UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ronally Kelly Dantas Bocker

Limites: aplicações e uma extensão do conceito

Rio Tinto – PB
2017

Ronally Kelly Dantas Bocker

Limites: aplicações e uma extensão do conceito

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

Rio Tinto – PB
2017

B665l Bocker, Ronally Kelly Dantas.
Limites: aplicações e uma extensão do conceito. / Ronally Kelly Dantas Bocker. – Rio Tinto: [s.n.], 2017.
58 f. : il.-

Orientador (a): Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos.
Monografia (Graduação) – UFPB/CCAE.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Função - Matemática. 3. Função - limites.

UFPB/BS-CCAE
CDU: 59(043.2)

Ronally Kelly Dantas Bocker

Limites: aplicações e uma extensão do conceito

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

Aprovado em 01 de junho de 2017

BANCA EXAMINADORA:

Jamilson Ramos Campos

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos - UFPB/DCX
Orientador

Prof. Dr. Hélio Pires de Almeida - UFPB/DCX

José Fabrício L. de Souza

Prof. Ms. José Fabrício Lima de Souza - UFPB/DCX

Dedicatória

Aos meus pais Reginaldo e Valdilene e a meu esposo Carlos Bocker.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus, pelo dom da vida e por ter me proporcionado saúde, paciência e sabedoria para enfrentar todos os obstáculos dessa jornada deixando-me chegar até aqui.

Aos meu pais, Reginaldo Palmeira Dantas e Valdilene Oliveira Dantas, por terem sido pais presentes em minha vida, dando-me educação e oportunidade de frequentar as melhores escolas, além de todo carinho e amor a mim oferecidos.

Ao meu esposo Carlos Bocker, o melhor presente que a matemática poderia ter me dado, sou muito grata por todo incentivo desde o terceiro período do curso, com certeza você foi peça fundamental para que eu não desistisse nos momentos difíceis, como também na confecção deste trabalho, me explicando quantos vezes fossem necessário e pela paciência nesses últimos meses.

A minha irmã Rossani Kalini, que mesmo com a distância tenho à certeza que sempre estará torcendo por mim.

A minha irmã Rossana Karla (in memorian), que mesmo deixando-me aos seis anos, recordo boas lembranças que vivemos juntas e tenho certeza que se estive aqui na terra estaria muito feliz por mais uma etapa vencida.

A todos os meus familiares, que de forma direta ou indireta, torceram para que esse sonho fosse realizado.

A todos os professores do curso pelo profissionalismo, dedicação e respeito a mim ofertados ao longo do curso.

Ao meu orientador Jamilson Ramos, pelo auxílio e correções das ideias utilizadas nesse trabalho.

Aos professores Hélio Pires e Fabrício Lima, pelo convite aceito para participar dessa banca.

À Capes, pelo Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), pelas inúmeras experiências ofertadas e pelo apoio financeiro através da concessão da bolsa de estudos.

Aos meus poucos colegas da universidade, em especial, Sônia Souza e Cassiana Morais, que compartilharam muitas noites de estudos comigo.

“O saber a gente aprende com os mestres e os livros. A sabedoria, se aprende é com a vida e com os humildes.”

Cora Coralina

Resumo

Neste trabalho falamos sobre limites de uma função de uma variável real. Inicialmente discutimos sobre a gênese do conceito de limite e suas implicações na resolução de diversos paradoxos. Em seguida, apresentamos a definição formal de limite e alguns resultados importantes associados a este conceito. Também apresentamos aplicações de limites à algumas áreas do conhecimento e, em particular, à própria matemática. Por fim, fazemos uma breve apresentação de um conceito generalizado de limite e de uma aplicação desse novo conceito, relacionado à integral de Riemann.

Palavras-chave: Funções reais, limites, integral de Riemann. análise real.

Abstract

In this work we talk about limits of a real-valued functions. We initially discussed the genesis of the concept of limit and its implications for solving various paradoxes. Next we present the formal definition of limit and some important results associated to this concept. We also present applications of limits to some knowledge areas and, as a particular instance, to mathematics itself. Finally we give a brief presentation of a generalized concept of limit and an application of this new concept concerning the Riemann integral.

Keywords: Real functions, limits, Riemann integral, real analysis.

Conteúdo

Introdução

No início do século XVII, o surgimento do cálculo foi atribuído à duas grandes personalidades científicas da época, Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton que, com trabalhos independentes, definiram sua formalização. Mesmo assim, Carvalho [4, p. 13] afirma que embora supostamente a maior parte do desenvolvimento do cálculo tenha acontecido no século XVII, para que a sua história possa ser contada de uma maneira eficaz deve-se voltar a Grécia antiga, onde grandes matemáticos deram contribuições para essa história.

O desenvolvimento do cálculo seguiu uma ordem diferente daquela que costuma-se estudar na universidade, ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e muito tempo depois surgiu o cálculo diferencial.

Segundo Eves,

> A idéia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. ([7, p. 417])

Mas todos os processos acima citados dependem fundamentalmente do conceito de limite de uma função. Esse conceito essencial define com precisão o comportamento de funções nas proximidades de pontos de seus domínios.

O conceito de limite é o mais fundamental do cálculo, pois suas ideias são fundamentadas sobre conceitos já estabelecidos da álgebra, geometria e da trigonometria, isto é, do conhecimento matemático prévio da época. As primeiras aparições de esboços deste conceito começaram desde a Grécia Antiga. Um dos primeiros a utiliza-lo foi Zenão de Eléia (450 a.C.) na construção de aproximadamente 40 paradoxos, três desses paradoxos (a Dicotomia, a Flecha e o de Aquiles) nos dão uma noção intuitiva do que conhecemos hoje sobre o conceito de limite. Através dos argumentos de Zenão muitos matemáticos começaram a estudar resoluções para esses paradoxos, e uma das mais significativas contribuições que deram sequência a esse estudo foi a do grego Eudóxio com o Método da Exaustão, tendo como sua principal aplicação o cálculo de áreas e volumes. Em seguida, Arquimedes utilizou o Método da Exaustão para formalizar o cálculo de áreas e volumes que ficou conhecido como o Método de Equilíbrio. A partir de então, o conceito passou a ser estudado, formalizado e aplicado por vários matemáticos.

Uma vez que o limite de uma função é usado para entender o comportamento local de funções, está claro que o conceito de limite se aplica a diversas áreas do conhecimento, principalmente nas ciências chamadas exatas, como as engenharias, física, biologia, química e economia. Como por exemplo, na área da economia, o limite é usado para estudar a variação das funções de demanda, de preço, de oferta e de custo total. Enfim, onde houver funções a serem analisadas o conceito de limite se faz presente.

Em nosso trabalho, apresentamos um breve aporte ao estudo do conceito de limite e discutimos algumas de suas aplicações ao próprio cálculo, à matemática como um todo e à outras ciências. Também apresentamos uma extensão do conceito de limite proposta por José Henrique Braz e Marcelo Vieira, aluno e professor, respectivamente, da Universidade Federal de Uberlândia. Veremos algumas aplicações desse conceito estendido à integração de funções contínuas.

Nosso trabalho é dividido basicamente em quatro capítulos. No primeiro capítulo apresentamos alguns fatos importantes da historia do cálculo, desde a Grécia Antiga até os dias atuais. Na Grécia Antiga mencionamos sobre o surgimento informal do cálculo através de alguns paradoxos [1] de Zenão e em sequência o método da exaustão. Depois mencionamos sobre o renascimento e a formalização do cálculo e, por fim, a contribuição de vários matemáticos para a formalização do cálculo e da busca do rigor dos conceitos através da análise matemática.

No segundo capítulo, mostramos a noção intuitiva do conceito de limite e em seguida sua definição formal, a unicidade do limite, teorema do sanduíche, algumas propriedades do limite, limites laterais, limites infinitos e no infinito, finalizando com limites de sequência como caso particular de limites de funções.

No terceiro capítulo, abordamos algumas aplicações do limite na própria matemática e em áreas afins. Aqui encaramos a definição de derivada e integral como aplicações do conceito. Além disso, na última seção, baseado em [6], definimos o número e motivados por um problema de juros compostos e mostramos sua existência.

No quarto capítulo, apresentamos uma extensão do conceito de limite proposta nos trabalhos [3] e [17], de Braz e Vieira.

[1] Ideia bem fundamentada ou apresentada de forma coerente, mas que possui subentendidos contraditórios à sua própria estrutura.

Capítulo 1

Um pouco de história sobre o conceito de limite

Falaremos neste capítulo sobre a história de antes e após o advento do surgimento do cálculo, de seus principais personagens e um pouco do contexto social e político da época de sua formalização. As principais referências aqui usadas foram os livros de Boyer [2], Contador [5], Carvalho [4] e Eves [7] e os trabalhos de Machado [11], Reis [15], Strecker [16] e de Alvarenga [1].

1.1 Surgimento informal do Cálculo

Grécia Antiga: Paradoxos de Zenão

Embora a maior parte da história do cálculo se situe no século XVII, iremos encontrar a origem das ideias fundamentais do cálculo retornando à Grécia Antiga do século V a.C.. Foram os gregos os primeiros a descobrirem sobre os fenômenos relacionados ao infinito, buscando explicações para o movimento. Através da ideia do movimento surgiram os primeiros conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

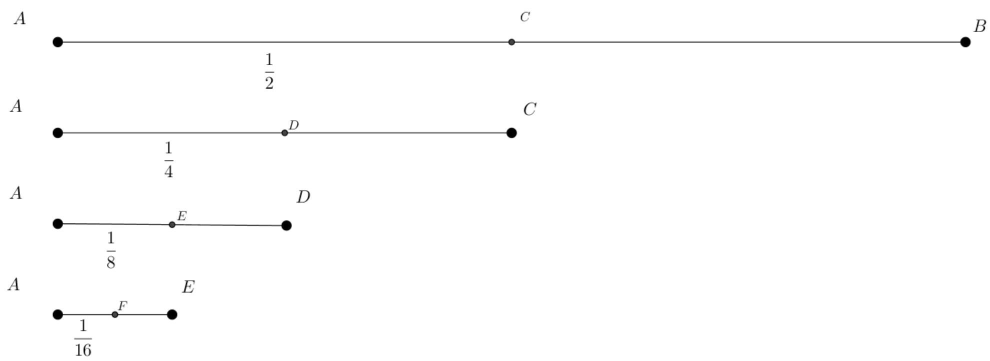
Um dos principais gregos da antiguidade que tiveram influência na criação do cálculo foi o filósofo grego Zenão de Eléia, nascido na cidade de Eléia, hoje conhecida como Vélia na Itália, aproximadamente em 489 a.C.. Zenão ficou conhecido pela produção de paradoxos sobre a impossibilidade do movimento. Não se sabe ao certo quantos paradoxos foram formulados, mas Zenão escreveu um livro que continha 40 paradoxos. Ele era discípulo de Parmênides, que foi um dos principais filósofos da antiguidade cujos estudos eram embasados sobre a ontologia do ser, a razão e à lógica.

O trabalho de Eves menciona dois desses paradoxos:

> A Dicotomia: se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes de alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, ad infinitum. Segue-se, então, que o movimento jamais alcançará.
> Flecha: se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move. ([7, p. 418])

Vamos entender geometricamente o que diz o paradoxo da dicotomia e o da flecha. Dicotomia: Suponha que um objeto A caminha em direção ao objeto B, porém antes que chegue ao final o objeto A precisa passar pela metade do caminho, ou seja, pelo ponto C. Mas para que o objeto A se desloque para o objeto C, A precisa passa pela metade do caminho entre A e C, ou seja, o ponto D. E assim por diante, sempre vai existir uma distância entre dois pontos. Com base nesse fundamento, Zenão acreditava que o que acreditávamos ser movimento espacial era imaginação, para ele o mundo era estático. Logo, esse movimento vai ser infinito conforme mostra a Figura 1.1.

Figura 1.1: Paradoxo da Dicotomia.

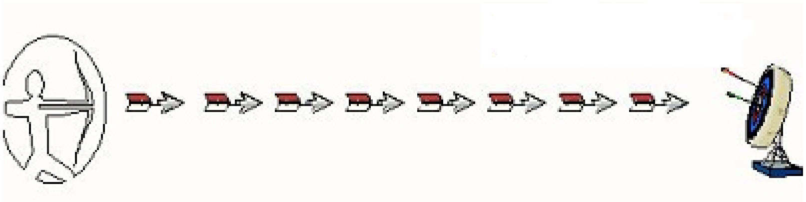


Fonte: Produção do autor.

Flecha: Este paradoxo também apresenta um argumento da impossibilidade do movimento, utilizando uma flecha e um alvo. Observando uma flecha a ser lançada em direção ao alvo (ver Figura 1.2), Zenão percebe que a cada momento à flecha ocupa um espaço diferente e que seu percurso pode ser infinitamente divisível em segmentos menores. O que podemos perceber e que esses paradoxos são argumentos bastante abstratos e meramente lógicos.

Um outro paradoxo de Zenão muito conhecido na história da filosofia é a história da corrida de Aquiles e da tartaruga. Conta-se que o herói grego Aquiles disputou uma corrida com uma tartaruga. Aquiles com sua bondade resolveu dar uma pequena vantagem para

Figura 1.2: Paradoxo da Flecha.



Fonte:
http://basedafilosofia.blogspot.com.br/2010/03/conhecimento-missao-06-os-pre.html

o animal. Em Strecker [16] encontramos esse fragmento da fábula:

> Segundo o filósofo grego Zenão, por mais rápido que Aquiles se movesse, ele jamais conseguiria ultrapassar a tartaruga. O paradoxo formulado por Zenão é o seguinte: cada vez que Aquiles percorre determinada distância num espaço de tempo, a tartaruga já percorreu uma outra distância. Se Aquiles se movimentar mais um tanto para alcançar a tartaruga, terá que se defrontar com o fato de que a tartaruga já terá percorrido mais um tanto, por menor seja. Esse fato se repetirá indefinidamente. Por mais que Aquiles corra, sempre haverá um espaço a separá-lo da tartaruga. As conclusões de Zenão contrariam o senso comum, que aponta para uma vitória esmagadora de Aquiles, é claro. Mas o que Zenão estava fazendo era demonstrar que o movimento dos objetos é um fenômeno irreal e contraditório, consistindo sempre em mera ilusão dos sentidos. ([16])

O que está por trás destes e de outros paradoxos é a noção de limite. Por exemplo, se Aquiles tem uma velocidade 10 vezes maior do que a tartaruga e inicialmente eles estão a uma distância de 100 metros, então quando Aquiles alcançar a distância de 100 metros, a tartaruga terá percorrido 10 metros. Quando Aquiles percorrer os próximos 10 metros, a tartaruga terá percorrido mais 1 metro. E assim sucessivamente... Assim para que Aquiles alcance a tartaruga terá de percorrer 100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + ... uma soma infinita de parcelas positivas. Surge então as seguintes perguntas: Como dar sentido a tal soma? Pode uma soma infinita de parcelas positivas resultar em uma número real? Essa e outras perguntas só podem ser respondidas e formalizadas com o conceito de limite.

Grécia Antiga: Método da Exaustão

Em civilizações arcaicas, a Geometria possuía grandes aplicabilidades no cotidiano, ou seja, nas partições e medições de terras. Com o passar do tempo, os gregos começaram a se questionar sobre áreas e volumes e esperavam que a matemática desse uma resposta imediata. Entretanto o cálculo de tais grandezas não havia se formalizado para a maioria das formas geométricas.

Conhecia-se o cálculo das áreas de figuras geométricas estruturada por retas, mas não se tinha conhecimento para determinar a área de figuras curvas. Dessa maneira, os gregos iniciaram uma maratona intelectual entre si em busca de uma fórmula geral de quadratura, apontada como uma lenta corrida em direção ao cálculo. Encontraram como solução, aproximar-se da figura curva com polígonos inscritos, o que chamaram de *Método da Exaustão*, uma utilização do conceito de limite por meio de uma sequência infinita. Através desse e de outros procedimentos os gregos foram considerados como os maiores matemáticos durante séculos.

Atribui-se o desenvolvimento do Método da Exaustão a Eudoxo de Cnido (408 - 355 a.C.) e esse método pode ser considerado como resposta aos paradoxos de Zenão. Ele que permitiu que uma grandeza pudesse ser fragmentada constantemente, tendo como base a seguinte proposição:

Proposição 1.1.1 *Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.*

A principal contribuição deste método para o desenvolvimento do cálculo, a princípio, foi calcular a área do circulo através polígonos regulares inscritos; à medida que se aumenta o número de lados do polígono nos aproximamos da área do círculo. No entanto, Eudoxo apresentou mecanismos para esse tipo de procedimento de maneira concreta.

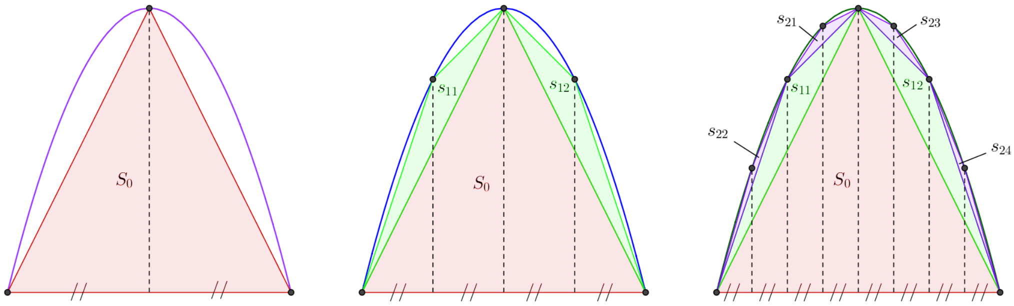
A partir do Método da Exaustão, Arquimedes (287 - 212 a.C.)[1] também apresentou sua contribuição para o desenvolvimento do cálculo, utilizando os procedimentos feitos por Eudoxo, porém de maneira mais elaborada.

Arquimedes aplicou o Método da Exaustão em várias obras, tais como as seguintes: Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas I; A Quadratura da Parábola; Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas II; Sobre a Esfera e o Cilindro; Sobre as Espirais; Sobre os Cones e os Esferóides; Sobre os Corpos Flutuantes; A Medida de um Círculo e O Contador dos Grãos de Areia. No que segue, vamos mostrar um pouco do que está na obra *A Quadratura da Parábola*, considerada a obra mais popular.

[1]Físico, matemático, engenheiro, inventor e astrônomo. Considerado um dos maiores matemáticos da antiguidade

Na matemática grega, para determinar a área e o volume fazia-se por comparação de áreas e volumes já conhecidos. Para os gregos encontrar a área e o volume de uma figura geométrica não era simplesmente encontrar um número, mas obter uma figura conhecida que tenha as mesmas dimensões. Porém, o problema não era apenas calcular a área, mas encontrar a relação entre a área já conhecida e a que se quer conhecer. A demonstração do método da exaustão é bastante longa e detalhada, mas Arquimedes provou que a área A de um segmento parabólico é quatro terços da área de um triângulo S_0, possuindo a mesma base e mesma altura do segmento parabólico.

Figura 1.3: Quadratura da parábola



Fonte: Produção do autor.

Arquimedes provou que dado um segmento parabólico, a área do triângulo inscrito neste segmento é 4 vezes a área da soma dos dois triângulos inscritos nos dois arcos parabólicos determinados pelo primeiro triângulo. Por exemplo, na Figura 1.3, temos $S_0 = 4(s_{11} + s_{12})$ e $s_{11} = 4(s_{21} + s_{22})$ e assim por diante. Dessa forma, chamando $S_1 = s_{11} + s_{12}$ e $S_2 = s_{21} + s_{22} + s_{23} + s_{24}$, temos

$$S_1 = \frac{S_0}{4} \quad \text{e} \quad S_2 = \frac{S_1}{4}.$$

Seguindo com este procedimento, Arquimedes provou que a área A do arco de parábola é

$$S_0 + \frac{S_0}{4} + \frac{S_0}{4^2} + \cdots + \frac{S_0}{4^n} + \cdots = \frac{S_0}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S_0.$$

O que podemos perceber é que a quadratura da parábola é um dos precursores da integral definida e o método de exaustão é um ponto fundamental para desenvolvimento do conceito de limite.

1.2 O renascentismo e a formalização do cálculo

No final da idade média, entre os séculos XV e XVII, a Europa passou por consideráveis mudanças no âmbito cultural, artístico, histórico e científico, que teve seu início na Itália e expandiu-se para toda Europa. Esse marco histórico foi chamado de "Renascimento" devido a descoberta e valorização do mundo e do homem que conduziram para uma época mais humanista e naturalista.

É interessante destacar, que foram cerca de duzentos anos de restauração de riquezas do mundo antigo. Foi um período que não só a matemática passou por progressos, mas diversas áreas como a pintura, a música e a arquitetura. A Europa ressurgia após um longo período de escuridão, apresentando um ambiente criativo associado ao desenvolvimento de técnicas e ao saber empírico [2].

O período do Renascentismo foi dividido em duas linhas distintas de pensamento, uma no próprio sentindo da palavra, ou seja, renascer, e a outra no sentido de resgatar, reinstituindo uma remota ordem que antigamente tinha dado certo. A primeira linha de pensamento está associada diretamente ao homem, baseada na inteligência da antiguidade clássica, pois consideravam o homem como indicador de todas as coisas. A segunda linha de pensamento está relacionada a reimplementação dos conceitos do mundo antigo. Esta volta à antiguidade aliada a uma nova visão do universo e do homem, foram os causadores desse movimento cultural de patrimônio extraordinário, que encontrou nas ciências uma forma criativa de expressão.

Durante o período renascentista, a matemática foi marcada pelo desenvolvimento da álgebra. A primeira obra matemática sobre a Álgebra a ser impressa foi a do frade franciscano Luca Pacioli, professor de Leonardo da Vinci, que publicou seu livro em 1492. A obra teve por título *"Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalità"* (Compêndio de Aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade).

Durante um longo período, os físicos e músicos utilizaram a linguagen matemática. Grande parte dessa história foi escrita por Galileu Galilei [3], que não se conformava com alguns hábitos sociais estabelecidos. Esse inconformismo foi herança de seu pai, o músico Vicenzio Galileu. Mais adiante, Galileu declarava que as regras matemáticas eram simples demais para remeter suas reflexões. Dessa forma, os estudiosos necessitavam de uma linguagem mais adequada para época, ou seja, uma linguagem mais avançada. Este avanço na linguagem matemática seria melhor desenvolvida por matemáticos como Isaac Newton que, com o decorrer do tempo, formalizaram o que hoje denominamos por *Cálculo Diferencial e Integral.*

O cálculo trouxe vários avanços para o desenvolvimento da matemática, porém amplas áreas de pesquisa foram surgindo. Incontestavelmente, o cálculo foi a realização matemática mais extraordinária do período renascentista.

Como Newton e Leibniz foram responsáveis, por assim dizer, pela formalização do cálculo, em trabalhos independentes, a seção a seguir é dedicada a contar um pouco sobre cada um.

[2] Saber baseado essencialmente no experimento.
[3] Físico, matemático, astrônomo e filósofo de nacionalidade italiana.

1.3 Um pouco sobre Newton e Leibniz

Newton

Isaac Newton nasceu prematuramente no dia 25 de dezembro de 1642 em Londres, Inglaterra; herdando o mesmo nome de seu pai que foi um proprietário agrícola e que tinha como planos que o filho embarcasse na mesma área agrícola. O pai faleceu meses antes do nascimento de seu filho e dois anos depois sua mãe voltou-se a casar vindo a morar em North Withan. Porém seu padrasto recusou-se a acolhê-lo e, com isso, Newton foi morar com seus avôs em Woolsthorpe. Em 1953, seu padrasto faleceu e sua mãe voltou a morar em Woolsthorpe com suas duas filhas e um filho, frutos do seu casamento. Aos doze anos, Newton foi morar de favor na casa de um farmacêutico chamado Clark em Skillington Stokes, onde ingressou numa escola secundária, cinco anos depois sua mãe o chamou para voltar a Woolsthorpe para cuidar das terras da família. Entretanto Newton era muito desligado para mexer com a agricultura e cuidar dos animais. Dessa forma, sua mãe logo percebeu que seria boa ideia encaminhá-lo para uma universidade.

Figura 1.4: Isaac Newton.

Fonte: https://edukavita.blogspot.com.br/2015/06/biografia-de-isaac-newton-considerado-o.html

No ano 1661, Isaac foi estudar em Trinity College, Cambridge, onde a princípio a química foi seu principal interesse. No primeiro ano ele estudou os exemplares de Euclides, considerando extremamente compreensível, e a partir desse momento começou a surgir o interesse pela matemática. Ele procura artigos para ler, como *La géometrie* de Descartes, *Clavis* de Oughtred, *Arithmetica infinitorum* de Wallis e entre outros trabalhos.

Newton possuía um vasto conhecimento sobre Astronomia, Óptica e Mecânica, sempre anotando os pensamentos que iam surgindo. Na Universidade de Cambridge não tinha cadeiras específicas na área da matemática, com isso no ano de 1663 Isaac Barrow começou a lhe dar aulas particulares e a partir daí despertou mais interesse em Newton para matemática. Com o decorrer dos anos, Newton criou sua própria matemática, desenvolvendo o Teorema Binomial, O Método dos Fluxos conhecido atualmente como *Cálculo Diferencial* e o estudo de séries infinitas.

De todos os trabalhos desenvolvido por Newton, iremos citar apenas o Teorema Binomial, possivelmente sua primeira grande obra entre os anos de 1664 - 1665. O trabalho não foi fácil e foi resultado de muitas experiências e erros em relação a divisões e radicais envolvendo quantidades algébricas. O Teorema Binomial é uma generalização do Teorema de Pascal.

O Teorema de Pascal também conhecido por Triângulo de Pascal é um triângulo numérico formado por coeficientes binomiais. Apesar do nome, sua construção é atribuída ao chinês Yang Hui. Por meio da expressão $(a+b)^n$, com $n \in \mathbb{N}$, podemos gerar a seguinte sequência:

$$\begin{aligned}
n = 0 \Rightarrow\ & (a+b)^0 = 1 \\
n = 1 \Rightarrow\ & (a+b)^1 = 1.a + 1.b \\
n = 2 \Rightarrow\ & (a+b)^2 = 1.a^2 + 2.a.b + 1.b^2 \\
n = 3 \Rightarrow\ & (a+b)^3 = 1.a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b + 1.b^3 \\
n = 4 \Rightarrow\ & (a+b)^4 = 1.a^4 + 4.a^3.b + 6.a^2.b^2 + 4a.b^3 + 1.b^4 \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}$$

Através do desenvolvimento desses coeficientes, Pascal montou seu triângulo

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

Newton percebeu que através da expressão $(a+b)^n$, seria possível gerar coeficientes de uma expressão das formas $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ e $(a+b)^{-n}$. Assim, Newton conseguiu a generalização do Teorema Binomial através da fórmula

$$(P + P.Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}.A.Q + \frac{m-n}{2.n}.B.Q + \frac{m-2n}{3.n}.C.Q + \frac{m-3.n}{4.n} + \ldots$$

Este teorema foi publicado através de uma carta no dia 13 de junho de 1676, escrita pelo secretário da Royal Society e destinada a Leibniz. Em 24 de outubro de 1676, novamente por intermédio de uma carta, Newton explicou em detalhes como foi desenvolvida essa série binomial.

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz, nasceu no dia 01 de julho de 1646 em Leipzig, Alemanha. Foi considerado um gênio universal e aos dezessete anos obteve o grau de bacharel, porém tinha um amplo conhecimento nas áreas de teologia, direito, filosofia e matemática. Aos vinte anos foi-lhe negado o grau de doutor em direito, devido a sua pouca idade, pela universidade de Leipzig. Mudou-se para Nuremberg onde obteve seu título de doutor pela universidade de Aldorf sendo-lhe ofertado um cargo de professor o qual recusou. Infiltrou-se no serviço diplomático, primeiro a serviço de Mainz e posteriormente a serviço da corte de Hanover.

Figura 1.5: Gottfried Leibniz.

Fonte: http://ibenhvass.com/about/leibniz.html

No ano de 1672, quando ainda diplomata em Paris, Leibniz conheceu o físico Huygens. O jovem diplomata convenceu o cientista a dar-lhe aulas de matemática. Leibniz foi enviado para Londres em missão política onde teve a oportunidade de expor uma máquina de calcular à Royal Society. Neste mesmo tempo ele ja havia formalizado o teorema fundamental do cálculo, aperfeiçoando sua notação e constituindo muitas das fórmulas de diferenciação.

Por volta de 1676, Leibniz chegou a mesma conclusão que Newton havia chegado vários anos atrás, que para uma função, seja racional ou irracional, algébrica ou transcendente, as operações de soma e subtração podiam sempre ser utilizadas. Como Leibniz sempre teve uma boa percepção para importância de uma boa notação, concernia a ele desenvolver uma linguagem adequada para esse novo assunto. A partir daí ele começou a fazer algumas tentativas, utilizando um S alongado para representar o símbolo de integral derivado da palavra latina *summa* que significa soma, ou seja, tinha como objetivo uma soma de indivisíveis. Para representar a diferença infinitesimal Leibniz utilizou a notação dx e dy para representar o símbolo de derivada, proveniente da palavra em latim *differentia* que significa diferença. Semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como nos dias atuais, assim como $\int x\,dx$ e $\int y\,dy$ para integrais.

O primeiro artigo associado ao Cálculo Diferencial, foi publicado por Leibniz em 1684 na revista *Acta Eruditorum*. O trabalho foi intitulado *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* (Um novo método para encontrar máximos e mínimos), onde ele define dx como intervalo finito aleatório e dy pela proporção, aparecendo pela primeira vez as regras de derivação. O segundo artigo publicado por Leibniz foi 1686, explicando que as quadraturas são casos restritos do processo inverso do das tangentes.

1.4 A análise matemática

Muitos movimentos marcaram o início do século XIX, mas o surgimento da análise foi um movimento matemático bastante significativo, conhecido também como "a era do rigor". Os matemáticos sentiam necessidade de esclarecer os conceitos básicos do cálculo e de estruturar a teoria sobre fundamentos mais sólidos. Dessa forma, a análise surgiu como uma formalização do cálculo. Muitos matemáticos tiveram grande influência nessa fundamentação e dentre os principais estão Bolzano, Cauchy e Weierstrass.

Bolzano

O padre Bernhard Bolzano nasceu em 05 de outubro de 1781, em Praga, Tchecoslováquia. Bolzano tinha atração pela lógica e pela matemática, principalmente na área da análise e foi um dos primeiros a explicar os conceitos fundamentais do cálculo. Apesar de Bolzano ter publicado vários trabalhos, e de ter ido mais a frente nos fundamentos da análise do que seus contemporâneos, passaria-se mais de meio século para que suas ideias fossem reconhecidas pela comunidade matemática. Um dos fatos que ocasionaram esse isolamento foi o de Praga não ser o centro matemático daquela época. Assim, grande parte dos seus resultados ficaram desconhecidos durante muitos anos.

Como exemplo, em 1843 ele construiu uma função contínua definida em um intervalo que não possui derivada em nenhum ponto. Mas, esse exemplo só ficou conhecido quarenta

Figura 1.6: Bernhard Bolzano.

Fonte: https://educacao.uol.com.br/biografias/bernhard-bolzano.htm

anos mais tarde pelo matemático Weierstrass.

Um dos principais resultados feitos por Bolzano, foi o *Teorema de Bolzano* que hoje em dia é mais conhecido pelo *Teorema do Valor Intermediário.* Este teorema afirma que, se f é uma função real contínua definida em um intervalo $[a, b]$, então qualquer valor entre $f(a)$ e $f(b)$ pertence a imagem de f. Muitos outros resultados complementares são decorrente deste teorema, daí sua grande importância para história da análise, mesmo que durante muito tempo tenha sido ignorado.

Cauchy

Augustin-Louis Cauchy nasceu em 21 de agosto de 1789, em Paris. O grande matemático Lagrange era muito amigo da família, e percebeu certa vocação no menino Cauchy para matemática. Aos 13 anos, Cauchy ingressou na École Centrale du Panthéon onde estudou, durante dois anos, línguas clássicas.

Em 1804, iniciou seus estudos na área de matemática para posteriormente fazer o exame de admissão para Escola Politécnica, do qual ficou em segundo lugar e em seguida começou a cursar engenharia civil. Foi convencido por Lagrange e Laplace a desistir da carreira de engenharia para seguir na área da matemática. Cauchy escreveu bastante sobre a matemática pura e a matemática aplicada. Aos 28 anos, foi chamado para ser professor na mesma escola onde estudou, na Escola Politécnica, e pouco tempo depois se tornou membro da Academia de Ciência Real, produzindo vários trabalhos na área de análise e a publicação de três livros.

Sendo Cauchy desconhecedor das ideias de Bolzano, foi considerado como o primeiro matemático a apresentar metodicamente os elementos de rigor no cálculo infinitesimal,

Figura 1.7: Augustin-Louis Cauchy.

Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy

tornando-se um dos mais importantes analistas da época. Ele foi responsável em transformar a análise em uma disciplina conhecida nas universidades. Cauchy também produziu trabalhos em outras áreas, mas foi no trabalho relacionado ao cálculo que o tornou diferente de seus antecessores. Para se ter uma boa ideia do que foi dito, o conceito de limite dado por Cauchy, de fato, se aproxima muito da definição dada nos dias atuais, em termos de notação e escrita moderna.

Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nasceu em 31 de outubro de 1815, em Ostenfelde, Alemanha. Weierstrass foi professor secundário até os quarenta anos de idade, o que retardou seus estudos na matemática avançada. Obteve uma vaga de instrutor na Universidade de Berlim e oito anos mais tarde lhe foi ofertado à condição de professor titular, cargo no qual dedicou-se integralmente a matemática.

Weierstrass apresentou uma grande contribuição para fundamentação do cálculo, dando significado preciso à noção de uma variável se aproximar infinitamente de um valor fixo, estabelecendo definições concretas de limite e continuidade em termos de ϵ e δ. Tal formalismo deu à análise aspectos muito próximos ao que temos hoje em dia.

Suas obras mais conhecidas referem-se à teoria das funções complexas através de séries de potências, sendo uma extensão rigorosa do plano complexo de uma idéia abordada anteriormente por Lagrange. Weierstrass também ficou conhecido por dar início à arit-

Figura 1.8: Karl Weierstrass.

Fonte:
https://rjlipton.wordpress.com/2014/05/27/avoiding-monsters-and-non-monsters/

metização da análise, percebendo uma falta rigorosa do conceito de número real. Grande parte de suas descobertas matemáticas ficaram conhecidas não através de suas publicações, mas através de suas notas de aulas.

Capítulo 2

Fundamentos

Neste capítulo apresentamos as definições e principais resultados relativos ao conceito de limite. Este estudo pode ser encontrado em qualquer livro introdutório de análise real. Nossas referências principais aqui foram os livros [8], [9] e [10].

Vamos pressupor aqui que o leitor está familiarizado com a linguagem de topologia da reta. Para maiores referências sobre esse tema em específico consultar o capítulo 5 do livro [10].

2.1 Limite de uma função

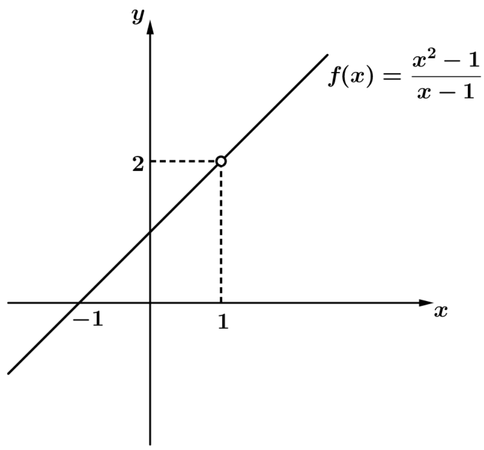
O conceito de limite é utilizado no intuito de descrever o comportamento de uma função na proximidade de um ponto. Antes de darmos a definição formal do conceito de limite vamos estudar o comportamento da função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, para x próximo de 1.

A função $f(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, exceto para $x = 1$, simplificando a função temos:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{(x-1).(x+1)}{x-1} \quad \Rightarrow \quad f(x) = x+1, x \neq 1.$$

Logo, o gráfico da função é a reta $y = x + 1$, para $x \neq 1$ (Veja Figura 2.1). Como a função não está definida para $x = 1$, $f(x)$ é diferente de 2 para todo x no domínio de f, porém podemos tornar o $f(x)$ tão próximo de 2 quanto quisermos, bastando para isso escolher x suficientemente próximo de 1. Dessa forma, dizemos intuitivamente que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é igual a 2.

Figura 2.1: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$.



Fonte: Produção do autor.

Para expressar de maneira formal essa ideia, devemos dar significado ao que chamamos acima de suficientemente próximo, isso nos leva a seguinte definição que é o conceito formal de limite.

Definição 2.1.1 Sejam f uma função real definida em algum intervalo aberto em torno de p, exceto possivelmente em p. Dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a p é igual a L, e denotamos por $\lim_{x\to p} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-p| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

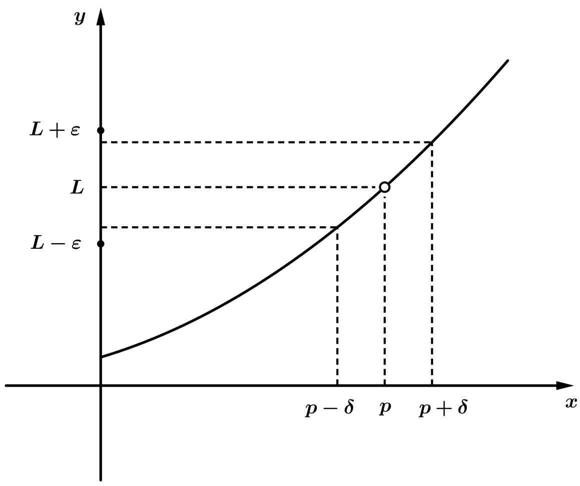
Observamos que na definição acima δ deve ser escolhido suficientemente pequeno de modo que $(p-\delta, p+\delta) - \{p\}$ esteja contido no domínio da função f. Assim, de agora em diante, sempre que considerarmos tal δ estaremos assumindo esta hipótese, salvo menção contrária. Além disso, sempre que escrevermos $\lim_{x\to p} f(x) = L$, estamos assumindo que f está definida num intervalo aberto contendo p, exceto possivelmente o ponto p.

Podemos interpretar informalmente a Definição 2.1.1 da seguinte forma: $\lim_{x\to p} f(x) = L$ significa que podemos tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto se queira, desde que se tome x suficientemente próximo, porém diferente, de p. Para entender geometricamente o limite, ver Figura 2.2.

A Definição 2.1.1 é equivalente a: $\lim_{x\to p} f(x) = L$ se para todo intervalo aberto $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ (com $\epsilon > 0$), existe um intervalo aberto $(p-\delta, p+\delta)$ (com $\delta > 0$) tal que $f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$, para todo $x \in (p-\delta, p+\delta) - \{p\}$.

Exemplo 2.1.2 Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são dadas por $f(x) = c$ (função constante) e $g(x) = x$ (função identidade) então, para todo $p \in \mathbb{R}$, tem-se que $\lim_{x\to p} f(x) = c$ e $\lim_{x\to p} g(x) = p$.

Figura 2.2: $\lim_{x\to p} f(x) = L$.



Fonte: Produção do autor.

De fato, primeiramente vamos mostrar que $\lim_{x\to p} f(x) = c$, para isso, dado $\epsilon > 0$, tome qualquer $\delta > 0$. Assim, $|f(x) - c| = 0 < \epsilon$ para qualquer x tal que $0 < |x-p| < \delta$. Isso mostra que $\lim_{x\to p} c = c$.

Para mostrar que $\lim_{x\to p} g(x) = p$, dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \epsilon$. Assim se $0 < |x-p| < \delta$ implica que $|g(x) - p| = |x-p| < \delta = \epsilon$. Isso mostra que $\lim_{x\to p} x = p$.

O resultado a seguir garante que, quando existe, o limite de uma função é único.

Exemplo 2.1.3 Mostre que $\lim_{x\to p} x^2 = p^2$, para qualquer $p \in \mathbb{R}$.

Seja $p \in R$ fixado. Dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-p| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - p^2| < \epsilon.$$

Como

$$x^2 - p^2 = (x+p).(x-p)$$

e para $\delta < 1$, temos que $|x| \leq |p| + 1$. Portanto

$$|x+p| \leq |x| + |p| \leq 2|p| + 1.$$

Assim tomando-se $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2|p|+1}\}$ temos

$$0 < |x-p| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - p^2| = |x+p|.|x-p| \leq (2|p|+1).\delta < \epsilon.$$

Note que, no exemplo 2.1.2 o δ escolhido depende somente do ϵ dado, já no exemplo 2.1.3 o δ escolhido depende também do ponto p.

Proposição 2.1.4 (Unicidade do Limite) *Sejam* $\lim_{x\to p} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to p} f(x) = M$*, então* $L = M$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim_{x\to p} f(x) = L$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x-p| < \delta_1$ implica em $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$.

Por outro lado, como $\lim_{x\to p} f(x) = M$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x-p| < \delta_2$ implica em $|f(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$.

Assim, tomando-se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que se $0 < |x-p| < \delta$ então

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } |f(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.1}$$

Portanto, se $0 < |x-p| < \delta$ então, usando (2.1) e a desigualdade triangular, temos

$$|L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \leq |f(x) - L| + |f(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, $|L - M| = 0$ e o resultado está provado. ■

Proposição 2.1.5 (Permanência do sinal) *Se* $\lim_{x\to p} f(x) = L \neq 0$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x)$ *tem o mesmo sinal de* L*, para todo* x *com* $0 < |x-p| < \delta$.

Demonstração. Vamos assumir que $L > 0$ (o caso $L < 0$ é análogo). Pela definição de limite, tomando $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \frac{L}{2}$ para todo x com $0 < |x-p| < \delta$. Mas,

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2} \quad \Leftrightarrow \quad L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2}.$$

Em particular, $f(x) > 0$ sempre que $0 < |x-p| < \delta$, o que prova a proposição. ■

Vejamos uma simples aplicação do Teorema da Permanência do Sinal.

Exemplo 2.1.6 Suponha que existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para $0 < |x-p| < r$ e que $\lim_{x\to p} f(x) = L$. Vamos mostrar que $L \geq 0$.

Suponha por absurdo que $L < 0$, então pelo Teorema da Permanência do Sinal, existe $\delta > 0$ ($\delta < r$) tal que

$$0 < |x-p| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < 0;$$

o que é um absurdo, pois por hipótese $f(x) \geq 0$ sempre que $0 < |x-p| < r$.

O cálculo de limites pela definição é, muitas vezes, complicado. Por isso é muito importante conhecer suas propriedades operatórias, pois através delas poupamos muitos esforços no momento de calcular determinados limites. Vamos agora dar algumas das principais propriedades do limite.

Teorema 2.1.7 (Propriedades do limite) *Sejam L, M e b números reais dados. Se $\lim_{x\to p} f(x) = L$ e $\lim_{x\to p} g(x) = M$ então:*

(i) Regra da soma/diferença: *Limite da soma/diferença é a soma/diferença dos limites.*

$$\lim_{x\to p}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to p} f(x) \pm \lim_{x\to p} g(x) = L \pm M.$$

(ii) Regra da multiplicação de uma constante por uma função: *Limite do produto de uma constante por uma função é igual a constante vezes o limite da função.*

$$\lim_{x\to p}[b \cdot f(x)] = b \cdot L.$$

(iii) Regra do produto: *Limite do produto é o produto dos limites.*

$$\lim_{x\to p}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to p} f(x) \cdot \lim_{x\to p} g(x) = L \cdot M.$$

(iv) Regra do quociente: *Limite do quociente é o quociente dos limites, desde que o limite do denominador seja diferente de zero.*

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to p} f(x)}{\lim_{x\to p} g(x)} = \frac{L}{M}, \textit{ para } M \neq 0.$$

(v) Limite do módulo: *Limite do módulo é o módulo do limite.*

$$\lim_{x\to p} |f(x)| = |L|$$

Além disso, se $L = 0$, vale a recíproca. Isto é,

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = 0.$$

Demonstração. Vamos mostrar apenas a propriedade (i) para a soma, as demais podem ser consultadas no Apêndice A.2 de [8] ou em livros de análise.

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon.$$

Associando os termos e aplicando a desigualdade triangular, temos

$$|f(x) + g(x) - (L - M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|.$$

Como $\lim_{x \to p} f(x) = L$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

E de maneira similar, como $\lim_{x \to p} g(x) = M$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, o menor valor de δ_1 e δ_2. Então

$$0 < |x - p| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x - p| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$0 < |x - p| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x - p| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

Logo, $|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, o que mostra que $\lim_{x \to p}(f(x) + g(x)) = L + M$.
■

As propriedades (i) e (iii) do Teorema 2.1.7, aplicadas de forma repetida, acarretam no seguinte

Corolário 2.1.8 *Se* $\lim_{x \to p} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to p} f_2(x) = L_2$, $\ldots$, $\lim_{x \to p} f_{k-1}(x) = L_{k-1}$ *e* $\lim_{x \to p} f_k(x) = L_k$ *então*

(i) O limite da soma é a soma dos limites: $\lim_{x \to p}(f_1(x)+f_2(x) \ldots f_k(x)) = L_1+L_2+\ldots L_k$; *e*

(ii) O limite do produto é o produto dos limites: $\lim_{x \to p}(f_1(x)f_2(x) \ldots f_k(x)) = L_1 L_2 \ldots L_k$.

Exemplo 2.1.9 Vamos mostrar que para toda função polinomial $Q(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e todo $p \in \mathbb{R}$ tem-se que $\lim_{x \to p} Q(x) = Q(p)$.

De fato, usando o Exemplo 2.1.2 e o item (ii) do Corolário 2.1.8, temos que $\lim_{x \to p} x^k = (\lim_{x \to p} x)^k = p^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. E, portanto, usando o item (i) do Corolário 2.1.8, temos

$$\lim_{x \to p}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to p} a_n x^n + \cdots + \lim_{x \to p} a_1 x + \lim_{x \to p} a_0 = a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0.$$

Isso mostra que $\lim_{x \to p} Q(x) = Q(p)$.

Se não conseguirmos encontrar o limite de maneira direta, talvez seja possível encontrá-lo através do Teorema do Confronto (ou Teorema do Sanduíche). O Teorema mostra que se uma função g tiver seus valores limitados entre os valores de outras duas funções, f e h e se f e h tem o mesmo limite quando $x \to p$, consequentemente g terá o mesmo limite que f e h.

Teorema 2.1.10 (Teorema do Confronto) *Sejam f, g e h funções reais tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in (p-r, p+r) - \{p\}$, $(r > 0)$. Se $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L$, então $\lim_{x \to p} g(x) = L$.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$
$$\text{e}$$
$$0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Assim, para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos

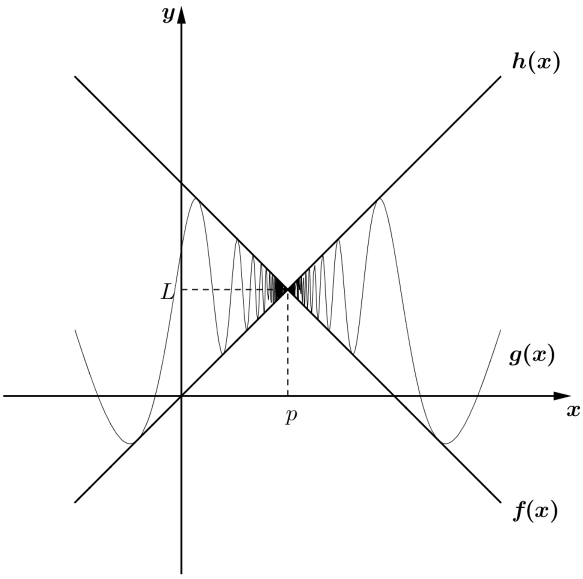
$$0 < |x - p| < \delta \quad \Rightarrow \quad L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \quad \text{e} \quad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, combinando as desigualdades, concluímos que

$$0 < |x - p| < \delta \quad \Rightarrow \quad L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon.$$

Isso demonstra o teorema. ■

Figura 2.3: $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to 0} g(x) = L$.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 2.3 dá uma ideia geométrica do enunciado do Teorema do Confronto. A função g fica limitada por baixo pela função f e por cima pela função h numa vizinhança do ponto p e como $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = L$, temos $\lim_{x \to 0} g(x) = L$.

Corolário 2.1.11 *Sejam f e g funções reais tais que* $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ *e* $|g(x)| \leq M$, *para todo* $x \in (p-r, p+r) - \{p\}$, *onde* $r > 0$ *e* $M > 0$ *são constantes. Então* $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$.

Demonstração. Por hipótese, $0 \leq |g(x)| \leq M$. Assim, multiplicando membro a membro essa desigualdade por $|f(x)|$ obtemos $0 \leq |f(x)g(x)| \leq M|f(x)|$. Como $\lim_{x\to p} 0 = 0$ e pelos itens (iii) e (v) do Teorema 2.1.7, $\lim_{x\to p} M|f(x)| = M \cdot 0 = 0$, segue do Teorema do Confronto que $\lim_{x\to p} |f(x)g(x)| = 0$ e, usando novamente o item (v) do Teorema 2.1.7, concluímos que $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$. ■

2.2 Limites laterais

De acordo com a Definição 2.1.1, para que uma função tenha um limite L, quando x se aproxima de p, a função deve estar bem definida para valores à esquerda e à direita de p e os valores de f devem se aproximar de p em ambos os lados. Desse modo, os limites simples são chamados de bilaterais.

Caso f não tenha um limite bilateral em p, f ainda pode ter um limite lateral, ou seja, um limite cuja aproximação dá-se apenas de um lado. Se a aproximação ocorrer pelo lado direito, dizemos que o limite será um *limite à direita*. Se a aproximação ocorrer pelo lado esquerdo, dizemos que o limite será um *limite à esquerda*.

Definição 2.2.1 (Limite lateral à direita) Seja f uma função definida em um intervalo (p, b), com $p < b$. Dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a p pela direita é igual a L, e denotamos por $\lim_{x\to p^+} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < x - p < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definição 2.2.2 (Limite lateral à esquerda) Seja f uma função definida em um intervalo (a, p), com $a < p$. Dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a p pela esquerda é igual a L, e denotamos por $\lim_{x\to p^-} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < p - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Aqui apresentamos a caracterização, cuja demostração é imediata a partir das definições, de limite em termos de limites laterais.

Teorema 2.2.3 *Sejam f uma função, p um ponto real e suponhamos que existam a e b tais que (a, p) e (p, b) estejam contidos no domínio de f. Então,* $\lim_{x\to p} f(x) = L$ *se, e somente se, f admite limites laterais à direita e à esquerda em p e* $\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) = L$.

O teorema acima geralmente é aplicado para mostrar que algumas funções não possuem limites em determinados pontos. O seguinte exemplo ilustra uma situação desse tipo.

Exemplo 2.2.4 O limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ não existe.

De fato, calculando os limites laterais, temos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1.$$

Como os limites laterais são diferentes, segue do Teorema 2.2.3 que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ não existe.

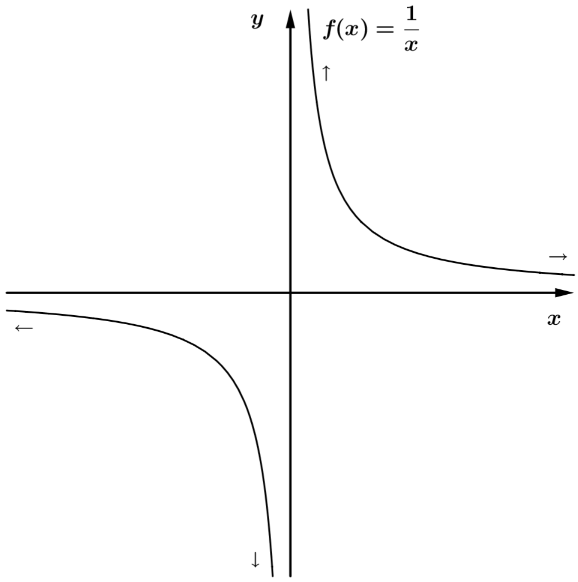
2.3 Limites no infinito e limites infinitos

2.3.1 Limites no infinito

Aqui vamos dar significado aos limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$. Utilizamos o símbolo ∞, como veremos, para representar o comportamento de uma função quando seus valores, domínio ou imagem, transpassar todos os limites finitos.

Observe o modo como a função $f(x) = \frac{1}{x}$ definida para qualquer valor de x, exceto $x = 0$, se comporta.

Figura 2.4: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.



Fonte: Produção do autor.

Quando x é positivo e vai tornando-se cada vez maior, $\frac{1}{x}$ fica cada vez menor. Quando x é negativo e vai tornando seu módulo cada maior, $\frac{1}{x}$, mais uma vez, é cada vez menor.

Podemos resumir essas observações dizendo que $f(x) = \frac{1}{x}$ tem limite zero quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

A seguir, vamos tornar preciso essas ideias através das seguintes definições.

Definição 2.3.1 Seja f uma função e suponhamos que exista p tal que $(p, +\infty)$ contido no domínio de f. Dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ é igual a L, e denotamos por $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que

$$x > A \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definição 2.3.2 Seja f uma função e suponhamos que exista p tal que $(-\infty, p)$ contido no domínio de f. Dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a $-\infty$ é igual a L, e denotamos por $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que

$$x < -A \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Observação 2.3.3 Observamos que as propriedades operatórias de limite dadas no Teorema 2.1.7, continuam valendo para limites no infinito, bastando para isso trocar o ponto p pelos símbolos $+\infty$ ou $-\infty$.

2.3.2 Limites infinitos

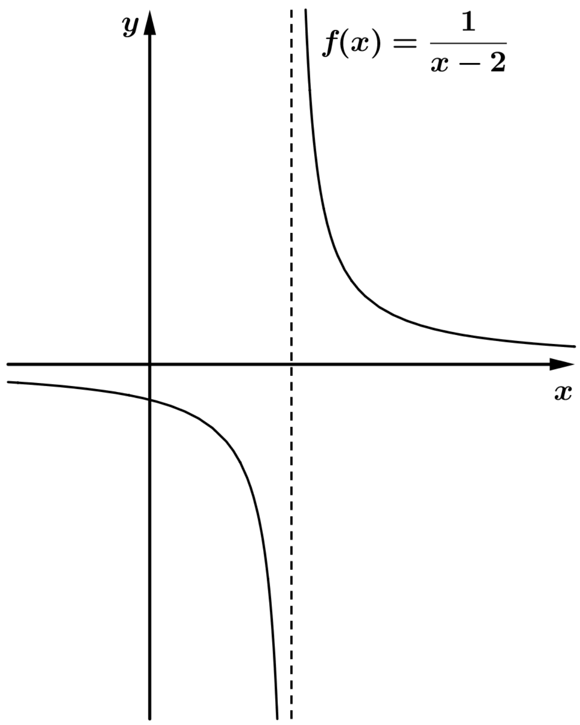
Neste momento, vamos interpretar simbolicamente o fato de uma determinada função f assumir valores $f(x)$ arbitrariamente grandes quando x se aproxima de um determinado ponto p. Mais precisamente, vamos dar significado preciso aos limites infinitos $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to p^-} f(x) = \pm\infty$, onde p é um valor real ou até mesmo $\pm\infty$.

Para que tenhamos uma noção intuitiva de tais limites, considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ (gráfico ilustrado na Figura 2.5), definida para todo $x \neq 2$. Note que quando x se aproxima de 2 pela direita $\dfrac{1}{x-2}$ torna-se cada vez maior e, neste caso, dizemos que limite de $f(x)$ tende a $+\infty$ quando x tende a 2 pela direita. Por outro lado, quando x se aproxima de 2 pela esquerda $\dfrac{1}{x-2}$ é negativo e seu valor absoluto torna-se cada vez maior e, neste caso, dizemos que limite de $f(x)$ tende a $-\infty$ quando x tende a 2 pela esquerda.

Uma vez que a definição de tais limites são análogas, aqui vamos definir precisamente $\lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty$, as demais definições podem ser encontradas na Seção 1.3 de [8] e na Seção 4.2 de [9].

Definição 2.3.4 Seja f uma função e suponhamos que o intervalo (p, a) esteja contido no domínio de f. Dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a p^+ é igual a $+\infty$, e

Figura 2.5: Gráfico da $f(x) = \frac{1}{x-2}$.



Fonte: Produção do autor.

denotamos por $\lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty$, se para todo $A > 0$ existe $\delta > 0$, com $p + \delta < a$, tal que

$$p < x < p + \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > A.$$

2.4 Limites de sequências

Uma sequência de números reais é uma função $n \mapsto a_n$ a valores reais, que associa a cada número natural n um único número real a_n, chamado o n-ésimo termo da sequência. Quando tem-se uma expressão em n que define o termo a_n, este é chamado o termo geral da sequência.

As notações $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ são usadas para designar uma sequência.

Definição 2.4.1 Seja (a_n) uma sequência. Dizemos que limite de a_n quando n tende a $+\infty$ é igual ao número real L, e denotamos por $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$, se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon.$$

Observe que nem sempre existe o limite L de um sequência, pois, por exemplo, para a sequência $a_n = (-1)^n$ temos que para qualquer que seja $L \in \mathbb{R}$, $|a_{2n} - L| \geq 1$ ou $|a_{2n-1} - L| \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. E, portanto, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ não existe.

Quando existir o limite de uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diremos que ela é convergente. Caso contrário, diremos que a sequência é divergente.

Note que o limite de uma sequência é um caso particular de limite no infinito: trata-se de $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n)$, onde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, é uma função definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Assim sendo, todas as propriedades de limites de funções, como a unicidade, as propriedades operatórias, de permanência de sinal, o teorema do confronto, etc, são todas herdadas pelo caso particular de limites de sequências.

Incluso nessas propriedades herdadas temos as definições particulares, inclusive, de limites infinitos. Vamos mostrar apenas uma delas como ilustração.

Definição 2.4.2 Seja (a_n) uma sequência. Dizemos que limite de a_n quando n tende a $+\infty$ é igual a $+\infty$, e denotamos por $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, se para todo $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n > A.$$

Observação 2.4.3 Podemos, por exemplo, definir $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ quando $\lim\limits_{n \to +\infty} -a_n = +\infty$.

Quando limite de (a_n) for $+\infty$ ou $-\infty$ diremos também que (a_n) é divergente.

Exemplo 2.4.4 Vamos mostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 < q < 1; \\ 1, & \text{se } q = 1; \\ +\infty, & \text{se } q > 1; \\ \text{não existe}, & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

Vamos dividir a demonstração em quatro casos.

- 1º caso: $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$.

  Dado $\epsilon > 0$ temos:

$$\begin{aligned} |q^n - 0| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad |q^n| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \ln |q|^n < \ln \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad n \ln |q| < \ln \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}, \quad \text{(pois } \ln |q| < 0\text{)}. \end{aligned}$$

Assim, tomando-se $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}$, concluímos que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |q^n - 0| < \epsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

- 2º caso: $q > 1$.

  Dado $A > 0$, temos:

$$\begin{aligned} q^n > A \quad &\Leftrightarrow \quad \ln q^n > \ln A \\ &\Leftrightarrow \quad n \ln q > \ln A \\ &\Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln A}{\ln q}, \quad \text{(pois } \ln q > 0). \end{aligned}$$

  Tomando-se $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > \frac{\ln A}{\ln q}$, temos

$$n > n_0 \quad \Leftrightarrow \quad q^n > A.$$

  Portanto, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

- 3º caso: $q \leq -1$.

  Note que, neste caso, $q^{2n} \geq 1$ e $q^{2n+1} \leq -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge.

- 4º caso: $q = 0$ e $q = 1$.

  Esse caso é trivial, pois $\lim_{n \to +\infty} 0^n = 0$ e $\lim_{n \to +\infty} 1^n = 1$.

Capítulo 3

Algumas aplicações de limites

Apresentaremos agora algumas aplicações do limite em certas áreas do conhecimento, como à própria matemática, à física, economia e biologia. Inicialmente vamos dar significado a somas infinitas, o que resolve os paradoxos de Zenão vistos no capítulo 1. Na sequência vamos dar a definição de derivada e algumas de suas aplicações na Economia e na Biologia e, por último, vamos definir integral de Riemann, enunciar o Teorema Fundamental do Cálculo e aplicar tal conceito para o cálculo de áreas e no cálculo de trabalho em Física.

3.1 Definição de somas infinitas

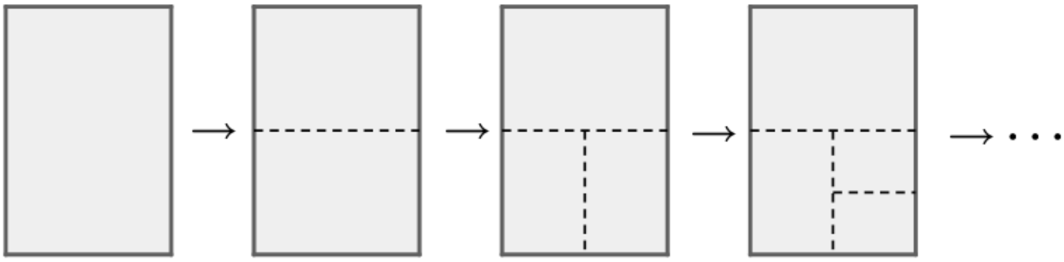
Muito cedo aprendemos a realizar somas de dois números reais e, repetindo somas dois-a-dois, uma quantidade finita de números reais. O que seria, então, uma soma infinita? Dada uma sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, ...)$ o que significa $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$?

Para dar sentido preciso a esse tipo de soma e responder à pergunta acima, vamos imaginar a seguinte situação:

Pegue uma folha de folha de papel e divida-a em duas partes iguais. Temos, então, $\frac{1}{2}$ folha + $\frac{1}{2}$ folha = 1 folha. Em seguida, pegue uma dessas partes e divida novamente em duas partes iguais. Agora, temos $\frac{1}{2}$ folha $+\frac{1}{4}$ folha $+\frac{1}{4}$ folha = 1 folha. Repetindo esse processo até uma etapa n, ficamos com

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 1. \tag{3.1}$$

Figura 3.1: Divisão da folha de papel.



Fonte: Produção do autor.

Por fim, imagine que pudéssemos repetir o processo infinitamente. Teríamos portanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \tag{3.2}$$

Para dar sentindo a igualdade (3.2), o somatório infinito deve ser interpretado como um limite de somas finitas. Assim, denotando por S_n, a soma dos n primeiros termos da sequência $(\frac{1}{2^n})$ e utilizando o resultado do Exemplo 3.1.3 (mais adiante no texto) temos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

Isso nos induz a seguinte definição:

Definição 3.1.1 Dada uma sequência de números reais (a_n), considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e suas somas parciais $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se a sequência de suas somas parciais S_n for convergente e, definimos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Quando uma série não for convergente ela será denominada série divergente. Neste caso, (S_n) é divergente.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.1.2 A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ é divergente.

De fato, a sequência das somas parciais (S_n) de $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ é a sequência $(-1, 0, -1, 0, \dots)$

que não é convergente. Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ é divergente.

Exemplo 3.1.3 (Série Geométrica) Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ com $q \neq 0$ e $q \neq 1$, consideramos a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha q^{n-1}$. Tal série é chamada de série geométrica cujo primeiro termo é igual a α. Vamos mostrar que:

(i) Se $|q| \geq 1$, a série é divergente.

(ii) Se $|q| < 1$, a série é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha q^{n-1} = \dfrac{\alpha}{1-q}$.

Note que,

$$S_n = \alpha + \alpha q + \alpha q^2 + \cdots + \alpha q^{n-1} \tag{3.3}$$

e multiplicando a equação (3.3) por q, temos

$$qS_n = \alpha q + \alpha q^2 + \cdots + \alpha q^{n-1} + \alpha q^n. \tag{3.4}$$

Agora, subtraindo (3.4) de (3.3) e isolando S_n, obtemos

$$S_n = \alpha \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{3.5}$$

Agora, usando o Exemplo 2.4.4, temos que:

Se $|q| > 1$ ou $q = -1$, o limite de (S_n) não existe e, portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha q^{n-1}$ não é convergente.

Se $|q| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ e, portanto, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\alpha}{1-q}$. Neste caso, a série é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha q^{n-1} = \dfrac{\alpha}{1-q}$.

Observamos que os paradoxos vistos no Capítulo 1 são resolvidos interpretando-os como séries infinitas convergentes. Como por exemplo, no paradoxo de Aquiles e a tartaruga, vemos que Aquiles de fato alcança a tartaruga depois de $100 + 10 + 1 + 0,1 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} 100(0,1)^{n-1}$ metros. Note que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 100(0,1)^{n-1}$ é uma série geométrica convergente de razão $0,1$ e primeiro termo igual a 100, cuja soma é $\dfrac{100}{1-0,1}$ que é aproximadamente 111 metros.

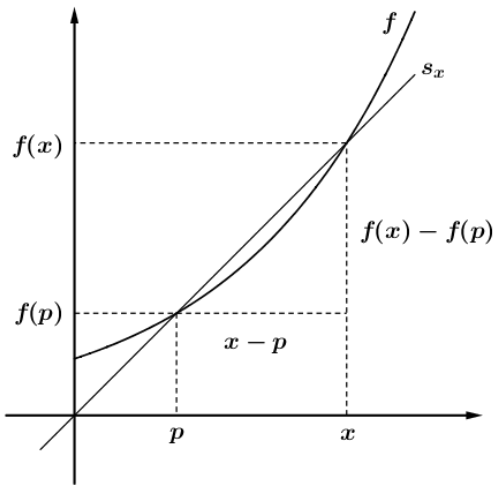
3.2 Conceito de derivada

Nesta seção, vamos falar de um dos limites mais importantes do Cálculo, conhecido como derivada de uma função. Tal conceito tem aplicações às diversas áreas do conhecimento quando estamos interessados em avaliar variações no comportamento das funções estudadas.

Para motivar a definição de derivada, vamos considerar o problema de determinar a reta tangente ao gráfico de uma função f num determinado ponto $(p, f(p))$. Observe que tal reta deve passar pelo ponto $(p, f(p))$. Assim, a reta tangente fica definida se determinarmos o seu coeficiente angular. Consideremos, então, a reta secante s_x que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$ (ver Figura 3.2). O coeficiente angular de s_x é dado por

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Figura 3.2: O coeficiente angular de s_x é igual $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$.



Fonte: Produção do autor.

Dessa forma, quando x se aproxima de p, o coeficiente angular de s_x se aproxima do valor

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

desde que tal limite exista.

Denotando o limite acima por $f'(p)$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, (f(p))$ é definida por

$$y - f(p) = f'(p)(x - p).$$

Definição 3.2.1 Seja f uma função e p um ponto de seu domínio. Definimos a derivada de f no ponto p por

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

quando tal limite existe.

Se f possui derivada em p, dizemos que f é derivável em p.

Dizemos que f é derivável em um subconjunto S de seu domínio se f é derivável em cada ponto $p \in S$. Quando f for derivável em todo ponto de seu domínio, diremos simplesmente que f é derivável.

Fazendo $h = x - p$, o limite $f'(p) = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ torna-se

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

De agora em diante vamos admitir que o leitor possui conhecimentos de um curso de cálculo, como por exemplo, das regras de derivação.

Taxa de Variação

Para dar aplicações da derivada nas diversas áreas do conhecimento, a interpretação de derivada como uma taxa de variação é muito importante.

A taxa de variação média de uma função $y = f(x)$, quando a variável independente x varia de p a $p + h$ é o quociente

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Este número mede, intuitivamente, a rapidez com que f varia ao passar do valor $f(p)$ para o valor $f(p+h)$.

A taxa de variação instantânea de f em p, é limite da taxa de variação média quando h tende a 0. Isto é, a taxa de variação instantânea de f em p é a derivada

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Exemplo 3.2.2 Suponha que uma partícula se desloca sobre uma reta de acordo com a função horária $S(t) = 2 - t + t^2$. Vamos determinar:

(i) A velocidade média da partícula entre os instantes $t = 2$ e $t = 2 + h$.

(ii) A velocidade instantânea da partícula no instante $t = 2$.

Para (i), denote por $V_m(h)$ a velocidade média da partícula entre os instantes $t = 2$ e $t = 2 + h$. Então,

$$V_m(h) = \frac{S(2+h) - S(2)}{h} = \frac{2 - 2 - h + 4 + 4h + h^2 - 2 + 2 - 4}{h} = \frac{h^2 + 3h}{h} = h + 3.$$

Para (ii), a velocidade instantânea da partícula é o limite da velocidade média $V_m(h)$, quando h tende a zero, isto é, a velocidade instantânea em $t = 2$ é dada por $\lim_{h\to 0} h + 3 = 3$.

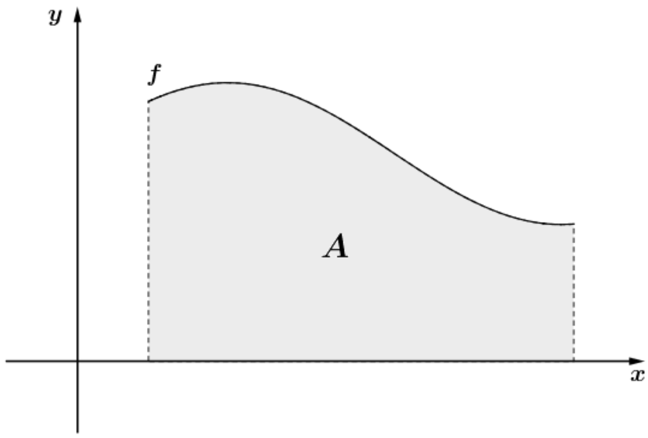
3.3 Integral e aplicações

Nesta seção apresentaremos o conceito de integral, que surgiu através da necessidade de calcular áreas de figuras curvas, ou seja, a áreas limitadas por curvas. Aqui vamos definir o conceito de integral de Riemann e, como veremos, a integral também é um limite.

Para motivar a definição de integral, considere o seguinte problema:

Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e positiva, encontrar a área A do conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \ e \ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Figura 3.3: Área de S.



Fonte: Produção do autor.

A ideia é encontrar aproximações de A por soma de áreas de retângulos. Considere, portanto, uma partição de $[a, b]$, $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ e um ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, 2, 3, ..., n$. A soma das áreas dos retângulos de bases $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$, isto é, $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ é uma aproximação da área A, como podemos ver na Figura 3.4.

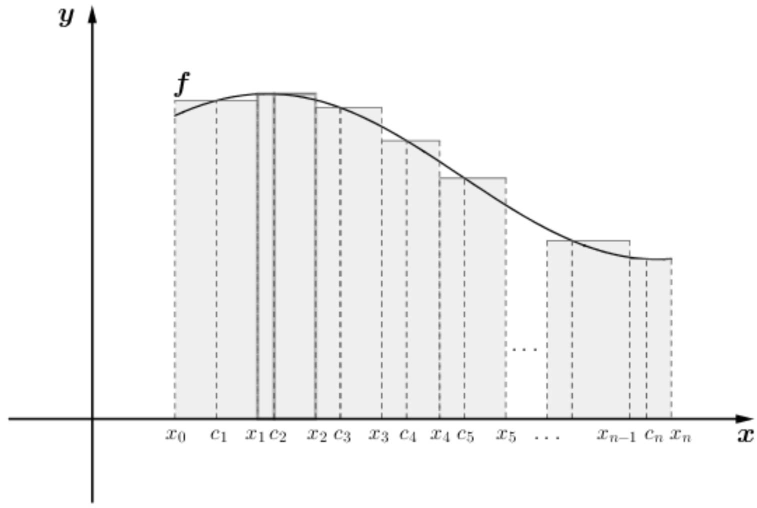
Note ainda que, quanto menor forem os números Δx_i, melhor será a aproximação. Assim, é natural definir

$$\text{área}(S) = A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

onde o $\max \Delta x_i$ é o maior dos números $x_i - x_{i-1}$ (esse número é chamado de norma da partição). Isso nos induz a seguinte definição.

Definição 3.3.1 (Integral de Riemann) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é integrável em $[a, b]$ se $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ existe e não depende da escolha dos números $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Figura 3.4: Aproximação da área de S por soma de área de retângulos.



Fonte: Produção do autor.

Quando tal limite existe, dizemos que a integral de f de a até b é igual a este limite e denotamos por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Observa-se que na Definição 3.3.1, o limite utilizado para defini-lo não é exatamente do mesmo tipo que definimos para funções, visto na Definição 2.1.1 no Capítulo 2, pois o limite aplicado no somatório usado na Integral de Riemann é calculado com respeito a norma da partição, quando tende a zero. No Capítulo 4, iremos falar sobre uma extensão do conceito de limite de modo a contemplar esse tipo de limite e suas propriedades.

O próximo teorema nos dá uma grande classe de funções que são integráveis. Isso nos dá uma enorme gama de aplicações à problemas de cálculo de áreas de regiões planas.

Teorema 3.3.2 *Toda função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua é integral em $[a,b]$.*

Para a demonstração desse teorema consultar a seção 4 do capítulo 10 de [10].

Relação entre integral e derivada

O cálculo de integral pela definição é, muitas vezes, bem complicada. O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em qualquer livro de cálculo, reduz o cálculo do limite que define $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ a apenas encontrar uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ que satisfaz $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a,b]$. F é chamada de *primitiva* de f.

Teorema 3.3.3 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Se $f : [a,b]$ é integrável e F :*

$[a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função derivável tal que* $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$*, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Note que com esse teorema a relação entre integral e derivada fica estabelecida. Como se usa derivadas para o cálculo de integrais, o conceito de limite usual se faz presente de forma fundamental.

3.4 Integral imprópria

Seja f uma função definida em um intervalo da forma $[a, +\infty)$. Se f é integrável em $[a,b]$ para todo $b > a$, definimos a integral imprópria de f de a até $+\infty$ pelo limite

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

desde que tal limite exista.

Dizemos que a integral imprópria $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente, se $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ existe. Caso contrário, dizemos que a integral imprópria é divergente.

Agora vamos dar um exemplo que elucida bem a definição de integral imprópria.

Exemplo 3.4.1 Vamos mostrar que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx$ é divergente se $\alpha \geq -1$ e é convergente para $\dfrac{1}{-\alpha-1}$ se $\alpha < -1$.

Para $\alpha = -1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-1}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \ln b - \ln 1 = +\infty$.

Para $\alpha \neq -1$,

$$\int_1^b x^\alpha\,dx = \frac{b^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}.$$

Como $\lim_{b\to+\infty} b^t = +\infty$, se $t > 0$, e $\lim_{b\to+\infty} b^t = 0$, se $t < 0$, segue que

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha > -1; \\ \frac{1}{-\alpha-1}, & \text{se } \alpha < -2. \end{cases}$$

3.5 Aplicação à Economia

Nesta seção, vamos apresentar duas aplicações do conceito de limite à economia, obtidas do Capítulo 5 de [13], páginas 97 e 99.

Exemplo 3.5.1 Uma montadora de computadores determina que um empregado após x

dias de treinamento, monta n computadores por dia, onde:

$$n(x) = \frac{20x^2}{x^2 + x + 5}.$$

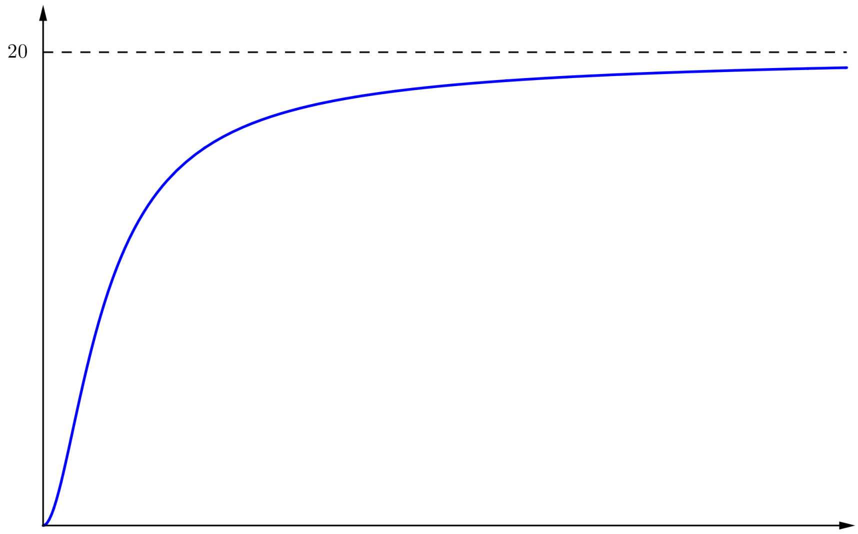
Qual é o comportamento de $n = n(x)$ para treinamentos longos?

Observe que:

$$\lim_{x \to +\infty} n(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{20x^2}{x^2 + x + 5} = 20.$$

Isso significa que após um longo treinamento um empregado pode montar aproximadamente 20 computadores por dia.

Figura 3.5: Gráfico da função $n(x) = \dfrac{20x^2}{x^2 + x + 5}$.



Fonte: Produção do autor.

Exemplo 3.5.2 A função de produção de um certo bem em relação à quantidade de matéria prima, em quilogramas, é dada por:

$$P(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Determine e interprete a produção quando se tem 2 quilogramas de matéria prima.

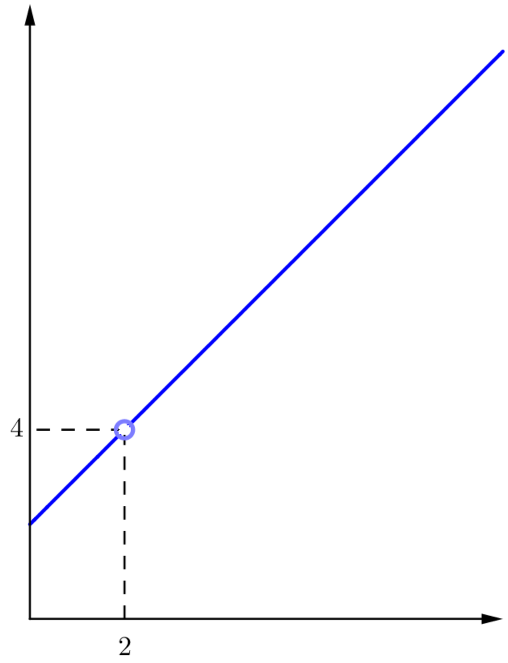
Note que $P = P(x)$ não está definida para $x = 2$ e, portanto, devemos calcular $\lim\limits_{x \to 2} P(x)$.

Como $\lim\limits_{x \to 2} P(x) = \lim\limits_{x \to 2} x + 2 = 4$, concluímos que são produzidas 4 unidades.

3.6 Um problema de juros contínuos e o número e

No século XVIII, o matemático suíço Jacques Bernoulli propôs a seguinte questão:

Figura 3.6: Gráfico da função $P(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.



Fonte: Produção do autor.

Como cresceria um depósito bancário ao longo do tempo se os juros, ao invés de serem creditados anualmente ou semestralmente, o fossem em intervalos de tempo cada vez menores, até que os acréscimos pudessem ser considerados instantâneos e sobre eles, imediatamente, também incidissem as mesmas taxas de juros?

Ou seja, um capital C_0 é empregado à taxa de $i\%$ ao ano, de modo que se retirado após uma fração x do ano, os juros J sejam proporcionais a esta fração, isto é: $J = x\dfrac{i}{100}C_0$.

Vamos analisar os juros obtidos e, consequentemente o montante deste capital C_0 aplicado à taxa de 100% ao ano, após um ano, porém capitalizados em períodos de tempo igual a $\frac{1}{n}$ do ano.

Decorrido o 1º período, os juros são iguais a $\frac{1}{n}C_0$ e o capital é:

$$C_1 = C_0 + \frac{1}{1}C_0 = (1 + \frac{1}{n})C_0$$

Decorrido o 2º período, os juros são iguais a $\frac{1}{n}C_1$ e o capital é:

$$C_2 = C_1 + \frac{1}{1}C_1 = (1 + \frac{1}{n})C_1 = (1 + \frac{1}{n})^n C_0$$

Se após cada um desses períodos os juros são capitalizados, ao final de um ano, isto é, após n períodos, o capital é igual a:

$$C_n = (1 + \frac{1}{n})^n C_0$$

Então com um capital aplicado a juros capitalizados a cada instante teremos:

$$C = \lim_{n\to+\infty} C_n = C_0 \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Surge, assim a questão de existência do limite $\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. Hoje, sabemos que tal limite existe, é um número irracional e transcendente representado por e, isto é, $e = \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. Uma aproximação de e até a terceira casa decimal é $2,718$.

Usando o binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned}(1 + \frac{1}{n})^n &= 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})\ldots(1 - \frac{n-1}{n}).\end{aligned}$$

Assim, podemos notar que $(1 + \frac{1}{n})^n$, é uma soma de parcelas positivas. Cada uma dessas parcelas cresce com n. Além disso, o número de parcelas também cresce com n. Logo a sequência é crescente.

Por outro lado, segue da igualdade acima que

$$(1 + \frac{1}{n})^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Agora, como $(n+1)! \geq 2^n$ para todo n, segue

$$(1 + \frac{1}{n})^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

A prova de que o limite de $(1+\frac{1}{n})^n$ existe é consequência do fato de que toda sequência crescente e limitada superiormente é convergente.

Capítulo 4

Uma extensão do conceito de limite

Este último capítulo é dedicado a apresentação de uma extensão ao conceito de limite proposta em [3] e [17], bem como algumas de suas propriedades e resultados. Como aplicação, exibimos um teorema clássico de integração como consequência desse conceito estendido.

4.1 Um conceito estendido de limite

Antes de apresentarmos a definição de limite generalizado, iremos definir espaço métrico. Não vamos nos ater a esse tópico (isso não faz parte do escopo do trabalho) e vamos precisar apenas das definições.

Definição 4.1.1 Seja Y um conjunto não-vazio. Uma métrica em Y é uma função $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ tal que:

(i) $d_Y(y_1, y_2) \geq 0, \forall y_1, y_2 \in Y$.

(ii) $d_Y(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$.

(iii) $d_Y(y_1, y_2) = d_Y(y_2, y_1), \forall y_1, y_2 \in Y$. (simétrica)

(iv) $d_Y(y_1, y_2) \leq d_Y(y_1, y_3) + d_Y(y_3, y_2), \forall y_1, y_2, y_3 \in Y$. (desigualdade triangular)

Observação 4.1.2 O conjunto Y munido de uma métrica d_Y é chamado de *espaço métrico* e será denotado por (Y, d_Y).

Exemplo 4.1.3 O valor absoluto $|.|$ define uma métrica em $\mathbb{R}$. A função $d(x, y) = |x - y|$ torna $(\mathbb{R}, d)$ um espaço métrico. A função d é chamada métrica usual em $\mathbb{R}$.

É possível observar que, nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral e cursos de Introdução à Análise Real, o limite definido é da forma $\lim_{x \to p} f(x) = L$, ou seja, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto quisermos, desde que x seja tomado suficientemente próximo de p. Agora vamos introduzir a noção de limite generalizado de funções que engloba a definição usual de limite como um caso particular.

Definição 4.1.4 (Limite Generalizado) Sejam X um conjunto não-vazio, (Y, d_Y) e (Z, d_Z) espaços métricos, $f : X \to Y$ e $g : X \to Z$ funções. Dizemos que o limite generalizado de $f(x)$, quando $g(x)$ tende a $z \in Z$, é igual a $y \in Y$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < d(g(x), z) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), y) < \epsilon.$$

Quando o limite existir ele será denotado por

$$\lim_{g(x) \to z} f(x) = y.$$

Observação 4.1.5 Quando o limite acima existir ele é único. A prova é análoga à unicidade do limite usual vista no Capítulo 2.

Agora vamos enunciar uma proposição que nos diz que esta definição de limite generalizado satisfaz as mesmas propriedades de limites de funções usuais vistos no Teorema 2.1.7 do Capítulo 2.

Proposição 4.1.6 *Sejam X um conjunto não-vazio, $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais com a norma usual, (Z, d_Z) um espaço métrico e $f_1 : X \to \mathbb{R}$, $f_2 : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to Z$ três funções tais que os limites generalizados $\lim_{g(x) \to z} f_1(x) = y_1$ e $\lim_{g(x) \to z} f_2(x) = y_2$ existem. Então valem as seguintes propriedades.*

(i) $\lim_{g(x) \to z} (f_1 + f_2)(x) = y_1 + y_2 = \lim_{g(x) \to z} f_1(x) + \lim_{g(x) \to z} f_2(x)$;

(ii) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ *então* $\lim_{g(x) \to z} \alpha . f_1(x) = \alpha . y_1 = \alpha . \lim_{g(x) \to z} f_1(x)$;

(iii) $\lim_{g(x) \to z} f_1(x) . f_2(x) = y_1 . y_2 = \lim_{g(x) \to z} f_1(x) . \lim_{g(x) \to z} f_2(x)$;

(iv) $\lim_{g(x) \to z} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{\lim_{g(x) \to z} f_1(x)}{\lim_{g(x) \to z} f_2(x)}$, *desde que* $y_2 \neq 0$.

Demonstração. Iremos mostrar apenas a propriedade (i), as demonstrações das demais propriedades podem ser encontradas em [3].

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_{f_1} > 0$ tal que

$$0 < d_Z(g(x), z) < \delta_{f_1} \quad \Rightarrow \quad |f_1(x) - y_1| < \frac{\epsilon}{2}$$

Além disso, existe δ_{f_2} tal que

$$0 < d_Z(g(x), z) < \delta_{f_2} \quad \Rightarrow \quad |f_2(x) - y_2| < \frac{\epsilon}{2}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_{f_1}, \delta_{f_2}\}$, temos que, se $0 < d_Z(g(x), z) < \delta$ tem-se que

$$|(f_1(x) + f_2(x)) - (y_1 + y_2)| =$$

$$= |(f_1(x) - y_1) + (f_2(x) - y_2)| \leq |(f_1(x) - y_1)| + |(f_2(x) - y_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

Após observarmos as propriedades de limite generalizado, surge um novo questionamento: Dadas funções $f_1, f_2, g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{g_1(x)\to z_1} f_1(x) = y_1 \text{ e } \lim_{g_2(x)\to z_2} f_2(x) = y_2,$$

será que

$$\lim_{g_1(x)+g_2(x)\to z_1+z_2} (f_1(x) + f_2(x)) = y_1 + y_2?$$

Para respondermos esta questão, vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 4.1.7 Sejam $f_1(x) = x^3 - 1$, $f_2(x) = 2x - 3$, $g_1(x) = x + 1$ e $g_2(x) = x$. Vamos mostrar que $\lim\limits_{g_1(x)+g_2(x)\to 9} f_1(x) + f_2(x) \neq \lim\limits_{g_1(x)\to 1} f_1(x) + \lim\limits_{g_2(x)\to 8} f_2(x)$.

Temos que,

$$\lim_{g_1(x)\to 1} f_1(x) = \lim_{x+1\to 1} x^3 - 1 = -1$$

$$\lim_{g_2(x)\to 8} f_2(x) = \lim_{x\to 8} 2x - 3 = 13$$

$$\lim_{g_1(x)+g_2(x)\to 9} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x+1+x\to 9} (x^3 - 1 + 2x - 3) = \lim_{x\to 4} (x^3 + 2x - 4) = 68$$

Portanto,

$$\lim_{g_1(x)+g_2(x)\to 9} (f_1(x) + f_2(x)) \neq \lim_{g_1(x)\to 1} f_1(x) + \lim_{g_2(x)\to 8} f_2(x).$$

O exemplo mostra que a resposta para a pergunta acima é negativa. Entretanto, podemos nos questionar ainda sobre que condições devemos impor sobre as funções f_1, f_2, g_1, g_2 para que o resultado seja verdadeiro. O teorema seguinte nos fornece tais condições.

Teorema 4.1.8 *Sejam $f_1, f_2, g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}$ e $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{g_1(x)\to z_1} f_1(x) = y_1$ e $\lim\limits_{g_2(x)\to z_2} f_2(x) = y_2$. Se existe $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$ tal que $g_2(x) = \alpha g_1(x)$ e $z_2 = \alpha z_1$, então*

$$\lim_{g_1(x)+g_2(x)\to z_1+z_2} f_1(x) + f_2(x) = \lim_{g_1(x)\to z_1} f_1(x) + \lim_{g_2(x)\to z_2} f_2(x).$$

Para demonstrar o teorema necessitamos do seguinte lema:

Lema 4.1.9 *Sejam* $f, g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}$ *funções. Suponha que* $\lim\limits_{g_1(x)\to z_1} f(x) = y$ *e que* $g_2(x) = \alpha g_1(x)$ *e* $z_2 = \alpha z_1$*, para algum* $\alpha \neq 0$ *e* $\alpha \neq -1$*. Então*

$$\lim_{g_2(x)\to z_2} f(x) = \lim_{g_1(x)\to z_1} f(x) = \lim_{g_1(x)+g_2(x)\to z_1+z_2} f(x) = y.$$

Demonstração. Como $\lim\limits_{g_1(x)\to z_1} f(x) = y$, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta_1 > 0$, tal que

$$0 < |g_1(x) - z_1| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - y| < \epsilon.$$

Então, tomando-se $\delta_2 = |\alpha|\delta_1$, temos

$$0 < |g_2(x) - z_2| < \delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |\alpha . g_1(x) - \alpha . z_1| < \delta_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < |\alpha| . |g_1(x) - z_1| < \delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |g_1(x) - z_1| < \frac{\delta_2}{|\alpha|} = \delta_1$$

e portanto

$$0 < |g_2(x) - z_2| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad 0 < |g_1(x) - z_1| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - y| < \epsilon.$$

Assim, $\lim\limits_{g_2(x)\to z_2} f(x) = \lim\limits_{g_1(x)\to z_1} f(x)$.

Para provar a outra igualdade, tomando $\delta_3 = \delta_1 . |1 + \alpha|$ temos

$$0 < |(g_1(x) + g_2(x)) - (z_1 + z_2)| < \delta_3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |(g_1(x) + \alpha g_1(x)) - (z_1 + \alpha z_1)| < \delta_3$$
$$\Leftrightarrow 0 < |(1+\alpha) g_1(x) - (1+\alpha) z_1| < \delta_3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |g_1(x) - z_1| < \frac{\delta_3}{|1+\alpha|} = \delta_1.$$

Isto é,

$$0 < |(g_1(x) + g_2(x)) - (z_1 + z_2)| < \delta_3 \quad \Rightarrow \quad |g_1(x) - z_1| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - y| < \epsilon.$$

Logo concluímos que $\lim\limits_{g_1(x)+g_2(x)\to z_1+z_2} f(x) = y$ e o lema está provado. ■

Demonstração do Teorema 4.1.8. Pelo Lema 4.1.9, temos:

$$\lim_{g_1(x)+g_2(x)\to z_1+z_2} f_1(x) = \lim_{g_1(x)\to z_1} f_1(x) = y_1$$

e

$$\lim_{g_1(x)+g_2(x)\to z_1+z_2} f_2(x) = \lim_{g_2(x)\to z_2} f_2(x) = y_2$$

Usando isto e o item (i) da Proposição 4.1.6, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{[g_1(x)+g_2(x)]\to[z_1+z_2]} f_1(x)+f_2(x) &= \lim_{[g_1(x)+g_2(x)]\to[z_1+z_2]} f_1(x) + \lim_{[g_1(x)+g_2(x)]\to[]z_1+z_2]} f_2(x)\\
&= \lim_{g_1(x)\to z_1} f_1(x) + \lim_{g_2(x)\to z_2} f_2(x)\\
&= y_1+y_2.
\end{aligned}$$

■

Vamos escrever a definição de integral dada no Capítulo 3 (Definição 3.3.1), apresentando e revisitando algumas definições que serão necessárias para interpretar a Integral de Riemann como limite generalizado.

Definição 4.1.10 (Partição) Seja $[a,b]\subset\mathbb{R}$ um intervalo fechado. Uma partição P de $[a,b]$ é um subconjunto finito de $[a,b]$ da forma, $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$.

Definição 4.1.11 (Partição Pontilhada) Uma partição pontilhada de $[a,b]$ é um par $P^*=(P,c)$, onde $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ é uma partição e $c=\{c_1<c_2<\cdots<c_n\}$ é um subconjunto de $[a,b]$ tal que $c_i\in[x_{i-1},x_i]$, para todo $i=1,2,\ldots,n$.

A norma de uma partição pontilhada P^* é, por definição, o número real

$$|P^*|=\max\{x_i-x_{i-1}\ /\ i=1,2,3\ldots,n\}.$$

Note que $|P^*|>0$ para qualquer partição pontilhada P^*, pois

$$b-a=\sum_{i=1}^n x_i-x_{i-1}\le n|P^*| \quad\Rightarrow\quad |P^*|\ge\frac{b-a}{n}.$$

Definição 4.1.12 (Soma de Riemann) Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $P^*=(P,c)$ uma partição pontilhada, com $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ e $c=\{c_1<\cdots<c_n\}$.

Definimos a soma de Riemann de f com respeito a P^* por:

$$R(f,P^*)=\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Observe que se $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ são duas funções, $\alpha\in\mathbb{R}$ e P^* é uma partição pontilhada de $[a,b]$ então, segue imediatamente da definição de soma de Riemann que

$$R(f+g,P^*)=R(f,P^*)+R(g,P^*) \quad \text{e} \quad R(\alpha f,P^*)=\alpha R(f,P^*). \tag{4.1}$$

Agora apresentemos a definição da Integral de Riemann, utilizando as definições acima.

Definição 4.1.13 (Integral de Riemann) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é integrável a Riemann em $[a,b]$ se existe um número $A\in\mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se P^* é uma partição pontilhada de $[a, b]$ com $|P^*| < \delta$, então $|R(f, P^*) - A| < \epsilon$.

Dizemos então que A é a integral de f de a até b e denotamos A por $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Note que a definição acima pode ser interpretada como $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ sendo o limite de $R(f, P^*)$ quando $|P^*|$ tende a zero, isto é,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P^*|\to 0} R(f, P^*).$$

A definição de Integral de Riemann se encaixa como um limite generalizado. Para ver isso, considere $X = \{$conjunto de todas as partições pontilhadas, P^*, de $[a, b]\}$, obviamente não vazio, e defina as funções $G : X \to \mathbb{R}$ e $F : X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$G(P^*) = |P^*| \quad \text{e} \quad F(P^*) = R(f, P^*)$$

Assim a integral de Riemann de f em $[a, b]$ é o limite generalizado de $F(P^*)$ quando $G(P^*)$ tende a zero. Isto é,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{G(P^*)\to 0} F(P^*) = \lim_{|P^*|\to 0} R(f, P^*).$$

Vamos finalizar o nosso trabalho apresentando uma aplicação do limite generalizado que demonstra a linearidade do "operador" integral.

Teorema 4.1.14 *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Então:*

(i) A soma $f + g$ é integrável e

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(ii) Se $c \in \mathbb{R}$, então cf é integrável e

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demonstração. *(i)* Seja P^* uma partição pontilhada do intervalo $[a, b]$. Por definição da integral de Riemann, temos que

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \lim_{|P^*|\to 0} R(f + g, P^*).$$

Utilizando a primeira igualdade de (4.1) e o item (i) da Proposição 4.1.6, segue que

$$\lim_{|P^*|\to 0} R(f+g, P^*) = \lim_{|P^*|\to 0} (R(f, P^*) + R(g, P^*)) =$$

$$= \lim_{|P^*|\to 0} R(f, P^*) + \lim_{|P^*|\to 0} R(g, P^*) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

donde segue o resultado.

(ii) De maneira análoga ao item *(i)*, por definição temos

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{|P^*|\to 0} R(cf, P^*)$$

e utilizando a segunda igualdade em (4.1) e o item (ii) da Proposição 4.1.6, segue que

$$\lim_{|P^*|\to 0} R(cf, P^*) = \lim_{|P^*|\to 0} cR(f, P^*) =$$

$$= c \lim_{|P^*|\to 0} R(f, P^*) = c \int_a^b f(x)\,dx$$

e o resultado está demonstrado. ■

Como comentário final realçamos a simplicidade na demonstração desse último teorema diante do aparato desenvolvido nos livros de análise em busca do mesmo resultado. Aqui temos apenas as definições de soma e integral de Riemann além de propriedades simples dos limites generalizados.

Bibliografia

[1] ALVARENGA, Mauro Lopes. **O método da exaustão e sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático**. Universidade Católica de Brasília. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12006/MauroLopesAlvarenga.pdf>. Acesso em 03 de fevereiro de 2017.

[2] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 3ºed, 2010. 496p.

[3] BRAZ, José Henrique Souza. **Tipos de Integrabilidade.** Trabalho de Conclusão de Curso -Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba, 2014. 117p.

[4] CARVALHO, Júlio César Junior. **Estratégias de ensino que podem minimizar as dificuldades em cálculo.** Monografia em Licenciatura em Matemática. Minas Gerais: Pará de Minas, 2013. Orientadora: Profª Daniela Alves de Silveira Moura.

[5] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história - Vol. II**. 3ªed. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2008. 459p.

[6] DAMASCENO, Kelson. **O número e**. Monografia do curso de especialização em matemática para professores, 2005. Orientador: Prof. Helder Cândido Rodrigues. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/monografia_Kelson.pdf>. Acesso em: 13 de junho de 2017.

[7] EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas - SP: Editora da Unicamp, 2004. 884p.

[8] FINNEY, Rossy L. et al. **Cálculo de George B. Thomas Jr. - Vol. I**. 10ªed. Tradução: Paulo Boschcov. Revisão técnica: Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. São Paulo: Person Addison Wesley, 2002. 660p.

[9] GUIDORIZZI. Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo - Volume I.** 5º Edição. Rio de Janeiro-RJ: Editora LTC, 2001. 635p.

[10] LIMA, Elon Lages. **Análise Real - Vol. I** Funções de uma variável, 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 198p. (Coleção Matemática Universitária.)

[11] MACHADO, Alexandre N. **Paradoxo da Dicotomia (Zenão)**. Professor Adjunto da Departamento de Filosofia UFPR-Curitiba, Paraná. Disponível em: <http://problemasfilosoficos.blogspot.com.br/2013/04/paradoxo-da-dicotomia-zenao.html>. Acesso em: 06 de fevereiro de 2017.

[12] MATOS. Marivaldo P. **Séries e Equações Diferenciais.** Editora Prentice Hall, 2001. 251p.

[13] VILCHES, Maurício A. **Cálculo para Economia e Administração - Vol. I** Disponível em: <http://www.ime.uerj.br/ calculo/Ecomat/ecomat.pdf>. Acesso em: 13 de junho de 2017.

[14] Portal Matemática Hi.7. **A matemática e o Renascimento**. Disponível em: <https://www.portaleducacao.com.br/educacao/artigos/48764/referencias-bibliograficas-tiradas-na-internet-como-colocar-no-trabalho>. Acesso em: 12 de dezembro de 2016.

[15] REIS, Náthaly Beatriz. **Quadratura da Parábola: De Arquimedes à Integral Definida.** Trabalho de conclusão de curso. Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC. Joinville, 2005. 107p.

[16] STRECKER, Heidi. **Paradoxo: Zenão e os argumentos lógicos que levam a conclusão falsa**. Especial para Página 3 Pedagogia e Comunicação. Pesquisa Escolar. 2006. p. 2. Disponível em: <https://educacao.uol.com.br/disciplinas/filosofia/paradoxo-zenao-e-os-argumento-logicos-que-levam-a-conclusao-falsa.htm>. Acesso em: 02 de fevereiro de 2017.

[17] VIEIRA, Marcelo Gonçalves Oliveira. **Continuidade no Contexto de Limites Generalizados.** VII Semana de Matemática do Pontal - Universidade Federal de Uberlândia, 2016. 11p.