

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Jamylle da Costa Marques

**PROPRIEDADES CLÁSSICAS E QUÂNTICAS
DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO
ASSOCIADO A UM BIOFÓTON**

João Pessoa

2024

Jamylle da Costa Marques

**PROPRIEDADES CLÁSSICAS E QUÂNTICAS
DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO
ASSOCIADO A UM BIOFÓTON**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Física. Área de concentração: Matéria condensada teórica

Orientador:

Dr. Inácio Almeida Pedrosa Filho

João Pessoa

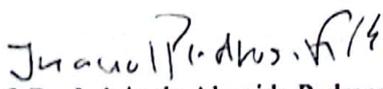
2024

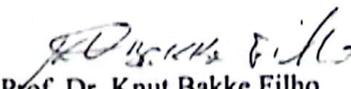


Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** da aluna **Jamyllé Da Costa Marques**, candidata ao Título de Mestra em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos vinte e nove dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e quatro, às 09h00, na sala 201, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Física da Matéria Condensada, de **Jamyllé Da Costa Marques**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Inácio de Almeida Pedrosa (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Knut Bakke Filho (UFPB) e Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos (UFCEG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Inácio de Almeida Pedrosa comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para a candidata para que a mesma fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada "*Propriedades clássicas e quânticas do campo eletromagnético associado a um biofóton*". Concluída a exposição, a candidata foi arguida pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer "**aprovada**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestra em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **29 de fevereiro de 2024**.


Prof. Dr. Inácio de Almeida Pedrosa
Orientador - PPGF/UFPB


Prof. Dr. Knut Bakke Filho
PPGF/UFPB


Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
UFCEG

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M357p Marques, Janylle da Costa.

Propriedades clássicas e quânticas do campo eletromagnético associado a um biofóton / Janylle da Costa Marques. - João Pessoa, 2024.

83 f. : il.

Orientação: Inácio Almeida Pedrosa Filho.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Biofóton. 2. Física quântica. 3. Invariantes dinâmicos. 4. Estados coerentes. 5. Campos eletromagnéticos. I. Pedrosa Filho, Inácio Almeida. II. Título.

UFPB/BC

CDU 535.14(043)

Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus, por me dar forças para conseguir superar minhas limitações físicas e por ter curado minha alma quando minha mente se encontrava sem rumo.

Agradeço ao meu amado marido Me. Marcelo Ferreira, por estar comigo durante os momentos mais difíceis dessa jornada, por ter segurado minha mão, me ajudado e apoiado em tudo, mesmo durante minhas piores crises.

Agradeço a minha família, em especial a minha mãe Givoneide Costa que mesmo a distância esteve comigo me aconselhando e apoiando, e ao meu pai Jailton Marques, por ter me incentivado a ser uma cientista desde a infância.

Agradeço ao meu orientador Dr. Inácio Pedrosa, que me mostrou quais os caminhos a serem seguidos e pela confiança depositada em mim e a Coordenação e ao Departamento de Física da UFPB por ter me dado mais uma chance de concluir meu trabalho de mestrado, bem como a Fapesq-PB pelo apoio financeiro.

Agradeço a minha prima Liviane Marques e aos meus amigos Me. Isaiane Rocha, Me. Felipe Moreira, Me. Antônio Moreira e Me. Rosa das Neves, que me trouxeram grandes alegrias nessa longa jornada.

Agradeço as minhas médicas, Meiriane Perdigão, Renata Montenegro e Isadora Lima, por me ajudarem a superar tantos obstáculos ao longo do caminho, são mulheres maravilhosas e brilhantes, profissionais extremamente competentes.

Resumo

Biofóton é uma radiação eletromagnética emitida por sistemas biológicos. É um pacote de ondas que contém valor informacional, capaz de modular as atividades fisiológicas das células e dos sistemas vivos. Se compararmos os resultados teóricos da emissão de fótons por um campo térmico caótico e de um campo completamente coerente com dados experimentais, encontramos indicações de que biofótons se originam de campos coerentes ocorrendo em tecidos vivos. Com o propósito de investigar mais informações a respeito deste tema, é possível realizar uma descrição clássica e quântica, considerando a hamiltoniana do biofóton e utilizando as equações de Maxwell e os invariantes dinâmicos clássicos dependentes do tempo. Além disso, realizamos uma investigação a respeito da relação entre os estados coerentes e o sistema do biofóton. Com esta abordagem investigamos a dinâmica eletromagnética do biofóton e verificar que os campos eletromagnéticos não decaem exponencialmente e como os estados coerentes se relacionam intrinsecamente com o sistema dos biofótons. Neste sentido, sabendo da importância científica do estudo do biofóton e dos invariantes quânticos, não só na física, mas também em diversas áreas do conhecimento, a investigação de suas propriedades através dos métodos já citados, poderão contribuir com o conhecimento a respeito do tema, gerando aplicabilidade em diversas áreas.

Palavras-chaves: Biofóton, física quântica, invariantes dinâmicos, estados coerentes, campos eletromagnéticos.

Abstract

Biophoton is an electromagnetic radiation emitted by biological systems. It consists of waves packet carrying informational value, capable of modulating the physiological activities of cells and living systems. When comparing the theoretical results of photon emission from a chaotic thermal field and a completely coherent field with experimental data, there are indications that biophotons originate from coherent fields occurring in living tissues. In order to investigate further information about this topic, a classical and quantum description was performed, considering the biophoton's Hamiltonian and using Maxwell's equations and classical time-dependent dynamic invariants. Additionally, an investigation was conducted regarding the relationship between coherent states and the biophoton system. This approach allowed for the exploration of electromagnetic dynamics of biophotons to verify that the electromagnetic fields do not decay exponentially and how coherent states are intrinsically related to the biophoton system. In this sense, considering the scientific importance of the biophotons and quantum invariants, not only in physics but also in various areas of knowledge, the investigation of their properties through the aforementioned methods could contribute to knowledge on the subject, generating applicability in various fields and consequently contributing to the advancement of science and its technologies.

Keywords: Biophoton, quantum mechanics, dynamic invariants, coherent states, electromagnetic fields.

Lista de Figuras

1	Arranjo do experimento de Gurwitsch com raízes de cebola. Fonte: (POPP, 2003).	16
2	Depois da inserção de n daphnia (n= 1,2,3... 90) dentro da cubeta na câmara escura, a emissão de biofótons não segue a curva esperada $I_0(n)$. Fonte: (POPP et al., 1988).	18
3	Parâmetro de decaimento da aproximação hiperbólica de acordo com $I(t) = A * (t + t_0)^{-1/\kappa}$, que é ajustada à dinâmica de relaxamento do 'afterglow' de diferentes suspensões de células após a exposição à iluminação fraca de luz branca, dependendo da densidade celular. Fonte: (POPP et al., 1988).	20
4	Esquema do experimento com bactérias vivas fortemente acopladas à luz. A molécula de corante (Trypan blue) é repelida pelas bactérias durante o experimento, fornecendo uma evidência de que estão vivas. Fonte: (MARLETTO et al., 2018).	21

Sumário

1	Introdução	12
2	Biofóton: Um breve histórico	15
2.1	Experimentos revelando emissão de biofótons	15
2.1.1	Experimento com raízes de cebola: a primeira observação da emissão de biofótons	16
2.1.2	Experimento com <i>Daphnia Magna</i> Straus e larvas de <i>Chironomus</i>	17
2.2	Outros desenvolvimentos acerca dos biofótons	19
2.3	As principais propriedades dos biofótons	24
3	Invariantes dinâmicos dependentes do tempo	26
3.1	Método de Lewis e Riesenfeld	26
3.2	Autoestados e autovalores do Operador Invariante $I(t)$	28
3.3	Conexão entre os autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger	30
3.4	Aplicação do método de invariantes a osciladores harmônicos dependentes do tempo	32
3.4.1	Operador Invariante na forma quadrática	32
3.4.2	Determinação de autoestados e autovalores de $I(t)$	37
3.4.3	Determinação das fases de $I(t)$	38
4	Estados coerentes	46
4.1	Teoria quântica de um oscilador harmônico	47
4.2	Os estados coerentes	55

5	Dinâmica eletromagnética de um biofóton	64
5.1	Descrição clássica	64
5.2	Descrição quântica	72
5.3	Estados coerentes para o sistema do biofóton	76
6	Conclusões	78
	REFERÊNCIAS	80
	Apêndice A - Solução da equação (5.29)	84

1 Introdução

O termo biofóton designa a emissão espontânea e permanente de fótons pelos seres vivos. Foi o biólogo russo Alexander Gurwitsch quem primeiro observou essa capacidade dos sistemas biológicos, por meio de um experimento utilizando raízes de cebola, que indicou o envolvimento de fótons na estimulação da divisão celular ([GURWITSCH, 1922](#)). Basicamente, em duas raízes, separadas por uma placa de quartzo, a divisão celular na ponta de uma raiz estimulou a divisão celular na outra, aumentando o número de mitoses ([NAGL; POPP, 1983](#)). Este, se trata do primeiro experimento a sugerir que a emissão de luz poderia ter um importante papel na comunicação biológica e estimulada.

As principais propriedades dos biofótons, como descritas em ([POPP, 2003](#)), são: a intensidade é baixa, variando de poucos até algumas centenas de fótons/ $s.cm^2$, o que indica que se trata de um fenômeno quântico; a distribuição espectral apresenta frequências definidas; a probabilidade de registrar uma certa quantidade de biofótons em um intervalo de tempo, segue uma distribuição de Poisson; após a exposição à luz branca, os sistemas biológicos apresentam uma luminescência retardada que diminui lentamente para a emissão espontânea de biofótons, seguindo uma função hiperbólica; a emissão de biofótons apresenta a dependência da temperatura típica das funções biológicas; reações de estresse são geralmente indicadas por um aumento na emissão de biofótons; o estado conformacional do ácido desoxirribonucleico parece influenciar na emissão de biofótons, sendo a cromatina uma das principais fontes de biofótons ([RATTEMEYER; POPP; NAGL, 1981](#)); e a distribuição de Poisson obtida na estatística de registro de fótons e a função hiperbólica no decréscimo da luminescência retardada são condições suficientes de um campo eletromagnético de fótons totalmente coerente.

As propriedades físicas dos biofótons indicam que eles originam-se de estados completamente coerentes. A coerência é a propriedade na qual as subunidades de um sistema atuam de maneira cooperativa. As unidades podem ser átomos, moléculas, feixes ópticos ou outras estruturas complexas e não precisam ser idênticas, podendo pertencer a diferentes subestruturas de um sistema. As ações de uma unidade coerente podem ser a

obtenção de um valor definido de alguma propriedade, como por exemplo, a fase de um campo elétrico, a emissão de fótons ou uma resposta específica a um estímulo. Os biofótons apresentam propriedades que podem ser atribuídas às ações cooperativas de muitas unidades emissoras de fótons. Além disso, a interação que gera sua emissão, pode ser descrita por meio de vários modelos físicos associados à termodinâmica, à física estatística de não-equilíbrio, à teoria do caos, aos estados coerentes de óptica quântica, à teoria de radiação cooperativa e à eletrodinâmica quântica de cavidade.

Por causa da baixa intensidade na emissão de fótons, medidas diretas da estatística desta radiação são muito difíceis. No entanto, de acordo com considerações teóricas (POPP, 1979; LI; POPP, 1983; LI; POPP et al., 1983), o acoplamento entre o campo de biofótons e o genoma da célula deve resultar em decaimento hiperbólico da emissão de fótons induzida por radiação. Para desenvolver o modelo de acoplamento coerente entre a luz emitida e o sistema biológico, Popp (LI; POPP, 1983) obteve a seguinte lei para o decaimento da emissão de fótons induzida por radiação: $I(t) = A^*(t + t_0)^{-\beta}$, onde t_0 caracteriza o tempo de irradiação e A e β dependem do sistema considerado. Tal função hiperbólica é consideravelmente diferente das funções exponenciais normalmente aplicadas para a descrição dos decaimentos de fluorescência.

Os longos tempos de decaimento da emissão de fótons induzida por radiação de sistemas vivos foram previstos como consequência do fenômeno de armazenamento ativo de fótons (NAGL; POPP, 1983). As primeiras medidas da emissão de fótons induzida por radiação realizadas mostraram que as células vivas de fato exibem decaimentos de longa duração (por volta de 1h) da emissão de luz após a iluminação (POPP, 1979). Este fato suporta o conceito da componente coerente da emissão de fótons ser um portador de informação intercelular (MAAMACHE; BOUNAMES; FERKOUS, 2006; POPP, 1981).

Neste trabalho, diferentemente do que têm se produzido a respeito do tema, baseado na teoria de invariantes dependentes do tempo (LEWIS JR, 1967; LEWIS JR; RIESENFELD, 1969), nós investigamos as dinâmicas eletromagnéticas clássicas e quânticas de um biofóton. Escolhendo o gauge de Coulomb nós derivamos expressões exatas dos campos eletromagnéticos do sinal do biofóton. Além disso, fazendo uso da representação dos estados de Fock nós resolvemos a equação de Schrödinger para nosso sistema e usamos suas soluções para construir estados coerentes para o biofóton. Finalmente, nós usamos a representação de Fock e estados coerentes para calcular algumas propriedades quânticas do biofóton, como os valores esperados dos operadores momento e posição, suas flutuações quânticas e princípio de incerteza associado.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2, tratamos do contexto histórico associado ao biofóton, quais os principais experimentos que mostram a emissão dos biofótons, sua importância para o avanço científico e suas propriedades. No capítulo 3 detalhamos o método de invariantes, revisamos como encontrar os autoestados, autovalores e suas fases e sua aplicação ao oscilador harmônico simples. No capítulo 4 abordamos o que é um estado coerente, também chamado de estado de incerteza mínima e como este se comporta no contexto da física da matéria condensada. Finalmente, no capítulo 5 é realizada uma descrição clássica e quântica associada ao biofóton através do método de invariantes e observamos como o biofóton se comporta como um oscilador no contexto de estado coerente. E por fim, concluímos o trabalho no capítulo 6.

2 Biofóton: Um breve histórico

O termo "biofóton" refere-se à emissão espontânea e contínua de fótons por organismos vivos. Essa emissão manifesta-se em algumas centenas de fótons por segundo por centímetro quadrado ($\text{fótons/s} \cdot \text{cm}^2$) na faixa espectral que abrange pelo menos 260 a 800 nanômetros (nm) (POPP, 2003). As propriedades físicas dos biofótons, como detalharemos mais a frente, indicam que eles originam-se de estados completamente coerentes, originando-se eventualmente de estados comprimidos. A área de aplicação dos biofótons, denominada "Biofotônica", têm atuado de forma inovadora em alguns setores do desenvolvimento humano, como por exemplo, para avaliar a qualidade dos alimentos (KARLO; PRASAD; SINGH, 2022), identificar infecções microbianas (NOGUEIRA, 2020), compreender influências ambientais (ROUXEL et al., 2012), aplicar diagnósticos médicos (MEGLINSKI, 2015) e etc.

Neste capítulo, realizamos uma breve revisão histórica do estudo dos biofótons, destacando experimentos relevantes sobre o tema e suas principais propriedades.

2.1 Experimentos revelando emissão de biofótons

Nesta seção detalhamos brevemente dois principais experimentos realizados no século passado que revelam a emissão de fótons por sistemas biológicos. Um deles usou raízes de cebola (GURWITSCH, 1922) e observou o envolvimento de fótons na estimulação da divisão celular. O outro, usou uma espécie de microcrustáceo aquático (POPP et al., 1988) para medir a emissão de fótons. Adicionalmente, também discutimos um caso em que células humanas foram analisadas com o mesmo propósito.

2.1.1 Experimento com raízes de cebola: a primeira observação da emissão de biofótons

O biólogo russo Alexander Gurwitsch foi quem primeiro observou propriedades de luminosidade nos sistemas biológicos na década de 1920 (GURWITSCH, 1922), por meio de um experimento com raízes de cebola. Ele tentava resolver um dos grandes problemas da biologia, que é a questão de como tecidos vivos transformam e transferem informações sobre o tamanho e o formato de diferentes órgãos, já que reações químicas não contêm padrões espaciais ou temporais em princípio. Essa foi a razão pela qual Gurwitsch olhou para um "campo morfogenético" que poderia regular o crescimento e diferenciação celular. O pesquisador usou o caule de uma raiz de cebola como "detector", e a ponta de outra, muito próxima do detector, mas sem realmente tocá-lo, como um "indutor" (fig 2.1.1). O objetivo era observar a taxa de divisão celular apenas na região do caule. Quando as raízes foram separadas por uma placa de quartzo (que é transparente para luz UV de cerca de $260nm$), observou-se que a divisão celular ocorrida na ponta de uma raiz estimulou a divisão celular na outra, resultando em um aumento no número de mitoses (taxa de divisão celular). Esse experimento indicou o envolvimento dos fótons na estimulação da divisão celular (POPP, 2003). O pesquisador chamou esta emissão de fótons de "radiação mitogênética" e repetiu o experimento, com sucesso, para outros sistemas biológicos.

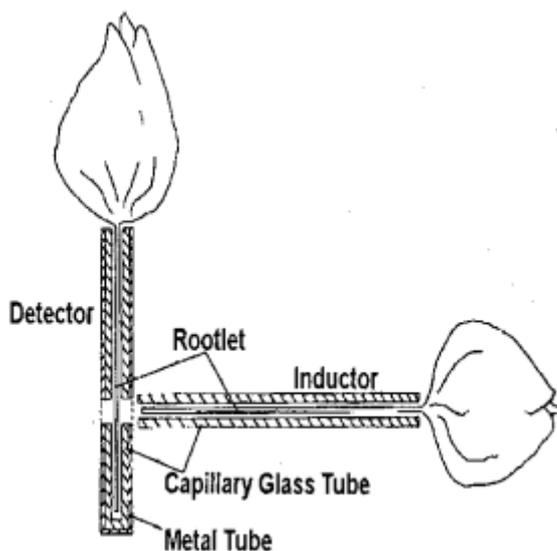


Figura 1: Arranjo do experimento de Gurwitsch com raízes de cebola. Fonte: (POPP, 2003).

O experimento pioneiro de Alexander Gurwitsch trouxe à tona a ideia de que a emissão de luz desempenha um papel importante na comunicação biológica, estimulando assim pesquisas sobre o potencial da radiação eletromagnética em induzir a divisão celular.

Como evidenciado em (HAN; YANG; CHEN, 2011), o conceito de quantum refere-se à menor quantidade de uma entidade envolvida em uma interação e esse conceito pode abrir novas perspectivas para a comunicação nos sistemas biológicos. A relação entre radiação eletromagnética e a quantização na transferência de energia sugere que a radiação eletromagnética pode atuar como um novo mensageiro nas interações biológicas, com diversos efeitos nos seres vivos.

Outros experimentos importantes foram realizados desde então, como experimentos com *Daphnia Magna* Straus e com larvas de *Chironomus*, como destacado abaixo.

2.1.2 Experimento com *Daphnia Magna* Straus e larvas de *Chironomus*

Em (POPP et al., 1988) são revisados alguns experimentos relacionados aos biofótons. Com *Daphnia magna* Straus (espécie de microcrustáceo aquático) (POPP, 1981). Os autores destacam que, se compararmos os resultados teóricos da emissão de fótons por um campo térmico caótico e de um campo completamente coerente com dados experimentais, encontra-se indicações de que biofótons se originam de campos coerentes ocorrendo em tecidos vivos. E uma prova direta pode ser vista na dinâmica de relaxação hiperbólica de luminescência espectral retardada. Neste sentido, os autores descrevem o experimento, como detalhado abaixo.

No experimento, *Daphnia Magna* Straus foram colocados em uma câmara escura em água, a 18°C, dentro de um detector de fotocontagem. O número de dáfias n foi alterados de 1 à 90, sempre selecionando animais de tamanho aproximadamente igual. Após cada alteração foi registrada a intensidade da emissão de fótons I (contagem/segundos). Os resultados estão mostrados na figura 2.1.2. Eles compararam os dados com a curva teórica $I_0(n)$, assumindo uma alta autoabsorção dentro do sistema, e levando em conta também, que cada daphnia contribui, na média, sempre com a mesma intensidade i_0 . Mais precisamente a previsão teórica está de acordo com:

$$I_0(n) = \frac{i_0 F}{f} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{nf}{F} \right\} \right), \quad (2.1)$$

onde F é a área superficial frontal coberta pela água, e f representa a maior área transversal de uma daphnia (0.4cm^2).

O resultado mostrado na figura 2.1.2 foi confirmado por experimentos similares com larvas de *Chironomus*. Os resultados indicam que a intensidade dos fótons de todo o

sistema foi significativamente diferente de suas partes individuais, levando sempre em conta uma possível autoabsorção dentro do sistema, o que indica uma interação de longo alcance semelhante à ressonância entre os animais e as plantas, correlacionada com a emissão de biofótons.

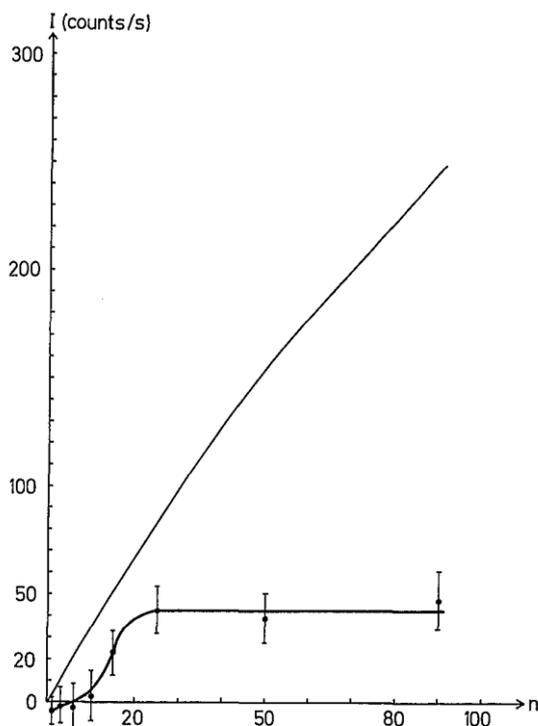


Figura 2: Depois da inserção de n daphnia ($n= 1,2,3... 90$) dentro da cubeta na câmara escura, a emissão de biofótons não segue a curva esperada $I_0(n)$. Fonte: (POPP et al., 1988).

Em um outro experimento destacado em (POPP et al., 1988), em vez de Daphnia em água, foram colocadas células humanas em meio incolor a 37°C . Devido à baixa intensidade na emissão de fótons em seres biológicos, medidas diretas da estatística dessa radiação são muito desafiadoras. Assim, as populações de células de diferentes densidades celulares foram expostas a uma iluminação de luz branca de uma lâmpada de tungstênio de 150 W por 3 minutos. Para evitar erros sistemáticos as células foram agitadas continuamente no meio e os números das células foram alterados aleatoriamente. A luz reemitida foi registrada e a curva de decaimento desse brilho residual foi avaliada após o término da excitação. As curvas de decaimento mostram uma concordância muito melhor com uma lei hiperbólica do que com uma exponencial. Em concordância a isto, considerações teóricas (POPP, 1981; LI; POPP, 1983; LI; POPP et al., 1983) sugerem que a existência de um feedback no acoplamento entre o campo de biofótons e o genoma da célula resulta em um decaimento hiperbólico da emissão de fótons induzida pela radiação. Em um modelo de

acoplamento coerente entre a luz emitida e o sistema biológico desenvolvido pelos autores em (LI; POPP et al., 1983; POPP et al., 1988), estes obtiveram a seguinte lei para o decaimento da emissão de fótons induzida pela radiação:

$$I(t) = A * (t + t_0)^{-1/\kappa}, \quad (2.2)$$

onde, t_0 representa o tempo de irradiação e A e $\beta \equiv 1/\kappa$ são constantes que dependem do sistema considerado. Além disso, eles descobriram que, na maioria dos casos, $1 < \beta < 3$. Essa função hiperbólica é consideravelmente diferente das funções exponenciais normalmente usadas para descrever o decaimento da fluorescência. Na figura 2.1.2, está plotado o parâmetro de decaimento da aproximação hiperbólica de acordo com a equação anterior, que é ajustada à dinâmica de relaxamento do ‘afterglow’ de diferentes suspensões de células após a exposição à iluminação fraca de luz branca, dependendo da densidade celular. A figura exhibe um caso típico de células do âmnio (curva inferior) e de uma forma maligna dessas células, chamadas de células wish (curva superior), que apresentam uma dependência oposta do parâmetro κ em comparação com a população de células não malignas. As três medidas do lado direito da figura correspondem ao meio de nutrição isolado, que é utilizado em experimentos ou culturas celulares que contém apenas os componentes nutricionais essenciais, sem a presença de outros estímulos ou agentes externos.

Agora, de acordo com (TWAREQUE; GHIRARDI; FONDA, 1974), se um campo completamente caótico é excitado, ele decai de acordo com uma dinâmica de relaxamento exponencial. Essa característica exponencial surge de uma lei de semigrupo que resulta em uma perda permanente da memória do sistema. Porém, sob as mesmas condições (ergódicas), o decaimento exponencial se transforma em um decaimento hiperbólico assim que um campo caótico se transforma em um campo coerente. E isto ocorre não apenas na descrição clássica, mas também na descrição quântica (POPP, 1986).

Na próxima seção, descrevemos experimentos realizados mais recentemente.

2.2 Outros desenvolvimentos acerca dos biofótons

A coerência é uma propriedade em que as subunidades de um sistema atuam de forma cooperativa. Essas unidades podem ser átomos, moléculas, feixes ópticos ou outras estruturas complexas, e não precisam ser idênticas, podendo pertencer a diferentes subestruturas de um sistema. As ações de uma unidade coerente podem incluir a obtenção de

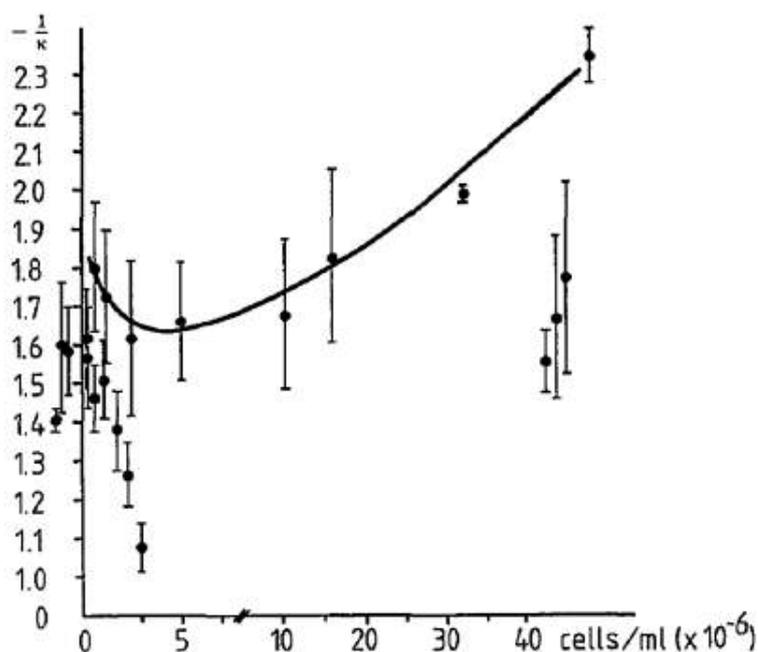


Figura 3: Parâmetro de decaimento da aproximação hiperbólica de acordo com $I(t) = A * (t + t_0)^{-1/\kappa}$, que é ajustada à dinâmica de relaxamento do 'afterglow' de diferentes suspensões de células após a exposição à iluminação fraca de luz branca, dependendo da densidade celular. Fonte: (POPP et al., 1988).

um valor definido de alguma propriedade, como a fase de um campo elétrico, a emissão de fótons ou uma resposta específica a um estímulo. Os biofótons apresentam propriedades que sugerem a ação cooperativa de muitas unidades emissoras de fótons (IGNATOV et al., 2014). A coerência descreve as correlações entre diferentes grandezas físicas em uma única onda ou entre várias ondas ou pacotes de ondas. Portanto, no feixe de luz que contém biofótons, eles vibram simultaneamente, transmitindo informações específicas do sinal.

Um exemplo da transferência de informação por meio da emissão de fótons em seres vivos pode ser observado em bactérias sulfurosas verdes (MARLETTO et al., 2018). Essas bactérias são fotossintéticas e têm a notável capacidade de sobreviver em ambientes extremos, onde a intensidade da luz cai para apenas algumas centenas de fótons por segundo. Para lidar com essa escassez de luz, as bactérias desenvolveram clorossomos, que são complexos de antenas capazes de absorver a luz e impulsionar reações químicas ao alcançarem seu centro. Quando a luz é absorvida por esses complexos de antena, um exciton¹ é criado, o qual então se desloca para uma placa de base proteica ligada ao clorossomo, e

¹Um exciton é um par ligado de um elétron e um buraco (uma lacuna de carga positiva) que são criados quando um fóton é absorvido por um material semiconductor.

depois para o centro de reação, onde é utilizado para alimentar reações químicas. É uma adaptação surpreendente que lhes permite aproveitar ao máximo a energia disponível em condições extremas. Nesse sentido, recentemente foi conduzido um experimento com esse tipo de bactéria (COLES et al., 2017).

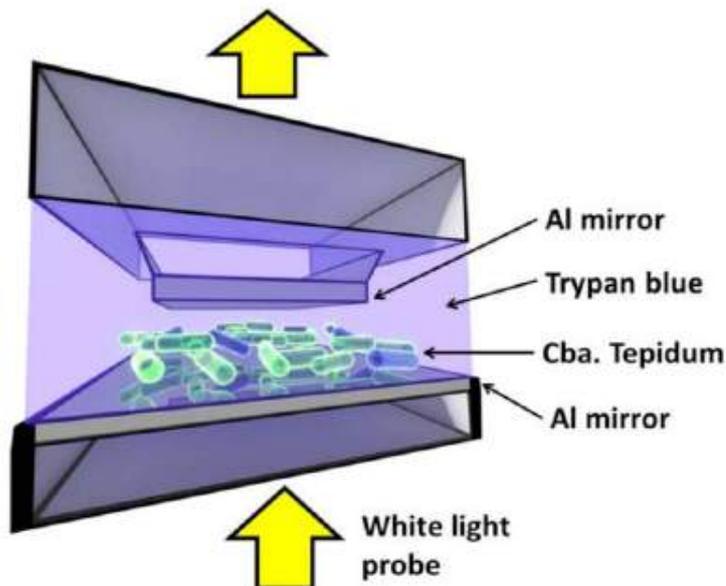


Figura 4: Esquema do experimento com bactérias vivas fortemente acopladas à luz. A molécula de corante (Trypan blue) é repelida pelas bactérias durante o experimento, fornecendo uma evidência de que estão vivas. Fonte: (MARLETTO et al., 2018).

Cada bactéria abriga aproximadamente 200 clorossomos, nos quais o empacotamento denso das moléculas e seus elevados momentos de dipolo resultam em forças osciladoras intensas, tornando as bactérias (e a matéria orgânica em geral) excelentes candidatas para um acoplamento robusto entre 'excitons' e fótons. Com dimensões da ordem de $2\mu m \times 500nm$, essas estruturas podem ser incorporadas em microcavidades ópticas de dimensões micrométricas, apresentando modos de energia bem definidos. A condição para acoplamento forte é atendida quando a fuga de luz aprisionada na microcavidade ocorre lentamente em comparação com a taxa de troca de energia entre a luz e as bactérias. Isso acarreta em uma modificação no espectro de energia tanto para o exciton quanto para os modos da cavidade, originando novos níveis de energia associados a excitações denominadas polaritons, resultantes do acoplamento entre os excitons e a luz. No estudo conduzido por Coles et al. (COLES et al., 2017), o espectro de transmissão das bactérias acopladas aos modos de cavidade foi analisado sob iluminação com luz branca. Esse procedimento revelou dois picos distintos, correspondentes aos "ramos polariton", exibindo energias inferiores e superiores em comparação com as energias dos excitons não acopla-

dos. A chamada "Rabi splitting" refere-se à diferença de energia entre esses dois picos quando os modos de cavidade e exciton não acoplados teriam a mesma energia (detuning zero). O critério para acoplamento forte é que o "Rabi splitting" seja maior do que a soma das energias de fóton e exciton não acopladas; esse requisito é equivalente à taxa de troca de energia sendo mais rápida do que o desfasamento do sistema. Essa condição foi confirmada experimentalmente (COLES et al., 2017).

Em (MARLETTO et al., 2018) é feita uma modelagem do experimento conduzido em (COLES et al., 2017) usando o modelo de Dicke. A análise revelou uma descoberta intrigante: quando a bactéria e a luz são tratadas de forma quântica, ocorre um forte acoplamento que sugere a existência de emaranhamento quântico entre as bactérias (modeladas como dipolos) e a luz quantizada (modelada como um único oscilador harmônico quântico). É importante destacar que o emaranhamento ocorre quando grupos de partículas ou ondas são gerados ou interagem, resultando em um estado quântico coletivo que não pode ser descrito independentemente dos estados individuais. Isso significa que o comportamento quântico desses sistemas depende do conjunto como um todo, e não de suas partes isoladas. Para demonstrar o emaranhamento foram usados "testemunhas de emaranhamento", que são observáveis físicos que reagem de maneira diferente aos estados emaranhados. Neste caso, com a modelagem considerada, a testemunha foi simplesmente a energia do sistema. Essa descoberta proporciona uma compreensão mais profunda da complexa interação entre sistemas biológicos e fenômenos quânticos, abrindo caminho para novas investigações sobre os efeitos quânticos na vida e nos sistemas biológicos.

Outro experimento recente foi conduzido com proteínas fluorescentes verdes, que são responsáveis pela bioluminescência (SHI; KUMAR; LEE, 2017). Os autores enfatizam que o recente desenvolvimento de técnicas espectroscópicas baseadas em estados quânticos da luz pode precipitar muitos avanços na observação e controle das interações entre luz e matéria em materiais biológicos em um nível quântico fundamental. Por essa razão, a geração de luz emaranhada em proteínas fluorescentes produzidas biologicamente seria promissora devido à sua biocompatibilidade. Neste trabalho, os autores demonstram a geração de um estado de dois fótons emaranhados em polarização, por meio de mistura espontânea de quatro ondas em proteínas fluorescentes verdes aprimoradas. A matriz de densidade reconstruída indica que o estado emaranhado está sujeito a decoerência originada da absorção de dois fótons. Nesse experimento, os fótons emitidos pelas moléculas fluorescentes foram entrelaçados dentro desta proteína, que tem uma estrutura em forma de barril. A técnica utilizada foi a "mistura de quatro ondas", na qual três feixes de luz são combinados em um meio não-linear para gerar um quarto feixe de luz. Foi obtido um

emaranhamento de polarização entre pares de fótons, um fenômeno que revela uma forte conexão entre as direções de oscilação das ondas de luz. O emaranhamento de polarização foi protegido pela estrutura em forma de barril que envolve as moléculas fluorescentes. Essa proteção proporcionada pela estrutura foi capaz de evitar a decoerência, um processo que pode prejudicar o emaranhamento quântico.

Ainda podemos destacar outro exemplo de transferência de informação através de biofótons, agora, em seres mais complexos é o que ocorre no sistema de navegação espacial dos pássaros ([KRISHNAN, 2016](#)). A incidência de luz nos olhos das aves pode resultar na quebra de ligações químicas, formando pares de radicais livres com spins bem definidos, também conhecidos como momentos magnéticos. Esses radicais livres são gerados por reações dentro de uma proteína chamada criptocromo. Esses pares de radicais livres podem se acoplar de duas formas diferentes, dependendo da orientação de seus spins: o estado "singlete" e o estado "triplete". No estado singlete, os spins dos radicais estão em direções opostas, enquanto no estado triplete, os spins estão em direções próximas ao paralelo. Os elétrons podem estar emaranhados entre si, ocupando um desses dois estados. Essas transições entre os estados produzem uma oscilação quântica coerente que persiste por alguns micro-segundos.

Essa interação entre os estados singlete e triplete dos radicais influencia a sinalização neural na retina das aves, fornecendo a base para a magneto-recepção. A continuidade desses processos pode afetar a sinalização neural e a conformação da proteína, desempenhando um papel importante na percepção magnética das aves. Esse sistema de pares de radicais livres é altamente instável, com um curto tempo de vida de aproximadamente 100 microssegundos. Durante esse breve período de tempo, o par radical assume um dos dois estados possíveis, criando um estado de emaranhamento quântico entre as moléculas de criptocromo. A suspeita é a de que o campo magnético da Terra afeta a quantidade de tempo que as moléculas passam em qualquer um dos estados. As mudanças na duração desses estados, de alguma forma, podem informar ao pássaro onde ele está.

Podemos citar estudos mais recentes, como o trabalho de ([BENFATTO et al., 2023](#)), em que é feita a observação da emissão de sementes em germinação usando uma técnica experimental projetada para detectar luz de intensidade extremamente pequena; ou o ([SEFATI et al., 2023](#)), onde é realizado um experimento envolvendo a detecção de emissão de fótons ultrafracos do hipocampo de cérebros de ratos machos e encontra correlações significativas entre a doença de Alzheimer, declínio da memória, estresse oxidativo e a intensidade da emissão espontânea de fótons pelo hipocampo.

2.3 As principais propriedades dos biofótons

Nagl e Popp ([NAGL; POPP, 1983](#)) previram que o fenômeno de armazenamento ativo de fótons em sistemas vivos, geram, como consequência, longos tempos no decaimento da emissão de fótons induzida pela radiação. As primeiras medições dessa emissão, realizadas por Popp ([POPP, 1979](#)), mostraram que as células vivas de fato exibem decaimentos de longa duração (aproximadamente 1 hora) da emissão de luz após a iluminação. Esse fato suporta o conceito de que a componente coerente da emissão de fótons carrega informações intercelulares ([POPP, 1981](#)). Além disso, ([POPP et al., 1988](#)) concluiu que uma quimioluminescência caótica não reage de maneira muito sensível a influências externas fracas, ao passo que um campo totalmente coerente, em princípio, responde a todas as perturbações, mesmo de baixa amplitude. De fato, podem ser registradas sensibilidades bastante elevadas. Portanto, podemos inferir que a hipótese de um campo totalmente coerente para a emissão de fótons reflete de maneira mais precisa a realidade do que a hipótese de uma quimioluminescência caótica.

Podemos agora, sumarizar as principais propriedades dos biofótons, como descritas em ([POPP, 2003](#)). São elas:

- Intensidade baixa: a emissão varia de poucas a algumas centenas de fótons por segundo por centímetro quadrado, indicando que se trata de um fenômeno quântico;
- Distribuição espectral definida: os biofótons apresentam frequências específicas em sua distribuição espectral;
- Distribuição de Poisson: a probabilidade de registrar um determinado número de biofótons em um intervalo de tempo segue uma distribuição de Poisson;
- Luminescência retardada: após a exposição à luz branca, os sistemas biológicos apresentam uma luminescência retardada que diminui gradualmente, seguindo uma função hiperbólica, até atingir a emissão espontânea de biofótons;
- Dependência da temperatura: a emissão de biofótons mostra uma relação característica com a temperatura, típica das funções biológicas;
- Indicação de estresse: reações de estresse geralmente resultam em um aumento na emissão de biofótons;
- Influência do estado conformacional do DNA: o estado conformacional do ácido desoxirribonucleico (DNA) parece afetar a emissão de biofótons, sendo a cromatina

uma das principais fontes desses biofótons;

- Coerência eletromagnética: a distribuição de Poisson na estatística de registro de fótons e a função hiperbólica no decréscimo da luminescência retardada são condições que indicam a presença de um campo eletromagnético de fótons totalmente coerente.

Neste trabalho, nosso objetivo é buscar mais informações acerca das propriedades dos biofótons, investigar os aspectos físicos relacionados ao campo eletromagnético associado ao biofóton e fornecer uma descrição clássica e quântica desse fenômeno, utilizando a teoria de invariantes dependentes do tempo desenvolvida por Lewis e Riesenfeld ([LEWIS JR, 1967](#); [LEWIS JR; RIESENFELD, 1969](#)). No próximo capítulo, descreveremos o método em questão, bem como sua aplicação à osciladores harmônicos dependentes do tempo. Veremos a conexão entre os autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger, assim como os autoestados e autovalores do operador invariante.

3 Invariantes dinâmicos dependentes do tempo

3.1 Método de Lewis e Riesenfeld

O Método de Lewis e Riesenfeld ([LEWIS JR; RIESENFELD, 1969](#); [LEWIS JR, 1967](#)) foi escolhido para ser utilizado neste trabalho, por ser eficaz na resolução de problemas em Mecânica Quântica relacionados a osciladores harmônicos dependentes do tempo, que se assemelham ao comportamento do biofóton. E isto é feito através da utilização de operadores invariantes explicitamente dependentes do tempo.

Estabelecemos, primeiramente, que o hamiltoniano $H(t)$, é um operador que é função explícita do tempo, e que $I(t)$, é um operador invariante. Portanto, temos que:

O operador $I(t)$ é hermitiano, não trivial e dependente explicitamente do tempo. Por ser hermitiano, sabemos que: seus autovalores são reais; suas autofunções são ortogonais:

$$\int \psi_i^* \psi_j dt = 0 \quad (3.1)$$

e suas autofunções formam um conjunto completo. Além disso, o operador $I(t)$ satisfaz as condições:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] = 0 \quad (3.2)$$

e

$$I^\dagger = I \quad (3.3)$$

ou

$$I = I^{*T} = \overline{I^T}. \quad (3.4)$$

Devemos destacar que, a matriz que representa o operador (3.3) é igual a sua transposta conjugada.

Sabemos que em Mecânica Quântica, o estado de um sistema é determinado pela função de onda ψ , enquanto no formalismo de Dirac o estado de um sistema, no instante t é o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$. Sabendo que a evolução temporal desse vetor de estado é governada pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (3.5)$$

podemos aplicar a equação (3.2) ao vetor de estado $|\psi(t)\rangle$:

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar} [I, H] |\psi(t)\rangle = 0, \quad (3.6)$$

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\psi(t)\rangle + [I, H] |\psi(t)\rangle = 0, \quad (3.7)$$

sendo

$$[I, H] |\psi(t)\rangle = IH |\psi(t)\rangle - HI |\psi(t)\rangle \quad (3.8)$$

e usando a relação (3.5) na equação acima, temos que:

$$[I, H] |\psi(t)\rangle = i\hbar (I \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle) - H(I |\psi(t)\rangle). \quad (3.9)$$

Substituindo este resultado na equação (3.7), resulta:

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\psi(t)\rangle + i\hbar (I \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle) - H(I |\psi(t)\rangle) = 0, \quad (3.10)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I |\psi(t)\rangle) = H(I |\psi(t)\rangle). \quad (3.11)$$

Podemos então concluir: se o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ é solução da equação de Schrödinger, o vetor de estado resultante da aplicação do Invariante ($I |\psi(t)\rangle$) também satisfaz a equação de Schrödinger; este resultado é válido para qualquer operador invariante (já que não o restringimos), mesmo os que envolvam a operação de derivada com respeito ao tempo (LIMA, D. A. P. d. et al., 2014; LIMA, A. L. d. et al., 2008).

Vamos então considerar que os nossos operadores invariantes não tem operadores com derivadas temporais e calcular seus autoestados e autovalores.

3.2 Autoestados e autovalores do Operador Invariante I(t)

Como o operador Invariante é hermitiano, este faz parte de um conjunto completo de observáveis que comutam; existe um conjunto completo de autoestados associados; seus autovalores serão denotados por λ , com autoestado $|\lambda, k; t\rangle$. Onde k são todos os números quânticos necessários para especificar os autoestados.

A equação de autovalores para os autoestados do operador I(t) possui a forma:

$$I(t) |\lambda, k; t\rangle = \lambda |\lambda, k; t\rangle, \quad (3.12)$$

com

$$\langle \lambda', k'; t | \lambda, k; t \rangle = \delta_{\lambda' \lambda} \delta_{k' k}. \quad (3.13)$$

Os autoestados $|\lambda, k; t\rangle$ são ortonormais e os autovalores λ são reais. Podemos mostrar que os λ_s também são independentes do tempo.

Vamos submeter a equação (3.12) ao operador diferencial temporal, para encontrar a relação de dependência entre o autovalor λ e o tempo:

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle. \quad (3.14)$$

Agora, aplicando a relação (3.2) sobre $|\lambda, k; t\rangle$, resulta:

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + \frac{1}{i\hbar} [I, H] |\lambda, k; t\rangle = 0 \quad (3.15)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + [I, H] |\lambda, k; t\rangle &= 0, \\ i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + IH |\lambda, k; t\rangle - HI |\lambda, k; t\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Assim, usando a equação (3.12), temos que:

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + IH |\lambda, k; t\rangle - \lambda H |\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (3.17)$$

Fazendo o produto escalar com o estado $|\lambda', k'; t\rangle$, temos que:

$$\begin{aligned} i\hbar \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + \langle \lambda', k'; t | IH |\lambda, k; t\rangle - \langle \lambda', k'; t | \lambda H |\lambda, k; t\rangle &= 0, \\ i\hbar \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + \lambda' \langle \lambda', k'; t | H |\lambda, k; t\rangle - \lambda \langle \lambda', k'; t | H |\lambda, k; t\rangle &= 0, \\ i\hbar \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \lambda', k'; t | H |\lambda, k; t\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para $\lambda' = \lambda$:

$$i\hbar \langle \lambda, k'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (3.19)$$

Agora, fazendo o produto escalar da equação (3.14) com $|\lambda, k; t\rangle$, obtemos:

$$\langle \lambda, k; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + \langle \lambda, k; t | I \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = \langle \lambda, k; t | \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + \langle \lambda, k; t | \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle \quad (3.20)$$

sendo $\langle \lambda, k; t | I \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = \langle \lambda, k; t | \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda, k; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle &= \langle \lambda, k; t | \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= \langle \lambda, k; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Usando (3.19), vemos que:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0. \quad (3.22)$$

Dessa forma, concluímos que os autovalores de λ são independentes do tempo, bem como, os autoestados devem ser dependentes do tempo. Na seção seguinte, vamos tentar encontrar a conexão entre os autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger.

3.3 Conexão entre os autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger

Para encontrar a conexão entre os autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger, usaremos a equação (3.14), considerando o resultado (3.22):

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = 0 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle, \quad (3.23)$$

$$(\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle. \quad (3.24)$$

Fazendo o produto escalar com o estado $|\lambda', k'; t\rangle$, teremos que

$$\langle \lambda', k'; t | (\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle, \quad (3.25)$$

ou

$$\lambda \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle - \lambda' \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle. \quad (3.26)$$

Reescrevendo a equação (3.18) para substituí-la na equação (3.26), obtemos:

$$\langle \lambda', k'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = \frac{(\lambda - \lambda')}{i\hbar} \langle \lambda', k'; t | H |\lambda, k; t\rangle, \quad (3.27)$$

agora, fazendo a substituição em (3.26):

$$i\hbar(\lambda - \lambda') \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = (\lambda - \lambda') \langle \lambda', k'; t | H |\lambda, k; t\rangle. \quad (3.28)$$

Para $\lambda' \neq \lambda$, temos que:

$$i\hbar \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = \langle \lambda', k'; t | H |\lambda, k; t\rangle. \quad (3.29)$$

Por outro lado, para $\lambda' = \lambda$, temos que:

Se o resultado acima é válido para $\lambda' = \lambda$, o autoestado $|\lambda, k; t\rangle$ satisfaz a equação de Schrödinger, e é uma solução especial para o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$.

As grandezas (com significado físico exato) calculadas por médias, usando a função de onda, ψ , dependem da função vezes seu complexo conjugado. $|\psi(t)\rangle$ e $e^{i\alpha} |\psi(t)\rangle$ re-

presentam o mesmo estado físico (α é um número real qualquer). Ou seja, a função de onda normalizada é determinada unicamente a menos de uma constante, que chamamos de fator de fase. Essa indeterminação não afeta os resultados físicos, já que:

$$\langle \psi^*(t)\psi(t) \rangle = \langle e^{-i\alpha}\psi^*(t)e^{i\alpha}\psi(t) \rangle. \quad (3.30)$$

Definindo um novo conjunto de autovetores do operador $I(t)$ por uma transformação de gauge, relacionado ao conjunto inicial, com um fator de fase qualquer dependente do tempo:

$$|\lambda, k; t\rangle_\alpha = e^{i\alpha_{\lambda k}(t)} |\lambda, k; t\rangle, \quad (3.31)$$

onde, os autoestados $|\lambda, k; t\rangle$ são ortonormais e $\alpha_{\lambda k}(t)$ são funções reais quaisquer, dependentes do tempo.

Estabelecemos que o operador $I(t)$ não contém operadores com derivação com relação ao tempo; autoestados $|\lambda, k; t\rangle$ são ortonormais (equação (3.13)) e $|\lambda, k; t\rangle_\alpha$ também serão; a equação (3.29) também vale para elementos de matriz tomados em relação aos novos autoestados.

Então, escolhendo as fases $\alpha_{\lambda k}(t)$ que satisfaçam a equação (3.29) para $\lambda' = \lambda$, cada novo autoestado satisfará a equação de Schrödinger:

$$\hbar\delta_{kk'}\frac{d\alpha_{\lambda k}}{dt} = \langle \lambda', k'; t | (i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H) |\lambda, k; t\rangle. \quad (3.32)$$

Os estados $|\lambda, k; t\rangle$ devem ser escolhidos de forma que o lado direito seja zero quando $k' \neq k$; como $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H$ é hermitiano, essa diagonalização é possível; assim, as funções de fase $\alpha_{\lambda k}(t)$ satisfazem:

$$\hbar\frac{d\alpha_{\lambda k}}{dt} = \langle \lambda', k' | (i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H) |\lambda, k\rangle. \quad (3.33)$$

A equação acima indica explicitamente as dependências do tempo. E como o novo conjunto de autoestados $|\lambda, k; t\rangle_\alpha$ satisfaz a equação de Schrödinger, a solução geral fica:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\lambda k} C_{\lambda k} e^{i\alpha_{\lambda k}(t)} |\lambda, k; t\rangle, \quad (3.34)$$

onde, $|\psi(t)\rangle$ é o vetor de estado que é solução da equação de Schrödinger, $C_{\lambda k}$ são coeficientes independentes do tempo e $|\lambda, k; t\rangle$ são autoestados do operador $I(t)$.

Podemos aplicar o método de invariantes a osciladores harmônicos dependentes do tempo, como veremos a seguir.

3.4 Aplicação do método de invariantes a osciladores harmônicos dependentes do tempo

3.4.1 Operador Invariante na forma quadrática

Aplicaremos o Método de Invariantes a sistemas descritos como osciladores harmônicos unidimensionais dependentes do tempo, devido a sua semelhança com o comportamento do biofóton.

Consideremos uma partícula com pequenas oscilações e uma dimensão. O hamiltoniano será da forma:

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)q^2}{2}, \quad (3.35)$$

onde, p representa o momento canonicamente conjugado a q , q é a coordenada canônica, m a massa e ω a frequência característica das oscilações.

Temos que p e q satisfazem: $[q,p] = i\hbar$. O espectro de autovalores de energia é inteiramente discreto.

As equações canônicas do movimento associado a equação (3.35) podem ser escritas como:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad (3.36)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2(t)q. \quad (3.37)$$

A equação de movimento do sistema pode ser encontrada derivando a equação (3.36) outra vez

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{m\omega^2(t)q}{m} = -\omega^2(t)q \quad (3.38)$$

tal que,

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0. \quad (3.39)$$

A equação (3.39) é conhecida como a equação de Mathieu-Hill e pode ser resolvida se conhecida a expressão para $\omega(t)$. Porém, também podemos resolver encontrando autoestados inerentes ao nosso problema, para uma frequência $\omega(t)$ qualquer. Para isto, aplicaremos o método de Operadores Invariantes a equação (3.35).

Vamos assumir que um operador $I(t)$ assume a forma homogênea quadrática:

$$I = \frac{1}{2}[\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \gamma(t)\{q,p\}_+]. \quad (3.40)$$

O valor $1/2$ foi escolhido arbitrariamente por conveniência, α, β e γ são funções reais no tempo, já que $I(t)$ é hermitiano e $\{q,p\}_+$ é o anticomutador entre p e q .

Derivaremos a equação anterior com relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{1}{2}[(\dot{\alpha}q^2 + \alpha 2q\dot{q}) + (\dot{\beta}p^2 + \beta 2p\dot{p}) + \dot{\gamma}\{q,p\}_+ + \gamma \frac{d}{dt}(qp + pq)], \\ \dot{I} &= \frac{1}{2}[(\dot{\alpha}q^2 + 2\alpha q\dot{q}) + (\dot{\beta}p^2 + 2\beta p\dot{p}) + \dot{\gamma}\{q,p\}_+ + \gamma(2p\dot{q} + 2q\dot{p})]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Substituindo \dot{p} e \dot{q} na equação acima, obtemos:

$$\dot{I} = \frac{1}{2}[(\dot{\alpha}q^2 + 2\alpha q \frac{p}{m}) + (\dot{\beta}p^2 - 2\beta pm\omega^2 q) + \dot{\gamma}\{q,p\}_+ + 2\gamma \frac{p^2}{m} - 2\gamma q^2 m\omega^2]. \quad (3.42)$$

Isolando q^2, p^2 e $\{q,p\}_+$, obtemos

$$\dot{I} = \frac{1}{2}[(\dot{\alpha} - 2\gamma m\omega^2)q^2 + (\dot{\beta} + \frac{2\gamma}{m})p^2 + (\dot{\gamma} + \frac{\alpha}{m} - \beta m\omega^2)\{q,p\}_+]. \quad (3.43)$$

Para que a relação (3.2) seja satisfeita, temos que:

$$\dot{\alpha} = 2\gamma m\omega^2, \quad (3.44)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{2\gamma}{m}, \quad (3.45)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\alpha}{m} + \beta m\omega^2. \quad (3.46)$$

Se conhecermos a expressão da função $\gamma(t)$, $I(t)$ ficará determinado, a menos da forma de $\omega^2(t)$. Apenas por conveniência, vamos introduzir a função $\sigma(t)$, onde seu quadrado seja uma função real dependente do tempo:

$$\beta(t) = \sigma^2(t), \quad (3.47)$$

$$\dot{\beta} = 2\dot{\sigma}\sigma. \quad (3.48)$$

A equação anterior pode ser substituída na equação (3.45) produzindo

$$2\dot{\sigma}\sigma = -\frac{2\gamma}{m}, \quad (3.49)$$

$$\gamma = -m\dot{\sigma}\sigma, \quad (3.50)$$

$$\dot{\gamma} = -m(\ddot{\sigma}\sigma + \dot{\sigma}^2). \quad (3.51)$$

A equação acima pode ser substituída em (3.46) resultando

$$\begin{aligned} -m(\ddot{\sigma}\sigma + \dot{\sigma}^2) &= -\frac{\alpha}{m} + \sigma^2 m\omega^2, \\ m^2(\ddot{\sigma}\sigma + \dot{\sigma}^2) &= \alpha - \sigma^2 m^2\omega^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Isolando α , obtemos:

$$\alpha = m^2(\ddot{\sigma}\sigma + \dot{\sigma}^2 + \sigma^2\omega^2). \quad (3.53)$$

Agora $I(t)$ depende de $\sigma(t)$. Para encontrá-lo, vamos derivar α :

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= m^2(\ddot{\sigma}\sigma + \ddot{\sigma}\dot{\sigma} + 2\dot{\sigma}\ddot{\sigma} + 2\sigma\dot{\sigma}\omega^2 + \sigma^2\omega\dot{\omega}), \\ \dot{\alpha} &= m^2(\ddot{\sigma}\sigma + 3\ddot{\sigma}\dot{\sigma} + 2\omega\sigma(\dot{\sigma}\omega + \sigma\dot{\omega})).\end{aligned}\tag{3.54}$$

Substituindo a equação (3.51) em (3.44), teremos:

$$\dot{\alpha} = 2(-m\dot{\sigma}\sigma)m\omega^2 = -2m^2\omega^2\dot{\sigma}\sigma.\tag{3.55}$$

Substituindo a equação acima na equação (3.54) encontramos

$$\begin{aligned}m^2[\ddot{\sigma}\sigma + 3\ddot{\sigma}\dot{\sigma} + 2\omega\sigma(\dot{\sigma}\omega + \sigma\dot{\omega} + \omega\dot{\sigma})] &= 0, \\ m^2[\ddot{\sigma}\sigma + 3\ddot{\sigma}\dot{\sigma} + 2\omega\sigma(2\dot{\sigma}\omega + \sigma\dot{\omega})] &= 0,\end{aligned}\tag{3.56}$$

que pode ser reorganizada na forma:

$$m^2(\ddot{\sigma}\sigma + 2\omega\dot{\omega}\sigma^2 + \omega^2\dot{\sigma}\sigma + 3\ddot{\sigma}\dot{\sigma} + 3\sigma\dot{\sigma}\omega^2) = 0,\tag{3.57}$$

onde $\omega^2\dot{\sigma}\sigma$ e $3\sigma\dot{\sigma}\omega^2$ foram separados por conveniência para obter:

$$\sigma\frac{d}{dt}(m^2\ddot{\sigma} + m^2\omega^2\sigma) + 3\dot{\sigma}(m^2\ddot{\sigma} + m^2\omega^2\sigma) = 0.\tag{3.58}$$

Utilizaremos uma função auxiliar para resolver a equação acima:

$$\eta = m^2\ddot{\sigma} + m^2\omega^2\sigma.\tag{3.59}$$

Assim, a expressão (3.58) vai se tornar uma equação diferencial de primeira ordem:

$$\sigma\dot{\eta} = -3\dot{\sigma}\eta,\tag{3.60}$$

cuja solução é:

$$\eta = \frac{c^2}{\sigma^3},\tag{3.61}$$

onde, c^2 é uma constante de integração.

Substituindo a solução na equação (3.59), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{\sigma^3} &= m^2\ddot{\sigma} + m^2\omega^2\sigma, \\ \ddot{\sigma} &= \frac{c^2}{m^2\sigma^3} - \omega^2\sigma.\end{aligned}\quad (3.62)$$

Substituindo a equação acima na equação (3.53):

$$\begin{aligned}\alpha &= m^2\frac{c^2}{m^2\sigma^3}\sigma - m^2\omega^2\sigma^2 + m^2\dot{\sigma}^2 + \sigma^2\omega^2m^2, \\ \alpha &= m^2\dot{\sigma}^2 + \frac{c^2}{\sigma^2}.\end{aligned}\quad (3.63)$$

Substituindo α ((3.63)), β ((3.47)) e γ ((3.51)) em I ((3.40))

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}[(m^2\dot{\sigma}^2 + \frac{c^2}{\sigma^2})q^2 + \sigma^2p^2 - m\dot{\sigma}\sigma\{q,p\}_+], \\ I &= \frac{1}{2}[m^2\dot{\sigma}^2q^2 + \frac{c^2}{\sigma^2}q^2 + \sigma^2p^2 - m\dot{\sigma}\sigma qp - m\dot{\sigma}\sigma pq], \\ I &= \frac{1}{2}[(\frac{c}{\sigma})^2q^2 + (\sigma p - m\dot{\sigma}q)^2],\end{aligned}\quad (3.64)$$

onde, a arbitrariedade pela constante c^2 pode ser tirada com uma transformação de escala:

$$\sigma(t) = c^{1/2}\rho(t).\quad (3.65)$$

Assim, a equação (3.64) toma a forma:

$$I = \frac{1}{2}[(\frac{1}{\rho})^2q^2 + (\rho p - m\dot{\rho}q)^2]\quad (3.66)$$

e a equação (3.62) fica sob a forma da equação de vínculo que se segue:

$$\ddot{\rho} = \frac{1}{m^2\rho^3} - \omega^2\rho.\quad (3.67)$$

Observe que, como $I(t)$ é hermitiano, escolhemos apenas as soluções reais da equação

de vínculo; assim, qualquer solução dela pode ser utilizada para construir um operador invariante como este (3.66).

Importante salientar que o operador Invariante nessa forma foi deduzido por Ermakov (ERMAKOV, 1880), depois por Lewis, por isso é conhecido como Ermakov-Lewis.

Agora, podemos então determinar os autoestados e autovalores do operador $I(t)$.

3.4.2 Determinação de autoestados e autovalores de $I(t)$

Para determinar os autoestados e autovalores de $I(t)$, podemos começar definindo os operadores de aniquilação $a(t)$ e de criação $a^\dagger(t)$:

$$a = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho}\right) + i(\rho p - m\dot{\rho}q) \right], \quad (3.68)$$

$$a^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho}\right) - i(\rho p - m\dot{\rho}q) \right], \quad (3.69)$$

feitos dessa forma para que $a(t)$ e $a^\dagger(t)$ satisfaça a seguinte relação de comutação $[a, a^\dagger] = 1$:

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a \\ &= \frac{1}{2\hbar} \left[\left(\frac{q^2}{\rho^2} - i\frac{q}{\rho}\rho p + \frac{q^2}{\rho}m\dot{\rho}i + \frac{q}{\rho}i\rho p + \rho^2 p^2 - m\dot{\rho}q\rho p - \frac{q^2}{\rho}m\dot{\rho}i - m\dot{\rho}q\rho p + m^2\dot{\rho}^2 q^2\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{q^2}{\rho^2} + i\rho p\frac{q}{\rho} - im\dot{\rho}\frac{q^2}{\rho} - i\rho p\frac{q}{\rho} + \rho^2 p^2 - m\dot{\rho}q\rho p + i\frac{q^2}{\rho}m\dot{\rho} - \rho p m\dot{\rho}q + m^2\dot{\rho}^2 q^2\right) \right] \\ &= \frac{1}{2\hbar} (-2i[q, p]) = -i\hbar = 1. \end{aligned}$$

Então, sendo $a^\dagger a = \frac{1}{2\hbar} \left(\frac{q^2}{\rho^2} + iqp - q^2 im\dot{\rho} - iqp + \rho^2 p^2 - m\dot{\rho}q\rho p + mq^2\dot{\rho} - m\rho q\dot{\rho}p + m^2\dot{\rho}^2 q^2 \right)$:

$$\begin{aligned} a^\dagger a &= \left(\frac{1}{2\hbar}\right) \left\{ \left(\frac{q}{\rho}\right)^2 + (\rho p - m\dot{\rho}q)^2 + i[q, p] \right\}, \\ a^\dagger a &= \left(\frac{1}{2\hbar}\right) \{ 2I + i\hbar \}, \\ a^\dagger a &= \frac{1}{2\hbar} (2I - \hbar), \end{aligned}$$

então,

$$a^\dagger a + \frac{\hbar}{2\hbar} = \frac{2I}{2\hbar}, \quad (3.70)$$

tal que,

$$I(t) = \hbar(a^\dagger a + 1/2). \quad (3.71)$$

Agora, o problema de autovalores de $I(t)$ fica reduzido ao problema de autovalores do operador hermitiano $N = a^\dagger a$. Vamos encontrar os números n e vetores $|n,t\rangle$ normalizados com $\langle n,t|n,t\rangle = 1$,

$$N |n,t\rangle = a^\dagger a |n,t\rangle = n |n,t\rangle, \quad (3.72)$$

com $n = 0,1,2..etc.$

Relacionando $I(t)$ a $N(t)$, temos que:

$$I(t) = \hbar(N + 1/2). \quad (3.73)$$

Os autoestados $|\lambda,t\rangle$ de $I(t)$ serão os mesmos de $|n,t\rangle$ de $N(t)$:

$$I |n,t\rangle = \lambda_n |n,t\rangle. \quad (3.74)$$

O espectro de autovalores de $I(t)$ será:

$$\lambda_n = (n + 1/2)\hbar. \quad (3.75)$$

Podemos também determinar as funções de fase do operador $I(t)$. É o que faremos a seguir.

3.4.3 Determinação das fases de $I(t)$

Iremos calcular agora, os elementos diagonais da matriz dos operadores $H(t)$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ para substituir na equação (3.33) e obter a determinação das funções de fase dos autoestados $|n,t\rangle$.

Podemos escrever a equação (3.35) em termos dos operadores a ((3.68)) e a^\dagger ((3.32)). Para isso, vamos começar fazendo $a + a^\dagger$ e $a - a^\dagger$ para isolar p e q :

$$a + a^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[2\frac{q}{\rho}\right]; \quad (3.76)$$

$$a - a^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} [2i\rho p - 2im\dot{\rho}q], \quad (3.77)$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{2\hbar}} (\rho p - m\dot{\rho}q). \quad (3.78)$$

Isolando q na equação (3.76):

$$q = \frac{\sqrt{2\hbar}}{2} \rho (a + a^\dagger) \quad (3.79)$$

substituindo q na equação (4.73) obtemos:

$$\begin{aligned} a - a^\dagger &= \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left\{2i\rho p - 2im\dot{\rho} \left[\frac{\sqrt{2\hbar}}{2} \rho (a + a^\dagger)\right]\right\}, \\ &= \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} [2i\rho p - 2im\dot{\rho}\rho(a + a^\dagger)]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Isolando p na equação acima:

$$p = \frac{\sqrt{2\hbar}}{2} \left[\frac{(a - a^\dagger)}{i\rho} + m\dot{\rho}(a + a^\dagger) \right]. \quad (3.81)$$

Agora, podemos substituir p e q na Hamiltoniana da equação (3.35):

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \frac{1}{2m} \frac{2\hbar}{4} \left[\frac{-i(a - a^\dagger)}{\rho} + m\dot{\rho}(a + a^\dagger) \right] \left[\frac{-i(a - a^\dagger)}{\rho} \right. \\
 &\quad \left. + m\dot{\rho}(a + a^\dagger) \right] + \frac{m\omega^2(t)}{2} \frac{2\hbar}{4} \rho^2 (a + a^\dagger)^2, \\
 &= \frac{1}{m} \frac{\hbar}{4} \left[-\frac{(a - a^\dagger)^2}{\rho^2} - \frac{im\dot{\rho}}{\rho} (a - a^\dagger)(a + a^\dagger) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{im\dot{\rho}}{\rho} (a + a^\dagger)(a - a^\dagger) + m^2\dot{\rho}^2 (a + a^\dagger)^2 \right] + m\omega^2(t) \frac{\hbar}{4} \rho^2 (a + a^\dagger)^2, \\
 &= \frac{\hbar}{4m} \left[-\frac{(a - a^\dagger)^2}{\rho^2} - \frac{im\dot{\rho}}{\rho} \{a^2 + [a, a^\dagger] - (a^\dagger)^2 + a^2 + [a, a^\dagger] - (a^\dagger)^2\} \right. \\
 &\quad \left. + m^2\dot{\rho}^2 (a + a^\dagger)^2 + m\omega^2(t) \frac{\hbar}{4} \rho^2 (a + a^\dagger)^2 \right], \\
 &= \frac{\hbar}{4m} \left\{ -\frac{1}{\rho^2} [a^2 - \{a, a^\dagger\}_+ + (a^\dagger)^2] + \frac{2im\dot{\rho}}{\rho} [(a^\dagger)^2 - a^2] \right. \\
 &\quad \left. + m^2\dot{\rho}^2 [a^2 + \{a, a^\dagger\}_+ + (a^\dagger)^2] + m^2\omega^2(t) \rho^2 [a^2 + a, a^\dagger_+ + (a^\dagger)^2] \right\}.
 \end{aligned}$$

Assim, podemos obter que:

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \frac{\hbar}{4m} \left\{ -\left[\frac{1}{\rho^2} - \frac{2im\dot{\rho}}{\rho} - m^2\dot{\rho}^2 - m^2\omega^2(t)\rho^2 \right] (a^\dagger)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{2im\dot{\rho}}{\rho} - m^2\dot{\rho}^2 - m^2\omega^2(t)\rho^2 \right] a^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{\rho^2} + m^2\dot{\rho}^2 + m^2\omega^2(t)\rho^2 \right] \{a, a^\dagger\}_+ \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Os termos de $(a^\dagger)^2$ e a^2 serão anulados quando aplicados a $|n, t\rangle$:

$$a |n, t\rangle = n^{1/2} |n - 1, t\rangle, \tag{3.83}$$

$$a^2 |n, t\rangle = n |n - 1, t\rangle, \tag{3.84}$$

$$\langle n, t | a^2 |n, t\rangle = \langle n, t | n |n - 1, t\rangle = n \langle n, t | n - 1, t\rangle = 0, \tag{3.85}$$

pois os vetores estão normalizados ($\langle a | b \rangle = 0$, se $a \neq b$);

$$a^\dagger |n, t\rangle = (n + 1)^{1/2} |n + 1, t\rangle, \tag{3.86}$$

$$(a^\dagger)^2 |n, t\rangle = n + 1 |n + 1, t\rangle, \tag{3.87}$$

$$\langle n, t | (a^\dagger)^2 |n, t\rangle = \langle n, t | n + 1 |n + 1, t\rangle = n + 1 \langle n, t | n + 1, t\rangle = 0. \tag{3.88}$$

Restará o termo de $\{a, a^\dagger\}_+$:

$$\langle n, t | H(t) | n, t \rangle = \frac{\hbar}{4m} \left(\frac{1}{\rho^2} + m^2 \dot{\rho}^2 + m^2 \omega^2(t) \rho^2 \right) \langle n, t | \{a, a^\dagger\}_+ | n, t \rangle. \quad (3.89)$$

Sendo,

$$\{a, a^\dagger\}_+ = aa^\dagger + a^\dagger a + (-a^\dagger a + a^\dagger a) = 1 + 2a^\dagger a, \quad (3.90)$$

da equação (3.72), temos que:

$$1 + 2a^\dagger a = 1 + 2N. \quad (3.91)$$

Da equação (3.73):

$$\begin{aligned} I &= \hbar(N + 1/2) \\ N &= \frac{I}{\hbar} - 1/2 \end{aligned} \quad (3.92)$$

substituindo a relação (3.92) em (3.91), obtemos:

$$\{a, a^\dagger\}_+ = 1 + 2N = 1 + \frac{2I}{\hbar} - 1 = \frac{2I}{\hbar} \quad (3.93)$$

das equações (3.74) e (3.75), temos que:

$$\begin{aligned} \langle n, t | H(t) | n, t \rangle &= \frac{\hbar}{4m} \frac{2}{\hbar} \left(\frac{1}{\rho^2} + m^2 \dot{\rho}^2 + m^2 \omega^2(t) \rho^2 \right) \langle n, t | (n + 1/2) \hbar | n, t \rangle, \\ &= \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{\rho^2} + m^2 \dot{\rho}^2 + m^2 \omega^2(t) \rho^2 \right) (n + 1/2) \hbar. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Como já visto, a matriz que representa o operador $H(t)$ tem elementos não diagonais. Busquemos agora obter os elementos diagonais da matriz do operador $\frac{\partial}{\partial t}$. Para isto, derivaremos a equação (3.86) em relação ao tempo:

$$\left(\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} + \frac{a^\dagger \partial}{\partial t} \right) | n, t \rangle = (n + 1)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} | n + 1, t \rangle. \quad (3.95)$$

Fazendo o produto escalar com $\langle n + 1, t |$:

$$\langle n + 1, t | \left(\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} + \frac{a^\dagger \partial}{\partial t} \right) | n, t \rangle = (n + 1)^{1/2} \langle n + 1, t | \frac{\partial}{\partial t} | n + 1, t \rangle, \quad (3.96)$$

ou

$$\langle n + 1, t | \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} | n, t \rangle + \langle n + 1, t | \frac{a^\dagger \partial}{\partial t} | n, t \rangle = (n + 1)^{1/2} \langle n + 1, t | \frac{\partial}{\partial t} | n + 1, t \rangle, \quad (3.97)$$

ou ainda

$$\langle n + 1, t | \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} | n, t \rangle + (n + 1)^{1/2} \langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle = (n + 1)^{1/2} \langle n + 1, t | \frac{\partial}{\partial t} | n + 1, t \rangle. \quad (3.98)$$

Fazendo a mudança de variáveis $n \rightarrow n - 1$ ($\{n = n' - 1; n' = n + 1\}$), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle n', t | \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} | n' - 1, t \rangle + \sqrt{n'} \langle n' - 1, t | \frac{\partial}{\partial t} | n' - 1, t \rangle &= \sqrt{n'} \langle n', t | \frac{\partial}{\partial t} | n', t \rangle, \\ \langle n, t | \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} | n - 1, t \rangle + \sqrt{n} \langle n - 1, t | \frac{\partial}{\partial t} | n - 1, t \rangle &= \sqrt{n} \langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle, \\ \langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle &= \langle n - 1, t | \frac{\partial}{\partial t} | n - 1, t \rangle + \frac{1}{\sqrt{n}} \langle n, t | \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} | n - 1, t \rangle. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Utilizaremos as variáveis dinâmicas p e q obtidas, anteriormente, em funções de a e a^\dagger :

$$q = \frac{\sqrt{2\hbar}}{2} \rho(a + a^\dagger) = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \rho(a + a^\dagger), \quad (3.100)$$

$$p = \frac{\sqrt{2\hbar}}{2} \left[\frac{(a - a^\dagger)}{i\rho} + m\dot{\rho}(a + a^\dagger) \right] = i\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{1}{\rho} - im\dot{\rho}\right)a^\dagger - \left(\frac{1}{\rho} + im\dot{\rho}\right)a \right]. \quad (3.101)$$

Derivando o operador de criação (3.69) com relação ao tempo:

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} \left(-q \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} - i\dot{\rho}p + im\ddot{\rho}q \right), \quad (3.102)$$

substituiremos as equações (3.100) e (3.101) na equação acima:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} &= \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} \left\{ -\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{\dot{\rho}}{\rho} (a + a^\dagger) + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left[\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} - im\dot{\rho}^2 \right) a^\dagger - \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} - im\dot{\rho}^2 \right) a \right] + im\ddot{\rho} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \rho (a + a^\dagger) \right\}, \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} - im\dot{\rho}^2 + im\dot{\rho}\rho \right) a + \left(-\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} - im\dot{\rho}^2 + im\dot{\rho}\rho \right) a^\dagger \right],
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

portando

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{2\dot{\rho}}{\rho} + im(\dot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2) \right] a + im(\dot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2) a^\dagger \right\}, \tag{3.104}$$

então

$$\begin{aligned}
 \langle n, t | \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} | n-1, t \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{2\dot{\rho}}{\rho} + im(\dot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2) \right] \langle n, t | a | n-1, t \rangle + [im(\dot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2)] \langle n, t | a^\dagger | n-1, t \rangle \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{2\dot{\rho}}{\rho} + im(\dot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2) \right] \langle n, t | (n-1)^{1/2} | n-1, t \rangle + [im(\dot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2)] \langle n, t | n^{1/2} | n-1, t \rangle \right\} \\
 &= \frac{\sqrt{n}}{2} im(\dot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2).
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

Que ao ser substituído na relação (3.99), nos dá:

$$\langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle = \langle n-1, t | \frac{\partial}{\partial t} | n-1, t \rangle + \frac{im}{2} (\dot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2), \tag{3.106}$$

que pode ser escrito como:

$$\langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle = \langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} | 0, t \rangle + \frac{im}{2} (\dot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2). \tag{3.107}$$

Como o operador $\frac{\partial}{\partial t}$ é não hermitiano, podemos observar que os elementos de matriz desse operador devem ser imaginários puros.

Como não temos mais informações a respeito do termo $\langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} | 0, t \rangle$, assumimos, por conveniência, que:

$$\langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} | 0, t \rangle = \frac{im}{4} (\dot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2), \tag{3.108}$$

de forma que no limite em que ρ é constante, $\langle 0,t | \frac{\partial}{\partial t} | 0,t \rangle$ tende a zero. Consideramos, portanto, que os elementos diagonais de matriz do operador $\frac{\partial}{\partial t}$ serão dados por:

$$\langle n,t | \frac{\partial}{\partial t} | n,t \rangle = \frac{im}{2}(\dot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2)(1/2 + n). \quad (3.109)$$

Como calculamos os elementos diagonais de matriz dos operadores $H(t)$ e $\frac{\partial}{\partial t}$, dados pelas equações (3.94) e (3.109), podemos substituí-los na equação (3.32) para encontrar a equação para as funções de fase do operador $I(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_n}{dt} &= -\frac{\hbar m^2}{2m}(\dot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2)(n + 1/2) - \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{1}{\rho^2} + m^2\dot{\rho}^2 + m^2\omega^2(t)\rho^2\right)(n + 1/2) \\ &= -\frac{1}{2m}(m\rho\ddot{\rho} - m^2\dot{\rho}^2 + \frac{1}{\rho^2} + m^2\dot{\rho}^2 + m^2\omega^2(t)\rho^2)(n + 1/2) \\ &= -\frac{1}{2m}(m\rho\ddot{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + m^2\omega^2(t)\rho^2)(n + 1/2). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Com a condição de vínculo (3.67), podemos escrever $\ddot{\rho} + \omega^2\rho = \frac{1}{m^2\rho^3}$, portanto:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_n}{dt} &= -\frac{1}{2m}\left[m^2\rho\left(\frac{1}{m^2\rho^3}\right) + \frac{1}{\rho^2}\right](n + 1/2) \\ &= \left(-\frac{1}{2m\rho^2} - \frac{1}{2m\rho^2}\right)(n + 1/2) = \frac{1}{m\rho^2}(n + 1/2). \end{aligned} \quad (3.111)$$

As funções de fase também podem ser escritas na forma integral:

$$\alpha_n(t) = -\frac{1}{m}(n + 1/2) \int_0^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)}. \quad (3.112)$$

Isso nos permite escrever que os autoestados de $I(t)$ que satisfazem a equação de Schrödinger para o Oscilador Harmônico dependente do tempo, serão dados por:

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{i\alpha_n(t)} |n,t\rangle, \quad (3.113)$$

onde as fases $\alpha_n(t)$ são dadas pela equação (3.112).

Então, poderemos escrever a solução geral da equação de Schrödinger (3.5) para o operador hamiltoniano (3.35) como:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n e^{i\alpha_n(t)} |n,t\rangle, \quad (3.114)$$

onde, os C_n s são constantes.

Importante salientar que, a dependência temporal das soluções da equação de Schrödinger também pode ser escrita em termos de um operador unitário $U(t)$ que satisfaça as condições:

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle, \quad (3.115)$$

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = H(t)U. \quad (3.116)$$

Quando a hamiltoniana não depender do tempo, a solução da equação acima será:

$$\begin{aligned} \partial U(t) &= -\frac{i}{\hbar} H U(t) dt, \\ \int \frac{\partial U(t)}{U(t)} &= -\frac{i}{\hbar} H \int dt, \\ \ln U(t) &= -\frac{i}{\hbar} H t, \\ U(t) &= e^{-\frac{i}{\hbar} H t}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Mas, no nosso caso, a hamiltoniana depende explicitamente do tempo. Ainda assim, a evolução temporal dos autoestados de $I(t)$, $|n,t\rangle$, pode ser determinada (a partir da equação (3.113)) como:

$$|n,t\rangle = e^{-i\alpha_n(t)} U(t) |n,0\rangle, \quad (3.118)$$

onde, em $t = 0$, $U(t) = 1$ e $\alpha_n(0) = 0$, de forma que os estados $|\psi(0)\rangle$ e $|n,0\rangle$ ficam iguais.

Agora que entendemos como funciona a aplicação do Método de Invariantes, no capítulo 5 utilizaremos (o mesmo) no estudo do comportamento do biofóton. Mas antes, estudaremos o que é um estado de incerteza mínima e/ou um estado coerente.

4 Estados coerentes

Schrödinger estava procurando uma classe de estados da Mecânica Quântica que exibissem o comportamento do oscilador harmônico clássico, quando descobriu os estados coerentes do oscilador harmônico simples (RAY, 1982). Nesse estado, a energia média do oscilador é igual à energia clássica (exceto no ponto zero) e as médias de q e p têm as mesmas formas oscilatórias que no caso clássico, com fase definida. Era seu interesse encontrar estados quânticos com propriedades semelhantes para potenciais diferentes do oscilador harmônico. Estes estados coerentes começaram a receber atenção da comunidade científica por volta de 1960, sendo utilizados para descrever o campo de radiação. Na física, esses estados são também conhecidos como estados de incerteza mínima e estados coerentes de Schrödinger (LOUISELL, 1973; WALLS; MILBURN et al., 1994).

O estado coerente de um oscilador de massa m e frequência angular ω foi introduzido na literatura nas formas:

- os estados coerentes são gerados a partir do estado fundamental $|0\rangle$ do oscilador pelo operador de deslocamento $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$ atuando sobre ele;
- estados coerentes são os autoestados do operador de aniquilação a ;
- estados coerentes são estados mínimos de incerteza ($\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$) que possuem a propriedade adicional $\Delta p = m\omega \Delta x$ (os demais são chamados de estados comprimidos).

Embora esteja se tratando de um oscilador mecânico, a teoria pode ser adaptada ao caso de um modo do campo de radiação, definindo $m = 1$ e interpretando q como a coordenada normal e p como sua derivada no tempo (WALLS; MILBURN, 1994; HOWARD; ROY, 1985).

Como discutimos no capítulo 2, quando comparados os resultados teóricos da emissão de fótons por um campo térmico caótico e de um campo completamente coerente com dados experimentais, encontra-se indicações de que biofótons se originam de campos coe-

rentes ocorrendo em tecidos vivos. Assim, os biofótons devem ser tratados à luz da teoria de estados coerentes (POPP, 1986).

Por isto, neste capítulo estudamos aspectos teóricos dos estados coerentes, que posteriormente serão aplicados ao hamiltoniano associado ao biofóton. Tratamos o caso simples de um oscilador harmônico, que no vácuo, representa um estado coerente.

4.1 Teoria quântica de um oscilador harmônico

A equação de movimento de Newton para um oscilador harmônico clássico de massa m e frequência angular ω é dada por:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (4.1)$$

A solução da equação acima é:

$$q(t) = |A| \cos(\omega t - \phi), \quad (4.2)$$

que pode ser reescrita como:

$$q(t) = \frac{1}{2} A e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} A^* e^{i\omega t}, \quad (4.3)$$

onde, $A = |A| e^{i\phi}$.

Para discutir a teoria quântica do oscilador, consideramos o hamiltoniano:

$$H(t) = \frac{p^2(t)}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2(t)}{2}, \quad (4.4)$$

onde, q e p são canonicamente conjugados. Eles satisfazem a relação de comutação:

$$[q(t), p(t)] = i\hbar. \quad (4.5)$$

As equações de movimento de Heisenberg para $q(t)$ e $p(t)$ são:

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{i\hbar}[q(t), H] = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p(t)}{m}, \quad (4.6)$$

$$\dot{p}(t) = \frac{1}{i\hbar}[p(t), H] = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q(t), \quad (4.7)$$

que quando combinados resultam na equação do oscilador harmônico:

$$\ddot{q}(t) = \frac{\dot{p}(t)}{m}, \quad (4.8)$$

sabendo então que $\dot{p}(t) = \ddot{q}(t)m = -m\omega^2 q(t)$, obtemos:

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0. \quad (4.9)$$

A teoria quântica de um oscilador é tratada em termos dos operadores a e a^\dagger . Em analogia a equação (4.3), a solução da equação (4.9) pode ser escrita como:

$$q(t) = q_0[ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}], \quad (4.10)$$

onde, a e a^\dagger são dois operadores adimensionais independentes do tempo, a^\dagger é o adjunto hermitiano de a e o comprimento q_0 é:

$$q_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}. \quad (4.11)$$

O operador momento é:

$$p(t) = -m\omega q_0[ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}]. \quad (4.12)$$

Reescrevendo agora as equações (4.10) e (4.12) para obter a e a^\dagger :

$$q = \left(\frac{\hbar}{im\omega}\right)^{1/2}(a^\dagger + a), \quad (4.13)$$

$$p = i\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{1/2}(a^\dagger - a), \quad (4.14)$$

tal que,

$$a(t) = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} [m\omega q(t) + ip(t)], \quad (4.15)$$

$$a^\dagger(t) = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} [m\omega q(t) - ip(t)]. \quad (4.16)$$

Através das equações de Heisenberg para $a(t)$ e $a^\dagger(t)$, temos que:

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{i\hbar} [a(t), H] = -i\omega a(t), \quad (4.17)$$

$$\dot{a}^\dagger(t) = \frac{1}{i\hbar} [a^\dagger(t), H] = i\omega a^\dagger(t), \quad (4.18)$$

que nos conduz em

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t}, \quad (4.19)$$

$$a^\dagger(t) = a^\dagger(0)e^{i\omega t}, \quad (4.20)$$

onde $a(0) = a$ e $a^\dagger(0) = a^\dagger$ em $t = 0$.

Notar também que através da relação de comutação (4.5), temos ainda:

$$[a(t), a^\dagger(t)] = [a, a^\dagger] = 1. \quad (4.21)$$

Substituindo:

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a^\dagger + a), \quad (4.22)$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a), \quad (4.23)$$

em $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$. Temos que:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega [a(t)a^\dagger(t) + a^\dagger(t)a(t)]. \quad (4.24)$$

Usando a relação de comutação (4.21), na equação acima, obtemos:

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2). \quad (4.25)$$

O operador $N = a^\dagger a$ que é hermitiano, isto é, $N = a^\dagger a = N^\dagger$, é chamado de operador numérico. Temos que,

$$[a, a^\dagger a] = [a, N] = a, \quad (4.26)$$

$$[a^\dagger, a^\dagger a] = [a^\dagger, N] = -a^\dagger. \quad (4.27)$$

Podemos então escrever:

$$Na = a(N - 1), \quad (4.28)$$

$$Na^\dagger = a^\dagger(N + 1), \quad (4.29)$$

assim, a hamiltoniana (4.25) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega(N + 1/2) \\ N &= \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.30)$$

como o operador numérico N comuta com H , podemos dizer que eles têm autoestados simultâneos. Note que H e, portanto, N são observáveis.

Devido a conexão simples entre N e H , o problema de autovalor para H :

$$H |E\rangle = E |E\rangle, \quad (4.31)$$

é inteiramente equivalente ao problema do autovalor para N , ou seja,

$$N |n\rangle = n |n\rangle, \quad (4.32)$$

onde, os autoestados $|n\rangle$ formam um conjunto ortonormal completo de vetores de base na

representação N .

Se operarmos os dois lados de (4.28) e (4.29) em $|n\rangle$ e usarmos (4.32), temos que:

$$N\{a|n\rangle\} = (n-1)\{a|n\rangle\}, \quad (4.33)$$

$$N\{a^\dagger|n\rangle\} = (n+1)\{a^\dagger|n\rangle\} \quad (4.34)$$

ou seja, se $|n\rangle$ é um autoestado de N com autovalor n , então $a|n\rangle$ é um autoestado de N com autovalor $n-1$ e $a^\dagger|n\rangle$ é um autoestado com autovalor $n+1$. Podemos repetir o processo e obter o autoestado $a^2|n\rangle$ com autovalor $n-2$, e $(a^\dagger)^2|n\rangle$ com autovalor $n+2$. Esse processo pode continuar indefinidamente gerando um conjunto infinito de autoestados e autovalores. Os n s só podem ser zero ou um número inteiro positivo.

Os autoestados gerados pela aplicação sucessiva de $a(t)$ e $a^\dagger(t)$ podem ser normalizados da seguinte forma: como $a^2|n\rangle$ é um autoestado de N com autovalor $n-1$, $a^2|n\rangle$ pode diferir de $|n-1\rangle$ por uma constante. Assim,

$$a|n\rangle = C_n|n-1\rangle. \quad (4.35)$$

A norma é:

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = n\langle n|n\rangle = |C_n|^2\langle n-1|n-1\rangle. \quad (4.36)$$

Se $\langle n-1|n-1\rangle$ é normalizado para a unidade e escolhermos $|C_n| = \sqrt{n}$, então $\langle n|n\rangle = 1$. A fase de C_n é arbitrária e nós a escolhemos como zero. Assim,

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (4.37)$$

quando $n=0$:

$$a|0\rangle = 0. \quad (4.38)$$

De igual forma,

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (4.39)$$

daí, temos que, se aplicarmos o operador a^\dagger ao estado $|0\rangle$ n vezes, geramos o estado $|n\rangle$ dado por:

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (4.40)$$

As relações de ortonormalidade são dadas por:

$$\langle n'|n\rangle = \delta_{n'n}, \quad (4.41)$$

e a relação de completeza é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbb{I}, \quad (4.42)$$

onde, \mathbb{I} é o operador identidade.

Os autovalores da hamiltoniana (4.25) são dados por:

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (4.43)$$

onde,

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2). \quad (4.44)$$

Usando (4.42) podemos escrever qualquer estado $|\psi\rangle$ e qualquer operador (atuando no espaço de Hilbert do oscilador) em termos de $|n\rangle$. Por exemplo,

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\psi\rangle \quad (4.45)$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| A |m\rangle \langle m| \quad (4.46)$$

em particular temos das equações (4.37) e (4.39), que:

$$a^\dagger a = \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle \langle n| \quad (4.47)$$

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} |n-1\rangle \langle n| \quad (4.48)$$

$$a^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n| \quad (4.49)$$

podemos usar a equação (4.41) para obter os elementos de matriz de a , a^\dagger e N , na representação N :

$$\langle n' | a | 0 \rangle = 0, \quad (4.50)$$

$$\langle n' | a | n'' \rangle = \sqrt{n''} \delta_{n', n''-1}, \quad (4.51)$$

$$\langle n' | a^\dagger | n'' \rangle = \sqrt{n''+1} \delta_{n', n''+1}, \quad (4.52)$$

$$\langle n' | N | n'' \rangle = n'' \delta_{n', n''}. \quad (4.53)$$

Um oscilador excitado no seu n -ésimo estado quântico, se comporta como uma coleção de n indistinguíveis partículas de Bose. Por convenção, dizemos que a^\dagger cria (a destrói) um estado quântico com energia $\hbar\omega$.

Agora, vamos verificar que q_0 dado pela equação (4.11) é o deslocamento do ponto zero da raiz quadrada média. Das relações (4.19) e (4.20) podemos escrever a equação (4.10) como:

$$q = q_0(a^\dagger + a) \quad (4.54)$$

assim,

$$\langle q^2 \rangle = \langle 0 | q^2 | 0 \rangle = q_0^2 \langle 0 | (a^\dagger + a)^2 | 0 \rangle, \quad (4.55)$$

e, pela equação (4.22), temos:

$$\langle q^2 \rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right) \langle 0 | (a^\dagger + a)^2 | 0 \rangle, \quad (4.56)$$

então, concluímos:

$$q_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}. \quad (4.57)$$

Para encontrar o valor esperado de q e p dados pelas equações (4.22) e (4.23) frente as equações (4.48) e (4.49). Isto conduz à:

$$\langle n|q|n\rangle = \langle n|p|n\rangle = 0, \quad (4.58)$$

isso ocorre porque p e q são operadores não diagonais nessa representação numérica. Assim, estes estados numéricos não são apropriados para uma transição ao limite clássico. Chegamos a este resultado porque a fase é completamente indefinida enquanto o número de excitação é especificado.

A incerteza em p e q é:

$$(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 \quad (4.59)$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \quad (4.60)$$

no estado $|n\rangle$:

$$(\Delta q)^2 = \langle n|q^2|n\rangle - (\langle n|q|n\rangle)^2 = \langle n|q^2|n\rangle, \quad (4.61)$$

de p e q e da relação de comutação (4.21), obtemos:

$$(\Delta q)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n|2a^\dagger a + 1|n\rangle = \frac{\hbar}{m\omega} (n + 1/2) \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} (\Delta p)^2 &= \langle n|p^2|n\rangle - (\langle n|p|n\rangle)^2 = \langle n|p^2|n\rangle \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2} \langle n|2a^\dagger a + 1|n\rangle = m\hbar\omega (n + 1/2) \end{aligned} \quad (4.63)$$

de modo que devemos constatar:

$$\begin{aligned} (\Delta q)^2 (\Delta p)^2 &= \hbar^2 (n + 1/2)^2, \\ (\Delta q)(\Delta p) &= \hbar (n + 1/2). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Este resultado expressa o princípio da incerteza de Heisenberg para o número de estados do oscilador. O estado de vácuo $n = 0$ de um oscilador harmônico, tem o menor produto de incerteza de todos os estados numéricos, $\hbar/2$, e é considerado um estado de incerteza mínima (HOWARD; ROY, 1987; CARRUTHERS; NIETO, 1965; GLAUBER, 1963), bem como o estado coerente que iremos definir a seguir.

4.2 Os estados coerentes

Usando a representação $|n\rangle$ que satisfaz a equação de autovalor:

$$a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle, \quad (4.65)$$

que formam um conjunto ortogonal completo de valores de base que descrevem um oscilador harmônico, vamos mostrar que um estado coerente é um estado de pacote de onda de incerteza mínima (NIETO; SIMMONS JR, 1979; LOUISELL, 1973; HARTLEY; RAY, 1982).

A saber, o autovetor do operador não hermitiano a como sendo um estado coerente. Para encontrá-lo vamos resolver o problema de autovalor:

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (4.66)$$

Para resolver a equação acima, usamos a relação de completeza para expandir $|\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle, \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha) |n\rangle, \end{aligned} \quad (4.67)$$

considerando que $C_n(\alpha) = \langle n|\alpha\rangle$ é a transformação entre o número e as representações coerentes do estado.

Note que a quantidade $|\langle n|\alpha\rangle|^2$ dá a probabilidade de encontrar o oscilador com energia $n\hbar\omega$, se uma medição for feita quando o oscilador estiver no estado $|\alpha\rangle$. Substituindo a equação (4.67) em (4.66) e usando (4.37), teremos:

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\alpha)\sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha)|n\rangle, \quad (4.68)$$

onde, a primeira soma deve ir de 1 a ∞ pois o termo $n = 0$ dá zero. Então, vamos deslocar os índices fazendo $n \rightarrow n + 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(\alpha)\sqrt{n+1}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha C_n(\alpha)|n\rangle \quad (4.69)$$

como $\langle m|n\rangle = \delta_{nm}$, vamos multiplicar tudo por $\langle m|$, para obter:

$$C_{n+1}(\alpha)\sqrt{n+1} = \alpha C_n(\alpha), \quad (4.70)$$

ou,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{1}}C_0, \\ C_2 &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}C_1 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}\sqrt{1}}C_0 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}C_0, \\ C_3 &= \frac{\alpha}{\sqrt{3}}C_2 = \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}}C_0, \end{aligned}$$

nos possibilitando escrever de uma forma generalizada:

$$C_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}C_0. \quad (4.71)$$

Portanto, vemos que:

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \quad (4.72)$$

escolhemos C_0 de modo que

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*m}\alpha^n}{\sqrt{n!m!}} \langle m|n\rangle = |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}. \quad (4.73)$$

Ao expandir e^x em série de Taylor, temos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (4.74)$$

então, a equação (4.73), se reduz à

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = |C_0|^2 e^{|\alpha|^2} \quad (4.75)$$

de $|C_0|^2 = \frac{1}{e^{|\alpha|^2}}$, e (4.72):

$$\langle n | \alpha \rangle = C_n(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}}. \quad (4.76)$$

O estado coerente é dado por:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (4.77)$$

usando a equação (4.40), teremos

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (4.78)$$

ou

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle, \quad (4.79)$$

onde, podemos realizar a soma em n já que o "v\u00e1cuo" (ou estado fundamental $|0\rangle$) \u00e9 independente de n .

Note que,

$$|\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}, \quad (4.80)$$

que representa uma distribui\u00e7\u00e3o de Poisson sobre os estados do n\u00famero de f\u00f3tons.

Normalizando em (4.78):

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \langle 0 | e^{\alpha^* a}, \\
\langle \alpha | \alpha \rangle &= e^{-|\alpha|^2} \langle 0 | e^{\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} | 0 \rangle, \\
\langle 0 | e^{\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} | 0 \rangle &= e^{|\alpha|^2}.
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Como a é não hermitiano, poderemos demonstrar que os autovetores (estados coerentes $|\alpha\rangle$) não são ortogonais. Porém, muito úteis.

De (4.77) e seu adjunto, temos que:

$$\begin{aligned}
\langle \beta | \alpha \rangle &= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \langle n | m \rangle, \\
&= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta^*)^n}{n!}, \\
&= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha\beta^*},
\end{aligned} \tag{4.82}$$

se os estados fossem ortogonais, este resultado daria zero para $\alpha \neq \beta$. Temos ainda:

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + 2\alpha\beta^*} = e^{-|\alpha - \beta|^2}, \tag{4.83}$$

de forma que os estados se tornam aproximadamente ortogonais à medida que $|\alpha - \beta|^2$ aumenta. Os estados coerentes formam um conjunto completo de estados.

Podemos mostrar que α é complexo. A relação de completeza é escrita como:

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = \mathbb{I} \tag{4.84}$$

\mathbb{I} é o operador identidade. A integração é sobre todo o plano complexo. Tal que:

$$\alpha = x + iy = r e^{i\theta}, \tag{4.85}$$

$$d^2\alpha = dx dy = r dr d\theta. \tag{4.86}$$

Para verificar (4.84), usamos a equação (4.77) e seu adjunto do lado esquerdo:

$$\langle \alpha | = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \langle m | \frac{\alpha^{*m}}{m!} \quad (4.87)$$

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle m|}{\pi \sqrt{n!m!}} \int e^{-|\alpha|^2} \alpha^{*m} \alpha^n d^2\alpha, \quad (4.88)$$

em coordenadas polares:

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle m|}{\pi \sqrt{n!m!}} \int_0^{\infty} e^{-|r|^2} r^{n+m} r dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \quad (4.89)$$

observe que: $e^{-|e^{i\theta}|^2} = e^{-(e^{i\theta}e^{-i\theta})} = e^{-2\cos\theta} = e^0 = 1$.

Sendo,

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} = 2\pi \delta_{nm} \quad (4.90)$$

fazendo $\xi = r^2$, temos:

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle n|}{\pi n!} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^n d\xi \pi \quad (4.91)$$

usando que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, teremos que $n! = \int_0^{\infty} \frac{\xi^n}{e^\xi} d\xi$. Assim, como previsto pela equação (4.84):

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle n| n!}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1. \quad (4.92)$$

Podemos verificar que um estado coerente é um estado de incerteza mínima:

Usando as relações entre a, a^\dagger e q (4.22), p (4.23):

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q + ip) \quad (4.93)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q - ip) \quad (4.94)$$

$$(4.95)$$

vemos que os valores esperados de q, p, q^2 e p^2 no estado $|\alpha\rangle$ são:

$$\langle q \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \langle \alpha | (a^\dagger + a) | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\alpha^* + \alpha) \quad (4.96)$$

$$\langle p \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \langle \alpha | (a^\dagger - a) | \alpha \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\alpha^* - \alpha) \quad (4.97)$$

$$\langle q^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\omega} \langle \alpha | (a^{\dagger 2} + a^\dagger a + a a^\dagger + a^2) | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{2\omega} (\alpha^{*2} + 2\alpha^* \alpha + 1 + \alpha^2) \quad (4.98)$$

$$\langle p^2 \rangle = -\frac{\hbar\omega}{2} \langle \alpha | (a^{\dagger 2} - a^\dagger a - a a^\dagger + a^2) | \alpha \rangle = -\frac{\hbar\omega}{2} (\alpha^{*2} - 2\alpha^* \alpha - 1 + \alpha^2) \quad (4.99)$$

as variâncias são, portanto:

$$(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 = \frac{\hbar}{2\omega} (\alpha^{*2} + 2\alpha^* \alpha + 1 + \alpha^2) - \frac{\hbar}{2\omega} (\alpha^{*2} + 2\alpha^* \alpha + \alpha^2) = \frac{\hbar}{2\omega}, \quad (4.100)$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = -\frac{\hbar\omega}{2} (\alpha^{*2} - 2\alpha^* \alpha - 1 + \alpha^2) + \frac{\hbar\omega}{2} (\alpha^{*2} - 2\alpha^* \alpha + \alpha^2) = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad (4.101)$$

teremos que:

$$\Delta p \Delta q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} = \frac{\hbar}{2}, \quad (4.102)$$

que é o valor mínimo permitido pelo princípio da incerteza.

Da equação (4.96) vemos que:

$$\alpha^* = \langle q \rangle \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}} - \alpha \quad (4.103)$$

substituindo este resultado em $\langle p \rangle$ (4.97), podemos obter os autovalores α :

$$\langle p \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\langle q \rangle \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}} - \alpha - \alpha), \quad (4.104)$$

obtendo, assim:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}[\langle q \rangle \omega + i \langle p \rangle], \quad (4.105)$$

como $\langle q \rangle$ e $\langle p \rangle$ são reais e podem assumir quaisquer valores de $-\infty$ a ∞ , α pode estar em qualquer lugar no plano complexo.

A função de transformação do estado coerente para a representação de coordenadas $\langle q' | \alpha \rangle$ pode ser obtida:

$$a | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q + ip) | \alpha \rangle. \quad (4.106)$$

Aplicando $\langle q' |$:

$$\langle q' | (\omega q + ip) | \alpha \rangle = \sqrt{2\hbar\omega} \alpha \langle q' | \alpha \rangle, \quad (4.107)$$

considerando o momento como um operador diferencial, $p = -i\hbar \frac{d}{dq'}$, temos que:

$$(\omega q' + \hbar \frac{d}{dq'}) \langle q' | \alpha \rangle = \sqrt{2\hbar\omega} \alpha \langle q' | \alpha \rangle, \quad (4.108)$$

podemos ainda escrever:

$$\frac{d \langle q' | \alpha \rangle}{\langle q' | \alpha \rangle} = \left(\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}} \alpha - \frac{\omega}{\hbar} q' \right) dq' \quad (4.109)$$

que ao integrar-mos, obtemos:

$$\begin{aligned} \ln \langle q' | \alpha \rangle &= \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}} \alpha q' - \frac{\omega}{2\hbar} q'^2 + N, \\ \langle q' | \alpha \rangle &= N e^{\left(\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}} \alpha q' - \frac{\omega}{2\hbar} q'^2 \right)}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Para encontrar N escolhemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\langle q' | \alpha \rangle|^2 dq' = 1, \quad (4.111)$$

usando que $|x|^2 = x^* x$, temos que $|e^x|^2 = e^{x^*} e^x = e^{x^* + x}$. Assim:

$$|\langle q'|\alpha\rangle|^2 = |N|^2 e^{(\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}(\alpha^* + \alpha)q' - \frac{\omega}{2\hbar}q'^2)}, \quad (4.112)$$

olhando para o expoente, podemos completar quadrado, então:

$$-\left[\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}q' - \frac{(\alpha^* + \alpha)}{\sqrt{2}}\right]^2 = -\frac{\omega}{\hbar}q'^2 - \frac{(\alpha^* + \alpha)}{2} + \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}(\alpha^* + \alpha)q', \quad (4.113)$$

obtemos

$$|\langle q'|\alpha\rangle|^2 = |N|^2 e^{\{-[\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}q' - \frac{(\alpha^* + \alpha)}{\sqrt{2}}]^2 + \frac{(\alpha^* + \alpha)}{2}\}} \quad (4.114)$$

integrando com relação a q' :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\langle q'|\alpha\rangle|^2 dq' = |N|^2 e^{\frac{(\alpha^* + \alpha)^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\{-[\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}q' - \frac{(\alpha^* + \alpha)}{\sqrt{2}}]^2\}} dq', \quad (4.115)$$

esta é uma integral gaussiana, com resultado conhecido:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (4.116)$$

Considerando:

$$x = \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}q' - \frac{(\alpha^* + \alpha)}{\sqrt{2}}, \quad (4.117)$$

$$dx = \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}dq', \quad (4.118)$$

temos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\langle q'|\alpha\rangle|^2 dq' = |N|^2 e^{\frac{(\alpha^* + \alpha)^2}{2}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}} = 1. \quad (4.119)$$

Portanto,

$$N = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{\frac{(\alpha^* + \alpha)^2}{4} + i\mu}, \quad (4.120)$$

onde, μ é uma fase real arbitrária.

Substituindo N na equação (4.110):

$$\langle q'|\alpha\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{\frac{(\alpha^*+\alpha)^2}{4} - \frac{\omega}{2\hbar}q'^2 + \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\alpha q' + i\mu}, \quad (4.121)$$

usando α e α^* obtidos anteriormente:

$$\begin{aligned} \langle q'|\alpha\rangle &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{\frac{1}{4}(\langle q\rangle\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}})^2 - \frac{\omega}{2\hbar}q'^2 + \frac{q'}{\hbar}(\langle q\rangle\omega + i\langle p\rangle) + i\mu}, \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\omega}{2\hbar}(q' - \langle q\rangle)^2 + i\frac{\langle p\rangle}{\hbar}q' + i\mu}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Comparando com a função de onda de incerteza mínima:

$$\psi(q') = \langle q'|\psi\rangle = \frac{1}{[2\pi(\Delta q)^2]^{1/4}} e^{i\frac{\langle p\rangle}{\hbar}q' - \frac{(q' - \langle q\rangle)^2}{4(\Delta q)^2}}; \quad (4.123)$$

utilizando o valor de $(\Delta q)^2$ (4.100), vemos que $|\alpha\rangle$ é de fato um estado de pacote de onda de incerteza mínima. Neste caso, Δq pode ser arbitrário mas deve satisfazer a relação de incerteza (4.102). Assim, a relação (4.122) representa uma infinidade de estados mínimos de incerteza, enquanto a equação anterior representa uma dupla infinidade.

Mantendo a generalidade, podemos escolher a fase μ de modo que:

$$N = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{(|\alpha|^2 + \alpha^2)}{2}}, \quad (4.124)$$

$$|N|^2 = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{(|\alpha|^2 + \alpha^2 + |\alpha|^2 + \alpha^{*2})}{2}},$$

$$|N|^2 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{(\alpha^* + \alpha)^2}{2}}, \quad (4.125)$$

que satisfaz a relação (4.119). Então, substituindo a equação (4.124) em (4.110), temos:

$$\langle q'|\alpha\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\alpha q' - \frac{\omega}{2\hbar}q'^2 - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}}, \quad (4.126)$$

obtendo, finalmente, a função de transformação do estado coerente para a representação de coordenadas $\langle q'|\alpha\rangle$. Em seguida, iremos realizar um estudo sobre a dinâmica eletromagnética do biofóton, através de descrições clássicas e quânticas à luz do método invariante que introduzimos no capítulo 3 e entender como o comportamento do biofóton se relaciona com o estado coerente.

5 Dinâmica eletromagnética de um bi-fóton

5.1 Descrição clássica

Vamos começar com as equações de Maxwell, para apresentar uma descrição clássica da propagação de uma onda eletromagnética em um meio linear e homogêneo. As equações macroscópicas de Maxwell na ausência de cargas livres dentro do meio são descritas como:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (5.4)$$

onde,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (5.7)$$

onde, ϵ é a permissividade elétrica, μ é a permeabilidade magnética e σ a condutividade do meio. No calibre de Coulomb, ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), temos que os campos elétricos e magnéticos são expressos como:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.9)$$

Podemos reescrever a equação (5.4) como:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\sigma \mathbf{E}, \quad (5.10)$$

considerando também que:

$$\mu = \mu_0, \quad (5.11)$$

$$\epsilon = \epsilon_0, \quad (5.12)$$

$$\sigma = \sigma(t). \quad (5.13)$$

Para verificar que \mathbf{A} satisfaz a equação de onda amortecida, fazemos:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_0\sigma(t) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0. \quad (5.14)$$

A solução para a equação (5.14) pode ser obtida na forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) q_l(t), \quad (5.15)$$

onde, $\mathbf{u}_l(\mathbf{r})$ e $q_l(t)$, são respectivamente, o modo e amplitude de funções (ou, função espacial e temporal).

Usando a equação (5.15) em (5.14), obtemos:

$$\frac{\nabla^2 \mathbf{u}_l(\mathbf{r})}{\mathbf{u}_l(\mathbf{r})} = C, \quad (5.16)$$

onde, C é uma constante de separação. Ou seja, podemos ainda escrever:

$$\nabla^2 \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) + \frac{\omega_l^2}{c_0^2} \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.17)$$

e

$$\frac{d^2 q_l}{dt^2} + \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \frac{dq_l}{dt} + \omega_l^2 q_l = 0, \quad (5.18)$$

onde,

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (5.19)$$

que é a velocidade da luz no meio independente do tempo e ω_l é uma constante de separação que significa a frequência natural do modo do biofóton.

Para:

$$\sigma(t) = \frac{2\epsilon_0 \gamma_0}{1 + \gamma_0 t}, \quad (5.20)$$

com γ_0 sendo o coeficiente de amortecimento, a equação (5.18) se torna:

$$\frac{d^2 q_l}{dt^2} + \gamma(t) \frac{dq_l}{dt} + \omega_l^2 q_l = 0, \quad (5.21)$$

com

$$\gamma(t) = \frac{2\gamma_0}{1 + \gamma_0 t}. \quad (5.22)$$

Agora, vamos considerar a hamiltoniana do biofóton que coincide com a obtida por (CHOI, 2006). Assim,

$$H_l(q, p, t) = \frac{p_l^2}{2\epsilon_0 (1 + \gamma_0 t)^2} + \frac{1}{2} \epsilon_0 (1 + \gamma_0 t)^2 \omega_l^2 q_l^2. \quad (5.23)$$

Das equações de Hamilton, temos que:

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H_l}{\partial p_l}, \quad (5.24)$$

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H_l}{\partial q_l}. \quad (5.25)$$

Substituindo a equação (5.23) nas equações (5.24) e (5.25), podemos encontrar:

$$\dot{q}_l = \frac{p_l}{\epsilon_0 (1 + \gamma_0 t)^2}, \quad (5.26)$$

$$\dot{p}_l = -\epsilon_0 (1 + \gamma_0 t)^2 \omega_l^2 q_l, \quad (5.27)$$

de forma que:

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_l &= -\frac{2\lambda_0 (1 + \gamma_0 t)^{-3} p_l}{\epsilon_0} + \frac{\dot{p}_l}{\epsilon_0 (1 + \gamma_0 t)^2}, \\
\ddot{q}_l &= -\frac{2\gamma_0 (1 + \gamma_0 t)^{-3} \epsilon_0 (1 + \gamma_0 t)^2 \dot{q}_l}{\epsilon_0} - \frac{\epsilon_0 (1 + \gamma_0 t)^2 \omega_0^2 q_l}{\epsilon_0 (1 + \gamma_0 t)^2}, \\
\ddot{q}_l &= -\frac{2\lambda_0 \dot{q}_l}{(1 + \gamma_0 t)} - \omega_0^2 q_l.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Portanto,

$$\ddot{q}_l + \gamma(t) \dot{q}_l + \omega_l^2 q_l = 0, \tag{5.29}$$

que representa a equação do movimento. Neste caso, $\gamma(t)$ é dado por:

$$\gamma(t) = -\frac{2\lambda_0}{1 + \gamma_0 t}. \tag{5.30}$$

A solução da equação (5.29) é:

$$q_l(t) = \frac{q_{0l}}{1 + \gamma_0 t} \text{sen}(\omega_l t + \delta_l), \tag{5.31}$$

onde, q_{0l} é a amplitude inicial e δ_l é uma constante de fase (ambas são constantes arbitrárias).

A solução para a equação (5.17) com o objetivo de resolver essa equação de onda se dá da seguinte forma. Nós consideramos que o campo eletromagnético está confinado em uma cavidade cubica de lado L do meio. Também supomos que as funções de modo satisfazem a condição:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) = 0 \tag{5.32}$$

e formam, um conjunto ortonormal completo. Então, a função modo $\mathbf{u}_l(\mathbf{r})$ das ondas eletromagnéticas viajantes sob condições de contorno periódicas tomam a forma:

$$\mathbf{u}_{l\nu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\pm i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \hat{e}_{l\nu}, \tag{5.33}$$

onde, $V = L^3$ é o volume da cavidade, $|\mathbf{K}_l| = \frac{\omega_l}{c_0}$ é o vetor de onda e $\hat{e}_{l\nu}$ são os vetores unitários na direção da polarização ($\nu = 1, 2$), que deve ser perpendicular ao vetor de

onda devido a condição de transversalidade $\nabla_0 \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) = 0$. Então, o potencial vetor é completamente determinado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \hat{e}_{l\nu} e^{\pm i \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} q_l(t) \quad (5.34)$$

usando a equação (5.34) e a (5.26) em (5.8) encontramos que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0 (1 + \gamma_0 t)^2} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \hat{e}_{l\nu} e^{\pm i \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} p_l(t) \quad (5.35)$$

e, usando a equação (5.26), da seguinte forma:

$$p_l(t) = \epsilon_0 (1 + \gamma_0 t)^2 \dot{q}_l(t), \quad (5.36)$$

obtemos a expressão:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_l \sum_{\nu=1,2} (\mathbf{k}_l \times \hat{e}_{l\nu}) e^{\pm i \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} q_l(t). \quad (5.37)$$

Portanto, as equações (5.35) e (5.37) nos fornecem uma descrição completa do campo eletromagnético associado ao biofóton. Aqui observamos que os campos não seguem uma função de decaimento exponencial mas uma função tipo-hiperbólica.

No que se segue, nós apresentamos um processo alternativo e mais interessante para descrever a eletrodinâmica clássica de um biofóton. Para esse propósito, nós usamos os invariantes dinâmicos clássicos dependentes do tempo. Invariantes dinâmicos são constantes de movimento relacionados a evolução temporal de sistemas dinâmicos. Eles constituem um tópico muito importante no estudo de dinâmicas clássicas e quânticas, visto que eles podem estar associados com simetrias especiais de sistemas físicos.

Para o sistema descrito pela hamiltoniana dependente do tempo (5.23), um invariante dinâmico dependente do tempo não trivial $I_l(t)$ deve satisfazer a equação (3.2):

$$\frac{dI_l}{dt} = \{I_l, H_l\}_{pB} + \frac{\partial I_l}{\partial t} = 0, \quad (5.38)$$

onde, $\{I_l, H_l\}_{pB}$ são os parênteses de Poisson. Esse invariante dinâmico, tem a forma:

$$I_l(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{q_l}{\rho_l} \right)^2 + (\rho_l p_l - \Lambda(t) \dot{\rho}_l q_l)^2 \right], \quad (5.39)$$

onde, q_l e p_l satisfazem os parênteses de Poisson $\{q_l, p_l\}_{pB} = 1$ e $\rho(t)$ é uma função dependente do tempo que satisfaz a equação de Milne-Pinney:

$$\ddot{\rho}_l + \gamma(t) \dot{\rho}_l + \omega_l^2 \rho_l = \frac{1}{\Lambda^2(t) \rho_l^3}, \quad (5.40)$$

com

$$\Lambda(t) = \epsilon_0 (1 + \gamma_0 t)^2. \quad (5.41)$$

Agora, uma solução particular da equação (5.40) é dada por:

$$\rho_l(t) = \frac{1}{(\Lambda \omega_l)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 (1 + \gamma_0 t)^2 \omega_l}}. \quad (5.42)$$

Aqui, observe que se $\rho_l(t)$ é uma solução para a equação (5.40) nós podemos escrever a solução da equação (5.29) como:

$$q_l(t) = \rho_l \text{sen} [T(t) + \xi_l], \quad (5.43)$$

com

$$T(t) = \int_0^t \frac{dt'}{\Lambda(t') \rho_l^2(t')} \quad (5.44)$$

usando as equações (5.41) e (5.42), a equação (5.43) toma a forma:

$$q_l(t) = \frac{A_l}{1 + \gamma_0 t} \text{sen} (\omega_l t + \xi_l), \quad (5.45)$$

onde ξ_l é uma constante e A_l amplitude. Note que as equações (5.45) e (5.31) são idênticas, como deveria ser.

Em seguida, com o propósito de relacionar fórmulas clássicas e quânticas, nós introduzimos duas novas variáveis dinâmicas complexas clássicas (a_l, a_l^*) para ser usado no lugar das antigas q_l e p_l . Aqui, a_l e a_l^* , são complexos conjugados um do outro e satisfazem os

parênteses de Poisson $\{a_l, a_l^*\}_{pB} = -i$. O fator $-i$ é uma consequência complexa de a_l e a_l^* . Nós definimos as novas variáveis como:

$$a_l(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\frac{q_l}{\rho_l} + i(\rho_l p_l - \Lambda(t) \dot{\rho}_l q_l) \right], \quad (5.46)$$

$$a_l^*(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\frac{q_l}{\rho_l} - i(\rho_l p_l - \Lambda(t) \dot{\rho}_l q_l) \right], \quad (5.47)$$

onde a constante de Planck \hbar foi incluída para relacionar as fórmulas quânticas e clássicas, assim, a variável a_l é adimensional. Alternativamente, se invertermos as equações (5.46) e (5.47) teremos q_l e p_l em termos de a_l e a_l^* :

$$q_l(t) = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \rho_l [a_l(t) + a_l^*(t)], \quad (5.48)$$

$$p_l(t) = i \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \left\{ \left[\frac{1}{\rho_l} - i\Lambda(t) \dot{\rho}_l \right] a_l^*(t) - \left[\frac{1}{\rho_l} + i\Lambda(t) \dot{\rho}_l \right] a_l(t) \right\}. \quad (5.49)$$

Nós agora devemos expressar o invariante (5.39) em termos de a_l e a_l^* usando as relações (5.48) e (5.49). Após um pouco de álgebra nós encontramos que:

$$I_l(t) = \hbar a_l^* a_l, \quad (5.50)$$

que parece mais simples do que é dado na equação (5.39).

Em seguida, vamos considerar a derivada temporal total de $a_l(t)$, dada por:

$$\frac{da_l(t)}{dt} = \{a_l(t), H_l(t)\}_{pB} + \frac{\partial a_l}{\partial t}. \quad (5.51)$$

Usando as equações de Hamilton clássicas, e o hamiltoniano (5.23) nós teremos:

$$\frac{da_l(t)}{dt} = -\frac{i}{\Lambda(t) \rho_l^2} a_l(t). \quad (5.52)$$

Então, usando as equações (5.41) e (5.42) encontramos que:

$$a_l(t) = a_l(0) e^{-i\omega_l t}, \quad (5.53)$$

usando a equação (5.53) podemos expressar (5.48) como:

$$q_l(t) = \frac{C}{1 + \gamma_0 t} [a_l(0) e^{-i\omega_l t} + a_l^*(0) e^{i\omega_l t}], \quad (5.54)$$

com

$$C = \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_l} \right)^{1/2} \quad (5.55)$$

a equação (5.54) representa outra forma de escrever a solução da equação (5.29).

Agora, podemos escrever o potencial vetor dado na equação (5.34) em termos de $a_l(t)$ e $a_l^*(t)$ como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \frac{1}{(1 + \gamma_0 t)} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{\hat{e}_{l\nu}}{\sqrt{\omega_l}} [a_{l\nu}(0) e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} + a_{l\nu}^*(0) e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)}], \quad (5.56)$$

também podemos expressar os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \frac{1}{(1 + \gamma_0 t)^2} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{\hat{e}_{l\nu}}{\sqrt{\omega_l}} \left[\left(\frac{\gamma_0}{2} + i\omega_l \right) a_{l\nu}(0) e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} + \left(\frac{\gamma_0}{2} - i\omega_l \right) a_{l\nu}^*(0) e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} \right], \quad (5.57)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \frac{1}{(1 + \gamma_0 t)} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{(\mathbf{k}_l \times \hat{e}_{l\nu})}{\sqrt{\omega_l}} [a_{l\nu}(0) e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} - a_{l\nu}^*(0) e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)}]. \quad (5.58)$$

Das relações (5.57) e (5.58) vemos que os campos não decaem exponencialmente, mas como um decaimento tipo-hiperbólico.

5.2 Descrição quântica

Nesta seção, resolvemos a equação de Schrödinger associada ao operador de Hamilton do biofóton, dada pela equação (5.23). A equação de Schrödinger é:

$$\hat{H} |\psi, t\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle, \quad (5.59)$$

onde, a amplitude $\hat{q}_l(t)$ e o momentum $\hat{p}_l(t)$ são agora operadores conjugados que satisfazem a relação de comutação $[\hat{q}_l, \hat{p}_l] = i\hbar$ com $\hat{p}_l = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_l}$. A solução da equação (5.59) pode ser facilmente obtida com ajuda da teoria do operador invariante dinâmico, desenvolvida por Lewis-Riesenfeld no artigo (LEWIS JR; RIESENFELD, 1969). De acordo com essa teoria, existe um operador hermitiano dependente do tempo, não trivial, $\hat{I}_l(t)$, para o sistema descrito pelo hamiltoniano (5.23) e obedece a equação:

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{I}, \hat{H}_l] + \frac{\partial \hat{I}_l}{\partial t} = 0. \quad (5.60)$$

A solução da equação (5.59) pode ser escrita na forma:

$$|\psi_{nl}, t\rangle = e^{i\beta_{nl}(t)} |\phi_{nl}, t\rangle, \quad (5.61)$$

onde, $|\phi_{nl}, t\rangle$ forma um conjunto completo ortonormal que satisfaz a equação de autovalor:

$$\hat{I}_l(t) |\phi_{nl}, t\rangle = \lambda_{nl} |\phi_{nl}, t\rangle, \quad (5.62)$$

com autovalores dependentes do tempo λ_{nl} . As funções de fase $\beta_{nl}(t)$ são derivadas da equação:

$$\hbar \frac{d\beta_{nl}(t)}{dt} = \langle \phi_{nl}, t | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_l(t) | \phi_{nl}, t \rangle, \quad (5.63)$$

com a condição de ortonormalidade $\langle \phi_{nl}, t | \phi_{nl}, t \rangle = \delta_{n'_l, n_l}$. Um invariante quadrático que satisfaz a equação (5.60) tem a forma:

$$\hat{I}_l(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\hat{q}_l}{\rho_l} \right)^2 + (\rho_l \hat{p}_l - \Lambda(t) \dot{\rho}_l \hat{q}_l)^2 \right], \quad (5.64)$$

onde, $\rho(t)$ é uma solução da (5.40). Podemos reescrever as equações (5.46) e (5.47) como:

$$\hat{a}_l(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\frac{\hat{q}_l}{\rho_l} + i(\rho_l \hat{p}_l - \Lambda(t) \dot{\rho}_l \hat{q}_l) \right], \quad (5.65)$$

$$\hat{a}_l^\dagger(t) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\frac{\hat{q}_l}{\rho_l} - i(\rho_l \hat{p}_l - \Lambda(t) \dot{\rho}_l \hat{q}_l) \right], \quad (5.66)$$

onde, \hat{a}_l e \hat{a}_l^\dagger são agora os operadores tipo aniquilação e criação que satisfazem a relação de comutação:

$$\left[\hat{a}_l(t), \hat{a}_l^\dagger(t) \right] = 1. \quad (5.67)$$

Da mesma forma, podemos reescrever (5.48) e (5.49) como:

$$\hat{q}_l(t) = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \rho_l \left[\hat{a}_l(t) + \hat{a}_l^\dagger(t) \right], \quad (5.68)$$

$$\hat{p}_l(t) = i \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{1}{\rho_l} - i\Lambda(t) \dot{\rho}_l\right) \hat{a}_l^\dagger - \left(\frac{1}{\rho_l} + i\Lambda(t) \dot{\rho}_l\right) \hat{a}_l \right], \quad (5.69)$$

em termos desses operadores o invariante (5.64) se torna:

$$\hat{I}_l(t) = \hbar \left[\hat{a}_l^\dagger(t) \hat{a}_l(t) + \frac{1}{2} \right]. \quad (5.70)$$

Note que a expressão acima difere da equação (5.50) por um fator de 1/2. Isso ocorre porque ao contrário das variáveis clássicas, a_l , a_l^* , q e p os operadores $\hat{a}_l(t)$, $\hat{a}_l^\dagger(t)$, \hat{q}_l e \hat{p}_l não comutam.

Considere a equação de autovalor (5.62). Das fórmulas (5.67) e (5.70) nós vemos que a sua solução pode ser obtida exatamente em uma forma similar ao caso do oscilador mecânico independente do tempo. Portanto, para resolver essa equação nós usamos os estados de Fock. Para fazer isso, nós usamos o operador número hermitiano $N_l = \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l$ de forma que, $N_l |n_l, t\rangle = n_l |n_l, t\rangle$. Assim, escrevendo $|\phi_n, t\rangle = |n_l, t\rangle$ nós temos:

$$\hat{I}_l(t) |n_l, t\rangle = \hbar (n_l + 1/2) |n_l, t\rangle, \quad (5.71)$$

$$\hat{a}_l(t) |n_l, t\rangle = n_l^{1/2} |n_l - 1, t\rangle, \quad (5.72)$$

$$\hat{a}_l^\dagger(t) |n_l, t\rangle = (n_l + 1)^{1/2} |n_l + 1, t\rangle. \quad (5.73)$$

O próximo passo é encontrar as funções de fase (5.63). Trocando $|\phi_{nl}, t\rangle$ por $|n_l, t\rangle$ e fazendo uma álgebra básica encontramos:

$$\beta_{nl}(t) = -(n_l + 1/2) \int_0^t \frac{1}{\Lambda(t') \rho_l^2(t')} dt'. \quad (5.74)$$

Com ajuda das equações (5.41) e (5.42) escrevemos a equação acima como:

$$\beta_{nl}(t) = -\omega_l (n_l + 1/2) t. \quad (5.75)$$

Então, as soluções para a equação de Schrödinger (5.59), são:

$$|\psi_{nl}, t\rangle = e^{i\beta_{nl}(t)} |n_l, t\rangle, \quad (5.76)$$

com $\beta_{nl}(t)$ dada pela equação (5.75). O estado geral de Schrödinger é dado por:

$$|\Psi, t\rangle = \sum_{nl} c_{nl} |\psi_{nl}, t\rangle, \quad (5.77)$$

onde, os coeficientes c_{nl} são constantes.

Em seguida, vamos considerar a derivada temporal do operador $\hat{a}_l(t)$ dada pela expressão:

$$\frac{d\hat{a}_l(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_l(t), \hat{H}_l(t)] + \frac{\partial \hat{a}_l(t)}{\partial t}. \quad (5.78)$$

Portanto,

$$\frac{d\hat{a}_l(t)}{dt} = -\frac{i}{\Lambda(t) \rho_l^2(t)} \hat{a}_l(t). \quad (5.79)$$

Como no último caso,

$$\hat{a}_l(t) = \hat{a}_l(0) e^{-i\omega_l t}. \quad (5.80)$$

Assim, seguindo os procedimentos anteriores, podemos expressar o operador potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ em termos de \hat{a}_l e \hat{a}_l^\dagger :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \frac{1}{(1 + \gamma_0 t)} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{\hat{e}_{l\nu}}{\sqrt{\omega_l}} \left[\hat{a}_{l\nu}(0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_l t)} + \hat{a}_{l\nu}^\dagger(0) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_l t)} \right], \quad (5.81)$$

com $[\hat{a}_{l\nu}(t), \hat{a}_{l\nu}^\dagger(t)] = 1$. Também obtemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \frac{1}{(1 + \gamma_0 t)^2} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{\hat{e}_{l\nu}}{\sqrt{\omega_l}} \left[\left(\frac{\gamma_0}{2} + i\omega_l\right) \hat{a}_{l\nu}(0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_l t)} + \left(\frac{\gamma_0}{2} - i\omega_l\right) \hat{a}_{l\nu}^\dagger(0) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_l t)} \right], \quad (5.82)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \frac{1}{(1 + \gamma_0 t)} \sum_l \sum_{\nu=1,2} \frac{(\mathbf{k}_l \times \hat{e}_{l\nu})}{\sqrt{\omega_l}} \left[\hat{a}_{l\nu}(0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_l t)} - \hat{a}_{l\nu}^\dagger(0) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_l t)} \right], \quad (5.83)$$

os operadores de campo acima, descrevem a eletrodinâmica quântica de um biofóton. Nós também observamos que esses campos têm um decaimento tipo-hiperbólico, ao contrário do decaimento exponencial encontrado, por exemplo, no comportamento dos fótons em meios materiais.

Agora, nós calculamos os valores esperados de \hat{q}_l e \hat{p}_l nos estados de Fock:

$$\langle \hat{q}_l \rangle = \langle \hat{p}_l \rangle = 0, \quad (5.84)$$

$$\langle \hat{q}_l^2 \rangle = \hbar \rho_l^2 (n_l + 1/2), \quad (5.85)$$

$$\langle \hat{p}_l^2 \rangle = \hbar \left[\frac{1}{\rho_l^2} + (\Lambda \dot{\rho}_l)^2 \right] (n_l + 1/2) \quad (5.86)$$

e

$$(\Delta \hat{q}_l)^2 = \langle \hat{q}_l^2 \rangle - \langle \hat{q}_l \rangle^2 = \hbar \rho_l^2 (n_l + 1/2) \quad (5.87)$$

$$(\Delta \hat{p}_l)^2 = \langle \hat{p}_l^2 \rangle - \langle \hat{p}_l \rangle^2 = \hbar \left[\frac{1}{\rho_l^2} + (\Lambda \dot{\rho}_l)^2 \right] (n_l + 1/2) \quad (5.88)$$

então, o produto das incertezas é:

$$(\Delta\hat{q}_l)(\Delta\hat{p}_l) = \hbar [1 + (\Lambda\rho_l\dot{\rho}_l)^2]^{1/2} (n_l + 1/2), \quad (5.89)$$

que se torna:

$$(\Delta\hat{q}_l)(\Delta\hat{p}_l) = \hbar \left[1 + \frac{\gamma_0^2}{\omega_l^2 (1 + \gamma_0 t)^2} \right] (n_l + 1/2). \quad (5.90)$$

5.3 Estados coerentes para o sistema do biofóton

Sabemos que os estados coerentes para o sistema quântico dependente do tempo descrito pelo hamiltoniano (5.23) são dados por:

$$|\alpha_l, t\rangle = e^{-\frac{|\alpha_l|^2}{2}} \sum_{n_l} \frac{(\alpha_l)^{n_l}}{(n_l!)^{1/2}} e^{i\beta_{n_l}(t)} |n_l, t\rangle, \quad (5.91)$$

onde α_l é um número complexo arbitrário. Os estados $|\alpha_l, t\rangle$ são os autoestados de $\hat{a}_l(t)$:

$$\hat{a}_l(t) |\alpha_l, t\rangle = \alpha_l(t) |\alpha_l, t\rangle, \quad (5.92)$$

com

$$\alpha_l(t) = \alpha_l(0) e^{2i\beta_0(t)}, \quad (5.93)$$

onde, observando a equação (5.75) e usando $n_l = 0$, temos que:

$$\beta_0(t) = -1/2\omega_l t. \quad (5.94)$$

Então, os cálculos das flutuações quânticas Δq_l e Δp_l no estado $|\alpha_l, t\rangle$ levam a:

$$\langle \Delta\hat{q}_l \rangle^2 = \langle \hat{q}_l^2 \rangle - \langle \hat{q}_l \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{\rho_l^2}, \quad (5.95)$$

$$\langle \Delta\hat{p}_l \rangle^2 = \langle \hat{p}_l^2 \rangle - \langle \hat{p}_l \rangle^2 = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{\rho_l^2} + (\Lambda\dot{\rho}_l)^2 \right]. \quad (5.96)$$

Portanto, a relação de incerteza pode ser escrita como:

$$(\Delta \hat{q}_l) (\Delta \hat{p}_l) = \frac{\hbar}{2} \left[1 + \frac{\gamma_0^2}{\omega_l^2 (1 + \gamma_0 t)^2} \right], \quad (5.97)$$

onde, nós usamos as equações (5.41) e (5.42). O produto das incertezas se aproxima de $\hbar/2$ quando t vai para infinito ($t \rightarrow \infty$), também comparando (5.97) com (5.90) nós podemos confirmar que o produto das incertezas no estado coerente é o mesmo do estado de número quando $n_l = 0$.

Finalmente, calculando o valor esperado de $\hat{q}_l(t)$ no estado coerente, obtemos que:

$$\langle \hat{q}_l \rangle = \left(\frac{2\hbar |\alpha_l|^2}{\epsilon_0 \omega_l} \right) \frac{1}{(1 + \gamma_0 t)} \text{sen}(\omega_l t + \xi_l), \quad (5.98)$$

onde, ξ_l é o argumento do complexo α_l . Dessa expressão, vemos que o valor esperado de \hat{q}_l nos estados coerentes correspondem as soluções clássicas para o sistema descrito pelo hamiltoniano (5.23), como deveria ser.

6 Conclusões

Biofóton é uma radiação eletromagnética coerente e ultrafraca emitida por sistemas biológicos. É um pacote de ondas que contém valor informacional, capaz de modular as atividades fisiológicas das células e dos sistemas vivos. Nosso foco foi realizar um estudo sobre as propriedades dos biofótons, investigando os aspectos físicos relacionados ao campo eletromagnético associado e fornecer uma descrição clássica e quântica desse fenômeno, utilizando a teoria de invariantes dependentes do tempo desenvolvida por Lewis e Riesenfeld. Em particular, esta realização permitirá uma melhor compreensão de fenômenos físicos fundamentais que servem como base para o amplo desenvolvimento de tecnologias.

Se compararmos os resultados teóricos da emissão de fótons por um campo térmico caótico e de um campo completamente coerente com dados experimentais, encontramos indicações de que biofótons se originam de campos coerentes ocorrendo em tecidos vivos. A coerência descreve as correlações entre diferentes grandezas físicas em uma única onda ou entre várias ondas ou pacotes de ondas. Portanto, no feixe de luz que contém biofótons, eles vibram simultaneamente, transmitindo informações específicas do sinal. Exemplos desse comportamento puderam ser observados em experimento com bactérias sulfurosas e proteínas fluorescentes no capítulo 2. Além disso, outras considerações teóricas e as curvas de decaimento em experimentos realizados com *Daphnia*, larvas de *Chironomus* e células humanas, mostram uma concordância muito melhor com uma lei hiperbólica do que com uma exponencial. Podemos destacar também, que vários experimentos trazem à tona a ideia de que a emissão de luz desempenha um papel importante na comunicação biológica, estimulando assim pesquisas sobre o potencial da radiação eletromagnética em induzir a divisão celular. A relação entre radiação eletromagnética e a quantização na transferência de energia sugere que a radiação eletromagnética pode atuar como um novo mensageiro nas interações biológicas, com diversos efeitos nos seres vivos.

No capítulo 3 descrevemos o Método de Lewis e Riesenfeld, que foi escolhido para ser utilizado neste trabalho, por ser eficaz na resolução de problemas em Mecânica Quântica relacionados a osciladores harmônicos unidimensionais dependentes do tempo, que

se assemelham ao comportamento do biofóton. E isto é feito através da utilização de operadores invariantes de Ermakov-Lewis explicitamente dependentes do tempo. Neste capítulo, encontramos os autoestados e autovalores do operador invariante, vimos qual a conexão entre os autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger, além de aplicarmos o método de invariantes a osciladores harmônicos dependentes do tempo, encontrando então, suas fases, autoestado e autovalores.

Schrödinger descobriu uma classe de estados da Mecânica Quântica que exhibe o comportamento clássico do oscilador harmônico, estes são os chamados estados coerentes do oscilador harmônico simples. Sabemos que os biofótons devem ser tratados à luz da teoria de estados coerentes, por isto, no capítulo 4 estudamos aspectos teóricos dos estados coerentes. Aqui, trabalhamos com o caso simples de um oscilador harmônico unidimensional, que no vácuo, representa um estado coerente.

Finalmente no capítulo 5, realizamos uma descrição clássica considerando a hamiltoniana do biofóton e determinamos o potencial vetor, o campo elétrico e o campo magnético do biofóton, em seguida, utilizando os invariantes dinâmicos clássicos dependentes do tempo, introduzimos duas variáveis dinâmicas complexas clássicas e incluímos a constante de Planck para relacionar as fórmulas quânticas e determinamos o potencial vetor, o campo elétrico e magnético e observamos que os campos decaem com um decaimento tipo-hiperbólico. Para a descrição quântica reescrevemos o operador invariante em função de novas variáveis baseadas nas anteriores, que representam agora os operadores do tipo aniquilação e criação, e seguindo procedimentos semelhantes aos anteriores, obtivemos o potencial vetor, o campo elétrico e magnético, observando novamente que os campos não decaem exponencialmente. Além disso, confirmamos que o produto das incertezas no estado coerente é o mesmo do estado de número do biofóton, quando n_l é zero e o valor esperado de q_l nos estados coerentes correspondem as soluções clássicas para o sistema descrito pelo hamiltoniano do biofóton.

No geral, o presente trabalho pode contribuir com futuras aplicações dos biofótons na mecânica quântica e eletrodinâmica e fomentar ainda mais a colaboração entre pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento, contribuindo na implementação de novos métodos em áreas como a biofísica, física quântica, medicina, química, biologia, entre outras.

REFERÊNCIAS

- BENFATTO, M et al. Biophotons–new experimental data and analysis. **arXiv preprint arXiv:2305.09524**, 2023.
- CARRUTHERS, P; NIETO, MM. Coherent states and the forced quantum oscillator. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 33, n. 7, p. 537–544, 1965.
- CHOI, Jeong Ryeol. Coherent and squeezed states of light in linear media with time-dependent parameters by Lewis–Riesenfeld invariant operator method. **Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics**, IOP Publishing, v. 39, n. 3, p. 669, 2006.
- COLES, David M et al. Polaritons in living systems: modifying energy landscapes in photosynthetic organisms using a photonic structure. **arXiv preprint arXiv:1702.01705**, 2017.
- ERMAKOV, Vasilij Petrovich. Second-order differential equations: conditions of complete integrability. *Univ. Izv. Kiev*, p. 123–145, 1880.
- GLAUBER, Roy J. Coherent and incoherent states of the radiation field. **Physical Review**, APS, v. 131, n. 6, p. 2766, 1963.
- GURWITSCH, Alexander. Über Ursachen der Zellteilung: Zusammenfassende Darstellung älterer und neuer Ergebnisse. **Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen**, Springer, v. 52, n. 1-2, p. 167–181, 1922.
- HAN, Jinxiang; YANG, Meina; CHEN, Yu. Quantum: may be a new-found messenger in biological systems. **BioScience Trends**, International Research e Cooperation Association for Bio & Socio-Sciences . . . , v. 5, n. 3, p. 89–92, 2011.
- HARTLEY, John G; RAY, John R. Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator. **Physical Review D**, APS, v. 25, n. 2, p. 382, 1982.
- HOWARD, Stephen; ROY, Sanat K. Coherent states of a harmonic oscillator. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 55, n. 12, p. 1109–1117, 1987.

- HOWARD, Stephen; ROY, Sanat K. Minimum uncertainty states and their time evolution. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 53, n. 6, p. 538–542, 1985.
- IGNATOV, Ignat et al. Evaluating Possible Methods and Approaches for Registering of Electromagnetic Waves Emitted from the Human Body. **Advances in Physics Theories and Applications**, v. 30, p. 15–33, 2014.
- KARLO, Jiro; PRASAD, Ram; SINGH, Surya Pratap. Biophotonics in food technology: Quo vadis? **Journal of Agriculture and Food Research**, Elsevier, p. 100482, 2022.
- KRISHNAN, Kannan M. **Fundamentals and applications of magnetic materials**. [S. l.]: Oxford University Press, 2016.
- LEWIS JR, H Ralph. Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type Hamiltonians. **Physical Review Letters**, APS, v. 18, n. 13, p. 510, 1967.
- LEWIS JR, H Ralph; RIESENFELD, WB. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. **Journal of mathematical physics**, American Institute of Physics, v. 10, n. 8, p. 1458–1473, 1969.
- LI, Ke-hsueh; POPP, Fritz-Albert. Non-exponential decay law of radiation systems with coherent rescattering. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 93, n. 5, p. 262–266, 1983.
- LI, KH; POPP, FA et al. Indications of optical coherence in biological systems and its possible significance. In: SPRINGER. **COHERENT excitations in biological systems**. [S. l.: s. n.], 1983. P. 117–122.
- LIMA, Alberes Lopes de et al. Sobre aplicações da teoria quântica de invariantes a sistemas hamiltonianos dependentes do tempo. Universidade Federal da Paraíba, 2008.
- LIMA, Dibartolomei Antônio Pereira de et al. Invariantes dinâmicos, estados coerentes e fases geométricas em mecânica quântica. Universidade Federal da Paraíba, 2014.
- LOUISELL, William Henry. Quantum statistical properties of radiation. John Wiley e Sons, Inc., New York, 1973.
- MAAMACHE, M; BOUNAMES, A; FERKOUS, N. Comment on “Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator in a static magnetic field”. **Physical Review A**, APS, v. 73, n. 1, p. 016101, 2006.

- MARLETTO, Chiara et al. Entanglement between living bacteria and quantized light witnessed by Rabi splitting. **Journal of Physics Communications**, IOP Publishing, v. 2, n. 10, p. 101001, 2018.
- MEGLINSKI, Igor. **Biophotonics for medical applications**. [S. l.]: Elsevier, 2015.
- NAGL, W; POPP, FA. A physical (electromagnetic) model of differentiation. 1. Basic considerations. **Cytobios**, v. 37, n. 145, p. 45–62, 1983.
- NIETO, Michael Martin; SIMMONS JR, LM. Coherent states for general potentials. I. Formalism. **Physical Review D**, APS, v. 20, n. 6, p. 1321, 1979.
- NOGUEIRA, Marcelo Saito. Biophotonics for pandemic control: large-area infection monitoring and microbial inactivation of COVID-19. **Photodiagnosis and Photodynamic Therapy**, Elsevier, v. 31, p. 101823, 2020.
- POPP, F A. Emission of visible and ultraviolet radiation by active biological system. **Collective phenomena**, Gordon e Breach Science Publishers, Inc., v. 3, p. 187–214, 1981.
- _____. On the coherence of ultraweak photonemission from living tissues. **Disequilibrium and self-organisation**, Springer, p. 207–230, 1986.
- _____. Photon storage in biological systems. **Electromagnetic bio-information**, Urban & Schwarzenberg München, Baltimore, p. 123–149, 1979.
- _____. Properties of biophotons and their theoretical implications. NISCAIR-CSIR, India, 2003.
- POPP, F A et al. Physical aspects of biophotons. **Experientia**, Springer, v. 44, p. 576–585, 1988.
- RATTEMEYER, M; POPP, Fritz-Albert; NAGL, W. Evidence of photon emission from DNA in living systems. **Naturwissenschaften**, Springer, v. 68, n. 11, p. 572–573, 1981.
- RAY, John R. Exact solutions to the time-dependent Schrödinger equation. **Physical Review A**, APS, v. 26, n. 2, p. 729, 1982.
- ROUXEL, Cédric et al. From Graftable Biphotonic Chromophores to Water-Soluble Organic Nanodots for Biophotonics: The Importance of Environmental Effects. **Chemistry—A European Journal**, Wiley Online Library, v. 18, n. 51, p. 16450–16462, 2012.
- SEFATI, Niloofar et al. Monitoring Alzheimer’s Disease via Ultraweak Photon Emission. **bioRxiv**, Cold Spring Harbor Laboratory, p. 2023–03, 2023.

SHI, Siyuan; KUMAR, Prem; LEE, Kim Fook. Generation of photonic entanglement in green fluorescent proteins. **Nature communications**, Nature Publishing Group UK London, v. 8, n. 1, p. 1934, 2017.

TWAREQUE, Ali S; GHIRARDI, GC; FONDA, L. **Pertinence of the semigroup law in the theory of the decay of an unstable elementary particle**. [S. l.], 1974.

WALLS, DF; MILBURN, GJ. Quantum optics springer-verlag. **New York**, 1994.

WALLS, DF; MILBURN, GJ et al. Atomic optics. **Quantum Optics**, Springer, p. 315-340, 1994.

APÊNDICE A - Solução da equação (5.29)

Solução da equação $\ddot{q}(t) + \frac{2\lambda\dot{q}(t)}{1+\gamma_0 t} + \omega_0^2 q(t) = 0$:

Considerando $q(t) = \mu(t)y(t)$, tem-se

$$\dot{q} = \dot{\mu}y + \mu\dot{y}, \quad (\text{A.1})$$

$$\ddot{q} = \ddot{\mu}y + 2\dot{\mu}\dot{y} + \mu\ddot{y}. \quad (\text{A.2})$$

Logo,

$$\ddot{\mu}y + 2\dot{\mu}\dot{y} + \mu\ddot{y} + \frac{2\lambda_0}{1+\gamma_0 t}(\dot{\mu}y + \mu\dot{y}) + \omega_0^2 \mu y = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\ddot{y} + 2\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu} + \frac{\lambda_0}{1+\gamma_0 t}\right)\dot{y} + \left(\omega_0^2 + \frac{\ddot{\mu}}{\mu} + \frac{2\lambda_0}{1+\gamma_0 t}\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)y = 0, \quad (\text{A.4})$$

eliminando o coeficiente de \dot{y} , resulta

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\frac{\lambda_0}{1+\gamma_0 t} \quad (\text{A.5})$$

$$\ln \mu = -\ln(1+\gamma_0 t) \quad (\text{A.6})$$

$$\mu(t) = \frac{1}{1+\gamma_0 t}, \quad (\text{A.7})$$

além disso,

$$\dot{\mu} = -\frac{\lambda_0}{(1+\gamma_0 t)^2} \quad (\text{A.8})$$

$$\ddot{\mu} = \frac{2\lambda_0^2}{(1+\gamma_0 t)^3}, \quad (\text{A.9})$$

assim,

$$\frac{\ddot{\mu}}{\mu} + \frac{2\lambda_0}{1 + \gamma_0 t} \frac{\dot{\mu}}{\mu} = \frac{2\lambda_0^2}{(1 + \gamma_0 t)^2} + \frac{2\lambda_0}{1 + \gamma_0 t} \left(\frac{-\lambda_0}{1 + \gamma_0 t} \right) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Então, $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$

$$y(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}. \quad (\text{A.11})$$

Solução: $q(t) = \mu(t)y(t) = \frac{1}{1 + \gamma_0 t} (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t})$.