

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Subvariedades aprisionadas em modelos do espaço-tempo

por

Ramon Formiga Figueira

João Pessoa - PB

Fevereiro/2024

Subvariedades aprisionadas em modelos do espaço-tempo

por

Ramon Formiga Figueira [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Fevereiro/2024

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F475s Figueira, Ramon Formiga.

Subvariedades aprisionadas em modelos do
espaço-tempo / Ramon Formiga Figueira. - João Pessoa,
2024.

88 f. : il.

Orientação: Eraldo Almeida Lima Júnior.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática - Infinito laplaciano. 2. Resultados
de rigidez e não existência. 3. Subvariedades
aprisionadas. 4. Princípio do tipo Omori-Yau. I. Lima
Júnior, Eraldo Almeida. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

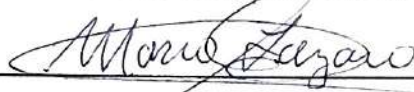
Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Geometria/Topologia

Aprovada em:



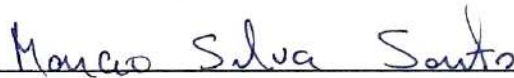
Prof. Dr. Ronaldo Freire de Lima - UFRN



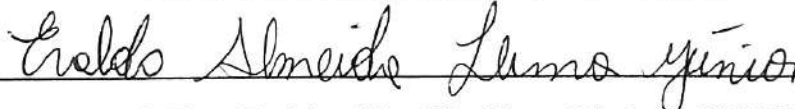
Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez - UFCG



Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho - UFPB



Prof. Dr. Márcio Silva Santos - UFPB



Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior - UFPB

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Fevereiro/2024

Resumo

Neste trabalho, apresentamos algumas aplicações geométricas de um resultado do tipo Liouville para o operador infinito laplaciano. Mais especificamente, provamos resultados de rigidez e não existência para subvariedades tipo espaço completas, imersas em dois tipos particulares de produtos *warped* Lorentzianos: os espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados e os espaços-tempo estáticos padrão. Além disso, como forma de motivar e complementar nosso estudo, apresentamos também, para o caso dos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados, resultados análogos para subvariedades tipo espaço parabólicas, por meio de uma propriedade do tipo Liouville satisfeita pelo operador laplaciano nesse tipo de subvariedade. Provamos ainda a validade de um princípio do tipo Omori-Yau para o infinito laplaciano. Dentre as subvariedades para as quais os resultados obtidos são válidos, estão as conhecidas subvariedades fracamente aprisionadas e as subvariedades totalmente aprisionadas, que surgiram na literatura a partir de trabalhos relacionados ao colapso gravitacional e à existência de singularidades em espaços-tempo da Relatividade Geral.

Palavras-chave: Infinito laplaciano; Resultados de rigidez e não existência; Subvariedades aprisionadas; Princípio do tipo Omori-Yau.

Abstract

In this work, we present some geometric applications of a Liouville-type result for the infinity Laplacian operator. More specifically, we prove rigidity and nonexistence results for complete spacelike submanifolds immersed in two particular types of Lorentzian warped products: the generalized Robertson-Walker spacetimes and the standard static spacetimes. Furthermore, as a way to motivate and complement our study, we also present, for the case of generalized Robertson-Walker spacetimes, analogous results for parabolic spacelike submanifolds, through a Liouville-type property satisfied by the Laplacian operator in such submanifolds. We also prove the validity of an Omori-Yau type principle for infinity Laplacian. Among the submanifolds for which the results obtained are valid are the well-known weakly trapped submanifolds and the totally trapped submanifolds, which emerged in the literature from works related to gravitational collapse and the existence of singularities in spacetimes of General Relativity.

Keywords: Infinity Laplacian; Rigidity and nonexistence results; Trapped submanifolds; Omori-Yau type principle.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Variedades completas	5
1.2 Variedades parabólicas	6
1.3 Subvariedades aprisionadas	8
1.4 Produtos <i>warped</i>	15
1.4.1 Espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados	25
1.4.2 Espaços-tempo estáticos padrão	30
2 Escassez de subvariedades aprisionadas em espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados	35
2.1 Resultados de rigidez e não existência para subvariedades parabólicas	35
2.1.1 Resultados auxiliares	36
2.1.2 Resultados principais	39
2.1.3 Exemplos	46
2.2 Resultados de rigidez e não existência para subvariedades completas	47
2.2.1 Resultados auxiliares	47
2.2.2 Resultados principais	50
2.2.3 Exemplos	58
3 Escassez de subvariedades aprisionadas em espaços-tempo estáticos padrão	64
3.1 Resultados de rigidez e não existência para subvariedades completas	64
3.1.1 Resultados auxiliares	64

3.1.2	Resultados principais	67
3.1.3	Exemplos	68
4	Um princípio do tipo Omori-Yau para o infinito laplaciano	72
4.1	Aplicações	75
4.1.1	O caso dos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados .	75
4.1.2	O caso dos espaços-tempo estáticos padrão	77
	Referências	79

Introdução

Desde o advento da Teoria da Relatividade Geral, formulada por Albert Einstein e publicada em 1915, a Geometria Lorentziana tem se mostrado fundamental para a compreensão de inúmeros fenômenos físicos e, em particular, para a descrição da estrutura do universo em larga escala, como pode-se observar em [21] e [23]. Como consequência desse fato, ela tem sido objeto de pesquisas em diversas áreas da Física e da Matemática.

Nas últimas décadas, o interesse em estudar subvariedades tipo espaço imersas em variedades Lorentzianas tem crescido significativamente. Muitos dos estudos realizados nesse campo foram impulsionados pelo célebre trabalho do físico matemático Roger Penrose sobre colapso gravitacional [26]. Uma classe particular de subvariedades para a qual a atenção dos pesquisadores se voltou a partir do trabalho de Penrose é a classe das subvariedades aprisionadas (alguns exemplos de produções científicas nessa área são [1], [2], [3], [4], [6], [7], [10], [11], [12], [13], [14], [16], [17], [18], [24], [25], [28], [31], [32], [34] e [35]).

Em seu artigo seminal, Penrose introduziu o conceito de superfície aprisionada fechada para estudar singularidades do espaço-tempo. Ele definiu uma superfície aprisionada fechada Σ^2 como uma subvariedade bidimensional, compacta e sem bordo, tipo espaço, imersa em um espaço-tempo quadrimensional no qual dois sistemas de geodésicas nulas que encontram Σ^2 ortogonalmente convergem localmente em direções futuras. Fisicamente, a utilização da expressão “aprisionada” deve-se ao fato de que, em uma região de buraco negro, a existência de tais superfícies implica que qualquer raio de luz ortogonal a estas que tenta escapar do buraco negro desvia-se sempre em direção à singularidade. Em outras palavras, ao evoluir no tempo ao longo dos raios

de luz ortogonais, a superfície aprisionada cai para a singularidade. A definição dada por Penrose está intrinsicamente relacionada aos sinais das conhecidas expansões nulas, as quais determinam o caráter causal do campo curvatura média da superfície [28]. A caracterização das superfícies aprisionadas em termos do caráter causal do campo curvatura média permitiu a extensão deste conceito para subvariedades de dimensão e codimensão arbitrárias (ver, por exemplo, [7], [18], [29], [30] e [32]).

No campo da Física, os trabalhos envolvendo subvariedades aprisionadas relacionam-se, em geral, com resultados sobre colapso gravitacional. Como é possível observar em [9], [10], [11], [12], [14], [18], [20], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34] e [35], nessa linha de pesquisa, as subvariedades fechadas recebem uma atenção especial. Em [26], Penrose utilizou-se desse conceito para provar que, sob certas condições de energia, a existência de superfícies aprisionadas fechadas está atrelada à existência de buracos negros, isto é, a Teoria da Relatividade Geral prevê a existência de singularidades físicas. Esse resultado de Penrose é o seu famoso Teorema de Singularidade, pelo qual o físico matemático recebeu o prêmio Nobel em 2020.

Apesar das subvariedades aprisionadas não compactas receberem pouca atenção dos físicos, existem diversos trabalhos sobre as mesmas no campo da Matemática ([1], [2], [3], [4], [6], [7], [13], [15], [16], [17], [24] e [25] são exemplos de estudos para o caso não compacto). Particularmente, em [24] e [25], Pelegrín demonstrou a validade de resultados de rigidez e não existência para subvariedades parabólicas fracamente aprisionadas e, em [2], Alías, Cánovas e Colares provaram resultados do mesmo tipo para uma classe mais ampla de subvariedades, as estocasticamente completas. Tais resultados foram provados para espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados ou espaços-tempo estáticos padrão, dois importantes tipos de produtos *warped* Lorentzianos.

Neste trabalho, apresentamos alguns resultados de rigidez e não existência para certas subvariedades completas (entre as quais figuram as subvariedades totalmente aprisionadas) imersas em espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados e espaços-tempo estáticos padrão, empregando uma propriedade do tipo Liouville para o operador infinito laplaciano, cuja validade foi demonstrada por Araújo, Mari e Pessoa em [8]. Além disso, com o intuito de tornar o texto mais completo, propiciando uma comparação entre as técnicas empregadas e os resultados obtidos, apresentamos tam-

bém resultados de rigidez e não existência, nos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados, para uma classe de subvariedades parabólicas (na qual estão inclusas as subvariedades fracamente aprisionadas). Demonstramos ainda um princípio do tipo Omori-Yau para o infinito laplaciano, destacando uma aplicação no contexto das subvariedades totalmente aprisionadas.

Dentro dessa perspectiva, esta tese está estruturada da seguinte maneira: no Capítulo 1, são apresentados alguns conceitos e resultados preliminares com o objetivo de tornar o trabalho coerente, coeso e, na medida do possível, autossuficiente, além de fixar uma notação que permita a sua compreensão de forma integral. No Capítulo 2, são enunciados e demonstrados nossos resultados de rigidez e não existência nos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados, divididos em dois casos, o das subvariedades parabólicas e o das subvariedades completas. No Capítulo 3, são dispostos os resultados para subvariedades completas nos espaços-tempo estáticos padrão. Por fim, o Capítulo 4 é destinado à apresentação do princípio do tipo Omori-Yau que estabelecemos para o operador infinito laplaciano.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e resultados essenciais para o desenvolvimento deste trabalho, com o intuito de torná-lo suficientemente autocontido e estabelecer uma notação adequada que favoreça a compreensão dos resultados obtidos.

Inicialmente, discorremos sobre variedades Riemannianas completas, principal objeto de estudo no que diz respeito aos resultados relacionados à aplicação da propriedade do tipo Liouville satisfeita pelo operador infinito laplaciano, sobre a qual fazemos menção na introdução deste trabalho. Posteriormente, realizamos uma breve explanação sobre as variedades Riemannianas parabólicas, para as quais são válidos resultados semelhantes aos do caso completo, que são demonstrados por meio de uma propriedade do tipo Liouville para o operador laplaciano. Em seguida, apresentamos as principais ideias que dão sustentação ao conceito de subvariedade aprisionada e suas variações, destacando alguns trabalhos que serviram de motivação para esta tese. Por fim, descrevemos uma classe especial de variedades semi-Riemannianas, conhecidas como produtos *warped*, e estudamos dois casos particulares de tais variedades que surgem naturalmente na Teoria da Relatividade Geral: os espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados e os espaços-tempo estáticos padrão. Tais espaços-tempo são os ambientes nos quais nossos resultados são válidos.

1.1 Variedades completas

Em uma variedade Riemanniana conexa (M^m, g) , podemos estabelecer uma noção de distância entre pontos da seguinte maneira: dados dois pontos p e q em M^m , a distância Riemanniana de p a q é definida por

$$d_g(p, q) = \inf\{L(\alpha) : \alpha \in \Omega(p, q)\},$$

em que $\Omega(p, q)$ representa o conjunto de todas as curvas suaves por partes em M^m que ligam p a q , e $L(\alpha)$ é o comprimento da curva α . É possível verificar que, para todo $p, q, r \in M^m$,

- (i) $d_g(p, q) \geq 0$, e $d_g(p, q) = 0$ se, e somente se $p = q$;
- (ii) $d_g(p, q) = d_g(q, p)$;
- (iii) $d_g(p, q) \leq d_g(p, r) + d_g(r, q)$.

Portanto, o par (M^m, d_g) constitui um espaço métrico. Além disso, a topologia de (M^m, d_g) coincide com a topologia de M^m como variedade diferenciável (tal resultado pode ser visto em [23, Proposição 5.18]).

O fato de (M^m, d_g) ser um espaço métrico nos permite questionar se M^m é uma variedade completa ou não, no sentido da convergência de sequências de Cauchy. Essa ideia de completude está intimamente relacionada ao conceito de completude geodésica.

Definição 1.1.1. *Uma variedade Riemanniana (M^m, g) é dita geodesicamente completa se toda geodésica em M^m pode ser estendida a uma geodésica definida em todo $\mathbb{R}$.*

A relação entre a completude, no contexto de espaços métricos, e a completude geodésica é evidenciada no conhecido Teorema de Hopf-Rinow.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Hopf-Rinow). *Sejam (M^m, g) uma variedade Riemanniana conexa e $p \in M^m$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *A aplicação exponencial $\exp_p$ está definida para todo $v \in T_p M^m$.*
- (ii) *O espaço métrico (M^m, d_g) é completo, isto é, toda sequência de Cauchy em M^m é convergente.*
- (iii) *A variedade Riemanniana (M^m, g) é geodesicamente completa.*

(iv) *Todo conjunto limitado e fechado em M^m é compacto.*

(v) *Existe uma sequência de subconjuntos compactos $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \dots \subseteq M^m$ em (M^m, d_g) , satisfazendo $\cup K_n = M^m$, tal que, se $q_n \notin K_n$, então $d_g(p, q_n) \rightarrow +\infty$.*

Diante da equivalência entre as afirmações (ii) e (iii), expressa no Teorema de Hopf-Rinow, utilizamos a expressão “variedade Riemanniana completa” para nos referirmos a uma variedade Riemanniana geodesicamente completa.

Em [8], Araújo, Mari e Pessoa, por meio do estudo de aspectos da Teoria do Potencial para o operador infinito laplaciano, definido por

$$\Delta_\infty u = \nabla^2 u(\nabla u, \nabla u),$$

em que ∇^2 e ∇ denotam, respectivamente, os operadores Hessiano e gradiente, estabeleceram um resultado que nos permite detectar a completude de variedades de Finsler, uma classe mais ampla de variedades na qual estão incluídas as variedades Riemannianas. No contexto Riemanniano, podemos inferir, a partir de [8, Teorema 1.1], a validade do resultado abaixo.

Proposição 1.1.3. *Seja (M^m, g) uma variedade Riemanniana conexa e completa. Toda função suave $u : M^m \rightarrow \mathbb{R}$, limitada superiormente e que satisfaz a desigualdade $\Delta_\infty u \geq 0$ é constante.*

Em outras palavras, a Proposição 1.1.3 estabelece que toda variedade Riemanniana conexa e completa goza da propriedade de Liouville “se $\Delta_\infty u \geq 0$ e $\sup_M u < +\infty$, então u é constante”. Esta é a propriedade sobre a qual fazemos referência na introdução deste trabalho, uma ferramenta indispensável para a obtenção dos nossos resultados de rigidez e não existência para subvariedades completas.

Observação 1.1.4. *Neste trabalho, a menos que seja dito o contrário, consideramos sempre variedades conexas.*

1.2 Variedades parabólicas

O conceito de parabolicidade para variedades Riemannianas surge em diferentes contextos nas mais diversas áreas da Matemática, como Probabilidade, Análise e Geometria, e há várias formas de se definir e caracterizar variedades Riemannianas

parabólicas, como é possível observar em [19] e [36]. Por exemplo, de acordo com Grigor'yan, em [19], uma variedade Riemanniana M^m é parabólica se, e somente se, o movimento Browniano em M^m é recorrente, isto é, uma partícula que realiza um movimento Browniano em M^m visita, com probabilidade 1, qualquer subconjunto aberto de M^m em momentos de tempo arbitrariamente grandes. Por outro lado, do ponto de vista geométrico, há inúmeras propriedades que implicam na parabolicidade de uma variedade Riemanniana, dentre as quais algumas revelam como tal conceito relaciona-se com a taxa de crescimento do volume das bolas geodésicas. Exemplificando, sabe-se que as superfícies completas com crescimento de volume quadrático são parabólicas e que toda variedade fechada, isto é, compacta e sem bordo, assim como toda variedade completa e de volume finito, é parabólica [36]. De modo mais geral, se uma variedade Riemanniana M^m é completa, então a condição

$$\int^{+\infty} \frac{rdr}{V(r)} = +\infty,$$

em que $V(r)$ denota o volume da bola geodésica de raio r centrada numa origem fixa, é suficiente para garantir a parabolicidade de M^m (ver [8] e [19]). Além disso, o produto de uma variedade Riemanniana parabólica por uma variedade Riemanniana fechada arbitrária é sempre parabólico [2]. Neste trabalho, utilizamos uma definição analítica, que pode ser encontrada em [19] e [36], a qual julgamos ser a mais apropriada para a obtenção de nossos resultados.

Definição 1.2.1. *Uma variedade Riemanniana completa (M^m, g) é dita parabólica quando não admite funções superharmônicas positivas e não constantes.*

Em outras palavras, uma variedade Riemanniana completa (M^m, g) é parabólica se, e somente se, as únicas funções positivas e superharmônicas (cujo laplaciano é menor do que ou igual a zero) são as constantes.

Note que, a partir da Definição 1.2.1, podemos caracterizar as variedades parabólicas (de agora em diante, sempre que nos referirmos a variedades parabólicas, estamos considerando que elas também são completas) como aquelas nas quais as únicas funções superharmônicas e limitadas inferiormente são as constantes. Com efeito, seja M^m uma variedade Riemanniana parabólica. Dada uma função superharmônica e limitada inferiormente $u : M^m \rightarrow \mathbb{R}$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $p \in M^m$,

$$u(p) > c.$$

Desse modo, a função $v : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $p \in M^m$ associa o número real

$$v(p) = u(p) - c$$

é positiva. Além disso,

$$\Delta v = \Delta u \leq 0.$$

Consequentemente, pela parabolicidade de M^m , v é constante e, portanto, u também é constante. Reciprocamente, se toda função superharmônica e limitada inferiormente em uma variedade Riemanniana (M^m, g) é constante, então, em particular, as funções superharmônicas positivas (as quais são limitadas inferiormente) são constantes.

Observação 1.2.2. *A caracterização estabelecida anteriormente pode ser expressa em termos de funções subharmônicas (cujo laplaciano é maior do que ou igual a zero) e limitadas superiormente. De fato, basta perceber que uma função u , definida numa variedade Riemanniana, é superharmônica e limitada inferiormente se, e somente se, $-u$ é subharmônica e limitada superiormente.*

1.3 Subvariedades aprisionadas

Sejam $(\overline{M}^{n+p+1}, g)$ um espaço-tempo, isto é, uma variedade Lorentziana de dimensão $n+p+1$ na qual podemos estabelecer uma orientação temporal, cujo tensor métrico g tem assinatura $(-, +, +, \dots, +)$, e Σ^n uma subvariedade tipo espaço imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, ou seja, uma variedade n -dimensional para a qual existe uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+p+1}$ tal que a métrica induzida em Σ^n por ψ é Riemanniana. Denotando por $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita em $\overline{M}^{n+p+1}$ e Σ^n , respectivamente, definimos a segunda forma fundamental de Σ^n como a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \times \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(\Sigma^n)$ que a cada par (X, Y) de campos suaves em Σ^n associa o campo normal

$$\alpha(X, Y) = -(\overline{\nabla}_X Y)^\perp,$$

em que $(\overline{\nabla}_X Y)^\perp$ é a componente normal de $\overline{\nabla}_X Y$ ao longo de Σ^n .

O campo curvatura média $\vec{H}$ de Σ^n é definido por

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \text{tr}(\alpha),$$

ou seja, dado um referencial ortonormal $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ para Σ^n ,

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(E_i, E_i).$$

Fixado $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma^n)$, definimos o operador de Weingarten de Σ^n , com respeito a ξ , como a aplicação $A_\xi : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ que satisfaz

$$g(A_\xi X, Y) = g(\alpha(X, Y), \xi),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$. Uma vez que $X(g(\xi, Y)) = 0$, pois ξ é ortogonal a Y ,

$$g(\bar{\nabla}_X \xi, Y) + g(\bar{\nabla}_X Y, \xi) = 0.$$

Consequentemente,

$$g(\bar{\nabla}_X \xi, Y) = -g(\bar{\nabla}_X Y, \xi).$$

Como $g(\bar{\nabla}_X \xi, Y) = g((\bar{\nabla}_X \xi)^\top, Y)$, já que Y é um campo vetorial tangente a Σ^n , e $g(\bar{\nabla}_X Y, \xi) = g((\bar{\nabla}_X Y)^\perp, \xi)$, pelo fato de ξ ser um campo vetorial normal a Σ^n , concluímos que

$$g((\bar{\nabla}_X \xi)^\top, Y) = g(-(\bar{\nabla}_X Y)^\perp, \xi) = g(\alpha(X, Y), \xi) = g(A_\xi X, Y).$$

Portanto,

$$A_\xi X = (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp.$$

Consideremos o caso em que a codimensão de Σ^n em $\bar{M}^{n+p+1}$ é igual a 2, ou seja, $p = 1$. Para cada $q \in \Sigma^n$, o espaço normal $(T_q \Sigma^n)^\perp$ é bidimensional e tipo tempo, isto é, a restrição da métrica de $\bar{M}^{n+2}$ a esse espaço vetorial é não degenerada e de índice 1. Dado um referencial ortonormal local $\{N_1, N_2\}$, constituído de campos normais a Σ^n , onde N_1 é tipo tempo (ou seja, $g(N_1, N_1) < 0$) e futuro direcionado, definamos os campos locais

$$k_+ = \frac{N_1 + N_2}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad k_- = \frac{N_1 - N_2}{\sqrt{2}}.$$

Note que

$$\begin{aligned} g(k_+, k_+) &= g\left(\frac{N_1 + N_2}{\sqrt{2}}, \frac{N_1 + N_2}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}g(N_1 + N_2, N_1 + N_2) \\ &= \frac{1}{2}(g(N_1, N_1) + g(N_1, N_2) + g(N_2, N_1) + g(N_2, N_2)) \\ &= \frac{1}{2}(-1 + 0 + 0 + 1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(k_-, k_-) &= g\left(\frac{N_1 - N_2}{\sqrt{2}}, \frac{N_1 - N_2}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}g(N_1 - N_2, N_1 - N_2) \\
&= \frac{1}{2}(g(N_1, N_1) - g(N_1, N_2) - g(N_2, N_1) + g(N_2, N_2)) \\
&= \frac{1}{2}(-1 - 0 - 0 + 1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
g(k_+, k_-) &= g\left(\frac{N_1 + N_2}{\sqrt{2}}, \frac{N_1 - N_2}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}g(N_1 + N_2, N_1 - N_2) \\
&= \frac{1}{2}(g(N_1, N_1) - g(N_1, N_2) + g(N_2, N_1) - g(N_2, N_2)) \\
&= \frac{1}{2}(-1 - 0 + 0 - 1) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Como $g(k_+, k_+) = g(k_-, k_-) = 0$, os campos k_+ e k_- são tipo luz. Além disso, eles apontam para o futuro, já que

$$g(k_+, N_1) = g(k_-, N_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0,$$

e, para cada $q \in \Sigma^n$, $k_+(q)$ e $k_-(q)$ são vetores de $(T_q \Sigma^n)^\perp$ linearmente independentes. Isso implica que $\{k_+, k_-\}$ é também um referencial local de campos normais a Σ^n . Por conseguinte, podemos escrever o campo curvatura média de Σ^n como

$$\vec{H} = -\theta_- k_+ - \theta_+ k_-,$$

em que θ_+ e θ_- são funções suaves definidas em Σ^n . Observe que

$$g(\vec{H}, k_+) = g(-\theta_- k_+ - \theta_+ k_-, k_+) = -\theta_- g(k_+, k_+) - \theta_+ g(k_-, k_+) = \theta_+.$$

Analogamente,

$$g(\vec{H}, k_-) = g(-\theta_- k_+ - \theta_+ k_-, k_-) = -\theta_- g(k_+, k_-) - \theta_+ g(k_-, k_-) = \theta_-.$$

As funções θ_+ e θ_- são denominadas expansões nulas futuras e relacionam-se com a divergência dos campos k_+ e k_- da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\theta_{\pm} &= g(\vec{H}, k_{\pm}) \\
&= g\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(E_i, E_i), k_{\pm}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\alpha(E_i, E_i), k_{\pm}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(A_{k_{\pm}} E_i, E_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g((\nabla_{E_i} k_{\pm})^{\top}, E_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} k_{\pm}, E_i) \\
&= \frac{1}{n} \operatorname{div}_{\Sigma}(k_{\pm}),
\end{aligned}$$

em que $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local de Σ^n . Por esta última igualdade, inferimos que, fisicamente, as expansões nulas futuras θ_+ e θ_- medem a divergência dos raios luminosos que emanam de Σ^n nas direções de k_+ e k_- , respectivamente.

Em seu trabalho sobre colapso gravitacional e singularidades em um espaço-tempo [26], que lhe rendeu o prêmio Nobel em 2020, o físico matemático Roger Penrose definiu uma superfície aprisionada como uma subvariedade bidimensional Σ^2 , compacta e sem bordo, tipo espaço e imersa em um espaço-tempo quadrimensional, satisfazendo a condição de que os dois sistemas de geodésicas nulas que encontram Σ^2 ortogonalmente convergem localmente em direções futuras (na verdade, o conceito apresentado por Penrose é precisamente o que denominamos de superfície futuro aprisionada fechada). Nesse contexto, com base no que discutimos anteriormente, a condição de convergência local dos dois sistemas de geodésicas nulas que encontram Σ^2 ortogonalmente (às quais são tangentes os campos tipo luz k_+ e k_- em Σ^2) é refletida diretamente nos sinais das expansões nulas futuras θ_+ e θ_- .

Diante disso, dizemos que uma subvariedade Σ^n de dimensão arbitrária n e codimensão dois, imersa em um espaço-tempo $\overline{M}^{n+2}$, é uma subvariedade futuro aprisionada quando ambas as expansões nulas futuras são negativas, isto é, $\theta_+ < 0$ e $\theta_- < 0$. De modo similar, dizemos que Σ^n é uma subvariedade passado aprisionada quando ambas as expansões nulas futuras são positivas, ou seja, $\theta_+ > 0$ e $\theta_- > 0$. Considerando os

sinais de tais expansões nulas, podemos ainda subclassificar as subvariedades aprisionadas com codimensão dois como marginalmente aprisionadas e fracamente aprisionadas, conforme destacado na Tabela 1.1 (ver [34]).

Tabela 1.1: Classificação das subvariedades com codimensão dois em termos das expansões nulas futuras.

	Futuro	Passado
Aprisionada	$\theta_+ < 0$ e $\theta_- < 0$	$\theta_+ > 0$ e $\theta_- > 0$
Marginalmente aprisionada	$\theta_+ = 0$ e $\theta_- < 0$	$\theta_+ = 0$ e $\theta_- > 0$
	ou $\theta_+ < 0$ e $\theta_- = 0$	ou $\theta_+ > 0$ e $\theta_- = 0$
Fracamente aprisionada	$\theta_+ \leq 0$ e $\theta_- \leq 0$, com $\theta_+^2 + \theta_-^2 > 0$	$\theta_+ \geq 0$ e $\theta_- \geq 0$, com $\theta_+^2 + \theta_-^2 > 0$

Note que

$$\begin{aligned}
g(\vec{H}, \vec{H}) &= g(-\theta_- k_+ - \theta_+ k_-, -\theta_- k_+ - \theta_+ k_-) \\
&= \theta_-^2 g(k_+, k_+) + 2\theta_- \theta_+ g(k_+, k_-) + \theta_+^2 g(k_-, k_-) \\
&= -2\theta_- \theta_+.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
g(\vec{H}, N_1) &= g(-\theta_- k_+ - \theta_+ k_-, N_1) \\
&= -\theta_- g(k_+, N_1) - \theta_+ g(k_-, N_1) \\
&= -\theta_- \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \theta_+ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{\theta_- + \theta_+}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, Σ^n é uma subvariedade futuro aprisionada se, e somente se, $\vec{H}$ é tipo tempo e aponta para o futuro. Com efeito, se Σ^n é futuro aprisionada, então $\theta_- < 0$ e $\theta_+ < 0$. Consequentemente, $\theta_- \theta_+ > 0$ e $\theta_- + \theta_+ < 0$. Portanto, $g(\vec{H}, \vec{H}) < 0$ e $g(\vec{H}, N_1) < 0$, o que significa que $\vec{H}$ é um campo tipo tempo e futuro direcionado. Reciprocamente, se $\vec{H}$ é tipo tempo e aponta para o futuro, então as expansões nulas θ_- e θ_+ devem ser diferentes de zero, possuir mesmo sinal e satisfazer a relação $\theta_- + \theta_+ < 0$. Logo, ambas devem ser negativas. Em outras palavras, Σ^n deve ser futuro aprisionada.

De maneira totalmente análoga podemos demonstrar que Σ^n é uma subvariedade passado aprisionada se, e somente se, $\vec{H}$ é tipo tempo e aponta para o passado.

Esse resultado revela que as condições sobre os sinais das expansões nulas futuras relacionam-se com o caráter causal e a orientação temporal do campo curvatura média. Tal relação nos permite caracterizar a classe das subvariedades aprisionadas com codimensão dois conforme apresentado na Tabela 1.2 (ver [2] e [34]).

Tabela 1.2: Classificação das subvariedades com codimensão dois em termos do caráter causal e da orientação temporal do campo curvatura média.

	Futuro	Passado
Aprisionada	$\vec{H}$ é tipo tempo e futuro direcionado	$\vec{H}$ é tipo tempo e passado direcionado
Marginalmente aprisionada	$\vec{H}$ é tipo luz e futuro direcionado	$\vec{H}$ é tipo luz e passado direcionado
Fracamente aprisionada	$\vec{H}$ é causal e futuro direcionado	$\vec{H}$ é causal e passado direcionado

Com base nessa caracterização, podemos estender naturalmente o conceito de subvariedade aprisionada para o caso de codimensão arbitrária (ver [18]). A seguir, estabelecemos as definições que consideramos para a obtenção dos nossos resultados.

Definição 1.3.1. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1}$ um espaço-tempo e Σ^n uma subvariedade tipo espaço imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$. Dizemos que Σ^n é uma subvariedade futuro aprisionada (respectivamente, passado aprisionada) quando o campo curvatura média $\vec{H}$ é tipo tempo e futuro direcionado (respectivamente, passado direcionado).*

Definição 1.3.2. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1}$ um espaço-tempo e Σ^n uma subvariedade tipo espaço imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$. Dizemos que Σ^n é uma subvariedade marginalmente futuro aprisionada (respectivamente, passado aprisionada) quando o campo curvatura média $\vec{H}$ é tipo luz e futuro direcionado (respectivamente, passado direcionado).*

Definição 1.3.3. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1}$ um espaço-tempo e Σ^n uma subvariedade tipo espaço imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$. Dizemos que Σ^n é uma subvariedade fracamente futuro aprisionada (respectivamente, passado aprisionada) quando o campo curvatura média $\vec{H}$ é causal e futuro direcionado (respectivamente, passado direcionado).*

Os estudos relacionados às subvariedades aprisionadas, marginalmente aprisionadas ou fracamente aprisionadas são inúmeros. Destacamos, aqui, alguns trabalhos nos quais são apresentados resultados de rigidez e não existência para essas classes de subvariedades.

De modo geral, no contexto da Física, as pesquisas envolvendo o conceito de subvariedade aprisionada limitam-se ao estudo do caso em que as subvariedades em questão são fechadas, isto é, compactas e sem bordo. Um motivo para isto é o fato de que subvariedades aprisionadas não compactas não são consideradas tão relevantes para a Teoria Gravitacional, pois estão presentes até mesmo no espaço-tempo de Minkowski, que é plano. Nos trabalhos de Senovilla, como [28], [29], [30], [31] e [32], são apresentados diversos resultados de rigidez e não existência para subvariedades aprisionadas fechadas.

Apesar de, no contexto da Física, as subvariedades aprisionadas não compactas terem uma menor relevância, em um contexto Matemático, tais subvariedades são extensivamente estudadas (ver, por exemplo, [1], [3], [4], [6], [13], [15], [16] e [17]). Em [2], Alías, Cánovas e Colares trabalharam com subvariedades marginalmente aprisionadas de dimensão arbitrária e codimensão dois, imersas em espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados. Utilizando como ferramentas um princípio do máximo para variedades fechadas e o princípio do máximo fraco de Omori-Yau para variedades estocasticamente completas (descrito no Capítulo 4), eles provaram alguns resultados de rigidez para tais subvariedades, os quais garantem que, sob certas condições, elas devem estar contidas em *slices*. Além disso, empregando essas ferramentas, obtiveram também resultados de não existência para subvariedades fracamente aprisionadas.

Trabalhando com subvariedades imersas em espaços-tempo estáticos padrão, em [24], e espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados, em [25], Pelegrín demonstrou resultados de não existência para subvariedades parabólicas e fracamente aprisionadas de codimensão arbitrária. Outros trabalhos envolvendo subvariedades aprisionadas nesses mesmos espaços-tempo são [13] e [17].

Em [33], foi introduzido o conceito de superfície totalmente aprisionada, um tipo de superfície aprisionada que apresenta uma maior simetria, no sentido de que a condição sobre o caráter causal e a orientação temporal é feita com respeito à segunda forma fundamental, e não ao campo curvatura média. Tal conceito pode ser naturalmente estendido para subvariedades de dimensão arbitrária, por meio da definição dada a seguir.

Definição 1.3.4. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1}$ um espaço-tempo e Σ^n uma subvariedade tipo espaço imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$. Dizemos que Σ^n é uma subvariedade totalmente futuro aprisionada*

(respectivamente, *passado aprisionada*) quando, para todo $q \in \Sigma^n$ e todo $v \in T_q \Sigma^n$, com $v \neq 0$, o vetor $\alpha(v, v)$ é tipo tempo e futuro direcionado (respectivamente, *passado direcionado*).

Em [7], Andrade, Lima e Roing obtiveram resultados de rigidez e não existência para subvariedades p -parabólicas e totalmente aprisionadas imersas em espaços-tempo estáticos padrão.

1.4 Produtos *warped*

Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis de dimensões m e n , respectivamente. Dados os sistemas de coordenadas

$$\xi = (x_1, x_2, \dots, x_m) : \mathcal{U} \subset M^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ e } \eta = (y_1, y_2, \dots, y_n) : \mathcal{V} \subset N^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

a aplicação $\xi \times \eta : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset M^m \times N^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ que a cada $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ associa o elemento

$$(\xi \times \eta)(p, q) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_m(p), y_1(q), y_2(q), \dots, y_n(q))$$

constitui um sistema de coordenadas em $M^m \times N^n$. A variedade diferenciável $(m+n)$ -dimensional $M^m \times N^n$ obtida desse modo, a partir das estruturas diferenciáveis de M^m e N^n , é denominada variedade produto.

Considere as projeções canônicas $\pi_M : M^m \times N^n \rightarrow M^m$ e $\pi_N : M^m \times N^n \rightarrow N^n$, definidas por

$$\pi_M(p, q) = p \text{ e } \pi_N(p, q) = q.$$

Dado $z = (z_1, z_2, \dots, z_{m+n}) \in (\xi \times \eta)(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^{m+n}$, existe um único $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ tal que $(\xi \times \eta)(p, q) = z$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} [\xi \circ \pi_M \circ (\xi \times \eta)^{-1}](z) &= (\xi \circ \pi_M)(p, q) \\ &= \xi(p) \\ &= (x_1(p), \dots, x_m(p)) \\ &= (z_1, \dots, z_m) \\ &= \pi_{\mathbb{R}^m}(z) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[\eta \circ \pi_N \circ (\xi \times \eta)^{-1}](z) &= (\eta \circ \pi_N)(p, q) \\
&= \eta(q) \\
&= (y_1(q), \dots, y_n(q)) \\
&= (z_{m+1}, \dots, z_{m+n}) \\
&= \pi_{\mathbb{R}^n}(z),
\end{aligned}$$

onde $\pi_{\mathbb{R}^m}$ e $\pi_{\mathbb{R}^n}$ são as projeções de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente, as quais são diferenciáveis. Isso implica que as aplicações π_M e π_N são diferenciáveis.

De modo particular, para cada $(p, q) \in M^m \times N^n$, as restrições de π_M e π_N às subvariedades $M^m \times \{q\}$ e $\{p\} \times N^n$, nessa ordem, são difeomorfismos. Com efeito, dado $q \in N^n$, a aplicação $\pi_M : M^m \times \{q\} \rightarrow M^m$ é claramente uma bijeção. Além disso, sendo $\xi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ um sistema de coordenadas em um ponto arbitrário $p' \in M^m$, temos que $\psi : \mathcal{U} \times \{q\} \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde $\psi = \xi \circ \pi_M$, é um sistema de coordenadas no ponto $(p', q) \in M^m \times \{q\}$. Como $\xi \circ \pi_M \circ \psi^{-1} : \psi(\mathcal{U} \times \{q\}) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \xi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^m$ satisfaz

$$\xi \circ \pi_M \circ \psi^{-1} = \xi \circ \pi_M \circ (\xi \circ \pi_M)^{-1} = id_{\mathbb{R}^m}|_{\psi(\mathcal{U} \times \{q\})},$$

onde $id_{\mathbb{R}^m}$ representa a aplicação identidade em $\mathbb{R}^m$, segue que $\pi_M|_{M^m \times \{q\}}$ é um difeomorfismo. A demonstração de que $\pi_N|_{\{p\} \times N^n}$ é também um difeomorfismo é análoga.

Denotando $T_{(p,q)}(M^m \times \{q\})$ por $T_{(p,q)}M^m$ e $T_{(p,q)}(\{p\} \times N^n)$ por $T_{(p,q)}N^n$, temos que

$$T_{(p,q)}(M^m \times N^n) = T_{(p,q)}M^m \oplus T_{(p,q)}N^n,$$

isto é, o espaço vetorial $T_{(p,q)}(M^m \times N^n)$ é a soma direta dos subespaços $T_{(p,q)}M^m$ e $T_{(p,q)}N^n$. De fato, uma vez que $\pi_M|_{\{p\} \times N^n}$ é constante, a diferencial $d\pi_M$ em (p, q) é tal que, para todo $w \in T_{(p,q)}N^n$,

$$d\pi_M(w) = 0.$$

Por outro lado, como $\pi_M : M^m \times \{q\} \rightarrow M^m$ é um difeomorfismo, $d\pi_M : T_{(p,q)}M^m \rightarrow T_pM^m$ é um isomorfismo linear. Sendo assim, $d\pi_M(v) \neq 0$ para todo v não nulo em $T_{(p,q)}M^m$. Consequentemente,

$$T_{(p,q)}M^m \cap T_{(p,q)}N^n = \{0\}.$$

Além disso, $\dim(T_{(p,q)}M^m) = \dim(T_pM^m) = m$. Como $d\pi_N : T_{(p,q)}N^n \rightarrow T_qN^n$ também é um isomorfismo linear, pois $\pi_N : \{p\} \times N^n \rightarrow N^n$ é um difeomorfismo, temos

que $\dim(T_{(p,q)}N^n) = \dim(T_qN^n) = n$. Portanto,

$$\dim(T_{(p,q)}(M^m \times N^n)) = m + n = \dim(T_{(p,q)}M^m) + \dim(T_{(p,q)}N^n).$$

Esse resultado nos permite concluir que, dado $u \in T_{(p,q)}(M^m \times N^n)$, existem únicos $v \in T_{(p,q)}M^m$ e $w \in T_{(p,q)}N^n$ tais que $u = v + w$.

Se f é uma função suave em M^m , definimos o levantamento de f para $M^m \times N^n$ como sendo a função suave $\tilde{f} = f \circ \pi_M$. O levantamento de um vetor tangente $u \in T_pM^m$ para $(p, q) \in M^m \times N^n$ é o único vetor $\tilde{u} \in T_{(p,q)}M^m$ tal que $d\pi_M(\tilde{u}) = u$. Por fim, se $X \in \mathfrak{X}(M^m)$, isto é, X é um campo vetorial suave em M^m , seu levantamento para $M^m \times N^n$ é o único campo vetorial suave $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M^m \times N^n)$ cujo valor em cada $(p, q) \in M^m \times N^n$ é o levantamento do vetor X_p para (p, q) . Os levantamentos de funções suaves, vetores tangentes e campos vetoriais em N^n são definidos de modo análogo, a partir da projeção π_N . O conjunto de todos os campos vetoriais de $M^m \times N^n$ que são levantamentos de campos de M^m é denotado por $\mathcal{L}(M^m)$. Similarmente, utilizamos $\mathcal{L}(N^n)$ para denotar o conjunto dos levantamentos de campos vetoriais em N^n para $M^m \times N^n$.

Lema 1.4.1. *Se $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(M^m)$ e $\tilde{V} \in \mathcal{L}(N^n)$, então*

$$(i) \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]} \in \mathcal{L}(M^m);$$

$$(ii) \quad [\tilde{X}, \tilde{V}] = 0.$$

Demonstração. Sejam $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(M^m)$ e $\tilde{V} \in \mathcal{L}(N^n)$. Dados $p \in M^m$ e $q \in N^n$, temos que

$$d\pi_M(\tilde{X}_{(p,q)}) = X_p \text{ e } d\pi_M(\tilde{Y}_{(p,q)}) = Y_p.$$

Desse modo, para toda função suave f em M^m ,

$$\begin{aligned} d\pi_M([\tilde{X}, \tilde{Y}]_{(p,q)})(f) &= [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{(p,q)}(f \circ \pi_M) \\ &= \tilde{X}_{(p,q)}(\tilde{Y}(f \circ \pi_M)) - \tilde{Y}_{(p,q)}(\tilde{X}(f \circ \pi_M)) \\ &= \tilde{X}_{(p,q)}(d\pi_M(\tilde{Y})(f)) - \tilde{Y}_{(p,q)}(d\pi_M(\tilde{X})(f)) \\ &= \tilde{X}_{(p,q)}(Y(f) \circ \pi_M) - \tilde{Y}_{(p,q)}(X(f) \circ \pi_M) \\ &= d\pi_M(\tilde{X}_{(p,q)})(Y(f)) - d\pi_M(\tilde{Y}_{(p,q)})(X(f)) \\ &= X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) \\ &= [X, Y]_p(f). \end{aligned}$$

Portanto, $d\pi_M([\tilde{X}, \tilde{Y}]_{(p,q)}) = [X, Y]_p$. Além disso, como

$$d\pi_N(\tilde{X}_{(p,q)}) = d\pi_N(\tilde{Y}_{(p,q)}) = 0,$$

pois $\tilde{X}_{(p,q)}$ e $\tilde{Y}_{(p,q)}$ são elementos de $T_{(p,q)}M^m$,

$$\begin{aligned} d\pi_N([\tilde{X}, \tilde{Y}]_{(p,q)})(f) &= [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{(p,q)}(f \circ \pi_N) \\ &= \tilde{X}_{(p,q)}(\tilde{Y}(f \circ \pi_N)) - \tilde{Y}_{(p,q)}(\tilde{X}(f \circ \pi_N)) \\ &= \tilde{X}_{(p,q)}(d\pi_N(\tilde{Y})(f)) - \tilde{Y}_{(p,q)}(d\pi_N(\tilde{X})(f)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isso implica que $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_{(p,q)}$ é um elemento de $T_{(p,q)}M^m$. Logo, $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \in \mathcal{L}(M^m)$.

Para verificarmos a validade da afirmação (ii), observemos, primeiramente, que

$$d\pi_M(\tilde{V}_{(p,q)}) = 0 \text{ e } d\pi_N(\tilde{V}_{(p,q)}) = V_q,$$

já que $\tilde{V} \in \mathcal{L}(N^n)$ e, em particular, $\tilde{V}_{(p,q)}$ é um elemento de $T_{(p,q)}N^n$. Com base nisso, obtemos que

$$\begin{aligned} d\pi_M([\tilde{X}, \tilde{V}]_{(p,q)})(f) &= [\tilde{X}, \tilde{V}]_{(p,q)}(f \circ \pi_M) \\ &= \tilde{X}_{(p,q)}(\tilde{V}(f \circ \pi_M)) - \tilde{V}_{(p,q)}(\tilde{X}(f \circ \pi_M)) \\ &= \tilde{X}_{(p,q)}(d\pi_M(\tilde{V})(f)) - \tilde{V}_{(p,q)}(d\pi_M(\tilde{X})(f)) \\ &= -\tilde{V}_{(p,q)}(X(f) \circ \pi_M) \\ &= -d\pi_M(\tilde{V}_{(p,q)})(X(f)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d\pi_N([\tilde{X}, \tilde{V}]_{(p,q)})(f) &= [\tilde{X}, \tilde{V}]_{(p,q)}(f \circ \pi_N) \\ &= \tilde{X}_{(p,q)}(\tilde{V}(f \circ \pi_N)) - \tilde{V}_{(p,q)}(\tilde{X}(f \circ \pi_N)) \\ &= \tilde{X}_{(p,q)}(d\pi_N(\tilde{V})(f)) - \tilde{V}_{(p,q)}(d\pi_N(\tilde{X})(f)) \\ &= \tilde{X}_{(p,q)}(V(f) \circ \pi_N) \\ &= d\pi_N(\tilde{X}_{(p,q)})(V(f)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, $[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0$. □

Observação 1.4.2. *De modo inteiramente análogo, é possível mostrar que $[\tilde{U}, \tilde{V}] = \widetilde{[U, V]} \in \mathcal{L}(N^n)$, para todo $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{L}(N^n)$.*

Se munirmos M^m e N^n , respectivamente, com as métricas semi-Riemannianas g_M e g_N , podemos tornar $M^m \times N^n$ uma variedade semi-Riemanniana definindo nela a métrica produto

$$g = \pi_M^*(g_M) + \pi_N^*(g_N),$$

onde $\pi_M^*(g_M)$ e $\pi_N^*(g_N)$ representam, nessa ordem, o *pullback* de g_M via π_M e o *pullback* de g_N via π_N . Escrevendo de outra forma, para cada $(p, q) \in M^m \times N^n$ e $u, v \in T_{(p,q)}(M^m \times N^n)$,

$$g(u, v) = g_M(d\pi_M(u), d\pi_M(v)) + g_N(d\pi_N(u), d\pi_N(v)).$$

A variedade semi-Riemanniana $(M^m \times N^n, g)$ também é comumente chamada de variedade produto, sendo, na prática, distinguida da variedade diferenciável produto $M^m \times N^n$ apenas pelo contexto. Neste trabalho, denominamos $(M^m \times N^n, g)$ de produto semi-Riemanniano.

Para cada $(p, q) \in M^m \times N^n$, as subvariedades diferenciáveis $\{p\} \times N^n$ e $M^m \times \{q\}$, quando munidas com as métricas induzidas pela aplicação inclusão, são subvariedades semi-Riemannianas de $(M^m \times N^n, g)$. As restrições das projeções π_M e π_N a $M^m \times \{q\}$ e $\{p\} \times N^n$, respectivamente, isto é, $\pi_M|_{M^m \times \{q\}} : M^m \times \{q\} \rightarrow M^m$ e $\pi_N|_{\{p\} \times N^n} : \{p\} \times N^n \rightarrow N^n$, são isometrias (um resultado mais geral, que inclui este caso, é apresentado e demonstrado posteriormente). Deformando-se homoteticamente a métrica produto em cada $\{p\} \times N^n$, obtemos uma classe especial de variedades semi-Riemannianas: a classe dos produtos *warped*.

Definição 1.4.3. *Sejam (M^m, g_M) e (N^n, g_N) variedades semi-Riemannianas de dimensões m e n , respectivamente, e $\rho : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave positiva. O produto warped $M^m \times_\rho N^n$ é a variedade produto $(m+n)$ -dimensional $M^m \times N^n$ munida com o tensor métrico*

$$g = \pi_M^*(g_M) + (\rho \circ \pi_M)^2 \pi_N^*(g_N),$$

onde π_M e π_N representam as projeções canônicas de $M^m \times N^n$ sobre M^m e N^n , respectivamente.

Na Definição 1.4.3, as variedades (M^m, g_M) e (N^n, g_N) são denominadas, nessa ordem, de base e fibra do produto *warped* $M^m \times_\rho N^n$, e ρ é chamada de função *warping*. Note que, no caso em que ρ é constante e igual a 1, o produto *warped* $M^m \times_\rho N^n$ corresponde ao produto semi-Riemanniano $M^m \times N^n$.

Assim como no caso do produto semi-Riemanniano, para cada $(p, q) \in M^m \times_\rho N^n$, os subconjuntos $\{p\} \times_\rho N^n$ e $M^m \times_\rho \{q\}$, munidos com a métrica induzida pela aplicação inclusão, são subvariedades semi-Riemannianas de $M^m \times_\rho N^n$. As subvariedades da forma $\{p\} \times_\rho N^n$ são chamadas de fibras, enquanto que as subvariedades da forma $M^m \times_\rho \{q\}$ são denominadas de folhas.

Proposição 1.4.4. *Sejam (M^m, g_M) e (N^n, g_N) variedades semi-Riemannianas e $\rho : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave positiva. Se π_M e π_N são as projeções canônicas de $M^m \times N^n$ sobre M^m e N^n , respectivamente, então*

- (i) *para cada $q \in N^n$, a aplicação $\pi_M|_{M^m \times_\rho \{q\}} : M^m \times_\rho \{q\} \rightarrow M^m$ é uma isometria;*
- (ii) *para cada $p \in M^m$, a aplicação $\pi_N|_{\{p\} \times_\rho N^n} : \{p\} \times_\rho N^n \rightarrow N^n$ é uma homotetia positiva com fator de escala $1/\rho(p)$;*
- (iii) *para cada $(p, q) \in M^m \times_\rho N^n$, a folha $M^m \times_\rho \{q\}$ é ortogonal à fibra $\{p\} \times_\rho N^n$.*

Demonstração. Conforme discutido anteriormente, sabemos que, para cada $p \in M^m$ e $q \in N^n$, as aplicações $\pi_M|_{M^m \times_\rho \{q\}} : M^m \times_\rho \{q\} \rightarrow M^m$ e $\pi_N|_{\{p\} \times_\rho N^n} : \{p\} \times_\rho N^n \rightarrow N^n$ são difeomorfismos. Ademais, fixado $(x, q) \in M^m \times_\rho \{q\}$, observe que, para cada $v \in T_{(x, q)}(M^m \times_\rho \{q\})$,

$$d\pi_N(v) = 0,$$

já que $\pi_N|_{M^m \times_\rho \{q\}}$ é constante. Assim, dados $v_1, v_2 \in T_{(x, q)}(M^m \times_\rho \{q\})$,

$$\begin{aligned} g(v_1, v_2) &= g_M(d\pi_M(v_1), d\pi_M(v_2)) + \rho^2(x)g_N(d\pi_N(v_1), d\pi_N(v_2)) \\ &= g_M(d\pi_M(v_1), d\pi_M(v_2)). \end{aligned}$$

Portanto, $\pi_M|_{M^m \times_\rho \{q\}} : M^m \times_\rho \{q\} \rightarrow M^m$ é uma isometria. Isso prova a validade da afirmação (i).

Para provarmos a validade da afirmação (ii), consideremos um elemento $(p, y) \in \{p\} \times_\rho N^n$. Para cada $w \in T_{(p, y)}(\{p\} \times_\rho N^n)$,

$$d\pi_M(w) = 0,$$

pois $\pi_M|_{\{p\} \times_\rho N^n}$ é constante. Desse modo, dados $w_1, w_2 \in T_{(p, y)}(\{p\} \times_\rho N^n)$,

$$\begin{aligned} g(w_1, w_2) &= g_M(d\pi_M(w_1), d\pi_M(w_2)) + \rho^2(p)g_N(d\pi_N(w_1), d\pi_N(w_2)) \\ &= \rho^2(p)g_N(d\pi_N(w_1), d\pi_N(w_2)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$g_N(d\pi_N(w_1), d\pi_N(w_2)) = \left(\frac{1}{\rho(p)}\right)^2 g(w_1, w_2).$$

Isso implica que $\pi_N|_{\{p\} \times_\rho N^n} : \{p\} \times_\rho N^n \rightarrow N^n$ é uma homotetia positiva com fator de escala $1/\rho(p)$.

Finalmente, fixado $(p, q) \in M^m \times_\rho N^n$, temos que, dados $v \in T_{(p, q)}(M^m \times_\rho \{q\})$ e $w \in T_{(p, q)}(\{p\} \times_\rho N^n)$,

$$d\pi_N(v) = 0 \text{ e } d\pi_M(w) = 0,$$

pelos mesmos motivos apresentados anteriormente. Consequentemente,

$$g(v, w) = g_M(d\pi_M(v), d\pi_M(w)) + \rho^2(p)g_N(d\pi_N(v), d\pi_N(w)) = 0.$$

Isso significa que a folha $M^m \times_\rho \{q\}$ é ortogonal à fibra $\{p\} \times_\rho N^n$, o que completa nossa demonstração. $\square$

Lema 1.4.5. Se $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então o gradiente do levantamento de f para $\widetilde{M}^{m+n} = M^m \times_\rho N^n$ é o levantamento para $\widetilde{M}^{m+n}$ do gradiente de f , isto é,

$$\widetilde{\nabla} \tilde{f} = \widetilde{\nabla^M f},$$

onde $\widetilde{\nabla}$ e ∇^M representam, respectivamente, o operador gradiente em $\widetilde{M}^{m+n}$ e M^m .

Demonstração. Dado $(p, q) \in \widetilde{M}^{m+n}$, temos que, para todo $v \in T_{(p,q)}N^n$,

$$g(\widetilde{\nabla} \tilde{f}_{(p,q)}, v) = v(\tilde{f}) = v(f \circ \pi_M) = d\pi_M(v)(f) = 0.$$

Isso implica que $\widetilde{\nabla} \tilde{f}_{(p,q)}$ pertence a $T_{(p,q)}M^m$. Além disso, pelo item (i) da Proposição 1.4.4, para todo $u \in T_{(p,q)}M^m$,

$$\begin{aligned} g_M(d\pi_M(\widetilde{\nabla} \tilde{f}_{(p,q)}), d\pi_M(u)) &= g(\widetilde{\nabla} \tilde{f}_{(p,q)}, u) \\ &= u(\tilde{f}) \\ &= u(f \circ \pi_M) \\ &= d\pi_M(u)(f) \\ &= g_M(\nabla^M f_p, d\pi_M(u)). \end{aligned}$$

Portanto, pela arbitrariedade de u , $d\pi_M(\widetilde{\nabla} \tilde{f}_{(p,q)}) = \nabla^M f_p$. Logo, $\widetilde{\nabla} \tilde{f} = \widetilde{\nabla^M f}$. $\square$

Lema 1.4.6. Se $f : N^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então

$$\widetilde{\nabla} \tilde{f} = \frac{1}{(\rho \circ \pi_N)^2} \widetilde{\nabla^N f},$$

onde $\widetilde{\nabla}$ e ∇^N representam, respectivamente, o operador gradiente em $\widetilde{M}^{m+n}$ e N^n .

Demonstração. Seja (p, q) um elemento arbitrário de $\widetilde{M}^{m+n}$. Para cada $u \in T_{(p,q)}M^m$,

$$g(\widetilde{\nabla} \tilde{f}_{(p,q)}, u) = u(\tilde{f}) = u(f \circ \pi_N) = d\pi_N(u)(f) = 0.$$

Sendo assim, $\widetilde{\nabla} \tilde{f}_{(p,q)}$ pertence a $T_{(p,q)}N^n$. Ademais, pelo item (ii) da Proposição 1.4.4, para todo $v \in T_{(p,q)}N^n$,

$$\begin{aligned} g_N(d\pi_N(\widetilde{\nabla} \tilde{f}_{(p,q)}), d\pi_N(v)) &= \frac{1}{\rho^2(q)} g(\widetilde{\nabla} \tilde{f}_{(p,q)}, v) \\ &= \frac{1}{\rho^2(q)} v(\tilde{f}) \\ &= \frac{1}{\rho^2(q)} v(f \circ \pi_N) \\ &= \frac{1}{\rho^2(q)} d\pi_N(v)(f) \\ &= \frac{1}{\rho^2(q)} g_N(\nabla^N f_q, d\pi_N(v)) \\ &= g_N \left(\frac{1}{\rho^2(q)} \nabla^N f_q, d\pi_N(v) \right). \end{aligned}$$

Desse modo, pela arbitrariedade de v , $d\pi_N(\widetilde{\nabla}\widetilde{f}_{(p,q)}) = (1/\rho^2(q))\nabla^N f_q$. Portanto, $\widetilde{\nabla}\widetilde{f} = (1/(\rho \circ \pi_N)^2)\widetilde{\nabla^N f}$. $\square$

Proposição 1.4.7. *Seja $\widetilde{M}^{m+n} = M^m \times_\rho N^n$. Se $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(M^m)$ e $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathcal{L}(N^n)$, então*

- (i) $\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} \in \mathcal{L}(M^m)$ é o levantamento de $\nabla_X^M Y \in M^m$;
- (ii) $\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{V} = \widetilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{X} = (\tilde{X}(\tilde{\rho})/\tilde{\rho})\tilde{V}$;
- (iii) $(\widetilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^\perp = -(g(\tilde{V}, \tilde{W})/\tilde{\rho})\widetilde{\nabla^M \rho}$;
- (iv) $(\widetilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^\top \in \mathcal{L}(N^n)$ é o levantamento de $\nabla_V^N W \in N^n$.

Demonstração. Dados $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(M^m)$ e $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathcal{L}(N^n)$, sabemos, pela Fórmula de Koszul, que

$$g(\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{V}) = \frac{1}{2} \left(\tilde{X}(g(\tilde{Y}, \tilde{V})) + \tilde{Y}(g(\tilde{V}, \tilde{X})) - \tilde{V}(g(\tilde{X}, \tilde{Y})) \right. \\ \left. - g(\tilde{X}, [\tilde{Y}, \tilde{V}]) + g(\tilde{Y}, [\tilde{V}, \tilde{X}]) + g(\tilde{V}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]) \right).$$

Por outro lado, pelo Lema 1.4.1,

$$[\tilde{V}, \tilde{X}] = [\tilde{Y}, \tilde{V}] = 0 \text{ e } [\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \mathcal{L}(M^m),$$

e, consequentemente, de acordo com a Proposição 1.4.4,

$$g(\tilde{Y}, \tilde{V}) = g(\tilde{V}, \tilde{X}) = g(\tilde{V}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]) = g(\tilde{X}, [\tilde{Y}, \tilde{V}]) = g(\tilde{Y}, [\tilde{V}, \tilde{X}]) = 0.$$

Além disso, uma vez que $g(\tilde{X}, \tilde{Y}) = g_M(X, Y) \circ \pi_M$ é constante em cada fibra $\{p\} \times_\rho N^n$,

$$\tilde{V}(g(\tilde{X}, \tilde{Y})) = 0.$$

Portanto,

$$g(\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{V}) = 0.$$

Assim, da arbitrariedade de $\tilde{V}$, segue que $\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ é tangente a cada folha $M^m \times_\rho \{q\}$. Ademais, como, para todo $q \in N^n$, $\pi_M|_{M^m \times_\rho \{q\}}$ é uma isometria,

$$d\pi_M(\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}) = d\pi_M(\overline{\nabla^M}_{\overline{X}}\overline{Y}) = \nabla_{d\pi_M(\overline{X})}^M d\pi_M(\overline{Y}) = \nabla_X^M Y,$$

onde $\overline{\nabla^M}$ representa a conexão de Levi-Civita na folha $\overline{M}^m = M^m \times_\rho \{q\}$ e os campos $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são as restrições de $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ a $\overline{M}^m$. Isso demonstra a validade da afirmação (i).

Para provarmos a validade da afirmação (ii), observemos primeiramente que $\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{V} = \widetilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{X}$ são campos tangentes às fibras. Com efeito, como $[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0$, temos que

$$\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{V} - \widetilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{X} = [\tilde{X}, \tilde{V}] = 0.$$

Além disso, tendo em vista que

$$\tilde{X}(g(\tilde{V}, \tilde{Y})) = g(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{Y}) + g(\tilde{V}, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})$$

e $g(\tilde{V}, \tilde{Y}) = g(\tilde{V}, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}) = 0$, pois $\tilde{V} \in \mathcal{L}(N^n)$ e $\tilde{Y}, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \in \mathcal{L}(M^m)$, concluímos que

$$g(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{Y}) = 0.$$

Pela arbitrariedade de $\tilde{Y}$, o campo $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}$ é normal às folhas, ou, equivalentemente, tangente às fibras. Por outro lado, novamente pela fórmula de Koszul,

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{W}) &= \frac{1}{2} \left(\tilde{X}(g(\tilde{V}, \tilde{W})) + \tilde{V}(g(\tilde{W}, \tilde{X})) - \tilde{W}(g(\tilde{X}, \tilde{V})) \right. \\ &\quad \left. - g(\tilde{X}, [\tilde{V}, \tilde{W}]) + g(\tilde{V}, [\tilde{W}, \tilde{X}]) + g(\tilde{W}, [\tilde{X}, \tilde{V}]) \right) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{X}(g(\tilde{V}, \tilde{W})), \end{aligned}$$

já que

$$g(\tilde{W}, \tilde{X}) = g(\tilde{X}, \tilde{V}) = g(\tilde{X}, [\tilde{V}, \tilde{W}]) = g(\tilde{V}, [\tilde{W}, \tilde{X}]) = g(\tilde{W}, [\tilde{X}, \tilde{V}]) = 0.$$

No entanto, diferentemente do caso anterior, $g(\tilde{V}, \tilde{W}) = (\rho \circ \pi_M)^2(g_N(V, W) \circ \pi_N)$ não é constante nas folhas $M^m \times_\rho \{q\}$. Por conseguinte, sendo $\tilde{\rho} = \rho \circ \pi_M$,

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{W}) &= \frac{1}{2} \tilde{X}((\rho \circ \pi_M)^2(g_N(V, W) \circ \pi_N)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\tilde{X}(\tilde{\rho}^2)(g_N(V, W) \circ \pi_N) + \tilde{\rho}^2 \tilde{X}(g_N(V, W) \circ \pi_N) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2\tilde{\rho} \tilde{X}(\tilde{\rho})(g_N(V, W) \circ \pi_N) \right) \\ &= \tilde{\rho} \tilde{X}(\tilde{\rho}) \left(\frac{1}{\tilde{\rho}^2} g(\tilde{V}, \tilde{W}) \right) \\ &= \frac{\tilde{X}(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} g(\tilde{V}, \tilde{W}) \\ &= g \left(\frac{\tilde{X}(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} \tilde{V}, \tilde{W} \right). \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V} = (\tilde{X}(\tilde{\rho})/\tilde{\rho}) \tilde{V}$.

Para determinarmos a veracidade da afirmação (iii), basta percebermos que

$$g((\tilde{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W})^\perp, \tilde{X}) = g(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W}, \tilde{X}) = \tilde{V}(g(\tilde{W}, \tilde{X})) - g(\tilde{W}, \tilde{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{X}) = -g(\tilde{W}, \tilde{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{X}),$$

pois $\tilde{X}$ é normal às fibras e $g(\tilde{W}, \tilde{X}) = 0$.

Como, por (ii),

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{X} = \frac{\tilde{X}(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} \tilde{V},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
g((\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^\perp, \tilde{X}) &= -g(\tilde{W}, \tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{X}) \\
&= -g\left(\tilde{W}, \frac{\tilde{X}(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}}\tilde{V}\right) \\
&= -\frac{\tilde{X}(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}}g(\tilde{W}, \tilde{V}) \\
&= -\frac{g(\tilde{\nabla}\tilde{\rho}, \tilde{X})}{\tilde{\rho}}g(\tilde{W}, \tilde{V}) \\
&= -\frac{g(\tilde{W}, \tilde{V})}{\tilde{\rho}}g(\tilde{\nabla}\tilde{\rho}, \tilde{X}) \\
&= g\left(-\frac{g(\tilde{W}, \tilde{V})}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{\rho}, \tilde{X}\right).
\end{aligned}$$

Inferimos pela arbitrariedade de $\tilde{X}$ que

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^\perp = -\frac{g(\tilde{W}, \tilde{V})}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{\rho} = -\frac{g(\tilde{W}, \tilde{V})}{\tilde{\rho}}\widetilde{\nabla^M \rho},$$

onde a última igualdade segue do Lema 1.4.5.

Finalmente, uma vez que $\tilde{V}$ e $\tilde{W}$ são campos tangentes às fibras, para cada $p \in M^m$, a subvariedade $\overline{N}^n = \{p\} \times_\rho N^n$ possui conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}^N$ tal que

$$\overline{\nabla}^N_{\overline{V}}\overline{W} = (\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^\top,$$

onde $\overline{V}, \overline{W} \in \mathfrak{X}(\overline{N}^n)$ representam as restrições dos campos $\tilde{V}$ e $\tilde{W}$ a $\overline{N}^n$. Como, pela Proposição 1.4.4, $\pi_N|_{\{p\} \times_\rho N^n} : (\{p\} \times_\rho N^n, g) \rightarrow (N^n, g_N)$ é uma homotetia positiva com fator de escala $1/\rho(p)$, temos que, ao munirmos N^n com a métrica $g'_N = \rho^2(p)g_N$, a aplicação $\pi_N|_{\{p\} \times_\rho N^n} : (\pi_N|_{\{p\} \times_\rho N^n}, g) \rightarrow (N^n, g'_N)$ se torna uma isometria, pois, nesse caso,

$$\pi_N^*(g'_N) = \pi_N^*(\rho^2(p)g_N) = \rho^2(p)\pi_N^*(g_N) = \rho^2(p)\left(\frac{1}{\rho^2(p)}g\right) = g.$$

Desse modo, considerando ∇'^N a conexão de Levi-Civita em (N^n, g'_N) ,

$$d\pi_N\left((\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^\top\right) = d\pi_N(\overline{\nabla}^N_{\overline{V}}\overline{W}) = \nabla'^N_{d\pi_N(\overline{V})}d\pi_N(\overline{W}) = \nabla'^N_V W.$$

Por outro lado, para todo $Z \in \mathfrak{X}(N^n)$,

$$\begin{aligned}
g'_N(\nabla'^N_V W, Z) &= \frac{1}{2} (V(g'_N(W, Z)) + W(g'_N(Z, V)) - Z(g'_N(V, W)) \\
&\quad - g'_N(V, [W, Z]) + g'_N(W, [Z, V]) + g'_N(Z, [V, W])) \\
&= \frac{1}{2} (V(\rho^2(p)g_N(W, Z)) + W(\rho^2(p)g_N(Z, V)) - Z(\rho^2(p)g_N(V, W)) \\
&\quad - \rho^2(p)g_N(V, [W, Z]) + \rho^2(p)g_N(W, [Z, V]) + \rho^2(p)g_N(Z, [V, W])).
\end{aligned}$$

Como $\rho^2(p)$ é uma constante, obtemos

$$\begin{aligned}
g'_N(\nabla_V^N W, Z) &= \frac{1}{2} (\rho^2(p)V(g_N(W, Z)) + \rho^2(p)W(g_N(Z, V)) - \rho^2(p)Z(g_N(V, W)) \\
&\quad - \rho^2(p)g_N(V, [W, Z]) + \rho^2(p)g_N(W, [Z, V]) + \rho^2(p)g_N(Z, [V, W])) \\
&= \rho^2(p) \cdot \frac{1}{2} (V(g_N(W, Z)) + W(g_N(Z, V)) - Z(g_N(V, W)) \\
&\quad - g_N(V, [W, Z]) + g_N(W, [Z, V]) + g_N(Z, [V, W])) \\
&= \rho^2(p)g_N(\nabla_V^N W, Z) \\
&= g'_N(\nabla_V^N W, Z).
\end{aligned}$$

Isso implica que $\nabla_V^N W = \nabla_V^N W$. Logo,

$$d\pi_N \left((\widetilde{\nabla_V W})^\top \right) = \nabla_V^N W,$$

e a afirmação (iv) está provada. $\square$

Corolário 1.4.8. *Se $\widetilde{M}^{m+n} = M^m \times_\rho N^n$, então*

- (i) *para cada $q \in N^n$, a folha $M^m \times_\rho \{q\}$ é uma subvariedade totalmente geodésica;*
- (ii) *para cada $p \in M^m$, a fibra $\{p\} \times_\rho N^n$ é uma subvariedade totalmente umbílica.*

Demonstração. Dado $q \in N^n$, temos, pela afirmação (i) da Proposição 1.4.7, que a segunda forma fundamental da folha $\overline{M}^m = M^m \times_\rho \{q\}$ é nula e, portanto, $\overline{M}^m$ é totalmente geodésica. Por outro lado, dado $p \in M^m$, sabemos, pelo item (iii) da Proposição 1.4.7, que a segunda forma fundamental da fibra $\overline{N}^n = \{p\} \times_\rho N^n$ é tal que, para todo $\overline{V}, \overline{W} \in \mathfrak{X}(\overline{N}^n)$,

$$\alpha(\overline{V}, \overline{W}) = \frac{g(\overline{V}, \overline{W})}{\rho(p)} \widetilde{\nabla_M \rho}.$$

Logo, $\overline{N}^n$ é totalmente umbílica. $\square$

Exemplo 1.4.9. *A variedade $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, munida com a métrica usual, pode ser identificada com o produto warped $\mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^2$, onde $\mathbb{S}^2$ é a esfera unitária bidimensional centrada na origem. Com efeito, em coordenadas esféricas, o elemento de linha de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ é dado por*

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\phi^2 + \sin^2(\phi)d\theta^2),$$

onde $d\phi^2 + \sin^2(\phi)d\theta^2$ corresponde ao elemento de linha usual de $\mathbb{S}^2$.

1.4.1 Espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados

Tomando produtos *warped* nos quais a base é um intervalo aberto I da reta $\mathbb{R}$, munido com a métrica $-dt^2$, e a fibra é uma variedade Riemanniana arbitrária,

obtemos uma classe de variedades Lorentzianas que generalizam os clássicos modelos cosmológicos conhecidos como espaços-tempo de Robertson-Walker.

Definição 1.4.10. *Sejam (M^m, g_M) uma variedade Riemanniana m -dimensional, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave positiva. Denominamos de espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado o produto warped $\overline{M}^{m+1} = -I \times_\rho M^m$, cuja métrica é dada por*

$$g = -\pi_I^*(dt^2) + (\rho \circ \pi_I)^2 \pi_M^*(g_M),$$

onde π_I e π_M são as projeções canônicas de $-I \times_\rho M^m$ sobre I e M^m , respectivamente.

O emprego da expressão espaço-tempo se justifica pelo fato de que, na variedade Lorentziana $\overline{M}^{m+1} = -I \times_\rho M^m$, é possível definirmos globalmente um campo vetorial tipo-tempo, o qual fornece à $\overline{M}^{m+1}$ uma orientação temporal. Escolhemos tal campo como sendo o levantamento para $\overline{M}^{m+1}$ de $d/dt \in \mathfrak{X}(I)$,

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t,x)}, (t, x) \in \overline{M}^{m+1},$$

e consideramos que ele aponta para o futuro. Como, pelo item (i) da Proposição 1.4.4, $\pi_I|_{I \times_\rho \{x\}} : I \times_\rho \{x\} \rightarrow I$ é, para todo $x \in M^m$, uma isometria, ∂_t é um campo unitário.

Proposição 1.4.11. *Seja $\overline{M}^{m+1}$ o espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado $-I \times_\rho M^m$. O campo vetorial $K \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{m+1})$, definido por*

$$K = (\rho \circ \pi_I) \partial_t,$$

é um campo conforme fechado.

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{m+1})$ um campo vetorial arbitrário. Como visto anteriormente, dado $q \in \overline{M}^{m+1}$, podemos decompor $X(q)$, de modo único, como a soma

$$X(q) = a \partial_t(q) + v,$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e $v \in T_q M^m$. Considere $V \in \mathcal{L}(M^m)$ tal que $V(q) = v$. Uma vez que $X(q) = (a \partial_t + V)(q)$, obtemos

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_X K)(q) &= \overline{\nabla}_{X(q)} K \\ &= \overline{\nabla}_{(a \partial_t + V)(q)} (\rho \circ \pi_I) \partial_t \\ &= (\overline{\nabla}_{a \partial_t + V} (\rho \circ \pi_I) \partial_t)(q) \\ &= (\overline{\nabla}_{a \partial_t} (\rho \circ \pi_I) \partial_t + \overline{\nabla}_V (\rho \circ \pi_I) \partial_t)(q) \\ &= (a \overline{\nabla}_{\partial_t} (\rho \circ \pi_I) \partial_t + \overline{\nabla}_V (\rho \circ \pi_I) \partial_t)(q) \\ &= (a \partial_t (\rho \circ \pi_I) \partial_t + a (\rho \circ \pi_I) \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t + V (\rho \circ \pi_I) \partial_t + (\rho \circ \pi_I) \overline{\nabla}_V \partial_t)(q). \end{aligned}$$

Por outro lado, note que

$$\partial_t(\rho \circ \pi_I) = (d\pi_I(\partial_t))(\rho) \circ \pi_I = \frac{d}{dt}(\rho) \circ \pi_I = \rho' \circ \pi_I$$

e

$$\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0,$$

já que ∂_t é o levantamento para $\bar{M}^{m+1}$ do campo $d/dt \in \mathfrak{X}(I)$, o qual é paralelo, e, consequentemente, de acordo com o item (i) da Proposição 1.4.7, $\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t$ é o levantamento de $\nabla_{d/dt}^I d/dt = 0$. Além disso, $V(\rho \circ \pi_I) = 0$, pois $\rho \circ \pi_I$ é constante em cada fibra. Desse modo, como $\partial_t \in \mathcal{L}(I)$ e $V \in \mathcal{L}(M^m)$, segue da Proposição 1.4.7, que

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X K)(q) &= (a(\rho' \circ \pi_I)\partial_t + (\rho \circ \pi_I)\bar{\nabla}_V\partial_t)(q) \\ &= \left(a(\rho' \circ \pi_I)\partial_t + (\rho \circ \pi_I) \left(\frac{\partial_t(\rho \circ \pi_I)}{(\rho \circ \pi_I)} V \right) \right) (q) \\ &= (a(\rho' \circ \pi_I)\partial_t + (\rho' \circ \pi_I)V)(q) \\ &= ((\rho' \circ \pi_I)(a\partial_t + V))(q) \\ &= (\rho' \circ \pi_I)(q)(a\partial_t + V)(q) \\ &= (\rho \circ \pi_I)(q)X(q) \\ &= ((\rho' \circ \pi_I)X)(q). \end{aligned}$$

Logo, como q foi escolhido arbitrariamente,

$$\bar{\nabla}_X K = (\rho' \circ \pi_I)X.$$

Isso implica que K é um campo conforme fechado de fator conforme $\rho' \circ \pi_I$. Observe que, nesse caso, a derivada de Lie do tensor métrico na direção do campo K , satisfaz, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\bar{M}^{m+1})$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_K g)(X, Y) &= \mathcal{L}_K(g(X, Y)) - g(\mathcal{L}_K X, Y) - g(X, \mathcal{L}_K Y) \\ &= K(g(X, Y)) - g([K, X], Y) - g(X, [K, Y]) \\ &= g(\bar{\nabla}_K X, Y) + g(X, \bar{\nabla}_K Y) - g([K, X], Y) - g(X, [K, Y]) \\ &= g(\bar{\nabla}_K X - [K, X], Y) + g(X, \bar{\nabla}_K Y - [K, Y]) \\ &= g(\bar{\nabla}_X K, Y) + g(X, \bar{\nabla}_Y K) \\ &= g((\rho' \circ \pi_I)X, Y) + g(X, (\rho' \circ \pi_I)Y) \\ &= (\rho \circ \pi_I)g(X, Y) + (\rho \circ \pi_I)g(X, Y) \\ &= 2(\rho' \circ \pi_I)g(X, Y). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{L}_K g = 2(\rho' \circ \pi_I)g$, o que comprova que K é, de fato, um campo conforme cujo fator conforme é $\rho' \circ \pi_I$. $\square$

Em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado $\overline{M}^{m+1} = -I \times_{\rho} M^m$, para cada $t_0 \in I$, a fibra $M_{t_0}^m = \{t_0\} \times_{\rho} M^m$ é também chamada de *slice*. Conforme discutido anteriormente, o *slice* $M_{t_0}^m$ é uma subvariedade de $\overline{M}^{m+1}$. De modo mais específico, $M_{t_0}^m$ é uma hipersuperfície tipo espaço na qual a restrição do campo vetorial ∂_t é exatamente a aplicação de Gauss futuro direcionada, já que tal campo é unitário, normal a $M_{t_0}^m$ e aponta para o futuro. Além disso, como o gradiente de $\rho \circ \pi_I$ em $\overline{M}^{m+1}$ é dado por

$$\overline{\nabla}(\rho \circ \pi_I) = -g(\overline{\nabla}(\rho \circ \pi_I), \partial_t) \partial_t = -\partial_t(\rho \circ \pi_I) \partial_t = -(\rho' \circ \pi_I) \partial_t,$$

tal *slice* é, de acordo com o item (ii) do Corolário 1.4.8, uma subvariedade totalmente umbílica com segunda forma fundamental $\alpha_{t_0} : \mathfrak{X}(M_{t_0}^m) \times \mathfrak{X}(M_{t_0}^m) \rightarrow \mathfrak{X}(M_{t_0}^m)^{\perp}$ satisfazendo, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M_{t_0}^m)$,

$$\alpha_{t_0}(X, Y) = -\frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} g(X, Y) \partial_t.$$

Pelo item (ii) da Proposição 1.4.7, temos ainda que o operador de Weingarten com respeito ao campo ∂_t , $A_{t_0} : \mathfrak{X}(M_{t_0}^m) \rightarrow \mathfrak{X}(M_{t_0}^m)$, associa cada $X \in \mathfrak{X}(M_{t_0}^m)$ ao campo

$$A_{t_0} X = \frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} X.$$

Finalmente, sendo $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ um referencial ortonormal local em $M_{t_0}^m$, o campo curvatura média de $M_{t_0}^m$, denotado por $\vec{\mathcal{H}}_{t_0}$, é dado por

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_{t_0} &= \frac{1}{m} \text{tr}(\alpha_{t_0}) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \alpha_{t_0}(E_i, E_i) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(-\frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} g(E_i, E_i) \partial_t \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(-\frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} \partial_t \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(-m \frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} \partial_t \right) \\ &= -\frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} \partial_t. \end{aligned}$$

Como visto anteriormente, para cada $(t, x) \in \overline{M}^{m+1}$, a aplicação $\pi_M|_{\{t\} \times_{\rho} M^m}$ é uma homotetia positiva com fator de escala $1/\rho(t)$. Sendo assim, o *slice* $\{t\} \times_{\rho} M^m$

pode ser entendido como uma versão isométrica, ampliada ou reduzida da variedade M^m . Nesse sentido, se a função *warping* ρ é crescente em um intervalo $J \subset I$, os *slices* crescem nesse intervalo. Mais precisamente, dados $t_1, t_2 \in J$, se $t_1 < t_2$, então o *slice* $\{t_2\} \times_\rho M^m$ é uma versão ampliada do *slice* $\{t_1\} \times_\rho M^m$. Com base nessa característica, dizemos que um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado é espacialmente

- a) expansivo, quando $\rho' > 0$;
- b) contrativo, quando $\rho' < 0$;
- c) não contrativo, quando $\rho' \geq 0$;
- d) não expansivo, quando $\rho' \leq 0$;
- e) fortemente expansivo, quando $\rho' \geq a_0$ para algum $a_0 > 0$;
- f) fortemente contrativo, quando $\rho' \leq a_0$ para algum $a_0 < 0$.

No caso em que ρ' se anula apenas em pontos isolados, isto é, o conjunto $\{t \in I : \rho'(t) = 0\}$ é discreto, dizemos que $\overline{M}^{m+1}$ é um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado próprio. Um *slice* $\{t_0\} \times_\rho M^m$ em que $\rho'(t_0) = 0$ é denominado de *slice* crítico.

Seja Σ^n uma subvariedade tipo espaço imersa isometricamente em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$, cuja imersão é dada por $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+p+1}$. A função $h = \pi_I \circ \psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada de função altura de Σ^n . Como, pelo Lema 1.4.5, $\overline{\nabla}\pi_I$ é tangente às folhas e ∂_t é unitário, temos que

$$\overline{\nabla}\pi_I = -g(\overline{\nabla}\pi_I, \partial_t)\partial_t = -\partial_t(\pi_I)\partial_t = -\partial_t.$$

Com base nisso, o gradiente de h , com respeito à métrica induzida por ψ em Σ^n , denotada por g_Σ , é tal que, para cada $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$,

$$\begin{aligned} g_\Sigma(\nabla^\Sigma h, X) &= X(h) \\ &= X(\pi_I \circ \psi) \\ &= d\psi(X)(\pi_I) \circ \psi \\ &= g(\overline{\nabla}\pi_I, d\psi(X)) \circ \psi \\ &= g(-\partial_t, d\psi(X)) \circ \psi \\ &= g(-\partial_t^\top, d\psi(X)) \circ \psi \\ &= g_\Sigma(-(\partial_t^\top)_\Sigma, X), \end{aligned}$$

onde $\partial_t^\top$ é a componente tangente a $\psi(\Sigma^n)$ do campo ∂_t e $(\partial_t^\top)_\Sigma$ representa o único campo definido em Σ^n que satisfaz $d\psi((\partial_t^\top)_\Sigma) = \partial_t^\top$. Por conseguinte,

$$\nabla^\Sigma h = -(\partial_t^\top)_\Sigma.$$

Esta igualdade é escrita, na prática, como

$$\nabla h = -\partial_t^\top,$$

na qual consideramos a identificação natural entre os vetores tangentes a Σ^n e suas imagens pela diferencial de ψ .

Se h é limitada inferiormente, dizemos que Σ^n está longe do infinito passado. Analogamente, se h é limitada superiormente, dizemos que Σ^n está longe do infinito futuro. No caso em que h é limitada, dizemos simplesmente que Σ^n está longe do infinito. Note que, quando h é constante, isto é, $h \equiv t_0$, para algum $t_0 \in I$, a variedade $\psi(\Sigma^n)$ está contida em $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$. Nessa situação, identificando $\psi(\Sigma^n)$ com Σ^n , dizemos comumente que Σ^n está contida no *slice* $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$.

1.4.2 Espaços-tempo estáticos padrão

Tomando produtos *warped* nos quais a base é uma variedade Riemanniana arbitrária e a fibra é um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, munido com a métrica $-dt^2$, obtemos uma classe de variedades Lorentzianas conhecidas como espaços-tempos estáticos padrão.

Definição 1.4.12. *Sejam (M^m, g_M) uma variedade Riemanniana m -dimensional, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $\rho : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave positiva. Denominamos de espaço-tempo estático padrão o produto warped $\overline{M}^{m+1} = M^m \times_\rho I$, cuja métrica é dada por*

$$g = \pi^*(g_M) - (\rho \circ \pi_M)^2 \pi_I^*(dt^2),$$

onde π_M e π_I são as projeções canônicas de $M^m \times_\rho I$ sobre M^m e I , respectivamente.

Observação 1.4.13. *Em alguns textos da literatura, o espaço-tempo $\overline{M}^{m+1} = M^m \times_\rho I$ é também denotado por $I \times_\rho M^m$.*

Assim como no caso dos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados, o campo tipo tempo ∂_t , obtido pelo levantamento para $\overline{M}^{m+1} = M^m \times_\rho I$ do campo vetorial d/dt , definido em I , fornece uma orientação temporal à $\overline{M}^{m+1}$. No entanto, diferentemente do que ocorre no caso anterior, ∂_t não é unitário, já que, de acordo com

o item (ii) da Proposição 1.4.4, $\pi_I|_{\{x\} \times_\rho I}$ é, para cada $x \in M^m$, uma homotetia com fator de escala $1/\rho(x)$.

Proposição 1.4.14. *Seja $\overline{M}^{m+1}$ o espaço-tempo estático padrão $M^m \times_\rho I$. O campo vetorial $\partial_t \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{m+1})$ é um campo de Killing.*

Demonstração. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{m+1})$ campos vetoriais arbitrários. Dado $q \in \overline{M}^{m+1}$, podemos decompor $X(q)$ e $Y(q)$, de modo único, como

$$X(q) = a\partial_t(q) + v \text{ e } Y(q) = b\partial_t(q) + w,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $v, w \in T_q M^m$. Considere $V, W \in \mathcal{L}(M^m)$ tais que $V(q) = v$ e $W(q) = w$. Note que, nesse caso, $X(q) = (a\partial_t + V)(q)$ e $Y(q) = (b\partial_t + W)(q)$. Desse modo, temos que

$$(\overline{\nabla}_X \partial_t)(q) = \overline{\nabla}_{X(q)} \partial_t = \overline{\nabla}_{(a\partial_t + V)(q)} \partial_t = (\overline{\nabla}_{a\partial_t + V} \partial_t)(q) = (a\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t + \overline{\nabla}_V \partial_t)(q).$$

Agora, perceba que, apesar de ∂_t ser o levantamento para $\overline{M}^{m+1}$ de $d/dt \in \mathfrak{X}(I)$, $\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t$ não é o levantamento de $\nabla_{d/dt}^I d/dt$, como ocorre no caso dos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados. Com efeito, uma vez que, em $\overline{M}^{m+1}$, ∂_t é um campo tangente às fibras, segue dos itens (iii) e (iv) da Proposição 1.4.7 que

$$\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = (\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t)^\top - \frac{g(\partial_t, \partial_t)}{\rho \circ \pi_M} \overline{\nabla}(\rho \circ \pi_M),$$

onde $(\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t)^\top$ é o levantamento para $\overline{M}^{m+1}$ de $\nabla_{d/dt}^I d/dt$, o qual é nulo, pois d/dt é um campo paralelo. Assim, como

$$g(\partial_t, \partial_t) = -(\rho \circ \pi_M)^2,$$

obtemos que

$$\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = (\rho \circ \pi_M) \overline{\nabla}(\rho \circ \pi_M).$$

Ademais, pelo item (ii) da Proposição 1.4.7,

$$\overline{\nabla}_V \partial_t = \frac{V(\rho \circ \pi_M)}{\rho \circ \pi_M} \partial_t.$$

Portanto,

$$(\overline{\nabla}_X \partial_t)(q) = \left(a(\rho \circ \pi_M) \overline{\nabla}(\rho \circ \pi_M) + \frac{V(\rho \circ \pi_M)}{\rho \circ \pi_M} \partial_t \right) (q).$$

Analogamente,

$$(\overline{\nabla}_Y \partial_t)(q) = \left(b(\rho \circ \pi_M) \overline{\nabla}(\rho \circ \pi_M) + \frac{W(\rho \circ \pi_M)}{\rho \circ \pi_M} \partial_t \right) (q).$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
g(\bar{\nabla}_X \partial_t, Y)(q) &= g_q((\bar{\nabla}_X \partial_t)(q), Y(q)) \\
&= g_q \left(\left(a(\rho \circ \pi_M) \bar{\nabla}(\rho \circ \pi_M) + \frac{V(\rho \circ \pi_M)}{\rho \circ \pi_M} \partial_t \right) (q), (b\partial_t + W)(q) \right) \\
&= g \left(a(\rho \circ \pi_M) \bar{\nabla}(\rho \circ \pi_M) + \frac{V(\rho \circ \pi_M)}{\rho \circ \pi_M} \partial_t, b\partial_t + W \right) (q) \\
&= \left(g(a(\rho \circ \pi_M) \bar{\nabla}(\rho \circ \pi_M), b\partial_t) + g \left(\frac{V(\rho \circ \pi_M)}{\rho \circ \pi_M} \partial_t, b\partial_t \right) \right. \\
&\quad \left. + g(a(\rho \circ \pi_M) \bar{\nabla}(\rho \circ \pi_M), W) + g \left(\frac{V(\rho \circ \pi_M)}{\rho \circ \pi_M} \partial_t, W \right) \right) (q) \\
&= \left(ab(\rho \circ \pi_M) g(\bar{\nabla}(\rho \circ \pi_M), \partial_t) + b \frac{V(\rho \circ \pi_M)}{\rho \circ \pi_M} g(\partial_t, \partial_t) \right. \\
&\quad \left. + a(\rho \circ \pi_M) g(\bar{\nabla}(\rho \circ \pi_M), W) + \frac{V(\rho \circ \pi_M)}{\rho \circ \pi_M} g(\partial_t, W) \right) (q).
\end{aligned}$$

Como $\bar{\nabla}(\rho \circ \pi_M), W \in \mathcal{L}(M^m)$ e $\partial_t \in \mathcal{L}(I)$, sabemos que

$$g(\bar{\nabla}(\rho \circ \pi_M), \partial_t) = g(\partial_t, W) = 0.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
g(\bar{\nabla}_X \partial_t, Y)(q) &= \left(b \frac{V(\rho \circ \pi_M)}{\rho \circ \pi_M} g(\partial_t, \partial_t) + a(\rho \circ \pi_M) g(\bar{\nabla}(\rho \circ \pi_M), W) \right) (q) \\
&= (-b(\rho \circ \pi_M) V(\rho \circ \pi_M) + a(\rho \circ \pi_M) W(\rho \circ \pi_M)) (q).
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$g(\bar{\nabla}_Y \partial_t, X)(q) = (-a(\rho \circ \pi_M) W(\rho \circ \pi_M) + b(\rho \circ \pi_M) V(\rho \circ \pi_M)) (q).$$

Pela arbitrariedade de q , isso implica que

$$g(\bar{\nabla}_X \partial_t, Y) = -g(\bar{\nabla}_Y \partial_t, X).$$

Como a derivada de Lie do tensor métrico g na direção do campo ∂_t satisfaz, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\bar{M}^{m+1})$,

$$(\mathcal{L}_{\partial_t} g)(X, Y) = g(\bar{\nabla}_X \partial_t, Y) + g(X, \bar{\nabla}_Y \partial_t),$$

concluimos que $\mathcal{L}_{\partial_t} g = 0$. Logo, ∂_t é um campo de Killing. $\square$

Analogamente ao caso dos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados, em um espaço-tempo estático-padrão $\bar{M}^{m+1} = M^m \times_\rho I$, para cada $t_0 \in I$, a folha $M_{t_0}^m = M^m \times_\rho \{t_0\}$ é também chamada de *slice*. Como a métrica induzida em $M_{t_0}^m$ pela inclusão é positiva definida, tal *slice* é uma hipersuperfície tipo espaço. Além

disso, de acordo com o item (i) do Corolário 1.4.8, $M_{t_0}^m$ é uma subvariedade totalmente geodésica e a restrição do campo vetorial $(1/(\rho \circ \pi_M))\partial_t$ a ela é a aplicação de Gauss futuro direcionada.

Seja Σ^n uma subvariedade tipo espaço imersa isometricamente em um espaço-tempo estático padrão $\overline{M}^{n+p+1} = M^{n+p} \times_{\rho} I$, cuja imersão é dada por $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+p+1}$. Como fizemos anteriormente, definimos em Σ^n a função altura $h = \pi_I \circ \psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$. Uma vez que, de acordo com o Lema 1.4.6, $\overline{\nabla}\pi_I$ é tangente às fibras, temos que

$$\overline{\nabla}\pi_I = \frac{g(\overline{\nabla}\pi_I, \partial_t)}{g(\partial_t, \partial_t)}\partial_t = -\frac{\partial_t(\pi_I)}{(\rho \circ \pi_M)^2}\partial_t = -\frac{1}{(\rho \circ \pi_M)^2}\partial_t.$$

Assim, o gradiente de h , com respeito à métrica induzida por ψ em Σ^n satisfaz, para cada $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$,

$$\begin{aligned} g_{\Sigma}(\nabla^{\Sigma}h, X) &= X(h) \\ &= X(\pi \circ \psi) \\ &= d\psi(X)(\pi_I) \circ \psi \\ &= g(\overline{\nabla}\pi_I, d\psi(X)) \circ \psi \\ &= g\left(-\frac{1}{(\rho \circ \pi_M)^2}\partial_t, d\psi(X)\right) \circ \psi \\ &= -\frac{1}{(\rho \circ \pi_M \circ \psi)^2}(g(\partial_t, d\psi(X)) \circ \psi) \\ &= -\frac{1}{(\rho \circ \pi_M \circ \psi)^2}(g(\partial_t^{\top}, d\psi(X)) \circ \psi) \\ &= -\frac{1}{(\rho \circ \pi_M \circ \psi)^2}g_{\Sigma}((\partial_t^{\top})_{\Sigma}, X) \\ &= g_{\Sigma}\left(-\frac{1}{(\rho \circ \pi_M \circ \psi)^2}(\partial_t^{\top})_{\Sigma}, X\right), \end{aligned}$$

onde $\partial_t^{\top}$ é a componente tangente a $\psi(\Sigma^n)$ do campo ∂_t e $(\partial_t^{\top})_{\Sigma}$ representa o único campo definido em Σ^n que satisfaz $d\psi((\partial_t^{\top})_{\Sigma}) = \partial_t^{\top}$. Logo,

$$\nabla^{\Sigma}h = -\frac{1}{(\rho \circ \pi_M \circ \psi)^2}(\partial_t^{\top})_{\Sigma}.$$

Escrevendo da maneira mais usual, considerando a identificação entre os vetores tangentes a Σ^n e suas imagens pela diferencial de ψ , temos

$$\nabla h = -\frac{1}{(\rho \circ \pi_M)^2}\partial_t^{\top}.$$

Assim como no caso dos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados, quando a função altura é limitada inferiormente (respectivamente, superiormente), dizemos que Σ^n é uma subvariedade longe do infinito passado (respectivamente, futuro). Se h é limitada, dizemos que Σ^n está longe do infinito. Quando $h \equiv t_0$, para algum $t_0 \in I$, dizemos que Σ^n está contida no *slice* $M^{n+p} \times_\rho \{t_0\}$.

Capítulo 2

Escassez de subvariedades aprisionadas em espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados

Neste capítulo, apresentamos resultados de rigidez para classes de subvariedades tipo espaço imersas em espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados, que nos permitem inferir resultados de não existência para subvariedades fracamente aprisionadas ou totalmente aprisionadas nesses ambientes. A técnica empregada para a obtenção desses resultados consiste, basicamente, em utilizar as propriedades do tipo Liouville citadas anteriormente, na Definição 1.2.1 e na Proposição 1.1.3, com o intuito de concluir que, sob certas condições, a função altura das subvariedades estudadas deve ser constante, ou seja, tais subvariedades devem estar contidas em *slices*.

2.1 Resultados de rigidez e não existência para subvariedades parabólicas

Inicialmente, nos dedicamos a abordar o caso das subvariedades parabólicas, destacando alguns resultados apresentados por Pelegrín em [25] e apresentando novas contribuições. Os argumentos aqui utilizados assemelham-se aos empregados no caso das subvariedades completas, permitindo-nos fazer conexões entre os resultados desta seção e os da seção posterior.

2.1.1 Resultados auxiliares

A seguir, são apresentados alguns resultados auxiliares essenciais para a demonstração dos resultados principais desta seção, os quais podem ser encontrados em [13, Lema 1]. No Lema 2.1.1, o laplaciano da função altura é expresso em termos de $g(\vec{H}, \partial_t)$.

Lema 2.1.1 (Cunha, Lima, Lima e Santos, 2020). *Seja Σ^n uma subvariedade tipo espaço imersa em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$. O laplaciano da função altura definida em Σ^n é dado por*

$$\Delta h = ng(\vec{H}, \partial_t) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} (n + |\nabla h|^2).$$

Demonstração. Seja $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal local em Σ^n . Pela definição do operador laplaciano, temos que

$$\begin{aligned} \Delta h &= \operatorname{div}(\nabla h) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} \nabla h, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g\left(\nabla_{E_i} \left(\frac{1}{\rho(h)} (\rho(h) \nabla h)\right), E_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n g\left(E_i \left(\frac{1}{\rho(h)}\right) \rho(h) \nabla h + \frac{1}{\rho(h)} \nabla_{E_i} \rho(h) \nabla h, E_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(E_i \left(\frac{1}{\rho(h)}\right) \rho(h) g(\nabla h, E_i) + \frac{1}{\rho(h)} g(\nabla_{E_i} \rho(h) \nabla h, E_i)\right) \\ &= \rho(h) \sum_{i=1}^n E_i \left(\frac{1}{\rho(h)}\right) g(\nabla h, E_i) + \frac{1}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} \rho(h) \nabla h, E_i) \\ &= \rho(h) \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\rho'(h)}{\rho(h)^2} E_i(h)\right) g(\nabla h, E_i) + \frac{1}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} \rho(h) \nabla h, E_i) \\ &= -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n E_i(h) g(\nabla h, E_i) + \frac{1}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} \rho(h) \nabla h, E_i). \end{aligned}$$

Como

$$E_i(h) = g(\nabla h, E_i)$$

e

$$\nabla h = -\partial_t^\top,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\Delta h &= -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n g(\nabla h, E_i) g(\nabla h, E_i) + \frac{1}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} \rho(h) (-\partial_t^\top), E_i) \\
&= -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n g(\nabla h, g(\nabla h, E_i) E_i) + \frac{1}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n g(\bar{\nabla}_{E_i} \rho(h) (\partial_t^\perp - \partial_t), E_i) \\
&= -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} g\left(\nabla h, \sum_{i=1}^n g(\nabla h, E_i) E_i\right) + \frac{1}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n g(\bar{\nabla}_{E_i} \rho(h) \partial_t^\perp - \bar{\nabla}_{E_i} \rho(h) \partial_t, E_i) \\
&= -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} g(\nabla h, \nabla h) + \frac{1}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n g(E_i(\rho(h)) \partial_t^\perp + \rho(h) \bar{\nabla}_{E_i} \partial_t^\perp - \bar{\nabla}_{E_i} \rho(h) \partial_t, E_i) \\
&= -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} |\nabla h|^2 + \sum_{i=1}^n g(\bar{\nabla}_{E_i} \partial_t^\perp, E_i) - \frac{1}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n g(\bar{\nabla}_{E_i} \rho(h) \partial_t, E_i).
\end{aligned}$$

Uma vez que, pela Proposição 1.4.11, $(\rho \circ \pi_I) \partial_t$ é um campo conforme fechado em $\overline{M}^{n+p+1}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta h &= -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} |\nabla h|^2 + \sum_{i=1}^n g(\bar{\nabla}_{E_i} \partial_t^\perp, E_i) - \frac{1}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n g(\rho'(h) E_i, E_i) \\
&= -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} |\nabla h|^2 + \sum_{i=1}^n g((\bar{\nabla}_{E_i} \partial_t^\perp)^\top, E_i) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} \sum_{i=1}^n g(E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^n g(A_{\partial_t^\perp} E_i, E_i) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} |\nabla h|^2 - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} n \\
&= \sum_{i=1}^n g(\alpha(E_i, E_i), \partial_t^\perp) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} (n + |\nabla h|^2) \\
&= \sum_{i=1}^n g(\alpha(E_i, E_i), \partial_t) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} (n + |\nabla h|^2) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^n \alpha(E_i, E_i), \partial_t\right) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} (n + |\nabla h|^2) \\
&= g(n\vec{H}, \partial_t) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} (n + |\nabla h|^2) \\
&= ng(\vec{H}, \partial_t) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} (n + |\nabla h|^2),
\end{aligned}$$

o que completa nossa demonstração. $\square$

De modo similar, no Lema 2.1.2, o laplaciano da composição da função altura com uma primitiva da função *warping* é também escrito em termos de $g(\vec{H}, \partial_t)$.

Lema 2.1.2 (Cunha, Lima, Lima e Santos, 2020). *Sejam Σ^n uma subvariedade tipo espaço imersa em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho$*

M^{n+p} e $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O laplaciano de $\sigma \circ h$ é dado por

$$\Delta(\sigma \circ h) = \sigma''(h)|\nabla h|^2 + \sigma'(h)\Delta h.$$

Em particular, se

$$\sigma(t) = \int_a^t \rho(s)ds,$$

onde $a \in I$, então

$$\Delta(\sigma \circ h) = n \left(\rho(h)g(\vec{H}, \partial_t) - \rho'(h) \right).$$

Demonstração. Primeiramente, note que, dados $q \in \Sigma^n$ e $v \in T_q \Sigma^n$,

$$\begin{aligned} g((\nabla(\sigma \circ h))(q), v) &= d(\sigma \circ h)_q(v) \\ &= \sigma'(h(q))dh_q(v) \\ &= \sigma'(h(q))g((\nabla h)(q), v) \\ &= g((\sigma'(h)\nabla h)(q), v). \end{aligned}$$

Isso implica que $\nabla(\sigma \circ h) = \sigma'(h)\nabla h$.

Seja $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal local em Σ^n . Pela definição do operador laplaciano, temos que

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma \circ h) &= \operatorname{div}(\nabla(\sigma \circ h)) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} \nabla(\sigma \circ h), E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} \sigma'(h)\nabla h, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g(E_i(\sigma'(h))\nabla h + \sigma'(h)\nabla_{E_i} \nabla h, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\sigma''(h)E_i(h)\nabla h, E_i) + \sum_{i=1}^n \sigma'(h)g(\nabla_{E_i} \nabla h, E_i) \\ &= \sigma''(h)g\left(\nabla h, \sum_{i=1}^n E_i(h)E_i\right) + \sigma'(h)\sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} \nabla h, E_i) \\ &= \sigma''(h)g\left(\nabla h, \sum_{i=1}^n g(\nabla h, E_i)E_i\right) + \sigma'(h)\Delta h \\ &= \sigma''(h)g(\nabla h, \nabla h) + \sigma'(h)\Delta h \\ &= \sigma''(h)|\nabla h|^2 + \sigma'(h)\Delta h. \end{aligned}$$

Particularmente, se

$$\sigma(t) = \int_a^t \rho(s)ds,$$

onde $a \in I$, então,

$$\Delta(\sigma \circ h) = \rho'(h)|\nabla h|^2 + \rho(h)\Delta h.$$

Sendo assim, pelo Lema 2.1.1, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma \circ h) &= \rho'(h)|\nabla h|^2 + \rho(h) \left(ng(\vec{H}, \partial_t) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} (n + |\nabla h|^2) \right) \\ &= \rho'(h)|\nabla h|^2 + n\rho(h)g(\vec{H}, \partial_t) - n\rho'(h) - \rho'(h)|\nabla h|^2 \\ &= n \left(\rho(h)g(\vec{H}, \partial_t) - \rho'(h) \right),\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Observe que, pelo Lema 2.1.2, podemos controlar o sinal de $\Delta(\sigma \circ h)$ impondo condições sobre os sinais de $\rho'(h)$ e $g(\vec{H}, \partial_t)$. Controlando o sinal de $\Delta(\sigma \circ h)$ e incluindo hipóteses de limitação para $\sigma \circ h$, nos tornamos aptos a empregar a propriedade do tipo Liouville satisfeita em variedades parabólicas. É dessa forma que funciona a técnica empregada para a obtenção dos principais resultados desta seção.

2.1.2 Resultados principais

Nesta subseção, são apresentados resultados de rigidez e não existência para subvariedades parabólicas imersas em espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados.

Em [25, Teorema 6], Pelegrín demonstrou o seguinte resultado:

Teorema 2.1.3 (Pelegrín, 2022). *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_{\rho} M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo) e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço, parabólica e longe do infinito passado (respectivamente, futuro). Se $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\vec{H}, \partial_t) \geq 0$), então Σ^n está contida em um slice crítico $\{t_0\} \times M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.*

No entanto, supondo-se que as condições do Teorema 2.1.3 são satisfeitas, não podemos concluir que Σ^n é uma subvariedade mínima no *slice* $\{t_0\} \times_{\rho} M^{n+p}$, como afirmado em [25, Teorema 6]. Com efeito, a subvariedade parabólica $\{0\} \times \mathbb{S}^2(r)$, onde $\mathbb{S}^2(r)$ é a esfera bidimensional de raio r , imersa no espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo $-\mathbb{R} \times_{e^{t^3}} \mathbb{R}^3$, está contida no *slice* crítico $\{0\} \times \mathbb{R}^3$, mas seu campo curvatura média é

$$\vec{H} = \frac{1}{r}N \neq 0,$$

onde N é o campo normal unitário da esfera em $\mathbb{R}^3$.

Todavia, a conclusão supracitada pode ser obtida acrescentando-se ao Teorema 2.1.3 a hipótese $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$, conforme o Teorema 2.1.4.

Teorema 2.1.4. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_{\rho} M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo) e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço, parabólica e longe do infinito passado (respectivamente, futuro). Se $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$ e $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\vec{H}, \partial_t) \geq 0$), então Σ^n está contida, como uma subvariedade mínima, em um slice crítico $\{t_0\} \times_{\rho} M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.*

Demonstração. Sabemos, pelo Teorema 2.1.3, que se $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$ (ou $g(\vec{H}, \partial_t) \geq 0$, no caso em que $\overline{M}^{n+p+1}$ é espacialmente não expansivo e Σ^n é limitada no infinito futuro), então Σ^n está contida em um slice crítico $\{t_0\} \times_{\rho} M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$. Ademais, como $h \equiv t_0$ e, conseqüentemente, $\nabla h = 0$ e $\Delta h = 0$, segue do Lema 2.1.1 que

$$g(\vec{H}, \partial_t) = \frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} = 0.$$

Isso significa que o campo curvatura média $\vec{H}$ não possui componente na direção do campo ∂_t , o qual dá a orientação temporal do espaço-tempo $\overline{M}^{n+p+1}$. Desse modo, $\vec{H}$ só pode ser tipo espaço e, portanto, se $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$, $\vec{H}$ deve ser nulo ao longo de Σ^n , isto é, $\vec{H} = 0$. Nesse caso, Σ^n é uma subvariedade mínima em $\{t_0\} \times_{\rho} M^{n+p}$. $\square$

Como é possível inferir pelo Teorema 2.1.4, se Σ^n é uma subvariedade tipo espaço, parabólica e longe do infinito passado (respectivamente, futuro), satisfazendo $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\vec{H}, \partial_t) \geq 0$), em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), então seu campo curvatura média $\vec{H}$ não pode ser causal. Com base nesse fato, temos o seguinte resultado de não existência para subvariedades fracamente aprisionadas, destacado por Pelegrín em [25, Corolário 7]:

Corolário 2.1.5 (Pelegrín, 2022). *Em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), não existem subvariedades parabólicas, fracamente futuro aprisionadas (respectivamente, passado aprisionadas) e longe do infinito passado (respectivamente, futuro).*

Observação 2.1.6. *Uma vez que um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente expansivo (respectivamente, contrativo) não contém slices críticos, pois ρ' não se anula, o Teorema 2.1.3 garante que em tal espaço-tempo não podem existir subvariedades tipo espaço, parabólicas e longe do infinito passado (respectivamente, futuro) tais que $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\vec{H}, \partial_t) \geq 0$).*

No Teorema 2.1.7, apresentado a seguir, a condição de limitação na função altura dos resultados anteriores é substituída por uma condição de limitação relacionada à

função *warping* do espaço-tempo. Utilizamos a notação χ_I para nos referirmos à função característica do intervalo I , isto é,

$$\chi_I(s) = \begin{cases} 1, & s \in I \\ 0, & s \notin I \end{cases}.$$

Teorema 2.1.7. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_{\rho} M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), satisfazendo a condição*

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_a^{+\infty} \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \right),$$

onde $a \in I$, e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço e parabólica. Se $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\vec{H}, \partial_t) \geq 0$), então Σ^n está contida em um slice crítico $\{t_0\} \times_{\rho} M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.

Demonstração. Considere a função suave $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\sigma(t) = \int_a^t \rho(s) ds.$$

Observe que σ é limitada inferiormente. Com efeito, uma vez que ρ é uma função positiva, σ é crescente e, conseqüentemente, $\sigma(t) \geq 0$ quando $t \geq a$. Além disso, por hipótese, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds \leq k.$$

Desse modo, quando $t < a$,

$$\sigma(t) = - \int_t^a \rho(s) ds \geq - \int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds \geq -k.$$

Como $\rho'(h) \geq 0$, pois $\overline{M}^{n+p+1}$ é um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo, temos, pelo Lema 2.1.2, que, se $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$, então

$$\Delta(\sigma \circ h) \leq 0.$$

Sendo Σ^n uma subvariedade parabólica, segue, nesse caso, que $\sigma \circ h$ é constante. Isso implica que h é também uma função constante e, portanto, Σ^n está contida em um slice $\{t_0\} \times M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$. Ademais, $\nabla h = 0$ e $\Delta h = 0$. Por conseguinte, pelo Lema 2.1.1,

$$0 \leq \frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} = g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0.$$

Logo, $\rho'(t_0) = 0$ e, portanto, $\{t_0\} \times_{\rho} M^{n+p}$ é um slice crítico. O caso entre parênteses é demonstrado de maneira análoga. $\square$

Utilizando os mesmos argumentos da Observação 2.1.6, inferimos, a partir do Teorema 2.1.7, a validade do resultado de não existência apresentado em seguida.

Corolário 2.1.8. *Em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente expansivo (respectivamente, contrativo) $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$, satisfazendo a condição*

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_a^{+\infty} \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \right),$$

onde $a \in I$, não existem subvariedades tipo espaço e parabólicas tais que $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\vec{H}, \partial_t) \geq 0$).

No Teorema 2.1.9, enunciado a seguir, acrescentamos ao Teorema 2.1.7 a hipótese $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$ e concluímos que Σ^n deve satisfazer $\vec{H} = 0$.

Teorema 2.1.9. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), satisfazendo a condição*

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_a^{+\infty} \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \right),$$

onde $a \in I$, e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço e parabólica. Se $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$ e $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\vec{H}, \partial_t) \geq 0$), então Σ^n está contida, como uma subvariedade mínima, em um slice crítico $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.

Demonstração. Se $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$, temos, pelo Teorema 2.1.7 que Σ^n está contida em um slice crítico $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$. Ademais, como $h \equiv t_0$ e, consequentemente, $\nabla h = 0$ e $\Delta h = 0$, segue do Lema 2.1.1 que

$$g(\vec{H}, \partial_t) = \frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} = 0.$$

Isso significa que o campo curvatura média $\vec{H}$ não possui componente na direção do campo ∂_t , o qual dá a orientação temporal do espaço-tempo $\overline{M}^{n+p+1}$. Desse modo, $\vec{H}$ só pode ser tipo espaço. Consequentemente, se $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$, devemos ter $\vec{H} = 0$ e, portanto, Σ^n está contida em $\{t_0\} \times_\rho M^{n+m}$ como uma subvariedade mínima. A demonstração do caso entre parênteses é análoga. $\square$

Do Teorema 2.1.9, inferimos o seguinte resultado de não existência para subvariedades fracamente aprisionadas:

Corolário 2.1.10. *Em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo) $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$, satisfazendo a condição*

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_a^{+\infty} \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \right),$$

onde $a \in I$, não existem subvariedades parabólicas e fracamente futuro aprisionadas (respectivamente, passado aprisionadas).

O Teorema 2.1.11, enunciado a seguir, é um resultado de rigidez para subvariedades parabólicas no qual consideramos uma condição sobre o sinal do produto escalar dos campos vetoriais $\vec{H}$ e $\vec{\mathcal{H}}_h$. Para tornar clara a notação empregada, se $q = (t, x)$ é um ponto de uma subvariedade Σ^n imersa em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$, escrevemos $\vec{\mathcal{H}}_h$ para denotar o campo tal que

$$\vec{\mathcal{H}}_h(q) = \vec{\mathcal{H}}_{h(q)}(q) = \vec{\mathcal{H}}_t(q),$$

onde $\vec{\mathcal{H}}_t$ é o campo curvatura média do *slice* $\{t\} \times_\rho M^{n+p+1}$.

Teorema 2.1.11. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado próprio e espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo) e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço, parabólica e longe do infinito passado (respectivamente, futuro). Se $g(\vec{H}, \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$ (respectivamente, $g(\vec{H}, \vec{\mathcal{H}}_h) \leq 0$), então Σ^n está contida em um *slice* crítico $\{t_0\} \times M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.*

Demonstração. Sabemos que o campo curvatura média de um *slice* $\{t\} \times_\rho M^{n+p}$ é dado por

$$\vec{\mathcal{H}}_t = -\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \partial_t.$$

Desse modo,

$$g(\vec{H}, \vec{\mathcal{H}}_h) = -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} g(\vec{H}, \partial_t).$$

Sendo assim, se $g(\vec{H}, \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$, então

$$\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0.$$

Como $\overline{M}^{n+p+1}$ é um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo, caso $\rho'(h)$ nunca se anule em Σ^n , podemos concluir que $\rho'(h) > 0$ e, conseqüentemente, $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$. Nessa situação, o resultado segue diretamente do

Teorema 2.1.3. Para o caso em que $\rho'(h)$ se anula em algum ponto de Σ^n , considere o conjunto não vazio

$$\mathcal{A} = \{q \in \Sigma^n : \rho'(h(q)) = 0\}.$$

Analisando separadamente as possibilidades para $q \in \Sigma^n$, obtemos:

- (i) Se $q \in \Sigma \setminus \mathcal{A}$, então, como $\overline{M}^{n+p+1}$ é espacialmente não contrativo, $\rho'(h(q)) > 0$. Como consequência, temos que $g(\vec{H}(q), \partial_t(q)) \leq 0$ e, pelo Lema 2.1.1, $\Delta h(q) \leq 0$.
- (ii) Se $q \in \text{int}(\mathcal{A})$, então existe um conjunto aberto e conexo $\mathcal{V} \subset \text{int}(\mathcal{A})$ tal que $q \in \mathcal{V}$. Afirmamos que h é constante em $\mathcal{V}$. De fato, se h não fosse constante em $\mathcal{V}$, existiriam $q_1, q_2 \in \mathcal{V}$ satisfazendo $h(q_1) < h(q_2)$. Uma vez que $\mathcal{V}$ é conexo por caminhos, poderíamos ligar q_1 a q_2 por um caminho contínuo $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{V}$ tal que $c(0) = q_1$ e $c(1) = q_2$. Assim, $h(c([0, 1])) \subset \mathbb{R}$ seria um intervalo não degenerado satisfazendo $\rho'(t) = 0$, para todo $t \in h(c[0, 1])$. Mas isso contradiz a hipótese de $\overline{M}^{n+p+1}$ ser um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado próprio. Como h é constante em $\mathcal{V}$, concluímos que ∇h se anula em $\mathcal{V}$ e, por conseguinte, $\Delta h(q) = 0$.
- (iii) Se $q \in \mathcal{A} \setminus \text{int}(\mathcal{A})$, então existe uma sequência $\{q_m\} \subset \Sigma \setminus \mathcal{A}$ tal que $q_m \rightarrow q$. Visto que $\rho'(h(q_m)) > 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que $g(\vec{H}(q_m), \partial_t(q_m)) \leq 0$ e, pelo Lema 2.1.1, $\Delta h(q_m) \leq 0$. Portanto, por continuidade, $\Delta h(q) \leq 0$.

Por (i), (ii) e (iii), para todo $q \in \Sigma^n$,

$$\Delta h(q) \leq 0.$$

Como, por hipótese, Σ^n é uma subvariedade parabólica e h é uma função limitada inferiormente, pois Σ^n está também longe do infinito passado, concluímos que h é constante. Logo, Σ^n está contida em um *slice* $\{t_0\} \times M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$. Além disso, $\nabla h = 0$ e $\Delta h = 0$. Consequentemente, pelo Lema 2.1.1,

$$g(\vec{H}, \partial_t) = \frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)}.$$

Assim,

$$0 \leq g(\vec{H}, \vec{\mathcal{H}}_{t_0}) = -\frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} g(\vec{H}, \partial_t) = -\left(\frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)}\right)^2 \leq 0,$$

o que implica que $\rho'(t_0) = 0$, isto é, $\{t_0\} \times M^{n+p}$ é um *slice* crítico. A demonstração do caso entre parênteses é similar. $\square$

A seguir, é apresentado o resultado análogo ao Teorema 2.1.11 para o caso em que a condição de limitação na função altura é substituída por uma condição de limitação envolvendo a função *warping*.

Teorema 2.1.12. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado próprio e espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), satisfazendo a condição*

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_a^{+\infty} \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \right),$$

onde $a \in I$, e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço e parabólica. Se $g(\vec{H}, \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$ (respectivamente, $g(\vec{H}, \vec{\mathcal{H}}_h) \leq 0$), então Σ^n está contida em um slice crítico $\{t_0\} \times M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.

Demonstração. Considere a função suave $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\sigma(t) = \int_a^t \rho(s) ds.$$

Utilizando os mesmos argumentos empregados na demonstração do Teorema 2.1.7, podemos concluir que $\sigma \circ h$ é limitada inferiormente. Suponha que $g(\vec{H}, \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$. Como

$$g(\vec{H}, \vec{\mathcal{H}}_h) = -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} g(\vec{H}, \partial_t),$$

temos que

$$\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0.$$

Visto que $\overline{M}^{n+p+1}$ é um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo, se $\rho'(h)$ não se anula em Σ^n , então $\rho'(h) > 0$, e, por conseguinte, $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$. Nesse caso, o resultado segue diretamente do Teorema 2.1.7. Para a situação em que $\rho'(h)$ se anula em algum ponto de Σ^n , considere o conjunto não vazio

$$\mathcal{A} = \{q \in \Sigma^n : \rho'(h(q)) = 0\}.$$

Da mesma forma que fizemos na demonstração do Teorema 2.1.11, analisemos separadamente as possibilidades para $q \in \Sigma^n$.

- (i) Se $q \in \Sigma \setminus \mathcal{A}$, então, como $\overline{M}^{n+p+1}$ é espacialmente não contrativo, $\rho'(h(q)) > 0$. Consequentemente, $g(\vec{H}(q), \partial_t(q)) \leq 0$ e, pelo Lema 2.1.2, $\Delta(\sigma \circ h)(q) \leq 0$.
- (ii) Se $q \in \text{int}(\mathcal{A})$, então existe um conjunto aberto e conexo $\mathcal{V} \subset \text{int}(\mathcal{A})$ tal que $q \in \mathcal{V}$. Pelos mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 2.1.11, podemos inferir que h é constante em $\mathcal{V}$. Desse modo, ∇h se anula em $\mathcal{V}$ e, por conseguinte, $\Delta h(q) = 0$. Assim, pelo Lema 2.1.2, $\Delta(\sigma \circ h)(q) = 0$.
- (iii) Se $q \in \mathcal{A} \setminus \text{int}(\mathcal{A})$, então existe uma sequência $\{q_m\} \subset \Sigma \setminus \mathcal{A}$ tal que $q_m \rightarrow q$. Como $\rho'(h(q_m)) > 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que $g(\vec{H}(q_m), \partial_t(q_m)) \leq 0$ e, novamente pelo Lema 2.1.2, $\Delta(\sigma \circ h)(q_m) \leq 0$. Portanto, por continuidade, $\Delta(\sigma \circ h)(q) \leq 0$.

Por (i), (ii) e (iii), obtemos que

$$\Delta(\sigma \circ h) \leq 0.$$

Uma vez que Σ^n é uma subvariedade parabólica e $\sigma \circ h : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada inferiormente, temos que $\sigma \circ h$ é constante. Portanto, pela definição de σ , h é também uma função constante. Logo, Σ^n está contida em um *slice* $\{t_0\} \times M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$, o qual é crítico pelas mesmas razões apresentadas na demonstração do Teorema 2.1.11. A validade do caso entre parênteses pode ser demonstrada de modo inteiramente análogo. $\square$

2.1.3 Exemplos

Nesta subseção, apresentamos um resultado de não existência para alguns espaços-tempo fisicamente relevantes, dentre os quais estão o espaço-tempo de Einstein-de Sitter e o espaço-tempo Steady State.

O espaço-tempo $(n + p + 1)$ -dimensional de de Sitter é definido como sendo a subvariedade do espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}_1^{n+p+2}$ dada por

$$\mathbb{S}_1^{n+p+1} = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+p+2} : g(x, x) = 1\}.$$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_1^{n+p+2}$, respectivamente, um vetor unitário tipo espaço e um vetor tipo luz. Podemos considerar as seguintes regiões abertas de $\mathbb{S}_1^{n+p+1}$:

$$\{x \in \mathbb{S}_1^{n+p+1} : g(x, a) > 1\} \text{ e } \{x \in \mathbb{S}_1^{n+p+1} : g(x, b) > 0\},$$

sendo esta última conhecida como espaço-tempo Steady State de dimensão $n + p + 1$. Tais regiões podem ser modeladas, respectivamente, pelos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados $-(0, +\infty) \times_{\sinh(t)} \mathbb{H}^{n+p}$, onde $\mathbb{H}^{n+p}$ é o espaço hiperbólico $(n + p)$ -dimensional, e $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n+p}$ (para mais detalhes, ver a seção de Aplicações em [2]). O espaço-tempo de Einstein-de Sitter $(n + p + 1)$ -dimensional é o espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado $-(0, +\infty) \times_{t^{2/3}} \mathbb{R}^{n+p}$.

Com base nos resultados principais desta seção, obtemos o seguinte resultado de não existência:

Corolário 2.1.13. *Não existem subvariedades tipo-espaço e parabólicas, satisfazendo $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$, nos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados $-(0, +\infty) \times_{\sinh(t)} \mathbb{H}^{n+p}$, $-(0, +\infty) \times_{t^{2/3}} \mathbb{R}^{n+p}$ e $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n+p}$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que as variedades $-(0, +\infty) \times_{\sinh(t)} \mathbb{H}^{n+p}$ e $-(0, +\infty) \times_{t^{2/3}} \mathbb{R}^{n+p}$ são espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados espacialmente expansivos, pois $(\sinh(t))' = \cosh(t) > 0$ e $(t^{2/3})' = \frac{2}{3}t^{-1/3} > 0$, para todo $t \in (0, +\infty)$. Além disso, como o intervalo $(0, +\infty)$ é limitado inferiormente, qualquer subvariedade desses ambientes está longe do infinito passado. Desse modo, a não existência de subvariedades tipo-espaço e parabólicas, satisfazendo $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$, segue imediatamente da Observação 2.1.6. Analogamente, a variedade $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n+p}$ é também um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente expansivo, já que $(e^t)' = e^t > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Ademais,

$$\int_{-\infty}^0 e^s ds = 1 < +\infty.$$

Portanto, nesse ambiente, a não existência de subvariedades tipo espaço e parabólicas tais que $g(\vec{H}, \partial_t) \leq 0$ é uma consequência imediata do Corolário 2.1.8. $\square$

O Corolário 2.1.13 garante a não existência de subvariedades parabólicas e fracamente futuro aprisionadas nos espaços-tempo $-(0, +\infty) \times_{\sinh(t)} \mathbb{H}^{n+p}$, $-(0, +\infty) \times_{t^{2/3}} \mathbb{R}^{n+p}$ e $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n+p}$.

2.2 Resultados de rigidez e não existência para subvariedades completas

Tendo em vista os resultados apresentados para o caso das subvariedades parabólicas, a partir da aplicação da propriedade do tipo Liouville satisfeita pelo operador laplaciano, somos motivados a buscar resultados semelhantes, no contexto das subvariedades completas, empregando a propriedade do tipo Liouville para o operador infinito laplaciano, evidenciada na Proposição 1.1.3.

2.2.1 Resultados auxiliares

Nesta subseção, apresentamos os resultados auxiliares que utilizamos, posteriormente, para demonstrarmos os principais resultados desta seção. Similarmente ao que fizemos, no caso parabólico, para o laplaciano da função altura, no Lema 2.2.1, expressamos o infinito laplaciano de tal função em termos de $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t)$.

Lema 2.2.1. *Seja Σ^n uma subvariedade tipo espaço imersa em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_{\rho} M^{n+p}$. O infinito laplaciano da função*

altura definida em Σ^n é dado por

$$\Delta_\infty h = g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} |\nabla h|^2 (|\nabla h|^2 + 1).$$

Demonstração. Como $\nabla h = -\partial_t^\top$, temos, pela definição do operador infinito laplaciano, que

$$\begin{aligned} \Delta_\infty h &= \nabla^2 h(\nabla h, \nabla h) \\ &= g(\nabla_{\nabla h} \nabla h, \nabla h) \\ &= g(\nabla_{\nabla h} (-\partial_t^\top), \nabla h) \\ &= g(\bar{\nabla}_{\nabla h} (\partial_t^\perp - \partial_t), \nabla h) \\ &= g(\bar{\nabla}_{\nabla h} \partial_t^\perp - \bar{\nabla}_{\nabla h} \partial_t, \nabla h) \\ &= g(\bar{\nabla}_{\nabla h} \partial_t^\perp, \nabla h) - g(\bar{\nabla}_{\nabla h} \partial_t, \nabla h). \end{aligned}$$

Desse modo, uma vez que ∇h é um campo tangente a Σ^n ,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty h &= g((\bar{\nabla}_{\nabla h} \partial_t^\perp)^\top, \nabla h) - g\left(\bar{\nabla}_{\nabla h} \left(\frac{1}{\rho(h)} (\rho(h) \partial_t)\right), \nabla h\right) \\ &= g(A_{\partial_t^\perp} \nabla h, \nabla h) - g\left(\nabla h \left(\frac{1}{\rho(h)}\right) (\rho(h) \partial_t) + \frac{1}{\rho(h)} \bar{\nabla}_{\nabla h} \rho(h) \partial_t, \nabla h\right) \\ &= g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t^\perp) - g\left(\nabla h \left(\frac{1}{\rho(h)}\right) (\rho(h) \partial_t), \nabla h\right) + g\left(\frac{1}{\rho(h)} \bar{\nabla}_{\nabla h} \rho(h) \partial_t, \nabla h\right) \\ &= g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) - \nabla h \left(\frac{1}{\rho(h)}\right) \rho(h) g(\partial_t, \nabla h) + \frac{1}{\rho(h)} g(\bar{\nabla}_{\nabla h} \rho(h) \partial_t, \nabla h). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\nabla h \left(\frac{1}{\rho(h)}\right) = -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)^2} \nabla h(h) = -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)^2} g(\nabla h, \nabla h) = -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)^2} |\nabla h|^2.$$

Além disso,

$$g(\partial_t, \nabla h) = g(\partial_t^\top, \nabla h) = g(-\nabla h, \nabla h) = -g(\nabla h, \nabla h) = -|\nabla h|^2.$$

Portanto, como, pela Proposição 1.4.11, $(\rho \circ \pi_I) \partial_t$ é um campo conforme fechado em $\overline{M}^{n+p+1}$,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty h &= g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) + \frac{\rho'(h)}{\rho(h)^2} |\nabla h|^2 \rho(h) (-|\nabla h|^2) + \frac{1}{\rho(h)} g(\rho'(h) \nabla h, \nabla h) \\ &= g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} |\nabla h|^4 + \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} g(\nabla h, \nabla h) \\ &= g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} |\nabla h|^4 + \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} |\nabla h|^2 \\ &= g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} |\nabla h|^2 (|\nabla h|^2 + 1), \end{aligned}$$

o que completa nossa demonstração. □

Seguindo as mesmas ideias empregadas no caso parabólico, no Lema 2.2.2, apresentamos uma expressão envolvendo $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t)$ para o infinito laplaciano da composição da função altura com uma primitiva da função *warping*.

Lema 2.2.2. *Sejam Σ^n uma variedade tipo espaço imersa em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ e $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O infinito laplaciano de $\sigma \circ h$ é dado por*

$$\Delta_\infty(\sigma \circ h) = \sigma'(h)^2 (\sigma''(h)|\nabla h|^4 + \sigma'(h)\Delta_\infty h) .$$

Em particular, se

$$\sigma(t) = \int_a^t \rho(s)ds,$$

onde $a \in I$, então

$$\Delta_\infty(\sigma \circ h) = \rho(h)^2 (\rho(h)g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) - \rho'(h)|\nabla h|^2) .$$

Demonstração. Sabemos, da demonstração do Lema 2.1.2, que $\nabla(\sigma \circ h) = \sigma'(h)\nabla h$. Desse modo, pela definição do operador infinito laplaciano, temos que

$$\begin{aligned} \Delta_\infty(\sigma \circ h) &= \nabla^2(\sigma \circ h)(\nabla(\sigma \circ h), \nabla(\sigma \circ h)) \\ &= g(\nabla_{\nabla(\sigma \circ h)} \nabla(\sigma \circ h), \nabla(\sigma \circ h)) \\ &= g(\nabla_{\sigma'(h)\nabla h} \sigma'(h)\nabla h, \sigma'(h)\nabla h) \\ &= g(\sigma'(h)\nabla_{\nabla h} \sigma'(h)\nabla h, \sigma'(h)\nabla h) \\ &= \sigma'(h)^2 g(\nabla_{\nabla h} \sigma'(h)\nabla h, \nabla h) \\ &= \sigma'(h)^2 g(\nabla h(\sigma'(h))\nabla h + \sigma'(h)\nabla_{\nabla h} \nabla h, \nabla h) \\ &= \sigma'(h)^2 (\sigma''(h)\nabla h(h)g(\nabla h, \nabla h) + \sigma'(h)g(\nabla_{\nabla h} \nabla h, \nabla h)) \\ &= \sigma'(h)^2 (\sigma''(h)g(\nabla h, \nabla h)g(\nabla h, \nabla h) + \sigma'(h)\Delta_\infty h) \\ &= \sigma'(h)^2 (\sigma''(h)|\nabla h|^4 + \sigma'(h)\Delta_\infty h) . \end{aligned}$$

De modo particular, se

$$\sigma(t) = \int_a^t \rho(s)ds,$$

onde $a \in I$, então

$$\Delta_\infty(\sigma \circ h) = \rho(h)^2 (\rho'(h)|\nabla h|^4 + \rho(h)\Delta_\infty h) .$$

Consequentemente, pelo Lema 2.2.1,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty(\sigma \circ h) &= \rho(h)^2 \left(\rho'(h)|\nabla h|^4 + \rho(h) \left(g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)}|\nabla h|^2(|\nabla h|^2 + 1) \right) \right) \\ &= \rho(h)^2 (\rho'(h)|\nabla h|^4 + \rho(h)g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) - \rho'(h)|\nabla h|^4 - \rho'(h)|\nabla h|^2) \\ &= \rho(h)^2 (\rho(h)g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) - \rho'(h)|\nabla h|^2) , \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

2.2.2 Resultados principais

Nesta subseção, são apresentados resultados de rigidez e não existência para subvariedades completas imersas em espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados.

Teorema 2.2.3. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo) e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço, completa e longe do infinito passado (respectivamente, futuro). Se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \geq 0$), então Σ^n está contida em um slice.*

Demonstração. Como $\overline{M}^{n+p+1}$ é um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo, temos que $\rho'(h) \geq 0$. Dessa forma, se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$, então, pelo Lema 2.2.1,

$$\Delta_\infty h = g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} |\nabla h|^2 (\nabla h|^2 + 1) \leq 0.$$

Visto que h é uma função limitada inferiormente, pois Σ^n é uma subvariedade longe do infinito passado, concluímos, pelo fato de Σ^n ser completa, que h é constante. Logo, Σ^n está contida em um slice. A demonstração do caso entre parênteses é análoga. $\square$

Substituindo $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \geq 0$), no Teorema 2.2.3, pela hipótese $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$), para todo campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, podemos concluir que o slice no qual Σ^n está contida é crítico. Tal resultado é enunciado a seguir.

Teorema 2.2.4. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo) e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço, completa e longe do infinito passado (respectivamente, futuro). Se $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$), para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, então Σ^n está contida em um slice crítico $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.*

Demonstração. Se $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$, para todo campo suave X , então, em particular, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$. Com base nisso, podemos concluir, pelo Teorema 2.2.3, que Σ^n está contida em um slice $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$. Dessa forma, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, a projeção de $\alpha(X, Y)$ na direção de ∂_t coincide com a segunda forma fundamental do slice $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$ avaliada em (X, Y) , isto é, $\alpha_{t_0}(X, Y)$. Em outras palavras,

$$-g(\alpha(X, Y), \partial_t) \partial_t = \alpha_{t_0}(X, Y).$$

Como

$$\alpha_{t_0}(X, Y) = -\frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} g(X, Y) \partial_t,$$

segue que

$$g(\alpha(X, Y), \partial_t) = \frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} g(X, Y).$$

Por conseguinte, tendo em vista que $\rho'(t_0) \geq 0$, pois $\overline{M}^{n+p+1}$ é um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo,

$$0 \leq \frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} |X|^2 = g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0,$$

e, portanto,

$$\frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} |X|^2 = 0.$$

Tomando $X \neq 0$, concluímos que $\rho'(t_0) = 0$. Logo, $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$ é um *slice* crítico, como queríamos demonstrar. O caso entre parênteses pode ser demonstrado de uma maneira inteiramente análoga. $\square$

O resultado de não existência apresentado a seguir é uma consequência imediata do Teorema 2.2.4 e do fato dos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados espacialmente expansivos, ou espacialmente contrativos, não possuírem *slices* críticos.

Corolário 2.2.5. *Em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente expansivo (respectivamente, contrativo), não existem subvariedades tipo espaço, completas e longe do infinito passado (respectivamente, futuro) tais que, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$).*

A seguir é apresentado um resultado para subvariedades completas similar ao mencionado no Teorema 2.1.4.

Teorema 2.2.6. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo) e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço, completa e longe do infinito passado (respectivamente, futuro). Se $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$ e $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$), para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, então Σ^n está contida, como uma subvariedade mínima, em um *slice* crítico $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.4, se $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$ (ou $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$, no caso em que $\overline{M}^{n+p+1}$ é espacialmente não expansivo e Σ^n está longe do infinito futuro), para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, então Σ^n está contida em um *slice* crítico $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$. Além disso, como vimos na demonstração do Teorema 2.2.4,

$$g(\alpha(X, X), \partial_t) = \frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} |X|^2 = 0.$$

Isso implica que, dado um referencial ortonormal local $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ em Σ^n ,

$$g(\vec{H}, \partial_t) = g\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(E_i, E_i), \partial_t\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\alpha(E_i, E_i), \partial_t) = 0.$$

Desse modo, o campo curvatura média deve ser tipo-espaço. Consequentemente, se $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$, então $\vec{H} = 0$. Nesse caso, Σ^n é uma subvariedade mínima em $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$. $\square$

De acordo com o Teorema 2.2.6, se Σ^n é uma subvariedade tipo espaço, completa e longe do infinito passado (respectivamente, futuro), satisfazendo $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$), para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), então seu campo curvatura média $\vec{H}$ não pode ser causal. Dessa forma, assim como no caso parabólico, estudado anteriormente, temos o seguinte resultado de não existência para subvariedades totalmente aprisionadas:

Corolário 2.2.7. *Em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), não existem subvariedades completas, totalmente futuro aprisionadas (respectivamente, passado aprisionadas) e longe do infinito passado (respectivamente, futuro).*

Como fizemos na seção referente ao caso das subvariedades parabólicas, apresentamos em seguida um resultado em que a condição de limitação na função altura é substituída por uma condição de limitação relacionada à função *warping* do espaço-tempo.

Teorema 2.2.8. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), satisfazendo a condição*

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_a^{+\infty} \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \right),$$

onde $a \in I$, e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço e completa. Se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \geq 0$), então Σ^n está contida em um slice $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.

Demonstração. Primeiramente, considere a função suave $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\sigma(t) = \int_a^t \rho(s) ds.$$

Pelos mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 2.1.7, podemos concluir que $\sigma \circ h$ é uma função limitada inferiormente. Ademais, como $\rho'(h) \geq 0$, pois $\overline{M}^{n+p+1}$ é um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo, temos, pelo Lema 2.2.2, que, se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$, então

$$\Delta_\infty(\sigma \circ h) \leq 0.$$

Nessa situação, visto que Σ^n é uma subvariedade completa, concluímos que $\sigma \circ h$ é constante. Isso, por sua vez, implica, pela definição de σ , que h é também constante, e, conseqüentemente, Σ^n está contida em um *slice* $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$. O caso entre parênteses é demonstrado de modo similar. $\square$

Substituindo, no Teorema 2.2.8, a hipótese $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \geq 0$) pela condição $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$), para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, podemos concluir que o *slice* no qual Σ^n está contido é crítico.

Teorema 2.2.9. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), satisfazendo a condição*

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_a^{+\infty} \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \right),$$

*onde $a \in I$, e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço e completa. Se $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$), para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, então Σ^n está contida em um *slice* crítico $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.*

Demonstração. Se $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$, para todo campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, então, em particular, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$. Desse modo, pelo Teorema 2.2.8, Σ^n está contida em um *slice* $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$. Além disso, como, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$,

$$g(\alpha(X, Y), \partial_t) = -\frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} g(X, Y),$$

temos que

$$0 \leq \frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} |X|^2 = g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0.$$

Logo, tomando $X \neq 0$, inferimos que $\rho'(t_0) = 0$ e, portanto, $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$ é um *slice* crítico. A demonstração do caso entre parênteses é análoga. $\square$

Pelos mesmos argumentos utilizados para justificar o Corolário 2.2.5, deduzimos, por meio do Teorema 2.2.9, a validade do resultado de não existência a seguir.

Corolário 2.2.10. *Em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente expansivo (respectivamente, contrativo) $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$, satisfazendo a condição*

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_a^{+\infty} \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \right),$$

onde $a \in I$, não existem subvariedades tipo espaço e completas tais que, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$).

Acrescentando ao Teorema 2.2.9 a hipótese $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$, obtemos, para o caso de subvariedades completas, um resultado análogo ao Teorema 2.1.9.

Teorema 2.2.11. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), satisfazendo a condição*

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_a^{+\infty} \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \right),$$

onde $a \in I$, e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço e completa. Se $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$ e $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$), para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, então Σ^n está contida, como uma subvariedade mínima, em um slice crítico $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.9, se $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, então Σ^n está contida em um slice crítico $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$. Ademais, pelos mesmos argumentos apresentados nas demonstrações dos Teoremas 2.2.4 e 2.2.6, $\vec{H}$ não pode ser causal. Por conseguinte, se $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$, o campo curvatura média só pode ser identicamente nulo. Logo, com as hipóteses apresentadas, Σ^n deve ser uma subvariedade mínima em $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$. $\square$

Por meio do Teorema 2.2.11, obtemos o seguinte resultado de não existência para subvariedades totalmente aprisionadas:

Corolário 2.2.12. *Em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), satisfazendo a condição*

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_a^{+\infty} \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \right),$$

onde $a \in I$, não existem subvariedades completas e totalmente futuro aprisionadas (respectivamente, passado aprisionadas).

Teorema 2.2.13. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_{\rho} M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado próprio e espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo) e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço, completa e longe do infinito passado (respectivamente, futuro). Se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \vec{\mathcal{H}}_h) \leq 0$), então Σ^n está contida em um slice $\{t_0\} \times_{\rho} M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.*

Demonstração. Como

$$\vec{\mathcal{H}}_t = -\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\partial_t,$$

observe, primeiramente, que

$$g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \vec{\mathcal{H}}_h) = -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)}g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t).$$

Dessa forma, se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$, então

$$\frac{\rho'(h)}{\rho(h)}g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0.$$

Se $\rho'(h)$ não se anula em Σ^n , inferimos, pelo fato de $\overline{M}^{n+p+1}$ ser um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo, que $\rho'(h) > 0$. Isso, por sua vez, implica que $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$ e, conseqüentemente, o resultado segue imediatamente do Teorema 2.2.3. No caso em que $\rho'(h)$ se anula em algum ponto de Σ^n , considere o conjunto não vazio

$$\mathcal{A} = \{q \in \Sigma^n : \rho'(h(q)) = 0\}.$$

Analisando as possibilidades para $q \in \Sigma^n$, obtemos:

- (i) Se $q \in \Sigma \setminus \mathcal{A}$, então, como $\overline{M}^{n+p+1}$ é espacialmente não contrativo, $\rho'(h(q)) > 0$. Por conseguinte, $g(\vec{H}(q), \partial_t(q)) \leq 0$ e, pelo Lema 2.2.1, $\Delta_{\infty}h(q) \leq 0$.
- (ii) Se $q \in \text{int}(\mathcal{A})$, então existe um conjunto aberto e conexo $\mathcal{V} \subset \text{int}(\mathcal{A})$ tal que $q \in \mathcal{V}$. Pelos mesmos argumentos empregados na demonstração do Teorema 2.1.11, deduzimos que h é constante em $\mathcal{V}$. Nesse caso, $\nabla h = 0$ em $\mathcal{V}$ e, conseqüentemente, pelo Lema 2.2.1, $\Delta_{\infty}h(q) = 0$.
- (iii) Se $q \in \mathcal{A} \setminus \text{int}(\mathcal{A})$, então existe uma sequência $\{q_m\} \subset \Sigma \setminus \mathcal{A}$ tal que $q_m \rightarrow q$. Uma vez que $\rho'(h(q_m)) > 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que $\Delta_{\infty}h(q_m) \leq 0$. Assim, por continuidade, $\Delta_{\infty}h(q) \leq 0$.

Por (i), (ii) e (iii), concluímos que

$$\Delta_{\infty}h \leq 0.$$

Como Σ^n é uma subvariedade completa e h é limitada inferiormente, segue que h é constante. Logo, Σ^n está contida em um *slice* $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$. A veracidade do resultado para o caso entre parênteses pode ser verificada de modo análogo. $\square$

Substituindo, no Teorema 2.2.13, a hipótese $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \vec{\mathcal{H}}_h) \leq 0$) pela condição $g(\alpha(X, X), \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \vec{\mathcal{H}}_h) \leq 0$), para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, obtemos o seguinte resultado de rigidez:

Teorema 2.2.14. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado próprio e espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo) e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço, completa e longe do infinito passado (respectivamente, futuro). Se $g(\alpha(X, X), \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \vec{\mathcal{H}}_h) \leq 0$), para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, então Σ^n está contida em um *slice* crítico $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.*

Demonstração. Suponha que $g(\alpha(X, X), \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$. Como, de modo particular, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$, temos, pelo Teorema 2.2.13, que Σ^n está contida em um *slice* $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$. Afirmamos que esse *slice* é crítico. Com efeito, se tal *slice* não fosse crítico, teríamos $\rho'(t_0) > 0$, pois $\overline{M}^{n+p+1}$ é espacialmente não contrativo. Como

$$0 \leq g(\alpha(X, X), \vec{\mathcal{H}}_h) = -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} g(\alpha(X, X), \partial_t) = -\frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} g(\alpha(X, X), \partial_t),$$

isso implicaria que $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, contradizendo o Teorema 2.2.4. O caso entre parênteses é demonstrado de maneira completamente análoga. $\square$

A seguir, são apresentados resultados análogos aos Teoremas 2.2.13 e 2.2.14 para o caso em que a limitação na função altura é substituída por uma condição de limitação envolvendo a função *warping*.

Teorema 2.2.15. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado próprio e espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), satisfazendo a condição*

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_a^{+\infty} \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \right),$$

*onde $a \in I$, e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço e completa. Se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \vec{\mathcal{H}}_h) \leq 0$), então Σ^n está contida em um *slice* $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.*

Demonstração. Considere a função $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\sigma(t) = \int_a^t \rho(s) ds.$$

Considerando as hipóteses do teorema, sabemos, como discutido anteriormente, que $\sigma \circ h$ é limitada inferiormente. Além disso, conforme visto na demonstração do Teorema 2.2.13, se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$, então

$$\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0.$$

Caso $\rho'(h)$ não se anule em Σ^n , podemos concluir que $\rho'(h) > 0$, já que $\overline{M}^{n+p+1}$ é um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo. Consequentemente, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$ e o resultado segue do Teorema 2.2.8. Por outro lado, se $\rho'(h)$ se anula em algum ponto de Σ^n , então, empregando argumentos análogos aos da demonstração do Teorema 2.2.13, utilizando o Lema 2.2.2, obtemos que

$$\Delta_\infty(\sigma \circ h) \leq 0.$$

Sendo Σ^n uma subvariedade completa e $\sigma \circ h$ uma função limitada inferiormente, concluímos que $\sigma \circ h$ e, por conseguinte, h são funções constantes. Isso significa que $h \equiv t_0$, para algum $t_0 \in I$ e, portanto, Σ^n está contida no *slice* $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$. A demonstração do caso entre parênteses é similar. $\square$

Teorema 2.2.16. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado próprio e espacialmente não contrativo (respectivamente, não expansivo), satisfazendo a condição*

$$\int_{-\infty}^a \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_a^{+\infty} \rho(s) \chi_I(s) ds < +\infty \right),$$

onde $a \in I$, e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço e completa. Se $g(\alpha(X, X), \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \vec{\mathcal{H}}_h) \leq 0$), para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, então Σ^n está contida em um *slice* crítico $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$.

Demonstração. Se $g(\alpha(X, X), \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, então, de modo particular $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \vec{\mathcal{H}}_h) \geq 0$. Desse modo, pelo Teorema 2.2.15, Σ^n está contida em um *slice* $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$, para algum $t_0 \in I$. Suponha que tal *slice* não seja crítico. Nesse caso, como $\overline{M}^{n+p+1}$ é espacialmente não contrativo, $\rho'(t_0) > 0$. Consequentemente, visto que

$$0 \leq g(\alpha(X, X), \vec{\mathcal{H}}_h) = -\frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} g(\alpha(X, X), \partial_t),$$

devemos ter $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$. No entanto, isto contradiz o Teorema 2.2.9. Logo, o *slice* $\{t_0\} \times_\rho M^{n+p}$ no qual Σ^n está contido é crítico. $\square$

2.2.3 Exemplos

Nos exemplos apresentados a seguir, avaliamos a aplicabilidade dos resultados obtidos.

Exemplo 2.2.17. *Seja Σ^n uma hipersuperfície totalmente geodésica imersa em uma variedade Riemanniana M^{n+1} . Considere, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, a subvariedade $\Sigma_{t_0}^n = \{t_0\} \times \Sigma^n$ imersa em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado $\overline{M}^{n+2} = -\mathbb{R} \times_\rho M^{n+1}$. Nesse contexto, a segunda forma fundamental de $\Sigma_{t_0}^n$ é dada por*

$$\alpha(X, Y) = -\frac{\rho'(t_0)}{\rho(t_0)} g_{t_0}(X, Y) \partial_t.$$

Isso implica que, se $\rho'(t_0) < 0$ (respectivamente, $\rho'(t_0) > 0$), então Σ_{t_0} é uma subvariedade totalmente futuro aprisionada (respectivamente, passado aprisionada). Note, no entanto, que a existência de tal subvariedade não contradiz o Corolário 2.2.7, já que em t_0 o espaço-tempo está contraindo (respectivamente, expandindo) espacialmente. Em particular, considerando o espaço-tempo de de Sitter, o qual pode ser visto como o produto warped $-\mathbb{R} \times_{\cosh(t)} \mathbb{S}^{n+1}$, temos que, se Σ^n é uma hipersuperfície totalmente geodésica de $\mathbb{S}^{n+1}$, então, para $t_0 < 0$ (respectivamente, $t_0 > 0$), $\Sigma_{t_0}^n$ é uma subvariedade totalmente futuro aprisionada (respectivamente, passado aprisionada).

Exemplo 2.2.18. *Seja $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^2, g)$ o espaço-tempo de Schwarzschild, onde*

$$g = -\left(1 - \frac{2\mathfrak{m}}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\mathfrak{m}}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^2},$$

sendo r a coordenada de $\mathbb{R}_+$ e $\mathfrak{m}$ uma constante positiva que representa a massa do modelo.

Note que essa métrica não está definida para $r = 2\mathfrak{m}$. Porém, podemos estudar separadamente os casos em que $r < 2\mathfrak{m}$ e $r > 2\mathfrak{m}$, conhecidos, respectivamente, como buraco negro de Schwarzschild e Schwarzschild exterior. Nesse sentido, as esferas com $t \equiv \text{cte}$ e $r \equiv \text{cte}$ aparecem em dois tipos: esferas interiores ($r < 2\mathfrak{m}$) e esferas exteriores ($r > 2\mathfrak{m}$). Elas são subvariedades compactas com codimensão dois e totalmente umbílicas, com segunda forma fundamental dada por

$$\alpha(X, Y) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\mathfrak{m}}{r}\right) g(X, Y) \partial_r.$$

Uma vez que, no buraco negro de Schwarzschild, ∂_r é um campo vetorial tipo tempo que aponta para o passado, podemos concluir que as esferas interiores são subvariedades totalmente futuro aprisionadas. Pelo Corolário 2.2.7, a existência de tais subvariedades nos permite concluir que o buraco negro de Schwarzschild não pode ser isométrico a um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo.

Exemplo 2.2.19. Seja $\mathbb{R}_1^4 = -\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ o espaço-tempo de Minkowski quadridimensional e

$$\mathbb{H}^2(r) = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}_1^4 : x^2 + y^2 - t^2 = -r^2, z = 0, t > 0\},$$

onde r é uma constante positiva, o espaço hiperbólico bidimensional, munido com a métrica induzida de $\mathbb{R}_1^4$. Considere a função $f : \mathbb{R}_1^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t, x, y, z) = x^2 + y^2 - t^2 + r^2.$$

Note que $f|_{\mathbb{H}^2(r)} \equiv 0$. Assim, dados $p \in \mathbb{H}^2(r)$, $v \in T_p\mathbb{H}^2(r)$ e uma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{H}^2(r)$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, temos que

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = df_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = df_p(v) = g(\nabla f, v).$$

Devido à arbitrariedade de p e v , concluímos que ∇f é um campo normal a $\mathbb{H}^2(r)$. Consequentemente, o campo vetorial N que associa cada $p = (t, x, y, 0) \in \mathbb{H}^2(r)$ ao vetor

$$N(p) = \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|} = \frac{t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y}{r}$$

é um campo unitário e normal a $\mathbb{H}^2(r)$. Além disso, como

$$g(N(p), N(p)) = \frac{x^2 + y^2 - t^2}{r^2} = -1 < 0$$

e

$$g(N(p), \partial_t(p)) = -\frac{t}{r} < 0,$$

N é tipo tempo e possui a mesma orientação temporal que ∂_t , o qual aponta para o futuro. Uma vez que ∂_z é também um campo unitário e normal a $\mathbb{H}^2(r)$ e $g(N, \partial_z) = 0$, podemos escrever, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2(r))$,

$$\alpha(X, Y) = -g(\alpha(X, Y), N)N + g(\alpha(X, Y), \partial_z)\partial_z.$$

Sendo assim, como

$$g(\alpha(X, Y), N) = g(A_N X, Y) = g((\nabla_X N)^\top, Y) = g(\nabla_X N, Y) = \frac{1}{r}g(X, Y)$$

e

$$g(\alpha(X, Y), \partial_z) = g(A_{\partial_z} X, Y) = g((\nabla_X \partial_z)^\top, Y) = g(\nabla_X \partial_z, Y) = 0,$$

segue que

$$\alpha(X, Y) = -\frac{1}{r}g(X, Y)N.$$

Isso implica que

$$\alpha(X, X) = -\frac{1}{r}|X|^2 N.$$

Portanto, se $X(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{H}^2(r)$, então $\alpha(X, X)$ é tipo tempo e passado direcionado. Consequentemente, $\mathbb{H}^2(r)$ é uma subvariedade totalmente passado aprisionada em $\mathbb{R}_1^4$.

Perceba que, apesar de $\mathbb{R}_1^4$ ser o espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo $-\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, a existência dessa subvariedade completa não contradiz o Corolário 2.2.7, pois $\mathbb{H}^2(r)$ não está longe do infinito futuro.

Exemplo 2.2.20. Sejam $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ o espaço hiperbólico, munido com o tensor métrico

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{y^2} g_{\mathbb{R}^2},$$

onde $g_{\mathbb{R}^2}$ denota a métrica padrão em $\mathbb{R}^2$, $\overline{M}^4 = -\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ o espaço-tempo quadridimensional com a métrica produto usual, e $\Sigma^2 = \{(t, s, x, y) \in \overline{M}^4 : t = a \ln y, s = 0\}$, em que $a \in (-1, 1)$, uma superfície em $\overline{M}^4$. Considere a função $f : \overline{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t, s, x, y) = a \ln y - t.$$

Observe que a restrição $f|_{\Sigma^2}$ de f a Σ^2 é identicamente nula. Sendo assim, dados $p \in \Sigma^2$, $v \in T_p \Sigma^2$ e uma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma^2$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, temos que

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = df_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = df_p(v) = g(\nabla f(p), v).$$

Pela arbitrariedade de p e v , inferimos que ∇f é um campo normal a Σ^2 . Como

$$\nabla f = \partial_t + ay\partial_y$$

e, consequentemente,

$$g(\nabla f, \nabla f) = -1 + \frac{1}{y^2}(ay)^2 = -1 + a^2 < 0,$$

o campo ∇f é tipo tempo e, por conseguinte, a superfície Σ^2 é tipo espaço. Ademais, ∇f aponta para o futuro, já que

$$g(\nabla f, \partial_t) = g(\partial_t, \partial_t) = -1 < 0.$$

Com base nisso, o campo

$$N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\partial_t + ay\partial_y}{\sqrt{1-a^2}}$$

é unitário, tipo tempo, futuro direcionado e normal a Σ^2 . Note que ∂_s é um campo tipo espaço, unitário, ortogonal a ∇f e também normal a Σ^2 . Desse modo, visto que Σ^2 tem codimensão dois, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^2)$, podemos escrever

$$\alpha(X, Y) = -g(\alpha(X, Y), N)N + g(\alpha(X, Y), \partial_s)\partial_s.$$

No entanto, como

$$g(\alpha(X, Y), \partial_s) = g(A_{\partial_s} X, Y) = g((\bar{\nabla}_X \partial_s)^\top, Y) = g(\bar{\nabla}_X \partial_s, Y) = 0,$$

pois

$$\bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_s = \bar{\nabla}_{\partial_s} \partial_s = \bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_s = \bar{\nabla}_{\partial_y} \partial_s = 0,$$

obtemos que

$$\alpha(X, Y) = -g(\alpha(X, Y), N)N.$$

Agora, perceba que os campos ∂_x e $\frac{a}{y}\partial_t + \partial_y$ são tangentes a Σ^2 e ortogonais entre si. Portanto,

$$E_1 = y\partial_x \quad e \quad E_2 = \frac{a\partial_t + y\partial_y}{\sqrt{1-a^2}}$$

constituem um referencial ortonormal para Σ^2 . Pela definição da segunda forma fundamental, temos que

$$\begin{aligned} g(\alpha(E_1, E_1), N) &= g(-(\bar{\nabla}_{E_1} E_1)^\perp, N) \\ &= g(\bar{\nabla}_{E_1} E_1, N) \\ &= -g\left(\bar{\nabla}_{y\partial_x} y\partial_x, \frac{\partial_t + ay\partial_y}{\sqrt{1-a^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}g(y\bar{\nabla}_{\partial_x} y\partial_x, \partial_t + ay\partial_y) \\ &= -\frac{y}{\sqrt{1-a^2}}g(\partial_x(y)\partial_x + y\bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_x, \partial_t + ay\partial_y) \\ &= -\frac{y}{\sqrt{1-a^2}}g(0 + y\bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_x, \partial_t + ay\partial_y) \\ &= -\frac{y^2}{\sqrt{1-a^2}}g(\bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_x, \partial_t) - \frac{ay^3}{\sqrt{1-a^2}}g(\bar{\nabla}_{\partial_x} \partial_x, \partial_y) \\ &= 0 - \frac{ay^3}{\sqrt{1-a^2}}\left(-\frac{1}{2}\partial_y(g(\partial_x, \partial_x))\right) \\ &= -\frac{ay^3}{\sqrt{1-a^2}}\left(-\frac{1}{2}\partial_y\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) \\ &= -\frac{ay^3}{\sqrt{1-a^2}}\left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{y^3}\right)\right) \\ &= -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} g(\alpha(E_2, E_2), N) &= g(-(\bar{\nabla}_{E_2} E_2)^\perp, N) \\ &= -g(\bar{\nabla}_{E_2} E_2, N) \\ &= -g\left(\bar{\nabla}_{\frac{a\partial_t + y\partial_y}{\sqrt{1-a^2}}} \left(\frac{a\partial_t + y\partial_y}{\sqrt{1-a^2}}\right), \frac{\partial_t + ay\partial_y}{\sqrt{1-a^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{(1-a^2)^{3/2}}g(\bar{\nabla}_{a\partial_t + y\partial_y}(a\partial_t + y\partial_y), \partial_t + ay\partial_y). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
g(\alpha(E_2, E_2), N) &= -\frac{1}{(1-a^2)^{3/2}} g(a\bar{\nabla}_{\partial_t}(a\partial_t + y\partial_y) + y\bar{\nabla}_{\partial_y}(a\partial_t + y\partial_y), \partial_t + ay\partial_y) \\
&= -\frac{1}{(1-a^2)^{3/2}} g(a^2\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t + ay\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_y + ay\bar{\nabla}_{\partial_y}\partial_t + y\bar{\nabla}_{\partial_y}y\partial_y, \partial_t + ay\partial_y) \\
&= -\frac{1}{(1-a^2)^{3/2}} (a^2g(\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, \partial_t) + a^3yg(\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, \partial_y) + ayg(\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_y, \partial_t) \\
&\quad + a^2y^2g(\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_y, \partial_y) + ayg(\bar{\nabla}_{\partial_y}\partial_t, \partial_t) + a^2y^2g(\bar{\nabla}_{\partial_y}\partial_t, \partial_y) \\
&\quad + yg(\partial_y(y)\partial_y + y\bar{\nabla}_{\partial_y}\partial_y, \partial_t + ay\partial_y)).
\end{aligned}$$

Utilizando a Fórmula de Koszul, deduzimos que as seis primeiras parcelas da soma que aparece no membro direito desta última igualdade são nulas. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
g(\alpha(E_2, E_2), N) &= -\frac{y}{(1-a^2)^{3/2}} g(\partial_y + y\bar{\nabla}_{\partial_y}\partial_y, \partial_t + ay\partial_y) \\
&= -\frac{y}{(1-a^2)^{3/2}} (g(\partial_y, \partial_t) + ayg(\partial_y, \partial_y) \\
&\quad + y(\bar{\nabla}_{\partial_y}\partial_y, \partial_t) + ay^2g(\bar{\nabla}_{\partial_y}\partial_y, \partial_y)) \\
&= -\frac{y}{(1-a^2)^{3/2}} \left(0 + ay\left(\frac{1}{y^2}\right) + 0 + ay^2\left(\frac{1}{2}\partial_y\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) \right) \\
&= -\frac{y}{(1-a^2)^{3/2}} \left(\frac{a}{y} + ay^2\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{y^3}\right)\right) \right) \\
&= -\frac{1}{(1-a^2)^{3/2}} (a - a) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha(E_1, E_1) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} N \text{ e } \alpha(E_2, E_2) = 0,$$

e, consequentemente, o campo curvatura média de Σ^2 é dado por

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \alpha(E_i, E_i) = \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} N.$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned}
g(\alpha(E_1, E_2), N) &= g(-(\bar{\nabla}_{E_1}E_2)^\perp, N) \\
&= -g(\bar{\nabla}_{E_1}E_2, N) \\
&= -g\left(\bar{\nabla}_{y\partial_x}\left(\frac{a\partial_t + y\partial_y}{\sqrt{1-a^2}}\right), \frac{\partial_t + ay\partial_y}{\sqrt{1-a^2}}\right) \\
&= -\frac{y}{1-a^2} g(a\bar{\nabla}_{\partial_x}\partial_t + y\bar{\nabla}_{\partial_x}\partial_y, \partial_t + ay\partial_y) \\
&= -\frac{y}{1-a^2} (ag(\bar{\nabla}_{\partial_x}\partial_t, \partial_t) + a^2yg(\bar{\nabla}_{\partial_x}\partial_t, \partial_y) \\
&\quad + yg(\bar{\nabla}_{\partial_x}\partial_y, \partial_t) + ay^2g(\bar{\nabla}_{\partial_x}\partial_y, \partial_y))
\end{aligned}$$

e, novamente pela Fórmula de Koszul, as quatro parcelas da soma nesta última igualdade são nulas, obtemos que $g(\alpha(E_1, E_2), N) = 0$. Por conseguinte, $\alpha(E_1, E_2) = 0$. Isso implica que, dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^2)$,

$$\begin{aligned}\alpha(X, X) &= \alpha(g(X, E_1)E_1 + g(X, E_2)E_2, g(X, E_1)E_1 + g(X, E_2)E_2) \\ &= (g(X, E_1))^2 \alpha(E_1, E_1) \\ &= \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} (g(X, y\partial_x))^2 N \\ &= \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} (yg(X, \partial_x))^2 \left(\frac{\partial_t + ay\partial_y}{\sqrt{1-a^2}} \right) \\ &= \frac{ay^2}{1-a^2} (g(X, \partial_x))^2 \partial_t + \frac{a^2 y^3}{1-a^2} (g(X, \partial_x))^2 \partial_y.\end{aligned}$$

Por meio das expressões obtidas para a curvatura média e a segunda forma fundamental, concluímos que, quando $a > 0$ (respectivamente, $a < 0$), Σ^2 é uma subvariedade futuro aprisionada (respectivamente, passado aprisionada) satisfazendo $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$), para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^2)$. Porém, Σ^2 não é uma subvariedade totalmente aprisionada, pois, para $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^2)$ tal que $X \perp \partial_x$, a segunda forma $\alpha(X, X)$ é o campo identicamente nulo, o qual é tipo espaço.

Note que, apesar de $\overline{M}^4$ ser um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente não contrativo e não expansivo, de base $\mathbb{R}_1$, fibra $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ e função warping $\rho \equiv 1$, e Σ^2 ser, para $a > 0$ (respectivamente, $a < 0$), uma subvariedade tipo espaço e completa tal que $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$), esta última não está contida em um slice. Isso, no entanto, não contradiz o Teorema 2.2.4, pois, para $a > 0$ (respectivamente, $a < 0$), Σ^2 não está longe do infinito passado (respectivamente, futuro), nem o Teorema 2.2.8, já que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^t \rho(s) ds = \int_{-\infty}^t ds = +\infty$ (respectivamente, $\int_t^{+\infty} \rho(s) ds = \int_t^{+\infty} ds = +\infty$).

Capítulo 3

Escassez de subvariedades aprisionadas em espaços-tempo estáticos padrão

Em conformidade com o que fizemos no Capítulo 2, para o caso dos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados, neste capítulo, apresentamos resultados de rigidez para classes de subvariedades tipo espaço imersas em espaços-tempo estáticos padrão, os quais também nos permitem inferir resultados de não existência para subvariedades totalmente aprisionadas nesses ambientes.

3.1 Resultados de rigidez e não existência para subvariedades completas

A partir dos resultados obtidos por Pelegrín em [24], fazendo uso da propriedade do tipo Liouville para o operador laplaciano, a qual caracteriza as variedades parabólicas, motivamo-nos a buscar, utilizando a propriedade do tipo Liouville para o infinito laplaciano, resultados análogos para as subvariedades completas.

3.1.1 Resultados auxiliares

Nesta subseção, apresentamos lemas auxiliares que nos permitem demonstrar resultados de rigidez e não existência envolvendo subvariedades completas imersas em

espaços-tempo estáticos padrão. No Lema 3.1.1, determinamos uma expressão para o infinito laplaciano da função altura em termos de $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t)$.

Lema 3.1.1. *Seja Σ^n uma subvariedade tipo espaço imersa em um espaço-tempo estático padrão $\overline{M}^{n+p+1} = M^{n+p} \times_\rho I$. O infinito laplaciano da função altura definida em Σ^n é dado por*

$$\Delta_\infty h = -\frac{2}{\rho}g(\nabla h, \nabla \rho) |\nabla h|^2 + \frac{1}{\rho^2}g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t).$$

Demonstração. Como $\nabla h = -\frac{1}{\rho^2}\partial_t^\top$, temos, pela definição do operador infinito laplaciano, que

$$\begin{aligned} \Delta_\infty h &= \nabla^2 h(\nabla h, \nabla h) \\ &= g(\nabla_{\nabla h} \nabla h, \nabla h) \\ &= g\left(\nabla_{\nabla h} \left(-\frac{1}{\rho^2}\partial_t^\top\right), \nabla h\right) \\ &= -g\left(\nabla h \left(\frac{1}{\rho^2}\right) \partial_t^\top + \frac{1}{\rho^2} \nabla_{\nabla h} \partial_t^\top, \nabla h\right) \\ &= -g\left(-\frac{2}{\rho^3} \nabla h(\rho) \partial_t^\top, \nabla h\right) - \frac{1}{\rho^2}g(\overline{\nabla}_{\nabla h}(\partial_t - \partial_t^\perp), \nabla h) \\ &= -\frac{2}{\rho} \nabla h(\rho) g\left(-\frac{1}{\rho^2} \partial_t^\top, \nabla h\right) - \frac{1}{\rho^2}g(\overline{\nabla}_{\nabla h} \partial_t - \overline{\nabla}_{\nabla h} \partial_t^\perp, \nabla h) \\ &= -\frac{2}{\rho}g(\nabla h, \nabla \rho)g(\nabla h, \nabla h) - \frac{1}{\rho^2}g(\overline{\nabla}_{\nabla h} \partial_t, \nabla h) + \frac{1}{\rho^2}g(\overline{\nabla}_{\nabla h} \partial_t^\perp, \nabla h). \end{aligned}$$

Por outro lado, como ∂_t é um campo de Killing,

$$g(\overline{\nabla}_{\nabla h} \partial_t, \nabla h) = 0.$$

Além disso, uma vez que $g(\overline{\nabla}_{\nabla h} \partial_t^\perp, \nabla h) = g\left((\overline{\nabla}_{\nabla h} \partial_t^\perp)^\top, \nabla h\right)$, pois $\nabla h \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$,

$$g(\overline{\nabla}_{\nabla h} \partial_t^\perp, \nabla h) = g(A_{\partial_t^\perp} \nabla h, \nabla h) = g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t^\perp) = g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t).$$

Portanto,

$$\Delta_\infty h = -\frac{2}{\rho}g(\nabla h, \nabla \rho) |\nabla h|^2 + \frac{1}{\rho^2}g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

No Lema 3.1.2, escrevemos o infinito laplaciano da função altura com respeito à uma métrica conforme em termos do infinito laplaciano da mesma aplicação em relação à métrica original.

Lema 3.1.2. *Seja (Σ^n, g) uma subvariedade tipo espaço imersa em um espaço-tempo estático padrão $\overline{M}^{n+p+1} = M^{n+p} \times_\rho I$. Se $\tilde{g} = e^{-\phi}g$, onde $\phi \in C^\infty(\Sigma^n)$, então o infinito laplaciano da função altura definida em Σ^n , com respeito a $\tilde{g}$, é dado por*

$$\tilde{\Delta}_\infty h = e^{2\phi} \left(\Delta_\infty h + \frac{1}{2} g(\nabla h, \nabla \phi) |\nabla h|^2 \right).$$

Demonstração. Primeiramente, observe que

$$\Delta_\infty h = \nabla^2 h(\nabla h, \nabla h) = g(\nabla_{\nabla h} \nabla h, \nabla h) = \frac{1}{2} \nabla h(g(\nabla h, \nabla h)).$$

Desse modo, como $\tilde{\nabla} h = e^\phi \nabla h$, obtemos que

$$\tilde{\Delta}_\infty h = \frac{1}{2} \tilde{\nabla} h \left(\tilde{g}(\tilde{\nabla} h, \tilde{\nabla} h) \right) = \frac{1}{2} e^\phi \nabla h (e^{-\phi} g(e^\phi \nabla h, e^\phi \nabla h)) = \frac{e^\phi}{2} \nabla h (e^\phi g(\nabla h, \nabla h)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_\infty h &= \frac{e^\phi}{2} (\nabla h(e^\phi) g(\nabla h, \nabla h) + e^\phi \nabla h(g(\nabla h, \nabla h))) \\ &= \frac{e^\phi}{2} e^\phi \nabla h(\phi) |\nabla h|^2 + e^{2\phi} \left(\frac{1}{2} \nabla h(g(\nabla h, \nabla h)) \right) \\ &= e^{2\phi} \left(\frac{1}{2} g(\nabla h, \nabla \phi) |\nabla h|^2 \right) + e^{2\phi} \Delta_\infty h \\ &= e^{2\phi} \left(\Delta_\infty h + \frac{1}{2} g(\nabla h, \nabla \phi) |\nabla h|^2 \right), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Escolhendo a métrica conforme $\tilde{g} = \rho^{-4}g$, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.3. *Seja (Σ^n, g) uma subvariedade tipo espaço imersa em um espaço-tempo estático padrão $\overline{M}^{n+p+1} = M^{n+p} \times_\rho I$. Se $\tilde{g} = \rho^{-4}g$, então o infinito laplaciano da função altura definida em Σ^n , com respeito a $\tilde{g}$, é dado por*

$$\tilde{\Delta}_\infty h = \rho^6 g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t).$$

Demonstração. Se $\tilde{g} = \rho^{-4}g$, então

$$\tilde{g} = e^{\ln \rho^{-4}} g = e^{-4 \ln \rho} g.$$

Desse modo, tomando $\phi = 4 \ln \rho$, obtemos que

$$g(\nabla h, \nabla \phi) = g(\nabla h, \nabla(4 \ln \rho)) = 4g(\nabla h, \nabla \ln \rho) = 4g\left(\nabla h, \frac{1}{\rho} \nabla \rho\right) = \frac{4}{\rho} g(\nabla h, \nabla \rho).$$

Consequentemente, pelo Lema 3.1.2,

$$\tilde{\Delta}_\infty h = e^{8 \ln \rho} \left(\Delta_\infty h + \frac{2}{\rho} g(\nabla h, \nabla \rho) |\nabla h|^2 \right).$$

Portanto, de acordo com o Lema 3.1.1,

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_\infty h &= \rho^8 \left(-\frac{2}{\rho} g(\nabla h, \nabla \rho) |\nabla h|^2 + \frac{1}{\rho^2} g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) + \frac{2}{\rho} g(\nabla h, \nabla \rho) |\nabla h|^2 \right) \\ &= \rho^6 g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t),\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

O próximo resultado estabelece que a completude geodésica de uma variedade Riemanniana (M^m, g) é preservada por uma mudança conforme $\tilde{g} = e^{-\phi}g$, se $\phi \in C^\infty(M^m)$ é uma função limitada superiormente.

Proposição 3.1.4. *Seja (M^m, g) uma variedade Riemanniana completa e $\tilde{g} = e^{-\phi}g$, onde $\phi \in C^\infty(M^m)$, uma métrica Riemanniana conforme. Se ϕ é uma função limitada superiormente, então $(M^m, \tilde{g})$ é completa.*

Demonstração. Suponha que ϕ seja uma função limitada superiormente. Nesse caso, existe $K_0 > 0$ tal que

$$e^{-\phi} \geq K_0.$$

Seja $p \in M^m$. Como (M^m, g) é uma variedade Riemanniana completa, pelo Teorema de Hopf-Rinow, existe uma sequência de subconjuntos compactos $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \dots \subseteq M^m$ em (M^m, d_g) , satisfazendo $\cup K_n = M^m$, tal que, se $q_n \notin K_n$, então $d_g(p, q_n) \rightarrow +\infty$. Visto que as topologias de (M^m, d_g) e $(M^m, d_{\tilde{g}})$ coincidem com a topologia da variedade diferenciável M^m , cada K_n é também compacto em $(M^m, d_{\tilde{g}})$. Além disso,

$$d_{\tilde{g}}(p, q_n) \geq \sqrt{K_0} d_g(p, q_n) \rightarrow +\infty.$$

Portanto, pelo Teorema de Hopf-Rinow, $(M^m, \tilde{g})$ é uma variedade Riemanniana completa. $\square$

3.1.2 Resultados principais

Nesta subseção, apresentamos resultados de rigidez e não existência para subvariedades completas imersas em espaços-tempo estáticos padrão.

Teorema 3.1.5. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = M^{n+p} \times_\rho I$ um espaço-tempo estático padrão, com função warping limitada, e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço, completa e longe do infinito passado (respectivamente, futuro). Se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \geq 0$), então Σ^n está contida em um slice.*

Demonstração. Considere a métrica conforme $\tilde{g} = \rho^{-4}g$, a qual pode ser escrita como $\tilde{g} = e^{-\phi}g$, com $\phi = 4 \ln \rho$. Pela Proposição 3.1.3, temos que

$$\tilde{\Delta}_\infty h = \rho^6 g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t).$$

Sendo assim, se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$, então

$$\tilde{\Delta}_\infty h \leq 0.$$

Uma vez que ρ é uma função limitada, inferimos que ϕ é limitada superiormente. Desse modo, como (Σ^n, g) é uma variedade Riemanniana completa, segue, da Proposição 3.1.4, que $(\Sigma^n, \tilde{g})$ também é completa. Por conseguinte, visto que h é limitada inferiormente, pois Σ^n é uma subvariedade longe do infinito passado, concluímos que h é constante. Logo, Σ^n está contida em um *slice*. A demonstração do caso entre parênteses é análoga. $\square$

Se as condições do Teorema 3.1.5 são satisfeitas e, além disso, $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$, a subvariedade Σ^n é mínima no *slice* no qual está contida, conforme estabelece o Teorema 3.1.6.

Teorema 3.1.6. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = M^{n+p} \times_\rho I$ um espaço-tempo estático padrão, com função warping limitada, e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço, completa e longe do infinito passado (respectivamente, futuro). Se $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$ e $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \geq 0$), então Σ^n está contida, como uma subvariedade mínima, em um *slice*.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.5, se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$ (ou $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \geq 0$, no caso em que Σ^n é limitada no infinito futuro), então Σ^n está contida em um *slice*. Nessa situação, uma vez que os *slices* de $\overline{M}^{n+p+1}$ são subvariedades totalmente geodésicas, temos que

$$g(\vec{H}, \partial_t) = 0.$$

Consequentemente, $\vec{H}$ é tipo espaço. Portanto, se $g(\vec{H}, \vec{H}) \leq 0$, então $\vec{H} = 0$. $\square$

Como o campo curvatura média de uma subvariedade totalmente aprisionada é tipo tempo, o resultado apresentado a seguir é uma consequência imediata do Teorema 3.1.6.

Corolário 3.1.7. *Em um espaço-tempo estático padrão, com função warping limitada, não existem subvariedades completas, totalmente futuro aprisionadas (respectivamente, passado aprisionadas) e longe do infinito passado (respectivamente, futuro).*

3.1.3 Exemplos

A seguir, apresentamos exemplos nos quais avaliamos a aplicabilidade dos resultados obtidos.

Exemplo 3.1.8. Como discutido no Exemplo 2.2.18, o espaço-tempo de Schwarzschild, o qual corresponde à variedade $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^2$, munida com a métrica

$$g = - \left(1 - \frac{2\mathfrak{m}}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\mathfrak{m}}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^2},$$

pode ser dividido em duas regiões: o buraco negro de Schwarzschild (onde consideramos $0 < r < 2\mathfrak{m}$) e o Schwarzschild exterior (no qual $r > 2\mathfrak{m}$). Note que podemos ver o Schwarzschild exterior como um espaço-tempo estático padrão com base $((2\mathfrak{m}, +\infty) \times \mathbb{S}^2, \bar{g})$, onde

$$\bar{g} = \left(1 - \frac{2\mathfrak{m}}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^2},$$

fibra $\mathbb{R}_1$ e função warping $\rho : (2\mathfrak{m}, +\infty) \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada $(r, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^2$ associa o elemento

$$\rho(r, s) = \sqrt{1 - \frac{2\mathfrak{m}}{r}}.$$

Nesse caso, uma vez que $0 < \rho < 1$, concluímos, pelo Corolário 3.1.7, que não existem subvariedades completas, totalmente futuro aprisionadas (respectivamente, passado aprisionadas) e longe do infinito passado (respectivamente, futuro) imersas no Schwarzschild exterior.

Exemplo 3.1.9. Considere o espaço-tempo de Reissner-Nordström, dado pela variedade Lorentziana $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^2$, munida com a métrica

$$g = - \left(1 - \frac{2\mathfrak{m}}{r} + \frac{\mathfrak{q}^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\mathfrak{m}}{r} + \frac{\mathfrak{q}^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^2},$$

onde $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{q}$ são constantes que representam, respectivamente, a massa gravitacional e a carga do modelo.

Note que essa métrica não está definida para $r = \mathfrak{m} \pm \sqrt{\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{q}^2}$. No entanto, considerando $\mathfrak{m}^2 > \mathfrak{q}^2$ e $r > r_+ = \mathfrak{m} + \sqrt{\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{q}^2}$, obtemos uma região que pode ser vista como um espaço-tempo estático padrão, a saber, o produto warped de base $(r_+, +\infty) \times \mathbb{S}^2$, equipada com a métrica

$$\bar{g} = \left(1 - \frac{2\mathfrak{m}}{r} + \frac{\mathfrak{q}^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^2},$$

fibra $\mathbb{R}_1$ e função warping $\rho : (r_+, +\infty) \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(r, s) = \sqrt{1 - \frac{2\mathfrak{m}}{r} + \frac{\mathfrak{q}^2}{r^2}}.$$

Nessa situação, temos que $0 < \rho < 1$. Assim, pelo Corolário 3.1.7, essa região não admite subvariedades completas, totalmente futuro aprisionadas (respectivamente, passado aprisionadas) e longe do infinito passado (respectivamente, futuro).

Exemplo 3.1.10. Considere o espaço-tempo $(n + 2)$ -dimensional de Schwarzschild-Tangherlini, que corresponde à variedade $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^n$, munida com a métrica

$$g = - \left(1 - \frac{\mu}{r^{n-1}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\mu}{r^{n-1}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n},$$

onde

$$\mu = \frac{16\pi \mathbf{m}}{n\omega_n},$$

sendo $\mathbf{m}$ uma constante positiva que representa a massa do modelo e ω_n a área da esfera unitária n -dimensional, dada por

$$\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Perceba que, ao fixarmos $n = 2$, obtemos o clássico espaço-tempo quadridimensional de Schwarzschild. Além disso, a métrica nesse espaço mais geral não está definida para $r^{n-1} = \mu$. Com base nisso, assim como ocorre no Schwarzschild, é natural estudarmos separadamente os casos em que $r^{n-1} < \mu$ e $r^{n-1} > \mu$, os quais são denominados, respectivamente, buraco negro de Schwarzschild-Tangherlini e Schwarzschild-Tangherlini exterior.

Nesse contexto, considerando $t \equiv \text{cte}$ e $r \equiv \text{cte}$, temos as esferas interiores (para as quais $r^{n-1} < \mu$) e as esferas exteriores (em que $r^{n-1} > \mu$), que são subvariedades compactas de codimensão dois, totalmente umbílicas, com segunda forma fundamental dada por

$$\alpha(X, Y) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\mu}{r^{n-1}}\right) g(X, Y) \partial_r.$$

Note que o Schwarzschild-Tangherlini exterior pode ser visto como um espaço-tempo estático padrão com base $(\sqrt[n-1]{\mu}, +\infty) \times \mathbb{S}^n$, munida com a métrica

$$\bar{g} = \left(1 - \frac{\mu}{r^{n-1}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n},$$

fibra $\mathbb{R}_1$ e função warping $\rho : (\sqrt[n-1]{\mu}, +\infty) \times \mathbb{S}^n$ definida por

$$\rho(r, s) = \sqrt{1 - \frac{\mu}{r^{n-1}}},$$

a qual satisfaz a condição $0 < \rho < 1$. Observe também que as esferas exteriores são subvariedades tipo espaço imersas nesse espaço-tempo, completas, longe do infinito e tais que

$$g(\alpha(X, Y), \partial_t) = 0.$$

Portanto, pelo Teorema 3.1.5, elas devem estar contidas em slices, o que, de fato, ocorre. No entanto, não estão contidas como subvariedades mínimas, já que

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(E_i, E_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\mu}{r^{n-1}}\right) \partial_r = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\mu}{r^{n-1}}\right) \partial_r \neq 0.$$

Isso não contradiz o Teorema 3.1.6 porque

$$\begin{aligned}
g(\vec{H}, \vec{H}) &= \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\mu}{r^{n-1}}\right)^2 g(\partial_r, \partial_r) \\
&= \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\mu}{r^{n-1}}\right)^2 \left(1 - \frac{\mu}{r^{n-1}}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\mu}{r^{n-1}}\right) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.1.11. No Exemplo 2.2.20, vimos que a superfície $\Sigma^2 = \{(t, s, x, y) \in \overline{M}^4 : t = a \ln y, s = 0\}$, com $a \in (-1, 1)$, imersa no espaço-tempo $\overline{M}^4 = -\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, é tipo espaço e futuro aprisionada (respectivamente, passado aprisionada) quando $a > 0$ (respectivamente, $a < 0$), apesar de não ser uma subvariedade totalmente aprisionada. Além disso, como observado no Exemplo 4.1.3, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) = 0$.

Note que $\overline{M}^4$ pode ser visto como um espaço-tempo estático padrão, com base $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, fibra $\mathbb{R}_1$ e função warping $\rho \equiv 1$. Dessa forma, Σ^2 é um exemplo de subvariedade imersa em um espaço-tempo estático padrão, com função warping limitada, tipo-espaço, completa, tal que $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) = 0$, mas que não está contida em um slice (a não ser no caso em que $a = 0$). Isso evidencia a importância da condição de limitação na função altura no Teorema 3.1.5.

Capítulo 4

Um princípio do tipo Omori-Yau para o infinito laplaciano

Em [22], Omori provou que, se (M^m, g) é uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional limitada inferiormente, então, para qualquer função $u \in C^2(M^m)$ com $u^* = \sup_{M^m} u < +\infty$, existe uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em M^m satisfazendo as propriedades

$$(i) \ u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) \ |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad (iii) \ \nabla^2 u(x_k) < \frac{1}{k}g,$$

no sentido de formas quadráticas, isto é, para todo $v \in T_{x_k}M^m$, $v \neq 0$,

$$\nabla^2 u(x_k)(v, v) < \frac{1}{k}|v|^2.$$

Yau, por sua vez, demonstrou em [37] que, de modo similar, se (M^m, g) é uma variedade Riemanniana (não necessariamente completa), com curvatura de Ricci limitada inferiormente, então, para qualquer função $u \in C^2(M^m)$ com $u^* = \sup_{M^m} u < +\infty$, existe uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em M^m satisfazendo as propriedades

$$(i) \ u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) \ |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad (iii) \ \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Com base nesses dois resultados clássicos, e seguindo a terminologia empregada em [5, Definição 2.1], estabeleceu-se a seguinte definição.

Definição 4.0.1 (Princípio do máximo de Omori-Yau). *Dizemos que o princípio do máximo de Omori-Yau para o laplaciano é válido em uma variedade Riemanniana*

(M^m, g) quando, para qualquer função $u \in C^2(M^m)$ com $u^* = \sup_{M^m} u < +\infty$, existe uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em M^m satisfazendo as propriedades

$$(i) \ u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) \ |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k} \quad e \quad (iii) \ \Delta u(x_k) < \frac{1}{k},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, para qualquer função $u \in C^2(M^m)$ com $u_* = \inf_{M^m} u > -\infty$, existe uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em M^m satisfazendo as propriedades

$$(i) \ u(x_k) < u_* + \frac{1}{k}, \quad (ii) \ |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k} \quad e \quad (iii) \ \Delta u(x_k) > -\frac{1}{k},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Enfraquecendo as condições impostas na Definição 4.0.1 (especificamente, desconsiderando a propriedade (ii), sobre a norma do gradiente de u), obtemos o conhecido princípio do máximo fraco de Omori-Yau.

Definição 4.0.2 (Princípio do máximo fraco de Omori-Yau). *Dizemos que princípio do máximo fraco de Omori-Yau é válido em uma variedade Riemanniana (M^m, g) quando, para qualquer função $u \in C^2(M^m)$ com $u^* = \sup_{M^m} u < +\infty$, existe uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em M^m satisfazendo as propriedades*

$$(i) \ u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad e \quad (ii) \ \Delta u(x_k) < \frac{1}{k},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. De modo equivalente, para qualquer $u \in C^2(M^m)$ com $u_* = \inf_{M^m} u > -\infty$, existe uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em M^m satisfazendo as propriedades

$$(i) \ u(x_k) < u_* + \frac{1}{k} \quad e \quad (ii) \ \Delta u(x_k) > -\frac{1}{k},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Conforme demonstrado por Pigola, Rigoli e Setti em [27], o princípio do máximo fraco de Omori-Yau é válido em uma variedade Riemanniana (M^m, g) se, e somente se, M^m é estocasticamente completa, isto é, a probabilidade de uma partícula que realiza um movimento Browniano em M^m ser encontrada no espaço de estado é igual a 1. De modo mais técnico, para qualquer $(x, t) \in M^m \times (0, +\infty)$,

$$\int_M p(x, y, t) dy = 1,$$

onde $p(x, y, t)$ é o núcleo de calor do operador laplaciano (para mais detalhes, ver [19] e [2]).

Observação 4.0.3. *As variedades estocasticamente completas constituem uma classe ampla de variedades na qual estão incluídas as parabólicas. Isso implica que toda variedade parabólica satisfaz o princípio do máximo fraco de Omori-Yau. Em [1] e [2] são apresentados diversos resultados de rigidez e não existência para subvariedades aprisionadas estocasticamente completas.*

Neste capítulo, estabelecemos o que denominamos ser um princípio do tipo Omori-Yau para o operador infinito laplaciano. Como aplicação deste princípio, apresentamos resultados para o gradiente da função altura de subvariedades totalmente aprisionadas imersas em espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados e espaços-tempo estáticos padrão. O Lema 4.0.4, apresentado a seguir, e cuja demonstração pode ser encontrada em [5, Proposição 2.2], é essencial para a obtenção dos nossos resultados.

Lema 4.0.4. *Seja (M^m, g) uma variedade Riemanniana completa. Se $u : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $u^* = \sup_{M^m} u < +\infty$, então, para cada sequência $\{y_k\} \subset M^m$ tal que $u(y_k) \rightarrow u^*$ quando $k \rightarrow +\infty$, existe uma sequência $\{x_k\} \subset M^m$ gozando das propriedades*

$$(i) \ u(x_k) \rightarrow u^*, \quad (ii) \ |\nabla u(x_k)| \rightarrow 0 \quad e \quad (iii) \ d_g(x_k, y_k) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

O princípio do tipo Omori-Yau para o infinito laplaciano é enunciado e demonstrado em seguida.

Teorema 4.0.5 (Princípio do tipo Omori-Yau para o infinito laplaciano). *Seja (M^m, g) uma variedade Riemanniana completa. Se $f \in C^\infty(M^m)$, então existe uma sequência $\{x_k\} \subset M^m$ tal que $|\Delta_\infty f(x_k)| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$.*

Demonstração. Sejam $f \in C^\infty(M^m)$ uma função suave em M^m e $u : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$u = -|\nabla f|^2.$$

Note que u é limitada superiormente, pois $-|\nabla f|^2 \leq 0$. Sendo assim, considere uma sequência $\{y_k\} \subset M^m$ tal que $u(y_k) \rightarrow u^* = \sup_{M^m} u$ quando $k \rightarrow +\infty$. Pelo Lema 4.0.4, existe uma sequência $\{x_k\} \subset M^m$ satisfazendo $u(x_k) \rightarrow u^*$ e $|\nabla u(x_k)| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$. Uma vez que $\{u(x_k)\}$ converge, temos que $|\nabla f(x_k)|$ é uma sequência limitada. Além disso,

$$\begin{aligned} g(\nabla f, \nabla u) &= -g(\nabla f, \nabla |\nabla f|^2) \\ &= -\nabla f(|\nabla f|^2) \\ &= -\nabla f(g(\nabla f, \nabla f)) \\ &= -2g(\nabla_{\nabla f} \nabla f, \nabla f) \\ &= -2\nabla^2 f(\nabla f, \nabla f) \\ &= -2\Delta_\infty f. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$0 \leq |\Delta_\infty f(x_k)| = \frac{1}{2} |g(\nabla f(x_k), \nabla u(x_k))| \leq \frac{1}{2} |\nabla f(x_k)| |\nabla u(x_k)|,$$

e, portanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\Delta_\infty f(x_k)| = 0,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

4.1 Aplicações

Nesta seção, são apresentadas aplicações geométricas do princípio do tipo Omori-Yau obtido para subvariedades completas imersas em espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados e espaços-tempo estáticos padrão.

4.1.1 O caso dos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados

Teorema 4.1.1. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente fortemente expansivo (respectivamente, espacialmente fortemente contrativo), e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço e completa. Se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \geq 0$), então*

$$\inf |\nabla h| = 0.$$

Demonstração. Uma vez que Σ^n é uma subvariedade tipo espaço e completa, pelo Teorema 4.0.5, existe uma sequência $\{x_k\} \subset \Sigma^n$ tal que

$$|\Delta_\infty h(x_k)| \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Por outro lado, de acordo com o Lema 2.2.1,

$$\Delta_\infty h = g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} |\nabla h|^2 (|\nabla h|^2 + 1).$$

Consequentemente, se $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$, então, do fato de $\overline{M}^{n+p+1}$ ser um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente fortemente expansivo, segue que, quando $k \rightarrow +\infty$,

$$|\nabla h(x_k)| \rightarrow 0.$$

Portanto, como $|\nabla h| \geq 0$,

$$\inf |\nabla h| = 0.$$

O caso entre parênteses é demonstrado de forma análoga. $\square$

Como a condição $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \leq 0$ (respectivamente, $g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) \geq 0$) é satisfeita para subvariedades totalmente futuro aprisionadas (respectivamente, passado aprisionadas), o resultado a seguir é uma consequência imediata do Teorema 4.1.1.

Corolário 4.1.2. *Seja $\overline{M}^{n+p+1} = -I \times_\rho M^{n+p}$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente fortemente expansivo (respectivamente, espacialmente fortemente contrativo). Se Σ^n é uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço, completa e totalmente futuro aprisionada (respectivamente, passado aprisionada), então*

$$\inf |\nabla h| = 0.$$

Exemplo 4.1.3. *No Exemplo 2.2.20, consideramos o espaço-tempo quadridimensional $\overline{M}^4 = -\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ e a superfície tipo espaço $\Sigma^2 = \{(t, s, x, y) \in \overline{M}^4 : t = a \ln y, s = 0\}$, com $a \in (-1, 1)$. Como visto anteriormente, o conjunto $\{E_1, E_2\}$, onde*

$$E_1 = y\partial_x \text{ e } E_2 = \frac{a\partial_t + y\partial_y}{\sqrt{1-a^2}},$$

é um referencial ortonormal para Σ^2 . Com base nisso, podemos escrever

$$\nabla h = g(\nabla h, E_1)E_1 + g(\nabla h, E_2)E_2.$$

Isso implica que

$$|\nabla h|^2 = g(\nabla h, \nabla h) = g(\nabla h, E_1)^2 + g(\nabla h, E_2)^2.$$

Como $\nabla h = -\partial_t^\top$, obtemos que

$$\begin{aligned} |\nabla h|^2 &= g(-\partial_t^\top, E_1)^2 + g(-\partial_t^\top, E_2)^2 \\ &= g(\partial_t, E_1)^2 + g(\partial_t, E_2)^2 \\ &= g(\partial_t, y\partial_x)^2 + g\left(\partial_t, \frac{a\partial_t + y\partial_y}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2 \\ &= 0 + \left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2 g(\partial_t, \partial_t)^2 \\ &= \frac{a^2}{1-a^2}. \end{aligned}$$

Portanto, se $a \neq 0$,

$$\inf |\nabla h| = \frac{a^2}{1-a^2} \neq 0.$$

Por outro lado, uma vez que, para cada $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^2)$,

$$\alpha(X, X) = \frac{ay^2}{1-a^2}(g(X, \partial_x))^2\partial_t + \frac{a^2y^3}{1-a^2}(g(X, \partial_x))^2\partial_y,$$

temos que

$$g(\alpha(X, X), \partial_t) = -\frac{ay^2}{1-a^2}(g(X, \partial_x))^2.$$

Consequentemente, $g(\alpha(X, X), \partial_t) \leq 0$, quando $a > 0$, e $g(\alpha(X, X), \partial_t) \geq 0$, quando $a < 0$. Em particular, visto que $\nabla h = -\partial_t^\top$ e $\partial_t \perp \partial_x$,

$$g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t) = 0.$$

No entanto, isso não contradiz o Teorema 4.1.1 porque $\overline{M}^4$ não é um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado espacialmente fortemente expansivo.

4.1.2 O caso dos espaços-tempo estáticos padrão

Teorema 4.1.4. *Sejam $\overline{M}^{n+p+1} = M^{n+p} \times_\rho I$ um espaço-tempo estático padrão, com função warping limitada e longe do zero, e Σ^n uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço e completa. Se $\alpha(\nabla h, \nabla h)$ é causal e*

$$|\alpha(\nabla h, \nabla h)| \geq c_0 |\nabla h|^2,$$

para alguma constante positiva c_0 , então

$$\inf |\nabla h| = 0.$$

Demonstração. Considere a métrica $\tilde{g} = \rho^{-4}g$. Pela Proposição 3.1.4, $(\Sigma^n, \tilde{g})$ é uma variedade Riemanniana completa. Assim, de acordo com o Teorema 4.0.5, existe uma sequência $\{x_k\} \subset \Sigma^n$ tal que

$$|\tilde{\Delta}_\infty h(x_k)| \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Além disso, pela Proposição 3.1.3,

$$\tilde{\Delta}_\infty h = \rho^6 g(\alpha(\nabla h, \nabla h), \partial_t).$$

Por outro lado, como ρ é uma função longe do zero, existe $a_0 > 0$ satisfazendo $\rho \geq a_0$. Desse modo, uma vez que $\alpha(\nabla h, \nabla h)$ é causal e ∂_t é tipo tempo, obtemos, pela Desigualdade Inversa de Cauchy-Schwarz, que

$$|\tilde{\Delta}_\infty h| \geq \rho^6 |\alpha(\nabla h, \nabla h)| |\partial_t| \geq \rho^7 c_0 |\nabla h|^2 \geq a_0^7 c_0 |\nabla h|^2,$$

onde utilizamos a hipótese $|\alpha(\nabla h, \nabla h)| \geq c_0 |\nabla h|^2$ e a identidade $|\partial_t| = \rho$. Pela desigualdade obtida, concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\nabla h(x_k)| = 0.$$

Logo, como $|\nabla h| \geq 0$, $\inf |\nabla h| = 0$. □

Visto que, em uma subvariedade totalmente aprisionada Σ^n , $\alpha(v, v)$ é tipo tempo, para todo vetor tangente não nulo v , temos, como consequência do Teorema 4.1.4, o seguinte resultado:

Corolário 4.1.5. *Seja $\overline{M}^{n+p+1} = M^{n+p} \times_\rho I$ um espaço-tempo estático padrão, com função warping limitada e longe do zero. Se Σ^n é uma subvariedade imersa em $\overline{M}^{n+p+1}$, tipo espaço, completa e totalmente aprisionada, satisfazendo a condição*

$$|\alpha(\nabla h, \nabla h)| \geq c_0 |\nabla h|^2,$$

para alguma constante positiva c_0 , então

$$\inf |\nabla h| = 0.$$

Exemplo 4.1.6. *Voltemos novamente ao caso da subvariedade $\Sigma^2 = \{(t, s, x, y) \in \overline{M}^4 : t = a \ln y, s = 0\}$, com $a \in (-1, 1)$, imersa no espaço-tempo $\overline{M}^4 = -\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$. Como comentamos no Exemplo 3.1.11, $\overline{M}^4$ pode ser visto como um espaço-tempo estático padrão, com função warping constante e igual a 1, e, portanto, limitada e longe do zero. De acordo com o que foi apresentado no Exemplo 4.1.3,*

$$|\nabla h|^2 = \frac{a^2}{1 - a^2}.$$

Desse modo, $\inf |\nabla h| \neq 0$ quando $a \neq 0$. No entanto, esse resultado não contradiz o Teorema 4.1.4, pois, conforme o Exemplo 2.2.20, o campo $\alpha(\nabla h, \nabla h)$ é nulo, e, consequentemente, não causal. Ademais, se $a \neq 0$,

$$|\alpha(\nabla h, \nabla h)| = 0 < \frac{c_0 a^2}{1 - a^2} = c_0 |\nabla h|^2,$$

para todo $c_0 > 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] L. J. Alías, G. P. Bessa, J. H. de Lira, Geometric analysis of the Lorentzian distance function on trapped submanifolds, *Class. Quantum Grav.*, **33** (2016), 125007.
- [2] L. J. Alías, V. L. Cánovas, A. G. Colares, Marginally trapped submanifolds in generalized Robertson-Walker spacetimes, *Gen. Relativ. Gravit.* **23** (2017), 1–23.
- [3] L. J. Alías, V. L. Cánovas, M. Rigoli, Trapped submanifolds contained into a null hypersurface of de Sitter spacetime, *Commun. Contemp. Math.* **20**(8) (2018) 1750059.
- [4] L. J. Alías, V. L. Cánovas, M. Rigoli, Codimension two spacelike submanifolds of the Lorentz-Minkowski spacetime into the light cone, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics* **149**(8) (2019), 1523–1553.
- [5] L. J. Alías, P. Mastrolia, M. Rigoli, *Maximum Principles and Geometric Applications*, New York: Springer (2016).
- [6] L. J. Alías, A. Romero, M. Sánchez, Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes, *General Relativity and Gravitation*, **27** (1995), 71–84.
- [7] M. Andrade, E. A. Lima Jr., F. Roing, About the parabolicity of trapped submanifolds in standard static spacetimes, *Nonlinear Anal.* **199** (2020), 112037.
- [8] D. J. Araújo, L. Mari, L. F. Pessoa, Detecting the completeness of a Finsler manifold via potential theory for its infinity Laplacian, *J. Differential Equations* **281** (2021), 550–587.

- [9] A. Ashtekar, B. Krishnan, Isolated and dynamical horizons and their applications, *Living Rev. Relativity* **7** (2004), 10.
- [10] I. Bengtsson, J. M. M. Senovilla, The region with trapped surfaces in spherical symmetry, its core, and their boundaries, *arXiv:1009.0225v4* (2011).
- [11] I. Booth et al, Marginally trapped tubes and dynamical horizons, *Class. Quantum Grav.* **23** (2006), 413.
- [12] I. P. Costa e Silva, On the incompleteness of spacetimes containing marginally (outer) trapped surfaces, *Class. Quantum Grav.* **29** (2012), 235008.
- [13] A. W. Cunha, H. F. de Lima, E. A. Lima Jr., M. S. Santos., Weakly trapped submanifolds immersed in generalized Robertson-Walker spacetimes, *J. Math. Anal. Appl.* **484** (2020), 123734.
- [14] J. L. Flores et al, New examples of marginally trapped surfaces and tubes in warped spacetimes, *Class. Quantum Grav.* **27** (2010), 145021.
- [15] H. F. de Lima, E. A. Lima Jr., Generalized maximum principles and the unicity of complete spacelike hypersurfaces immersed in a Lorentzian product space, *Beitr. Algebra Geom.* **55** (2014), 59–75.
- [16] H. F. de Lima, F. R. dos Santos, M. A. L. Velásquez, On the geometry of trapped and marginally trapped submanifolds in Lorentzian space forms, *Commun. Contemp. Math.* **18**(6) (2016), 1550073.
- [17] A. C. Freitas, H. F. de Lima, E. A. Lima Jr., M. S. Santos., Weakly trapped submanifolds in standard static spacetimes, *Ark. Mat.*, **57** (2019), 317–332.
- [18] G.J. Galloway, J.M.M. Senovilla, Singularity theorems based on trapped submanifolds of arbitrary co-dimension, *Class. Quantum Grav.* **27** (2010), 152002.
- [19] A. Grigor’yan, Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.* **36** (1999), 135–249.

- [20] S. W. Hawking, Black Holes in General Relativity, *Commun. Math. Phys.* **25** (1972), 152-166.
- [21] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of SpaceTime*, Cambridge University Press, Cambridge, (1973).
- [22] H. Omori, Isometric immersions of Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967), 205–214.
- [23] B. O’Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic press (1983).
- [24] J. A. S. Pelegrín, Minimal and weakly trapped submanifolds in Standard static spacetimes, *J. Math. Anal. Appl.* **480** (2019).
- [25] J. A. S. Pelegrín, Extremal and weakly trapped submanifolds in generalized Robertson-Walker spacetimes, *J. Math. Anal. Appl.* **505** (2022), 125533.
- [26] R. Penrose, Gravitational collapse and space-time singularities, *Phys. Rev. Lett.* **14**, (1965), 57.
- [27] S. Pigola, M. Rigoli, A. G. Setti, A remark on the maximum principle and stochastic completeness, *Proc. Am. Math. Soc.* **131** (2003), 1283–1288.
- [28] J. M. M. Senovilla, Trapped surfaces, horizons and exact solutions in higher dimensions, *Class. Quantum Grav.* **19** (2002), L113–L119.
- [29] J. M. M. Senovilla, Trapped surfaces and symmetries, *arXiv preprint arXiv:gr-qc/0309055v3* (2003).
- [30] J. M. M. Senovilla, Novel results on trapped surfaces, *arXiv preprint arXiv:gr-qc/0311005v1* (2003).
- [31] J. M. M. Senovilla, On the existence of horizons in spacetimes with vanishing curvature invariants, *Journal of High Energy Physics* **11** (2003), 046.
- [32] J. M. M. Senovilla, Trapped submanifolds in Lorentzian geometry, *arXiv preprint arXiv:math/0412256v2* (2005).

- [33] J. M. M. Senovilla, Classification of spacelike surfaces in spacetime, *Class. Quantum Grav.* **24** (2007), 3091.
- [34] J. M. M. Senovilla, Trapped surfaces, arXiv preprint arXiv:1107.1344v2 (2011).
- [35] J. M. M. Senovilla, D. Garfinkle, The 1965 Penrose singularity theorem, *Class. Quantum Grav.* **32** (2015), 124008.
- [36] M. Troyanov, Parabolicity of manifolds, *Siberian Adv. Math.* **9**(4) (1999), 125–150.
- [37] S. T. Yau, Harmonic function on complete Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* **28** (1975), 201–228.