em interpretar.

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

O estudante, cuja resposta está evidenciada na Figura 04, ressalta a contribuição da proposta no processo de interpretação dos problemas, enfatizando a importância desse aspecto para a classificação adequada. Essa observação está alinhada com a análise de Núñez (2018), que destaca a interpretação como uma etapa crucial para a correta classificação dos problemas, permitindo sua inclusão em categorias específicas. Essa percepção enfatiza a relevância da proposta não apenas na aplicação direta das fórmulas, mas também na compreensão do contexto e na identificação dos elementos essenciais para a resolução dos problemas.

Na Figura 05 destacamos o comentário de um estudante para exemplificar a justificativa de quem indicou que a proposta facilitou parcialmente o processo de classificação dos problemas apresentados.

Figura 05: Resposta 3 para a questão sobre a eficácia da proposta



8. O uso da proposta apresentada facilitou a classificação dos problemas?

( ) Facilitou totalmente
(X) Facilitou parcialmente
( ) Não Facilitou
Comente: Pois se acontecer do aluno esquecer algumas das perguntas ou confundir, pode se perder no meio do processo ou errar.

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

O comentário destacado na figura 05 reflete a preocupação do aluno quanto à possibilidade de se atrapalhar e cometer erros por esquecer ou confundir algumas perguntas durante o processo. Sua preocupação diz respeito à associação do processo de aprendizagem com a prática de memorização, enfatizado no ensino de Matemática, como lembram Sartori e Duarte (2021).

Com este comentário o aluno reforça a importância de o professor adotar estratégias que facilitem a compreensão dos conteúdos, conforme discutido por Matos (2023), sem que o foco seja a memorização de regras ou procedimentos. Nesse contexto, a prática regular da proposta pode ser crucial para consolidar sua aplicação.

Portanto, com base no desempenho observado dos estudantes durante a 2ª Etapa e nas respostas fornecidas nas Figuras 03 e 04, as quais representam a percepção predominante dos participantes, é possível concluir que a proposta elaborada neste estudo mostrou-se potencialmente eficaz na classificação de problemas de contagem indireta simples.

Esses resultados indicam que as intervenções e metodologias adotadas podem ajudar a aprimorar a capacidade de classificação dos problemas de contagem indireta simples pelos alunos. Isso reforça a afirmação de Matos (2023) de que é fundamental que o educador desenvolva estratégias que facilitem o aprendizado de seus alunos e estimulem sua curiosidade e entusiasmo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa teve como principal objetivo propor uma estratégia que simplificasse a classificação de problemas combinatórios simples e avaliá-la quando aplicada com estudantes de uma turma do 3º Ano do Novo Ensino Médio. Evidenciamos que o desempenho dos alunos na segunda etapa do questionário apresentou melhoria, com notas mais altas e uma média geral mais elevada. Esse aumento no acerto das classificações sugere que a proposta foi capaz de auxiliar os alunos nessa tarefa.

Além dos resultados quantitativos, as respostas subjetivas dos estudantes também corroboram a eficácia da proposta. Os comentários destacam a contribuição da metodologia para a identificação ,da natureza dos problemas de contagem indireta simples, o que, para os estudantes, facilitaria a aplicação adequada de fórmulas e a resolução dos problemas, enfatizando sua importância no processo de aprendizagem. Essa percepção dos alunos reforça a relevância de desenvolver abordagens pedagógicas que promovam não apenas a aplicação de fórmulas, mas também a compreensão do contexto dos problemas e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Diante desses resultados, podemos concluir que o presente estudo cumpriu seu objetivo de propor uma metodologia para facilitar a classificação de problemas de contagem indireta simples no Ensino Médio. Essa experiência nos proporcionou *insights* valiosos sobre o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de Matemática, destacando a importância de abordagens pedagógicas que estimulem a participação ativa dos alunos e promovam uma compreensão mais profunda dos conceitos.

A pesquisa conduzida neste trabalho marcou nossa primeira experiência nesse campo e despertou o interesse em continuar explorando estratégias pedagógicas inovadoras para o ensino de Matemática. Futuros estudos sobre o tema podem se dar na direção de ampliar a investigação, considerando um novo passo no processo, constituído pela resolução das questões, após sua classificação.

Como informamos na apresentação da Metodologia de nossa pesquisa, a proposta que elaboramos visa apenas facilitar a classificação de problemas de contagem indireta simples, mas não verificamos o quanto essa capacidade de classificação poderia facilitar a resolução de cada problema.

Outra perspectiva possível de investigação poderia se dar considerando-se como participantes estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática ou professores que ensinam Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. A investigação poderia se limitar ao uso de nossa proposta e/ou ser ampliada incluindo-se a resolução das questões, com análise de erros, estratégias de solução e dificuldades encontradas.

REFERÊNCIAS

BORBA, R. E. S. R; ROCHA, C. A; AZEVEDO, J. **Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** para o Ensino Médio. Brasília, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DANTE, L. R; VIANA, F. **Ápis Mais Matemática**. Vol.3. São Paulo: Ática, 2021.

FEITOSA, R. A; SILVA, S. A. **Metodologias emergentes na pesquisa em ensino de ciências**. p. 151-170, 2018.

GONÇALVES, R. R. S. **Uma abordagem alternativa para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio**, 2014.

HANDAYA, A. **Uma reflexão sobre a dificuldade de aprendizagem de análise combinatória**. Revista Sinergia, p. 13-17, 2017.

JEZINE, E. **Metodologia do Trabalho Científico**, Editora UFPB, p. 49-93, 2007.

MATOS, A. B. **Didática na Matemática**. GESTÃO & EDUCAÇÃO, p. 17 a 24, 2023.

MELLO, H. **Desmistificando o ensino de análise combinatória**. Rio de Janeiro, 2017.

OLIVEIRA, G. F. **Ensino de análise combinatória: como classificar problemas**. 2017.

PESSOA, C. A. S; BORBA, R. E. S. R. **O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica**. EM TEIA-Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 2010.

RÊGO, R. G. **Pensamento Combinatório**, 2023. (Notas de aula – Tratamento da Informação, DM/CCEN/UFPB).

SABO, R. D. et al. **Saberes docentes: a análise combinatória no ensino médio,** 2010.

SARTORI, A.S.T; DUARTE, C.G. **Repetir, Memorizar, Recitar: Mecanismos para a Fabricação de Corpos Dóceis pela Educação Matemática**. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática (JIEEM), v.14, n.1, p.

84-91, 2021. Disponível em: <
https://jieem.pgsscogna.com.br/jieem/issue/view/435>. Acesso em 15 jul 2024.

STURM, W. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa**, 1999. Tese de Doutorado. [sn].

APÊNDICE 1: QUESTIONÁRIO

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O instrumento em questão tem por objetivo obter informações junto aos estudantes do 3° ano do Ensino Médio de uma escola estadual, localizada no município de Quixaba-PE, as quais servirão como base para o desenvolvimento do trabalho de Conclusão de Curso (TCC) de Suzana Ferreira da Silva, discente concluinte do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba.

Informamos que você não precisa se identificar, apenas responder ao que é proposto, sabendo que sua resposta é de grande importância e contribuirá de forma significativa para a construção deste trabalho.

Desde já agradecemos pela sua participação!

1° ETAPA

Segundo Pessoa e Borba (2010) os problemas que envolvem o raciocínio combinatório são classificados em quatro tipos: Produto Cartesiano; Permutação; Arranjo e Combinação.

Questão: com base nos seus conhecimentos classifique os problemas a seguir em Permutação, Arranjo, Combinação ou Produto Cartesiano.

1. Quantos são os anagramas da palavra TESOURA?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

2. Um shopping possui 4 portões de entrada e 5 andares de estacionamento. De quantas maneiras diferentes um motorista poderá entrar no shopping escolhendo um dos portões e deixando seu carro em um dos andares de estacionamento?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

3. Quantas senhas de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1,3,4,6,7 e 9?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

4. Um professor está selecionando estudantes para formar um time de cinco jogadores interessados em jogar futebol de salão e conseguiu que 35 alunos se inscrevessem. Assim, de quantas maneiras diferentes ele poderá formar esse time?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

5.Uma associação de moradores de um condomínio possui 20 membros. A direção dessa associação é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma direção?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

6. Mariana possui 5 livros de romance, 2 livros de poesia e 1 livro de ficção. De quantas maneiras diferentes Mariana poderá organizar seus livros em uma estante?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

7. Pedro chega a uma lanchonete e deseja comer uma tapioca com dois recheios. Sabendo que a lanchonete dispõe dos seguintes recheios: carne de sol, queijo, presunto, bacon, frango, ovo e atum. De quantas maneiras diferentes Pedro poderá montar sua tapioca?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

2° ETAPA

Pessoa e Borba (2010) classificam os problemas que envolvem o raciocínio combinatório em: Produto Cartesiano; Permutação; Arranjo e Combinação.

Com base nas definições apresentadas pelas autoras percebemos que ao nos depararmos com um problema de Análise Combinatória e precisamos classificá-lo basta que façamos no máximo três perguntas NA ORDEM QUE APRESENTADA a seguir para que consigamos identificar o tipo de problema em questão. São elas:

1. Quantos são os conjuntos de partida?

Caso a resposta seja um único conjunto de partida, o problema poderá ser de Permutação, ou de Arranjo, ou de Combinação.
Caso a resposta seja dois ou mais conjuntos distintos de partida, o problema será de PRODUTO CARTESIANO.

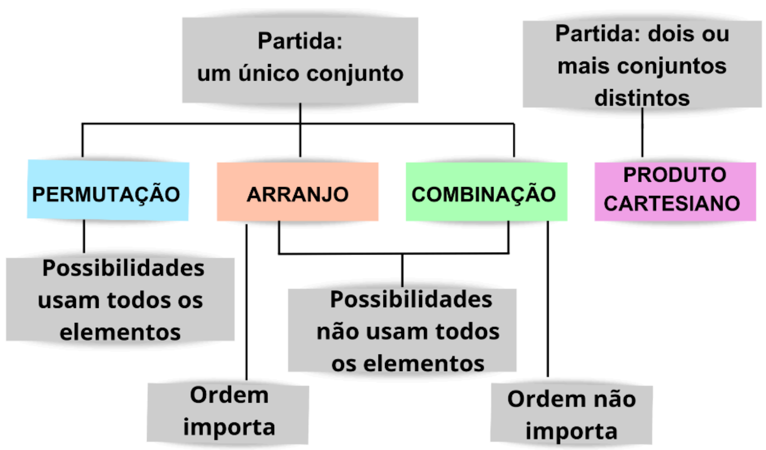
2. Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade?

Caso a resposta seja SIM, o problema será de PERMUTAÇÃO.
Caso a resposta seja NÃO, o problema poderá ser de Arranjo ou Combinação.

3. A ordem em que os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa (gera novas possibilidades)?

Caso a resposta seja SIM, o problema é de ARRANJO.
Caso a resposta seja NÃO, o problema é de COMBINAÇÃO.

Usando essas perguntas, com o intuito de que se tenha uma melhor visualização, elaboramos o esquema abaixo:



Agora, com base no esquema dado, classifique os problemas a seguir em Permutação, Arranjo, Combinação ou Produto Cartesiano.

1.Quantos são os anagramas da palavra TESOURA?

1.1 Quantos são os conjuntos de partida?

1.2 Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade?

1.3 A ordem em que os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa (gera novas possibilidades)?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

2. Um shopping possui 4 portões de entrada e 5 andares de estacionamento. De quantas maneiras diferentes um motorista poderá entrar no shopping escolhendo um dos portões e deixando seu carro em um dos andares de estacionamento?

2.1 Quantos são os conjuntos de partida?

2.2 Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade?

2.3 A ordem em que os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa (gera novas possibilidades)?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

3. Quantas senhas de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1,3,4,6,7 e 9?

3.1 Quantos são os conjuntos de partida?

3.2 Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade?

3.3 A ordem em que os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa (gera novas possibilidades)?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

4. Um professor está selecionando estudantes para formar um time de cinco jogadores interessados em jogar futebol de salão e conseguiu que 35 alunos se inscrevessem. Assim, de quantas maneiras diferentes ele poderá formar esse time?

4.1 Quantos são os conjuntos de partida?

4.2 Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade?

4.3 A ordem em que os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa (gera novas possibilidades)?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

5. Uma associação de moradores de um condomínio possui 20 membros. A direção dessa associação é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma direção?

5.1 Quantos são os conjuntos de partida?

5.2 Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade?

5.3 A ordem em que os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa (gera novas possibilidades)?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

6. Mariana possui 5 livros de romance, 2 livros de poesia e 1 livro de ficção. De quantas maneiras diferentes Mariana poderá organizar seus livros em uma estante?

6.1 Quantos são os conjuntos de partida?

6.2 Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade?

6.3 A ordem em que os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa (gera novas possibilidades)?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

7. Pedro chega a uma lanchonete e deseja comer uma tapioca com dois recheios. Sabendo que a lanchonete dispõe dos seguintes recheios: carne de sol, queijo, presunto, bacon, frango, ovo e atum. De quantas maneiras diferentes Pedro poderá montar sua tapioca?

7.1 Quantos são os conjuntos de partida?

7.2 Todos os elementos do conjunto de partida são utilizados em cada possibilidade?

7.3 A ordem em que os elementos estarão posicionados em cada possibilidade importa (gera novas possibilidades)?

( ) Permutação ( ) Arranjo ( ) Combinação ( ) Produto Cartesiano

8. O uso da proposta apresentada facilitou a classificação dos problemas?

( ) Facilitou totalmente
( ) Facilitou parcialmente
( ) Não Facilitou
Comente:____
____
____