UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

João Vitor da Silva Pereira Campos

Formas Canônicas: considerações e métodos para obtê-las

Rio Tinto – PB
2024

João Vitor da Silva Pereira Campos

Formas Canônicas: considerações e métodos para obtê-las

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Marcos André José Valcácio

Rio Tinto – PB
2024

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C198f Campos, João Vitor da Silva Pereira.
Formas Canônicas : considerações e métodos para obtê-las / João Vitor da Silva Pereira Campos. - Rio Tinto, 2024.
49 f.

Orientação: Marcos André José Valcácio.
TCC (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. Álgebra Linear. 2. Operadores Lineares. 3. Formas Canônicas. I. Valcácio, Marcos André José. II. Título.

UFPB/CCAE CDU 512

Elaborado por JONISMAR KENDYS DA SILVA LEAO - CRB-4/2332

João Vitor da Silva Pereira Campos

Formas Canônicas: considerações e métodos para obtê-las

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Marcos André José Valcácio

Aprovado em: 15 de outubro de 2024

BANCA EXAMINADORA

Marcos André José Valcácio

Prof. Me. Marcos André José Valcácio (Orientador)
UFPB / DCX

José Elias dos Santos

Prof. Dr. José Elias dos Santos Filho
UFPB / DCX

Agnes Liliane L. Soares de Santana

Profa. Ma. Agnes Liliane Lima Soares de Santana
UFPB / DCX

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha mãe, que, com imensa força e dedicação, fez de tudo por mim, muitas vezes sozinha. Sua coragem, amor e sacrifício são os pilares que me sustentam. Tudo o que sou e tudo o que conquistei devo a você.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por nunca ter me desamparado em meio a tantas tribulações que enfrentei ao decorrer o curso. Me abasteceu sempre com sua infinita luz, fazendo assim com que eu nunca desistisse e chegasse ao fim desse trabalho.

À minha companheira, Larissa, meu profundo agradecimento por estar sempre ao meu lado. Sua paciência, compreensão e apoio incondicional foram fundamentais para que eu pudesse concluir este trabalho. Nos momentos de incerteza e cansaço, foi seu amor que me deu forças para seguir em frente.

Aos meus avós, dona Lia e seu Torreiro, minha eterna gratidão por todo o amor, sabedoria e apoio que sempre me deram. Vocês são exemplos de força e perseverança, e os valores que me transmitiram ao longo da vida foram essenciais para que eu pudesse chegar até aqui.

Ao meu orientador, Marcos André, expresso minha sincera gratidão por toda a orientação, paciência e dedicação ao longo desta jornada. Seu conhecimento e experiência foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas de curso, especialmente Justino e Higor, meu sincero agradecimento pela companhia e pelo apoio durante essa jornada. Juntos, enfrentamos desafios, compartilhamos conhecimentos e celebramos conquistas. A convivência e a troca de experiências com cada um de vocês enriqueceram não apenas meu aprendizado acadêmico, mas também minha vida pessoal.

Agradeço à banca examinadora, em especial ao professor José Elias, por sua atenção, ajuda e considerações durante a avaliação deste trabalho, e à professora Agnes, pelas contribuições oferecidas durante a defesa.

Por fim, agradeço de coração ao meu padrasto, Marcelo, in memoriam, por tudo o que fez por mim e por todo o apoio que sempre me deu. Sou eternamente grato por ter a sorte de compartilhar minha jornada com alguém tão especial.

“ A matemática pura é, a sua maneira,
a poesia das ideias lógicas.”
Albert Einstein

RESUMO

Em Álgebra Linear, os operadores lineares nem sempre podem ser diagonalizados, mas suas representações matriciais podem ser simplificadas por meio das Formas Canônicas, como a Forma Canônica de Jordan e a Forma Canônica Racional. Este estudo tem como objetivo entender como as Formas Canônicas podem simplificar a representação matricial de um operador T de um espaço vetorial de dimensão finita. Investigamos algumas das diversas formas canônicas utilizadas, destacando suas propriedades e métodos para obtê-las. Também ressaltamos a relevância dessas formas na simplificação de operadores lineares, permitindo uma análise mais detalhada de suas propriedades. Com base em referências, como Hoffman (1970), Herstein (1970), Gonçalves (2006), Coelho (2020), Lima (2006), Lipschutz (2004), dentre outros, investigamos como essas ferramentas auxiliam na representação e no entendimento de operadores. As Formas Canônicas desempenham um papel central na identificação das características essenciais dos operadores lineares, sendo cruciais tanto para a Álgebra Linear quanto para a Matemática Pura. Portanto, este estudo demonstra a importância dessas formas canônicas para a ampliação do conhecimento sobre a estrutura dos operadores lineares, tornando-as indispensáveis em várias áreas da Matemática.

Palavras-chave: Álgebra Linear; Operadores Lineares; Formas Canônicas.

ABSTRACT

In Linear Algebra, linear operators cannot always be diagonalized, but their matrix representations can be simplified using Canonical Forms, such as the Jordan Canonical Form and the Rational Canonical Form. This study aims to understand how Canonical Forms can simplify the matrix representation of an operator T of a finite-dimensional vector space. We investigate some of the various canonical forms used, highlighting their properties and methods for obtaining them. We also highlight the relevance of these forms in simplifying linear operators, allowing a more detailed analysis of their properties. Based on references such as Hoffman (1970), Herstein (1970), Gonçalves (2006), Coelho (2020), Lima (2006), Lipschutz (2004), among others, we investigate how these tools help in the representation and understanding of operators. Canonical Forms play a central role in identifying the essential characteristics of linear operators, being crucial for both Linear Algebra and Pure Mathematics. Therefore, this study demonstrates the importance of these canonical forms for expanding knowledge about the structure of linear operators, making them indispensable in several areas of Mathematics.

Keywords: Linear Algebra; Linear Operators; Canonical Forms.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nos estudos relacionados à Matemática Pura, nos deparamos na Álgebra Linear com os operadores lineares de um espaço vetorial de dimensão finita. Mas, de acordo com Lipschutz (2004), nem sempre esses operadores têm uma representação matricial na forma diagonalizável. Porém, pode-se "simplificar" essa representação matricial de algumas maneiras. Uma a ser destacada são as Formas Canônicas, como a Forma Canônica de Jordan. Segundo Lipchutz (2004, p. 326),

> um operador linear T pode ser representado na forma canônica de Jordan se seu polinômio mínimo e seu polinômio característico podem ser fatorados em polinômios lineares. Isto sempre ocorre se $\mathbb{K}$ for o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Em qualquer caso, podemos sempre estender o corpo base $\mathbb{K}$ a um corpo em que os polinômios mínimo e característico podem ser fatorados em polinômios lineares; assim, desse modo, todo operador tem uma Forma Canônica de Jordan. Analogamente, toda matriz é semelhante a uma matriz na Forma Canônica de Jordan.

À vista disso, estamos interessados em realizar uma investigação dentro da área de pesquisa de Matemática Pura, especificamente na subárea de linha de investigação de Álgebra Linear. Dentro dessa subárea de linha de investigação, estamos interessados em pesquisar sobre o seguinte assunto: Formas Canônicas. Tal assunto está voltado para o Ensino Superior, no qual é estudado no componente curricular de Álgebra Linear nos Cursos de Matemática.

A Forma Canônica de Jordan é uma representação especial de uma matriz ou operador linear que simplifica a matriz inicial por meio de uma transformação por uma matriz semelhante. Lipschutz (2004) afirma que "toda matriz é semelhante a uma matriz na forma canônica de Jordan". Assim, esta forma é particularmente útil em Álgebra Linear, especialmente para entender e analisar as propriedades estruturais de operadores lineares em espaços vetoriais de dimensão finita.

Para isso, buscamos responder o seguinte questionamento: *Dado um operador linear T de um espaço vetorial de dimensão finita, como as Formas Canônicas, em especial a Forma Canônica de Jordan, pode simplificar a representação matricial deste operador T?*

Percebemos que esta abordagem oferece uma perspectiva única na Álgebra Linear. Tendo em vista que a

> Álgebra Linear é um ramo da Matemática que surgiu do estudo sistemático de sistemas de equações lineares, tanto algébricas quanto diferenciais. A álgebra linear trata de alguns conceitos e objetos fundamentais da matemática, tais

> como: matrizes, sistemas de equações lineares, vetores, espaços vetoriais e transformações lineares. Tais conceitos são úteis em várias áreas da Matemática, seja explorando seus aspectos mais algébricos, ou levando em conta aspectos geométricos e topológicos inseridos na teoria (Tizziotti; Santos, 2012, p. 11).

Para fundamentar essa análise e obtermos uma fundamentação teórica, realizamos uma pesquisa bibliográfica na área de Álgebra Linear e Álgebra Abstrata, onde foram abordados os trabalhos de pesquisadores, como Hoffman (1970), Herstein (1970), Gonçalves (2006), Coelho (2020), Callioli (1995), Lima (2006), Lipschutz (2004), Steinbruch (1987), dentre outros. Assim, este estudo está dividido em cinco capítulos.

O segundo capítulo é dedicado ao estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares. Começamos com uma introdução detalhada do conceito de espaço vetorial, abordando suas propriedades e a importância dos conceitos de dependência e independência linear. Em seguida, discutimos as bases de um espaço vetorial e a matriz de mudança de base. Por último definimos transformação linear que podem ser representadas por matrizes e como influenciam a estrutura dos espaços vetoriais.

No terceiro capítulo, abordamos os conceitos de autovalores e autovetores, fundamentais para a análise de matrizes e sistemas lineares. Foram explorados os métodos de determinação de autovalores e autovetores, além de discutidas as condições necessárias para a diagonalização de matrizes, destacando sua importância na simplificação de operadores lineares.

O quarto capítulo foca nas formas canônicas das matrizes, um tópico em Álgebra Linear que permite uma compreensão mais profunda das propriedades estruturais das matrizes. Discutimos a forma canônica de Jordan e a Racional, analisando como essas representações podem simplificar problemas complexos e facilitar a resolução de sistemas lineares.

Por fim, considerando a importância das Formas Canônicas, investigamos suas propriedades e métodos de obtenção, destacando como essas ferramentas são imprescindíveis na simplificação de operadores lineares, explorando sua relevância e aplicação no contexto da Álgebra Linear.

2 ESPAÇO VETORIAL

Neste capítulo, exploraremos o conceito de espaço vetorial, uma estrutura fundamental em álgebra linear caracterizada por ser um grupo abeliano aditivo. Além disso, abordaremos tópicos essenciais associados, como subespaços vetoriais, bases e dimensão e matriz de mudança de base. Esses conceitos são cruciais para aprofundar nossa compreensão do tema e para aplicá-lo em diversas áreas da matemática.

Definição 2.0.1: Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e V um conjunto não vazio com regras de adição, onde para qualquer $u, v \in V$, $u + v \in V$, e multiplicação por escalar, onde para qualquer $u \in V$, $a \in \mathbb{K}$ o produto $au \in V$. Logo, V é chamado de *espaço vetorial* sobre $\mathbb{K}$ se os seguintes axiomas são satisfeitos

i) Para todo vetor $u, v, w \in V$, tem-se $(u + v) + w = u + (v + w)$.

ii) Existe um único vetor em V, denotado por $\vec{0}$ e chamado vetor nulo, para o qual $u + \vec{0} = u$ para qualquer vetor $u \in V$.

iii) Existe um vetor denotado por $(-u)$, para o qual $u + (-u) = \vec{0}$.

iv) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, tem-se $u + v = v + u$.

v) Para qualquer escalar $a \in \mathbb{K}$ e quaisquer vetores $u, v \in V$, tem-se $a(u + v) = au + av$.

vi) Para quaisquer escalares $a, b \in \mathbb{K}$ e qualquer vetor $u \in V$, tem-se $(a + b)u = au + bu$.

vii) Para quaisquer escalares $a, b \in \mathbb{K}$ e qualquer vetor $u \in V$,$(ab)u = a(bu)$.

viii) Para a unidade escalar $1 \in \mathbb{K}$, tem-se $1u = u$, para qualquer vetor $u \in V$.

Os axiomas acima são divididos em dois conjuntos. Os quatro primeiros são referentes à estrutura aditiva de V. Por outro lado, os quatro axiomas restantes são referente à ação do corpo $\mathbb{K}$ sobre V.

Observação 2.0.2: Utilizaremos "Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial" quando nos referirmos à "V sendo um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$".

Observação 2.0.3: Utilizaremos o 0 (zero) como representação para o vetor $\vec{0}$.

Proposição 2.0.4: *Dado V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, então temos as seguintes propriedades:*

(i) Para quaisquer $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$, então $u = v$.

(ii) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se: $-(-v) = v$.

(iii) Quaisquer que sejam $u, v \in V$, existe um e somente um $x \in V$ tal que: $u + x = v$.

(iv) Se $av = 0$, então $a = 0$ ou $v = 0$.

(v) Quaisquer que sejam $v \in V$ e $a \in \mathbb{K}$, tem-se: $(-a)v = a(-v) = -(av)$.

Exemplo 2.0.5: Seja $\mathbb{L}$ um corpo e $\mathbb{K}$ um subcorpo de $\mathbb{L}$. Então, podemos interpretar $\mathbb{L}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, pois $(\mathbb{L}, +)$ satisfaz os quatro primeiros axiomas e, dados $a \in \mathbb{K}$ e $v \in \mathbb{L}$, temos que $av \in \mathbb{L}$ e os quatro axiomas restantes são satisfeitos. $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ é dito "uma extensão do corpo $\mathbb{K}$".

Exemplo 2.0.6: Verifiquemos se o conjunto $V = \mathbb{R}^2$ pode ser visto como um espaço vetorial munido das seguintes operações:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (0, y_1 + y_2)$$
$$a(x, y) = (ax, ay); a \in \mathbb{R}$$

Note que não é um espaço vetorial, pois há uma falha no axioma (ii). Considere $v = (x_1, y_1)$ e o vetor nulo como $n = (n_1, n_2)$. Daí,

$$v + n = v \Leftrightarrow (x_1, y_1) + (n_1, n_2) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow (0, y_1 + n_2) = (x_1, y_1)$$

Logo, $x_1 = 0$ para que a igualdade seja válida. Portanto, o termo n_1 do elemento neutro não participa da adição, ou seja, n_1 é livre e assim o elemento neutro não é único.

2.1 SUBESPAÇO VETORIAL

Definição 2.1.1: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Um *subespaço vetorial* (ou simplesmente um subespaço) de V é um subconjunto $W \subset V$ com as seguintes propriedades:
1) $0 \in W$;
2) Se $u, v \in W$, então $u + v \in W$;
3) Se $v \in W$ então, para todo $a \in \mathbb{K}$, $av \in W$.

Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços: o conjunto $\{0\}$ e o próprio V. Esses são chamados subespaços triviais de V. Os outros são denominados subespaços próprios de V.

Por exemplo, os subespaços triviais de $V = \mathbb{R}^3$ são $\{(0, 0, 0)\}$ e o próprio $\mathbb{R}^3$. Os subespaços próprios do $\mathbb{R}^3$ são as retas e os planos que passam pela origem. Para $V = \mathbb{R}^2$, os subespaços próprios são as retas que passam pela origem.

Exemplo 2.1.2: Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{w \in \mathbb{R}^2 / w = a(2, 2), \forall a \in \mathbb{R}\}$, verificaremos se W é subespaço. Evidentemente,
1) $0 \in W$, pois para $a = 0$, $a\,(2, 2) = 0(2, 2) = (0, 0)$. Logo, $(0, 0) \in W$.

2) Para $w_1 = a_1\,(2,2) \in W$ e $w_2 = a_2\,(2,2) \in W$, tem-se:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= a_1\,(2,2) + a_2\,(2,2) \\ &= (a_1 + a_2)(2,2) \in W. \end{aligned}$$

3) Seja $b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} bu &= b(a(2,2)) \\ &= ab(2,2) \in W. \end{aligned}$$

Logo, W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

2.2 SOMA DIRETA

Definição 2.2.1: Sejam U e W subespaços vetoriais de V tais que $U \cap W = \{0\}$. Neste caso diz-se que $U + W$ é soma direta dos subespaços U e W.
Notação: $U \oplus W$.

Proposição 2.2.2: *Sejam U e W subespaços vetoriais de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V. Então $V = U \oplus W$ se, e somente se, cada vetor $v \in V$ admite uma única decomposição $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Por hipótese a decomposição existe. Seja $v \in V$, suponhamos que $v = u + w = u_1 + w_1$ ($u, u_1 \in U$ e $w, w_1 \in W$). Daí, $u - u_1 = w_1 - w$. Então, $w_1 - w$, $u - u_1 \in U \cap W = \{0\}$. Logo $u - u_1 = 0$ e $w_1 - w = 0$. Assim, conclui-se que $u = u_1$ e $w_1 = w$.
($\Leftarrow$) Suponhamos que $v \in U \cap W$. Tomando $u \in U$ e $w \in W$, teremos:

$$u + w = (u + v) + (w - v).$$

Devido à unicidade que a hipótese menciona, podemos afirmar que:

$$u = u + v \text{ e } w = w - v \Rightarrow v = 0$$

Logo, $U \cap W = \{0\}$.

■

2.3 COMBINAÇÃO LINEAR

Sejam os vetores $u_1, u_2, ..., u_n$ do espaço vetorial V e os escalares $a_1, a_2, ..., a_n$. Qualquer vetor $v \in V$ da forma:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n,$$

é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$.

Exemplo 2.3.1: No espaço vetorial P_2 dos polinômios de grau ≤ 2, o polinômio $v = 36x^2 + 6x - 33$ é uma combinação linear dos polinômios:

$$v_1 = 8x^2 - 2x + 1 \text{ e } v_2 = -4x^2 + 4x - 8,$$

De fato,

$$v = 7v_1 + 5v_2.$$

2.4 DEPENDÊNCIA LINEAR

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Definição 2.4.1: Dizemos que um conjunto $L = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$ é ***Linearmente Independente*** (LI) se, e somente se, uma igualdade do tipo

$$a_1u_1 + ... + a_nu_n = 0, \tag{2.1}$$

com os a_i em $\mathbb{K}$, só for possível para $a_1 = ... = a_n = 0$.

Definição 2.4.2: Dizemos que $L = \{u_1, ..., u_n\} \subset V$ é *Linearmente Dependente* (LD) se, e somente se, L não é LI, ou seja, é possível na igualdade 2.1 que nem todos os escalares a_i sejam todos iguais a zero.

Teorema 2.4.3: *Um conjunto $L = \{u_1, ..., u_i, \ldots, u_n\}$ é LD se, e somente se, pelo menos um desses vetores é uma combinação linear dos outros.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja L linearmente dependente. Então, por definição, um dos coeficientes da igualdade:

$$a_1u_1 + ... + a_iu_i + ... + a_nu_n = 0$$

deve ser diferente de zero. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a_i \neq 0$, daí:

$$\begin{aligned} a_iu_i &= -a_1u_1 - ... - a_{i-1}u_{i-1} - a_{i+1}u_{i+1} - a_nu_n \\ u_i &= \tfrac{-a_1}{a_i}u_1 - ... - \tfrac{-a_{1-i}}{a_i}u_{i-1} - \tfrac{-a_{1+i}}{a_i}u_{i+1} - \tfrac{-a_n}{a_i}u_n. \end{aligned}$$

Portanto, u_i é uma combinação linear dos outros vetores.
($\Leftarrow$) Por outro lado, seja u_i uma combinação linear dos outros vetores:

$$u_i = a_1u_1 + ... + a_{i-1}u_{i-1} + a_{i+1}u_{i+1} + ... + a_nu_n$$

Dessa forma,

$$a_1u_1 + ... + a_{i-1}u_{i-1} + (-1)u_i + a_{i+1}u_{i+1} + ... + a_nu_n = 0.$$

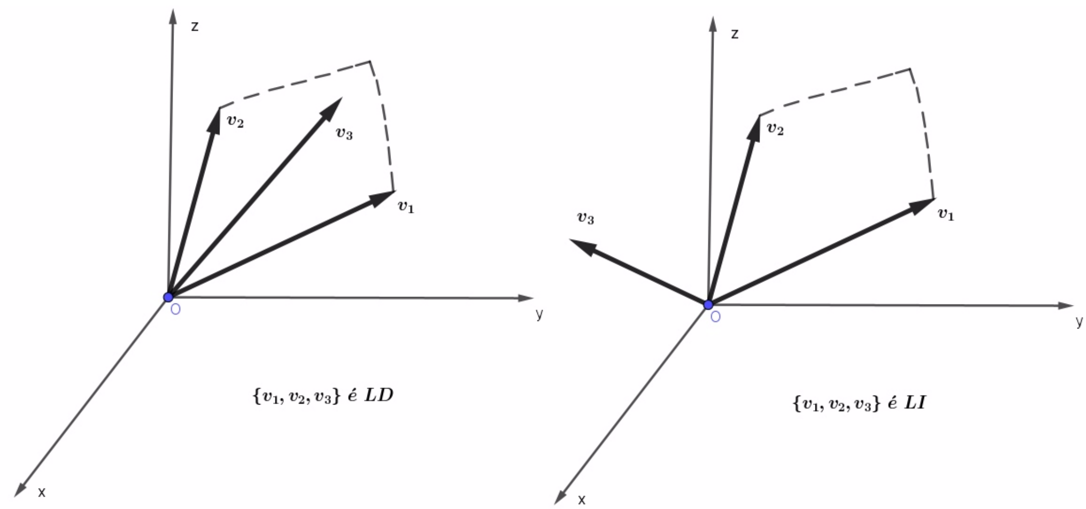
Assim, $a_i = -1 \neq 0$. Portanto, $\{u_1, ..., u_i, ..., u_n\}$ é LD.

■

Observação 2.4.4: Esse último Teorema pode ser anunciado de forma equivalente: Um conjunto $L = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é LI se, e somente se, nenhum desses vetores for combinação linear dos outros.

Observação 2.4.5: Na figura 1 apresentamos uma interpretação geométrica da dependência linear de três vetores no $\mathbb{R}^3$.

Figura 1 – Interpretação geométrica da dependência e independência linear de três vetores no $\mathbb{R}^3$.



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2024)

Exemplo 2.4.6: O conjunto $L = \{(2, 9, 0, 0), (0, 10, 0, 0), (4, 4, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$ é LD pois:

$$x(2, 9, 0, 0) + y(0, 10, 0, 0) + z(4, 4, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 9x + 10y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = \left(-2z, \tfrac{7}{5}z, z\right), z \in \mathbb{R}.$$

Então existem outras soluções, além da trivial, para a igualdade condicional de que partimos.

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Temos as seguintes propriedades da dependência e independência linear:

Propriedade 2.4.7: Se um conjunto $L \subset V$ contém o vetor nulo, então L é LD.

Seja o conjunto $L = \{0, v_2, ..., v_n\}$. Então, a equação $a.0 + 0.v_2 + ... + 0.v_n = 0$, se verifica $\forall a \neq 0$. Portanto L é LD.

Propriedade 2.4.8: Se uma parte de um conjunto $L \subset V$ é LD, então L é também LD.

Sejam $L = \{v_1, ..., v_r, ..., v_n\}$ e a parte de $L_1 = \{v_1, ..., v_r\} \subset L$, com L_1 sendo LD. Logo, existem $a_i \neq 0$, que verificam a igualdade: $a_1v_1 + ... + a_rv_r = 0$. E esses mesmos $a_i \neq 0$ verificam também a igualdade: $a_1v_1 + ... + a_rv_r + 0.v_{r+1} + ... + 0.v_n = 0$. Logo, $L = \{v_1, ..., v_r, ..., v_n\}$ é LD.

Propriedade 2.4.9: Se um conjunto $L \subset V$ é LI, qualquer parte L_1 de L é também LI.

De fato, se L_1 fosse LD, pela propriedade anterior o conjunto L seria também LD, o que contradiz a hipótese.

Observação 2.4.10: Se todos os subconjuntos próprios de um conjunto finitos de vetores são LI, o fato não significa que o conjunto seja LI. De fato, se considerarmos no $\mathbb{R}^2$ os vetores $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ e $v = (4, 5)$, verificaremos que cada um dos subconjuntos $\{e_1,\ e_2\}$, $\{e_1, v\}$, $\{e_2, v\}$, $\{e_1\}$, $\{e_2\}$ e $\{v\}$ são LI, enquanto o conjunto $\{e_1, e_2, v\}$ é LD.

2.5 BASE E DIMENSÃO

A base de um espaço vetorial é um conceito essencial de Álgebra Linear, pois oferece uma forma estruturada de representar todos os vetores do espaço vetorial de maneira exclusiva. Por meio de um conjunto de vetores da base, é possível obter qualquer vetor como uma combinação dos vetores dessa base, o que facilita a análise e manipulação de vetores e transformações lineares. A relevância da base está no fato de que, ao selecionar uma base apropriada, conseguimos simplificar questões complexas, como a diagonalização de matrizes e a solução de sistemas lineares, além de proporcionar uma compreensão mais clara das propriedades e dimensão do espaço vetorial.

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Definição 2.5.1: Um conjunto $\beta = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ é uma *base* de um espaço vetorial V se:
1) β é LI;
2) β gera V, ou seja, qualquer $v \in V$ é combinação linear de β.

Definição 2.5.2: Definimos *dimensão* de V (notação: $dim\ V$) a quantidade de vetores de qualquer uma de suas bases.

Observação 2.5.3: Se o número de vetores na base de v for infinito, então $dim\ V = \infty$.

Teorema 2.5.4: *Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.*

Demonstração: Se $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente independentes, então eles cumprem as condições para uma base, e não temos mais nada a fazer. Se $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente dependentes, então existe uma combinação linear deles

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0,$$

com algum coeficiente não nulo. Sem perda de generalidade, considere $a_n \neq 0$. Então podemos escrever

$$v_n = \frac{-a_1}{a_n}v_1 + \frac{-a_2}{a_n}v_2 + ... + \frac{-a_{n-1}}{a_n}v_{n-1},$$

ou seja, v_n é uma combinação linear de $v_1, ..., v_{n-1}$ e, portanto, $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$ ainda geram V. Se $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$ for LD, então existe uma combinação linear deles dando o vetor nulo e com algum coeficiente diferente de zero; portanto, poderemos extrair aquele vetor correspondente a este coeficiente. Seguindo desta forma, após uma quantidade finita de estágios, chegaremos a um subconjunto $\{v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{ir}\}$, formado por r $(r \leq n)$ vetores LI, que ainda geram V, ou seja, formaremos uma base.

■

Teorema 2.5.5: *Se $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ for uma base de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, então todo conjunto com mais de n vetores será LD.*

Demonstração: Seja $\beta' = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ um conjunto qualquer de m vetores de V, com $m > n$. Pretende-se mostrar que β' é LD. Para tanto, basta mostrar que existem escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ não todos nulos, tais que

$$x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_mw_m = 0. \tag{2.2}$$

Como β é uma base de V, cada vetor w_i pertencente a β' é uma combinação linear dos outros vetores, isto é, existem escalares $a_i, b_i, ..., d_i$ tais que

$$\begin{array}{ccccccccc} w_1 & = & a_1v_1 & + & a_2v_2 & + & ... & + & a_nv_n \\ w_2 & = & b_1v_1 & + & b_2v_2 & + & ... & + & b_nv_n \\ & & \vdots & & & & \ddots & & \\ w_m & = & d_1v_1 & + & d_2v_2 & + & ... & + & d_nv_r. \end{array} \tag{2.3}$$

Substituindo as relações 2.3 em 2.2, obtemos:

$$x_1(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) + x_2(b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n) + \ldots +$$
$$+ x_m(d_1v_1 + d_2v_2 + ... + d_nv_r) = 0,$$

ou ordenando os termos convenientemente

$$(a_1x_1 + b_1x_2 + ... + d_1x_m)v_1 + (a_2x_1 + b_2x_2 + ... + d_2x_m)v_2 + \ldots +$$
$$+(a_nx_1 + b_nx_2 + ... + d_nx_m)v_n = 0.$$

Tendo em vista que $v_1, ..., v_n$ são LI, então os coeficientes dessa combinação linear são nulos:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + ... + d_1x_m = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + ... + d_2x_m = 0 \\ \vdots \\ a_nx_1 + b_nx_2 + ... + d_nx_m = 0 \end{cases}.$$

Temos um sistema linear homogêneo que possui m variáveis $x_1, x_2, ..., x_m$ e n equações. Como $m > n$, existem soluções não nulas, isto é, existe $x_i \neq 0$. Logo, $\beta' = \{w_2, w_2, \ldots, w_m\}$ é LD.

■

Corolário 2.5.6: *Duas bases quaisquer de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial tem o mesmo número de vetores.*

Demonstração: Sejam $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$ duas bases de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V. Como α é base e β é LI, pelo teorema anterior, $n \geq m$. Por outro lado, como β é base e α é LI, tem-se $n \leq m$. Portanto $n = m$.

■

2.6 MATRIZ DE MUDANÇA DE BASE

Sejam α e β bases de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Consideremos $dim\ V = n$. Sejam as bases $\alpha = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $\beta = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$. Dado um vetor $v \in V$ podemos expressá-lo na combinação linear das bases α e β como:

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n \tag{2.4}$$

$$v = y_1w_1 + y_2w_2 + ... + y_nw_n. \tag{2.5}$$

Por sua vez, os vetores da base α podem ser escritos em relação à base β, da seguinte forma:

$$v_i = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + ... + a_{ni}w_n, \text{ para } i = 1, 2, ..., n. \tag{2.6}$$

Substituindo 2.6 em 2.4, temos:

$$v = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{n1}w_n) + x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{n2}w_n)$$
$$+x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{nn}w_n).$$

Logo,

$$v = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)w_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)w_2 + \\ +(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n)w_n. \tag{2.7}$$

Comparando 2.7 com 2.5 e tendo em vista que a combinação linear é única, temos:

$$y_j = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + ... + a_{nj}x_n, \text{ para } j = 1, 2, ..., n,$$

ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ou, mais simplesmente pela equação:

$$[v]_\beta = [I]^\alpha_\beta [v]_\alpha.$$

Sendo a Matriz:

$$[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

chamada *matriz de mudança de base* de α para β. Notemos que o papel dessa matriz é transformar as coordenadas de um vetor v na base α em coordenadas do mesmo vetor v na base β.

Observação 2.6.1: A matriz $[I]^\alpha_\beta$, por transformar os vetores LI da base α nos vetores LI da base β, é inversível, pois o determinante da matriz mudança de base é diferente de zero já que a 2.7 tem solução. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} [v]_\beta &= [I]^\alpha_\beta [v]_\alpha \\ ([I]^\alpha_\beta)^{-1} [v]_\beta &= ([I]^\alpha_\beta)^{-1} [I]^\alpha_\beta [v]_\alpha \\ ([I]^\alpha_\beta)^{-1} [v]_\beta &= [v]_\alpha. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$[v]_\alpha = [I]^\beta_\alpha [v]_\beta.$$

De onde se conclui que

$$([I]^\alpha_\beta)^{-1} = [I]^\beta_\alpha.$$

Isto é, a inversa da matriz mudança de base de α para β é a matriz mudança de base de β para α.

2.7 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Uma ideia fundamental na álgebra linear é a transformação linear, que pode representar funções que transferem vetores de um espaço vetorial para outro, mantendo as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar. São essenciais em várias áreas práticas. Isso inclui computação gráfica, onde são usados para manipular imagens e modelos tridimensionais, e engenharia, onde ajudam na análise e controle de processos de sistemas dinâmicos.

Definição 2.7.1: Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Dados $u, v \in V$ e $a \in \mathbb{K}$, uma aplicação $T : V \to W$ é chamada uma transformação linear de V em W se:
i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$
ii) $T(au) = aT(u)$

Observação 2.7.2: Uma transformação linear de V em V (é o caso de $W = V$) é chamada *operador linear* sobre V.

Exemplo 2.7.3: Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde $T(x, y) = (x, -3y, x - y)$ linear e $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$. Então,

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= ((x_1 + x_2), -3(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\ &= (x_1, -3y_1, x_1 - y_1) + (x_2, -3y_2, x_2 - y_2) \\ \therefore\ T(u + v) &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

Para todo $a \in \mathbb{R}$ e para qualquer $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tem-se:

$$\begin{aligned} T(au) &= T(ax_1, ay_1) \\ &= a(x_1, -3y_1, x_1 - y_1) \\ \therefore T(au) &= aT(u). \end{aligned}$$

Propriedade 2.7.4: Se $T : V \to W$ for uma transformação linear, então

$$T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2), \forall\, v_1, v_2 \in V \text{ e } \forall\, a_1, a_2 \in \mathbb{K}.$$

De forma análoga, tem-se:

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_nT(v_n)$$

$\forall\, v_i \in V$ e $\forall\, a_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, ..., n$, isto é, a imagem de uma combinação linear de vetores é uma combinação linear das imagens desses vetores, com os mesmos coeficientes. Suponhamos agora que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ seja uma base de V e que se saiba quais são as imagens

$T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)$ dos vetores desta base. Sempre é possível obter a imagem $T(v)$ de qualquer $v \in V$, pois sendo v uma combinação linear dos vetores da base, isto é:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$$

E, pela relação acima, tem-se:

$$T(v) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \ldots + a_nT(v_n).$$

Assim, uma transformação linear $T : V \to W$ fica totalmente definida quando se conhece as imagens dos vetores de uma base de V.

Exemplo 2.7.5: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, sendo $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ e $v_3 = (1,1,0)$. Determinaremos $T(5,3,-2)$, sabendo que $T(v_1) = (1,-2)$, $T(v_2) = (3,1)$ e $T(v_3) = (0,2)$. Temos que,

$$\begin{aligned}(5,3,-2) =& 8v_1 - 5v_2 + 2v_3\\ \Rightarrow T(5,3,-2) =& 8T(v_1) - 5T(v_2) + 2T(v_3)\\ =& 8(1,-2) - 5(3,1) + 2(0,2) = (-7,17)\end{aligned}$$

Definição 2.7.6: Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$ é chamado *núcleo* de T, sendo denominado por $Ker(T)$. Isto é

$$Ker(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}.$$

Observação 2.7.7: Note que $Ker(T) \subset V$ e $Ker(T) \neq \emptyset$, pois $0 \in Ker(T)$, tendo em vista que $T(0) = 0$.

Proposição 2.7.8: *O núcleo de uma transformação linear $T : V \to W$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração: Sejam $v_1, v_2 \in Ker(T)$ e $a \in \mathbb{K}$. Então, $T(v_1) = 0$ e $T(v_2) = 0$. Daí,

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0,$$

ou seja, $v_1 + v_2 \in Ker(T)$.

$$T(av_1) = aT(v_1) = a0 = 0.$$

Logo, $av_1 \in Ker(T)$. Portanto, o núcleo de uma transformação linear é subespaço vetorial.

■

Definição 2.7.9: Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. A imagem de T é o conjunto

$$Im\,(T) = \{w \in W; T\,(v) = w \text{ para algum } v \in V\}.$$

Observação 2.7.10: $Im\,(T) \subset W$ e $Im\,(T) \neq 0$, pois $0 = T\,(0)$. Se $Im\,(T) = W$, T é sobrejetora, isto é, para todo $w \in W$ existe pelo menos um $v \in V$ tal que $T\,(v) = w$.

Proposição 2.7.11 *A imagem de uma transformação $T : V \to W$ é um subespaço vetorial de W.*

Demonstração: Sejam $w_1, w_2 \in Im\,(T)$ e $a \in \mathbb{K}$. Então, existem vetores $v_1, v_2 \in V$ tais que $T\,(v_1) = w_1$ e $T\,(v_2) = w_2$. Tem-se:

$$w_1 + aw_2 = T(v_1) + aT(v_2) = T(v_1) + T(av_2) = T(v_1 + av_2).$$

Portanto, $w_1 + aw_2 \in Im\,(T)$. Logo, $Im\,(T)$ é subespaço vetorial de W.

■

O Teorema a ser enunciado a seguir é o Teorema do Núcleo e da Imagem, também conhecido como o Teorema da Dimensão, é um resultado fundamental em Álgebra Linear que estabelece uma relação importante entre as dimensões do núcleo e da imagem de uma transformação linear.

Teorema 2.7.12: Seja $T : V \to W$ uma transformação linear de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Então,

$$dim\ Ker\,(T) + dim\ Im\,(T) = dim\ V.$$

Demonstração: Considere $v_1, ..., v_n$ uma base de $Ker\,(T)$. Como $Ker\,(T) \subset V$ é subespaço de V, podemos completar este conjunto de modo a obter uma base de V. Seja então $v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m$ a base de V. Queremos mostrar que $T\,(w_1)\,, ..., T\,(w_m)$ é uma base de $Im\,(T)$.

i) Dado $w \in Im\,(T)$, existe $u \in V$ tal que $T\,(u) = w$. Se $u \in V$, então

$$u = a_1v_1 + ... + a_nv_n + b_1w_1 + ... + b_mw_m.$$

Mas,

$$\begin{aligned} w = T\,(u) &= T\,(a_1v_1 + ... + a_nv_n + b_1w_1 + ... + b_mw_m) \\ &= a_1T\,(v_1) + ... + a_nT\,(v_n) + b_1T\,(w_1) + ... + b_mT\,(w_m)\,. \end{aligned}$$

Como os vetores $v_1, ..., v_n$ pertencem ao $Ker\,(T)\,, T\,(v_i) = 0$ para $i = 1, ..., n$. Assim,

$$w = b_1T\,(w_1) + ... + b_mT\,(w_m)$$

Logo, $T(w_1), ..., T(w_m)$ gera $Im(T)$.
ii) Consideremos agora, a combinação linear

$$a_1 T(w_1) + a_2 T(w_2) + ... + a_m T(w_m) = 0;\ a_1, a_2, ..., a_m \in \mathbb{K}.$$

Como T é linear, então $T(a_1 w_1 + a_2 w_2 + ... + a_m w_m) = 0$. Logo, $a_1 w_1 + ... + a_m w_m \in Ker(T)$. Assim, $a_1 w_1 + ... + a_m w_m$ pode ser escrito como combinação linear da base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $Ker(T)$, isto é, existem $b_1, ..., b_n \in \mathbb{K}$, tais que

$$a_1 w_1 + ... + a_m w_m = b_1 v_1 + ... + b_n v_n,$$

$$a_1 w_1 + ... + a_m w_m - b_1 v_1 - ... - b_n v_n = 0.$$

Mas, $\{v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m\}$ é uma base de V, então $a_1 = ... = a_m = b_1 = ... = b_n = 0$. Logo $\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ é LI.
Assim, temos que $Dim\ V = n + m$, onde $dim\ Ker(T) = n$ e $dim\ Im(T) = m$. Portanto,

$$dim\ V = dim\ Ker(T) + dim\ Im(T).$$

■

2.8 MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Seja $T : V \to W$ uma transformação de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Se $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de V e $\alpha = \{w_1, ..., w_m\}$ uma base de W, então dado $v \in V$ existem $x_i \in \mathbb{K}$ tal que $v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$. Como $T(v_i) \in W$, existem $a_{ji} \in \mathbb{K}$, $j = 1, ..., m$ tal que $T(v_i) = a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + ... + a_{mi} w_m$. Assim,

$$\begin{aligned} T(v) &= x_1(a_{11} w_1 + ... + a_{m1} w_m) + ... + x_n(a_{1n} w_1 + ... + a_{mn} w_m) \\ &= (x_1 a_{11} + ... + x_n a_{1n}) w_1 + ... + (x_1 a_{m1} + ... + x_n a_{mn}) w_m. \end{aligned}$$

Por outro lado, existem $y_1, ..., y_m \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = y_1 w_1 + ... + y_m w_m$. Como a decomposição é única, temos em forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ ou } [T]_\alpha^\beta [v]_\beta = [T(v)]_\alpha.$$

Portanto, $[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é a matriz de T em relação as bases β e α.

Exemplo 2.8.1: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (2x + 2y, 4z)$ linear. Determinemos $[T]_\alpha^\beta$ com $\beta = \{(1, 2, 3), (0, 1, -1), (1, 0, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$ e $\alpha = \{(1, 2), (3, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$. Dessa forma,

$$T(1, 2, 3) = (8, 12) = a_{11}(1, 2) + a_{21}(3, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} & + & 3a_{21} & = 8 \\ 2a_{11} & + & a_{21} & = 12 \end{cases} \Rightarrow a_{11} = \frac{28}{5} \text{ e } a_{21} = \frac{4}{5}$$

De maneira análoga,

$$T(0, 1, -1) = (2, -4) \Rightarrow a_{12} = -\frac{14}{5} \text{ e } a_{22} = \frac{8}{5}$$
$$T(1, 0, 1) = (2, 4) \Rightarrow a_{13} = 2 \text{ e } a_{23} = 0$$

Assim, obtemos:

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} \frac{28}{5} & -\frac{14}{5} & 2 \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

3 AUTOVETORES E AUTOVALORES

Os conceitos de autovetores e autovalores são essenciais para transformações lineares e matrizes. Esses conceitos simplificam a análise de matrizes e transformações. Isso permite que matrizes complexas sejam decompostas em formas mais versáteis. A diagonalização de matrizes, essencial na resolução de sistemas de equações diferenciais, na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos e na compressão de dados em algoritmos de reconhecimento de padrões, são exemplos de aplicações práticas.

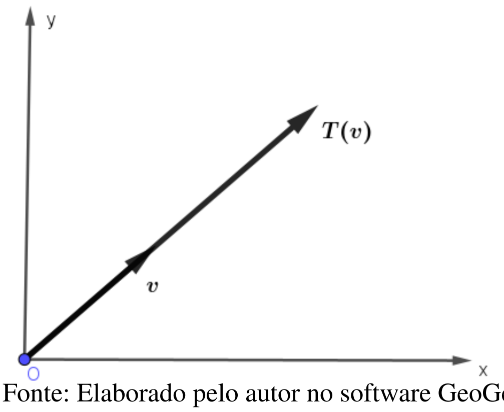
Definição 3.0.1: Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$, é um autovetor do operador T se existir $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

O escalar λ tal que $T(v) = \lambda v$ é denominado *autovalor* de T associado ao autovetor v.

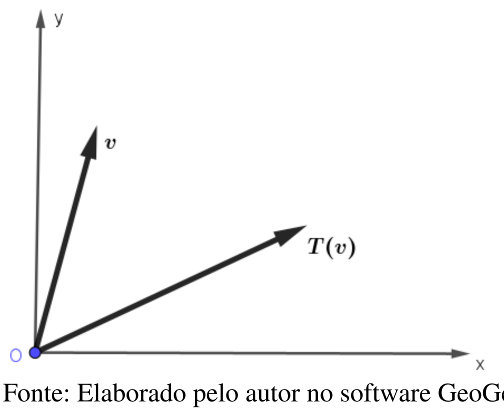
Observação 3.0.2: Pela definição, um vetor $v \neq 0$ é autovetor se a imagem $T(v)$ for um múltiplo escalar de v. No $\mathbb{R}^3$ e no $\mathbb{R}^2$ diríamos que v e $T(v)$ tem a mesma direção. Assim, dependendo do valor de λ, o operador T dilata v, contrai v ou inverte o sentido de v. Na figura 2, o vetor $v \in \mathbb{R}^2$ é um autovetor de um operador T que dilata v, pois $\lambda > 1$. Já a figura 3 mostra um vetor v que não é autovetor de um operador T.

Figura 2 – Exemplo de Autovetor.



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2024)

Figura 3 – v não é autovetor.



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2024)

Exemplo 3.0.3: Consideremos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + 4y, 3x + 5y)$, dessa forma vemos que o vetor $v = (2, 3)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 7$, pois

$$T(2, 3) = (14, 21) = 7(2, 3).$$

Além disso, o vetor $v = (4, 2)$ não é um autovetor associado a esse operador, pois não existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $T(4, 2) = \lambda(4, 2)$.

Definição 3.0.4: Seja o operador linear $T : V \to V$, cuja matriz em relação à base canônica é $A = [T]$. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v \in V$ são, respectivamente, autovalor e autovetor do operador T, temos que:

$$Av = \lambda v,$$

ou,

$$Av - \lambda v = 0.$$

Tendo em vista que $v = Iv$, onde I é a matriz identidade, temos:

$$Av - \lambda Iv = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)\, v = 0.$$

Para que esse sistema homogêneo admita soluções não nulas, então deve-se ter:

$$det\,(A - \lambda I) = 0$$

A equação $det\,(A - \lambda I) = 0$ é denominada *equação característica* do operador T ou da matriz A, e suas raízes são os autovalores do operador T ou da matriz A. O polinômio $p(x) = det\,(A - xI)$ é denominado *polinômio característico* do operador T ou da matriz A.

Definição 3.0.5: O subespaço $V_\lambda = \{v \in V : T\,(v) = \lambda v\}$ é chamado o *subespaço associado* ao autovalor λ.

Observação 3.0.6: Note que um autovalor λ de T é um escalar tal que existe um vetor $v \neq 0$, que também satisfaz a seguinte equação:

$$T\,(v) = \lambda v \Rightarrow T\,(v) - \lambda v = 0.$$

Tendo em vista que $v = Iv$, onde I é o operador identidade que gera a matriz identidade, temos:

$$(T - \lambda I)\,(v) = 0.$$

Portanto, os autovetores são os vetores que estão dentro do núcleo da transformação linear $(T - \lambda I)$. Logo, $v_\lambda = Ker\ (T - \lambda I)$.

Exemplo 3.0.7: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T\,(x, y) = (-3x - 2y, x)$, temos que a matriz na base canônica do operador T é:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} det\,(A - \lambda I) &= det \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + 3\,\lambda + 2 \\ &= (\lambda + 1)\,(\lambda + 2) = 0 \end{aligned}$$

O que implica $\lambda = -1$ ou $\lambda = -2$. Então, os autovalores de A são -1 e -2. Procuremos agora os autovetores associados.
Para $\lambda_1 = -1$, temos:

$$Ker\,(T - (-1)\,I) = Ker\,(T + I) = \{v \in V; (T + I)\,(v) = 0\}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
[A + I]\,[v] = 0 &\Rightarrow \left[\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y.
\end{aligned}$$

Portanto, $Ker\,(T - (-1)\,I) = \{(x, y)\,; x = -y\} = [(-1, 1)]$.
Para $\lambda_2 = -2$, temos:

$$[A - \lambda I]\,[v] = 0 \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $Ker\,(T - (-2)\,I) = \{(x, y)\,; x = -2y\} = [(-2, 1)]$.

Teorema 3.0.8: (Teorema de Cayley-Hamilton) *Toda matriz é um zero de seu polinômio característico.*

Demonstração: Ver em Coelho, p. 150.

■

Exemplo 3.0.9: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ temos que

$$p(x) = det(A - xI) = (x - 2)(x + 2)^2$$

é o seu polinômio característico. Agora, note que

$$\begin{aligned}
&p(A) = (A - 2I)(A + 2I)^2 = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, o polinômio característico de A anula a matriz A.

3.1 POLINÔMIO MINIMAL

Seja A uma matriz de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Observe que existem polinômios não nulos $p(x)$ para os quais $p\,(A) = 0$. Por exemplo, o polinômio característico de A, como já provamos pelo Teorema de Cayley-Hamilton. Entre esses polinômios, consideremos os de menor grau e, entre esses, selecionamos um que é mônico.

Definição 3.2.1: O *polinômio minimal* de A é o polinômio mônico $m(x)$ de menor grau tal que $m(A) = 0$.

Proposição 3.2.2: *Todo polinômio minimal é único.*

Demonstração: Pelo teorema de Cayley-Hamilton, existe um polinômio $p(x)$, não nulo, na qual anula a matriz A. Seja n o menor grau para o qual $p\,(A) = 0$. Dividindo $p\,(x)$ por seu coeficiente inicial, obtemos um polinômio mônico $m\,(x)$ de grau n, que anula a matriz A. Suponha que $q\,(x)$ é outro polinômio mônico de grau n, para o qual $q\,(A) = 0$. Então a diferença $m\,(x) - q\,(x)$ é um polinômio não nulo de grau menor do que n, que anula a matriz A. Isto contradiz a hipótese original para n. Logo, $m\,(x) - q\,(x) = 0 \Rightarrow m(x) = q(x)$.

$\blacksquare$

Teorema 3.2.3: *O polinômio minimal $m\,(x)$ de A divide todo polinômio que tem A como um zero. Em particular, $m\,(x)$ divide o polinômio característico $p\,(x)$ de A.*

Demonstração: Suponha que $p\,(x)$ é um polinômio para o qual $p\,(A) = 0$. Pelo algoritmo da divisão, existem polinômios $q\,(x)$ e $r\,(x)$ para os quais $p\,(x) = m\,(x)\,q\,(x) + r\,(x)$ e $r\,(x) = 0$ ou $grau\ r\,(x) < grau\ m\,(x)$. Substituindo $x = A$ nesta equação e usando $p\,(A) = 0$ e $m\,(A) = 0$, temos $r\,(A) = 0$. Então $r\,(x)$ é um polinômio de grau menor que $m\,(x)$, que anula a matriz A. Assim, $r\,(x) = 0$. Logo, $p\,(x) = m\,(x)\,q\,(x)$, isto é, $m\,(x)$ divide $p\,(x)$.

$\blacksquare$

Definição 3.2.4: Seja $p(x)$ um polinômio sobre o corpo $\mathbb{K}$ tal que grau $p(x) \geq 1$. Dizemos que $p(x)$ é *irredutível* sobre $\mathbb{K}$ se toda vez que $p(x) = q(x)h(x)$, onde $q(x)$ e $h(x)$ são polinômios sobre $\mathbb{K}$, então temos $q(x) = a$ ou $h(x) = b$ com $a, b \in \mathbb{K}$ constantes. Se $p(x)$ for não irredutível sobre $\mathbb{K}$ dizemos que $p(x)$ é redutível.

Teorema 3.2.5: *Todo polinômio $p(x)$ sobre $\mathbb{K}$ pode ser escrito da forma*

$$p(x) = u \cdot p_1(x) \ldots p_n(x).$$

onde $u \in \mathbb{K} - \{0\}$ e $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ são polinômios irredutíveis sobre $\mathbb{K}$. Além disso, essa expressão é única a menos da constante u e da ordem dos polinômios $p_1(x), \ldots, p_n(x)$.
Demonstração: Ver em Gonçalves, p. 80.

■

Aplicando o teorema 3.2.5 no teorema 3.2.3, temos o seguinte resultado:
Corolário 3.2.6: *Os polinômios característico $p(x)$ e minimal $m(x)$ tem os mesmos fatores irredutíveis.*

3.2 DIAGONALIZAÇÃO

Na análise de sistemas dinâmicos, a diagonalização é uma técnica que facilita a compreensão do comportamento de sistemas complexos ao longo do tempo. É utilizada na física quântica para simplificar operadores como o Hamiltoniano. Isso permite a identificação de autovetores e autovalores que correspondem aos estados próprios do sistema quântico. As energias potenciais e os estados estacionários de sistemas quânticos, como átomos e moléculas, dependem disso. Além disso, a diagonalização é usada em vários campos diferentes, como a economia para modelar e estudar cadeias de Markov e processos estocásticos, e na engenharia, para a análise modal de estruturas vibratórias e sistemas mecânicos.

Sabemos que dado um operador linear $T : V \to V$, a cada base β de V corresponde uma matriz $[T]_\beta$ que representa T na base β. O nosso objetivo é obter uma base do espaço de forma que a matriz de T nessa base seja a mais simples representante de T. Veremos que esta matriz é uma matriz diagonal.
Proposição 3.3.1: *Autovetores associados a autovalores distintos de um operador $T : V \to V$ são LI.*
Demonstração: Sejam $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ autovetores de um operador linear $T : V \to V$, associados a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ autovalores distintos. Faremos a demonstração por indução.
i) Se $n = 2$, então suponha $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$ e, aplicando o operador $T - \lambda_2 I$, temos:

$$(a_1T(v_1) - a_1\lambda_2v_1) + (a_2T(v_2) - a_2\lambda_2v_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_2)v_2 = 0$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $v_1 \neq 0$, então $a_1 = 0$ e como consequência $a_2 = 0$.
ii) Supor que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ sejam LI. Considere

$$a_1v_1 + ... + a_nv_n + a_{n+1}v_{n+1} = 0$$

Aplicando o operador $T - \lambda_{n+1}I$, temos

$$a_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) v_1 + ... + a_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) v_n = 0$$

Como $\lambda_2, ..., \lambda_{n+1}$ são distintos e $\{v_1, ..., v_n\}$ LI, então $a_1 = ... = a_n = 0$ e como consequência, $a_{n+1} = 0$. Logo a inclusão está completa e, portanto, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é LI.

■

Corolário 3.3.2: *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ linear, se $dim\ V = n$ e T possui n autovalores distintos, então o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, formado pelos correspondentes autovetores, é uma base de V.*

Observação 3.3.3: Consideremos um operador linear T de V que admite n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ ..., \ \lambda_n$ distintos, associados a $v_1, v_2, ..., v_n$, respectivamente. O corolário 3.3.2 nos assegura que o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base de V. Tendo em vista que

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$$

$$T(v_2) = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + 0v_n$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

O operador T é representado na base β dos autovetores pela matriz diagonal:

$$[T]_\beta = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

constituída de autovalores na diagonal principal.

Sendo A a matriz na base canônica do operador T, então as matrizes A e D são semelhantes por representarem o mesmo operador T em bases diferentes.

Definição 3.3.4: A matriz A será semelhante à matriz D se, e somente se, existe uma matriz inversível P, tal que

$$D = P^{-1}AP.$$

Seja α a base canônica e β a base dos autovetores de V e $[T]_\alpha^\alpha = A$ e $[T]_\beta^\beta = D$, as matrizes que representam a transformação linear nas bases α e β , respectivamente. Então, pelo conceito de matriz de mudança de base, temos que:

$$[T(v)]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha [v]_\alpha . \tag{3.1}$$

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\beta [v]_\beta . \tag{3.2}$$

Sendo $[I]_\alpha^\beta$, a matriz de mudança de base β para α, então:

$$[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta [v]_\beta$$

$$[T(v)]_\alpha = [I]_\alpha^\beta T [v]_\beta .$$

Substituindo $[v]_\alpha$ e $[T(v)]_\alpha$ em 3.1, temos:

$$[I]_\alpha^\beta [T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta [v]_\beta .$$

Da observação 2.6.1 a matriz de mudança de base é invertível $[I]^\beta{}_\alpha$, ou seja:

$$[T(v)]_\beta = \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta [v]_\beta .$$

Substituindo $[T(v)]_\beta$ em 3.2, temos:

$$[T]_\beta^\beta [v]_\beta = \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta [v]_\beta \Rightarrow [T]_\beta^\beta = \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta .$$

Daí, substituindo $[I]_\alpha^\beta = P$, $[T]_\beta^\beta = D$ e $[T]_\alpha^\alpha = A$, concluímos que

$$D = P^{-1}AP.$$

Sendo P a matriz cujas colunas são os autovetores do operador T.

Definição 3.3.5: A matriz quadrada A é *diagonalizável* se existe uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal. Diz-se, nesse caso, que a matriz P *diagonaliza* A, ou que P é a matriz diagonalizadora.

A definição acima pode ser expressa de modo equivalente: um operador linear $T : V \to V$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base de V formada por autovetores de T.

Exemplo 3.3.6: Seja um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (2x + 3y - z, y - 4z, 3z)$, a matriz na base canônica do operador linear T é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$\begin{aligned} det\,(A - \lambda I) &= det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

O que implica $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$ são os autovalores de T.

Para $\lambda_1 = 1$, temos:

$$Ker\,(T - 1I) = \{v \in V; (T - I)\,(v) = 0\}$$

Daí,

$$[A - I]\,[v] = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -3y \text{ e } z = 0.$$

Portanto, $Ker\,(T - I) = \{(x, y, z)\,; x = -3y \text{ e } z = 0\} = [(-3, 1, 0)]$.

Para $\lambda_2 = 2$, temos:

$$[A - 2I]\,[v] = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0 \text{ e } z = 0.$$

Portanto, $Ker\,(T - 2I) = \{(x, y, z)\,; y = 0 \text{ e } z = 0\} = [(1, 0, 0)]$.

Para $\lambda_3 = 3$, temos:

$$[A - 3I]\,[v] = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -7z \text{ e } y = -2z.$$

Portanto, $Ker\,(T - 3I) = \{(x, y, z)\,; = -7z \text{ e } y = -2z\} = [(-7, -2, 1)]$.

Dessa forma, temos a seguinte base de autovetores $\beta = \{(-3, 1, 0); (1, 0, 0); (-7, -2, 1)\}$. Logo, a matriz mudança de base P formada pelos autovetores, será

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

Teorema 3.3.7: *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ autovalores distintos de um operador linear $T : V \to V$. Então, T é diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal de T for da forma*

$$m\,(x) = (x - \lambda_1)\,(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_n)$$

Demonstração: Ver em Hoffman, p. 188.

■

Exemplo 3.3.8: $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5; T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3x_1 + x_2, 2x_1 + 4x_2, 3x_3 + x_4, x_3 + 3x_4, 4x_5)$.

A matriz na base canônica do operador linear T é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Daí, o polinômio característico é $p\left(x\right) = \left(x-2\right)^2 \left(x-4\right)^2 \left(x-5\right)$ e o polinômio minimal é $m\left(x\right) = \left(x-2\right)\left(x-4\right)\left(x-5\right)$. Portanto, T é diagonalizável e sua Matriz diagonal é

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

4 FORMAS CANÔNICAS

No estudo da álgebra linear, a compreensão das formas canônicas, incluindo a forma canônica de Jordan, é essencial para simplificar e analisar matrizes e transformações lineares. As formas canônicas permitem a representação de matrizes de forma padronizada, facilitando a solução de sistemas lineares e determinando as propriedades dos operadores lineares. Este capítulo investiga algumas das diversas formas canônicas utilizadas na álgebra linear, destacando suas propriedades e métodos para obtê-las.

Camille Jordan foi um matemático francês nascido em 1838, em uma família com conexões significativas tanto na engenharia quanto nas artes. Seu pai, Esprit-Alexandre Jordan, era engenheiro, e sua mãe, Joséphine Puvis de Chavannes, era irmã do pintor Pierre Puvis de Chavannes. Camille Jordan seguiu os passos do pai e estudou na École Polytechnique, onde se formou em engenharia. No entanto, ele também se destacou na matemática, área em que fez contribuições importantes.

Figura 4 – Camille Jordan (1838-1922)

Fonte: Site MacTutor de John O'Connor e Edmund Robertson. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jordan/pictdisplay/>. Acesso em: 08 set. 2024.

Jordan trabalhou como engenheiro por um tempo, mas dedicou uma parte significativa de sua vida à pesquisa matemática. Sua tese de doutorado, defendida em 1861, foi um marco em sua carreira. Em 1873, tornou-se examinador na École Polytechnique e, em 1876, professor de análise. Suas pesquisas abrangiam várias áreas, incluindo teoria dos grupos, álgebra linear, topologia e análise matemática.

Um dos seus principais legados foi a Forma Canônica de Jordan para matrizes. Jordan foi pioneiro no desenvolvimento da teoria de grupos finitos, estabelecendo uma abordagem sistemática para o estudo do assunto. Ele também é lembrado por sua prova do teorema da curva de Jordan, que estabelece que uma curva simplesmente fechada divide um plano em duas regiões distintas. Além disso, sua atuação como editor do Journal de Mathématiques Pures et Appliquées teve grande influência no desenvolvimento da matemática durante o século XIX.

4.1 INVARIÂNCIA

Definição 4.1.1: Seja $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que um subespaço W de V é T-invariante, se T transforma W em W. Ou seja, se $v \in W$ implica $T(v) \in W$. Neste caso, T restrito a W define um operador linear em W, isto é, T induz um operador linear $\widetilde{T} : W \to W$ definido por $\widetilde{T}(w) = T(w)$ para todo $w \in W$.

Teorema 4.1.2: *Suponha que W é subespaço invariante de $T : V \to V$. Então, T tem uma representação matricial de blocos da forma $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, onde A é a representação matricial da restrição $\widetilde{T}$ de T a W.*

Demonstração: Escolhemos uma base $\{w_1, ..., w_r\}$ de W e a estendemos a uma base $\beta = \{w_1, ..., w_r, v_1, ..., v_s\}$ de V. Temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(w_1) = T(w_1) &= a_{11}w_1 + ... + a_{r1}w_r + 0v_1 + ... + 0v_5 \\
\widetilde{T}(w_2) = T(w_2) &= a_{12}w_1 + ... + a_{r2}w_r + 0v_1 + ... + 0v_5 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\
\widetilde{T}(w_r) = T(w_r) &= a_{1r}w_1 + \ldots + a_{rr}w_r + 0v_1 + ... + 0v_5 \\
T(v_1) &= b_{11}w_1 + ... + b_{r1}w_r + c_{11}v_1 + ... + c_{s1}v_s \\
T(v_2) &= b_{12}w_1 + ... + b_{r2}w_r + c_{12}v_1 + ... + c_{s2}v_s \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\
T(v_s) &= b_{1s}w_1 + ... + b_{rs}w_r + c_{1s}v_1 + ... + c_{ss}v_s
\end{aligned}$$

Em forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1r} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{r1} & c_{11} & \cdots & c_{s1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1s} & \cdots & b_{rs} & c_{1s} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \\ v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(w_1) \\ \vdots \\ T(w_r) \\ T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_s) \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz de T nesta base β é a transposta da matriz dos coeficientes acima, ou seja, $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$ é a matriz de $\widetilde{T}$ restrito a base $\{w_1\}$ de W, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rs} \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix}$.

■

4.2 DECOMPOSIÇÃO EM SOMAS DIRETAS INVARIANTES

Seja V soma direta de seus subespaços vetoriais $W_1, ..., W_n$, ou seja, $V = W_1 \oplus ... \oplus W_n$, onde dado $v \in V$, temos que $v = w_1 + ... + w_n$ é escrito de maneira única com $w_i \in W_i$, $i = 1, ..., n$.

Observação 4.2.1: Se β_i é uma base de W_i, então a base de V será

$$\beta = \bigcup_{i=1}^{n} \beta_i.$$

Observação 4.2.2: Se T é linear e W_i é T-invariante tal que $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$, então $T = T_1 \oplus \ldots \oplus T_n$, onde T_i é a restrição de T a W_i ($T_i = T|\, W_i$).

Teorema 4.2.3: *Se $T : V \to V$ é linear e V é a soma direta de subespaços T-invariantes $W_1, \ldots, W_n$, então T pode ser representado pela matriz diagonal de blocos*

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix},$$

onde A_i é a representação de $T_i = T|\, W_i$.

Demonstração: Ver em Coelho, p. 147.

■

4.3 OPERADORES NILPOTENTES

Definição 4.3.1: Dizemos que o operador $T : V \to V$ é nilpotente se $T^n \equiv 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $T^{n-1} \neq 0$, então n é dito *índice de nilpotência*.

Observação 4.3.2: A é dita uma matriz nilpotente de índice n se $A^n = 0$, mas $A^{n-1} \neq 0$. Logo, o polinômio minimal de A é $m\,(x) = x^n$.

Teorema 4.3.3: *Seja $T : V \to V$ um operador nilpotente de índice n, então T tem uma representação matricial diagonal de blocos, da seguinte forma*

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Demonstração: Suponha que $\beta = \{u, T(u), T^2(u), ..., T^{n-1}(u)\}$ seja uma base para V. Logo,

$$T(u) = 0u + 1T(u) + 0T^2(u) + 0T^3(u) + ... + 0T^{n-1}(u)$$

$$T(T(u)) = 0u + 0T(u) + 1T^2(u) + 0T^3(u) + ... + 0T^{n-1}(u)$$

$$T(T^2(u)) = 0u + 0T(u) + 0T^2(u) + 1T^3(u) + ... + 0T^{n-1}(u)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots$$

$$T(T^{n-2}(u)) = 0u + 0T(u) + 0T^2(u) + 0T^3(u) + ... + 1T^{n-1}(u)$$

$$T(T^{n-1}(u)) = 0u + 0T(u) + 0T^2(u) + 0T^3(u) + ... + 0T^{n-1}(u)$$

Portanto, T tem uma representação matricial diagonal de blocos como N.

■

Observação 4.3.4: Se o polinômio característico de T é $p(x) = (x - \lambda)^n$, então pelo Teorema de Cayley-Hamilton, $(T - \lambda I)$ é nilpotente de índice n. Assim,

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I + N.$$

4.4 TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO PRIMÁRIA

Teorema 4.4.1: (Teorema da Decomposição Primária) *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Considere o polinômio característico de T da forma*

$$p_T(x) = [p_1(x)]^{s_1} [p_2(x)]^{s_2} \ldots [p_r(x)]^{s_r},$$

onde os $p_i(x)$ são fatores irredutíveis, para todo $i = 1, 2, ..., r$ com $p_i \neq p_r$, para $i \neq r$. Então, seu polinômio minimal é

$$m_T(x) = [p_1(x)]^{d_1} [p_2(x)]^{d_2} \ldots [p_r(x)]^{d_r},$$

com $0 < d_i \leq s_i$, para todo $i = 1, 2, ..., r$, e se $W_i = ker\,[p_i(T)]^{d_i} = ker\,[p_i(T)]^{s_i}$, para todo $i = 1, 2, ..., r$, temos que

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$$

onde W_i é um subespaço T-invariante, para todo $i = 1, 2, ..., r$.

Demonstração: Ver em Hoffman, p. 194.

■

Exemplo 4.4.2: Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5; T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - x_3, x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, x_4, -x_4 + 2x_5)$. A matriz na base canônica do operador linear T é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Daí, o polinômio característico é $p(x) = (x - 2)^2(x - 1)^3 = p_1(x)^2 p_2(x)^3$. Pelo Teorema da Decomposição Primária, temos que $p_1(x) = x - 2$ e $p_2(x) = x - 1$. Assim,

$$\mathbb{R}^5 = ker\; p_1(x)^2 \oplus ker\; p_2(x)^3 = ker\; (A - 2I)^2 \oplus ker\; (A - I)^3 = W_1 \oplus W_2,$$

onde $W_1 = ker\ (A-2I)^2$ e $W_2 = ker\ (A-I)^3$ são subespaços invariantes do $\mathbb{R}^5$. Vamos encontrar as bases de W_1 e de W_2. Temos que,

$$W_1 = ker\ (A-2I)^2 = \{v \in \mathbb{R}^5/(A-2I)^2(v) = 0\},$$

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(A-2I)^2(v) = \begin{bmatrix} x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \\ -x_1 - x_2 - x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo essa equação, obtemos

$$x_4 = 0,\ x_1 = -x_2,\ x_3 = x_2,\ x_5 \in \mathbb{R}.$$

$$W_1 = [(-x_2, x_2, -x_2, 0, x_5)] = [(-1, 1, -1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1)].$$

Analogamente, verificamos que

$$W_2 = [(1, 0, -1, 0, 0); (0, 1, -1, 0, 0); (0, 0, -1, 1, 1)].$$

Dessa forma, $\beta = \{(-1, 1, -1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1); (1, 0, -1, 0, 0); (0, 1, -1, 0, 0); (0, 0, -1, 1, 1)\}$ é a base ordenada do $\mathbb{R}^5$. Assim, temos que

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$P^{-1}A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

onde $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é a matriz de T restrita a W_1 e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz de T restrita a W_2.

4.5 FORMA CANÔNICA DE JORDAN

Definição 4.5.1: Um bloco de Jordan de ordem r em λ é a matriz

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Teorema 4.5.2 (Forma Canônica de Jordan) *Seja $T : V \to V$ um operador linear cujos polinômio característico e minimal são, respectivamente*

$$p\,(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_r)^{n_r}\,, \lambda_i \in \mathbb{C}$$

$$m\,(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_r)^{m_r}$$

Então T possui uma representação matricial diagonal por blocos, cujos elementos diagonais são da forma

$$J_{ij}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Para cada λ_i, os blocos correspondentes a J_{ij} tem as seguintes propriedades:

i) *Existe, pelo menos, um J_{ij} de ordem m_i. Todos os outros são de ordem menor ou igual a de m_i.*

ii) *A soma das ordens de J_{ij} é n_i.*

iii) *A quantidade de J_{ij} é a multiplicidade geométrica de λ_i, isto é, $dim\ ker\,(A - \lambda_i I)$.*

iv) *O número dos J_{ij} de cada ordem possível é determinado de maneira única por T.*

Demonstração: Ver em Coelho, p. 166.

■

Exemplo 4.5.3: Seja $T : V \to V$ linear, determinemos a forma canônica de Jordan de T cujos polinômios característico e minimal são, respectivamente, $p(x) = (x-2)^3 (x+7)^2$ e $m(x) = (x-2)^3 (x+7)$.

Como o polinômio característico é $p(x) = (x-2)^3 (x+7)^2$, temos que a diagonal da forma canônica de Jordan é constituída dos números $2,\ 2,\ 2,\ (-7)$ e (-7). Como o expoente do fator $(x-2)$ no polinômio minimal é 3, então o primeiro e único bloco de Jordan associado ao autovalor 2 é de ordem 3 e é dado por

$$J_{11}(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, como o expoente do fator $(x+7)$ do polinômio minimal é 1, então o primeiro bloco de Jordan associado ao autovalor (-7) é de ordem 1 e é dado por

$$J_{22}(-7) = [-7]$$

No entanto, o fator $(x+7)$ do polinômio característico tem expoente 2, então deve-se ter outro bloco de Jordan associado ao autovalor (-7) igual ao anterior, sendo esse o $J_{33}(-7)$. Portanto, a forma canônica de Jordan é

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

Exemplo 4.5.4: Considere o operador linear do exemplo 4.4.2. cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é $p(x) = (x-2)^2(x-1)^3$ e o polinômio minimal é $m(x) = (x-2)(x-1)^2$. Assim, temos dois blocos de Jordan associados a $\lambda_1 = 2$ de ordem 1, a saber, $J_{11}(2) = [2] = J_{22}(2)$. Para $\lambda_2 = 1$, temos um bloco de Jordan de ordem 2, isto é,

$J_{33}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Como a ordem de A é 5, então existe outro bloco de Jordan de ordem 1, que será $J_{44}(1) = [1]$. Portanto, a forma canônica de Jordan da matriz A será

$$J = \left[\begin{array}{c|c|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Vamos agora encontrar uma base do $\mathbb{R}^5$ na qual J é esta matriz acima. Para isso, o subespaço associado a $\lambda_1 = 2$ é

$$Ker\ (A - 2I) = [(1, -1, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1)].$$

Para o subespaço associado a $\lambda_2 = 1$, temos:

$$Ker\ (A - I) = [(1, -1, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1)],$$
$$Ker\ (A - I)^2 = [(1, 0, -1, 0, 0); (0, 1, -1, 0, 0); (0, 0, -1, 1, 1)].$$

Considere $v \in Ker\ (A-I)^2 - Ker\ (A-I)$ e tome $v_1 = (0, 0, -1, 1, 1)$. Assim $v_2 = (A-I)v_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$, mas $v_3 = (-1, 0, 1, 0, 0)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 1$. Logo, a base do $\mathbb{R}^5$ será:

$$\beta = \{(1, -1, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1); (0, 0, -1, 1, 1); (-1, 1, 0, 0, 0); (-1, 0, 1, 0, 0)\}.$$

A matriz de mudança de base P será

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando $P^{-1}AP$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J.$$

Exemplo 4.5.5: Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 8 & -1 & -6 & 2 \\ -12 & -4 & 2 & 8 & -1 \\ 8 & -2 & 0 & -9 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é $p(x) = (x-2)^5$ e o polinômio minimal $m(x) = (x-2)^3$. Temos $\lambda = 2$ como único autovalor de multiplicidade algébrica 5. Logo, a diagonal da forma canônica de Jordan terá 5 elementos iguais a 2. O expoente do polinômio minimal é 3, então o primeiro bloco de Jordan será

$$J_{11}(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O outro bloco terá ordem menor ou igual a 3, logo, teremos dois blocos de ordem 1, no caso, $J_{22}(2) = [2]$ e $J_{33}(2) = [2]$ ou um bloco de ordem 2, no caso, $J_{22}(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Mas, a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ será a $dim\ ker(A - 2I)$. Daí,

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} 12 & 8 & -1 & -6 & 1 \\ -12 & -6 & 2 & 8 & -1 \\ 8 & -2 & -2 & -9 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & -2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Escalonando $(A - 2I)$, obtemos $\begin{bmatrix} 12 & 8 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dessa forma, como existem duas linhas nulas no final do escalonamento, então $dim\ ker(A - 2I) = 2$. Portanto, a forma canônica de Jordan será dada por

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

4.6 SUBESPAÇOS CÍCLICOS

Definição 4.6.1: Sejam T um operador linear num $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $v \in V$, tal que $v \neq 0$. Dizemos que v é um vetor T-cíclico se $\beta = \{v, T(v), ..., T^n(v)\}$ é LI, mas $\{v, T(v), ..., T^n(v), T^{n+1}(v)\}$ é LD. O subespaço de V com base β é dito um subespaço T-cíclico gerado por v. O mesmo será denotado por

$$Z(v,T) = C_T(v) \text{ e } T_v = T|_{Z(v,T)}$$

Observação 4.6.2: Se $V = Z(v,T)$ dizemos que V é um espaço T-cíclico gerado por v.

Teorema 4.6.3: *Sejam T um operador linear, V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $Z(v,T), T_v$ e $m_T(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$. Então:*
i) $\beta = \{v, T(v), ..., T^n(v)\}$ *é uma base de* $Z(v,T)$.
ii) *O polinômio minimal de T_v é $m_T(x)$.*
iii) *A representação matricial de T, na base β será*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz C acima é chamada matriz companheira do polinômio $m_{Tv}(x)$.
Demonstração: Ver em Hoffman, p. 202.

■

Exemplo 4.6.4: Determinenos a matriz companheira do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (4x, 2x + 4y, 2y + 4z)$.

Note que a matriz na base canônica do operador linear T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o polinômio característico de T: $p(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$. Considere $v = (1,0,0)$. Se $\beta = \{v, T(v), T^2(v)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$, então $\beta = \{(1,0,0), (4,2,0), (16,16,4)\}$. Logo,

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 64 \\ 1 & 0 & -48 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}.$$

4.7 FORMA CANÔNICA RACIONAL

Teorema 4.7.1: *Seja $T : V \to V$ um operador linear com o polinômio minimal*

$$m_T(x) = m_{T_{v_1}}(x). \ldots .m_{T_{v_r}}(x)$$

onde os $m_{T_{v_i}}(x)$ são os polinômios irredutíveis mônicos distintos. Então, T tem uma única representação matricial diagonal de blocos

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C_r \end{bmatrix}.$$

Onde os C_i é a matriz companheira de $m_{T_{v_i}}(x)$. Essa representação matricial de T é chamada forma canônica racional.

Demonstração: Ver em Lipschutz, p. 327.

■

Exemplo 4.7.2: Sejam $dim\ V = 6$ e T um operador linear cujo polinômio minimal é $m_T = (x^2 - 2x + 3)(x+1)^2$. Determinaremos as possíveis formas canônicas racionais.

Note que $m_1(x) = x^2 - 2x + 3$ é um polinômio cujas raízes são números complexos e a matriz de T tem ordem 6. Assim, forma canônica racional de T é uma das seguintes somas diretas de matrizes companheiras

i) $C(x^2 - 2x + 3) \oplus C(x^2 - 2x + 3) \oplus C(x+1)^2$

ii) $C(x^2 - 2x + 3) \oplus C(x+1)^2 \oplus C(x+1)^2$

iii) $C(x^2 - 2x + 3) \oplus C(x+1)^2 \oplus C(x+1) \oplus (x+1)$

Portanto, temos

i)

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

ii)

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

iii)

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As formas canônicas, desempenham um papel fundamental no estudo da Álgebra Linear. O desenvolvimento desse conceito permitiu a simplificação e análise estrutural de operadores lineares em espaços vetoriais de dimensão finita. As Formas Canônicas não apenas simplificam as representações matriciais, mas também fornecem uma compreensão mais profunda da natureza desses operadores, especialmente em contextos onde a diagonalização não é possível.

Ao longo deste estudo, foi possível observar como a representação matricial de operadores lineares pode ser transformada e simplificada. O estudo investigou algumas das diversas formas canônicas utilizadas na Álgebra Linear, destacando suas propriedades e métodos para obtê-las, com ênfase nas formas canônicas de Jordan e Racional. Isso não apenas proporciona uma abordagem técnica, mas também evidencia a relevância dessas formas para a Matemática Pura e algumas de suas aplicações.

Concluímos que o estudo das formas canônicas é essencial para o entendimento das transformações lineares e de seus operadores, destacando-se a Forma Canônica de Jordan e a Forma Canônica Racional como uma poderosa ferramenta na resolução de problemas e no desenvolvimento da teoria matemática. Esperamos que este trabalho possa servir como base para novas investigações e que incentive futuros estudos e aplicações das formas canônicas em diferentes campos do conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS

CALCULATOR, M. *Software livre*. Disponível em: <https://matrixcalc.org/>. Acesso em: 24 jul. 2024.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 6ª. ed. São Paulo: Atual, 1995.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 6ª. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2020.

GEOGEBRA. *GeoGebra: software de matemática dinâmica*. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 04 mar. 2024.

GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. Rio De Janeiro: IMPA, 2006.

HERSTEIN, I. N. *Tópicos em Álgebra*. São Paulo: Editora da Univ. e Polígono, 1970.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. São Paulo: USP e Polígono, 1970.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 7ª. ed. São Paulo: IMPA, 2006.

LIPSCHUTZ, S. *Teorias e Problemas de Álgebra Linear*. Porto Alegre: Bookman, 2004.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Marie Ennemond Camille Jordan*. MacTutor, 2001. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jordan/>. Acesso em: 08 set. 2024.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2ª. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

TIZZIOTTI, G. C.; SANTOS, J. V. *Álgebra Linear*. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/25312>. Acesso em: 04 fev. 2024.