

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma introdução aos problemas do tipo obstáculo

Diego Gomes dos Santos

João Pessoa – PB
Dezembro de 2023

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma introdução aos problemas do tipo obstáculo

por

Diego Gomes dos Santos

sob a orientação do

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo

João Pessoa – PB
Dezembro de 2023

**Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação**

S237i Santos, Diego Gomes dos.

Uma introdução aos problemas do tipo obstáculo /
Diego Gomes dos Santos. - João Pessoa, 2023.
93 f. : il.

Orientação: Damião Júnio Gonçalves Araújo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Análise matemática. 2. Problemas de obstáculo. 3.
Estimativas de regularidade. 4. Problemas de fronteira
livre. I. Araújo, Damião Júnio Gonçalves. II. Título.

UFPB/BC

CDU 517(043)

Uma introdução aos problemas do tipo obstáculo

por

Diego Gomes dos Santos ¹

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 11 de dezembro de 2023

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo – UFPB
(Orientador)



Profa. Dra. Evelina Shamarova – UFPB
(Examinadora Interna)



Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza – UFPB
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Rafayel Teymurazyan
KAUST - Arábia Saudita e UC - Portugal
(Examinador Externo)

¹Este trabalho contou com apoio financeiro parcial da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Agradecimentos

- Agradeço a Deus pela minha vida e por fazer com que meus objetivos durante esses anos fossem alcançados.

- Aos meus pais, Anelita e Josué e minha irmã, Joselita, por todo suporte e amor incondicional.

- À Amanda, minha namorada, por estar sempre ao meu lado, apesar da distância, e por me apoiar em todos os momentos.

- Aos meus familiares e amigos da pós-graduação, pelos momentos enriquecedores de aprendizado e companheirismo ao longo de todo este percurso. Em especial, a Fábio, Manoel e Matheus pelas experiências valiosas compartilhadas diariamente.

- Aos meus irmãos acadêmicos, Aelson e Ginaldo, pelo conhecimento compartilhado e apoio durante a elaboração deste trabalho.

- Ao professor Juscelino Lopes, por todos os ensinamentos e pelo incentivo desde a graduação.

- Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMat) da UFPB, por toda a formação, que significativamente contribuiu para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

- Ao meu orientador, Damião Araújo, pelos ensinamentos, paciência e confiança no meu trabalho.

- Aos membros da banca, pela gentileza de participar da avaliação deste trabalho.

- Ao CNPq e à CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste estudo, baseados no livro “*Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems*” de Arshak Petrosyan, Henrik Shahgholian e Nina Uraltseva, [22], investigamos as propriedades geométricas e analíticas de soluções para problemas do tipo obstáculo. Nos problemas a serem tratados a seguir, as equações que modelam fenômenos de difusão apresentam saltos de descontinuidade ao longo de um conjunto que depende da própria solução, o qual chamamos de fronteira livre. Inicialmente, concentramo-nos em modelos mais simples, onde as soluções não apresentam mudanças de sinal. Posteriormente, expandimos nossa análise para cenários mais complexos, considerando casos com mudanças de sinal, onde estudamos, dentre outras coisas, estimativas de regularidade local e global para soluções. Exploramos várias características geométricas da fronteira livre, incluindo a não degenerescência das soluções e a medida de Hausdorff desse conjunto. Como resultado, estabelecemos regularidade Lipschitz e C^1 para a fronteira livre.

Palavras-chave: problemas de obstáculo, estimativas de regularidade, problemas de fronteira livre.

Abstract

In this study, based on the book “*Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems*” by Arshak Petrosyan, Henrik Shahgholian, and Nina Uraltseva, [22], we investigate the geometric and analytical properties of solutions to obstacle-type problems. In the problems to be addressed below, the equations that model diffusion phenomena exhibit discontinuity jumps along a set that depends on the solution itself, which we call the free boundary. Initially, we focus on simpler models where solutions do not change sign. Subsequently, we expand our analysis to more complex scenarios, considering cases with sign changes, where we study, among other things, estimates of local and global regularity for solutions. We explore various geometric features of the free boundary, including the non-degeneracy of solutions and the Hausdorff measure of this set. As a result, we establish Lipschitz and C^1 regularity for the free boundary.

Keywords: obstacle problems, regularity estimates, free boundary problems.

Sumário

Introdução	1
1 Introduzindo o problema de obstáculo	5
1.1 Redução ao caso do obstáculo zero	8
1.2 Problemas de minimização não-diferenciáveis	9
1.3 Regularidade $W^{2,p}$	10
2 O problema de obstáculo com sinal	17
2.1 Regularidade ótima local	17
2.2 Um contraexemplo para o problema instável	21
3 O problema de obstáculo sem restrição de sinal	25
3.1 Fórmula de monotonicidade de Alt-Caffarelli-Friedman	26
3.2 Regularidade ótima local	43
3.3 Regularidade ótima até a fronteira fixa	46
4 Medida de Hausdorff $(n - 1)$-dimensional da fronteira livre	53
4.1 Estimativas de não degenerescência	53
4.2 Medida de Hausdorff da fronteira livre	58
5 Regularidade da fronteira livre	63
5.1 Classes de soluções, <i>rescalings</i> e <i>blowups</i>	63
5.2 Fórmula de monotonicidade do tipo Weiss	66
5.3 Regularidade C^1 da fronteira livre próxima a pontos regulares	69
A Resultados Auxiliares	80
A.1 Resultados sobre Teoria da Medida	80
A.2 Resultados em Equações Diferenciais Parciais	80
Referências Bibliográficas	84

Lista de Figuras

1	Derretimento de gelo	2
1.1	Solução u do problema (1.1').	6
1.2	Solução u com obstáculo ψ	6
1.3	Função χ_ε	13
2.1	Caso em que $d < \delta/5$ na prova do Teorema 2.3.	21
2.2	Singularidade em forma de cruz	24
3.1	Gráfico da função V_δ no perfil unidimensional.	28
3.2	Fórmula de monotonicidade ACF.	30
3.3	Representação do Lema 3.11.	51
5.1	<i>Blowup</i> sobre uma sequência de raios λ_j e centro fixo.	65
5.2	<i>Blowup</i> sobre uma sequência de raios λ_j com centros $x_j \rightarrow x_0$	65
5.3	Propriedade <i>flatness</i> de $\Gamma(u)$	70

Introdução

Desde a criação da análise moderna, a pesquisa sobre a teoria de equações diferenciais parciais (EDPs) tem sido um tópico de grande relevância. Sua importância se dá pela conexão e interação com outras ciências, sendo aplicadas em uma ampla variedade de campos. Na física, elas são essenciais para a modelagem de fenômenos como a propagação de ondas, a dinâmica de fluidos e a evolução de sistemas quânticos. Nas ciências biológicas, mais recentemente, as EDPs se tornaram uma ferramenta essencial, auxiliando, por exemplo, na compreensão da difusão de substâncias em tecidos vivos e na modelagem de populações em ecossistemas. Também destacamos a ampla aplicação em diversos ramos da engenharia, química e economia.

Os problemas de fronteira livre em EDPs surgem quando se consideram fenômenos que não possuem fronteiras ou limites pré-definidos. Diferentemente dos problemas de fronteira fixa, em que as condições nas bordas de uma região são especificadas, os problemas de fronteira livre desafiam os matemáticos e cientistas a modelar situações em que as fronteiras ou interfaces do sistema são dinâmicas e podem evoluir com o tempo.

No contexto da análise moderna de equações diferenciais parciais, os problemas de fronteira livre desempenham um papel de extrema relevância e possuem várias aplicações em diversas ciências. Entre essas aplicações, podemos destacar transições de fase, questões relacionadas a superfícies, processos de filtração em meios porosos, dinâmica de fluidos, bem como em finanças matemáticas e biologia.

Como um dos exemplos mais importantes de problemas de fronteira livre, temos o *Problema de Stefan*. Este problema tem suas raízes no século XIX e representa o mais emblemático e significativo problema de fronteira livre. Inicialmente abordado por Lamé e Clapeyron em 1831, tem como objetivo modelar a distribuição de temperatura em um meio homogêneo que passa por uma mudança de fase, comumente exemplificado pelo caso de um bloco de gelo a zero graus Celsius imerso em água (Figura 1). Nesse caso, a fronteira entre o gelo e a água é desconhecida e muda à medida que o gelo derrete, tornando-se parte da solução do problema. O nome desse problema é uma homenagem a Josef Stefan, um físico esloveno que, por volta de 1890, introduziu a

classe geral de tais desafios; ver [23].



Figura 1: Derretimento de gelo (Foto: NASA/Kathryn Hansen).

O problema do obstáculo, uma outra importante classe de problemas de fronteira livre, teve origem no trabalho de Stampacchia, em 1964, intitulado “*Formes Bilineaires Coercitives Sur Les Ensembles Convexes*” e é um exemplo clássico no estudo matemático de desigualdades variacionais e problemas de fronteira livre. Tal problema envolve encontrar a posição de equilíbrio de uma membrana elástica que deve permanecer acima de um obstáculo específico, com sua borda fixa. Suas aplicações abrangem diversas áreas, incluindo o estudo da filtração de fluidos em meios porosos, elasto-plasticidade, controle ótimo e matemática financeira.

Neste trabalho, estudamos os problemas de fronteira livre que podem ser expressos da seguinte maneira

$$\Delta u = f(x, u, \nabla u) \quad \text{em } D \subset \mathbb{R}^n,$$

onde a função f do lado direito apresenta saltos de descontinuidade que dependem da própria solução. O conjunto de descontinuidade é desconhecido a priori e por isso dizemos que é “livre”. Um exemplo típico nesse contexto e que será abordado no trabalho é o *problema clássico de obstáculo*, cujo objetivo é minimizar a energia de uma membrana esticada sobre um determinado obstáculo. De maneira simplificada, esse problema pode ser reformulado da seguinte maneira:

$$\Delta u = \chi_{\{u > 0\}}, \quad u \geq 0, \quad \text{em } D.$$

A *fronteira livre* aqui é dada por $\Gamma(u) = \partial\{u > 0\} \cap D$. Este problema é abordado no trabalho como “*o problema de obstáculo com sinal*”. Também estudamos a seguinte

classe de problemas que generaliza o problema anterior,

$$\Delta u = \chi_{\Omega(u)} \quad \text{em } D, \quad \Omega(u) = D \setminus \{u = |\nabla u| = 0\}.$$

A fronteira livre nesse caso é $\Gamma(u) = \partial\Omega(u) \cap D$. Este problema é conhecido como “*problema de obstáculo sem sinal*” e é um caso particular do problema da teoria potencial; ver [22, Subseção 1.1.2, pág. 10].

Nossa referência principal durante todo o trabalho é o livro “*Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems*” de Arshak Petrosyan, Henrik Shahgholian e Nina Uraltseva, [22]. Com isso, nosso principal objetivo neste trabalho é estudar os problemas de obstáculo e obter a regularidade ótima para tais problemas, além de alcançar também resultados acerca da regularidade da fronteira livre.

O trabalho está dividido em cinco capítulos e um apêndice. No Capítulo 1, apresentamos o problema do tipo obstáculo, definimos o conjunto de coincidência e a fronteira livre do problema e analisamos o caso particular em que o obstáculo é zero. Além disso, exibimos os modelos de problemas que serão tratados no restante do trabalho e vemos que a estimativa Calderón-Zygmund nos fornece a regularidade $W_{loc}^{2,p} \cap C_{loc}^{1,\alpha}$ para soluções do problema do tipo obstáculo, com $1 < p < \infty$ e $0 < \alpha < 1$. Obtemos também a mesma regularidade para o problema de obstáculo clássico, analisando as soluções como minimizantes do funcional energia associado ao problema.

No Capítulo 2, considerando o problema de obstáculo com sinal, mostramos que a solução cresce no máximo quadraticamente em pontos da fronteira livre e provamos a regularidade ótima $C_{loc}^{1,1}$. Por fim, exibimos o contraexemplo devido a Andersson-Weiss, [2], onde não temos a regularidade $C^{1,1}$ para problemas com termos fonte (lado direito da equação) não positivos.

No Capítulo 3, estabelecemos a regularidade $C^{1,1}$ (local e global) para o problema de obstáculo sem sinal. Para isso, usaremos fortemente a fórmula de monotonicidade Alt-Caffarelli-Friedman. Provamos então estimativas locais e por fim, mostramos que elas podem ser estendidas até limites planos com dados zero de Dirichlet.

No Capítulo 4, provamos a propriedade de não degenerescência para soluções do problema de obstáculo sem sinal, o que significa que, de certa forma, as soluções decaem mais rápido do que quadraticamente nas proximidades dos pontos de fronteira livre. Usando a não degenerescência, mostramos que a porosidade da fronteira livre implica, localmente, que sua medida de Lebesgue é igual a zero. Por último, obtemos que a dimensão de Hausdorff da fronteira livre é igual a $n - 1$.

Por fim, no Capítulo 5, ainda com ênfase no problema de obstáculo sem sinal, definimos as classes de soluções locais e globais, abordamos as propriedades dos *rescalings*

e *blowups* e estudamos a fórmula de monotonicidade de Weiss. Na última seção do capítulo mostramos como usar uma propriedade geométrica de monotonicidade direcional de soluções globais para obter uma propriedade semelhante para soluções locais. Usaremos então isso para provar a regularidade Lipschitz e C^1 da fronteira livre próxima a pontos regulares.

Para que a leitura do trabalho ocorra de forma mais fluente em relação a resultados ou definições associados à teoria clássica de EDPs e/ou Análise Funcional, recomendamos a utilização de livros como [4, 5, 12, 16, 18].

Capítulo 1

Introduzindo o problema de obstáculo

Classicamente, o *Princípio de Dirichlet* estabelece que a solução do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } D, \\ u = g & \text{em } \partial D, \end{cases}$$

pode ser obtida como o minimizante do funcional (de Dirichlet)

$$J_0(u) = \int_D |\nabla u|^2 dx.$$

para toda função u , tal que $u = g$ em ∂D . De forma geral, se D é um aberto limitado do \mathbb{R}^n , $g \in W^{1,2}(D)$ e $f \in L^\infty(D)$, os minimizantes do funcional

$$J(u) = \int_D (|\nabla u|^2 + 2fu) dx, \tag{1.1}$$

sobre o conjunto

$$\mathcal{R}_g = \{u \in W^{1,2}(D) : u - g \in W_0^{1,2}(D)\}$$

resolvem a *equação de Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } D, \\ u = g & \text{em } \partial D, \end{cases} \tag{1.1'}$$

no sentido das distribuições. Mais precisamente, u satisfaz a equação integral:

$$\int_D (\nabla u \nabla \varphi + f\varphi) dx = 0,$$

para toda função teste $\varphi \in C_0^\infty(D)$. O gráfico de u pode ser entendida como a construção de uma membrana que minimiza a energia de uma tensão elástica presa a um

fio fino (o gráfico de g sobre ∂D); ver Figura 1.1.

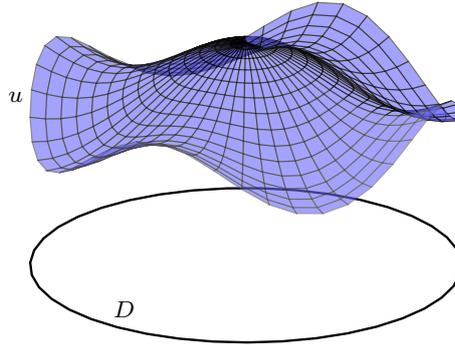


Figura 1.1: Solução u do problema (1.1').

Desejamos agora entender o que acontece com este problema de tensão elástica adicionando uma obstrução geométrica: seja $\psi \in C^2(D)$ um **obstáculo**, com $\psi \leq g$ em ∂D (condição de compatibilidade) no sentido de que $(\psi - g)_+ \in W_0^{1,2}(D)$. Considere então o problema de minimizar o funcional J , definido em (1.1), sobre o conjunto

$$\mathcal{R}_{g,\psi} = \{u \in W^{1,2}(D) : u - g \in W_0^{1,2}(D), u \geq \psi \text{ q.s. em } D\}.$$

A continuidade e a convexidade de J estrita sobre $\mathcal{R}_{g,\psi}$ nos dá um único minimizante em $\mathcal{R}_{g,\psi}$; ver [12, Teorema 8.4.3].

Como observado anteriormente, podemos visualizar o gráfico de u como uma membrana presa a um fio fino, que agora é forçada a ficar acima do gráfico do obstáculo ψ . Uma nova característica neste problema é que a membrana pode, de fato, tocar o obstáculo, isto é, o conjunto

$$\Lambda = \{u = \psi\},$$

conhecido como *conjunto de coincidência*, pode não ser vazio (Figura 1.2). Também denotaremos o conjunto

$$\Omega = D \setminus \Lambda.$$

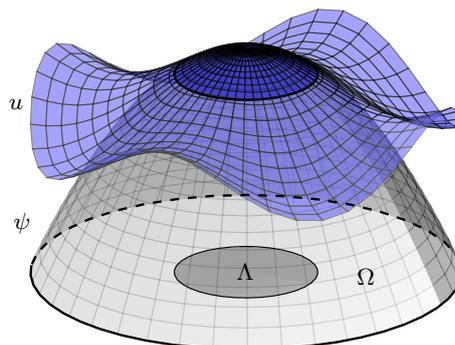


Figura 1.2: Solução u com obstáculo ψ .

1. Introduzindo o problema de obstáculo

Assim, a fronteira

$$\Gamma = \partial\Lambda \cap D = \partial\Omega \cap D$$

é chamada **fronteira livre**, uma vez que não é conhecida a priori. Desta forma, obtemos o seguinte sistema:

Teorema 1.1. *Seja $\psi \in W^{1,2}(D)$ e u um minimizante em $\mathcal{R}_{g,\psi}$. Então vale*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{em } \Omega &= \{u > \psi\}, \\ \Delta u &= \Delta\psi & \text{q.s. em } \Lambda &= \{u = \psi\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Além disso,

$$-\Delta u + f \geq 0 \quad \text{em } D,$$

no sentido das distribuições, isto é,

$$\int_D (\nabla u \nabla \phi + f\phi) dx \geq 0,$$

para qualquer $\phi \in W_0^{1,2}(D)$ não negativa.

Demonstração. De fato, como u é um minimizante de J , temos, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\frac{J(u + \varepsilon\phi) - J(u)}{\varepsilon} \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{J(u + \varepsilon\phi) - J(u)}{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_D (|\nabla(u + \varepsilon\phi)|^2 + 2f(u + \varepsilon\phi)) dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_D (|\nabla u|^2 + 2fu) dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_D (2\nabla u \nabla(\varepsilon\phi) + \varepsilon^2 |\nabla\phi|^2 + 2f\varepsilon\phi) dx \\ &= 2 \int_D (\nabla u \nabla\phi + f\phi) dx + \varepsilon \int_D |\nabla\phi|^2 dx. \end{aligned}$$

Passando o limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, obtemos a desigualdade desejada. \square

Combinando as propriedades mencionadas acima, concluímos que a solução do problema do obstáculo é uma função $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$, que satisfaz as seguintes condições:

$$-\Delta u + f \geq 0, \quad u \geq \psi, \quad (-\Delta u + f)(u - \psi) = 0 \quad \text{q.s. em } D, \tag{1.3}$$

$$u - g \in W_0^{1,2}(D).$$

Isso é conhecido como o *problema complementar de obstáculo* e define de maneira exclusiva os minimizantes de J sobre $\mathcal{R}_{g,\psi}$. A condição de complementaridade (1.3) é frequentemente formulada da seguinte maneira:

$$\min\{-\Delta u + f, u - \psi\} = 0.$$

1.1 Redução ao caso do obstáculo zero

Devido à linearidade do operador Δ , é possível reduzir o problema ao caso em que o obstáculo é identicamente zero. De fato, se u for a solução do problema do obstáculo acima, considere a diferença $v = u - \psi$. Então podemos ver que v é o minimizante do funcional

$$J_1(v) = \int_D (|\nabla v|^2 + 2f_1v) dx,$$

sobre o conjunto

$$\mathcal{R}_{g_1,0} = \{u \in W^{1,2}(D) : u - g_1 \in W_0^{1,2}(D), u \geq 0 \text{ q.s. em } D\},$$

onde

$$f_1 = f - \Delta\psi, \quad g_1 = g - \psi.$$

Além disso, se $v \in W_{\text{loc}}^{2,p}(D)$ para algum $p > n$, temos que

$$\Delta v = f_1 \chi_{\{v>0\}} \quad \text{em } D,$$

no sentido das distribuições. De fato, como u é um minimizante de (1.1) e $f_1 \in L^\infty(D)$ (pois $\psi \in C^2(D)$), temos

$$\begin{aligned} \int_D (\nabla v \nabla \phi + f_1 \phi) dx &= \int_D (\nabla(u - \psi) \nabla \phi + (f - \Delta\psi)\phi) dx \\ &= \int_D (\nabla u \nabla \phi + f\phi) dx - \int_D (\nabla \psi \nabla \phi + \Delta\psi \phi) dx \\ &= - \int_D \nabla \psi \nabla \phi dx + \int_D \nabla \psi \nabla \phi dx - \int_{\partial D} \phi (\partial_\nu \psi) dS, \end{aligned}$$

daí,

$$\int_D (\nabla v \nabla \phi + f_1 \phi) dx = 0,$$

para toda $\phi \in W_0^{1,2}(D)$. Note também que, como $\Delta u = \Delta\psi$ q.s. em $\Lambda = \{u = \psi\}$, temos que $\Delta v = 0$ q.s. em $\Lambda_1 = \{v = 0\}$. Portanto,

$$\Delta v = f_1 \chi_{\{v>0\}} \quad \text{em } D.$$

Assim, o problema complementar de obstáculo para v é dado por

$$\begin{aligned} -\Delta v + f_1 \chi_{\{v>0\}} &\geq 0, \quad v \geq 0, \quad (-\Delta v + f_1)v = 0 \quad \text{q.s. em } D, \\ v - g_1 &\in W_0^{1,2}(D). \end{aligned}$$

E reformulamos como

$$\min\{-\Delta v + f_1, v\} = 0.$$

1.2 Problemas de minimização não-diferenciáveis

Iremos agora considerar o problema de minimização para o seguinte funcional

$$J(u) = \int_D |\nabla u|^2 + 2F(u) dx,$$

sobre o conjunto

$$\mathcal{R}_g = \{u \in W^{1,2}(D), u - g \in W_0^{1,2}(D)\}.$$

onde $g \in W^{1,2}(D)$ e F uma função diferenciável em \mathbb{R} . O problema de Euler-Lagrange associado ao funcional J (ver [12, Capítulo 8]) corresponde a equação de Poisson não-linear

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{em } D \\ u = g & \text{em } \partial D, \end{cases}$$

tal que $F(s) = \int_0^s f(y) dy$. O problema acima é visto no sentido das distribuições, isto é,

$$\int_D (\nabla u \nabla \varphi - f(u)\varphi) dx = 0,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Isto segue de acordo com a prova do Teorema 1.1, com pequenas adaptações. Note que, para encontrar a equação de Euler-Lagrange, precisamos de uma certa condição de diferenciabilidade do funcional J e consequentemente da função F . Assim, retornando ao contexto dos problemas de obstáculo, estudamos aqui situações onde não há estruturas de diferenciabilidade, como por exemplo, o caso em que

$$F(s) = s_+ := \max\{s, 0\} = s \cdot \chi_{\{s>0\}}.$$

Neste caso, não temos diferenciabilidade para $s = 0$.

1.2.1 O problema de obstáculo com sinal

Motivados por esta nova perspectiva, apresentaremos os modelos de problemas que serão tratados nos capítulos seguintes, os quais foram abordados em [22] e escolhidos com base na convicção de que os mesmos exemplificam as técnicas e desafios típicos associados a problemas do tipo obstáculo. A estrutura geral desses problemas é a seguinte: considere $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\Delta u = f(u) \quad \text{em } D,$$

para um termo fonte f limitado em D . Caracterizando as classes de problemas a serem estudadas aqui, iremos assumir f com saltos de descontinuidade ao longo de um certo conjunto $\Gamma(u)$, o qual é regido pela própria solução u , chamado de fronteira livre. O protótipo mais clássico, também referenciado na literatura como *problema de obstáculo clássico*, é dado por

$$\Delta u = \chi_{\{u > 0\}} \quad \text{em } D.$$

onde a fronteira livre é $\Gamma(u) = \{u = 0\} \cap D$.

1.2.2 O problema de obstáculo sem sinal

Este modelo constitui um caso específico do problema abordado na teoria potencial, conforme detalhado na [22, Subseção 1.1.2]. Dentro do contexto do livro base citado, iremos, para fins de simplicidade e didática, analisar o caso particular $f(x) \equiv 1$ da seguinte equação:

$$\Delta u = f(x)\chi_{\Omega(u)} \quad \text{em } D, \tag{1.4}$$

onde

$$\Omega(u) = D \setminus \{u = |\nabla u| = 0\}.$$

A fronteira livre nesse caso é $\Gamma(u) = \partial\Omega(u) \cap D$.

Observação 1. Na Seção 1.3 abaixo iremos obter regularidade $C^{1,\alpha}$ para soluções do problema acima. Isto implica em particular que para soluções não negativas, tem-se $\partial\{u > 0\} \subset \{|\nabla u| = 0\}$. Daí $\Omega(u) = \{u > 0\}$ e assim u torna-se uma solução do problema do obstáculo com sinal tratado na Subseção 1.2.1.

1.3 Regularidade $W^{2,p}$

Nesta seção faremos o uso das estimativas Calderón-Zygmund para alcançarmos a regularidade $W_{\text{loc}}^{2,p}$ para os modelos de problemas que serão estudados neste trabalho.

1. Introduzindo o problema de obstáculo

Além disso, iremos obter a regularidade $W_{\text{loc}}^{2,p}$ do problema de obstáculo clássico via minimização do funcional energia associado ao problema.

Para soluções no sentido das distribuições do problema

$$\Delta u = f \quad \text{em } D, \quad (1.5)$$

temos, pela estimativa Calderón-Zygmund (Teorema A.3), considerando $f \in L^\infty(D)$, que

$$u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(D) \quad \text{para todo } 1 < p < \infty. \quad (1.6)$$

Consequentemente, pela imersão de Sobolev $W^{2,p} \hookrightarrow C^{1,\alpha}$, com $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ para $p > n$ (ver [11, Teorema 2.31]), temos

$$u \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(D) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1. \quad (1.7)$$

Observação 1.1. Em geral não é possível provar resultados similares para os casos $p = \infty$ e $\alpha = 1$ em (1.6) e (1.7), respectivamente. Como contraexemplo, temos o Exemplo A.2, em que a função satisfaz as hipóteses das estimativas Calderón-Zygmund, porém não está em $W_{\text{loc}}^{2,\infty}$.

As estimativas $W^{2,p}$ são obtidas “de graça” no problema de obstáculo com e sem sinal, já que as declaramos na forma de equações com lados direitos limitados. No entanto, para obter tais estimativas, consideramos a Equação (1.5) no sentido das distribuições. Isto significa que as estimativas não podem ser usadas diretamente para soluções que surgem do problema de minimização de funcionais que apresentam alguma descontinuidade. Assim, precisamos de início obter a regularidade $W^{2,p}$ para minimizantes do funcional energia associado ao problema de obstáculo.

Aqui, para exemplificar o método, estabeleceremos a regularidade para o *problema clássico de obstáculo*. Inicialmente, lembremos que, subtraindo o obstáculo, reduzimos o problema de obstáculo ao caso particular de obstáculo com obstáculo zero, isto é, o problema de minimizar o funcional

$$J(u) = \int_D (|\nabla u|^2 + 2u) dx,$$

sobre o conjunto (fechado e convexo)

$$\mathcal{R}_{g,0} = \{u \in W^{1,2}(D), u - g \in W_0^{1,2}(D), u \geq 0 \quad \text{q.s. em } D\}.$$

Para o que segue, assumimos $g \in W^{1,2}(D)$ e $g \geq 0$ em ∂D (no sentido que $g^- \in W_0^{1,2}(D)$).

Nosso objetivo a seguir é mostrar que o minimizante u de J está em $W_{\text{loc}}^{2,p}(D)$ para

1. Introduzindo o problema de obstáculo

qualquer $1 < p < \infty$ e com isso, verificar que u resolve o problema

$$\Delta u = \chi_{\{u>0\}} \quad \text{em } D,$$

no sentido das distribuições. Para isso, inicialmente devemos nos livrar do obstáculo zero, o que custará uma perda na regularidade do funcional J . Nesse sentido, temos o seguinte resultado:

Lema 1.2. *Uma função $u \in W^{1,2}(D)$ é minimizante do funcional*

$$J(u) = \int_D (|\nabla u|^2 + 2u) dx,$$

sobre $\mathcal{R}_{g,0}$ se, e somente se, u é minimizante de

$$\tilde{J}(u) = \int_D (|\nabla u|^2 + 2u^+) dx,$$

sobre $\mathcal{R}_g = \{u \in W^{1,2}(D), u - g \in W_0^{1,2}(D)\}$.

Demonstração. A princípio, observemos que, para toda $u \in \mathcal{R}_g$ temos que $u^+ \in \mathcal{R}_{g,0}$ e $\nabla(u^+) = (\nabla u)\chi_{\{u>0\}}$. Com isso, afirmamos que $\tilde{J}(u^+) \leq \tilde{J}(u)$ para toda $u \in \mathcal{R}_g$ e a igualdade acontece se, e somente se, $u = u^+$. De fato,

$$\begin{aligned} \tilde{J}(u) &= \int_D (|\nabla u|^2 + 2u^+) dx \geq \int_D (|\nabla u|^2 \chi_{\{u>0\}} + 2u^+) dx \\ &= \int_D (|\nabla(u^+)|^2 + 2u^+) dx = \tilde{J}(u^+) \end{aligned}$$

e a igualdade $\tilde{J}(u^+) = \tilde{J}(u)$, pela expressão acima, ocorre se, e só se, $\nabla u = 0$ q.s. em $\{u \leq 0\}$ ou, de forma equivalente, se $\nabla(u_-) = 0$ q.s. em D . Esta última igualdade significa que u^- é localmente constante em D . E como $u^- \in W_0^{1,2}(D)$, temos que $u^- = 0$. Assim, $\tilde{J}(u^+) = \tilde{J}(u)$ se, e somente se, $u \geq 0$ q.s. em D , isto é, se $u \in \mathcal{R}_{g,0}$. Portanto, se $u \in \mathcal{R}_g$ é minimizante de \tilde{J} , então na verdade $u \in \mathcal{R}_{g,0}$. Com essa observação, temos que \tilde{J} atinge seu mínimo em $\mathcal{R}_{g,0}$. Por outro lado, $\tilde{J} = J$ em $\mathcal{R}_{g,0}$. Concluímos então que os dois funcionais possuem o mesmo conjunto de minimizantes. \square

Note que reduzimos então o problema anterior (estudar os minimizantes de J) para o problema de estudar os minimizantes de \tilde{J} com dados valores de g em ∂D .

Uma outra estratégia para abordar o problema de obstáculo se dá em aproximar, por funções suaves, o termo fonte. Assim, considere a seguinte família de problemas regularizados

1. Introduzindo o problema de obstáculo

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = \chi_\varepsilon(u_\varepsilon) & \text{em } D, \\ u_\varepsilon = g & \text{em } \partial D, \end{cases} \quad (1.8)$$

para $0 < \varepsilon < 1$, onde $\chi_\varepsilon(s)$ (ver figura 1.3) é uma aproximação suave da função Heaviside $\chi(s)$ tal que

$$\chi'_\varepsilon \geq 0, \quad \chi_\varepsilon(s) = 0, \quad \text{para } s \leq -\varepsilon \text{ e } \chi_\varepsilon(s) = 1, \quad \text{para } s \geq \varepsilon.$$

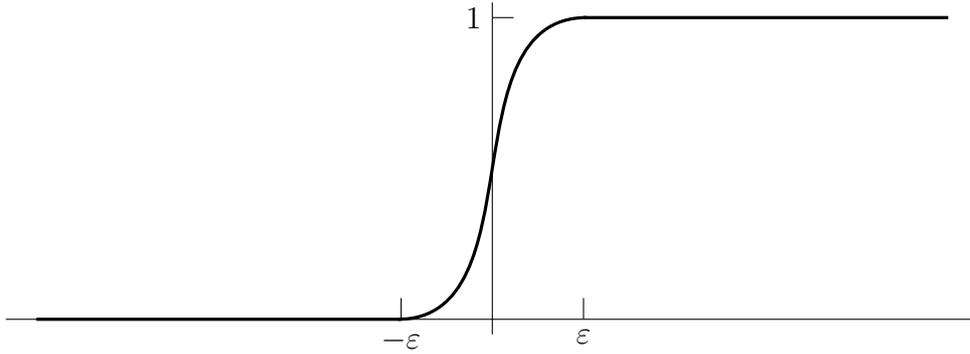


Figura 1.3: Função χ_ε .

A seguir, mostraremos um exemplo de uma função χ_ε .

Exemplo 1.2. Consideraremos a função $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\rho(x) = \begin{cases} C \cdot e^{-\left(1 - \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-1}}, & \text{se } |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{se } |x| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

onde C é uma constante real tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho(x) dx = 1.$$

Assim, para obter uma função χ_ε , basta definir

$$\chi_\varepsilon(s) = \int_{-\infty}^s \rho(\theta) d\theta.$$

A solução u_ε para o problema (1.8) pode ser obtida como minimizante do funcional

$$J_\varepsilon(u) = \int_D (|\nabla u|^2 + 2\Phi_\varepsilon(u)) dx$$

sobre

$$\mathcal{R}_g = \{u \in W^{1,2}(D), u - g \in W_0^{1,2}(D)\},$$

1. Introduzindo o problema de obstáculo

onde

$$\Phi_\varepsilon(s) = \int_{-\infty}^s \chi_\varepsilon(t) dt.$$

Com efeito, considerando $i_\varepsilon(t) = J_\varepsilon(u_\varepsilon + t\eta)$, onde u_ε é minimizante de $J_\varepsilon(u)$, temos que $i'(0) = 0$. Sendo

$$i'(t) = 2 \int_D \left(\nabla u_\varepsilon \nabla \eta + t |\nabla \eta|^2 + \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial u} \eta \right) dx,$$

onde $u = u_\varepsilon + t\eta$. Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial u}(u_\varepsilon + t\eta) &= \frac{\partial}{\partial u} \int_{-\infty}^{u_\varepsilon + t\eta} \chi_\varepsilon(r) dr = \frac{\partial}{\partial u} \int_0^{u_\varepsilon + t\eta} \chi_\varepsilon(r) dr = \chi_\varepsilon(u_\varepsilon + t\eta) - \chi_\varepsilon(-\varepsilon) \\ &= \chi_\varepsilon(u_\varepsilon + t\eta), \end{aligned}$$

então

$$i'(t) = 2 \int_D (\nabla u_\varepsilon \nabla \eta + t |\nabla \eta|^2 + \chi_\varepsilon(u_\varepsilon + t\eta) \eta) dx.$$

Usando que $i'(0) = 0$, concluímos que

$$\int_D (\nabla u_\varepsilon \nabla \eta + \chi_\varepsilon(u_\varepsilon) \eta) dx = 0, \quad \forall \eta \in W_0^{1,2}(D). \quad (1.9)$$

O que mostra que o minimizante u_ε é solução de (1.8) no sentido das distribuições. A seguir, mostraremos que a família $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ é uniformemente limitada em $W^{1,2}(D)$, assim como em $W^{2,p}(K)$ para qualquer $K \Subset D$. Para mostrar a estimativa uniforme $W^{1,2}(D)$, tomemos $\eta = u_\varepsilon - g$ na equação (1.9). Daí, obtemos

$$\int_D (\nabla u_\varepsilon \nabla (u_\varepsilon - g) + \chi_\varepsilon(u_\varepsilon) (u_\varepsilon - g) - \nabla g \nabla (u_\varepsilon - g)) dx = - \int_D \nabla g \nabla (u_\varepsilon - g) dx.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \int_D |\nabla (u_\varepsilon - g)|^2 dx &= - \int_D \chi_\varepsilon(u_\varepsilon) (u_\varepsilon - g) dx - \int_D \nabla g \nabla (u_\varepsilon - g) dx \\ &\leq \int_D |\chi_\varepsilon(u_\varepsilon)| |u_\varepsilon - g| dx + \int_D |\nabla g| |\nabla (u_\varepsilon - g)| dx \\ &\leq \int_D |u_\varepsilon - g| dx + \int_D |\nabla g| |\nabla (u_\varepsilon - g)| dx. \end{aligned}$$

Como $u_\varepsilon - g \in W_0^{1,2}(D)$, a desigualdade de Poincaré nos dá

$$\|u_\varepsilon - g\|_{L^2(D)} \leq C_p \|\nabla (u_\varepsilon - g)\|_{L^2(D)},$$

onde C_p é uma constante que depende somente de D . Além disso, pela Desigualdade

1. Introduzindo o problema de obstáculo

de Young, podemos ter

$$|(u_\varepsilon - g)| \leq C_p^2 + \frac{|(u_\varepsilon - g)|^2}{4C_p^2},$$

bem como,

$$|\nabla g| |\nabla(u_\varepsilon - g)| \leq \frac{|\nabla g|^2}{2} + \frac{|\nabla(u_\varepsilon - g)|^2}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \int_D |\nabla(u_\varepsilon - g)|^2 dx \\ & \leq \int_D C_p^2 dx + \int_D \frac{|(u_\varepsilon - g)|^2}{4C_p^2} dx + \int_D \frac{|\nabla g|^2}{2} dx + \int_D \frac{|\nabla(u_\varepsilon - g)|^2}{2} dx \\ & \leq C_p^2 |D| + \frac{1}{2} \|\nabla g\|_{L^2(D)}^2 + \int_D \frac{|(u_\varepsilon - g)|^2}{4C_p^2} dx + \int_D \frac{|\nabla(u_\varepsilon - g)|^2}{2} dx, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \int_D |\nabla(u_\varepsilon - g)|^2 dx & \leq C + \frac{1}{4C_p^2} \left(C_p^2 \int_D |\nabla(u_\varepsilon - g)|^2 dx \right) + \int_D \frac{|\nabla(u_\varepsilon - g)|^2}{2} dx \\ & \leq C + \frac{3}{4} \int_D |\nabla(u_\varepsilon - g)|^2 dx \\ & = 4C, \end{aligned}$$

uniformemente para $0 < \varepsilon < 1$, onde $C = C(D, \|\nabla g\|_{L^\infty(D)})$. Portanto, $\{u_\varepsilon - g\}_\varepsilon$ é uniformemente limitada em $W^{1,2}(D)$. Pela desigualdade triangular, segue que

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(D)} \leq \|\nabla(u_\varepsilon - g)\|_{L^2(D)} + \|\nabla g\|_{L^2(D)}.$$

Isto implica na limitação uniforme de $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ em $W^{1,2}(D)$. Como uma consequência da limitação demonstrada, obtemos que existe $u \in W^{1,2}(D)$ e uma subsequência $\varepsilon = \varepsilon_k$ tal que,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon & \rightarrow u \quad \text{fracamente em } W^{1,2}(D), \\ u_\varepsilon & \rightarrow u \quad \text{fortemente em } L^2(D) \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, sendo que a primeira convergência se dá pelo fato de $W^{1,2}(D)$ ser um espaço reflexivo (ver [5, Proposição 9.1] e [4, Teorema 6.5.4]) e a convergência forte é garantida pela imersão compacta de $W^{1,2}$ em L^2 ([12, Teorema 5.7.1]). Além disso, como $u_\varepsilon - g \in W_0^{1,2}(D)$ e $W_0^{1,2}(D)$ é um subespaço fechado do espaço $W^{1,2}(D)$ de Hilbert, concluímos que $u \in \mathcal{R}_g$. O nosso próximo passo é mostrar a limitação de $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ em $W^{2,p}(D)$ para todo $K \Subset D$. Com efeito, como as funções u_ε são soluções fracas do problema de regularização (1.8), aplicando o Teorema (A.3), obtemos que

1. Introduzindo o problema de obstáculo

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|_{W^{2,p}(K)} &\leq C(K, D) (\|u_\varepsilon\|_{L^2(D)} + 1) \\ &\leq C(K, D, g),\end{aligned}$$

para todo $K \Subset D$ e $1 < p < \infty$.

Então, podemos assumir para a mesma sequência $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ acima que,

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{fracamente em } W_{\text{loc}}^{2,p}(D),$$

para qualquer $1 < p < \infty$. Assim, temos que $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(D)$ para qualquer $1 < p < \infty$. Diante do que foi visto, podemos então tomar o limite $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$. Como

$$\begin{aligned}\int_D |\nabla u|^2 dx &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D |\nabla u_\varepsilon|^2 dx, \\ \int_D u^+ dx &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) dx,\end{aligned}$$

temos que,

$$\tilde{J}(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(v) = \tilde{J}(v),$$

para qualquer $v \in \mathcal{R}_g$. Isso nos diz que u é minimizante do funcional \tilde{J} . Logo, pelo Lema 1.2, u é solução do problema de obstáculo e portanto, resolve

$$\Delta u = \chi_{\{u>0\}} \quad \text{em } D,$$

no sentido das distribuições. Como $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(D)$, temos prontamente que Δu é localmente uma função L^p em D , e portanto temos que verificar que

$$\Delta u = \chi_{\{u>0\}} \quad \text{q.s. em } D.$$

Para isso, note que, como $u_\varepsilon \in W_{\text{loc}}^{2,p}(D)$, a equação $\Delta u_\varepsilon = \chi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ agora é satisfeita no sentido forte, ou seja, para quase todo $x \in D$. Além disso, tomando p grande, pela Imersão de Sobolev, podemos assumir que

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{em } C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(D),$$

para $0 < \alpha < 1$. Assim, a convergência localmente uniforme implica que $\Delta u = 1$ quase sempre no conjunto aberto $\{u > 0\}$. Observe também que pelo fato de que $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(D)$, obtemos que $\Delta u = 0$ quase sempre em $\{u = 0\}$. Combinando esses dois fatos, concluímos que

$$\Delta u = \chi_{\{u>0\}} \quad \text{q.s. em } D.$$

Capítulo 2

O problema de obstáculo com sinal

Seja $u \in L^\infty(D)$ uma solução não negativa do problema

$$\Delta u = \chi_{\{u>0\}} \quad \text{em } D. \quad (2.1)$$

O fato de o lado direito da equação apresentar saltos de descontinuidades, implica que, não podemos, em geral, ter regularidade C^2 para as soluções. De fato, considere o seguinte exemplo:

$$u(x) = \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)_+ \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

Note que a função acima resolve (2.1), porém não possui derivada segunda na região $\Gamma(u) = \partial B_1$. No entanto, observamos que D^2u é limitada em \mathbb{R}^n . Logo, a regularidade ótima a ser obtida para os modelos de problemas tratados neste trabalho é $C^{1,1}$. Da discussão realizada no capítulo anterior, já sabemos que $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(D)$ para qualquer $1 < p < \infty$. Neste capítulo mostraremos que de fato essa é a regularidade obtida, em geral, para soluções do problema de obstáculo.

2.1 Regularidade ótima local

O primeiro passo para obter a regularidade ótima é a seguinte estimativa relacionada ao crescimento da solução u distante da fronteira livre

$$\Gamma(u) = \partial\Omega(u) \cap D, \quad \Omega(u) = \{u > 0\}.$$

Teorema 2.1 (Crescimento quadrático). *Seja $u \in L^\infty(D)$, com $u \geq 0$, satisfazendo*

$$\Delta u = \chi_{\{u>0\}} \quad \text{em } D,$$

2. O problema de obstáculo com sinal

$x_0 \in \Gamma(u)$ e $B_{2R}(x_0) \subset D$, então

$$\sup_{B_R(x_0)} u \leq C_n \cdot R^2.$$

Demonstração. Sejam u_1 e u_2 tais que $u = u_1 + u_2$ em $B_{2R}(x_0)$ e satisfazem

$$\begin{cases} \Delta u_1 = \Delta u, & \Delta u_2 = 0 & \text{em } B_{2R}(x_0), \\ u_1 = 0, & u_2 = u & \text{em } \partial B_{2R}(x_0). \end{cases}$$

A existência (e unicidade) de tais funções sob as condições de fronteira postas, são garantidas pelo fato de u_2 ser solução do problema de Dirichlet em um domínio limitado do \mathbb{R}^n . Estimaremos u_1 e u_2 separadamente. Para u_1 , note que a função

$$\psi(x) = \frac{1}{2n} (4R^2 - |x - x_0|^2)$$

é solução de

$$\begin{cases} \Delta \psi = -1 & \text{em } B_{2R}(x_0), \\ \psi = 0 & \text{em } \partial B_{2R}(x_0). \end{cases}$$

De fato, é fácil ver que $\psi(x) = 0$ para todo $x \in \partial B_{2R}(x_0)$. Notemos também que, para cada $i = 1, \dots, n$, temos $\psi_{x_i x_i}(x) = -\frac{1}{n}$. Disso, concluímos que $\Delta \psi(x) = -1$. Como $\|\chi_{\{u>0\}}\|_{L^\infty(D)} \leq 1$, vale que

$$\begin{cases} \Delta \psi \leq \Delta u_1 \leq -\Delta \psi & \text{em } B_{2R}(x_0), \\ u_1 = \psi = 0 & \text{em } \partial B_{2R}(x_0). \end{cases}$$

Pelo Princípio de Comparação, [12],

$$-\psi \leq u_1 \leq \psi \quad \text{em } B_{2R}(x_0).$$

Em particular, isso implica que

$$|u_1(x)| \leq \frac{2}{n} R^2, \quad \forall x \in B_{2R}(x_0). \quad (2.2)$$

Para estimar a função u_2 , observemos que, sendo u_2 harmônica em $B_{2R}(x_0)$ e $u_2 = u \geq 0$ em $\partial B_{2R}(x_0)$, pelo Princípio do Máximo, [12], $u_2 \geq 0$ em $B_{2R}(x_0)$. Note também que

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) = u(x_0) = 0,$$

visto que $x_0 \in \Gamma(u)$. Assim, por (2.2), temos que

$$u_2(x_0) = -u_1(x_0) \leq \frac{2}{n}R^2.$$

Aplicando a Desigualdade de Harnack [16, Corolário 9.25], obtemos

$$\sup_{B_R(x_0)} u_2 \leq C \inf_{B_R(x_0)} u_2,$$

onde $C = C(p, n, R^2)$. Em particular,

$$u_2(x) \leq C u_2(x_0) \leq \frac{2C}{n}R^2,$$

para todo $x \in B_R(x_0)$. Assim, combinando as estimativas para u_1 e u_2 , obtemos que

$$\sup_{B_R(x_0)} u \leq \sup_{B_R(x_0)} |u| = \sup_{B_R(x_0)} |u_1| + \sup_{B_R(x_0)} |u_2| \leq \frac{2}{n}R^2 + \frac{2C}{n}R^2 = C_n R^2. \quad \square$$

Corolário 2.2. *Seja u nas mesmas condições do Teorema 2.1, então*

$$u(x) \leq C_n (\text{dist}(x, \Omega^c(u)))^2,$$

desde que $2 \text{dist}(x, \Omega^c(u)) < \text{dist}(x, \partial D)$.

Teorema 2.3 (Regularidade $C^{1,1}$). *Sejam $u \in L^\infty(D)$, $u \geq 0$ satisfazendo (2.1). Então $u \in C_{\text{loc}}^{1,1}(D)$ e*

$$\|u\|_{C^{1,1}(K)} \leq C (\|u\|_{L^\infty(D)} + 1),$$

para qualquer $K \Subset D$, onde $C = C(n, \text{dist}(K, \partial D))$.

Demonstração. Seja $K \Subset D$. Como $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}$ e $D^2u = 0$ q.s. em $\Omega^c(u)$, para mostrar a regularidade $C_{\text{loc}}^{1,1}$ é suficiente obter uma limitação uniforme para D^2u em $\Omega(u) \cap K$. Para isso, fixamos $x_0 \in \Omega(u) \cap K$ e denotamos $\delta = \text{dist}(K, \partial D)$ e

$$d = d(x_0) := \min\{d(x_0, \partial\Omega), d(x_0, \partial D)\}.$$

A ideia é analisar dois casos: quando x_0 está mais próximo da fronteira livre, isto é, quando $d \sim d(x_0, \partial\Omega)$, e quando este ponto pode estar estar mais próximo do bordo fixo, ou seja, $d \sim d(x_0, \partial D)$.

1) Se $d < \delta/5$ (ver Figura 2.1), temos que x_0 está mais próximo da fronteira livre, pois $d < 5d < \delta \leq \text{dist}(x_0, \partial D)$. Então, para $y_0 \in \partial B_d(x_0) \cap \partial\Omega(u)$, temos que $B_{4d}(y_0) \subset B_{5d}(x_0) \Subset D$. Pelo Teorema 2.1,

$$\|u\|_{L^\infty(B_{2d}(y_0))} \leq C_n d^2. \quad (2.3)$$

2. O problema de obstáculo com sinal

Além disso, como $B_d(x_0) \subset \Omega(u)$, $\Delta u = 1$ em $B_d(x_0)$. Considerando a função

$$\tilde{u}(x) = \frac{u(x_0 + dx)}{d^2} \quad \text{em } B_1,$$

podemos ver que $\Delta \tilde{u} = 1$ em B_1 e que

$$\|D^2 \tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} = \|D^2 u\|_{L^\infty(B_d(x_0))} \quad \text{e} \quad \|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} = \frac{\|u\|_{L^\infty(B_d(x_0))}}{d^2}.$$

Então, tomando

$$w = \tilde{u} - \psi \quad \text{em } B_1, \quad \text{com } \psi = \frac{|x|^2}{2n},$$

temos que w é harmônica em B_1 e pela estimativa interior para derivada de segunda ordem de funções harmônicas (Teorema A.2),

$$\|D^2 \tilde{u} - D^2 \psi\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C_n \|u - \psi\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Logo,

$$\|D^2 \tilde{u}\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C_n \left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} + \|\psi\|_{L^\infty(B_1)} \right) + \|D^2 \psi\|_{L^\infty(B_{1/2})}.$$

Como $\|D^2 \psi\|_{L^\infty(B_{1/2})} = 1$ e $\|\psi\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1/2n$, obtemos,

$$\|D^2 \tilde{u}\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C_n \left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} + \frac{1}{2n} \right) + 1 \leq C_n \left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} + 1 \right).$$

Com isso, obtemos a estimativa para a derivada de segunda ordem de u .

$$\|D^2 u\|_{L^\infty(B_{d/2}(x_0))} \leq C_n \left(\frac{\|u\|_{L^\infty(B_d(x_0))}}{d^2} + 1 \right).$$

Note que $B_d(x_0) \subset B_{2d}(y_0)$. Então, usando (2.3), concluímos que

$$\|D^2 u\|_{L^\infty(B_{d/2}(x_0))} \leq C_n (C_n + 1) = C_n.$$

2) Caso $d \geq \delta/5$. Conseguimos, de modo análogo ao feito acima, a estimativa interior para u em $B_d(x_0)$. E como $d^2 \geq \delta^2/25$, segue que

$$\|D^2 u\|_{L^\infty(B_{d/2}(x_0))} \leq C_n \left(\frac{\|u\|_{L^\infty(B_d(x_0))}}{\delta^2} + 1 \right).$$

Portando, combinando as duas estimativas, concluímos que

$$\|u\|_{C^{1,1}(K)} \leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_d(x_0))} + 1 \right),$$

onde C depende de $\text{dist}(K, \partial D)$ e da dimensão. □

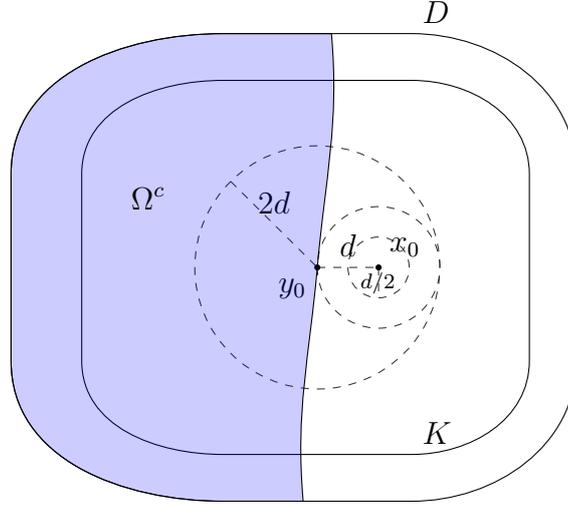


Figura 2.1: Caso em que $d < \delta/5$ na prova do Teorema 2.3.

2.2 Um contraexemplo para o problema instável

Já sabemos que soluções do problema de obstáculo com sinal, (2.1), possuem regularidade $C_{\text{loc}}^{1,1}$. Assim, nesta seção, descreveremos o contraexemplo devido a [2] da não regularidade $C^{1,1}$ da solução da equação

$$\Delta u = -\chi_{\{u>0\}}.$$

Tal problema é conhecida como o problema de obstáculo instável. Inicialmente, seja B_1 a bola unitária do \mathbb{R}^2 , $0 < \alpha < 1$ e m um inteiro positivo. Consideraremos o subespaço $C_m^\alpha(\overline{B_1})$ de $C^\alpha(\overline{B_1})$ das funções $u(x_1, x_2)$ tais que

$$u(x_1, x_2) = u(x_1, -x_2), \quad u \circ U_{2\pi/m} = u,$$

onde U_θ é a rotação pelo ângulo θ no sentido anti horário. De maneira análoga definimos o subespaço $C_m^\alpha(\partial B_1)$ de $C^\alpha(\partial B_1)$.

Observação 2.1. Note que funções radiais em um espaço C^α são exemplos de funções no subespaço C_m^α para todo $m \in \mathbb{N}$.

Observação 2.2. O subespaço $C_m^0(\overline{B_1})$ de $C^0(\overline{B_1})$ é um espaço de Banach com a norma induzida de $C^0(\overline{B_1})$. De fato, como C^0 é Banach, basta mostrar que $C_m^0(\overline{B_1})$ é fechado em $C^0(\overline{B_1})$. Para isso, seja $u_0 \in \overline{C_m^0(\overline{B_1})}$ e $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in C_m^0(\overline{B_1})$ tal que

2. O problema de obstáculo com sinal

$u_k \rightarrow u_0$ em $C^0(\overline{B_1})$. Como a norma em C^0 é a do supremo, $u_k \rightarrow u_0$ uniformemente. Assim, supondo que $U_{2\pi/m}(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2)$, temos $u_k(x_1, x_2) = u_k(x_1, -x_2)$ e $u_k(x_1, x_2) = u_k(x'_1, x'_2)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, pela convergência uniforme, $u_0(x_1, x_2) = u_0(x_1, -x_2)$ e $u_0(x_1, x_2) = u_0(x'_1, x'_2) = (u_0 \circ U_{2\pi/m})(x_1, x_2)$. Portanto, $u_0 \in C_m^0(\overline{B_1})$ e conseqüentemente, $C_m^0(\overline{B_1})$ é fechado em $C^0(\overline{B_1})$.

Proposição 2.4. *Seja $g \in C_m^\beta(\partial B_1)$ para algum $0 < \beta < 1$. Então existe uma constante $\kappa = \kappa(g)$ tal que o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = -\chi_{\{u>0\}} & \text{em } B_1 \\ u = g - \kappa & \text{em } \partial B_1 \end{cases}$$

tem uma solução $u \in C_m^\alpha(B_1) \cap W_{\text{loc}}^{2,p}(B_1)$, para algum $\alpha = \alpha(g) > 0$ e todo $1 < p < \infty$, que satisfaz $u(0) = |\nabla u(0)| = 0$.

Demonstração. Para cada $\varepsilon > 0$ tomamos $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma aproximação suave de $\chi_{\{s>0\}}$ que satisfaz

$$\chi_{\{s>0\}} \leq f_\varepsilon(s) \leq \chi_{\{s>-\varepsilon\}}.$$

Consideramos também o operador $T_\varepsilon : C_m^0(\overline{B_1}) \rightarrow C_m^0(\overline{B_1})$ definido de modo que

$$\begin{cases} \Delta T_\varepsilon(u) = -f_\varepsilon(u - u(0)) & \text{em } B_1 \\ T_\varepsilon(u) = g & \text{em } \partial B_1. \end{cases}$$

Como $T_\varepsilon \in W^{2,p}(B_1)$ (Calderón-Zygmund) para $1 < p < \infty$ e, pela simetria, $T_\varepsilon \in C^0(\overline{B_1})$, utilizando [16, Corolário 9.29], obtemos que $T_\varepsilon(u) \in C_m^\alpha(\overline{B_1})$ para $\alpha = \alpha(g) > 0$ e

$$\|T_\varepsilon u\|_{C^\alpha(\overline{B_1})} \leq C,$$

onde $C > 0$ depende de n e de g , para qualquer $u \in C_m^0(\overline{B_1})$. Afirmamos que T_ε é um operador compacto em $C_m^\beta(\overline{B_1})$ para qualquer $0 < \beta < \alpha$. Com efeito, seja $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções limitadas na norma $C^\alpha(\overline{B_1})$. Pela imersão compacta de $C^\alpha(\overline{B_1})$ em $C^\beta(\overline{B_1})$ (ver [14, Teorema 1.1]), temos que $\{T_\varepsilon u_k\}$ possui uma subsequência $\{T_\varepsilon u_{k_i}\}$ que converge em $C^\beta(\overline{B_1})$ para todo $0 < \beta < \alpha$. Sendo $C_m^0(\overline{B_1})$ um espaço de Banach (Observação 2.2), por [4, Proposição 7.2.3], concluímos a prova da afirmação. Note agora que o conjunto

$$\{u \in C_m^0(\overline{B_1}) : u = \lambda T_\varepsilon(u), \text{ para algum } 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

é limitado. De fato, considerando o problema

$$\begin{cases} \Delta \left(\frac{u}{\lambda} \right) = -f_\varepsilon(u - u(0)) & \text{em } B_1 \\ \frac{u}{\lambda} = g & \text{em } \partial B_1, \end{cases}$$

temos que

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{B_1})} \leq \lambda C \leq C,$$

para toda $u \in C_m^0(\overline{B_1})$ tal que $u = \lambda T_\varepsilon(u)$, com $0 \leq \lambda \leq 1$. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schaefer, [12, Teorema 9.2.4], o operador T_ε possui um ponto fixo u_ε , isto é, $T_\varepsilon(u_\varepsilon) = u_\varepsilon$ e assim, u_ε é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = -f_\varepsilon(u_\varepsilon - u_\varepsilon(0)) & \text{em } B_1 \\ u_\varepsilon = g & \text{em } \partial B_1. \end{cases}$$

Pelo que foi visto para o operador T_ε , a família $\{u_\varepsilon\}$ é uniformemente limitada na norma C^α em $\overline{B_1}$ e na norma $W^{2,p}$ em qualquer $K \Subset B_1$. Portanto, para uma sequência $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$, $u_\varepsilon - u_\varepsilon(0)$ converge uniformemente para uma função $u_0 \in C^\alpha(\overline{B_1}) \cap W_{\text{loc}}^{2,p}(B_1)$. Além disso, como

$$\chi_{\{u_0 > \delta\}} \leq f_\varepsilon(u_\varepsilon - u_\varepsilon(0)) \leq \chi_{\{u_0 > -\delta\}},$$

para $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, no limite, obtemos que

$$-\chi_{\{u_0 \geq 0\}} \leq \Delta u_0 \leq -\chi_{\{u_0 > 0\}},$$

fracamente em B_1 . Por outro lado, como $u_0 \in W_{\text{loc}}^{2,p}(B_1)$, temos que $\Delta u_0 = 0$ quase sempre em $\{u_0 = 0\}$. Assim,

$$\Delta u_0 = -\chi_{\{u_0 > 0\}},$$

fracamente em B_1 . □

Proposição 2.5. *Seja $u \in C_2^\alpha(\overline{B_1}) \cap W_{\text{loc}}^{2,p}(B_1)$, $p > n$, uma solução forte de*

$$\begin{cases} \Delta u = -\chi_{\{u > 0\}} & \text{em } B_1 \\ u(x_1, x_2) = M(x_1^2 - x_2^2) - \kappa & \text{em } \partial B_1. \end{cases}$$

obtida pela Proposição (2.4). Então $u \notin C_{\text{loc}}^{1,1}(B_1)$ se M é suficientemente grande.

Observação 2.3. Uma observação interessante sobre a função u da Proposição 2.5 é que ela tem a seguinte propriedade: cada limite de

$$\frac{u(rx)}{r^{(n-1)/2} \|u\|_{L^2(\partial B_r)}},$$

2. O problema de obstáculo com sinal

quando $r \rightarrow 0$, em $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, é, após uma rotação, a função

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{\|x_1^2 - x_2^2\|_{L^2(\partial B_r)}},$$

o que significa que a origem é uma “singularidade em forma de cruz” (ver Figura 2.2).

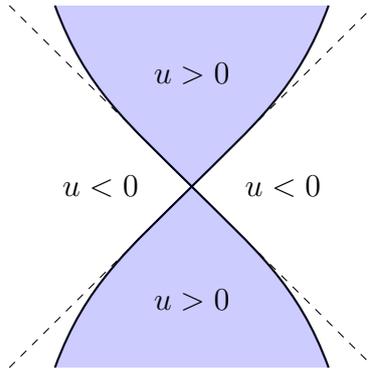


Figura 2.2: Singularidade em forma de cruz

Para a prova da Proposição 2.5 e mais detalhes sobre a observação acima, nos referimos ao artigo original ([2]). É relevante ressaltar que a aplicação da Proposição 2.4 proporciona uma existência direta dos chamados pontos de fronteira livre degenerados no contexto do problema do obstáculo instável, onde o decaimento da solução é mais rápido que quadraticamente em um ponto de fronteira livre. Contudo, é importante notar que essa situação não ocorre nos problemas de obstáculo estudados aqui, como será demonstrado no início do próximo capítulo.

Capítulo 3

O problema de obstáculo sem restrição de sinal

Neste capítulo, usando fórmula de monotonicidade de Alt-Caffarelli-Friedman, provaremos a regularidade $C^{1,1}$ do problema

$$\begin{aligned}\Delta u &= \chi_{\Omega(u)} \text{ em } D, \\ \Omega(u) &:= D \setminus \{u = |\nabla u| = 0\}.\end{aligned}\tag{O}$$

A fronteira livre nesse caso é

$$\Gamma(u) = \partial\Omega(u) \cap D.$$

O problema de obstáculo sem sinal, (O), generaliza o problema (2.1) abordado no capítulo anterior. De fato, pelo crescimento quadrático (Teorema 2.1), obtemos, para uma direção arbitrária e e um ponto $x_0 \in D \setminus \{u > 0\} = \{u = 0\}$,

$$|\partial_e u(x_0)| = \left| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + te) - u(x_0)}{t} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{u(x_0 + te)}{t} \right| \leq \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{C_n t^2}{t} \right| = 0.$$

Logo, $\nabla u = 0$ nos pontos onde $u = 0$ e portanto, $\{u > 0\} = D \setminus \{u = |\nabla u| = 0\}$.

Como referência complementar para o problema de obstáculo sem sinal, podemos mencionar [8], que trata das propriedades de soluções para o mesmo tipo de problema. Podemos citar também [9, 21, 24] que abordam modelos mais gerais, apresentando $f\chi_{\Omega(u)}$ no lado direito para certas funções f .

3.1 Fórmula de monotonicidade de Alt-Caffarelli-Friedman

Nesta seção estudaremos a fórmula de monotonicidade de Alt-Caffarelli-Friedman (ACF) e suas generalizações. Como referência complementar, além de [22], usamos também [1, 6, 10].

3.1.1 Funções harmônicas

Antes de estudarmos a fórmula de monotonicidade ACF, iniciaremos com uma versão mais simples da mesma para funções harmônicas e usaremos tal monotonicidade para obter uma estimativa para o gradiente. Para isso, consideramos uma função harmônica u na bola unitária B_1 e definimos

$$J(r, u) = \frac{1}{r^2} \int_{B_r} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{n-2}} dx, \quad 0 < r < 1.$$

Mostraremos que $J(r, u)$ é monótona não decrescente na variável r . Com efeito, sendo u harmônica (e conseqüentemente analítica; ver [12, Teorema 2.2.10]), usando expansão de Taylor, é possível escrever u , localmente, como uma série de polinômios harmônicos homogêneos de mesmo grau, isto é,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x),$$

onde $f_k(x)$ são polinômios harmônicos homogêneos de grau k . Usando a ortogonalidade de polinômios harmônicos homogêneos de graus diferentes, temos que,

$$\begin{aligned} |\nabla u(x)|^2 &= \left| \nabla \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\nabla f_k(x)|^2 \end{aligned}$$

Observação 3.1. Como referência sobre a teoria de polinômios harmônicos homogêneos, ver por exemplo [3]).

Assim, escrevendo $x = \rho\theta$, onde $0 \leq \rho < r$ e $|\theta| = 1$, obtemos

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

$$\begin{aligned}
 J(r, u) &= \frac{1}{r^2} \int_0^r \int_{\partial B_1} \frac{|\nabla u(\rho\theta)|^2}{|\rho\theta|^{n-2}} \rho^{n-1} d\theta d\rho \\
 &= \frac{1}{r^2} \int_0^r \int_{\partial B_1} \rho |\nabla u(\rho\theta)|^2 d\theta d\rho \\
 &= \frac{1}{r^2} \int_0^r \int_{\partial B_1} \rho \sum_{k=1}^{\infty} |\nabla f_k(\rho\theta)|^2 d\theta d\rho,
 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
 J(r, u) &= \frac{1}{r^2} \int_0^r \int_{\partial B_1} \rho \sum_{k=1}^{\infty} |\rho^{k-1} \nabla f_k(\theta)|^2 d\theta d\rho \\
 &= \frac{1}{r^2} \int_0^r \int_{\partial B_1} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{2k-1} |\nabla f_k(\theta)|^2 d\theta d\rho \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{\partial B_1} \frac{1}{r^2} \left(\int_0^r \rho^{2k-1} |\nabla f_k(\theta)|^2 d\rho \right) d\theta \right],
 \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
 J(r, u) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{\partial B_1} \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^{2k}}{2k} |\nabla f_k(\theta)|^2 \right) d\theta \right] \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{r^{2(k-1)}}{2k} \left(\int_{\partial B_1} (|\nabla f_k(\theta)|^2) d\theta \right) \right].
 \end{aligned}$$

Com isso, segue que $J(r, u)$ é monótona não decrescente na variável r . A seguir, mostraremos como produzir uma estimativa interior do gradiente de u usando a fórmula de monotonicidade demonstrada acima. Para isso, inicialmente note que, fazendo $r \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned}
 J(0^+, u) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{r^2} \int_{B_r} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{n-2}} dx \right) \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{r^2} \int_{B_1} \frac{|\nabla u(yr)|^2}{|yr|^{n-2}} r^n dy \right) \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{r^2} \int_{B_1} \frac{|\nabla u(yr)|^2}{|y|^{n-2}} r^2 dy \right) \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\int_{B_1} \frac{|\nabla u(yr)|^2}{|y|^{n-2}} dy \right),
 \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned}
 J(0^+, u) &= \int_{B_1} \left(\lim_{r \rightarrow 0^+} |\nabla u(yr)|^2 \cdot \frac{1}{|y|^{n-2}} dy \right) \\
 &= |\nabla u(0)|^2 \int_{B_1} \frac{1}{|y|^{n-2}} dy \\
 &= C(n) |\nabla u(0)|^2,
 \end{aligned}$$

onde $C(n) = \int_{B_1} \frac{1}{|y|^{n-2}} dy$. Além disso, pela monotonicidade de $J(r, u)$,

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

$$J(0^+, u) \leq J\left(\frac{1}{2}, u\right).$$

Portanto,

$$C(n)|\nabla u(0)|^2 \leq J\left(\frac{1}{2}, u\right).$$

Para obter a estimativa interior para o gradiente, mostraremos que existe uma constante dimensional tal que

$$J\left(\frac{1}{2}, u\right) \leq C_n \|u\|_{L^2(B_1)}^2.$$

Com efeito, considerando a função $|x|^{2-n}$ em $B_{1/2}$, definimos uma extensão suave e não negativa V para B_1 tal que $V \equiv 0$ próximo de ∂B_1 . E dado $\delta > 0$, um número pequeno, definimos também $V_\delta = \min\{V, \delta^{2-n}\}$ (ver Figura 3.1). Além disso, sendo u harmônica, vale a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{u^2}{2}\right) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{u^2}{2}\right) \right] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) = \nabla u \cdot \nabla u + u \Delta u \\ &= |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

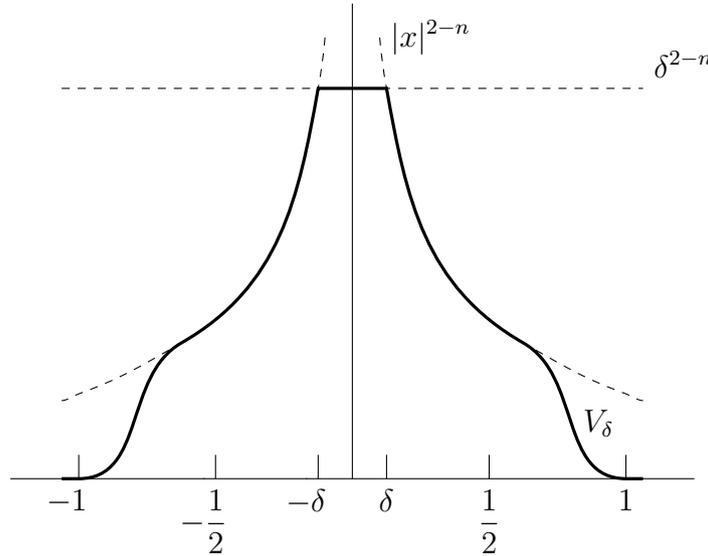


Figura 3.1: Gráfico da função V_δ no perfil unidimensional.

Com isso, temos

$$\int_{B_{1/2} \setminus B_\delta} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{n-2}} dx = \int_{B_{1/2} \setminus B_\delta} \Delta\left(\frac{u^2}{2}\right) V_\delta dx \leq \int_{B_1} \Delta\left(\frac{u^2}{2}\right) V_\delta dx.$$

Usando a integração por partes no lado direito,

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{1/2} \setminus B_\delta} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{n-2}} dx &= - \int_{B_1} \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) \cdot \nabla V_\delta dx + \int_{\partial B_1} V_\delta \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{u^2}{2} \right) dS \\
 &= - \int_{B_1 \setminus B_\delta} \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) \cdot \nabla V_\delta dx - \int_{B_\delta} \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) \cdot \nabla V_\delta dx \\
 &= - \int_{B_1 \setminus B_\delta} \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) \cdot \nabla V_\delta dx - \int_{B_\delta} \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) \cdot \nabla (\delta^{2-n}) dx,
 \end{aligned}$$

integrando novamente,

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{1/2} \setminus B_\delta} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{n-2}} dx &= - \int_{\partial B_1} \frac{u^2}{2} \frac{\partial V_\delta}{\partial \nu} dS - \int_{\partial B_\delta} \frac{u^2}{2} \frac{\partial V_\delta}{\partial \nu} dS + \int_{B_1 \setminus B_\delta} \frac{u^2}{2} \cdot \Delta V dx \\
 &= - \int_{\partial B_\delta} \frac{u^2}{2} \nabla(V_\delta) \cdot \nu dS + \int_{B_1 \setminus B_\delta} \frac{u^2}{2} \cdot \Delta V dx \\
 &= - \int_{\partial B_\delta} \frac{u^2}{2} (n-2) \delta^{1-n} dS + \int_{B_1 \setminus B_\delta} \frac{u^2}{2} \cdot \Delta V dx.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{1/2} \setminus B_\delta} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{n-2}} dx &\leq \int_{B_1 \setminus B_{1/2}} \frac{u^2}{2} \cdot \Delta V dx + \int_{B_{1/2} \setminus B_\delta} \frac{u^2}{2} \cdot \Delta V dx \\
 &\leq \int_{B_1 \setminus B_{1/2}} \frac{u^2}{2} \cdot \Delta V dx \\
 &= C_n \|u\|_{L^2(B_1)}^2.
 \end{aligned}$$

3.1.2 Fórmula de monotonicidade ACF

Teorema 3.1 (Fórmula de monotonicidade Alt-Caffarelli-Friedman (ACF)). *Sejam u_\pm um par de funções contínuas satisfazendo*

$$u_\pm \geq 0, \quad \Delta u_\pm \geq 0, \quad u_+ \cdot u_- = 0 \quad \text{em } B_1$$

e o funcional

$$\begin{aligned}
 \Phi(r, u_+, u_-) &:= J(r, u_+) J(r, u_-) \\
 &= \frac{1}{r^4} \int_{B_r} \frac{|\nabla u_+|^2}{|x|^{n-2}} dx \int_{B_r} \frac{|\nabla u_-|^2}{|x|^{n-2}} dx.
 \end{aligned}$$

Então $r \mapsto \Phi(r, u_+, u_-)$ é não decrescente para $0 < r < 1$.

Demonstração. Para a prova nos referimos ao artigo original, [1]. □

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

Observação 3.2. Note que, sendo u_{\pm} sub-harmônicas e não negativas, pelo Teorema A.4, temos que $u_{\pm} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(B_1)$.

Exemplo 3.3. Cada um dos termos $J(r, u_{\pm})$ podem ser entendidas como uma média ponderada de $|\nabla u_{\pm}|^2$. Então, se $u_{\pm} = k_{\pm}x_1^{\pm}$, temos

$$J(r, u_{\pm}) = \frac{1}{r^2} \int_{B_r} \frac{k_{\pm}^2}{|x|^{n-2}} dx = c_n k_{\pm}^2.$$

Daí,

$$\Phi(r, u_+, u_-) = c_n^2 k_+^2 k_-^2.$$

Em geral, se $S_{\pm} = \partial\{u_{\pm} > 0\}$ são hiper-superfícies que tocam a origem e ν é o vetor normal na origem (ver Figura 3.2), temos

$$J(0^+, u_{\pm}) = C_n (\partial_{\nu} u_{\pm}(0))^2.$$

Em particular, a fórmula de monotonicidade implica que

$$c_n^2 (\partial_{\nu} u_+(0))^2 (\partial_{\nu} u_-(0))^2 \leq \Phi(1/2, u_+, u_-).$$

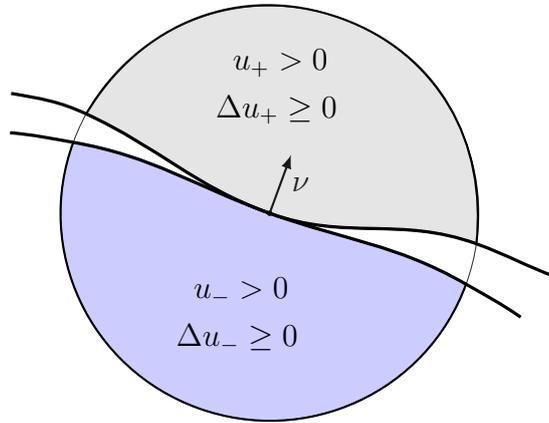


Figura 3.2: Fórmula de monotonicidade ACF.

Exemplo 3.4 (Desigualdade Friedland-Hayman). Seja \mathcal{C} um cone com vértice na origem gerado pelo subconjunto aberto $\Sigma_0 \subset \partial B_1$, isto é,

$$\mathcal{C} = \{r\theta : r > 0, \theta \in \Sigma_0\}.$$

Podemos procurar por funções harmônicas homogêneas, definidas em \mathcal{C} e da forma

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

$$h(r\theta) = r^\alpha f(\theta), \quad \alpha > 1,$$

tais que $h \equiv 0$ em $\partial\mathcal{C}$, encontrando autofunções em Σ_0 . Para isso, note que

$$\begin{aligned} \Delta h &= \partial_{rr}h + \frac{n-1}{r}\partial_r h + \frac{1}{r^2}\Delta_\theta h \\ &= \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}f(\theta) + \frac{n-1}{r}\alpha r^{\alpha-1}f(\theta) + \frac{r^\alpha}{r^2}\Delta_\theta f(\theta) \\ &= r^{\alpha-2}[(\alpha(\alpha-1) + (n-1)\alpha)f(\theta) + \Delta_\theta f(\theta)] \\ &= r^{\alpha-2}[\alpha(\alpha+n-2)f(\theta) + \Delta_\theta f(\theta)], \end{aligned}$$

onde Δ_θ é o Laplaciano esférico (mesmo que o operador Laplace-Beltrami na esfera unitária). Então h é harmônica em \mathcal{C} se, e somente se, $f(\theta)$ é uma autofunção de

$$-\Delta_\theta = \lambda f(\theta) \quad \text{em } \Sigma_0,$$

onde

$$\lambda = \alpha(\alpha+n-2).$$

Note que se $h > 0$ em Σ_0 , então o λ acima será o autovalor principal do laplaciano esférico em Σ_0 e o α correspondente será denotado por $\alpha(\Sigma_0)$ e chamado de constante característica de Σ_0 .

Agora, tomando os conjuntos abertos disjuntos Σ_\pm em ∂B_1 , encontramos seus autovalores principais λ_\pm e suas autofunções f_\pm correspondentes. Daí, podemos obter as funções harmônicas homogêneas

$$u_\pm = r^{\alpha_\pm} f_\pm(\theta) \quad \text{em } \mathcal{C}_\pm = \{r\theta : r > 0, \theta \in \Sigma_\pm\},$$

onde $\alpha_\pm = \alpha(\Sigma_\pm) > 0$ são as constantes características de Σ_\pm satisfazendo

$$\lambda_\pm = \alpha_\pm(\alpha_\pm + n - 2).$$

Se estender-mos u_\pm de \mathcal{C}_\pm para \mathbb{R}^n por zero nos complementares de \mathcal{C}_\pm , respectivamente, pelo Teorema A.5, as funções resultantes serão sub-harmônicas em \mathbb{R}^n .

Assim, tais funções satisfazem as hipóteses da fórmula de monotonicidade ACF. Por outro lado, temos que

$$\Phi(r, u_+, u_-) = Cr^{2(\alpha_+ + \alpha_- - 2)},$$

para algum $C = C(n, f_\pm) > 0$. De fato, fazendo uma mudança de variável,

$$\begin{aligned}
\Phi(r, u_+, u_-) &= \frac{1}{r^4} \int_{B_r} \frac{|\nabla u_+(x)|^2}{|x|^{n-2}} dx \int_{B_r} \frac{|\nabla u_-(x)|^2}{|x|^{n-2}} dx \\
&= \frac{1}{r^4} \int_0^r \int_{\partial B_1} \frac{|\nabla u_+(\rho\theta)|^2}{|\rho\theta|^{n-2}} \rho^{n-1} d\theta d\rho \int_0^r \int_{\partial B_1} \frac{|\nabla u_-(\rho\theta)|^2}{|\rho\theta|^{n-2}} \rho^{n-1} d\theta d\rho \\
&= \frac{1}{r^4} \int_0^r \int_{\partial B_1} \rho |\nabla u_+(\rho\theta)|^2 d\theta d\rho \int_0^r \int_{\partial B_1} \rho |\nabla u_-(\rho\theta)|^2 d\theta d\rho.
\end{aligned}$$

Como, $u_{\pm} = r^{\alpha_{\pm}} f_{\pm}(\theta)$, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(r, u_+, u_-) &= \frac{1}{r^4} \int_0^r \int_{\partial B_1} \rho |\nabla(\rho^{\alpha_+} f_+(\theta))|^2 d\theta d\rho \int_0^r \int_{\partial B_1} \rho |\nabla(\rho^{\alpha_-} f_-(\theta))|^2 d\theta d\rho \\
&= \frac{1}{r^4} \int_0^r \int_{\partial B_1} \rho^{2\alpha_+ - 1} |\nabla f_+(\theta)|^2 d\theta d\rho \int_0^r \int_{\partial B_1} \rho^{2\alpha_- - 1} |\nabla f_-(\theta)|^2 d\theta d\rho \\
&= \frac{1}{r^4} \int_0^r \rho^{2\alpha_+ - 1} d\rho \int_0^r \rho^{2\alpha_- - 1} d\rho \int_{\partial B_1} |\nabla f_+(\theta)|^2 d\theta \int_{\partial B_1} |\nabla f_-(\theta)|^2 d\theta,
\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
\Phi(r, u_+, u_-) &= \frac{r^{2\alpha_+} r^{2\alpha_-}}{r^4 2\alpha_+ 2\alpha_-} \int_{\partial B_1} |\nabla f_+(\theta)|^2 d\theta \int_{\partial B_1} |\nabla f_-(\theta)|^2 d\theta \\
&= \frac{r^{2(\alpha_+ + \alpha_- - 2)}}{2\alpha_+ 2\alpha_-} \int_{\partial B_1} |\nabla f_+(\theta)|^2 d\theta \int_{\partial B_1} |\nabla f_-(\theta)|^2 d\theta \\
&= C r^{2(\alpha_+ + \alpha_- - 2)},
\end{aligned}$$

onde $C = C(f_+, f_-)$. Portanto, a fórmula de monotonicidade, neste caso particular, é equivalente a desigualdade

$$\alpha_+ + \alpha_- \geq 2.$$

3.1.2.1 Redução da fórmula de monotonicidade para a desigualdade Friedland-Hayman

A desigualdade Friedland-Hayman foi estabelecida pela primeira vez por Friedland e Hayman em [15]. No Exemplo 3.4 mostramos o caso particular onde, considerando u_{\pm} funções homogêneas, a desigualdade implica a fórmula de monotonicidade ACF. Mostraremos a seguir que na verdade ela implica a fórmula de monotonicidade para toda u_{\pm} como no Teorema 3.1.

Inicialmente, observemos que se

$$u_{\lambda} = \frac{1}{\lambda} u(\lambda x),$$

então

$$J\left(\frac{r}{\lambda}, u_{\lambda}\right) = J(r, u).$$

Isto significa que o *scaling* funciona linearmente em J . Assim, podemos assumir que

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

u_{\pm} está definida em B_R para algum $R > 1$. Então, para obter a monotonicidade de Φ na variável r , é suficiente mostrar que $\Phi'(r) \geq 0$ para $r = 1$. Para isso, definimos

$$I(r) = I(r, u) := \int_{B_r} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{n-2}} dx.$$

Então

$$J(r, u) = \frac{1}{r^2} I(r, u) \quad \text{e} \quad \Phi(r, u_+, u_-) = \frac{1}{r^4} I(r, u_+) I(r, u_-).$$

Assim, usando a diferenciação direta em r , obtemos

$$\Phi'(r, u_+, u_-) = \frac{1}{r^4} (I'_+(r, u) I_-(r, u) + I_+(r, u) I'_-(r, u)) - \frac{4}{r^5} I_+(r, u) I_-(r, u).$$

Note que

$$I(r) = \int_{B_1} \frac{|\nabla u(ry)|^2}{|ry|^{n-2}} r^n dy = r^2 \int_{B_1} \frac{|\nabla u(ry)|^2}{|y|^{n-2}} dy.$$

Pelo Teorema A.4, temos que $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Sigma)$. Com isso, assumimos que

$$I(1, u_{\pm}) < \infty.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^r \left(\int_{\partial B_\rho} \frac{|\nabla u(x)|^2}{|x|^{n-2}} d\sigma(x) \right) d\rho \\ &= \int_0^r \left(\int_{\partial B_1} \frac{|\nabla u(\rho y)|^2}{\rho^{n-2}} \rho^{n-1} d\sigma(\theta) \right) d\rho \\ &= \int_0^r \rho \left(\int_{\partial B_1} |\nabla u(\rho\theta)|^2 d\sigma(\theta) \right) d\rho, \end{aligned}$$

onde aqui θ denota as coordenadas em ∂B_1 . Logo,

$$I'(r) = \frac{d}{dr} \int_0^r \rho \left(\int_{\partial B_1} |\nabla u(\rho\theta)|^2 d\sigma(\theta) \right) d\rho = r \int_{\partial B_1} |\nabla u(r\theta)|^2 d\sigma(\theta),$$

o que nos dá,

$$I'(r) = r \int_{\partial B_r} |\nabla u(x)|^2 r^{1-n} d\sigma(x) = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B_r} |\nabla u(x)|^2 d\sigma(x).$$

Como $I(r, u_{\pm})$ são funções absolutamente contínuas de r , podemos assumir que $r = 1$ é um ponto de Lebesgue para ambas (ver Definição A.1). Denotamos

$$I_{\pm} = I(1, u_{\pm}) \quad \text{e} \quad I'_{\pm} = I'(1, u_{\pm}).$$

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

Então

$$\Phi'(1) = I'_+ I_- + I_+ I'_- - 4I_+ I_-.$$

Portanto, para que tenhamos $\Phi'(1) \geq 0$, devemos ter

$$\frac{I'_+}{I_+} + \frac{I'_-}{I_-} \geq 4.$$

Para isto, denotando u para u_+ ou u_- , inicialmente mostraremos que

$$I(1, u) \leq \int_{\Sigma} \left(u \partial_r u + \frac{n-2}{2} u^2 \right) d\theta,$$

onde $\Sigma = \{u > 0\} \cap \partial B_1$. Com efeito, seja u_ε uma molificação de u que satisfaz

$$\Delta u_\varepsilon \geq 0 \quad \text{e} \quad u_\varepsilon \geq 0.$$

Como $|\nabla u_\varepsilon|^2 \leq \Delta(u_\varepsilon^2/2)$, temos

$$I(1, u_\varepsilon) = \int_{B_1} \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{|x|^{n-2}} dx \leq \int_{B_1} \Delta \left(\frac{u_\varepsilon^2}{2} \right) |x|^{2-n} dx.$$

Devido o fato de que $|x|^{2-n}$ possui uma singularidade na origem, para $0 < \delta < 1$, escrevemos

$$\int_{B_1} \Delta \left(\frac{u_\varepsilon^2}{2} \right) |x|^{2-n} dx = \int_{B_1 \setminus B_\delta} \Delta \left(\frac{u_\varepsilon^2}{2} \right) |x|^{2-n} dx + \int_{B_\delta} \Delta \left(\frac{u_\varepsilon^2}{2} \right) |x|^{2-n} dx := A_\delta + B_\delta.$$

Estudaremos A_δ e B_δ separadamente. Inicialmente, note que

$$|B_\delta| \leq C \|D^2(u_\varepsilon^2)\|_{L^\infty(B_1)} \int_{B_\delta} |x|^{2-n} dx = C_1 \int_0^\delta r^{2-n} r^{n-1} dr = C_1 \int_0^\delta r dr = C_2 \delta^2.$$

Por outro lado, usando integração por partes,

$$\begin{aligned} A_\delta &= \int_{B_1 \setminus B_\delta} \Delta (|x|^{2-n}) \frac{u_\varepsilon^2}{2} dx + \int_{\partial B_1} |x|^{2-n} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{u_\varepsilon^2}{2} \right) dS - \int_{\partial B_\delta} |x|^{2-n} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{u_\varepsilon^2}{2} \right) dS \\ &\quad - \int_{\partial B_1} \frac{u_\varepsilon^2}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} (|x|^{2-n}) dS + \int_{\partial B_\delta} \frac{u_\varepsilon^2}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} (|x|^{2-n}) dS. \end{aligned}$$

Como $\Delta(|x|^{2-n}) = 0$ para $x \neq 0$, obtemos

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

$$\begin{aligned}
A_\delta &= \int_{\partial B_1} \left[u_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot \nu) - \frac{2-n}{2} u_\varepsilon^2 |x|^{-n} \left(x \cdot \frac{x}{|x|} \right) \right] dS \\
&\quad + \int_{\partial B_\delta} \left[-\delta^{2-n} u_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot \nu) + \frac{2-n}{2} u_\varepsilon^2 |x|^{-n} \left(x \cdot \frac{x}{|x|} \right) \right] dS.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
A_\delta &= \int_{\partial B_1} \left(u_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot \nu) + \frac{n-2}{2} u_\varepsilon^2 \right) dS - \int_{\partial B_\delta} \delta^{2-n} u_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot \nu) dS \\
&\quad - \int_{\partial B_\delta} \frac{n-2}{2} u_\varepsilon^2 \delta^{1-n} dS.
\end{aligned}$$

Com isso, usando o fato de que $\int_{\partial B_\delta} -\frac{n-2}{2} u_\varepsilon^2 \delta^{1-n} dS \leq 0$ para $n \geq 2$, temos

$$A_\delta \leq \int_{\partial B_1} \left(u_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot \nu) + \frac{n-2}{2} u_\varepsilon^2 \right) dS - \int_{\partial B_\delta} \delta^{2-n} u_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot \nu) dS.$$

Como

$$\left| \int_{\partial B_\delta} \delta^{2-n} u_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot \nu) dS \right| \leq C \|\nabla(u_\varepsilon^2)\|_{L^\infty(B_1)} \int_{\partial B_\delta} \delta^{2-n} dS \leq C\delta,$$

fazendo $\delta \rightarrow 0^+$, concluimos que

$$I(1, u_\varepsilon) \leq \int_{\partial B_1} \left(u_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot \nu) + \frac{n-2}{2} u_\varepsilon^2 \right) dS.$$

Usando a transformação radial $x = r\theta$ em B_1 , temos que $\nabla u_\varepsilon \cdot \nu = \partial_r u_\varepsilon$. Com isso, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$ encontramos

$$\begin{aligned}
I(1, u) &= \int_{\partial B_1} \left(u \partial_r u + \frac{n-2}{2} u^2 \right) d\theta \\
&= \int_{\partial B_1 \cap \{u>0\}} \left(u \partial_r u + \frac{n-2}{2} u^2 \right) d\theta + \int_{\partial B_1 \cap \{u=0\}} \left(u \partial_r u + \frac{n-2}{2} u^2 \right) d\theta \\
&= \int_{\Sigma} \left(u \partial_r u + \frac{n-2}{2} u^2 \right) d\theta.
\end{aligned}$$

Uma vez que ∇u pode se dividir em duas partes ortogonais, envolvendo a parte radial r e a tangencial θ , denotadas por $\partial_r u$ e $\nabla_\theta u$, respectivamente, temos

$$|\nabla u(x)|^2 = (\partial_r u(x))^2 + |\nabla_\theta u(x)|^2.$$

Assim, visto que

$$I'(1, u) = \int_{\partial B_1} |\nabla u|^2 d\theta \geq \int_{\Sigma} [(\partial_r u)^2 + |\nabla_\theta u|^2] d\theta,$$

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

então

$$\frac{I'(1, u)}{I(1, u)} \geq \frac{\int_{\Sigma} [(\partial_r u)^2 + |\nabla_{\theta} u|^2] d\theta}{\int_{\Sigma} \left[u \partial_r u + \frac{n-2}{2} u^2 \right] d\theta}.$$

Note também que

$$\lambda \leq \frac{\int_{\Sigma} |\nabla_{\theta} u|^2 d\sigma}{\int_{\Sigma} u^2 d\sigma},$$

onde $\lambda = \lambda(\Sigma)$ é o primeiro autovalor do laplaciano esférico Δ_{θ} em Σ , isto é,

$$\lambda(\Sigma) = \inf_{\substack{v \in W_0^{1,2}(\Sigma) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{\Sigma} |\nabla_{\theta} v|^2 d\sigma}{\int_{\Sigma} v^2 d\sigma}.$$

Agora, note também que, as desigualdades de Hölder e Young (com ε) nos fornecem

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} u \partial_r u d\sigma &\leq \int_{\Sigma} |u| |\partial_r u| d\sigma \\ &\leq \left(\int_{\Sigma} (\partial_r u)^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Sigma} u^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2\alpha} \left(\int_{\Sigma} (\partial_r u)^2 d\sigma \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\int_{\Sigma} u^2 d\sigma \right), \end{aligned}$$

para todo $\alpha > 0$ (que será escolhido de forma conveniente a seguir). Isso nos dá

$$\begin{aligned} \frac{I'(1, u)}{I(1, u)} &\geq \frac{\int_{\Sigma} [(\partial_r u)^2 + \lambda u^2] d\theta}{\frac{1}{2\alpha} \left(\int_{\Sigma} (\partial_r u)^2 d\theta \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\int_{\Sigma} u^2 d\theta \right) + \int_{\Sigma} \frac{n-2}{2} u^2 d\theta} \\ &= \frac{\int_{\Sigma} [(\partial_r u)^2 + \lambda u^2] d\theta}{\frac{1}{2\alpha} \int_{\Sigma} [(\partial_r u)^2 + \alpha(\alpha + n - 2) u^2] d\theta} \\ &= \frac{2\alpha \int_{\Sigma} [(\partial_r u)^2 + \lambda u^2] d\theta}{\int_{\Sigma} [(\partial_r u)^2 + \alpha(\alpha + n - 2) u^2] d\theta}. \end{aligned}$$

Para equilibrar os termos do quociente acima precisamos ter

$$\alpha(\alpha + n - 2) = \lambda.$$

Observe que $\alpha = \alpha(\Sigma)$ é a constante característica de Σ . Com tal escolha, obtemos

$$\frac{I'(1, u)}{I(1, u)} \geq 2\alpha.$$

Daí, se $\Sigma_{\pm} = \partial B_1 \cap \{u_{\pm} > 0\}$ e $\alpha_{\pm} = \alpha(\Sigma_{\pm})$, então

$$\frac{I'_+}{I_+} + \frac{I'_-}{I_-} - 4 \geq 2\alpha_+ + 2\alpha_- - 4 = 2(\alpha_+ + \alpha_- - 2).$$

Sendo Σ_{\pm} abertos disjuntos em ∂B_1 , a condição necessária para obtermos a monotonicidade desejada do funcional Φ seguirá da desigualdade de Friedland-Hayman,

$$\alpha_+ + \alpha_- - 2 \geq 0.$$

3.1.3 Generalizações

Já sabemos que se u é uma função sub-harmônica não negativa em um aberto $D \subset \mathbb{R}^n$, então $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$. Assim, como feito para funções harmônicas em §3.1.1, podemos controlar $J(r, u)$ em termos da norma L^2 de u . De fato, a única diferença é que já iniciamos com a desigualdade $|\nabla u|^2 \leq \Delta(u^2/2)$ ao invés da igualdade. Portanto, temos que

$$J\left(\frac{1}{2}, u\right) \leq C_n \|u\|_{L^2(B_1)}^2.$$

Com isso, a partir da fórmula de monotonicidade ACF, obtemos a seguinte estimativa que será de fundamental importância para a prova da regularidade $C^{1,1}$.

Teorema 3.2 (Estimativa ACF). *Sejam u_{\pm} como no Teorema 3.1. Então para $0 < r \leq \frac{1}{2}$, vale*

$$\Phi(r, u_+, u_-) \leq C_n \|u_+\|_{L^2(B_1)}^2 \|u_-\|_{L^2(B_1)}^2.$$

Demonstração. Usando a monotonicidade de Φ e a observação acima, temos que

$$\Phi(r, u_+, u_-) \leq \Phi(1/2, u_+, u_-) = J(1/2, u_+)J(1/2, u_-) \leq C_n \|u_+\|_{L^2(B_1)}^2 \|u_-\|_{L^2(B_1)}^2,$$

para $0 < r \leq \frac{1}{2}$. □

Embora apenas o Teorema 3.2 seja necessário para a prova da regularidade ótima nas seções seguintes, iremos, para futuras referências, abordar algumas consequências do método.

A seguir, enunciaremos uma generalização da fórmula de monotonicidade ACF, devido a Caffarelli-Jerison-Kenig, [7].

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

Teorema 3.3 (Estimativa Caffarelli-Jerison-Kenig (CJK)). *Sejam u_{\pm} um par de funções contínuas em B_1 satisfazendo*

$$u_{\pm} \geq 0, \quad \Delta u_{\pm} \geq -1, \quad u_+ \cdot u_- = 0 \quad \text{em } B_1.$$

Então, para $0 < r < 1$,

$$\Phi(r, u_+, u_-) \leq C_n (1 + J(1, u_+) + J(1, u_-))^2.$$

Demonstração. Para a prova, referimo-nos ao paper original ([7, Teorema 1.3]). \square

Também precisamos de uma versão em escala do Teorema 3.3.

Teorema 3.4. *Sejam u_{\pm} um par de funções contínuas em B_R satisfazendo*

$$u_{\pm} \geq 0, \quad \Delta u_{\pm} \geq -L, \quad u_+ \cdot u_- = 0 \quad \text{em } B_R.$$

Então, para $0 < \rho < R$,

$$\Phi(\rho, u_+, u_-) \leq C_n (R^2 L^2 + J(R, u_+) + J(R, u_-))^2.$$

Demonstração. Inicialmente, definimos as funções

$$v_{\pm} := \frac{u_{\pm}(Rx)}{R^2 L}.$$

Note que as funções v_{\pm} estão definidas em B_1 e satisfazem as hipóteses do Teorema 3.3, isto é,

$$v_{\pm} \geq 0, \quad \Delta v_{\pm} \geq -1, \quad v_+ \cdot v_- = 0 \quad \text{em } B_1.$$

Com isso, pelo Teorema 3.3,

$$\Phi(r, v_+, v_-) \leq C_n (1 + J(1, v_+) + J(1, v_-))^2, \quad (3.1)$$

para $0 < r < 1$. Além disso, podemos ver que

$$\nabla v_{\pm}(x) = \frac{\nabla u_{\pm}(Rx)}{RL}.$$

Denotando v para representar v_- ou v_+ e u para denotar u_- ou u_+ , pela definição do funcional J , para $0 < r \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
 J(r, v) &= \frac{1}{r^2} \int_{B_r} \frac{|\nabla v(x)|^2}{|x|^{n-2}} dx \\
 &= \frac{1}{r^2} \int_{B_r} \frac{1}{R^2 L^2} \frac{|\nabla u(Rx)|^2}{|Rx|^{n-2} R^{2-n}} dx \\
 &= \frac{1}{R^2 L^2} \frac{1}{(Rr)^2} \int_{B_{Rr}} \frac{|\nabla u(y)|^2}{|y|^{n-2} R^{-n}} R^{-n} dy,
 \end{aligned}$$

daí,

$$J(r, v) = \frac{1}{R^2 L^2} \frac{1}{(Rr)^2} \int_{B_{Rr}} \frac{|\nabla u(y)|^2}{|y|^{n-2}} dy = \frac{1}{R^2 L^2} J(Rr, u).$$

Assim, fazendo $\rho = Rr$, então $0 < \rho \leq R$ e

$$J(r, v) = \frac{1}{R^2 L^2} J(\rho, u). \quad (3.2)$$

Utilizando (3.2) e a definição do funcional Φ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \Phi(\rho, u_+, u_-) &= J(\rho, u_+) J(\rho, u_-) \\
 &= R^4 L^4 J(r, v_+) J(r, v_-) \\
 &= R^4 L^4 \Phi(r, v_+, v_-),
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

para $0 < \rho \leq R$. Combinando (3.1), (3.2) e (3.3), temos

$$\begin{aligned}
 \Phi(\rho, u_+, u_-) &\leq R^4 L^4 C_n (1 + J(1, v_+) + J(1, v_-))^2 \\
 &= R^4 L^4 C_n \left(1 + \frac{1}{R^2 L^2} J(R, u_+) + \frac{1}{R^2 L^2} J(R, u_-) \right)^2 \\
 &= C_n (R^2 L^2 + J(R, u_+) + J(R, u_-))^2,
 \end{aligned}$$

para $0 < \rho < R$. □

Observação 3.5. Se u é uma função contínua não negativa tal que $\Delta u \geq -1$ em B_1 , então

$$J\left(\frac{1}{2}, u\right) \leq C_n \left(1 + \|u\|_{L^2(B_1)}^2\right).$$

De fato, temos que $\Delta u \geq -1$ implica $\Delta(u^2) + 2u \geq 2|\nabla u|^2$. Então, se $\phi \in C_0^\infty(B_{3/4})$ é tal que $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi = 1$ em $B_{1/2}$, obtemos

$$\frac{1}{2} \cdot J\left(\frac{1}{2}, u\right) = 2 \int_{B_{1/2}} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{n-2}} dx \leq 2 \int_{B_1} \frac{\phi |\nabla u|^2}{|x|^{n-2}} dx \leq \int_{B_1} \frac{\phi(\Delta(u^2) + 2u)}{|x|^{n-2}} dx,$$

então,

$$\frac{1}{2} \cdot J\left(\frac{1}{2}, u\right) \leq \int_{B_1} \frac{\phi \Delta(u^2)}{|x|^{n-2}} dx + \int_{B_1} \frac{2\phi u}{|x|^{n-2}} dx. \quad (3.4)$$

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, devido a singularidade da função $|x|^{2-n}$ em $x = 0$, estimaremos

$$\int_{B_1} \frac{\phi \Delta(u^2)}{|x|^{n-2}} dx = \int_{B_\varepsilon} \frac{\phi \Delta(u^2)}{|x|^{n-2}} dx + \int_{B_1 \setminus B_\varepsilon} \frac{\phi \Delta(u^2)}{|x|^{n-2}} dx := I_\varepsilon + J_\varepsilon.$$

Para avaliar I_ε , impondo $\varepsilon < \frac{1}{2}$, note que,

$$|I_\varepsilon| = 2 \left| \int_{B_\varepsilon} \frac{\Delta(u) + |\nabla u|^2}{|x|^{n-2}} dx \right| \leq 2 \int_{B_\varepsilon} |\Delta(u)| |x|^{2-n} dx + 2 \int_{B_\varepsilon} |\nabla u|^2 |x|^{2-n} dx.$$

Como $u \in W^{2,p}(B_1)$, $1 < p < \infty$, tomando $q \in (1, \infty)$ tal que $q = \frac{p}{p-1}$, pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon| &\leq 2 \left(\|\Delta u\|_{L^p(B_\varepsilon)} \| |x|^{2-n} \|_{L^q(B_\varepsilon)} + \|\nabla u\|_{L^p(B_\varepsilon)} \| |x|^{2-n} \|_{L^q(B_\varepsilon)} \right) \\ &\leq C \left(\int_{B_\varepsilon} |x|^{q(2-n)} dx \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

onde $C = C(p, \|\Delta u\|_{L^p(B_\varepsilon)}, \|\nabla u\|_{L^p(B_\varepsilon)})$. Com isso, tomando p suficientemente grande, de modo que $1 < q < \frac{n}{n-2}$, tem-se que

$$|I_\varepsilon| \leq C \left(\int_0^\varepsilon r^{q(2-n)} r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{q}} = C \left(\frac{\varepsilon^{2q-nq+n}}{2q-nq+n} \right)^{\frac{1}{q}} = C \frac{\varepsilon^{\frac{2q-nq+n}{q}}}{(2q-nq+n)^{\frac{1}{q}}}.$$

Por outro lado, utilizando integração por partes, temos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{B_1 \setminus B_\varepsilon} u^2 \Delta(\phi |x|^{2-n}) dx + \int_{\partial B_1} \phi |x|^{2-n} \frac{\partial}{\partial \nu} u^2 d\sigma - \int_{\partial B_1} u^2 \frac{\partial}{\partial \nu} (\phi |x|^{2-n}) d\sigma \\ &\quad + \int_{\partial B_\varepsilon} u^2 \frac{\partial}{\partial \nu} (\phi |x|^{2-n}) d\sigma - \int_{\partial B_\varepsilon} \phi |x|^{2-n} \frac{\partial}{\partial \nu} u^2 d\sigma, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{B_1 \setminus B_\varepsilon} \left(\frac{u^2 \Delta \phi}{|x|^{2-n}} + u^2 \phi \Delta(|x|^{2-n}) + 2u^2 \nabla \phi \cdot \nabla(|x|^{2-n}) \right) dx \\ &\quad + \int_{\partial B_\varepsilon} u^2 \frac{\partial}{\partial \nu} (\phi |x|^{2-n}) d\sigma - \int_{\partial B_\varepsilon} \phi |x|^{2-n} \frac{\partial}{\partial \nu} u^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Daí,

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon &= \int_{B_1 \setminus B_\varepsilon} \frac{u^2 \Delta \phi}{|x|^{n-2}} dx + \int_{B_1 \setminus B_\varepsilon} 2u^2 \nabla \phi \cdot \nabla (|x|^{2-n}) dx - \int_{\partial B_\varepsilon} \phi |x|^{2-n} \frac{\partial}{\partial \nu} u^2 d\sigma \\
&\quad + \int_{\partial B_\varepsilon} u^2 \left(|x|^{2-n} \frac{\partial}{\partial \nu} \phi + \phi \frac{\partial}{\partial \nu} (|x|^{2-n}) \right) d\sigma \\
&= \int_{B_1 \setminus B_\varepsilon} \frac{u^2 \Delta \phi}{|x|^{n-2}} dx + \int_{B_1 \setminus B_\varepsilon} 2u^2 \nabla \phi \cdot \nabla (|x|^{2-n}) dx - \int_{\partial B_\varepsilon} \varepsilon^{2-n} \frac{\partial}{\partial \nu} u^2 d\sigma \\
&\quad + \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{2-n}{2} u^2 \varepsilon^{1-n} d\sigma.
\end{aligned}$$

Como $\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{2-n}{2} u^2 \varepsilon^{1-n} d\sigma \leq 0$ para $n \geq 2$ e

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon} \varepsilon^{2-n} \frac{\partial}{\partial \nu} u^2 d\sigma \right| \leq \int_{\partial B_\varepsilon} 2\varepsilon^{2-n} |u| |\nabla u| d\sigma \leq C\varepsilon,$$

onde $C = C(n, u, \nabla u)$, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\int_{B_1} \frac{\phi \Delta(u^2)}{|x|^{n-2}} dx \leq \int_{B_1} \frac{u^2 \Delta \phi}{|x|^{n-2}} dx + \int_{B_1} 2u^2 \nabla \phi \cdot \nabla (|x|^{2-n}) dx.$$

Assim, substituindo em (3.4), temos

$$\frac{1}{2} \cdot J \left(\frac{1}{2}, u \right) \leq \int_{B_1} \frac{2\phi u + u^2 \Delta \phi}{|x|^{n-2}} dx + \int_{B_1} 2u^2 \nabla \phi \cdot \nabla (|x|^{2-n}) dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot J \left(\frac{1}{2}, u \right) &\leq \int_{B_{3/4}} \frac{2\phi u + u^2 \Delta \phi}{|x|^{n-2}} dx + \int_{B_1 \setminus B_{1/2}} 2u^2 \nabla \phi \cdot \nabla (|x|^{2-n}) dx \\
&\leq C_1 + C_2 \int_{B_1 \setminus B_{1/2}} u^2 dx \\
&\leq C_n \left(1 + \|u\|_{L^2(B_1)}^2 \right),
\end{aligned}$$

onde $C_n = C(n, u, \phi)$. Tal resultado nos leva a seguinte forma da estimativa CJK, semelhante ao Teorema 3.2.

Teorema 3.5. *Sejam u_\pm como no Teorema 3.3 (estimativa CJK). Então, para $0 < r \leq \frac{1}{2}$,*

$$\Phi(r, u_+, u_-) \leq C_n \left(1 + \|u_+\|_{L^2(B_1)}^2 + \|u_-\|_{L^2(B_1)}^2 \right)^2.$$

Demonstração. Considerando a função u restrita a $B_{1/2}$ e combinando a versão em escala da estimativa CJK (Teorema 3.4) com a observação acima, obtemos, para $0 < r \leq \frac{1}{2}$,

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

$$\begin{aligned}
\Phi(r, u_+, u_-) &\leq C_n (4 + J(1/2, u_+) + J(1/2, u_-))^2 \\
&\leq C_n \left(4 + C_n \left(1 + \|u\|_{L^2(B_1)}^2 \right) + C_n \left(1 + \|u\|_{L^2(B_1)}^2 \right) \right)^2 \\
&\leq C_n \left(1 + \|u\|_{L^2(B_1)}^2 + \|u\|_{L^2(B_1)}^2 \right)^2. \quad \square
\end{aligned}$$

Assim como no Teorema 3.3, precisaremos de uma versão em escala dessa estimativa.

Teorema 3.6. *Sejam u_{\pm} como no Teorema 3.4. Então, para $0 < \rho \leq \frac{R}{2}$,*

$$\Phi(\rho, u_+, u_-) \leq C_n \left(R^2 L^2 + \frac{\|u_+\|_{L^2(B_R)}^2 + \|u_-\|_{L^2(B_R)}^2}{R^{n+2}} \right)^2.$$

Demonstração. Considere as funções v_{\pm} , definidas por

$$v_{\pm} := \frac{u_{\pm}(Rx)}{R^2 L}.$$

Já vimos que tais funções satisfazem as hipóteses do Teorema 3.3. Assim, pelo Teorema 3.5,

$$\Phi(r, v_+, v_-) \leq C_n \left(1 + \|v_+\|_{L^2(B_1)}^2 + \|v_-\|_{L^2(B_1)}^2 \right)^2, \quad (3.5)$$

para $0 < r < \frac{1}{2}$. Além disso,

$$\int_{B_R} v(x)^2 dx = \int_{B_R} \frac{u(Rx)^2}{R^4 L^2} dx = \int_{B_1} \frac{u(y)^2 R^{-n}}{R^4 L^2} dy = \int_{B_1} \frac{u(y)^2}{R^{n+4} L^2} dy.$$

Logo,

$$\|v\|_{L^2(B_R)}^2 = \frac{\|u\|_{L^2(B_1)}^2}{R^{n+4} L^2}. \quad (3.6)$$

Utilizando (3.3) e (3.6), para $0 < \rho < \frac{R}{2}$, segue que

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho, u_+, u_-) &= R^4 L^4 \Phi(r, v_+, v_-) \\
&\leq R^4 L^4 C_n \left(1 + \|v_+\|_{L^2(B_1)}^2 + \|v_-\|_{L^2(B_1)}^2 \right)^2 \\
&\leq R^4 L^4 C_n \left(1 + \frac{\|u_+\|_{L^2(B_1)}^2 + \|u_-\|_{L^2(B_1)}^2}{R^{n+4} L^2} \right)^2 \\
&= C_n \left(R^2 L^2 + \frac{\|u_+\|_{L^2(B_1)}^2 + \|u_-\|_{L^2(B_1)}^2}{R^{n+2}} \right)^2. \quad \square
\end{aligned}$$

É possível estabelecer uma afirmação mais forte acerca de $\Phi(r)$ que preserva mais características da fórmula de monotonicidade, desde que se faça uma suposição adicional sobre o crescimento das funções u_{\pm} nas proximidades da origem.

Teorema 3.7. *Suponha que u_{\pm} satisfazem as hipóteses do Teorema 3.3 e assumamos também que existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$u_{\pm}(x) \leq C_0|x|^{\varepsilon} \quad \text{em } B_1.$$

Então existe uma constante $C = C(C_0, n, \varepsilon)$ tal que, para $0 < \rho \leq r < 1$,

$$\Phi(\rho) \leq (1 + r^{\varepsilon}) \Phi(r) + Cr^{\varepsilon}.$$

Em particular, o limite $\lim_{r \rightarrow 0^+} \Phi(r)$ existe.

Demonstração. Ver [7, Teorema 1.6]. □

3.2 Regularidade ótima local

Nesta seção, usaremos a estimativa ACF para provar a regularidade ótima para as funções u soluções do Problema (O). O lema a seguir é um dos ingredientes principais para a prova da regularidade $C^{1,1}$. Ele estabelece que as partes positivas e negativas das derivadas direcionais das soluções de problemas do tipo obstáculo, (O), atendem às hipóteses da estimativa ACF.

Lema 3.8. *Seja $u \in C^1(D)$ satisfazendo (O). Então para qualquer vetor unitário e ,*

$$\Delta(\partial_e u)^{\pm} \geq 0 \quad \text{em } D.$$

Demonstração. Seja e uma direção fixa e consideremos $v = \partial_e u$ e $E := \{v > 0\}$. Note que $E \subset \Omega(u)$ (pois $|\nabla u| = 0$ em $D \setminus \Omega(u)$). Assim, mostrar que $\Delta(v^+) \geq 0$ em D é equivalente a mostrar a seguinte desigualdade:

$$\int_D \nabla(v^+) \nabla \varphi dx \leq 0,$$

para toda $\varphi \in C_0^{\infty}(D)$, com $\varphi \geq 0$. Inicialmente, podemos supor que $\text{supp } \varphi \subset \{v > \delta\}$ com $\delta > 0$. Pela equação do problema (O), temos

$$-\int_D \nabla u \nabla \varphi dx = \int_D \chi_{\Omega(u)} \varphi dx.$$

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

Definimos

$$v_h(x) := \frac{u(x + he) - u(x)}{h}.$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} - \int_D \nabla(v_h) \nabla \varphi dx &= - \int_D \nabla \left(\frac{u(x + he) - u(x)}{h} \right) \nabla \varphi dx \\ &= - \frac{1}{h} \int_D (\nabla u(x + he) \nabla \varphi - \nabla u(x) \nabla \varphi) dx \\ &= - \frac{1}{h} \int_D (\chi_{\Omega(u)}(x + he) - \chi_{\Omega(u)}(x)) \varphi dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

para h suficientemente pequeno. Fazendo $h \rightarrow 0$ e $\delta \rightarrow 0$, tem-se que

$$\int_D \nabla v \nabla \varphi dx = 0,$$

para qualquer $\varphi \geq 0$ com $\text{supp } \varphi \Subset \{v > 0\}$. Com isso, provamos que $\Delta v^+ = 0$ no aberto $E = \{v > 0\}$ no sentido das distribuições. Pelo Teorema A.5, concluímos que $\Delta v^+ \geq 0$ em D . De modo análogo, temos que a mesma desigualdade vale para v^- , isto é, $\Delta v^- \geq 0$ em D . \square

Teorema 3.9 (Regularidade $C^{1,1}$). *Seja $u \in L^\infty(D)$ solução do Problema (O). Então $u \in C_{\text{loc}}^{1,1}(D)$.*

Demonstração. Sejam $K \Subset D$, $x_0 \in K$ um ponto de Lebesgue para D^2u e seja também e uma direção tal que $\partial_e u(x_0) = 0$ (basta tomar uma direção ortogonal ao gradiente de u em x_0). Caso $\nabla u = 0$, podemos tomar qualquer vetor unitário e . Uma observação importante a ser mencionada é que, como $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(D)$ com $p > n$, em qualquer ponto de Lebesgue de D^2u temos que a função u é duas vezes diferenciável (ver [12, Teorema 5.8.5]). Então se $v = \partial_e u$ e $\xi = \nabla v(x_0)$, queremos obter uma estimativa para $\partial_{x_j e} u(x_0) = \partial_{x_j} v(x_0)$, $j = 1, \dots, n$. Por construção, temos que $v(x_0) = 0$ e v é diferenciável em x_0 . Assim, temos a seguinte expansão de Taylor

$$v(x) = \xi \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(|x - x_0|)}{|x - x_0|} = 0.$$

Se $\xi = 0$ não temos o que estimar. Supondo então $\xi \neq 0$, consideremos o cone

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{\xi \cdot x}{|\xi||x|} \geq \frac{1}{2} \right\},$$

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

que tem a propriedade

$$\mathcal{C} \cap B_r(x_0) \subset \{v > 0\} \quad \text{e} \quad -\mathcal{C} \cap B_r(x_0) \subset \{v < 0\},$$

para r suficientemente pequeno. Seja também o *rescaling*

$$v_r(x) = \frac{v(x_0 + rx)}{r}, \quad x \in B_1(x_0).$$

Podemos notar que

$$\lim_{r \rightarrow 0} v_r(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\xi \cdot (x_0 + rx - x_0)}{r} + \frac{o(|x_0 + rx - x_0|)}{r} \right) = \xi \cdot x =: v_0(x),$$

isto é, $v_r(x) \rightarrow v_0(x)$ uniformemente em $B_1(x_0)$. Temos também que $\nabla v_r \rightarrow \nabla v_0$ em $L^p(B_1(x_0))$ para $p > n$. Com efeito, usando o fato que x_0 é um ponto de Lebesgue de ∇v , então

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_1(x_0)} |\nabla v_r(x) - \nabla v_0(x)|^p dx &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_1(x_0)} |\nabla v_r(x) - \xi|^p dx \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_1(x_0)} |\nabla v_r(x) - \nabla v(x_0)|^p dx \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r^n} \int_{B_r(x_0)} |\nabla v_r(y) - \nabla v(x_0)|^p dy \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, denotando $B_r^0 := B_r(x_0)$, vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} c_n |\xi|^4 &= \int_{\mathcal{C} \cap B_1^0} \frac{|\nabla v_0(x)|^2}{|x - x_0|^{n-2}} dx \int_{-\mathcal{C} \cap B_1^0} \frac{|\nabla v_0(x)|^2}{|x - x_0|^{n-2}} dx \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{\mathcal{C} \cap B_1^0} \frac{|\nabla v_r(x)|^2}{|x - x_0|^{n-2}} dx \int_{-\mathcal{C} \cap B_1^0} \frac{|\nabla v_r(x)|^2}{|x - x_0|^{n-2}} dx \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r^4} \int_{\mathcal{C} \cap B_r^0} \frac{|\nabla v(x)|^2}{|x - x_0|^{n-2}} dx \int_{-\mathcal{C} \cap B_r^0} \frac{|\nabla v(x)|^2}{|x - x_0|^{n-2}} dx \right) \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r, x_0, v^+, v^-), \end{aligned}$$

onde Φ é como definida na fórmula de monotonicidade ACF aplicada uma escala para a bola $B_r(x_0)$. Observe que as funções v^+ e v^- podem ser definidas como

$$v^+ = \max\{v, 0\} \quad \text{e} \quad v^- = \max\{-v, 0\}.$$

Seja $\delta = \frac{1}{2} \text{dist}(K, \partial D)$ e $K_\delta = \{x : \text{dist}(x, K) < \delta\}$. Pelo Lema 3.8, temos

$$\Delta v^\pm \geq 0 \quad \text{em} \quad K_\delta.$$

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

Pela estimativa ACF (Teorema 3.2), obtemos

$$c_n |\xi|^4 \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \Phi(r, x_0, v^+, v^-) \leq \Phi(\delta, x_0, v^+, v^-) \leq C_n \|v^+\|_{L^2(D)}^2 \|v^-\|_{L^2(D)}^2.$$

Pela continuidade de v^\pm , temos que $|\xi| \leq C_n$. Lembrando que $\xi = \nabla \partial_e u(x_0)$, temos que

$$|\nabla \partial_e u(x_0)| \leq C_n.$$

Diante do que foi visto, a estimativa para $|D^2 u|$ está sujeita a condição $e \cdot \nabla u(x_0)$, exceto quando $\nabla u(x_0) = 0$, onde podemos tomar $e = e_1, \dots, e_n$. Se $\nabla u(x_0) \neq 0$, podemos escolher o sistema de coordenadas tal que $\nabla u(x_0)$ é paralelo ao vetor e_n . Então, tomando $e = e_1, \dots, e_{n-1}$ na estimativa obtida acima, segue que

$$|\partial_{x_i x_j} u(x_0)| \leq C_n, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Para obter a estimativa na direção e_n usaremos a equação $\Delta u = \chi_{\Omega(u)}$:

$$\begin{aligned} |\partial_{x_n x_n} u(x_0)| &\leq |\Delta u(x_0)| + |\partial_{x_1 x_1} u(x_0)| + \dots + |\partial_{x_{n-1} x_{n-1}} u(x_0)| \\ &\leq 1 + n \cdot C_n = C_n. \end{aligned}$$

A combinação das estimativas obtidas completam a prova do teorema. □

3.3 Regularidade ótima até a fronteira fixa

Nesta seção, mostraremos que a estimativa $C^{1,1}$ pode ser estendida até a fronteira do domínio D (fronteira fixa). Devido à dificuldade técnica do problema, restringiremos nosso estudo ao caso de fronteiras planas e dados de Dirichlet zero. Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos

- $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, identificamos $x = (x', x_n)$;
- $\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}; \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$;
- $B_r^\pm(x) = B_r(x) \cap \mathbb{R}_\pm^n$;
- $B_r^\pm = B_r^\pm(0)$;
- $B'_r = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : |y'| < r\} = B_r \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$.

Lema 3.10. *Seja $u \in L_{\text{loc}}^\infty(B_1^+)$ solução de*

$$\begin{cases} \Delta u = \chi_{\Omega(u)} & \text{em } B_1^+ \\ |\nabla u| = 0 & \text{em } B_1^+ \setminus \Omega(u) \\ u = 0 & \text{em } B_1', \end{cases} \quad (3.7)$$

sendo a última igualdade no sentido do traço de Sobolev. Seja também τ uma direção tangencial a B_1' . Então

$$|\partial_\tau u| \leq C_0 x_n, \quad x \in B_{1/2}^+,$$

para $C_0 = C_n \left(1 + \|u\|_{L^\infty(B_1^+)}\right)$.

Demonstração. Pela estimativa Calderón-Zygmund (Teorema (A.3)),

$$u \in W^{2,p} \left(B_{3/4}^+ \right) \cap C^{1,\alpha} \left(\overline{B_{3/4}^+} \right),$$

para $1 < p < \infty$ e $0 < \alpha < 1$. De fato, para verificar que $u \in C^{1,\alpha} \left(\overline{B_{3/4}^+} \right)$, podemos considerar a extensão de u para B_1 através da reflexão

$$\tilde{u} := \begin{cases} u(x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{se } x_n > 0, \\ -u(x_1, x_2, \dots, -x_n), & \text{se } x_n \leq 0. \end{cases}$$

Observe que \tilde{u} possui laplaciano limitado, logo, por Calderón-Zygmund, $\tilde{u} \in C^{1,\alpha} \left(B_{3/4} \right)$ e com isso, $u \in C^{1,\alpha} \left(\overline{B_{3/4}^+} \right)$. Pelo Lema (3.8),

$$\Delta(\partial_\tau u)^\pm \geq 0 \quad \text{em } B_{3/4}^+.$$

Além disso, considere h uma solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B_{3/4}^+ \\ h = |\partial_\tau u| & \text{em } \partial B_{3/4}^+. \end{cases}$$

Como $\Delta h \leq \Delta(\partial_\tau u)^\pm$ em $B_{3/4}^+$, pelo princípio de comparação,

$$(\partial_\tau u)^\pm \leq h \quad \text{em } B_{3/4}^+. \quad (3.8)$$

Do fato de h ser harmônica, temos a seguinte estimativa:

$$\|\nabla h\|_{L^\infty(B_{1/2}^+)} \leq C \|h\|_{L^\infty(B_{3/4}^+)}.$$

Além disso, do Princípio do Máximo e das estimativas $W^{1,p}$ até a fronteira fixa (ver por

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

exemplo [26]), temos

$$\|h\|_{L^\infty(B_{3/4}^+)} \leq C \|\partial_\tau u\|_{L^\infty(\overline{B_{3/4}^+})} \leq C_n \left(\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + 1 \right).$$

Portanto,

$$\|\nabla h\|_{L^\infty(B_{1/2}^+)} \leq C_n \left(\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + 1 \right) =: C_0.$$

Como $u = 0$ em B_1' , então $h = \partial_\tau u = 0$ em $\partial B_{1/2}^+ \cap B_{1/2} \subset B_1'$. Com isso, para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_{1/2}^+$, denotamos a sua projeção $x' = (x_1, x_2, \dots, 0)$ em $\partial B_{1/2}^+ \cap B_{1/2}$ e pela estimativa do gradiente de h temos,

$$\frac{|h(x) - h(x')|}{|x - x'|} \leq C_0.$$

Sendo $h(x') = 0$ e $|x - x'| = x_n$, obtemos

$$h(x) \leq C_0 x_n, \quad \text{em } B_{1/2}^+.$$

Portanto, da desigualdade obtida acima juntamente com (3.8), segue que

$$|\partial_\tau u| \leq C_0 x_n. \quad \square$$

Lema 3.11. *Seja $u \in L_{\text{loc}}^\infty(B_1^+)$ satisfazendo (3.7), $x^0 \in B_{1/4}^+$ e $r = \frac{1}{2} \text{dist}(x_0, B_1') = \frac{1}{2}(x_0)_n$. Então*

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r(x^0)} \frac{|D^2 u|^2}{|x - x^0|^{n-2}} dx \leq C, \quad (3.9)$$

onde $C = C_n \left(1 + \|u\|_{L^\infty(B_1^+)}^2 \right)$.

Demonstração. Da equação $\Delta u = \chi_{\Omega(u)}$, temos

$$|\partial_{x_n x_n} u| \leq 1 + |\partial_{x_1 x_1} u| + \dots + |\partial_{x_{n-1} x_{n-1}} u|,$$

logo,

$$\begin{aligned} |\partial_{x_n x_n} u|^2 &\leq n(1 + |\partial_{x_1 x_1} u|^2 + \dots + |\partial_{x_{n-1} x_{n-1}} u|^2) \\ &\leq n(1 + |\nabla(\partial_{x_1} u)|^2 + \dots + |\nabla(\partial_{x_{n-1}} u)|^2). \end{aligned}$$

Usando que $|\partial_{x_i x_n} u|^2 \leq |\nabla(\partial_{x_i} u)|^2$, juntamente com a desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} |D^2 u|^2 &= |\nabla(\partial_{x_1} u)|^2 + \dots + |\nabla(\partial_{x_{n-1}} u)|^2 + |\nabla(\partial_{x_n} u)|^2 \\ &\leq C_n (1 + |\nabla(\partial_{x_1} u)|^2 + \dots + |\nabla(\partial_{x_{n-1}} u)|^2). \end{aligned}$$

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

Assim, como

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r(x_0)} \frac{dx}{|x - x_0|^{n-2}} < \infty,$$

para provar o lema, é suficiente mostrar que

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r(x_0)} \frac{|\nabla(\partial_\tau u)|^2}{|x - x_0|^{n-2}} dx \leq C,$$

para qualquer direção τ tangencial a B'_1 . Afirmamos que $v = \partial_\tau u$ satisfaz

$$\int_{B_1^+} \nabla v \nabla \varphi dx = \int_{B_1^+} \chi_{\Omega(u)} \partial_\tau \varphi dx, \quad (3.10)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(B_1^+)$. De fato, inicialmente note que

$$\nabla(\partial_\tau u) \nabla \varphi = (\partial_{x_1 \tau} u)(\partial_{x_1} \varphi) + \cdots + (\partial_{x_n \tau} u)(\partial_{x_n} \varphi).$$

Se $\varphi \in C_0^\infty(B_1^+)$, então $\partial_{x_i} \varphi \in C_0^\infty(B_1^+)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, escrevendo $(\partial_{x_i \tau} u)(\partial_{x_i} \varphi) = \partial_\tau(\partial_{x_i} u)(\partial_{x_i} \varphi)$ e usando integração por partes, temos

$$\int_{B_1^+} \partial_\tau(\partial_{x_i} u)(\partial_{x_i} \varphi) dx = - \int_{B_1^+} (\partial_{x_i} u) \partial_\tau(\partial_{x_i} \varphi) dx = - \int_{B_1^+} (\partial_{x_i} u) \partial_{x_i}(\partial_\tau \varphi) dx,$$

em que usamos, na primeira igualdade, o fato de que $\partial_{x_i} \varphi \equiv 0$ em ∂B_1^+ . Segue então que

$$\int_{B_1^+} \nabla(\partial_\tau u) \nabla \varphi dx = - \int_{B_1^+} \nabla u \nabla(\partial_\tau \varphi) dx = \int_{B_1^+} \chi_{\Omega(u)} \partial_\tau \varphi dx,$$

onde na última igualdade, usamos o fato de que $\partial_\tau \varphi$ é uma função teste em B_1^+ . Portanto,

$$\int_{B_1^+} \nabla v \nabla \varphi dx = \int_{B_1^+} \chi_{\Omega(u)} \partial_\tau \varphi dx,$$

vale para toda $\varphi \in C_0^\infty(B_1^+)$. Como C_0^∞ é denso em $W_0^{1,2}$, então a igualdade é válida para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(B_1^+)$. Com isso, escolha a função teste $\varphi = v \hat{G} \psi^2$, onde \hat{G} é uma truncção da solução fundamental em x_0 , isto é,

$$\hat{G}(x) = \min\{c_n |x - x_0|^{2-n}, c_n \delta^{2-n}\},$$

para algum $\delta > 0$ pequeno e $\psi \in C_0^\infty(B_{2r}(x_0))$ é uma função corte que satisfaz

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad |\nabla \psi| \leq \frac{C_n}{r}, \quad |\nabla D^2 \psi| \leq \frac{C_n}{r^2}$$

e $\psi = 1$ em $B_r(x_0)$. Substituindo φ em (3.10), obtemos

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

$$\int_{B_1^+} \nabla v \left[(\nabla v) \hat{G} \psi^2 + v \nabla (\hat{G} \psi^2) \right] dx = \int_{B_1^+} \chi_{\Omega(u)} \left[(\partial_\tau v) \hat{G} \psi^2 + v \partial_\tau (\hat{G} \psi^2) \right] dx.$$

Portanto, usando o fato de que $v \nabla v = \nabla(v^2/2)$,

$$\begin{aligned} \int_{B_1^+} |\nabla v|^2 \hat{G} \psi^2 dx &= - \int_{B_1^+} \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) \nabla (\hat{G} \psi^2) dx + \int_{B_1^+} \chi_{\Omega(u)} (\partial_\tau v) \hat{G} \psi^2 dx \\ &\quad + \int_{B_1^+} \chi_{\Omega(u)} v \partial_\tau (\hat{G} \psi^2) dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Note que, pelo Lema 3.10, $|v| \leq C_n x_n$ em $B_{1/2}^+$ (do Lema 3.10 consideramos $C_n = C(\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + 1)$). Além disso, se $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_{2r}(x_0)$, então $x_n < 4r$. Logo, como $r = \frac{1}{2}(x_0)_n$,

$$|v| < 4C_n r \quad \text{em } B_{2r}(x_0).$$

Para simplificar as notações, denotaremos por B_r^0 a bola aberta de raio r centrada em x_0 . Então, supondo $\delta < r$, temos as seguintes estimativas para I_1 , I_2 e I_3 em B_{2r}^0 :

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_{B_{2r}^0 \setminus B_\delta^0} \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) \nabla (\hat{G} \psi^2) dx - \int_{B_\delta^0} \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) \nabla (\hat{G} \psi^2) dx \\ &= \int_{B_{2r}^0 \setminus B_\delta^0} \frac{v^2}{2} \Delta (\hat{G} \psi^2) dx - \int_{\partial B_{2r}^0} \frac{v^2}{2} \partial_\nu (\hat{G} \psi^2) dx + \int_{\partial B_\delta^0} \frac{v^2}{2} \partial_\nu (\hat{G} \psi^2) dx \\ &= \int_{B_{2r}^0 \setminus B_\delta^0} \frac{v^2}{2} \left(\psi^2 \Delta \hat{G} + \hat{G} \Delta \psi^2 + 2 \nabla \hat{G} \nabla \psi^2 \right) dx - \frac{n-2}{2} \int_{\partial B_\delta^0} v^2 \delta^{1-n} dx, \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{B_{2r}^0 \setminus B_\delta^0} \frac{v^2}{2} \left(\hat{G} \Delta \psi^2 + 2 \nabla \hat{G} \nabla \psi^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_{2r}^0 \setminus B_r^0} v^2 \left[\hat{G} (2\psi \Delta \psi + 2|\nabla \psi|^2) + 4 \nabla \hat{G} \psi \nabla \psi \right] dx \\ &\leq C_n \|v\|_{L^\infty(B_{2r}(x_0))}^2 < C_n r^2. \end{aligned}$$

Usando o fato de que

$$|\chi_{\Omega(u)} \partial_\tau v| \leq \frac{1}{2} (|\chi_{\Omega(u)}|^2 + |\partial_\tau v|^2) \leq \frac{1}{2} (1 + |\nabla v|^2),$$

então

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{2} \int_{B_{2r}^0} \hat{G} \psi^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_{2r}^0} |\nabla v|^2 \hat{G} \psi^2 dx \\ &\leq C_n r^2 + \frac{1}{2} \int_{B_{2r}^0} |\nabla v|^2 \hat{G} \psi^2 dx. \end{aligned}$$

Por fim,

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{B_{2r}^0 \setminus B_\delta^0} \chi_{\Omega(u)} v \partial_\tau (\hat{G} \psi^2) dx + \int_{B_\delta^0} \chi_{\Omega(u)} v \partial_\tau (\hat{G} \psi^2) dx \\
&= \int_{B_{2r}^0 \setminus B_\delta^0} \chi_{\Omega(u)} v \psi^2 \partial_\tau \hat{G} dx + \int_{B_{2r}^0 \setminus B_r^0} \chi_{\Omega(u)} v \hat{G} \partial_\tau \psi^2 dx \\
&\leq \int_{B_{2r}^0 \setminus B_\delta^0} |v| |\nabla \hat{G}| dx + 2 \int_{B_{2r}^0 \setminus B_r^0} |v| |\hat{G}| |\nabla \psi| dx \\
&\leq C_n r \|v\|_{L^\infty(B_{2r}(x_0))} < C_n r^2.
\end{aligned}$$

Combinando as estimativas, obtemos

$$\int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla v|^2 \hat{G} \psi^2 dx < C_n r^2.$$

Como

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla v|^2 \hat{G} dx = \int_{B_r(x_0)} |\nabla v|^2 \hat{G} \psi^2 dx \leq \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla v|^2 \hat{G} \psi^2 dx,$$

fazendo $\delta \rightarrow 0$, concluímos que

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r(x_0)} \frac{|\nabla(\partial_\tau u)|^2}{|x - x_0|^{n-2}} dx < C.$$

O que prova o lema. □

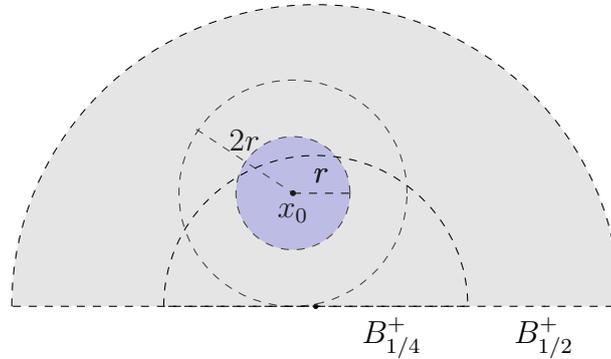


Figura 3.3: Representação do Lema 3.11.

Teorema 3.12 (Regularidade $C^{1,1}$ até a fronteira fixa). *Seja $u \in L^\infty(B_1^+)$ satisfazendo (3.7). Então $u \in C^{1,1}(B_{1/4}^+ \cup B'_{1/4})$ e*

$$\|D^2 u\|_{L^\infty(B_{1/4}^+)} \leq C_n \left(1 + \|u\|_{L^\infty(B_1^+)}\right).$$

Demonstração. Seja $x_0 \in B_{1/4}^+$ um ponto de Lebesgue para $D^2 u$ e seja também e uma direção tal que $\partial_e u(x_0) = 0$. Argumentando como na prova do Teorema 3.9 temos que se $v = \partial_e u$ e $\xi = \nabla v(x_0)$, obtemos a estimativa

3. O problema de obstáculo sem restrição de sinal

$$c_n^2 |\xi|^4 \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \Phi(\rho, v^+, v^-),$$

para $\rho > 0$ suficientemente pequeno e as funções v^+ e v^- podem ser definidas como

$$v^+ = \max\{v, 0\} \quad \text{e} \quad v^- = \max\{-v, 0\}.$$

Com base no que foi feito no Lema 3.11,

$$J(\delta, v^\pm) \leq C_n$$

para $\delta = \frac{1}{2} \text{dist}(x_0, B'_1) = \frac{1}{2}(x_0)_n$ e $C_n = C \left(1 + \|u\|_{L^\infty(B_1^+) }^2\right)$. Do Lema 3.8, temos

$$\Delta v^\pm \geq 0 \quad \text{em} \quad B_{1/4}^+.$$

Assim, pela fórmula de monotonicidade ACF (Teorema 3.2),

$$c_n^2 |\xi|^4 \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \Phi(\rho, v^+, v^-) \leq \Phi(\delta, v^+, v^-) = J(\delta, v^+) J(\delta, v^-) \leq C_n \left(1 + \|u\|_{L^\infty(B_1^+) }^2\right)^2.$$

Obtemos então, $|\xi| \leq C_n$ independente da distância entre x_0 e B'_1 . Argumentando exatamente como no Teorema 3.9 concluímos que $u \in C^{1,1}(B_{1/4}^+ \cup B'_{1/4})$ e

$$\|D^2 u\|_{L^\infty(B_{1/4}^+)} \leq C_n \left(1 + \|u\|_{L^\infty(B_1^+) }^2\right). \quad \square$$

Capítulo 4

Medida de Hausdorff

$(n - 1)$ -dimensional da fronteira livre

Neste capítulo, estabelecemos algumas características fundamentais das soluções do nosso modelo (O). Demonstramos a propriedade de não degenerescência das soluções, indicando que, de certa forma, as soluções u não diminuem mais rapidamente do que de forma quadrática nas proximidades de pontos pertencentes à fronteira livre. Utilizamos essa propriedade para mostrar que a fronteira livre $\Gamma(u)$ possui medida de Lebesgue igual a zero. Mostramos também que $\Gamma(u)$ é localmente um conjunto de medida de Hausdorff finita $(n - 1)$ -dimensional em D . Em seguida, introduzimos o método de *rescalings* e *blowups*. Por fim, apresentamos a fórmula de monotonicidade de Weiss, outra ferramenta útil no estudo de *blowups* no contexto do nosso problema.

4.1 Estimativas de não degenerescência

Pelo que foi visto nos capítulos anteriores, para soluções do problema (O), temos o crescimento quadrático

$$\sup_{B_r(x_0)} u \leq u(x_0) + \frac{M}{2}r^2,$$

para qualquer $x_0 \in \Gamma(u)$, desde que $B_r(x_0) \subset D$, onde $M = \|D^2u\|_{L^\infty(D)}$. O Lema a seguir trás a ideia principal da demonstração da não degenerescência do problema (O).

Lema 4.1. *Seja u satisfazendo $\Delta u = 1$ em B_R . Então*

$$\sup_{\partial B_r} u \geq u(0) + \frac{r^2}{2n}, \quad 0 < r < R.$$

Demonstração. Para a prova, consideraremos a função auxiliar

$$w(x) = u(x) - \frac{|x|^2}{2n}$$

em B_R . Como $\Delta(|x|^2/2n) = 1$, então w é harmônica. Assim, pelo princípio do máximo para funções harmônicas, obtemos

$$u(0) = w(0) \leq \sup_{\partial B_r} w = \sup_{\partial B_r} u - \frac{r^2}{2n}.$$

Portanto,

$$\sup_{\partial B_r} u \geq u(0) + \frac{r^2}{2n}. \quad \square$$

Lema 4.2 (Não degenerescência do problema (O)). *Seja u uma solução do problema (O) em D . Então*

$$\sup_{\partial B_r(x_0)} u \geq u(x_0) + \frac{r^2}{8n}$$

para qualquer $x_0 \in \overline{\Omega(u)}$, onde $B_r(x_0) \Subset D$.

Demonstração. Inicialmente, supondo que $x_0 \in \Omega(u)$ com $u(x_0) > 0$, consideraremos a função auxiliar

$$w(x) = u(x) - u(x_0) - \frac{|x - x_0|^2}{2n}.$$

Temos que w é harmônica em $B_r(x_0) \cap \Omega(u)$. Além disso, como $w(x_0) = 0$, segue do princípio do máximo que

$$\sup_{\partial(B_r(x_0) \cap \Omega)} w \geq 0.$$

Note que, como $\partial(B_r(x_0) \cap \Omega) = (\partial B_r(x_0) \cap \Omega) \cup (B_r(x_0) \cap \partial\Omega) \cup (\partial B_r(x_0) \cap \partial\Omega)$ e

$$w(x) = -u(x_0) - \frac{|x - x_0|^2}{2n} < 0 \quad \text{em } \partial\Omega(u),$$

visto que $u(x) = 0$ em $\partial\Omega(u)$, então o máximo é atingido em $\partial B_r(x_0) \cap \Omega$, isto é,

$$\sup_{\partial B_r(x_0) \cap \Omega} w \geq 0.$$

O que nos dá

$$\sup_{\partial B_r(x_0)} w = \sup_{\partial B_r(x_0)} u - u(x_0) - \frac{r^2}{2n} \geq 0.$$

Logo,

$$\sup_{\partial B_r(x_0)} u \geq u(x_0) + \frac{r^2}{2n} > u(x_0) + \frac{r^2}{8n}.$$

Caso $x_0 \in \Omega(u)$ com $u(x_0) \leq 0$, ao analisar u na bola $B_{r/2}(x_0)$ teremos duas possibilidades: u é positiva em algum ponto de $B_{r/2}(x_0)$ ou $u(x) < 0$ para todo $x \in B_{r/2}(x_0)$.

Com efeito, supondo que existe $y \in B_{r/2}(x_0)$ tal que $u(y) > 0$ (e com isso $y \in \Omega(u)$), então, pelo que foi visto,

$$\sup_{\partial B_r(x_0)} u \geq \sup_{B_r(x_0)} u \geq \sup_{B_{r/2}(y)} u \geq u(y) + \frac{(r/2)^2}{2n} \geq u(x_0) + \frac{r^2}{8n}.$$

Sendo a primeira desigualdade devida ao fato que, por ser solução do problema (O), u é sub harmônica em $B_r(x_0)$. No caso em que não existe $y \in B_{r/2}(x_0)$ com tal propriedade, temos que $u \leq 0$ em $B_{r/2}(x_0)$. Afirmamos que $u < 0$ em $B_{r/2}(x_0)$. De fato, se u atinge 0 (valor máximo) em algum ponto de em $B_{r/2}(x_0)$, como u é sub harmônica, pelo Princípio do Máximo Forte, obtemos que u é identicamente nula em $B_{r/2}(x_0)$, o que é um absurdo, pois $u(x_0) < 0$. Com isso, temos que $B_{r/2}(x_0) \subset \Omega(u)$ e portanto, $\Delta u = 1$ em $B_{r/2}(x_0)$. Com base no Lema 4.1, concluímos que

$$\sup_{\partial B_r(x_0)} u \geq \sup_{B_r(x_0)} u \geq \sup_{B_{r/2}(x_0)} u \geq u(x_0) + \frac{r^2}{8n}.$$

O que encerra a prova do resultado sempre que $x_0 \in \Omega(u)$. Por fim, analisando o caso em que $x_0 \in \partial\Omega(u)$, consideraremos uma sequência de pontos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\Omega(u)$ tal que $x_k \rightarrow x_0$ e definimos $r_k := r - |x_k - x_0|$. Tomando k suficientemente grande (de modo que tenhamos $r_k > 0$ ou equivalentemente, que os termos da sequência pertençam a $B_r(x_0)$), temos que $B_{r_k}(x_k) \subset B_r(x_0) \Subset D$. Assim,

$$\sup_{B_{r_k}(x_k)} u \geq u(x_k) + \frac{r_k^2}{8n},$$

e usando a continuidade de u , obtemos o resultado desejado fazendo $k \rightarrow \infty$. \square

Corolário 4.3 (Não degenerescência do gradiente). *Nas mesmas hipóteses do Lema 4.2, vale a seguinte desigualdade:*

$$\sup_{B_r(x_0)} |\nabla u| \geq c_0 r,$$

onde c_0 é uma constante positiva que depende somente de n .

Demonstração. Do Lema 4.2, temos que

$$\sup_{\partial B_r(x_0)} \left(\frac{u - u(x_0)}{r} \right) \geq \frac{r}{8n}.$$

Por outro lado, do Teorema do Valor Médio, [20], obtemos para $x \in \partial B_r(x_0)$

$$\left| \frac{u(x) - u(x_0)}{r} \right| \leq \frac{|\nabla u(\theta)| |x - x_0|}{r} = |\nabla u(\theta)|,$$

onde $\theta = (1 - t) \cdot x + t \cdot x_0$ com $0 < t < 1$. Com isso, $\theta \in B_r(x_0)$ e concluímos que

$$\sup_{B_r(x_0)} |\nabla u| \geq \sup_{\partial B_r(x_0)} |\nabla u(\theta)| \geq \sup_{\partial B_r(x_0)} \left| \frac{u - u(x_0)}{r} \right| \geq \frac{r}{8n}. \quad \square$$

4.1.1 Medida de Lebesgue da fronteira livre

Antes de obtermos os resultados sobre a medida de Lebesgue da fronteira livre, apresentamos a definição de porosidade de um conjunto mensurável e relacionamos esse conceito com a medida de Lebesgue de tal conjunto.

Definição 4.1. Dizemos que um conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$ é *poroso* com uma porosidade constante $0 < \delta < 1$ se toda bola $B_r(x)$ contém uma bola menor $B_{\delta r}(y)$ tal que

$$B_{\delta r}(y) \subset B_r(x) \setminus E.$$

Além disso, dizemos também que E é *localmente poroso* em um conjunto aberto D se $E \cap K$ é poroso (não necessariamente com a mesma constante de porosidade) para qualquer $K \Subset D$.

Observação 4.2. A densidade superior de Lebesgue de um conjunto poroso E em um ponto x_0 , definida por

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{|E \cap B_r(x_0)|}{|B_r|}$$

é menor do que 1. De fato, como E é poroso, existe $0 < \delta < 1$ e $y \in B_r(x_0)$ tal que $B_{\delta r}(y) \subset B_r(x_0) \setminus E$. Assim, como $|E \cap B_r(x_0)| = |B_r(x_0)| - |B_r(x_0) \setminus E|$, temos

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{|E \cap B_r(x_0)|}{|B_r|} \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{|B_r(x_0)| - |B_{\delta r}(y)|}{|B_r|} = 1 - \delta^n < 1.$$

Proposição 4.4. *Sejam $E, D \subset \mathbb{R}^n$, sendo D um aberto. Então valem as seguintes afirmações:*

- (a) *Se E é poroso, então $|E| = 0$.*
- (b) *Se E é localmente poroso em D , então $|E \cap D| = 0$.*

Demonstração. Supondo que E é poroso, pelo Teorema de Densidade de Lebesgue ([19, Teorema 2.2.1]), temos que a densidade de Lebesgue é 1 para quase todos os pontos de E . Além disso, com base em [17, Teorema 14.3.2], o conjunto de pontos de E onde a densidade não é 1 tem medida nula. Assim, podemos escrever $E = A \cup Z$, onde

a densidade de E existe e é igual a 1 em todos os pontos de A e $|Z| = 0$. Porém, pela Observação 4.2, concluimos que $A = \emptyset$ e portanto, $|E| = 0$. Se E for localmente poroso, usando o mesmo argumento do primeiro caso, obtemos que $|E \cap K| = 0$ para qualquer $K \in D$. Para mostrar que $|E \cap D| = 0$, note que, como D é aberto, podemos considerar para cada $a \in D$ a bola $B_a = B_{r(a)}(a)$ tal que $B_a \in D$. Assim, $D = \bigcup_{a \in D} B_a$. Pelo Teorema de Lindelöf, [20], D admite uma subcobertura enumerável $D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{a_k}$.

Como $|E \cap B_{a_k}| = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos que

$$|E \cap D| = \left| E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{a_k} \right| = \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap B_{a_k}) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E \cap B_{a_k}| = 0. \quad \square$$

Lema 4.5 (Porosidade da fronteira livre). *Seja u solução do problema (O) em D . Então $\Gamma(u) = \partial\Omega \cap D$ é localmente poroso em D .*

Demonstração. Seja $K \in D$, $x_0 \in \Gamma(u)$ e $B_r(x_0) \subset K$. Como o gradiente de u é contínuo ($u \in C^{1,1}$), usando a não degenerescência do gradiente (Corolário 4.3), existe $y \in \overline{B_{r/2}(x_0)}$ tal que

$$|\nabla u(y)| \geq \frac{c_0}{2}r.$$

Além disso, sendo ∇u lipschitz, para $z \in B_{\delta r}(y)$ (onde δ será escolhido de forma conveniente), temos que

$$|\nabla u(y)| - |\nabla u(z)| \leq |\nabla u(y) - \nabla u(z)| \leq C|z - y| < C\delta r.$$

Logo,

$$\frac{c_0}{2}r - C\delta r \leq |\nabla u(y)| - C\delta r < |\nabla u(z)|.$$

Tomando $\delta = \frac{c_0}{4C}$, obtemos

$$\inf_{B_{\delta r}(y)} |\nabla u(z)| \geq \frac{c_0}{4}r > 0.$$

Isso implica que

$$B_{\tilde{\delta}r} \subset B_r(x_0) \cap \Omega \subset B_r(x_0) \setminus \Gamma,$$

onde $\tilde{\delta} = \min\{\delta, 1/2\}$. Portanto, a condição de porosidade é satisfeita para qualquer bola centrada em $\Gamma(u)$ e contida em K . Isso é suficiente para concluir que $\Gamma(u) \cap K$ é poroso. Assim, $\Gamma(u)$ é localmente poroso em D . \square

Corolário 4.6 (Medida de Lebesgue de Γ). *Seja u solução do problema (O) em D . Então $\Gamma(u)$ tem medida de Lebesgue zero.*

Demonstração. A demonstração segue diretamente do Lema 4.5 e da Proposição 4.4. \square

Sobre a densidade do conjunto $\Omega(u)$ temos o seguinte resultado:

Lema 4.7 (Densidade de Ω). *Seja u solução do problema (O) em D e $x_0 \in \Gamma(u)$. Então*

$$\frac{|B_r(x_0) \cap \Omega(u)|}{|B_r|} \geq \beta,$$

onde $B_r(x_0) \subset D$ e β depende somente de $\|D^2u\|_{L^\infty(D)}$ e da dimensão.

Demonstração. Na demonstração do Lema 4.5 mostramos que para cada $x_0 \in \Gamma(u)$ é possível obter $y \in \overline{B_{r/2}(x_0)}$ e $0 < \tilde{\delta} < 1$ tal que $B_{\tilde{\delta}r}(y) \subset B_r(x_0) \cap \Omega(u)$. Logo,

$$\frac{|B_r(x_0) \cap \Omega(u)|}{|B_r|} \geq \frac{|B_{\tilde{\delta}r}(y)|}{|B_r|} = \tilde{\delta}^n =: \beta. \quad \square$$

4.2 Medida de Hausdorff da fronteira livre

Na seção anterior, foi demonstrado que a porosidade da fronteira livre implica que sua medida de Lebesgue é nula. Agora, vamos mostrar que tal propriedade possui relação com a dimensão de Hausdorff da fronteira livre, que é igual a $n - 1$.

Definição 4.3 ([13]). Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$ e $0 < \delta \leq \infty$, escrevemos

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam } C_j \leq \delta \right\},$$

onde

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)}.$$

Além disso, definimos

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

Chamamos \mathcal{H}^s de *medida de Hausdorff s -dimensional* em \mathbb{R}^n .

Observação 4.4. \mathcal{H}^s é uma medida regular de Borel em \mathbb{R}^n , para todo $0 \leq s < \infty$; ver [13, Teorema 2.1].

Observação 4.5. A condição $\delta \rightarrow 0$ faz com que as coberturas se ajustem à “geometria local” do conjunto A .

Observação 4.6. Na definição,

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \quad (0 < s < \infty)$$

é a *função Gamma*.

Observação 4.7. Note que

$$|B_r| = \alpha(n)r^n,$$

onde $B_r \subset \mathbb{R}^n$ é a bola aberta de raio r centrada na origem.

Lema 4.8 (Medida de Hausdorff $(n - 1)$ -dimensional de Γ). *Seja u uma solução do problema do obstáculo (O) em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Então,*

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma(u) \cap K) < \infty,$$

para todo $K \Subset D$.

Demonstração. Inicialmente, definimos

$$v_i := \partial_{x_i} u, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad E_\varepsilon := \{|\nabla u| < \varepsilon\} \cap \Omega(u).$$

Notemos que

$$1 = |\Delta u|^2 \leq C_n \sum_{i=1}^n |\nabla v_i|^2 \quad \text{em} \quad \Omega(u).$$

Então, para um conjunto $K \Subset D$ arbitrário, temos

$$|K \cap E_\varepsilon| = \int_{K \cap E_\varepsilon} dx \leq C_n \int_{K \cap E_\varepsilon} \sum_{i=1}^n |\nabla v_i|^2 dx \leq C_n \sum_{i=1}^n \int_{K \cap \{|v_i| < \varepsilon\} \cap \Omega} |\nabla v_i|^2 dx, \quad (4.1)$$

onde a segunda desigualdade vem do fato de que

$$\{|\nabla u| < \varepsilon\} \subset \{|v_i| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n\} = \{|\nabla u| < \varepsilon\sqrt{n}\}.$$

Para estimar o lado direito da desigualdade, usaremos o Lema 3.8 que nos dá

$$\int_D \nabla(v_i^\pm) \nabla \varphi dx \leq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(D)$ e, por densidade, para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(D)$. Assim, para obter a estimativa desejada, escolheremos a função teste $\varphi = \psi_\varepsilon(v_i^\pm)\phi$, onde

$$\psi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ \varepsilon^{-1}t, & \text{se } 0 < t < \varepsilon, \\ 1, & \text{se } t \geq \varepsilon \end{cases}$$

e $\phi \in C_0^\infty(D)$ é uma função corte não negativa tal que $\phi = 1$ em K . Como

$$\frac{\partial(\psi_\varepsilon \circ v_i^\pm)}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial v_i^\pm} \frac{\partial v_i^\pm}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial v_i^\pm}{\partial x_j}, & \text{se } 0 < t < \varepsilon, \\ 0, & \text{se } t \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n),$$

então $\nabla(\psi_\varepsilon(v_i^\pm))$ é igual a $\varepsilon^{-1}\nabla v_i^\pm$ em $\{0 < v_i^\pm < \varepsilon\}$ e é 0 em $D \setminus \{0 < v_i^\pm < \varepsilon\}$. Com isso, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_D \nabla(v_i^\pm) \nabla(\psi_\varepsilon(v_i^\pm)) \phi dx &= \int_D \nabla(v_i^\pm) \nabla(\psi_\varepsilon(v_i^\pm)) \phi dx + \int_D \nabla(v_i^\pm) \nabla \phi (\psi_\varepsilon(v_i^\pm)) dx \\ &= \int_{\{0 < v_i^\pm < \varepsilon\}} |\nabla(v_i^\pm)|^2 \varepsilon^{-1} \phi dx + \int_D \nabla(v_i^\pm) \nabla \phi (\psi_\varepsilon(v_i^\pm)) dx \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \int_{K \cap \{|v_i| < \varepsilon\} \cap \Omega} |\nabla(v_i)|^2 dx &\leq \varepsilon^{-1} \int_{\{0 < |v_i| < \varepsilon\}} |\nabla(v_i)|^2 \phi dx \\ &\leq \int_D |\nabla(v_i)| |\nabla \phi| |\psi_\varepsilon(v_i)| dx \\ &\leq \int_D |\nabla(v_i)| |\nabla \phi| dx \\ &\leq C_n \|D^2 u\|_{L^\infty(D)} = C_n M, \end{aligned}$$

onde $M = \|D^2 u\|_{L^\infty(D)}$. Então, substituindo em (4.1), temos

$$|K \cap E_\varepsilon| \leq C\varepsilon M, \tag{4.2}$$

onde $C = C(n, K, D)$. Pelo Teorema da Cobertura de Besicovitch, [13, Teorema 1.27] e sabendo que K é compacto, podemos considerar uma cobertura de $\Gamma \cap K$ por uma família finita $\{B_i\}_{i \in I}$ de bolas abertas de raio ε centradas em pontos de $\Gamma \cap K$ tais que cada ponto de $\Gamma \cap K$ pertença a no máximo N_n bolas de $\{B_i\}_{i \in I}$. E para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos assumir que $B_i \subset K'$ para todo $i \in I$, onde K' é um compacto um pouco maior do que K , de modo que $K \Subset \text{int}(K') \Subset D$. Como $u \in C^{1,1}(D)$, para $x_0 \in \Gamma(u)$ e $x \in B_\varepsilon(x_0)$, temos

$$|\nabla u(x)| = |\nabla u(x) - \nabla u(x_0)| \leq M|x - x_0| < M\varepsilon.$$

Assim, em cada B_i vale que $|\nabla u| < M\varepsilon$, o que nos diz que $B_i \cap \Omega(u) \subset E_{M\varepsilon}$ para todo $i \in I$. Como $B_i \subset D$ para cada $i \in I$, pelo Lema 4.7 temos,

$$\frac{|B_i \cap \Omega|}{|B_i|} \geq \beta > 0, \quad \text{para todo } i \in I.$$

Daí, obtemos

$$\sum_{i \in I} |B_i| \leq \frac{1}{\beta} \sum_{i \in I} |B_i \cap \Omega| \leq \frac{1}{\beta} \sum_{i \in I} |B_i \cap E_{M\varepsilon}|. \quad (4.3)$$

Além disso, como cada ponto de $\Gamma \cap K$ pertence a no máximo N_n bolas da família $\{B_i\}_{i \in I}$, vale a seguinte desigualdade:

$$\sum_{i \in I} \chi_{B_i \cap E_{M\varepsilon}} \leq \sum_{i \in I} \chi_{B_i} \leq N_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |B_i \cap E_{M\varepsilon}| &= \sum_{i \in I} \int_{B_i \cap E_{M\varepsilon}} dx = \int_{(\cup B_i) \cap E_{M\varepsilon}} \sum_{i \in I} \chi_{B_i \cap E_{M\varepsilon}} dx \\ &\leq N_n \int_{(\cup B_i) \cap E_{M\varepsilon}} dx \leq N_n \int_{K' \cap E_{M\varepsilon}} dx \\ &= N_n |K' \cap E_{M\varepsilon}|. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo em (4.3) e utilizando (4.2), segue que

$$\sum_{i \in I} |B_i| \leq \frac{N_n}{\beta} |K' \cap E_{M\varepsilon}| \leq \frac{CN_n M^2 \varepsilon}{\beta}.$$

Como

$$\sum_{i \in I} |B_i| = \alpha(n) \sum_{i \in I} \varepsilon^n,$$

temos a estimativa

$$\sum_{i \in I} \left(\frac{\text{diam}(B_i)}{2} \right)^{n-1} = \sum_{i \in I} \varepsilon^{n-1} \leq \frac{CN_n M^2}{\alpha(n)\beta} = C(n, M, K, D).$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma(u) \cap K) \leq C(n, M, K, D),$$

o que prova o Lema. □

Observação 4.8. Na demonstração do Lema acima, o Teorema da Cobertura de Besi-

covitch é válido para uma cobertura de bolas fechadas do \mathbb{R}^n tais que $\sup_{i \in I} \text{diam } B_i < \infty$ (o que é garantido, pois $\text{diam } B_i = 2\varepsilon$ para todo $i \in I$). Porém, como K é fechado, o Teorema de Borel-Lebesgue ([20, Teorema 1.23]) garante que é possível cobrir K por uma família finita de bolas abertas de raio ε centradas em pontos de K . Assim, podemos tomar inicialmente uma cobertura por bolas fechadas de $\Gamma \cap K$ (fechando as bolas da cobertura mencionada anteriormente nos pontos em que K se intersecta com Γ) e após aplicar o Teorema da Cobertura de Besicovitch, consideramos novamente as bolas abertas e notamos que cada ponto de $\Gamma \cap K$ continua pertencendo a no máximo N_n bolas.

Capítulo 5

Regularidade da fronteira livre

Nosso objetivo neste capítulo é obter as regularidades Lipschitz e C^1 da fronteira livre para o Problema de Obstáculo (O). Para isso, inicialmente definimos as classes de soluções e apresentamos algumas propriedades relacionadas aos *rescalings* e *blowups* que também serão definidos. Além disso, abordaremos a fórmula de monotonicidade de Weiss que assim como a fórmula de monotonicidade ACF, vista no Capítulo 3, é uma poderosa ferramenta no estudo de problemas de obstáculo, em particular do problema (O).

5.1 Classes de soluções, *rescalings* e *blowups*

Nesta seção, definiremos as classes de soluções locais e globais do Problema de Obstáculo e propriedades sobre *rescalings* e *blowups* destas soluções. Tais conceitos serão utilizados durante todo o restante do capítulo.

5.1.1 Soluções locais e globais

Definição 5.1 (Soluções locais). Dados $R, M > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definimos $P_R(x_0, M)$ como uma classe de soluções $C^{1,1}$ do problema (O) em $B_R(x_0)$ tal que

- $\|D^2u\|_{L^\infty(B_R(x_0))} \leq M$,
- $x_0 \in \Gamma(u)$.

Usaremos a notação abreviada $P_R(M)$ para a classe $P_R(0, M)$.

Para que possamos obter soluções em todo o espaço \mathbb{R}^n que cresçam quadraticamente no infinito, tomaremos formalmente $R = \infty$ na definição acima. Nesse sentido, definiremos também a classe de *soluções globais*.

Definição 5.2 (Soluções globais). Para dados $M > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ consideraremos $P_\infty(x_0, M)$ como a classe de soluções $u \in C_{\text{loc}}^{1,1}$ de (O) em \mathbb{R}^n que satisfazem

- $\|D^2u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M$,
- $x_0 \in \Gamma(u)$.

A classe $P_\infty(0, M)$ também será denotada por $P_\infty(M)$.

5.1.2 Rescalings e blowups

Note que as propriedades de *scaling* e translação são aproveitadas pelas classes definidas acima. Mais precisamente, queremos dizer que, se $u \in P_R(x_0, M)$ e $\lambda > 0$, então o *rescaling* de u em x_0 , definido por

$$u_\lambda(x) = u_{x_0, \lambda}(x) := \frac{u(x_0 + \lambda x) - u(x_0)}{\lambda^2}, \quad x \in B_{R/\lambda}, \quad (5.1)$$

será de classe $P_{R/\lambda}(M)$. A partir dessa observação, em geral, apresentaremos os resultados para as classes normalizadas $P_R(M)$ ou $P_1(M)$, visto que o *rescaling* recupera as informações para as classes $P_R(x_0, M)$. Observe que, como $|D^2u_\lambda| = |D^2u|$, para $u \in P_R(M)$ os *rescalings* u_λ satisfazem

$$|D^2u_\lambda(x)| \leq M \quad \text{em} \quad B_{R/\lambda},$$

para todo $\lambda > 0$. Além disso, como $u_\lambda \in C^{1,1}(B_{R/\lambda})$ (são soluções de (O)), vale também, para $x \in B_{R/\lambda}$,

$$|\nabla u_\lambda(x)| \leq M|x| \quad \text{e} \quad |u_\lambda(x)| \leq \frac{M}{2}|x|^2,$$

onde a primeira desigualdade vem do fato de ∇u_λ ser lipschitz e de $0 \in \Gamma(u_\lambda)$ e a segunda desigualdade pode ser obtida via expansão da Taylor:

$$\begin{aligned} u_\lambda(x) &= u_\lambda(0) + \nabla u_\lambda(0) \cdot x + \int_0^1 (1-t) D^2 u_\lambda(tx) \cdot x^2 dt \\ &\leq \|D^2 u_\lambda(tx)\|_{L^\infty(B_{R/\lambda})} |x|^2 \int_0^1 (1-t) dt \\ &\leq \frac{M}{2} |x|^2. \end{aligned}$$

Portanto, usando a imersão compacta de $C^{1,1}$ em $C^{1,\alpha}$ com $0 < \alpha < 1$, podemos encontrar uma sequência $\lambda = \lambda_j \rightarrow 0$ tal que

$$u_{\lambda_j} \rightarrow u_0 \quad \text{em} \quad C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

para qualquer $0 < \alpha < 1$, onde $u_0 \in C_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Diremos que a função u_0 obtida acima é um **blowup** de u em x_0 (ver Figura 5.1).

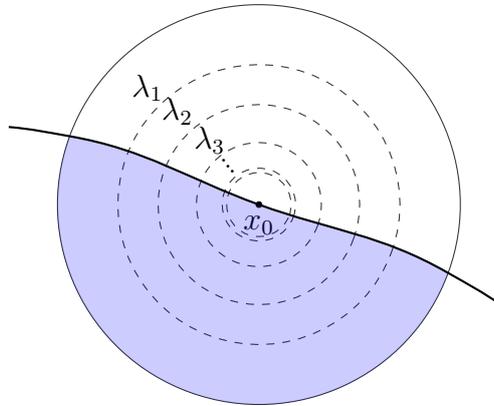


Figura 5.1: *Blowup* sobre uma sequência de raios λ_j e centro fixo.

Observação 5.3. Por [22, Proposição 3.17], u_0 é uma solução global do problema (O). Mais precisamente, $u_0 \in P_\infty(M)$.

Observação 5.4. Outra observação importante é que a unicidade de u_0 não é garantida a priori, visto que diferentes sequências λ_j podem levar a diferentes funções limites u_0 .

A observação acima nos leva a obter uma versão generalizada de *blowups*, onde temos uma sequência de pontos da fronteira livre $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $x_j \rightarrow x_0$ e temos uma variação dos centros ao invés de um centro fixo. Assim, consideramos os limites

$$u_{x_j, \lambda_j} \rightarrow u_0 \quad \text{em} \quad C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

para qualquer $0 < \alpha < 1$, quando $\lambda_j \rightarrow 0$. Chamamos u_0 de **blowup sobre a sequência** $x_j \rightarrow x_0$ (Figura 5.2).

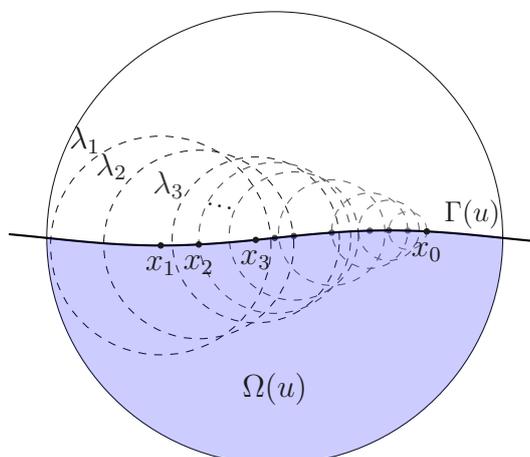


Figura 5.2: *Blowup* sobre uma sequência de raios λ_j com centros $x_j \rightarrow x_0$.

5.2 Fórmula de monotonicidade do tipo Weiss

Nesta seção, definiremos o funcional energia de Weiss associado ao Problema de Obstáculo (O) e provaremos a fórmula de monotonicidade de Weiss assim como o fato de que qualquer *blowup* de u em um ponto da fronteira livre é uma função homogênea de grau dois. Para mais aplicações dessa fórmula de monotonicidade relacionadas ao problema (O) e referência complementar sobre a própria fórmula de monotonicidade podemos citar [22, 25].

Definição 5.5. Para uma solução $u \in P_R(x_0, M)$ e $0 < r < R$, definimos o *funcional energia de Weiss*

$$W(r, u, x_0) := \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r(x_0)} (|\nabla u|^2 + 2u) dx - \frac{2}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(x_0)} u^2 dH^{n-1}.$$

Usaremos a notação $W(r, u)$ para $W(r, u, 0)$.

Considerando o *rescaling* $u_r = u_{x_0, r}$ como definido em (5.1), obtemos a seguinte propriedade para o funcional W :

$$\begin{aligned} W(rs, u, x_0) &= \frac{1}{r^n s^{n+2}} \int_{B_{rs}(x_0)} \left(\frac{|\nabla u(y)|^2 + 2(u(y) - u(x_0))}{r^2} \right) dy \\ &\quad - \frac{2}{r^{n-1} s^{n+3}} \int_{\partial B_{rs}(x_0)} \frac{u(y)^2}{r^4} dH_y^{n-1} \\ &= \frac{1}{r^n s^{n+2}} \int_{B_s} \left(\frac{|\nabla u(x_0 + rx)|^2 + 2(u(x_0 + rx) - u(x_0))}{r^2} \right) r^n dx \\ &\quad - \frac{2}{r^{n-1} s^{n+3}} \int_{\partial B_s} \frac{u(x_0 + rx)^2}{r^4} r^{n-1} dH_x^{n-1}, \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} W(rs, u, x_0) &= \frac{1}{s^{n+2}} \int_{B_s} (|\nabla u_r(x)|^2 + 2u_r(x)) dx - \frac{2}{s^{n+3}} \int_{\partial B_s} u_r(x)^2 dH_x^{n-1} \\ &= W(s, u_r), \end{aligned}$$

para qualquer $0 < r < R$ e $0 < s < R/r$. Essa observação irá nos auxiliar para demonstrar a fórmula de monotonicidade. Para simplificar a notação, consideremos o operador

$$\partial'_{(x_0)} v := (x - x_0) \cdot \nabla v(x) - 2[v(x) - v(x_0)], \quad (\partial' v := \partial'_{(0)} v).$$

Teorema 5.1 (Fórmula de monotonicidade de Weiss). *Seja $u \in P_R(x_0, M)$ uma solução do Problema (O). Então $r \mapsto W(r, u, x_0)$ é uma função absolutamente contínua*

não decrescente para $0 < r < R$ e

$$\frac{d}{dr}W(r, u, x_0) = \frac{2}{r^{n+4}} \int_{\partial B_r(x_0)} |\partial'_{(x_0)} u|^2 dH^{n-1},$$

para todo $0 < r < R$. Além disso, se o funcional $W(r, u, x_0)$ é constante para $r_1 < r < r_2$, então $u - u(x_0)$ é homogênea com respeito a x_0 , isto é,

$$\partial'_{(x_0)} u = (x - x_0) \cdot \nabla u(x) - 2[u(x) - u(x_0)] = 0 \quad \text{em} \quad B_{r_2}(x_0) \setminus B_{r_1}(x_0).$$

Observação 5.6. Um resultado que convém ser mencionado é que, uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau k se, e somente se, vale a relação de Euler $\nabla f \cdot x = kf(x)$ (Teorema de Euler).

Demonstração. Usando a propriedade de *scaling* para o funcional W , temos

$$\frac{d}{dr}W(r, u, x_0) = \frac{d}{dr}W(1, u_r) = \int_{B_r(x_0)} \frac{d}{dr}(|\nabla u_r|^2 + 2u_r) dx - 2 \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{d}{dr}(u_r^2) dH^{n-1}.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(\nabla u_r) &= \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_1} \right), \dots, \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_n} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{du_r}{dr} \right), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{du_r}{dr} \right) \right) \\ &= \nabla \left(\frac{du_r}{dr} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{u(x_0 + rx) - u(x_0)}{r^2} \right) \\ &= \frac{r^2 \nabla u(x_0 + rx) \cdot x - 2r(u(x_0 + rx) - u(x_0))}{r^4} \\ &= \frac{\nabla u(x_0 + rx) \cdot x}{r^2} - \frac{2(u(x_0 + rx) - u(x_0))}{r^3} \\ &= \frac{\nabla u_r(x) \cdot x}{r} - \frac{2u_r(x)}{r} \\ &= \frac{\partial' u_r}{r}. \end{aligned}$$

Daí, integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr}W(r, u, x_0) &= \int_{B_1} \left[2\nabla u_r \cdot \nabla \left(\frac{du_r}{dr} \right) + 2\frac{du_r}{dr} \right] dx - 2 \int_{\partial B_1} 2u_r \frac{du_r}{dr} dH^{n-1} \\
 &= 2 \int_{B_1} \left[\nabla u_r \cdot \nabla \left(\frac{\partial' u_r}{r} \right) + \frac{\partial' u_r}{r} \right] dx - 2 \int_{\partial B_1} 2u_r \frac{\partial' u_r}{r} dH^{n-1} \\
 &= 2 \left(\int_{B_1} -\Delta u_r \frac{\partial' u_r}{r} dx + \int_{\partial B_1} \frac{\partial' u_r}{r} \partial_\nu u_r dH^{n-1} + \int_{B_1} \frac{\partial' u_r}{r} dx \right) \\
 &\quad - 2 \int_{\partial B_1} 2u_r \frac{\partial' u_r}{r} dH^{n-1} \\
 &= \frac{2}{r} \int_{B_1} (-\Delta u_r + 1) \partial' u_r dx + \frac{2}{r} \int_{\partial B_1} (\partial_\nu u_r - 2u_r) \partial' u_r dH^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Afirmamos que $(-\Delta u_r + 1) \partial' u_r = 0$ quase sempre para soluções do Problema (O). Com efeito, se $x \in \Omega(u)$, então $\Delta u_r - 1 = 0$. Por outro lado, se $x \in D \setminus \Omega(u)$, então

$$\partial' u_r = \nabla u_r \cdot x - 2u_r = 0.$$

Além disso, como ν é um vetor na direção normal externa a ∂B_1 , vale que $\partial_\nu u_r = x \cdot \nabla u_r$ em ∂B_1 . Com isso, segue que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr}W(r, u, x_0) &= \frac{2}{r} \int_{\partial B_1} (x \cdot \nabla u_r - 2u_r) \partial' u_r dH^{n-1} \\
 &= \frac{2}{r} \int_{\partial B_1} |\partial' u_r|^2 dH^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 \partial' u_r &= \nabla u_r(x) \cdot x - 2[u_r(x) - u_r(0)] \\
 &= \nabla \left(\frac{u(x_0 + rx) - u(x_0)}{r^2} \right) \cdot x - 2 \frac{u(x_0 + rx) - u(x_0)}{r^2} \\
 &= \frac{\nabla u(x_0 + rx)}{r} \cdot x - \frac{2[u(x_0 + rx) - u(x_0)]}{r^2} \\
 &= \frac{\nabla u(y)}{r} \cdot \left(\frac{y - x_0}{r} \right) - \frac{2[u(y) - u(x_0)]}{r^2} \\
 &= \frac{\partial'_{(x_0)} u}{r^2},
 \end{aligned}$$

podemos desfazer o *scaling* e concluímos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr}W(r, u, x_0) &= \frac{2}{r} \int_{\partial B_r(x_0)} \left| \frac{\partial'_{(x_0)} u}{r^2} \right|^2 r^{1-n} dH^{n-1} \\
 &= \frac{2}{r^{n+4}} \int_{\partial B_r(x_0)} |\partial'_{(x_0)} u|^2 dH^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Por fim, se $W(r, u, x_0)$ é constante para $r_1 < r < r_2$, então

$$\frac{2}{r^{n+4}} \int_{\partial B_r(x_0)} |\partial'_{(x_0)} u|^2 dH^{n-1} = 0, \quad r \in (r_1, r_2),$$

implicando que $\partial'_{(x_0)} u = 0$ em $B_{r_2}(x_0) \setminus B_{r_1}(x_0)$, o que encerra a prova. \square

Observação 5.7. Como a fronteira livre do problema (O) possui medida de Lebesgue igual a zero (Corolário 4.6), a função u_r é suave em quase todo ponto. O que justifica a utilização do Teorema de Schwarz para derivadas parciais mistas da a função u_r dentro da integral na demonstração acima.

Corolário 5.2 (Homogeneidade de *blowups*). *Seja $u \in P_R(x_0, M)$ e $u_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{x_0, \lambda_j}$ um blowup de u em x_0 . Então u_0 é homogênea de grau dois, isto é,*

$$u_0(\lambda x) = \lambda^2 u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda > 0.$$

Demonstração. Pela regularidade das soluções u_{x_0, λ_j} , podemos assumir que $u_{x_0, \lambda_j} \rightarrow u_0$ em $C_{\text{loc}}^{1, \alpha}(\mathbb{R}^n)$. Então, temos as seguintes igualdades

$$W(r, u_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} W(r, u_{x_0, \lambda_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} W(\lambda_j r, u, x_0) = W(0^+, u, x_0),$$

para qualquer $r > 0$, o que significa que $W(r, u_0)$ é constante. Assim, pelo Teorema 5.1, temos que $x \cdot \nabla u_0 - 2u_0 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, u_0 é uma função homogênea de grau dois. \square

5.3 Regularidade C^1 da fronteira livre próxima a pontos regulares

Nesta seção, analisamos a fronteira livre do Problema Obstáculo próxima aos pontos regulares que serão definidos a seguir.

Definição 5.8 (Pontos regulares). No Problema (O), $x_0 \in \Gamma(u)$ é um **ponto regular** se todo *blowup* u_0 de u em x_0 é uma solução no semiespaço.

Isto significa que os *rescalings*

$$u_r(x) = u_{x_0, r}(x) = \frac{u(x_0 + rx)}{r^2}$$

convergem, sobre uma sequência $r = r_j \rightarrow 0$, para a solução no semiespaço

$$u_0(x) = \frac{1}{2}[(x \cdot \mathbf{e})^+]^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^{n-1}$. Inicialmente, apresentaremos um resultado sobre uma propriedade *flatness* de $\Gamma(u)$ (pode ser traduzido como “achatamento”; ver Figura 5.3) que será obtido a partir da proximidade de u com uma solução no semiespaço na norma L^∞ .

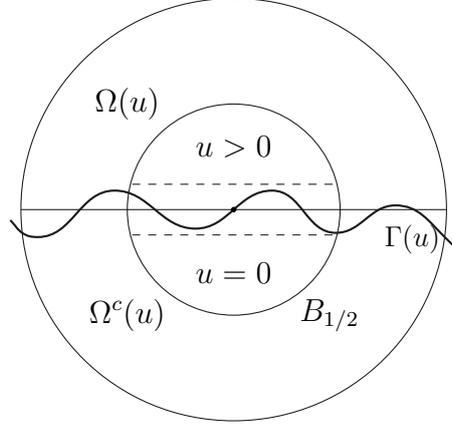


Figura 5.3: Propriedade *flatness* de $\Gamma(u)$.

Lema 5.3. *Seja $u \in P_1(M)$, $\varepsilon > 0$ e $u_0(x) = \frac{(x_n^+)^2}{2}$ uma solução no semiespaço tal que*

$$\|u - u_0\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon.$$

Então,

$$\begin{aligned} u > 0 & \text{ em } \{x_n > \sqrt{2\varepsilon}\} \cap B_1, \\ u = 0 & \text{ em } \{x_n \leq -2\sqrt{n\varepsilon}\} \cap B_{1/2}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\Gamma(u) \cap B_{1/2} \subset \{|x_n| \leq 2\sqrt{n\varepsilon}\}.$$

Demonstração. Seja $y \in \{x_n > \sqrt{2\varepsilon}\} \cap B_1$, então

$$u_0(y) = \frac{(y_n)^2}{2} > \frac{(\sqrt{2\varepsilon})^2}{2} = \varepsilon.$$

Pela hipótese de proximidade entre u e u_0 , temos que $u_0(y) - u(y) \leq \varepsilon$ e portanto,

$$u(y) \geq u_0(y) - \varepsilon > 0.$$

O que mostra a primeira afirmação. Para mostrar que $u = 0$ em $\{x_n \leq -2\sqrt{n\varepsilon}\} \cap B_{1/2}$, inicialmente note que, se $y \in B_1 \setminus \Omega(u)$, não há o que provar. Tomemos então $y \in \Omega(u) \cap B_{1/2} \cap \{x_n < 0\}$ e definimos $r := -y_n > 0$. Com isso, pela não degenerescência de u , temos

$$\sup_{B_r(y)} u \geq u(y) + cr^2, \quad c = \frac{1}{2n}.$$

Pela definição de r , $B_r(y) \subset \{x_n < 0\}$. Logo, $u_0 = 0$ em $B_r(y)$ e conseqüentemente, usando a hipótese inicial, $|u| \leq \varepsilon$ em $B_r(y)$. Portanto,

$$\varepsilon \geq \sup_{B_r(y)} u \geq u(y) + cr^2 \geq -\varepsilon + cr^2.$$

O que implica que $2\varepsilon \geq cr^2$. Disso, temos que

$$y_n = -r \geq -\sqrt{\frac{2\varepsilon}{c}} = -2\sqrt{n\varepsilon}.$$

A desigualdade acima nos diz que

$$\Omega(u) \cap B_{1/2} \subset \{x_n > -2\sqrt{n\varepsilon}\}.$$

Podemos desconsiderar a interseção com $\{x_n < 0\}$ pois $\{x_n \geq 0\}$ está contido naturalmente em $\{x_n > -2\sqrt{n\varepsilon}\}$. Tomando agora $x_0 \in \{x_n \leq -2\sqrt{n\varepsilon}\} \cap B_{1/2}$ temos que $x_0 \notin \Omega(u)$ e com isso, $u(x_0) = 0$, provando a segunda afirmação. Por fim, seja agora $y \in \Gamma(u) \cap B_{1/2}$. Supondo por absurdo que $|y_n| > 2\sqrt{n\varepsilon}$, então $y_n < -2\sqrt{n\varepsilon}$ ou $y_n > 2\sqrt{n\varepsilon}$. Como $2\sqrt{n\varepsilon} > \sqrt{2\varepsilon}$, não podemos ter $y_n > 2\sqrt{n\varepsilon}$, pois, caso contrário, teríamos, pela primeira afirmação, $u(y) > 0$. Sendo então $y_n < -2\sqrt{n\varepsilon}$, definimos $r := \min\{-2\sqrt{n\varepsilon} - y_n, 1/2 - |y|\}$. Como $B_r(y) \subset \{x_n \leq -2\sqrt{n\varepsilon}\} \cap B_{1/2}$, pela segunda afirmação, $u = 0$ em $B_r(y)$. Portanto, $B_r(y) \subset B_1 \setminus \Omega(u)$, um absurdo, visto que $y \in \Gamma(u) = \partial\Omega(u) \cap B_1$. \square

Como uma consequência do Lema 5.3, obtemos a seguinte propriedade, denominada *flatness*, da fronteira livre em pontos regulares.

Proposição 5.4 (Propriedade *flatness* de $\Gamma(u)$). *Seja $u \in P_1(M)$ uma solução de (O) tal que 0 é um ponto regular. Então para qualquer $\sigma > 0$ existe $r_\sigma = r_\sigma(u) > 0$ tal que $\Gamma(u)$ é σ -flat em B_r para qualquer $r < r_\sigma$ no sentido que*

$$\Gamma(u) \cap B_r \subset \{|x \cdot \mathbf{e}| < \sigma r\},$$

para alguma direção $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{r,\sigma}$.

Demonstração. Supondo por absurdo que a proposição não vale para algum $\sigma > 0$, então existe uma sequência $r_j \rightarrow 0$ (com $0 < r_j < 1$) tal que $\Gamma(u)$ não é σ -flat em $B_{r_j/2}$. Como o *rescaling* u_{r_j} é definido em B_{1/r_j} (e em particular em B_1), então a suposição é equivalente a dizer que $\Gamma(u_{r_j})$ não é σ -flat em $B_{1/2}$. Sendo 0 um ponto regular, podemos assumir sem perda de generalidade que $u_{r_j} \rightarrow u_0$ em $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, onde $u_0(x) = \frac{1}{2}(x_n^+)^2$. Então, dado $\varepsilon > 0$, para $j \geq j_\varepsilon$ teríamos que $\|u_{r_j} - u_0\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon$ e

portanto, pelo Lema 5.3,

$$\Gamma(u_{r_j}) \cap B_{1/2} \subset \{|x_n| < C_n \sqrt{\varepsilon}\}.$$

Com isso, escolhendo $\sigma > 0$ tal que $C_n \sqrt{\varepsilon} < \frac{1}{2}\sigma$, obtemos que $\Gamma(u_{r_j})$ é σ -flat em $B_{1/2}$, uma contradição. \square

A seguir, mostraremos que a proximidade dos *rescalings* u_{r_j} em relação a u_0 , na norma C^1 , resulta na regularidade Lipschitz de $\Gamma(u)$. De maneira mais precisa, demonstramos que as derivadas direcionais $\partial_{\mathbf{e}}u$ são não negativas próximas a pontos regulares, para um certo cone de direções. Para isso, precisaremos do fato de que a solução no semiespaço $u_0(x) = \frac{1}{2}(x_n^+)^2$ é monótona crescente em qualquer direção $\mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta \cap \partial B_1$, onde

$$\mathcal{C}_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > \delta|x'|\}, \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Para verificar tal monotonicidade, note que

$$\partial_{\mathbf{e}}u_0(x) = \nabla u_0(x) \cdot \mathbf{e} = (0, \dots, x_n^+) \cdot \mathbf{e} > 0,$$

visto que, $\mathbf{e}_n > \delta|\mathbf{e}'| \geq 0$. Na verdade precisamos da seguinte afirmação ainda mais forte:

$$\delta^{-1}\partial_{\mathbf{e}}u_0 - u_0 \geq 0 \quad \text{em } B_1, \quad \text{para qualquer } \mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta \cap \partial B_1.$$

Com efeito, como $\mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta \cap \partial B_1$, vale que

$$\mathbf{e}_n^2 > \delta^2|\mathbf{e}'|^2 = \delta^2(1 - \mathbf{e}_n^2),$$

daí, $\mathbf{e}_n > \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}}$. Disso, segue que

$$\begin{aligned} \delta^{-1}\partial_{\mathbf{e}}u_0 - u_0 &= \delta^{-1}x_n^+\mathbf{e}_n - \frac{1}{2}(x_n^+)^2 \geq x_n^+ \left(\delta^{-1}\frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} - \frac{1}{2}x_n^+ \right) \\ &\geq x_n^+ \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} - \frac{1}{2} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

No lema a seguir mostraremos que essa propriedade é instável em relação a aproximações C^1 .

Lema 5.5. *Seja u uma solução de (O) em B_1 e suponha que para uma certa direção \mathbf{e} e uma constante $C > 0$, temos*

$$C\partial_{\mathbf{e}}u - u \geq -\varepsilon_0 \quad \text{em } B_1, \tag{5.2}$$

com $\varepsilon_0 < 1/8n$. Então

$$C\partial_{\mathbf{e}}u - u \geq 0 \quad \text{em } B_{1/2}.$$

Demonstração. Supondo que o lema não é verdade, tomemos $y \in B_{1/2} \cap \Omega(u)$ tal que $C\partial_{\mathbf{e}}u(y) - u(y) < 0$. Então, consideramos a função auxiliar

$$w(x) = C\partial_{\mathbf{e}}u(x) - u(x) + \frac{1}{2n}|x - y|^2.$$

Afirmamos que w é harmônica em $\Omega(u) \cap B_{1/2}(y)$, $w(y) < 0$ e $w \geq 0$ em $\partial\Omega(u)$. De fato, como

$$\Delta w = C\partial_{\mathbf{e}}(\Delta u) - \Delta u + 1,$$

temos $\Delta w = 0$ em $\Omega(u) \cap B_{1/2}(y)$. Além disso, pela suposição inicial,

$$w(y) = C\partial_{\mathbf{e}}u(y) - u(y) < 0.$$

E por (5.2),

$$w(x) = \frac{1}{2n}|x - y|^2 \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega(u) \cap B_1.$$

Com isso, pelo Princípio do Máximo, w tem um ínfimo negativo em $\partial(\Omega(u) \cap B_{1/2}(y))$. Porém, escrevendo

$$\partial(\Omega(u) \cap B_{1/2}(y)) = (\partial\Omega(u) \cap B_{1/2}(y)) \cup (\partial B_{1/2}(y) \cap \Omega(u)) \cup (\partial B_{1/2}(y) \cap \partial\Omega(u))$$

e usando o fato de que $w \geq 0$ em $\partial\Omega(u)$, então o ínfimo na verdade é atingido em $\partial B_{1/2}(y) \cap \Omega(u)$, isto é,

$$\inf_{\partial B_{1/2}(y) \cap \Omega} w = \inf_{\partial(\Omega \cap B_{1/2}(y))} w < 0.$$

Temos então que

$$\inf_{\partial B_{1/2}(y) \cap \Omega} w = \inf_{\partial B_{1/2}(y) \cap \Omega} \left(C\partial_{\mathbf{e}}u - u + \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) < 0.$$

Portando,

$$\inf_{B_1} (C\partial_{\mathbf{e}}u - u) \leq \inf_{\partial B_{1/2}(y) \cap \Omega} (C\partial_{\mathbf{e}}u - u) < -\frac{1}{8n},$$

o que é um absurdo, pois $\varepsilon_0 < \frac{1}{8n}$. □

No lema a seguir, demonstraremos a monotonicidade direcional a partir das aproximações C^1 por soluções no semiespaço.

Lema 5.6 (Monotonicidade direcional). *Sejam $u \in P_1(M)$ e $u_0(x) = \frac{1}{2}(x_n^+)^2$ tais que*

$$\sup_{B_1} |u - u_0| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \sup_{B_1} |\nabla u - \nabla u_0| \leq \varepsilon, \tag{5.3}$$

para algum $\varepsilon > 0$. Então

(a) Se $\varepsilon \leq \frac{1}{32n}$, então $u \geq 0$ em $B_{1/2}$,

(b) $\varepsilon \leq \frac{\delta}{32n}$, com $\delta \in (0, 1]$ implica $\partial_{\mathbf{e}}u \geq 0$ em $B_{1/2}$, para qualquer $\mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta$.

Demonstração. Pela condição (5.3), temos que

$$\delta^{-1}(\partial_{\mathbf{e}}u - \partial_{\mathbf{e}}u_0) - u + u_0 = \delta^{-1}(\nabla u \cdot \mathbf{e} - \nabla u_0 \cdot \mathbf{e}) - u + u_0 \geq -\delta^{-1}\varepsilon - \varepsilon.$$

Então, usando que

$$\delta^{-1}\partial_{\mathbf{e}}u_0 - u_0 \geq 0 \quad \text{em } B_1, \text{ para qualquer } \mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta \cap \partial B_1$$

e supondo $\varepsilon \leq \frac{\delta}{32n}$, obtemos

$$\delta^{-1}\partial_{\mathbf{e}}u - u \geq \delta^{-1}\partial_{\mathbf{e}}u_0 - u_0 - \delta^{-1}\varepsilon - \varepsilon \geq -\frac{1}{\delta}\varepsilon - \varepsilon \geq -\frac{2}{\delta}\varepsilon \geq -\frac{1}{16n}$$

em B_1 . Assim, pelo Lema 5.5, considerando $\varepsilon_0 = \frac{1}{16n}$, temos que

$$\delta^{-1}\partial_{\mathbf{e}}u - u \geq 0 \quad \text{em } B_{1/2}, \text{ para qualquer } \mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta \cap \partial B_1. \quad (5.4)$$

Além disso, como

$$\|u - u_0\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon \leq \frac{\delta}{32n} \leq \frac{1}{32n},$$

pelo Lema 5.3,

$$u = 0 \quad \text{em } \left\{ x_n \leq -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right\} \cap B_{1/2}.$$

Em particular, tomando $\delta = 1$ em (5.4) e multiplicando por $e^{-\mathbf{e} \cdot x}$, podemos ver que

$$\partial_{\mathbf{e}}(e^{-\mathbf{e} \cdot x}u(x)) = e^{-\mathbf{e} \cdot x}\partial_{\mathbf{e}}u - ue^{-\mathbf{e} \cdot x}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = e^{-\mathbf{e} \cdot x}(\partial_{\mathbf{e}}u - u) \geq 0,$$

para qualquer $\mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta \cap \partial B_1$. Assim, definindo $v(x) = e^{-e_n \cdot x}u(x)$ e $w(t) = v(x + te_n)$, temos que

$$w'(t) = \nabla v(x + te_n) \cdot e_n = \partial_{e_n}v(x + te_n) \geq 0,$$

sempre que $x + te_n \in B_{1/2}$. Tomando $T > 0$ tal que $x_n - Te_n \leq -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ para cada $x \in B_{1/2}$, obtemos

$$e^{-e_n \cdot x}u(x) = w(0) \geq w(-T) = e^{-e_n \cdot (x - Te_n)}u(x - Te_n) = 0.$$

Logo, $u \geq 0$ em $B_{1/2}$. Por fim, do item (a) e de (5.4), concluímos que

$$\partial_{\mathbf{e}}u \geq \delta u \geq 0 \quad \text{em } B_{1/2}, \quad \text{para qualquer } \mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta \cap \partial B_1. \quad \square$$

A seguir, apresentamos uma versão em escala do Lema 5.6.

Lema 5.7 (Monotonicidade direcional (versão em escala)). *Seja $u \in P_1(M)$ uma solução do problema (O) tal que 0 é um ponto regular e $u_0(x) = \frac{1}{2}(x_n^+)^2$ é um blowup de u em 0 . Então para qualquer $\delta \in (0, 1]$ existe $r_\delta = r_\delta(u) > 0$ tal que*

$$(a) \quad u \geq 0 \text{ em } B_{r_1},$$

$$(b) \quad \partial_{\mathbf{e}}u \geq 0 \text{ em } B_{r_\delta} \text{ para qualquer } \mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta.$$

Demonstração. Como 0 é ponto regular e u_0 é um blowup de u em 0 , existe uma sequência $r_j \rightarrow 0$, com $0 < r_j \leq 1$, tal que $u_{r_j} \rightarrow u_0$ em $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ (em particular converge em B_1), isto é,

$$\|u_{r_j} - u_0\|_{C^{1,\alpha}(B_1)} \rightarrow 0.$$

Com isso, existe j_δ tal que, para $j \geq j_\delta$, temos

$$\sup_{B_1} |u_{r_j} - u_0| \leq \frac{\delta}{32n} \quad \text{e} \quad \sup_{B_1} |\nabla u_{r_j} - \nabla u_0| \leq \frac{\delta}{32n}.$$

Logo, pelo Lema 5.6, temos, fazendo $\delta = 1$,

$$u_{r_j} \geq 0 \quad \text{em } B_{\frac{r_{j_1}}{2}},$$

assim como

$$\partial_{\mathbf{e}}u_{r_j} \geq 0 \quad \text{em } B_{\frac{r_{j_\delta}}{2}}.$$

Escrevendo $r_\delta = \frac{r_{j_\delta}}{2}$ e desfazendo o *rescaling*, obtemos que

$$u \geq 0 \quad \text{em } B_{r_1} \quad \text{e} \quad \partial_{\mathbf{e}}u \geq 0 \quad \text{em } B_{r_\delta}, \quad \text{para qualquer } \mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta. \quad \square$$

Como consequência do lema acima, temos o seguinte resultado.

Proposição 5.8 (Unicidade do blowup). *Seja $u \in P_1(M)$ uma solução do problema (O) tal que 0 é um ponto regular. Então o blowup em 0 é único. Sendo que o mesmo é, após uma possível rotação dos eixos coordenados,*

$$u_r(x) \rightarrow u_0(x) = \frac{1}{2}(x_n^+)^2, \quad \text{quando } r \rightarrow 0.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que

$$u_{r_j}(x) \rightarrow u_0(x) = \frac{1}{2}(x_n^+)^2$$

sobre uma sequência $r_j \rightarrow 0$. Suponha agora que não ocorre a unicidade, isto é, que

$$u_{r_j}(x) \rightarrow u'_0(x) = \frac{1}{2}[(x \cdot e')^+]^2$$

sobre outra sequência $r'_j \rightarrow 0$. Pela convergência do segundo *blowup*, quando $r'_j < r_\delta$, para r_δ como no Lema 5.7, temos

$$\partial_{\mathbf{e}} u_{r'_j} \geq 0, \text{ para qualquer } \mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta.$$

Assim, passando o limite na desigualdade acima obtemos que

$$\partial_{\mathbf{e}} u_0 \geq 0, \text{ para qualquer } \mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta.$$

Como

$$\partial_{\mathbf{e}} u'_0(x) = (x \cdot e')^+ e' \cdot \mathbf{e} \geq 0,$$

então

$$e' \cdot \mathbf{e} \geq 0, \text{ para qualquer } \mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta.$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, podemos ver que o único vetor que atende a condição acima é o e_n . Portanto,

$$u'_0(x) = \frac{1}{2}[(x \cdot e_n)^+]^2 = \frac{1}{2}(x_n^+)^2 = u_0(x). \quad \square$$

Para provar a regularidade Lipschitz da fronteira livre, precisaremos também do seguinte lema:

Lema 5.9. *Sejam u e u_0 como no Lema 5.6 e supondo também que a condição (5.3) é satisfeita com $\varepsilon \leq \frac{\delta}{32n}$, $\delta \in (0, 1]$. Então, para qualquer $z \in \Gamma(u) \cap B_{1/2}$, temos*

(a) $u > 0$ em $(z + \mathcal{C}_\delta) \cap B_{1/2}$,

(b) $u = 0$ em $(z - \mathcal{C}_\delta) \cap B_{1/2}$.

Em particular, $\Gamma(u) \cap B_{1/2}$ é um gráfico Lipschitz $x_n = f(x')$ com a constante Lipschitz de f não excedendo δ .

Demonstração. Inicialmente, seja $z \in B_{1/2}$ tal que $u(z) = 0$. Pela monotonicidade de u em qualquer direção $\mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta$ em $B_{1/2}$, temos que

$$u \geq 0 \text{ em } (z + \mathcal{C}_\delta) \cap B_{1/2} \text{ e } u \leq 0 \text{ em } (z - \mathcal{C}_\delta) \cap B_{1/2}.$$

Pelo Lema 5.6, $u \geq 0$ em $B_{1/2}$ e com isso, $u = 0$ em $(z - \mathcal{C}_\delta) \cap B_{1/2}$, mostrando o item (b). Considerando agora $z \in \Gamma(u) \cap B_{1/2}$ afirmamos que $u > 0$ em $(z + \mathcal{C}_\delta) \cap B_{1/2}$. De fato, se existisse $y \in (z + \mathcal{C}_\delta) \cap B_{1/2}$ tal que $u(y) = 0$, então pelo mesmo argumento acima teríamos que $u = 0$ em $(y - \mathcal{C}_\delta) \cap B_{1/2}$. Porém, o conjunto $(y - \mathcal{C}_\delta) \cap B_{1/2}$ é uma vizinhança de z e portanto, $z \notin \Gamma(u)$, o que é uma contradição. Logo, $u > 0$ em $(z + \mathcal{C}_\delta) \cap B_{1/2}$.

Por fim, observe que os itens (a) e (b) implicam que a fronteira livre $\Gamma(u) \cap B_{1/2}$ satisfaz tanto a condição do cone interior quanto a exterior e, portanto, é Lipschitz e δ é o maior valor possível para a constante Lipschitz. \square

A seguir, apresentamos a regularidade Lipschitz da fronteira livre.

Proposição 5.10 (Regularidade Lipschitz de $\Gamma(u)$). *Seja $u \in P_1(M)$ uma solução de (O) tal que 0 é ponto regular e $u_0(x) = \frac{1}{2}(x_n^+)^2$ é um blowup em 0 . Então existe $\rho = \rho(u) > 0$ e uma função lipschitziana $f : B'_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{aligned}\Omega(u) \cap B_\rho &= \{x \in B_\rho : x_n > f(x')\}, \\ \Gamma(u) \cap B_\rho &= \{x \in B_\rho : x_n = f(x')\}.\end{aligned}$$

Além disso, se r_δ , com $\delta \in (0, 1]$, é como no Lema 5.7, então $|\nabla_{x'} f| \leq \delta$ q.s. em $B'_{r_\delta/2}$.

Demonstração. Pelo Lema 5.7, existe $r_\delta > 0$, com $\delta \in (0, 1]$, tal que

$$\begin{aligned}u &\geq 0 \quad \text{em } B_{r_1}, \\ \partial_{\mathbf{e}} u &\geq 0 \quad \text{em } B_{r_\delta}, \quad \text{para qualquer } \mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta.\end{aligned}$$

Tomando $\rho = r_\delta$, pelo Lema 5.9, temos que, se $z \in \Gamma(u) \cap B_\rho$, então

$$\begin{aligned}u &> 0 \quad \text{em } (z + \mathcal{C}_\delta) \cap B_\rho, \\ u &= 0 \quad \text{em } (z - \mathcal{C}_\delta) \cap B_\rho.\end{aligned}$$

Em particular, $\Gamma(u) \cap B_\rho$ é um gráfico Lipschitz, ou seja, existe $f : B'_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Gamma(u) \cap B_\rho = \{x \in B_\rho : x_n = f(x')\}. \tag{5.5}$$

Para mostrar que $\Omega(u) \cap B_\rho = \{x \in B_\rho : x_n > f(x')\}$, tomemos $y \in \Omega(u) \cap B_\rho$. Então, como $y \notin \Gamma(u)$, temos duas possibilidades: $y_n > f(y')$ ou $y_n < f(y')$. Suponhamos por absurdo que $y_n < f(y')$. Sabendo que $y_0 := (y', f(y')) \in \Gamma(u) \cap B_\rho$, temos que $y \in (y_0 - \mathcal{C}_\delta) \cap B_\rho$. Porém, $u = 0$ neste último conjunto, o que é uma contradição, visto que $y \in \Omega(u)$. Por outro lado, se $y \in \{x \in B_\rho : x_n > f(x')\}$, então $y \in (y_0 + \mathcal{C}_\delta) \cap B_\rho$. Como nesse conjunto temos $u > 0$, obtemos que $y \in \Omega(u) \cap B_\rho$, concluindo a primeira

igualdade. Por fim, para provar que $|\nabla_{x'} f| \leq \delta$ q.s. em $B'_{r_\delta/2}$, note primeiro que se $x' \in B'_{r_\delta/2}$, então $(x', f(x')) \in B_{r_\delta}$. Sejam então $x', y' \in B'_{r_\delta/2}$ e definamos $x_0 = (x', f(x'))$ e $y_0 = (y', f(y'))$. Pela igualdade (5.5), temos que $x_0, y_0 \in \Gamma(u) \cap B_{r_\delta}$. Supondo por absurdo que $|f(x') - f(y')| > \delta|x' - y'|$, então $y_0 - x_0 \in \mathcal{C}_\delta$. Porém, $u > 0$ em $(x_0 + \mathcal{C}_\delta) \cap B_{r_\delta}$. Como podemos escrever $y_0 = x_0 + (y_0 - x_0)$, temos $y_0 \in (x_0 + \mathcal{C}_\delta) \cap B_{r_\delta}$, implicando que $u(y_0) > 0$, o que é uma contradição visto que $y \in \Gamma(u)$. Isto encerra a prova da Proposição. \square

Diante dos resultados obtidos, um passo adicional nos fornecerá uma prova da regularidade C^1 da fronteira livre na vizinhança de um ponto regular. Antes disso, necessitamos do lema a seguir.

Lema 5.11. *Seja $u \in P_1(M)$ uma solução de (O) tal que 0 é ponto regular. Então existe $\rho > 0$ tal que todos os pontos em $\Gamma(u) \cap B_\rho$ são regulares.*

Demonstração. Tomando $\delta = 1$ no Lema 5.7, temos que $\partial_{\mathbf{e}} u \geq 0$ em B_{r_1} para qualquer $\mathbf{e} \in \mathcal{C}_1$. Assim, qualquer *blowup* u_0 em um ponto $y \in \Gamma(u) \cap B_{r_1}$ deve satisfazer $\partial_{\mathbf{e}} u_0 \geq 0$ em \mathbb{R}^n para qualquer direção $\mathbf{e} \in \mathcal{C}_1$. Pela classificação de *blowups* em [22, Teorema 3.22], temos que u_0 tem a forma de uma solução no semiespaço, como na Definição 5.8, ou é uma solução polinomial, isto é, assume a forma

$$u_0(x) = \frac{1}{2}(x \cdot Ax), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $A = [A_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ é uma matriz simétrica $n \times n$ com $\text{Tr} A = 1$. Supondo por absurdo que u_0 é uma solução polinomial, como definida acima, então teríamos

$$\partial_{\mathbf{e}} u_0(x) = Ax \cdot \mathbf{e} = \sum_{i=1}^n A_{1i} x_i \mathbf{e}_1 + \cdots + \sum_{i=1}^n A_{ni} x_i \mathbf{e}_n \geq 0, \quad \text{para qualquer } \mathbf{e} \in \mathcal{C}_1,$$

e todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sendo A simétrica (e portanto diagonalizável) e com traço igual a 1, a menos de uma rotação nos eixos coordenados, podemos supor sem perda de generalidade que A é uma matriz diagonal com $A_{nn} > 0$. Assim, para $x = (0, \dots, -\mathbf{e}_n)$, temos

$$Ax \cdot \mathbf{e} = -A_{nn} \mathbf{e}_n^2 < 0,$$

uma contradição. Portanto, u_0 deve ser uma solução no semiespaço. Então, o lema é válido com $\rho = r_1$. \square

Por fim, temos o seguinte teorema:

Teorema 5.12. *Seja $u \in P_1(M)$ uma solução do problema (O) tal que 0 é ponto regular. Então, existe $\rho > 0$ tal que $\Gamma(u) \cap B_\rho$ é um gráfico C^1 .*

Demonstração. Podemos assumir que $u_0(x) = (x_n^+)^2/2$ é um *blowup* na origem. Então, pela Proposição 5.10, $\Gamma(u) \cap B_\rho$ é um gráfico Lipschitz $x_n = f(x')$, com $f(0) = 0$ e $|f(x')| \leq \delta|x'|$ em $B'_{r_\delta/2}$ (vem do fato de que a constante Lipschitz não excede δ). Como podemos escolher δ arbitrariamente pequeno, obtemos a existência de um plano tangente a $\Gamma(u)$ na origem com e_n sendo o vetor normal ao plano. Pelo Lema 5.11, todos os pontos $z \in \Gamma(u) \cap B_\rho$ são regulares e portanto $\Gamma(u)$ tem um plano tangente em todos esses pontos. Seja então ν_z o vetor normal unitário em $z \in \Gamma(u)$ apontando para $\Omega(u)$. Então o Lema 5.7 implica que $\nu_z \cdot \mathbf{e} \geq 0$ para qualquer $\mathbf{e} \in \mathcal{C}_\delta$ se $z \in \Gamma(u) \cap B_{r_\delta}$. Com isso, temos que ν_z é do dual do cone \mathcal{C}_δ , isto é, $\nu_z \in \mathcal{C}_{1/\delta}$. Em particular, obtemos

$$|\nu_z - e_n| \leq C\delta, \quad z \in \Gamma(u) \cap B_{r_\delta}.$$

A desigualdade acima nos diz que $\Gamma(u)$ é C^1 na origem. O mesmo argumento pode ser aplicado para qualquer $z \in \Gamma(u) \cap B_\rho$, visto que todos os pontos desse conjunto são regulares. Isso completa a prova do teorema. \square

Apêndice A

Resultados Auxiliares

A.1 Resultados sobre Teoria da Medida

Definição A.1 (Ponto de Lebesgue, [13, Definição 1.24]). Um ponto x é chamado *ponto de Lebesgue* de f com respeito a medida μ de Radon em \mathbb{R}^n se satisfaz

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f - f(x)|^p d\mu \right) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Teorema A.1 (Pontos de Lebesgue para medidas de Radon, [13, Teorema 1.33]). *Seja μ uma medida de Radon em \mathbb{R}^n , e suponha que $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Então, (A.1) vale para quase todo ponto x segundo a medida μ .*

A.2 Resultados em Equações Diferenciais Parciais

A seguir, apresentaremos alguns resultados sobre EDPs que são utilizados no trabalho.

Teorema A.2 ([16, Teorema 2.10]). *Seja u harmônica em Ω e seja Ω' qualquer subconjunto compacto de Ω . Então, para qualquer multi-índice α , temos*

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d} \right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|,$$

onde $d = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Teorema A.3 (Estimativa Calderón-Zygmund, [22, Teorema 1.1]). *Sejam $u \in L^1(D)$ e $f \in L^p(D)$ com $1 < p < \infty$ tais que*

$$\Delta u = f \quad \text{em } D,$$

no sentido das distribuições. Então $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(D)$ e vale a estimativa

$$\|u\|_{W^{2,p}(K)} \leq C (\|u\|_{L^1(D)} + \|f\|_{L^p(D)}),$$

para qualquer $K \Subset D$, onde $C = C(p, n, K, D)$.

A seguir temos o exemplo de uma função que satisfaz as hipóteses do Teorema A.3, mas não está em $u \in W_{\text{loc}}^{2,\infty}(D)$.

Exemplo A.2. Considere a função

$$u(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2) \ln(x_1^2 + x_2^2).$$

Mostraremos que u é localmente limitada e satisfaz

$$\Delta u = f \quad \text{em } \mathbb{R}^2,$$

no sentido das distribuições para uma certa $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, mas não está em $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$.

Primeiro, mostraremos que u é localmente limitada. Considerando $u(0,0) = 0$, temos que u é contínua em todo \mathbb{R}^2 . De fato, para $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ u é claramente contínua em (x_1, x_2) . Assim, basta verificar que u é contínua na origem. Para isso, note que,

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} u(x_1, x_2) = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos(2\theta) \ln(r^2) = 0.$$

Logo, u é localmente limitada. Calculando Δu , temos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, x_2) = 2 \ln(x_1^2 + x_2^2) + \frac{8x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} - 2 \frac{(x_1^2 - x_2^2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2}(x_1, x_2) = -2 \ln(x_1^2 + x_2^2) - \frac{8x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + 2 \frac{(x_1^2 - x_2^2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Com isso,

$$\Delta u(x_1, x_2) = 8 \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \quad \text{para } (x_1, x_2) \neq (0,0).$$

Assim, considerando

$$f(x_1, x_2) = 8 \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

é fácil ver que $|f(x_1, x_2)| \leq 8$ e portanto, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pelo Teorema A.3, temos que $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^2)$ para todo $1 < p < \infty$. Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, x_2) \right| &= \left| 2 \ln(x_1^2 + x_2^2) + \frac{8x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} - 2 \frac{(x_1^2 - x_2^2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right| \\
 &\geq \left| 2 \ln(x_1^2 + x_2^2) + 8 \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \right| - \left| 2 \frac{(x_1^2 - x_2^2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right| \\
 &\geq \left| 2 \ln(x_1^2 + x_2^2) + 8 \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \right| - 2.
 \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \left| 2 \ln(x_1^2 + x_2^2) + 8 \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \right| = \infty,$$

concluimos que $D^2 u \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$ e portando, $u \notin W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$.

Teorema A.4. *Seja $v \in C(D)$ uma função sub harmônica não negativa no conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Então $v \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$.*

Demonstração. Note que molificações v_ε de v satisfazem a desigualdade

$$\int_D \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \psi dx \leq 0,$$

para toda $\psi \in C_0^\infty(D)$ com $\psi \geq 0$. Assim, tomando $\psi = v_\varepsilon \varphi^2$ com $\varphi \in C_0^\infty(D)$ e supondo ainda que $\varphi \equiv 1$ em $B_\rho \subset \text{supp } \varphi =: K$, temos

$$\int_D \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla (v_\varepsilon \varphi^2) dx = \int_D |\nabla v_\varepsilon|^2 \varphi^2 dx + \int_D v_\varepsilon \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla (\varphi^2) dx \leq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_D |\nabla v_\varepsilon|^2 \varphi^2 dx &\leq - \int_D v_\varepsilon \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla (\varphi^2) dx \\
 &= - \int_D \nabla \left(\frac{v_\varepsilon^2}{2} \right) \cdot \nabla (\varphi^2) dx \\
 &= \int_D \Delta (\varphi^2) \frac{v_\varepsilon^2}{2} dx - \int_{\partial D} \frac{v_\varepsilon^2}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} (\varphi^2) dx \\
 &= \int_D \Delta (\varphi^2) \frac{v_\varepsilon^2}{2} dx - \int_{\partial D} v_\varepsilon^2 \varphi (\nabla \varphi \cdot \nu) dx \\
 &= \int_D \Delta (\varphi^2) \frac{v_\varepsilon^2}{2} dx.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\int_{B_\rho} |\nabla v_\varepsilon|^2 \leq \int_K |\nabla v_\varepsilon|^2 \varphi^2 \leq C \int_K v_\varepsilon^2,$$

onde $C = C(\varphi)$. Com isso, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$, segue que

$$\|v\|_{W^{1,2}(B_\rho)} \leq C \|v\|_{L^2(K)} < \infty,$$

sendo que a última desigualdade vem do fato de que v é contínua em D . Portanto, $v \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$. \square

Teorema A.5. *Seja $v \in W_0^{1,2}(D) \cap C(D)$, não negativa no conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Se $\Delta v \geq -a$ no sentido das distribuições em $\{v > 0\}$ para algum $a \geq 0$, então $\Delta v \geq -a$ em D .*

Demonstração. Como $\Delta v \geq -a$ em $\{v > 0\} =: E$, então

$$\int_E \nabla v \nabla \varphi dx \leq a \int_E \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(E)$ com $\varphi \geq 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\varphi = \psi_\varepsilon(v)\phi$, onde $\phi \in C_0^\infty(D)$, $\phi \geq 0$ e ψ_ε satisfazendo

$$\psi'_\varepsilon \geq 0, \quad 0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1, \quad \psi_\varepsilon(s) = 0 \quad \text{para } t < \varepsilon \quad \text{e} \quad \psi_\varepsilon(s) = 1 \quad \text{para } t \geq 2\varepsilon.$$

Temos então

$$a \int_D \phi dx \geq a \int_E \phi dx \geq a \int_E \psi_\varepsilon \phi dx = \int_E \nabla v \nabla (\psi_\varepsilon \phi) dx = \int_D \nabla v \nabla (\psi_\varepsilon \phi) dx.$$

Por outro lado, utilizando o fato de que $\psi_\varepsilon = \nabla \psi_\varepsilon = 0$ para $t < \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \int_D \nabla v \nabla (\psi_\varepsilon \phi) dx &= \int_D [(\nabla v \nabla \psi_\varepsilon) \phi + (\nabla v \nabla \phi) \psi_\varepsilon] dx \\ &= \int_{\{\varepsilon < v < 2\varepsilon\}} [(\nabla v \nabla \psi_\varepsilon) \phi + (\nabla v \nabla \phi) \psi_\varepsilon] dx \\ &\quad + \int_{\{v > 2\varepsilon\}} [(\nabla v \nabla \psi_\varepsilon) \phi + (\nabla v \nabla \phi) \psi_\varepsilon] dx \\ &= \int_{\{\varepsilon < v < 2\varepsilon\}} [(\nabla v \nabla \psi_\varepsilon) \phi + (\nabla v \nabla \phi) \psi_\varepsilon] dx + \int_{\{v > 2\varepsilon\}} \nabla v \nabla \phi dx \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\int_D \nabla v \nabla \phi dx = \int_E \nabla v \nabla \phi dx \leq a \int_D \phi dx. \quad \square$$

Referências Bibliográficas

- [1] ALT, H. W.; CAFFARELLI, L. A.; FRIEDMAN, A. *Variational Problems with Two Phases and their Free Boundaries*. Transactions of the American Mathematical Society, 282(2), 431–461. (1984). <https://doi.org/10.2307/1999245>.
- [2] ANDERSSON, J.; WEISS, G. S. *Cross-shaped and degenerate singularities in an unstable elliptic free boundary problem*, Journal of Differential Equations, Volume 228, ed 2, 2006, 633-640, ISSN 0022-0396, <https://doi.org/10.1016/j.jde.2005.11.008>.
- [3] AXLER, S.; BOURDON, P.; RAMEY, W. *Harmonic function theory*, Springer Science & Business Media, 2000.
- [4] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, IMPA, 2011.
- [5] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.
- [6] CAFFARELLI, L. A. *The obstacle problem*, Lezioni Fermiane [Fermi Lectures], Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1998.
- [7] CAFFARELLI, L. A.; JERISON, D.; KENIG, C. E. *Some New Monotonicity Theorems with Applications to Free Boundary Problems*. *Annals of Mathematics*, 155(2), 369–404. 2002. <https://doi.org/10.2307/3062121>
- [8] CAFFARELLI, L. A.; KARP, L.; SHAHGOLIAN, H. *Regularity of a Free Boundary with Application to the Pompeiu Problem*. *Annals of Mathematics*, 151(1), 269–292. (2000). <https://doi.org/10.2307/121117>.
- [9] CAFFARELLI, L. A.; SHAHGOLIAN, H. *The structure of the singular set of a free boundary in potential theory*. *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat*, 39(2), 43-58. (2004).

- [10] CAFFARELLI, L. A.; SALSA, S. *A geometric approach to free boundary problems*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. <https://doi.org/10.1090/gsm/068>.
- [11] DEMENGEL, F.; DEMENGEL, G. *Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations*. Springer, 2012.
- [12] EVANS, L. C. *Partial Diferential Equations, Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, 1998.
- [13] EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Revised Edition (1st ed.). Chapman and Hall/CRC. 2015. <https://doi.org/10.1201/b18333>.
- [14] FIGUEIREDO, D. G. *Equações Elípticas Não-Lineares*, IMPA 11o. CBM (1977).
- [15] FRIEDLAND, S.; HAYMAN, W.K. *Eigenvalue inequalities for the dirichlet problem on spheres and the growth of subharmonic functions*. Commentarii Mathematici Helvetici 51, 133–161 (1976). <https://doi.org/10.1007/BF02568147>
- [16] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, Reprint of the 1998 edition.
- [17] GOFFMAN, C. *Real Functions*, Rinehart & Company, New York, 1953.
- [18] HAN, Q.; LIN, F. *Elliptic Partial Differential Equations*, second edition, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 1, Courant Institute of Mathematical Sciences, American Mathematical Society, New York, Providence, RI, 2011.
- [19] KANNAN, R.; KRUEGER, C. K. *Advanced Analysis*. Universitext. 1996. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8474-8>.
- [20] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. vol. 2, Impa, 2018.
- [21] PETROSYAN, A.; SHAHGHOLIAN, H. *Geometric and energetic criteria for the free boundary regularity in an obstacle-type problem*. American Journal of Mathematics 129(6), 1659-1688. (2007). <https://doi.org/10.1353/ajm.2007.0042>.
- [22] PETROSYAN, A.; SHAHGHOLIAN, H.; URALTSEVA, N. *Regularity of free boundaries in obstacle-type problems*. American Mathematical Soc., 2012.

- [23] ROS-OTON, X.; SERRA, J. *Understanding singularities in free boundary problems*. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* 4.2 (2019): 107-118. <http://eudml.org/doc/295088>
- [24] SHAHGHOLIAN, H. $C^{1,1}$ *Regularity in semilinear elliptic problems*. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56: 278-281. (2003). <https://doi.org/10.1002/cpa.10059>.
- [25] WEISS, G. *A homogeneity improvement approach to the obstacle problem*. *Invent. math.* 138, 23–50 (1999). <https://doi.org/10.1007/s002220050340>.
- [26] WINTER, N. $W^{2,p}$ and $W^{1,p}$ -Estimates at the Boundary for Solutions of Fully Nonlinear, Uniformly Elliptic Equations. *Z. Anal. Anwend.* 28 (2009), no. 2, pp. 129–164. <https://doi.org/10.4171/zaa/1377>.