



Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física – PPGF

Método da matriz de transferência para luz em sistemas de multicamadas dielétricas: axiônica e temporal

Anny Caroline de Araújo Faria

João Pessoa - PB, 2022

Anny Caroline de Araújo Faria

Método da matriz de transferência para luz em sistemas de multicamadas dielétricas: axiônica e temporal

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFPB (área de concentração: Física da Matéria Condensada), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Doutora em Física.

Universidade Federal da Paraíba - UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física - PPGF

Orientador: Prof. Dr. Sérgio A. Azevedo Fontes
Coorientador: Prof. Dr. Carlos H. Oliveira Costa

João Pessoa - PB

2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F224m Faria, Anny Caroline de Araújo.

Método da matriz de transferência para luz em sistemas de multicamadas dielétricas : axiônica e temporal / Anny Caroline de Araújo Faria. - João Pessoa, 2022.

138 f. : il.

Orientação: Sérgio André Azevedo Fontes.

Coorientação: Carlos Humberto Oliveira Costa.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Ondas eletromagnéticas. 2. Cristal fotônico temporal. 3. Quasicristal fotônico temporal. 4. Cristal fotônico axiônico. 5. Efeitos topológicos fotônicos. I. Fontes, Sérgio André Azevedo. II. Costa, Carlos Humberto Oliveira. III. Título.

UFPB/BC

CDU 537.8.029(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de tese de Doutorado da aluna Anny Caroline de Araújo Faria, candidata ao Título de Doutora em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos vinte dias do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e dois, às 10:00, nas dependências do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Física da Matéria Condensada, de **Anny Caroline de Araújo Faria**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Sérgio André Fontes Azevedo (PPGF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Carlos Humberto Oliveira Costa (UFC), coorientador, Bertúlio de Lima Bernardo (PPGF/UFPB), Alexandre da Silva Rosas (PPGF/UFPB), Ronaldo Junio Campos Batista (UFOP) e Dory Helio Aires de Lima Anselmo (UFRN). Dando início aos trabalhos, o Prof. Sérgio André Fontes Azevedo comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para a candidata para que a mesma fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada “*Método da matriz de transferência para luz em sistemas de multicamadas dielétricas: axiônica e temporal*”. Concluída a exposição, a candidata foi arguida pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovada**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutora em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **20 de dezembro de 2022**.

Prof. Dr. Sérgio André Fontes Azevedo
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Carlos Humberto Oliveira Costa
Coorientador - UFC

Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Ronaldo Junio Campos Batista
UFOP

Prof. Dr. Dory Helio Aires de Lima Anselmo
UFRN



Dedico esta tese a todas as mulheres na ciência, principalmente aquelas que no passado não foram devidamente representadas: Marie Curie, Emmy Noether, Katherine Johnson, Chien-Shiung Wu, Gertrude Bell Elion, Augusta Ada Byron, Matilda Moldenhauer Brooks, Hipátia de Alexandria, Mileva Marić, dentre tantas outras.

Agradecimentos

Esta tese não teria sido possível sem a colaboração, a ajuda e o trabalho de várias pessoas. Desta forma, gostaria de expressar a minha gratidão a todos eles.

Em primeiro lugar, a Deus.

Em seguida, a mim mesma pela coragem de encarar uma profissão com tão poucas referências femininas, na qual, até o prezado momento, são minorias como professoras universitárias, bolsistas e líderes de grupos de pesquisa. Além disso, sou grata a mim mesma por não desistir dessa jornada em meio à depressão, ansiedade e também em meio a um período político difícil para a educação no Brasil, que provocou em massa o sentimento de desesperança para o desenvolvimento da ciência e pesquisa neste país.

A minha psicóloga por acreditar em mim e me ajudar nas sessões de terapia a entender que consigo seguir adiante na realização dos meus sonhos, mesmo quando muitas vezes me faltou autoconfiança em vários contratempos que tive nesse percurso.

Aos meus pais Maria Nilda Alves de Araújo Lopes e Luzimagno Leite Lopes por me apoiarem emocionalmente e financeiramente em meus estudos, além de todo o amor e confiança que também foram fundamentais para que eu perseverasse em cada adversidade.

Ao meu orientador e co-orientador Prof. Dr. Sérgio Azevedo Fontes e Prof. Dr. Carlos Humberto Costa por terem me orientado durante o doutorado, pela amizade, pela paciência e compreensão nos momentos em que eu estive em depressão, nos quais pensei em desistir do doutorado por me sentir incapaz de lidar com todas as emoções que surgiram. Sou imensamente grata por assumirem o compromisso de estar comigo até o fim dos meus estudos. Também sou grata pelas discussões científicas que contribuíram para a realização deste trabalho. Sou grata por ter vocês em minha vida.

Aos colaboradores dos trabalhos desenvolvidos durante esta tese, Dr. André J. Chaves e Dr. Claudionor Gomes Bezerra. Gostaria de agradecer por aceitarem fazer parte do desenvolvimento das pesquisas realizadas ao longo do meu doutorado, pelo compromisso e empenho durante a elaboração dos artigos.

Aos referees pelas rigorosas avaliações e comentários que foram de muita valia para aprimorar o meu aprendizado.

Ao meu amigo, Daniel, pela amizade que começou desde o mestrado, pelo suporte quando muitas vezes precisei ir a Natal-RN para realizar os trabalhos de pesquisa, pela parceria e pelas discussões científicas que me nortearam.

Ao meu amigo, Paulo Porfírio, pelas discussões sobre teoria de campos e partículas

que foram fundamentais para a compreensão das equações de Maxwell modificadas.

A todos os meus professores do departamento de física por tudo o que me ensinaram, e aqueles a quem admiro muito, sendo eles em especial os professores João Antônio Plascak, Eugênio Ramos Bezerra de Mello, Dionísio Bazeia Filho, Herondy Mota.

A todos os meus amigos do departamento de física que de forma direta ou indireta agregaram algo de bom na minha caminhada em busca do saber. Vocês são pessoas incríveis e eu levarei cada detalhe de momentos vividos com vocês em meu coração.

Agradeço também às minhas amigas de São Paulo, Bianca e Tati, por serem pessoas especiais na minha vida, às quais tenho muito carinho e sorte por ter conhecido vocês, por não me abandonarem nos momentos que precisei ficar ausente para escrever essa tese e por me proporcionarem momentos de discussão que tornam a minha vida mais leve.

A todos os funcionários do departamento de física, em especial à secretaria da coordenação de pós-graduação e graduação em física, pela gentileza no atendimento.

Aos funcionários responsáveis pela limpeza, em especial a Dona Josefa.

Ao grande idealizador da Capes, o educador Anísio Spínola Teixeira (*in memoriam*).

E, por último, mas não menos importante, à CAPES pelo suporte financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.

“Nunca aceite que te digam que você não pode ser alguma coisa. Nós somos o limite de nossas conquistas. Nunca deixei que me dissessem qual é o meu limite. Eu sou o meu limite. Tu podes ser o teu limite também” (Márcia Barbosa)

Resumo

Nesta tese, abordamos aspectos fundamentais da estrutura fotônica, desenvolvendo dois trabalhos sobre o transporte de luz em sistemas de multicamadas dielétricas alternadas unidimensionais:

No primeiro trabalho, exploramos a propagação de ondas eletromagnéticas circularmente polarizadas em um meio classificado por três propriedades físicas: permissividade elétrica (ϵ), permeabilidade magnética (μ) e o parâmetro topológico (θ), denominado cristal fotônico axiônico unidimensional. Utilizando o método da matriz de transferência (TMM), calculamos a relação de dispersão para os modos eletromagnéticos, revelando uma correlação direta entre a relação de dispersão, as características do *bandgap* e os parâmetros do material. A análise numérica demonstra que o parâmetro topológico (θ) atua de forma independente dos parâmetros geométricos e físicos, enquanto estes últimos apresentam efeitos opostos. Este trabalho destaca a importância do parâmetro topológico no controle do transporte de luz em cristais fotônicos axiônicos, abrindo caminho para a construção de cristais fotônicos com propriedades topológicas.

No segundo trabalho, apresentamos resultados preliminares sobre a propagação de ondas eletromagnéticas em quasicristais fotônicos temporais unidimensionais, seguindo as sequências de Fibonacci, Thue–Morse e Duplo–Período. Utilizando a técnica da matriz de transferência (TMM), calculamos a relação de dispersão para os modos eletromagnéticos, identificando uma correlação direta com os parâmetros temporais (t_{BA}) e físicos (n_{BA}) do material. Observamos estruturas de bandas com regiões proibidas no espectro do vetor de onda \vec{k} , indicando que o transporte de luz ocorre apenas em regiões permitidas desse número de onda. Além disso, destacamos a presença de múltiplos *bandgaps* nas estruturas quasiperiódicas devido ao crescimento de camadas na célula unitária. Essas estruturas exibem padrões de autossimilaridade nos espectros do vetor de onda em relação ao número de gerações, mostrando um processo de fragmentação nas bandas permitidas e proibidas com variações no número de gerações. Este trabalho revela a possibilidade de surgimento de novas bandas permitidas em regiões previamente proibidas do espectro do vetor de onda \vec{k} , oferecendo uma alternativa interessante para o transporte de luz pela modificação do número de gerações nessas sequências.

Palavras-chave: Cristal fotônico temporal; Quasicristal fotônico temporal; Efeitos topológicos fotônicos.

Abstract

This thesis delves into fundamental aspects of photonic structures, presenting two distinct works on light transport in one-dimensional dielectric alternating multilayer systems:

The first work explores the propagation of circularly polarized electromagnetic waves in a one-dimensional axionic photonic crystal, characterized by electrical permittivity (ϵ), magnetic permeability (μ), and the topological parameter (θ). Using the transfer matrix method (TMM), the study establishes a direct correlation between the dispersion relation, bandgap characteristics, and material properties represented by geometric (X), physical (R), and topological (δ) parameters. Numerical analysis reveals the independence of the topological parameter θ from geometric and physical parameters, with intriguing implications. This underscores the significance of the topological parameter in controlling light transport within axionic photonic crystals, paving the way for the construction of photonic crystals using materials with topological properties.

The second work introduces preliminary findings on the propagation of electromagnetic waves in one-dimensional temporal photonic quasicrystals following Fibonacci, Thue–Morse, and Double–Period sequences. Employing the transfer matrix technique (TMM), the study calculates the dispersion ratio for electromagnetic modes, revealing a direct correlation with material properties represented by temporal (t_{BA}) and physical (n_{BA}) parameters. The presented band structures exhibit forbidden regions in the \vec{k} wave vector spectrum, indicating limited light transport within specific wavenumber regions. Multiple bandgaps emerge in the quasiperiodic band structures due to layer growth in the unit cell, displaying a self-similarity pattern concerning the number of generations. Variations in the number of generations lead to a fragmentation process in both allowed and forbidden bands. The study also illustrates a self-similarity pattern in the wave vector spectra \vec{k} concerning the number of generations (n). Overall, this work suggests the possibility of new allowed bands emerging in previously forbidden regions of the \vec{k} wave vector spectra, offering a compelling alternative for light transport by modifying the number of generations in these sequences.

Keywords: Temporal photonic crystal; Temporal photonic quasi-crystal; Photonic topological effects.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração dos cristais fotônicos periódicos unidimensionais (1D), bi-dimensionais (2D) e tridimensionais (3D) formado por duas camadas alternadas (A e B) com permissividade elétrica ϵ_A e ϵ_B . Fonte: [17].	9
Figura 2 – Imagem de um microscópio eletrônico de varredura (SEM) da seção transversal de um PC-1D formado por dez camadas alternadas de Si/SiO_2 . (cor da imagem adaptada) Fonte: [33]	10
Figura 3 – Ilustrações representativas: (a) Esquema de um PC-2D, que consiste em vários arranjos de cilindros com baixo índice de refração, embutidos em uma placa com alto índice de refração. (b) Imagem de um microscópio eletrônico de varredura (SEM) de um PC-2D com vários buracos em uma placa de silício [51]. (c) Esquema de um PC-2D tipo haste, consistindo de cilindros com alto índice de refração embutidos em um fundo de baixo índice de refração. (d) Imagem SEM de um PC-2D tipo haste, formado a partir de hastes de GaAs em uma camada de óxido de alumínio com baixo índice de refração [52]. Fonte: [38]	11
Figura 4 – Ilustração representativa de um cristal fotônico bidimensional, formados por vários cilindros dielétricos infinitamente longos com constantes dielétricas $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon_r$ embutidos em um material de fundo dielétrico homogêneo $\epsilon_b \neq \epsilon_r$. Direita: Rede real do PC-2D e Esquerda: Rede recíproca do PC-2D. Nesta ilustração, os dois tipos diferentes de células unitárias primitivas que são representadas pelas regiões de linhas sólidas. Fonte: [53]	12
Figura 5 – Ilustração representativa de um PC-3D formado por uma estrutura conhecida como estrutura do tipo <i>woodpile</i> , que exhibe um <i>bandgap</i> fotônico completo. (a) Esquema de um PC de uma estrutura do tipo <i>woodpile</i> ideal. (b) Imagem SEM de uma estrutura real em 3D do tipo <i>woodpile</i> fabricada em silício [54]. Fonte: [38]	13
Figura 6 – (a) Ilustração esquemática de uma onda de elétrons se propagando em um potencial periódico unidimensional gerado por átomos igualmente espaçados no cristal, (b) Relação de dispersão $E(k)$ (a energia de um elétron em função de seu vetor de onda) em uma rede periódica unidimensional com período de rede a [70]. Fonte: [53]	25

Figura 7 – (a) Ilustração esquemática da propagação de uma onda eletromagnética em uma estrutura unidimensional com variação periódica na constante dielétrica $\epsilon(r)$, (b) Relação de dispersão $\omega(k)$ (frequência da luz em função do seu vetor de onda \vec{k}) em tal estrutura periódica com período de rede a [71]. Fonte: [53]	26
Figura 8 – Ilustração de uma estrutura infinita PC-1D formada por duas camadas alternadas (A e B). Fonte: Essa imagem é autoral.	28
Figura 9 – estrutura de bandas do cristal fotônico espacial 1D, considerando os seguintes parâmetros do sistema: $X = 1.0$, com (a) $n_{BA} = 1.0$, (b) $n_{BA} = 0.68$, (c) $n_{BA} = 0.40$, (d) $n_{BA} = 0.28$	33
Figura 10 – Esquerda: Ilustração esquemática do padrão de difração obtido por Daniel Shechtman. Direita: Ilustração do padrão de difração contendo círculos concêntricos com 10 pontos cada um e figuras com simetria de ordem 5. A razão entre os raios dos círculos adjacentes é de aproximadamente 1.6. Fonte: [82]	39
Figura 11 – Ilustração do padrão de difração de um cristal, no qual é possível observar que os pontos estão espaçados igualmente, ou seja, $d_1 = d_2 = d_3$. Fonte: [82]	40
Figura 12 – Ilustração do padrão de difração de um quasicristal no qual é possível observar que os pontos não estão espaçados igualmente como no caso da Fig. 11, ou seja, $d_1 \neq d_2 \neq d_3$. A distância entre os pontos é uma série de Fibonacci e a razão entre as distâncias $d_2/d_1 \cong d_3/d_2 \cong 1.6$, é da ordem de 1.6, a razão áurea τ . Fonte: [82]	41
Figura 13 – Ilustração esquemática da sequência de Fibonacci, demonstrando o crescimento populacional de coelhos. Fonte: [102]	42
Figura 14 – Ilustração esquemática das células unitárias da (a) segunda e (b) terceira gerações de Fibonacci.	44
Figura 15 – Ilustração esquemática das células unitárias da (a) segunda e (b) terceira gerações de Thue–Morse.	46
Figura 16 – Ilustração esquemática das células unitárias da (a) segunda e (b) terceira gerações de Período–Duplo.	48
Figura 17 – Estrutura de bandas para a segunda e terceira geração de Fibonacci, (a) S_2 , (b) S_3 , considerando os seguintes parâmetros do sistema: $X = 1.0$ e $n_{BA} = 0.28$	50
Figura 18 – Distribuição das larguras das bandas permitidas para a sequência de Fibonacci com $X = 1.0$, com $n_{BA} = 0.28$ em função do número de geração n . Para ilustrar melhor o comportamento auto-similar dos espectros, mostramos um zoom da sub-região, destacada por retângulo vermelho, do espectro principal.	51

Figura 19 – Gráfico log-log para o espectro completo da sequência de Fibonacci. O valor de ξ é indicado no painel.	52
Figura 20 – Igual à Fig. 17, mas para a sequência de Thue-Morse.	53
Figura 21 – Igual à Fig. 18, mas para a sequência de Thue-Morse.	54
Figura 22 – Igual à Fig. 19, mas para a sequência de Thue-Morse.	54
Figura 23 – Igual à Fig. 17, mas para a sequência de Período-Duplo.	55
Figura 24 – Igual à Fig. 18, mas para a sequência de Período-Duplo.	56
Figura 25 – Igual à Fig. 19, mas para a sequência de Período-Duplo.	56
Figura 26 – Esquema de classificação dos isolantes topológicos 3D que apresentam um efeito magnetoelétrico quantizado caracterizados em termos da simetria de reversão temporal e do coeficiente de acoplamento magnetoelétrico orbital θ . FONTE: adaptado de [132].	60
Figura 27 – Tabela esquemática referente a Fig. 26 onde os símbolos de \checkmark e \times indicam a presença e a ausência de simetrias em TI's 3D. Fonte: adaptado de [132].	60
Figura 28 – Esquema de um APC-1D formado por camadas alternadas A e B . Fonte: Essa imagem é autoral.	62
Figura 29 – Estrutura do cristal fotônico topológico, considerando $R = 1.0$, com: (a) $X = 0.0$, (b) $X = 0.5$, (c) $X = 1.0$ e (d) $X = 2.0$. Os diferentes valores de δ são indicados na tabela em linhas com cores.	68
Figura 30 – Similar à Fig. 29, considerando $X = 0.5$, com: (a) $R = 0.25$, (b) $R = 0.5$, (c) $R = 1.0$ e (d) $R = 2.0$. Os diferentes valores de δ são indicados.	69
Figura 31 – Similar à Fig. 30, mas para $X = 1.0$	70
Figura 32 – Similar à Fig. 30, mas para $X = 2.0$	71
Figura 33 – Gráficos de $\bar{\omega}_c$ (linhas sólidas), $\bar{\omega}_u$ (linhas tracejadas pontilhadas) e $\bar{\omega}_l$ (linhas tracejadas) em função de (a) X , considerando $R = 1.0$, e de R com (b) $X = 0.5$, (c) $X = 1.0$ e (d) $X = 2.0$	72
Figura 34 – Gráficos da superfície das larguras de <i>bandgap</i> em função de (a) δ e X , considerando $R = 1.0$, e de δ e R para (b) $X = 0.5$, (c) $X = 1.0$ e (d) $X = 2.0$	73
Figura 35 – Esquema de um PTC-1D, considerando $\epsilon_A = 4$, $\mu_A = \epsilon_B = \mu_B = 1$, $t_A = 0.23$ e $t_B = 0.76$. Fonte: Essa imagem é autoral.	78
Figura 36 – Estrutura de bandas de um PTC-1D: (a) para $n_A = 1$, considerando diferentes valores de n_{BA} ; e (b) para $t_A = 1 \times 10^{-9}$ s, considerando diferentes valores de t_{BA} . Valores de n_{BA} e t_{BA} são indicados no painel.	85
Figura 37 – Gráfico de superfície da largura do <i>bandgap</i> em função de n_{BA} e t_{BA} . A escala de cores significa preto (branco) para largura igual a 0 (0.8).	86

Figura 38 – Estrutura de bandas para a terceira geração da sequência de Fibonacci, considerando (a) $t_{BA} = 0.5$, (b) $t_{BA} = 0.75$, (c) $t_{BA} = 1.5$, e (d) $t_{BA} = 2.0$.	87
Figura 39 – Igual à Fig. 38, mas para a terceira geração da sequência de Thue-Morse.	88
Figura 40 – Igual à Fig. 38, mas para a terceira geração da sequência de Período-Duplo.	88
Figura 41 – (a) Distribuição das larguras das bandas permitidas para a sequência de Fibonacci com $t_{BA} = 0.5$ e $n_{BA} = 0.5$ em função do número de geração n . (b)-(d) Para ilustrar melhor o comportamento auto-similar dos espectros, mostramos um zoom de sub-regiões, destacadas por retângulos vermelhos, dos espectros principais.	89
Figura 42 – Igual à Fig. 41, mas para a sequência de Thue-Morse com $t_{BA} = 2.0$ e $n_{BA} = 2.0$	90
Figura 43 – Igual à Fig. 41, mas para a sequência de Período-Duplo com $t_{BA} = 0.5$ e $n_{BA} = 0.5$	90
Figura 44 – Gráfico log-log para a sequência de Fibonacci considerando: (a) $t_{BA} = 0.5$, (b) $t_{BA} = 0.75$, (c) $t_{BA} = 1.5$, e (d) $t_{BA} = 2.0$. Os valores de ξ são indicados nos painéis.	91
Figura 45 – Igual à Fig. 44, mas para a sequência de Thue-Morse.	92
Figura 46 – Igual à Fig. 44, mas para a sequência de Período-Duplo.	93

Lista de tabelas

Tabela 1 – Analogia entre as equações de autovalores da mecânica quântica e do eletromagnetismo.	19
--	----

Lista de abreviaturas e siglas

PC	Cristais Fotônicos
TMM	Método da Matriz de Transferência
SMM	Método da Matriz de Espalhamento
PWE	Método de Expansão da Onda Plana
FDTD	Método de Diferenças Finitas no Domínio do Tempo
IT	Isolante Topológico
EHQ	Efeito Hall Quântico
QCD	Cromodinâmica Quântica
MKS	Unidade de Medida
CP	Carga-Paridade
IHQs	Isolantes Hall Quântico de Spin
TPC	Cristal Fotônico Topológico
TPBG	<i>Bandgap</i> Fotônico Topológico
PTC	Cristal Fotônico Temporal
EM	Eletromagnético
SI	Sistema Internacional de Unidade
LPCVD	Deposição Química de Vapor de Baixa Pressão
MBE	Epitaxia por Feixe Molecular
MOCVD	Deposição de Vapor Químico Metal - Orgânico
RIE	Corrosão por Feixe de Íons Reativos
EBL	Litografia por Feixe de Elétrons
DTC	Cristal de Tempo Discreto
TME	Efeito Magnetoelétrico Topológico
CTTS	Quebra Espontânea de Simetria de Translação de Tempo Contínua

Sumário

	Agradecimentos	4
	Introdução	1
0.0.1	Organização da tese	4
I	CAPITULO 1	6
1	CRISTAIS FOTÔNICOS	7
1.1	Introdução	7
1.2	Conceitos básicos	14
1.2.1	Equações de Maxwell	14
1.2.2	Teorema de Bloch	19
1.2.3	Bandas de Frequência	24
1.3	Métodos Numéricos	27
1.3.1	Matriz de Transferência	27
1.3.2	Outros Métodos	34
II	CAPITULO 2	37
2	QUASICRISTAIS FOTÔNICOS	38
2.1	Introdução	38
2.2	Matriz de Transferência em Multicamadas Quasiperiódicas	42
2.2.1	A Sequência de Fibonacci	42
2.2.2	A Sequência de Thue–Morse	45
2.2.3	A Sequência de Período–Duplo	48
2.3	Resultados Numéricos	50
III	CAPITULO 3	57
3	CRISTAL FOTÔNICO AXIÔNICO	58
3.1	Introdução	58
3.2	Modelo Físico	61
3.2.1	Método da Matriz de Transferência em Cristal Fotônico Axiônico	63
3.3	Resultados Numéricos	67
3.4	Discussões e Conclusões	73

IV	CAPITULO 4	75
4	CRISTAL FOTÔNICO TEMPORAL PERIÓDICO E QUASIPERIÓDICO	76
4.1	Introdução	77
4.2	Modelo Físico	78
4.2.1	Método da Matriz de Transferência em Cristal Fotônico Temporal	79
4.3	Resultados Numéricos	83
4.4	Discussões e Conclusões	93
5	CONCLUSÕES GERAIS	94
5.1	Principais Contribuições	95
	Referências	96
	APÊNDICES	106
	APÊNDICE A – ELETRODINÂMICA AXIÔNICA	107
A.0.1	Comentário Final	111
	ANEXOS	112
	ANEXO A – ARTIGO PUBLICADO	113
A.1	Transfer matrix method of circular polarization light in an axionic photonic insulator	113

Introdução

A busca por respostas e explicações para os fenômenos naturais acompanha o ser humano desde a antiguidade. Essa busca pelo saber fez, inicialmente, o homem apelar para explicações fantasiosas e mitológicas, onde a vida e a fé estavam ligadas às forças da natureza, e tudo era praticamente explicado com base nos deuses, que também englobavam as fontes de luz observadas no céu, como o sol e a lua, considerados deuses, sendo o sol o deus regente devido à importância da luz para a produção dos alimentos [1, 2].

Desde então, a humanidade foi evoluindo e outras fontes de luz foram surgindo, como, por exemplo, a descoberta do fogo, que desempenhou um papel crucial para a humanidade nos últimos milhares de anos. Com o passar do tempo, a humanidade começou a ter avanços na maneira de pensar sobre as coisas, desenvolvendo assim uma mentalidade crítica, no anseio pelo conhecimento racional e lógico dos fenômenos da natureza e dos questionamentos dos conceitos que até então eram absolutos, passando a explicar os fenômenos da natureza com base no pensamento científico [3].

Com isso, vários filósofos gregos, inspirados pela corrente atomista da época, formularam teorias a respeito da natureza da luz [1]. As noções e teorias a respeito da luz formuladas pelos gregos tiveram grande influência nos estudos científicos.

O estudo da propagação da luz teve seus primeiros indícios num apêndice de um livro publicado por René Descartes, em 1637, intitulado *O Discurso do Método*, onde descreve fenômenos ópticos de refração e reflexão que ocorrem durante a propagação dos raios de sol numa gota de água para explicar a formação do arco-íris [4]. Também foi investigada por Descartes, fenômenos de refração com garrafas de água, que culminou na formulação de uma lei matemática conhecida como *lei de Snell-Descartes* [4].

No final do século XVII, o cientista inglês Isaac Newton, contemporâneo de René Descartes, motivado pelos fenômenos ópticos de refração e reflexão já conhecidos da época, propôs uma teoria importante sobre a natureza e propagação da luz. Sua abordagem matemática explicava fenômenos de dispersão e refração da luz em um prisma. A partir das observações de seu experimento de dispersão da luz por um prisma de vidro, ele formulou que a luz branca, proveniente do Sol, era composta pela mistura de luz de diversas cores [1]. O conjunto de cores obtidos pelo experimento da dispersão foi chamado por Isaac Newton de espectro [5]. Newton estava certo ao afirmar que a luz branca era formada por luz de todas as cores, mas falhou ao tentar explicar seus experimentos e observações com base numa teoria corpuscular da luz. A teoria corpuscular da luz foi contraditada por grandes estudiosos da época, desde então, longos trabalhos sobre o espectro da luz foram realizados.

Até que, no início do século XIX, o cientista inglês Thomas Young trouxe relevantes contribuições que solidificaram a teoria ondulatória da luz, descartando a teoria corpuscular da luz proposta por Newton. O famoso experimento da dupla fenda mostrou que a luz apresenta fenômenos de interferência, propriedade que só poderia ser explicada em termos de ondas. O experimento consiste na passagem de uma fonte de luz monocromática em duas aberturas de uma placa opaca. A teoria corpuscular previa que existiriam duas franjas de luz paralelas às aberturas, porém não foi essa a observação obtida por Young [1]. O que se pôde observar foi a existência de diversas franjas, sendo algumas claras e outras escuras. Young propôs que os feixes de luz poderiam se sobrepor de forma que originariam interferências construtivas e destrutivas. Quando duas cristas (ponto mais alto de uma onda) ou dois vales (ponto mais baixo de uma onda) se encontravam, originavam uma franja luminosa; também, se uma crista e um vale se encontravam, originava uma franja escura. O experimento de Young não só deu mais uma evidência da natureza ondulatória da luz, como possibilitou medir comprimentos de onda da luz, os quais estavam associados às diferentes cores anteriormente observadas por Isaac Newton [1]. As contribuições de Young fizeram com que o modelo ondulatório da luz fosse o mais aceito a partir da metade do século XIX [6]. No mesmo período, Augustin-Jean Fresnel descreveu matematicamente as ondas de luz.

Em 1845, após intensos estudos sobre as relações entre os fenômenos elétricos e magnéticos, Faraday realizou um experimento que consistia na passagem de um feixe luminoso polarizado através de um vidro, no qual seria aplicado um campo magnético [1]. Os resultados deste estudo apontaram uma rotação no plano de polarização da luz, o que convenceu Faraday da relação entre a natureza da luz e o magnetismo, sugerindo que a luz seria uma vibração de linhas de forças magnéticas [1]. Essa interpretação levou Faraday a contestar a necessidade de um meio etéreo que até então era usado para explicar a propagação da luz [1].

No entanto, um longo desenvolvimento de experimentos e teorias sobre a luz culminou, em 1860, nas equações de Maxwell. O qual, foi influenciado pelos estudos de Faraday, o físico e matemático James Clerck Maxwell aprimorou os conceitos trabalhados por Faraday e demonstrou os resultados desses experimentos matematicamente em sua teoria eletromagnética [1]. As teorias de Maxwell mostravam que as oscilações dos campos elétricos e magnéticos ocorriam simultaneamente e era possível encontrar uma equação de onda para descrever a propagação do campo elétrico e outra para o campo magnético. Analisando a velocidade dessas ondas, do ponto de vista teórico, Maxwell descobriu que elas deviam viajar à velocidade da luz, o que o levou a inferir que a própria luz deveria ser uma onda eletromagnética [7]. A luz era nada mais, nada menos do que onda eletromagnética, isto é, campos elétricos e magnéticos que vibram no espaço à velocidade da luz [1]. Em seguida, um famoso experimento realizado pelo físico alemão Heinrich Hertz evidenciou a hipótese de Maxwell. Em 1886, Hertz construiu um aparelho para gerar e detectar o que

hoje chamamos de ondas de rádio [8, 9, 10]. Hertz encontrou as ondas e afirmou, medindo seu comprimento e frequência, que elas viajavam à velocidade da luz [9, 10]. Hertz também demonstrou que a nova radiação poderia ser refletida e refratada, da mesma forma que a luz. A partir disso, houve um rápido avanço nos desenvolvimentos teóricos e experimentais a respeito dos espectros eletromagnéticos. Porém, somente com o desenvolvimento da mecânica quântica, do estado sólido e da física da matéria condensada que a teoria da interação da luz e da matéria estabeleceu uma base sólida.

Atualmente, a maneira de estudar a propagação das ondas eletromagnéticas é por meio de materiais, como, por exemplo, cristais de Bragg, fibras ópticas, dentre outras. O estudo de como as ondas de luz se dispersam nesses materiais tem recebido muita atenção desde 1987 com o artigo de E. Yablonovitch [11] sobre a propagação de ondas eletromagnéticas em multicamadas. Em seus experimentos, ele mostrou ser possível guiar e confinar a radiação eletromagnética nesses meios. É surpreendente o efeito causado quando as ondas de luz interagem com as interfaces desses materiais. Por causa disso, a produção, manipulação e transmissão das ondas eletromagnéticas tornaram-se importantes e evoluíram passo a passo com a ciência dos materiais.

Por outro lado, a descoberta de um tipo de estrutura cristalina aperiódica tornou o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas ainda mais interessante. Principalmente no campo de pesquisa da fotônica, onde essas estruturas aperiódicas são denominadas de quasicristais fotônicos. Nessas estruturas, a distribuição espacial das suas células unitárias e os respectivos índices de refração são organizados de forma quasiperiódica. Normalmente, esta organização é feita sob uma regra matemática de substituição ou recorrência. Esses sistemas também demonstraram ser uma alternativa interessante para o controle da luz e realização de dispositivos fotônicos como, por exemplo, filtros ópticos com um espectro autossimilar e alta seletividade de comprimento de onda [12, 13].

Em meios eletromagnéticos, a teoria eletromagnética é descrita pelas equações de Maxwell, mas são as relações constitutivas que descrevem como os campos eletromagnéticos interagem com a matéria. Os estudos da interação dos campos eletromagnéticos com os campos axiônicos provenientes da física de partículas apresentaram efeitos interessantes no campo da matéria condensada. Na eletrodinâmica clássica, essa interação resulta na modificação das leis usuais de propagação das ondas eletromagnéticas, onde as equações de Maxwell, bem como as relações constitutivas, são modificadas por um parâmetro θ . Normalmente, o conceito da teoria eletromagnética modificada por um parâmetro θ é introduzido em materiais topologicamente não triviais, como plasmons, plasmon-polariton e em superfícies de isolantes topológicos nanoestruturados (filmes finos, multicamadas e nanofitas) [14].

Para encerrar, outro modelo de materiais muito interessante é o cristal fotônico temporal, que ganhou recentemente notoriedade no meio científico e revisitou muitos

fenômenos interessantes. A formação desses materiais depende do parâmetro temporal e da modulação temporal periódica no índice de refração. Sendo estes materiais os análogos temporais dos cristais fotônicos. Tal estrutura exhibe propriedades semelhantes aos cristais fotônicos. Atualmente, vários estudos com emissão de luz em cristais fotônicos temporais (PTCs) têm sido realizados usando várias fontes de radiação, como elétrons livres [15] e a emissão por átomos [16]. Estes estudos têm aberto novos caminhos para aplicações em lasers.

O objetivo desta tese é investigar a propagação de ondas eletromagnéticas usando como recurso a técnica da matriz de transferência (TMM) para calcular a relação de dispersão das estruturas de bandas em dois tipos especiais de cristais fotônicos unidimensionais. O primeiro é o cristal fotônico axiônico. A propagação de luz nesse cristal é descrita pelas equações de Maxwell modificadas por um parâmetro θ . Essas estruturas apresentam propriedades incomuns que podem ser exploradas no controle da luz. Nosso estudo também teve como objetivo investigar a propagação de ondas eletromagnéticas usando a técnica da matriz de transferência (TMM) para calcular a relação de dispersão das estruturas de bandas em quasicristais fotônicos unidimensionais de ordem temporal, que seguem a sequência de Fibonacci, Thue–Morse e Período–Duplo. As propriedades ópticas desse sistema podem parecer familiares, mas ao expressar os resultados numéricos das estruturas de banda na linguagem da relação de dispersão em ordem temporal, podemos descobrir fenômenos interessantes. Esses sistemas fornecem uma alternativa interessante para o controle da luz. Em todos os casos das sequências, foram obtidos resultados numéricos para as estruturas de banda fotônica temporal.

0.0.1 Organização da tese

Esta tese está organizada da seguinte forma:

Capítulo 1: Cristais Fotônicos

Neste capítulo, faremos uma breve introdução aos cristais fotônicos 1D, 2D e 3D. Em seguida, apresentaremos uma revisão qualitativa e quantitativa dos conceitos básicos fundamentais para compreensão do comportamento dos modos de propagação das ondas eletromagnéticas dentro dos cristais fotônicos, os quais são: as equações de Maxwell, o teorema de Bloch e as bandas de energia fotônicas. Também apresentaremos a técnica da matriz de transferência para um cristal fotônico unidimensional formado por multicamadas dielétricas alternadas (A e B), onde mostraremos os resultados numéricos para as estruturas de banda fotônicas desse cristal. Por fim, apresentaremos alguns métodos numéricos comuns, amplamente usados como recurso para a investigação dos modos de propagação das ondas eletromagnéticas nesses cristais em 2D e 3D.

Capítulo 2: Quasicristais Fotônicos

Neste capítulo, faremos uma abordagem histórica sobre os quasicristais periódicos. Em seguida, apresentaremos uma revisão qualitativa e quantitativa dos conceitos fundamentais para construção via regra de substituição das sequências de Fibonacci, Thue–Morse e Período–Duplo. Também apresentaremos a técnica da matriz de transferência para os quasicristais fotônicos unidimensionais formados por multicamadas alternadas (A e B), seguindo as regras de substituição dessas sequências quasiperiódicas. Apresentaremos os resultados numéricos para estruturas de banda fotônica desses quasicristais. Além disso, mostraremos que os quasicristais fotônicos estudados exibem uma propriedade característica observada em objetos fractais, denominada auto-similaridade. Por fim, apresentaremos uma conclusão dos resultados obtidos.

Capítulo 3: Cristal Fotônico Axiônico

Neste capítulo, faremos uma breve introdução sobre os materiais isolantes topológicos fotônicos. Em seguida, discutiremos a teoria eletromagnética usada nesses materiais, que são as equações de Maxwell modificadas por um parâmetro θ . Realizaremos uma investigação teórica da propagação de ondas eletromagnéticas em um cristal fotônico axiônico unidimensional formado por multicamadas dielétricas alternadas (A e B), utilizando a técnica da matriz de transferência (TMM) para calcular a relação de dispersão dessas estruturas. Apresentaremos os resultados numéricos obtidos para a estrutura de bandas desse sistema. Por fim, apresentaremos uma conclusão dos resultados obtidos.

Capítulo 4: Cristal Fotônico Temporal Periódico e Quasiperiódico

Neste capítulo, faremos uma breve introdução sobre os cristais fotônicos de ordem temporal. Em seguida, introduziremos uma investigação teórica da propagação de ondas eletromagnéticas em quasicristais fotônicos unidimensionais de ordem temporal formados por multicamadas dielétricas alternadas (A e B), onde usaremos a técnica da matriz de transferência (TMM) para calcular a relação de dispersão dessas estruturas que seguem as sequências de Fibonacci, Thue–Morse e Período–Duplo. Apresentaremos os resultados numéricos obtidos para estruturas de bandas desses sistemas. Por fim, apresentaremos uma conclusão dos resultados obtidos.

Capítulo 5: Conclusões Gerais

Aqui, resumiremos os principais resultados obtidos neste trabalho.

Parte I

Capitulo 1

1 Cristais Fotônicos

Neste capítulo, estamos interessados em estudar do ponto de vista teórico as estruturas de bandas fotônicas utilizando a técnica da matriz de transferência (TMM) para calcular a relação de dispersão dos cristais fotônicos unidimensionais formados por multicamadas dielétricas alternadas (A e B).

Portanto, esse capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 1.1, faremos uma breve introdução aos cristais fotônicos 1D, 2D e 3D. Em seguida, na seção 1.2, apresentaremos uma revisão qualitativa e quantitativa dos conceitos básicos fundamentais para compreensão do comportamento dos modos de propagação das ondas eletromagnéticas dentro dos cristais fotônicos, que são: as equações de Maxwell, o teorema de Bloch (onde mostraremos que as soluções da equação de onda eletromagnética satisfazem o teorema de Bloch) e as bandas de energia fotônica. Por fim, na seção 1.3, apresentaremos a técnica da matriz de transferência, para um cristal fotônico unidimensional formado por multicamadas dielétricas alternadas (A e B), onde mostraremos os resultados numéricos para as estruturas de banda fotônica desse cristal. Também, abordaremos resumidamente, alguns métodos que são, de modo geral, recursos que podem ser utilizados para o cálculo das estruturas de bandas fotônicas 2D e 3D. Para uma introdução completa no campo da pesquisa dos cristais fotônicos vejam as Refs. [11, 17, 18, 19].

1.1 Introdução

A forma como compreendemos hoje em dia os cristais fotônicos (PCs), é baseado nos conceitos das estruturas cristalinas da física do estado sólido. A ideia básica dos PCs, consiste em fabricar materiais que possam influenciar as propriedades dos fótons da mesma forma que os semicondutores influenciam as propriedades dos elétrons.

O primeiro conceito de estruturas fotônicas periódicas foi introduzido por Lord Rayleigh, em 1887, que fez experimentos com várias camadas dielétricas periódicas, hoje chamadas de espelho de Bragg, e mostrou que se a luz tiver um comprimento de onda semelhante ao tamanho das camadas periódicas da estrutura, as ondas refletidas nas superfícies internas irão interferir entre si e cancelar umas às outras e isso produzirá um *bandgap* fotônico [20]. Um século depois, em 1972, Bykov apresentou um trabalho descrevendo a possibilidade de usar estruturas periódicas para o controle da emissão espontânea [21].

O estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em meios de camadas ganhou notoriedade a partir de 1987, após Eli Yablonovitch [22] e Sajeev John [23] investigarem,

independentemente, estruturas fotônicas em mais de uma dimensão, e ambos concluíram que essas estruturas são capazes de guiar e proibir a propagação da luz. Em seus estudos, Yablonovitch apresentou pela primeira vez átomos excitados dentro de um cristal fotônico com suas frequências de transição sintonizadas ao intervalo de banda onde não se pode emitir fótons. Em 1985, foi demonstrado que a emissão espontânea é proibida em uma região de micro-ondas [24]. A proibição da emissão espontânea em um cristal fotônico, foi observada pela primeira vez, em 1990, por Martorell e Lawandy [25]. Desde o trabalho de Yablonovitch e John, os PCs se tornaram objetos de pesquisa teórica e experimental interessantes para investigação de ondas eletromagnéticas nesses materiais. O interesse neste campo de pesquisa, está relacionado ao aparecimento de *bandgaps* fotônicos (PBG) nessas estruturas [22, 23, 26]. Além disso, a importância de estudar esses materiais, está na forma como as ondas eletromagnéticas (EM) se propagam dentro do *bulk*, possibilitando a investigação de diversas propriedades ópticas. Por exemplo, apenas certos comprimentos de onda de luz podem passar pela estrutura, ou seja, nesses materiais a propagação da luz é proibida em algumas frequências e direções [19]. Portanto, pode-se manipular a propagação da luz dentro de uma faixa de frequência, ajustando os parâmetros geométricos, dielétricos, magnéticos, entre outros, do cristal fotônico, de maneira muito semelhante à forma como uma rede de átomos pode dar origem às bandas eletrônicas. Assim, a ausência de ondas EM dentro de um PBG em algumas faixas de frequência pode levar a algumas características interessantes, e com muitas aplicações em dispositivos fotônicos [27].

Os materiais PBG ou também chamados de cristais fotônicos (PCs), como vimos, são materiais muito interessantes com propriedades dielétricas periódicas em uma escala de comprimento de onda. Essas estruturas podem ser encontradas na natureza, como por exemplo, em opalas, nas conchas de certos besouros e em asas de certas borboletas, pois estes exibem o que é chamado de cor estrutural e são chamados de cristais fotônicos naturais. Por outro lado, os cristais fotônicos podem ser fabricados. As estruturas dimensionais desses materiais são classificados em três categorias: cristais unidimensionais (1D), bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D), dependendo se a variação periódica dos parâmetros físicos (constante dielétrica, índice de refração, etc) é definida em uma, duas ou três dimensões.

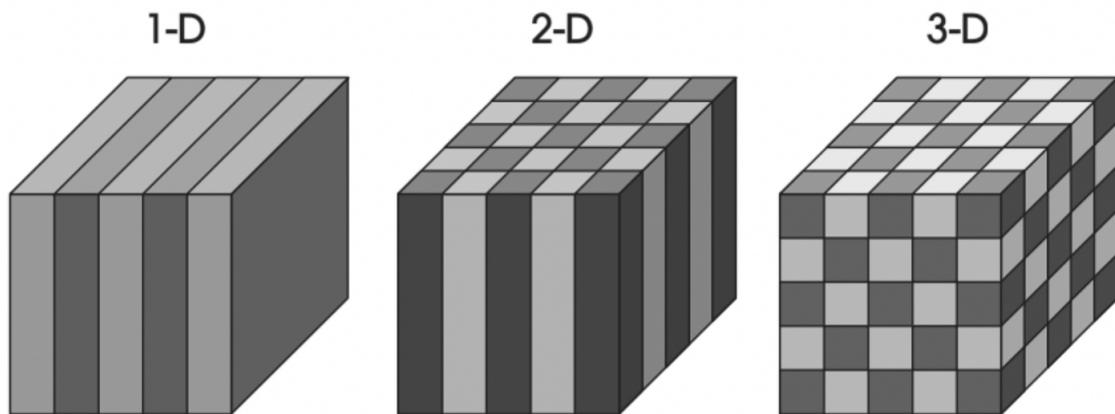


Figura 1 – Ilustração dos cristais fotônicos periódicos unidimensionais (1D), bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) formado por duas camadas alternadas (A e B) com permissividade elétrica ϵ_A e ϵ_B . Fonte: [17].

Esses cristais ocupam diferentes domínios físicos: o primeiro está no domínio do baixo contraste entre as constantes dielétricas (PC-1D), enquanto que o segundo está no domínio do alto contraste entre as constantes dielétricas (PC-2D e 3D). Por exemplo, ao contrário do caso de um cristal (1D) estudado por Lord Rayleigh, o surgimento de um *bandgap* de um cristal bidimensional (2D) ou tridimensional (3D), requer uma alta diferença no índice das constantes dielétricas entre os materiais. Já no caso unidimensional (1D), o contraste é pequeno dentro das estruturas do cristal fotônico. Já nas outras dimensões, a estrutura é mais complexa [28]. Em comparação com as estruturas de um cristal sólido, formado por átomos, ordenados em uma rede eletrônica periodicamente, os cristais fotônicos da Fig. (1), são na realidade formados por camadas, hastes, buracos, esferas, etc., ordenados em uma rede fotônica periódica.

Os *cristais fotônicos unidimensionais* (PCs-1D) são formados por multicamadas dielétricas, ou "pilhas de Bragg", que consistem em camadas alternadas de dois materiais dielétricos diferentes. Esses cristais unidimensionais, normalmente são estruturas que possuem uma modulação periódica nos parâmetros físicos (constante dielétrica, índice de refração, etc) em uma única direção z e é homogênea em xy . A função de materiais com tais estruturas, é proibir e permitir que ondas eletromagnéticas se propaguem com determinadas faixas de frequências. A reflexão e transmissão nesses materiais unidimensionais tem sua origem física a partir de múltiplas interferências construtivas e destrutivas que ocorrem em cada interface ao longo de toda a estrutura, e que depende do comprimento de onda λ incidente e do ângulo de incidência θ' (para o caso de incidência oblíqua). Esse efeito é observado em dispositivos ópticos, como espelhos ópticos omnidirecionais [28, 29, 30, 31], filtros Fabry-Perot [32] e termo-fotovoltaicos [33] dentre outros [35, 36, 37]. A fabricação dessas estruturas 1D é relativamente simples. Por causa disso, as aplicações dessas estruturas dielétricas se tornou uma indústria muito próspera. Alguns métodos

comumente utilizados para a confecção de tais estruturas são a deposição química de vapor de baixa pressão (LPCVD) [33], epitaxia por feixe molecular (MBE) [34], deposição de vapor químico metal - orgânico (MOCVD), litografia por feixe de elétrons (EBL), corrosão por feixe de íons reativos (RIE).

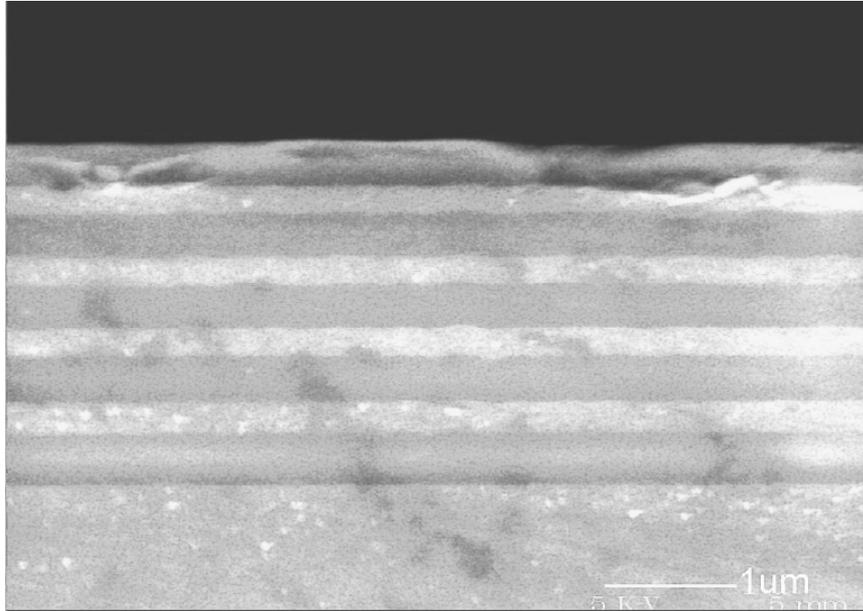


Figura 2 – Imagem de um microscópio eletrônico de varredura (SEM) da seção transversal de um PC-1D formado por dez camadas alternadas de Si/SiO_2 . (cor da imagem adaptada) Fonte: [33]

Os *cristais fotônicos bidimensionais* (PCs-2D), e *tridimensionais* (3D) podem ser vistos como generalizações do caso 1D, onde um intervalo de banda completo para os cristais 2D ou 3D aparece apenas se a condição de reflexão de Bragg for satisfeita simultaneamente para todas as direções de propagação nas quais a estrutura é periódica [38]. Esses cristais bidimensionais, normalmente são estruturas que possuem uma modulação periódica nos parâmetros físicos (constante dielétrica, índice de refração, etc) ao longo de um plano xy e é homogênea em z . O primeiro estudo teórico de estruturas de banda fotônica 2D foi realizado, em 1991, por Plihal et al [39]. Em seus estudos teóricos, Plihal mostrou a existência de *bandgaps* fotônicos para diferentes polarizações das ondas eletromagnéticas. No entanto, a primeira confirmação experimental da existência de *bandgap* fotônico em estruturas bidimensionais foi realizado para a regiões de microondas [40, 41]. Desde então, diversas configurações (triangulares, elípticas, hexagonais, favo de mel e diamante) para cristais fotônicos bidimensionais, foram estudadas na tentativa de encontrar estruturas que tenham um PBG completo [42, 43, 44, 45, 46, 47]. Progressos consideráveis vem sendo obtidos na fabricação de estruturas 2D [48, 49, 50].

A Fig. 3, representam um PC-2D formado por um arranjo de cilindros dielétricos em um material de fundo dielétrico homogêneo. Na Fig. 4, temos um exemplo ilustrativo da rede fotônica de um PC-2D no espaço real, juntamente com sua rede recíproca correspondente.

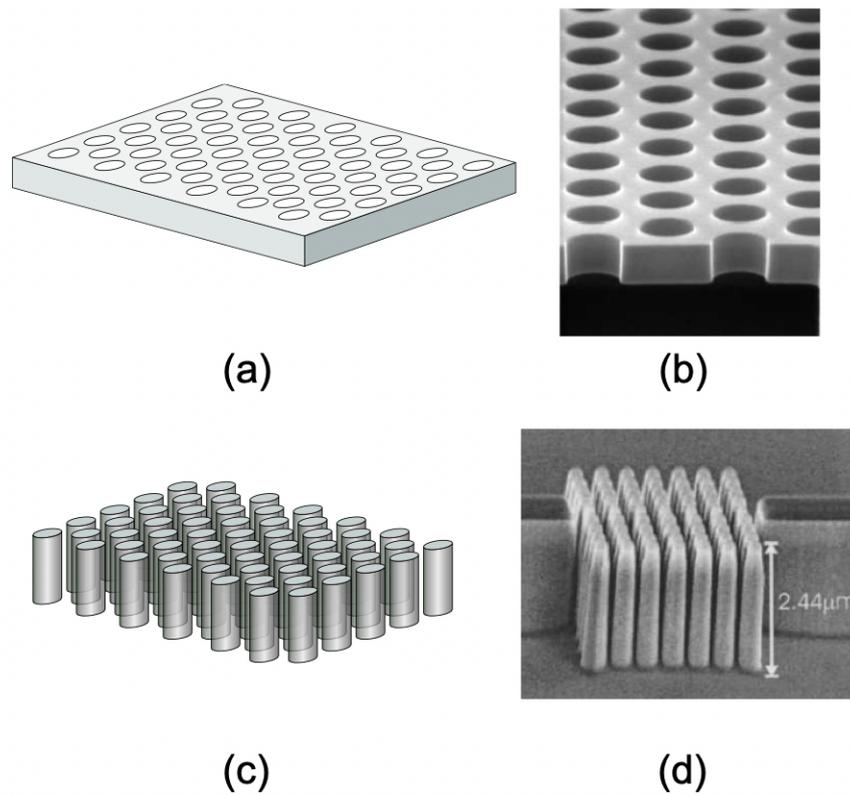


Figura 3 – Ilustrações representativas: **(a)** Esquema de um PC-2D, que consiste em vários arranjos de cilindros com baixo índice de refração, embutidos em uma placa com alto índice de refração. **(b)** Imagem de um microscópio eletrônico de varredura (SEM) de um PC-2D com vários buracos em uma placa de silício [51]. **(c)** Esquema de um PC-2D tipo haste, consistindo de cilindros com alto índice de refração embutidos em um fundo de baixo índice de refração. **(d)** Imagem SEM de um PC-2D tipo haste, formado a partir de hastes de GaAs em uma camada de óxido de alumínio com baixo índice de refração [52]. Fonte: [38]

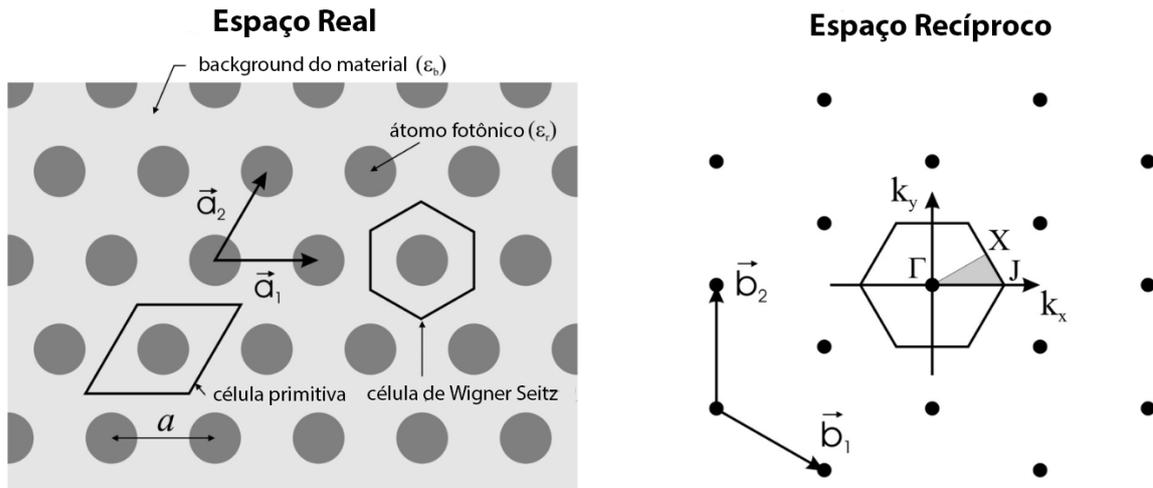


Figura 4 – Ilustração representativa de um cristal fotônico bidimensional, formados por vários cilindros dielétricos infinitamente longos com constantes dielétricas $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon_r$ embutidos em um material de fundo dielétrico homogêneo $\epsilon_b \neq \epsilon_r$. **Direita:** Rede real do PC-2D e **Esquerda:** Rede recíproca do PC-2D. Nesta ilustração, os dois tipos diferentes de células unitárias primitivas que são representadas pelas regiões de linhas sólidas. Fonte: [53]

Resumidamente, na Fig. 4, a distância de centro-centro entre os cilindros é a constante da rede. Os vetores primitivos do espaço real \vec{a}_1 e \vec{a}_2 foram definidos de modo que $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$. Os vetores associados da rede recíproca são \vec{b}_1 e \vec{b}_2 com $|\vec{b}_1| = |\vec{b}_2| = 4\pi/\sqrt{3a}$. Na Fig. 4, a primeira zona de Brillouin (a zona hexagonal) também é mostrado no espaço da rede recíproca, e a zona de Brillouin irreduzível é representado por um triângulo sombreado. Neste contexto, os pontos de alta simetria são rotulados pelas letras Γ , X e J por convenção. A coisa mais importante a perceber, no que diz respeito à teoria de grupo, é que o grupo do vetor de onda no ponto Γ tem a simetria completa do grupo de pontos da rede do espaço real. No entanto, certos vetores de onda de alta simetria, rotulados pelas diferentes letras gregas, são subgrupos desse grupo, ou seja, apenas um certo número das operações de simetria do grupo de pontos no ponto Γ (rotações, espelhos, etc.) deixará o novo ponto de alta simetria invariante. Assim, o benefício da simetria, é que só precisamos considerar uma região ainda menor da zona de Brillouin para obter todas as informações do espaço recíproco sobre o PC-2D. A Fig. 4 é um exemplo ilustrativo da rede fotônica no espaço real, juntamente com sua rede recíproca correspondente.

Embora existam muitas outras geometrias possíveis. Para os casos das Figs. 4-3 se o contraste do índice de refração entre os cilindros e o fundo homogêneo for suficientemente grande, podem ocorrer intervalos de banda para propagação de onda no plano onde a periodicidade é perpendicular às hastes. A luz em uma frequência dentro do *bandgap* experimenta uma reflexão de Bragg em todas as direções devido ao arranjo periódico dos cilindros.

Por fim, os *cristais fotônicos tridimensionais* (PCs-3D), são as estruturas mais

difíceis de fabricar. Esses cristais tridimensionais, normalmente são estruturas que possuem uma modulação periódica nos parâmetros físicos (constante dielétrica, índice de refração, etc) ao longo dos planos x , y e z . Uma ampla gama de geometrias de PCs-3D que exibe intervalos de banda fotônica completa foi realizada tanto em teoria quanto em experimentos, como por exemplo, um PC-3D do tipo *woodpile* mostrado na Fig. 5. Devido às dificuldades e desafios envolvidos na fabricação de estruturas em 3D de alta qualidade na escala de comprimentos de onda ópticos, os primeiros experimentos com cristais fotônicos 3D foram realizados em comprimentos de microondas e frequências de infravermelho [11, 54, 55, 56]. Com a melhoria nos métodos de fabricação e processamento dos materiais tridimensionais, estruturas menores se tornaram possíveis e, em 1999, foi construído o primeiro PC-3D com um *bandgap* nas frequências de telecomunicações [38, 57]. Desde então, foram surgindo vários estudos de PC-3D com frequências semelhantes [58, 59, 60]. Por outro lado, a inserção de defeitos nesses materiais tridimensionais não progrediu tão rapidamente quanto em PCs-2D [38]. Isso se dá, em grande parte, devido às dificuldades de fabricação desses materiais, pois elas exigem uma geometria cristalina muito complexa para poder gerar *bandgaps* fotônicos [38].

Atualmente, grande parte do interesse nos estudos dos cristais fotônicos 2D e 3D tem sido focado apenas para aplicações em tecnologias relacionadas a telecomunicações. Porém recentemente, o conceito original de controlar a emissão espontânea pôde ser demonstrado através de experimentos realizados em cristais fotônicos 2D [61] e 3D [38, 62, 63]. A presença de um *bandgap* fotônico para frequências de radiação de corpo negro também demonstrou-se capaz de modificar as propriedades de emissão térmica dos PCs-3D [64, 65].

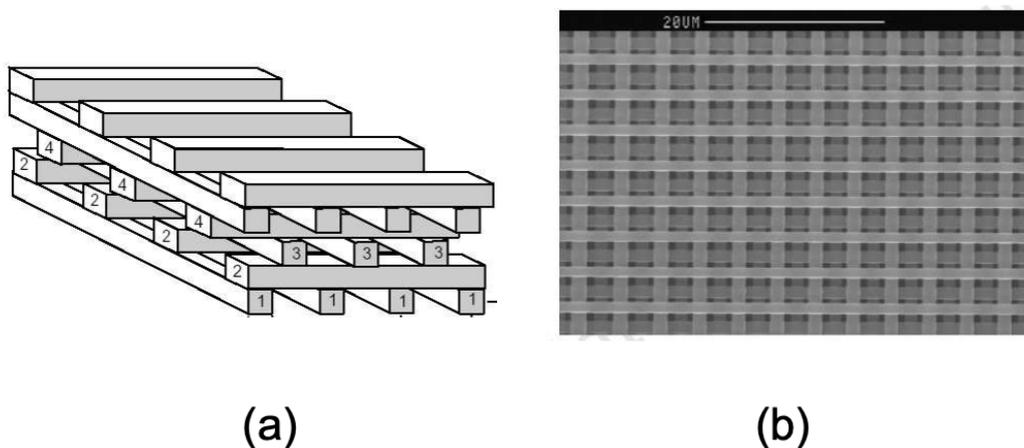


Figura 5 – Ilustração representativa de um PC-3D formado por uma estrutura conhecida como estrutura do tipo *woodpile*, que exibe um *bandgap* fotônico completo. (a) Esquema de um PC de uma estrutura do tipo *woodpile* ideal. (b) Imagem SEM de uma estrutura real em 3D do tipo *woodpile* fabricada em silício [54]. Fonte: [38]

1.2 Conceitos básicos

1.2.1 Equações de Maxwell

Para podermos compreender os modos de propagação da onda eletromagnética nos cristais fotônicos, devemos escrever as equações de Maxwell (que para o nosso caso são livres de cargas $\rho = 0$ e correntes $J = 0$) em termos das relações constitutivas, pois todos os fenômenos eletromagnéticos são governados pelas quatro equações de Maxwell. Dessa forma, as equações de Maxwell escritas no sistema de unidades SI, são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t), \quad (1.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t). \quad (1.1d)$$

onde $\vec{D}(\vec{r}, t)$ é o deslocamento do campo elétrico, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ é o campo elétrico, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ é o campo magnético, $\vec{H}(\vec{r}, t)$ é a intensidade do campo magnético e $\vec{r} = (x, y, z)$ é o vetor de coordenadas.

Devido à linearidade do meio, o deslocamento do campo elétrico $\vec{D}(\vec{r}, t)$ e a intensidade do campo magnético $\vec{H}(\vec{r}, t)$ são proporcionais ao campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e ao campo magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (1.2)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}, t). \quad (1.3)$$

onde $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} F.m^{-1}$ é a permissividade elétrica do vácuo, $\mu_0 = 1.256 \times 10^{-6} H.m^{-1}$ é a permeabilidade magnética do vácuo, $\epsilon(\vec{r})$ é a permissividade elétrica relativa do meio e $\mu(\vec{r})$ é a permeabilidade magnética relativa do meio. As quantidades $\epsilon(\vec{r})$ e $\mu(\vec{r})$ são funções apenas da posição \vec{r} . A constante dielétrica do sistema físico que estamos considerando é real e positiva, $\epsilon(\vec{r}) \geq 1$ (com valores que variam periodicamente no espaço) e $\mu(\vec{r}) = 1$, pois a maioria dos dielétricos de interesse tem a permeabilidade magnética unitária.

Devemos procurar soluções que representem as ondas nas Eqs. (1.1c)-(1.1d). Essas soluções devem ser harmônicas no tempo t , ou seja, as flutuações dos campos devem ser senoidais, com uma dependência temporal dada por $e^{i\omega t}$, onde ω é a frequência angular das ondas. Visto que os campos nas equações de Maxwell variam harmonicamente no tempo

com uma frequência ω , as soluções para o campo elétrico e o campo magnético, \vec{E} e \vec{H} , podem ser expressas da seguinte forma, dado que as equações de Maxwell são lineares [66]:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad (1.4)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad (1.5)$$

onde

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (1.6)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = H_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (1.7)$$

Assim, $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r})$ representam os vetores campo elétrico e campo magnético em uma posição \vec{r} no espaço. Os termos E_0 e H_0 são constantes complexas que determinam a magnitude e a fase dos campos em qualquer ponto do espaço. O termo $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ representa a dependência espacial da onda plana, onde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ é o vetor de onda e \vec{r} é o vetor posição. O produto escalar $\vec{k} \cdot \vec{r}$ calcula a projeção de \vec{r} na direção de \vec{k} . O vetor de onda \vec{k} tem magnitude $k = 2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda, e a direção de \vec{k} indica a direção de propagação da onda. A parte real dessas constantes é o que se observa fisicamente. Portanto, essas equações fornecem uma descrição completa de como os campos elétrico e magnético de uma onda plana oscilam e se propagam no espaço.

Substituindo as Eqs. (1.4)-(1.5) nas Eqs. (1.1c)-(1.1d) e usando as Eqs. (1.2)-(1.3), temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \partial_t \vec{H}(\vec{r}, t), \quad (1.8a)$$

$$e^{-i\omega t} [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})] = [i\omega\mu_0 \vec{H}(\vec{r})] e^{-i\omega t}, \quad (1.8b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu_0 \vec{H}(\vec{r}). \quad (1.8c)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \partial_t \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (1.9a)$$

$$e^{-i\omega t} [\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r})] = [-i\omega\epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})] e^{-i\omega t}, \quad (1.9b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.9c)$$

Agora, vamos isolar o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ da Eq. (1.9c) e a intensidade do campo magnético $\vec{H}(\vec{r})$ da Eq. (1.8c):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{\omega\epsilon_0\epsilon(\vec{r})} [\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r})], \quad (1.10)$$

e

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{-i}{\omega\mu_0} [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})]. \quad (1.11)$$

Depois de isolar os campos $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r})$ na Eq. (1.9c) e Eq. (1.8c), queremos obter a equação da onda. Para isso, vamos substituir as Eqs. (1.10)-(1.11) nas Eqs. (1.8c)-(1.9c):

$$\frac{i}{\omega\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = i\omega\mu_0 \vec{H}(\vec{r}), \quad (1.12)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) \right] = \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E}(\vec{r}), \quad (1.13)$$

onde as constantes ϵ_0 e μ_0 foram usadas para produzir a velocidade da luz no vácuo, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. As Eqs. (1.12)-(1.13) representam a equação geral da onda.

Um caso especial é quando o cristal fotônico é homogêneo em todas as direções espaciais, no qual podemos definir $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon$, assim, reescrevemos as Eqs. (1.12)-(1.13) da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r})] = \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) \vec{H}(\vec{r}) \quad (1.14)$$

e

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})] = \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.15)$$

usando a propriedade do rotacional no lado esquerdo das Eqs. (1.14)-(1.15),

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})] = \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})] - \vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.16)$$

e

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{H}(r)] = \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{H}(r)] - \vec{\nabla}^2 \vec{H}(r) = -\vec{\nabla}^2 \vec{H}(r). \quad (1.17)$$

e substituindo as Eqs. (1.16)-(1.17) nas Eqs. (1.14)-(1.15), temos a equação da onda:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) \vec{E}(\vec{r}) = 0. \quad (1.18)$$

e

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H}(\vec{r}) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) \vec{H}(\vec{r}) = 0. \quad (1.19)$$

Sendo assim, as Eqs. (1.18)-(1.19) representam a equação da onda que descreve o movimento do campo elétrico e magnético para o meio material para esse caso especial.

Vale ressaltar que as funções $E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ e $H(\vec{r}, t) = H_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ descrevem o comportamento ondulatório no espaço ($e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$) e no tempo ($e^{-i\omega t}$). Além disso, como $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, ou seja, não há fontes gerando deslocamentos elétricos e campos magnéticos na estrutura, o campo pode ser configurado a partir de ondas planas transversais. Também, as equações estão relacionadas ao rotacional de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{H}(\vec{r}, t)$, o que está de acordo com o critério de transversalidade [66], ou seja, no formato vetorial da luz, a oscilação do campo elétrico e magnético são perpendiculares entre si e a direção de propagação da onda representada por \vec{k} . Os termos E_0 e H_0 são coeficientes de amplitudes dependentes das condições de contorno.

As Eqs. (1.18)-(1.19) podem ser expressas em termos do vetor de onda \vec{k} :

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = \nabla^2 (E_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \quad (1.20)$$

$$\nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) = \nabla^2 (H_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \quad (1.21)$$

Como E_0 e H_0 são constantes em relação ao espaço, temos:

$$\nabla^2 (E_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) = E_0 \nabla^2 (e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \quad (1.22)$$

$$\nabla^2 (H_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) = H_0 \nabla^2 (e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \quad (1.23)$$

$$(1.24)$$

E sabemos que:

$$\nabla^2 (e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) = -k^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (1.25)$$

Portanto:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = -k^2 \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.26)$$

$$\nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) = -k^2 \vec{H}(\vec{r}) \quad (1.27)$$

Substituindo as Eqs. (1.26)–(1.27) nas Eqs. (1.18)–(1.19), obtemos:

$$-k^2 \vec{E}(\vec{r}) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (1.28)$$

$$-k^2 \vec{H}(\vec{r}) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) \vec{H}(\vec{r}) = 0 \quad (1.29)$$

Dividindo pelas respectivas amplitudes dos campos, temos:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon = k^2 \quad (1.30)$$

Portanto, a relação de dispersão em termos do vetor de onda \vec{k} é:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \quad (1.31)$$

e conseqüentemente

$$\omega(\vec{k}) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} |\vec{k}|. \quad (1.32)$$

Assim, temos que a Eq. (1.32) representa a relação de dispersão para a propagação da luz em um meio dielétrico homogêneo. Em comparação com a propagação da luz no vácuo ($\epsilon = 1$), isso significa que, em um meio com uma constante dielétrica ϵ , a velocidade da luz c é reduzida por um fator de $1/n$, onde $n = \sqrt{\epsilon}$ é o índice de refração do meio [53]. Como resultado da Eq. (1.32), também é possível determinar o vetor de onda \vec{k} como:

$$|\vec{k}| = \frac{n\omega}{c}. \quad (1.33)$$

Em nossa discussão inicial, vimos que o cristal fotônico de ordem espacial é, por definição, um arranjo periódico formado por diferentes materiais dielétricos. Posto isto, a constante dielétrica $\epsilon(\vec{r})$ será uma função periódica da posição \vec{r} . A Eq. (1.12) pode ser convertida em um problema de autovalor, ou seja, pode ser escrita em termos de uma

equação de autovalores, sendo assim, o papel da função dielétrica periódica $\epsilon(\vec{r})$ é análogo ao do potencial atômico periódico $V(\vec{r})$ da mecânica quântica [70].

MECÂNICA QUÂNTICA vs ELETROMAGNETISMO		
Equações	Mecânica Quântica	Eletromagnetismo
Campo	$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r})e^{i\omega t}$	$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$ $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$
Autovalor	$\hat{H}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$	$\Theta\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2}\vec{H}(\vec{r})$ $\Theta'\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}(\vec{r})$
Operador	$\hat{H} = \frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\vec{r})$	$\Theta = \nabla \times \frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \nabla \times$ $\Theta' = \frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \nabla \times \nabla \times$

Tabela 1 – Analogia entre as equações de autovalores da mecânica quântica e do eletromagnetismo.

Essas analogias são importantes porque nos permitem compreender os cristais fotônicos em termos da física do estado sólido. Na próxima sessão, estudaremos o conceito do teorema de Bloch e mostraremos que as soluções das equações de autovalores eletromagnéticas mostradas na Tabela (1) satisfazem o teorema de Bloch.

1.2.2 Teorema de Bloch

Nesta subseção, estamos interessados em uma abordagem qualitativa sobre o teorema de Bloch. Por isso, muitas demonstrações não serão feitas. Aqui, faremos uma breve revisão histórica a fim de entender o processo de construção do tão conhecido teorema de Bloch. Em seguida, demonstraremos de forma sucinta a aplicação do teorema de Bloch em cristais fotônicos.

Um teorema fundamental que estabeleceu a base do teorema de Bloch é o chamado teorema de Floquet. Esse teorema foi proposto pelo matemático G. Floquet em 1883, e seu trabalho (puramente matemático) foi formulado para um sistema linear homogêneo e periódico [67]. Em 1928, Bloch aplicou o teorema de Floquet para explicar a forma das funções de onda sujeitas a interações periódicas no espaço ou em um campo cristalino (teorema de Bloch). Na física do estado sólido, a teoria mais elementar foi a teoria dos elétrons livres, que supunha que os elétrons eram livres para se mover dentro de uma rede com um potencial constante (que também pode ser considerado zero), de maneira análoga às moléculas em um gás ideal.

No entanto, anos depois, percebeu-se que a suposição de que o potencial em que os elétrons se movem é zero não era bem o que acontecia na realidade. De fato, o que

acontece é que os elétrons se movem em um potencial periódico gerado pelos íons positivos. A periodicidade surge devido ao arranjo periódico de íons positivos na rede. Naquela época, resolver a equação de Schrödinger para um potencial periódico era uma tarefa bastante desafiadora.

Assim, surge o teorema de Bloch [68]. O teorema de Bloch nos diz que a função de onda é uma função de onda de partículas livres modulada por uma função da mesma periodicidade que a do potencial periódico. Tais funções são as chamadas funções Bloch. Dessa forma, o teorema de Bloch nos revela a forma geral da função de onda para a onda de Bloch. Então, tudo o que precisamos fazer é substituir a função de onda para onda de Bloch na equação de Schrödinger e impor as condições de contorno adequadas e encontrar a forma da função Bloch.

Em outras palavras, o teorema de Bloch nada mais é do que dizer que há um operador de translação específico que se desloca com o hamiltoniano, portanto, o hamiltoniano pode ser diagonalizado junto com o operador de translação e se pode rotular autoestados de energia. É claro que se pode formar uma sobreposição de estados com diferentes momentos, e se eles tiverem as mesmas energias, o resultado que obtemos ainda é um autoestado do Hamiltoniano.

Costuma-se afirmar que o teorema de Bloch e o teorema de Floquet são equivalentes. Por causa disso, em muitas literaturas, o teorema de Bloch é frequentemente referido como teorema de Floquet-Bloch. No entanto, isso pode parecer bastante confuso, já que o teorema de Bloch envolve uma equação diferencial de segunda ordem (equação de Schrödinger com potencial periódico), enquanto que o teorema de Floquet é definido para uma equação de primeira ordem.

A verdade é que, historicamente, o teorema de Bloch lida particularmente com a equação de Schrödinger, enquanto que o teorema de Floquet vale para qualquer sistema linear homogêneo de equações diferenciais de primeira ordem com uma matriz de coeficientes periódicos. Para uma compreensão mais completa a respeito dos dois teoremas, basta ler as Refs. [67, 68].

Assim, partindo da analogia do problema de autovalor da equação de onda eletromagnética visto na Tabela 1 e considerando que a propagação da onda eletromagnética em um cristal fotônico está sujeita à influência devido à variação periódica da permissividade elétrica, assim como a função de onda de um elétron é influenciada pelo potencial periódico de um cristal. Como consequência desta analogia, os modos eletromagnéticos em uma rede cristalina deverão obedecer ao teorema de Bloch.

É importante ressaltar que todas as informações estruturais e materiais de um cristal fotônico não magnético estão totalmente contidas na constante dielétrica $\epsilon(\vec{r})$, a qual é periódica para um conjunto de todos os vetores da rede \vec{R} gerados pelos vetores de

translação da rede primitiva \vec{a}_i ($i = 1, 2$ e 3) do espaço real, com periodicidade. Para uma abordagem mais aprofundada sobre estruturas cristalinas periódicas, veja [69]):

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r} + \vec{R}) \quad (1.34)$$

Assim, podemos aplicar o teorema de Bloch-Floquet [70], o qual nos diz que as soluções para um problema de autovalor (hermitiano) podem sempre ser escolhidas para ter a forma de uma onda plana $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ multiplicada pela função $\vec{u}(\vec{r})$ com a periodicidade da rede de Bravais:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r} + \vec{R}) \quad (1.35)$$

Em outras palavras, as soluções são ondas planas moduladas por uma função periódica da rede. Devido à simetria translacional discreta da rede, as soluções $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r})$ são rotuladas pelo vetor de onda \vec{k} , que está confinado na primeira zona de Brillouin. Assim, em sistemas periódicos, é comum buscar soluções para o campo elétrico que também sejam periódicas, com a mesma periodicidade da rede. Uma forma geral para expressar tais soluções para o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ e para a intensidade magnética $\vec{H}(\vec{r})$ é caracterizando-os por um vetor de onda \vec{k} , os quais são expressos como [71]:

$$\vec{E}_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad (1.36)$$

$$\vec{H}_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad (1.37)$$

onde $\vec{u}_{\vec{k}}$ são funções vetoriais periódicas que satisfazem a relação $\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{a}_i) = \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r})$.

Vamos mostrar que as afirmações impostas pelas Eqs. (1.36)-(1.37) são verdadeiras, ao provar que o teorema de Bloch é válido para os modos eletromagnéticos de uma dessas equações. Por simplicidade, vamos escolher a Eq. (1.36), mas vale ressaltar que podemos usar o mesmo recurso matemático para provar que o teorema de Bloch é válido para a Eq. (1.37). Sendo assim, primeiro, vamos expressar a autofunção do campo elétrico (1.36) por uma integral de Fourier:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{k} \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (1.38)$$

Agora vamos aplicar a equação de onda para o campo elétrico em um meio com constante dielétrica $\epsilon(\vec{r})$:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}(\vec{r})) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (1.39)$$

Substituímos $\vec{E}(\vec{r})$ da Eq. (1.38) na Eq. (1.39):

$$\nabla \times \left(\nabla \times \int d\vec{k} \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\vec{r}) \int d\vec{k} \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \quad (1.40)$$

Calculando as derivadas da integral de Fourier:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \int d\vec{k} \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) = \int d\vec{k} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \quad (1.41)$$

$$= \int d\vec{k} \nabla \times (i\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \quad (1.42)$$

$$= \int d\vec{k} (-|\vec{k}|^2 \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \quad (1.43)$$

Substituindo o resultado das derivadas de volta na equação de onda Eq. (1.39):

$$\int d\vec{k} (-|\vec{k}|^2 \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\vec{r}) \int d\vec{k} \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \quad (1.44)$$

Isolando os termos dependentes de \vec{r} e \vec{k} :

$$\int d\vec{k} \left(-|\vec{k}|^2 \vec{A}(\vec{k}) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\vec{r}) \vec{A}(\vec{k}) \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \quad (1.45)$$

Como a integral deve ser zero para todos os valores de \vec{r} , o integrando também deve ser zero:

$$-|\vec{k}|^2 \vec{A}(\vec{k}) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\vec{r}) \vec{A}(\vec{k}) = 0 \quad (1.46)$$

Considerando que $\epsilon(\vec{r})$ é periódico, podemos expandi-la em uma série de Fourier:

$$\epsilon(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \epsilon(\vec{G}) e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \quad (1.47)$$

onde \vec{G} são os vetores da rede recíproca.

Substituindo essa expansão Eq. (1.47) na Eq. (1.46):

$$-|\vec{k}|^2 \vec{A}(\vec{k}) - \frac{\omega^2}{c^2} \left(\sum_{\vec{G}} \epsilon(\vec{G}) e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \right) \vec{A}(\vec{k}) = 0 \quad (1.48)$$

Para aplicar a periodicidade, reconhecemos que a solução $\vec{A}(\vec{k})$ também pode ser expandida em termos dos vetores da rede recíproca:

$$\vec{A}(\vec{k}) = \sum_{\vec{G}} \vec{A}(\vec{k} - \vec{G}) \quad (1.49)$$

Substituindo a Eq. (1.49) na Eq. (1.46) e agrupando os termos:

$$-|\vec{k}|^2 \sum_{\vec{G}} \vec{A}(\vec{k} - \vec{G}) - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}'} \epsilon(\vec{G}') e^{i\vec{G}'\cdot\vec{r}} \sum_{\vec{G}} \vec{A}(\vec{k} - \vec{G}) = 0 \quad (1.50)$$

Para simplificar, agrupamos os termos com o mesmo argumento \vec{k} :

$$-|\vec{k}|^2 \vec{A}(\vec{k}) - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}} \epsilon(\vec{G}) e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \vec{A}(\vec{k} - \vec{G}) = 0 \quad (1.51)$$

Podemos relacionar $\vec{A}(\vec{k})$ com $\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r})$. Considerando que $\vec{A}(\vec{k})$ está associada à periodicidade, podemos escrever:

$$\vec{A}(\vec{k} - \vec{G}) = \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{G}) \quad (1.52)$$

Assim, a função $\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r})$ pode ser expandida em termos de uma série de Fourier com os vetores recíprocos \vec{G} :

$$\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{G}) e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \quad (1.53)$$

Substituindo $\vec{A}(\vec{k})$ e verificando que $\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r})$ satisfaz a periodicidade da rede, obtemos a solução para o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad (1.54)$$

onde $\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r})$ é periódico com a periodicidade da rede cristalina, provando assim que o teorema de Bloch é válido para os modos eletromagnéticos da Eq. (1.36).

Dessa forma, as soluções das equações de Maxwell em um meio dielétrico periódico são encontradas utilizando a expansão de Fourier e levando em consideração a periodicidade da rede cristalina.

Devido à natureza periódica da rede, qualquer campo que exista como uma solução das equações de autovalor Eqs. (1.12)-(1.13) pode ser escrito como uma superposição dos modos de Bloch. Esses modos de Bloch, têm um tipo de periodicidade relacionada à rede periódica. Neste caso, onde podemos expressar o teorema de Bloch em termos da série de Fourier, é possível obter a estrutura de banda fotônica resolvendo numericamente a equação de autovalor utilizando como recurso o método numérico de expansão de ondas planas. No entanto, não entraremos em detalhes sobre esse método numérico, pois não é um recurso utilizado nos trabalhos desta tese para obtenção do cálculo das estruturas de banda, pois o foco principal desta tese é estudar estruturas periódicas unidimensionais, porém, para um estudo detalhado sobre o cristal fotônico, utilizando o problema de autovalor da equação de onda com base nas autofunções expandidas em série de Fourier vejam as Refs. [71, 72]. Graças ao teorema de Bloch, podemos restringir a análise do sistema apenas a uma região denominada primeira zona de Brillouin.

Devido à natureza periódica da rede, qualquer campo que seja uma solução das equações de autovalor (Eqs. (1.12)-(1.13)) pode ser escrito como uma superposição dos modos de Bloch. Esses modos de Bloch têm um tipo de periodicidade relacionada à rede periódica. Neste caso, onde podemos expressar o teorema de Bloch em termos de uma série de Fourier, é possível obter a estrutura de banda fotônica resolvendo numericamente a equação de autovalor utilizando o método numérico de expansão de ondas planas.

No entanto, não entraremos em detalhes sobre esse método numérico, pois não é um recurso utilizado nos trabalhos desta tese para obter o cálculo das estruturas de banda. O foco principal desta tese é o estudo de estruturas periódicas unidimensionais. Para um estudo detalhado sobre o cristal fotônico utilizando o problema de autovalor da equação de onda com base nas autofunções expandidas em série de Fourier, consulte as Refs. [71, 72].

1.2.3 Bandas de Frequência

Para entender qualitativamente as bandas de frequência de um cristal fotônico, podemos fazer uma analogia com a banda de energia de uma estrutura cristalina no estado sólido da matéria. Consideremos a Fig. 6(a), onde temos uma onda de elétrons se propagando em um potencial periódico unidimensional gerado por uma rede atômica, onde os átomos são representados por barras verticais igualmente espaçadas ao longo do eixo. Esses átomos formam uma rede periódica que cria um potencial periódico no cristal $V(\vec{r})$.

A curva sinusoidal representa o movimento ondulatório do elétron na presença de um potencial periódico $V(\vec{r})$. Além disso, a forma da onda e sua amplitude podem variar

dependendo da energia do elétron e das características do potencial periódico.

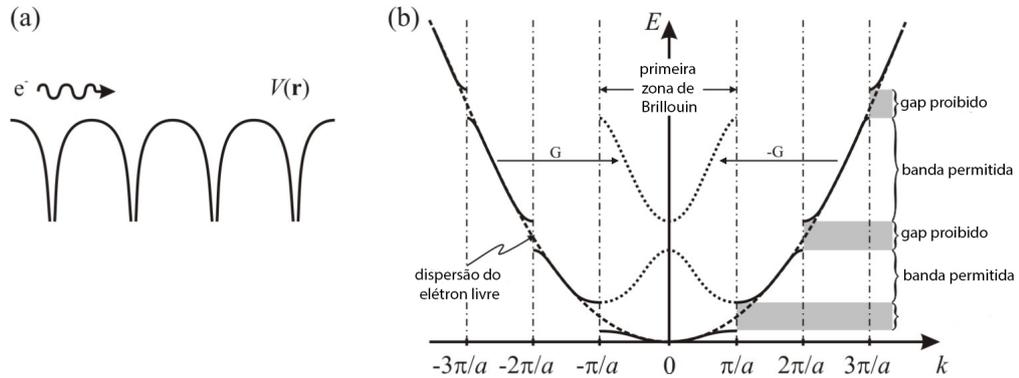


Figura 6 – (a) Ilustração esquemática de uma onda de elétrons se propagando em um potencial periódico unidimensional gerado por átomos igualmente espaçados no cristal, (b) Relação de dispersão $E(k)$ (a energia de um elétron em função de seu vetor de onda) em uma rede periódica unidimensional com período de rede a [70]. Fonte: [53]

A energia de um elétron, em função do seu vetor de onda, é mostrado na Fig. 6(b). Nela, é possível observar a existência de um potencial periódico que causa reflexões de Bragg, [70], levando à formação de bandas de energia separadas por *gaps* ou *bandgaps* de energia (linha tracejada). Os elétrons com energias dentro dos *gaps* não podem se propagar em certas direções no cristal. Esses *gaps* surgem porque as ondas de elétrons refletidas nos átomos vizinhos interferem construtivamente na onda inicial [53]. Quando o caso unidimensional é estendido para o tridimensional, a periodicidade do cristal pode dar origem a um intervalo de energia completo no qual os elétrons não podem se propagar em nenhuma direção. Esse intervalo na física, por exemplo, é o intervalo de banda fundamental entre as bandas de valência e a banda de condução dos semicondutores.

O estudo do comportamento dos elétrons em um semicondutor descritos pelas funções de onda de Bloch, espaço recíproco, zonas de Brillouin e sua relação de dispersão, também podem ser descritos e compreendidos para o caso de ondas eletromagnéticas em um cristal fotônico. Para entendermos melhor, considere a propagação de uma onda eletromagnética em uma estrutura unidimensional com variação periódica na constante dielétrica Fig. 7(a).

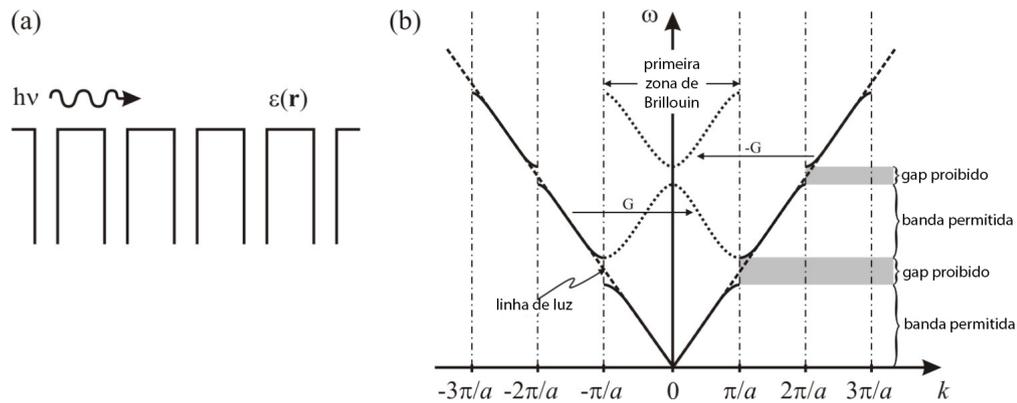


Figura 7 – (a) Ilustração esquemática da propagação de uma onda eletromagnética em uma estrutura unidimensional com variação periódica na constante dielétrica $\epsilon(r)$, (b) Relação de dispersão $\omega(k)$ (frequência da luz em função do seu vetor de onda \vec{k}) em tal estrutura periódica com período de rede a [71]. Fonte: [53]

Na Fig. 7, é possível perceber que a propagação da luz tem uma forte semelhança com a propagação de ondas de elétrons em um cristal atômico da física do estado sólido. Para ondas eletromagnéticas, a variação periódica na constante dielétrica (ou índice de refração) do material desempenha o mesmo papel que o potencial periódico atômico para os elétrons. As partes dielétricas da estrutura Fig. 7(a) atuam como espalhadores de Bragg. Para certos comprimentos de onda e direções, a interferência de ondas eletromagnéticas espalhadas por diferentes planos da rede é destrutiva. As ondas com esses comprimentos de onda são refletidas por reflexão de Bragg e não podem se propagar dentro da estrutura na direção da reflexão de Bragg. A reflexão de Bragg está, portanto, associada ao aparecimento de intervalos nas faixas de frequências proibidas (conhecidas também como frequências de parada) na relação de dispersão Fig. 7(b).

Para os vetores de onda \vec{k} , onde no espaço recíproco pode assumir valores ($\vec{k} = \pm\pi/a, \pm 2\pi/a, \dots$), a relação de dispersão é dividida em duas partes separadas por um intervalo de frequência onde a propagação da luz é proibida. Dentro do *gap* (intervalo de frequência proibida), todos os vetores de onda \vec{k} são complexos e correspondem a ondas evanescentes que decaem na estrutura. A largura desses intervalos de frequência proibida aumenta com o aumento do contraste dielétrico ($\epsilon_{\text{alto}}/\epsilon_{\text{baixo}}$) entre os meios. Quando a periodicidade se estende para o caso em três dimensões, e se o contraste dielétrico for alto o suficiente, os intervalos de frequências proibidas em todas as direções podem se sobrepor para formar um intervalo de banda fotônica completo (PBG), ou seja, uma faixa de frequências para as quais a propagação da luz é proibida, independentemente da direção de propagação. O intervalo de banda fotônica pode, portanto, ser considerado um análogo óptico do intervalo de banda de um semiconductor [53].

A ausência de estados permitidos para a luz dentro de um intervalo de banda

fotônica é conceitualmente um ponto muito importante e suas implicações vão além da óptica clássica. Embora o intervalo de banda fotônica permita que os cristais fotônicos atuem como dispositivos ópticos (por exemplo, espelhos ou filtros), os cristais fotônicos são estudados devido à sua capacidade de manipular as ondas eletromagnéticas dentro dos cristais fotônicos.

Nas próximas sessões apresentaremos alguns métodos numéricos para a obtenção do cálculo das estruturas de banda do cristal fotônico 1D, 2D e 3D. Vale ressaltar que o método numérico principal no qual analisaremos detalhadamente nesta tese é a técnica da matriz de transferência que é um recurso usado aqui para o cálculo das estruturas de bandas de cristais fotônicos unidimensionais.

1.3 Métodos Numéricos

1.3.1 Matriz de Transferência

O método da matriz de transferência é utilizado para calcular as estruturas de bandas de um cristal fotônico unidimensional. Sendo assim, estamos interessados em estudar teoricamente os modos de propagação da luz (ondas eletromagnéticas) em meios fotônicos periódicos infinitos, utilizando o método da matriz de transferência (TMM), onde não há cargas livres nem correntes ($\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$).

Considere um cristal fotônico (1D) constituído por duas camadas alternadas (A e B), com comprimentos d_A e d_B e constantes dielétricas ϵ_A e ϵ_B periódicas ao longo do eixo z :

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r} + \vec{R}) \Rightarrow \epsilon(z) = \epsilon(z + D) \quad (1.55)$$

onde assumimos que a onda eletromagnética incidente no meio periódico tem direção de propagação perpendicular ao plano das camadas do cristal (incidência normal) e está polarizada ao longo do eixo z , ou seja, $\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{z}$. A permissividade elétrica $\epsilon(\vec{r})$ é real, isotrópica, não dispersiva e periódica, com $\vec{R} = D\hat{z}$, onde $D = d_A + d_B$ é o tamanho da célula unitária, conforme descrito na Fig. 8.

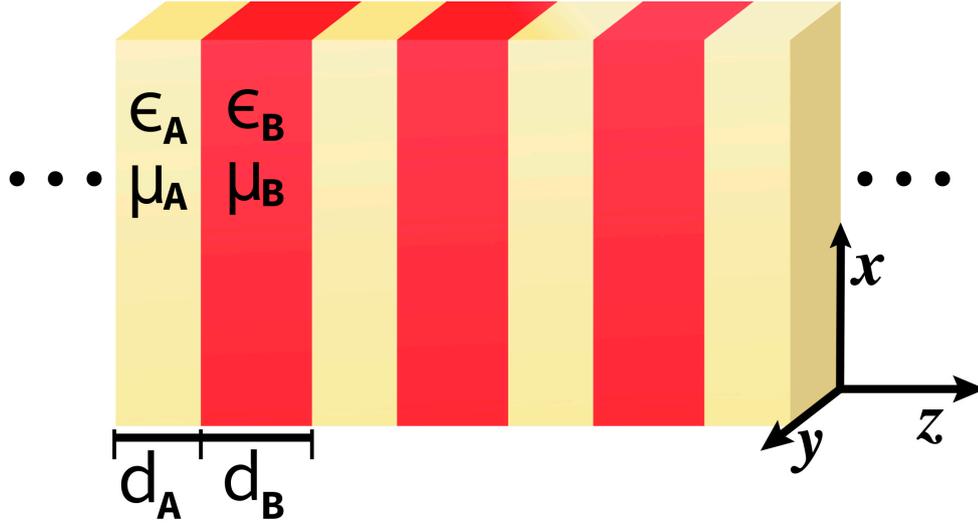


Figura 8 – Ilustração de uma estrutura infinita PC-1D formada por duas camadas alternadas (A e B). Fonte: Essa imagem é autoral.

Agora, vamos utilizar uma abordagem poderosa para analisar a propagação da luz dentro do cristal fotônico, o método da matriz de transferência (TMM). Dentro da estrutura do TMM, existem dois tipos de matrizes: (i) a matriz de transmissão, que conecta os campos através de uma interface, e (ii) a matriz de propagação, que descreve os campos que se propagam dentro de uma camada. Para obter ambas as matrizes, precisamos compreender como as ondas eletromagnéticas se comportam nas interfaces.

Vamos começar considerando a superposição de duas ondas planas propagando-se em direções opostas no eixo z e mesma frequência:

$$E_j = [E_j e^{ik_j z} + E'_j e^{-ik_j z}] \quad (1.56)$$

e

$$H_j = \left[\frac{k_{j,z}}{\omega \mu_0} E_j e^{ik_j z} + \frac{k_{j,z}}{\omega \mu_0} E'_j e^{-ik_j z} \right]. \quad (1.57)$$

onde o meio é representado por j ($= A$ ou B). As condições de contorno que surgem a partir das interfaces são dadas por [66]:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_B \quad (1.58)$$

e

$$\vec{H}_A = \vec{H}_B. \quad (1.59)$$

Aplicando as condições de contorno em $z = 0$, e usando as Eqs. (1.56)-(1.57), temos:

$$E_A + E'_A = E_B + E'_B \quad (1.60)$$

$$\frac{k_{A,z}}{\omega\mu_0} [E_A - E'_A] = \frac{k_{B,z}}{\omega\mu_0} [E_B - E'_B]. \quad (1.61)$$

onde ω é a frequência, ϵ_0 e μ_0 são a permissividade e permeabilidade do vácuo, $k_{A,z} = n_A\omega/c$, $k_{B,z} = n_B\omega/c$, $n_A = \sqrt{\epsilon_A\mu_A}$, e $n_B = \sqrt{\epsilon_B\mu_B}$ são os vetores de onda e os índices de refração dos meios A e B . Aqui, os campos elétricos E_B e E'_B podem ser relacionados aos campos elétricos E_A e E'_A por uma matriz de interface 2×2 do meio A para B :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{k_{A,z}}{\omega\mu_0} & -\frac{k_{A,z}}{\omega\mu_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_A \\ E'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{k_{B,z}}{\omega\mu_0} & -\frac{k_{B,z}}{\omega\mu_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_B \\ E'_B \end{pmatrix}, \quad (1.62)$$

$$\begin{pmatrix} E_A \\ E'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{k_{A,z}}{\omega\mu_0} & -\frac{k_{A,z}}{\omega\mu_0} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{k_{B,z}}{\omega\mu_0} & -\frac{k_{B,z}}{\omega\mu_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_B \\ E'_B \end{pmatrix}, \quad (1.63)$$

$$\begin{pmatrix} E_A \\ E'_A \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{k_{A,z}}{k_{B,z}} - 1 & \frac{k_{A,z}}{k_{B,z}} - 1 \\ -\frac{k_{A,z}}{k_{B,z}} + 1 & -\frac{k_{A,z}}{k_{B,z}} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_B \\ E'_B \end{pmatrix}. \quad (1.64)$$

Dessa forma,

$$\begin{pmatrix} E_A \\ E'_A \end{pmatrix} = M_{AB} \begin{pmatrix} E_B \\ E'_B \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

Das Eqs. (1.60)-(1.61), pode-se obter a matriz 2×2 da interface M_{BA} que relaciona os coeficientes do meio B para o meio A :

$$\begin{pmatrix} E_B \\ E'_B \end{pmatrix} = M_{BA} \begin{pmatrix} E_A \\ E'_A \end{pmatrix}, \quad (1.66)$$

com

$$M_{BA} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{k_{B,z}}{k_{A,z}} - 1 & \frac{k_{B,z}}{k_{A,z}} - 1 \\ -\frac{k_{B,z}}{k_{A,z}} + 1 & -\frac{k_{B,z}}{k_{A,z}} + 1 \end{pmatrix}. \quad (1.67)$$

Uma expressão geral para a matriz de transmissão, que conecta os campos em uma interface do meio m para o meio \bar{n} , pode ser escrita como:

$$M_{m\bar{n}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{k_m}{k_{\bar{n}}} - 1 & \frac{k_m}{k_{\bar{n}}} - 1 \\ -\frac{k_m}{k_{\bar{n}}} + 1 & -\frac{k_m}{k_{\bar{n}}} + 1 \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Finalmente, para o caso de uma onda eletromagnética se propagando no meio j ($= A$ ou B), com espessura d_j e vetor de onda k_j , a matriz 2×2 de propagação é dado por

$$M_j = \begin{pmatrix} e^{ik_j d_j} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j d_j} \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

Relação de Dispersão

Em cristais fotônicos 1D compostos por camadas dielétricas organizados de forma periódica, as ondas eletromagnéticas em propagação são moduladas pelos espalhamentos de Bragg, resultando na estrutura de bandas fotônicas, na qual surgem os *bandgaps* fotônicos.

Considere a l -ésima célula unitária $[A|B]$ de um PC-1D. Os campos elétricos dentro das camadas (A e B) são definidos como $\vec{E}_{A,l} = (E_{A,l}, E'_{A,l})$ e $\vec{E}_{B,l} = (E_{B,l}, E'_{B,l})$. Para obter a matriz de transferência para esta célula unitária, devemos relacionar os coeficientes de campo elétrico da célula unitária $(l+1)$ com os coeficientes de campo elétrico da célula unitária l . Podemos escrever para uma onda eletromagnética, propagando-se da camada A e cruzando a interface de A para B , ambas na mesma l -ésima célula unitária,

$$\begin{pmatrix} E_{B,l} \\ E'_{B,l} \end{pmatrix} = M_A M_{AB} \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

De maneira semelhante, considere a onda eletromagnética se propagando da camada B e cruzando a interface de B para A , mas agora B pertence à l -ésima célula unitária enquanto A pertence à $(l+1)$ -ésima célula unitária,

$$\begin{pmatrix} E_{A,l+1} \\ E'_{A,l+1} \end{pmatrix} = M_B M_{BA} \begin{pmatrix} E_{B,l} \\ E'_{B,l} \end{pmatrix}. \quad (1.71)$$

Substituindo a Eq. (1.70) na Eq. (1.71), obtemos:

$$\begin{pmatrix} E_{A,l+1} \\ E'_{A,l+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} \quad (1.72)$$

onde

$$M = M_B M_{BA} M_A M_{AB} \quad (1.73)$$

é a matriz de transferência 2×2 para toda a célula unitária $[A|B]$. A partir do teorema de Bloch, os autovalores de M estão relacionados com a fase de Bloch QD , que é a mudança de fase dos campos após a propagação ao longo da célula unitária. Aqui Q é o vetor de onda de Bloch e D é o tamanho da célula unitária da estrutura ($D = d_A + d_B$ no presente caso). Portanto a Eq. (1.72) pode ser reescrita como:

$$\begin{pmatrix} E_{A,l+1} \\ E'_{A,l+1} \end{pmatrix} = e^{iQD} \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

Por outro lado, para uma onda se propagando da direita para a esquerda, a Eq. (1.74) se torna:

$$\begin{pmatrix} E_{A,l-1} \\ E'_{A,l-1} \end{pmatrix} = e^{-iQD} \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix}. \quad (1.75)$$

As Eqs. (1.74)-(1.75) também pode ser escritas como:

$$[M - e^{iQD} \mathbb{1}] \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

e

$$[M^{-1} - e^{-iQD} \mathbb{1}] \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.77)$$

Aqui, $\mathbb{1}$ é a matriz identidade 2×2 e M^{-1} é a inversa da matriz de transferência M . Se adicionarmos as Eqs. (1.76)-(1.77), obtemos:

$$\left[M + M^{-1} - (e^{iQD} + e^{-iQD}) \mathbb{1} \right] \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.78)$$

cujas soluções não triviais são obtidas a partir da condição

$$\det \left[M + M^{-1} - (e^{iQD} + e^{-iQD}) \mathbb{1} \right] = 0. \quad (1.79)$$

Usando o fato de que a matriz de transferência é uma matriz unimodular, ou seja, seu determinante $\det[M] = 1$, podemos escrever a Eq. (1.79) como uma expressão algébrica, ou seja, [73]:

$$\cos(QD) = \left(\frac{1}{2} \right) \text{Tr}[M] = \frac{M_{11} + M_{22}}{2}. \quad (1.80)$$

Aqui, $\text{Tr}[M]$ é o traço da matriz de transferência M , e M_{11} e M_{22} são seus elementos diagonais. A Eq. (1.80) é uma equação transcendental e mostra que, uma vez que conseguimos obter a matriz de transferência M do sistema, podemos obter numericamente suas soluções, ou seja, podemos obter as frequências para as quais o vetor de onda de Bloch Q é real. As frequências permitidas são tais que a condição $|(1/2)\text{Tr}[M]| \leq 1$ é satisfeita. Caso contrário, se $|(1/2)\text{Tr}[M]| > 1$, o vetor onda de Bloch é complexo e, conseqüentemente, a onda de luz tem um perfil evanescente, surgindo os *bandgaps* fotônicos. Para uma banda permitida, a partir da Eq. (1.80), obtemos:

$$Q = \frac{\cos^{-1} [(M_{11} + M_{22}) / 2]}{D}, \quad (1.81)$$

de modo que o vetor de onda de Bloch Q varia de $-\pi/D$ a π/D , que é o tamanho da célula unitária no espaço recíproco.

No nosso caso de interesse, PC-1D composto por duas camadas (A e B), com permissividades dielétricas ϵ_j , permeabilidades magnéticas μ_j , espessura d_j ($j = A$ ou B), cuja célula unitária $[A|B]$ está disposta de forma periódica, Eq. (1.81) pode ser obtida analiticamente (veja Ref. [73] para mais detalhes):

$$\cos(QD) = \cos(\phi_A) \cos(\phi_B) - \Delta \sin(\phi_A) \sin(\phi_B), \quad (1.82)$$

com $\phi_j = k_j d_j$ sendo a fase do meio j e

$$\Delta = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon_B}{\epsilon_A}} + \sqrt{\frac{\epsilon_A}{\epsilon_B}} \right\} \quad (1.83)$$

Assim, obtemos a relação de dispersão de uma estrutura fotônica usando o TMM. É através dessa equação que obtemos a estrutura de bandas para o cristal fotônico. É importante ressaltar que os dois primeiros termos da Eq. (1.83) são responsáveis pelo surgimento dos *bandgaps* fotônicos convencionais, cuja origem física dependem do espalhamento de Bragg. Semelhante ao caso das ondas de elétrons que se propagam em cristais, as ondas de luz que se propagam em estruturas periódicas são descritas em termos de bandas fotônicas, onde podem existir intervalos de frequência que impeçam a propagação de ondas eletromagnéticas.

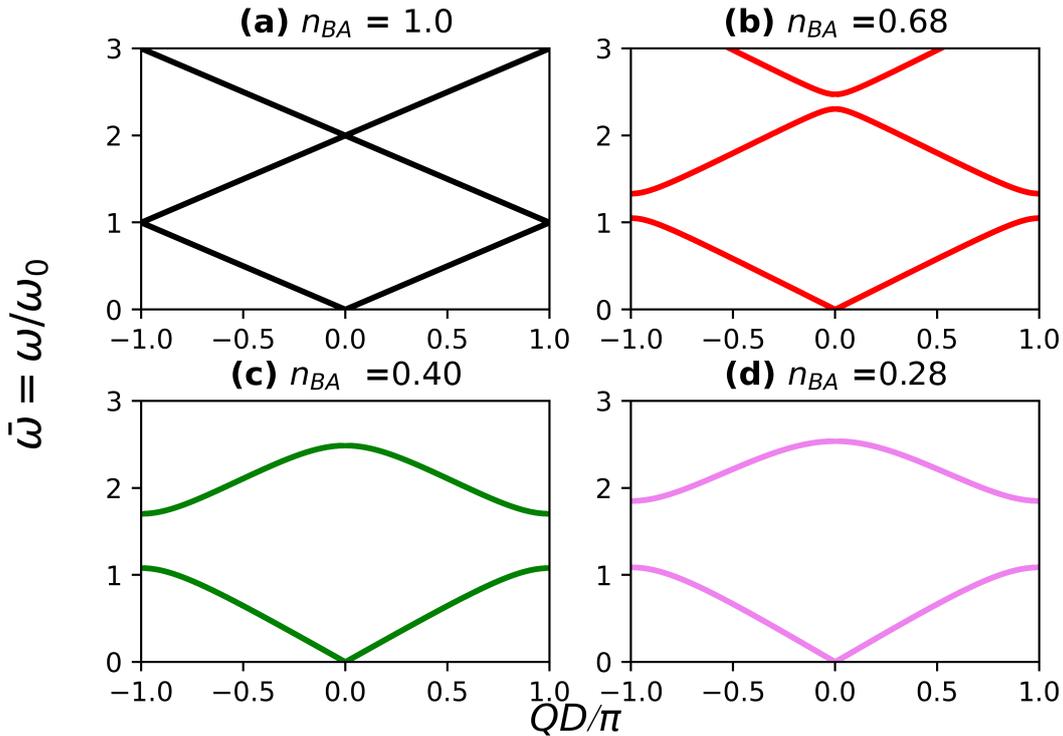


Figura 9 – estrutura de bandas do cristal fotônico espacial 1D, considerando os seguintes parâmetros do sistema: $X = 1.0$, com (a) $n_{BA} = 1.0$, (b) $n_{BA} = 0.68$, (c) $n_{BA} = 0.40$, (d) $n_{BA} = 0.28$.

Na Fig. 9, apresentamos os resultados numéricos das estruturas de bandas fotônicas em função da razão entre os índices de refração $n_{BA} = n_B/n_A$ das camadas alternadas A e B (ver Fig. 8), a razão entre o índice de refração mede a relação entre as velocidades de propagação da luz nos dois meios A e B , por isso, pode assumir valores maiores ou menores que 1 (em nosso caso valores < 1). Essas camadas são materiais não magnéticos, ou seja, $\mu_A = \mu_B = 1$. Para o comprimento de onda central λ_0 , definimos uma frequência

média $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0 = 10^{12}$ rad/s. Assim, as estruturas são todas dadas em termos da frequência reduzida adimensional $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$ e do vetor de onda de Bloch normalizado QD/π .

É muito importante saber como a estrutura do cristal fotônico é afetada pelos parâmetros físicos n_{BA} e geométricos X do sistema (ver Fig. 8). Por esse motivo, na Fig. 9(a) calculamos a estrutura de bandas fotônica considerando os parâmetros físicos e geométricos dos materiais A e B iguais, ou seja, $n_{BA} = n_B/n_A = 1.0$ e $X = d_B/d_A = 1.0$. Na Fig. 9(b)-(d), calculamos a estrutura de bandas fotônica fixando o parâmetro geométrico em $X = d_B/d_A = 1.0$, e considerando os parâmetros físicos dos materiais A e B diferentes, ou seja, para diferentes valores de $n_{BA} = n_B/n_A$. Assim, essas estruturas foram plotadas levando em consideração os diferentes valores da razão entre os índices de refração sendo (a) $n_{BA} = 1.0$, (b) $n_{BA} = 0.68$, (c) $n_{BA} = 0.40$ e (d) $n_{BA} = 0.28$.

Como resultado, descobrimos que, para estrutura (a) onde $\epsilon_A = \epsilon_B$ o *bandgap* é nulo, isso significa que a onda eletromagnética não sente uma resistência ao passar de um meio A para o meio B , porque os meios de propagação são iguais (homogêneo), então não há ondas refratadas e refletidas. Consequentemente, não existem ondas interferindo entre si e a propagação da luz é total. Por outro lado, para estruturas onde $\epsilon_A \neq \epsilon_B$, com $\epsilon_A > \epsilon_B$, a largura do *bandgap* aumenta à medida que o parâmetro físico n_{BA} ($n_A > n_B$) diminui, isso significa que, estamos aumentando a diferença entre o índice de refração n_A do meio A em relação ao índice de refração n_B do meio B (o sistema se torna menos homogêneo), então a onda quando passa entre as camadas A e B , percebe essa diferença, e sente uma resistência para se propagar de uma camada a outra. A explicação física para o surgimento dos *bandgaps*, é devido às variações no índice de refração serem periódicas, então várias ondas refletidas e refratadas emergem em vários pontos da interface (ou pontos de transição) do meio A para o meio B e interferem umas com as outras. A onda refletida manterá a velocidade, frequência e comprimento de onda iguais aos da onda incidente. Por outro lado, na refração, a velocidade de propagação da onda será alterada. Esse processo leva à existência de intervalos de banda de frequência.

1.3.2 Outros Métodos

O TMM é um método muito usado para calcular estruturas de bandas de cristais fotônicos unidimensionais. Muitos outros métodos também foram desenvolvidos, e podem ser aplicados para resolver problemas relacionados a cristais fotônicos em 2D ou 3D. Aqui, descreveremos resumidamente três tipos deles.

O *método da matriz de espalhamento* (SMM) é usado para caracterizar sistemas compostos por um conjunto finito de cilindros dielétricos paralelos em meios homogêneos. No método SMM, a onda inicial e os objetos de dispersão são inicialmente definidos e o campo eletromagnético, em uma posição arbitrária, é posteriormente calculado a partir da

soma de duas ondas: a onda que chega diretamente da fonte e a onda que é espalhada por um objeto. Cada onda espalhada é representada em termos de expansão da função cilíndrica. A amplitude de cada grau da função cilíndrica, que é excitada pelas ondas das posições da fonte, é representada pela matriz de dispersão. A posição da fonte, a matriz de dispersão e a onda espalhada estão relacionadas entre si via equações simultâneas, e as amplitudes são obtidas resolvendo um sistema linear, que imediatamente nos dá a distribuição do campo eletromagnético em posições arbitrárias. As principais limitações do método são: ele só pode ser usado em cristais 2D, os exemplos de cálculo são restritos a objetos circulares porque a função do cálculo é muito mais simples, Já que as soluções da matriz de dispersão analítica estão disponíveis para figuras circulares, apenas soluções estáticas dos campos eletromagnéticos podem ser obtidas [53].

O *método de expansão da onda plana* (PWE), é uma técnica numérica, usada para calcular os automodos nos cristais fotônicos. No método PWE, a função dielétrica é expandida em série de Fourier na rede recíproca. No entanto, estamos numericamente restritos a operar em um subespaço (rede recíproca) de dimensão finita. Devido à simplicidade e flexibilidade no manuseio de praticamente qualquer geometria da célula unitária, o método de onda plana se tornou uma ferramenta poderosa e amplamente utilizada para a maioria das pesquisas sobre estruturas de bandas fotônicas. O método de onda plana também pode ser usado para calcular outras quantidades físicas, que desempenham um papel fundamental na compreensão das propriedades do cristal fotônico. O método de onda plana, também é usado para calcular numericamente a transmitância e a refletividade de Bragg em cristais fotônicos 2D [53, 71, 74]. Ao redefinir a célula unitária e construir a chamada super-célula, o método de onda plana é usado para calcular estruturas com defeitos [53]. Na super-célula, um conjunto de vários períodos de cristal fotônico são colocados em torno do defeito. Supõe-se que tal super-célula se repete infinitamente no espaço. Como as funções de onda estão localizadas em torno do defeito, os modos de defeitos adjacentes dificilmente se sobrepõem quando a super-célula é suficientemente grande, e podem ser calculados quase sem ambiguidade. No entanto, o número de problemas de defeito que podem ser tratados por super-células dentro do método de ondas planas é limitado a estruturas relativamente simples, porque é necessário um número considerável de ondas planas e requer um longo tempo computacional, para se obter os resultados com precisão. O método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) é mais eficiente a esse respeito, dando alta precisão com um baixo tempo de computação.

O *método de diferenças finitas no domínio do tempo* (FDTD), é uma técnica usada para fazer simulações no domínio do tempo com pulsos se propagando e interagindo com estruturas de defeitos mais complexos. Este método, tem sido fundamental no desenvolvimento de inúmeros projetos de elementos funcionais para dispositivos de comunicação óptica, como curvas de guia de onda [53, 75], junções [76], filtros [53, 77, 78], etc. A principal limitação do método FDTD, são seus requisitos computacionais, pois, requer

enormes recursos computacionais, grandes quantidades de memória e execução rápida. No entanto, devido ao notável progresso na tecnologia computacional, um computador pessoal padrão agora pode calcular modelos que anteriormente só podiam ser manipulados por supercomputadores.

Parte II

Capítulo 2

2 Quasicristais Fotônicos

Neste capítulo, estamos interessados em estudar a técnica da matriz de transferência (TMM) usada para calcular a relação de dispersão dos quasicristais fotônicos unidimensionais formados por multicamadas dielétricas alternadas (A e B) de acordo com a sequência de Fibonacci, Thue–Morse e Período–Duplo, a fim de observar como a forma com que os materiais estão arrançados irá influenciar na propagação das ondas eletromagnéticas dentro desses quasicristais fotônicos unidimensionais.

Portanto, este capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 2.1, faremos uma abordagem histórica sobre os quasicristais periódicos. Em seguida, na seção 2.2, apresentaremos uma revisão qualitativa e quantitativa dos conceitos fundamentais para construção via regra de substituição das sequências de Fibonacci, Thue–Morse e Período–Duplo. Também, apresentaremos a técnica da matriz de transferência, para os cristais fotônicos unidimensionais formados por multicamadas alternadas (A e B), seguindo as regras de substituição dessas sequências quasiperiódicas. Na seção 2.3 apresentaremos os resultados numéricos para estruturas de bandas fotônicas desses cristais. Além disso, mostraremos que os quasicristais fotônicos estudados exibem uma propriedade característica de objetos fractais chamada de auto-similaridade. Para uma introdução completa sobre toda a evolução histórica no campo de pesquisa dos quasicristais, veja a Ref. [79].

2.1 Introdução

Historicamente, o conceito de quasiperiodicidade foi introduzido pela primeira vez pelo matemático H.A. Bohr, em 1926, durante seus estudos sobre funções quasiperiódicas [80]. Em 1982, o químico israelense Daniel Shechtman estava estudando uma liga de alumínio e manganês utilizando microscopia eletrônica. Em seus experimentos, um feixe de elétrons foi lançado contra ligas metálicas de alumínio com ferro ao qual verificou-se que a difração formada não era compatível com aquilo que seria esperado para um cristal atômico convencional [81].

Neste experimento o que se observou foi um padrão de difração que apresentava círculos concêntricos feitos de 10 pontos brilhantes e espaçados pela mesma distância Fig. 10(a). Isso significava um padrão de simetria de ordem 10 Fig. 10(b). Depois de realizar outros testes para confirmar seus resultados, os materiais que apresentavam esse tipo de estrutura foram chamados de quasicristais.

A análise do material estudado por Shechtman mostrou que os quasicristais têm uma ordem de longo alcance, apresentando elementos de simetria da ordem de 5, 10 e 20 e não

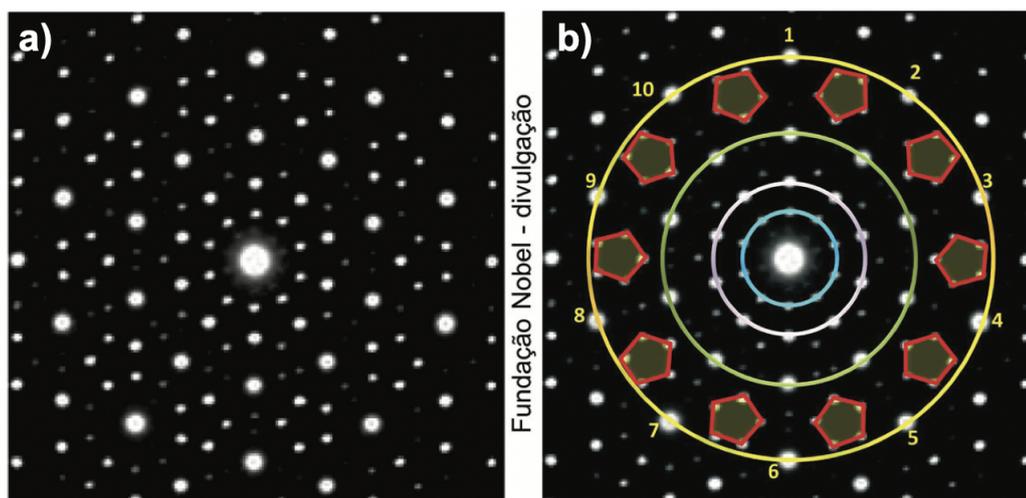


Figura 10 – **Esquerda:** Ilustração esquemática do padrão de difração obtido por Daniel Shechtman. **Direita:** Ilustração do padrão de difração contendo círculos concêntricos com 10 pontos cada um e figuras com simetria de ordem 5. A razão entre os raios dos círculos adjacentes é de aproximadamente 1.6. Fonte: [82]

têm periodicidade translacional como os cristais convencionais. A operação de translação é essencial para gerar cristais, mas existem outras operações de simetria fundamentais dentro dos cristais, como por exemplo a rotação, que também produz repetição. A translação envolve o deslocamento de um objeto de um ponto a outro sem alterar sua orientação, enquanto a rotação envolve girar o objeto ao redor de um eixo fixo, repetindo seu padrão a cada rotação completa [82]. Nessa época, já havia um modelo padrão que estabelecia que simetrias rotacionais da ordem de 1, 2, 3, 4 ou 6 (respectivamente rotações de 360° , 180° , 120° , 90° e 60°) existiam em cristais, mas ainda não tinha sido observadas em quasicristais.

Em 1984 uma análise teórica de Levine e Steinhardt alavancou a discussão científica sobre a descoberta dos quasicristais e estabeleceu as bases para esse novo campo de pesquisa, que revolucionou a física do estado sólido. Os resultados advindos dessa análise teórica, mostraram que os quasicristais apresentavam ordem, simetria rotacional e unidades de repetição. Após trinta anos, essa pesquisa foi reconhecida como um marco importante na ciência, e em 2011, Shechtman recebeu o Prêmio Nobel de Química [82] e no mesmo ano, o Prêmio Buckley de Física foi dado a Levine e Steinhardt por sua análise teórica [83, 84].

Num sólido os átomos ou moléculas podem estar distribuídos de três formas diferentes: organizados periodicamente (cristais), arranjados totalmente de forma aleatória (amorfos) ou seguindo uma estrutura ordenada não periódica, que é o caso dos quasicristais [85]. Isso acontece porque os cristais convencionais são objetos formados por conjuntos de átomos organizados no espaço periodicamente. A menor unidade de um cristal que se repete no espaço recebe o nome de célula unitária. Dentro dessa célula unitária, podem

ser encontrados desde um até milhares de átomos. Já os quasicristais, não possuem células unitárias. Eles também não possuem um padrão que se repete nas três dimensões do espaço. E, a proporção das distâncias entre os átomos está relacionada à proporção áurea da matemática, representada pela constante matemática τ (tau) [82]. Na Fig. 11, temos a imagem de um padrão de difração para um cristal, no qual é possível observar que os pontos mantêm a mesma distância. Já para os quasicristais, a distância entre os pontos

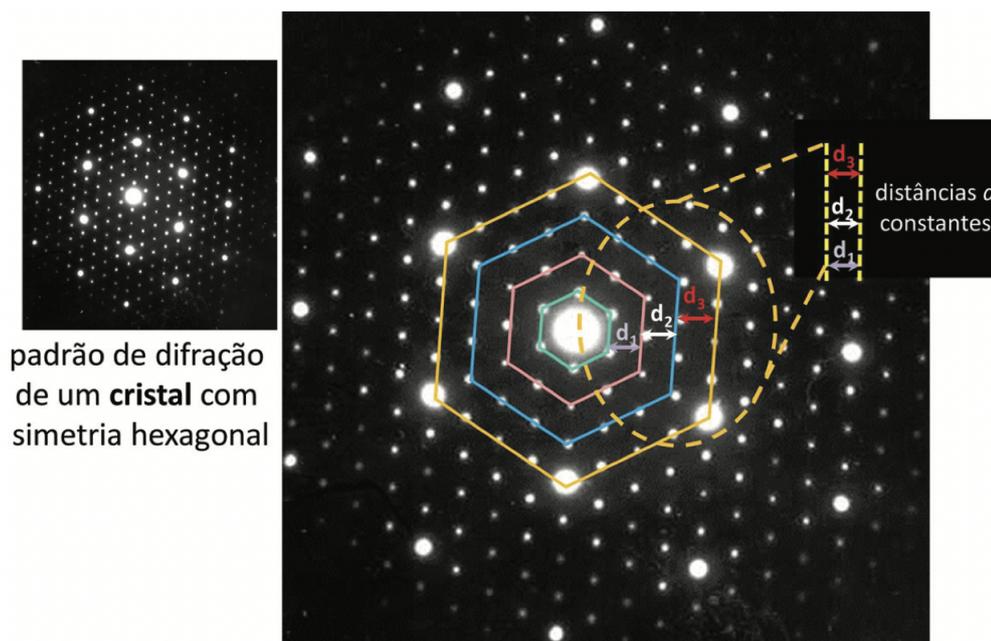


Figura 11 – Ilustração do padrão de difração de um cristal, no qual é possível observar que os pontos estão espaçados igualmente, ou seja, $d_1 = d_2 = d_3$. Fonte: [82]

crece proporcionalmente à razão áurea τ , como pode ser observado na Fig. 12.

Essas estruturas ordenadas de forma não periódica (quasicristais), podem ser definidas por uma fórmula matemática conhecida como regra de substituição baseada em duas camadas (*building blocks*) que exibem ordem de longo alcance, e que não possuem simetria translacional. Além disso, foi demonstrado que essas estruturas exibem propriedades de autossimilaridade em seus espectros [84, 86]. Um sistema autosimilar é aquele que guarda semelhança com uma parte de si mesmo em menor escala.

De um modo geral, essa nova classe de estruturas pode ser classificada em dois grupos: quasicristais (grupo 1) e todas as outras estruturas aperiódicas determinísticas (grupo 2). Os quasicristais (grupo 1) representam uma classe especial de estruturas aperiódicas determinísticas. Uma definição mais precisa e atualizada de quasicristais com dimensionalidade n ($n = 1, 2$ ou 3) é que, além de sua possível geração por um processo de substituição, eles também podem ser formados a partir da projeção de uma estrutura periódica apropriada em um espaço de dimensão superior mD , onde $m > n$ [83]. Em contrapartida, as estruturas que fazem parte das outras estruturas determinísticas (grupo 2) não podem ser construídas dessa maneira. Por exemplo, em uma dimensão

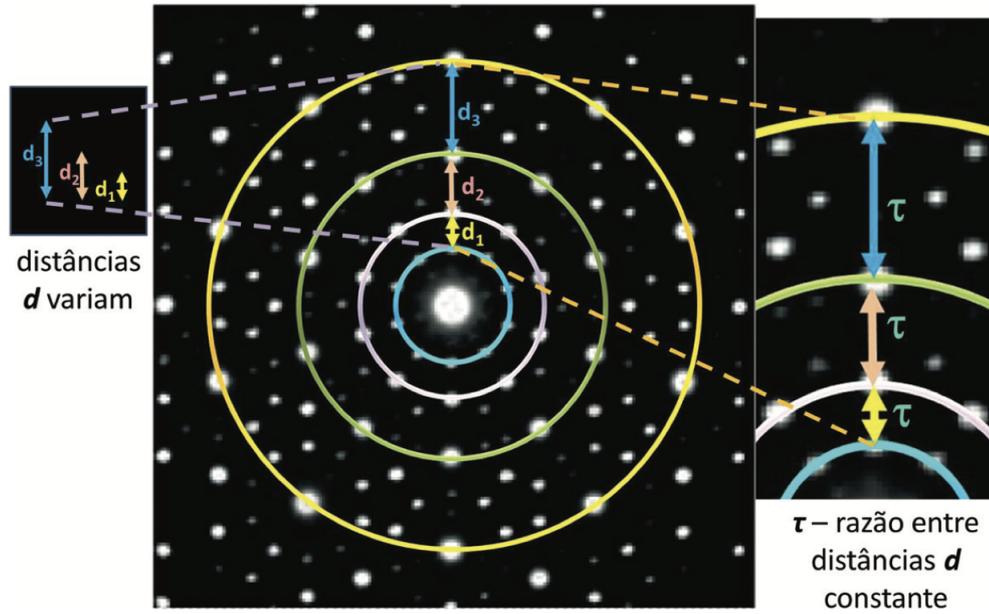


Figura 12 – Ilustração do padrão de difração de um quasicristal no qual é possível observar que os pontos não estão espaçados igualmente como no caso da Fig. 11, ou seja, $d_1 \neq d_2 \neq d_3$. A distância entre os pontos é uma série de Fibonacci e a razão entre as distâncias $d_2/d_1 \cong d_3/d_2 \cong 1.6$, é da ordem de 1.6, a razão áurea τ . Fonte: [82]

1D, as estruturas quasicristalinas incluem a sequência de Fibonacci e suas generalizações [87, 88, 89]. Exemplos de tais estruturas aperiódicas que diferem dos quasicristais e pertencem ao grupo 2 são os sistemas que obedecem às sequências Thue–Morse [90, 91], Período–Duplo [92]. A descoberta de quasicristais por Shechtman et al. em estado sólido abriu um novo campo de pesquisa em fotônica.

O estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em meios de camadas em quasicristais fotônicos teve seu início em 1987, com os trabalhos de Kohmoto et al. [93]. Neste trabalho pioneiro, os autores propuseram uma estrutura quasicristalina unidimensional (1D) (ou quasicristal fotônico) a partir de multicamadas dielétricas (A e B) com diferentes constantes dielétricas ϵ_A e ϵ_B para formar uma sequência de Fibonacci (a ordem das camadas é determinada pela regra que determina a estrutura) com a condição de um quarto de comprimento de onda. Desde então, uma grande variedade de trabalhos teóricos e experimentais sobre a propagação de ondas eletromagnéticas em sistemas quasiperiódicos fotônicos do (grupo 1) e outras estruturas aperiódicas determinísticas com ordem de longo alcance (grupo 2) foram estudadas e publicados [92, 94, 95, 96, 97]. Entre as aplicações dessas estruturas estão microcavidades ópticas [98], reflexão omnidirecional [99] e filtros ópticos de banda estreita com vários comprimentos de onda [100]. Além disso, esses sistemas também demonstraram ser uma alternativa interessante para a realização de dispositivos fotônicos, por exemplo, filtros ópticos com um espectro auto-similar e alta seletividade de comprimento de onda [12, 13].

2.2 Matriz de Transferência em Multicamadas Quasiperiódicas

2.2.1 A Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci é a sequência substitucional mais antiga dentre os estudos das sequências quasiperiódicas. O primeiro conceito foi introduzido pelo matemático italiano Leonardo Fibonacci, em 1202, para descrever o crescimento reprodutivo de uma população de coelhos após um período de um ano. As condições hipotéticas e ideais consideradas em seu livro eram as seguintes [101]:

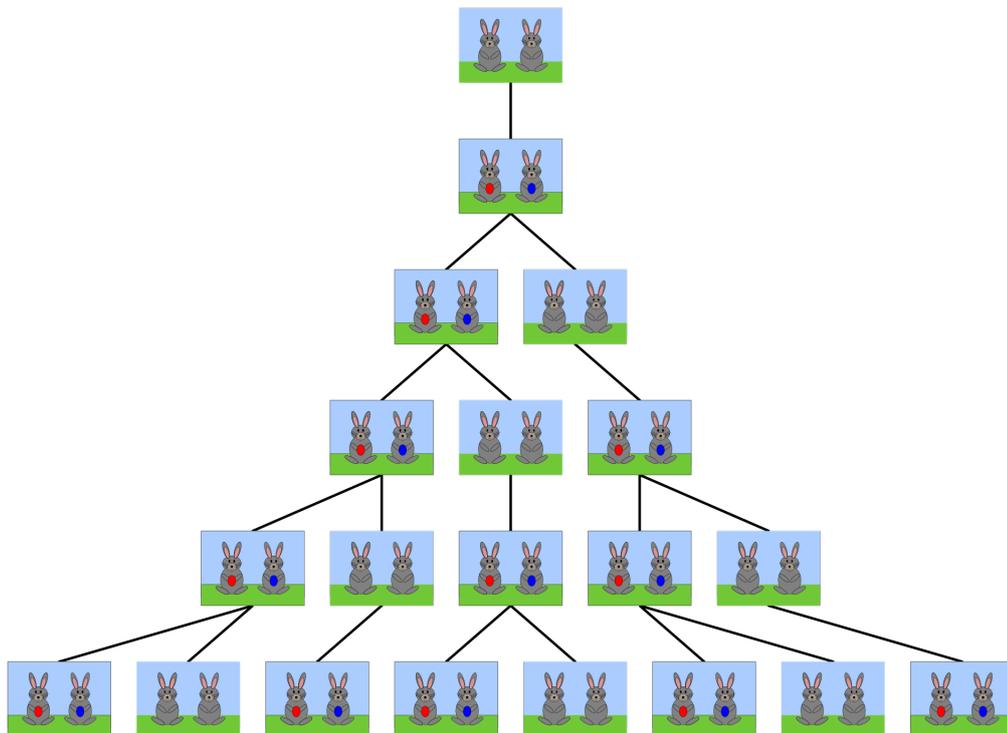


Figura 13 – Ilustração esquemática da sequência de Fibonacci, demonstrando o crescimento populacional de coelhos. Fonte: [102]

1. No primeiro mês temos um coelho macho e um coelho fêmea. Estes dois coelhos acabaram de nascer.
2. Um coelho só atinge a idade adulta, para procriação, ao fim de um mês.
3. O período de gestação de um coelho dura um mês.
4. Ao atingirem a idade adulta, a fêmea irá dar à luz todos os meses.
5. A mãe irá dar à luz, todos os meses, a um coelho macho e a uma coelha fêmea.
6. Os coelhos nunca morrem.

A narrativa desse experimento, muito bem descrita no artigo [101], diz que, no início da experiência, mês 0, existe apenas um par de coelhos. No mês seguinte, mês 1, os coelhos acasalaram mas ainda não deram à luz, portanto continuamos com um par de coelhos. No próximo mês, mês 2, já a fêmea deu à luz um par de coelhos, assim, existem agora dois pares de coelhos. No mês 3, ou seja, depois de decorridos 3 meses, o par inicial de coelhos dá à luz mais um par de coelhos, e o segundo par acasala, temos um total de três pares. Aos 4 meses, mês 4, o par original tem mais um par de coelhos, o par que nasceu no mês 2 também dá à luz e o par de coelhos que nasceu no mês 3 acasala, temos um total de cinco pares. Passados 5 meses do início da experiência, mês 5, todos os pares que nasceram até há dois meses dão à luz, temos um total de oito pares, e assim por diante, em todos os meses. Passado um ano do início da experiência temos um total de cento e quarenta e quatro pares de coelhos. A Fig. 13 ilustra o crescimento populacional dos coelhos seguindo a sequência de Fibonacci.

Fibonacci observou que, em cada geração de coelhos, existia uma relação entre essa geração e as duas gerações anteriores. Essa relação é uma recorrência linear de segunda ordem, definida pela equação:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 2. \quad (2.1)$$

Partindo de $F_0 = F_1 = 1$, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são:

$$F = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots \quad (2.2)$$

Essa sequência é infinita, e à medida que a ordem da geração aumenta ($n \gg 1$), a razão entre dois termos consecutivos, F_n/F_{n-1} , converge para $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1.61803398874$, que é um número irracional conhecido como a proporção áurea ou número áureo.

Um fato notável é que todos os termos da sequência de Fibonacci podem ser expressos em termos da proporção áurea, utilizando a relação:

$$F_n = \frac{\tau^n - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Ou seja, uma sequência de números inteiros é gerada por potências de números irracionais. Essa relação é conhecida na literatura como a *fórmula de Binet*. A *fórmula de Binet* demonstra a conexão profunda entre a sequência de Fibonacci e a matemática da proporção áurea, revelando como as propriedades dos números irracionais podem gerar uma sequência de números inteiros.

Em nosso caso, considere um quasicristal construído na forma de uma estrutura de multicamadas infinitas periódicas 1D, cujas camadas A e B se alternam seguindo a mesma lógica da sequência do crescimento populacional dos coelhos da Fig. 13.

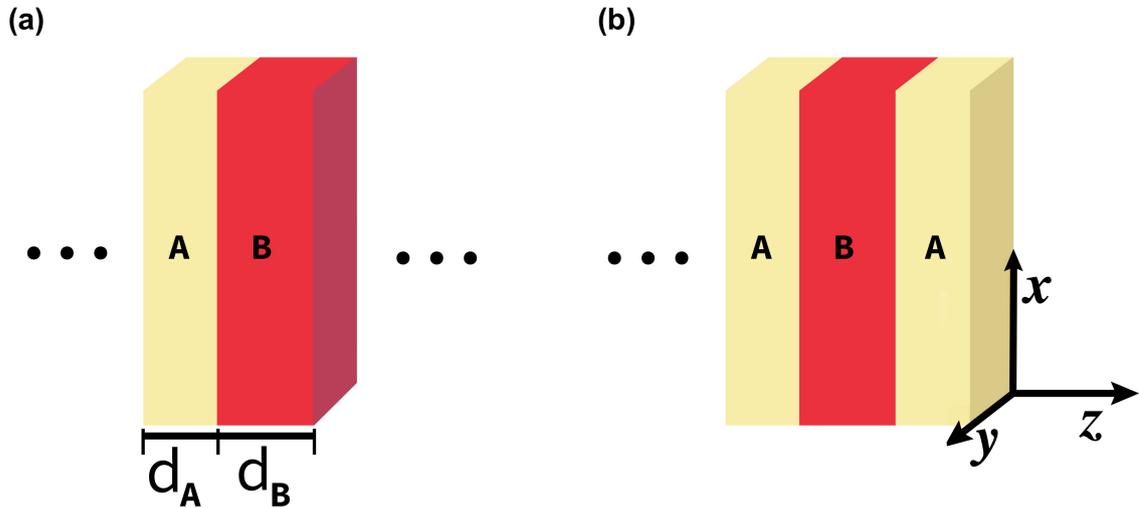


Figura 14 – Ilustração esquemática das células unitárias da (a) segunda e (b) terceira gerações de Fibonacci.

Como foi dito, a sequência de Fibonacci pode ser gerada via regra de inflação (também conhecida como regra de substituição):

$$A \rightarrow AB, \quad (2.3)$$

$$B \rightarrow A. \quad (2.4)$$

Isso significa que cada vez que encontramos um A , substituímos por AB , e cada vez que encontramos um B , substituímos por A . Ao continuar esse processo de substituição repetidamente, obtemos a sequência de Fibonacci.

$$A, B, AB, ABA, ABAAB, ABAABABA, \dots$$

Uma maneira equivalente de gerar a sequência de Fibonacci é pela relação de recorrência, adicionando duas gerações antecessoras para criar a seguinte, após especificar as condições iniciais, tal que, a n -ésima geração é dada por:

$$S_n = S_{n-1}S_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2, \quad (2.5)$$

no qual exige que as condições iniciais sejam $S_0 = B$ e $S_1 = A$. As primeiras gerações da sequência de Fibonacci são:

$$\begin{aligned}
S_0 &= [B] \\
S_1 &= [A] \\
S_2 &= [A|B] \\
S_3 &= [A|B|A] \\
S_4 &= [A|B|A|A|B] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Agora vamos discutir como o método da matriz de transferência é aplicado para obter a relação de dispersão para a estrutura da sequência de Fibonacci, conforme ilustrado na Fig. 14.

Para usar o teorema de Bloch, consideramos que cada sequência de letras, correspondente a uma determinada geração de uma sequência quasiperiódica, é a nova célula unitária do sistema, a qual é repetida periodicamente.

Para calcular as estruturas de bandas, com a célula unitária correspondente a uma determinada geração das sequências de Fibonacci, usamos as matrizes de transmissão e propagação Eqs. (1.60)-(1.69) para obter a matriz de transferência M_{S_n} para a estrutura e aplicamos a Eq. (1.80).

Uma vez conhecidas as matrizes de transferência M_{S_0} , M_{S_1} e M_{S_2} :

$$\begin{aligned}
M_{S_0} &= M_B \cdot M_{BB} \\
M_{S_1} &= M_A \cdot M_{AA} \\
M_{S_2} &= M_A \cdot M_{AB} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

podemos determinar a matriz de transferência para qualquer geração de Fibonacci a partir de $n \geq 3$, dada pela seguinte relação:

$$M_{S_n} = M_{S_{n-2}} \cdot M_{S_{n-1}}, \quad (2.6)$$

2.2.2 A Sequência de Thue–Morse

A sequência de Thue-Morse, ou sequência de Prouhet-Thue-Morse, foi evidenciada implicitamente pela primeira vez em um artigo registrado em 1850 pelo matemático francês Eugène Prouhet. Anos depois, esta sequência foi introduzida pelo norueguês Axel Thue

em 1906, em seu trabalho pioneiro para estabelecer o estudo das combinações de palavras. Posteriormente, em 1921, o matemático estadunidense Marston Morse redescobriu essa sequência e aplicou-a em seu trabalho sobre geometria diferencial [103]. Por causa desse trabalho, a sequência de Thue-Morse tornou-se mundialmente conhecida.

A sequência de Thue-Morse pode ser definida recursivamente. Começa-se com uma sequência inicial simples, tipicamente "0", e para cada iteração subsequente, aplica-se a regra de substituição:

$$0 \rightarrow 01, \tag{2.7}$$

$$1 \rightarrow 10. \tag{2.8}$$

Isso significa que cada vez que encontramos um 0, substituímos por 01, e cada vez que encontramos um 1, substituímos por 10. Ao continuar esse processo de substituição repetidamente, obtemos a sequência de Thue-Morse

$$t = 011010011001011010010110 \dots \tag{2.9}$$

Em nosso caso, considere um quasicristal construído na forma de estrutura de multicamadas infinitas periódicas 1D, cujas camadas *A* e *B* se alternam seguindo a mesma lógica da sequência de Thue-Morse.

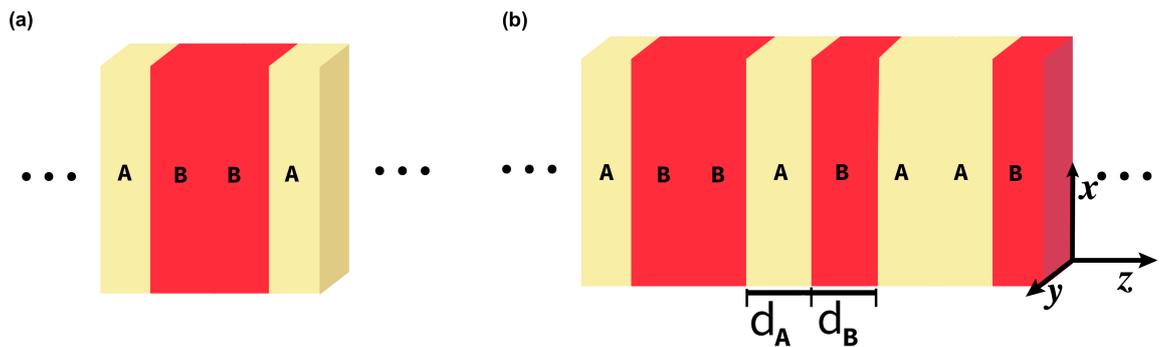


Figura 15 – Ilustração esquemática das células unitárias da (a) segunda e (b) terceira gerações de Thue-Morse.

Como foi visto, a sequência de Thue-Morse pode ser gerada por uma regra de substituição:

$$A \rightarrow AB, \tag{2.10}$$

$$B \rightarrow BA. \tag{2.11}$$

Isso significa que cada vez que encontramos um A, substituímos por AB, e cada vez que encontramos um B, substituímos por BA. Ao continuar esse processo de substituição repetidamente, obtemos a sequência de Thue-Morse.

$$A, AB, ABBA, ABBABAAB, ABBAABABBAABABBA, \dots$$

Uma maneira equivalente de gerar a sequência de Thue-Morse é via regra de recorrência para $n \geq 2$:

$$S_n = S_{n-1}S_{n-1}^+ \quad \text{para } n \geq 2, \quad (2.12)$$

no qual exige que as condições iniciais sejam $S_0 = A$ e $S_0^+ = B$. Aqui, o conjugado de uma geração dada S_n^+ é obtido trocando A por B e B por A na geração original S_n . As primeiras gerações da sequência de Thue-Morse são:

$$\begin{aligned} S_0 &= [A] \\ S_1 &= [A|B] \\ S_2 &= [A|B|B|A] \\ S_3 &= [A|B|B|A|B|A|A|B] \\ S_4 &= [A|B|B|A|B|A|A|B|B|A|A|B|A|B|B|A] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Agora vamos discutir como o método da matriz de transferência é aplicado para obter a relação de dispersão para a estrutura de Thue-Morse, conforme ilustrado na Fig. 15.

Para usar o teorema de Bloch, consideramos que cada sequência de letras, correspondente a uma determinada geração de uma sequência quasiperiódica, é a nova célula unitária do sistema, a qual é repetida periodicamente.

Para calcular as estruturas de bandas, com a célula unitária correspondente a uma determinada geração das sequências de Thue-Morse, usamos as matrizes de transmissão e propagação Eqs. (1.60)-(1.69) para obter a matriz de transferência M_{s_n} para a estrutura quasiperiódica e aplicamos a Eq. 1.80.

Uma vez conhecidas as matrizes de transferência M_{S_0} , M_{S_1} e M_{S_2} :

$$\begin{aligned}
 M_{S_0} &= M_A \cdot M_{AA} \\
 M_{S_1} &= M_A \cdot M_{AB} \\
 M_{S_2} &= M_A \cdot M_{AB} \cdot M_B \cdot M_{BB} \cdot M_B \cdot M_{BA} \cdot M_A \cdot M_{AA} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

podemos determinar a matriz de transferência para qualquer geração de Thue–Morse a partir de $n \geq 3$, dada pela seguinte relação:

$$M_{S_n} = M_{S_{n-2}} \cdot M_{S_{n-3}} \cdot M_{S_{n-2}} \cdot M_{S_{n-3}}^{-1} \cdot M_{S_{n-1}}, \quad (2.13)$$

2.2.3 A Sequência de Período–Duplo

A sequência de Período–Duplo, que é também conhecida como Fibonacci generalizada, pode ser obtida pela regra de substituição

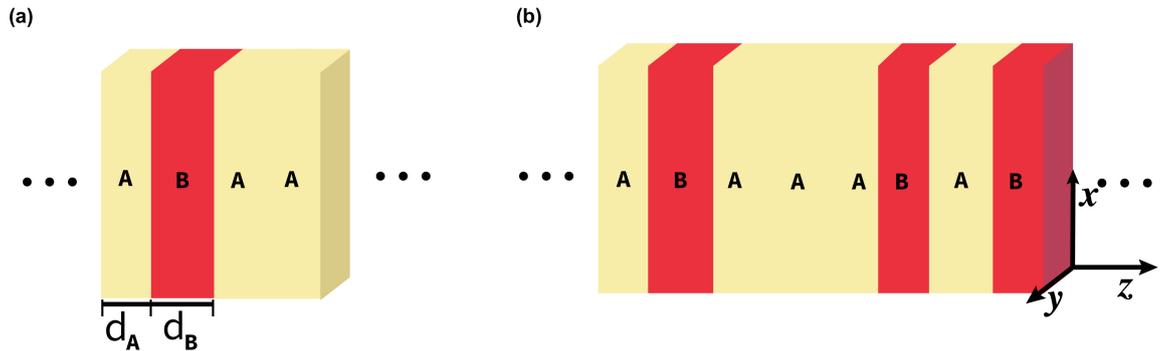


Figura 16 – Ilustração esquemática das células unitárias da (a) segunda e (b) terceira gerações de Período–Duplo.

$$A \rightarrow AB, \quad (2.14)$$

$$B \rightarrow AA. \quad (2.15)$$

Isso significa que cada vez que encontramos um A, substituímos por AB, e cada vez que encontramos um B, substituímos por AA. Ao continuar esse processo de substituição repetidamente, obtemos a sequência de Período–Duplo.

$$A, AB, ABAA, ABAAABAB, ABAAABABABAAAAAB, \dots$$

Uma maneira equivalente de gerar a sequência de Período–Duplo é via regra de recorrência para $n \geq 2$:

$$S_n = S_{n-1}S_{n-1}^+, \quad (2.16)$$

onde

$$S_n^+ = S_{n-1}S_{n-1} \quad \text{para } n \geq 2, \quad (2.17)$$

As condições iniciais são $S_0 = A$ e $S_1 = AB$. Listamos abaixo as primeiras gerações da sequência de Período–Duplo:

$$\begin{aligned} S_0 &= [A] \\ S_1 &= [A|B] \\ S_2 &= [A|B|A|A] \\ S_3 &= [A|B|A|A|A|B|A|B] \\ S_4 &= [A|B|A|A|A|B|A|B|A|B|A|A|A|B|A|A] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Agora vamos demonstrar como o método da matriz de transferência é aplicado para obter a relação de dispersão para a estrutura da sequência de Período–Duplo, conforme ilustrado na Fig. 16.

Para usar o teorema de Bloch, consideramos que cada sequência de letras, correspondente a uma determinada geração de uma sequência quasiperiódica, é a nova célula unitária do sistema, a qual é repetida periodicamente.

Para calcular as estruturas de bandas, com a célula unitária correspondente a uma determinada geração das sequências de Período–Duplo, podemos usar as matrizes de transmissão e propagação Eqs. (1.60)-(1.69) para obter a matriz de transferência M_{S_n} para a estrutura quasiperiódica e aplicar Eq. 1.80.

Uma vez que conhecemos as matrizes de transferência M_{S_0} , M_{S_1} e M_{S_2} :

$$\begin{aligned} M_{S_0} &= M_A \cdot M_{AA} \\ M_{S_1} &= M_A \cdot M_{AB} \\ M_{S_2} &= M_A \cdot M_{AB} \cdot M_B \cdot M_{BA} \cdot M_A \cdot M_{AA} \\ &\vdots \end{aligned}$$

podemos determinar a matriz de transferência para qualquer geração de Período–Duplo a partir de $n \geq 2$, dada pela seguinte relação:

$$M_{S_n} = M_{S_{n-2}} \cdot M_{S_{n-2}} \cdot M_{S_{n-1}}. \quad (2.18)$$

2.3 Resultados Numéricos

Nesta seção, apresentamos os resultados numéricos para as estruturas de bandas, auto-similaridades e espectros fractais para ondas eletromagnéticas normalmente incidentes em cristais fotônicos quasiperiódicos seguindo as sequências de Fibonacci, Thue–Morse e Período–Duplo.

A partir de agora, assumimos que essas estruturas consistem em dois blocos de camadas alternadas, representados por A e B , ambos materiais não magnéticos, ou seja, $\mu_A = \mu_B = 1$. As quantidades das camadas A e B são determinadas pelas razões $X = d_B/d_A = 1.0$ e $n_{BA} = n_B/n_A = 0.28$. Definimos uma frequência média $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = 10^9$ rad/s, sendo o comprimento de onda central λ_0 . Assim, as estruturas de bandas são todas dadas em termos do vetor de onda adimensional $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$ e do vetor de onda de Bloch normalizado QD/π , onde $\omega_0 = \omega_0/c$, $c = 1/(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}$ é a velocidade da luz no vácuo, e $D = d_a + d_b$ é o tamanho da célula unitária.

Sistema de Multicamadas de Fibonacci

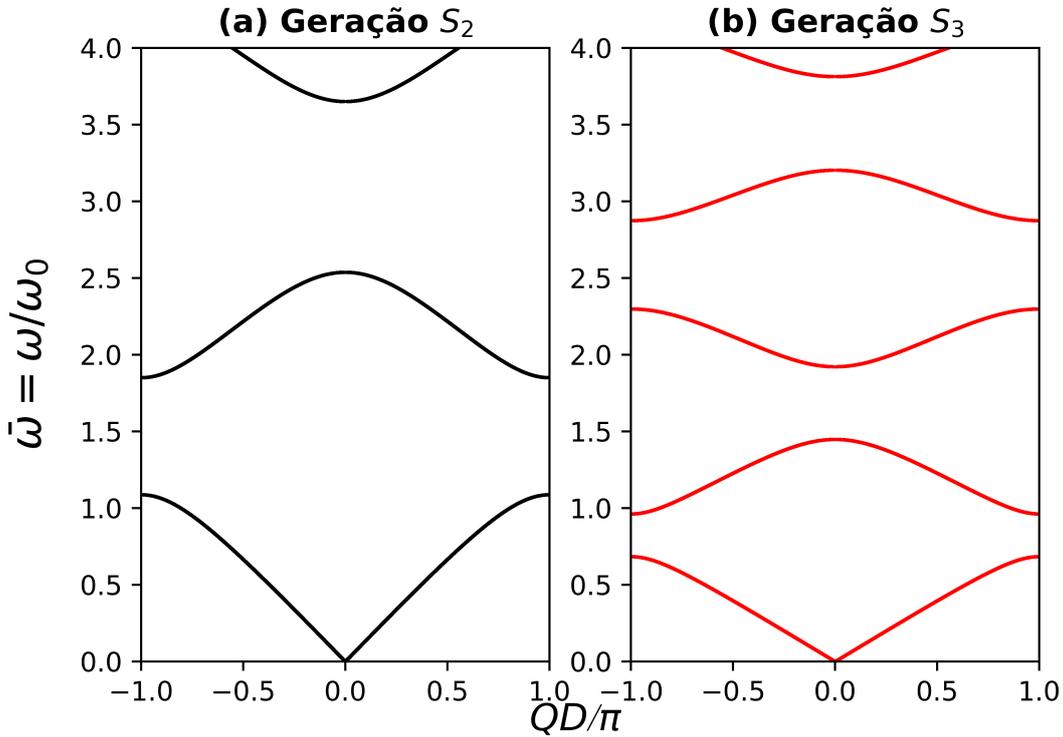


Figura 17 – Estrutura de bandas para a segunda e terceira geração de Fibonacci, (a) S_2 , (b) S_3 , considerando os seguintes parâmetros do sistema: $X = 1.0$ e $n_{BA} = 0.28$.

Na geração S_2 de Fibonacci, representada pela Fig. 17(a), podemos ver que os *bandgaps* são mais largos do que a geração S_3 da Fig. 17(b). Por outro lado, nas gerações

S_3 de Fibonacci Fig. 17(b), mais bandas emergem e são mais estreitas do que na Fig. 17(a). O número de bandas aumenta devido ao crescimento das camadas da célula unitária. Na Fig. 17(a), a célula unitária é $[A][B]$, com duas camadas, enquanto que na Fig. 17(b), a célula unitária é formada por $[A|B|A]$, com três camadas no total. Assim, na geração S_3 as bandas são mais estreitas e, conseqüentemente, surgem mais PBGs.

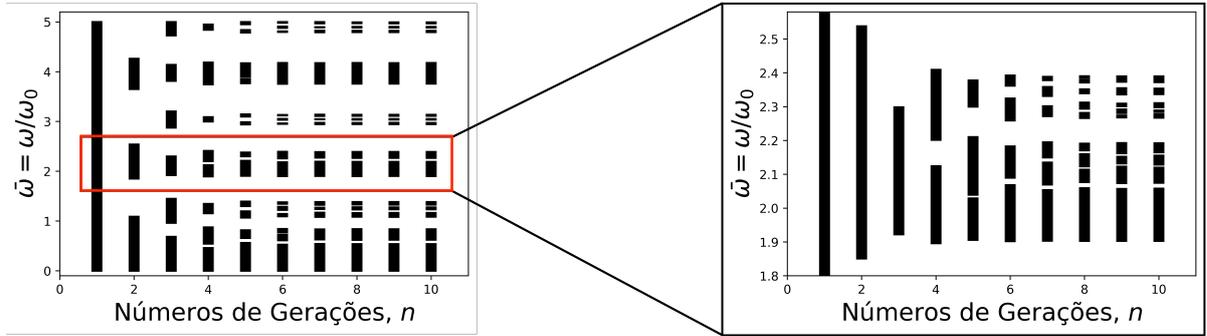


Figura 18 – Distribuição das larguras das bandas permitidas para a sequência de Fibonacci com $X = 1.0$, com $n_{BA} = 0.28$ em função do número de geração n . Para ilustrar melhor o comportamento auto-similar dos espectros, mostramos um zoom da sub-região, destacada por retângulo vermelho, do espectro principal.

Na Fig. 18, ao variar o número de gerações n ($= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$), é possível observar o surgimento de várias sequências de faixas pretas e espaços brancos. Cada barra preta representa a largura de banda da estrutura das gerações S_n ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e 10) da sequência de Fibonacci.

Para $n = 2$, temos a primeira barra preta que começa em $\bar{\omega} = 0.0$ e termina em $\bar{\omega} \approx 1.3$. Essa barra representa a largura da primeira banda permitida da Fig. 17(a). Em seguida, há um espaço em branco que representa a largura do *bandgap*, que se estende de $\bar{\omega} = 1.3$ até $\bar{\omega} \approx 1.7$.

Observa-se que, ao variar o número de gerações n ($0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$), ocorre o processo de fragmentação das bandas permitidas, possibilitando o surgimento de novas bandas permitidas em regiões do espectro que antes eram *gaps*. Propriedades físicas semelhantes frequentemente ocorrem em cristais semicondutores quando dopados com impurezas ou defeitos [104].

Em quasicristais fotônicos unidimensionais, essa propriedade surge sem a necessidade de introduzir defeitos no sistema. Em outras palavras, podemos criar modos de propagação permitido em regiões na faixa de *gap* usando um sistema de multicamadas formado por materiais dispostos de acordo com sequência quasiperiódica, apenas modificando o número de gerações do sistema. Isso pode ser verificado comparando os espectros da segunda e terceira geração apresentados na Fig. 17(a)-(b).

O resultado obtido na Fig. 18 é um indício qualitativo que o espectro de bandas é

um fractal. Isso significa que, se pegarmos um fractal (quasicristal) e ampliarmos a Fig. 18, veremos que as partes que a compõem serão semelhantes ou exatamente iguais a sua forma original. À medida que olhamos mais de perto, iremos observar que essas partes são compostas por formas menores que o original, que por sua vez são compostas por formas ainda menores, e assim por diante. Essa propriedade é chamada de auto-similaridade.

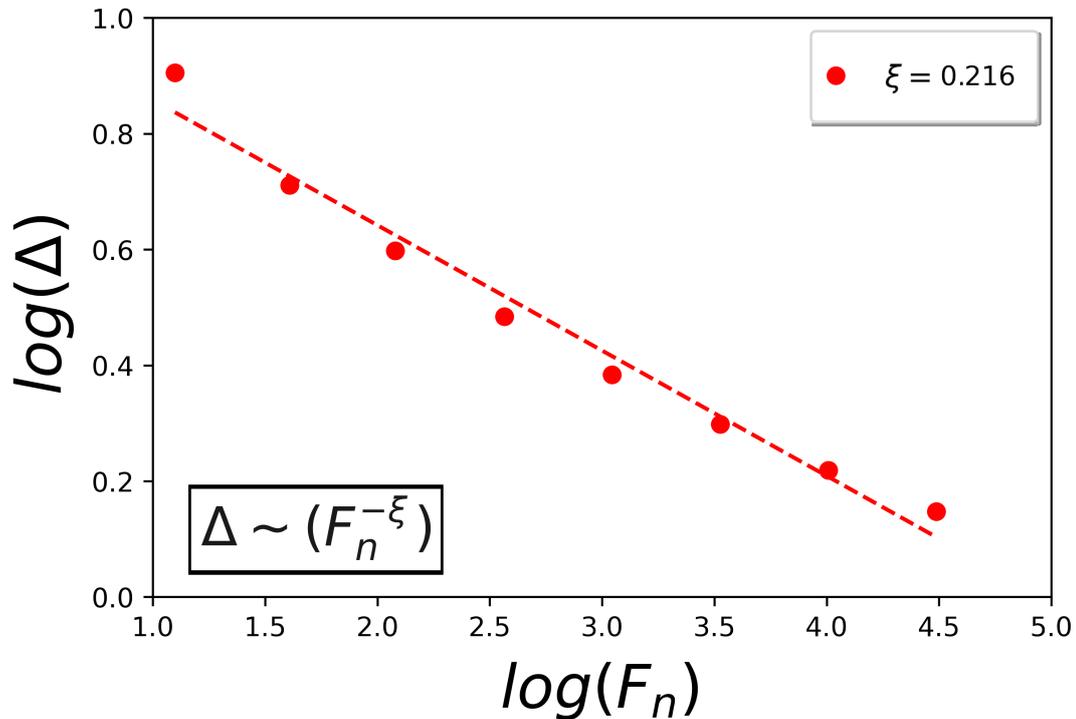


Figura 19 – Gráfico log-log para o espectro completo da sequência de Fibonacci. O valor de ξ é indicado no painel.

A largura total das bandas permitidas Δ , para uma dada geração n , obedece a uma lei de escala. Na Fig. 19 temos o gráfico log-log onde essa lei de escala é representada por $\Delta \sim (F_n)^{-\xi}$, sendo F_n o número de Fibonacci associado à n -ésima geração e ξ o expoente que pode ser interpretado como uma medida.

Esses gráficos sugerem um comportamento de lei de escala para as larguras das bandas permitidas, indicando que o espectro das ondas eletromagnéticas em estruturas de bandas de quasicristais fotônicos de Fibonacci é fractal.

Sistema de Multicamadas de Thue–Morse

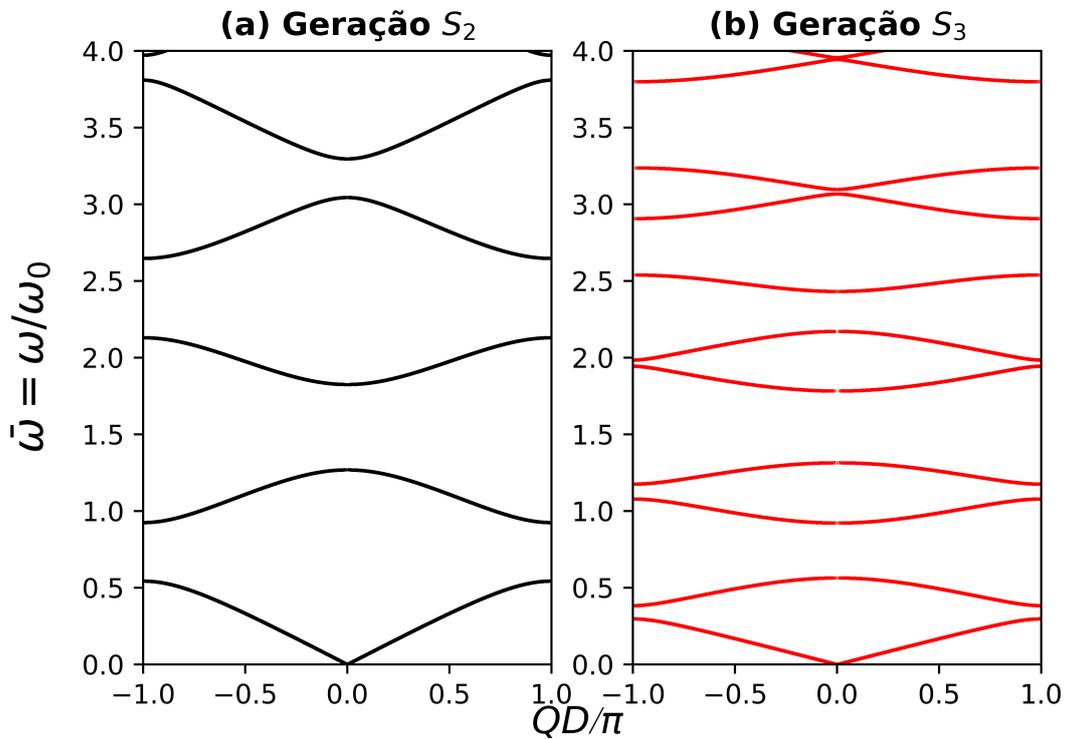


Figura 20 – Igual à Fig. 17, mas para a sequência de Thue–Morse.

O comportamento qualitativo das estruturas de bandas de Thue–Morse observadas nas Figs. 20(a)-(b), pode ser explicado de maneira semelhante ao comportamento das estruturas de bandas de Fibonacci, visto nas Figs. 17(a)-(b).

No entanto, há uma diferença sutil: na geração S_2 de Thue–Morse representada pela Fig. 20(a), o número de bandas é maior em comparação à Fig. 17(a). Esse aumento ocorre devido ao crescimento das camadas na célula unitária. Como pode ser visto, na Fig. 20(a), a célula unitária é $[A|B|B|A]$ com um total de quatro camadas, enquanto na Fig. 20(b), a célula unitária é formada por $[A|B|B|A|B|A|A|B]$, com um total de oito camadas. Assim, na geração S_3 , as bandas são mais estreitas e, conseqüentemente, surgem mais PBGs.

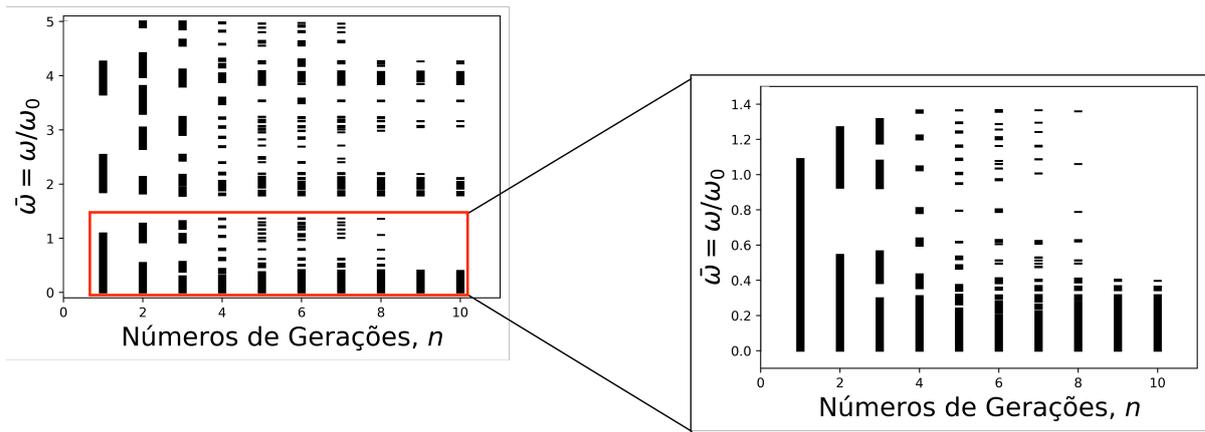


Figura 21 – Igual à Fig. 18, mas para a sequência de Thue-Morse.

Na Fig. 21, também exploramos qualitativamente a auto-similaridade e o comportamento fractal dos quasicristais fotônicos espaciais de Thue-Morse. O surgimento de faixas pretas e brancas pode ser explicado de forma análoga ao observado na sequência de Fibonacci.

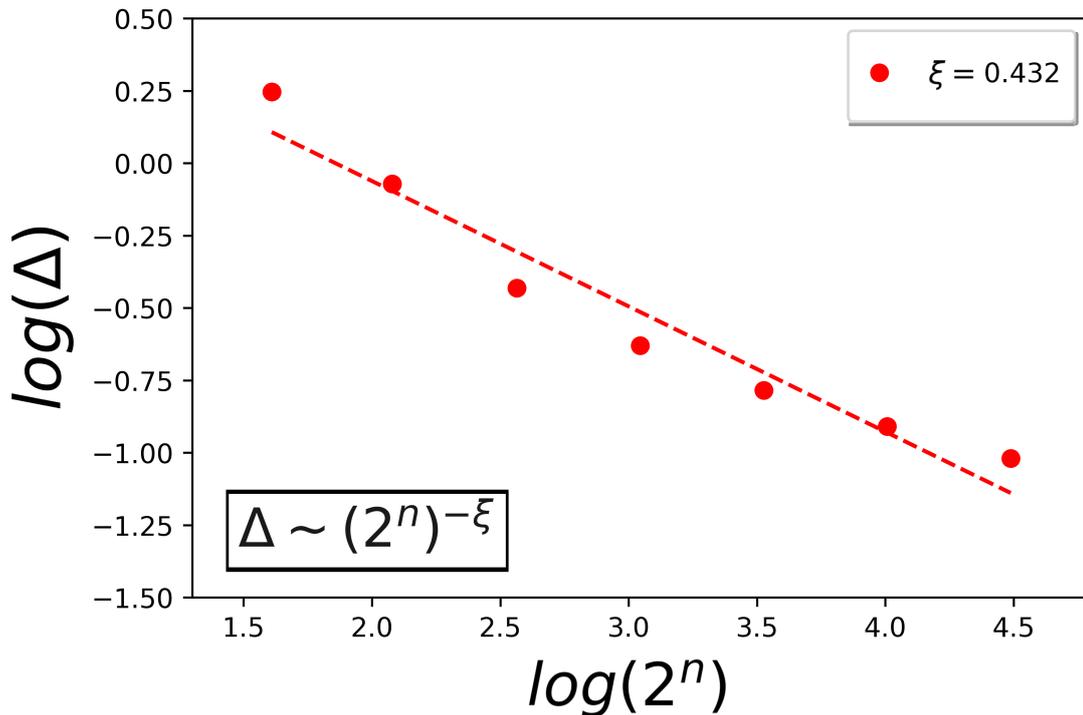


Figura 22 – Igual à Fig. 19, mas para a sequência de Thue-Morse.

Na Fig. 22 também temos o gráfico log-log no qual a lei de escala é representada por $\Delta \sim (2^n)^{-\xi}$. Esse gráfico sugere um comportamento de lei de escala para as larguras das bandas permitidas, indicando que o espectro das ondas eletromagnéticas em estruturas de bandas de quasicristais fotônicos de Thue-Morse é fractal.

Sistema de Multicamadas de Período-Duplo

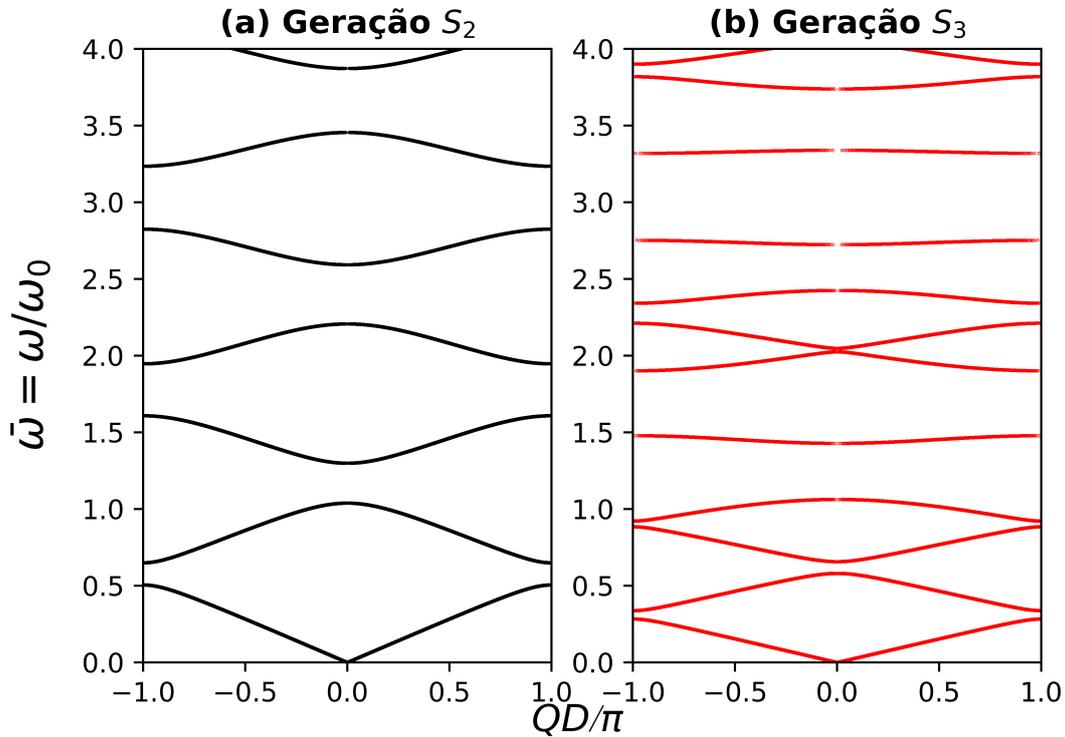


Figura 23 – Igual à Fig. 17, mas para a sequência de Período-Duplo.

O comportamento qualitativo das estruturas de bandas do Período-Duplo observadas nas Figs. 23(a)-(b), também pode ser explicado de maneira semelhante ao comportamento das estruturas de bandas de Fibonacci, visto nas Figs. 17(a)-(b).

No entanto, há uma diferença sutil: na geração S_2 de Período-Duplo representada pela Fig. 23(a), o número de bandas é maior em comparação à Fig. 17(a) e Fig. 20(a). Esse aumento ocorre devido ao crescimento das camadas na célula unitária. Como pode ser visto, na Fig. 23(a) a célula unitária é $[A|B|A|A|A|B|A|B]$, com um total de oito camadas, enquanto que na Fig. 23(b), a célula unitária é formada por $[A|B|A|A|A|B|A|B|A|B|A|A|A|B|A|A]$, com um total de dezesseis camadas. Assim, na geração S_3 da sequência de Período-Duplo, as bandas são mais estreitas do que as sequências de Fibonacci e Thue-Morse e, conseqüentemente, surgem mais PBGs.

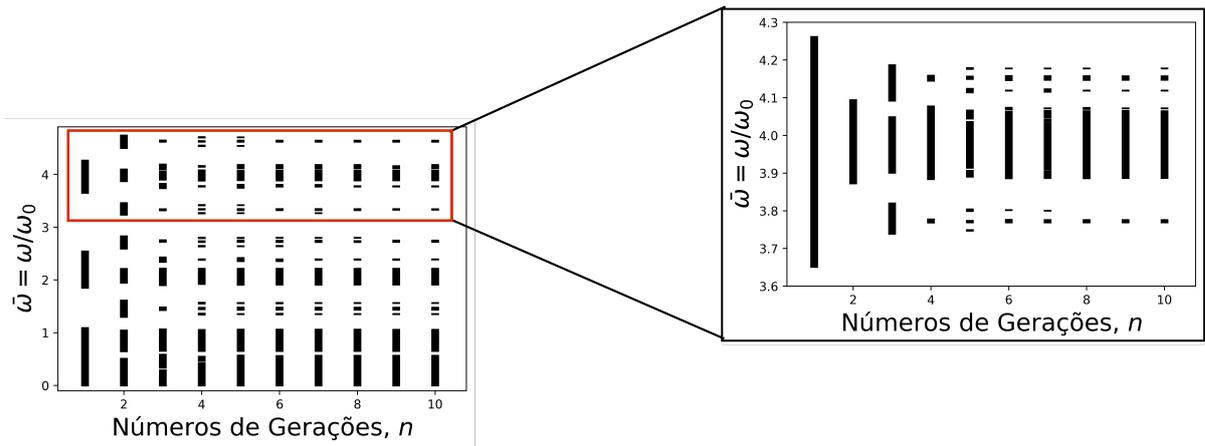


Figura 24 – Igual à Fig. 18, mas para a sequência de Período-Duplo.

Na Fig. 24, também exploramos de forma qualitativa a auto-similaridade e o comportamento dos fractais dos quasicristais fotônicos espaciais de Período-Duplo. O surgimento de faixas pretas e brancas pode ser explicado de forma análoga ao observado na sequência de Fibonacci.

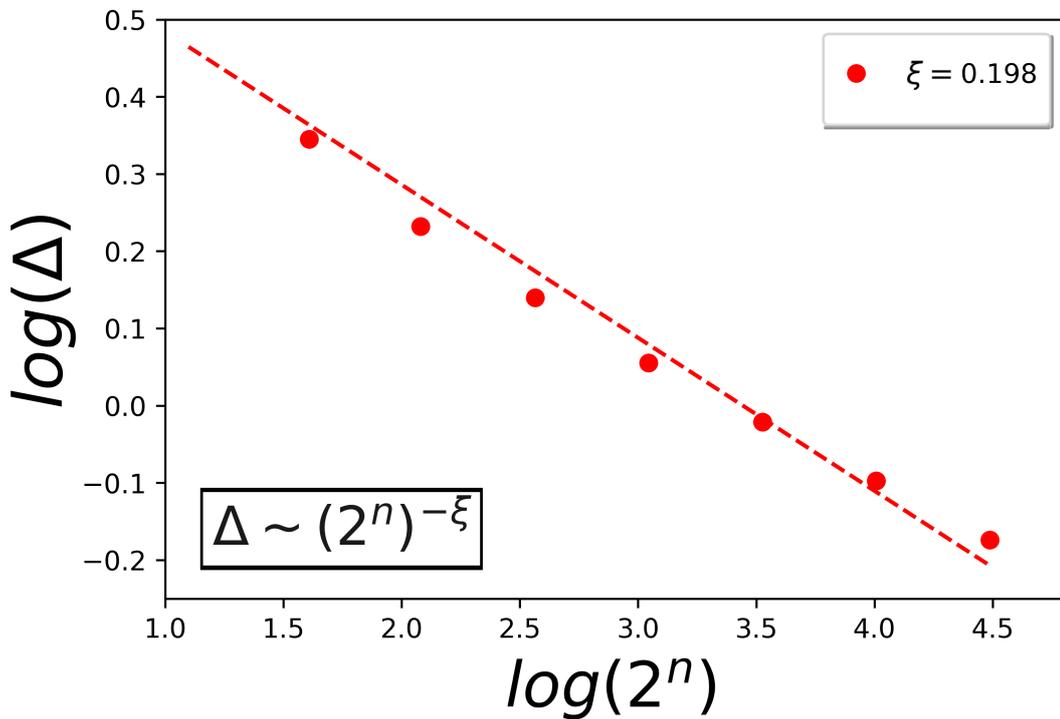


Figura 25 – Igual à Fig. 19, mas para a sequência de Período-Duplo.

Na Fig. 25 também temos o gráfico log-log no qual a lei de escala é representada por $\Delta \sim (2^n)^{-\xi}$. Esse gráfico sugere um comportamento de lei de escala para as larguras das bandas permitidas, indicando que o espectro das ondas eletromagnéticas em estruturas de bandas dos quasicristais fotônicos de Período-Duplo é fractal.

Parte III

Capítulo 3

3 Cristal Fotônico Axiônico

Neste capítulo, estamos interessados em empregar o método da matriz de transferência (TMM) para estudar a propagação de ondas de luz em um cristal fotônico axiônico unidimensional formado por multicamadas dielétricas alternadas (A e B), cujas propriedades dependem dos parâmetros axiônicos θ . Este método mostra como as ondas de luz interagem com a interface entre as camadas alternadas A e B de um cristal axiônico. Também apresentamos resultados numéricos para as estruturas de bandas fotônicas axiônicas em função das razões entre as permissividades $R = \epsilon_B/\epsilon_A$, dos tamanhos das camadas $X = d_B/d_A$ e do parâmetro axiônico $\delta = \pi^2(\theta_A - \theta_B)^2/\alpha^2$.

Portanto, esse capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 3.1, faremos uma breve introdução sobre isolantes topológicos. Em seguida, na seção 3.2, apresentaremos a técnica da matriz de transferência, para um cristal fotônico axiônico unidimensional formado por multicamadas dielétricas alternadas (A e B). Na seção 3.3, apresentamos os resultados numéricos obtidos para as estruturas de bandas fotônica desse cristal. E por fim, na seção 3.4, apresentaremos uma conclusão geral desses resultados.

Para uma introdução completa da eletrodinâmica axiônica veja as Refs. [105, 106]. Consulte também o apêndice A, onde mostramos resumidamente como podem ser construídas as equações de Maxwell modificadas por um parâmetro θ .

3.1 Introdução

Recentemente, pesquisadores começaram a estudar sistemas topológicos quânticos e descobriram uma nova classe de matéria, os chamados isolantes topológicos (TIs) [107, 108]. Com os avanços nessa área de pesquisa, surgiram novas classes de TIs, como isolantes topológicos cristalinos, isolantes axônicos, isolantes topológicos de ordem superior, semi-metais topológicos e supercondutores topológicos, [109, 110, 111, 112]. Em geral, os TIs são materiais que apresentam *bandgaps*, mas cujas bandas são topologicamente distintas das bandas de um isolante convencional. Essas diferenças estão relacionadas com o surgimento de *bandgaps* não triviais percebidos pela primeira vez em TIs 2D, também conhecidos como isolante Hall de spin quântico 2D [107, 113]. Assim, a propagação de elétrons dentro de um TI não é permitida, mas os elétrons de borda podem se mover livremente como modos de superfície. Portanto, a superfície de um TI, é preenchida com estados exóticos de bordas topologicamente protegidos, o que significa que o transporte de energia nas bordas é topologicamente protegido e robusto contra perturbações e desordem estruturais. Muitas demonstrações teóricas e experimentais de TIs foram relatadas para sistemas eletrônicos (fermiônicos) [112, 114, 115]. Do ponto de vista experimental, os seguintes

materiais foram caracterizados como (i) 2D TIs: (Hg,Cd)Te, monocamada hexagonal-Sn, Sb; e (ii) TIs 3D: (Bi,Sb)₂(Se,Te)₃, (Bi,Sb)₂Te₂ Se, Bi_{2-x}Sb_xTe_{3-y}Se_y, TlBi(S,Se,Te)₂, Pb(Bi,Sb)₂Te₄, GeBi₂Te₄, PbBi₄Te₇ [115]. Todos esses materiais têm atraído crescente interesse fundamental e tecnológico em todo o mundo devido às suas excelentes propriedades e características como Dissipação de Baixa Potência, Elétrons Spin-Polarizados [116] e muito mais. [117, 118, 119, 120].

No contexto dos TIs, destaca-se o isolante axiônico [110, 121]. Os áxions são partículas pseudo-escalares ¹ de pouca massa que interagem fracamente e são eletricamente neutras. No entanto, mesmo sem carga elétrica, eles podem interagir de maneira incomum com o campo eletromagnético. Eles foram postulados em 1977, pelos físicos Peccei e Quinn, para explicar a ausência de violação de paridade de carga na forte interação entre quarks na física de altas energias [122]. Apesar da intensa pesquisa, os áxions ainda não foram observados na natureza. A conexão entre áxions e TIs se baseia no fato de que um termo da forma $\theta(\vec{B} \cdot \vec{E})$ pode ser adicionado à Lagrangiana de Maxwell padrão sem modificar as leis familiares da eletricidade e magnetismo. O termo θ é conhecido em física de partículas como campo axiônico, mas em matéria condensada $\theta(\vec{B} \cdot \vec{E})$ é uma expressão genérica que pode ser aplicada em materiais magnetoelétricos, por exemplo, em Cr₂O₃ (com $\theta \ll \pi$) [123, 124, 125]. De fato, um desenvolvimento notável em TIs 3D é o chamado efeito magnetoelétrico topológico (TME), no qual se espera que a indução cruzada da magnetização e polarização elétrica ocorra pela aplicação dos campos elétricos e magnéticos externos. Este efeito aparece na eletrodinâmica do axion conhecida por descrever as propriedades magnetoelétricas incomuns de TIs 3D [126, 127, 128, 129]. Por essas razões, o TME que aparece em TIs foi chamado de “eletrodinâmica de axion” [130]. Pode-se entender que, no contexto da eletrodinâmica, o comportamento dos áxions é análogo ao comportamento dos TIs. Portanto, os áxions surgiram naturalmente na física da matéria condensada como uma teoria efetiva de baixas energias para TIs, no qual resulta em uma teoria de calibre de Chern-Simons (“invariante” de calibre) para descrever os estados de borda e a correspondência entre o bulk e a borda nesses materiais [131, 132].

¹ pseudo-escalares: são quantidades escalares que mudam de sinal quando o sentido de orientação do sistema de coordenadas é invertido.

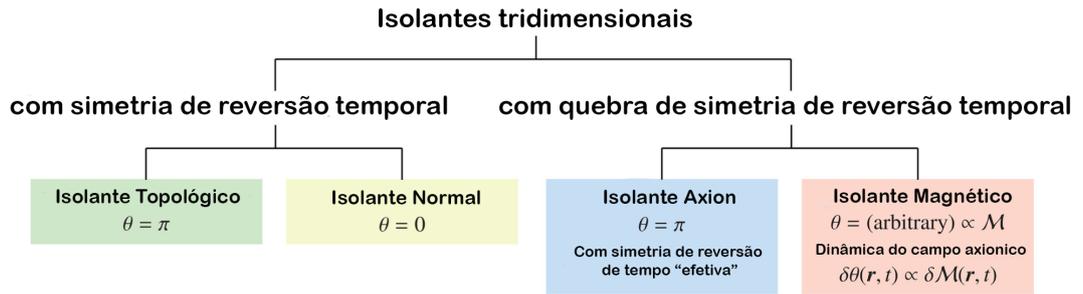


Figura 26 – Esquema de classificação dos isolantes topológicos 3D que apresentam um efeito magnetoeletrico quantizado caracterizados em termos da simetria de reversão temporal e do coeficiente de acoplamento magnetoeletrico orbital θ . FONTE: adaptado de [132].

Reversão de tempo	Inversão	Valores de $\theta \pmod{2\pi}$
✓	✓	0 ou π
✓	×	0 ou π
×	✓	0 ou π
×	×	Arbitrário

Figura 27 – Tabela esquemática referente a Fig. 26 onde os símbolos de ✓ e × indicam a presença e a ausência de simetrias em TI’s 3D. Fonte: adaptado de [132].

No início deste século, Haldane e Raghu investigaram pela primeira vez o análogo eletromagnético do TI eletrônico, que é o chamado isolante topológico fotônico (TPI) [133, 134, 135, 136, 137]. Em seus trabalhos, eles previram que os cristais fotônicos feitos de materiais magneto-ópticos poderiam ter bandas topologicamente não triviais, portanto, os estados de luz são topologicamente protegidos e se propagam unidirecionalmente ao longo das bordas, sem possibilidade de retroespalhamento. No TPI, a estrutura de bandas é caracterizada por esses estados de borda que aparecem como bandas contínuas cruzando o *bandgap* fotônico. Como consequência, a luz pode se propagar unidirecionalmente na superfície do TPI sem espalhar [138], de uma maneira muito semelhante aos elétrons na superfície de um TI 2D [117, 139, 140]. A descoberta de sistemas fotônicos topológicos transformou a nossa visão sobre a propagação de ondas eletromagnéticas e abriu um leque de possibilidades para exploração da maneira como transportamos essas ondas no campo da ciência dos materiais. Também levou ao entendimento de que grande parte da física associada ao efeito Hall quântico não era fundamentalmente quântica, mas sim um fenômeno de onda muito geral [137]. Do ponto de vista experimental, o isolante fotônico topológico 3D foi realizado experimentalmente usando um material composto consistindo de ressonadores de anel dividido com forte acoplamento magneto-elétrico, que se comporta como um TI “fraco” (ou seja, com um número par de superfícies formando um cone de Dirac), ou uma

ilha de isolantes Hall quântico de spin 2D [141]. Além disso, avanços recentes em TPI's topológicos 2D, 3D e de ordem superior foram observados [142]. Em geral, a vantagem desses materiais para a tecnologia é que os sistemas fotônicos topológicos prometem uma nova geração em dispositivos fotônicos e sistemas de comunicação [140, 143, 144].

O estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em meios de camadas é objeto de pesquisa há décadas. Por exemplo, em meios quirais e bi-isotrópicos [138]. Há também o crescente campo da fotônica topológica [136], que utiliza invariantes topológicos, como o número de Chern, para classificar e estudar cristais fotônicos. Uma delas é o empilhamento de dielétricos alternados em 1D, cujas propriedades podem ser mapeadas pelo modelo de Su-Schrieffer-Heeger, que possui duas fases topológicas distintas caracterizadas pelo número 0 ou 1 [145]. A interface entre cristais fotônicos topológicos com diferentes regiões topológicas pode sustentar os estados de borda de maneira semelhante à isolantes topológicos que têm estados de superfície condutivos [66, 73]. No entanto, pouca atenção tem sido dada à propagação de ondas eletromagnéticas em cristais axiônicos em camadas. Neste capítulo, usamos o poderoso método da matriz de transferência (TMM) para estudar a propagação de ondas de luz circularmente polarizadas através de multicamadas unidimensionais compostas por dois cristais fotônicos axiônicos (A e B), caracterizados pelo efeito magnetoelétrico, cujas propriedades são ditados pelo parâmetro topológico θ , muito semelhante ao que acontece na eletrodinâmica do axion. Até onde sabemos, esta é a primeira vez que o TMM é aplicado para estudar a propagação de ondas eletromagnéticas em cristais fotônicos axiônicos. Vale ressaltar aqui que neste capítulo estamos interessados em descrever as propriedades de um tipo de cristal fotônico, chamado na literatura de cristal axiônico [146] ou isolante topológico fotônico [147]. No entanto, para não gerar confusão ao leitor, vale ressaltar que o nosso sistema difere de sistema para um cristal fotônico com uma fase topológica não trivial. Para uma revisão da eletrodinâmica axiônica veja o apêndice A.

3.2 Modelo Físico

Consideramos um cristal fotônico axiônico 1D composto por um arranjo periódico de duas camadas A e B , com permissividade dielétricas ϵ_A e ϵ_B , permeabilidades magnéticas μ_A e μ_B , parâmetros topológicos θ_A e θ_B e espessuras d_A e d_B , conforme descrito na Fig. 28. Escolhemos um sistema de coordenadas tal que o cristal fotônico topológico seja perpendicular ao eixo z . Ao longo de todo esse estudo, usamos unidades SI.

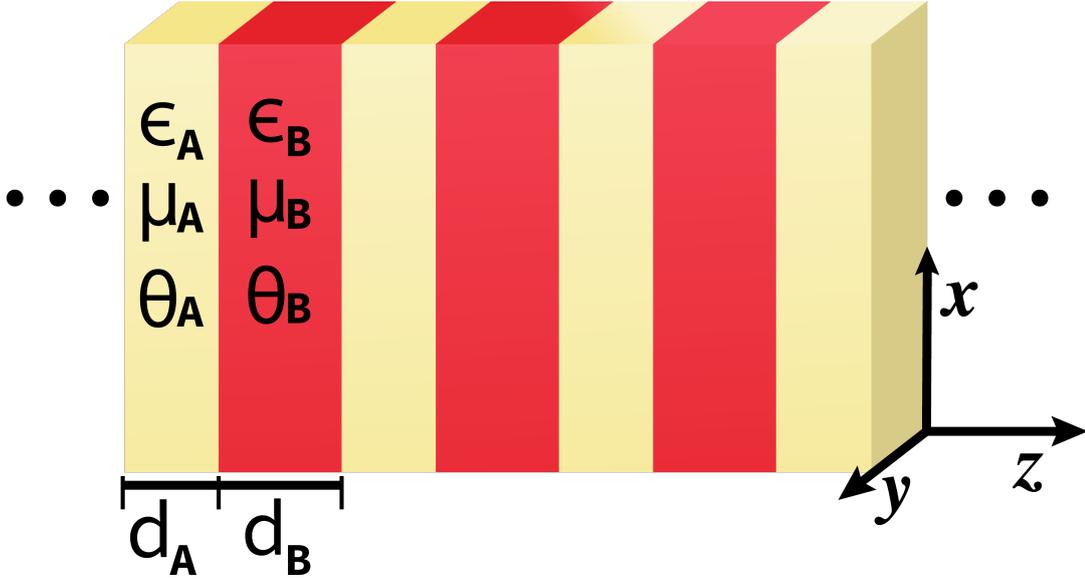


Figura 28 – Esquema de um APC-1D formado por camadas alternadas A e B . Fonte: Essa imagem é autoral.

Aqui, assumimos que a permissividade elétrica $\epsilon(\vec{r})$, a permeabilidade magnética $\mu(\vec{r})$ e os parâmetros topológicos $\theta(\vec{r})$ são reais, isotrópicos, não dispersivos e periódicos, com vetor de translação $\vec{R} = D\hat{z}$, onde $D = d_A + d_B$ é o tamanho da célula unitária, ou seja,

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r} + \vec{R}) \Rightarrow \epsilon(z) = \epsilon(z + D), \quad (3.1)$$

$$\mu(\vec{r}) = \mu(\vec{r} + \vec{R}) \Rightarrow \mu(z) = \mu(z + D), \quad (3.2)$$

e

$$\theta(\vec{r}) = \theta(\vec{r} + \vec{R}) \Rightarrow \theta(z) = \theta(z + D). \quad (3.3)$$

Usando uma analogia com a eletrodinâmica clássica do axion, as relações constitutivas modificadas, com o termo topológico adicional representado por θ , são [14, 129, 148]

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} - \frac{\epsilon_0 \alpha c \theta(\vec{r})}{\pi} \vec{B}, \quad (3.4)$$

e

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} + \frac{\alpha \theta(\vec{r})}{\mu_0 c \pi} \vec{E}. \quad (3.5)$$

Aqui, \vec{E} e \vec{D} são os campos elétricos e deslocamento elétrico, \vec{H} e \vec{B} são os campos de intensidade magnética e fluxo magnético. Além disso, $\alpha \approx 1/137$ é a constante de estrutura fina, θ é o parâmetro topológico adimensional, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ é a velocidade da luz no vácuo, enquanto ϵ_0 e μ_0 são as permissividades elétricas e a permeabilidade magnética do vácuo. Nas Eqs. (4.4) e (4.5), a permissividade elétrica ϵ e a permeabilidade magnética μ são dadas por $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_j$ e $\mu = \mu_0 \mu_j$, onde ϵ_j e μ_j ($j = A$ ou B) são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética relativa, correspondentes à camada A ou B . Outro ponto

importante é que, no contexto clássico, o termo θ pode assumir quaisquer valores e, em geral, esse parâmetro caracteriza o estado da matéria [130].

As equações de Maxwell para sistemas livres de fontes e correntes com campos monocromáticos e oscilantes, ou seja, $\vec{D}, \vec{H} \propto e^{-i\omega t}$, podem ser escritas como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (3.6a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.6b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}, \quad (3.6c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\omega \vec{D}. \quad (3.6d)$$

Aqui, ω é a frequência angular. Observe que as características magnetoelétricas são introduzidas nas relações constitutivas do material e não diretamente nas equações de Maxwell [130].

3.2.1 Método da Matriz de Transferência em Cristal Fotônico Axiônico

O método da matriz de transferência (TMM) é uma abordagem poderosa para a análise da propagação da luz através de qualquer meio de multicamada. No TMM, existem dois tipos de matrizes: (i) a matriz de transmissão, que conecta os campos através de uma interface, e (ii) a matriz de propagação, que descreve os campos que se propagam dentro de uma camada. Para obter ambas as matrizes, precisamos saber como as ondas eletromagnéticas se comportam nas interfaces aplicando as condições de contorno.

Para obter a matriz de transferência para o caso de incidência normal, consideramos a superposição de duas ondas com a mesma frequência cujos campos vibram em diferentes direções no eixo z . As condições de contorno que surgem do termo θ implicam que precisamos considerar a base circularmente polarizada \hat{v}_λ , com $\lambda = + (-)$ rotulando a direita (esquerda) rotação. Após algumas álgebras, descobrimos que os campos elétricos e magnéticos totais em um meio j ($= A, B$) são dados por:

$$\vec{E}_{j,\lambda} = [E_{j,\lambda} e^{ik_j z} \hat{v}_\lambda + E'_{j,\lambda} e^{-ik_j z} \hat{v}_\lambda] \quad (3.7)$$

e

$$\vec{H}_{j,\lambda} = [g_{j,\lambda} E_{j,\lambda} e^{ik_j z} \hat{v}_\lambda + \bar{g}_{j,\lambda} E'_{j,\lambda} e^{-ik_j z} \hat{v}_\lambda]. \quad (3.8)$$

Aqui, o vetor de onda real é $\vec{k}_j = (0, 0, k_j)$, com $k_j = n_j \omega / c$ e $n_j = \sqrt{\epsilon_j \mu_j}$ sendo o índice de refração do meio j -th. $E_{j,\lambda}$ ($E'_{j,\lambda}$) é a amplitude da onda viajando para a direita (esquerda). Além disso, $\hat{v}_\lambda = \hat{v}_\pm$ é dado por:

$$\hat{v}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Além disso, definimos $g_{j,\lambda}$ como:

$$g_{j,\lambda} = \frac{\alpha}{\mu_0 c \pi} \theta_j - \lambda \frac{i}{\omega \mu_0 \mu_j} k_j, \quad (3.10)$$

com $\bar{g}_{j,\lambda}$ sendo o conjugado complexo.

Partindo da interface, as condições de contorno são dadas por [66]:

$$\vec{E}_{A,\lambda} = \vec{E}_{B,\lambda} \quad (3.11)$$

e

$$\vec{H}_{A,\lambda} = \vec{H}_{B,\lambda}. \quad (3.12)$$

Aplicando as condições de contorno em $z = 0$, e usando as Eqs. (3.7)-(3.8), temos (pode-se omitir o índice λ sem perda de generalidade):

$$E_A + E'_A = E_B + E'_B \quad (3.13)$$

e

$$g_A E_A + \bar{g}_A E'_A = g_B E_B + \bar{g}_B E'_B. \quad (3.14)$$

Aqui E_B e E'_B pode ser relacionado a E_A e E'_A por uma matriz de interface de 2×2 do meio A para B :

$$\begin{pmatrix} E_B \\ E'_B \end{pmatrix} = M_{AB} \begin{pmatrix} E_A \\ E'_A \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

onde

$$M_{AB} = \frac{1}{2i\Im[g_B]} \begin{pmatrix} g_A - \bar{g}_B & \bar{g}_A - \bar{g}_B \\ -g_A + g_B & -\bar{g}_A + \bar{g}_B \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Das Eqs. (3.13)-(3.14), podemos obter a matriz de interface 2×2 M_{BA} que relaciona os coeficientes do meio B ao A :

$$\begin{pmatrix} E_A \\ E'_A \end{pmatrix} = M_{BA} \begin{pmatrix} E_B \\ E'_B \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

com

$$M_{BA} = \frac{1}{2i\Im[g_A]} \begin{pmatrix} g_B - \bar{g}_A & \bar{g}_B - \bar{g}_A \\ -g_B + g_A & -\bar{g}_B + \bar{g}_A \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Uma expressão geral para a matriz de transmissão, que conecta os campos através de uma interface de meio m ao meio n , pode ser escrita como:

$$M_{mn} = \frac{1}{2i\Im[g_n]} \begin{pmatrix} g_m - \bar{g}_n & \bar{g}_m - \bar{g}_n \\ -g_m + g_n & -\bar{g}_m + \bar{g}_n \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Aqui $\Im[g_n]$ corresponde à parte imaginária de g para o meio n , que é definida pela Eq. (3.10). Finalmente, para o caso de uma onda eletromagnética se propagando dentro do meio $j = A$ ou B , com espessura d_j e vetor de onda k_j , a matriz de propagação 2×2 é dada por:

$$M_j = \begin{pmatrix} e^{ik_j d_j} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j d_j} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Consulte a Ref. [149] para obter mais detalhes.

Relação de Dispersão

Em cristais fotônicos 1D compostos por camadas dielétricas dispostas de forma periódica, as ondas eletromagnéticas propagantes são moduladas pelo espalhamento de Bragg, resultando na estrutura fotônica, na qual surgem os *bandgaps* fotônicos. Considere a 1-ésima célula unitária $[A|B]$ de um APC-1D. Os campos elétricos dentro das camadas A e B são rotulados como $\vec{E}_{A,l} = (E_{A,l}, E'_{A,l})$ e $\vec{E}_{B,l} = (E_{B,l}, E'_{B,l})$. Para obter a matriz de transferência para esta célula unitária, devemos relacionar os coeficientes de campo elétrico da célula unitária $(l+1)$ com os coeficientes de campo elétrico da célula unitária l . Também, podemos escrever uma onda eletromagnética, propagando-se da camada A e cruzando a interface de A para B , ambas na mesma l -ésima célula unitária, como:

$$\begin{pmatrix} E_{B,l} \\ E'_{B,l} \end{pmatrix} = M_A M_{AB} \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

De maneira semelhante, considere a onda eletromagnética se propagando da camada B e cruzando a interface de B para A , mas agora B pertence à célula unitária l -ésima, enquanto A pertence à $(l+1)$ -ésima célula unitária,

$$\begin{pmatrix} E_{A,l+1} \\ E'_{A,l+1} \end{pmatrix} = M_B M_{BA} \begin{pmatrix} E_{B,l} \\ E'_{B,l} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Ao substituir Eq. (4.22) em Eq. (4.23), obtemos:

$$\begin{pmatrix} E_{A,l+1} \\ E'_{A,l+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

onde

$$M = M_B M_{BA} M_A M_{AB} \quad (3.24)$$

É a matriz de transferência 2×2 para a célula unitária total $[A|B]$.

A partir do teorema de Bloch, os autovalores de M estão relacionados à fase de Bloch QD , que é a mudança de fase dos campos após a propagação ao longo da célula unitária. Aqui Q é o vetor de onda de Bloch e D é o tamanho da célula unitária da estrutura ($D = d_A + d_B$ no presente caso). Portanto, a Eq. (4.24) pode ser reescrita como:

$$\begin{pmatrix} E_{A,l+1} \\ E'_{A,l+1} \end{pmatrix} = e^{iQD} \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Por outro lado, para uma onda que se propaga da direita para a esquerda, Eq. (4.26) se torna:

$$\begin{pmatrix} E_{A,l-1} \\ E'_{A,l-1} \end{pmatrix} = e^{-iQD} \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

As Eqs. (4.26)-(4.27) também podem ser escritas como:

$$[M - e^{iQD} \mathbb{1}] \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

e

$$[M^{-1} - e^{-iQD} \mathbb{1}] \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Aqui, $\mathbb{1}$ é a matriz de identidade 2×2 e M^{-1} é o inverso da matriz de transferência M . Se adicionarmos Eqs. (4.28)-(4.29), obteremos:

$$[M + M^{-1} - (e^{iQD} + e^{-iQD}) \mathbb{1}] \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

Cujas soluções não triviais são obtidas a partir da condição

$$\det [M + M^{-1} - (e^{iQD} + e^{-iQD}) \mathbb{1}] = 0. \quad (3.30)$$

Usando o fato de que a matriz de transferência é uma matriz unimodular, ou seja, seu determinante $\det [M] = 1$, podemos escrever a Eq. (4.31) como uma expressão algébrica [73]:

$$\cos(QD) = \left(\frac{1}{2}\right) \text{Tr} [M] = \frac{M_{11} + M_{22}}{2}. \quad (3.31)$$

Aqui, $\text{Tr}[M]$ é o traço da matriz de transferência M , e M_{11} e M_{22} são seus elementos diagonais. A Eq. (4.32) é uma equação transcendental e mostra que, uma vez que conseguimos obter a matriz de transferência M do sistema, podemos obter numericamente suas soluções, ou seja, podemos obter as frequências para as quais o vetor de onda de Bloch Q é real. As frequências permitidas são tais que a condição $|(1/2)\text{Tr}[M]| \leq 1$ é satisfeita. Caso contrário, se $|(1/2)\text{Tr}[M]| > 1$, o vetor de onda de Bloch é complexo e, consequentemente, a onda de luz tem um perfil evanescente, e surgem os *bandgaps* fotônicos. Para as bandas permitidas, da Eq. (4.32), obtemos:

$$Q = \frac{\cos^{-1}[(M_{11} + M_{22})/2]}{D}, \quad (3.32)$$

de modo que o vetor de onda de Bloch Q varia de $-\pi/D$ a π/D , que é o tamanho da célula unitária no espaço recíproco.

No nosso caso de interesse, o APC-1D composto por duas camadas A e B , com permissividades elétricas ϵ_j , permeabilidades magnéticas μ_j , parâmetros axionicos θ_j , espessura d_j ($j = A$ ou B), e cuja célula unitária $[A|B]$ está disposta de forma periódica, a Eq. (4.32) pode ser obtida analiticamente (veja Ref. [73] para mais detalhes):

$$\cos(QD) = \cos(\phi_A) \cos(\phi_B) - \Delta \sin(\phi_A) \sin(\phi_B), \quad (3.33)$$

com $\phi_j = k_j d_j$ sendo a fase do meio j e

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{k_B \mu_A}{k_A \mu_B} + \frac{k_A \mu_B}{k_B \mu_A} + \left[\frac{\omega \alpha (\theta_A - \theta_B)}{c \pi} \right]^2 \frac{\mu_A \mu_B}{k_A k_B} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{Z_A}{Z_B} + \frac{Z_B}{Z_A} + \delta Z_A Z_B \right\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aqui $Z_j = \sqrt{\mu_j / \epsilon_j}$ é a impedância do meio j e

$$\delta = \left[\frac{\pi (\theta_A - \theta_B)}{\alpha} \right]^2. \quad (3.35)$$

Os dois primeiros termos da Eq. (4.35) são responsáveis pelo surgimento dos *bandgaps* fotônicos convencionais, cuja origem física depende do espalhamento de Bragg. O terceiro termo da Eq. (4.35), contendo os parâmetros topológicos, é responsável pelo surgimento dos *bandgaps* fotônicos topológicos. Como esperado, tomando o limite $\delta \rightarrow 0$, a Eq. (4.35) se reduz à relação de dispersão de um PC-1D convencional (não topológico) [73]. Além disso, observe que $\delta = 0$ apenas para $\theta_A = \theta_B \neq 0$ ou $\theta_A = \theta_B = 0$. Isso significa que, mesmo para $\epsilon_A = \epsilon_B$ e $\mu_A = \mu_B$, espera-se que surja um *bandgap* fotônico para quaisquer valores de θ_A e θ_B com $\theta_A \neq \theta_B$.

3.3 Resultados Numéricos

Nesta seção apresentamos os resultados numéricos referentes às estruturas de bandas para ondas eletromagnéticas normalmente incidentes em APC-1Ds. A partir de

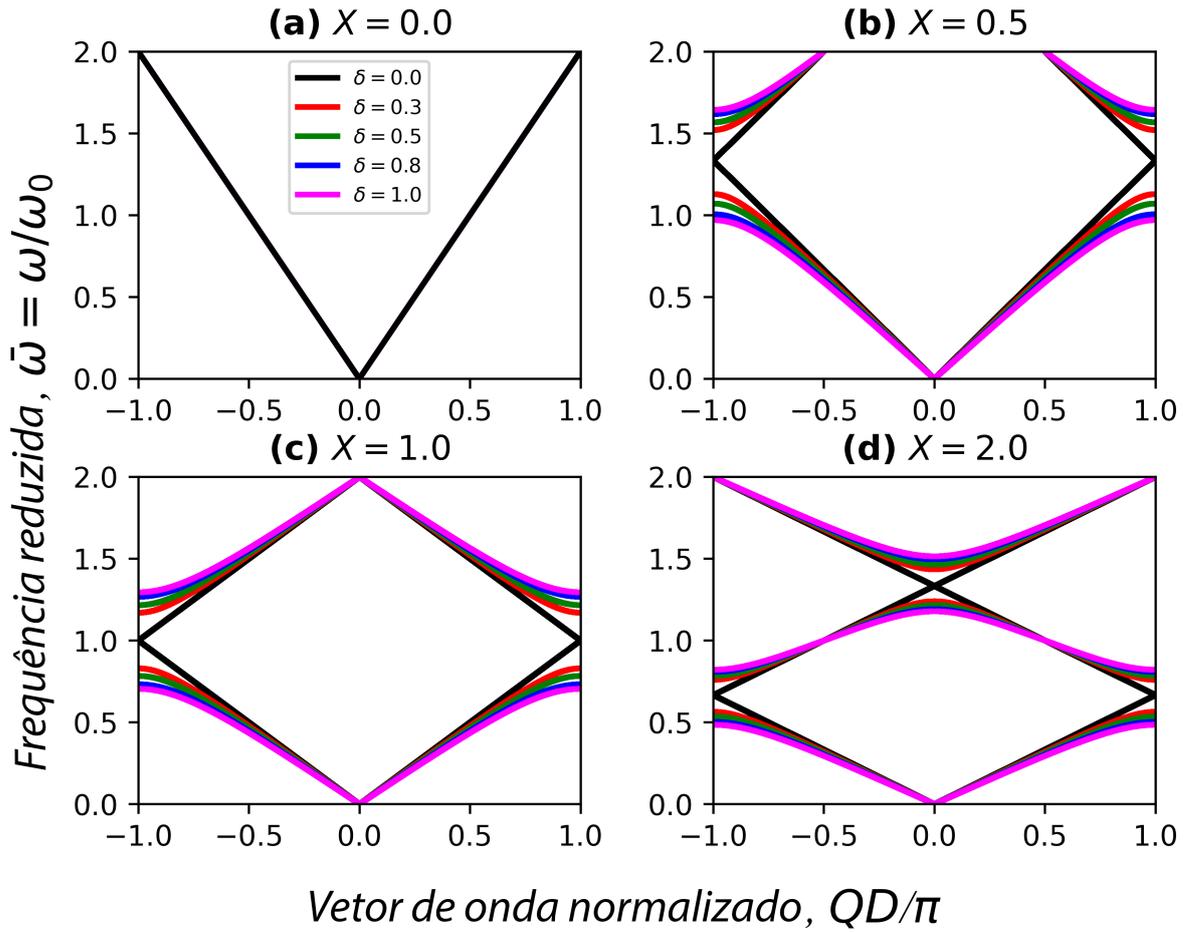


Figura 29 – Estrutura do cristal fotônico topológico, considerando $R = 1.0$, com: (a) $X = 0.0$, (b) $X = 0.5$, (c) $X = 1.0$ e (d) $X = 2.0$. Os diferentes valores de δ são indicados na tabela em linhas com cores.

agora, assumimos que o cristal fotônico topológico consiste em duas camadas alternadas, representados pelas letras A e B , e ambos os materiais não são magnéticos, ou seja, $\mu_A = \mu_B = 1$. Além disso, de acordo com a Eq. (3.35), os parâmetros topológicos estão relacionados por $\theta_B = \theta_A - \pi\sqrt{\delta}/\alpha$ [147]. Para o comprimento de onda central λ_0 , definimos uma frequência do meio do gap como sendo $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0 = 10^{12}$ rad/s. Assim, as estruturas de bandas são todas dadas em termos da frequência reduzida adimensional $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$ e do vetor de onda de Bloch normalizado QD/π .

Consideremos o caso mais trivial. Calculamos a estrutura de bandas de um APC-1D com $R = \epsilon_B/\epsilon_A = 1$, para diferentes valores de $X = d_B/d_A$ e δ , a fim de analisar os efeitos dos parâmetros topológicos na relação de dispersão da luz. Devemos observar que esta não é uma situação realista. No entanto, os resultados desta análise podem nos fornecer informações valiosas sobre diferentes materiais fotônicos topológicos que apresentam constantes dielétricas semelhantes, ou seja, materiais que apresentam $\epsilon_A \approx \epsilon_B$. As estruturas de bandas são plotadas na Fig. 29 considerando: (a) $X = 0.0$, (b) $X = 0.5$, (c) $X = 1.0$ e (d) $X = 2.0$. Os diferentes valores de δ são mostrados na Fig. 29, de modo

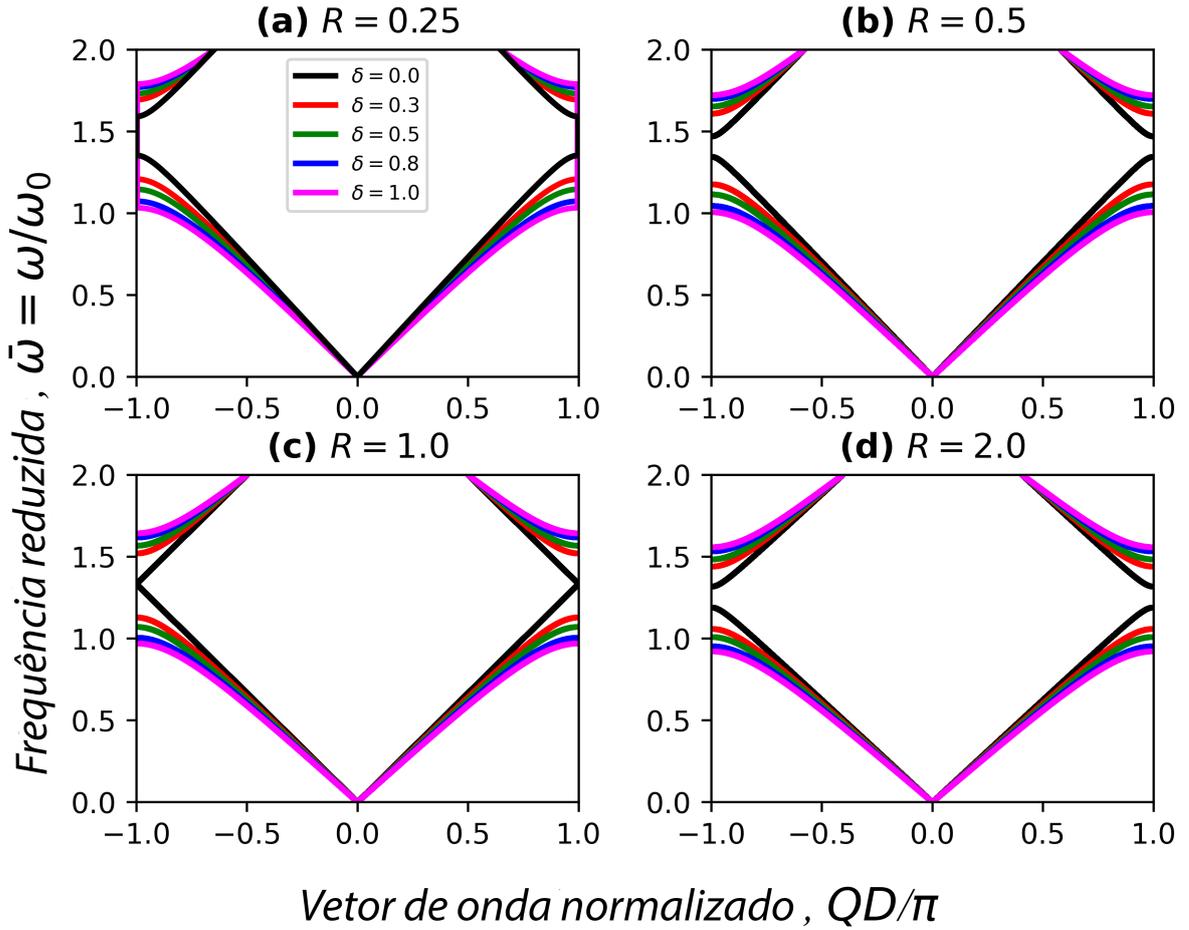


Figura 30 – Similar à Fig. 29, considerando $X = 0.5$, com: (a) $R = 0.25$, (b) $R = 0.5$, (c) $R = 1.0$ e (d) $R = 2.0$. Os diferentes valores de δ são indicados.

que uma determinada cor corresponde a um valor de δ . Como esperado, da Fig. 29, para $\delta = 0$ ($\theta_A = \theta_B$), a estrutura de bandas não tem gap e a luz é transmitida através da estrutura sem nenhuma reflexão, apesar de na Eq. (4.35) o valor de X , corresponder a $\Delta = 1$. Pode-se observar também pela Fig. 29(a) que, não importa o valor de δ , não há gap. Isso ocorre porque o sistema é um meio contínuo com interfaces ($X = 0.0$). No entanto, para $X \neq 0$ e $\delta \neq 0$, podemos observar que uma faixa de frequências proibidas surge naturalmente nas Figs. 29(b)-(d). Esses *bandgaps* fotônicos topológicos nos fornecem meios de controlar a propagação da luz manipulando os parâmetros topológicos do sistema. Também podemos observar que, para um dado valor de X , a largura dos *bandgaps* aumenta à medida que o parâmetro δ aumenta, embora o centro dos *bandgaps* pareça não ser consideravelmente afetado. Por outro lado, o centro dos *bandgaps* é deslocado para as regiões de baixa frequência e também os *bandgaps* tornam-se mais estreitos à medida que a relação das espessuras X aumenta. Esse comportamento também ocorre em cristais fotônicos convencionais [150].

Vamos agora considerar uma situação mais realista: para uma estrutura na qual as duas camadas apresentam diferentes permissividades elétricas, ou seja, $\epsilon_A \neq \epsilon_B$. Con-

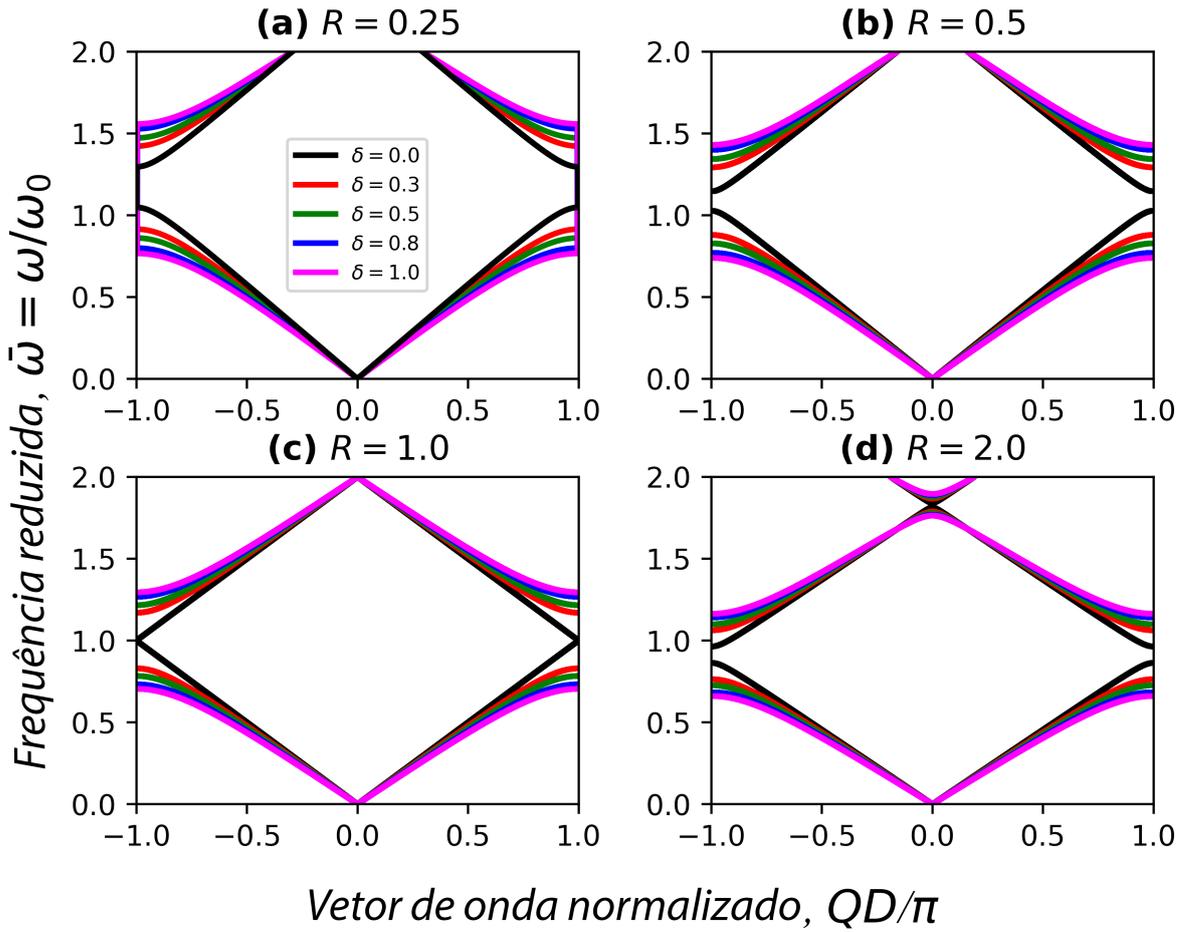


Figura 31 – Similar à Fig. 30, mas para $X = 1.0$.

sideramos $X = 0.5, 1.0$ e 2.0 e as correspondentes estruturas fotônicas topológicas são apresentadas na Fig. 30, Fig. 31 e Fig. 32, com (a) $R = 0.25$, (b) $R = 0.5$, (c) $R = 1.0$ e (d) $R = 2.0$. Pode-se notar pela Fig. 30, Fig. 31 e Fig. 32 que as estruturas de bandas são muito semelhantes aos da Fig. 29. No entanto, agora os *bandgaps* têm duas contribuições: o espalhamento de Bragg e o termo topológico (ver Eq. (4.35) e os comentários sobre ele).

Na Fig. 30, com $X = 0.5$, mostramos que a borda inferior do gap está em torno de $\bar{\omega} \approx 1.1$. Para um dado δ , a posição do centro do *bandgap* é deslocada para regiões de frequência mais baixa à medida que R aumenta. Por outro lado, para um dado R , a largura dos *bandgaps* aumenta à medida que o parâmetro topológico δ aumenta, enquanto que o centro dos *bandgaps* não é substancialmente afetado. Além disso, pode-se notar que a borda superior tem um deslocamento menor que a borda inferior, ou seja, as bordas superior e inferior do *bandgap* são levemente deslocadas assimetricamente para frequências mais altas e mais baixas. Podemos concluir que os *bandgaps* são muito sensíveis à diferença entre os parâmetros topológicos θ_A e θ_B nas interfaces. Na Figs. 31 e 32 apresentamos os gráficos que são qualitativamente análogos aos gráficos da Fig. 30, mas com pequenas diferenças. Por exemplo, a posição do centro dos *bandgaps* é em torno de $\bar{\omega} \approx 1.0$ na Fig. 31 e $\bar{\omega} \leq 1.0$ na Fig. 32. Todas as outras características da estrutura de bandas relacionadas

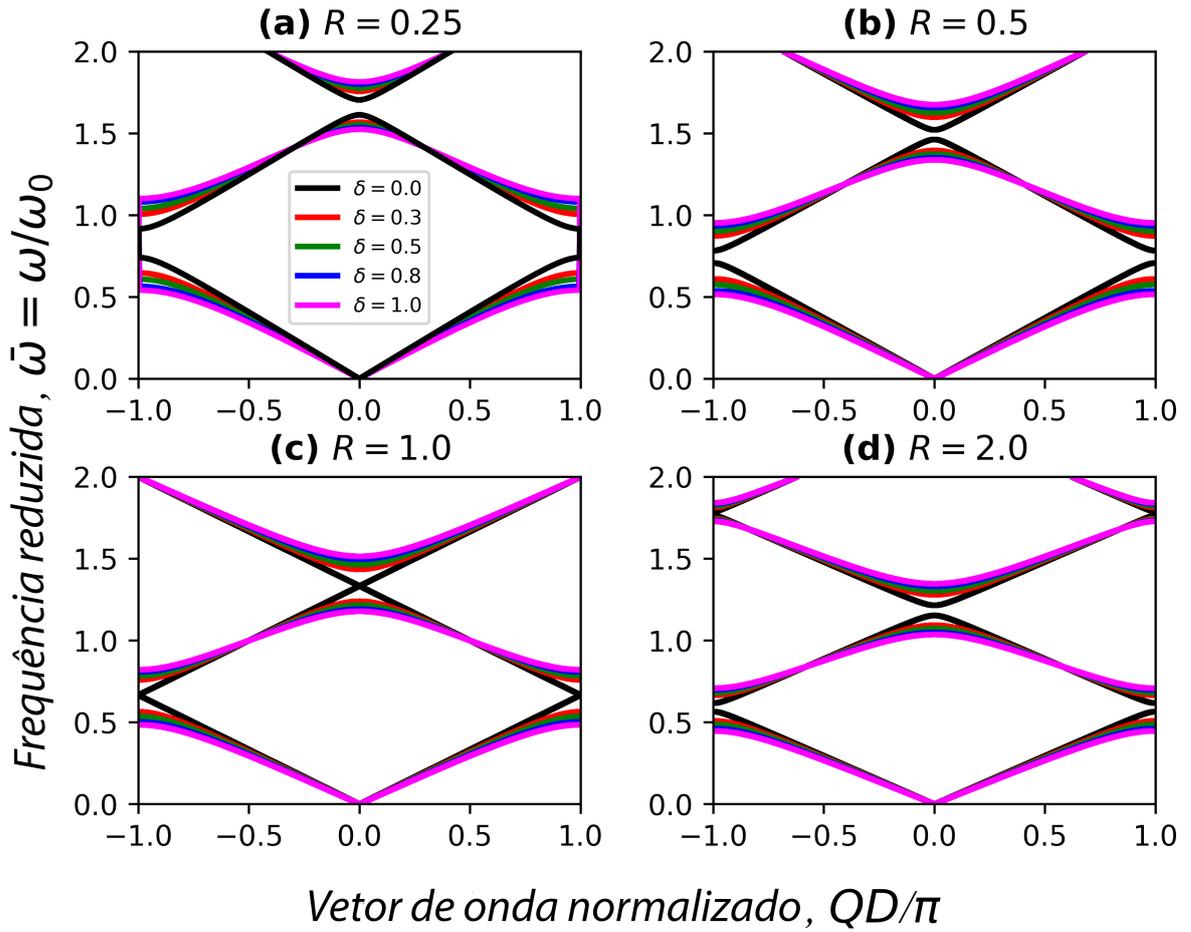


Figura 32 – Similar à Fig. 30, mas para $X = 2.0$.

a R e δ são qualitativamente as mesmas da Fig. 30.

Para aplicações tecnológicas é bastante relevante saber como a estrutura de bandas pode ser afetada pelos parâmetros físicos R , geométricos X e topológicos δ do sistema. Mais especificamente, estamos interessados nas posições do centro e da borda, bem como na largura do primeiro *bandgap*. Vamos ilustrar nossos resultados numéricos nas Figs. 33 e 34. Na Fig. 33 apresentamos os gráficos das frequências reduzidas correspondentes ao centro $\bar{\omega}_c$, borda superior $\bar{\omega}_u$ e a borda inferior $\bar{\omega}_l$ do primeiro *bandgap* para diferentes valores de δ . Essas frequências são representadas pelas linhas sólida, pontilhada e tracejada. Na Fig. 33(a) é mostrado $\bar{\omega}_c$, $\bar{\omega}_u$ e $\bar{\omega}_l$ em função de X com $R = 1.0$. De acordo com a Fig. 29, o *bandgap* é nulo para $\delta = 0$. Como também se pode observar, o centro do *bandgap* não é realmente afetado por δ , enquanto que a largura do *bandgap* atinge seu máximo em torno de $X \approx 1.0$. Nas Figs. 33(b)-(d), apresentamos o mesmo gráfico da Fig. 33(a), mas agora com $\bar{\omega}_c$, $\bar{\omega}_u$ e $\bar{\omega}_l$ em função de R para (b) $X = 0.5$, (c) $X = 1.0$ e (d) $X = 2.0$. Conforme observado nas Figs. 29-32, os *gaps* não são nulos quando a condição $R \neq 1.0$ e $\delta \neq 0$ é satisfeita. Os efeitos topológicos sobre as estruturas fotônicas são agora mais claros e evidentes. Das Figs. 33(b)-(d), considerando $\delta = 0$ (correspondente a um cristal fotônico convencional), para $0 < R < 1$, o *bandgap* se torna mais estreito até desaparecer quando

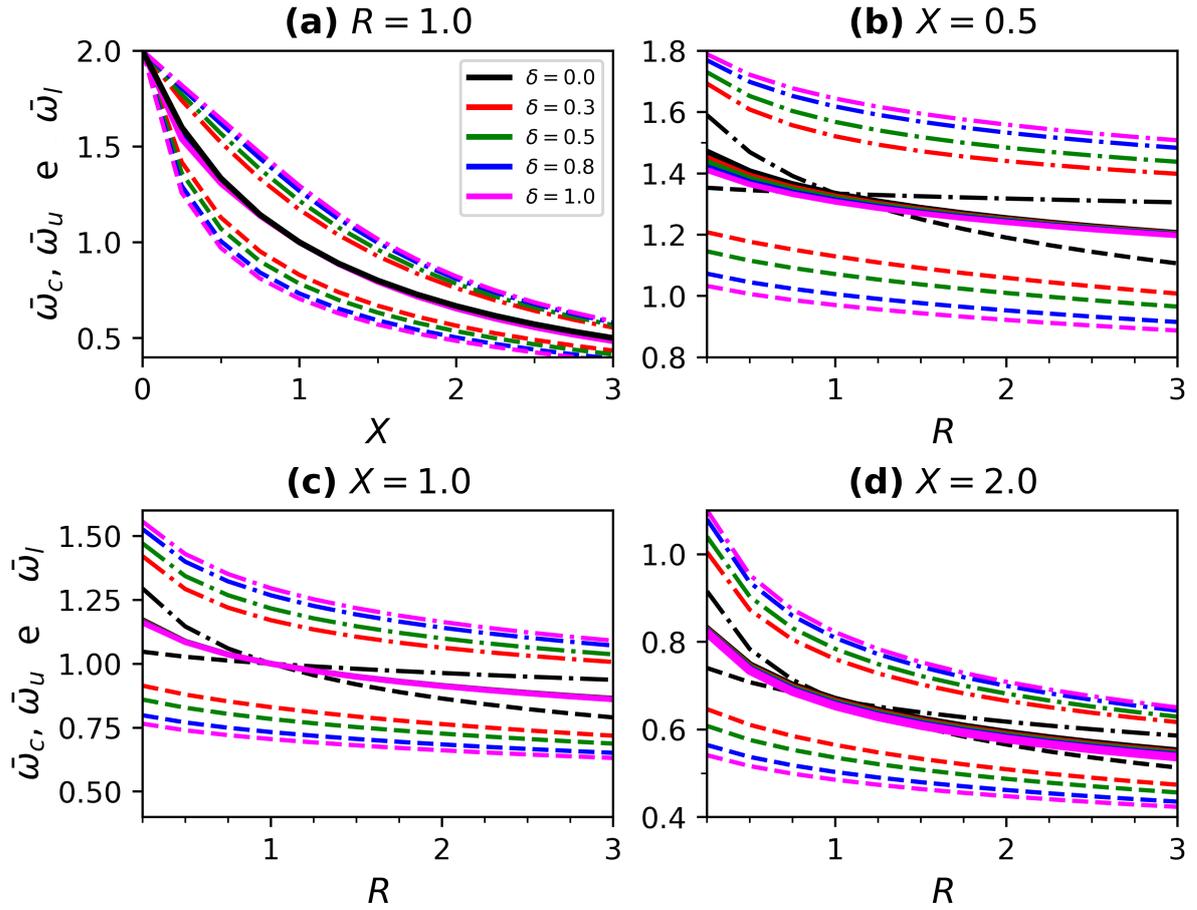


Figura 33 – Gráficos de $\bar{\omega}_c$ (linhas sólidas), $\bar{\omega}_u$ (linhas tracejadas pontilhadas) e $\bar{\omega}_l$ (linhas tracejadas) em função de (a) X , considerando $R = 1.0$, e de R com (b) $X = 0.5$, (c) $X = 1.0$ e (d) $X = 2.0$.

$R = 1.0$. Por outro lado, para $R > 1$, o *bandgap* deixa de ser nulo e torna-se mais largo à medida que R aumenta. Além disso, pode-se observar que as bordas superior e inferior do *bandgap* são levemente assimétricas, ou seja, possuem aproximadamente a mesma distância relativa do centro do gap. No entanto, para $\delta \neq 0$, o *bandgap* não desaparece mesmo para $R = 1.0$. O centro do *bandgap*, apresenta o mesmo comportamento do caso $\delta = 0$. Para um determinado valor de R , a largura do *bandgap* torna-se monotonicamente maior à medida que δ aumenta, enquanto para um determinado δ , a largura do *bandgap* torna-se mais estreita à medida que R aumenta. É interessante que a largura do *bandgap* para o cristal fotônico convencional funcione como o caso limite, ou seja, a largura do *bandgap* para $\delta \neq 0$ não pode ser menor que aquela para $\delta = 0$.

A partir dos resultados apresentados até agora, podemos concluir que temos várias maneiras de combinar os parâmetros geométricos X , físicos R e topológicos δ , a fim de manipular as bordas e o centro do *bandgap* para controlar a propagação de ondas em APC-1D. Assim, para saber qual conjunto de parâmetros fornece o *bandgap* mais largo, mostramos a largura do *bandgap* em função de δ e X , e δ e R na Fig. 34. A Fig. 34(a)

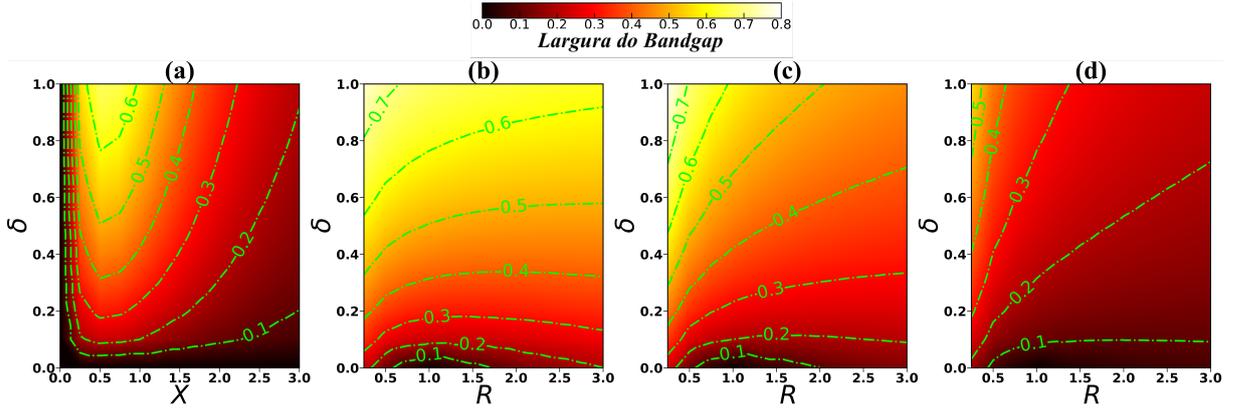


Figura 34 – Gráficos da superfície das larguras de *bandgap* em função de (a) δ e X , considerando $R = 1.0$, e de δ e R para (b) $X = 0.5$, (c) $X = 1.0$ e (d) $X = 2.0$.

mostra o gráfico de superfície da largura do primeiro *bandgap* em função de δ e X , com $R = 1.0$, enquanto que nas Figs. 34(b)-(d) mostra o gráfico de superfície da largura do primeiro *bandgap* em função de δ e R com: (b) $X = 0.5$, (c) $X = 1.0$ e (d) $X = 2.0$. Na Fig. 34 a escala de cores significa que a largura do *bandgap* é igual a 0 (preto) e igual a 0.8 (branco). Além disso, as linhas pontilhadas verdes representam as curvas de nível para alguns valores da largura do *bandgap*.

Na Fig. 34(a) temos que o *bandgap* é nulo para qualquer valor de X quando $\delta = 0$ e para qualquer valor de δ quando $X = 0.0$. Podemos observar pelas Figs. 34(b)-(d) que a largura do *bandgap* desaparece sempre que $\delta = 0$ e $R = 1.0$ (regiões escuras). Por outro lado, os *bandgaps* mais largos (maiores que 0.6 e representados pelas regiões mais brilhantes) são obtidos para: (i) $\delta > 0.8$, $X \approx 0.5$ e $R = 1.0$ na Fig. 34(a); (ii) $\delta > 0.6$, $R \approx 0.25$ e $X = 0.5$ na Fig. 34(b); e (iii) $\delta > 0.5$, $R \approx 0.25$ e $X = 1.0$ na Fig. 34(c). Da Fig. 34 podemos concluir que o parâmetro topológico δ funciona quase independentemente dos parâmetros geométricos X e físicos R , ou seja, a largura do *bandgap* é sempre maior se δ aumenta, independente dos valores de X e R . Ao contrário, X e R trabalham um contra o outro, ou seja, à medida que X aumenta R deve diminuir para um amplo surgimento de *bandgap*, e vice-versa.

3.4 Discussões e Conclusões

Em resumo, usamos o método de matriz de transferência para estudar a propagação de ondas de luz circularmente polarizadas em um meio de camadas axiônicas. Calculamos a relação de dispersão para investigar os *bandgaps* nas estruturas de bandas deste material. Apresentamos resultados numéricos para a estrutura da bandas fotônica topológica em função da razão entre permissividades $R = \epsilon_B/\epsilon_A$, espessuras de camada $X = d_B/d_A$ e parâmetros topológicos $\delta = \pi^2 (\theta_A - \theta_B)^2 / \alpha^2$. Descobrimos que, para um dado valor de

X , a largura do *bandgap* aumenta à medida que o parâmetro δ aumenta, embora o centro do *bandgap* não pareça ser consideravelmente afetado. Por um lado, o centro do *bandgap* é deslocado para as regiões de baixa frequência e também os *bandgaps* tornam-se mais estreitos à medida que a razão entre as espessuras X aumenta. Além disso, para um dado δ , a posição do centro do *bandgap* é deslocada para regiões de frequências mais baixa à medida em que R aumenta. Por outro lado, para um dado R , a largura do *bandgaps* aumenta à medida em que o parâmetro topológico δ aumenta, mas o centro do *bandgaps* não é afetado. Também foi observado que a borda superior do *bandgap* é menos deslocada do que a borda inferior do *bandgap*, ou seja, as bordas superior e inferior do *bandgap* são deslocadas assimetricamente. Por um lado, considerando $\delta = 0$ (correspondente a um cristal fotônico convencional), para $0 < R < 1$, o *bandgap* torna-se mais estreito até desaparecer quando $R = 1.0$. Por outro lado, para $R > 1$, o *bandgap* não é mais nulo e se torna maior à medida que R aumenta. No entanto, para $\delta \neq 0$ (correspondente a um cristal fotônico topológico), o *bandgap* não desaparece, nem mesmo para $R = 1.0$. Para um determinado valor de R , a largura do *bandgap* torna-se monotonicamente maior à medida que δ aumenta, enquanto que para um determinado δ , a largura do *bandgap* torna-se mais estreita à medida que R aumenta. Pode-se concluir que o parâmetro topológico δ funciona quase independentemente dos parâmetros geométricos X e físicos R , ou seja, a largura do *bandgap* é sempre maior se δ aumentar independentemente dos valores de X e R . Por outro lado, X e R trabalham um contra o outro, ou seja, à medida que X aumenta, R deve diminuir e vice-versa. Nossos resultados abrem novas possibilidades de aplicações tecnológicas para cristais axionicos fotônicos (APC) onde pode-se manipular o fluxo de luz por meio dos parâmetros axionicos δ do sistema. Certamente nosso modelo pode ser realizado experimentalmente e esperamos que os cientistas sejam encorajados a fazer isso.

Parte IV

Capitulo 4

4 Cristal Fotônico Temporal Periódico e Quasi-periódico

Neste capítulo, estamos interessados em empregar o método da matriz de transferência (TMM) para estudar a propagação de ondas de luz em quasicristais fotônicos temporais 1D compostos por duas camadas alternadas, A e B , construídas de acordo com as sequências de Fibonacci, Thue-Morse e Período-Duplo e cujas propriedades dependem de parâmetros temporais. Este método mostra como as ondas de luz interagem com a interface entre as camadas alternadas A e B de um quasicristal fotônicos temporal. Também apresentamos resultados numéricos para as estruturas de banda fotônicas em função das razões entre o índice de refração temporal $n_{BA} = n_B/n_A$ e as espessuras das camadas $t_{BA} = t_B/t_A$. As estruturas de banda são todas dadas em termos do vetor de onda adimensional $\bar{k} = k/k_0$ e da frequência angular de Bloch adimensional normalizada $\Omega T/\pi$. Também estudamos a localização e o comportamento auto-similar das estruturas de bandas, cuja fractalidade pode ser descrita por uma lei de potência. Finalmente, mostramos que o índice de escala da lei de potência ξ , que pode ser identificado como uma constante de difusão dos espectros, apresenta uma dependência não monotônica em relação a n_{BA} e t_{BA} .

Portanto, este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 4.1, faremos uma breve introdução aos cristais fotônicos de ordem temporal. Em seguida, na seção 4.2, apresentamos a teoria eletromagnética clássica para um cristal fotônico temporal unidimensional (PTCS-1D) composto por duas camadas (A e B), com seus respectivos parâmetros elétricos, magnéticos e geométricos, que são empilhadas ao longo da direção z . Apresentamos também as matrizes de transmissão (quando as ondas cruzam qualquer interface) e propagação (quando as ondas se propagam dentro de uma dada camada). Na seção 4.3, apresentaremos os resultados numéricos para as estruturas de banda fotônica dos quasicristais de ordem temporal, cujo ponto de vista teórico é baseado nos princípios estudados nos capítulos 1-2, e que seguem a sequência de Fibonacci, Thue-Morse e Duplo-Período. Além disso, mostramos que os quasicristais fotônicos estudados também exibem uma propriedade característica de objetos fractais chamada de auto-similaridade. Por fim, na seção 4.4, resumimos os resultados principais obtidos neste trabalho.

Para uma introdução completa no campo da pesquisa dos cristais fotônicos temporais, consulte as Refs. [19, 151, 152, 153]

4.1 Introdução

Ao longo dos anos, limites temporais têm sido estudados teoricamente em eletromagnetismo. A primeira tentativa de desenvolver uma teoria para o caso muito especial de propagação de ondas planas em um meio homogêneo com uma variação temporal repentina e degrau no índice de refração foi feita por Morgenthaler em 1958 [154], mas apenas após mais de uma década esse trabalho foi notado e outros aspectos da propagação no mesmo sistema foram explorados, principalmente em campos como teoria de antenas em que as frequências eletromagnéticas são baixas e, portanto, as fronteiras temporais são muito mais viáveis [155]. Vale mencionar os trabalhos de Felsen e Whitman em 1970 [156], Fante em 1971 [157] e Ruiz em 1978 [158].

Os cristais fotônicos temporais (PTCS) são os análogos temporais dos cristais fotônicos (PCs). Nos PCs, o índice de refração *varia periodicamente no espaço* $n(r)$, enquanto nos PTCS o índice de refração *varia periodicamente no tempo* $n(t)$. Devido à dualidade única de espaço e tempo nas equações de Maxwell, cristais fotônicos e cristais fotônicos temporais são análogos entre si [159, 160]. Como consequência, mudanças temporais abruptas na permissividade ϵ causam reflexões temporais, assim como mudanças abruptas de ϵ no espaço causam reflexões espaciais [154, 160, 161]. Portanto, nas últimas décadas, o estudo do índice de refração periódico no tempo tem buscado explorar as funções do espaço e do tempo nas equações de Maxwell, a fim de encontrar análogos temporais para os fenômenos espaciais em sistemas periódicos [155]. Quando a modulação do índice de refração é periódica no tempo $n(t) = n(t + T)$, as interfaces temporais ocorrem de maneira periódica, gerando múltiplas reflexões e refrações temporais. Esse efeito leva à interferência entre ondas que se propagam no tempo para frente e para trás, dando origem a estados de Floquet-Bloch e bandas de dispersão. Na estrutura de bandas dos PTCS, os *bandgap* estão presentes no domínio do vetor de onda k em vez de no domínio da frequência ω [155, 159, 160, 162, 163, 164, 165]. Assim, ao contrário dos "cristais temporais" em estados sólidos da matéria condensada no estado sólido, os PTCS não são formados espontaneamente por interações de muitos corpos, mas surgem como resultado de uma modulação periódica externa das propriedades eletromagnéticas do meio [155].

Os avanços recentes na fotônica e na ciência dos materiais nos aproximam da modulação arbitrária das propriedades ópticas macroscópicas dos materiais no tempo e no espaço. A busca pelo controle das ondas eletromagnéticas tem sido de importância central tanto para a ciência fundamental quanto para propósitos práticos. De fato, a modulação temporal do índice de refração traz muitos fenômenos ópticos na dimensão temporal e é extremamente útil para produzir isolantes ópticos sem campos magnéticos, interrupção da luz e criar campos de gauge sintéticos para a luz [160].

4.2 Modelo Físico

Nesta seção, vamos considerar um cristal fotônico temporal 1D composto por um arranjo de duas camadas temporais, A e B , com permissividades dielétricas ϵ_A e ϵ_B , permeabilidades magnéticas μ_A e μ_B , e intervalos t_A e t_B , conforme apresentado na Fig. 35. Ao longo de todos os cálculos, usamos unidades SI.

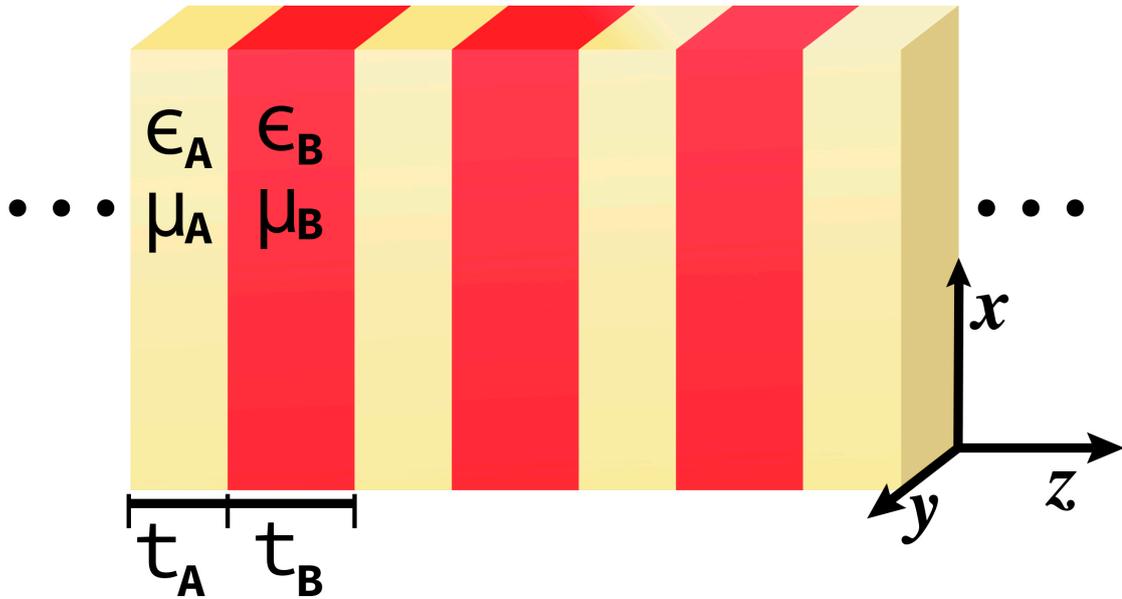


Figura 35 – Esquema de um PTC-1D, considerando $\epsilon_A = 4$, $\mu_A = \epsilon_B = \mu_B = 1$, $t_A = 0.23$ e $t_B = 0.76$. Fonte: Essa imagem é autoral.

Aqui, assumimos que a permissividade elétrica $\epsilon(t)$, a permeabilidade magnética $\mu(t)$ e o índice de refração $n(t)$ são reais, isotrópicos, não dispersivos e periódicos no tempo, onde $T = t_A + t_B$ é o período da célula unitária temporal, ou seja,

$$\epsilon(t) = \epsilon(t + T), \quad (4.1)$$

$$\mu(t) = \mu(t + T), \quad (4.2)$$

e

$$n(t) = n(t + T). \quad (4.3)$$

As relações constitutivas eletromagnéticas para o deslocamento e os campos eletromagnéticos são dadas por

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon(t) \vec{E} \quad (4.4)$$

e

$$\vec{B} = \mu_0 \mu(t) \vec{H}. \quad (4.5)$$

As equações de Maxwell para um sistema livre de cargas e correntes, espacialmente uniforme e isotrópico são

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (4.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.8)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4.9)$$

Aplicando o rotacional na Eq. (4.8) e usando as Eqs. (4.4)-(4.5), obtemos

$$\vec{\nabla}^2 \vec{D} = \frac{\epsilon(t)\mu(t)}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \quad (4.10)$$

Agora, considerando que uma onda polarizada incidente normal ao plano do eixo x se propaga através do sistema, ou seja, $\vec{D}(z, t) = (D_x(z, t), 0, 0)$ e $D_x(z, t) = D_0 e^{i(k_z z - \omega t)}$, obtemos da Eq. (4.10)

$$\omega = \frac{ck_z}{\sqrt{\epsilon(t)\mu(t)}} = \frac{ck_z}{n(t)}, \quad (4.11)$$

com

$$n(t) = \sqrt{\epsilon(t)\mu(t)}. \quad (4.12)$$

A solução geral para \vec{D} é da forma

$$D_x(z, t) = [D e^{i\omega t} + \bar{D} e^{-i\omega t}] e^{ik_z z}, \quad (4.13)$$

que é uma superposição de duas ondas planas propagando-se para a direita e para a esquerda ao longo da direção z com amplitudes D e \bar{D} , respectivamente.

De maneira similar, mas agora aplicando o rotacional na Eq. (4.9), obtemos para o campo magnético

$$\begin{aligned} B_y(z, t) &= -\frac{\mu_0 \omega}{k_z} D_x(z, t) \\ &= -\frac{\mu_0 \omega}{k_z} [D e^{i\omega t} + \bar{D} e^{-i\omega t}] e^{ik_z z}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.2.1 Método da Matriz de Transferência em Cristal Fotônico Temporal

Como discutido nos capítulos anteriores, o método da matriz de transferência (TMM) é uma técnica analítica poderosa para o estudo de qualquer tipo de onda que se propague através de meios de multicamadas. Uma das vantagens de aplicar o TMM é simplificar a álgebra que, em outro contexto, poderia ser bastante complexa.

No contexto do TMM e considerando as ondas eletromagnéticas, há dois tipos de matrizes: (i) a matriz de transmissão, que conecta os campos através de uma interface, e (ii) a matriz de propagação, que descreve os campos que se propagam dentro de uma camada [73]. Para obter ambas as matrizes, precisamos aplicar as Eqs. (4.13)-(4.14) nas condições de contorno eletromagnéticas temporais, que são

$$\vec{D}_\alpha = \vec{D}_\beta \quad (4.15)$$

e

$$\vec{B}_\alpha = \vec{B}_\beta, \quad (4.16)$$

onde α e β representam dois meios eletromagnéticos diferentes, como A e B no nosso caso.

Para uma onda incidente normal que atravessa uma interface do meio α para β em $t = 0$, temos

$$D_\alpha + \bar{D}_\alpha = D_\beta + \bar{D}_\beta \quad (4.17)$$

e

$$g_\alpha [-D_\alpha + \bar{D}_\alpha] = g_\beta [-D_\beta + \bar{D}_\beta], \quad (4.18)$$

onde $g_j = \mu_0 \omega_j / k_z$ ($j = A$ ou B). Aqui, D_B e \bar{D}_B podem ser relacionados a D_A e \bar{D}_A por uma matriz 2×2

$$\begin{pmatrix} D_B \\ \bar{D}_B \end{pmatrix} = M_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} D_A \\ \bar{D}_A \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

com $M_{\alpha\beta}$ sendo a matriz de transmissão para a interface $\alpha|\beta$, que é dada por

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2g_\beta} \begin{pmatrix} g_\beta + g_\alpha & g_\beta - g_\alpha \\ g_\beta - g_\alpha & g_\beta + g_\alpha \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Finalmente, para uma onda eletromagnética que se propaga dentro de uma camada temporal α , com intervalo t_α e frequência angular ω_α , a matriz de propagação 2×2 é dada por

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} e^{i\omega_\alpha t_\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_\alpha t_\alpha} \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Para mais detalhes sobre como obter as Eqs. (4.20)-(4.21), veja Ref. [73].

Relação de Dispersão

Nos cristais fotônicos temporais 1D que estamos considerando, as ondas eletromagnéticas propagantes são moduladas *no tempo*, similar aos espalhamentos de Bragg no espaço, resultando em estruturas de bandas fotônicas temporais, nas quais podem emergir *bandgap* fotônico temporal. Sabendo disso, considere a l -ésima célula unitária temporal composta por $[A|B]$. Os campos elétricos dentro das camadas A e B são rotulados como $\vec{D}_{A,l} = (D_{A,l}, \bar{D}_{A,l})$ e $\vec{D}_{B,l} = (D_{B,l}, \bar{D}_{B,l})$, respectivamente. Para o propósito de calcular a matriz de transferência para tal célula unitária temporal, conectamos os coeficientes dos campos da $(l+1)$ -ésima célula unitária temporal aos coeficientes dos campos da l -ésima célula unitária. Portanto, para uma onda eletromagnética propagando-se na camada A e cruzando a interface de A para B , ambas na mesma l -ésima célula unitária temporal, podemos escrever usando as Eqs. (4.20)-(4.21),

$$\begin{pmatrix} D_{B,l} \\ \bar{D}_{B,l} \end{pmatrix} = M_A M_{AB} \begin{pmatrix} D_{A,l} \\ \bar{D}_{A,l} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

De maneira similar, considerando a onda eletromagnética propagando-se na camada B (na l -ésima célula unitária temporal), e cruzando a interface de B para A (na $(l+1)$ -ésima célula unitária temporal), temos

$$\begin{pmatrix} D_{A,l+1} \\ \bar{D}_{A,l+1} \end{pmatrix} = M_B M_{BA} \begin{pmatrix} D_{B,l} \\ \bar{D}_{B,l} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Em seguida, substituindo a Eq. (4.22) na Eq. (4.23), obtemos

$$\begin{pmatrix} D_{A,l+1} \\ \bar{D}_{A,l+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} D_{A,l} \\ \bar{D}_{A,l} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

onde

$$M = M_B M_{BA} M_A M_{AB} \quad (4.25)$$

é a matriz de transferência 2×2 para toda a estrutura temporal 1D gerada pela célula unitária temporal $[A|B]$.

Pelo teorema de Bloch, os autovalores de M estão relacionados à fase de Bloch ΩT no domínio temporal, que é a mudança de fase dos campos após a propagação ao longo da célula unitária temporal. Aqui, Ω é a frequência angular e T é o período da célula unitária temporal da estrutura ($T = t_A + t_B$ no presente caso). Portanto, a Eq. (4.24) pode ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} D_{A,l+1} \\ \bar{D}_{A,l+1} \end{pmatrix} = e^{i\Omega T} \begin{pmatrix} D_{A,l} \\ \bar{D}_{A,l} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} D_{A,l} \\ \bar{D}_{A,l} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Por outro lado, para uma onda propagando-se da direita para a esquerda, a Eq. (4.26) torna-se

$$\begin{pmatrix} D_{A,l-1} \\ \bar{D}_{A,l-1} \end{pmatrix} = e^{-i\Omega T} \begin{pmatrix} D_{A,l} \\ \bar{D}_{A,l} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} D_{A,l} \\ \bar{D}_{A,l} \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

As Eqs. (4.26)-(4.27) também podem ser escritas como,

$$[M - e^{i\Omega T} \mathbb{1}] \begin{pmatrix} D_{A,l} \\ \bar{D}_{A,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

e

$$[M^{-1} - e^{-i\Omega T} \mathbb{1}] \begin{pmatrix} D_{A,l} \\ \bar{D}_{A,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Aqui, $\mathbb{1}$ é a matriz identidade 2×2 e M^{-1} é a inversa da matriz de transferência M . Se adicionarmos as Eqs. (4.28)-(4.29), obtemos

$$[M + M^{-1} - (e^{i\Omega T} + e^{-i\Omega T}) \mathbb{1}] \begin{pmatrix} D_{A,l} \\ \bar{D}_{A,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

cujas soluções não triviais são obtidas da condição

$$\det [M + M^{-1} - (e^{i\Omega T} + e^{-i\Omega T}) \mathbb{1}] = 0. \quad (4.31)$$

Usando o fato de que a matriz de transferência é uma matriz unimodular, ou seja, seu determinante $\det [M] = 1$, podemos escrever a Eq. (4.31) como uma expressão algébrica [73], ou seja,

$$\cos(\Omega T) = \left(\frac{1}{2}\right) \text{Tr} [M] = \frac{M_{11} + M_{22}}{2}. \quad (4.32)$$

Aqui, $\text{Tr} [M]$ é a traça da matriz de transferência M , e M_{11} e M_{22} são seus elementos diagonais. A Eq. (4.32) é uma equação transcendental e mostra que, como somos capazes de obter a matriz de transferência M do sistema, podemos obter numericamente suas soluções, ou seja, podemos obter os vetores de onda para os quais a frequência angular de Bloch Ω é real. Os vetores de onda permitidos são tais que a condição $|(1/2)\text{Tr}[M]| \leq 1$ é satisfeita. Caso contrário, se $|(1/2)\text{Tr}[M]| > 1$, a frequência angular de Bloch é complexa e, como consequência, a onda eletromagnética apresenta um perfil evanescente, e surgem as bandas fotônicas proibidas temporais.

Para uma banda permitida, a partir da Eq. (4.32), obtemos

$$\Omega = \frac{\cos^{-1} [(M_{11} + M_{22})/2]}{T}, \quad (4.33)$$

de modo que a frequência angular de Bloch Ω varia de $-\pi/T$ a π/T , que é o período da célula unitária temporal.

Para o sistema considerado neste trabalho, um PTC-1D composto por duas camadas alternadas, A e B , com permissividades dielétricas $\epsilon_j(t)$, permeabilidades magnéticas $\mu_j(t)$ e tempo t_j ($j = A$ ou B), e cuja célula unitária $[A|B]$ é organizada de maneira periódica no tempo, a Eq. (4.32) pode ser obtida analiticamente (veja Ref. [73] para mais detalhes),

$$\cos(\Omega T) = \cos(\phi_A) \cos(\phi_B) - \Gamma \sin(\phi_A) \sin(\phi_B), \quad (4.34)$$

com $\phi_j = \omega_j t_j$ sendo a fase do meio j e

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_B \mu_A}{\omega_A \mu_B} + \frac{\omega_A \mu_B}{\omega_B \mu_A} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{Z_A}{Z_B} + \frac{Z_B}{Z_A} \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde $Z_j = \sqrt{\mu_j/\epsilon_j}$ é a impedância do meio j .

O último termo na Eq. (4.33) é responsável pelo surgimento das bandas fotônicas proibidas temporais, cuja origem física se baseia em um efeito no domínio do tempo semelhante à dispersão de Bragg no domínio espacial. Vale ressaltar que, para um meio homogêneo, ou seja, para $\epsilon_A = \epsilon_B$ e $\mu_A = \mu_B$, temos $Z_A = Z_B$ pela Eq. (4.35) e, conseqüentemente, $\Gamma = 1$. Então, a Eq. (4.34) torna-se

$$\begin{aligned} \cos(\Omega T) &= \cos(\phi_A) \cos(\phi_A) - \sin(\phi_A) \sin(\phi_A) \\ &= \cos(2\omega_A t_A). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Aqui $\Omega = \omega_A$, $T = 2t_A$ e as bandas proibidas não surgem nas estruturas de bandas, como esperado.

Para PTQCs 1D o processo é análogo ao visto no capítulo 2, consideramos que cada sequência de letras, correspondente a uma dada geração de uma sequência quasiperiódica, é a nova célula unitária do sistema, e então ela é periodicamente repetida. Para calcular as estruturas de bandas, com a célula unitária correspondente a uma determinada geração das sequências de Fibonacci, Thue-Morse ou Período-Duplo, podemos usar as matrizes de transmissão e propagação, Eqs. (4.17)-(4.21), para obter a matriz de transferência M para a estrutura quasiperiódica e aplicar a Eq. (4.32) para obter a estrutura de bandas. Para mais detalhes sobre as sequências quasiperiódicas investigadas aqui, consulte a Ref. [94].

4.3 Resultados Numéricos

Nesta seção, apresentamos os resultados numéricos das estruturas de banda para ondas eletromagnéticas incidentes normalmente em PTCs 1D, periódicos e quasiperiódicos.

Daqui em diante, assumimos que as estruturas consistem em dois blocos alternados, representados por A e B , ambos materiais não magnéticos, i.e., $\mu_A = \mu_B = 1$. Definimos uma frequência angular de banda intermediária $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 10^9$ rad/s, com T_0 sendo o período central. Assim, as estruturas de banda são todas dadas em termos do vetor de onda adimensional $\bar{k} = k/k_0$ e da frequência angular de Bloch adimensional normalizada $\Omega T/\pi$, onde $k_0 = \omega_0/c$, $c = 1/(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}$ é a velocidade da luz no vácuo, e T é o tamanho da célula unitária. Ressaltamos que, para sistemas fotônicos temporais, T_0 , Ω , T são análogos ao comprimento de onda central λ_0 , o vetor de onda de Bloch Q e o tamanho da célula unitária D em cristais fotônicos espaciais [166]. Além disso, neste trabalho, definimos o intervalo e o índice de refração da camada A como $t_A = 1.0 \times 10^{-9}$ s e $n_A = 1$, respectivamente, enquanto essas mesmas quantidades da camada B são obtidas a partir das razões $t_{BA} = t_B/t_A$ e $n_{BA} = n_B/n_A$, sempre que necessário.

Cristais Fotônicos Temporais

Primeiramente, consideramos as estruturas periódicas. Neste caso, levamos em conta que a “condição de quarto de comprimento de onda” para o domínio do tempo é satisfeita [73], ou seja,

$$\frac{t_A}{n_A} = \frac{t_B}{n_B} = \frac{T_0}{4}. \quad (4.37)$$

As estruturas de bandas são plotadas na Fig. 36. Na Fig. 36(a) para $n_A = 1$, e com t_A e t_B calculados de acordo com a Eq. (4.37) considerando diferentes valores de n_{BA} , a saber, $n_{BA} = 0.25$ (linha preta sólida), $n_{BA} = 0.5$ (linha vermelha tracejada longa), $n_{BA} = 0.75$ (linha verde pontilhada), $n_{BA} = 1$ (linha azul traço-ponto), $n_{BA} = 1.5$ (linha fúcsia traço-ponto-ponto) e $n_{BA} = 2$ (linha laranja tracejada curta); e na Fig. 36(b) para $t_A = 1 \times 10^{-9}$ s, e com n_A e n_B calculados de acordo com a Eq. (4.37) considerando diferentes valores de t_{BA} , a saber, $t_{BA} = 0.25$ (linha preta sólida), $t_{BA} = 0.5$ (linha vermelha tracejada longa), $t_{BA} = 0.75$ (linha verde pontilhada), $t_{BA} = 1$ (linha azul traço-ponto), $t_{BA} = 1.5$ (linha fúcsia traço-ponto-ponto) e $t_{BA} = 2$ (linha laranja tracejada curta). Ambos os gráficos são qualitativamente semelhantes, mas são muito diferentes uma vez que as curvas de dispersão para t_A fixo (Fig. 36(b)) estão em regiões de vetor de onda mais altas, ou seja, comprimentos de onda mais baixos, em comparação com o caso de n_A fixo (Fig. 36(a)).

Como esperado, na Fig. 36, tanto para $n_{BA} = 1$ ($n_A = n_B$) quanto para $t_{BA} = 1$ ($t_A = t_B$), as estruturas de bandas não possuem *gaps*, e a luz é transmitida através da estrutura sem qualquer reflexão porque o sistema é um meio contínuo sem "interfaces temporais" (veja as linhas azuis traço-ponto). No entanto, para $n_{BA} \neq 1$ e $t_{BA} \neq 1$ pode-se observar que uma faixa de vetores de onda proibida emerge naturalmente. A faixa proibida é chamada de *bandgap fotônica temporal* (PTBG), em analogia ao *bandgap* espacial convencional causada pela dispersão de Bragg espacial [19, 167]. Vamos explicar a origem física das PTBGs. Quando uma onda eletromagnética propaga-se de um meio A para um meio B ,

com diferentes índices de refração, duas novas ondas são criadas: uma onda transmitida no tempo viajando na mesma direção e uma onda refletida no tempo viajando na direção oposta à da onda incidente. Agora, se os meios A e B são justapostos formando um sistema multicamadas infinito, essas variações temporais das propriedades ópticas também serão periódicas e, portanto, várias ondas transmitidas e refletidas emergem em cada “interface temporal” causando interferência. Para alguns valores do vetor de onda, as ondas apresentam um padrão de interferência construtiva e, como consequência, uma banda permitida emerge. No entanto, quando o padrão de interferência é destrutivo, não há onda propagante através da multicamada e um *bandgap* emerge. Portanto, as PTBGs nos fornecem uma nova e promissora maneira de controlar e modelar a propagação da luz manipulando os parâmetros temporais do sistema.

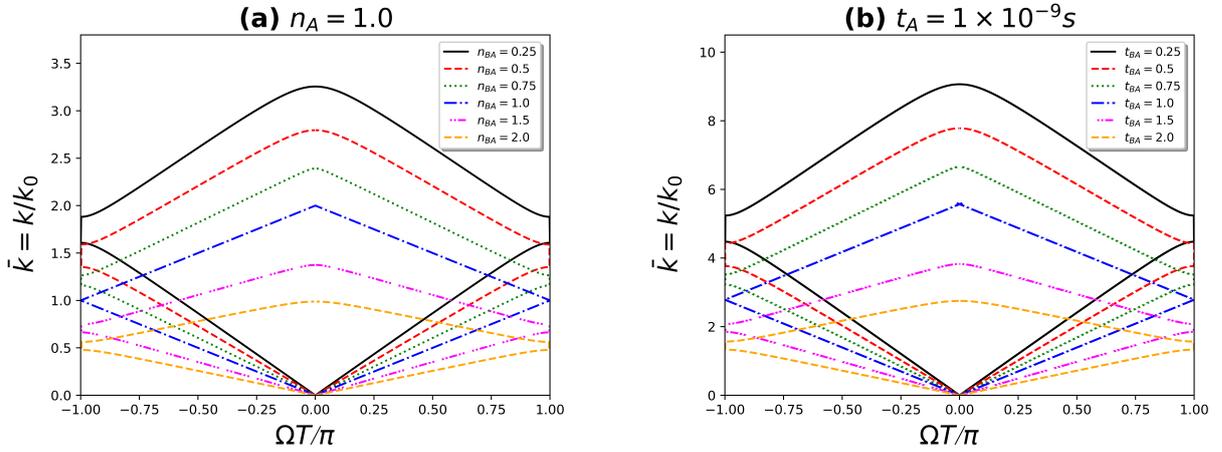


Figura 36 – Estrutura de bandas de um PTC-1D: (a) para $n_A = 1$, considerando diferentes valores de n_{BA} ; e (b) para $t_A = 1 \times 10^{-9}$ s, considerando diferentes valores de t_{BA} . Valores de n_{BA} e t_{BA} são indicados no painel.

Além disso, a partir da Fig. 36(a) e Fig. 36(b), pode-se observar que tanto a largura quanto a posição do primeiro PTBG mudam conforme n_{BA} e t_{BA} variam. Em geral, o *bandgap* torna-se mais largo e é deslocado para regiões de vetores de onda mais altos conforme n_{BA} e t_{BA} diminuem. Para investigar mais detalhadamente como a largura da PTBG se comporta, plotamos na Fig. 37 a largura do *bandgap* em função de n_{BA} e t_{BA} . A escala de cores significa preto (branco) para largura igual a 0 (0.8). Pode-se ver que o *bandgap* é zero para $n_{BA} = 1$, independentemente dos valores de t_{BA} , como esperado, uma vez que n_{BA} é o único parâmetro que governa as propriedades ópticas dos materiais A e B , enquanto t_{BA} é apenas um parâmetro geométrico. Além disso, *bandgaps* mais largos são obtidos para as seguintes combinações: para $t_{BA} \approx 0.25$ e $n_{BA} \approx 3$; e para $t_{BA} \approx 1$ e $n_{BA} \approx 0.25$.

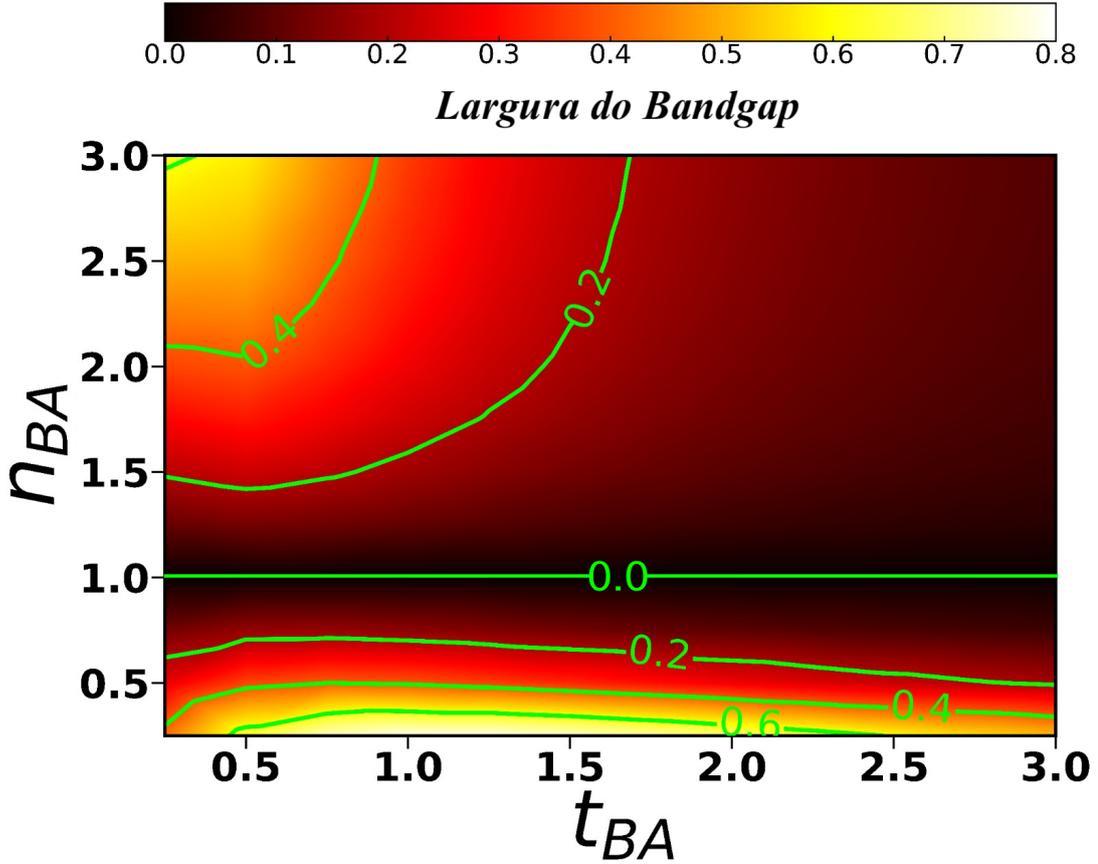


Figura 37 – Gráfico de superfície da largura do *bandgap* em função de n_{BA} e t_{BA} . A escala de cores significa preto (branco) para largura igual a 0 (0.8).

Quasicristais Fotônicos Temporais

Vamos agora considerar os efeitos do arranjo quasiperiódico nas estruturas de bandas dos PTCs. Para isso, apresentamos resultados numéricos das estruturas de bandas em termos do vetor de onda adimensional \bar{k} como uma função da frequência de Bloch adimensional normalizada $\Omega T/\pi$, para PTQCs construídos de acordo com as sequências quasiperiódicas de Fibonacci, Thue-Morse e Período-Duplo. Os resultados estão ilustrados nas Fig. 38, 39 e 40, respectivamente.

Aqui, para simplificar, mostramos as curvas de dispersão apenas para a terceira geração das estruturas de Fibonacci, Thue-Morse e Período-Duplo, cujas células unitárias são $[A|B|A]$, $[A|B|B|A|B|A|A|B]$ e $[A|B|A|A|A|B|A|B]$, respectivamente. Para todas essas sequências, consideramos diferentes valores de n_{BA} (os mesmos da Fig. 36(a)) para um valor fixo de t_{BA} , a saber: (a) $t_{BA} = 0.5$, (b) $t_{BA} = 0.75$, (c) $t_{BA} = 1.5$ e (d) $t_{BA} = 2$. Nossos resultados numéricos das Fig. 38-40 mostram que as estruturas de bandas para os PTCs de Fibonacci, Thue-Morse e Período-Duplo são muito semelhantes ao caso periódico ilustrado na Fig. 36(a). Observa-se também uma dependência similar da largura do *bandgap* com n_{BA} e t_{BA} entre os casos periódicos e quasiperiódicos. No entanto, há uma nova característica: os primeiros *bandgaps* para estruturas quasiperiódicas são mais

estreitas e estão localizadas na região de vetor de onda mais baixa em comparação ao caso periódico. Este é um comportamento esperado, e pode ser comparado ao que ocorre em cristais fotônicos espaciais quasiperiódicos. De fato, os primeiros *bandgaps* mais estreitos em PTQCs são uma consequência do aumento do tamanho da célula unitária. À medida que o tamanho da célula unitária aumenta, o número de bandas permitidas e proibidas aumenta com o número de geração n da sequência. A estrutura de dispersão da luz é mais fragmentada, apresentando bandas cada vez mais estreitas [166, 168]. A dependência da estrutura de bandas com o índice de geração quasiperiódica n é uma assinatura (e uma característica muito importante) dos sistemas quasiperiódicos. Isso ocorre porque o processo de fragmentação das estruturas de bandas possibilita o surgimento de novas bandas permitidas em regiões do espectro que anteriormente apresentavam apenas bandas proibidas (*bandgap*). Portanto, também podemos criar modos de propagação em regiões de *bandgap* usando PTQCs com camadas alternadas de acordo com alguma sequência quasiperiódica, apenas modificando o índice de geração n da sequência, ou seja, o tamanho da célula unitária temporal.

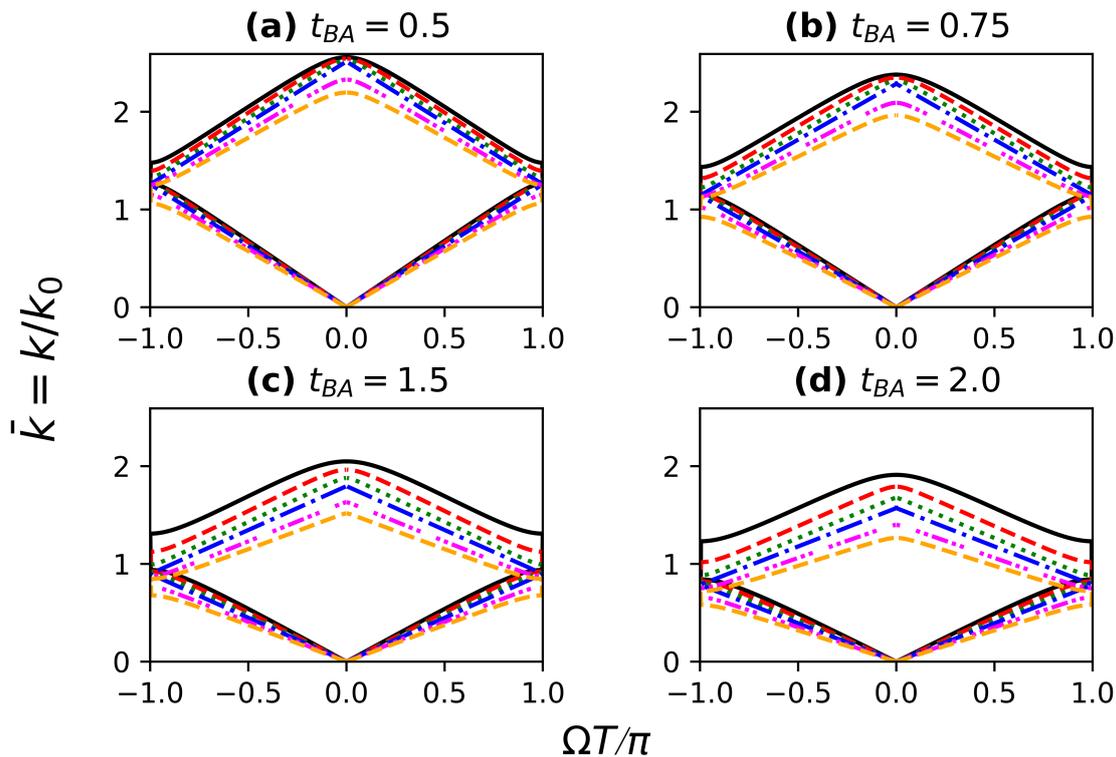


Figura 38 – Estrutura de bandas para a terceira geração da sequência de Fibonacci, considerando (a) $t_{BA} = 0.5$, (b) $t_{BA} = 0.75$, (c) $t_{BA} = 1.5$, e (d) $t_{BA} = 2.0$.

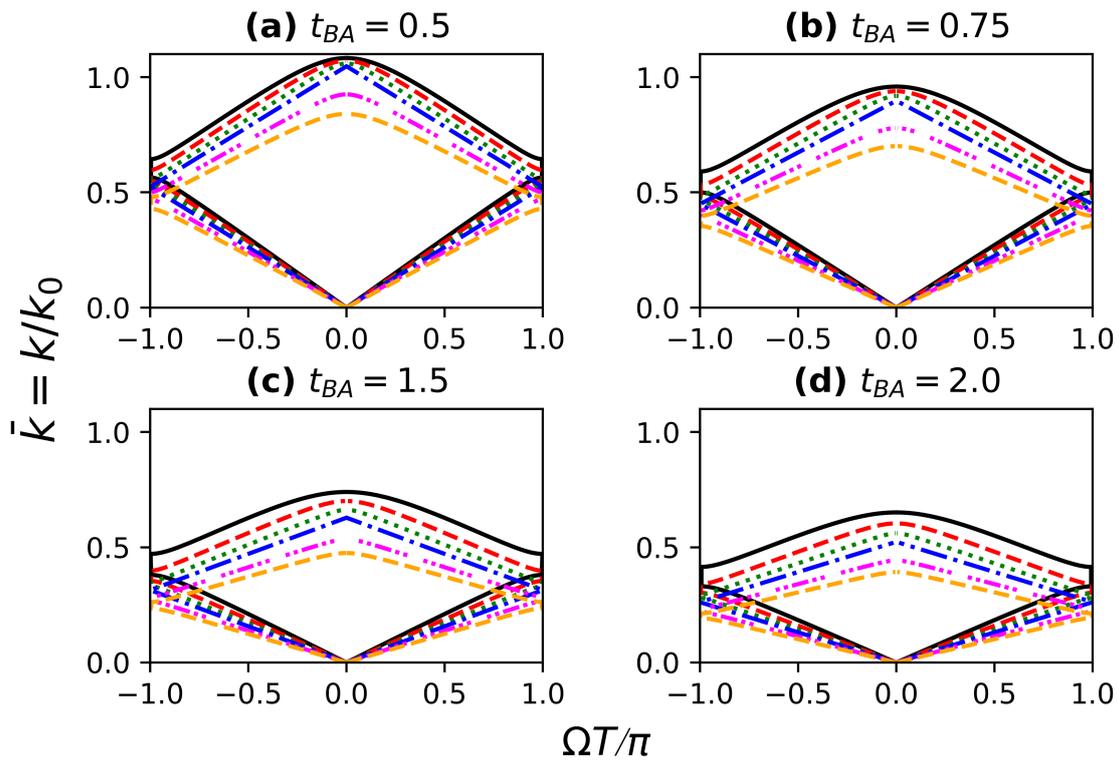


Figura 39 – Igual à Fig. 38, mas para a terceira geração da sequência de Thue-Morse.

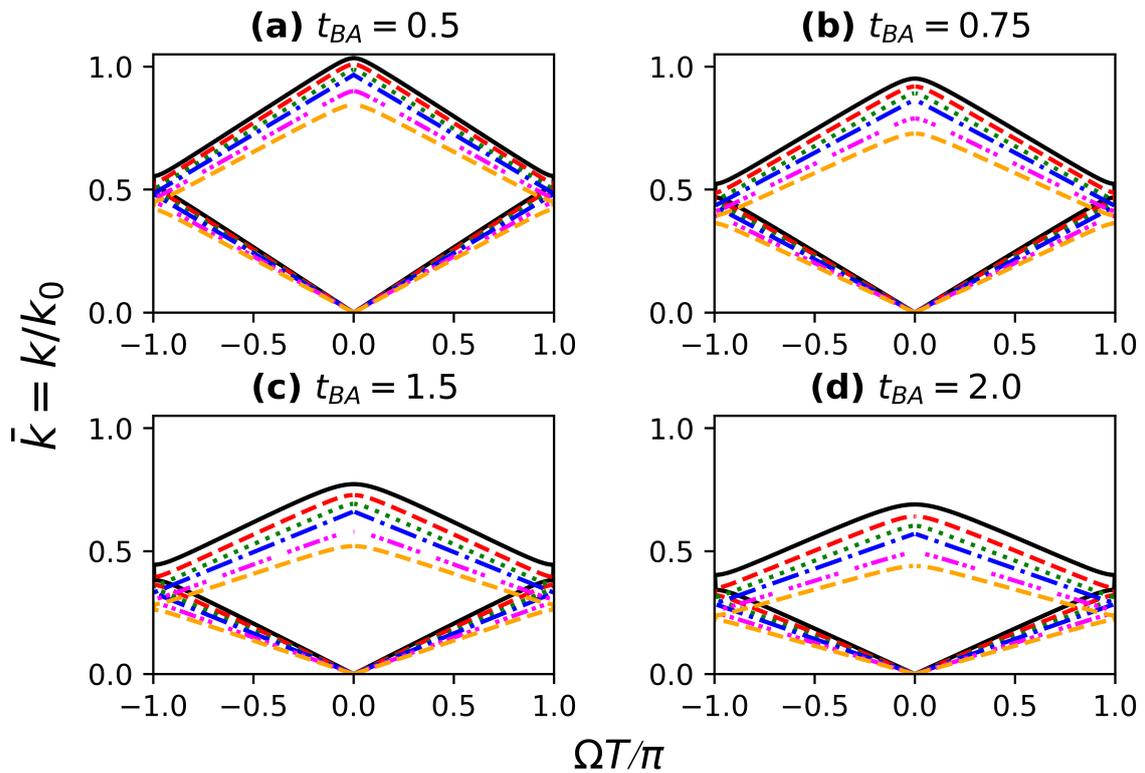


Figura 40 – Igual à Fig. 38, mas para a terceira geração da sequência de Período-Duplo.

Portanto, vamos dar uma olhada na fragmentação dos espectros de luz em PTQCs arranjados de acordo com as sequências de Fibonacci, Thue-Morse e Período-Duplo. Os gráficos da fragmentação em termos do vetor de onda adimensional \bar{k} , como uma função do número de geração n , são apresentados nas Fig. 41, 42 e 43, respectivamente. É fácil observar em todos os casos que, à medida que o índice de geração n aumenta, o número de bandas aumenta, e elas se tornam cada vez mais estreitas. É muito interessante também notar que as distribuições das bandas permitidas apresentam um comportamento auto-similar bastante claro. Para ilustrar essa característica, analisamos e identificamos algumas sub-regiões (os retângulos vermelhos rotulados como I-A, I-B e I-C) nos espectros de luz, que apresentam semelhança com o espectro principal das Fig. 41(a), 42(a) e 43(a) (rotuladas como I). Em seguida, essas regiões são ampliadas e plotadas Fig. 41(b)-(d), 42(b)-(d) e 43(b)-(d). Comparando os retângulos com as Fig. 41(a), 42(a) e 43(a), fica bastante clara a presença do comportamento auto-similar nos espectros de Fibonacci, Thue-Morse e Período-Duplo dos PTQCs considerados aqui. É importante observar que consideramos diferentes valores de n_{BA} e t_{BA} para mostrar que a auto-similaridade ocorre para diferentes parâmetros e sequências. No entanto, esta é uma análise qualitativa sobre a auto-similaridade, e é um forte indicio de que os espectros também são fractais. Claro, se considerarmos mais e mais gerações nessas sequências, elas apresentarão um padrão auto-similar muito mais bem definido.

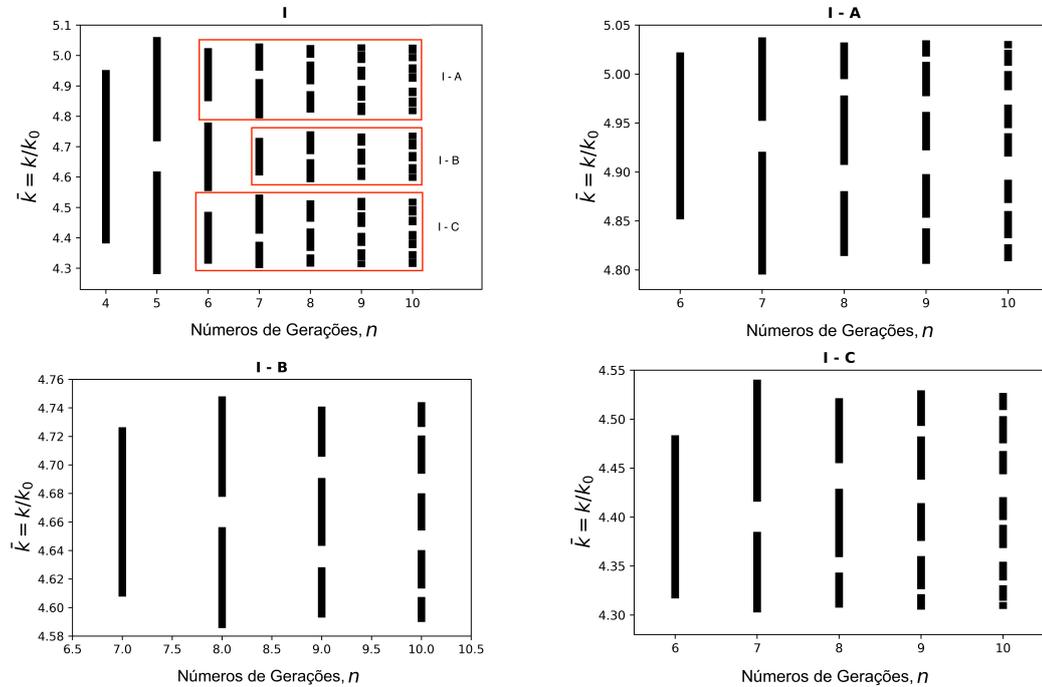


Figura 41 – (a) Distribuição das larguras das bandas permitidas para a sequência de Fibonacci com $t_{BA} = 0.5$ e $n_{BA} = 0.5$ em função do número de geração n . (b)-(d) Para ilustrar melhor o comportamento auto-similar dos espectros, mostramos um zoom de sub-regiões, destacadas por retângulos vermelhos, dos espectros principais.

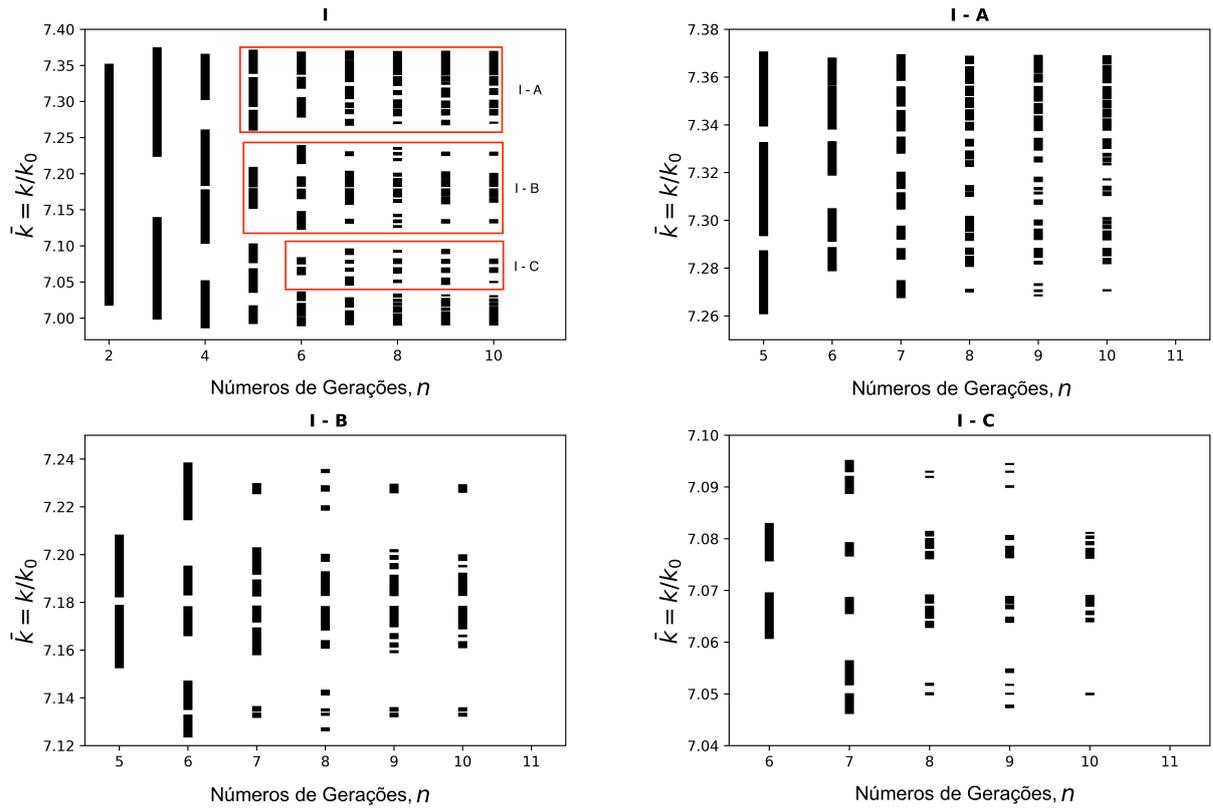


Figura 42 – Igual à Fig. 41, mas para a sequência de Thue-Morse com $t_{BA} = 2.0$ e $n_{BA} = 2.0$.

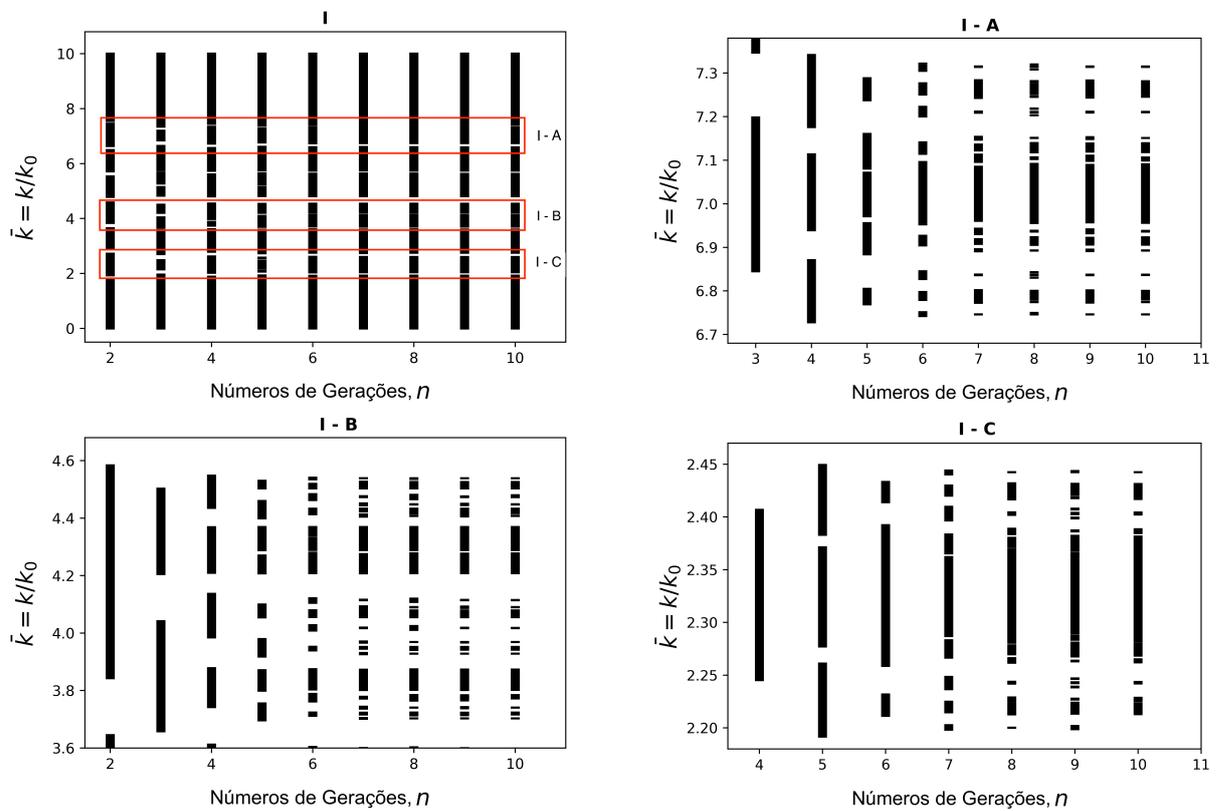


Figura 43 – Igual à Fig. 41, mas para a sequência de Período-Duplo com $t_{BA} = 0.5$ e $n_{BA} = 0.5$.

Antes de concluir, apresentamos um estudo quantitativo sobre a fragmentação dos espectros de luz dos sistemas quasiperiódicos estudados aqui. Para isso, investigamos as leis de potência associadas às larguras das bandas permitidas dos espectros dos PTQCs. Nossos resultados numéricos mostram que os fenômenos de fragmentação das bandas permitidas são governados por uma lei de potência, que relaciona a largura total das bandas permitidas Δ com o número de camadas na célula unitária temporal. Sabe-se pela literatura que para a sequência de Fibonacci o número de camadas na célula unitária é dado pelo número de Fibonacci F_n , enquanto para as sequências de Thue-Morse e Período-Duplo é dado por 2^n (aqui n é o índice de geração). O índice de escala da lei de potência ξ pode ser identificado como sendo uma constante de difusão dos espectros, que, em princípio, pode depender dos parâmetros do sistema quasiperiódico [169, 170]. Por exemplo, as razões dos índices de refração n_{BA} e os intervalos t_{BA} . A lei de potência para a sequência de Fibonacci é da forma $\Delta \sim (F_n)^{-\xi}$, enquanto para as sequências de Thue-Morse e Período-Duplo a lei de potência é da forma $\Delta \sim (2^n)^{-\xi}$.

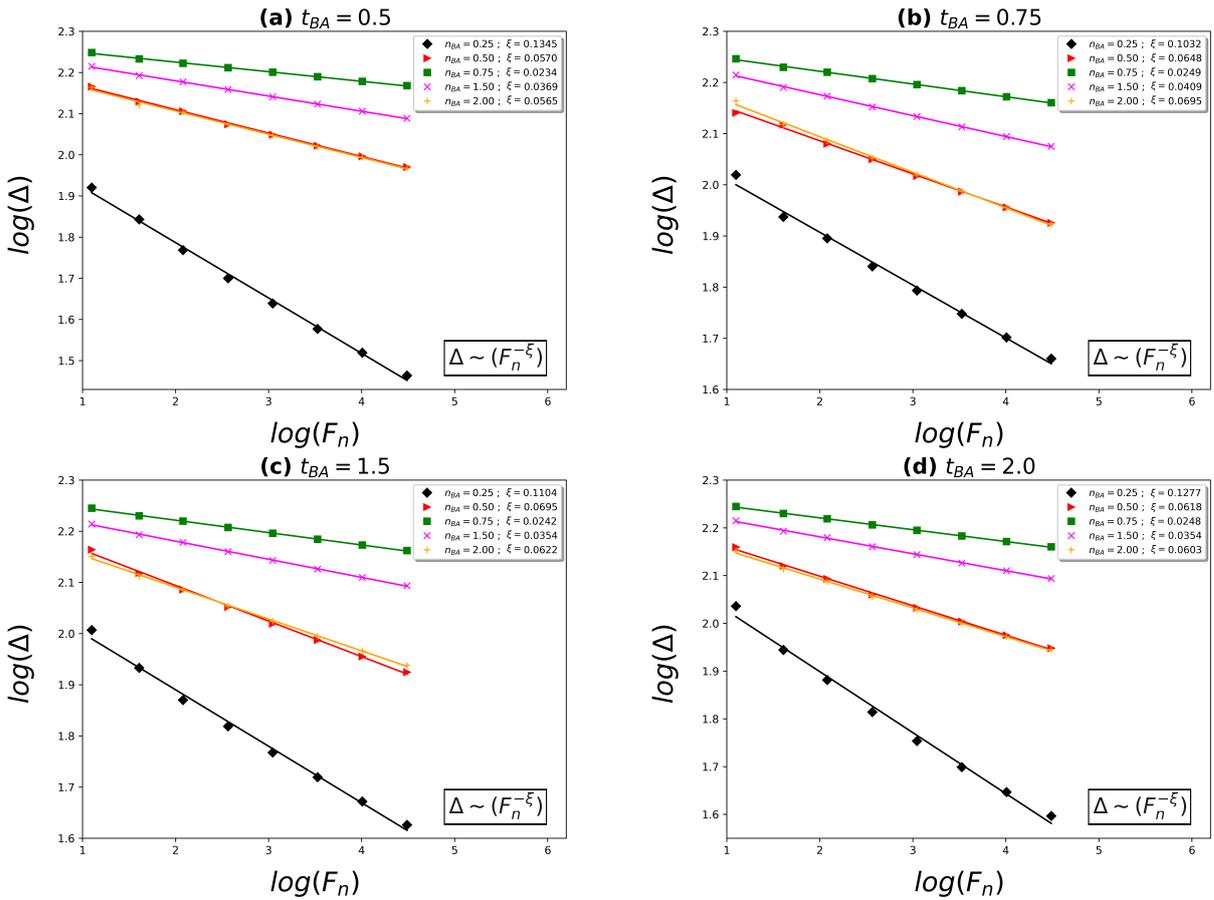


Figura 44 – Gráfico log-log para a sequência de Fibonacci considerando: (a) $t_{BA} = 0.5$, (b) $t_{BA} = 0.75$, (c) $t_{BA} = 1.5$, e (d) $t_{BA} = 2.0$. Os valores de ξ são indicados nos painéis.

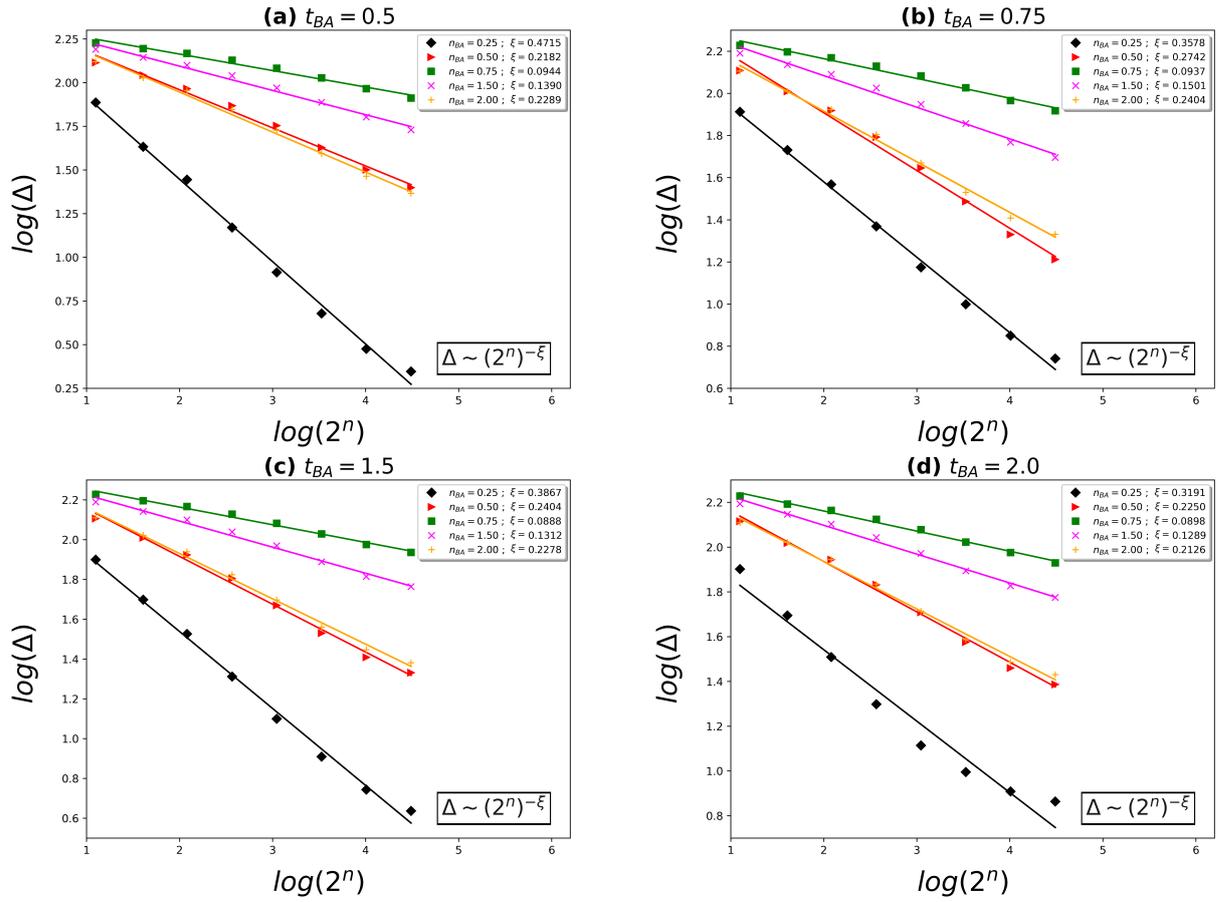


Figura 45 – Igual à Fig. 44, mas para a sequência de Thue-Morse.

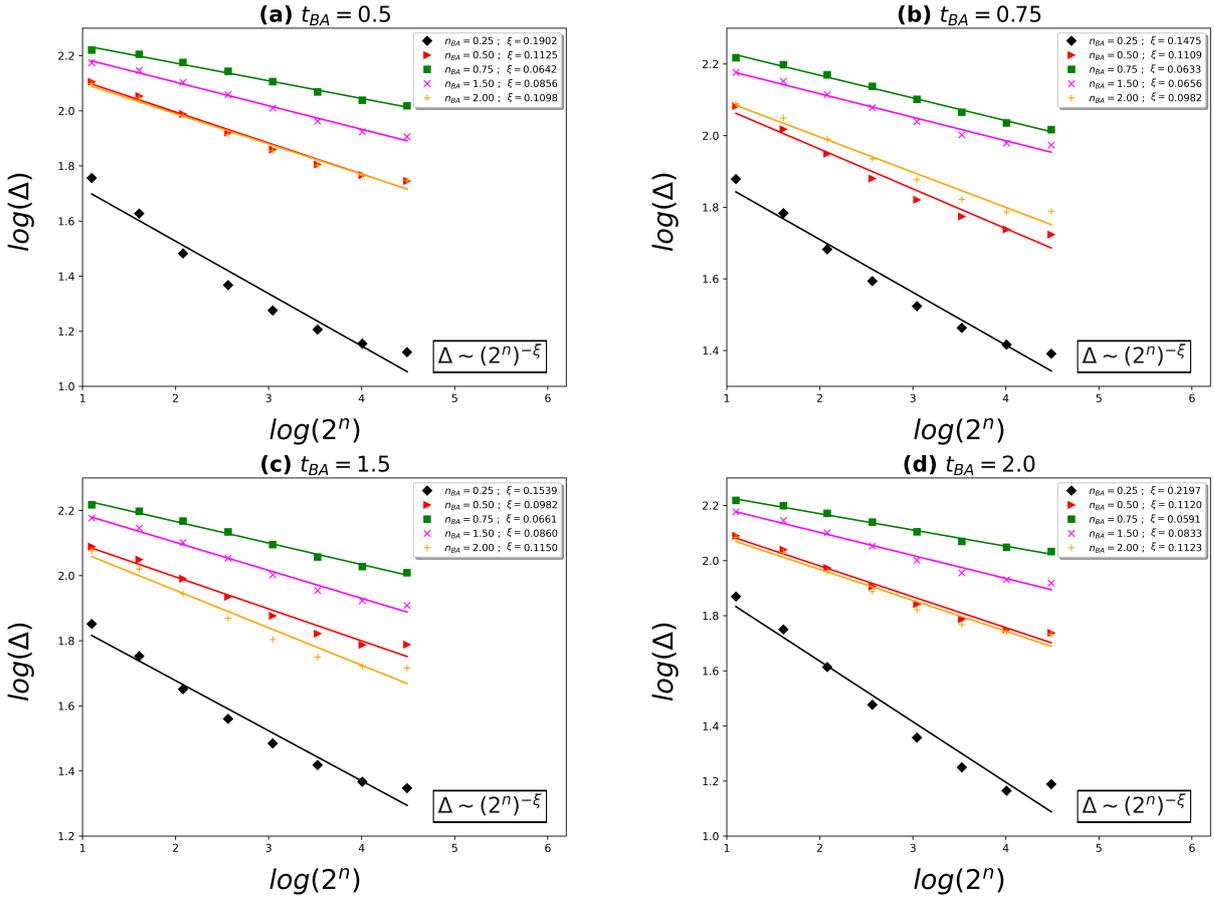


Figura 46 – Igual à Fig. 44, mas para a sequência de Período-Duplo.

4.4 Discussões e Conclusões

Em resumo, apresentamos uma teoria geral para a propagação de ondas eletromagnéticas em cristais fotônicos quasiperiódicos no tempo, que são materiais cujo índice de refração varia periodicamente e abruptamente no tempo. Estudamos algumas propriedades físicas dessas estruturas quase-periódicas compostas por duas camadas alternadas, A e B . Primeiramente, a largura da banda proibida como função da razão entre os índices de refração $n_{BA} = n_B/n_A$ e das espessuras das camadas $t_{BA} = t_B/t_A$ (ilustrado nas Figs. 36-40). Em segundo lugar, investigamos o comportamento auto-similar (ilustrado nas Figuras 41-43), que qualitativamente mostrou um belo padrão auto-similar da largura de banda como função do índice de geração n . Finalmente, a fractalidade foi investigada pelas leis de potência representadas nas Figs. 44, 45 e 46, não encontradas no caso periódico. Nos três casos quase-periódicos considerados aqui, encontramos que o índice de escala da lei de potência ξ , que pode ser identificado como sendo uma constante de difusão dos espectros, apresenta uma dependência não monótona em n_{BA} . De fato, para diferentes valores fixos de t_{BA} , nossos resultados numéricos mostram que ξ diminui à medida que n_{BA} aumenta quando $n_{BA} < 1$, enquanto ξ diminui à medida que n_{BA} diminui quando $n_{BA} > 1$.

5 Conclusões Gerais

Nesta tese, nos dedicamos a realizar estudos da técnica da matriz de transferência (TMM), para calcular a relação de dispersão da luz em dois tipos de sistemas: cristal fotônico axiônico e quasicristais fotônicos temporais. Para recapitular, a nossa jornada começou no capítulos 1, e 2, com o estudo dos cristais fotônicos. Também estudamos estruturas aperiódicas que seguem a sequência de Fibonacci, Thue–Morse e Duplo–Período.

No capítulo 4, descrevemos a propagação de ondas eletromagnéticas circularmente polarizada no cristal fotônico axiônico unidimensional usando como recurso o método da matriz de transferência para calcular a relação de dispersão para os modos eletromagnéticos. Como resultado, mostramos que a relação de dispersão está diretamente relacionada às propriedades do material, representadas pelos parâmetros geométricos (X), físicos (R) e axiônico (δ) do sistema. Analisamos numericamente como o *bandgap* do cristal fotônico axiônico é alterado por esses parâmetros. Descobrimos que o parâmetro axiônico funciona quase independentemente dos parâmetros geométricos X e físicos R , ou seja, a largura da banda proibida é sempre maior se δ aumentar, independentemente dos valores de X e R . Por outro lado, X e R trabalham contra si, ou seja, à medida que X aumenta, R diminui e vice-versa. Este trabalho mostra a importância do parâmetro δ no controle do transporte de luz em um cristal fotônico axiônico. Nesse sentido, nossos resultado abrem caminhos para a construção de cristais fotônicos utilizando materiais com propriedades axiônicas.

Finalmente, no capítulo 5, apresentamos uma teoria geral para a propagação de ondas eletromagnéticas em cristais fotônicos temporais unidimensionais, tanto periódicos quanto quasiperiódicos. Além disso, utilizamos a abordagem da matriz de transferência para investigar algumas propriedades físicas dessas estruturas quasiperiódicas que seguem as sequências de Fibonacci, Thue–Morse e Duplo–Período, a fim de obter: estruturas de bandas, auto-similaridades e espectros fractais. Primeiramente, analisamos a largura do *bandgap* como função da razão entre os índices de refração $n_{BA} = n_B/n_A$ e das espessuras das camadas $t_{BA} = t_B/t_A$ para o cristal quasiperiódico. Em segundo lugar, investigamos o comportamento de auto-similaridade dessas estruturas, que qualitativamente mostrou um belo padrão auto-similar da largura de banda como função do índice de geração n . E, por fim, a fractalidade dessas estruturas foi investigada através das leis de potência (não analisadas no caso periódico). Nos três casos quasiperiódicos considerados, encontramos que o índice de escala da lei de potência ξ , que pode ser identificado como sendo uma constante de difusão dos espectros, apresenta uma dependência não monótona em n_{BA} . De fato, para diferentes valores fixos de t_{BA} , nossos resultados numéricos revelaram que ξ diminui à medida que n_{BA} aumenta quando $n_{BA} < 1$, enquanto ξ diminui à medida que n_{BA} diminui quando $n_{BA} > 1$. Este trabalho destaca a complexidade e a riqueza das

propriedades físicas das estruturas quasiperiódicas de ordem temporal, o que pode ter implicações significativas para o desenvolvimento de dispositivos fotônicos avançados.

Esperamos sinceramente que esta tese de doutorado possa, de alguma forma, auxiliar aqueles interessados no estudo de estruturas periódicas axiônicas, bem como em estruturas periódicas e quasiperiódicas de ordem temporal.

5.1 Principais Contribuições

Aqui está o trabalho publicado e submetido durante meus estudos de doutorado. A publicação foi discutida ao longo da tese.

1. ARAÚJO, Anny C. et al. Transfer-matrix method of circular polarization light in an axionic photonic insulator. **Physical Review A**, v. 104, n. 5, p. 053532, 2021.

Referências

- [1] E. A. O. Savaçs, *A história da luz e da iluminação*, (2018).
- [2] M. Schneider, *Mitologia do Cosmos e o Egito de Wereshnefer, Deuses, Mitos e Ritos do Egito Antigo*, 26 (2021).
- [3] C. A. de Proença Rosa, *História da ciência*, Fundação Alexandre de Gusmão, (2010).
- [4] F. Gil and L. Catarino, *Visões da Luz*, Coimbra University Press, (2020).
- [5] R. B. Barthem, *A luz*, Editora Livraria da Física, (2005).
- [6] G. Waldman and J. N. Kidder, *Introduction to Light, American Journal of Physics* **52** (2), 186 (1984).
- [7] S. Hawking, *Uma breve história do tempo*, Editora Intrínseca, (2015).
- [8] I. Foguel, *Nikola Tesla: O Gênio Futurista*, Clube de Autores, (2021).
- [9] M. S. de Carvalho, *A luz da Filosofia, Visões da Luz*, 35 (2020).
- [10] C. Chesman, *Física moderna experimental e aplicada*, Editora Livraria da Física, (2004).
- [11] E. J. J. B. Yablonovitch, *Photonic band-gap structures, JOSA B* **10** (2), 283–295 (1993).
- [12] M. Ghulinyan, C. J. Oton, L. Dal Negro, L. Pavesi, R. Sapienza, M. Colocci, and D. S. Wiersma, *Physical Review B* **71**, 094204 (2005).
- [13] E. H. El Boudouti, Y. El Hassouani, H. Aynaou, B. Djafari-Rouhani, A. Akjouj, and V. R. Velasco, *Journal of Physics: Condensed Matter* **19**, 246217 (2007).
- [14] E. J. C. Granada and D. F. Rojas, *Journal of Physics: Conference Series* **850**, 012024 (2017).
- [15] A. Dikopoltsev, Y. Sharabi, M. Lyubarov, Y. Lumer, S. Tsesses, E. Lustig, I. Kaminer, and M. Segev, *Light emission by free electrons in photonic time-crystals*, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **119** (6), e2119705119 (2022).
- [16] M. Lyubarov, Y. Lumer, A. Dikopoltsev, E. Lustig, Y. Sharabi, and M. Segev, *Amplified Emission by Atoms and Lasing in Photonic Time Crystals*, *arXiv*, (2022).
- [17] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, and R. D. Meade, *Molding the flow of light*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (2008).

-
- [18] J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve, and S. Fan, *Solid State Communications* **102**, 165–173 (1997).
- [19] C. M. Soukoulis, *Photonic Band Gap Materials*, Springer Science & Business Media **315** (2012).
- [20] Lord Rayleigh, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **24**, 145–159 (1887).
- [21] V. P. Bykov, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* **35**, 269 (1972).
- [22] Eli Yablonovitch, *Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics*, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059–2062 (1987).
- [23] S. John, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2486–2489 (1987).
- [24] R. G. Hulet et al., *Physical Review Letters* **55**, 2137 (1985).
- [25] J. Martorell and N. M. Lawandy, *Physical Review Letters* **65**, 1877 (1990).
- [26] K. M. Ho et al., *Physical Review Letters* **65**, 3152 (1990).
- [27] M. Johri, Y. A. Ahmed, and T. Bezboruah, *Current Science*, 1361–1365 (2007).
- [28] E. Yablonovitch, *Optics and Photonics News* **18**, 12–13 (2007).
- [29] Y. Fink, J. Winn, S. Fan, C. Chen, J. Michel, J. Joannopoulos, and E. Thomas, *Science (New York, N.Y.)* **282**, 1679 (1998).
- [30] M. Mansuripur, *Omni-directional dielectric mirrors*, Cambridge University Press, (2009), p. 288.
- [31] T. Yonte, J. J. Monzón, A. Felipe, and L. L. Sánchez-Soto, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* **6**, 127 (2003).
- [32] P. Yeh, *Optical Waves in Layered Media*, John Wiley & Sons, (1988).
- [33] I. Celanovic et al., *Photonic Crystal Materials and Nanostructures* **5450**, 416–422 (2004).
- [34] H. Shen, Z. Wang, Y. Wu, B. Yang, *One Dimensional Photonic Crystals: Fabrication, Responsiveness and Emerging Applications in 3D Construction*, *RSC Adv.* **6**, (2015).
- [35] H. W. Yen et al., *Optics Communications* **9**, 35–37 (1973).
- [36] C. V. Shank, J. E. Bjorkholm, and H. Kogelnik, *Applied Physics Letters* **18**, 395–396 (1971).

-
- [37] M. Meier et al., *Applied Physics Letters* **74**, 7–9 (1999).
- [38] Thomas Patrick White et al., *Theory of resonance and mode coupling in photonic crystal devices*, University of Sydney (2005).
- [39] Martin Plihal, A. Shambrook, Alexei A. Maradudin, Ping Sheng, *Two-dimensional photonic band structures*, *Optics Communications* **80**, 199–204 (1991).
- [40] WM Robertson, G Arjavalingam, RD Meade, KD Brommer, AM Rappe, JD Joannopoulos, *Measurement of photonic band structure in a two-dimensional periodic dielectric array*, *Physical Review Letters* **68**, 2023 (1992).
- [41] Robert D. Meade, Karl D. Brommer, Andrew M. Rappe, JD Joannopoulos, *Existence of a photonic band gap in two dimensions*, *Applied Physics Letters* **61**, 495–497 (1992).
- [42] Pierre R. Villeneuve, Michel Piché, *Photonic band gaps in two-dimensional square lattices: Square and circular rods*, *Physical Review B* **46**, 4973 (1992).
- [43] M. Plihal, A. A. Maradudin, *Photonic band structure of two-dimensional systems: The triangular lattice*, *Physical Review B* **44**, 8565 (1991).
- [44] Xue-Hua Wang, Ben-Yuan Gu, Zhi-Yuan Li, Guo-Zhen Yang, *Large absolute photonic band gaps created by rotating noncircular rods in two-dimensional lattices*, *Physical Review B* **60**, 11417 (1999).
- [45] R. Padjen et al., *Journal of modern optics* **41**, 295–310 (1994).
- [46] M. Agio and L. C. Andreani, *Physical Review*
- [47] M. Qiu and S. He, *Physical Review B* **60**, 10610 (1999).
- [48] K. I. W. Haus, *Japanese journal of applied physics* **33**, L1463 (1994).
- [49] P. L. Gourley et al., *Applied Physics Letters* **64**, 689 (1994).
- [50] T. Krauss et al., *Electronics Letters* **30**, 1446 (1994).
- [51] Sharee J. McNab, Nikolaj Moll, Yurii A. Vlasov, *Ultra-low loss photonic integrated circuit with membrane-type photonic crystal waveguides*, *Optics Express* **11**, 2927–2939 (2003).
- [52] Peter Bienstman, Solomon Assefa, Steven G. Johnson, John D. Joannopoulos, Gale S. Petrich, Leslie A. Kolodziejski, *Taper structures for coupling into photonic crystal slab waveguides*, *JOSA B* **20**, 1817–1821 (2003).

- [53] T. Todorov Trifonov and others, *Photonic bandgap analysis and fabrication of macro-porous silicon by electrochemical etching*, Universitat Rovira i Virgili, (2004).
- [54] Shawn-yu Lin, JG Fleming, DL Hetherington, BK Smith, R Biswas, KM Ho, MM Sigalas, W Zubrzycki, SR Kurtz, Jim Bur, *A three-dimensional photonic crystal operating at infrared wavelengths*, Nature **394**, 251–253 (1998).
- [55] T. J. Shepherd et al., Electronics Letters **34**, 787–789 (1998).
- [56] A. Chelnokov et al., Electronics Letters **33**, 1981–1983 (1997).
- [57] J. G. Fleming and S.-Y. Lin, *Three-dimensional photonic crystal with a stop band from 1.35 to 1.95 μm* , Optics Letters **24** (1), 49–51 (1999).
- [58] S. Noda et al., Science **289**, 604–606 (2000).
- [59] A. Blanco et al., Nature **405**, 437–440 (2000).
- [60] M. O. Jensen and M. J. Brett, Optics express **13**, 3354 (2005).
- [61] M. Fujita et al., Science **308**, 1296–1298 (2005).
- [62] Shinpei Ogawa, Masahiro Imada, Susumu Yoshimoto, Makoto Okano, Susumu Noda, *Control of light emission by 3D photonic crystals*, Science **305**, 227–229 (2004).
- [63] P. Lodahl et al., Nature **430**, 654–657 (2004).
- [64] Shawn-Yu Lin, JG Fleming, *Three-dimensional photonic-crystal emitter for thermal photovoltaic power generation*, Applied Physics Letters **83**, 382 (2003).
- [65] Shawn-Yu Lin, JG Fleming, I El-Kady, *Three-dimensional photonic-crystal emission through thermal excitation*, Optics Letters **28**, 1909–1911 (2003).
- [66] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, American Association of Physics Teachers (2005).
- [67] G. Floquet, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, l'Ecole Normale Supérieure **12**, (1883).
- [68] F. Bloch, *Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern*, Springer, **52** (7), 555–600 (1929).
- [69] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 8th Edition, Wiley, (2018).
- [70] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, College edn (Thomson Learning Inc, 1976).
- [71] K. Sakoda, Springer Science & Business Media (2004).

-
- [72] Z. Zhang, S. Satpathy, *Electromagnetic wave propagation in periodic structures: Bloch wave solution of Maxwell's equations*, Physical Review Letters **65** (21), 2650 (1990).
- [73] P. Markos and C. M. Soukoulis, *Wave propagation: from electrons to photonic crystals and left-handed materials*, Princeton University Press (2008).
- [74] K. Sakoda, Physical Review B **51**, 4672 (1995).
- [75] A. Mekis, J. C. Chen, I. Kurland, S. Fan, P. R. Villeneuve, and J. D. Joannopoulos, Physical Review Letters **77**, 3787 (1996).
- [76] S. G. Johnson, C. Manolatu, S. Fan, P. R. Villeneuve, J. D. Joannopoulos, and H. A. Haus, Optics Letters **23**, 1857 (1998).
- [77] S. Fan, P. R. Villeneuve, J. D. Joannopoulos, M. J. Khan, C. Manolatu, and H. A. Haus, Physical Review B **59**, 15882 (1999).
- [78] A. Chutinan, M. Mochizuki, M. Imada, and S. Noda, Applied Physics Letters **79**, 2692 (2001).
- [79] P. J. Steinhardt, *Quasicrystals: a brief history of the impossible*, Springer **24** (1), 85–91 (2013).
- [80] H. Bohr, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **34**, 25–40 (1926).
- [81] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. W. Cahn, Physical Review Letters **53**, 1951 (1984).
- [82] I. Caracelli, *Química Nova na Escola* **33**, 210 (2011).
- [83] Z. Vardeny et al., Nature Photonics **7**, 177–187 (2013).
- [84] D. Levine and P. J. Steinhardt, Physical Review Letters **53**, 2477 (1984).
- [85] F. Samavat et al., Scientific Research Publishing (2012).
- [86] E. L. Albuquerque and M. G. Cottam, Elsevier (2004).
- [87] G. Y. Oh et al., Physical Review B **47**, 61–22 (1993).
- [88] Araújo, CAA and Vasconcelos, Manoel Silva de and Mauriz, Paulo Wilson and Albuquerque, Eudenilson Lins, Optical Materials **35**, 18–24 (2012).
- [89] E. R. Brandão et al., Optical Materials **46**, 378–383 (2015).
- [90] Z. Cheng et al., Physical Review B **37**, 4375 (1988).
- [91] N. H. Liu, Physical Review B **55**, 35–43 (1997).

- [92] W. Steurer and D. Sutter-Widmer, *Journal of Physics D: Applied Physics* **40**, R229 (2007).
- [93] M. Kohmoto et al., *Physical Review Letters* **58**, 2436 (1987).
- [94] E. L. Albuquerque and M. G. Cottam, *Physics reports* **376**, 225–337 (2003).
- [95] W. Gellermann, M. Kohmoto, B. Sutherland, and P. C. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 633 (1994).
- [96] T. Hattori, N. Tsurumachi, S. Kawato, and H. Nakatsuka, *Phys. Rev. B* **50**, 4220 (1994).
- [97] R. Pelster, V. Gasparian, and G. Nimtz, *Phys. Rev. E* **55**, 7645 (1997).
- [98] E. Macia, *Phys. Rev. B* **63**, 205421 (2001).
- [99] D. Lusk, I. Abdulhalim, and F. Placido, *Optics Communications* **198**, 273 (2001).
- [100] R. W. Peng, M. Wang, A. Hu, S. S. Jiang, G. J. Jin, and D. Feng, *Phys. Rev. B* **57**, 1544 (1998).
- [101] H. S. Melo, Correio dos Açores, Gráfica Açoreana, Lda. (2015).
- [102] Wikipedia, *Fibonacci sequence*, https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_sequence. Accessed: June 23, 2024.
- [103] J.-P. Allouche and J. Shallit, *The ubiquitous prouhet-thue-morse sequence*, Springer **16**, (1999).
- [104] C.H.O. Costa, M.S. Vasconcelos, P.H.R. Barbosa, F.F. Barbosa Filho, *Fractal spectra in generalized Fibonacci one-dimensional magnonic quasicrystals*, *Journal of magnetism and magnetic materials* **324**, 2315–2323 (2012).
- [105] L. Visinelli, *Modern Physics Letters A* **28**, 1350162 (2013).
- [106] L. Visinelli, *Dual axion electrodynamics*, *arXiv preprint arXiv:1111.2268* (2011).
- [107] C. L. Kane and E. J. Mele, *Z₂ topological order and the quantum spin Hall effect*, *Physical Review Letters* **95** (14), 146802 (2005).
- [108] J. E. Moore, *Nature* **464**, 194–198 (2010).
- [109] L. Fu, *Physical Review Letters* **106**, 106802 (2011).
- [110] N. Varnava and D. Vanderbilt, *Physical Review B* **98**, 245117 (2018).
- [111] F. Schindler, A. M. Cook, M. G. Vergniory, Z. Wang, S. S. P. Parkin, B. A. Bernevig, and T. Neupert, *Science Advances* **4**, 346 (2018).

- [112] Y. Tanaka, Z. Ren, T. Sato, K. Nakayama, S. Souma, T. Takahashi, K. Segawa, and Y. Ando, *Nature Physics* **8**, 800–803 (2012).
- [113] M. König, S. Wiedmann, C. Brune, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X.L. Qi, and S.C. Zhang, *Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells*, *Science* **318** (5851), 766–770 (2007).
- [114] Y. L. Chen, J. G. Analytis, J.H. Chu, Z. K. Liu, S.K. Mo, X.L. Qi, H. J. Zhang, D. H. Lu, X. Dai, Z. Fang, et al., *Science* **325**, 178 (2009).
- [115] M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Colloquium: topological insulators*, *Reviews of Modern Physics* **82** (4), 3045 (2010).
- [116] W. Tian, W. Yu, J. Shi, and Y. Wang, *Materials* **10**(7), 814 (2017).
- [117] Y. Yang, Z. Gao, H. Xue, L. Zhang, M. He, Z. Yang, R. Singh, Y. Chong, B. Zhang, and H. Chen, *Nature* **565**, 622–626 (2019).
- [118] M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045–3067 (2010).
- [119] G. Harari, M. A. Bandres, Y. Lumer, M. C. Rechtsman, Y. D. Chong, M. Khajavikhan, D. N. Christodoulides, and M. Segev, *Science* **359**, 6381 (2018).
- [120] J. Zhang et al., *Nature communications* **2**, 1–6 (2011).
- [121] A. M. Essin, J. E. Moore, and D. Vanderbilt, *Physical Review Letters* **102**, 146805 (2009).
- [122] R. D. Peccei, Helen R. Quinn, *CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles*, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1443 (1977).
- [123] F. W. Hehl, Y. N. Obukhov, J.-P. Rivera, and H. Schmid, *Physics Letters A* **372**, 1141–1146 (2008).
- [124] F. W. Hehl, Y. N. Obukhov, J.-P. Rivera, and H. Schmid, *The European Physical Journal B* **71**, 321 (2009).
- [125] E. Kita, K. Siratori, and A. Tasaki, *Journal of Applied Physics* **50**, 7748–7750 (1979).
- [126] A. Martín-Ruiz et al., *Physical Review A* **100** (2019).
- [127] M. Mogi, M. Kawamura, A. Tsukazaki, R. Yoshimi, K. S. Takahashi, M. Kawasaki, and Y. Tokura, *Science Advances* **3**, eaao1669 (2017).
- [128] Takahiro Morimoto, Akira Furusaki, Naoto Nagaosa, *Topological magnetoelectric effects in thin films of topological insulators*, *Phys. Rev. B* **92**, 085113 (2015).

- [129] L. Visinelli, *Modern Phys. Letters A* **11** (2014).
- [130] N. P. Armitage and L. Wu, *SciPost Phys* **6**, 046 (2019).
- [131] A. Adeifeoba, *Introduction to Chern-Simons Theory*, ArXiv.
- [132] A. Sekine and K. Nomura, *Axion electrodynamics in topological materials*, *Journal of Applied Physics* **129** (14), 101 (2021).
- [133] S. Raghu and F. D. M. Haldane, *Physical Review A* **78**, 033834 (2008).
- [134] M. C. Rechtsman, J. M. Zeuner, Y. Plotnik, Y. Lumer, D. Podolsky, F. Dreisow, S. Nolte, M. Segev, and A. Szameit, *Nature* **496**, 196–200 (2013).
- [135] L. Lu, J. Joannopoulos, M. Soljačić, *Topological photonics*, *Nature Photon* **821–829** (2014).
- [136] T. Ozawa et al., *Reviews of Modern Physics* **91**, 015006 (2019).
- [137] F. D. M. Haldane and S. Raghu, *Possible realization of directional optical waveguides in photonic crystals with broken time-reversal symmetry*, *Physical Review Letters* **100** (1), 013904 (2008).
- [138] A. B. Khanikaev and G. Shvets, *Two-dimensional topological photonics*, *Nature Photonics* **11** (12), 763–773 (2017).
- [139] Gleb Siroki, Paloma A. Huidobro, Vincenzo Giannini, *Topological photonics: From crystals to particles*, *Physical Review B* **96**, 408 (2017).
- [140] Yihao Yang, Zhen Gao, Haoran Xue, Li Zhang, Mengjia He, Zhaoju Yang, Ranjan Singh, Yidong Chong, Baile Zhang, Hongsheng Chen, *Realization of a three-dimensional photonic topological insulator*, *Nature* **565** (2019).
- [141] Yihao Yang, Zhen Gao, Haoran Xue, Li Zhang, Mengjia He, Zhaoju Yang, Ranjan Singh, Yidong Chong, Baile Zhang, Hongsheng Chen, *Realization of a three-dimensional photonic topological insulator*, *Nature* **565**, 622–626 (2019).
- [142] M. Kim, Z. Jacob, and J. Rho, *Light Sci Appl* **9**, 1–30 (2020).
- [143] Nikhil Parappurath, Filippo Alpeggiani, Laurens Kuipers, Ewold Verhagen, *Direct Observation of Topological Edge States in Silicon Photonic Crystals: Spin, Dispersion, and Chiral Routing*, *Science Advanced* (2018).
- [144] Z. Zhang, M. H. Teimourpour, J. Arkininstall, M. Pan, P. Miao, H. Schomerus, R. El-Ganainy, and L. Feng, *Laser & Photonics Reviews* **13**, (2019).
- [145] S. Barik et al., *Science* **359**, 666–668 (2018).

- [146] S. Ozaki and N. Yamamoto, *Journal of High Energy Physics* **2017**, 1–10 (2017).
- [147] M. Vieira, S. Sergeenkov, and C. Furtado, *Physical Review A* **96**, 013852 (2017).
- [148] A. Karch, *Phys. Rev. B* **83**, 245432 (2011).
- [149] C. H. Costa, L. F. C. Pereira, and C. G. Bezerra, *Phys. Rev. B* **96**, 125412 (2017).
- [150] Bruno P. Silva, Carlos H. Costa, *Tuning band structures of photonic multilayers with positive and negative refractive index materials according to generalized Fibonacci and Thue-Morse sequences*, *Journal of Physics: Condensed Matter* **32**, 135703 (2019).
- [151] K. Sacha, *Time Crystals*, Springer, (2020).
- [152] L. Guo and P. Liang, *New Journal of Physics* **22**, (2020).
- [153] T. F. Krauss and M. D. L. R. Richard, *Photonic crystals in the optical regime—past, present and future*, *Progress in Quantum Electronics* **23** (2), 51–96 (1999), Elsevier.
- [154] F. R. Morgenthaler, *IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **6**, 167 (1958).
- [155] S. Saha, O. Segal, C. Fruhling, E. Lustig, M. Segev, A. Boltasseva, and V. M. Shalaev, *Optics Express* **31**, 8267 (2023).
- [156] L. B. Felsen and G. M. Whitman, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **18**, 242 (1970).
- [157] R. Fante, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **19**, 417 (1971).
- [158] T. Ruiz, C. Wright, and J. Smith, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **26**, 358 (1978).
- [159] F. Biancalana, A. Amann, A. V. Uskov, and E. P. O’Reilly, *Physical Review E* **75**, 046607 (2007).
- [160] E. Lustig, Y. Sharabi, and M. Segev, *Optica* **5**, 1390 (2018).
- [161] J. Mendonca and P. Shukla, *Physica Scripta* **65**, 160 (2002).
- [162] J. R. Zurita-Sanchez, P. Halevi, and J. C. Cervantes-González, *Physical Review A* **79**, 053821 (2009).
- [163] A. M. Shaltout, J. Fang, A. V. Kildishev, and V. M. Shalaev, *Photonic time-crystals and momentum band-gaps*, in *CLEO: 2016*, OSA Technical Digest, 2016.
- [164] J. S. Martinez Romero, O.M. Becerra Fuentes, and P. Halevi, *Physical Review A* **93**, 063813 (2016).

-
- [165] L. Zeng, J. Xu, C. Wang, J. Zhang, Y. Zhao, J. Zeng, and R. Song, *Scientific Reports* **7**, 17165 (2017).
- [166] C.H. Costa, L.F.C. Pereira, and C.G. Bezerra, *Physical Review B* **96**, 125412 (2017).
- [167] J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, J.N. Winn, and R.D. Meade, *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light* (Princeton University Press, Princeton, 2008).
- [168] C.H. Costa, M.S. Vasconcelos, P.H.R. Barbosa, and F.F. Barbosa Filho, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **324**, 2315 (2012).
- [169] C.G. Bezerra and M.G. Cottam, *Physical Review B* **65**, 054412 (2002).
- [170] C.G. Bezerra, E.L. Albuquerque, A.M. Mariz, L.R. da Silva, and C. Tsallis, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **294**, 415 (2001).
- [171] A. B. Khanikaev and G. Shvets, *Nature Photon* **11**, 763–773 (2017).
- [172] F. Wilczek, *Physical Review Letters* **58**, 1799 (1987).
- [173] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, American Association of Physics Teachers, (1999).

Apêndices

APÊNDICE A – Eletrodinâmica Axiônica

Nesta seção, estamos interessados na descrição da equação de Maxwell modificada por um termo axiônico conhecido na literatura como $\theta(x, t)$. O objetivo deste estudo é entender como as equações de Maxwell modificadas podem ser construídas para descrever a propagação de ondas eletromagnéticas em materiais que apresentam um efeito magnetoelétrico topológico (TME).

As equações de Maxwell modificadas por um campo axiônico têm sido discutidas extensivamente [105]. Em 1987, Wilczek [172] estudou a eletrodinâmica de pseudo-partículas denominadas Axions, cuja dinâmica é caracterizada por uma lagrangiana \mathcal{L}_θ que depende do parâmetro θ , adicionada à lagrangiana de Maxwell \mathcal{L}_0 (com fontes). Em seu trabalho, Wilczek demonstrou que variações no campo axiônico podem gerar efeitos magnetoelétricos e cargas elétricas fracionárias em dyons [172]. Para derivarmos as equações de Maxwell modificadas por um termo axiônico, devemos considerar $\theta(x, t)$ como um campo, e sua inclusão na lagrangiana deve satisfazer uma equação de campo.

Os estudos apresentados nos capítulos desta tese foram realizados considerando um sistema sem carga e corrente. Portanto, aqui não consideraremos a interação dos campos com cargas e correntes, pois nosso objetivo é demonstrar como obter as equações de Maxwell livres de fontes. Antes de iniciar os cálculos, revisaremos alguns conceitos básicos do formalismo da lagrangiana do eletromagnetismo.

O formalismo Lagrangiano para o eletromagnetismo é baseado na dinâmica do campo A_μ . A densidade lagrangiana consiste em duas partes: cinética (lagrangiana livre) e potencial (lagrangiana de interação). Para o campo eletromagnético, a parte cinética é a densidade de energia armazenada no campo elétrico, e a parte potencial é a densidade de energia armazenada no campo magnético. Neste apêndice, estudaremos a eletrodinâmica axiônica e, a partir delas, obteremos as equações de movimentos (equações de Maxwell modificadas). Esta equação pode ser escrita de duas maneiras: na forma diferencial, onde o princípio da menor ação é aplicado, e na forma covariante, que é mais elegante. Aqui, nos concentraremos em obter as equações de Maxwell usando o formalismo covariante.

Agora, vamos escrever separadamente a densidade lagrangiana do modelo em duas partes: lagrangiana de Maxwell (termo cinético) e a lagrangiana de interação (envolve interação do campo eletromagnético e o campo axiônico).

Lagrangiana e Equações de Euler-Lagrange

A densidade lagrangiana de Maxwell é definida por

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

A lagrangiana de interação entre o axion e o campo eletromagnético é:

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\kappa\theta}{4\mu_0} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

onde $\theta = \theta(x, t)$ é conhecido na física de partículas como um campo pseudo-escalar ¹ semelhante a um axion. Aqui, assumimos que κ é uma constante de acoplamento e o fator $1/\mu_0$ garante que κ seja adimensional [106].

Para encontrar as equações de Maxwell vamos ter que configurar a densidade de Lagrange para o campo eletromagnético e a densidade de Lagrange axiônica de forma que a função $\mathcal{L}_{0+\theta}$ deve obedecer a equação de movimento de Euler-Lagrange. Sendo assim, a descrição covariante da densidade lagrangiana que representa a interação da eletrodinâmica com o axion é:

$$\mathcal{L}_{0+\theta} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa\theta}{4\mu_0} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

Sabemos que na eletrodinâmica, os campos \vec{E} , \vec{B} e θ não são apenas dependentes do tempo t , mas também do espaço \vec{r} . Portanto, a equação de Euler-Lagrange deve ser escrita em termos do tempo e do espaço. Assim, escrevendo as equações de Euler-Lagrange para $\mathcal{L}_{0+\theta}$, temos:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{0+\theta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_{0+\theta}}{\partial A_\nu} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Agora, queremos mostrar que a densidade de Lagrange dada pela Eq. (A.3) resulta nas equações de Maxwell modificadas por um parâmetro θ .

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{0+\theta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_\theta}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] \quad (\text{A.5})$$

O cálculo do primeiro termo da soma na Eq. (A.5) é:

¹ pseudo-escalares: são quantidades escalares que mudam de sinal quando o sentido de orientação do sistema de coordenadas é invertido.

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] &= \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left(-\frac{1}{4\mu_0} F_{\lambda\eta} F^{\lambda\eta} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{4\mu_0} \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left((\partial_\lambda A_\eta - \partial_\eta A_\lambda)(\partial^\lambda A^\eta - \partial^\eta A^\lambda) \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{2\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

O cálculo do segundo termo da soma na Eq. (A.5) é:

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_\theta}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] &= \frac{\kappa\theta}{4\mu_0} \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta}) \right] \\
 &= \frac{\kappa\theta}{4\mu_0} \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\sigma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\sigma\delta} \right) \right] \\
 &= \frac{\kappa\theta}{8\mu_0} \epsilon^{\alpha\beta\sigma\delta} \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (F_{\alpha\beta} F_{\sigma\delta}) \right] \\
 &= \frac{\kappa\theta}{\mu_0} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Juntando as Eqs. (A.6) e (A.7) na Eq. (A.5), temos:

$$-\frac{1}{2\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\kappa\theta}{\mu_0} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{A.8}$$

Entretanto, devido à identidade de Bianchi, temos $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ e $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$.

Vamos agora considerar θ como uma função $\theta(x, t)$. O segundo termo da soma da Eq. (A.5) é:

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \left[\frac{\kappa\theta}{4\mu_0} \epsilon^{\alpha\beta\sigma\delta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\mu A_\beta)(\partial_\sigma A_\delta) \right] &= \frac{\kappa}{\mu_0} \partial_\mu (\theta \tilde{F}^{\mu\nu}) \\
 \partial_\mu F^{\mu\nu} - \kappa(\partial_\mu \theta) \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Finalmente, obtemos as equações dinâmicas de movimento para o campo eletromagnético modificado por um termo axiônico, também conhecida como teoria de Chern-Simons.

Matrizes do Tensor de Campo e Seu Dual

Agora, vamos escrever o tensor do campo eletromagnético e o seu dual como matrizes $F^{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

Equações de Maxwell Modificadas

Agora, queremos mostrar que a Eq. (A.9) resulta nas equações de Maxwell modificadas por um parâmetro $\theta(\vec{r})$. Para isso, devemos calcular a Eq. (A.9), onde, para cada valor de $\mu = (0, 1, 2 \text{ e } 3)$ vamos associar todos os valores de $\nu = (0, 1, 2 \text{ e } 3)$. Fazendo isso, as equações podem ser colocadas na sua forma vetorial em termos dos campos elétricos e magnéticos \vec{E} e \vec{B} . Depois de algumas álgebras e reorganizando os termos, obtemos as equações de Maxwell modificadas por um parâmetro θ (para uma descrição matemática completa veja as Refs. [105, 106] e Cap.11 [173])

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} - \kappa\theta\vec{B}) = 0, \quad (\text{A.14a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{A.14b})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}, \quad (\text{A.14c})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} + \kappa\theta\vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} - \kappa\theta\vec{B}). \quad (\text{A.14d})$$

A.0.1 Comentário Final

O termo axiônico pode gerar muitas confusões aos leitores devido à sua variedade de interpretações. Para esclarecer essa diferença introduzimos uma breve explicação.

O termo θ é conhecido na física de partículas como campo axiônico, mas na matéria condensada $\theta(\vec{B} \cdot \vec{E})$ é uma expressão genérica que vem do efeito magnetoeétrico presente em materiais topológicos tridimensionais e é análoga à ação que descreve o acoplamento do fóton e do axion. Portanto, pode ser aplicado em materiais magnetoeétricos, por exemplo, em Cr_2O_3 (com $\theta \ll \pi$) [123, 124, 125]. Sistemas com simetria de reversão no tempo apresentam um valor quantizado de θ , sendo 0 para isolantes triviais e π para isolantes topológicos. No entanto, para fases ordenadas magneticamente, o valor de θ pode ser arbitrário [14]. Nas próximas secções, assumiremos o valor de θ como sendo arbitrário.

Anexos

ANEXO A – Artigo Publicado

- A.1 Transfer matrix method of circular polarization light in an axionic photonic insulator

Transfer-matrix method of circular polarization light in an axionic photonic insulatorAanny C. Araújo , Sérgio Azevedo , and Cláudio Furtado *Department of Physics, Federal University of Paraíba, João Pessoa, Paraíba, 58051-970, Brazil*

André J. Chaves

*Semiconductor Materials and Nanotechnology Group and Physics Department,
Aeronautics Institute of Technology, DCTA, São José dos Campos, São Paulo, 12228-900, Brazil*

Carlos H. Costa

*LAREB, Federal University of Ceará, Russas, Ceará, 62900-000, Brazil*Claudionor G. Bezerra **Department of Physics, Federal University of Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte, 59072-970, Brazil*

(Received 21 June 2021; accepted 20 September 2021; published 29 November 2021)

The photonic analog of an axionlike system (or electronic topological insulator) is called an axionic photonic crystal. These materials are classified by three physical properties: permittivity ϵ , permeability μ , and the topological parameter θ . As a particular case, crystals with periodic ϵ and μ are the so-called photonic crystals. In this paper, we employ a transfer-matrix treatment to study the propagation of light waves in an axionic photonic crystal composed of alternating building layers A and B . We present numerical results for the photonic band structure as a function of the ratio between permittivities $R = \epsilon_B/\epsilon_A$, layer thicknesses $X = d_B/d_A$, and topological parameters $\delta = \pi^2(\theta_A - \theta_B)^2/\alpha^2$. Our numerical results reveal that the band-gap features (width, center position, upper and lower frequencies) depend on the three parameters ϵ , μ , and θ , but with the dependence on θ being stronger. In particular, as far as the band-gap width is concerned, we find that X and R work against each other; that is, as X increases, R must decrease for a wide band-gap emergence and vice versa. More interesting, however, are the results for the topological parameter θ . We show that the presence of θ produces a photonic band gap (PBG) which depends only on the δ term. The widening of this PBG is slightly asymmetrical and monotonic as a function of δ . It was also found that δ has no influence on the center position of the PBG. Our results open possibilities for technological applications of axionic photonic crystals with regard to the controlling and confinement of the propagation of light.

DOI: [10.1103/PhysRevA.104.053532](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.053532)**I. INTRODUCTION**

Photonic crystals (PCs) are very interesting optical materials with periodic dielectric properties. The first concept of periodic optical structure was introduced in 1887 by Lord Rayleigh, who carried out experiments with several periodic dielectric layered cells, nowadays called Bragg's mirror, and showed that they had a photonic band gap (PBG) [1]. A century later, in 1987, Yablonovitch [2] and John [3] independently investigated these optical structures in more than one dimension, and both suggested that those structures are capable of guiding and confining the propagation of light. They are nowadays referred to as photonic crystals [4]. Since the work of Yablonovitch and John, PCs have become, both theoretically and experimentally, attractive objects of research. This interest is related to the appearance of PBGs in those structures [2,3,5].

A timely question that naturally arises is why is it so important to study PBG materials with any number of dimensions? The importance of studying these materials lies in the way in which electromagnetic (EM) waves propagate within the bulk, enabling the investigation of many optical properties. For example, certain light wavelengths are allowed to pass through the structure; that is, in these materials the propagation of light is forbidden in some frequencies and directions [6]. Therefore, one can manipulate the propagation of light within a frequency range, adjusting the geometric, dielectric, and magnetic parameters of the photonic crystal, among others, in a manner very similar to the way in which a lattice of atoms can give rise to allowed and forbidden electronic bands. Thus, the absence of EM waves within a PBG in some frequency ranges can lead to some unusual features, with many potential applications in photonic devices [7].

Researchers have started to study quantum topological systems and have discovered a new class of matter, so-called topological insulators (TIs) [8,9]. Along with the advances in that research area, new classes of TIs, such as crystalline topological insulators, axion insulators, higher-order

*cbezerra@fisica.ufrn.br

topological insulators, topological semimetals, and topological superconductors, have emerged [10–13]. In general, TIs are materials that present band gaps, but their bands are topologically distinct from the bands of a conventional insulator. Those differences are connected to the emergence of nontrivial band gaps perceived for the first time in two-dimensional (2D) TIs, also known as 2D quantum spin Hall insulators [8,14]. Thus, electron propagation inside of a TI is not allowed, but the edge electrons can move freely as surface modes. Therefore, the surface of a TI is filled with exotic topologically protected edge states, which means that the energy transport on the edges is topologically protected and robust against structural perturbations and disorder. Many theoretical and experimental demonstrations of TIs have been reported for electronic (fermionic) systems [13,15,16]. From an experimental perspective, (Hg,Cd)Te and monolayer hexagonal Sn, Sb were characterized as 2D TIs, and (Bi,Sb)₂(Se,Te)₃, (Bi,Sb)₂Te₂Se, Bi_{2-x}Sb_xTe_{3-y}Se_y, TlBi(S,Se,Te)₂, Pb(Bi,Sb)₂Te₄, GeBi₂Te₄, and PbBi₄Te₇ were characterized as three-dimensional (3D) TIs [16]. All of these materials have attracted increasing fundamental and technological interest around the world because of their excellent properties and characteristics such as low power dissipation, spin-polarized electrons [17], and more [16,18–21].

In the context of TIs, there is the axion insulator [11,22]. Axions are pseudoscalar weakly interacting low-mass particles and electrically neutral. However, even without electrical charge they can interact in an unusual way with the electromagnetic field. They were postulated in 1977 by the physicists Peccei and Quinn in order to explain the absence of charge-parity violation in the strong interaction between quarks in high-energy physics [23]. Despite intensive research, axions have not yet been observed in nature. The connection between axions and TIs relies on the fact that a term of the form $\theta(\vec{B} \cdot \vec{E})$ may be added to the standard Maxwell's Lagrangian without modifying the familiar laws of electricity and magnetism. The θ term is known in particle physics as the axionic field, but in condensed matter $\theta(\vec{B} \cdot \vec{E})$ is a generic expression which comes from the magnetoelectric effect present in three-dimensional topological materials and is analogous to the action that describes the coupling of the photon and the axion. Therefore, it can be applied to magnetoelectric materials, for instance, Cr₂O₃ (with $\theta \ll \pi$) [24–26]. Systems with time-reversal symmetry present a quantized value of θ , being 0 for trivial insulators and π for topological insulators. However, for magnetically ordered phases the value of θ can be arbitrary [27].

As a matter of the fact, a remarkable development in 3D TIs is the so-called topological magnetoelectric effect (TME), in which the crossed induction of magnetization and electric polarization is expected to occur when external electric and magnetic fields are applied. This effect appears in the axion electrodynamics, which is known to describe the unusual magnetoelectric properties of 3D TIs [28–31]. For those reasons, TME of the kind that appears in TIs has been called “axion electrodynamics” [32]. One can understand that, in the context of electrodynamics, the axions' behavior is analogous to the TIs' behavior. Therefore, axions naturally emerged in condensed-matter physics as the effective low-energy theory for TIs, where these materials can be composed of periodic

arrangements with electric permittivity ϵ , magnetic permeability μ , and topological parameter θ modulated along a given direction [33]. The electrodynamics of an axion can be found in Ref. [34].

At the beginning of this century, Haldane and Raghu first investigated the electromagnetic analog of the electronic TI, which is the so-called photonic topological insulator (PTI) [35–39]. In their works, they predicted that photonic crystals made of magneto-optical materials could have topologically nontrivial bands and therefore could host topologically protected light states that unidirectionally propagate along the edges, with no possibility of backscattering. As the band structure is viewed, these edge states appear as continuous bands crossing the photonic band gap. As a consequence, light is allowed to unidirectionally propagate on the surface without scattering [40], in a manner very similar to electrons on the surface of a 2D TI [18,41]. The discovery of topological photonic systems has transformed our view of electromagnetic propagation and opened several venues of basic and applied science exploration. It also led to the understanding that much of the physics associated with the quantum Hall effect was not fundamentally quantum, but rather a very general wave phenomenon [39]. From an experimental perspective, the 3D topological photonic insulator was experimentally realized using a composite material consisting of split-ring resonators with strong magnetoelectric coupling which behaves like a “weak” TI (i.e., with an even number of surface Dirac cones) or a stack of 2D quantum spin Hall insulators [18]. In addition, recent advances in topological 2D, 3D, and higher-order PTIs have been observed [42]. In general, the advantage of these materials for technology is that topological photonic systems promise a new generation of photonic devices and communication systems [18,43,44].

The study of the propagation of electromagnetic waves in layered media has been the object of research for decades, for example, in chiral and bi-isotropic media (see Ref. [45]). There is also the growing field of topological photonics [37], which uses topological invariants, such as the Chern number, to classify and study photonic crystals. One such TI is the one-dimensional (1D) stacking of alternating dielectrics, whose properties can be mapped in the Su-Schrieffer-Heeger model, which has two distinct topological phases characterized by the winding number being 0 or 1 [46]. The interface between topological photonic crystals with different topological regions can sustain edge states in a way similar to how topological insulators have conductive surface states [38,47,48]. However, less attention has been paid to the propagation of electromagnetic waves in layered axionic crystals.

In this paper, we use the powerful transfer-matrix method (TMM) to study the propagation of circularly polarized light waves through one-dimensional multilayers composed of two axionic photonic crystals, *A* and *B*, which are characterized by the magnetoelectric effect, whose properties are dictated by the topological parameter θ , similar to what happens in axion electrodynamics. This method shows how the light waves interact with the interface between alternating *A* and *B* layers of a photonic crystal [49]. We present numerical results for the photonic band structures as a function of the ratio between permittivities $R = \epsilon_B/\epsilon_A$, layer thicknesses $X = d_B/d_A$, and topological parameters $\delta = \pi^2(\theta_A - \theta_B)^2/\alpha^2$. In addition, we

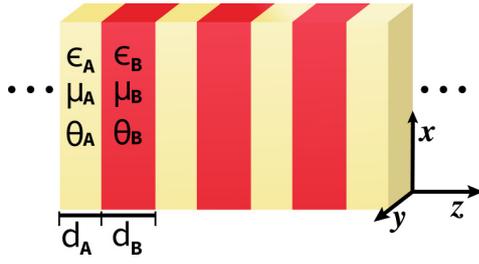


FIG. 1. Scheme of the 1D APC composed of alternating layers A and B .

analyzed the width and frequencies of the center and lower and upper edges of the lowest band gap by varying X and R in photonic crystals, with different values of δ , in order to map how the first band gap behaves as these parameters are changed. In this way, the propagation of light can be controlled through periodic modulation of the topological and lattice parameters, forming a band structure very similar to that of a conventional photonic crystal. This paper is organized as follows. In Sec. II we present the classical electromagnetic theory for a one-dimensional axionic photonic crystal (1D APC) made of two building blocks (A and B), with their respective electric, magnetic, topological, and geometric parameters, which are periodically stacked along the z direction. The transfer-matrix method for such a system, presenting the transmission (when the waves cross any interface) and propagation (when the waves propagate inside a given layer) matrices, is also described in Sec. II. In Sec. III we present our numerical results, which are the band structures of the one-dimensional APC, as a function of parameters δ , X , and R , with emphasis on the behavior of the first gap. Finally, in Sec. IV we summarize the main results obtained in this work.

II. PHYSICAL MODEL

We consider a 1D axionic photonic crystal composed of an arrangement of two layers, A and B , with dielectric permittivities ϵ_A and ϵ_B , magnetic permeabilities μ_A and μ_B , topological parameters θ_A and θ_B , and thicknesses d_A and d_B , respectively, as described in Fig. 1. We choose a coordinate system such that the axionic photonic crystal is perpendicular to the z axis. Throughout the entire paper we use SI units.

Here, we assume that the electrical permittivity $\epsilon(\vec{r})$, the magnetic permeability $\mu(\vec{r})$, and the topological angles $\theta(\vec{r})$ are real, isotropic, nondispersive, and periodic, with translation vector $\vec{R} = D\hat{z}$, where $D = d_A + d_B$ is the unit-cell size, i.e.,

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r} + \vec{R}) \Rightarrow \epsilon(z) = \epsilon(z + D), \quad (1)$$

$$\mu(\vec{r}) = \mu(\vec{r} + \vec{R}) \Rightarrow \mu(z) = \mu(z + D), \quad (2)$$

and

$$\theta(\vec{r}) = \theta(\vec{r} + \vec{R}) \Rightarrow \theta(z) = \theta(z + D). \quad (3)$$

By using an analogy with classical axion electrodynamics, the modified constitutive relations, with the additional

topological term represented by θ , are [30,34,50]

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} - \frac{\epsilon_0\alpha c\theta(\vec{r})}{\pi}\vec{B} \quad (4)$$

and

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} + \frac{\alpha\theta(\vec{r})}{\mu_0 c\pi}\vec{E}. \quad (5)$$

Here, \vec{E} and \vec{D} are the electric and electric displacement fields, and \vec{H} and \vec{B} are the magnetic intensity and magnetic flux fields, respectively. In addition, $\alpha \approx 1/137$ is the fine-structure constant, θ is the dimensionless topological parameter, $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ is the light speed in vacuum, and ϵ_0 and μ_0 are the vacuum dielectric permittivity and magnetic permeability, respectively. In Eqs. (4) and (5), the dielectric permittivity ϵ and magnetic permeability μ are given by $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_j$ and $\mu = \mu_0\mu_j$, where ϵ_j and μ_j ($j = A$ or B) are the relative dielectric permittivity and magnetic permeability, respectively, corresponding to layer A or B . Another important point is that, in the classical context, the θ term can assume any value, and in general, this parameter characterizes the state of matter [32].

Maxwell's equations for a source-free and current-free system with monochromatic and oscillating fields, i.e., $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B} \propto e^{-i\omega t}$, can be written as

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (6a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (6b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\vec{B}, \quad (6c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\omega\vec{D}. \quad (6d)$$

Here, ω is the angular frequency. Notice that the magneto-electric features are introduced into the constitutive equations of the material and not directly into the Maxwell's equations [32].

A. Transfer-matrix method

The TMM is a powerful approach for the analysis of light propagating through any multilayered media. Within the framework of the TMM, there are two kinds of matrices: (i) the transmission matrix, which connects the fields across an interface, and (ii) the propagation matrix, which describes the fields propagating inside a layer. In order to obtain both matrices we need to know how the electromagnetic waves behave at the boundaries.

In order to obtain the transfer matrix for the normal-incidence case, we start by considering the superposition of two different propagating waves with opposite directions on the z axis and the same frequency. The boundary conditions that arise from the θ term imply that we need to consider the circularly polarized basis \hat{v}_λ , with $\lambda = + (-)$ labeling the right (left) rotation. After some algebra, we find that the total electric and magnetic fields in a medium j ($= A, B$) are given by

$$\vec{E}_{j,\lambda} = [E_{j,\lambda}e^{ik_j z}\hat{v}_\lambda + E'_{j,\lambda}e^{-ik_j z}\hat{v}_\lambda] \quad (7)$$

and

$$\vec{H}_{j,\lambda} = [g_{j,\lambda}E_{j,\lambda}e^{ik_j z}\hat{v}_\lambda + \bar{g}_{j,\lambda}E'_{j,\lambda}e^{-ik_j z}\hat{v}_\lambda]. \quad (8)$$

Here, the real wave vector is $\vec{k}_j = (0, 0, k_j)$, with $k_j = n_j\omega/c$ and $n_j = \sqrt{\epsilon_j\mu_j}$ being the refraction index of the j th medium. $E_{j,\lambda}$ ($E'_{j,\lambda}$) is the amplitude of the wave traveling to the right (left). Also, $\hat{v}_\lambda = \hat{v}_\pm$ is given by

$$\hat{v}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}. \quad (9)$$

In addition, we have defined $g_{j,\lambda}$ as

$$g_{j,\lambda} = \frac{\alpha}{\mu_0 c \pi} \theta_j - \lambda \frac{i}{\omega \mu_0 \mu_j} k_j, \quad (10)$$

with $\bar{g}_{j,\lambda}$ being the complex conjugate.

By starting from the interface, the boundary conditions are given by [51]

$$\vec{E}_{A,\lambda} = \vec{E}_{B,\lambda} \quad (11)$$

and

$$\vec{H}_{A,\lambda} = \vec{H}_{B,\lambda}. \quad (12)$$

Applying the above boundary conditions at $z = 0$ and using Eqs. (7) and (8), we have (one can omit the index λ without loss of generality)

$$E_A + E'_A = E_B + E'_B \quad (13)$$

and

$$g_A E_A + \bar{g}_A E'_A = g_B E_B + \bar{g}_B E'_B. \quad (14)$$

Here, E_B and E'_B can be related to E_A and E'_A by a 2×2 interface matrix from medium A to B,

$$\begin{pmatrix} E_B \\ E'_B \end{pmatrix} = M_{AB} \begin{pmatrix} E_A \\ E'_A \end{pmatrix}, \quad (15)$$

where

$$M_{AB} = \frac{1}{2i\text{Im}[g_B]} \begin{pmatrix} g_A - \bar{g}_B & \bar{g}_A - \bar{g}_B \\ -g_A + g_B & -\bar{g}_A + \bar{g}_B \end{pmatrix}. \quad (16)$$

From Eqs. (13) and (14), one can obtain the 2×2 interface matrix M_{BA} which relates the coefficients from medium B to medium A,

$$\begin{pmatrix} E_A \\ E'_A \end{pmatrix} = M_{BA} \begin{pmatrix} E_B \\ E'_B \end{pmatrix}, \quad (17)$$

with

$$M_{BA} = \frac{1}{2i\text{Im}[g_A]} \begin{pmatrix} g_B - \bar{g}_A & \bar{g}_B - \bar{g}_A \\ -g_B + g_A & -\bar{g}_B + \bar{g}_A \end{pmatrix}. \quad (18)$$

A general expression for the transmission matrix, which connects the fields across an interface from medium m to medium n , can be written as

$$M_{mn} = \frac{1}{2i\text{Im}[g_n]} \begin{pmatrix} g_m - \bar{g}_n & \bar{g}_m - \bar{g}_n \\ -g_m + g_n & -\bar{g}_m + \bar{g}_n \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Here, $\text{Im}[g_n]$ corresponds to the imaginary part of g for medium n , which is defined in Eq. (10). Finally, for the case of an electromagnetic wave propagating inside medium $j = A$ or B , with thickness d_j and wave vector k_j , the 2×2 propagation matrix is given by

$$M_j = \begin{pmatrix} e^{ik_j d_j} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j d_j} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

See Ref. [52] for more details.

B. Dispersion relation

In 1D photonic crystals composed of dielectric layers (or building blocks) arranged in a periodic fashion, the propagating electromagnetic waves are modulated by Bragg's scatterings, resulting in the photonic band structure, in which the photonic band gaps emerge. Consider the l th unit cell [A|B] of a 1D APC. The electric fields inside layers A and B are labeled $\vec{E}_{A,l} = (E_{A,l}, E'_{A,l})$ and $\vec{E}_{B,l} = (E_{B,l}, E'_{B,l})$. In order to obtain the transfer matrix for this unit cell, one must relate the electric field coefficients of the $(l+1)$ th unit cell to the electric field coefficients of the l th unit cell. We can write for an electromagnetic wave, propagating from layer A and crossing the interface from A to B, both in the same l th unit cell,

$$\begin{pmatrix} E_{B,l} \\ E'_{B,l} \end{pmatrix} = M_A M_{AB} \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

In a similar way, we consider the electromagnetic wave propagating from layer B and crossing the interface from B to A, but now B belongs to the l th unit cell, while A belongs to the $(l+1)$ th unit cell,

$$\begin{pmatrix} E_{A,l+1} \\ E'_{A,l+1} \end{pmatrix} = M_B M_{BA} \begin{pmatrix} E_{B,l} \\ E'_{B,l} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

By substituting Eq. (21) into Eq. (22), we get

$$\begin{pmatrix} E_{A,l+1} \\ E'_{A,l+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

where

$$M = M_B M_{BA} M_A M_{AB} \quad (24)$$

is the 2×2 transfer matrix for the whole unit cell [A|B].

From Bloch's theorem, the eigenvalues of M are related to Bloch's phase QD , which is the phase change in the fields after propagating along the unit cell. Here, Q is Bloch's wave vector, and D is the unit-cell size of the structure ($D = d_A + d_B$ in the present case). Therefore, Eq. (23) can be rewritten as

$$\begin{pmatrix} E_{A,l+1} \\ E'_{A,l+1} \end{pmatrix} = e^{iQD} \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

On the other hand, for a wave propagating from the right to the left, Eq. (25) becomes

$$\begin{pmatrix} E_{A,l-1} \\ E'_{A,l-1} \end{pmatrix} = e^{-iQD} \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Equations (25) and (26) may be also written as

$$[M - e^{iQD} \mathbb{1}] \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

and

$$[M^{-1} - e^{-iQD} \mathbb{1}] \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Here, $\mathbb{1}$ is the 2×2 identity matrix, and M^{-1} is the inverse of the transfer matrix M . If we add Eqs. (27) and (28), we obtain

$$[M + M^{-1} - (e^{iQD} + e^{-iQD}) \mathbb{1}] \begin{pmatrix} E_{A,l} \\ E'_{A,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

whose nontrivial solutions are obtained from the condition

$$\det[M + M^{-1} - (e^{iQD} + e^{-iQD})\mathbb{1}] = 0. \quad (30)$$

By using the fact that the transfer matrix is a unimodular matrix, i.e., its determinant $\det[M] = 1$, we can write Eq. (30) as an algebraic expression, i.e. [49],

$$\cos(QD) = \left(\frac{1}{2}\right)\text{Tr}[M] = \frac{M_{11} + M_{22}}{2}. \quad (31)$$

Here, $\text{Tr}[M]$ is the trace of the transfer matrix M , and M_{11} and M_{22} are their diagonal elements. Equation (31) is a transcendental equation, and it shows that, since we are able to obtain the transfer matrix M of the system, we can numerically obtain its solutions; that is, we can obtain the frequencies for which Bloch's wave vector Q is real. The allowed frequencies are such that the condition $|(1/2)\text{Tr}[M]| \leq 1$ is satisfied. Otherwise, if $|(1/2)\text{Tr}[M]| > 1$, Bloch's wave vector is complex, and consequently, the light wave has an evanescent profile, and the photonic band gaps emerge. For an allowed band, from Eq. (31) we obtain

$$Q = \frac{\cos^{-1}[(M_{11} + M_{22})/2]}{D}, \quad (32)$$

so that Bloch's wave vector Q varies from $-\pi/D$ to π/D , which is the unit-cell size in reciprocal space.

In our case of interest, a 1D APC composed of two building blocks, A and B , with dielectric permittivities ϵ_j , magnetic permeabilities μ_j , topological parameters θ_j , and thickness d_j ($j = A$ or B) whose unit cell $[A|B]$ is arranged in a periodic fashion, Eq. (31), can be analytically obtained (see Ref. [49] for more details),

$$\cos(QD) = \cos(\phi_A)\cos(\phi_B) - \Delta \sin(\phi_A)\sin(\phi_B), \quad (33)$$

with $\phi_j = k_j d_j$ being the phase of medium j and

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{k_B \mu_A}{k_A \mu_B} + \frac{k_A \mu_B}{k_B \mu_A} + \left[\frac{\omega \alpha (\theta_A - \theta_B)}{c \pi} \right]^2 \frac{\mu_A \mu_B}{k_A k_B} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{Z_A}{Z_B} + \frac{Z_B}{Z_A} + \delta Z_A Z_B \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Here, $Z_j = \sqrt{\mu_j/\epsilon_j}$ is the impedance of medium j , and

$$\delta = \left[\frac{\pi(\theta_A - \theta_B)}{\alpha} \right]^2. \quad (35)$$

The first two terms in Eq. (34) are responsible for the emergence of the conventional photonic band gaps, whose physical origin relies on Bragg's scattering. The third term in Eq. (34), containing the topological parameters, is responsible for the emergence of non-Bragg's photonic band gaps. As expected, by taking the limit $\delta \rightarrow 0$, Eq. (34) reduces to the dispersion relation of a conventional (nonaxionic) 1D PC [49]. Also, notice that $\delta = 0$ only for $\theta_A = \theta_B \neq 0$ or $\theta_A = \theta_B = 0$. This means that, even for $\epsilon_A = \epsilon_B$ and $\mu_A = \mu_B$, a photonic band gap will be expected to emerge for any values of θ_A and θ_B with $\theta_A \neq \theta_B$.

III. NUMERICAL RESULTS

In this section we present the numerical results for the band structures for normally incident electromagnetic waves in 1D

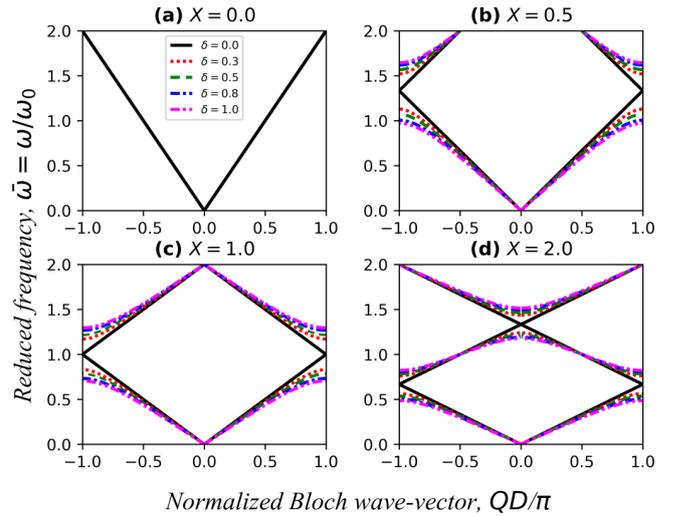


FIG. 2. Band structure of the axionic photonic crystal, considering $R = 1.0$, with (a) $X = 0.0$, (b) $X = 0.5$, (c) $X = 1.0$, and (d) $X = 2.0$. The different values of δ are indicated.

APCs. From now on, we assume that the axionic photonic crystal consists of two alternating building blocks, represented by A and B , and both are nonmagnetic materials, i.e., $\mu_A = \mu_B = 1$. Also, according to Eq. (35), the topological parameters are related by $\theta_B = \theta_A - \pi\sqrt{\delta}/\alpha$ [53]. For the central wavelength λ_0 , we have defined a midgap frequency $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0 = 10^{12}$ rad/s. Thus, the band structures are all given in terms of the dimensionless reduced frequency $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$ and the normalized Bloch's wave vector QD/π . In this paper we defined the thickness of layer A as $d_A = \lambda_0/4n_A$, satisfying the quarter-wavelength condition; that is, the thickness of layer A is defined as being a quarter of the central wavelength [49]. The thickness of layer B is obtained from the values of X .

Let us consider the most trivial case. We calculated the band structure of a 1D APC with $R = \epsilon_B/\epsilon_A = 1$ for different values of $X = d_B/d_A$ and δ in order to infer the effects of the topological parameters on the light dispersion relation. We should remark that this is not a realistic situation. However, it can provide us valuable insights about different axionic photonic materials presenting similar dielectric constants, i.e., materials that present $\epsilon_A \approx \epsilon_B$. The band structures are plotted in Figs. 2(a)–2(d) for $X = 0.0$, $X = 0.5$, $X = 1.0$, and $X = 2.0$, respectively. The different values of δ are indicated in the legend of Fig. 2, and a given curve corresponds to a specific value of δ . As expected, from Fig. 2, for $\delta = 0$ ($\theta_A = \theta_B$), the band structure has no gap, and the light is transmitted through the structure without any reflection, despite the values of X , corresponding to $\Delta = 1$ in Eq. (34). One can also observe from Fig. 2(a) that, no matter what the value of δ is, there is no band gap. This is because the system is a continuous medium without interfaces ($X = 0.0$). However, for $X \neq 0$ and $\delta \neq 0$, we can observe that a range of forbidden frequencies naturally emerges in Figs. 2(b), 2(c), and 2(d). Those photonic band gaps provide us the means of controlling the propagation of light by manipulating the topological parameters of the system. We can also observe that, for a given value of X , the

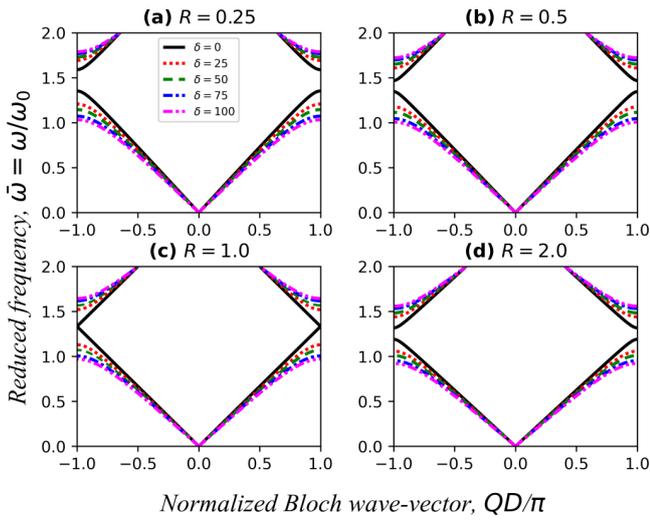


FIG. 3. Same as Fig. 2, considering $X = 0.5$, with (a) $R = 0.25$, (b) $R = 0.5$, (c) $R = 1.0$, and (d) $R = 2.0$. The different values of δ are indicated.

band-gap width becomes wider as the δ parameter increases, although the band-gap center appears not to be considerably affected. On the other hand, the band-gap centers are shifted to the low-frequency regions, and also, the band gaps become narrower as the ratio of the thicknesses X is increased [since $X \neq 0$; see Figs. 2(b)–(d)]. This behavior also occurs in conventional photonic crystals [54].

Let us now consider a more realistic situation: a structure in which the two building blocks present different dielectric permittivities, i.e., $\epsilon_A \neq \epsilon_B$. We consider $X = 0.5, 1.0$, and 2.0 , and the corresponding photonic band structures are presented in Figs. 3–5, respectively, with $R = 0.25, R = 0.5, R = 1.0$, and $R = 2.0$. We can notice from Figs. 3–5 that the band structures are very similar to those of Fig. 2. However, now the band gaps have two contributions: Bragg's scattering and the topological term [see Eq. (34) and the discussion about it].

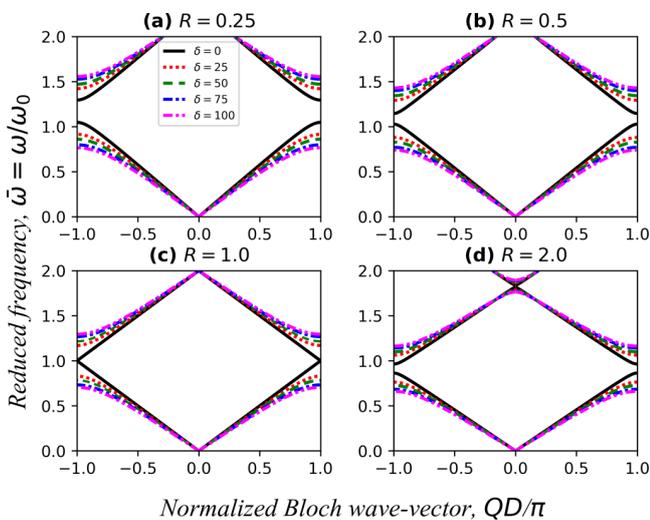


FIG. 4. Same as Fig. 3, but for $X = 1.0$.

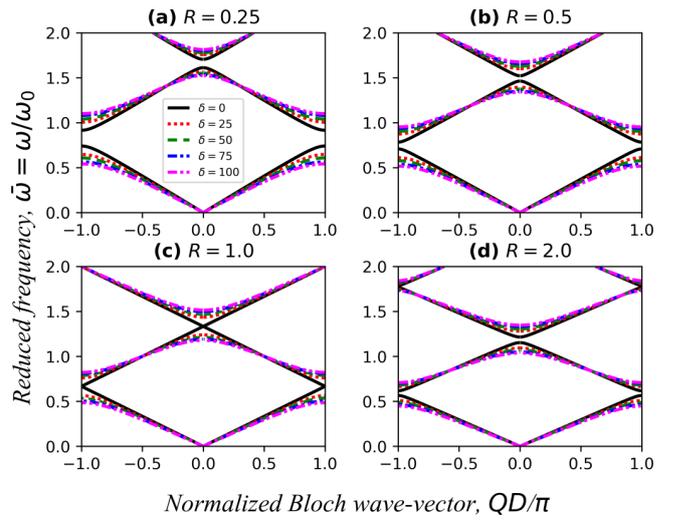


FIG. 5. Same as Fig. 3, but for $X = 2.0$.

Figure 3, with $X = 0.5$, shows that the lower edge of the gap is around $\bar{\omega} \approx 1.1$. For a given δ , the position of the center of the band gap is shifted to lower-frequency regions as R increases. On the other hand, for a given R , the band gaps' width becomes wider as the topological parameter δ increases, while the band gaps' center is not substantially affected. Moreover, we can see that the upper edge is less shifted than the lower edge; that is, the upper and lower edges of the band gap are slightly asymmetrically shifted to higher and lower frequencies, respectively. We can infer that the band gaps are very sensitive to the difference between the topological parameters θ_A and θ_B at the interfaces. In Figs. 4 and 5 we present plots which are qualitatively analogous to the plots of Fig. 3, but with slight differences. For example, the position of the center of the band gap is around $\bar{\omega} \approx 1.0$ in Fig. 4 and $\bar{\omega} \leq 1.0$ in Fig. 5. All other features of the band

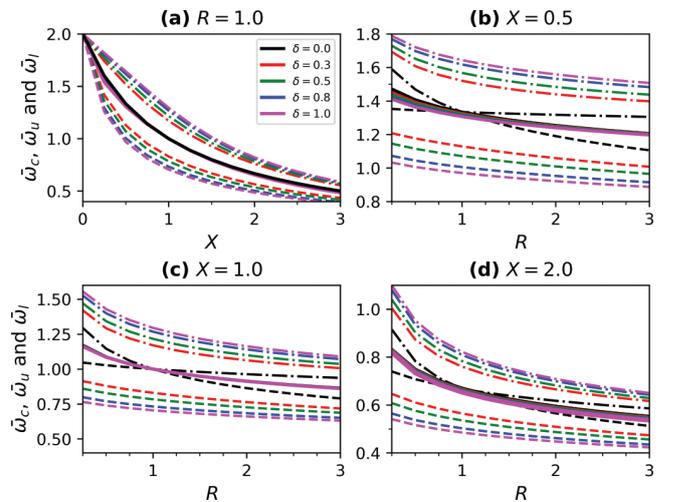


FIG. 6. Plots of $\bar{\omega}_c$ (solid lines), $\bar{\omega}_u$ (dot-dashed lines), and $\bar{\omega}_l$ (dashed lines) as a function of (a) X , considering $R = 1.0$, and of R for (b) $X = 0.5$, (c) $X = 1.0$, and (d) $X = 2.0$.

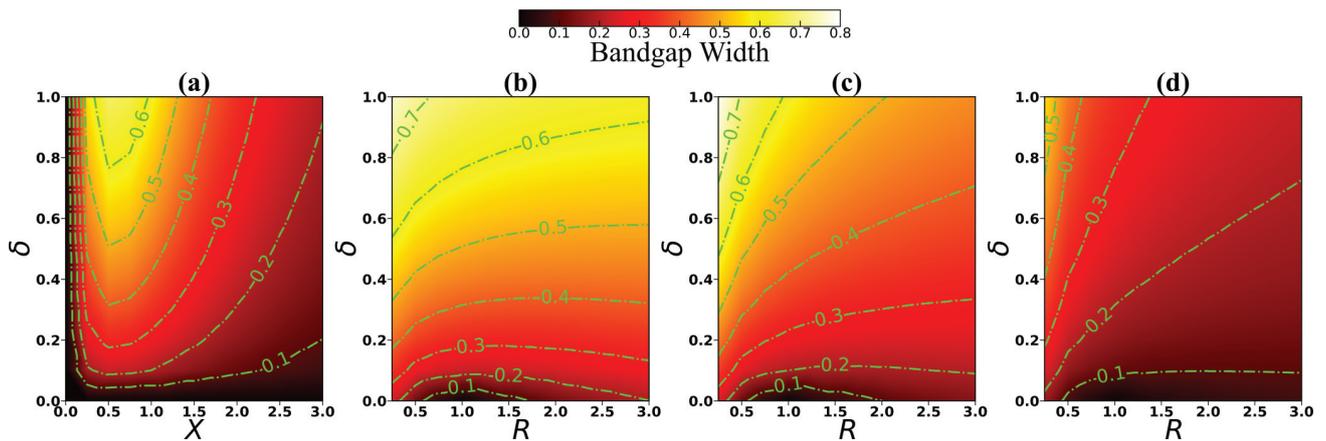


FIG. 7. Surface plots of the band-gap widths as a function of (a) δ and X , considering $R = 1.0$, and of δ and R for (b) $X = 0.5$, (c) $X = 1.0$, and (d) $X = 2.0$.

structure related to R and δ are qualitatively the same as in Fig. 3.

For technological applications it is quite relevant to know how the band structure is affected by the physical R , geometrical X , and topological δ parameters. More specifically, we are interested in the center and edge positions, as well as the width, of the first band gap. Let us illustrate our numerical results in Figs. 6 and 7. In Fig. 6 we present the plots of the reduced frequencies corresponding to the center $\bar{\omega}_c$, upper edge $\bar{\omega}_u$, and lower edge $\bar{\omega}_l$ of the first band gap for different values of δ . Those frequencies are represented by the solid, dot-dashed, and dashed lines, respectively. Figure 6(a) shows $\bar{\omega}_c$, $\bar{\omega}_u$, and $\bar{\omega}_l$ as a function of X with $R = 1.0$. In agreement with Fig. 2, the band gap is null for $\delta = 0$. As we can also see, the center of the band gap is not really affected by δ , while the band gap width reaches its maximum around $X \approx 1.0$. In Figs. 6(b)–6(d), we present the same plot as in Fig. 6(a), but now with $\bar{\omega}_c$, $\bar{\omega}_u$, and $\bar{\omega}_l$ as a function of R for $X = 0.5$, $X = 1.0$, and $X = 2.0$, respectively. As observed in Figs. 2–5, the gaps are non-null once the condition $R \neq 1.0$ and $\delta \neq 0$ is satisfied. The topological effects on the photonic band structures are now clearer and more evident. From Figs. 6(b)–6(d), considering $\delta = 0$ (corresponding to a conventional photonic crystal), for $0 < R < 1$, the band gap becomes narrower until it vanishes when $R = 1.0$. On the other hand, for $R > 1$, the band gap is not null anymore, and it becomes wider as R increases. In addition, we can observe that the superior and inferior edges of the band gap are slightly asymmetrical; that is, they have approximately the same relative distance from the center of the gap. However, for $\delta \neq 0$, the band gap does not vanish even for $R = 1.0$. The center of the band gap presents the same behavior as in the $\delta = 0$ case. For a given value of R , the band-gap width becomes monotonically wider as δ increases, while for a given δ (since $\delta \neq 0$), the band-gap width becomes narrower as R becomes higher. It is interesting that the band-gap width for the conventional photonic crystal works as the limit case; that is, the band-gap width for $\delta \neq 0$ cannot be narrower than that for $\delta = 0$. From the results presented up to now, one can conclude that we have several ways to combine the geometrical X , physical R , and topological δ parameters to manipulate the edges and center of the band

gap to control light wave propagation in 1D APCs. Thus, for the purpose of knowing which set of parameters provides the wider band gap, we show the band-gap width as a function of δ and X and δ and R in Fig. 7. Figure 7(a) shows the surface plot of the width of the first band gap as a function of δ and X , with $R = 1.0$, while Figs. 7(b)–7(d) show the surface plot of the width of the first band gap as a function of δ and R for $X = 0.5$, $X = 1.0$, and $X = 2.0$, respectively. In Fig. 7 the color scale indicates band-gap width from 0 (black) and to 0.8 (white). Also, the green dot-dashed lines represent the level curves for some values of the band-gap width.

Figure 7(a) confirms that the band gap is null for any value of X when $\delta = 0$ and for any value of δ when $X = 0.0$. We can observe from Figs. 7(b)–7(d) that the band-gap width vanishes whenever $\delta = 0$ and $R = 1.0$ (dark regions). On the other hand, the wider band gaps (larger than 0.6 and represented by the brighter regions) are obtained for (i) $\delta > 0.8$, $X \approx 0.5$, and $R = 1.0$ in Fig. 7(a); (ii) $\delta > 0.6$, $R \approx 0.25$, and $X = 0.5$ in Fig. 7(b); and (iii) $\delta > 0.5$, $R \approx 0.25$, and $X = 1.0$ in Fig. 7(c). There is no band gap larger than 0.6 in Fig. 7(d). Therefore, from Fig. 7 one can conclude that the topological parameter δ works almost independently of the geometrical X and physical R parameters; that is, the band-gap width is always wider if δ increases, no matter the values of X and R are. On the contrary, X and R work against each other; that is, as X increases, R must decrease for a wide band-gap emergence and vice versa.

IV. CONCLUSIONS

In summary, we have used a transfer matrix method to study the propagation of circularly polarized light waves in an axionic layered medium. We calculated the dispersion spectra to investigate the structure of band gaps of this material. We presented numerical results for the photonic band structure as a function of the ratio between permittivities $R = \epsilon_B/\epsilon_A$, layer thicknesses $X = d_B/d_A$, and topological parameters $\delta = \pi^2(\theta_A - \theta_B)^2/\alpha^2$. We found that, for a given value of X (since $X \neq 0$), the band-gap width becomes wider as the δ parameter increases, although the band-gap center appear not to be considerably affected. On the one hand, the band-gap centers are

shifted to the low-frequency regions, and also, the band gaps become narrower as the ratio between the thicknesses X is increased. Also, for a given δ , the position of the center of the band gap is shifted to lower-frequency regions as R increases. On the other hand, for a given R , the band-gap width becomes wider as the topological parameter δ increases, but the band-gap center is not affected. It was also observed that the band-gap upper edge is less shifted than the band-gap lower edge; that is, the upper and lower edges of the band gap are slightly asymmetrically shifted. On the one hand, considering $\delta = 0$ (corresponding to a conventional photonic crystal), for $0 < R < 1$, the band gap becomes narrower until it vanishes when $R = 1.0$. On the other hand, for $R > 1$, the band gap is not null anymore, and it becomes wider as R increases. However, for $\delta \neq 0$ (corresponding to an axionic photonic crystal), the band gap does not vanish even for $R = 1.0$. For a given value of R , the band-gap width becomes monotonically wider as δ increases, while for a given δ , the band-gap width becomes narrower as R becomes higher. One can conclude

that the topological parameter δ works almost independently of the geometrical X and physical R parameters; that is, the band-gap width is always wider if δ increases no matter what the values of X and R are. On the other hand, X and R work against each other; that is, as X increases, R must decrease for a wide band-gap emergence and vice versa. Our results open possibilities for technological applications of axionic photonic crystals by manipulating the flow of light by means of the topological parameter of the system. Surely, our model can be realized experimentally, and we hope that experimentalists are encouraged to face it.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank the Brazilian Research Agencies CAPES and CNPq for financial support. C.H.C. would like to thank FUNCAP (Grant No. BP4-0172-00165.01.00/20) for financial support. We thank G. M. Viswanathan for a critical reading of the manuscript.

-
- [1] Lord Rayleigh, *London, Edinburgh Dublin Philos. Mag. J. Sci.* **24**, 145 (1887).
- [2] E. Yablonovitch, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059 (1987).
- [3] S. John, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2486 (1987).
- [4] M. Notomi, *Rep. Prog. Phys.* **73**, 096501 (2010).
- [5] K. M. Ho, C. T. Chan, and C. M. Soukoulis, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3152 (1990).
- [6] *Photonic Band Gap Materials*, edited by C. M. Soukoulis, NATO ASI Series (Springer, Berlin, 2012), Vol. 315.
- [7] M. Johri, Y. Ahmed, and T. Bezboruah, *Curr. Sci.* **92**, 1361 (2007).
- [8] C. L. Kane and E. J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146802 (2005).
- [9] J. E. Moore, *Nature (London)* **464**, 194 (2010).
- [10] L. Fu, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 106802 (2011).
- [11] N. Varnava and D. Vanderbilt, *Phys. Rev. B* **98**, 245117 (2018).
- [12] F. Schindler, A. M. Cook, M. G. Vergniory, Z. Wang, S. S. Parkin, B. A. Bernevig, and T. Neupert, *Sci. Adv.* **4**, eaat0346 (2018).
- [13] Y. Tanaka, Z. Ren, T. Sato, K. Nakayama, S. Souma, T. Takahashi, K. Segawa, and Y. Ando, *Nat. Phys.* **8**, 800 (2012).
- [14] M. König, S. Wiedmann, C. Brune, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, *Science* **318**, 766 (2007).
- [15] Y. Chen, J. G. Analytis, J.-H. Chu, Z. Liu, S.-K. Mo, X.-L. Qi, H. Zhang, D. Lu, X. Dai, Z. Fang, S. C. Zhang, I. R. Fisher, Z. Hussain, and Z.-X. Shen, *Science* **325**, 178 (2009).
- [16] M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010).
- [17] W. Tian, W. Yu, J. Shi, and Y. Wang, *Materials* **10**, 814 (2017).
- [18] Y. Yang, Z. Gao, H. Xue, L. Zhang, M. He, Z. Yang, R. Singh, Y. Chong, B. Zhang, and H. Chen, *Nature (London)* **565**, 622 (2019).
- [19] M. A. Bandres, S. Wittek, G. Harari, M. Parto, J. Ren, M. Segev, D. N. Christodoulides, and M. Khajavikhan, *Science* **359**, eaar4005 (2018).
- [20] G. Harari, M. A. Bandres, Y. Lumer, M. C. Rechtsman, Y. D. Chong, M. Khajavikhan, D. N. Christodoulides, and M. Segev, *Science* **359**, eaar4003 (2018).
- [21] J. Zhang, C.-Z. Chang, Z. Zhang, J. Wen, X. Feng, K. Li, M. Liu, K. He, L. Wang, X. Chen, Q. K. Xue, X. Ma, and Y. Wang, *Nat. Commun.* **2**, 574 (2011).
- [22] A. M. Essin, J. E. Moore, and D. Vanderbilt, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 146805 (2009).
- [23] R. D. Peccei and H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440 (1977).
- [24] F. W. Hehl, Y. N. Obukhov, J.-P. Rivera, and H. Schmid, *Phys. Lett. A* **372**, 1141 (2008).
- [25] F. W. Hehl, Y. N. Obukhov, J.-P. Rivera, and H. Schmid, *Eur. Phys. J. B* **71**, 321 (2009).
- [26] E. Kita, K. Siratori, and A. Tasaki, *J. Appl. Phys.* **50**, 7748 (1979).
- [27] A. Sekine and K. Nomura, *J. Appl. Phys.* **129**, 141101 (2021).
- [28] A. Martin-Ruiz, O. Rodriguez-Tzompantzi, J. R. Maze, and L. F. Urrutia, *Phys. Rev. A* **100**, 042124 (2019).
- [29] M. Mogi, M. Kawamura, A. Tsukazaki, R. Yoshimi, K. S. Takahashi, M. Kawasaki, and Y. Tokura, *Sci. Adv.* **3**, eaao1669 (2017).
- [30] L. Visinelli, *Mod. Phys. Lett. A* **28**, 1350162 (2014).
- [31] T. Morimoto, A. Furusaki, and N. Nagaosa, *Phys. Rev. B* **92**, 085113 (2015).
- [32] N. P. Armitage and L. Wu, *SciPost Phys.* **6**, 046 (2019).
- [33] S. Ozaki and N. Yamamoto, *J. High Energy Phys.* **08** (2017) 098.
- [34] E. J. C. Granada and D. F. Rojas, *J. Phys.: Conf. Ser.* **850**, 012024 (2017).
- [35] S. Raghu and F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. A* **78**, 033834 (2008).
- [36] M. C. Rechtsman, J. M. Zeuner, Y. Plotnik, Y. Lumer, D. Podolsky, F. Dreisow, S. Nolte, M. Segev, and A. Szameit, *Nature (London)* **496**, 196 (2013).
- [37] L. Lu, J. Joannopoulos, and M. J. Soljačić, *Nat. Photonics* **8**, 821 (2014).
- [38] T. Ozawa, H. M. Price, A. Amo, N. Goldman, M. Hafezi, L. Lu, M. C. Rechtsman, D. Schuster, J. Simon, O. Zilberberg, and I. Carusotto, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 015006 (2019).

- [39] F. D. M. Haldane and S. Raghu, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 013904 (2008).
- [40] A. B. Khanikaev and G. Shvets, *Nat. Photonics* **11**, 763 (2017).
- [41] G. Siroki, P. A. Huidobro, and V. Giannini, *Phys. Rev. B* **96**, 041408(R) (2017).
- [42] M. Kim, Z. Jacob, and J. Rho, *Light: Sci. Appl.* **9**, 130 (2020).
- [43] N. Parappurath, F. Alpeggiani, L. Kuipers, and E. Verhagen, *Sci. Adv.* **6**, eaaw4137 (2020).
- [44] Z. Zhang, M. H. Teimourpour, J. Arkininstall, M. Pan, P. Miao, H. Schomerus, R. El-Ganainy, and L. Feng, *Laser Photonics Rev.* **13**, 1800202 (2019).
- [45] I. V. Lindell, A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov, A. J. Viitanen, *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media* (Artech House, Boston, 1994).
- [46] J. C. G. Henriques, T. G. Rappoport, Y. V. Bludov, M. I. Vasilevskiy, and N. M. R. Peres, *Phys. Rev. A* **101**, 043811 (2020).
- [47] A. B. Khanikaev, S. Hossein Mousavi, W.-K. Tse, M. Kargarian, A. H. MacDonald, and G. Shvets, *Nat. Mater.* **12**, 233 (2013).
- [48] S. Barik, A. Karasahin, C. Flower, T. Cai, H. Miyake, W. DeGottardi, M. Hafezi, and E. Waks, *Science* **359**, 666 (2018).
- [49] P. Markos and C. M. Soukoulis, *Wave Propagation: From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008).
- [50] A. Karch, *Phys. Rev. B* **83**, 245432 (2011)
- [51] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics* (Cambridge University Press, New York, 2005).
- [52] C. H. Costa, L. F. C. Pereira, and C. G. Bezerra, *Phys. Rev. B* **96**, 125412 (2017).
- [53] M. Vieira, S. Sergeenkov, and C. Furtado, *Phys. Rev. A* **96**, 013852 (2017).
- [54] B. P. Silva and C. H. Costa, *J. Phys.: Condens. Matter* **32**, 135703 (2019).