*Universidade Federal da Paraíba*

*Centro de Tecnologia*

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**– MESTRADO/DOUTORADO –**

**–**

# VIGAS E PLACAS ESPESSAS EM BASE ELÁSTICA DE KERR: FORMULAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

*Por*

***Welky Klefson Ferreira de Brito***

*Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para obtenção do grau de Doutor*

**João Pessoa – Paraíba** **Fevereiro de 2024**

*Universidade Federal da Paraíba*

*Centro de Tecnologia*

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**– MESTRADO/DOUTORADO –**

# VIGAS E PLACAS ESPESSAS EM BASE ELÁSTICA DE KERR: FORMULAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor.

**Welky Klefson Ferreira de Brito**

**Orientador: Prof. Dr. Ângelo Vieira Mendonça**

**João Pessoa – Paraíba** **Fevereiro de 2024**

**Catalogação na publicação**
**Seção de Catalogação e Classificação**

B862v Brito, Welky Klefson Ferreira.
Vigas e placas espessas em base elástica de Kerr : fomulações do método dos elementos de contorno / Welky Klefson Ferreira Brito. - João Pessoa, 2024.
264 f. : il.

Orientação: Ângelo Vieira Mendonça.
Tese (Doutorado) - UFPB/CT.

1. Vigas sobre fundação elástica. 2. Vigas duplas conectadas. 3. Camada de Kerr. 4. Método dos elementos de contorno. 5. Solução fundamental. 6. Placas sobre camada elástica. I. Mendonça, Ângelo Vieira. II. Título.

UFPB/BC CDU 624.072.233(043)

Elaborado por WALQUELINE DA SILVA ARAUJO - CRB-15/514

PPGECAM
Programa de Pós-Graduação
Engenharia Civil e Ambiental
UFPB Universidade Federal da Paraíba
Mestrado e Doutorado

***VIGAS E PLACAS ESPESSAS EM BASE ELÁSTICA DE KERR: FOMULAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO***

**Welky Klefson Ferreira de Brito**
**Tese aprovada em 01 de março de 2024.**
**Período Letivo: 2023.2**

Documento assinado digitalmente
gov.br ANGELO VIEIRA MENDONCA
Data: 11/03/2024 07:18:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Prof(a). Dr(a). Ângelo Vieira Mendonça – UFPB**
**Orientador(a)**

Documento assinado digitalmente
gov.br RICARDO ALMEIDA DE MELO
Data: 11/03/2024 11:32:50-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Prof(a). Dr(a). Ricardo Almeida De Melo – UFPB**
**Examinador(a) Interno(a)**

Documento assinado digitalmente
gov.br SANDRO MARDEN TORRES
Data: 11/03/2024 10:22:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Prof(a). Dr(a). Sandro Marden Torres – UFPB**
**Examinador(a) Interno(a)**

Documento assinado digitalmente
gov.br LUTTGARDES DE OLIVEIRA NETO
Data: 11/03/2024 15:20:24-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Prof(a). Dr(a). Luttgardes de Oliveira Neto – UNESP**
**Examinador(a) Externo(a)**

Documento assinado digitalmente
gov.br MARCELO CAVALCANTI RODRIGUES
Data: 11/03/2024 13:21:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Prof(a). Dr(a). Marcelo Cavalcanti Rodrigues – UFPB**
**Examinador(a) Externo(a)**

**João Pessoa/PB**
**2024**

À Thais Sanomiya, com amor.

# Agradecimentos

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pelas bênçãos abundantes em minha vida.

Ao professor Ângelo Vieira Mendonça pela excelente orientação, pelos conselhos e por não medir esforços em repassar o seu conhecimento.

Aos amigos do Lamfic, pelo convívio e momentos de descontração.

Em especial, à minha esposa Thais Sanomiya, por seu amor, carinho, apoio e dedicação principalmente nos momentos mais difíceis. Muito obrigado.

A todos os amigos e familiares pelo apoio e incentivo.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio e suporte financeiro.

# Resumo

A análise das estruturas apoiadas ou conectadas por camada elástica possui um vasto campo de aplicação na engenharia, tornando-os problemas bastante atrativos dentro da comunidade científica. Apesar da camada elástica de Kerr ser uma evolução dos outros modelos de base elástica, a literatura disponível ainda apresenta muitas lacunas em respostas numéricas, principalmente pelo método dos elementos de contorno, merecendo uma investigação mais detalhada. Este trabalho tem como objetivo analisar o comportamento de placas e vigas sobre camada elástica e sistemas de vigas duplas elasticamente conectadas por base elástica de Kerr pelo Método dos Elementos de Contorno direto (MEC-D). As teorias de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko são utilizadas nos modelos matemáticos das vigas, além teoria de Mindlin para as placas. As soluções fundamentais e equações integrais, indisponíveis até então para esses problemas, que são essenciais na metodologia do MEC, são devidamente deduzidas. Exemplos numéricos considerando diferentes condições de contorno, tipos de carregamento e variação das propriedades mecânicas dos materiais são feitos. O MEC se mostra como uma ótima alternativa para solução destes problemas uma vez que possui convergência acelerada e ótima precisão das respostas quando comparadas às soluções analíticas.

**PALAVRAS-CHAVE:** MEC, Vigas duplas conectadas, Camada de Kerr, Placa sobre camada elástica, Solução fundamental.

# Abstract

Studies of single or double structural systems have been constantly developed by many researchers, due to their extensive practical application in engineering problems. A breve review of the literature shows the most common elastic layer used are Winkler and Pasternak models. Surprisingly, few studies deal with the Kerr elastic layer. Commonly, exact or FEM solutions are used to solve these problems. This thesys presents the direct Boundary Element Method (BEM) formulation for bending analysis the beams and thick plates on Kerr layer and double-beam system connected by a Kerr elastic layer. Fundamental solutions, integral equations and algebraic equations are derived and explicitly shown. Presented numerical results in this thesis shows the accuracy of the technique and the elegance of the solutions proposed.

**KEYWORDS:** BEM, Double-beam system, Kerr layer, Plate under elastic layer, Fundamental solution.

# Lista de Figuras

FIGURA 1.1 – Fundação em radier. Fonte: Google imagens. . . . . 18

FIGURA 1.2 – Trilhos de trem. Fonte: Google imagens. . . . . 19

FIGURA 1.3 – Galeria de drenagem em rodovia. Fone: Google imagens. . . . . 19

FIGURA 2.1 – Componentes de tensão em um ponto. Fonte: Sadd (2009). . . . . 32

FIGURA 2.2 – Tensões e forças atuantes em um corpo. . . . . 33

FIGURA 2.3 – Deformação no plaxo $xy$. Fonte: Timoshenko (1951). . . . . 33

FIGURA 2.4 – Deformação da viga segundo as teorias de Euler-Bernoulli (a), Timoshenko (b) e Bickford-Reddy (c). Fonte: Wang *et al.* (2000a) adaptada. . . . . 38

FIGURA 2.5 – Viga de Euler-Bernoulli em sua configuração deformada. . . . . 39

FIGURA 2.6 – Viga de Timoshenko em sua configuração deformada. . . . . 41

FIGURA 2.7 – Tensão cisalhante: (a) variação real; (b) aproximação de Timoshenko. 42

FIGURA 2.8 – Deformação na superfície carregada da base elástica de Winkler. . . 43

FIGURA 2.9 – Deformação fora da região carregada segundo o modelo de Pasternak. 43

FIGURA 2.10 –Composição da camada elástica de Kerr. Fonte: Souza (2019) . . . . 44

FIGURA 2.11 –Deslocamentos relativos da base elástica de Kerr. . . . . 46

FIGURA 2.12 –Viga de Euler-Bernoulli sobre camada elástica. . . . . 48

FIGURA 2.13 –Sistema de vigas duplas de Euler-Bernoulli conectadas por base elástica. . . . . 50

FIGURA 2.14 –Vigas de Timoshenko sobre camada elástica de Kerr. . . . . 52

FIGURA 2.15 –Sistema de vigas duplas de Timoshenko conectadas pela base elástica de Kerr. . . . . 53

FIGURA 3.1 – Problema fundamental da viga de Euler-Bernoulli sobre camada de Kerr com fontes aplicadas em força na viga (a) e camada cisalhante (b). . . . . 56

FIGURA 3.2 – Sentidos positivos dos esforços (a) e deslocamentos (b) nas extremidades. . . . . 68

FIGURA 3.3 – Deslocamentos em um ponto $A$ no domínio das vigas. . . . . 73

FIGURA 3.4 – Problema fundamental da viga de Timoshenko sobre camada elástica de Kerr para ativação da fonte em força (a) e momento (b) na viga, e em força na camada cisalhante (c). . . . . 78

FIGURA 3.5 – Sentidos positivos dos deslocamentos. . . . . 86

FIGURA 3.6 – Deslocamentos em um ponto $A$ no domínio das vigas. . . . . 93

FIGURA 4.1 – Problema fundamental com fontes aplicadas em força na viga superior (a), na camada cisalhante (b) e na viga inferior (c). . . . . 98

FIGURA 4.2 – Sentidos positivos dos esforços (a) e deslocamentos (b) nas extremidades do elemento duplo na teoria de Euler-Bernoulli. . . . . 114

FIGURA 4.3 – Deslocamentos em um ponto $A$ no domínio das vigas. . . . . 118

FIGURA 4.4 – Problema fundamental com fontes aplicadas em força e momento na viga superior (a,b), em força na camada cisalhante (c) e em força e momento na viga inferior (d,e). . . . . 121

FIGURA 4.5 – Sentidos positivos dos deslocamentos. . . . . 131

FIGURA 4.6 – Deslocamentos em um ponto $A$ no domínio das vigas. . . . . 135

FIGURA 5.1 – Viga sobre camada elástica, simplesmente apoiada, submetida a carregamento uniforme. . . . . 137

FIGURA 5.2 – Viga sobre camada elástica, simplesmente apoiada, submetida a carregamento uniforme. . . . . 139

FIGURA 5.3 – Viga sobre camada elástica com guia móvel na extremidade direita. 141

FIGURA 5.4 – Viga dupla submetida a força concentrado no meio da viga superior. 142

FIGURA 5.5 – Viga sobre camada elástica, simplesmente apoiada, submetida a carregamento uniforme. . . . . 144

FIGURA 6.1 – Esforços internos em um elemento de placa sobre camada de Kerr. . 154

FIGURA 6.2 – Sistema de coordenadas genérico (a) e seus correspondentes esforços internos (b). . . . . 154

FIGURA 6.3 – Placa de Mindlin sobre camada elástica de Kerr. . . . . 155

FIGURA 6.4 – Sistema de coordenadas polares e cartesiano. . . . . 159

FIGURA 6.5 – Sistema de coordenadas local . . . . . 160

FIGURA 7.1 – Fonte aplicada na superfície média da placa (a) e da camada cisalhante de Kerr (b). . . . . 162

FIGURA 7.2 – Contorno circular acrescido a um ponto p de um canto da placa. . . 169

FIGURA 7.3 – Região $\Omega_g$ do carregamento distribuído. . . . . 175

FIGURA 7.4 – Discretização do problema real em elementos de contorno. . . . . 183

FIGURA 7.5 – Elementos de contorno contínuos (a) e descontínuos (b) com geometria linear e circular. . . . . 183

FIGURA 7.6 – Variação linear um elemento contínuo (a) e descontínuo (b) com geometria linear e circular. . . . . 184

FIGURA 7.7 – Representação do elemento de contorno linear. . . . . 184

FIGURA 7.8 – Elemento de contorno circular. . . . . 186

FIGURA 8.1 – O problema fundamental com fonte concentrada aplicada na placa (a) e na camada cisalhante (b). . . . . 190

FIGURA 8.2 – Variáveis referidas ao sistema global (a) e local (b) de referência. . . 213

FIGURA 8.3 – Sistema de coordenadas local no ponto fonte e campo. . . . . 214

FIGURA 9.1 – Placa circular submetida a carga pontual aplicada no centro. . . . . 215

FIGURA 9.2 – Discretização do problema quadrado. . . . . 216

FIGURA 9.3 – Placa circular submetida a carga pontual aplicada no centro. . . . . 218

FIGURA 9.4 – Placa circular submetida a carga pontual aplicada no centro. . . . . 220

FIGURA 9.5 – Discretização do problema circular. . . . . 220

FIGURA 9.6 – Erro relativo ao longo do raio da placa engastada – Mindlin MEC-4. 222

FIGURA 9.7 – Erro relativo ao longo do raio da placa simplesmente apoiada – Mindlin MEC-4. . . . . 223

FIGURA 9.8 – Placa circular submetida a carga pontual aplicada no centro. . . . . 224

FIGURA 9.9 – Erro relativo ao longo do raio da placa engastada – Mindlin MEC-32. 226

# Lista de Tabelas

TABELA 3.1 – Funções $f_i$ propostas segundo a natureza da raiz $y_i$. . . . . 59

TABELA 4.1 – Casos possíveis de funções $f_i$ segundo a natureza da raiz $y_i$ a ela associada. . . . . 100

TABELA 5.1 – Deslocamentos (em $m$) no meio do vão da viga ($w$) e da camada cisalhante ($v$). . . . . 138

TABELA 5.2 – Rotações (em $rad$) no contorno à direita, quando $x = L$. . . . . 139

TABELA 5.3 – Deslocamentos (em $m$) no meio do vão da viga ($w$) e da camada cisalhante ($v$) para um carregamento uniformemente distribuído. . . 140

TABELA 5.4 – Rotações (em $rad$) no contorno à direita, quando $x = L$, para um carregamento uniformemente distribuído. . . . . 140

TABELA 5.5 – Deslocamentos (em $m$) e rotações (em $rad$) ao longo da coordenada $x$.141

TABELA 5.6 – Esforços cortantes (em $N$) e momento (em $Nm$) fletor ao longo da coordenada $x$. . . . . 142

TABELA 5.7 – Deslocamentos (em $m$) e rotações (em $rad$) ao longo da coordenada $x$ do sistema de vigas duplas submetidas a carga concentrada. . . . 143

TABELA 5.8 – Cortantes (em $N$) e momentos fletores (em $Nm$) ao longo da coordenada $x$ do sistema de vigas duplas submetidas a carga concentrada.143

TABELA 5.9 – Deslocamentos (em $m \cdot 10^2$) e rotações (em $rad$) ao longo da coordenada $x$. . . . . 144

TABELA 5.10 –Cortantes (em $N$) e momentos fletores (em $Nm$) ao longo da coordenada $x$. . . . . 145

TABELA 8.1 – Funções auxiliares da solução fundamental desacoplada. . . . . 194

TABELA 8.2 – Constantes da equação fundamental desacoplada. . . . . 194

TABELA 9.1 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^5$) da placa ao longo do eixo $x_2$. . 216

TABELA 9.2 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^5$) da camada cisalhante ao longo do eixo $x_2$. . . . . 216

TABELA 9.3 – Rotações ($rad\ x10^4$) na placa ao longo do eixo $x_2$. . . . . 217

TABELA 9.4 – Momento fletor na direção $x_1$ ($kN/m$) ao longo do eixo $x_2$. . . . . 217

TABELA 9.5 – Momento fletor na direção $x_1$ ($kN/m$) ao longo do eixo $x_2$. . . . . 217

TABELA 9.6 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^5$) da placa ao longo do eixo $x_2$. . 218

TABELA 9.7 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^6$) da camada cisalhante ao longo do eixo $x_2$. . . . . 219

TABELA 9.8 – Rotação na placa ($rad\ x10^5$) ao longo do eixo $x_2$. . . . . 219

TABELA 9.9 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^3$) da placa ao longo do raio. . . . 221

TABELA 9.10 –Deslocamentos transversais ($m\ x10^3$) da camada cisalhante ao longo do raio. . . . . 221

TABELA 9.11 –Rotações da placa ($rad\ x10^3$) ao longo do raio. . . . . 221

TABELA 9.12 –Deslocamentos transversais ($m\ x10^2$) da placa ao longo do raio. . . . 222

TABELA 9.13 –Deslocamentos transversais ($m\ x10^2$) na camada cisalhante ao longo do raio. . . . . 223

TABELA 9.14 –Rotações na placa ($rad\ x10^2$) ao longo do raio. . . . . 223

TABELA 9.15 –Deslocamentos transversais ($m\ x10^3$) da placa ao longo do raio. . . . 224

TABELA 9.16 –Deslocamentos transversais ($m\ x10^3$) da camada cisalhante ao longo do raio. . . . . 225

TABELA 9.17 –Rotações da placa ($rad\ x10^4$) ao longo do raio. . . . . 225

TABELA 9.18 –Deslocamentos transversais ($m\ x10^3$) da placa ao longo do raio. . . . 225

TABELA 9.19 –Deslocamentos transversais ($m\ x10^3$) na camada cisalhante ao longo do raio. . . . . 226

TABELA 9.20 –Rotações na placa ($rad\ x10^3$) ao longo do raio. . . . . 226

TABELA B.1 –Funções auxiliares relacionadas a cada combinação de raízes da equação desacoplada da placa de Kirchhoff sobre camada de Kerr. . . . . 253

TABELA B.2 –Funções auxiliares relacionadas a cada combinação de raízes da equação desacoplada da placa de Mindlin sobre camada de Kerr. . . . . 259

# Sumário


1 Introdução . . . . . 18

**1.1 Revisão bibliográfica** . . . . . 20

1.1.1 Viga sobre camada elástica . . . . . 20

1.1.2 Sistema de vigas duplas conectadas por camada elástica . . . . . 23

1.1.3 Placa sobre camada elástica . . . . . 26

**1.2 Objetivo** . . . . . 28

1.2.1 Objetivos específicos . . . . . 28

**1.3 Organização do trabalho** . . . . . 29

2 Fundamentação teórica . . . . . 31

**2.1 Uma breve revisão da teoria da elasticidade** . . . . . 31

2.1.1 Tensões . . . . . 31

2.1.2 Deformações . . . . . 33

2.1.3 Relações constitutivas . . . . . 35

**2.2 Fundamentos da teoria de vigas** . . . . . 37

2.2.1 Teoria de Euler-Bernoulli . . . . . 39

2.2.2 Teoria de Timoshenko . . . . . 40

**2.3 Modelos de bases elásticas** . . . . . 42

**2.4 Energia de deformação** . . . . . 44

2.4.1 Energia de deformação da viga . . . . . 45

2.4.2 Energia potencial da base elástica . . . . . 46

2.4.3 Trabalho das forças externas . . . . . 47

**2.5 Equações de Equilíbrio** . . . . . 47

2.5.1 Pelas hipóteses de Euler-Bernoulli . . . . . 48
2.5.2 Pelas hipóteses de Timoshenko . . . . . 52

3 O MEC em vigas sobre camada elástica . . . . . 56
**3.1 Pela teoria de Euler-Bernoulli** . . . . . 56
3.1.1 O Problema Fundamental . . . . . 56
3.1.2 Equação Integral . . . . . 65
3.1.3 Equações algébricas . . . . . 67
**3.2 Nas hipóteses de Timoshenko** . . . . . 78
3.2.1 O Problema Fundamental . . . . . 78
3.2.2 Equação Integral . . . . . 83
3.2.3 Equações Algébricas . . . . . 85

4 O MEC em Vigas duplas conectadas . . . . . 97
**4.1 Nas hipóteses de Euler-Bernoulli** . . . . . 97
4.1.1 O Problema Fundamental . . . . . 97
4.1.2 Equação Integral . . . . . 109
4.1.3 Equações algébricas . . . . . 113
**4.2 Nas hipóteses de Timoshenko** . . . . . 120
4.2.1 O Problema Fundamental . . . . . 120
4.2.2 Equação Integral . . . . . 126
4.2.3 Equações Algébricas . . . . . 130

5 Aplicações numéricas . . . . . 137
**5.1 Viga sobre camada de Kerr** . . . . . 137
5.1.1 Simplesmente apoiada e submetida a carga concentrada . . . . . 137
5.1.2 Simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído . 139
5.1.3 Extremidade com engaste móvel . . . . . 140
**5.2 Sistema de vigas duplas conectadas pela base de Kerr** . . . . . 142
5.2.1 Simplesmente apoiada com carga concentrada . . . . . 142
5.2.2 Simplesmente apoiada com carga axial e vertical distribuída . . . . . 143

6 Introdução à teoria de placas . . . . . 146
**6.1 Fundamentos da teoria de placas** . . . . . 146
6.1.1 Teoria de Kirchhoff . . . . . 148
6.1.2 Teoria de Mindlin . . . . . 149
**6.2 Equações de equilíbrio** . . . . . 151
6.2.1 Pelas hipóteses de Kirchhoff . . . . . 151
6.2.2 Pelas hipóteses de Mindllin . . . . . 155
**6.3 Equações de placas em coordenadas polares** . . . . . 158

7 O MEC em Placas de Kirchhoff sobre camada de Kerr 161
**7.1 O problema fundamental** . . . . . 161
**7.2 Equações integrais** . . . . . 167
7.2.1 Equações integrais para deslocamentos em pontos do domínio . . . . . 167
7.2.2 Equações integrais para deslocamentos no contorno . . . . . 169
7.2.3 Transformação das integrais de domínio para o contorno . . . . . 174
7.2.4 Equações integrais para esforços no domínio . . . . . 179
**7.3 Montagem do sistema algébrico** . . . . . 182
7.3.1 Discretização do contorno . . . . . 182
7.3.2 Interpolação das variáveis . . . . . 183
7.3.3 Equações algébricas . . . . . 187

8 O MEC em Placas Mindlin sobre camada de Kerr . . . . 190
**8.1 O problema fundamental** . . . . . 190
**8.2 Equações integrais** . . . . . 198
8.2.1 Equações integrais para pontos no domínio . . . . . 199
8.2.2 Equações integrais para esforços no domínio . . . . . 203
8.2.3 Transformação das equações integrais de domínio . . . . . 205
**8.3 Montagem do sistema algébrico** . . . . . 210
8.3.1 Interpolação dos campos físicos . . . . . 211
8.3.2 Equações algébricas . . . . . 211

9 Aplicações numéricas . . . . . 215
**9.1 Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a carga concentrada** . . 215
**9.2 Placa quadrada submetida a carregamento uniformemente distribuído** . . 218
**9.3 Placa circular submetida a carga concentrada** . . . . . 219
**9.4 Placa circular submetida a carga distribuída** . . . . . 224

10 Conclusão . . . . . 227

Referências . . . . . 229

Apêndice A – Soluções analíticas de vigas . . . . . 240
**A.1 Extremidades simplesmente apoiadas** . . . . . 240
A.1.1 Viga de Euler-Bernoulli sobre fundação de Kerr . . . . . 241
A.1.2 Viga de Timoshenko sobre fundação de Kerr . . . . . 242
A.1.3 Vigas duplas de Euler-Bernoulli conectadas por base de Kerr . . . . . 243
A.1.4 Vigas duplas de Timoshenko conectadas por base de Kerr . . . . . 245

Apêndice B – Solução analítica placa sobre camada de Kerr . . . . . 248
**B.1 Placa retangular simplesmente apoiada** . . . . . 248
B.1.1 Pela teoria de Kircchoff . . . . . 248
B.1.2 Pela teoria de Mindlin . . . . . 250
**B.2 Placa circular** . . . . . 251
B.2.1 Pela teoria de Kirchhoff . . . . . 251
B.2.2 Pela teoria de Mindlin . . . . . 257

Anexo A – Derivadas e integrais das funções de Bessel modificadas de segunda espécie . . . . . 264
**A.1 Derivadas das funções K** . . . . . 264
**A.2 Integrais das funções K** . . . . . 265

# Capítulo 1

# Introdução

Vigas e placas são elementos estruturais presentes nas mais variadas áreas da engenharia, desemprenhando diversas funções dentro do sistema estrutural. Geometricamente, as vigas são classificados como elementos lineares, uma vez que possuem dimensões longitudinais muito maiores que as da seção transversal, enquanto que as placas são tratadas como bidimensionais por possuírem duas dimensões muito maiores que uma terceira, sua espessura. O estudo da interação desses elementos com o meio, por exemplo o solo (interação solo-estrutura), possui grande valor científico uma vez que leva a uma análise mais próxima da realidade. Devido à complexidade que o problema real causa em termos de solução, simplificações são introduzidas no problema inicial, criando-se, portanto, modelos para representar o comportamento dos elementos em questão.

A concepção de vigas ou placas apoiadas em fundações elásticas tem sido extensivamente utilizadas nos mais diversos casos práticos das engenharias, como por exemplo exemplo: fundações em faixas, trilhos de ferrovias, barragens e pistas de aeroportos. Uma aplicação prática para utilização do modelo de placa sobre camada elástica pode ser vista na figura 1.1, onde o radier pode ser analisado como uma placa e o solo como um meio elástico. Já para o modelo de viga apoiada em camada elástica, um caso prático de aplicação é mostrado na figura 1.2.

FIGURA 1.1 – Fundação em radier. Fonte: Google imagens.

FIGURA 1.2 – Trilhos de trem. Fonte: Google imagens.

As estruturas elasticamente conectadas por camada elástica também têm chamado a atenção da comunidade científica, sendo estudadas de forma intensiva por diversos autores principalmente nas últimas décadas. São estruturas com um vasto campo de aplicação nos mais variados problemas de engenharia: vigas sanduíche ou compósitos, juntas adesivas, nano tubos de carbono com paredes duplas ou múltiplas, dutos enterrados, sistemas de drenagem associados a pavimentos etc. A figura 1.3 apresenta um caso prático onde o modelo de vigas duplas conectadas pode ser utilizado na modelagem numérica.

FIGURA 1.3 – Galeria de drenagem em rodovia. Fone: Google imagens.

As soluções analíticas das equações diferenciais governantes desses problemas ou não estão disponíveis, na maioria dos casos, ou são custosas, sendo as soluções aproximadas uma ótima alternativa. A utilização de métodos numéricos aplicados na resolução de problemas de engenharia, aliado a capacidade cada vez maior dos computadores em processar dados, proporciona análises cada vez mais próximas da realidade. O desenvolvimento dessas técnicas aproximadas originou os métodos de domínio, como o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), e os métodos de contorno, como o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Os métodos de domínio aproximam a solução das equações diferenciais ou integrais que regem o problema físico, considerando incógnitas associadas a pontos discretos do domínio e pontos do contorno do problema analisado. No MDF, o sistema de equações diferenciais é transformado em um sistema algébrico através da aplicação de aproximações para as derivadas parciais contínuas, geralmente utilizando séries de Taylor truncadas. No MEF, o meio contínuo é dividido em elementos que têm tratamento numérico individual como

sub-regiões contínuas e, depois, são acoplados a fim de se obter a solução do problema geral.

Dentre as técnicas numéricas pode-se destacar o método dos elementos de contorno (MEC) que se apresenta como uma alternativa bastante adequada para a modelagem de problemas com concentração de tensão e de domínios que tendem ao infinito. Além disso, a possibilidade de redução de dimensionalidade da solução do problema (saindo de um domínio 3D para uma descrição no contorno 2D, de domínio 2D para contorno 1D, e finalmente de domínio 1D para contorno definido por dois pontos) é a principal vantagem do método, que reduz consideravelmente o número de variáveis (redução da malha) do problema e proporciona uma convergência acelerada se comparada a outros métodos numéricos.

## 1.1 Revisão bibliográfica

### 1.1.1 Viga sobre camada elástica

O estudo de vigas apoiadas no solo possui uma grande importância na engenharia dado a frequência com que esses casos acontecem na prática, como por exemplo em ferrovias, fundação de edifícios, pistas de pouso em aeroportos etc. Uma abordagem habitual na formulação do problema baseia-se na inclusão da reação da fundação na equação diferencial correspondente da viga (KERR, 1964a). Dentre os modelos simplificados, encontram-se o modelo de um parâmetro de Winkler (1867) e o de dois parâmetros de Pasternak (1954), que corresponde a um melhoramento do seu precursor. Entretanto, o fato do modelo proposto pelo Kerr (1964a) apresentar resultados mais próximos aos da teoria da elasticidade quando comparado aos dois modelos anteriores (BARROS *et al.*, 2009), torna-o bastante atrativo.

O primeiro modelo de Winkler (1867) passou a ser estudado em detalhes por Hetényi e Hetbenyi (1946) na análise estática de vigas apoiadas no solo apresentando a solução analítica de vigas infinitas e finitas na teoria de Euler-Bernoulli sob diferentes tipos de carregamentos, axiais e transversais, onde foi estudado ainda sobre a continuidade da camada elástica. Mais tarde, um estudo mais abrangente foi descrito em Hetenyi (1950). A consideração do efeito do cisalhamento na viga sobre base elástica de Winkler foi tratado algum tempo depois por Weaver Jr *et al.* (1991).

Além das soluções analíticas, também são encontrados na literatura métodos numéricos como solução desses problemas, como por exemplo o método das diferenças finitas estudado por Beaufait e Hoadley (1980). Eisenberger e Yankelevsky (1985), baseados na formulação do método dos elementos finitos, utilizaram as soluções homogêneas da equa-

ção diferencial governante do problema estático para obter a matriz de rigidez e vetor de carga exatos segundo a teoria de Euler-Bernoulli. Em continuidade, Davies (1986) e Yankelevsky e Eisenberger (1986) consideraram o efeito de carga axial tracionando ou comprimindo a barra na formulação do elemento finito. O efeito do cisalhamento foi incluído no modelo por meio do trabalho de Aydoğan (1995), onde é mostrado que os deslocamentos devido às forças cisalhantes são influenciadas tanto pelo parâmetro da fundação quanto pela relação vão/altura da viga. A análise dinâmica considerando a teoria clássica de vigas pode ser vista nos trabalhos de Doyle e Pavlovic (1982), Eisenberger *et al.* (1985) e Williams e Kennedy (1987), enquanto que Lee (1998) estudou o problema a partir das hipóteses da teoria de vigas de Timoshenko.

Apesar de ser atrativo devido a sua simplicidade, o modelo Winkler não pode representar adequadamente um meio contínuo em determinados casos uma vez que a interação entre as molas é neglicenciado. Com isso, o modelo de Pasternak (1954) passa a ser uma boa opção uma vez que tal efeito é considerado a partir da colocação de uma camada de cisalhamento conectada às molas.

Um dos primeiros estudos considerando o modelo de Pasternak pode ser visto em Radeş (1970), onde obteve as soluções analíticas para a viga de Euler-Bernoulli sujeita a forças e momentos dinâmicos. Podem-se ainda encontrar trabalhos que abordam as soluções analíticas para a viga submetida a cargas harmônicas (MIAO *et al.*, 2017), cargas axiais (XU; WANG, 2020) ou ainda explorando o problema estático (TANAHASHI, 2004). Tais problemas também foram tratados utilizando a teoria de Timoshenko, como pode ser visto em Rosa (1995) que trata sobre a vibração livre de vigas simplesmente apoiadas e Wang e Stephens (1977) que estende a outras condições de contorno, além do estudo da estabilidade de vigas submetidas a cargas axiais (CALIO; GRECO, 2013; HARIZ *et al.*, 2022).

As vigas sobre base de Pasternak também já foram intensivamente exploradas por meio do método dos elementos finitos. Zhaohua e Cook (1983) baseados nas hipóteses de Euler-Bernoulli, obtiveram a matriz de rigidez e vetor de carga para dois tipos de elementos finitos: um baseado na solução exata do deslocamento; e outro baseado em funções cúbicas, similar a viga sem a camada elástica. Entretanto, sua solução está limitada a certas combinações de parâmetros da viga e da camada elástica. Outras soluções foram propostas como pode ser visto em Chiwanga e Valsangkar (1988), que também apresenta limitações em relação às condições de contorno, e por Razaqpur e Shah (1991) que apresentaram a matriz de rigidez e vetor de carga exatos mais eficientes. Em Mourelatos e Parsons (1987), considerando o efeito do cortante e de forças axiais, foi proposto um elemento finito a partir de funções quadráticas para os deslocamentos e rotações. Recentemente, vários outros trabalhos foram publicados tendo como foco a análise dinâmica (RAO; RAJU, 2002; BEZERRA *et al.*, 2017b; SIGUEIRA *et al.*, 2019) e estática (BOUDAA *et al.*,

2019; LIMKATANYU *et al.*, 2015) de vigas de Euler-Bernoulli, assim como de Timoshenko (KARKON; KARKON, 2016; SOARES *et al.*, 2017; BEZERRA *et al.*, 2017a), sobre a camada elástica de Pasternak.

Na literatura, pode-se encontrar um número razoável de trabalhos em que a camada de Kerr foi incorporada ao modelo físico. Um dos primeiros estudos relacionados ao tema pode ser visto em Radeş (1971b), que estudou o comportamento de vigas rígidas apoiadas em camada de Kerr frente à vibração forçada, onde o efeito do amortecimento foi considerado por meio de parâmetros adicionais ao modelo da fundação. Considerando a teoria clássica de vigas, Barros *et al.* (2009) estudaram a interação do SCR-Seafloor (Steel Catenary Risers) com o solo, onde obtiveram as soluções exatas e compararam os resultados obtidos por meio das fundações de Winkler, Pasternak e Kerr aos modelos contínuos via MEF.

A solução via MEF se deu a partir das pesquisas desenvolvidas por Morfidis (2003), que tratou em sua tese sobre vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko sobre camada elástica de Kerr submetidas à flexão, com ou sem carga axial, e que mais tarde renderam algumas publicações. Baseado nas hipóteses da teoria de vigas de Timoshenko, Avramidis e Morfidis (2006) propuseram uma solução analítica para o problema de vigas finitas e infinitas apoiadas em camada elástica de Kerr considerando soluções homogêneas do tipo $F(x) = \sum_{i=1}^{6} C_i f_i(x)$ para os deslocamentos e rotações, onde as constantes $C_i$ são obtidas por meio das equações de equilíbrio do problema, enquanto que as funções $f_i$ são dadas em função das raízes da equação desacoplada. Buscando uma formulação via MEF, Morfidis (2007) utilizou as soluções homogêneas propostas por Avramidis e Morfidis (2006) para gerar as matrizes de rigidez e vetores de carga exatos. Em outro trabalho, Morfidis (2010) analisou o problema dinâmico nas hipóteses de Timoshenko, onde apresentou as matrizes de rigidez e massa exatos do elemento finito.

De uma forma geral, as soluções do MEC para vigas livres de camada elástica são bastante reduzidas quando comparadas ao MEF, por exemplo. O método passou a ser utilizado como solução numérica para vigas por volta de 1980, onde Banerjee e Butterfield (1981) trataram da análise estática de vigas com as hipóteses de Euler-Bernoulli, enquanto que Providakis e Beskos (1986) estudaram o problema do ponto de vista dinâmico. A análise estática pela teoria de Timoshenko foi proposta por Antes (2003), onde foi obtido o sistema completo de equações integrais para a teoria de Timoshenko. Mais tarde, Antes *et al.* (2004) apresentaram a formulação para análise harmônica de pórticos planos utilizando o modelo de Timoshenko. Cruz (2012) apresentou soluções fundamentais alternativas àquelas apresentadas por Antes (2003), onde analisou pórticos planos e espaciais sob os efeitos estáticos e dinâmicos, segundo as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko para a flexão. Um enfoque especial foi dado dado para o problema de interação solo-estrutura em regime estático, o qual tanto a superestrutura quanto o solo (admitido como um sólido

elástico semi-infinito) foram representados pelo MEC.

Poucos trabalhos são encontrados na literatura tratando sobre vigas apoiadas em camada elástica pelo MEC, restritos à última década. Passos (2014) aborda a utilização do MEC direto para solução dos problemas de estabilidade estática e dinâmica de vigas nos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Além disso, os efeitos da camada elástica de Pasternak foram incorporados. Já Maia (2016) seguiu com estudos estáticos relacionados a flexão e estabilidade de vigas, com e sem base elástica de Pasternak, abordando a teoria de alta ordem de Bickford-Reddy e propondo as soluções fundamentais convenientes para cada caso.

### 1.1.2 Sistema de vigas duplas conectadas por camada elástica

Um dos primeiros autores a tratar sobre o tema foram Seelig e Hoppmann (1964b), onde apresentaram a solução analítica para cálculo das frequências naturais e modos de vibração do sistema de vigas duplas de Euler-Bernoulli idênticas, comparando os resultados com aqueles obtidos experimentalmente. Em outro trabalho, Seelig e Hoppmann (1964a) consideraram o sistema sujeito a carga de impacto. Chonan (1976) estudou o comportamento dinâmico de um sistema de duas vigas conectadas por um conjunto de molas independentes, submetidas a uma carga impulsiva, por meio do método das transformadas de Laplace. Um caso particular foi estudado por Kessel (1966) onde investigou as ressonâncias quando o sistema simplesmente apoiado é submetido a uma carga móvel cíclica atuando longitudinalmente em torno de um ponto fixo na barra superior. Hamada *et al.* (1983) apontaram a semelhança entre o sistema de múltiplas vigas conectadas elasticamente (com diferentes condições de contorno) e o sistema massa-mola com múltiplos graus de liberdade. Em contrapartida, o problema estático foi estudado por Chung e Lin (1988) onde analisaram um sistema de vigas duplas de Euler-Bernoulli conectadas por molas para simular o feito de componentes de maquinas em contato.

Nas últimas duas décadas, os estudos relacionados ao comportamento de estruturas elasticamente conectadas por camada elástica têm recebido uma maior atenção da comunidade científica. Oniszczuk (2000) propôs a solução analítica para cálculo das frequências naturais de um sistema de duas vigas de Euler-Bernoulli, simplesmente apoiadas, unidas por camada elástica de Winkler. Em outro trabalho, Oniszczuk (2003) estudou a resposta forçada para o mesmo sistema utilizando o método da expansão modal. Em extensão ao trabalho do Oniszczuk (2000), Zhang *et al.* (2008) obtiveram, além das soluções analíticas para determinação das frequências naturais e amplitudes associadas, as cargas críticas de flambagem. Fazendo uma simples mudança de variável, Wu e Gao (2015) obtiveram as equações desacopladas do sistema de vigas duplas conectadas por camada de Winkler considerando ainda o efeito do amortecimento. As soluções analíticas para o sistema

submetido a uma carga harmônica móvel foram obtidas considerando apenas as vigas idênticas e simplesmente apoiadas. Mirzabeigy *et al.* (2017) apresentaram as expressões explícitas para o cálculo das frequências naturais de sistemas com condições de contorno arbitrárias. Recentemente, Liu e Yang (2019) propuseram as soluções fechadas exatas para solução de sistemas de vigas sobre vibração forçada.

Soluções baseadas em métodos numéricos também são encontradas na literatura. Em Kelly e Srinivas (2009), por exemplo, foi apresentado um estudo sobre a vibração livre de múltiplas vigas (nanotubos de carbono) conectadas por camada elástica de Winkler e submetidas a carga axial. O método de Rayleigh-Ritz foi utilizado como alternativa de solução. Mao (2012) seguiu com estudos semelhantes ao anterior onde foi utilizado como estratégia de solução o Adomian modified decomposition method (AMDM). Já Hao *et al.* (2018) aplicaram o método de Fourier–Ritz modificado no estudo da vibração livre do sistema de vigas duplas com condições de contorno generalizadas.

O estudo dos sistemas de vigas conectadas por camada elástica de Winkler na teoria de Timoshenko foi iniciado por Rao (1974), onde obteve as frequências naturais e modos de vibração de sistemas com múltiplas vigas conectadas por camada elástica de Winkler. Mais tarde, Stojanović *et al.* (2011) estudaram a vibração livre e flambagem de sistemas de vigas duplas elasticamente conectadas por camada elástica de Winkler e submetidas a cargas axiais compressivas. A solução analítica proposta foi obtida via método de Bernoulli-Fourier para a condição de contorno simplesmente apoiada. Adotando a mesma abordagem, Zhang *et al.* (2014) tiveram como foco a obtenção das soluções fechadas para vibração livre e forçada considerando várias descontinuidades no domínio. Em outro trabalho, Stojanović *et al.* (2013) propuseram a solução analítica para obtenção das frequências naturais e carga crítica de flambagem de um sistema de múltiplas barras (simplesmente apoiadas) conectadas continuamente entre si por camada elástica de Winkler e submetidas apenas a carga axial, nas teorias de vigas de Timoshenko e de alta ordem de Bickford-Reddy.

O método dos elementos finitos foi utilizado por Li e Hua (2007), onde foram determinadas as frequências naturais e modos de vibração de um sistema de duas vigas de Timoshenko conectadas por camada elástica de Winkler com diferentes condições de contorno. Um estudo semelhante foi feito por Xiaobin *et al.* (2014), onde utilizaram o Método da Rigidez Dinâmica exata para determinar as frequências naturais e modos de vibração do problema, considerando ainda cargas axiais aplicadas. Por meio das funções de Green, Zhao *et al.* (2020) investigaram os sistemas de vigas duplas submetidos a cargas axiais com condições de contorno generalizadas.

Mais recentemente, começaram a surgir alguns trabalhos considerando as vigas interconectadas pela camada elástica de Pasternak. Em seu trabalho, Mohammadi e Nasirshoaibi (2015) investigaram a vibração forçada de um sistema de vigas duplas de Rayleigh elas-

ticamente conectadas por camada de Pasternak, simplesmente apoiadas, sujeitas ainda a forças axiais compressivas. A partir das soluções analíticas propostas, verificou-se uma dependência significante do problema com a carga axial e a camada cisalhante de Pasternak, afetando assim a magnitude das amplitudes de vibração da viga. Em continuidade ao trabalho anterior, Nasirshoaibi e Mohammadi (2015) consideraram no modelo matemático as hipóteses da teoria de vigas de Timoshenko. Adicionalmente, Atanasov *et al.* (2017) investigaram a vibração livre e flambagem de sistemas de micro vigas duplas de Euler-Bernoulli sob efeito de mudança de temperatura. Foram apresentadas as soluções analíticas para o caso simplesmente apoiado. Já Agboola *et al.* (2017) trataram do problema da vibração livre em sistemas de vigas de Euler-Bernoulli não prismáticas, considerando as extremidades das vigas como engastada-livre.

Soluções baseadas em métodos numéricos também são encontradas na literatura. Em Brito *et al.* (2018) foi apresentada a solução via MEF para um sistema de vigas de Euler-Bernoulli conectadas por camada elástica de Pasternak. Baseadas em funções polinomiais para representar os campos em deslocamentos, foram obtidas e explicitadas as matrizes de rigidez e vetor de carga. Em continuidade, Brito *et al.* (2019b) consideraram o efeito do cortante sobre o sistema por meio da consideração das hipóteses da teoria de Timoshenko. Baseado no MEC, Brito *et al.* (2019a) apresentaram as soluções fundamentais, equações integrais e algébricas para um sistema de vigas duplas de Euler-Bernoulli interconectado pela camada elástica de Pasternak. Em comum a todos os trabalhos, diferentes condições de contorno, carregamentos e propriedades das vigas foram consideradas nas soluções.

Por outro lado, pouco é discutido na literatura sobre o sistema de vigas duplas conectadas por camada elástica de Kerr. Em Kozić *et al.* (2014), é obtida a solução analítica para o problema da vibração livre e flambagem, onde a teoria de Euler-Bernoulli é utilizada para representar a cinemática de deformação da viga. Por sua vez, Milenković *et al.* (2021) obtiveram a solução analítica do problema de vibração livre para a teoria de vigas de Rayleigh. Nele, o efeito da carga axial nas vigas também é considerado. Em ambos a solução apresentada é aplicada para sistemas duplos com mesmas propriedades mecânicas e apoios simples. Considerando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, Brito *et al.* (2021) trataram do problema estático de sistemas de vigas duplas conectadas por camada elástica de Winkler apoiadas em camada elástica de Kerr via MEF. Em outro trabalho, visando obter as repostas de um sistema de vigas duplas conectadas por camada de Kerr, Brito *et al.* (2022) propuseram funções interpoladoras de nona ordem para representar os campos em deslocamentos. Diferentes condições de contorno, propriedades e carregamentos foram estudados.

Ainda se tratando do MEC, os sistemas de vigas duplas foram amplamente estudados por Brito (2018). Neste trabalho, foram explorados os problemas estático e dinâmico dos sistemas de vigas duplas conectadas por base elástica nas teoria de vigas de Euler-

Bernoulli, Timoshenko e Bickford-Reddy. Foram propostas as soluções fundamentais, deduzidas as equações integrais e sistema algébrico. Preferencialmente foi utilizada a camada elástica de Winkler, sendo as soluções aplicáveis a quaisquer condições de contorno, carga ou propriedades das vigas.

Entretanto, a partir da revisão da literatura realizada, vê-se que as soluções baseadas no MEC para vigas duplas elasticamente conectadas por camada elástica de Kerr estão indisponíveis.

### 1.1.3 Placa sobre camada elástica

O estudo de placas apoiadas em camada elástica é aplicável a várias situações práticas nas engenharias civil, aeroespacial, automotiva etc. A literatura mostra a diversidade de métodos utilizados na análise desses problemas, desde analíticos até métodos numéricos. Dentre os modelos de camada elástica o de Winkler é o mais utilizado.

Devido a simplicidade e aos bons resultados obtidos para determinados casos, a teoria clássica de placas (teoria de Kirchhoff, ou ainda teoria de placas delgadas) tem sido utilizada nas análises de placas sobre camada elástica há bastante tempo. Um dos primeiros estudos sobre o tema pode ser visto em Westergaard (1923), onde resolveu o problema de uma placa semi-infinita sobre camada elástica com cargas concentradas igualmente espaçadas ao longo da borda livre, sendo a solução analítica dada na forma de séries. Mais tarde, Peach (1950) por meio do método das diferenças finitas, resolveu o mesmo problema para uma carga concentrada na borda livre. Nevel (1965) publicou a solução analítica considerando uma carga concentrada aplicada próximo as bordas, consideradas simples, rígidas ou livres. Vários outros trabalhos discutem sobre as soluções analíticas, como pode ser visto em Yu e Wang (2008), Kaplunov *et al.* (2016), Mama *et al.* (2017), Ike (2017) e Ike (2018). Além das soluções analíticas, a análise numérica de placas delgadas sobre base de Winkler pode ser vista utilizando o Método das Diferenças Finitas em Chakravorty e Ghosh (1975), pelo método de Rayleigh-Ritz em Chakraverty e Pradhan (2014), o Método dos Elementos Finitos em Zienkiewicz (1967) e Huang e Thambiratnam (2001), e pelo Método dos Elementos de Contorno por Katsikadelis e Armenakas (1984), Calderon (1991) e Manzoli (1992).

Quando a placa se torna espessa, a teoria clássica se torna inefetiva, uma vez que não leva em consideração as deformações por cisalhamento que são significantes no comportamento a flexão. As principais teorias de placas que consideram o efeito da deformação por cisalhamento (placas espessas) são as de Reissner (1945) e Mindlin (1951). Existem também a placa de Reddy (1984), que considera uma deformação por cortante de alta ordem. De um modo geral, as soluções analíticas para placas espessas apoiadas em camada elástica de Winkler foram amplamente discutidas por vários pesquisadores, desde

os problemas estáticos até os dinâmicos, como pode ser visto em Ariman (1969), Yettram *et al.* (1984), Kobayashi e Sonoda (1984), Kobayashi e Sonoda (1989), Ke-rang (1990) e Shen *et al.* (2001). Além das soluções analíticas, a literatura fornece soluções baseadas no método da quadratura diferencial Liu (2000), MEF conforme Svec (1976), Abdalla e Ibrahim (2006), Ozgan e Daloglu (2007), Xie *et al.* (2007), Zeng *et al.* (2008) e Özdemir (2020), e ainda via MEC tratados nos trabalhos de Al-Hosani *et al.* (1999), Al-Hosani (1998), Rashed *et al.* (1998), Al-Hosani *et al.* (1999), e Jianguo *et al.* (1993).

A principal limitação do modelo de base elástica de Winkler está em não representar de maneira adequada a continuidade do meio. Diante disso, o modelo de Pasternak ganha um destaque por representar a coesão do meio elástico. Um dos primeiros estudos pode ser visto em Yu (2021) para flexão de placas delgadas circulares e Xiang *et al.* (1994), para vibração e flambagem de uma placa de espessa simplesmente apoiada sobre camada elástica de Pasternak. Soluções baseadas em métodos numéricos também são encontradas na literatura, como pode ser visto em Han e Liew (1997) onde aplicaram o método da quadratura diferencial para estudar flexão de uma placa retangular de Mindlin sob diferentes condições de contorno. Solução baseada no MEF pode ser encontrada em Buczkowski (2001), enquanto que pelo MEC o tema foi amplamente discutido por Fadhil e El-Zafrany (1994), Rashed *et al.* (1999), Karam (2014) e Altoé *et al.* (2015).

Entretanto, o modelo proposto por Pasternak causa um aumento da força cortante principalmente nas bordas do problema, devido a camada cisalhante estar diretamente em contato com a placa. Diante disso, a camada de molas adicionais entre a placa e a camada cisalhante proposta por Kerr (1964a), corrige tal efeito tornando-a mais fidedigna se comparado aos modelos contínuos.

Em 1968, Kerr e Arnold estudaram uma placa delgada retangular com bordas engastadas sujeitas a uma carga lateral uniforme, propondo uma solução aproximada em extensão ao método de Kantorovich (KERR, 1966a; KERR, 1966b). Por meio dessa solução, obtiveram as respostas em termos de deslocamentos e esforços ao longo da placa, a partir das derivadas dos deslocamentos, e permitiu uma utilização prática na engenharia, uma vez que a solução exata até aquela época não estava disponível na literatura. A análise dinâmica foi introduzida por Radeş (1971a), onde estudou os efeitos estático e dinâmico de uma placa circular rígida. As distribuições de pressão na placa foram apresentadas para diferentes frequências de excitação e parâmetros da fundação.

Mais tarde, Kneifati (1985) estudou placas infinitas apoiadas em camada elástica de Kerr sujeitas a carregamento uniformemente e forças no contorno, propondo as soluções analíticas a partir da solução homogênea desacoplada. A precisão das respostas obtidas por meio da camada elástica de Kerr é mostrada a partir da comparação entre as fundações de Winkler, Pasternak e Kerr com o modelo contínuo via MEF.

Recentemente, Paliwal e Ghosh (2000) estudaram o comportamento à flambagem de uma placa retangular ortotrópica sobre camada de Kerr, onde é considerado a placa comprimida em uma ou duas direções principais. As soluções analíticas são produzidas para o caso simplesmente apoiado nas bordas. Alisjahbana *et al.* (2018) propuseram uma solução semi-analítica para analisar o comportamento dinâmico de um pavimento rígido (placa ortotrópica) sujeito a cargas móveis em sua superfície, com velocidade constante. Na formulação adotada, foram considerados que o contorno da placa possuem restrições verticais e rotacionais. Já Rahman (2017) obteve as soluções analíticas uma placa circular delgada sujeita a cargas estáticas, concentrada e distribuída.

As soluções numéricas baseadas no MEF não foram encontradas na literatura, sendo restritas a vigas sobre camada de Kerr. Já a solução baseada no MEC foi dada recentemente por Souza (2019) para a placa de Kirchhoff sobre base elástica de Kerr. Baseado no MEC-D (direto), Souza (2019) obteve as soluções fundamentais desacopladas a partir da combinação linear de soluções já conhecidas. Dessa forma, as soluções fundamentais em deslocamentos e esforços foram apresentadas explicitamente. As equações integrais foram obtidas por meio da técnica dos resíduos ponderados (TRP), onde as equações diferenciais governantes do problema real foram ponderadas pelas suas respectivas soluções fundamentais. Todos o passos para obtenção do sistema algébrico e solução do problema foram apresentados.

Diante da revisão da literatura, vê-se que placas sobre camada elástica de Kerr ainda é um tema pouco discutido dentro da comunidade científica, merecendo um destaque maior devido aos resultados mais eficientes que os modelos de Winkler e Pasternak quando comparados aos modelos contínuos. Além disso, o estudo de placas espessas apoiadas em base elástica de Kerr pelo MEC ainda não foram discutidas.

## 1.2 Objetivo

Esta tese teve como objetivo principal estabelecer formulações baseadas no Método dos Elementos de Contorno para análise estática de vigas e placas espessas apoiadas em camada elástica de Kerr e para sistemas de vigas duplas elasticamente conectadas por camada elástica de Kerr.

### 1.2.1 Objetivos específicos

• Propor as soluções fundamentais, deduzir as equações integrais e algébricas para análise estática de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko sobre camada elástica de Kerr;

• Propor as soluções fundamentais, deduzir as equações integrais e algébricas para aná-

lise estática de sistemas de vigas duplas de Euler-Bernoulli ou Timoshenko elasticamente conectadas por camada elástica de Kerr;

• Propor as soluções fundamentais, deduzir as equações integrais e algébricas para análise da flexão de placas de Mindlin sobre camada elástica de Kerr;

• Implementar os algoritmos pertinentes a cada um dos problemas propostos.

## 1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está estruturado em 10 capítulos, dois apêndices e um anexo.

No capítulo 1 é apresentada uma breve revisão da literatura a cerca dos problemas estudados neste trabalho, apontando as lacunas existentes principalmente no que se refere a análise via MEC.

No capítulo 2 é apresentada uma breve revisão sobre a teoria da elasticidade tridimensional, dando o embasamento teórico necessário para as discussões que seguem. É dado o devido tratamento às teoria de vigas e modelos de base elástica que serão utilizadas nesse trabalho. Por fim, as equações de equilíbrio para cada um dos casos foram obtidas via minimização do funcional de energia e são devidamente explicitados.

No capítulo 3 o MEC é aplicado no problema estático de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko apoiadas em camada elástica de Kerr, propondo as soluções fundamentais, equações integrais e equações algébricas.

No capítulo 4 o MEC é aplicado na análise a flexão de sistemas de vigas duplas (nas teorias de Euler-Bernoulli e Timoskenko) elasticamente conectadas por camada elástica de Kerr. As soluções fundamentais para os principais casos de ocorrência na prática são apresentadas, assim como as equações integrais e sistema algébrico.

No capítulo 5 são apresentados alguns resultados numéricos para validação das soluções propostas nos capítulos 3 e 4. A rápida convergência e precisão das respostas do MEC podem ser vistas por meio de exemplos considerando variadas condições de contorno, casos de carregamento e propriedades das vigas.

No capítulo 6 é feito uma breve revisão sobre as teorias de placas existentes na literatura, apresentando, na sequência, as hipóteses relacionadas as teorias de placas de Kirchhoff e Mindlin. Em seguida, são apresentados os passos para obtenção das equações diferencias governantes do problema real das placas de Kirchhoff e Mindlin sobre camada elástica de Kerr, via minimização do funcional de energia.

No capítulo 7 é apresentado o MEC aplicado a placas de Kirchhoff sobre camada elástica de Kerr. São discutidas as soluções fundamentais propostas por Souza (2019),

apresentando ainda as equações integrais e algébricas para a determinação dos deslocamentos no contorno e domínio. Como contribuição, são propostas as equações integrais para determinação dos momentos fletores em pontos internos ao domínio do problema.

No capítulo 8 são propostas as soluções fundamentais para placas de Mindlin sobre camada elástica de Kerr. Se tratando do MEC, são obtidas as equações integrais e algébricas do problema. Buscando uma solução puramente do MEC, as equações integrais do carregamento são transformadas em equações integrais sobre o contorno.

No capítulo 9 são apresentados os resultados numéricos obtidos por meio das soluções apresentadas nos capítulos 7 e 8. Quando comparado aos valores analíticos, vê-se que o MEC tem uma ótima precisão nas respostas além de uma convergência acelerada, se aproximando dos valores exatos mesmo utilizando malhas com poucos elementos de contorno.

No capítulo 10 são discutidas as conclusões obtidas ao longo do trabalho, e sugestões para trabalhos futuros.

No apêndice A são apresentadas as soluções analíticas para vigas simples e duplas, com camada elástica de Kerr, simplesmente apoiadas.

No apêndice B são apresentadas as soluções analíticas de placas retangulares simplesmente apoiadas e circulares sobre camada elástica para quaisquer condições de contorno.

No anexo A são mostradas as expressões para o cálculo das derivadas e integrais das funções modificadas de Bessel de segunda espécie.

# Capítulo 2

# Fundamentação teórica

Neste capítulo, além de uma revisão no estudo de tensões e deformação, serão apresentadas e discutidas as hipóteses consideradas em cada teoria de vigas disponíveis na literatura e que são objetos desta tese. Baseado no princípio da mínima energia de deformação, são apresentadas as equações de equilíbrio para cada um dos problemas de vigas estudados: vigas sobre camada elástica de Kerr; e vigas duplas conectadas por camada elástica Kerr.

## 2.1 Uma breve revisão da teoria da elasticidade

### 2.1.1 Tensões

Considere que sobre um corpo em equilíbrio atuem forças externas $f_i$, concentradas ou distribuídas. Seccionado o corpo, verifica-se que as forças internas que atuam em uma área $\Delta A_n$, com vetor normal $n$, produzem uma resultante em forças em um ponto $p$ definida por $\Delta F_m$ na direção $m$. Dessa forma, escreve-se a força interna média como sendo:

$$\varrho_{nm} = \frac{\Delta F_m}{\Delta A_n}. \tag{2.1}$$

Calculando o limite quando a área $\Delta A_n$ tende a zero, de forma que contenha sempre o ponto $p$, a força interna média passa a ser:

$$\varrho_{nm} = \lim_{\Delta A_n \to 0} \frac{\Delta F_m}{\Delta A_n} = \frac{dF_m}{dA_n}. \tag{2.2}$$

Dessa forma, define-se $\varrho_{nm}$ como sendo a tensão que atua no ponto $p$. Considerando agora que $\Delta A_n$ coincida com cada um dos planos cartesianos ($xy$, $xz$ e $yz$), a eq.(2.2)

passa a ser considerada escrita como:

$$\varrho_{xm} = \sigma_{xx}e_x + \tau_{xy}e_y + \tau_{xz}e_z, \tag{2.3}$$

$$\varrho_{ym} = \tau_{yx}e_x + \sigma_{yy}e_y + \tau_{yz}e_z, \tag{2.4}$$

$$\varrho_{zm} = \tau_{zx}e_x + \tau_{zy}e_y + \sigma_{zz}e_z, \tag{2.5}$$

onde $e_x$, $e_y$ e $e_z$ são os vetores unitários ao longo de cada eixo coordenado e $\sigma$ e $\tau$ as tensões normais e cisalhantes, respectivamente, em cada direção como mostra a figura 2.1.

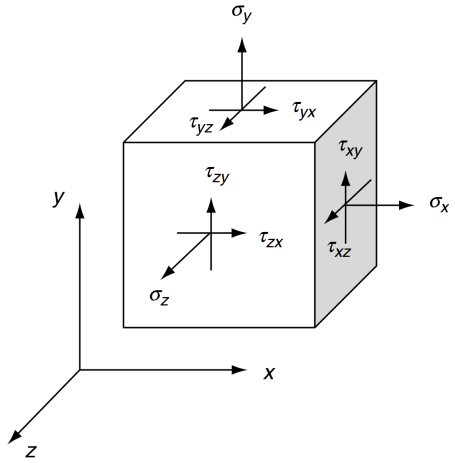



FIGURA 2.1 – Componentes de tensão em um ponto. Fonte: Sadd (2009).

As componentes de tensão normalmente são escritas na forma matricial como:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

onde $\sigma$ é uma grandeza tensorial de 2° ordem. Note ainda que este tensor é simétrico e portanto apresenta apenas 6 componentes distintas.

Considere agora que sobre um corpo cúbico em equilíbrio de lados $\delta x$, $\delta y$ e $\delta z$ atuem forças de corpo $f_i$, conforme mostrado na figura 2.2. Do balanço de forças e momentos são obtidas as equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + f_x = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_y = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0, \tag{2.9}$$

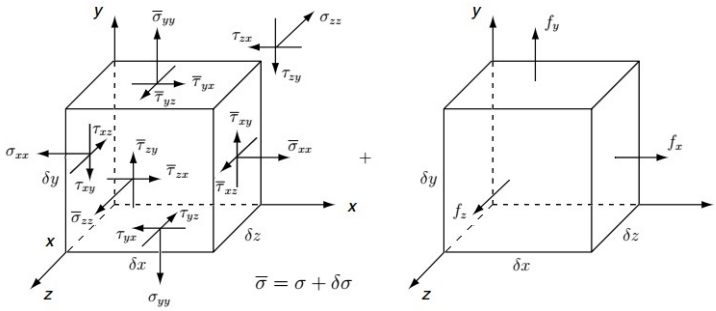



FIGURA 2.2 – Tensões e forças atuantes em um corpo.

ou ainda na forma indicial:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0. \tag{2.10}$$

### 2.1.2 Deformações

Sob a ação das forças externas um corpo pode mudar de ponto a ponto sua forma. A essa mudança dá-se o nome de deformação, podendo ser classificada ainda como linear e angular (distorção), conforme mostra a Figura 2.3.

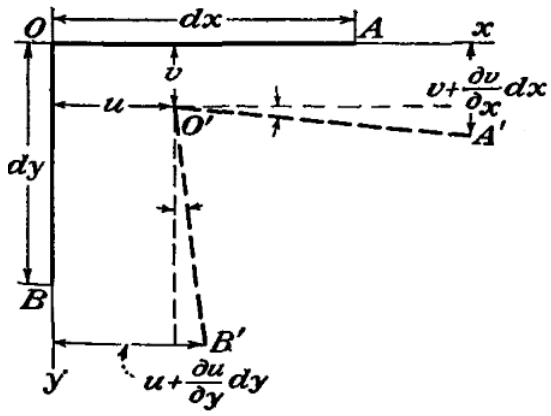



FIGURA 2.3 – Deformação no plaxo $xy$. Fonte: Timoshenko (1951).

Considere que o trecho $AOB$ corresponde a face do corpo na sua configuração inicial enquanto que o trecho $A'O'B'$ a configuração deformada, onde $u$ e $v$ são os deslocamentos ao longo dos eixos $x$ e $y$ respectivamente. Sob a hipótese de pequenos deslocamentos e deformações, a relação deformação-deslocamento na direção $x$ é dada por:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2.11}$$

Da mesma forma, pode-se escrever as deformações segundo os eixos $y$ e $z$:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{2.12}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{2.13}$$

onde $w$ é o deslocamento ao longo do eixo $z$.

Além disso, pode-se descrever a distorção no plano $xy$ como sendo:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta, \tag{2.14}$$

onde $\alpha$ corresponde à inclinação de $O'A'$ em relação ao eixo $x$ e $\beta$ à inclinação de $O'B'$ em relação ao eixo $y$. Se tratando de pequenas deformações, pode-se dizer que $\alpha \approx tg\alpha$, onde:

$$\alpha \approx tg\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx}, \tag{2.15}$$

$$\beta \approx tg\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy}. \tag{2.16}$$

Assim, substituindo as eqs.(2.15) e (2.16) na eq.(2.14), obtêm-se a distorção no plano $xy$:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.17}$$

Da mesma forma, as distorções nos planos $xz$ e $yz$ podem ser escritas:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \tag{2.18}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{2.19}$$

Reescrevendo as deformações em notação indicial, tem-se o seguinte tensor das deformações:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \tag{2.20}$$

com $i, j = 1, 2, 3$. Além disso, cabe lembrar que $\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}/2$ para $i \neq j$.

Assim como as tensões, as deformações correspondem a um tensor de 2° ordem simé-

trico ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) escrito na forma matricial como:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

### 2.1.3 Relações constitutivas

No estudo de corpos deformáveis, verifica-se que o estado de tensões está relacionado diretamente ao estado de deformação do mesmo, é o chamado relação constitutiva. Por meio dessa relação, as tensões podem ser expressas em funções das deformações ou vice-versa.

Considerando um corpo tridimensional elástico linear, assume-se que as componentes de tensão se relacionam de forma linear com cada componente de deformação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}, \tag{2.22}$$

ou ainda na forma tensorial como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{2.23}$$

onde $C_{ijkl}$ é um tensor de quarta ordem cujas componentes são os parâmetros necessários para caracterizar o material. Note que ele também será simétrico, uma vez que as tensões e deformações são. Se o material for considerado homogêneo, o comportamento elástico não varia espacialmente, ou seja, todos os parâmetros serão constantes. Já para qualquer material isotrópico, apenas haverá duas constantes independentes que caracterizam o material, assim escreve-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}, \tag{2.24}$$

sendo

$$C_{12} = \lambda \; e \; C_{11} - C_{12} = 2\mu, \tag{2.25}$$

onde $\lambda$ e $\mu$ são as constantes de *Lamé*. Portanto, a lei de Hooke generalizada para um material elástico linear, homogêneo e isotrópico pode ser escrita na forma tensorial como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \tag{2.26}$$

A relação inversa também pode ser escrita, onde as deformações são obtidas em função das tensões:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right). \tag{2.27}$$

Em notação expandida, as deformações lineares ficam:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \left( \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \right), \tag{2.28}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} \left( \sigma_{xx} + \sigma_{zz} \right), \tag{2.29}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} \left( \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \right), \tag{2.30}$$

onde $E$ é o módulo de deformação longitudinal ou módulo de Young e $\nu$ é o coeficiente de Poisson. Já as distorções são dadas na forma expandida como:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \tag{2.31}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \tag{2.32}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \tag{2.33}$$

onde $G$ é o módulo de elasticidade transversal do material.

Comparando as eqs.(2.28) a (2.33) com a eq. (2.27), chega-se as seguintes relações

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \tag{2.34}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{2.35}$$

## 2.2 Fundamentos da teoria de vigas

As vigas são elementos estruturais alongados que estão presentes nos mais diversos problemas de engenharia, trabalhando preponderantemente a flexão. Conhecer o seu comportamento cinemático frente às deformações é essencial. A literatura apresenta alguns modelos que trazem suposições para simplificar o problema real tridimensional, desde teorias simples a outras mais refinadas, nenhuma menos importante. Entretanto, essa simplificação reduz a extensão em que é aplicável.

A primeira teoria de vigas foi formulada por volta de 1750, recebendo o nome de teoria clássica ou de Euler-Bernoulli. Nela, considera-se que para pequenas deformações a seção transversal, inicialmente plana, permanece plana após a deformação e ortogonal ao eixo deformado da viga. Tal hipótese implica no negligenciamento da deformação por cortante.

Apesar de ser o modelo mais simples, é o mais utilizado devido a simplicidade e por fornecer aproximações razoáveis a muitos problemas de engenharia. Ocorre que, a rotação da seção longitudinal de uma viga não depende apenas da inclinação da elástica, mas também do cisalhamento, fazendo com que a ortogonalidade entre a seção transversal e o eixo horizontal deformado não seja mais necessariamente preservada. Esse efeito é melhor verificado em vigas com moderada razão de aspecto (relação entre o vão da viga e a altura da seção transversal).

Em 1921, TIMOSHENKO propôs uma teoria onde os efeitos da deformação por cortante e da inércia rotatória foram levados em consideração. Em decorrência das hipóteses para a cinemática da seção transversal, implicaram na distribuição constante das tensões tangenciais transversas ao longo da altura, o que difere da distribuição quadrática prevista na resistência dos materiais. Para remediar as inconsistências decorrente de fato na energia de deformação, Timoshenko propôs um coeficiente de correção, chamado de fator de forma. Assim, a seção transversal também permanece plana na configuração deformada, porém há o giro da seção transversal não ficando mais ortogonal ao eixo longitudinal da viga.

Ademais, por volta da década de 1980 começaram a surgir teorias de alta ordem de vigas, onde, a exemplo do modelo proposto por Bickford (1982)-Reddy (1984), consideram-se as deformações como sendo cúbicas e as distorções como quadráticas ao longo da seção transversal, representando de forma mais concisa o comportamento real da viga deformada. Neste trabalho não será abordada a teoria de alta ordem de vigas.

A Figura 2.4 apresenta a configuração deformada de uma viga nas três teorias de vigas abordadas nesta tese.

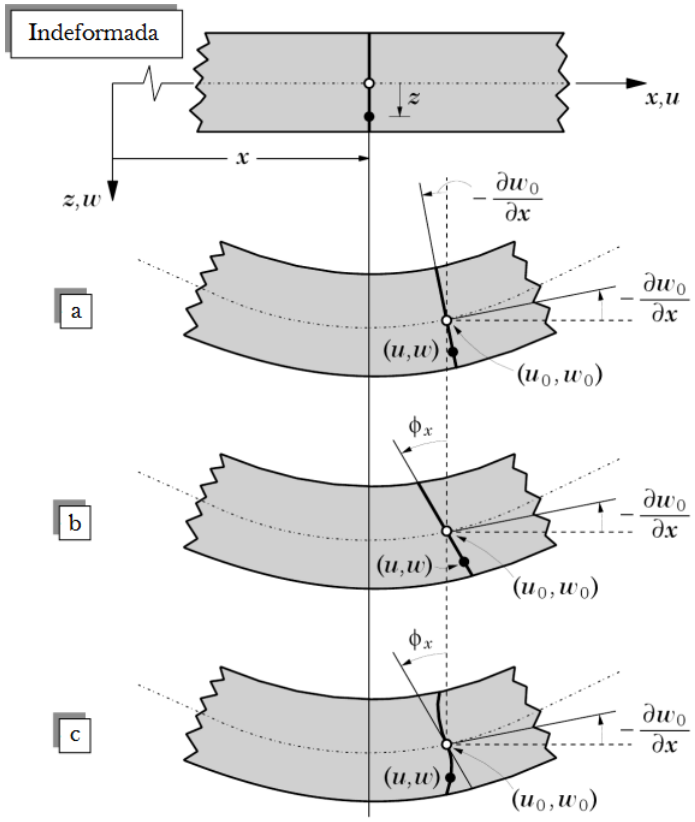



FIGURA 2.4 – Deformação da viga segundo as teorias de Euler-Bernoulli (a), Timoshenko (b) e Bickford-Reddy (c). Fonte: Wang *et al.* (2000a) adaptada.

Como discutido nos parágrafos anteriores, cada teoria possui as suas particularidades, são as chamadas hipóteses específicas. Porém, há aquelas em que são comuns, baseadas na geometria e comportamento do material, as quais podem ser resumidas em:

- Uma vez que a dimensão longitudinal é muito maior que as dimensões da seção transversal, a viga pode ser considerada unidimensional;
- Material elástico-linear, homogêneo e isotrópico;
- Regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações;
- Supressão da deformação da seção transversal ($\nu = 0$);
- Carregamento aplicado segundo um dos eixos principais de inércia.

### 2.2.1 Teoria de Euler-Bernoulli

A teoria de Euler-Bernoulli é baseada nos seguintes campos em deslocamentos (WANG *et al.*, 2000b):

$$u(x,z) = z\phi_y(x), \tag{2.36}$$

$$w(x,z) = w(x), \tag{2.37}$$

onde $u(x,z)$ e $w(x,z)$ são os deslocamentos axial e transversal, respectivamente, e $\phi_y(x)$ a rotação da seção transversal.

Da teoria da elasticidade, eq.(2.20), escreve-se as deformações e distorções para a barra:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2.38}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{2.39}$$

Importante notar que, segundo as hipóteses da teoria clássica, a distorção do elemento é considerada nula, consequentemente a seção transversal permanecerá ortogonal ao eixo longitudinal na configuração deformada, vide figura 2.5. Diante de tal hipótese, a rotação $\phi_y$ pode ser obtida por meio da eq.(2.39) ficando em função apenas da inclinação da linha elástica

$$\phi_y(x) = -\frac{dw(x)}{dx}. \tag{2.40}$$

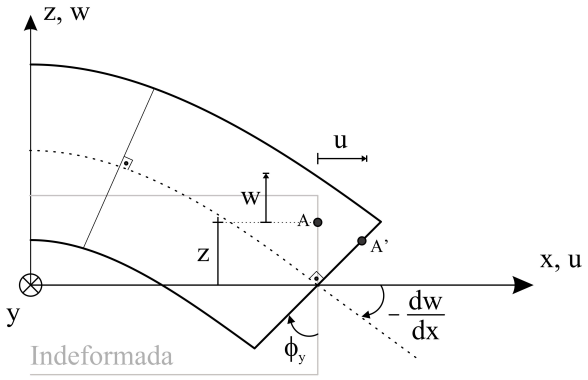



FIGURA 2.5 – Viga de Euler-Bernoulli em sua configuração deformada.

Com isso as deformações eqs.(2.38) e (2.39) ficarão:

$$\varepsilon_x = -z\frac{d^2w}{dx^2}, \tag{2.41}$$

$$\gamma_{xz} = 0. \tag{2.42}$$

Além do material ser considerado elástico linear, quando sob tensão na direção $x$, a viga não apresentará encurtamento transversal, ou seja, $\nu = 0$. Dessa forma, da lei de Hooke, eq.(2.26), escreve-se a relação entre tensão-deformação da viga

$$\sigma_x = -Ez\frac{d^2w}{dx^2}. \tag{2.43}$$

O momento fletor pode ser obtido por meio da integral:

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA, \tag{2.44}$$

onde $dA = dydz$.

Substituindo a eq.(2.43) na (2.44), fica:

$$M_y = -\int_A Ez^2\frac{d^2w}{dx^2}dA. \tag{2.45}$$

Sabe-se ainda que o momento de inércia em $y$ é dado por:

$$I_y = \int_A z^2 dA. \tag{2.46}$$

Dessa forma, o momento fletor na teoria de Euler-Bernoulli em um ponto $x$ ao longo do eixo da viga é dado por:

$$M_y(x) = -EI_y\frac{d^2w}{dx^2}(x). \tag{2.47}$$

Já o esforço cortante não pode ser obtido diretamente pela integração das tensões tangenciais transversas (já que a distorção transversa é nula) na teoria clássica, mas sim indiretamente pela aplicação das equações de equilíbrio, sendo dado pela derivada do momento:

$$V_z(x) = -EI_y\frac{d^3w}{dx^3}(x). \tag{2.48}$$

### 2.2.2 Teoria de Timoshenko

Os campos em deslocamentos da teoria são (TIMOSHENKO, 1921):

$$u(x,z) = z\phi_y(x), \tag{2.49}$$

$$w(x,z) = w(x), \tag{2.50}$$

onde $u(x,z)$ é o deslocamento axial, $w(x)$ é o transversal e $\phi_y$ é a rotação em torno do eixo $y$.

Da teoria da elasticidade, eq.(2.20), escreve-se a deformação ao longo do eixo $x$ e a distorção como sendo:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2.51}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{2.52}$$

Note que, devido às hipóteses de Timoshenko o efeito do cortante é considerado, então a distorção não mais será nula, conforme mostra a Figura 2.6. Assim, as deformações serão dadas por:

$$\varepsilon_x = z\frac{d\phi_y}{dx}, \tag{2.53}$$

$$\gamma_{xz} = \phi_y + \frac{dw}{dx}. \tag{2.54}$$

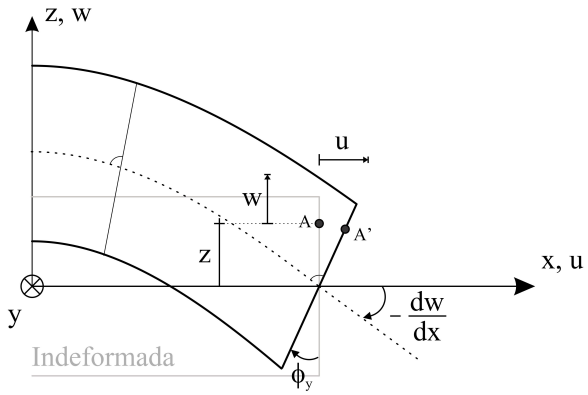



FIGURA 2.6 – Viga de Timoshenko em sua configuração deformada.

Desprezando o encurtamento da seção transversal,$\nu = 0$, e aplicando a lei de Hooke, eq.(2.26), escreve-se as tensões axial e cisalhante como sendo

$$\sigma_x = Ez\frac{d\phi_y}{dx}, \tag{2.55}$$

$$\overline{\tau}_{xz} = G\gamma_{xz}. \tag{2.56}$$

Com isso, o momento fletor segundo a teoria de Timoshenko, dado conforme eq.(2.44), será:

$$M_y(x) = EI_y\frac{d\phi_y}{dx}, \tag{2.57}$$

onde $I_y$ é o momento de inércia.

Já o esforço cortante será dado em função da tensão cisalhante por meio da integral a

seguir:

$$V_z = \int_A \overline{\tau}_{xz} dA. \tag{2.58}$$

Importante lembrar que as tensões cisalhantes na teoria de Timoshenko, consideradas uniformes, combinada com utilização do fator de forma k produzirá uma energia de deformação equivalente àquela produzida por uma distribuição quadrática (WANG *et al.*, 2000b) que realmente ocorre nas vigas, conforme mostra a figura 2.7.

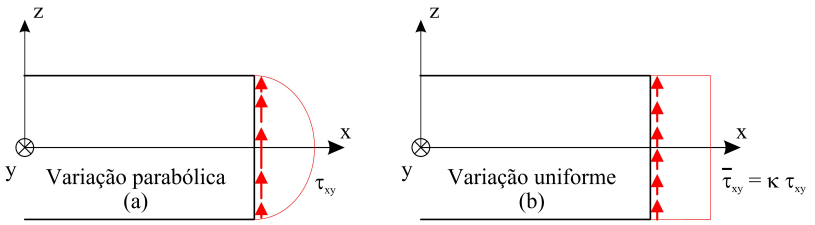



FIGURA 2.7 – Tensão cisalhante: (a) variação real; (b) aproximação de Timoshenko.

Dessa forma, substituindo a equação (2.56) na equação (2.58) obtém-se o esforço cortante em um ponto $x$ na teoria de Timoshenko:

$$V_z(x) = \kappa G A \left( \phi_y(x) + \frac{dw}{dx}(x) \right), \tag{2.59}$$

sendo $A = \int_A dA$ a área da seção transversal.

## 2.3 Modelos de bases elásticas

A busca por um modelo que possa explicar de forma realista o comportamento de estruturas apoiadas em corpos deformáveis é o objetivo da maioria dos pesquisadores no campo da interação solo-estrutura. No entanto, a complexidade em representar o comportamento do solo como meio tridimensional e contínuo, e ainda a interação deste com outros elementos estruturais como placas ou vigas, torna essa tarefa pouco prática para a maioria das aplicações de engenharia. Assim, a suposição de um comportamento elástico-linear, homogêneo e isotrópico é uma opção simplificada, mas se mostra matematicamente e computacionalmente atraente para representar muitos problemas práticos. Além disso, em muitas situações o interesse limita-se à obtenção das forças na região de contato da carga ou com a estrutura, não importando o campo de deslocamento ou estado de tensões no seu interior, tornando a utilização dos modelos de base elástica um ótimo caminho frente à complexidade matemática.

O precursor dos modelos de bases elásticas é o modelo de um parâmetro de Winkler (1867), que considera o solo como um conjunto de molas lineares, estreitamente espaçadas

e independentes em si. A relação entre a pressão e a deflexão na superfície da fundação é dada por (KERR, 1964a):

$$p(x, y) = k \cdot w(x, y), \tag{2.60}$$

onde $k$ é o módulo de rigidez da base elástica de Winkler. Por meio da eq.(2.60), vê-se que há uma resistência contra a deformação vertical apenas no ponto em que o carregamento é aplicado, conforme apresentado na figura 2.8.

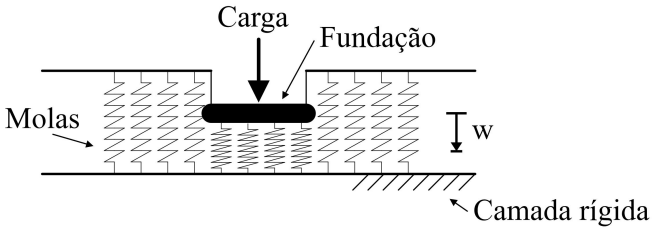



FIGURA 2.8 – Deformação na superfície carregada da base elástica de Winkler.

Esta característica representa a grande desvantagem do modelo, uma vez que o solo é, na realidade, um corpo contínuo e que deforma não apenas na região de contato, mas também na vizinhança (há coesão). Nesse contexto surgem então os modelos de dois parâmetros, onde é incorporada a interação entre as molas, melhorando o modelo proposto por Winkler.

Segundo Kerr (1964a),a extensão mais natural do modelo de Winkler para fundações homogêneas é o modelo de Pasternak (1954), onde se assume que as molas estão conectadas por uma camada incompressível que se deforma apenas sob tensões de cisalhamento, conforme figura 2.9. Dessa forma, a relação entre a força de contato e o deslocamento é dada por:

$$p(x, y) = k \cdot w(x, y) + G_s \nabla^2 w(x, y), \tag{2.61}$$

sendo $\nabla^2(\cdot)$ o operador de laplace, $k$ o parâmetro de Winkler e $G_s$ o módulo de rigidez cisalhante da camada.

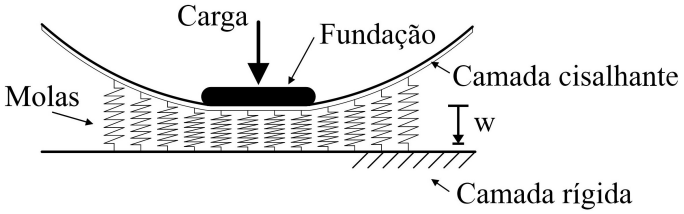



FIGURA 2.9 – Deformação fora da região carregada segundo o modelo de Pasternak.

Apesar de ser um melhoramento do modelo proposto por Winkler, Kerr (1964a) constatou que, para uma placa apoiada na camada de Pasternak, um aumento da força cortante

acontecia nas bordas da placa. Efeito esse similar à reação de canto que ocorre na teoria clássica de placas. Dessa forma, esse efeito indesejado foi corrigido a partir da consideração de mais uma camada de molas entre a estrutura e a camada cisalhante, conforme mostra a figura 2.10.

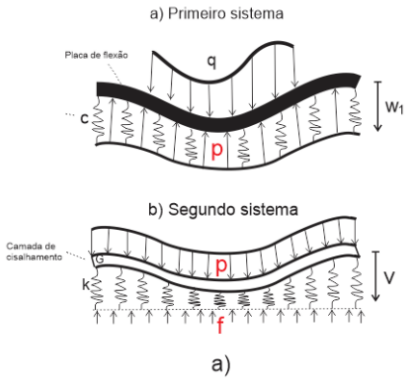



FIGURA 2.10 – Composição da camada elástica de Kerr. Fonte: Souza (2019)

.

Considera-se que o deslocamento transversal da placa, ou viga,conforme figura 2.10, é dado por:

$$w(x,y) = w_1(x,y) + v(x,y), \tag{2.62}$$

sendo $w_1$ é o deslocamento transversal devido à contração ou extensão da camada de molas superior e $v$ da camada de cisalhamento. Por meio da figura 2.10 e das eqs. (2.60) e (2.61), tem-se:

$$p_1(x,y) = k_c w_1(x,y), \tag{2.63}$$

$$p_2(x,y) = k_k v(x,y) - G_s \nabla^2 v(x,y), \tag{2.64}$$

onde $k_c$ e $k_k$ são as rigidezes das camadas superior e inferior, respectivamente, e $G_s$ o módulo de rigidez cisalhante.

## 2.4 Energia de deformação

As forças aplicadas sobre um sólido realizam trabalho tal que é armazenado dentro do material na forma de energia de deformação, causando a mudança de forma. Se esse sólido em questão for elástico, a remoção dessas forças resulta na recuperação da energia completa armazenada dentro do corpo, retornando a forma original (SADD, 2009).

### 2.4.1 Energia de deformação da viga

A energia de deformação da viga pode ser expressada como (WANG *et al.*, 2000b):

$$\pi_v = \frac{1}{2}\int_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz})\, dV. \tag{2.65}$$

Segundo a teoria de Euler-Bernoulli as tensões cisalhantes são desprezadas, mobilizando apenas tensões normais. Dessa forma, a eq.(2.65) pode ser reescrita como:

$$\pi_v = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} dV, \tag{2.66}$$

sendo $\sigma_{xx}$ a tensão normal e $\varepsilon_{xx}$ a deformação normal.

Com isso, substituindo as eqs.(2.43) e (2.41) na eq.(2.66), obtêm-se a energia de deformação da viga de Euler-Bernoulli:

$$\pi_v = \frac{1}{2}\int_V Ez^2 \left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^2 dV, \tag{2.67}$$

ou ainda,

$$\pi_v = \frac{1}{2}\int_0^L EI \left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^2 dx, \tag{2.68}$$

sendo $L$ o comprimento da viga e $I$ o momento de inércia da seção transversal em torno do eixo $y$, dado por $I = \int_A z^2 dA$.

Já substituindo as eqs.(2.53) a (2.56) na eq.(2.65), obtêm-se a energia de deformação da viga de Timoshenko:

$$\pi_v = \frac{1}{2}\int_V \left[Ez^2 \left(\frac{d\phi_y}{dx}\right)^2 + \kappa G \left(\phi_y + \frac{dw}{dx}\right)^2\right] dV, \tag{2.69}$$

ou ainda

$$\pi_v = \frac{1}{2}\int_0^L \left[EI \left(\frac{d\phi_y}{dx}\right)^2 + \kappa GA \left(\phi_y + \frac{dw}{dx}\right)^2\right] dx, \tag{2.70}$$

onde $A$ é a área da seção transversal da viga.

### 2.4.2 Energia potencial da base elástica

Para obter a energia associada a base elástica de Kerr é importante ressaltar que, assim como nos modelos de Winkler e Pasternak, a reação da base é proporcional ao deslocamento transversal das molas e as tensões cisalhantes da camada de cisalhamento proporcionais às distorções. Além disso, apenas os deslocamentos transversais da camada são considerados. Dessa forma, a energia potencial da base de Kerr pode ser subdividida em três parcelas:

$$\pi_k = \pi_{k_c} + \pi_{k_k} + \pi_{k_G}, \tag{2.71}$$

onde $\pi_{k_c}$ representa a contribuição das molas superiores, $\pi_{k_k}$ das inferiores e $\pi_{k_G}$ a contribuição devida á distorção da camada elástica. A energia potencial das molas pode ser escrita tal qual para Winkler:

$$\pi_{k_c} = \frac{1}{2}\int_0^L k_c \left(\Delta_1(x)\right)^2 dx, \tag{2.72}$$

$$\pi_{k_k} = \frac{1}{2}\int_0^L k_k \left(\Delta_2(x)\right)^2 dx, \tag{2.73}$$

sendo $\Delta_1(x)$ e $\Delta_2(x)$ são os deslocamentos relativos das molas superior e inferior, respectivamente, conforme mostrado na figura 2.11. A energia potencial devido a distorção da

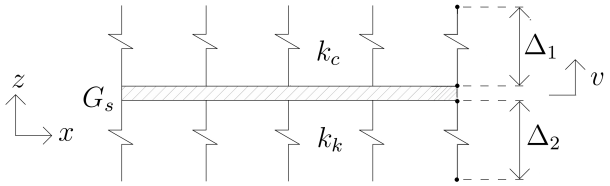



FIGURA 2.11 – Deslocamentos relativos da base elástica de Kerr.

camada elástica é dada por (PASSOS, 2014):

$$\pi_{k_G} = \frac{1}{2}\int_V \tau_{xz}\gamma_{xz} dV = \frac{1}{2}\int_0^L G_s \left(\frac{dv(x)}{dx}\right)^2 dx, \tag{2.74}$$

onde $\gamma_{xz} = dv(x)/dx$, já que os deslocamentos tangenciais da camada cisalhante são desconsiderados, $\tau_{xz} = G_k dv(x)/dx$ e $G_s = G_k A$, onde $A$ é a área transversal da camada cisalhante.

Portanto, a energia potencial da camada elástica de Kerr é dada por:

$$\pi_k = \frac{1}{2}\int_0^L k_c \left(\Delta_1(x)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L G_s \left(\frac{dv(x)}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L k_k \left(\Delta_2(x)\right)^2 dx. \tag{2.75}$$

### 2.4.3 Trabalho das forças externas

O trabalho realizado pelas forças externas será dado pela soma do trabalho das cargas transversais e das axiais, segundo a expressão:

$$W = W_t + W_a, \tag{2.76}$$

onde $W_t$ é o trabalho das cargas transversais e/ou momentos, e $W_a$ o trabalho realizado pela carga axial.

O trabalho das forças externas considerando a contribuição de uma carga $g(x)$ e um momento $m(x)$ distribuídos ao longo da viga é dado por:

$$W_t = \int_0^L g(x)w(x)dx + \int_0^L m(x)\phi(x)dx. \tag{2.77}$$

Já o trabalho devido a carga axial e que contribui no deslocamento transversal é dado por (PASSOS, 2014):

$$W_a = \frac{1}{2}\int_0^L P\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx. \tag{2.78}$$

## 2.5 Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio serão desenvolvidas para os problemas de vigas apoiadas em uma camada elástica de Kerr e vigas duplas elasticamente conectadas pela base de Kerr. As vigas serão formuladas segundo as hipóteses de Euler-Bernoulli e Timoshenko. As equações de equilíbrio para cada um dos problemas serão obtidas a partir da aplicação dos princípios variacionais.

Se tratando do problema estático, as equações de Euler-Lagrange serão obtidas a partir da extremização de um funcional, onde é imposta a condição que sua primeira variação é nula.

$$\delta U = \delta\pi - \delta W = 0, \tag{2.79}$$

onde $U$ é a energia potencial total de deformação do conjunto, $\pi$ é dado pelas energias potencial de deformação da viga mais a camada de Kerr e $W$ dado pelo o trabalho das forças externas atuantes sobre o conjunto.

### 2.5.1 Pelas hipóteses de Euler-Bernoulli

#### 2.5.1.1 Viga simples

Considere uma viga apoiada em uma camada elástica, de parâmetros $k_c$, $k_k$ e $G_s$, submetida a um carregamento estático $g(x)$ distribuído ao longo do seu comprimento $L$, como mostra a Figura 2.12.

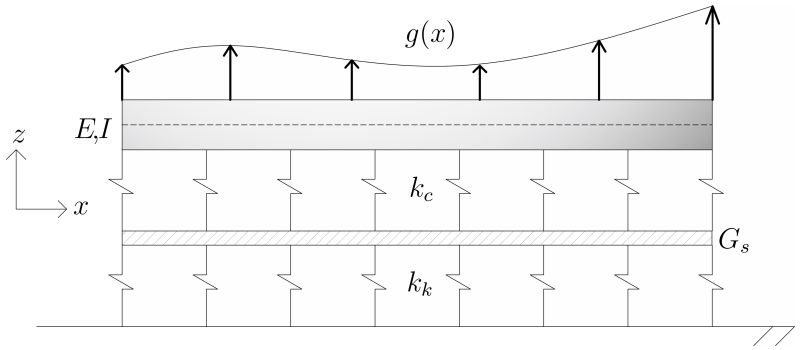



FIGURA 2.12 – Viga de Euler-Bernoulli sobre camada elástica.

A função lagrangiana será dada por:

$$\Pi = \pi_v + \pi_k - W, \tag{2.80}$$

onde $\pi_v$ é a energia de deformação da viga de Euler-Bernoulli e $\pi_k$ é a energia potencial da camada de Kerr.

Substituindo as eqs.(2.68), (2.75), (2.77) e (2.78), na eq. (2.80) e posteriormente fazendo a primeira variação do funcional, obtêm-se:

$$\begin{aligned}\delta \Bigg[ &\frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L P\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx - \int_0^L gw dx + \\ &+\frac{1}{2}\int_0^L k_c\left(w-v\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L G_s\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L k_k v^2 dx\Bigg] = 0.\end{aligned} \tag{2.81}$$

As variações na eq. (2.81) podem ser resolvidas aplicando as propriedades do cálculo variacional, onde após algumas integrações por partes, resulta em:

$$\begin{aligned}&\left[EI\frac{d^2w}{dx^2}\delta\frac{dw}{dx}\right]_0^L - \left[EI\frac{d^3w}{dx^3}\delta w\right]_0^L - \left[P\frac{dw}{dx}\delta w\right]_0^L + \\ &+\left[G_s\frac{dv}{dx}\delta v\right]_0^L + \int_0^L\left[EI\frac{d^4w}{dx^4} + P\frac{d^2w}{dx^2} + k_c\left(w-v\right) - g\right]\delta w\ dx \\ &+\int_0^L\left[-k_c\left(w-v\right) - G_s\frac{d^2v}{dx^2} + k_k v\right]\delta v\ dx = 0,\end{aligned} \tag{2.82}$$

onde as parcelas no contorno são:

$$M(x) = -EI\frac{d^2w(x)}{dx^2}, \tag{2.83}$$

$$V(x) = -EI\frac{d^3w(x)}{dx^3} - P\frac{dw(x)}{dx}, \tag{2.84}$$

definidas como o momento fletor e esforço cortante equivalente da viga, respectivamente, e ainda

$$V_k(x) = G_s\frac{dv(x)}{dx}, \tag{2.85}$$

o esforço cortante da camada de cisalhamento. Com isso, a eq. (2.82) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} &-\left[M\delta\frac{dw}{dx}\right]_0^L + [V\delta w]_0^L + [V_k\delta v]_0^L + \\ &+\int_0^L \left[EI\frac{d^4w}{dx^4} + P\frac{d^2w}{dx^2} + k_c\,(w-v) - g\right]\delta w\;dx \\ &+\int_0^L \left[-k_c\,(w-v) - G_s\frac{d^2v}{dx^2} + k_kv\right]\delta v\;dx = 0, \end{aligned} \tag{2.86}$$

Sendo as variações no contorno nulas, então a eq. (2.86) passa a ser:

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left[EI\frac{d^4w}{dx^4} + P\frac{d^2w}{dx^2} + k_c\,(w-v) - g\right]\delta w\;dx + \\ &+\int_0^L \left[-k_c\,(w-v) - G_s\frac{d^2v}{dx^2} + k_kv\right]\delta v\;dx = 0. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Considerando que as variações $\delta\frac{dw}{dx}, \delta w, \delta v$ são arbitrárias, a nulidade da eq. (2.87) será garantida se as equações a seguir forem verdadeiras:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} + P\frac{d^2w}{dx^2} + k_c\,(w-v) = g, \tag{2.88}$$

$$-k_c\,(w-v) - G_s\frac{d^2v}{dx^2} + k_kv = 0. \tag{2.89}$$

sendo, portanto, a equação governante do problema estático da viga de Euler-Bernoulli sobre camada elástica de Kerr.

#### 2.5.1.2 Viga dupla

O procedimento de obtenção da equação diferencial da viga dupla conectada por camada elástica de Kerr se dará de forma similar ao que foi visto na viga simples. Considere

a Figura 2.13 que representa o sistema de vigas duplas conectadas que interagem entre si devido à camada elástica de conexão entre elas, onde tanto a viga superior quanto a inferior podem estar submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos ao longo do seu comprimento $L$.

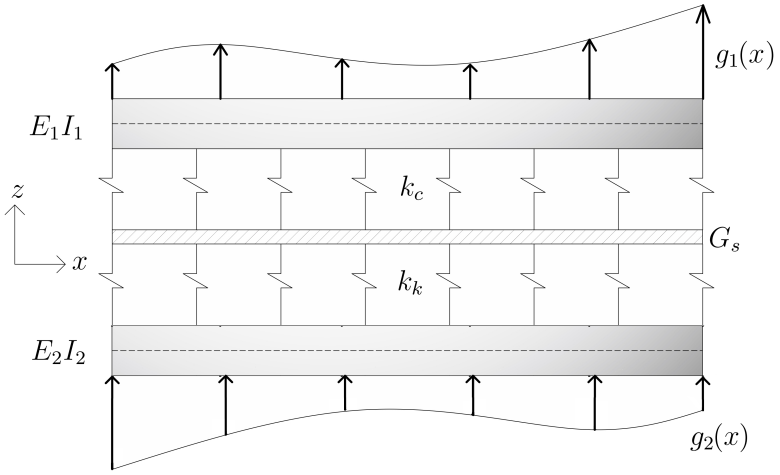



FIGURA 2.13 – Sistema de vigas duplas de Euler-Bernoulli conectadas por base elástica.

A energia de deformação das vigas é dada conforme eq. (2.68), onde:

$$\pi_v = \frac{1}{2}\int_0^L \left[ E_1 I_1 \left( \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right)^2 + E_2 I_2 \left( \frac{d^2 w_2}{dx^2} \right)^2 \right] dx, \tag{2.90}$$

sendo os índices 1 e 2 relativos às vigas superior e inferior, respectivamente.

Por sua vez, o trabalho das forças externas, considerando que tanto a viga superior quanto a inferior estarão submetidas a forças axiais e verticais, será:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^L \left[ P_1 \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 + P_2 \left( \frac{dw_i}{dx} \right)^2 \right] dx + \int_0^L g_1 w_1 dx + \int_0^L g_2 w_2 dx. \tag{2.91}$$

Substituindo as eqs.(2.75), (2.90) e (2.91) na função lagrangiana eq.(2.79), obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\delta\left[\frac{1}{2}\int_0^L E_1 I_1\left(\frac{d^2w_1}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L E_2 I_2\left(\frac{d^2w_2}{dx^2}\right)^2 dx + \right.\\
&+\frac{1}{2}\int_0^L k_c\left(w_1 - v\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L G_s\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + \\
&+\frac{1}{2}\int_0^L k_k\left(v - w_2\right)^2 dx + \\
&-\frac{1}{2}\int_0^L P_1\left(\frac{dw_1}{dx}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L P_2\left(\frac{dw_2}{dx}\right)^2 dx + \\
&\left.-\int_0^L g_1 w_1 dx - \int_0^L g_2 w_2 dx\right] = 0. \qquad (2.92)
\end{aligned}$$

Após algumas manipulações matemáticas e considerando as variações no contorno nulas, a eq.(2.92) fica:

$$\begin{aligned}
&\left[E_1 I_1\frac{d^4w_1}{dx^4} + P_1\frac{d^2w_1}{dx^2} + k_c\left(w_1 - v\right) - g_1\right]\delta w_1 + \\
&+\left[E_2 I_2\frac{d^4w_2}{dx^4} + P_2\frac{d^2w_2}{dx^2} - k_k\left(v - w_2\right) - g_2\right]\delta w_2 + \\
&\left[-k_c\left(w_1 - v\right) - G_s\frac{d^2v}{dx^2} + k_k\left(v - w_2\right)\right]\delta v = 0. \qquad (2.93)
\end{aligned}$$

Sendo as variações arbritárias no domínio, então a eq.(2.93) resulta na equação diferencial do problema estático, dadas por:

$$E_1 I_1\frac{d^4w_1}{dx^4} + P_1\frac{d^2w_1}{dx^2} + k_c\left(w_1 - v\right) = g_1, \qquad (2.94)$$

$$E_2 I_2\frac{d^4w_2}{dx^4} + P_2\frac{d^2w_2}{dx^2} - k_k\left(v - w_2\right) = g_2, \qquad (2.95)$$

$$-k_c\left(w_1 - v\right) - G_s\frac{d^2v}{dx^2} + k_k\left(v - w_2\right) = 0. \qquad (2.96)$$

Pode-se ainda escrever o momento fletor e cortantes, equivalente nas vigas e na camada cisalhante, respectivamente, como sendo:

$$M_i = -E_i I_i\frac{d^2w_i}{dx^2}, \qquad (2.97)$$

$$V_i = -E_i I_i\frac{d^3w_i}{dx^3} - P_i\frac{dw_i}{dx}, \qquad (2.98)$$

$$V_k = G_s\frac{dv}{dx}, \qquad (2.99)$$

com $i = 1, 2$.

## 2.5.2 Pelas hipóteses de Timoshenko

### 2.5.2.1 Viga simples

Considere uma viga apoiada na camada elástica de Kerr ao longo do seu comprimento $L$, submetida a carregamentos e momentos distribuídos ao longo da viga, $g(x)$ e $m(x)$, como mostra a Figura 2.14.

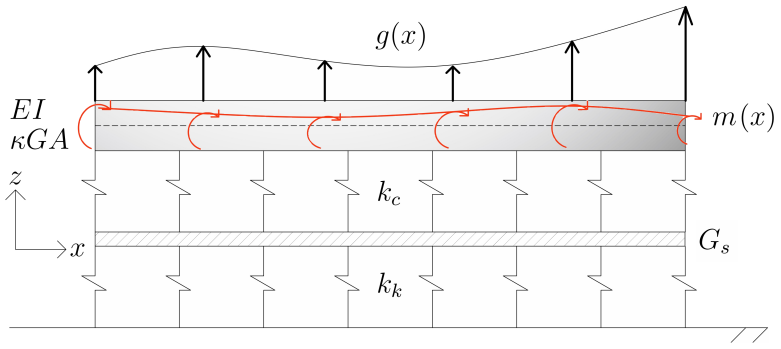



FIGURA 2.14 – Vigas de Timoshenko sobre camada elástica de Kerr.

Substituindo as eqs.(2.70), (2.75), (2.77) e (2.78) na função lagrangiana eq. (2.79), obtêm-se:

$$\delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^L\left[EI\left(\frac{d\phi_y}{dx}\right)^2+\kappa GA\left(\phi_y+\frac{dw}{dx}\right)^2\right]dx+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^L k_c\left(w-v\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L G_s\left(\frac{dv}{dx}\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L k_k v^2dx+$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^L P\left(\frac{dw}{dx}\right)^2dx-\int_0^L gwdx-\int_0^L m\phi_y dx\right\}=0. \tag{2.100}$$

Aplicando as propriedades do cálculo variacional, a eq. (2.100) passa a ser escrita como:

$$\left[EI\frac{d\phi_y}{dx}\delta\phi_y\right]_0^L+\left[\kappa GA\left(\phi_y+\frac{dw}{dx}\right)\delta w\right]_0^L+\left[G_s\frac{dv}{dx}\delta v\right]_0^L-\left[P\frac{dw}{dx}\delta w\right]_0^L+$$
$$+\int_0^L\left[-\kappa GA\left(\frac{d\phi_y}{dx}+\frac{d^2w}{dx^2}\right)+k_c\left(w-v\right)+P\frac{d^2w}{dx^2}-g\right]\delta w dx+$$
$$+\int_0^L\left[\kappa GA\left(\phi_y+\frac{dw}{dx}\right)-EI\frac{d^2\phi_y}{dx^2}-m\right]\delta\phi_y dx+$$
$$+\int_0^L\left[-k_c\left(w-v\right)-G_s\frac{d^2v}{dx^2}+k_k v\right]\delta v dx=0, \tag{2.101}$$

sendo o momento fletor e o esforços cortantes dados por

$$M(x) = EI\frac{d\phi_y}{dx}, \tag{2.102}$$

$$V(x) = \kappa GA\left(\phi_y + \frac{dw}{dx}\right) - P\frac{dw}{dx}, \tag{2.103}$$

$$V_k(x) = G_s\frac{dv}{dx}. \tag{2.104}$$

Após algumas manipulações matemáticas, chega-se à equação governante viga de Timoshenko sobre camada elástica de Kerr dado por:

$$-\kappa GA\left(\frac{d\phi_y}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2}\right) + k_c\left(w - v\right) + P\frac{d^2w}{dx^2} - g = 0, \tag{2.105}$$

$$\kappa GA\left(\phi_y + \frac{dw}{dx}\right) - EI\frac{d^2\phi_y}{dx^2} - m = 0, \tag{2.106}$$

$$-k_c\left(w - v\right) - G_s\frac{d^2v}{dx^2} + k_k v. = 0. \tag{2.107}$$

#### 2.5.2.2 Viga dupla

Considere um sistema de vigas paralelas, de comprimento $L$, interconectadas por uma base elástica de Kerr e submetida a carregamentos distribuídos ao longo das vigas, $g_i(x)$ e $m_i(x)$, como mostra a Figura 2.15.

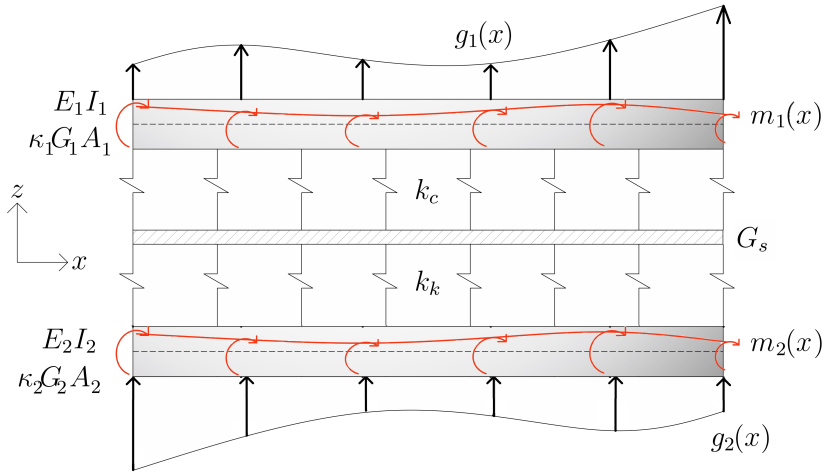



FIGURA 2.15 – Sistema de vigas duplas de Timoshenko conectadas pela base elástica de Kerr.

A energia de deformação das vigas superior e inferior é obtida de forma similar à viga

sem camada elástica, eq.(2.70), sendo expressa por:

$$\pi_v = \frac{1}{2}\int_0^L \left[ E_1 I_1 \left(\frac{d\phi_1}{dx}\right)^2 + \kappa_1 G_1 A_1 \left(\phi_1 + \frac{dw_1}{dx}\right)^2 + E_2 I_2 \left(\frac{d\phi_2}{dx}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \kappa_2 G_2 A_2 \left(\phi_2 + \frac{dw_2}{dx}\right)^2 \right] dx. \tag{2.108}$$

onde os índices 1 e 2 correspondem às vigas superior e inferior, respectivamente.

Estando as vigas superior e inferior sujeitas a força axial, carregamento vertical e momento fletor, o trabalho das forças externas para cada viga é dado por:

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^L P_i \left(\frac{dw_i}{dx}\right)^2 dx + \int_0^L g_i w_i dx + \int_0^L m_i \phi_{y_i} dx. \tag{2.109}$$

Substituindo na função lagrangiana as eqs.(2.75), (2.108) e (2.109), obtêm-se:

$$\delta \left\{ \frac{1}{2}\int_0^L \left[ E_1 I_1 \left(\frac{d\phi_{y_1}}{dx}\right)^2 + \kappa_1 G_1 A_1 \left(\phi_{y_1} + \frac{dw_1}{dx}\right)^2 - P_1 \left(\frac{dw_1}{dx}\right)^2 \right] dx + \right.$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^L \left[ E_2 I_2 \left(\frac{d\phi_{y_2}}{dx}\right)^2 + \kappa_2 G_2 A_2 \left(\phi_{y_2} + \frac{dw_2}{dx}\right)^2 - P_2 \left(\frac{dw_2}{dx}\right)^2 \right] dx +$$
$$\left. - \int_0^L g_1 w_1 dx - \int_0^L m_1 \phi_{y_1} dx - \int_0^L g_2 w_2 dx - \int_0^L m_2 \phi_{y_2} dx \right\} = 0. \tag{2.110}$$

Seguindo os passos de resolução análogos a viga simples, chega-se à equação governante do problema:

$$-\kappa_1 G_1 A_1 \left(\frac{d\phi_{y_1}}{dx} + \frac{d^2 w_1}{dx^2}\right) + k_c (w_1 - v) + P_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} - g_1 = 0 \tag{2.111}$$

$$\kappa_1 G_1 A_1 \left(\phi_{y_1} + \frac{dw_1}{dx}\right) - E_1 I_1 \frac{d^2 \phi_{y_1}}{dx^2} - m_1 = 0, \tag{2.112}$$

$$-\kappa_2 G_2 A_2 \left(\frac{d\phi_{y_2}}{dx} + \frac{d^2 w_2}{dx^2}\right) + k_k (w_2 - v) + P_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} - g_2 = 0, \tag{2.113}$$

$$\kappa_2 G_2 A_2 \left(\phi_{y_2} + \frac{dw_2}{dx}\right) - E_2 I_2 \frac{d^2 \phi_{y_2}}{dx^2} - m_2 = 0, \tag{2.114}$$

$$-k_c (w_1 - v) - G_s \frac{d^2 v}{dx^2} + k_k (v - w_2) = 0. \tag{2.115}$$

O momento fletor e esforços cortantes, nas vigas e na camada cisalhante, são dados

por:

$$M_i = E_i I_i \frac{d\phi_{y_i}}{dx}, \tag{2.116}$$

$$V_i = \kappa_i G_i A_i \left( \phi_{y_i} + \frac{dw_i}{dx} \right) - P_i \frac{dw_i}{dx}, \tag{2.117}$$

$$V_k = G_s \frac{dv}{dx}. \tag{2.118}$$

# Capítulo 3

# O MEC em vigas sobre camada elástica

Neste capítulo são apresentadas as formulações do MEC para a análise estática vigas apoiadas em camada elástica de Kerr. São propostas as soluções fundamentais baseadas no MEC-D nas teorias de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Das equações integrais, obtidas via método dos resíduos ponderados (MRP), será discutido e obtido o sistema algébrico para posterior solução do problema.

## 3.1 Pela teoria de Euler-Bernoulli

### 3.1.1 O Problema Fundamental

No problema fundamental, considera-se que a viga e a camada elástica tenham domínio infinito e estejam submetidas a fontes concentradas em força que atuam em um ponto chamado de ponto-fonte, dadas pela função delta de Dirac, figura 3.1. Pelo MEC-D (direto), a equação diferencial do problema fundamental será análoga à do problema real, uma vez que o problema real, $\Omega = [0, L]$, está contigo no fundamental. Dessa forma, duas equações serão geradas: uma para ativação da fonte concentrada em força na viga, $g = \delta(x, \widehat{x})$, e outra para ativação em força na camada de cisalhamento, conforme mostra a figura 3.1.

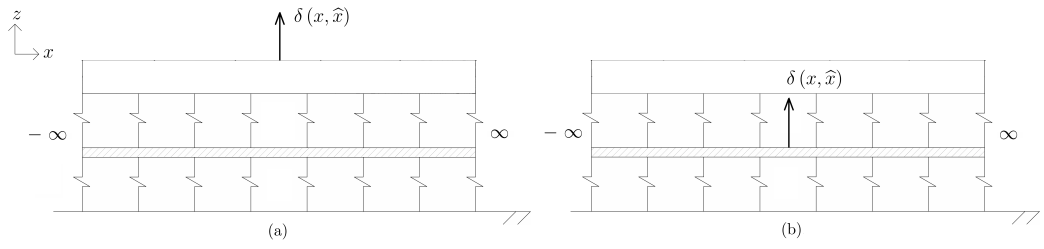



FIGURA 3.1 – Problema fundamental da viga de Euler-Bernoulli sobre camada de Kerr com fontes aplicadas em força na viga (a) e camada cisalhante (b).

Aplicando a fonte concentrada em força na viga, $g^{*g}(x,\widehat{x}) = \delta(x,\widehat{x})$, por meio da equação de equilíbrio eqs. (2.88) e (2.89), obtêm-se:

$$EI\frac{d^4w^{*g}}{dx^4} + P\frac{d^2w^{*g}}{dx^2} + k_c\left(w^{*g} - v^{*g}\right) = \delta(x,\widehat{x}), \tag{3.1}$$

$$-k_c\left(w^{*g} - v^{*g}\right) - G_s\frac{d^2v^{*g}}{dx^2} + k_k v^{*g} = 0. \tag{3.2}$$

Aplicando agora a fonte concentrada na camada cisalhante, $g_k^{*k}(x,\widehat{x}) = \delta(x,\widehat{x})$, fica:

$$EI\frac{d^4w^{*k}}{dx^4} + P\frac{d^2w^{*k}}{dx^2} + k_c\left(w^{*k} - v^{*k}\right) = 0, \tag{3.3}$$

$$-k_c\left(w^{*k} - v^{*k}\right) - G_s\frac{d^2v^{*k}}{dx^2} + k_k v^{*k} = \delta(x,\widehat{x}). \tag{3.4}$$

Dessa forma, a equação governante do problema fundamental na forma matricial será dada por:

$$\begin{bmatrix} EI\frac{d^4}{dx^4} + k_c + P\frac{d^2}{dx^2} & -k_c \\ -k_c & -G_s\frac{d^2}{dx^2} + k_c + k_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{*g}(x,\widehat{x}) & w^{*k}(x,\widehat{x}) \\ v^{*g}(x,\widehat{x}) & v^{*k}(x,\widehat{x}) \end{bmatrix} = \delta(x,\widehat{x})\,[I], \tag{3.5}$$

ou ainda na forma compacta:

$$[B]\,[G] = \{f\}, \tag{3.6}$$

onde $[B]$ é a matriz dos operadores, $[G]$ é a matriz dos deslocamentos fundamentais e $\{f\}$ é o vetor das forças, onde:

$$[B] = \begin{bmatrix} EI\frac{d^4}{dx^4} + k_c + P\frac{d^2}{dx^2} & -k_c \\ -k_c & -G_s\frac{d^2}{dx^2} + k_c + k_k \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} w^{*g}(x,\widehat{x}) & w^{*k}(x,\widehat{x}) \\ v^{*g}(x,\widehat{x}) & v^{*k}(x,\widehat{x}) \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

e

$$\{f\} = \delta(x,\widehat{x})\,[I], \tag{3.9}$$

sendo [I] a matriz identidade.

Como a eq.(3.5) corresponde a um sistema com variáveis acopladas, para resolvê-lo deverá ser feito o desacoplamento por meio do método de Hörmander (1963), gerando

assim a equação equivalente desacoplada $\psi(x,\widehat{x})$ por meio da equação:

$$[G^*] = [B^{cof}]^T \psi\,(x,\widehat{x})\,. \tag{3.10}$$

Substituindo a equação (3.10) na (3.6), tem-se:

$$[B]\left[B^{cof}\right]^T \psi\,(x,\widehat{x}) = \{f\}\,. \tag{3.11}$$

Vale lembrar ainda que a inversa da matriz [B] é dada por:

$$[B]^{-1} = \frac{\left[B^{cof}\right]^T}{det\,[B]}. \tag{3.12}$$

Dessa forma, a equação diferencial equivalente desacopladas será dada por:

$$\frac{d^6\psi}{dx^6} + \alpha\frac{d^4\psi}{dx^4} + \beta\frac{d^2\psi}{dx^2} + \gamma = -\frac{\delta\,(x,\widehat{x})}{EIG_s}, \tag{3.13}$$

onde: $\alpha = \dfrac{P}{EI} - \dfrac{k_c + k_k}{G_s}$; $\beta = \dfrac{k_c}{EI}\left[1 - \dfrac{P}{G_s}\left(1 + \dfrac{k_k}{k_c}\right)\right]$ e $\gamma = -\dfrac{k_c k_k}{EIG_s}$.

A equação característica associada a forma homogênea é obtida fazendo $\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = y$ na eq.(3.13), ficando:

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0, \tag{3.14}$$

cujas raízes são CARDANO:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{\alpha}{3}, \tag{3.15}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}\,(y_1 + \alpha) + \frac{1}{2}\sqrt{(y_1 + \alpha)^2 - 4\,[\beta + y_1\,(y_1 + \alpha)]}, \tag{3.16}$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}\,(y_1 + \alpha) - \frac{1}{2}\sqrt{(y_1 + \alpha)^2 - 4\,[\beta + y_1\,(y_1 + \alpha)]}, \tag{3.17}$$

onde: $\Delta = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$, $q = -\dfrac{\alpha^2}{3} + \beta$ e $p = \dfrac{2\alpha^3}{27} - \dfrac{\alpha\beta}{3} + \gamma$. Dessa forma, as soluções fundamentais desacopladas propostas serão dadas a partir do valor do $\Delta$, onde:

– Se $\Delta > 0$, a equação terá uma raiz é real e duas outras complexas conjugadas;

– Se $\Delta < 0$, a equação terá três raízes reais distintas;

– Se $\Delta = 0$, a equação terá três raízes reais, sendo pelo menos duas iguais.

De um modo geral, a solução fundamental desacoplada ($\psi(r)$) será dada pelas possíveis

combinações:

$$\psi(r) = f_1(r)C_1 + f_2(r)C_2 + f_3(r)C_3, \tag{3.18}$$

onde cada função $f_i$ será dada de acordo com o valor da sua respectiva raiz $y_i$. A tabela 3.1 mostra as combinações possíveis.

| | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | Obs. |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $f_1(r)$ | $e^{-pr}cos(qr)$ | $e^{-pr}sen(qr)$ | $y_2 = y_3$ |
| $\Delta < 0$ | $f_1(r)$ | $f_2(r)$ | $f_3(r)$ | $y_1 \neq y_2 \neq y_3$ |
| $\Delta = 0$ | $f_1(r)$ | $f_2(r)$ | $r^2 f_3(r)$ | $y_2 = y_3$ |
| $\Delta = 0$ | $f_1(r)$ | $r^2 f_2(r)$ | $r^4 f_3(r)$ | $y_1 = y_2 = y_3$ |

TABELA 3.1 – Funções $f_i$ propostas segundo a natureza da raiz $y_i$.

onde:

$$p = |Re\sqrt{y_2}| = |Re\sqrt{y_3}|, \tag{3.19}$$
$$q = |Im\sqrt{y_2}| = |Im\sqrt{y_3}|, \tag{3.20}$$
$$a = p^2 - q^2, \tag{3.21}$$
$$b = 2pq, \tag{3.22}$$

sendo: $Re$ é a parte real e $Im$ a imaginária das raízes complexas. Considerando que as raízes sejam reais, as funções $f_i$ serão dadas por:

$$f_i = r, \ se\ y_i = 0, \tag{3.23}$$
$$f_i = e^{-r\sqrt{y_i}}, \ se\ y_i > 0, \tag{3.24}$$
$$f_i = sen\left(r\sqrt{-y_i}\right), \ se\ y_i < 0, \tag{3.25}$$

com $i = 1, 2, 3$.

A seguir serão apresentadas as soluções fundamentais desacopladas para os casos mais usuais.

**Uma raiz real positiva e duas raízes complexas conjugadas**

Considerando que a raiz $y_1$ é real positiva e que $y_2$ e $y_3$ são complexas e conjugadas, a solução proposta para o problema será:

$$\psi = C_1 e^{-r\sqrt{y_1}} + C_2 e^{-pr}cos(qr) + C_3 e^{-pr}sen(qr). \tag{3.26}$$

Para obter os valores das constantes $C_i$, torna-se necessária a derivação da equação (3.26). Importante notar que a derivada do escalar em relação a $x$ será $\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dr} sgn\,(x, \widehat{x})$, uma vez que $r = |x - \widehat{x}|$ e, consequentemente, $\frac{dr}{dx} = sgn\,(x, \widehat{x})$, sendo $sgn\,(x, \widehat{x})$ a função sinal:

$$sgn(x, \widehat{x}) = \begin{cases} -1, \ se \ x < \widehat{x} \\ 1, \ se \ x > \widehat{x} \end{cases} \tag{3.27}$$

Fazendo a primeira derivada da eq.(3.26) em relação a $x$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} = \quad & \left\{ -\sqrt{y_1} C_1 e^{-\sqrt{y_1} r} - C_2 e^{-p.r} \left[ p.cos(q.r) + q.sen(q.r) \right] + \right. \\ & \left. + C_3 e^{-p.r} \left[ -p.sen(q.r) + q.cos(q.r) \right] \right\} sgn\,(x, \widehat{x})\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Derivando mais um vez em relação a $x$, chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \quad & y_1 C_1 e^{-\sqrt{y_1} r} + C_2 e^{-p.r} \left[ a.cos(q.r) + b.sen(q.r) \right] + C_3 e^{-p.r} \left[ a.sen(q.r) - b.cos(q.r) \right] + \\ & + 2\delta\,(x, \widehat{x}) \left\{ -\sqrt{y_1} C_1 e^{-\sqrt{y_1} r} - C_2 e^{-p.r} \left[ p.cos(q.r) + q.sen(q.r) \right] + \right. \\ & \left. + C_3 e^{-p.r} \left[ -p.sen(q.r) + q.cos(q.r) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Para se ter valor finito, o ponto fonte deve coincidir com o ponto campo ($x = \widehat{x}$), ficando $r = 0$ e $\delta(x, \widehat{x}) \to \infty$. Assim, pegando apenas a parcela que multiplica a delta de Dirac na eq.(3.29) e fazendo $r = 0$, obtém-se a primeira relação do sistema para definir as constantes $C_i$:

$$-\sqrt{y_1} C_1 - C_2 p + C_3 q = 0. \tag{3.30}$$

Sendo a parcela que multiplica a delta de Dirac nula, a derivada segunda, eq.(3.29), passa então a ser:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \quad & y_1 C_1 e^{-\sqrt{y_1} r} + C_2 e^{-p.r} \left[ a.cos(q.r) + b.sen(q.r) \right] + \\ & + C_3 e^{-p.r} \left[ a.sen(q.r) - b.cos(q.r) \right]. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Derivando a eq.(3.31), obtém-se a terceira derivada do $\psi$:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\psi}{dx^3} = \quad & \left\{ -\sqrt{y_1} y_1 C_1 e^{-\sqrt{y_1} r} + C_2 e^{-p.r} \left[ (-p.a + q.b) cos(q.r) - (q.a + p.b) sen(q.r) \right] + \right. \\ & \left. + C_3 e^{-p.r} \left[ (-p.a + q.b).sen(q.r) + (q.a + p.b).cos(q.r) \right] \right\} sgn(x, \widehat{x}). \end{aligned} \tag{3.32}$$

A quarta derivada será:

$$\begin{aligned}\frac{d^4\psi}{dx^4} = \quad & y_1^2 C_1 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_2 e^{-p.r}\left[(a^2-b^2)cos(q.r) + 2a.b.sen(q.r)\right] + \\ & + C_3 e^{-p.r}\left[(a^2-b^2)sen(q.r) - 2a.b.cos(q.r)\right] \\ & + 2\delta\left(x,\widehat{x}\right)\left\{-\sqrt{y_1}y_1 C_1 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_2 e^{-p.r}\left[(-p.a+q.b)cos(q.r) - (q.a+p.b)sen(q.r)\right] + \right. \\ & \left. + C_3 e^{-p.r}\left[(-p.a+q.b).sen(q.r) + (q.a+p.b).cos(q.r)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Para a eq.(3.33), vale a mesma análise que foi feita na eq.(3.29). Com isso, chega-se a mais uma relação do sistema para determinar as constantes:

$$-\sqrt{y_1}y_1 C_1 + C_2(-p.a+q.b) + C_3(q.a+p.b) = 0. \tag{3.34}$$

A equação (3.33), que corresponde à quarta derivada da função $\psi$, passa a ser:

$$\begin{aligned}\frac{d^4\psi}{dx^4} = \quad & y_1^2 C_1 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_2 e^{-p.r}\left[(a^2-b^2)cos(q.r) + 2a.b.sen(q.r)\right] + \\ & + C_3 e^{-p.r}\left[(a^2-b^2)sen(q.r) - 2a.b.cos(q.r)\right]. \end{aligned} \tag{3.35}$$

A quinta derivada é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{d^5\psi}{dx^5} = \quad & \left\{-\sqrt{y_1}y_1^2 C_1 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_2 e^{-p.r}\left[\left[-p(a^2-b^2)+2q.a.b\right]cos(q.r) - \left[q(a^2-b^2)+2p.a.b\right]sen(q.\right.\right. \\ & \left.\left. + C_3 e^{-p.r}\left[\left[q(a^2-b^2)+2p.a.b\right]cos(q.r) + \left[-p(a^2-b^2)+2q.a.b\right]sen(q.r)\right]\right\} sgn(x,\widehat{x}). \end{aligned}$$

Finalmente, a sexta-derivada do $\psi$ fica:

$$\begin{aligned}\frac{d^6\psi}{dx^6} = \quad & y_1^3 C_1 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_2 e^{-p.r}\left[\left(a^3-3a.b^2\right)cos(q.r) + \left(3a^2.b-b^3\right)sen(q.r)\right] + \\ & + C_3 e^{-p.r}\left[-\left(3a^2.b-b^3\right)cos(q.r) + \left(a^3-3a.b^2\right)sen(q.r)\right] + \\ & + 2\delta(x,\widehat{x})\left\{-\sqrt{y_1}y_1^2 C_1 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_2 e^{-p.r}\left[\left[-p(a^2-b^2)+2q.a.b\right]cos(q.r) - \left[q(a^2-b^2)+2p.\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. + C_3 e^{-p.r}\left[\left[q(a^2-b^2)+2p.a.b\right]cos(q.r) + \left[-p(a^2-b^2)+2q.a.b\right]sen(q.r)\right].\right\} \end{aligned}$$

O último conjunto de equações para determinação das constantes será obtido a partir da substituição das derivadas eqs. (3.31), (3.35) e (3.37) na eq.(3.13), resultando em:

$$2\alpha\left\{-\sqrt{y_1}y_1^2 C_1 + C_2\left[-p(a^2-b^2)+2q.a.b\right] + C_3\left[q(a^2-b^2)+2p.a.b\right]\right\} = 1. \tag{3.38}$$

O sistema de constantes a determinar, reunindo as eqs. (3.30), (3.34) e (3.38), fica:

$$\begin{cases} -\sqrt{y_1}C_1 - C_2 p + C_3 q = 0 \\ -\sqrt{y_1}y_1 C_1 + C_2(-p.a + q.b) + C_3(q.a + p.b) = 0 \\ -\sqrt{y_1}y_1^2 C_1 + C_2\left[-p(a^2-b^2) + 2q.a.b\right] + C_3\left[q(a^2-b^2) + 2p.a.b\right] = -\dfrac{1}{2EIG_s}. \end{cases} \tag{3.39}$$

Resolvendo o sistema (3.39), chega-se as seguintes constantes:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{y_1}\eta_e}, \tag{3.40}$$

$$C_2 = \frac{q^2 - 3p^2 + y_1}{2p\left(p^2+q^2\right)\eta_e}, \tag{3.41}$$

$$C_3 = \frac{3q^2 - p^2 + y_1}{2q\left(p^2+q^2\right)\eta_e}, \tag{3.42}$$

onde $\eta_e = 2EIG_s\left(y_1 - 2p\sqrt{y_1} + p^2 + q^2\right)\left(y_1 + 2p\sqrt{y_1} + p^2 + q^2\right)$.

**Raízes reais positivas e distintas**

Considerando que as três raízes serão reais e distintas, as soluções fundamentais propostas, dadas pela eq.(3.18), a depender do valor das raízes, serão:

$$\psi \;=\; C_1 e^{-r\sqrt{y_1}} + C_2 e^{-r\sqrt{y_2}} + C_3 e^{-r\sqrt{y_3}}. \tag{3.43}$$

A forma de obtenção das constantes $C_i$ é dada da mesma forma como foi feito para a eq.(3.26). Entretanto, de forma direta e simplificada, o sistema para determinar as constantes $C_i$ é dado por

$$\begin{bmatrix} \dfrac{df_1}{dr}(r) & \dfrac{df_2}{dr}(r) & \dfrac{df_3}{dr}(r) \\ \dfrac{d^3f_1}{dr^3}(r) & \dfrac{d^3f_2}{dr^3}(r) & \dfrac{d^3f_3}{dr^3}(r) \\ \dfrac{d^5f_1}{dr^5}(r) & \dfrac{d^5f_2}{dr^5}(r) & \dfrac{d^5f_3}{dr^5}(r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{1}{2EIG_s} \end{Bmatrix}, \tag{3.44}$$

tomando $r = 0$.

Assim, os coeficientes $C_i$ da solução fundamental eq.(3.43) são:

$$C_1 = \frac{1}{2EIG_s\sqrt{y_1}\,(y_1 - y_2)\,(y_1 - y_3)}, \tag{3.45}$$

$$C_2 = \frac{-1}{2EIG_s\sqrt{y_2}\,(y_2 - y_1)\,(y_2 - y_3)}, \tag{3.46}$$

$$C_3 = \frac{1}{2EIG_s\sqrt{y_3}\,(y_3 - y_1)\,(y_3 - y_2)}, \tag{3.47}$$

Conhecida a equação fundamental desacoplada $\psi$, é possível obter os deslocamentos fundamentais diretamente por meio da equação (3.10):

$$w^{*g}(x,\widehat{x}) = -G_s\frac{d^2\psi}{dr^2} + (k_c + k_k)\,\psi, \tag{3.48}$$

$$w^{*k}(x,\widehat{x}) = k_c\psi, \tag{3.49}$$

$$v^{*g}(x,\widehat{x}) = k_c\psi, \tag{3.50}$$

$$v^{*k}(x,\widehat{x}) = EI\frac{d^4\psi}{dr^4} + P\frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c\psi, \tag{3.51}$$

lembrando que $r = \mid x - \widehat{x} \mid$.

É necessário ainda conhecer as derivadas das eqs. (3.48) a (3.51) em relação ao ponto campo $(x)$ e ponto fonte $(\widehat{x})$ dos deslocamentos fundamentais, cujo motivo ficará melhor entendido na formulação da equação integral, seção 3.1.2.

$$w^{*g}_{,x}(x,\widehat{x}) = \left(-G_s\frac{d^3\psi}{dr^3} + (k_c + k_k)\,\frac{d\psi}{dr}\right) sgn(x,\widehat{x}), \tag{3.52}$$

$$w^{*k}_{,x}(x,\widehat{x}) = k_c\frac{d\psi}{dr}sgn(x,\widehat{x}), \tag{3.53}$$

$$v^{*g}_{,x}(x,\widehat{x}) = k_c\frac{d\psi}{dr}sgn(x,\widehat{x}),$$

$$w^{*g}_{,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = -w^{*g}_{,x}(x,\widehat{x}), \tag{3.54}$$

$$v^{*g}_{,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = -v^{*g}_{,x}(x,\widehat{x}), \tag{3.55}$$

$$w^{*g}_{,x\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = G_s\frac{d^4\psi}{dr^4} - (k_c + k_k)\,\frac{d^2\psi}{dr^2}. \tag{3.56}$$

As soluções fundamentais em esforços podem ser obtidas de forma análoga aos esforços

reais, eqs.(2.83), (2.84) e (2.85) , ficando:

$$V^{*g}(x,\widehat{x}) = -EI\left(-G_s\frac{d^5\psi}{dr^5}+(k_c+k_k)\frac{d^3\psi}{dr^3}\right)sgn\,(x,\widehat{x})\,, \tag{3.57}$$

$$V^{*k}(x,\widehat{x}) = -EIk_c\frac{d^3\psi}{dr^3}sgn\,(x,\widehat{x})\,, \tag{3.58}$$

$$V_k^{*g}(x,\widehat{x}) = G_sk_c\frac{d\psi}{dr}sgn\,(x,\widehat{x})\,, \tag{3.59}$$

$$V_k^{*k}(x,\widehat{x}) = G_s\left(EI\frac{d^5\psi}{dr^5}+P\frac{d^3\psi}{dr^3}+k_c\frac{d\psi}{dr}\right)sgn\,(x,\widehat{x})\,, \tag{3.60}$$

$$M^{*g}(x,\widehat{x}) = -EI\left(-G_s\frac{d^4\psi}{dr^4}+(k_c+k_k)\frac{d^2\psi}{dr^2}\right), \tag{3.61}$$

$$M^{*k}(x,\widehat{x}) = -EIk_c\frac{d^2\psi}{dr^2}. \tag{3.62}$$

As derivadas em relação ao ponto fonte das eqs.(3.57), (3.59) a (3.61), são:

$$V^{*g}_{,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = EI\left(-G_s\frac{d^6\psi}{dr^6}+(k_c+k_k)\frac{d^4\psi}{dr^4}\right), \tag{3.63}$$

$$V^{*g}_{k,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = -G_sk_c\frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.64}$$

$$M^{*g}_{,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = EI\left(-G_s\frac{d^5\psi}{dr^5}+(k_c+k_k)\frac{d^3\psi}{dr^3}\right)sgn\,(x,\widehat{x})\,. \tag{3.65}$$

As derivadas das expressões acima, para os dois principais casos considerados anteriormente, são apresentadas abaixo. Considerando uma raiz real positiva e duas complexas conjugadas, as derivadas da eq.(3.26) são:

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{1}{\eta_e}e^{-r\sqrt{y_1}}+\frac{1}{\eta_eb}\left[bcos(qr)+(a-y_1)\,sen(qr)\right]e^{-pr}, \tag{3.66}$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{\sqrt{y_1}}{\eta_e}e^{-r\sqrt{y_1}}+\frac{1}{\eta_eb}\left[-p\,(c-y_1)\,sen(qr)-q\,(c+y_1)\,cos(qr)\right]e^{-pr}, \tag{3.67}$$

$$\frac{d^3\psi}{dr^3} = -\frac{y_1}{\eta_e}e^{-r\sqrt{y_1}}+\frac{1}{\eta_eb}\left[y_1bcos(qr)+\left(c^2-y_1a\right)sen(qr)\right]e^{-pr}, \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^4\psi}{dr^4} = {} & \frac{y_1^{\frac{3}{2}}}{\eta_e}e^{-r\sqrt{y_1}}+\frac{1}{\eta_eb}\left[q\left(c^2+y_1\left(q^2-3p^2\right)\right)cos(qr)+\right.\\ & \left.-p\left(c^2-y_1\left(p^2-3q^2\right)\right)sen(qr)\right]e^{-pr},\end{aligned} \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^5\psi}{dr^5} = {} & -\frac{y_1^2}{\eta_e}e^{-r\sqrt{y_1}}+\frac{1}{\eta_eb}\left[b\left(-c^2+2ay_1\right)cos(qr)+\right.\\ & \left.\left(ac^2-y_1\left(a^2-b^2\right)\right)sen(qr)\right]e^{-pr},\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^6\psi}{dr^6} = {} & \frac{y_1^{\frac{5}{2}}}{\eta_e}e^{-r\sqrt{y_1}}+\frac{1}{\eta_eb}\left[-q\left(\left(q^2-3p^2\right)c^2+y_1\left(5a^2-q^4\right)\right)cos(qr)+\right.\\ & \left.-p\left(\left(p^2-3q^2\right)c^2-y_1\left(5a^2-p^4\right)\right)sen(qr)\right]e^{-pr},\end{aligned} \tag{3.71}$$

onde $c = p^2 + q^2$.

Considerando as três raízes reais e positivas, as derivadas da eq.(3.43) são:

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{Y_e}\left[-\left(y_2-y_3\right)e^{-r\sqrt{y_1}} + \left(y_1-y_3\right)e^{-r\sqrt{y_2}} - \left(y_1-y_2\right)e^{-r\sqrt{y_3}}\right], \tag{3.72}$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{1}{Y_e}\left[\sqrt{y_1}\left(y_2-y_3\right)e^{-r\sqrt{y_1}} - \sqrt{y_2}\left(y_1-y_3\right)e^{-r\sqrt{y_2}} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{y_3}\left(y_1-y_2\right)e^{-r\sqrt{y_3}}\right], \tag{3.73}$$

$$\frac{d^3\psi}{dr^3} = \frac{1}{Y_e}\left[-y_1\left(y_2-y_3\right)e^{-r\sqrt{y_1}} + y_2\left(y_1-y_3\right)e^{-r\sqrt{y_2}} - y_3\left(y_1-y_2\right)e^{-r\sqrt{y_3}}\right], \tag{3.74}$$

$$\frac{d^4\psi}{dr^4} = \frac{1}{Y_e}\left[y_1\sqrt{y_1}\left(y_2-y_3\right)e^{-r\sqrt{y_1}} - y_2\sqrt{y_2}\left(y_1-y_3\right)e^{-r\sqrt{y_2}} + \right.$$
$$\left. + y_3\sqrt{y_3}\left(y_1-y_2\right)e^{-r\sqrt{y_3}}\right], \tag{3.75}$$

$$\frac{d^5\psi}{dr^5} = \frac{1}{Y_e}\left[-y_1^2\left(y_2-y_3\right)e^{-r\sqrt{y_1}} + y_2^2\left(y_1-y_3\right)e^{-r\sqrt{y_2}} - y_3^2\left(y_1-y_2\right)e^{-r\sqrt{y_3}}\right], \tag{3.76}$$

$$\frac{d^6\psi}{dr^6} = \frac{1}{Y_e}\left[y_1^2\sqrt{y_1}\left(y_2-y_3\right)e^{-r\sqrt{y_1}} - y_2^2\sqrt{y_2}\left(y_1-y_3\right)e^{-r\sqrt{y_2}} + \right.$$
$$\left. + y_3^2\sqrt{y_3}\left(y_1-y_2\right)e^{-r\sqrt{y_3}}\right], \tag{3.77}$$

sendo $Y_e = 2EIG_s\left(y_1-y_2\right)\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)$.

### 3.1.2 Equação Integral

A equação diferencial governante do problema, eqs.(2.88) a (2.89), podem ser transformadas em equações integrais equivalentes por meio do método dos resíduos ponderados (MRP), sendo ponderada pelas soluções fundamentais correspondentes, ficando:

$$\int_0^L \left\{ \begin{bmatrix} EI\frac{d^4}{dx^4} + P\frac{d^2}{dx^2} + k_c & -k_c \\ -k_c & -G_s\frac{d^2}{dx^2} + k_c + k_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} g(x) \\ 0 \end{Bmatrix} \right\}^T [G]\,dx = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T. \tag{3.78}$$

Resolvendo apenas para ativação da fonte concentrada na viga, a eq.(3.78) fica:

$$\int_0^L \left\{ \left[ EI\frac{d^4w}{dx^4} + P\frac{d^2w}{dx^2} + k_c\left(w-v\right) - g \right] w^{*g} + \left[ -G_s\frac{d^2v}{dx^2} + k_c\left(v-w\right) + k_k v \right] v^{*g} \right\} dx = 0. \tag{3.79}$$

Fazendo algumas integrações por partes na eq.(3.79) e convenientes manipulações,

chega-se a:

$$
\begin{aligned}
&- \left[V(x)w^{*g}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \left[M(x)\frac{dw^{*g}}{dx}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[M^{*g}(x,\widehat{x})\frac{dw}{dx}(x)\right]_0^L + \left[V^{*g}(x,\widehat{x})w(x)\right]_0^L + \\
&+ \left[P\frac{dw}{dx}(x)w^{*g}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[P\frac{dw^{*g}}{dx}(x,\widehat{x})w(x)\right]_0^L - \left[V_k(x)v^{*g}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \left[V_k^{*g}(x,\widehat{x})v(x)\right]_0^L + \\
&+ \int_0^L \left\{ \left[EI\frac{d^4w^{*g}}{dx^4} + P\frac{d^2w^{*g}}{dx^2} + k_c\left(w^{*g} - v^{*g}\right)\right] w + \right. \\
&\left. + \left[-G_s\frac{d^2v^{*g}}{dx^2} + k_c\left(v^{*g} - w^{*g}\right) + k_k v^{*g}\right] v \right\} dx - \int_0^L g w^{*g} dx = 0.
\end{aligned} \tag{3.80}
$$

onde, por meio da eq.(3.1), tem-se:

$$
\int_0^L \left[EI\frac{d^4w^{*g}}{dx^4} + P\frac{d^2w^{*g}}{dx^2}(x,\widehat{x}) + k_c\left(w^{*g}(x,\widehat{x}) - v^{*g}(x,\widehat{x})\right)\right] w(x)dx = \int_0^L \delta\left(x,\widehat{x}\right) w(x)dx, \tag{3.81}
$$

e por meio da eq.(3.2)

$$
\int_0^L \left[-k_c\left(w^{*g}(x,\widehat{x}) - v^{*g}(x,\widehat{x})\right) - G_s\frac{d^2v^{*g}}{dx^2}(x,\widehat{x}) + k_k v^{*g}(x,\widehat{x})\right] v(x)dx = 0. \tag{3.82}
$$

Aplicando a propriedade da filtragem da delta de Dirac, a eq.(3.81) passa a ser:

$$
\int_0^L \delta\left(x,\widehat{x}\right) w(x)dx = w(\widehat{x}). \tag{3.83}
$$

Dessa forma, faz-se a substituição das eqs.(3.82) e (3.83) na eq.(3.80), obtendo-se a primeira equação integral em termos de deslocamentos no domínio:

$$
\begin{aligned}
&w(\widehat{x}) + \left[V^{*g}(x,\widehat{x})w(x)\right]_0^L - \left[M^{*g}(x,\widehat{x})\frac{dw}{dx}(x)\right]_0^L + \\
&+ \left[V_k^{*g}(x,\widehat{x})v(x)\right]_0^L = \left[V(x)w^{*g}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[P\frac{dw}{dx}(x)w^{*g}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \\
&- \left[M(x)\frac{dw^{*g}}{dx}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \left[V_k(x)v^{*g}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \int_0^L g(x)w^{*g}(x,\widehat{x})dx.
\end{aligned} \tag{3.84}
$$

Para a fonte concentrada em força na camada de cisalhamento, eq.(3.78), a equação integral correspondente fica:

$$
\int_0^L \left\{ \left[EI\frac{d^4w}{dx^4} + P\frac{d^2w}{dx^2} + k_c\left(w - v\right) - g\right] w^{*k} + \left[-G_s\frac{d^2v}{dx^2} + k_c\left(v - w\right) + k_k v\right] v^{*k} \right\} dx = 0. \tag{3.85}
$$

Após algumas integrações por partes e convenientes substituições, a eq.(3.85) fica:

$$v(\widehat{x}) + \left[V^{*k}(x,\widehat{x})w(x)\right]_0^L - \left[M^{*k}(x,\widehat{x})\frac{dw}{dx}(x)\right]_0^L + \\ + \left[V_k^{*k}(x,\widehat{x})v(x)\right]_0^L = \left[V(x)w^{*k}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[P\frac{dw}{dx}(x)w^{*k}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \\ - \left[M(x)\frac{dw^{*k}}{dx}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \left[V_k(x)v^{*k}(x,\widehat{x})\right]_0^L. \tag{3.86}$$

que corresponde a equação integral para deslocamentos no domínio da camada cisalhante.

Observando as eqs.(3.84) e (3.86) vê-se que há três incógnitas no contorno: $w(x)$, $v(x)$ e $\dfrac{dw}{dx}(x)$. Com isso, tendo duas equações para três incógnitas, faz-se necessário o conhecimento de mais uma equação, a qual será obtida a partir da eq.(3.84). Portanto, derivando a eq.(3.84) em relação ao ponto fonte, $\widehat{x}$, obtém-se a terceira equação integral para a inclinação da elástica no domínio:

$$\frac{dw}{d\widehat{x}}(\widehat{x}) + \left[\frac{dV^{*g}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})w(x)\right]_0^L - \left[\frac{dM^{*g}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\frac{dw}{dx}(x)\right]_0^L + \\ + \left[\frac{dV_k^{*g}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})v(x)\right]_0^L = \left[V(x)\frac{dw^{*g}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[P\frac{dw}{dx}(x)\frac{dw^{*g}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \\ - \left[M(x)\frac{d^2w^{*g}}{dxd\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \left[V_k(x)\frac{dv^{*g}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \int_0^L g(x)\frac{dw^{*g}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})dx. \tag{3.87}$$

Reescrevendo as eqs.(3.84), (3.86) e (3.87) na forma matricial, é obtida a equação integral do problema na teoria de Euler-Bernoulli:

$$\left\{\begin{array}{c} w(\widehat{x}) \\ w_{,\widehat{x}}(\widehat{x}) \\ v(\widehat{x}) \end{array}\right\} + \left\{\left[\begin{array}{ccc} V^{*g}(x,\widehat{x}) & -M^{*g}(x,\widehat{x}) & V_k^{*g}(x,\widehat{x}) \\ V_{,\widehat{x}}^{*g}(x,\widehat{x}) & -M_{,\widehat{x}}^{*g}(x,\widehat{x}) & V_{k,\widehat{x}}^{*g}(x,\widehat{x}) \\ V^{*k}(x,\widehat{x}) & -M^{*k}(x,\widehat{x}) & V_k^{*k}(x,\widehat{x}) \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} w(x) \\ w_{,x}(x) \\ v(x) \end{array}\right\}\right\}_{x=0}^{x=L} = \\ \left\{\left[\begin{array}{ccc} w^{*g}(x,\widehat{x}) & -w_{,x}^{*g}(x,\widehat{x}) & v^{*g}(x,\widehat{x}) \\ w_{,\widehat{x}}^{*g}(x,\widehat{x}) & -w_{,x\widehat{x}}^{*g}(x,\widehat{x}) & v_{,\widehat{x}}^{*g}(x,\widehat{x}) \\ w^{*k}(x,\widehat{x}) & -w_{,x}^{*k}(x,\widehat{x}) & v^{*k}(x,\widehat{x}) \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} V(x) \\ M(x) \\ V_k(x) \end{array}\right\}\right\}_{x=0}^{x=L} + \int_0^L g(x)\left[\begin{array}{c} w^{*g}(x,\widehat{x}) \\ w_{,\widehat{x}}^{*g}(x,\widehat{x}) \\ v^{*k}(x,\widehat{x}) \end{array}\right]dx. \tag{3.88}$$

### 3.1.3 Equações algébricas

A solução do problema requer a montagem do sistema algébrico para posteriormente aplicar as condições de contorno e resolvê-lo. A equação algébrica será obtida por meio da equação integral eq.(3.88), que está relacionada apenas para pontos colocados no domínio.

Dessa forma, para o MEC, faz-se necessária a colocação do ponto fonte no contorno, ou seja, nas extremidades da viga e da camada cisalhante: no contorno à esquerda quando $\widehat{x} \to 0 = \lim_{\xi \to 0}(0 + \xi)$ e no contorno à direita $\widehat{x} \to L = \lim_{\xi \to 0}(L - \xi)$. Assim, a equação algébrica, escrita na forma compacta, fica:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\}. \tag{3.89}$$

onde $[H]$ e $[G]$ são as matrizes de influência, $\{f\}$ é o vetor das cargas, $\{u\}$ é o vetor dos deslocamentos e $\{p\}$ é o vetor dos esforços. Os vetores $u$ e $p$ são:

$$\{u\} = \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ u_j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccccc} w(0) & w_{,x}(0) & v(0) & w(L) & w_{,x}(L) & v(L) \end{array} \right\}^T, \tag{3.90}$$

$$\{p\} = \left\{ \begin{array}{c} p_i \\ p_j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccccc} V(0) & M(0) & V_k(0) & V(L) & M(L) & V_k(L) \end{array} \right\}^T, \tag{3.91}$$

onde $i$ e $j$ correspondem as nós inicial e final, respectivamente, do elemento de contorno, conforme mostra a figura 3.2. Note que, o elemento de contorno proposto nessa tese possui seis graus de liberdade, sendo dois deles devido à camada cisalhante do modelo do Kerr. A figura 3.2 mostra ainda os sentidos positivos para os deslocamentos e esforços nas extremidades do elemento.

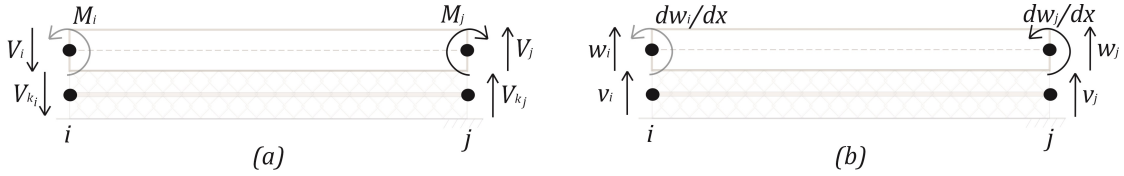



FIGURA 3.2 – Sentidos positivos dos esforços (a) e deslocamentos (b) nas extremidades.

A matriz de influência dos deslocamentos, $[H]$, pode ser escrita na seguinte forma:

$$[H] = \left[ \begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \\ \\ H_{21} & H_{22} \end{array} \right], \text{ com: } \begin{array}{l} [H_{11}] = -[N], \ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ [H_{12}] = [N], \ para\ r = L\ e\ S = S_d \\ [H_{21}] = -[N], \ para\ r = L\ e\ S = S_a \\ [H_{22}] = [N], \ para\ r = 0\ e\ S = S_d \end{array} \tag{3.92}$$

onde:

$$[N] = \left[ \begin{array}{ccc} S.\eta_{11}(r) & -\eta_{12}(r) & S.\eta_{13}(r) \\ -\eta_{21}(r) & S.\eta_{22}(r) & -\eta_{23}(r) \\ S.\eta_{31}(r) & -\eta_{32}(r) & S.\eta_{33}(r) \end{array} \right], \tag{3.93}$$

sendo $S_a$ e $S_d$ os valores dados pela função sinal para quando $x < \widehat{x}$ e $x > \widehat{x}$, respectivamente, e os coeficientes $\eta$ obtidos a partir dos esforços fundamentais, eqs.(3.57) a (3.62), e suas derivadas, eqs.(3.63) a (3.65):

$$\eta_{11}(r) = EIG_s\frac{d^5\psi}{dr^5} - EI\left(k_c + k_k\right)\frac{d^3\psi}{dr^3}, \tag{3.94}$$

$$\eta_{12}(r) = EIG_s\frac{d^4\psi}{dr^4} - EI\left(k_c + k_k\right)\frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.95}$$

$$\eta_{13}(r) = k_cG_s\frac{d\psi}{dr}, \tag{3.96}$$

$$\eta_{21}(r) = EIG_s\frac{d^6\psi}{dr^6} - EI\left(k_c + k_k\right)\frac{d^4\psi}{dr^4}, \tag{3.97}$$

$$\eta_{22}(r) = \eta_{11}(r), \tag{3.98}$$

$$\eta_{23}(r) = k_cG_s\frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.99}$$

$$\eta_{31}(r) = -EIk_c\frac{d^3\psi}{dr^3}, \tag{3.100}$$

$$\eta_{32}(r) = -EIk_c\frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.101}$$

$$\eta_{33}(r) = D_1G_s\frac{d^5\psi}{dr^5} + PG_s\frac{d^3\psi}{dr^3} + k_cG_s\frac{d\psi}{dr}. \tag{3.102}$$

onde $\psi(r)$ é a solução fundamental desacoplada, cujas derivadas já foram explicitamente apresentadas nas eqs.(3.66) a (3.77).

Já a matriz de influência dos esforços, $[G]$, fica:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, \text{ com: } \begin{array}{l} [G_{11}] = -[Q], \ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ [G_{12}] = \ [Q], \ para\ r = L\ e\ S = S_d \\ [G_{21}] = -[Q], \ para\ r = L\ e\ S = S_a \\ [G_{22}] = \ [Q], \ para\ r = 0\ e\ S = S_d, \end{array} \tag{3.103}$$

onde:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \beta_{11}(r) & -S.\beta_{12}(r) & \beta_{13}(r) \\ -S.\beta_{21}(r) & \beta_{22}(r) & -S.\beta_{23}(r) \\ \beta_{31}(r) & -S.\beta_{32}(r) & \beta_{33}(r) \end{bmatrix} \tag{3.104}$$

e os coeficientes $\beta$ são obtidos a partir dos deslocamentos fundamentais, eqs.(3.48) a (3.51)

e suas derivadas, eqs.(3.52) a (3.56), sendo dados por:

$$\beta_{11}(r) = -G_s\frac{d^2\psi}{dr^2} + (k_c + k_k)\,\psi, \tag{3.105}$$

$$\beta_{12}(r) = -G_s\frac{d^3\psi}{dr^3} + (k_c + k_k)\,\frac{d\psi}{dr}, \tag{3.106}$$

$$\beta_{13}(r) = k_c\psi, \tag{3.107}$$

$$\beta_{21}(r) = \beta_{12}(r), \tag{3.108}$$

$$\beta_{22}(r) = -G_s\frac{d^4\psi}{dr^4} + (k_c + k_k)\,\frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.109}$$

$$\beta_{23}(r) = k_c\frac{d\psi}{dr}, \tag{3.110}$$

$$\beta_{31}(r) = \beta_{13}(r), \tag{3.111}$$

$$\beta_{32}(r) = \beta_{23}(r), \tag{3.112}$$

$$\beta_{33}(r) = EI\frac{d^4\psi}{dr^4} + P\frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c\psi. \tag{3.113}$$

As forças nodais do vetor de carga para uma carga $g(x)$ que atua na viga, é dado por:

$$\{f_g\} = \left[\begin{array}{cccccc} f_{w_i} & -f_{dw_i} & f_{v_i} & f_{w_j} & -f_{dw_j} & f_{v_j} \end{array}\right]^T, \tag{3.114}$$

onde

$$f_{w_i} = \int_0^L g(x)\beta_{11}(x)dx, \tag{3.115}$$

$$f_{dw_i} = \int_0^L g(x)\beta_{21}(x)dx, \tag{3.116}$$

$$f_{v_i} = \int_0^L g(x)\beta_{31}(x)dx, \tag{3.117}$$

$$f_{w_j} = \int_0^L g(x)\beta_{11}(L-x)dx, \tag{3.118}$$

$$f_{dw_j} = \int_0^L g(x)\beta_{21}(L-x)dx, \tag{3.119}$$

$$f_{v_j} = \int_0^L g(x)\beta_{31}(L-x)dx. \tag{3.120}$$

Considerando que atue um carregamento uniformemente distribuído, o vetor de carga

será dado por:

$$f_{w_i} = -g\left[G_s I_{f_2} - (k_c + k_k)\, I_{f_0}\right], \tag{3.121}$$

$$f_{dw_i} = -g\left[G_s I_{f_3} - (k_c + k_k)\, I_{f_1}\right] S_d, \tag{3.122}$$

$$f_{v_i} = g k_c I_{f_0}, \tag{3.123}$$

$$f_{w_j} = -g\left[G_s I_{f_2} - (k_c + k_k)\, I_{f_0}\right], \tag{3.124}$$

$$f_{dw_j} = -g\left[G_s I_{f_3} - (k_c + k_k)\, I_{f_1}\right] S_a, \tag{3.125}$$

$$f_{v_j} = g k_c I_{f_0}, \tag{3.126}$$

onde os valores de $I_f$ para quando houver uma raiz real positiva e duas complexas conjugadas são dados por

$$I_{f_0} = \frac{1}{\eta_e y_1 c^2}\left(y_1\left(y_1 - 2a\right) - c^2\left(e^{-L\sqrt{y_1}} - 1\right)\right) - \frac{1}{\eta_t b c^2}\left(b\left(-2a + y_1\right) cos\left(qL\right) + \right.$$
$$\left. - \left(a^2 - b^2 - y_1 a\right) sin\left(qL\right)\right) e^{-pL}, \tag{3.127}$$

$$I_{f_1} = \frac{1}{\eta_e bc\sqrt{y_1}}\left(bc\left(e^{-L\sqrt{y_1}} - 1\right) - \sqrt{y_1} q\left(q^2 - 3p^2 + y_1\right)\right) + \frac{1}{\eta_t bc}\left(q\left(q^2 - 3p^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. v + y_1\right) cos\left(qL\right) + p\left(3q^2 - p^2 + y_1\right) sin\left(qL\right)\right) e^{-pL}, \tag{3.128}$$

$$I_{f_2} = \frac{1}{\eta_e b}\left(bcos\left(qL\right) + \left(a - y_1\right) sin\left(qL\right)\right) e^{-pL} - \frac{e^{-L\sqrt{y_1}}}{\eta_t}, \tag{3.129}$$

$$I_{f_3} = \frac{1}{\eta_e b}\left(b\sqrt{y_1}\left(e^{-L\sqrt{y_1}} - 1\right) + q\left(c + y_1\right)\right) + \frac{1}{\eta_t b}\left(-q\left(c + y_1\right) cos\left(qL\right) + \right.$$
$$\left. - p\left(c - y_1\right) sin\left(qL\right)\right) e^{-pL}, \tag{3.130}$$

enquanto que para três raízes reais e positivas

$$I_{f_0} = \frac{1}{2EIG_s}\left[-\frac{e^{-L\sqrt{y_1}}-1}{y_1\left(y_1-y_3\right)\left(y_1-y_2\right)}+\frac{e^{-L\sqrt{y_2}}-1}{y_2\left(y_2-y_3\right)\left(y_1-y_2\right)}+ -\frac{e^{-L\sqrt{y_3}}-1}{y_3\left(y_2-y_3\right)\left(y_1-y_3\right)}\right], \tag{3.131}$$

$$I_{f_1} = \frac{1}{2EIG_s}\left[\frac{e^{-L\sqrt{y_1}}-1}{\sqrt{y_1}\left(y_1-y_2\right)\left(y_1-y_3\right)}+-\frac{e^{-L\sqrt{y_2}}-1}{\sqrt{y_2}\left(y_1-y_2\right)\left(y_2-y_3\right)}+ +\frac{e^{-L\sqrt{y_3}}-1}{\sqrt{y_3}\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)}\right], \tag{3.132}$$

$$I_{f_2} = \frac{1}{2EIG_s}\left[-\frac{e^{-L\sqrt{y_1}}-1}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_1-y_3\right)}+\frac{e^{-L\sqrt{y_2}}-1}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_2-y_3\right)}+ -\frac{e^{-L\sqrt{y_3}}-1}{\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)}\right], \tag{3.133}$$

$$I_{f_3} = \frac{1}{2EIG_s}\left[\frac{\sqrt{y_1}e^{-L\sqrt{y_1}}-1}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_1-y_3\right)}+-\frac{\sqrt{y_2}e^{-L\sqrt{y_2}}-1}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_2-y_3\right)}+ +\frac{\sqrt{y_3}e^{-L\sqrt{y_3}}-1}{\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)}\right]. \tag{3.134}$$

Entretanto, se o carregamento for pontual ($p$) e aplicado em um ponto de coordenada $x_p$, então o vetor de carga será dado por:

$$f_{w_i} = -p\left[G_s\frac{d^2\psi}{dr^2}(x_p)-\left(k_c+k_k\right)\psi(x_p)\right], \tag{3.135}$$

$$f_{dw_i} = -p\left[G_s\frac{d^3\psi}{dr^3}(x_p)-\left(k_c+k_k\right)\frac{d\psi}{dr}(x_p)\right]S_d, \tag{3.136}$$

$$f_{v_i} = pk_c\psi(x_p), \tag{3.137}$$

$$f_{w_j} = -p\left[G_s\frac{d^2\psi}{dr^2}(L-x_p)-\left(k_c+k_k\right)\psi(L-x_p)\right], \tag{3.138}$$

$$f_{dw_j} = -p\left[G_s\frac{d^3\psi}{dr^3}(L-x_p)-\left(k_c+k_k\right)\frac{d\psi}{dr}(L-x_p)\right]S_a \tag{3.139}$$

$$f_{v_j} = pk_c\psi(L-x_p). \tag{3.140}$$

Dessa forma, para se obterem os esforços e deslocamentos no contorno, resta aplicar as condições de contorno à eq.(3.89) para obter a solução do problema.

#### 3.1.3.1 Determinação dos deslocamentos no domínio

Obtidos os deslocamentos e esforços no contorno do elemento, torna-se possível conhecê-los também nos pontos internos, como por exemplo em um ponto "$A$", conforme figura 3.3. Para isso, recorre-se a equação integral, eq.(3.88).

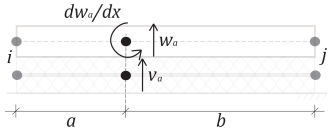



FIGURA 3.3 – Deslocamentos em um ponto $A$ no domínio das vigas.

Escrevendo a eq.(3.88) para os deslocamentos em um ponto "$A$", a representação algébrica fica:

$$\left\{ \begin{array}{c} w(x_a) \\ w_{,\widehat{x}}(x_a) \\ v(x_a) \end{array} \right\} + \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} V^{*g}(x,a) & -M^{*g}(x,a) & V_k^{*g}(x,a) \\ V_{,\widehat{x}}^{*g}(x,a) & -M_{,\widehat{x}}^{*g}(x,a) & V_{k,\widehat{x}}^{*g}(x,a) \\ V^{*k}(x,a) & -M^{*k}(x,a) & V_k^{*k}(x,a) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w(x) \\ w_{,x}(x) \\ v(x) \end{array} \right\} \right\}_{x=0}^{x=L} =$$

$$\left\{ \left[ \begin{array}{ccc} w^{*g}(x,a) & -w_{,x}^{*g}(x,a) & v^{*g}(x,a) \\ w_{,\widehat{x}}^{*g}(x,a) & -w_{,x\widehat{x}}^{*g}(x,a) & v_{,\widehat{x}}^{*g}(x,a) \\ w^{*k}(x,a) & -w_{,x}^{*k}(x,a) & v^{*k}(x,a) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V(x) \\ M(x) \\ V_k(x) \end{array} \right\} \right\}_{x=0}^{x=L} + g(x) \int_0^L \left[ \begin{array}{c} w^{*g}(x,a) \\ w_{,\widehat{x}}^{*g}(x,a) \\ v^{*k}(x,a) \end{array} \right] .dx \tag{3.141}$$

A partir da eq.(3.141), monta-se a equação algébrica para determinação dos deslocamentos em um ponto qualquer no domínio:

$$\left\{ \begin{array}{c} w(x_a) \\ w_{,x}(x_a) \\ v(x_a) \end{array} \right\} = -\left[H\right]\left\{u\right\} + \left[G\right]\left\{p\right\} + \left\{f\right\}, \tag{3.142}$$

onde $\{u\}$ e $\{p\}$ são os deslocamentos e esforços no contorno, respectivamente, calculados por meio da equação (3.89).

A matriz de influência $[H]$ é dada por:

$$[H] = \left[ \begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \end{array} \right], \text{ com: } \begin{array}{l} [H_{11}] = \ -[N], \ para\ r = a\ e\ S = S_a \\ [H_{12}] = \ \ [N], \ para\ r = b\ e\ S = S_d \end{array} \tag{3.143}$$

onde:

$$[N] = \left[ \begin{array}{ccc} S.\eta_{11}(r) & -\eta_{12}(r) & S.\eta_{13}(r) \\ -\eta_{21}(r) & S.\eta_{22}(r) & -\eta_{23}(r) \\ S.\eta_{31}(r) & -\eta_{32}(r) & S.\eta_{33}(r) \end{array} \right], \tag{3.144}$$

sendo os coeficientes $\eta$ obtidos pelas eqs.(3.94) a (3.102). Já a matriz de influência $[G]$, fica:

$$[G] = \left[ \begin{array}{cc} G_{11} & G_{12} \end{array} \right], \text{ com: } \begin{array}{l} [G_{11}] = \ -[Q], \ para\ r = a\ e\ S = S_a \\ [G_{12}] = \ \ [Q], \ para\ r = b\ e\ S = S_d \end{array} \tag{3.145}$$

onde:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \beta_{11}(r) & -S.\beta_{12}(r) & \beta_{13}(r) \\ -S.\beta_{21}(r) & \beta_{22}(r) & -S.\beta_{23}(r) \\ \beta_{31}(r) & -S.\beta_{32}(r) & \beta_{33}(r) \end{bmatrix}, \tag{3.146}$$

sendo os coeficientes $\beta$ os mesmos definidos pelas eqs.(3.105) a (3.113).

O vetor de carga, $f$, para o carregamento uniformemente distribuído, fica:

$$\{f_g\} = \begin{bmatrix} f_{w_a} & -f_{dw_a} & f_{v_a} \end{bmatrix}^T, \tag{3.147}$$

onde os coeficientes $\theta$ são definidas abaixo:

$$f_{w_a} = \int_0^{x_a} g(x)\beta_{11}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g(x)\beta_{11}(L-x)dx, \tag{3.148}$$

$$f_{dw_a} = \int_0^{x_a} g(x)\beta_{21}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g(x)\beta_{21}(L-x)dx, \tag{3.149}$$

$$f_{v_a} = \int_0^{x_a} g(x)\beta_{31}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g(x)\beta_{31}(L-x)dx. \tag{3.150}$$

Para um carregamento uniformemente distribuído

$$f_{w_a} = -g \cdot G_s I_{d_2} + g \cdot (k_c + k_k)\, I_{d_0}, \tag{3.151}$$

$$f_{dw_a} = -g \cdot G_s I_{d_3} + g \cdot (k_c + k_k)\, I_{d_1}, \tag{3.152}$$

$$f_{v_a} = g \cdot k_c I_{d_0}, \tag{3.153}$$

onde para uma raiz real positiva e duas complexas conjugadas

$$I_{d_0} = -\frac{T_a - 2}{\eta y_1} + \frac{1}{\eta b c^2}\left[2b\,(y_1 - a) - b\,(y_1 - 2a)\,C_{co} + \left(a^2 - b^2 - y_1 a\right) C_{se}\right] \tag{3.154}$$

$$I_{d_1} = -\frac{T_b}{\eta\sqrt{y_1}} + \frac{-1}{\eta b c}\left[q\left(q^2 - 3p^2 + y_1\right) D_{se} + p\left(3q^2 - p^2 + y_1\right) D_{co}\right], \tag{3.155}$$

$$I_{d_2} = -\frac{T_a - 2}{\eta} + \frac{1}{\eta b}\left[bC_{co} + -\left(y_1 - a\right) C_{se} - 2b\right], \tag{3.156}$$

$$I_{d_3} = -\frac{\sqrt{y_1} T_b}{\eta} + \frac{1}{\eta b}\left[q\,(c + y_1)\, D_{co} + p\,(c - y_1)\, D_{se}\right], \tag{3.157}$$

sendo $T_a = e^{-\sqrt{y_1}x_a} + e^{-\sqrt{y_1}x_b}$, $C_{se} = sen\,(qx_a)\,e^{-px_a} + sen\,(qx_a)\,e^{-px_b}$, $C_{co} = cos\,(qx_a)\,e^{-px_a} + cos\,(qx_b)\,e^{-px_b}$, $T_b = e^{-\sqrt{y_1}x_a} - e^{-\sqrt{y_1}x_b}$, $D_{se} = e^{-px_a} sin\,(qx_a) - e^{-px_b} sin\,(qx_b)$, $D_{co} =$

$e^{-px_a}cos\left(qx_a\right) - e^{-px_b}cos\left(qx_b\right)$, enquanto que para três raízes reais e positivas

$$I_{d_0} = \frac{1}{2EIG_s}\left[-\frac{e^{-\sqrt{y_1}x_a}+e^{-\sqrt{y_1}x_b}-2}{y_1\left(y_1-y_2\right)\left(y_1-y_3\right)}+\frac{e^{-\sqrt{y_2}x_a}+e^{-\sqrt{y_2}x_b}-2}{y_2\left(y_1-y_2\right)\left(y_2-y_3\right)}+\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-\sqrt{y_3}x_a}+e^{-\sqrt{y_3}x_b}-2}{y_3\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)}\right], \tag{3.158}$$

$$I_{d_1} = \frac{1}{2EIG_s}\left[-\frac{e^{-\sqrt{y_1}x_a}-e^{-\sqrt{y_1}x_b}}{\sqrt{y_1}\left(y_1-y_2\right)\left(y_1-y_3\right)}+\frac{e^{-\sqrt{y_2}x_a}-e^{-\sqrt{y_2}x_b}}{\sqrt{y_2}\left(y_1-y_2\right)\left(y_2-y_3\right)}+\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-\sqrt{y_3}x_a}-e^{-\sqrt{y_3}x_b}}{\sqrt{y_3}\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)}\right], \tag{3.159}$$

$$I_{d_2} = \frac{1}{2EIG_s}\left[-\frac{e^{-\sqrt{y_1}x_a}+e^{-\sqrt{y_1}x_b}-2}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_1-y_3\right)}+\frac{e^{-\sqrt{y_2}x_a}+e^{-\sqrt{y_2}x_b}-2}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_2-y_3\right)}+\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-\sqrt{y_3}x_a}+e^{-\sqrt{y_3}x_b}-2}{\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)}\right], \tag{3.160}$$

$$I_{d_3} = \frac{1}{2EIG_s}\left[-\frac{\sqrt{y_1}e^{-\sqrt{y_1}x_a}-e^{-\sqrt{y_1}x_b}}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_1-y_3\right)}+\frac{\sqrt{y_2}e^{-\sqrt{y_2}x_a}-e^{-\sqrt{y_2}x_b}}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_2-y_3\right)}+\right.$$
$$\left.-\frac{\sqrt{y_3}e^{-\sqrt{y_3}x_a}-e^{-\sqrt{y_3}x_b}}{\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)}\right]. \tag{3.161}$$

Caso atue no domínio uma força pontual ($p$) em um ponto de coordenada $x_p$, o vetor de carga fica:

$$f_{w_a} = -p\cdot G_s\frac{d^2\psi}{dr^2}(r_p) + p\cdot\left(k_c+k_k\right)\psi(r_p), \tag{3.162}$$

$$f_{dw_a} = -p\cdot G_s\frac{d^3\psi}{dr^3}(r_p)S + p\cdot\left(k_c+k_k\right)\frac{d\psi}{dr}(r_p)S, \tag{3.163}$$

$$f_{v_a} = p\cdot k_c\psi(r_p), \tag{3.164}$$

onde $r_p = |x_p - x_a|$ e $S = \begin{cases} -1 \text{ if } x_1 < x_a \\ 1 \text{ if } x_1 > x_a \end{cases}$.

### 3.1.3.2 Determinação dos esforços no domínio

Para se obterem os esforços em um ponto $A$ do domínio do elemento, deve-se recorrer às eqs.(2.83), (2.84) e (2.85), onde fazendo as devidas manipulações na equação integral, eq.(3.88), monta-se o seguinte sistema algébrico:

$$\left\{\begin{array}{c} V(x_a) \\ M(x_a) \\ V_k(x_a) \end{array}\right\} = -\left[\overline{H}\right]\{u\} + \left[\overline{G}\right]\{p\} + \left\{\overline{f}\right\}, \tag{3.165}$$

onde os vetores $\{u\}$ e $\{p\}$ são os deslocamentos e esforços medidos no contorno, respectivamente, por meio da equação (3.89). A matriz de influência $\left[\overline{H}\right]$ é dada por:

$$\left[\overline{H}\right] = \left[\begin{array}{cc} \overline{H}_{11} & \overline{H}_{12} \end{array}\right], \text{ com: } \begin{array}{l} \left[\overline{H}_{11}\right] = -\left[\overline{N}\right], \ para\ r = a\ e\ S = S_a \\ \left[\overline{H}_{12}\right] = \left[\overline{N}\right], \ para\ r = b\ e\ S = S_d \end{array} \tag{3.166}$$

onde:

$$\left[\overline{N}\right] = \begin{bmatrix} \overline{\eta}_{11}(r) & -S\cdot\overline{\eta}_{12}(r) & \overline{\eta}_{13}(r) \\ S\cdot\overline{\eta}_{21}(r) & -\overline{\eta}_{22}(r) & S\cdot\overline{\eta}_{23}(r) \\ \overline{\eta}_{31}(r) & -S\cdot\overline{\eta}_{32}(r) & \overline{\eta}_{33}(r) \end{bmatrix}, \tag{3.167}$$

sendo os coeficientes $\overline{\eta}$ definidos por:

$$\overline{\eta}_{11} = -\frac{d^2}{dr^2}\left(EI\frac{d^2}{dr^2} + P\right)^2\left(-G_s\frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c + k_k\psi\right), \tag{3.168}$$

$$\overline{\eta}_{21} = -\frac{d^3}{dr^3}\left(EI\frac{d^2}{dr^2} + P\right)^2\left(-G_s\frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c + k_k\psi\right), \tag{3.169}$$

$$\overline{\eta}_{31} = -k_c\frac{d^2}{dr^2}\left(EI\frac{d^2\psi}{dr^2} + P\psi\right)^2, \tag{3.170}$$

$$\overline{\eta}_{12} = E^2I^2\frac{d^4}{dr^4}\left(-G_s\frac{d^2\psi}{dr^2} + (k_c + k_k)\,\psi\right), \tag{3.171}$$

$$\overline{\eta}_{22} = E^2I^2\frac{d^5}{dr^5}\left(-G_s\frac{d^2\psi}{dr^2} + (k_c + k_k)\,\psi\right), \tag{3.172}$$

$$\overline{\eta}_{32} = E^2I^2k_c\frac{d^4\psi}{dr^4}, \tag{3.173}$$

$$\overline{\eta}_{13} = -G_s^2k_c\frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.174}$$

$$\overline{\eta}_{23} = -G_s^2k_c\frac{d^3\psi}{dr^3}, \tag{3.175}$$

$$\overline{\eta}_{33} = -G_s^2\frac{d^2}{dr^2}\left(EI\frac{d^4\psi}{dr^4} + P\frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c\psi\right). \tag{3.176}$$

A matriz de influência $\left[\overline{G}\right]$, fica:

$$\left[\overline{G}\right] = \left[\begin{array}{cc} \overline{G}_{11} & \overline{G}_{12} \end{array}\right], \text{ com: } \begin{array}{l} \left[\overline{G}_{11}\right] = -\left[\overline{Q}\right], \ para\ r = a\ e\ S = S_a \\ \left[\overline{G}_{12}\right] = \left[\overline{Q}\right], \ para\ r = b\ e\ S = S_d \end{array} \tag{3.177}$$

onde:

$$\left[\overline{Q}\right] = \begin{bmatrix} S\cdot\overline{\beta}_{11}(r) & -\overline{\beta}_{12}(r) & S\cdot\overline{\beta}_{13}(r) \\ \overline{\beta}_{21}(r) & -S\cdot\overline{\beta}_{22}(r) & \overline{\beta}_{23}(r) \\ S\cdot\overline{\beta}_{31}(r) & -\overline{\beta}_{32}(r) & S\cdot\overline{\beta}_{33}(r) \end{bmatrix}, \tag{3.178}$$

sendo os coeficientes $\overline{\beta}$ definidos por:

$$\overline{\beta}_{11} = \frac{d}{dr}\left(EI\frac{d^2}{dr^2} + P\right)\left(-G_s\frac{d^2\psi}{dr^2} + (k_c + k_k)\,\psi\right), \tag{3.179}$$

$$\overline{\beta}_{21} = -EI\frac{d^2}{dr^2}\left(-G_s\frac{d^2\psi}{dr^2} + (k_c + k_k)\,\psi\right), \tag{3.180}$$

$$\overline{\beta}_{31} = -G_s k_c\frac{d\psi}{dr}, \tag{3.181}$$

$$\overline{\beta}_{12} = \frac{d^2}{dr^2}\left(EI\frac{d^2}{dr^2} + P\right)\left(-G_s\frac{d^2\psi}{dr^2} + (k_c + k_k)\,\psi\right), \tag{3.182}$$

$$\overline{\beta}_{22} = -EI\frac{d^3}{dr^3}\left(-G_s\frac{d^2\psi}{dr^2} + (k_c + k_k)\,\psi\right), \tag{3.183}$$

$$\overline{\beta}_{32} = -G_s k_c\frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.184}$$

$$\overline{\beta}_{13} = k_c\frac{d}{dr}\left(EI\frac{d^2\psi}{dr^2} + P\psi\right), \tag{3.185}$$

$$\overline{\beta}_{23} = -EIk_c\frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.186}$$

$$\overline{\beta}_{33} = -G_s\frac{d}{dr}\left(EI\frac{d^4\psi}{dr^4} + P\frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c\psi\right). \tag{3.187}$$

O vetor de carga $\left\{\overline{f}\right\}$ para um carregamento uniformemente distribuído, fica:

$$\left\{\overline{f}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} \overline{f}_{w_a} & \overline{f}_{dw_a} & \overline{f}_{v_a} \end{array}\right]^T, \tag{3.188}$$

onde

$$\overline{f}_{w_a} = \int_0^{x_a} g(x)\overline{\beta}_{11}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g(x)\overline{\beta}_{11}(L-x)dx, \tag{3.189}$$

$$\overline{f}_{dw_a} = \int_0^{x_a} g(x)\overline{\beta}_{21}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g(x)\overline{\beta}_{21}(L-x)dx, \tag{3.190}$$

$$\overline{f}_{v_a} = \int_0^{x_a} g(x)\overline{\beta}_{31}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g(x)\overline{\beta}_{31}(L-x)dx. \tag{3.191}$$

Considerando que o carregamento seja uniformemente distribuído, então:

$$\overline{f}_{w_a} = g\left[-EIG_sI_{d_5} + \left(EI\left(k_c + k_k\right) - PG_s\right)I_{d_3} + P\left(k_c + k_k\right)I_{d_1}\right], \tag{3.192}$$

$$\overline{f}_{dw_a} = g\left(EIG_sI_{d_4} - EIk_c + k_kI_{d_2}\right), \tag{3.193}$$

$$\overline{f}_{v_a} = -g \cdot G_sk_cI_{d_1}. \tag{3.194}$$

Caso o carregamento seja pontual ($p$):

$$\overline{f}_{w_a} = p\left[-EIG_s\frac{d^5\psi}{dr^5} + \left(EI\left(k_c+k_k\right) - PG_s\right)\frac{d^3\psi}{dr^3} + P\left(k_c+k_k\right)d\right]S, \quad (3.195)$$

$$\overline{f}_{dw_a} = p\left(EIG_s\frac{d^4\psi}{dr^4} - EIk_c + k_k\frac{d^2\psi}{dr^2}\right), \quad (3.196)$$

$$\overline{f}_{v_a} = -p\left(G_sk_c\frac{d\psi}{dr}\right)S. \quad (3.197)$$

onde $x_p$ corresponde ao ponto de aplicação da carga, $r_p = |x_p - x_a|$, $S = \begin{cases} -1 \text{ se } x_p < x_a \\ 1 \text{ se } x_p > x_a \end{cases}$.

## 3.2 Nas hipóteses de Timoshenko

### 3.2.1 O Problema Fundamental

O problema fundamental considerando a teoria de Timoshenko pode ser observado na figura 3.4, onde a viga e a camada cisalhante, além de possuírem domínio infinito, estão submetidas a fontes concentradas em força e momento. Por simplificação, os deslocamentos ou esforços fundamentais serão representados apenas pela letra e asterisco, sem as variáveis ($y^{*f}(x,\widehat{x}) = y^{*f}$).

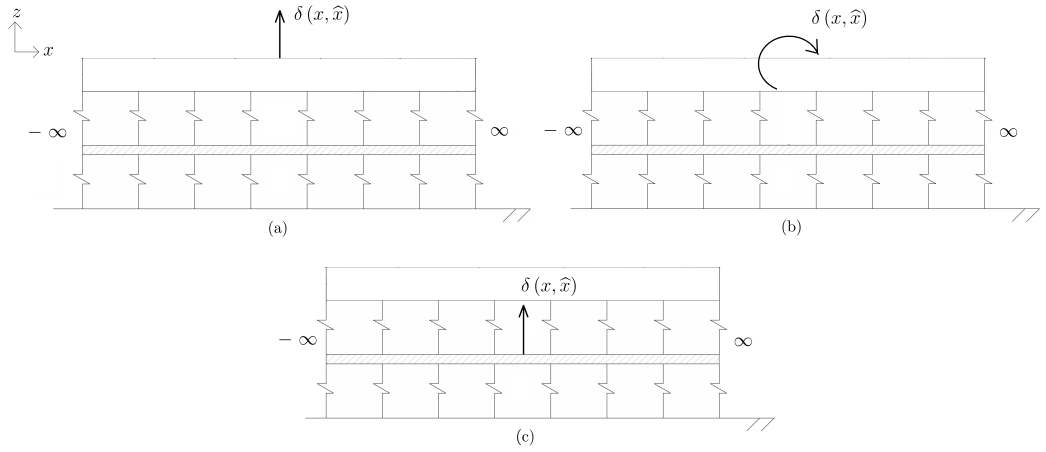



FIGURA 3.4 – Problema fundamental da viga de Timoshenko sobre camada elástica de Kerr para ativação da fonte em força (a) e momento (b) na viga, e em força na camada cisalhante (c).

Sendo a equação governante do problema fundamental análoga ao problema real,

eqs.(2.105) a (2.107), para ativação em força na viga, a seguinte equação é produzida:

$$-D_1\left(\frac{d\phi^{*g}}{dx}+\frac{d^2w^{*g}}{dx^2}\right)+k_c\left(w^{*g}-v^{*g}\right)+P\frac{d^2w^{*g}}{dx^2}=\delta\left(x,\widehat{x}\right), \tag{3.198}$$

$$D_1\left(\phi^{*g}+\frac{dw^{*g}}{dx}\right)-D_2\frac{d^2\phi^{*g}}{dx^2}=0, \tag{3.199}$$

$$-k_c\left(w^{*g}-v^{*g}\right)-G_s\frac{d^2v^{*g}}{dx^2}+k_kv^{*g}=0, \tag{3.200}$$

onde $D_1=\kappa GA$ e $D_2=EI$.

Considerando a fonte concentrada em momento na viga, obtêm-se

$$-D_1\frac{d\phi^{*m}}{dx}+\left(P-D_1\right)\frac{d^2w^{*m}}{dx^2}+k_c\left(w^{*m}-v^{*m}\right)=0, \tag{3.201}$$

$$D_1\left(\phi^{*m}+\frac{dw^{*m}}{dx}\right)-D_2\frac{d^2\phi^{*m}}{dx^2}=\delta\left(x,\widehat{x}\right), \tag{3.202}$$

$$-k_c\left(w^{*m}-v^{*m}\right)-G_s\frac{d^2v^{*m}}{dx^2}+k_kv^{*m}=0. \tag{3.203}$$

Já para ativação da fonte em força na camada cisalhante, tem-se:

$$-D_1\left(\frac{d\phi^{*k}}{dx}+\frac{d^2w^{*k}}{dx^2}\right)+k_c\left(w^{*k}-v^{*k}\right)+P\frac{d^2w^{*k}}{dx^2}=0, \tag{3.204}$$

$$D_1\left(\phi^{*k}+\frac{dw^{*k}}{dx}\right)-D_2\frac{d^2\phi^{*k}}{dx^2}=0, \tag{3.205}$$

$$-k_c\left(w^{*k}-v^{*k}\right)-G_s\frac{d^2v^{*k}}{dx^2}+k_kv^{*k}=\delta\left(x,\widehat{x}\right). \tag{3.206}$$

Reescrevendo as eqs.(3.200) a (3.206) na forma matricial, obtêm-se:

$$\left[\begin{array}{ccc}\left(P-D_1\right)\frac{d^2}{dx^2}+k_c & -D_1\frac{d}{dx} & -k_c\\ D_1\frac{d}{dx} & D_1-D_2\frac{d^2}{dx^2} & 0\\ -k_c & 0 & k_c+k_k-G_s\frac{d^2}{dx^2}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{ccc}w^{*g} & w^{*m} & w^{*k}\\ \phi^{*g} & \phi^{*m} & \phi^{*k}\\ v^{*g} & v^{*m} & v^{*k}\end{array}\right\}=$$

$$\delta\left(x,\widehat{x}\right)\left\{\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right\}, \tag{3.207}$$

que ainda pode ser escrita na forma compacta como:

$$[B]\,[G]=\delta\left(x,\widehat{x}\right)[I], \tag{3.208}$$

onde $[B]$ é a matriz dos operadores, $[G]$ é a matriz de influência dos deslocamentos e $[I]$ é a matriz identidade. Por meio do método de Hörmander (1963), obtém-se a equação

diferencial equivalente desacoplada em função do escalar $\psi$:

$$\frac{d^6\psi}{dx^6} + \alpha\frac{d^4\psi}{dx^4} + \beta\frac{d^2\psi}{dx^2} + \gamma = -\frac{\delta\left(x,\widehat{x}\right)}{\left(D_1 - P\right)D_2G_s}, \tag{3.209}$$

onde: $\alpha = -\dfrac{D_1^2 - D_2k_c}{\left(P - D_1\right)D_2} - \left(\dfrac{D_1}{D_2} - \dfrac{k_c + k_k}{G_s}\right)$, $\beta = \dfrac{-\left(D_1G_s + D_2k_k\right)k_c + P\left(k_c + k_k\right)D_1}{\left(P - D_1\right)D_2G_s}$, $\gamma = \dfrac{kD_1k_c}{\left(P - D_1\right)D_2G_s}$. Da eq.(3.209), escreve-se a equação característica associada a forma homogênea

$$\alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \zeta = 0, \tag{3.210}$$

sendo $\frac{d^2\psi}{dx^2} = y$.

Note que, assim como apresentado na teoria de Euler-Bernoulli, seção 3.1.1, a função $\psi$ será dada em função dos valores e natureza das raízes da equação do terceiro grau, eq.(3.210), obtidas por meio das eqs.(3.15) a (3.17), onde, de modo geral, três situações podem ocorrer: $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$.

Com isso, a solução fundamental desacoplada $\psi$ será dada por:

$$\psi = C_1f_1(r) + C_2f_2(r) + C_3f_3(r), \tag{3.211}$$

cujas funções $f_i$ serão dadas conforme tabela 3.1.

A seguir, são apresentadas explicitamente as soluções fundamentais para os casos mais usuais na prática.

**Uma raiz real positiva e duas raízes complexas e conjugadas**

Considere que a raiz $y_1$ é real e positiva, enquanto que as raízes $y_2$ e $y_3$ são complexas e conjugadas. Para esse caso, a solução fundamental proposta será dada por:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{y_1}\eta_t}e^{-\sqrt{y_1}r} + \frac{q^2 - 3p^2 + y_1}{2p\left(p^2 + q^2\right)\eta_t}e^{-p\cdot r}cos(q\cdot r) + \frac{3q^2 - p^2 + y_1}{2q\left(p^2 + q^2\right)\eta_t}e^{-p\cdot r}sen(q\cdot r), \tag{3.212}$$

onde $\eta_t = 2\left(D_1 - P\right)D_2G_s\left(y_1 - 2p\sqrt{y_1} + p^2 + q^2\right)\left(y_1 + 2p\sqrt{y_1} + p^2 + q^2\right)$, e ainda

$$\begin{aligned} p &= |Re\sqrt{y_3}| = |Re\sqrt{y_4}|, \\ q &= |Im\sqrt{y_3}| = |Im\sqrt{y_4}|, \\ a &= p^2 - q^2, \\ b &= 2pq, \end{aligned} \tag{3.213}$$

sendo $Re$ a parte real e $Im$ imaginária das raízes complexas.

**Três raízes reais e positivas**

Considerando agora que as três raízes são reais e positivas, a solução proposta será:

$$\psi = \frac{1}{Y_t}\left[\frac{(y_2-y_3)}{\sqrt{y_1}}e^{-r\sqrt{y_1}} - \frac{(y_1-y_3)}{\sqrt{y_2}}e^{-r\sqrt{y_2}} + \frac{(y_1-y_2)}{\sqrt{y_3}}e^{-r\sqrt{y_3}}\right]. \quad (3.214)$$

sendo $Y_t = 2\left(D_1 - P\right)D_2G_s\left(y_1-y_2\right)\left(y_2-y_3\right)\left(y_1-y_3\right)$.

De posse da solução fundamental desacoplada ($\psi$), parte-se para a obtenção das soluções fundamentais em deslocamentos e esforços para a viga de Timoshenko sobre camada elástica de Kerr. Da equação (3.10) são obtidas as soluções fundamentais em deslocamento:

$$w^{*g}(x,\widehat{x}) = D_2G_s\frac{d^4\psi}{dr^4} - \left[(k_c+k_k)D_2 + D_1G_s\right]\frac{d^2\psi}{dr^2} + D_1\left(k_c+k_k\right)\psi, \quad (3.215)$$

$$\phi^{*g}(x,\widehat{x}) = \left[D_1G_s\frac{d^3\psi}{dr^3} - D_1\left(k_c+k_k\right)\frac{d\psi}{dr}\right]sgn(x,\widehat{x}), \quad (3.216)$$

$$v^{*g}(x,\widehat{x}) = -D_2k_c\frac{d^2\psi}{dr^2} + k_cD_1\psi, \quad (3.217)$$

$$w^{*m}(x,\widehat{x}) = -\phi^{*g}(x,\widehat{x}), \quad (3.218)$$

$$\phi^{*m}(x,\widehat{x}) = G_s\left(D_1-P\right)\frac{d^4\psi}{dr^4} + \left[\left(k_c+k_k\right)P - k_cG_s - D_1\left(k_k+k_c\right)P\right]\frac{d^2\psi}{dr^2}+, \quad +k_ck_k\psi, \quad (3.219)$$

$$v^{*m}(x,\widehat{x}) = k_cD_1\frac{d\psi}{dr}\cdot sgn(x,\widehat{x}), \quad (3.220)$$

$$w^{*k}(x,\widehat{x}) = v^{*g}(x,\widehat{x}), \quad (3.221)$$

$$\phi^{*k}(x,\widehat{x}) = -v^{*m}(x,\widehat{x}), \quad (3.222)$$

$$v^{*k}(x,\widehat{x}) = D_2\left(D_1-P\right)\frac{d^4\psi}{dr^4} + \left(D_1P - k_cD_2\right)\frac{d^2\psi}{dr^2} + k_cD_1\psi. \quad (3.223)$$

As soluções fundamentais em esforços são dadas de forma análoga aos esforços do

problema real, eqs.(2.57) e (2.59). Dessa forma, tem-se:

$$V^{*g}(x,\widehat{x}) = \left[D_1 D_2 G_s \frac{d^5\psi}{dr^5} - D_1 D_2 \left(k_c + k_k\right) \frac{d^3\psi}{dr^3}\right] sgn(x,\widehat{x}), \tag{3.224}$$

$$M^{*g}(x,\widehat{x}) = D_1 D_2 G_s \frac{d^4\psi}{dr^4} - D_1 D_2 \left(k_c + k_k\right) \frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.225}$$

$$V_k^{*g}(x,\widehat{x}) = \left(-k_c D_2 G_s \frac{d^3\psi}{dr^3} + k_c D_1 G_s \frac{d\psi}{dr}\right) sgn(x,\widehat{x}), \tag{3.226}$$

$$V^{*m}(x,\widehat{x}) = -D_1 G_s P \frac{d^4\psi}{dr^4} + D_1 \left[\left(k_c + k_k\right) - k_c G_s\right] \frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c k_k D_1 \psi, \tag{3.227}$$

$$M^{*m}(x,\widehat{x}) = \left\{D_2 G_s \left(k_c + k_k\right) \frac{d^5\psi}{dr^5} - D_2 \left[D_1 \left(k_c + k_k\right) + k_c G_s - \left(k_c + k_k\right) P\right] \frac{d^3\psi}{dr^3} + \right.$$
$$\left. + D_2 k_c k_k \frac{d\psi}{dr}\right\} sgn(x,\widehat{x}), \tag{3.228}$$

$$V_k^{*m}(x,\widehat{x}) = k_c D_1 G_s \frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.229}$$

$$V^{*k}(x,\widehat{x}) = -k_c D_1 D_2 \frac{d^3\psi}{dr^3} \cdot sgn(x,\widehat{x}), \tag{3.230}$$

$$M^{*k}(x,\widehat{x}) = -k_c D_1 D_2 \frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.231}$$

$$V_k^{*k}(x,\widehat{x}) = \left[D_2 G_s \left(D_1 - P\right) \frac{d^5\psi}{dr^5} - G_s \left(k_c D_2 - D_1 P\right) \frac{d^3\psi}{dr^3} + \right.$$
$$\left. + k_c D_1 G_s \frac{d\psi}{dr}\right] sgn(x,\widehat{x}). \tag{3.232}$$

As derivadas em $r$ presentes das expressões acima, para os dois principais casos considerados anteriormente, são apresentadas abaixo. Considerando uma raiz real positiva e

duas complexas conjugadas, as derivadas em $r$ são:

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{1}{\eta_t}e^{-r\sqrt{y_1}} + \frac{1}{\eta_t b}\left[bcos(qr) + (a-y_1)\,sen(qr)\right]e^{-pr}, \tag{3.233}$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{\sqrt{y_1}}{\eta_t}e^{-r\sqrt{y_1}} + \frac{1}{\eta_t b}\left[-p\,(c-y_1)\,sen(qr) - q\,(c+y_1)\,cos(qr)\right]e^{-pr}, \tag{3.234}$$

$$\frac{d^3\psi}{dr^3} = -\frac{y_1}{\eta_t}e^{-r\sqrt{y_1}} + \frac{1}{\eta_t b}\left[y_1 bcos(qr) + \left(c^2 - y_1 a\right)sen(qr)\right]e^{-pr}, \tag{3.235}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^4\psi}{dr^4} = {} & \frac{y_1^{\frac{3}{2}}}{\eta_t}e^{-r\sqrt{y_1}} + \frac{1}{\eta_t b}\left[q\left(c^2 + y_1\left(q^2 - 3p^2\right)\right)cos(qr) + \right. \\ & \left. -p\left(c^2 - y_1\left(p^2 - 3q^2\right)\right)sen(qr)\right]e^{-pr},\end{aligned} \tag{3.236}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^5\psi}{dr^5} = {} & -\frac{y_1^2}{\eta_t}e^{-r\sqrt{y_1}} + \frac{1}{\eta_t b}\left[b\left(-c^2 + 2ay_1\right)cos(qr) + \right. \\ & \left.\left(ac^2 - y_1\left(a^2 - b^2\right)\right)sen(qr)\right]e^{-pr},\end{aligned} \tag{3.237}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^6\psi}{dr^6} = {} & \frac{y_1^{\frac{5}{2}}}{\eta_t}e^{-r\sqrt{y_1}} + \frac{1}{\eta_t b}\left[-q\left(\left(q^2 - 3p^2\right)c^2 + y_1\left(5a^2 - q^4\right)\right)cos(qr) + \right. \\ & \left. -p\left(\left(p^2 - 3q^2\right)c^2 - y_1\left(5a^2 - p^4\right)\right)sen(qr)\right]e^{-pr},\end{aligned} \tag{3.238}$$

onde $c = p^2 + q^2$.

Já as derivadas considerando as três raízes reais e positivas, são dadas por:

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{Y_t}\left[-\left(y_2 - y_3\right)e^{-r\sqrt{y_1}} + \left(y_1 - y_3\right)e^{-r\sqrt{y_2}} - \left(y_1 - y_2\right)e^{-r\sqrt{y_3}}\right], \tag{3.239}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{dr^2} = {} & \frac{1}{Y_t}\left[\sqrt{y_1}\left(y_2 - y_3\right)e^{-r\sqrt{y_1}} - \sqrt{y_2}\left(y_1 - y_3\right)e^{-r\sqrt{y_2}} + \right. \\ & \left. +\sqrt{y_3}\left(y_1 - y_2\right)e^{-r\sqrt{y_3}}\right],\end{aligned} \tag{3.240}$$

$$\frac{d^3\psi}{dr^3} = \frac{1}{Y_t}\left[-y_1\left(y_2 - y_3\right)e^{-r\sqrt{y_1}} + y_2\left(y_1 - y_3\right)e^{-r\sqrt{y_2}} - y_3\left(y_1 - y_2\right)e^{-r\sqrt{y_3}}\right], \tag{3.241}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^4\psi}{dr^4} = {} & \frac{1}{Y_t}\left[y_1\sqrt{y_1}\left(y_2 - y_3\right)e^{-r\sqrt{y_1}} - y_2\sqrt{y_2}\left(y_1 - y_3\right)e^{-r\sqrt{y_2}} + \right. \\ & \left. +y_3\sqrt{y_3}\left(y_1 - y_2\right)e^{-r\sqrt{y_3}}\right],\end{aligned} \tag{3.242}$$

$$\frac{d^5\psi}{dr^5} = \frac{1}{Y_t}\left[-y_1^2\left(y_2 - y_3\right)e^{-r\sqrt{y_1}} + y_2^2\left(y_1 - y_3\right)e^{-r\sqrt{y_2}} - y_3^2\left(y_1 - y_2\right)e^{-r\sqrt{y_3}}\right], \tag{3.243}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^6\psi}{dr^6} = {} & \frac{1}{Y_t}\left[y_1^2\sqrt{y_1}\left(y_2 - y_3\right)e^{-r\sqrt{y_1}} - y_2^2\sqrt{y_2}\left(y_1 - y_3\right)e^{-r\sqrt{y_2}} + \right. \\ & \left. +y_3^2\sqrt{y_3}\left(y_1 - y_2\right)e^{-r\sqrt{y_3}}\right].\end{aligned} \tag{3.244}$$

### 3.2.2 Equação Integral

Para a solução do problema, as equações diferenciais governante do problema serão transformadas em equações integrais equivalentes por meio do MRP, onde a função ponderadora corresponderá às soluções fundamentais.

A primeira equação integral obtida correspondente a ativação da fonte em força na viga, dada por:

$$\int_0^L \left[-D_1\left(\frac{d\phi^{*g}}{dx}+\frac{d^2w^{*g}}{dx^2}\right)+k_c\left(w^{*g}-v^{*g}\right)+P\frac{d^2w^{*g}}{dx^2}\right]w^{*g}dx+$$
$$+\int_0^L\left[D_1\left(\phi^{*g}+\frac{dw^{*g}}{dx}\right)-D_2\frac{d^2\phi^{*g}}{dx^2}\right]\phi^{*g}+$$
$$+\int_0^L\left[-k_c\left(w^{*g}-v^{*g}\right)-G_s\frac{d^2v^{*g}}{dx^2}+k_kv^{*g}\right]v^{*g}=0. \tag{3.245}$$

Resolvendo as integrais da eq.(3.245) por partes e após convenientes manipulações, chega-se a:

$$[V^{*g}w]_0^L-\left[P\frac{dw^{*g}}{dx}w\right]_0^L+[M^{*g}\phi]_0^L+[V_k^{*g}v]_0^L-[w^{*g}V]_0^L+\left[Pw^{*g}\frac{dw}{dx}\right]_0^L-[\phi^{*g}M]_0^L+$$
$$-[v^{*g}V_k]_0^L+\int_0^L\left[-D_1\left(\frac{d\phi^{*g}}{dx}+\frac{d^2w^{*g}}{dx^2}\right)+k_c\left(w^{*g}-v^{*g}\right)+P\frac{d^2w^{*g}}{dx^2}\right]wdx+$$
$$+\int_0^L\left[D_1\left(\phi^{*g}+\frac{dw*g}{dx}\right)-D_2\frac{d^2\phi^{*g}}{dx^2}\right]\phi dx+\int_0^L\left[k_c\left(v^{*g}-w^{*g}\right)+\right.$$
$$\left.-G_s\frac{d^2v^{*g}}{dx^2}+k_kv^{*g}\right]vdx-\int_0^L\left(gw^{*g}+m\phi^{*g}\right)dx=0, \tag{3.246}$$

onde, por meio da eq.(3.207), tem-se:

$$\int_0^L\left[-D_1\left(\frac{d\phi^{*g}}{dx}+\frac{d^2w^{*g}}{dx^2}\right)+k_c\left(w^{*g}-v^{*g}\right)+P\frac{d^2w^{*g}}{dx^2}\right]w(x)dx=$$
$$\int_0^L\delta\left(x,\widehat{x}\right)w(x)dx=w(\widehat{x}), \tag{3.247}$$

e

$$\int_0^L\left[D_1\left(\phi^{*g}+\frac{dw*g}{dx}\right)-D_2\frac{d^2\phi^{*g}}{dx^2}\right]\phi dx=0, \tag{3.248}$$
$$\int_0^L\left[k_c\left(v^{*g}-w^{*g}\right)-G_s\frac{d^2v^{*g}}{dx^2}+k_kv^{*g}\right]vdx=0. \tag{3.249}$$

Assim, por meio das eqs.(3.246),(3.247), (3.248) e (3.249), obtém-se a equação integral dos deslocamentos na viga em pontos do domínio:

$$w(\widehat{x})+[V^{*g}w]_0^L+[V_k^{*g}v]_0^L=[w^{*g}V]_0^L+$$
$$-\left[Pw^{*g}\frac{dw}{dx}\right]_0^L+[\phi^{*g}M]_0^L+[v^{*g}V_k]_0^L+\int_0^L\left(gw^{*g}+m\phi^{*g}\right)dx. \tag{3.250}$$

Seguindo o mesmo procedimento de obtenção da eq.(3.250), obtém-se a equação integral para cálculo das rotações em um ponto no domínio

$$\begin{aligned}\phi(\widehat{x}) + [V^{*m}w]_0^L + [M^{*m}\phi]_0^L + [V_k^{*m}v]_0^L = [w^{*m}V]_0^L + \\ - \left[Pw^{*m}\frac{dw}{dx}\right]_0^L + [\phi^{*m}M]_0^L + [v^{*m}V_k]_0^L + \int_0^L (gw^{*m} + m\phi^{*m})\,dx,\end{aligned} \tag{3.251}$$

e ainda, a equação integral para deslocamentos na camada cisalhante

$$\begin{aligned}v(\widehat{x}) + \left[V^{*k}w\right]_0^L + \left[M^{*k}\phi\right]_0^L + \left[V_k^{*k}v\right]_0^L = \left[w^{*k}V\right]_0^L + \\ - \left[Pw^{*k}\frac{dw}{dx}\right]_0^L + \left[\phi^{*k}M\right]_0^L + \left[v^{*k}V_k\right]_0^L + \int_0^L \left(gw^{*k} + m\phi^{*k}\right)dx.\end{aligned} \tag{3.252}$$

Agrupando as eqs.(3.250), (3.251) e (3.252) e reescrevendo na forma matricial, tem-se:

$$\begin{aligned}&\left\{\begin{array}{c} w(\widehat{x}) \\ \phi(\widehat{x}) \\ v(\widehat{x}) \end{array}\right\} + \left\{\left[\begin{array}{ccc} V^{*g}(x,\widehat{x}) & M^{*g}(x,\widehat{x}) & V_k^{*g}(x,\widehat{x}) \\ V^{*m}(x,\widehat{x}) & M^{*m}(x,\widehat{x}) & V_k^{*m}(x,\widehat{x}) \\ V^{*k}(x,\widehat{x}) & M^{*k}(x,\widehat{x}) & V_k^{*k}(x,\widehat{x}) \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} w(x) \\ \phi(x) \\ v(x) \end{array}\right\}\right\}_{x=0}^{x=L} = \\ &\left\{\left[\begin{array}{ccc} w^{*g}(x,\widehat{x}) & \phi^{*g}(x,\widehat{x}) & v^{*g}(x,\widehat{x}) \\ w^{*m}(x,\widehat{x}) & \phi^{*m}(x,\widehat{x}) & v^{*m}(x,\widehat{x}) \\ w^{*k}(x,\widehat{x}) & \phi^{*k}(x,\widehat{x}) & v^{*k}(x,\widehat{x}) \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} V(x) \\ M(x) \\ V_k(x) \end{array}\right\}\right\}_{x=0}^{x=L} + \\ &+ \int_0^L \left[\begin{array}{cc} w^{*g}(x,\widehat{x}) & \phi^{*g}(x,\widehat{x}) \\ w^{*m}(x,\widehat{x}) & \phi^{*m}(x,\widehat{x}) \\ w^{*k}(x,\widehat{x}) & \phi^{*k}(x,\widehat{x}) \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} g(x) \\ m(x) \end{array}\right\}dx.\end{aligned} \tag{3.253}$$

### 3.2.3 Equações Algébricas

Para obter a equação algébrica é necessário reescrever a equação integral, eq.(3.253), colocando o ponto fonte nas extremidades do elemento: no contorno à esquerda, fazendo $\widehat{x} \to 0 = \lim_{\xi\to 0}(0+\xi)$, e no contorno à direita, $\widehat{x} \to L = \lim_{\xi\to 0}(L-\xi)$. Dessa forma, obtém-se a equação algébrica:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\}, \tag{3.254}$$

onde $[H]$ e $[G]$ são as matrizes de influência, $\{f\}$ é o vetor de carga, $\{u\}$ é o vetor dos deslocamentos e $\{p\}$ é o vetor das solicitações internas. Os vetores $u$ e $p$ são:

$$\{u\} = \left\{\begin{array}{cccccc} w(0) & \phi_1(0) & v(0) & w(L) & \phi_1(L) & v(L) \end{array}\right\}^T, \tag{3.255}$$

$$\{p\} = \left\{ \begin{array}{cccccc} V(0) & M(0) & V_k(0) & V(L) & M(L) & V_k(L) \end{array} \right\}^T . \tag{3.256}$$

O elemento de contorno com seis graus de liberdade pode ser visto na figura 3.5, onde é definido os sentidos positivos dos esforços e deslocamentos. Note que, o giro do elemento é dado pelas rotações $\phi$, diferentemente do Euler-Bernoulli que é dado pela inclinação da elástica $dw/dx$, portanto, sentidos opostos.

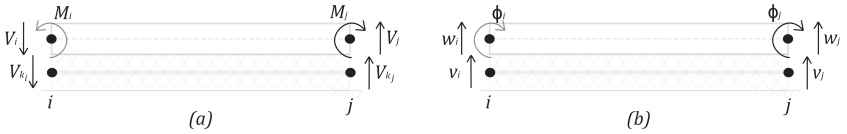



FIGURA 3.5 – Sentidos positivos dos deslocamentos.

A matriz de influência dos deslocamentos, $[H]$, pode ser escrita na seguinte forma:

$$[H] = \left[ \begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \\ \\ H_{21} & H_{22} \end{array} \right], \text{ com: } \begin{array}{rl} [H_{11}] = & -[N]\,,\ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ [H_{12}] = & [N]\,,\ para\ r = L\ e\ S = S_d \\ [H_{21}] = & -[N]\,,\ para\ r = L\ e\ S = S_a \\ [H_{22}] = & [N]\,,\ para\ r = 0\ e\ S = S_d \end{array} \tag{3.257}$$

sendo

$$[N] = \left[ \begin{array}{ccc} S.\eta_{11}(r) & \eta_{12}(r) & S.\eta_{13}(r) \\ \eta_{21}(r) & S.\eta_{22}(r) & \eta_{23}(r) \\ S.\eta_{31}(r) & \eta_{32}(r) & S.\eta_{33}(r) \end{array} \right], \tag{3.258}$$

onde, $S_a$ e $S_d$ representa a função sinal para $x < \widehat{x}$ e $x > \widehat{x}$, respectivamente, e os

coeficientes $\eta$ são obtidos a partir dos esforços fundamentais:

$$\eta_{11}(r) = D_2 G_s \left(D_1 - P\right) \frac{d^5\psi}{dr^5} + \left[-D_2 \left(k_c + k_k\right)\left(D_1 - P\right) + D_1 G_s \left(P - 2D_1\right)\right] \frac{d^3\psi}{dr^3} + \\ -D_1 \left(k_c + k_k\right)\left(P - 2D_1\right) \frac{d\psi}{dr}, \tag{3.259}$$

$$\eta_{12}(r) = -k_c D_1 G_s \frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c k_k D_1 \psi, \tag{3.260}$$

$$\eta_{13}(r) = k_c D_2 P \frac{d^3\psi}{dr^3} - k_c D_1 D_2 \frac{d^3\psi}{dr^3} - k_c D_1 P \frac{d\psi}{dr}, \tag{3.261}$$

$$\eta_{21}(r) = D_1 D_2 G_s \frac{d^4\psi}{dr^4} - D_1 D_2 \left(k_c + k_k\right) \frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.262}$$

$$\eta_{22}(r) = D_2 G_s \left(D_1 - P\right) \frac{d^5\psi}{dr^5} - D_2 \left[\left(k_c + k_k\right)\left(D_1 - P\right) + D_2 k_c G_s\right] \frac{d^3\psi}{dr^3} + \\ +D_2 k_c k_k \frac{d\psi}{dr}, \tag{3.263}$$

$$\eta_{23}(r) = -D_2 k_c D_1 \frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.264}$$

$$\eta_{31}(r) = -k_c D_2 G_s \frac{d^3\psi}{dr^3} + k_c D_1 G_s \frac{d\psi}{dr}, \tag{3.265}$$

$$\eta_{32}(r) = G_s k_c D_1 \frac{d^2\psi}{dr^2}, \tag{3.266}$$

$$\eta_{33}(r) = D_2 G_s \left(D_1 - P\right) \frac{d^5\psi}{dr^5} - G_s \left(k_c D_2 - D_1 P\right) \frac{d^3\psi}{dr^3} + k_c D_1 G_s \frac{d\psi}{dr}. \tag{3.267}$$

Já a matriz de influência dos esforços, $[G]$, fica:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, \text{ com: } \begin{array}{l} [G_{11}] = -[Q], \ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ [G_{12}] = \ [Q], \ para\ r = L\ e\ S = S_d \\ [G_{21}] = -[Q], \ para\ r = L\ e\ S = S_a \\ [G_{22}] = \ [Q], \ para\ r = 0\ e\ S = S_d, \end{array} \tag{3.268}$$

sendo

$$[Q] = \begin{bmatrix} \beta_{11}(r) & -S.\beta_{12}(r) & \beta_{13}(r) \\ -S.\beta_{21}(r) & \beta_{22}(r) & -S.\beta_{23}(r) \\ \beta_{31}(r) & -S.\beta_{32}(r) & \beta_{33}(r) \end{bmatrix}, \tag{3.269}$$

e os coeficientes $\beta$ são obtidos a partir dos deslocamentos fundamentais e suas derivadas:

$$\beta_{11}(r) = D_2 G_s \frac{d^4\psi}{dr^4} - \left[(k_c + k_k)D_2 + D_1 G_s\right] \frac{d^2\psi}{dr^2} + D_1 \left(k_c + k_k\right) \psi, \tag{3.270}$$

$$\beta_{12}(r) = D_1 G_s \frac{d^3\psi}{dr^3} - D_1 \left(k_c + k_k\right) \frac{d\psi}{dr}, \tag{3.271}$$

$$\beta_{13}(r) = -D_2 k_c \frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c D_1 \psi, \tag{3.272}$$

$$\beta_{21}(r) = -\beta_{12}(r), \tag{3.273}$$

$$\beta_{22}(r) = G_s \left(D_1 - P\right) \frac{d^4\psi}{dr^4} + \left[\left(k_c + k_k\right)\left(P - D_1\right) - k_c G_s\right] \frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c k_k \psi, \tag{3.274}$$

$$\beta_{23}(r) = k_c D_1 \frac{d\psi}{dr}, \tag{3.275}$$

$$\beta_{31}(r) = \beta_{13}(r), \tag{3.276}$$

$$\beta_{32}(r) = -\beta_{23}(r), \tag{3.277}$$

$$\beta_{33}(r) = D_2 \left(D_1 - P\right) \frac{d^4\psi}{dr^4} + \left(D_1 P - k_c D_2\right) \frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c D_1 \psi. \tag{3.278}$$

As forças do vetor de carga são dadas por:

$$\{f_g\} = \left[ \begin{array}{cccccc} f_{w_i} & f_{\phi_i} & f_{v_i} & f_{w_j} & f_{\phi_j} & f_{v_j} \end{array} \right]^T, \tag{3.279}$$

onde os coeficientes $\theta$ são:

$$f_{w_i} = \int_0^L g(x)\beta_{11}(x)dx, \tag{3.280}$$

$$f_{\phi_i} = \int_0^L g(x)\beta_{21}(x)dx, \tag{3.281}$$

$$f_{v_i} = \int_0^L g(x)\beta_{31}(x)dx, \tag{3.282}$$

$$f_{w_j} = \int_0^L g(x)\beta_{11}(L-x)dx, \tag{3.283}$$

$$f_{\phi_j} = \int_0^L g(x)\beta_{21}(L-x)dx, \tag{3.284}$$

$$f_{v_j} = \int_0^L g(x)\beta_{31}(L-x)dx. \tag{3.285}$$

Se o carregamento for considerado uniformemente distribuído, as forças do vetor de

carga serão dadas por:

$$f_{w_i} = g\left\{D_2 G_s I_{f_4} - \left[(k_c + k_k)D_2 + D_1 G_s\right] I_{f_2} + D_1 \left(k_c + k_k\right) I_{f_0}\right\}, \tag{3.286}$$

$$f_{\phi_i} = g\left[-D_1 G_s I_{f_3} + D_1 \left(k_c + k_k\right) I_{f_1}\right] Sd, \tag{3.287}$$

$$f_{v_i} = g\left(-D_2 k_c I_{f_2} + k_c D_1 I_{f_0}\right), \tag{3.288}$$

$$f_{w_j} = g\left\{D_2 G_s I_{f_4} - \left[(k_c + k_k)D_2 + D_1 G_s\right] I_{f_2} + D_1 \left(k_c + k_k\right) I_{f_0}\right\}, \tag{3.289}$$

$$f_{\phi_j} = g\left[-D_1 G_s I_{f_3} + D_1 \left(k_c + k_k\right) I_{f_1}\right] Sa, \tag{3.290}$$

$$f_{v_j} = g\left(-D_2 k_c I_{f_2} + k_c D_1 I_{f_0}\right). \tag{3.291}$$

onde $g$ representa a intensidade do carregamento e as constantes $I_{f_j}$ dadas segundo os valores das raízes. Se $y_1$ for real positiva e as duas outras complexas e conjugadas, tem-se:

$$I_{f_0} = \frac{1}{\eta_t y_1 c^2}\left(y_1\left(y_1 - 2a\right) - c^2\left(e^{-L\sqrt{y_1}} - 1\right)\right) - \frac{1}{\eta_t b c^2}\left(b\left(-2a + y_1\right) cos\left(qL\right) + \right.$$
$$\left. - \left(a^2 - b^2 - y_1 a\right) sin\left(qL\right)\right) e^{-pL}, \tag{3.292}$$

$$I_{f_1} = \frac{1}{\eta_t bc\sqrt{y_1}}\left(bc\left(e^{-L\sqrt{y_1}} - 1\right) - \sqrt{y_1} q\left(q^2 - 3p^2 + y_1\right)\right) + \frac{1}{\eta_t bc}\left(q\left(q^2 - 3p^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. v + y_1\right) cos\left(qL\right) + p\left(3q^2 - p^2 + y_1\right) sin\left(qL\right)\right) e^{-pL}, \tag{3.293}$$

$$I_{f_2} = \frac{1}{\eta_t b}\left(bcos\left(qL\right) + \left(a - y_1\right) sin\left(qL\right)\right) e^{-pL} - \frac{e^{-L\sqrt{y_1}}}{\eta_t}, \tag{3.294}$$

$$I_{f_3} = \frac{1}{\eta_t b}\left(b\sqrt{y_1}\left(e^{-L\sqrt{y_1}} - 1\right) + q\left(c + y_1\right)\right) + \frac{1}{\eta_t b}\left(-q\left(c + y_1\right) cos\left(qL\right) + \right.$$
$$\left. - p\left(c - y_1\right) sin\left(qL\right)\right) e^{-pL}, \tag{3.295}$$

$$I_{f_4} = \frac{1}{\eta_t b}(y_1 bcos(qL) + (c^2 - a y_1) sin(qL)) e^{-pL} - \frac{y_1 e^{-L\sqrt{y_1}}}{\eta_t}. \tag{3.296}$$

Caso as três raízes sejam reais e positivas, todas distintas, tem-se:

$$I_{f_0} = \frac{1}{2\left(P-D_1\right)\cdot D_2\cdot G_s}\left[-\frac{e^{-L\sqrt{y_1}}-1}{y_1\left(y_1-y_3\right)\left(y_1-y_2\right)}+\frac{e^{-L\sqrt{y_2}}-1}{y_2\left(y_2-y_3\right)\left(y_1-y_2\right)}+\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-L\sqrt{y_3}}-1}{y_3\left(y_2-y_3\right)\left(y_1-y_3\right)}\right], \tag{3.297}$$

$$I_{f_1} = \frac{1}{2\left(P-D_1\right)\cdot D_2\cdot G_s}\left[\frac{e^{-L\sqrt{y_1}}-1}{\sqrt{y_1}\left(y_1-y_2\right)\left(y_1-y_3\right)}-\frac{e^{-L\sqrt{y_2}}-1}{\sqrt{y_2}y_1-y_2\left(y_2-y_3\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-L\sqrt{y_3}}-1}{\sqrt{y_3}y_1-y_3\left(y_2-y_3\right)}\right], \tag{3.298}$$

$$I_{f_2} = \frac{1}{2\left(P-D_1\right)\cdot D_2\cdot G_s}\left[-\frac{e^{-L\sqrt{y_1}}-1}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_1-y_3\right)}+\frac{e^{-L\sqrt{y_2}}-1}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_2-y_3\right)}+\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-L\sqrt{y_3}}-1}{\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)}\right], \tag{3.299}$$

$$I_{f_3} = \frac{1}{2\left(P-D_1\right)\cdot D_2\cdot G_s}\left[\frac{\sqrt{y_1}\left(e^{-L\sqrt{y_1}}-1\right)}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_1-y_3\right)}+-\frac{\sqrt{y_2}\left(e^{-L\sqrt{y_2}}-1\right)}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_2-y_3\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{y_3}\left(e^{-L\sqrt{y_3}}-1\right)}{\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)}\right], \tag{3.300}$$

$$I_{f_4} = \frac{1}{2\left(P-D_1\right)\cdot D_2\cdot G_s}\left[-\frac{y_1\left(e^{-L\sqrt{y_1}}-1\right)}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_1-y_3\right)}+\frac{y_2\left(e^{-L\sqrt{y_2}}-1\right)}{\left(y_1-y_2\right)\left(y_2-y_3\right)}+\right.$$
$$\left.-\frac{y_3\left(e^{-L\sqrt{y_3}}-1\right)}{\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)}\right]. \tag{3.301}$$

Entretanto, se for considerado uma carga pontual de intensive $p$, que atua em um ponto $x_1$ qualquer na viga, o vetor de carga passa a ser dado por:

$$f_{w_i} = p\left\{D_2G_s\frac{d^4\psi}{dr^4}-\left[(k_c+k_k)D_2+D_1G_s\right]\frac{d^2\psi}{dr^2}+D_1\left(k_c+k_k\right)\psi\right\}, \tag{3.302}$$

$$f_{\phi_i} = p\left[-D_1G_s\frac{d^3\psi}{dr^3}+D_1\left(k_c+k_k\right)\frac{d\psi}{dr}\right]Sd, \tag{3.303}$$

$$f_{v_i} = p\left(-D_2k_c\frac{d^2\psi}{dr^2}+k_cD_1\psi\right), \tag{3.304}$$

$$f_{w_j} = p\left\{D_2G_s\frac{d^4\psi}{dr^4}-\left[(k_c+k_k)D_2+D_1G_s\right]\frac{d^2\psi}{dr^2}+D_1\left(k_c+k_k\right)\psi\right\}, \tag{3.305}$$

$$f_{\phi_j} = p\left[-D_1G_s\frac{d^3\psi}{dr^3}+D_1\left(k_c+k_k\right)\frac{d\psi}{dr}\right]Sa, \tag{3.306}$$

$$f_{v_j} = p\left(-D_2k_c\frac{d^2\psi}{dr^2}+k_cD_1\psi\right). \tag{3.307}$$

Da mesma forma, pode-se considerar um momento uniformemente distribuído atuando

ao longo da viga, com intensidade $m$, onde o vetor $\{f\}$ será dado por:

$$\{f_m\} = \left[ \begin{array}{cccccc} m_{w_i} & m_{\phi_i} & m_{v_i} & m_{w_j} & m_{\phi_j} & m_{v_j} \end{array} \right]^T, \tag{3.308}$$

onde:

$$m_{w_i} = \int_0^L m(x)\beta_{12}(x)dx, \tag{3.309}$$

$$m_{\phi_i} = \int_0^L m(x)\beta_{22}(x)dx, \tag{3.310}$$

$$m_{v_i} = \int_0^L m(x)\beta_{32}(x)dx, \tag{3.311}$$

$$m_{w_j} = \int_0^L m(x)\beta_{12}(L-x)dx, \tag{3.312}$$

$$m_{\phi_j} = \int_0^L m(x)\beta_{22}(L-x)dx, \tag{3.313}$$

$$m_{v_j} = \int_0^L m(x)\beta_{32}(L-x)dx. \tag{3.314}$$

Considerando que atue um momento uniformemente distribuído ($m$) na viga, as forças nodais do vetor de carga serão dadas por:

$$m_{w_i} = m\left[D_1 G_s I_{f_3} - D_1\left(k_c + k_k\right) I_{f_1}\right] Sd, \tag{3.315}$$

$$m_{\phi_i} = m\left\{G_s\left(D_1 - P\right) I_{f_4} + \left[\left(k_c + k_k\right)\left(P - D_1\right) - k_c G_s\right] I_{f_2} + k_c k_k I_{f_0}\right\}, \tag{3.316}$$

$$m_{v_i} = -m k_c D_1 I_{f_1} Sd, \tag{3.317}$$

$$m_{w_j} = m\left[D_1 G_s I_{f_3} - D_1\left(k_c + k_k\right) I_{f_1}\right] Sa, \tag{3.318}$$

$$m_{\phi_j} = m\left\{G_s\left(D_1 - P\right) I_{f_4} + \left[\left(k_c + k_k\right)\left(P - D_1\right) - k_c G_s\right] I_{f_2} + k_c k_k I_{f_0}\right\}, \tag{3.319}$$

$$m_{v_j} = -m k_c D_1 I_{f_1} Sa. \tag{3.320}$$

Caso um momento fletor atue em um ponto de coordenada $x_1$ na viga, o vetor de carga

$\{f\}$ passa a ser:

$$m_{w_i} = m_p \left[ D_1 G_s \frac{d^3\psi}{dr^3} - D_1 \left(k_c + k_k\right) \frac{d\psi}{dr} \right] Sd, \tag{3.321}$$

$$m_{\phi_i} = m_p \left\{ G_s \left(D_1 - P\right) \frac{d^4\psi}{dr^4} + \left[\left(k_c + k_k\right)\left(P - D_1\right) - k_c G_s\right] \frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c k_k \psi \right\} \tag{3.322}$$

$$m_{v_i} = -m_p k_c D_1 \frac{d\psi}{dr} Sd \tag{3.323}$$

$$m_{w_j} = m_p \left[ D_1 G_s \frac{d^3\psi}{dr^3} - D_1 \left(k_c + k_k\right) \frac{d\psi}{dr} \right] Sa, \tag{3.324}$$

$$m_{\phi_j} = m_p \left\{ G_s \left(D_1 - P\right) \frac{d^4\psi}{dr^4} + \left[\left(k_c + k_k\right)\left(P - D_1\right) - k_c G_s\right] \frac{d^2\psi}{dr^2} + k_c k_k \psi \right\} \tag{3.325}$$

$$m_{v_j} = -m_p k_c D_1 \frac{d\psi}{dr} Sa. \tag{3.326}$$

Cabe agora aplicar as condições de contorno à equação (3.254) para obter a solução em termos de deslocamentos e esforços no contorno do elemento.

#### 3.2.3.1 Determinação dos campos em deslocamentos no domínio

De posse dos deslocamentos e esforços no contorno e por meio da eq.(3.253), escreve-se a equação algébrica para determinação dos campos em deslocamentos e esforços em um ponto "$A$"situado no domínio, conforme apresentado na figura 3.6:

$$\left\{ \begin{array}{c} w(x_a) \\ \phi(x_a) \\ v(x_a) \end{array} \right\} + \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} V^{*g}(x,x_a) & M^{*g}(x,x_a) & V_k^{*g}(x,x_a) \\ V^{*m}(x,x_a) & M^{*m}(x,x_a) & V_k^{*m}(x,a) \\ V^{*k}(x,x_a) & M^{*k}(x,x_a) & V_k^{*k}(x,x_a) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w(x) \\ \phi(x) \\ v(x) \end{array} \right\} \right\}_{x=0}^{x=L} =$$

$$\left\{ \left[ \begin{array}{ccc} w^{*g}(x,x_a) & \phi^{*g}(x,x_a) & v^{*g}(x,x_a) \\ w^{*m}(x,x_a) & \phi^{*m}(x,x_a) & v^{*m}(x,x_a) \\ w^{*k}(x,x_a) & \phi^{*k}(x,x_a) & v^{*k}(x,x_a) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V(x) \\ M(x) \\ V_k(x) \end{array} \right\} \right\}_{x=0}^{x=L} +$$

$$+ \int_0^L \left[ \begin{array}{cc} w^{*g}(x,x_a) & \phi^{*g}(x,x_a) \\ w^{*m}(x,x_a) & \phi^{*m}(x,x_a) \\ w^{*k}(x,x_a) & \phi^{*k}(x,x_a) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} g(x) \\ m(x) \end{array} \right\} dx, \tag{3.327}$$

ou ainda na forma compacta como

$$\left\{ \begin{array}{c} w(x_a) \\ \phi(x_a) \\ v(x_a) \end{array} \right\} = -\left[H\right]\left\{u\right\} + \left[G\right]\left\{p\right\} + \left\{f\right\}, \tag{3.328}$$

sendo as matrizes e vetores com o sobrescrito $\widehat{\cdot}$ referidas ao domínio.

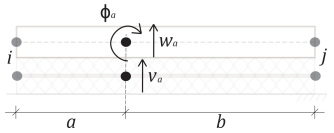



FIGURA 3.6 – Deslocamentos em um ponto $A$ no domínio das vigas.

A matriz de influência $[\widehat{H}]$ será dada por:

$$[H] = \left[ \begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \end{array} \right], \text{ com: } \begin{array}{l} [H_{11}] = -[N], \ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ [H_{12}] = \ \ [N], \ para\ r = L\ e\ S = S_d \end{array} \tag{3.329}$$

onde a submatriz $[N]$ será dada segundo eq.(3.258). Já a matriz de influência dos esforços, $[G]$, fica:

$$[G] = \left[ \begin{array}{cc} G_{11} & G_{12} \end{array} \right], \text{ com: } \begin{array}{l} [G_{11}] = -[Q], \ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ [G_{12}] = \ \ [Q], \ para\ r = L\ e\ S = S_d \end{array} \tag{3.330}$$

sendo a matriz $[Q]$ dada conforme eq.(3.269). Quanto ao vetor de carga $\{f\}$ para um carregamento qualquer distribuído $g\,(x)$ ao longo das vigas, tem-se:

$$\{f_g\} = \left[ \begin{array}{ccc} f_{w_a} & f_{\phi_a} & f_{v_a} \end{array} \right]^T, \tag{3.331}$$

onde os coeficientes $\theta$ são:

$$f_{w_a} = \int_0^{x_a} g\,(x)\,\beta_{11}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g\,(x)\,\beta_{11}(L-x)dx, \tag{3.332}$$

$$f_{\phi_a} = \int_0^{x_a} g\,(x)\,\beta_{21}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g\,(x)\,\beta_{21}(L-x)dx, \tag{3.333}$$

$$f_{v_a} = \int_0^{x_a} g\,(x)\,\beta_{31}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g\,(x)\,\beta_{31}(L-x)dx. \tag{3.334}$$

Para uma carga pontual $p$ que atua em um ponto $x_p$, o vetor de carga passa a ser dado por:

$$f_{w_a} = p\beta_{11}(r_p), \tag{3.335}$$

$$f_{\phi_a} = p\beta_{21}(r_p), \tag{3.336}$$

$$f_{v_a} = p\beta_{31}(r_p), \tag{3.337}$$

onde $r_p = |x_p - x_a|$. Importante lembrar que a função sinal terá valores $sgn(x_p, x_a) = \begin{cases} -1, \text{ se } x_p < x_a \\ 1, \text{ se } x_p > x_a \end{cases}$ a depender da coordenada de aplicação da força e medição do efeito.

Já para um momento fletor qualquer $m\,(x)$ aplicado sobre a viga, o vetor de carga

será:

$$\{f_m\} = \left[ \begin{array}{ccc} m_{w_a} & m_{\phi_a} & m_{v_a} \end{array} \right]^T, \tag{3.338}$$

onde:

$$m_{w_a} = \int_0^{x_a} m\left(x\right) \beta_{12}(x) dx + \int_{x_a}^{x_b} m\left(x\right) \beta_{12}(L-x) dx, \tag{3.339}$$

$$m_{\phi_a} = \int_0^{x_a} m\left(x\right) \beta_{22}(x) dx + \int_{x_a}^{x_b} m\left(x\right) \beta_{22}(L-x) dx, \tag{3.340}$$

$$m_{v_a} = \int_0^{L} x_a m\left(x\right) \beta_{32}(x) dx + \int_{x_a}^{x_b} m\left(x\right) \beta_{32}(L-x) dx. \tag{3.341}$$

Considerando que um momento fletor atue em um ponto $x_p$ na viga, o vetor de carga será:

$$m_{w_a} = \beta_{12}(r_p), \tag{3.342}$$

$$m_{\phi_a} = \beta_{22}(r_p), \tag{3.343}$$

$$m_{v_a} = \beta_{32}(r_p) \tag{3.344}$$

onde $r_p = |x_p - x_a|$ e a função sinal dada por $sgn(x_p, x_a) = \left\{ \begin{array}{c} -1, \text{ if } x_p < x_a \\ 1, \text{ if } x_p > x_a \end{array} \right.$.

#### 3.2.3.2 Determinação dos esforços no domínio

Para a determinação dos esforços em um ponto interno $(a)$, conforme figura 3.6, monta-se um novo sistema algébrico a partir das equações para momento fletor e esforço cortante, eqs.(2.102), (2.103) e (2.104), e ainda por meio da equação integral eq.(3.253). Dessa forma, fazendo as devidas derivadas em relação ao ponto fonte, escreve-se o sistema algébrico:

$$\left\{ \begin{array}{c} V(x_a) \\ M(x_a) \\ V_k(x_a) \end{array} \right\} = - \left[\overline{H}\right] \{u\} + \left[\overline{G}\right] \{p\} + \left\{\overline{f}\right\}, \tag{3.345}$$

onde os vetores $\{u\}$ e $\{p\}$ correspondem aos deslocamento e esforços no contorno, respectivamente, obtidos por meio das eqs.(3.255) e (3.256). A matriz de influência $\left[\overline{H}\right]$, terá a seguinte forma:

$$\left[\overline{H}\right] = \left[ \begin{array}{cc} \overline{H}_{11} & \overline{H}_{12} \end{array} \right], \text{ com: } \begin{array}{l} \left[\overline{H}_{11}\right] = \ -\left[\overline{N}\right], \ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ \left[\overline{H}_{12}\right] = \ \ \left[\overline{N}\right], \ para\ r = L\ e\ S = S_d \end{array} \tag{3.346}$$

sendo $\left[\overline{N}\right]$ é dada por:

$$\left[\overline{N}\right] = \begin{bmatrix} \overline{\eta}_{11}(r) & S.\overline{\eta}_{12}(r) & \overline{\eta}_{13}(r) \\ S.\overline{\eta}_{21}(r) & \overline{\eta}_{22}(r) & S.\overline{\eta}_{23}(r) \\ \overline{\eta}_{31}(r) & S.\overline{\eta}_{32}(r) & \overline{\eta}_{33}(r) \end{bmatrix}, \tag{3.347}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\eta}_{11} = \quad & \frac{d^2}{dr^2}\left(D_2\left(P-D_1\right)^2\frac{d^2}{dr^2} - D_1\left(P\left(P-D_1\right)+D_1D_2\right)\right)\left(-G_s\frac{d^2}{dr^2}\psi + k_c + k_k\psi\right), \\
\overline{\eta}_{21} = \quad & D_1D_2^2\frac{d^3}{dr^3}\left(-G_s\frac{d^2}{dr^2}\psi + k_c + k_k\psi\right), \\
\overline{\eta}_{31} = \quad & -G_s^2k_c\frac{d^2}{dr^2}\left(D_1\psi - D_2\frac{d^2\psi}{dr^2}\right), \\
\overline{\eta}_{12} = \quad & -D_1D_2G_s\left(P-D_1\right)\frac{d^5\psi}{dr^5} + \left(D_1D_2\left(P-D_1\right)\left(k_c+k_k\right) - G_sk_c\left(P-D_1+D_2\right)\right)\frac{d^3\psi}{dr^3} + \\
& + D_1k_ck_k\left(P-D_1+D_2\right)\frac{d\psi}{dr}, \\
\overline{\eta}_{22} = \quad & -D_2^2\frac{d^2}{dr^2}\left(-G_s\left(P-D_1\right)\frac{d^4\psi}{dr^4} + \left(\left(P-D_1\right)\left(k_c+k_k\right) - G_sk_c\right)\frac{d^2\psi}{dr^2} + k_ck_k\psi\right), \\
\overline{\eta}_{32} = \quad & -D_1G_s^2k_c\frac{d^3\psi}{dr^3}, \\
\overline{\eta}_{13} = \quad & k_c\frac{d^2}{dr^2}\left(D_2\left(P-D_1\right)^2\frac{d^2\psi}{dr^2} - D_1\left(P\left(P-D_1\right)+D_1D_2\right)\psi\right), \\
\overline{\eta}_{23} = \quad & D_1D_2^2k_c\frac{d^3\psi}{dr^3}, \\
\overline{\eta}_{33} = \quad & -G_s^2\frac{d^2}{dr^2}\left(-D_2\left(P-D_1\right)\frac{d^4\psi}{dr^4} + \left(PD_1 - D_2k_c\right)\frac{d^2\psi}{dr^2} + D_1k_c\psi\right).
\end{aligned} \tag{3.348}$$

Já a matriz de influência dos esforços, $[G]$, fica:

$$\left[\overline{G}\right] = \begin{bmatrix} \overline{G}_{11} & \overline{G}_{12} \end{bmatrix}, \text{ com: } \begin{array}{l} \left[\overline{G}_{11}\right] = -\left[\overline{Q}\right], \ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ \left[\overline{G}_{12}\right] = \left[\overline{Q}\right], \ para\ r = L\ e\ S = S_d \end{array} \tag{3.349}$$

onde $\left[\overline{Q}\right]$ é dada por:

$$\left[\overline{Q}\right] = \begin{bmatrix} S.\overline{\beta}_{11}(r) & \overline{\beta}_{12}(r) & S.\overline{\beta}_{13}(r) \\ \overline{\beta}_{21}(r) & S\overline{\beta}_{22}(r) & \overline{\beta}_{23}(r) \\ S.\overline{\beta}_{31}(r) & \overline{\beta}_{32}(r) & S.\overline{\beta}_{33}(r) \end{bmatrix}, \tag{3.350}$$

e os coeficientes $b$ conforme abaixo:

$$\begin{aligned}
\overline{\beta}_{11} = &\quad \frac{d}{dr}\left(D_2\left(D_1-P\right)\frac{d^2}{dr^2}+D_1\left(P-2D_1\right)\right)\left(-G_s\frac{d^2}{dr^2}\psi+k_c+k_k\psi\right),\\
\overline{\beta}_{21} = &\quad D_1D_2\frac{d^2}{dr^2}\left(-G_s\frac{d^2}{dr^2}\psi+\left(k_c+k_k\right)\psi\right),\\
\overline{\beta}_{31} = &\quad -G_sk_c\frac{d}{dr}\left(D_1\psi-D_2\frac{d^2\psi}{dr^2}\right),\\
\overline{\beta}_{12} = &\quad -2D_1G_s\left(P-D_1\right)\frac{d^4\psi}{dr^4}+D_1\left(2\left(P-D_1\right)\left(k_c+k_k\right)-G_sk_c\right)\frac{d^2\psi}{dr^2}+\\
&\quad +D_1k_ck_k\psi,\\
\overline{\beta}_{22} = &\quad D_2G_s\left(P-D_1\right)\frac{d^5\psi}{dr^5}-\left(D_2\left(P-D_1\right)\left(k_c+k_k\right)-G_sk_c\right)\frac{d^3\psi}{dr^3}-D_2k_ck_k\frac{d\psi}{dr},\\
\overline{\beta}_{32} = &\quad -D_1G_sk_c\frac{d^2\psi}{dr^2},\\
\overline{\beta}_{13} = &\quad k_c\frac{d}{dr}\left(-D_2\left(P-D_1\right)\frac{d^2\psi}{dr^2}+D_1\left(P-2D_1\right)\psi\right),\\
\overline{\beta}_{23} = &\quad D_1D_2k_c\frac{d^2\psi}{dr^2},\\
\overline{\beta}_{33} = &\quad G_sD_2\left(P-D_1\right)\frac{d^5\psi}{dr^5}-G_s\left(PD_1-D_2k_c\right)\frac{d^3\psi}{dr^3}-D_1G_sk_c\frac{d\psi}{dr}.
\end{aligned} \tag{3.351}$$

O vetor de carga $\{f\}$ para um carregamento qualquer $g\left(x\right)$ que atua ao longo da viga, é dado por:

$$\{f_g\}=\left[\begin{array}{ccc} f_{w_a} & f_{\phi_a} & f_{v_a}\end{array}\right]^T, \tag{3.352}$$

onde

$$f_{w_a}=\int_0^{x_a} g\left(x\right)\overline{\beta}_{11}(x)dx+\int_{x_a}^{x_b} g\left(x\right)\overline{\beta}_{11}(L-x)dx, \tag{3.353}$$

$$f_{\phi_a}=\int_0^{x_a} g\left(x\right)\overline{\beta}_{21}(x)dx+\int_{x_a}^{x_b} g\left(x\right)\overline{\beta}_{21}(L-x)dx, \tag{3.354}$$

$$f_{v_a}=\int_0^{x_a} g\left(x\right)\overline{\beta}_{31}(a)dx+\int_{x_a}^{x_b} g\left(x\right)\overline{\beta}_{31}(L-x)dx. \tag{3.355}$$

Para uma carga pontual $p$, tem-se:

$$\overline{\beta}_{11} = \quad p\cdot\frac{d}{dr}\left(D_2\left(D_1-P\right)\frac{d^2}{dr^2}+D_1\left(P-2D_1\right)\right)\left(-G_s\frac{d^2}{dr^2}\psi+k_c+k_k\psi\right) \tag{3.356}$$

$$\overline{\beta}_{21} = \quad p\cdot D_1D_2\frac{d^2}{dr^2}\left(-G_s\frac{d^2}{dr^2}\psi+\left(k_c+k_k\right)\psi\right), \tag{3.357}$$

$$\overline{\beta}_{31} = \quad -p\cdot G_sk_c\frac{d}{dr}\left(D_1\psi-D_2\frac{d^2\psi}{dr^2}\right). \tag{3.358}$$

# Capítulo 4

# O MEC em Vigas duplas conectadas

Neste capítulo, serão discutidos os problemas fundamentais dos sistemas de vigas duplas elasticamente conectadas por camada elástica de Kerr nas teoria de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko. As soluções fundamentais serão propostas para cada caso. As equações integrais serão obtidas via MRP e consequentemente será montado o sistema algébrico.

## 4.1 Nas hipóteses de Euler-Bernoulli

### 4.1.1 O Problema Fundamental

Pelo MEC-D (direto), a equação diferencial governante do problema fundamental será análoga à do problema real, eqs.(2.94) a (2.96). Dessa forma, três equações serão geradas: duas para ativação da fonte concentrada em força nas vigas superior e inferior, $g_i = \delta\left(x, \widehat{x}\right)$, com $i = 1, 2$, respectivamente, e outra para ativação em força na camada de cisalhamento, conforme mostra a figura 4.1.

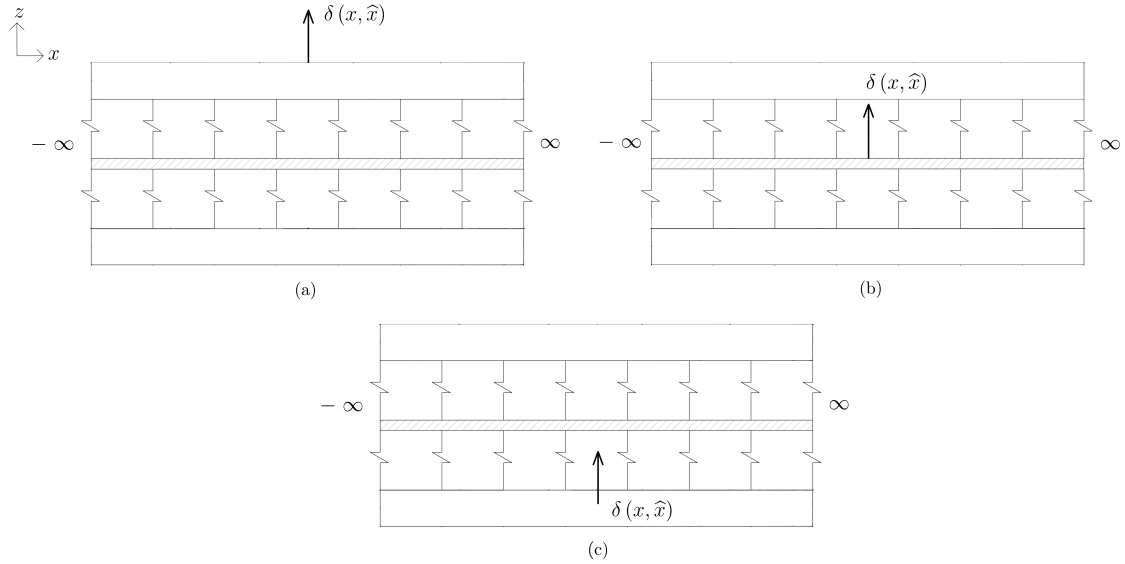



FIGURA 4.1 – Problema fundamental com fontes aplicadas em força na viga superior (a), na camada cisalhante (b) e na viga inferior (c).

Aplicando a fonte concentrada em força na viga superior, $g_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) = \delta(x,\widehat{x})$, por meio da equação das equações de equilíbrio do problema real, obtêm-se:

$$E_1 I_1 \frac{d^4 w_1^{*g_1}}{dx^4} + P_1 \frac{d^2 w_1^{*g_1}}{dx^2} + k_c \left(w_1^{*g_1} - v^{*g_1}\right) = \delta\left(x,\widehat{x}\right), \tag{4.1}$$

$$E_2 I_2 \frac{d^4 w_2^{*g_1}}{dx^4} + P_2 \frac{d^2 w_2^{*g_1}}{dx^2} - k_k \left(v^{*g_1} - w_2^{*g_1}\right) = 0, \tag{4.2}$$

$$-k_c \left(w_1^{*g_1} - v^{*g_1}\right) - G_s \frac{d^2 v^{*g_1}}{dx^2} + k_k \left(v^{*g_1} - w_2^{*g_1}\right) = 0. \tag{4.3}$$

Após a aplicação da fonte concentrada na viga inferior, $g_2^{*g_2} = \delta\left(x,\widehat{x}\right)$, obtêm-se:

$$E_1 I_1 \frac{d^4 w_1^{*g_2}}{dx^4} + P_1 \frac{d^2 w_1^{*g_2}}{dx^2} + k_c \left(w_1^{*g_2} - v^{*g_2}\right) = 0, \tag{4.4}$$

$$E_2 I_2 \frac{d^4 w_2^{*g_2}}{dx^4} + P_2 \frac{d^2 w_2^{*g_2}}{dx^2} - k_k \left(v^{*g_2} - w_2^{*g_2}\right) = \delta\left(x,\widehat{x}\right), \tag{4.5}$$

$$-k_c \left(w_1^{*g_2} - v^{*g_2}\right) - G_s \frac{d^2 v^{*g_2}}{dx^2} + k_k \left(v^{*g_2} - w_2^{*g_2}\right) = 0. \tag{4.6}$$

Finalmente, considerando uma fonte concentrada na camada de cisalhamento, obtém-se a última equação fundamental:

$$E_1 I_1 \frac{d^4 w_1^{*k}}{dx^4} + P_1 \frac{d^2 w_1^{*k}}{dx^2} + k_c \left(w_1^{*k} - v^{*k}\right) = 0, \tag{4.7}$$

$$E_2 I_2 \frac{d^4 w_2^{*k}}{dx^4} + P_2 \frac{d^2 w_2^{*k}}{dx^2} - k_k \left(v^{*k} - w_2^{*k}\right) = 0, \tag{4.8}$$

$$-k_c \left(w_1^{*k} - v^{*k}\right) - G_s \frac{d^2 v^{*k}}{dx^2} + k_k \left(v^{*k} - w_2^{*k}\right) = \delta\left(x,\widehat{x}\right). \tag{4.9}$$

Com isso, chega-se a equação governante do problema fundamental na forma matricial compacta, dada por:

$$[B]\,[G] = \{f\}\,, \tag{4.10}$$

onde a matriz dos operadores $[B]$ é dada por:

$$[B] = \begin{bmatrix} E_1I_1d^4 + P_1d^2 + k_c & 0 & -k_c \\ 0 & E_2I_2d^4 + P_2d^2 + k_k & -k_k \\ -k_c & -k_k & -G_sd^2 + k_c + k_k \end{bmatrix}, \tag{4.11}$$

com $d^j(\cdot) = \frac{d^j(\cdot)}{dx^j}$, a matriz dos deslocamentos fundamentais, $[G]$, dada por:

$$[G] = \begin{bmatrix} w_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) & w_1^{*g_2}(x,\widehat{x}) & w_1^{*k}(x,\widehat{x}) \\ v^{*g_1}(x,\widehat{x}) & v^{*g_2}(x,\widehat{x}) & v^{*k}(x,\widehat{x}) \\ w_2^{*g_1}(x,\widehat{x}) & w_2^{*g_2}(x,\widehat{x}) & w_2^{*k}(x,\widehat{x}) \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

e $\{f\}$ o vetor das forças dado por:

$$\{f\} = \delta\,(x,\widehat{x})\,[I]\,, \tag{4.13}$$

onde $[I]$ é a matriz identidade.

Por meio do método de Hörmander (1963), obtém-se a equação equivalente desacoplada ($\psi$) dada por:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\alpha\frac{d^8\psi}{dx^8} + \beta\frac{d^6\psi}{dx^6} + \gamma\frac{d^4\psi}{dx^4} + \theta\frac{d^2\psi}{dx^2} + \zeta\right) = \delta\,(x,\widehat{x})\,, \tag{4.14}$$

onde $\alpha = -D_1D_2G_s$, $\beta = D_1D_2\,(k_c + k_k) - G_s\,(D_1P_2 - D_2P_1)$, $\gamma = (D_1P_2 + D_2P_1)\,(k_c + k_k) - G_s\,(P_1P_2 + D_1k_k + k_cD_2)$, $\theta = k_ck_k\,(D_1 + D_2) - G_s\,(k_cP_2 + k_kP_1) + P_1P_2\,(k_c + k_k)$ e $\zeta = k_ck_k\,(P_1 + P_2) - k_cG_sk_k$, com $D_1 = E_1I_1$ e $D_3 = E_2I_2$. A equação característica associada a forma homogênea é obtida fazendo $\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = y$ na eq.(4.14), ficando:

$$y\left(\alpha y^4 + \beta y^3 + \gamma y^2 + \zeta y + \chi\right) = 0, \tag{4.15}$$

tendo uma raiz nula.

De um modo geral, escreve-se a solução fundamental desacoplada como sendo:

$$\psi(r) = C_1r + C_2f_2(r) + C_3f_3(r) + C_4f_4(r) + C_5f_5(r), \tag{4.16}$$

sendo dada pelas possíveis combinações das funções $f_i$ a depender dos valores das raízes. Dessa forma, a tabela 4.1 mostra todas as combinações de soluções possíveis de raízes

(EULER, 2012), a saber:

- Caso 1: Duas raízes reais distintas e duas complexas conjugadas;
- Caso 2: Todas as raízes reais e distintas;
- Caso 3: Dois pares de raízes complexas e conjugadas;
- Caso 4: Duas raízes reais iguais e duas reais e distintas;
- Caso 5: Duas raízes reais iguais e duas complexas e conjugadas;
- Caso 6: Três raízes reais iguais e uma real distinta;
- Caso 7: Dois pares de raízes reais iguais;
- Caso 8: Todas as quatro raízes reais e iguais.

| | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|
| Caso 1 | $f_2(r)$ | $f_3(r)$ | $e^{-pr}cos(qr)$ | $e^{-pr}sen(qr)$ | |
| Caso 2 | $f_2(r)$ | $f_3(r)$ | $f_4(r)$ | $f_5(r)$ | |
| Caso 3 | $e^{-p_2r}cos(q_2r)$ | $e^{-p_2r}sen(q_2r)$ | $e^{-p_3r}cos(q_3r)$ | $e^{-p_3r}sen(q_3r)$ | |
| Caso 4 | $f_2(r)$ | $f_3(r)$ | $f_4(r)$ | $r^2\ f_5(r)$ | $y_4 = y_5$ |
| Caso 5 | $f_2(r)$ | $r^2\ f_2(r)$ | $e^{-pr}cos(qr)$ | $e^{-pr}sen(qr)$ | $y_2 = y_3$ |
| Caso 6 | $f_2(r)$ | $f_3(r)$ | $r^2\ f_4(r)$ | $r^4\ f_5(r)$ | $y_3 = y_4 = y_5$ |
| Caso 7 | $f_2(r)$ | $r^2\ f_3(r)$ | $f_4(r)$ | $r^2\ f_5(r)$ | $y_2 = y_3; y_4 = y_5$ |
| Caso 8 | $f_2(r)$ | $r^2\ f_3(r)$ | $r^4\ f_4(r)$ | $r^6\ f_5(r)$ | |

TABELA 4.1 – Casos possíveis de funções $f_i$ segundo a natureza da raiz $y_i$ a ela associada.

Considerando que as raízes são reais, as seguintes soluções são sugeridas:

$$f_i = r^3,\ se\ y_i = 0, \tag{4.17}$$

$$f_i = e^{-r\sqrt{y_i}},\ se\ y_i > 0, \tag{4.18}$$

$$f_i = sen\left(r\sqrt{-y_i}\right),\ se\ y_i < 0, \tag{4.19}$$

com $i = 1, 2, 3$, enquanto que para o caso de raízes complexas e conjugadas, as funções $f_i$ propostas são:

$$f_i + f_j = e^{-pr}cos(qr) + e^{-pr}sen(qr), \tag{4.20}$$

com

$$p = |Re\sqrt{y_i}| = |Re\sqrt{y_j}|, \tag{4.21}$$

$$q = |Im\sqrt{y_i}| = |Im\sqrt{y_j}|, \tag{4.22}$$

$$a_1 = p^2 - q^2, \tag{4.23}$$

$$b_1 = 2pq, \tag{4.24}$$

sendo $Re$ a parte real e $Im$ a imaginária das raízes complexas.

Como exemplo, o processo de obtenção das constantes da solução fundamental desacoplada e suas derivadas será feito, passo a passo, para o caso 1, que deve ser estendido aos demais. Dessa forma, considere que as raízes $y_2$ e $y_23$ são reais positiva e negativa, respectivamente, enquanto que $y_3$ e $y_4$ são complexas e conjugadas. Dessa forma, a solução fundamental proposta será dada por:

$$\psi(r) = C_1 r + C_2 e^{-\sqrt{y_2}r} + C_3 sin(\sqrt{-y_3}r) + C_4 e^{-pr} cos(qr) + C_5 e^{-pr} sen(qr) \tag{4.25}$$

Fazendo a primeira derivada da eq.(4.25) em relação à $x$ e lembrando que $d/dx = d/dr \cdot dr/dx = d/dr \cdot sgn(x, \widehat{x})$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} = \quad & \left\{C_1 - C_2\sqrt{y_1}e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3\sqrt{-y_2}cos(\sqrt{-y_2}r) - C_4 e^{-pr}\left[p\ cos(qr) + \right.\right. \\ & \left.\left. + q\ sen(qr)\right] + C_5 e^{-pr}\left[-p\ sen(qr) + q\ cos(qr)\right]\right\} sgn\left(x, \widehat{x}\right), \end{aligned} \tag{4.26}$$

Derivando novamente a eq.(4.26) em relação a $x$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \quad & C_2 y_1 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2 sen(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[a_1\ cos(qr) + b_1\ sen(qr)\right] + \\ & + C_5 e^{-pr}\left[a_1\ sen(qr) - b_1\ cos(qr)\right] + 2\delta\left(x, \widehat{x}\right)\left\{C_1 - C_2\sqrt{y_1}e^{-\sqrt{y_1}r} + \right. \\ & + C_3\sqrt{-y_2}cos(\sqrt{-y_2}r) - C_4 e^{-pr}\left[p\ cos(qr) + q\ sen(qr)\right] + \\ & \left. + C_5 e^{-pr}\left[-p\ sen(qr) + q\ cos(qr)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

onde $a_1 = p^2 - q^2$, $b_1 = 2pq$ e a derivada $d/dx(sgn(x, \widehat{x})) = 2\delta\left(x, \widehat{x}\right)$.

Analisando a eq.(4.27), vê-se que a derivada primeira tem valor finito quando o ponto fonte coincide com o ponto campo ($x = \widehat{x}$), uma vez que a direção $r$ tende a zero e a função delta de Dirac ($\delta(x, \widehat{x})$) tende ao infinito. Assim, tomando apenas essa parcela que possui o delta de Dirac na eq.(4.27) e fazendo $r = 0$, tem-se a primeira relação entre as constantes da solução fundamental desacoplada:

$$C_1 - C_2\sqrt{y_1} + C_3\sqrt{-y_2} - C_4 p + C_5 q = 0. \tag{4.28}$$

A partir de tal consideração, a derivada segunda passa então a ser dada por:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \quad C_2 y_1 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2 sen(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[a_1\ cos(qr) + b_1\ sen(qr)\right] + \\ +C_5 e^{-pr}\left[a_1\ sen(qr) - b_1\ cos(qr)\right], \tag{4.29}$$

Derivando a eq.(4.29), obtém-se a derivada terceira dada por:

$$\frac{d^3\psi}{dx^3} = \quad \left\{-C_2 y_1\sqrt{y_1}e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2\sqrt{-y_2}cos(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[(-pa_1 + qb_1)cos(qr) + \right.\right. \\ \left.\left. -(qa_1 + pb_1)sen(qr)\right] + C_5 e^{-pr}\left[(-pa_1 + qb_1)sen(qr) + (qa_1 + pb_1)cos(qr)\right]\right\} sgn(x, \widehat{x}), \tag{4.30}$$

Derivando a eq.(4.30), chega-se a:

$$\frac{d^4\psi}{dx^4} = \quad C_2 y_1^2 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2^2 sen(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-p.r}\left[a_2\ cos(qr) + d\ sen(qr)\right] + \\ +C_5 e^{-pr}\left[a_2\ sen(qr) - b_2\ cos(qr)\right] + 2\delta\left(x, \widehat{x}\right)\left\{-C_2 y_1\sqrt{y_1}e^{-\sqrt{y_1}r} + \right. \\ \left. +C_3 y_2\sqrt{-y_2}cos(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[(-pa_1 + qb_1)cos(qr) - (qa_1 + pb_1)sen(qr)\right] + \right. \\ \left. +C_5 e^{-pr}\left[(-pa_1 + qb_1)sen(qr) + (qa_1 + pb_1)cos(qr)\right]\right\}, \tag{4.31}$$

sendo $a_2 = a_1^2 - b_1^2$ e $b_2 = 2a_1 b_1$.

A mesma análise feita para a eq.(4.27) deve ser feita para a eq.(4.31). Dessa forma, chega-se a mais uma das relações do sistema para determinar as constantes da solução fundamental desacoplada, onde:

$$-C_2 y_1\sqrt{y_1} + C_3 y_2\sqrt{-y_2} + C_4(-pa_1 + qb_1) + C_5(qa_1 + pb_1) = 0. \tag{4.32}$$

Com isso, a eq.(4.33) passa a ser reescrita como:

$$\frac{d^4\psi}{dx^4} = \quad C_2 y_1^2 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2^2 sen(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[a_2\ cos(qr) + d\ sen(qr)\right] + \\ +C_5 e^{-pr}\left[a_2\ sen(qr) - b_2\ cos(qr)\right]. \tag{4.33}$$

Derivando a eq.(4.33) com respeito a $x$, obtém-se:

$$\frac{d^5\psi}{dx^5} = \quad \left\{-C_2 y_1^2\sqrt{y_1}e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2^2\sqrt{-y_2}cos(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[(b_2 q - a_2 p)\,cos(qr)\ + \right.\right. \\ \left.\left. -(a_2 q + b_2 p)\,sen(qr)\right] + C_5 e^{-pr}\left[(a_2 q + b_2 p)\,cos(qr) + (b_2 q - a_2 p)\,sen(qr)\right]\right\} sgn(x, \widehat{x}). \tag{4.34}$$

A derivada da eq.(4.34) fica:

$$\begin{aligned}\frac{d^6\psi}{dx^6} = \quad & C_2 y_1^3 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2^3 sen(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[a_3\ cos(qr) + b_3\ sen(qr)\right] + \\ & + C_5 e^{-pr}\left[a_3\ sen(qr) - b_3\ cos(qr)\right] + 2\delta(x,\widehat{x})\left\{-C_2 y_1^2\sqrt{y_1}e^{-\sqrt{y_1}r} + \right. \\ & + C_3 y_2^2\sqrt{-y_2}cos(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[(b_2q - a_2p)\,cos(qr) - (a_2q + b_2p)\,sen(qr)\right] + \\ & \left. + C_5 e^{-pr}\left[(a_2q + b_2p)\,cos(qr) + (b_2q - a_2p)\,sen(qr)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

onde $a_3 = a_1\left(a_1^2 - 3b_1^2\right)$ e $b_3 = b_1\left(3a_1^2 - b_1^2\right)$.

Da eq.(4.35), obtém-se mais um sistema das constantes a determinar:

$$-C_2 y_1^2\sqrt{y_1} + C_3 y_2^2\sqrt{-y_2} + C_4\left(b_2q - a_2p\right) + C_5\left(a_2q + b_2p\right) = 0. \tag{4.36}$$

Portanto a eq.(4.35) passa a ser:

$$\begin{aligned}\frac{d^6\psi}{dx^6} = \quad & C_2 y_1^3 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2^3 sen(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[a_3\ cos(qr) + b_3\ sen(qr)\right] + \\ & + C_5 e^{-pr}\left[a_3\ sen(qr) - b_3\ cos(qr)\right]. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Fazendo a derivada da eq.(4.37), obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{d^7\psi}{dx^7} = \quad & \left\{-C_2 y_1^3\sqrt{y_1}e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2^3\sqrt{-y_2}cos(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[(b_3q - a_3p)\,cos(qr)\ + \right.\right. \\ & \left.\left. - (a_3q + b_3p)\,sen(qr)\right] + C_5 e^{-pr}\left[(a_2q + b_2p)\,cos(qr) + (b_2q - a_2p)\,sen(qr)\right]\right\} sgn(x,\widehat{x}). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Derivando mais uma vez a eq.(4.38), obtém-se a oitava derivada dada por:

$$\begin{aligned}\frac{d^8\psi}{dx^8} = \quad & C_2 y_1^4 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2^4 sen(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[a_4\ cos(qr) + b_4\ sen(qr)\right] + \\ & + C_5 e^{-pr}\left[a_4\ sen(qr) - b_4\ cos(qr)\right] + 2\delta\left(x,\widehat{x}\right)\left\{-C_2 y_1^3\sqrt{y_1}e^{-\sqrt{y_1}r} + \right. \\ & + C_3 y_2^3\sqrt{-y_2}cos(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[(b_3q - a_3p)\,cos(qr) - (a_3q + b_3p)\,sen(qr)\right] + \\ & \left. + C_5 e^{-pr}\left[(a_2q + b_2p)\,cos(qr) + (b_2q - a_2p)\,sen(qr)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

onde $a_4 = a_2^2 - b_2^2$ e $b_4 = 2b_2a_2$.

Da eq.(4.39) obtém-se mais uma equação do sistema a determinar as contantes de $\psi$:

$$-C_2 y_1^3\sqrt{y_1} + C_3 y_2^3\sqrt{-y_2} + C_4\left(b_3q - a_3p\right) + C_5\left(a_2q + b_2p\right) = 0. \tag{4.40}$$

Dessa forma, a eq.(4.39) passa a ser:

$$\frac{d^8\psi}{dx^8} = \quad C_2 y_1^4 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2^4 sen(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[a_4\ cos(qr) + b_4\ sen(qr)\right] + \\ + C_5 e^{-pr}\left[a_4\ sen(qr) - b_4\ cos(qr)\right]. \tag{4.41}$$

Derivando a eq.(4.41) em relação a $x$, obtém-se:

$$\frac{d^9\psi}{dx^9} = \quad \left\{-C_2 y_1^4\sqrt{y_1}e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2^4\sqrt{-y_2}cos(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[(b_4q - a_4p)\,cos(qr)\ + \right.\right. \\ \left.\left. - (a_4q + b_4p)\,sen(qr)\right] + C_5 e^{-pr}\left[(a_4q + b_4p)\,cos(qr) + (b_4q - a_4p)\,sen(qr)\right]\right\} sgn(x, \widehat{x}). \tag{4.42}$$

Finalmente, a derivada de ordem dez da eq.(4.25) é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{d^{10}\psi}{dx^{10}} = \quad & C_2 y_1^5 e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2^5 sen(\sqrt{-y_2}r) + C_4 e^{-pr}\left[(a_1a_4 - b_1b_4)\,cos(qr) + \right. \\ & \left. + (b_1a_4 + b_4a_1)\,sen(qr)\right] + C_5 e^{-pr}\left[(a_1a_4 - b_1b_4)\,sen(qr) - (ba_4 + b_4a)\,cos(qr)\right] + \\ & + 2\delta\,(x, \widehat{x})\left\{-C_2 y_1^4\sqrt{y_1}e^{-\sqrt{y_1}r} + C_3 y_2^4\sqrt{-y_2}cos(\sqrt{-y_2}r) + \right. \\ & + C_4 e^{-pr}\left[(b_4q - a_4p)\,cos(qr) - (a_4q + b_4p)\,sen(qr)\right] + \\ & \left. + C_5 e^{-pr}\left[(a_4q + b_4p)\,cos(qr) + (b_4q - a_4p)\,sen(qr)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Substituindo as eqs.(4.29), (4.33), (4.37), (4.41) e (4.43) na equação diferencial do problema desacoplado, eq.(4.14), e fazendo $r = 0$, obtém-se a última das equações do sistema a determinar as constantes de $\psi$:

$$2\alpha\left\{-C_2 y_1^4\sqrt{y_1} + C_3 y_2^4\sqrt{-y_2} + C_4\,(b_4q - a_4p) + C_5\,(a_4q + b_4p)\right\} = 1, \tag{4.44}$$

Com isso, as constantes $C_i$ da solução fundamental $\psi$ serão obtidas a partir do sistema dado pelas eqs.(4.28), (4.32), (4.36), (4.40) e (4.44):

$$C_1 - C_2\sqrt{y_1} + C_3\sqrt{-y_2} - C_4p + C_5q = 0, \tag{4.45}$$

$$-C_2 y_1\sqrt{y_1} + C_3 y_2\sqrt{-y_2} + C_4(b_1q - a_1p) + C_5(a_1q + b_1p) = 0, \tag{4.46}$$

$$-C_2 y_1^2\sqrt{y_1} + C_3 y_2^2\sqrt{-y_2} + C_4\,(b_2q - a_2p) + C_5\,(a_2q + b_2p) = 0, \tag{4.47}$$

$$-C_2 y_1^3\sqrt{y_1} + C_3 y_2^3\sqrt{-y_2} + C_4\,(b_3q - a_3p) + C_5\,(a_2q + b_2p) = 0, \tag{4.48}$$

$$2\alpha\left\{-C_2 y_1^4\sqrt{y_1} + C_3 y_2^4\sqrt{-y_2} + C_4\,(b_4q - a_4p) + C_5\,(a_4q + b_4p)\right\} = 1, \tag{4.49}$$

obtendo assim os seguintes valores:

$$C_1 = \frac{1}{2\alpha t^2 y_1 y_2}, \tag{4.50}$$

$$C_2 = \frac{-1}{2\alpha y_1 \sqrt{y_1}\,(t^2+m)\,(y_1-y_2)}, \tag{4.51}$$

$$C_3 = \frac{-1}{2\alpha y_2 \sqrt{-y_2}\,(t^2+n)\,(y_1-y_2)}, \tag{4.52}$$

$$C_4 = -\frac{y_1 y_2\,(q^2-3p^2)+hp+c\,(y_1+y_2)}{4\alpha p t^3\,(t^2+m)\,(t^2+n)}, \tag{4.53}$$

$$C_5 = -\frac{y_1 y_2\,(3q^2-p^2)+hq+d\,(y_1+y_2)}{4\alpha p t^3\,(t^2+m)\,(t^2+n)}. \tag{4.54}$$

De uma forma geral, para qualquer função $\psi$ adotada, os coeficientes $C_i$ serão obtidos por meio do sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dr}\psi_1(0) & \frac{d}{dr}\psi_2(0) & \frac{d}{dr}\psi_3(0) & \frac{d}{dr}\psi_4(0) & \frac{d}{dr}\psi_5(0) \\ \frac{d^3}{dr^3}\psi_1(0) & \frac{d^3}{dr^3}\psi_2(0) & \frac{d^3}{dr^3}\psi_3(0) & \frac{d^3}{dr^3}\psi_4(0) & \frac{d^3}{dr^3}\psi_5(0) \\ \frac{d^5}{dr^5}\psi_1(0) & \frac{d^5}{dr^5}\psi_2(0) & \frac{d^5}{dr^5}\psi_3(0) & \frac{d^5}{dr^5}\psi_4(0) & \frac{d^5}{dr^5}\psi_5(0) \\ \frac{d^7}{dr^7}\psi_1(0) & \frac{d^7}{dr^7}\psi_2(0) & \frac{d^7}{dr^7}\psi_3(0) & \frac{d^7}{dr^7}\psi_4(0) & \frac{d^7}{dr^7}\psi_5(0) \\ \frac{d^9}{dr^9}\psi_1(0) & \frac{d^9}{dr^9}\psi_2(0) & \frac{d^9}{dr^9}\psi_3(0) & \frac{d^9}{dr^9}\psi_4(0) & \frac{d^9}{dr^9}\psi_5(0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\alpha} \end{Bmatrix}. \tag{4.55}$$

A seguir são apresentadas as soluções fundamentais desacopladas propostas para os demais casos usuais de ocorrência na prática.

**Duas raízes reais positivas e duas complexas e conjugadas:** Considerando que as raízes assumam valores reais e positivos ($y_2$ e $y_3$) e complexos conjugados ($y_4$ e $y_5$), lembrando que $y_1$ sempre será nula, a solução fundamental desacoplada proposta será:

$$\psi(r) = C_1 r + C_2 e^{-\sqrt{y_2}r} + C_3 e^{-\sqrt{y_3}r} + C_4 e^{-pr} cos(qr) + C_5 e^{-pr} sen(qr), \tag{4.56}$$

com constantes

$$C_1 = \frac{1}{2\alpha t^2 y_1 y_2} \tag{4.57}$$

$$C_2 = \frac{-1}{2\alpha y_1 \sqrt{y_1}\,(t^2+m)\,(y_1-y_2)}, \tag{4.58}$$

$$C_3 = \frac{1}{2\alpha y_2 \sqrt{y_2}\,(t^2+n)\,(y_1-y_2)}, \tag{4.59}$$

$$C_4 = -\frac{y_1 y_2\,(q^2-3p^2)+hp+c\,(y_1+y_2)}{4\alpha p t^3\,(t^2+m)\,(t^2+n)}, \tag{4.60}$$

$$C_5 = -\frac{y_1 y_2\,(3q^2-p^2)+hq+d\,(y_1+y_2)}{4\alpha p t^3\,(t^2+m)\,(t^2+n)}. \tag{4.61}$$

**Uma raiz real positiva e três outras reais negativas:** Assumindo agora que as raízes assumam valores reais positivos ($y_2$) e negativos ($y_3$, $y_4$ e $y_5$), a solução fundamental desacoplada proposta será:

$$\psi(r) = C_1 r + C_2 e^{-\sqrt{y_2}r} + C_3 sin(\sqrt{-y_3}r) + C_4 sin(\sqrt{-y_4}r) + C_5 sin(\sqrt{-y_5}r), \tag{4.62}$$

com constantes

$$C_1 = \frac{1}{2\alpha y_1 y_2 y_3 y_4}, \tag{4.63}$$

$$C_2 = \frac{-1}{2\alpha y_1 \sqrt{y_1}\,(y_1 - y_2)\,(y_1 - y_3)\,(y_1 - y_4)}, \tag{4.64}$$

$$C_3 = \frac{-1}{2\alpha y_2 \sqrt{-y_2}\,(y_1 - y_2)\,(y_2 - y_3)\,(y_2 - y_4)}, \tag{4.65}$$

$$C_4 = \frac{1}{2\alpha y_3 \sqrt{-y_3}\,(y_1 - y_3)\,(y_2 - y_3)\,(y_3 - y_4)}, \tag{4.66}$$

$$C_5 = \frac{-1}{2\alpha y_4 \sqrt{-y_4}\,(y_1 - y_4)\,(y_2 - y_4)\,(y_3 - y_4)}. \tag{4.67}$$

Conhecida a equação fundamental desacoplada $\psi$, é possível obter os deslocamentos fundamentais diretamente por meio da eq.(3.10):

$$w_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) = G_s\Delta_2\left(\frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2}\right)\psi(r) - k_k^2\psi(r), \tag{4.68}$$

$$w_1^{*k}(x,\widehat{x}) = k_c\Delta_2\psi(r), \tag{4.69}$$

$$w_1^{*g_2}(x,\widehat{x}) = k_c k_k\psi(r), \tag{4.70}$$

$$v^{*g_1}(x,\widehat{x}) = w_1^{*k}(x,\widehat{x}), \tag{4.71}$$

$$v^{*k}(x,\widehat{x}) = \Delta_1\Delta_2\psi(r), \tag{4.72}$$

$$v^{*g_2}(x,\widehat{x}) = k_k\Delta_1\psi(r), \tag{4.73}$$

$$w_2^{*g_1}(x,\widehat{x}) = w_1^{*g_2}(x,\widehat{x}), \tag{4.74}$$

$$w_2^{*k}(x,\widehat{x}) = v^{*g_2}(x,\widehat{x}), \tag{4.75}$$

$$w_2^{*g_2}(x,\widehat{x}) = G_s\Delta_1\left(\frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2}\right)\psi(r) - k_c^2\psi(r), \tag{4.76}$$

onde os operadores $\Delta_1 = D_1\frac{d^4}{dr^4} + P_1\frac{d^2}{dr^2} + k_c$ e $\Delta_2 = D_2\frac{d^4}{dr^4} + P_2\frac{d^2}{dr^2} + k_k$, sendo $r = \mid x - \widehat{x} \mid$.

As soluções fundamentais em esforços cortantes e momentos fletores são obtidas de forma análoga aos reais, conforme eqs.(2.97), (2.98) e (2.99). Assim os cortantes funda-

mentais serão:

$$V_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) = -D_1\left[G_s\Delta_2\frac{d^3}{dr^3}\left(\frac{k_c+k_k}{G_s}-\frac{d^2}{dr^2}\right)-k_k^2\frac{d^3}{dr^3}\right]\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \quad (4.77)$$

$$V_1^{*k}(x,\widehat{x}) = -D_1k_c\Delta_2\frac{d^3}{dr^3}\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \quad (4.78)$$

$$V_1^{*g_2}(x,\widehat{x}) = -D_1k_ck_k\frac{d^3}{dr^3}\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \quad (4.79)$$

$$V_k^{*g_1}(x,\widehat{x}) = G_sk_c\Delta_2\frac{d}{dr}\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \quad (4.80)$$

$$V_k^{*k}(x,\widehat{x}) = G_s\Delta_1\Delta_2\frac{d}{dr}\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \quad (4.81)$$

$$V_k^{*g_2}(x,\widehat{x}) = G_sk_k\Delta_1\frac{d}{dr}\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \quad (4.82)$$

$$V_2^{*g_1}(x,\widehat{x}) = -D_2k_ck_k\frac{d^3}{dr^3}\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \quad (4.83)$$

$$V_2^{*k}(x,\widehat{x}) = -D_2k_k\frac{d^3}{dr^3}\Delta_1\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \quad (4.84)$$

$$V_2^{*g_2}(x,\widehat{x}) = -D_2\left[G_s\frac{d^3}{dr^3}\Delta_1\left(\frac{k_c+k_k}{G_s}-\frac{d^2}{dr^2}\right)-k_c^2\frac{d^3}{dr^3}\right]\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \quad (4.85)$$

enquanto que os momentos fletores fundamentais serão dados por:

$$M_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) = -D_1G_s\frac{d^2}{dr^2}\Delta_2\left(\frac{k_c+k_k}{G_s}-\frac{d^2}{dr^2}\right)\psi(r)+D_1k_k^2\frac{d^2}{dr^2}\psi(r), \quad (4.86)$$

$$M_1^{*k}(x,\widehat{x}) = -D_1k_c\frac{d^2}{dr^2}\Delta_2\psi(r), \quad (4.87)$$

$$M_1^{*g_2}(x,\widehat{x}) = -D_1k_ck_k\frac{d^2}{dr^2}\psi(r), \quad (4.88)$$

$$M_2^{*g_1}(x,\widehat{x}) = -D_2k_ck_k\frac{d^2}{dr^2}\psi(r), \quad (4.89)$$

$$M_2^{*k}(x,\widehat{x}) = -D_2k_k\frac{d^2}{dr^2}\Delta_1\psi(r), \quad (4.90)$$

$$M_2^{*g_2}(x,\widehat{x}) = -D_2G_s\frac{d^2}{dr^2}\Delta_1\left(\frac{k_c+k_k}{G_s}-\frac{d^2}{dr^2}\right)\psi(r)+k_c^2D_2\frac{d^2}{dr^2}\psi(r). \quad (4.91)$$

Além das soluções fundamentais acima apresentadas, para a completa definição da equação integral serão necessárias alguma derivadas em relação ao ponto fonte e campo

dos deslocamentos fundamentais:

$$w^{*g_1}_{1,x}(x,\widehat{x}) = -w^{*g_1}_{1,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = \frac{d}{dr}\left[G_s\Delta_2\left(\frac{k_c+k_k}{G_s}-\frac{d^2}{dr^2}\right)-k_k^2\right]\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \tag{4.92}$$

$$w^{*g_1}_{1,x\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = -\frac{d^2}{dr^2}\left[G_s\Delta_2\left(\frac{k_c+k_k}{G_s}-\frac{d^2}{dr^2}\right)-k_k^2\right]\psi(r), \tag{4.93}$$

$$w^{*k}_{1,x}(x,\widehat{x}) = -v^{*g_1}_{,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = k_c\frac{d}{dr}\Delta_2\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \tag{4.94}$$

$$w^{*g_2}_{1,x}(x,\widehat{x}) = w^{*g_1}_{2,x}(x,\widehat{x}) = -w^{*g_2}_{1,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = -w^{*g_1}_{2,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = k_ck_k\frac{d}{dr}\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \tag{4.95}$$

$$w^{*g_2}_{1,x\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = -k_ck_k\frac{d^2}{dr^2}\psi(r), \tag{4.96}$$

$$v^{*g_2}_{,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = -w^{*k}_{2,x}(x,\widehat{x}) = -k_k\Delta_1\frac{d}{dr}\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \tag{4.97}$$

$$w^{*g_2}_{2,x}(x,\widehat{x}) = -w^{*g_2}_{2,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = \frac{d}{dr}\left[G_s\Delta_1\left(\frac{k_c+k_k}{G_s}-\frac{d^2}{dr^2}\right)-k_c^2\right]\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \tag{4.98}$$

$$w^{*g_2}_{2,x\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = -\frac{d^2}{dr^2}\left[G_s\Delta_1\left(\frac{k_c+k_k}{G_s}-\frac{d^2}{dr^2}\right)-k_c^2\right]\psi(r), \tag{4.99}$$

uma vez que $d/dx(\cdot) = -d/d\widehat{x}(\cdot) = d/dr(\cdot)sgn(x,\widehat{x})$. As demais derivadas em relação aos esforços são:

$$V^{*g_1}_{1,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = D_1\left[G_s\Delta_2\frac{d^4}{dr^4}\left(\frac{k_c+k_k}{G_s}-\frac{d^2}{dr^2}\right)-k_k^2\frac{d^4}{dr^4}\right]\psi(r), \tag{4.100}$$

$$M^{*g_1}_{1,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = D_1\left[G_s\frac{d^3}{dr^3}\Delta_2\left(\frac{k_c+k_k}{G_s}-\frac{d^2}{dr^2}\right)\psi(r)-k_k^2\frac{d^3}{dr^3}\right]\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \tag{4.101}$$

$$V^{*g_1}_{k,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = -G_sk_c\Delta_2\frac{d^2}{dr^2}\psi(r), \tag{4.102}$$

$$V^{*g_1}_{2,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = D_2k_ck_k\frac{d^4}{dr^4}\psi(r), \tag{4.103}$$

$$M^{*g_1}_{2,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = D_2k_ck_k\frac{d^3}{dr^3}\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \tag{4.104}$$

$$V^{*g_2}_{1,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = D_1k_ck_k\frac{d^4}{dr^4}\psi(r), \tag{4.105}$$

$$M^{*g_2}_{1,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = D_1k_ck_k\frac{d^3}{dr^3}\psi(r)sgn(x,\widehat{x}), \tag{4.106}$$

$$V^{*g_2}_{k,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = -G_sk_k\Delta_1\frac{d^2}{dr^2}\psi(r), \tag{4.107}$$

$$V^{*g_2}_{2,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = D_2\left[G_s\frac{d^4}{dr^4}\Delta_1\left(\frac{k_c+k_k}{G_s}-\frac{d^2}{dr^2}\right)-k_c^2\frac{d^4}{dr^4}\right]\psi(r), \tag{4.108}$$

$$M^{*g_2}_{2,\widehat{x}}(x,\widehat{x}) = D_2\left[G_s\frac{d^3}{dr^3}\Delta_1\left(\frac{k_c+k_k}{G_s}-\frac{d^2}{dr^2}\right)-k_c^2\frac{d^3}{dr^3}\right]\psi(r)sgn(x,\widehat{x}). \tag{4.109}$$

### 4.1.2 Equação Integral

Assim como feito para o caso da viga apoiada em camada elástica de Kerr, a equação integral do sistema de vigas duplas elasticamente conectadas será obtida a partir da aplicação da técnica dos resíduos ponderados na equação diferencial governante do problema, eqs.(2.94) a (2.96), sendo as soluções fundamentais as funções ponderadoras.

Ponderando a eq.(2.94) pelos deslocamentos fundamentais para ativação da fonte em força na viga superior, $g_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) = \delta(x,\widehat{x})$, obtém-se:

$$\int_0^L \left\{ \left[ D_1 \frac{d^4 w_1}{dx^4} + P \frac{d^2 w_1}{dx^2} + k_c (w_1 - v) - g \right] w_1^{*g_1} + \left[ D_2 \frac{d^4 w_2}{dx^4} + P_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} + \right. \right.$$
$$\left. \left. -k_k (v - w_2) \right] w_2^{*g_1} + \left[ -G_s \frac{d^2 v}{dx^2} + k_c (v - w_1) + k_k (v - w_2) \right] v^{*g_1} \right\} dx = 0. \tag{4.110}$$

Fazendo algumas integrações por partes na eq.(4.110) e convenientes manipulações, chega-se a:

$$- \left[ V_1(x) w_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) \right]_0^L + \left[ M_1(x) \frac{dw_1^{*g_1}}{dx}(x,\widehat{x}) \right]_0^L - \left[ M_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) \frac{dw_1}{dx}(x) \right]_0^L + \left[ V_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) w_1(x) \right]_0^L +$$
$$- \left[ V_2(x) w_2^{*g_1}(x,\widehat{x}) \right]_0^L + \left[ M_2(x) \frac{dw_2^{*g_1}}{dx}(x,\widehat{x}) \right]_0^L - \left[ M_2^{*g_1}(x,\widehat{x}) \frac{dw}{dx}(x) \right]_0^L + \left[ V_2^{*g_1}(x,\widehat{x}) w_2(x) \right]_0^L +$$
$$+ \left[ P_1 \frac{dw_1}{dx}(x) w_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) \right]_0^L - \left[ P_1 \frac{dw_1^{*g_1}}{dx}(x,\widehat{x}) w_1(x) \right]_0^L + \left[ P_2 \frac{dw_2}{dx}(x) w_2^{*g_1}(x,\widehat{x}) \right]_0^L +$$
$$- \left[ P_2 \frac{dw_2^{*g_1}}{dx}(x,\widehat{x}) w_2(x) \right]_0^L - \left[ V_k(x) v^{*g_1}(x,\widehat{x}) \right]_0^L + \left[ V_k^{*g_1}(x,\widehat{x}) v(x) \right]_0^L +$$
$$+ \int_0^L \left\{ \left[ D_1 \frac{d^4 w_1^{*g_1}}{dx^4} + P_1 \frac{d^2 w_1^{*g_1}}{dx^2} + k_c (w_1^{*g_1} - v^{*g_1}) \right] w_1 + \right.$$
$$+ \left[ D_2 \frac{d^4 w_2^{*g_1}}{dx^4} + P_2 \frac{d^2 w_2^{*g_1}}{dx^2} - k_k (v^{*g_1} - w_2^{*g_1}) \right] w_2 +$$
$$\left. + \left[ -G_s \frac{d^2 v^{*g_1}}{dx^2} + k_c (v^{*g_1} - w^{*g_1}) + k_k v^{*g_1} \right] v \right\} dx - \int_0^L g w^{*g_1} dx = 0, \tag{4.111}$$

onde, por meio das eqs.(4.1) a (4.3), tem-se as seguintes relações:

$$\int_0^L \left[ D_1 \frac{d^4 w_1^{*g}}{dx^4} + P_1 \frac{d^2 w_1^{*g}}{dx^2}(x,\widehat{x}) + k_c (w_1^{*g}(x,\widehat{x}) - v^{*g}(x,\widehat{x})) \right] w_1(x) dx$$
$$= \int_0^L \delta(x,\widehat{x})\, w_1(x) dx = w_1(\widehat{x}), \tag{4.112}$$

$$\int_0^L \left[ D_2 \frac{d^4 w_2^{*g_1}}{dx^4} + P_2 \frac{d^2 w_2^{*g_1}}{dx^2} - k_k \left( v^{*g_1} - w_2^{*g_1} \right) \right] w_2 dx = 0, \tag{4.113}$$

e

$$\int_0^L \left[ -k_c \left( w^{*g}(x,\widehat{x}) - v^{*g}(x,\widehat{x}) \right) - G_s \frac{d^2 v^{*g}}{dx^2}(x,\widehat{x}) + k_k v^{*g}(x,\widehat{x}) \right] v(x) dx = 0. \tag{4.114}$$

Dessa forma, faz-se a substituição das eqs.(4.112) a (4.114) na eq.(4.111), obtendo-se a primeira equação integral para os deslocamentos no domínio da viga superior:

$$\begin{aligned}
& w_1(\widehat{x}) + \left[ V_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) w_1(x) \right]_0^L - \left[ M_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) \frac{dw_1}{dx}(x) \right]_0^L + \\
& + \left[ V_2^{*g_1}(x,\widehat{x}) w_2(x) \right]_0^L - \left[ M_2^{*g_1}(x,\widehat{x}) \frac{dw_2}{dx}(x) \right]_0^L + \\
& + \left[ V_k^{*g_1}(x,\widehat{x}) v(x) \right]_0^L = \left[ V_1(x) w_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) \right]_0^L - \left[ P_1 \frac{dw_1}{dx}(x) w_1^{*g_1}(x,\widehat{x}) \right]_0^L + \\
& + \left[ V_2(x) w_2^{*g_1}(x,\widehat{x}) \right]_0^L - \left[ P_2 \frac{dw_2}{dx}(x) w_2^{*g_1}(x,\widehat{x}) \right]_0^L - \left[ M_1(x) \frac{dw_1^{*g_1}}{dx}(x,\widehat{x}) \right]_0^L + \\
& - \left[ M_2(x) \frac{dw_2^{*g_1}}{dx}(x,\widehat{x}) \right]_0^L + \left[ V_k(x) v^{*g_1}(x,\widehat{x}) \right]_0^L + \int_0^L g(x) w^{*g_1}(x,\widehat{x}) dx.
\end{aligned} \tag{4.115}$$

Aplicando agora o MRP na equação de equilíbrio do problema real com ponderação em deslocamentos fundamentais para ativação da fonte em termos de força na viga inferior, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \Bigg\{ & \left[ D_1 \frac{d^4 w_1}{dx^4} + P \frac{d^2 w_1}{dx^2} + k_c \left( w_1 - v \right) - g \right] w_1^{*g_2} + \left[ D_2 \frac{d^4 w_2}{dx^4} + P_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} + \right. \\
& \left. - k_k \left( v - w_2 \right) \right] w_2^{*g_2} + \left[ -G_s \frac{d^2 v}{dx^2} + k_c \left( v - w_1 \right) + k_k \left( v - w_2 \right) \right] v^{*g_2} \Bigg\} dx = 0.
\end{aligned} \tag{4.116}$$

De maneira análoga ao que foi feito na eq.(4.110), após algumas integrações por partes e convenientes substituições, a equação integral para determinação dos deslocamentos no

domínio da viga inferior fica:

$$
\begin{aligned}
&w_2(\widehat{x}) + [V_1^{*g_2}(x,\widehat{x})w_1(x)]_0^L - \left[M_1^{*g_2}(x,\widehat{x})\frac{dw_1}{dx}(x)\right]_0^L + \\
&+ [V_2^{*g_2}(x,\widehat{x})w_2(x)]_0^L - \left[M_2^{*g_2}(x,\widehat{x})\frac{dw_2}{dx}(x)\right]_0^L + \\
&+ [V_k^{*g_2}(x,\widehat{x})v(x)]_0^L = [V_1(x)w_1^{*g_2}(x,\widehat{x})]_0^L - \left[P_1\frac{dw_1}{dx}(x)w_1^{*g_2}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \\
&+ [V_2(x)w_2^{*g_2}(x,\widehat{x})]_0^L - \left[P_2\frac{dw_2}{dx}(x)w_2^{*g_2}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[M_1(x)\frac{dw_1^{*g_2}}{dx}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \\
&- \left[M_2(x)\frac{dw_2^{*g_2}}{dx}(x,\widehat{x})\right]_0^L + [V_k(x)v^{*g_2}(x,\widehat{x})]_0^L + \int_0^L g(x)w^{*g_2}(x,\widehat{x})dx, \qquad (4.117)
\end{aligned}
$$

Por fim, ponderando em termos da fonte em força na camada de cisalhamento, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \left\{ \left[D_1\frac{d^4w_1}{dx^4} + P\frac{d^2w_1}{dx^2} + k_c\left(w_1 - v\right) - g\right] w_1^{*k} + \left[D_2\frac{d^4w_2}{dx^4} + P_2\frac{d^2w_2}{dx^2} + \right.\right. \\
&\left.\left. -k_k\left(v - w_2\right)\right] w_2^{*k} + \left[-G_s\frac{d^2v}{dx^2} + k_c\left(v - w_1\right) + k_k\left(v - w_2\right)\right] v^{*k} \right\} dx = 0. \qquad (4.118)
\end{aligned}
$$

De maneira análoga ao que foi feito na eq.(4.110), após algumas integrações por partes e convenientes substituições, a eq.(4.118) fica:

$$
\begin{aligned}
&v(\widehat{x}) + \left[V_1^{*k}(x,\widehat{x})w_1(x)\right]_0^L - \left[M_1^{*k}(x,\widehat{x})\frac{dw_1}{dx}(x)\right]_0^L + \\
&+ \left[V_2^{*k}(x,\widehat{x})w_2(x)\right]_0^L - \left[M_2^{*k}(x,\widehat{x})\frac{dw_2}{dx}(x)\right]_0^L + \\
&+ \left[V_k^{*k}(x,\widehat{x})v(x)\right]_0^L = \left[V_1(x)w_1^{*k}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[P_1\frac{dw_1}{dx}(x)w_1^{*k}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \\
&+ \left[V_2(x)w_2^{*k}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[P_2\frac{dw_2}{dx}(x)w_2^{*k}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[M_1(x)\frac{dw_1^{*k}}{dx}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \\
&- \left[M_2(x)\frac{dw_2^{*k}}{dx}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \left[V_k(x)v^{*k}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \int_0^L g(x)w^{*k}(x,\widehat{x})dx, \qquad (4.119)
\end{aligned}
$$

que corresponde a equação integral para deslocamentos no domínio da camada cisalhante.

Observando as eqs.(4.115), (4.117) e (4.119), vê-se que há cinco incógnitas no contorno $(w_1(x); w_2(x); v(x);\ \dfrac{dw_1}{dx}(x); e\ \dfrac{dw_2}{dx}(x))$ enquanto que há apenas três equações integrais, tornando-se necessário o conhecimento de mais duas equações, as quais serão obtidas a partir da derivada em relação ao ponto fonte $(\widehat{x})$ das eqs.(4.115) e (4.117). Portanto,

derivando a eq.(4.115) em relação a $\widehat{x}$, obtêm-se:

$$\frac{dw_1}{d\widehat{x}}(\widehat{x}) + \left[\frac{dV_1^{*g_1}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})w_1(x)\right]_0^L - \left[\frac{dM_1^{*g_1}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\frac{dw_1}{dx}(x)\right]_0^L +$$
$$+ \left[\frac{dV_2^{*g_1}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})w_2(x)\right]_0^L - \left[\frac{dM_2^{*g_1}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\frac{dw_2}{dx}(x)\right]_0^L +$$
$$+ \left[\frac{dV_k^{*g_1}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})v(x)\right]_0^L = \left[V_1(x)\frac{dw_1^{*g_1}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[P_1\frac{dw_1}{dx}(x)\frac{dw_1^{*g_1}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L +$$
$$- \left[M_1(x)\frac{d^2w_1^{*g_1}}{dxd\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \left[V_2(x)\frac{dw_2^{*g_1}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[P_2\frac{dw_2}{dx}(x)\frac{dw_1^{*g_1}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L +$$
$$- \left[M_2(x)\frac{d^2w_2^{*g_1}}{dxd\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \left[V_k(x)\frac{dv^{*g_1}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \int_0^L g(x)\frac{dw_1^{*g_1}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})dx. \quad (4.120)$$

Já a derivada da eq.(4.117) em relação ao ponto fonte $\widehat{x}$, fornece a seguinte equação:

$$\frac{dw_2}{d\widehat{x}}(\widehat{x}) + \left[\frac{dV_1^{*g_2}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})w_1(x)\right]_0^L - \left[\frac{dM_1^{*g_2}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\frac{dw_1}{dx}(x)\right]_0^L +$$
$$+ \left[\frac{dV_2^{*g_2}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})w_2(x)\right]_0^L - \left[\frac{dM_2^{*g_2}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\frac{dw_2}{dx}(x)\right]_0^L +$$
$$+ \left[\frac{dV_k^{*g_2}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})v(x)\right]_0^L = \left[V_1(x)\frac{dw_1^{*g_2}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[P_1\frac{dw_1}{dx}(x)\frac{dw_1^{*g_2}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L +$$
$$- \left[M_1(x)\frac{d^2w_1^{*g_2}}{dxd\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \left[V_2(x)\frac{dw_2^{*g_2}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L - \left[P_2\frac{dw_2}{dx}(x)\frac{dw_1^{*g_2}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L +$$
$$- \left[M_2(x)\frac{d^2w_2^{*g_2}}{dxd\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \left[V_k(x)\frac{dv^{*g_2}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})\right]_0^L + \int_0^L g(x)\frac{dw_1^{*g_2}}{d\widehat{x}}(x,\widehat{x})dx. \quad (4.121)$$

Reescrevendo as eqs.(4.115), (4.117), (4.119), (4.120) e (4.121) na forma matricial, é obtido a equação integral do sistema de vigas duplas conectadas por camada elástica de

Kerr, na teoria de Euler-Bernoulli:

$$\left\{\begin{array}{c} w_1(\widehat{x}) \\ w_{1,\widehat{x}}(\widehat{x}) \\ v(\widehat{x}) \\ w_2(\widehat{x}) \\ w_{2,\widehat{x}}(\widehat{x}) \end{array}\right\} + \left\{\left[\begin{array}{ccccc} V_1^{*g_1} & -M_1^{*g_1} & V_k^{*g_1} & V_2^{*g_1} & -M_2^{*g_1} \\ V_{1,\widehat{x}}^{*g_1} & -M_{1,\widehat{x}}^{*g_1} & V_{k,\widehat{x}}^{*g_1} & V_{2,\widehat{x}}^{*g_1} & -M_{2,\widehat{x}}^{*g_1} \\ V_1^{*k} & -M_1^{*k} & V_k^{*k} & V_2^{*k} & -M_2^{*k} \\ V_1^{*g_2} & -M_1^{*g_2} & V_k^{*g_2} & V_2^{*g_2} & -M_2^{*g_2} \\ V_{1,\widehat{x}}^{*g_2} & -M_{1,\widehat{x}}^{*g_2} & V_{k,\widehat{x}}^{*g_2} & V_{2,\widehat{x}}^{*g_2} & -M_{2,\widehat{x}}^{*g_2} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} w_1(x) \\ w_{1,x}(x) \\ v(x) \\ w_2(x) \\ w_{2,x}(x) \end{array}\right\}\right\}_{x=0}^{x=L} =$$

$$\left\{\left[\begin{array}{ccccc} w_1^{*g_1} & -w_{1,x}^{*g_1} & v^{*g_1} & w_2^{*g_1} & -w_{2,x}^{*g_1} \\ w_{1,\widehat{x}}^{*g_1} & -w_{1,x\widehat{x}}^{*g_1} & v_{,\widehat{x}}^{*g_1} & w_{2,\widehat{x}}^{*g_1} & -w_{2,x\widehat{x}}^{*g_1} \\ w_1^{*k} & -w_{1,x}^{*k} & v^{*k} & w_2^{*k} & -w_{2,x}^{*k} \\ w_1^{*g_2} & -w_{1,x}^{*g_2} & v^{*g_2} & w_2^{*g_2} & -w_{2,x}^{*g_2} \\ w_{1,\widehat{x}}^{*g_2} & -w_{1,x\widehat{x}}^{*g_2} & v_{,\widehat{x}}^{*g_2} & w_{2,\widehat{x}}^{*g_2} & -w_{2,x\widehat{x}}^{*g_2} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} V_1(x) \\ M_1(x) \\ V_k(x) \\ V_2(x) \\ M_2(x) \end{array}\right\}\right\}_{x=0}^{x=L} + \int_0^L g(x)\left\{\begin{array}{c} w_1^{*g_1} \\ w_{1,\widehat{x}}^{*g_1} \\ v^{*k} \\ w_2^{*g_2} \\ w_{2,\widehat{x}}^{*g_2} \end{array}\right\} dx. \tag{4.122}$$

### 4.1.3 Equações algébricas

Como já mencionado no capítulo de vigas simples sobre a base elástica, a montagem do sistema algébrico, para posterior solução, requer a colocação do ponto fonte nas extremidades das vigas e da camada cisalhante: no contorno à esquerda quando $\widehat{x} \to 0 = \lim_{\xi \to 0}(0 + \xi)$ e no contorno à direita $\widehat{x} \to L = \lim_{\xi \to 0}(L - \xi)$. Fazendo as devidas considerações na eq.(4.122), monta-se a equação algébrica, escrita na forma compacta, como:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\}, \tag{4.123}$$

onde $[H]$ e $[G]$ são as matrizes de influência, $\{f\}$ é o vetor das cargas, $\{u\}$ é o vetor dos deslocamentos e $\{p\}$ o vetor dos esforços no contorno. Os vetores $u$ e $p$ são dados por:

$$\{u\} = \left\{\begin{array}{c} u_j \\ u_k \end{array}\right\}, \tag{4.124}$$

$$\{p\} = \left\{\begin{array}{c} p_j \\ p_k \end{array}\right\}, \tag{4.125}$$

onde $j$ e $k$ correspondem aos nós inicial e final, respectivamente, do elemento de contorno, conforme mostra a figura 4.2. Dessa forma, os vetores $u$ e $p$ são dados no contorno por:

$$\{u_j\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} w_1(0) & w_{1,x}(0) & v(0) & w_2(0) & w_{2,x}(0) \end{array} \right\}^T, \tag{4.126}$$

$$\{u_k\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} w_1(L) & w_{1,x}(L) & v(L) & w_2(L) & w_{2,x}(L) \end{array} \right\}^T, \tag{4.127}$$

$$\{p_j\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} V_1(0) & M_1(0) & V_k(0) & V_2(0) & M_2(0) \end{array} \right\}^T, \tag{4.128}$$

$$\{p_k\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} V_1(L) & M_1(L) & V_k(L) & V_2(L) & M_2(L) \end{array} \right\}^T \tag{4.129}$$

Note que o elemento de contorno proposto para esse problema possui dez graus de liberdade, sendo dois deles devido ao deslocamento vertical da camada cisalhante do modelo do Kerr. A figura 4.2 mostra ainda os sentidos positivos para os deslocamentos e esforços nas extremidades do elemento.

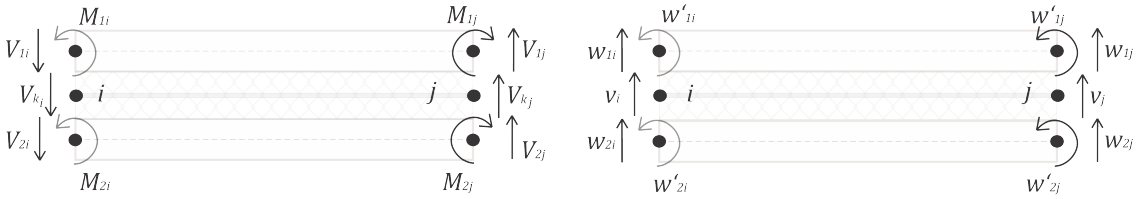



FIGURA 4.2 – Sentidos positivos dos esforços (a) e deslocamentos (b) nas extremidades do elemento duplo na teoria de Euler-Bernoulli.

A matriz de influência dos deslocamentos, $[H]$, dada na eq.(4.123), pode ser escrita como segue:

$$[H] = \left[ \begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \\ \\ H_{21} & H_{22} \end{array} \right], \text{ com: } \begin{array}{l} [H_{11}] = -[N], \ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ [H_{12}] = \ [N], \ para\ r = L\ e\ S = S_d \\ [H_{21}] = -[N], \ para\ r = L\ e\ S = S_a \\ [H_{22}] = \ [N], \ para\ r = 0\ e\ S = S_d \end{array} \tag{4.130}$$

onde:

$$[N] = \left[ \begin{array}{ccccc} S.\eta_{11}(r) & -\eta_{12}(r) & S.\eta_{13}(r) & S.\eta_{14}(r) & -\eta_{15}(r) \\ -\eta_{21}(r) & S.\eta_{22}(r) & -\eta_{23}(r) & -\eta_{24}(r) & S.\eta_{25}(r) \\ S.\eta_{31}(r) & -\eta_{32}(r) & S.\eta_{33}(r) & S.\eta_{34}(r) & -\eta_{35}(r) \\ S.\eta_{41}(r) & -\eta_{42}(r) & S.\eta_{43}(r) & S.\eta_{44}(r) & -\eta_{45}(r) \\ -\eta_{51}(r) & S.\eta_{52}(r) & -\eta_{53}(r) & -\eta_{54}(r) & S.\eta_{55}(r) \end{array} \right], \tag{4.131}$$

sendo $S_a$ e $S_d$ os valores dados pela função sinal para quando $x < \widehat{x}$ e $x > \widehat{x}$, respectivamente, e os coeficientes $\eta$ obtidos a partir dos esforços fundamentais, eqs.(4.77) a (4.91),

e suas derivadas.

$$\eta_{11}(r) = \eta_{22}(r) = -D_1 \left[ G_s \Delta_2 \frac{d^3}{dr^3} \left( \frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2} \right) - k_k^2 \frac{d^3}{dr^3} \right] \psi(r), \quad (4.132)$$

$$\eta_{12}(r) = -D_1 G_s \frac{d^2}{dr^2} \Delta_2 \left( \frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2} \right) \psi(r) + D_1 k_k^2 \frac{d^2}{dr^2} \psi(r), \quad (4.133)$$

$$\eta_{13}(r) = G_s k_c \Delta_2 \frac{d}{dr} \psi(r), \quad (4.134)$$

$$\eta_{14}(r) = \eta_{25}(r) = -D_2 k_c k_k \frac{d^3}{dr^3} \psi(r), \quad (4.135)$$

$$\eta_{15}(r) = -D_2 k_c k_k \frac{d^2}{dr^2} \psi(r), \quad (4.136)$$

$$\eta_{21}(r) = -D_1 \left[ G_s \Delta_2 \frac{d^4}{dr^4} \left( \frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2} \right) - k_k^2 \frac{d^4}{dr^4} \right] \psi(r), \quad (4.137)$$

$$\eta_{23}(r) = G_s k_c \Delta_2 \frac{d^2}{dr^2} \psi(r), \quad (4.138)$$

$$\eta_{24}(r) = -D_2 k_c k_k \frac{d^4}{dr^4} \psi(r), \quad (4.139)$$

$$\eta_{31}(r) = -D_1 k_c \frac{d^3}{dr^3} \Delta_2 \psi(r), \quad (4.140)$$

$$\eta_{32}(r) = -D_1 k_c \frac{d^2}{dr^2} \Delta_2 \psi(r), \quad (4.141)$$

$$\eta_{33}(r) = G_s \frac{d}{dr} \Delta_1 \Delta_2 \psi(r), \quad (4.142)$$

$$\eta_{34}(r) = -D_2 k_k \frac{d^3}{dr^3} \Delta_1 \psi(r), \quad (4.143)$$

$$\eta_{35}(r) = -D_2 k_k \frac{d^2}{dr^2} \Delta_1 \psi(r), \quad (4.144)$$

$$\eta_{41}(r) = \eta_{52}(r) = -D_1 k_c k_k \frac{d^3}{dr^3} \psi(r), \quad (4.145)$$

$$\eta_{42}(r) = -D_1 k_c k_k \frac{d^2}{dr^2} \psi(r), \quad (4.146)$$

$$\eta_{43}(r) = G_s k_k \Delta_1 \frac{d}{dr} \psi(r), \quad (4.147)$$

$$\eta_{44}(r) = \eta_{55}(r) = -D_2 \left[ G_s \frac{d^3}{dr^3} \Delta_1 \left( \frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2} \right) - k_c^2 \frac{d^3}{dr^3} \right] \psi(r), \quad (4.148)$$

$$\eta_{45}(r) = -D_2 G_s \frac{d^2}{dr^2} \Delta_1 \left( \frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2} \right) \psi(r) + k_c^2 D_2 \frac{d^2}{dr^2} \psi(r), \quad (4.149)$$

$$\eta_{51}(r) = -D_1 k_c k_k \frac{d^4}{dr^4} \psi(r), \quad (4.150)$$

$$\eta_{53}(r) = G_s k_k \Delta_1 \frac{d^2}{dr^2} \psi(r), \quad (4.151)$$

$$\eta_{54}(r) = -D_2 \left[ G_s \frac{d^4}{dr^4} \Delta_1 \left( \frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2} \right) - k_c^2 \frac{d^4}{dr^4} \right] \psi(r), \quad (4.152)$$

sendo $\psi(r)$ a solução fundamental desacoplada definida pela equação (4.16) e suas deri-

vadas.

Já a matriz de influência dos esforços, $[G]$, dada na eq.(4.123), pode ser escrita como:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, \text{ com: } \begin{array}{l} [G_{11}] = -[Q], \ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ [G_{12}] = [Q], \ para\ r = L\ e\ S = S_d \\ [G_{21}] = -[Q], \ para\ r = L\ e\ S = S_a \\ [G_{22}] = [Q], \ para\ r = 0\ e\ S = S_d, \end{array} \tag{4.153}$$

onde:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \beta_{11}(r) & -S.\beta_{12}(r) & \beta_{13}(r) & \beta_{14}(r) & -S.\beta_{15}(r) \\ -S.\beta_{21}(r) & \beta_{22}(r) & -S.\beta_{23}(r) & -S.\beta_{24}(r) & \beta_{25}(r) \\ \beta_{31}(r) & -S.\beta_{32}(r) & \beta_{33}(r) & \beta_{34}(r) & -S.\beta_{35}(r) \\ \beta_{41}(r) & -S.\beta_{42}(r) & \beta_{43}(r) & \beta_{44}(r) & -S.\beta_{45}(r) \\ -S.\beta_{51}(r) & \beta_{52}(r) & -S.\beta_{53}(r) & -S.\beta_{54}(r) & \beta_{55}(r) \end{bmatrix}, \tag{4.154}$$

e os coeficientes $\beta$ são obtidos a partir dos deslocamentos fundamentais, eqs.(4.68) a (4.76) e suas derivadas:

$$\beta_{11}(r) = G_s\Delta_2\left(\frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2}\right)\psi(r) - k_k^2\psi(r), \tag{4.155}$$

$$\beta_{12}(r) = \beta_{21}(r) = \frac{d}{dr}\left[G_s\Delta_2\left(\frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2}\right) - k_k^2\right]\psi(r), \tag{4.156}$$

$$\beta_{13}(r) = \beta_{31}(r) = k_c\Delta_2\psi(r), \tag{4.157}$$

$$\beta_{14}(r) = \beta_{41}(r) = k_c k_k\psi(r), \tag{4.158}$$

$$\beta_{15}(r) = \beta_{24}(r) = \beta_{42}(r) = \beta_{51}(r) = k_c k_k\frac{d}{dr}\psi(r), \tag{4.159}$$

$$\beta_{22}(r) = \frac{d^2}{dr^2}\left[G_s\Delta_2\left(\frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2}\right) - k_k^2\right]\psi(r), \tag{4.160}$$

$$\beta_{23}(r) = \beta_{32}(r) = k_c\frac{d}{dr}\Delta_2\psi(r), \tag{4.161}$$

$$\beta_{25}(r) = \beta_{52}(r) = k_c k_k\frac{d^2}{dr^2}\psi(r), \tag{4.162}$$

$$\beta_{33}(r) = \Delta_1\Delta_2\psi(r), \tag{4.163}$$

$$\beta_{34}(r) = \beta_{43}(r) = k_k\Delta_1\psi(r), \tag{4.164}$$

$$\beta_{35}(r) = \beta_{53}(r) = k_k\Delta_1\frac{d}{dr}\psi(r), \tag{4.165}$$

$$\beta_{44}(r) = G_s\Delta_1\left(\frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2}\right)\psi(r) - k_c^2\psi(r), \tag{4.166}$$

$$\beta_{45}(r) = \beta_{54}(r) = \frac{d}{dr}\left[G_s\Delta_1\left(\frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2}\right) - k_c^2\right]\psi(r), \tag{4.167}$$

$$\beta_{55}(r) = \frac{d^2}{dr^2}\left[G_s\Delta_1\left(\frac{k_c + k_k}{G_s} - \frac{d^2}{dr^2}\right) - k_c^2\right]\psi(r). \tag{4.168}$$

O vetor de carga $\{f\}$, para o carregamento uniformemente distribuído, fica:

$$\{f_i\} = \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} f_{1_j} & f_{2_j} & f_{3_j} & f_{4_j} & f_{5_j} & f_{1_k} & f_{2_k} & f_{3_k} & f_{4_k} & f_{5_k} \end{array} \right\}^T, \tag{4.169}$$

Já os coeficientes $\theta$ são definidos por:

$$f_{1_j} = \int_0^L g_i(x)\beta_{1\theta}(x)dx, \tag{4.170}$$

$$f_{2_j} = \int_0^L g_i(x)\beta_{2\theta}(x)dx, \tag{4.171}$$

$$f_{3_j} = \int_0^L g_i(x)\beta_{3\theta}(x)dx, \tag{4.172}$$

$$f_{4_j} = \int_0^L g_i(x)\beta_{4\theta}(x)dx, \tag{4.173}$$

$$f_{5_j} = \int_0^L g_i(x)\beta_{5\theta}(x)dx, \tag{4.174}$$

$$f_{1_k} = \int_0^L g_i(x)\beta_{1\theta}(L-x)dx, \tag{4.175}$$

$$f_{2_k} = \int_0^L g_i(x)\beta_{2\theta}(L-x)dx, \tag{4.176}$$

$$f_{3_k} = \int_0^L g_i(x)\beta_{3\theta}(L-x)dx, \tag{4.177}$$

$$f_{4_k} = \int_0^L g_i(x)\beta_{4\theta}(L-x)dx, \tag{4.178}$$

$$f_{5_k} = \int_0^L g_i(x)\beta_{5\theta}(L-x)dx, \tag{4.179}$$

onde $g_i$ corresponde aos carregamentos aplicados ao longo das vigas e $\theta = 3i-2$, sendo $i = 1, 2$ para as vigas superior e inferior, respectivamente. Para o cálculo de um carregamento uniformemente distribuído ao longo de todo o comprimento da(s) viga(s), é recomendado que toda a expressão dos coeficientes $\beta$ sejam abertas de tal forma que fique em função das derivadas $(\frac{d^m\psi}{dr^m})$, para que posteriormente sejam efetuadas as integrais em cima dessas derivadas: $I_m = \int \frac{d^m\psi}{dr^m}dr$. As integrais para os casos usuais são apresentadas a seguir. Se o carregamento for concentrado, não é necessário efetuar tais integrais, sendo o vetor de carga dado diretamente pelos coeficientes $\beta$, com $x$ sendo o ponto de aplicação da força, multiplicados por sua intensidade.

Dessa forma, para se obter os esforços e deslocamentos no contorno, resta aplicar as condições de contorno à eq.(4.123) para obter a solução do problema.

#### 4.1.3.1 Determinação dos deslocamentos no domínio

Considere agora determinar os deslocamentos e esforços em pontos internos no domínio do sistema de vigas duplo, uma vez que as incógnitas no contorno já foram determinadas. Dessa forma, para a determinação dos campos em um ponto "$A$", conforme figura 4.3, a eq.(4.122) é reescrita em função do ponto "$A$ no domínio, ficando:

$$\left\{\begin{array}{c} w_1(x_a) \\ w_{1,\widehat{x}}(x_a) \\ v(x_a) \\ w_2(x_a) \\ w_{2,\widehat{x}}(x_a) \end{array}\right\} + \left\{\left[\begin{array}{ccccc} V_1^{*g_1} & -M_1^{*g_1} & V_k^{*g_1} & V_2^{*g_1} & -M_2^{*g_1} \\ V_{1,\widehat{x}}^{*g_1} & -M_{1,\widehat{x}}^{*g_1} & V_{k,\widehat{x}}^{*g_1} & V_{2,\widehat{x}}^{*g_1} & -M_{2,\widehat{x}}^{*g_1} \\ V_1^{*k} & -M_1^{*k} & V_k^{*k} & V_2^{*k} & -M_2^{*k} \\ V_1^{*g_2} & -M_1^{*g_2} & V_k^{*g_2} & V_2^{*g_2} & -M_2^{*g_2} \\ V_{1,\widehat{x}}^{*g_2} & -M_{1,\widehat{x}}^{*g_2} & V_{k,\widehat{x}}^{*g_2} & V_{2,\widehat{x}}^{*g_2} & -M_{2,\widehat{x}}^{*g_2} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} w_1(x) \\ w_{1,x}(x) \\ v(x) \\ w_2(x) \\ w_{2,x}(x) \end{array}\right\}\right\}_{x=0}^{x=L} =$$

$$\left\{\left[\begin{array}{ccccc} w_1^{*g_1} & -w_{1,x}^{*g_1} & v^{*g_1} & w_2^{*g_1} & -w_{2,x}^{*g_1} \\ w_{1,\widehat{x}}^{*g_1} & -w_{1,x\widehat{x}}^{*g_1} & v_{,\widehat{x}}^{*g_1} & w_{2,\widehat{x}}^{*g_1} & -w_{2,x\widehat{x}}^{*g_1} \\ w_1^{*k} & -w_{1,x}^{*k} & v^{*k} & w_2^{*k} & -w_{2,x}^{*k} \\ w_1^{*g_2} & -w_{1,x}^{*g_2} & v^{*g_2} & w_2^{*g_2} & -w_{2,x}^{*g_2} \\ w_{1,\widehat{x}}^{*g_2} & -w_{1,x\widehat{x}}^{*g_2} & v_{,\widehat{x}}^{*g_2} & w_{2,\widehat{x}}^{*g_2} & -w_{2,x\widehat{x}}^{*g_2} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} V_1(x) \\ M_1(x) \\ V_k(x) \\ V_2(x) \\ M_2(x) \end{array}\right\}\right\}_{x=0}^{x=L} + \int_0^L g_i(x) \left\{\begin{array}{c} w_i^{*g_1} \\ w_{i,\widehat{x}}^{*g_1} \\ w_i^{*k} \\ w_i^{*g_2} \\ w_{i,\widehat{x}}^{*g_2} \end{array}\right\} dx. \tag{4.180}$$

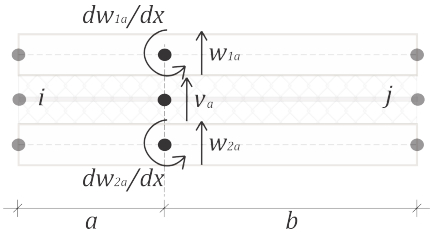



FIGURA 4.3 – Deslocamentos em um ponto $A$ no domínio das vigas.

Pode-se ainda representar a eq.(4.180), na forma compacta como:

$$\{u_a\} = -[H]\{u\} + [G]\{p\} + \{f\}, \tag{4.181}$$

onde $\{u\}$ e $\{p\}$ são os deslocamentos e esforços no contorno, respectivamente, obtidos por meio da eq.(4.123).

A matriz de influência $[H]$ é escrita como:

$$[H] = \left[\begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \end{array}\right], \text{ com: } \begin{array}{l} [H_{11}] = -[N], \ para\ r = x_a\ e\ S = S_a \\ [H_{12}] = \ \ [N], \ para\ r = x_b\ e\ S = S_d \end{array} \tag{4.182}$$

onde:

$$[N] = \begin{bmatrix} S.\eta_{11}(r) & -\eta_{12}(r) & S.\eta_{13}(r) & S.\eta_{14}(r) & -\eta_{15}(r) \\ -\eta_{21}(r) & S.\eta_{22}(r) & -\eta_{23}(r) & -\eta_{24}(r) & S.\eta_{25}(r) \\ S.\eta_{31}(r) & -\eta_{32}(r) & S.\eta_{33}(r) & S.\eta_{34}(r) & -\eta_{35}(r) \\ S.\eta_{41}(r) & -\eta_{42}(r) & S.\eta_{43}(r) & S.\eta_{44}(r) & -\eta_{45}(r) \\ -\eta_{51}(r) & S.\eta_{52}(r) & -\eta_{53}(r) & -\eta_{54}(r) & S.\eta_{55}(r) \end{bmatrix}, \tag{4.183}$$

e os coeficientes $\eta$ são dados pelas eqs.(4.132) a (4.152). Já a matriz de influência $[G]$, é dada por:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \end{bmatrix}, \text{ com: } \begin{array}{l} [G_{11}] = -[Q], \ para\ r = a\ e\ S = S_a \\ [G_{12}] = \ \ [Q], \ para\ r = b\ e\ S = S_d \end{array} \tag{4.184}$$

onde:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \beta_{11}(r) & -S.\beta_{12}(r) & \beta_{13}(r) & \beta_{14}(r) & -S.\beta_{15}(r) \\ -S.\beta_{21}(r) & \beta_{22}(r) & -S.\beta_{23}(r) & -S.\beta_{24}(r) & \beta_{25}(r) \\ \beta_{31}(r) & -S.\beta_{32}(r) & \beta_{33}(r) & \beta_{34}(r) & -S.\beta_{35}(r) \\ \beta_{41}(r) & -S.\beta_{42}(r) & \beta_{43}(r) & \beta_{44}(r) & -S.\beta_{45}(r) \\ -S.\beta_{51}(r) & \beta_{52}(r) & -S.\beta_{53}(r) & -S.\beta_{54}(r) & \beta_{55}(r) \end{bmatrix}, \tag{4.185}$$

sendo os coeficientes $\beta$ definidos pelas eqs.(4.155) a (4.168).

O vetor de carga, $f$, para o carregamento uniformemente distribuído, fica:

$$\{f_i\} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \end{bmatrix}^T \tag{4.186}$$

onde os coeficientes são definidos por:

$$\begin{array}{l} f_1 = \int_0^{x_a} g_i(x)\beta_{1\theta}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g_i(x)\beta_{1\theta}(L-x)dx, \\ f_2 = \int_0^{x_a} g_i(x)\beta_{2\theta}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g_i(x)\beta_{2\theta}(L-x)dx, \\ f_3 = \int_0^{x_a} g_i(x)\beta_{3\theta}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g_i(x)\beta_{3\theta}(L-x)dx, \\ f_4 = \int_0^{x_a} g_i(x)\beta_{4\theta}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g_i(x)\beta_{4\theta}(L-x)dx, \\ f_5 = \int_0^{x_a} g_i(x)\beta_{5\theta}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g_i(x)\beta_{5\theta}(L-x)dx, \end{array} \tag{4.187}$$

onde $\theta = 2i - 1$.

Caso atue no domínio uma força concentrada $(p_i)$ em um ponto $x_{p_i}$, o vetor de carga

ficará:

$$f_1 = \beta_{1\theta}(r_{p_i}), \tag{4.188}$$
$$f_2 = \beta_{2\theta}(r_{p_i}), \tag{4.189}$$
$$f_3 = \beta_{3\theta}(r_{p_i}), \tag{4.190}$$
$$f_4 = \beta_{4\theta}(r_{p_i}), \tag{4.191}$$
$$f_5 = \beta_{5\theta}(r_{p_i}), \tag{4.192}$$

onde: $r_{p_i} = |x_{p_i} - x_a|$, $S_i = \begin{cases} -1 \text{ se } x_{p_i} < x_a \\ 1 \text{ se } x_{p_i} > x_a \end{cases}$.

## 4.2 Nas hipóteses de Timoshenko

### 4.2.1 O Problema Fundamental

Com a consideração da não ortogonalidade da seção transversal na configuração deformada pelas hipóteses da teoria de Timoshenko, o problema fundamental, de domínio infinito, estará sujeito também a fontes concentradas em termos de momentos fletores nas vigas superior e inferior.

Por analogia ao problema real, eqs.(2.111) a (2.115), a equação governante do problema fundamental do sistema de vigas duplas conectadas pela base elástica de Kerr e submetidas a cargas axiais, será dana, na forma matricial, por:

$$\begin{bmatrix} (P_1 - D_1)\frac{d^2}{dx^2} + k_c & -D_1\frac{d}{dx} & -k_c & 0 & 0 \\ D_1\frac{d}{dx} & D_1 - D_2\frac{d^2}{dx^2} & 0 & 0 & 0 \\ -k_c & 0 & k_c + k_k - G_s\frac{d^2}{dx^2} & -k_k & 0 \\ 0 & 0 & -k_k & (P_2 - D_3)\frac{d^2}{dx^2} + k_k & -D_3\frac{d}{dx} \\ 0 & 0 & 0 & D_3\frac{d}{dx} & D_3 - D_4\frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} w_1^{*g_1} & w_1^{*m_1} & w_1^{*k} & w_1^{*g_2} & w_1^{*m_2} \\ \phi_1^{*g_1} & \phi_1^{*m_1} & \phi_1^{*k} & \phi_1^{*g_2} & \phi_1^{*m_2} \\ v^{*g_1} & v^{*m_1} & v^{*k} & v^{*g_2} & v^{*m_2} \\ w_2^{*g_1} & w_2^{*m_1} & w_2^{*k} & w_2^{*g_2} & w_2^{*m_2} \\ \phi_2^{*g_1} & \phi_2^{*m_1} & \phi_2^{*k} & \phi_2^{*g_2} & \phi_2^{*m_2} \end{bmatrix} = \delta(x, \widehat{x}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.193}$$

onde $D_1 = \kappa_1 G_1 A_1$, $D_2 = E_1 I_1$, $D_3 = \kappa_2 G_2 A_2$ e $D_4 = E_2 I_2$. Reescrevendo a eq.(4.193) na forma compacta, tem-se:

$$[B]\,[G] = \delta(x, \widehat{x})\,[I], \tag{4.194}$$

onde [B] é a matriz dos operadores, [G] é a matriz de influência dos deslocamentos e

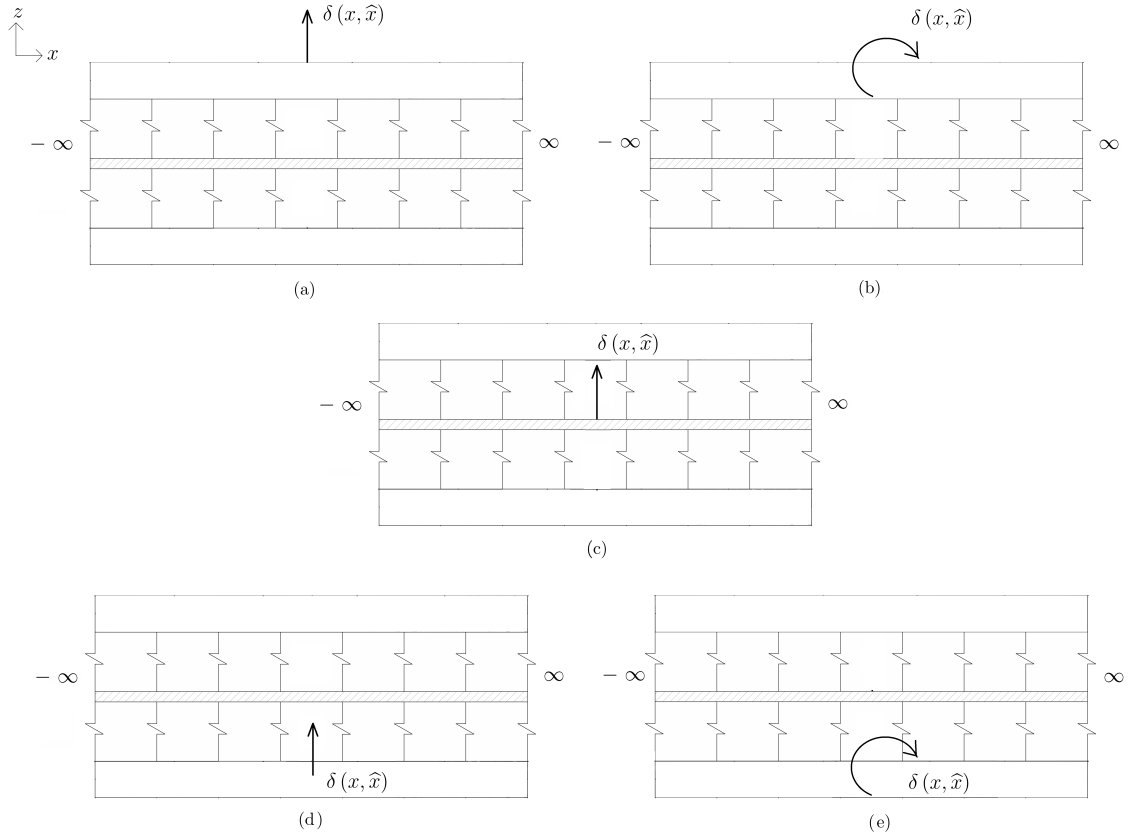



FIGURA 4.4 – Problema fundamental com fontes aplicadas em força e momento na viga superior (a,b), em força na camada cisalhante (c) e em força e momento na viga inferior (d,e).

$[I]$ é a matriz identidade. Assim como foi feito nos problemas anteriores, a eq.(4.194) será desacoplada via método de Hörmander (1963), resultando na equação equivalente desacoplada dada em função do escalar $\psi$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\alpha\frac{d^8}{dx^8}+\beta\frac{d^6}{dx^6}+\gamma\frac{d^4}{dx^4}+\theta\frac{d^2}{dx^2}+\zeta\right)\psi(x,\widehat{x})=\delta(x,\widehat{x}), \tag{4.195}$$

onde as constantes da equação são dadas por:

$$\alpha = \quad -D_2D_4T_1T_2Gs, \tag{4.196}$$

$$\beta = \quad T_1T_2\left[D_2D_4\left(k_c+k_k\right)+Gs\left(D_1D_4+D_2D_3\right)\right]+Gs\left[D_4T_2\left(D_1^2-D_2k_c\right)+ \\ +D_2T_1\left(D_3^2-D_4k_k\right)\right], \tag{4.197}$$

$$\gamma = \quad Gs\left[-D_1D_3P_1P_2+D_1D_4\left(T_2k_c+P_1k_k\right)+D_2D_3\left(P_2k_c+T_1k_k\right)\right]+ \\ -\left(k_c+k_k\right)\left(D_2D_3P_2T_1+D_1D_4P_1T_2\right)+D_2D_4k_ck_k\left(T_1+T_2-Gs\right), \tag{4.198}$$

$$\theta = \quad D_1D_3\left[P_1P_2\left(k_c+k_k\right)-Gs\left(P_2k_c+P_1k_k\right)\right]-k_ck_k\left[D_2D_3\left(P_2-Gs+T_1\right)+ \\ +D_1D_4\left(P_1-Gs+T_2\right)\right)], \tag{4.199}$$

$$\zeta = \quad D_1D_3k_ck_k\left(P_1+P_2-Gs\right), \tag{4.200}$$

sendo $T_1 = P_1 - D_1$ e $T_2 = P_2 - D_3$. Considerando que $\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = y$, a equação característica homogênea associada ficará:

$$y\left(\alpha y^4 + \beta y^3 + \gamma y^2 + \theta y + \zeta\right) = 0, \tag{4.201}$$

onde terá uma raiz nula e quatro outras dadas de forma semelhante ao discutido na seção 4.1.1. A solução fundamental desacoplada proposta nessa tese pode ser escrita a partir da combinação das possíveis funções $f_i(r)$ associados a natureza da sua respectiva raiz $y_i$, sendo dada por:

$$\psi = C_1 r + C_2 f_2 + C_3 f_3 + C_4 f_4 + C_5 f_5 \tag{4.202}$$

cujos possíveis casos já foram apresentados na tabela 4.1. Dessa forma, para os casos mais usuais as solução fundamentais desacopladas adotadas serão:

**Uma raiz real positiva, uma real negativa e duas complexas e conjugadas:** Considerando que as raízes $y_2$ e $y_3$ são reais, positiva e negativa, respectivamente, enquanto que $y_4$ e $y_5$ são complexas conjugadas, a solução fundamental desacoplada proposta é:

$$\psi(r) = C_1 r + C_2 e^{-\sqrt{y_2}r} + C_3 sin(\sqrt{-y_3}r) + C_4 e^{-pr} cos(qr) + C_5 e^{-pr} sen(qr), \tag{4.203}$$

sendo

$$C_1 = \frac{1}{2\alpha t^2 y_1 y_2}, \tag{4.204}$$

$$C_2 = \frac{-1}{2\alpha y_1 \sqrt{y_1}\,(t^2+m)\,(y_1 - y_2)}, \tag{4.205}$$

$$C_3 = \frac{-1}{2\alpha y_2 \sqrt{-y_2}\,(t^2+n)\,(y_1 - y_2)}, \tag{4.206}$$

$$C_4 = -\frac{y_1 y_2\,(q^2 - 3p^2) + hp + c\,(y_1 + y_2)}{4\alpha p t^3\,(t^2+m)\,(t^2+n)}, \tag{4.207}$$

$$C_5 = -\frac{y_1 y_2\,(3q^2 - p^2) + hq + d\,(y_1 + y_2)}{4\alpha p t^3\,(t^2+m)\,(t^2+n)}. \tag{4.208}$$

**Duas raízes reais positivas e duas complexas e conjugadas:** Considerando que as raízes $y_2$ e $y_3$ são reais e positivas, enquanto que $y_4$ e $y_5$ são complexas conjugadas, a solução fundamental desacoplada proposta será dada por:

$$\psi(r) = C_1 r + C_2 e^{-\sqrt{y_2}r} + C_3 e^{-\sqrt{y_3}r}) + C_4 e^{-pr} cos(qr) + C_5 e^{-pr} sen(qr), \tag{4.209}$$

com constantes

$$C_1 = \frac{1}{2\alpha t^2 y_1 y_2}, \tag{4.210}$$

$$C_2 = \frac{-1}{2\alpha y_1 \sqrt{y_1}\,(t^2+m)\,(y_1-y_2)}, \tag{4.211}$$

$$C_3 = \frac{1}{2\alpha y_2 \sqrt{y_2}\,(t^2+n)\,(y_1-y_2)}, \tag{4.212}$$

$$C_4 = -\frac{y_1 y_2\,(q^2-3p^2)+hp+c\,(y_1+y_2)}{4\alpha p t^3\,(t^2+m)\,(t^2+n)}, \tag{4.213}$$

$$C_5 = -\frac{y_1 y_2\,(3q^2-p^2)+hq+d\,(y_1+y_2)}{4\alpha p t^3\,(t^2+m)\,(t^2+n)}. \tag{4.214}$$

**Uma raiz real positiva e três outras reais negativas:** Considerando agora que a $y_2$ é reais e positiva, enquanto que as demais são negativas, a solução fundamental desacoplada proposta será dada por:

$$\psi(r) = C_1 r + C_2 e^{-\sqrt{y_2}r} + C_3 sin(\sqrt{-y_3}r) + C_4 sin(\sqrt{-y_4}r) + C_5 sin(\sqrt{-y_5}r), \tag{4.215}$$

com constantes

$$C_1 = \frac{1}{2\alpha y_1 y_2 y_3 y_4}, \tag{4.216}$$

$$C_2 = \frac{-1}{2\alpha y_1 \sqrt{y_1}\,(y_1-y_2)\,(y_1-y_3)\,(y_1-y_4)}, \tag{4.217}$$

$$C_3 = \frac{-1}{2\alpha y_2 \sqrt{-y_2}\,(y_1-y_2)\,(y_2-y_3)\,(y_2-y_4)}, \tag{4.218}$$

$$C_4 = \frac{1}{2\alpha y_3 \sqrt{-y_3}\,(y_1-y_3)\,(y_2-y_3)\,(y_3-y_4)}, \tag{4.219}$$

$$C_5 = \frac{-1}{2\alpha y_4 \sqrt{-y_4}\,(y_1-y_4)\,(y_2-y_4)\,(y_3-y_4)}. \tag{4.220}$$

De posse da solução fundamental desacoplada ($\psi$) é possível obter as soluções fundamentais em termos de deslocamentos e rotações por meio da eq.(3.10), sendo dadas

por:

$$w_1^{*g_1} = \Delta_2 \left\{ D_3^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_4 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) \psi - Gs \Delta_k \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.221}$$

$$\phi_1^{*g_1} = -w_1^{*m_1} = -D_1 d \left\{ D_3^2 d^2 \Delta_g + \Delta_4 \left\{ k_c k_k + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) - Gs \Delta_k \right] \right\} \right\}, \tag{4.222}$$

$$v^{*g_1} = w_1^{*k} = k_c \Delta_2 \left( d^2 D_3^2 + \Delta_4 \Delta_k \right), \tag{4.223}$$

$$w_2^{*g_1} = w_1^{*g_2} = k_c k_k \Delta_2 \Delta_4, \tag{4.224}$$

$$\phi_2^{*g_1} = -w_1^{*m_2} = -k_c D_3 k_k d \Delta_2, \tag{4.225}$$

$$\begin{aligned} \phi_1^{*m_1} = {} & D_3^2 d^2 \left\{ k_c k_k + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) - Gs \Delta_c \right] \right\} + d^2 \Delta_4 \left\{ k_c k_k \left( D_{lp} + D_{up} - Gs \right) + \right. \\ & \left. + d^2 \left[ D_{lp} D_{up} \Delta_g - Gs \left( k_c D_{lp} + D_{up} k_k \right) \right] \right\}, \end{aligned} \tag{4.226}$$

$$v^{*m_1} = -\phi_1^{*k} = k_c D_1 d \left( d^2 D_3^2 + \Delta_4 \Delta_k \right), \tag{4.227}$$

$$w_2^{*m_1} = -\phi_1^{*g_2} = k_c D_1 k_k d \Delta_4, \tag{4.228}$$

$$\phi_2^{*m_1} = \phi_1^{*m_2} = -k_c D_1 D_3 k_k d^2, \tag{4.229}$$

$$v^{*k} = \left( D_1^2 d^2 + \Delta_2 \Delta_c \right) \left( D_3^2 d^2 + \Delta_4 \Delta_k \right), \tag{4.230}$$

$$w_2^{*k} = v^{*g_2} = k_k \Delta_4 \left( d^2 D_1^2 + \Delta_c \Delta_2 \right), \tag{4.231}$$

$$\phi_2^{*k} = -v^{*m_2} = -D_3 k_k d \left( d^2 D_1^2 + \Delta_c \Delta_2 \right), \tag{4.232}$$

$$w_2^{*g_2} = \Delta_4 \left\{ D_1^2 d^2 \Delta_g + \Delta_2 \left\{ k_c k_k + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) - Gs \Delta_c \right] \right\} \right\}, \tag{4.233}$$

$$\phi_2^{*g_2} = -w_2^{*m_2} = -D_3 d \left\{ D_1^2 d^2 \Delta_g + \Delta_2 \left\{ k_c k_k + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) - Gs \Delta_c \right] \right\} \right\}, \tag{4.234}$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{*m_2} = {} & D_1^2 d^2 \left\{ k_c k_k + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) - Gs \Delta_k \right] \right\} + d^2 \Delta_2 \left\{ k_c k_k \left( D_{lp} + D_{up} - Gs \right) + \right. \\ & \left. + d^2 \left[ D_{lp} D_{up} \Delta_g - Gs \left( k_c D_{lp} + D_{up} k_k \right) \right] \right\}, \end{aligned} \tag{4.235}$$

onde $d\left(\cdot\right)^l = \dfrac{d^l\left(\cdot\right)}{dr^l}$ são as derivadas de ordem $j$ e os operadores $\Delta$ dados por:

$$\Delta_c = \left( P_1 - D_1 \right) d\left(\cdot\right)^2 + k_c, \tag{4.236}$$

$$\Delta_k = \left( P_2 - D_3 \right) d\left(\cdot\right)^2 + k_k, \tag{4.237}$$

$$\Delta_g = k_c + k_k - G_s d\left(\cdot\right)^2, \tag{4.238}$$

$$\Delta_2 = D_1 - D_2 d\left(\cdot\right)^2, \tag{4.239}$$

$$\Delta_4 = D_3 - D_4 d\left(\cdot\right)^2. \tag{4.240}$$

As soluções fundamentais em esforços são dadas de forma análoga aos esforços do

problema real, equações (2.116), (2.117) e (2.118). Dessa forma, são dados por:

$$V_1^{*g_1} = -D_1 D_2 d^3 \left\{ D_3^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_4 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_k \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.241}$$

$$M_1^{*g_1} = -D_1 D_2 d^2 \left\{ D_3^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_4 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_k \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.242}$$

$$V_k^{*g_1} = G_s k_c d \Delta_2 \left( D_3^2 d^2 \psi + \Delta_4 \Delta_k \psi \right), \tag{4.243}$$

$$V_2^{*g_1} = -D_3 k_c D_4 k_k d^3 \Delta_2 \psi, \tag{4.244}$$

$$M_2^{*g_1} = -D_4 k_c D_3 k_k d^2 \Delta_2 \psi, \tag{4.245}$$

$$V_1^{*m_1} = D_1 D_3^2 d^2 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_c \psi \right] \right\} + D_1 d^2 \Delta_4 \left\{ k_c k_k \left( D_{lp} + D_{up} + \right. \right.$$
$$\left. - G_s \right) \psi + d^2 \left[ D_{lp} D_{up} \Delta_g \psi - G_s \left( k_c D_{lp} + D_{up} k_k \right) \psi \right] \Big\} + D_1^2 d^2 \left\{ D_3^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_4 \left\{ k_c k_k \psi + \right.$$
$$\left. \left. + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_k \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.246}$$

$$M_1^{*m_1} = D_2 D_3^2 d^3 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_c \psi \right] \right\} + D_2 d^3 \Delta_4 \left\{ k_c k_k \left( D_{lp} + D_{up} + \right. \right.$$
$$\left. \left. - G_s \right) \psi + d^2 \left[ D_{lp} D_{up} \Delta_g \psi - G_s \left( k_c D_{lp} + D_{up} k_k \right) \psi \right] \right\}, \tag{4.247}$$

$$V_k^{*m_1} = G_s k_c D_1 d^2 \left( d^2 D_3^2 \psi + \Delta_4 \Delta_k \psi \right), \tag{4.248}$$

$$V_2^{*m_1} = -k_c D_1 D_3 D_4 k_k d^4 \psi, \tag{4.249}$$

$$M_2^{*m_1} = -k_c D_1 D_3 D_4 k_k d^3 \psi, \tag{4.250}$$

$$V_1^{*k} = -k_c D_1 D_2 d^3 \left( D_3^2 d^2 \psi + \Delta_4 \Delta_k \psi \right), \tag{4.251}$$

$$M_1^{*k} = -k_c D_1 D_2 d^2 \left( D_3^2 d^2 \psi + \Delta_4 \Delta_k \psi \right), \tag{4.252}$$

$$V_k^{*k} = G_s d \left( D_1^2 d^2 \psi + \Delta_2 \Delta_c \psi \right) \left( D_3^2 d^2 \psi + \Delta_4 \Delta_k \psi \right), \tag{4.253}$$

$$V_2^{*k} = -D_3 D_4 k_k d^3 \left( D_1^2 d^2 \psi + \Delta_2 \Delta_c \psi \right), \tag{4.254}$$

$$M_2^{*k} = -D_3 D_4 k_k d^2 \left( D_1^2 d^2 \psi + \Delta_2 \Delta_c \psi \right), \tag{4.255}$$

$$V_1^{*q_2} = -k_c D_1 D_2 k_k d^3 \Delta_4 \psi, \tag{4.256}$$

$$M_1^{*q_2} = -k_c D_1 D_2 k_k d^2 \Delta_4 \psi, \tag{4.257}$$

$$V_k^{*q_2} = G_s k_k d \Delta_4 \left( d^2 D_1^2 \psi + \Delta_c \Delta_2 \psi \right), \tag{4.258}$$

$$V_2^{*q_2} = -D_3 D_4 d^3 \left\{ D_1^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_2 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_c \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.259}$$

$$M_2^{*q_2} = -D_3 D_4 d^2 \left\{ D_1^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_2 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_c \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.260}$$

$$V_1^{*m_2} = -k_c D_1 D_2 D_3 k_k d^4 \psi, \tag{4.261}$$

$$M_1^{*m_2} = -k_c D_1 D_2 D_3 k_k d^3 \psi, \tag{4.262}$$

$$V_k^{*m_1} = G_s D_3 k_k d^2 \left( d^2 D_1^2 \psi + \Delta_c \Delta_2 \psi \right), \tag{4.263}$$

$$V_2^{*m_2} = D_3 D_1^2 d^2 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_k \psi \right] \right\} + D_3 d^2 \Delta_2 \left\{ k_c k_k \left( D_{lp} + D_{up} + \right. \right.$$
$$\left. - G_s \right) \psi + d^2 \left[ D_{lp} D_{up} \Delta_g \psi - G_s \left( k_c D_{lp} + D_{up} k_k \right) \psi \right] \Big\} + D_3^2 d^2 \left\{ D_1^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_2 \left\{ k_c k_k \psi + \right.$$
$$\left. \left. + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_c \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.264}$$

$$M_2^{*m_2} = D_4 D_1^2 d^3 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_k \psi \right] \right\} + D_4 d^3 \Delta_2 \left\{ k_c k_k \left( D_{lp} + D_{up} + \right. \right.$$
$$\left. \left. - G_s \right) \psi + d^2 \left[ D_{lp} D_{up} \Delta_g \psi - G_s \left( k_c D_{lp} + D_{up} k_k \right) \psi \right] \right\}. \tag{4.265}$$

### 4.2.2 Equação Integral

As equações integrais serão obtidas por meio da aplicação do MRP ao sistema de equações diferenciais de equilíbrio do problema, eqs.(2.111) a (2.115), onde as funções de aproximação são as soluções fundamentais em deslocamentos. A primeira equação pode ser obtida com fonte em força na viga superior, ficando:

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \left[-D_1\left(\frac{d\phi_1}{dx}+\frac{d^2w_1}{dx^2}\right)+k_c\left(w_1-v\right)+P_1\frac{d^2w_1}{dx^2}-g_1\right]w_1^{*g_1}dx+\\
&+\int_0^L\left[D_1\left(\phi_1+\frac{dw_1}{dx}\right)-D_2\frac{d^2\phi_1}{dx^2}-m_1\right]\phi_1^{*g_1}dx+\\
&+\int_0^L\left[-D_3\left(\frac{d\phi_2}{dx}+\frac{d^2w_2}{dx^2}\right)+k_k\left(w_2-v\right)+P_2\frac{d^2w_2}{dx^2}-g_2\right]w_2^{*g_1}dx+\\
&+\int_0^L\left[D_3\left(\phi_2+\frac{dw_2}{dx}\right)-D_4\frac{d^2\phi_2}{dx^2}-m_2\right]\phi_2^{*g_1}+\\
&+\int_0^L\left[-k_c\left(w_1-v\right)-G_s\frac{d^2v}{dx^2}+k_k(v-w_2)\right]v^{*g_1}=0.
\end{aligned}\tag{4.266}$$

Integrando sucessivas vezes por partes a eq.(4.266), chega-se a:

$$\begin{aligned}
&\left[\left[-D_1\left(\phi_{y_1}+\frac{dw_1}{dx}\right)+P_1\frac{dw_1}{dx}\right]w_1^{*g_1}\right]_0^L+\left[\left[D_1\left(\phi_1^{*g_1}+\frac{dw_1^{*g_1}}{dx}\right)-P_1\frac{dw_1^{*g_1}}{dx}\right]w_1\right]_0^L+\\
&\left[\left[-D_3\left(\phi_2+\frac{dw_2}{dx}\right)+P_2\frac{dw_2}{dx}\right]w_2^{*g_1}\right]_0^L+\left[\left[D_3\left(\phi_1^{*g_1}+\frac{dw_2^{*g_1}}{dx}\right)-P_2\frac{dw_2^{*g_1}}{dx}\right]w_2\right]_0^L+\\
&-\left[D_2\frac{d\phi_{y_1}}{dx}\phi_1^{*g_1}\right]_0^L+\left[D_2\frac{d\phi_1^{*g_1}}{dx}\phi_{y_1}\right]_0^L-\left[D_4\frac{d\phi_2}{dx}\phi_2^{*g_1}\right]_0^L+\left[D_4\frac{d\phi_2^{*g_1}}{dx}\phi_2\right]_0^L-\left[G_s\frac{dv}{dx}v^{*g_1}\right]_0^L+\\
&+\left[G_s\frac{dv^{*g_1}}{dx}v\right]_0^L+\int_0^L\left[-D_1\left(\frac{d\phi_1^{*g_1}}{dx}+\frac{d^2w_1^{*g_1}}{dx^2}\right)+P_1\frac{d^2w_1^{*g_1}}{dx^2}+k_c\left(w_1^{*g_1}-v^{*g_1}\right)\right]w_1dx+\\
&+\int_0^L\left[D_1\left(\phi_1^{*g_1}+\frac{dw_1^{*g_1}}{dx}\right)-D_2\frac{d^2\phi_1^{*g_1}}{dx^2}\right]\phi_1dx+\\
&+\int_0^L\left[-D_3\left(\frac{d\phi_{y_2}}{dx}+\frac{d^2w_2^{*g_1}}{dx^2}\right)+k_k\left(w_2^{*g_1}-v^{*g_1}\right)+P_2\frac{d^2w_2^{*g_1}}{dx^2}\right]w_2dx+\\
&+\int_0^L\left[D_3\left(\phi_2^{*g_1}+\frac{dw_2^{*g_1}}{dx}\right)-D_4\frac{d^2\phi_2^{*g_1}}{dx^2}\right]\phi_2+\\
&+\int_0^L\left[-k_c\left(w_1^{*g_1}-v^{*g_1}\right)-G_s\frac{d^2v^{*g_1}}{dx^2}+k_k(v^{*g_1}-w_2^{*g_1})\right]v+\\
&+\int_0^L\left(-g_1w_1^{*g_1}-m_1\phi_1^{*g_1}-g_2w_2^{*g_1}-m_2\phi_2^{*g_1}\right)dx=0.
\end{aligned}\tag{4.267}$$

Substituindo as equações dos esforços, eqs.(2.116) a (2.118), na na equação integral

eq.(4.267), pode-se reescrevê-la como:

$$
\begin{aligned}
&- [V_1 w_1^{*g_1}]_0^L + [V_1^{*g_1} w_1]_0^L - [V_2 w_2^{*g_1}]_0^L + [V_2^{*g_1} w_2]_0^L - [M_1 \phi_1^{*g_1}]_0^L + [M_1^{*g_1} \phi_{y_1}]_0^L + \\
&- [M_2 \phi_2^{*g_1}]_0^L + [M_2^{*g_1} \phi_2]_0^L - [V_k^{*g_1} v]_0^L + [V_k v^{*g_1}]_0^L - [V_k v^{*g_1}]_0^L + [V_k^{*g_1} v]_0^L + \\
&+ \int_0^L \left[ -D_1 \left( \frac{d\phi_1^{*g_1}}{dx} + \frac{d^2 w_1^{*g_1}}{dx^2} \right) + P_1 \frac{d^2 w_1^{*g_1}}{dx^2} + k_c \left( w_1^{*g_1} - v^{*g_1} \right) \right] w_1 dx + \\
&+ \int_0^L \left[ D_1 \left( \phi_1^{*g_1} + \frac{dw_1^{*g_1}}{dx} \right) - D_2 \frac{d^2 \phi_1^{*g_1}}{dx^2} \right] \phi_1 dx + \\
&+ \int_0^L \left[ -D_3 \left( \frac{d\phi_{y_2}}{dx} + \frac{d^2 w_2^{*g_1}}{dx^2} \right) + k_k \left( w_2^{*g_1} - v^{*g_1} \right) + P_2 \frac{d^2 w_2^{*g_1}}{dx^2} \right] w_2 dx + \\
&+ \int_0^L \left[ D_3 \left( \phi_2^{*g_1} + \frac{dw_2^{*g_1}}{dx} \right) - D_4 \frac{d^2 \phi_2^{*g_1}}{dx^2} \right] \phi_2 + \\
&+ \int_0^L \left[ -k_c \left( w_1^{*g_1} - v^{*g_1} \right) - G_s \frac{d^2 v^{*g_1}}{dx^2} + k_k (v^{*g_1} - w_2^{*g_1}) \right] v + \\
&+ \int_0^L \left( -g_1 w_1^{*g_1} - m_1 \phi_1^{*g_1} - g_2 w_2^{*g_1} - m_2 \phi_2^{*g_1} \right) dx = 0.
\end{aligned}
\tag{4.268}
$$

Por meio da equação diferencial do problema fundamental, eq.( 4.193), e após algumas manipulações, chega-se a equação integral em termos de deslocamentos na viga superior para pontos no domínio:

$$
\begin{aligned}
&w_1(\widehat{x}) + [w_1 V_1^{*g_1}]_0^L + [V_2^{*g_1} w_2]_0^L + + [M_1^{*g_1} \phi_{y_1}]_0^L + [M_2^{*g_1} \phi_2]_0^L + [V_k^{*g_1} v]_0^L = [V_1 w_1^{*g_1}]_0^L + \\
&+ [M_1 \phi_1^{*g_1}]_0^L + [V_2 w_2^{*g_1}]_0^L + [M_2 \phi_2^{*g_1}]_0^L + [V_k v^{*g_1}]_0^L + \\
&+ \int_0^L \left( g_1 w_1^{*g_1} + m_1 \phi_1^{*g_1} + g_2 w_2^{*g_1} + m_2 \phi_2^{*g_1} \right) dx.
\end{aligned}
\tag{4.269}
$$

Da mesma forma, aplicando-se o MRP com fonte em força na viga inferior fica:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \left[ -D_1 \left( \frac{d\phi_1}{dx} + \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right) + k_c \left( w_1 - v \right) + P_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} - g_1 \right] w_1^{*g_2} dx + \\
&+ \int_0^L \left[ D_1 \left( \phi_1 + \frac{dw_1}{dx} \right) - D_2 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} - m_1 \right] \phi_1^{*g_2} dx + \\
&+ \int_0^L \left[ -D_3 \left( \frac{d\phi_2}{dx} + \frac{d^2 w_2}{dx^2} \right) + k_k \left( w_2 - v \right) + P_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} - g_2 \right] w_2^{*g_2} dx + \\
&+ \int_0^L \left[ D_3 \left( \phi_2 + \frac{dw_2}{dx} \right) - D_4 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} - m_2 \right] \phi_2^{*g_2} + \\
&+ \int_0^L \left[ -k_c \left( w_1 - v \right) - G_s \frac{d^2 v}{dx^2} + k_k (v - w_2) \right] v^{*g_2} = 0,
\end{aligned}
\tag{4.270}
$$

onde, após as devidas integrações por partes e manipulações matemáticas, chega-se a:

$$w_2(\widehat{x}) + [w_1 V_1^{*g_2}]_0^L + [V_2^{*g_2} w_2]_0^L + + [M_1^{*g_2}\phi_{y_1}]_0^L + [M_2^{*g_2}\phi_2]_0^L + [V_k^{*g_2} v]_0^L = [V_1 w_1^{*g_2}]_0^L + \\ + [M_1\phi_1^{*g_2}]_0^L + [V_2 w_2^{*g_2}]_0^L + [M_2\phi_2^{*g_2}]_0^L + [V_k v^{*g_2}]_0^L + \\ + \int_0^L (g_1 w_1^{*g_2} + m_1\phi_1^{*g_2} + g_2 w_2^{*g_2} + m_2\phi_2^{*g_2})\, dx. \tag{4.271}$$

A equação integral para o deslocamento na camada cisalhante será obtida por:

$$\int_0^L \left[-D_1\left(\frac{d\phi_1}{dx} + \frac{d^2 w_1}{dx^2}\right) + k_c\,(w_1 - v) + P_1\frac{d^2 w_1}{dx^2} - g_1\right] w_1^{*k} dx + \\ + \int_0^L \left[D_1\left(\phi_1 + \frac{dw_1}{dx}\right) - D_2\frac{d^2\phi_1}{dx^2} - m_1\right] \phi_1^{*k} dx + \\ + \int_0^L \left[-D_3\left(\frac{d\phi_2}{dx} + \frac{d^2 w_2}{dx^2}\right) + k_k\,(w_2 - v) + P_2\frac{d^2 w_2}{dx^2} - g_2\right] w_2^{*k} dx + \\ + \int_0^L \left[D_3\left(\phi_2 + \frac{dw_2}{dx}\right) - D_4\frac{d^2\phi_2}{dx^2} - m_2\right] \phi_2^{*k} + \\ + \int_0^L \left[-k_c\,(w_1 - v) - G_s\frac{d^2 v}{dx^2} + k_k(v - w_2)\right] v^{*k} = 0, \tag{4.272}$$

de onde, chega-se a:

$$v(\widehat{x}) + \left[w_1 V_1^{*k}\right]_0^L + \left[V_2^{*k} w_2\right]_0^L + + \left[M_1^{*k}\phi_{y_1}\right]_0^L + \left[M_2^{*k}\phi_2\right]_0^L + \left[V_k^{*k} v\right]_0^L = \left[V_1 w_1^{*k}\right]_0^L + \\ + \left[M_1\phi_1^{*k}\right]_0^L + \left[V_2 w_2^{*k}\right]_0^L + \left[M_2\phi_2^{*k}\right]_0^L + \left[V_k v^{*k}\right]_0^L + \\ + \int_0^L \left(g_1 w_1^{*k} + m_1\phi_1^{*k} + g_2 w_2^{*k} + m_2\phi_2^{*k}\right) dx. \tag{4.273}$$

Aplicando-se o MRP com fonte em momento na viga superior, chega-se a equação integral para cálculo dos momentos no domínio:

$$\int_0^L \left[-D_1\left(\frac{d\phi_1}{dx} + \frac{d^2 w_1}{dx^2}\right) + k_c\,(w_1 - v) + P_1\frac{d^2 w_1}{dx^2} - g_1\right] w_1^{*m_1} dx + \\ + \int_0^L \left[D_1\left(\phi_1 + \frac{dw_1}{dx}\right) - D_2\frac{d^2\phi_1}{dx^2} - m_1\right] \phi_1^{*m_1} dx + \\ + \int_0^L \left[-D_3\left(\frac{d\phi_2}{dx} + \frac{d^2 w_2}{dx^2}\right) + k_k\,(w_2 - v) + P_2\frac{d^2 w_2}{dx^2} - g_2\right] w_2^{*m_1} dx + \\ + \int_0^L \left[D_3\left(\phi_2 + \frac{dw_2}{dx}\right) - D_4\frac{d^2\phi_2}{dx^2} - m_2\right] \phi_2^{*m_1} + \\ + \int_0^L \left[-k_c\,(w_1 - v) - G_s\frac{d^2 v}{dx^2} + k_k(v - w_2)\right] v^{*m_1} = 0, \tag{4.274}$$

de onde, chega-se a:

$$m_1(\widehat{x}) + [w_1 V_1^{*m_1}]_0^L + [V_2^{*m_1} w_2]_0^L + + [M_1^{*m_1}\phi_{y_1}]_0^L + [M_2^{*m_1}\phi_2]_0^L + [V_k^{*m_1} v]_0^L = [V_1 w_1^{*m_1}]_0^L + \\ + [M_1\phi_1^{*m_1}]_0^L + [V_2 w_2^{*m_1}]_0^L + [M_2\phi_2^{*m_1}]_0^L + [V_k v^{*m_1}]_0^L + \\ + \int_0^L (g_1 w_1^{*m_1} + m_1\phi_1^{*m_1} + g_2 w_2^{*m_1} + m_2\phi_2^{*m_1})\, dx. \tag{4.275}$$

Da mesma forma, com fonte em momento na viga inferior, chega-se a equação integral para cálculo dos momentos no domínio da viga inferior:

$$\int_0^L \left[-D_1\left(\frac{d\phi_1}{dx} + \frac{d^2 w_1}{dx^2}\right) + k_c\,(w_1 - v) + P_1\frac{d^2 w_1}{dx^2} - g_1\right] w_1^{*m_2} dx + \\ + \int_0^L \left[D_1\left(\phi_1 + \frac{dw_1}{dx}\right) - D_2\frac{d^2\phi_1}{dx^2} - m_1\right] \phi_1^{*m_2} dx + \\ + \int_0^L \left[-D_3\left(\frac{d\phi_2}{dx} + \frac{d^2 w_2}{dx^2}\right) + k_k\,(w_2 - v) + P_2\frac{d^2 w_2}{dx^2} - g_2\right] w_2^{*m_2} dx + \\ + \int_0^L \left[D_3\left(\phi_2 + \frac{dw_2}{dx}\right) - D_4\frac{d^2\phi_2}{dx^2} - m_2\right] \phi_2^{*m_2} + \\ + \int_0^L \left[-k_c\,(w_1 - v) - G_s\frac{d^2 v}{dx^2} + k_k(v - w_2)\right] v^{*m_2} = 0, \tag{4.276}$$

de onde, chega-se a:

$$m_2(\widehat{x}) + [w_1 V_1^{*m_2}]_0^L + [V_2^{*m_2} w_2]_0^L + + [M_1^{*m_2}\phi_{y_1}]_0^L + [M_2^{*m_2}\phi_2]_0^L + [V_k^{*m_2} v]_0^L = [V_1 w_1^{*m_2}]_0^L + \\ + [M_1\phi_1^{*m_2}]_0^L + [V_2 w_2^{*m_2}]_0^L + [M_2\phi_2^{*m_2}]_0^L + [V_k v^{*m_2}]_0^L + \\ + \int_0^L (g_1 w_1^{*m_2} + m_1\phi_1^{*m_2} + g_2 w_2^{*m_2} + m_2\phi_2^{*m_2})\, dx. \tag{4.277}$$

Portanto, a equação integral pode ainda ser escrita na forma matricial

$$\left\{\begin{array}{c} w_1(\widehat{x}) \\ \phi_1(\widehat{x}) \\ v(\widehat{x}) \\ w_2(\widehat{x}) \\ \phi_2(\widehat{x}) \end{array}\right\} + \left\{\left[\begin{array}{ccccc} V_1^{*g_1} & M_1^{*g_1} & V_k^{*g_1} & V_2^{*g_1} & M_2^{*g_1} \\ V_1^{*m_1} & M_1^{*m_1} & V_k^{*m_1} & V_2^{*m_1} & M_2^{*m_1} \\ V_1^{*k} & M_1^{*k} & V_k^{*k} & V_2^{*k} & M_2^{*k} \\ V_1^{*g_2} & M_1^{*g_2} & V_k^{*g_2} & V_2^{*g_2} & M_2^{*g_2} \\ V_1^{*m_2} & M_1^{*m_2} & V_k^{*m_2} & V_2^{*m_2} & M_2^{*m_2} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} w_1(x) \\ w_{1,x}(x) \\ v(x) \\ w_2(x) \\ w_{2,x}(x) \end{array}\right\}\right\}_{x=0}^{x=L} =$$

$$\left\{\left[\begin{array}{ccccc} w_1^{*g_1} & \phi_1^{*g_1} & v^{*g_1} & w_2^{*g_1} & \phi_2^{*g_1} \\ w_1^{*m_1} & \phi_1^{*m_1} & v^{*m_1} & w_2^{*m_1} & \phi_2^{*m_1} \\ w_1^{*k} & \phi_1^{*k} & v^{*k} & w_2^{*k} & \phi_2^{*k} \\ w_1^{*g_2} & \phi_1^{*g_2} & v^{*g_2} & w_2^{*g_2} & \phi_2^{*g_2} \\ w_1^{*m_2} & \phi_1^{*m_2} & v^{*m_2} & w_2^{*m_2} & \phi_2^{*m_2} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} V_1(x) \\ M_1(x) \\ V_k(x) \\ V_2(x) \\ M_2(x) \end{array}\right\}\right\}_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \{q\}\,[S]\,dx, \tag{4.278}$$

onde $\{q\} = \{g_1(x) \;\; m_1(x) \;\; g_2(x) \;\; m_2(x)\}$ e ainda

$$[S] = \left[\begin{array}{cccc} w_1^{*g_1} & \phi_1^{*g_1} & w_2^{*g_1} & \phi_2^{*g_1} \\ w_1^{*m_1} & \phi_1^{*m_1} & w_2^{*m_1} & \phi_2^{*m_1} \\ w_1^{*k} & \phi_1^{*k} & w_2^{*k} & \phi_2^{*k} \\ w_1^{*g_2} & \phi_1^{*g_2} & w_2^{*g_2} & \phi_2^{*g_2} \\ w_1^{*m_2} & \phi_1^{*m_2} & w_2^{*m_2} & \phi_2^{*m_2} \end{array}\right]. \tag{4.279}$$

### 4.2.3 Equações Algébricas

Para obter a equação algébrica é necessário reescrever a equação integral, eq.(4.278), para colocação do ponto fonte nas extremidades do elemento: no contorno à esquerda, $\widehat{x} \to 0 = \lim_{\xi \to 0}(0 + \xi)$, e no contorno à direita, $\widehat{x} \to L = \lim_{\xi \to 0}(L - \xi)$. Dessa forma, obtém-se a equação algébrica:

$$\{u\} + [H]\,\{u\} = [G]\,\{p\} + \{f\}\,, \tag{4.280}$$

onde $[H]$ e $[G]$ são as matrizes de influência, $\{f\}$ é o vetor de carga, $\{u\}$ é o vetor dos deslocamentos e $\{p\}$ é o vetor das solicitações internas. Os vetores $u$ e $p$ são:

$$\{u\} = \left\{\begin{array}{cccccc} w(0) & \phi_1(0) & v(0) & w(L) & \phi_1(L) & v(L) \end{array}\right\}^T, \tag{4.281}$$

$$\{p\} = \left\{\begin{array}{cccccc} V(0) & M(0) & V_k(0) & V(L) & M(L) & V_k(L) \end{array}\right\}^T, \tag{4.282}$$

O elemento de contorno proposto para esse caso possui dez graus de liberdade, como pode ser visto na figura 4.5, onde é definido os sentidos positivos dos esforços e deslocamentos. Note que, o giro do elemento é dado aqui pelas rotações $\phi$, diferentemente do Euler-Bernoulli que é dado pela inclinação da elástica $dw/dx$.

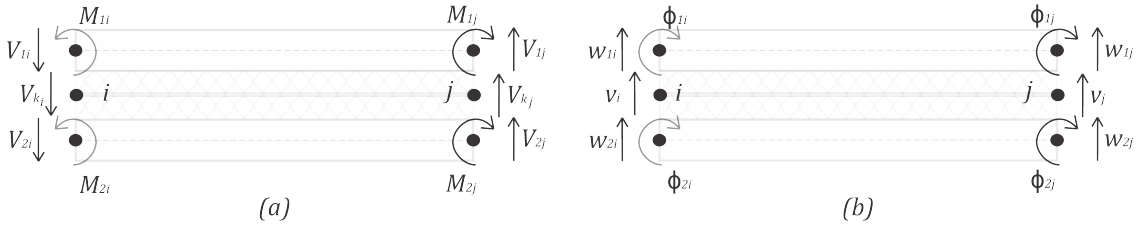



FIGURA 4.5 – Sentidos positivos dos deslocamentos.

A matriz de influência dos esforços, $[G]$, fica:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, \text{ com: } \begin{array}{l} [G_{11}] = -[Q], \ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ [G_{12}] = [Q], \ para\ r = L\ e\ S = S_d \\ [G_{21}] = -[Q], \ para\ r = L\ e\ S = S_a \\ [G_{22}] = [Q], \ para\ r = 0\ e\ S = S_d, \end{array} \tag{4.283}$$

sendo

$$[Q] = \begin{bmatrix} \beta_{11}(r) & S.\beta_{12}(r) & \beta_{13}(r) & \beta_{14}(r) & S.\beta_{15}(r) \\ S.\beta_{21}(r) & \beta_{22}(r) & S.\beta_{23}(r) & S.\beta_{24}(r) & \beta_{25}(r) \\ \beta_{31}(r) & S.\beta_{32}(r) & \beta_{33}(r) & \beta_{34}(r) & S.\beta_{35}(r) \\ \beta_{41}(r) & S.\beta_{42}(r) & \beta_{43}(r) & \beta_{44}(r) & S.\beta_{45}(r) \\ S.\beta_{51}(r) & \beta_{52}(r) & S.\beta_{53}(r) & S.\beta_{54}(r) & \beta_{55}(r) \end{bmatrix}, \tag{4.284}$$

e os coeficientes $\beta$ são obtidos a partir dos deslocamentos fundamentais, eqs.(4.221) a

(4.235), sendo dados por:

$$\beta_{11} = \Delta_2 \left\{ D_3^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_4 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) \psi - Gs \Delta_k \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.285}$$

$$\beta_{12} = -\beta_{21} = -D_1 d \left\{ D_3^2 d^2 \Delta_g + \Delta_4 \left\{ k_c k_k + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) - Gs \Delta_k \right] \right\} \right\}, \tag{4.286}$$

$$\beta_{13} = \beta_{31} = k_c \Delta_2 \left( d^2 D_3^2 + \Delta_4 \Delta_k \right), \tag{4.287}$$

$$\beta_{14} = \beta_{41} = k_c k_k \Delta_2 \Delta_4, \tag{4.288}$$

$$\beta_{15} = -\beta_{51} = -k_c D_3 k_k d \Delta_2, \tag{4.289}$$

$$\beta_{22} = D_3^2 d^2 \left\{ k_c k_k + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) - Gs \Delta_c \right] \right\} + d^2 \Delta_4 \left\{ k_c k_k \left( D_{lp} + D_{up} - Gs \right) + \right.$$
$$\left. + d^2 \left[ D_{lp} D_{up} \Delta_g - Gs \left( k_c D_{lp} + D_{up} k_k \right) \right] \right\}, \tag{4.290}$$

$$\beta_{23} = -\beta_{32} = k_c D_1 d \left( d^2 D_3^2 + \Delta_4 \Delta_k \right), \tag{4.291}$$

$$\beta_{24} = -\phi_1^{*g_2} = k_c D_1 k_k d \Delta_4, \tag{4.292}$$

$$\beta_{25} = \beta_{52} = -k_c D_1 D_3 k_k d^2, \tag{4.293}$$

$$\beta_{33} = \left( D_1^2 d^2 + \Delta_2 \Delta_c \right) \left( D_3^2 d^2 + \Delta_4 \Delta_k \right), \tag{4.294}$$

$$\beta_{34} = \beta_{43} = k_k \Delta_4 \left( d^2 D_1^2 + \Delta_c \Delta_2 \right), \tag{4.295}$$

$$\beta_{35} = -\beta_{53} = -D_3 k_k d \left( d^2 D_1^2 + \Delta_c \Delta_2 \right), \tag{4.296}$$

$$\beta_{44} = \Delta_4 \left\{ D_1^2 d^2 \Delta_g + \Delta_2 \left\{ k_c k_k + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) - Gs \Delta_c \right] \right\} \right\}, \tag{4.297}$$

$$\beta_{45} = -\beta_{54} = -D_3 d \left\{ D_1^2 d^2 \Delta_g + \Delta_2 \left\{ k_c k_k + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) - Gs \Delta_c \right] \right\} \right\}, \tag{4.298}$$

$$\beta_{55} = D_1^2 d^2 \left\{ k_c k_k + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) - Gs \Delta_k \right] \right\} + d^2 \Delta_2 \left\{ k_c k_k \left( D_{lp} + D_{up} - Gs \right) + \right.$$
$$\left. + d^2 \left[ D_{lp} D_{up} \Delta_g - Gs \left( k_c D_{lp} + D_{up} k_k \right) \right] \right\}, \tag{4.299}$$

sendo $d\left(\cdot\right)^l = \dfrac{d^l\left(\cdot\right)}{dr^l}$ e $\Delta$ os operadores definidos na seção 4.2.1.

Já matriz de influência dos deslocamentos, $[H]$, pode ser escrita na seguinte forma:

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \text{ com: } \begin{array}{l} [H_{11}] = -[N], \ para \ r = 0 \ e \ S = S_a \\ [H_{12}] = \ [N], \ para \ r = L \ e \ S = S_d \\ [H_{21}] = -[N], \ para \ r = L \ e \ S = S_a \\ [H_{22}] = \ [N], \ para \ r = 0 \ e \ S = S_d \end{array} \tag{4.300}$$

sendo

$$[N] = \begin{bmatrix} S.\eta_{11}(r) & \eta_{12}(r) & S.\eta_{13}(r) & S.\eta_{14}(r) & \eta_{15}(r) \\ \eta_{21}(r) & S.\eta_{22}(r) & \eta_{23}(r) & \eta_{24}(r) & S.\eta_{25}(r) \\ S.\eta_{31}(r) & \eta_{32}(r) & S.\eta_{33}(r) & S.\eta_{34}(r) & \eta_{35}(r) \\ S.\eta_{41}(r) & \eta_{42}(r) & S.\eta_{43}(r) & S.\eta_{44}(r) & \eta_{45}(r) \\ \eta_{51}(r) & S.\eta_{52}(r) & \eta_{53}(r) & \eta_{54}(r) & S.\eta_{55}(r) \end{bmatrix}, \tag{4.301}$$

onde, $S_a$ e $S_d$ representa a função sinal para $x < \widehat{x}$ e $x > \widehat{x}$, respectivamente, e os

coeficientes $\eta$ obtidos a partir dos esforços fundamentais, eqs.(4.241) a (4.265), sendo dados por:

$$\eta_{11} = -D_1 D_2 d^3 \left\{ D_3^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_4 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_k \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.302}$$

$$\eta_{12} = -D_1 D_2 d^2 \left\{ D_3^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_4 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_k \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.303}$$

$$\eta_{13} = G_s k_c d \Delta_2 \left( D_3^2 d^2 \psi + \Delta_4 \Delta_k \psi \right) \tag{4.304}$$

$$\eta_{14} = -D_3 k_c D_4 k_k d^3 \Delta_2 \psi, \tag{4.305}$$

$$\eta_{15} = -D_4 k_c D_3 k_k d^2 \Delta_2 \psi, \tag{4.306}$$

$$\eta_{21} = D_1 D_3^2 d^2 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_c \psi \right] \right\} + D_1 d^2 \Delta_4 \left\{ k_c k_k \left( D_{lp} + D_{up} + \right. \right.$$
$$\left. - G_s \right) \psi + d^2 \left[ D_{lp} D_{up} \Delta_g \psi - G_s \left( k_c D_{lp} + D_{up} k_k \right) \psi \right] \Big\} + D_1^2 d^2 \left\{ D_3^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_4 \left\{ k_c k_k \psi + \right. \right.$$
$$\left. \left. + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_k \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.307}$$

$$\eta_{22} = D_2 D_3^2 d^3 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_c \psi \right] \right\} + D_2 d^3 \Delta_4 \left\{ k_c k_k \left( D_{lp} + D_{up} + \right. \right.$$
$$\left. - G_s \right) \psi + d^2 \left[ D_{lp} D_{up} \Delta_g \psi - G_s \left( k_c D_{lp} + D_{up} k_k \right) \psi \right] \Big\}, \tag{4.308}$$

$$\eta_{23} = G_s k_c D_1 d^2 \left( d^2 D_3^2 \psi + \Delta_4 \Delta_k \psi \right), \tag{4.309}$$

$$\eta_{24} = -k_c D_1 D_3 D_4 k_k d^4 \psi, \tag{4.310}$$

$$\eta_{25} = -k_c D_1 D_3 D_4 k_k d^3 \psi, \tag{4.311}$$

$$\eta_{31} = -k_c D_1 D_2 d^3 \left( D_3^2 d^2 \psi + \Delta_4 \Delta_k \psi \right), \tag{4.312}$$

$$\eta_{32} = -k_c D_1 D_2 d^2 \left( D_3^2 d^2 \psi + \Delta_4 \Delta_k \psi \right), \tag{4.313}$$

$$\eta_{33} = G_s d \left( D_1^2 d^2 \psi + \Delta_2 \Delta_c \psi \right) \left( D_3^2 d^2 \psi + \Delta_4 \Delta_k \psi \right), \tag{4.314}$$

$$\eta_{34} = -D_3 D_4 k_k d^3 \left( D_1^2 d^2 \psi + \Delta_2 \Delta_c \psi \right), \tag{4.315}$$

$$\eta_{35} = -D_3 D_4 k_k d^2 \left( D_1^2 d^2 \psi + \Delta_2 \Delta_c \psi \right), \tag{4.316}$$

$$\eta_{41} = -k_c D_1 D_2 k_k d^3 \Delta_4 \psi, \tag{4.317}$$

$$\eta_{42} = -k_c D_1 D_2 k_k d^2 \Delta_4 \psi, \tag{4.318}$$

$$\eta_{43} = G_s k_k d \Delta_4 \left( d^2 D_1^2 \psi + \Delta_c \Delta_2 \psi \right), \tag{4.319}$$

$$\eta_{44} = -D_3 D_4 d^3 \left\{ D_1^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_2 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_c \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.320}$$

$$\eta_{45} = -D_3 D_4 d^2 \left\{ D_1^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_2 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_c \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.321}$$

$$\eta_{51} = -k_c D_1 D_2 D_3 k_k d^4 \psi, \tag{4.322}$$

$$\eta_{52} = -k_c D_1 D_2 D_3 k_k d^3 \psi, \tag{4.323}$$

$$\eta_{23} = G_s D_3 k_k d^2 \left( d^2 D_1^2 \psi + \Delta_c \Delta_2 \psi \right), \tag{4.324}$$

$$\eta_{54} = D_3 D_1^2 d^2 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_k \psi \right] \right\} + D_3 d^2 \Delta_2 \left\{ k_c k_k \left( D_{lp} + D_{up} + \right. \right.$$
$$\left. - G_s \right) \psi + d^2 \left[ D_{lp} D_{up} \Delta_g \psi - G_s \left( k_c D_{lp} + D_{up} k_k \right) \psi \right] \Big\} + D_3^2 d^2 \left\{ D_1^2 d^2 \Delta_g \psi + \Delta_2 \left\{ k_c k_k \psi + \right. \right.$$
$$\left. \left. + d^2 \left[ D_{up} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_c \psi \right] \right\} \right\}, \tag{4.325}$$

$$\eta_{55} = D_4 D_1^2 d^3 \left\{ k_c k_k \psi + d^2 \left[ D_{lp} \left( k_c + k_k \right) \psi - G_s \Delta_k \psi \right] \right\} + D_4 d^3 \Delta_2 \left\{ k_c k_k \left( D_{lp} + D_{up} + \right. \right.$$
$$\left. - G_s \right) \psi + d^2 \left[ D_{lp} D_{up} \Delta_g \psi - G_s \left( k_c D_{lp} + D_{up} k_k \right) \psi \right] \Big\}. \tag{4.326}$$

Considere que o vetor de carga $\{f\}$ seja dado por:

$$\{f\} = \left\{ \begin{array}{cccccccccc} f_{w_{1_j}} & f_{w_{2_j}} & f_{w_{3_j}} & f_{w_{4_j}} & f_{w_{5_j}} & f_{w_{1_k}} & f_{w_{2_k}} & f_{w_{3_k}} & f_{w_{4_k}} & f_{w_{5_k}} \end{array} \right\}^T, \quad (4.327)$$

onde os índices $j$ e $k$ se referem as extremidades direita e esquerda, respectivamente, do elemento.

Se um carregamento qualquer distribuído atuar ao longo da viga superior ou inferior ($g_i(x)$, com $i = 1, 2$), as forças nodais do vetor de carga serão dados por:

$$f_{w_{1_j}} = \int_0^L g_i(x)\beta_{1\theta}(x)dx, \quad (4.328)$$

$$f_{w_{2_j}} = \int_0^L g_i(x)\beta_{2\theta}(x)dx, \quad (4.329)$$

$$f_{w_{3_j}} = \int_0^L g_i(x)\beta_{3\theta}(x)dx, \quad (4.330)$$

$$f_{w_{4_j}} = \int_0^L g_i(x)\beta_{4\theta}(x)dx, \quad (4.331)$$

$$f_{w_{5_j}} = \int_0^L g_i(x)\beta_{5\theta}(x)dx, \quad (4.332)$$

$$f_{w_{1_k}} = \int_0^L g_i(x)\beta_{1\theta}(L-x)dx, \quad (4.333)$$

$$f_{w_{2_k}} = \int_0^L g_i(x)\beta_{2\theta}(L-x)dx, \quad (4.334)$$

$$f_{w_{3_k}} = \int_0^L g_i(x)\beta_{3\theta}(L-x)dx, \quad (4.335)$$

$$f_{w_{4_k}} = \int_0^L g_i(x)\beta_{4\theta}(L-x)dx, \quad (4.336)$$

$$f_{w_{5_k}} = \int_0^L g_i(x)\beta_{5\theta}(L-x)dx. \quad (4.337)$$

sendo $\theta = 2i - 1$.

Entretanto, o vetor de carga para momentos fletores que atuam sobre as vigas será dado por:

$$\{f\} = \left\{ \begin{array}{cccccccccc} f_{\phi_{1_j}} & f_{\phi_{2_j}} & f_{\phi_{3_j}} & f_{\phi_{4_j}} & f_{\phi_{5_j}} & f_{\phi_{1_k}} & f_{\phi_{2_k}} & f_{\phi_{3_k}} & f_{\phi_{4_k}} & f_{\phi_{5_k}} \end{array} \right\}^T, \quad (4.338)$$

Caso um momento qualquer distribuído atue ao longo da viga superior ou inferior

$(m_i(x))$, o vetor de carga será dado por:

$$f_{\phi 1_j} = \int_0^L m_i(x)\beta_{1\theta}(x)dx, \tag{4.339}$$

$$f_{\phi 2_j} = \int_0^L m_i(x)\beta_{2\theta}(x)dx, \tag{4.340}$$

$$f_{\phi 3_j} = \int_0^L m_i(x)\beta_{3\theta}(x)dx, \tag{4.341}$$

$$f_{\phi 4_j} = \int_0^L m_i(x)\beta_{4\theta}(x)dx, \tag{4.342}$$

$$f_{\phi 5_j} = \int_0^L m_i(x)\beta_{5\theta}(x)dx, \tag{4.343}$$

$$f_{\phi 1_k} = \int_0^L m_i(x)\beta_{1\theta}(L-x)dx, \tag{4.344}$$

$$f_{\phi 2_k} = \int_0^L m_i(x)\beta_{2\theta}(L-x)dx, \tag{4.345}$$

$$f_{\phi 3_k} = \int_0^L m_i(x)\beta_{3\theta}(L-x)dx, \tag{4.346}$$

$$f_{\phi 4_k} = \int_0^L m_i(x)\beta_{4\theta}(L-x)dx, \tag{4.347}$$

$$f_{\phi 5_k} = \int_0^L m_i(x)\beta_{5\theta}(L-x)dx. \tag{4.348}$$

#### 4.2.3.1 Determinação dos campos em deslocamentos no domínio

De posse dos deslocamentos e esforços no contorno, torna-se possível a determinação desses campos também no domínio. Dessa forma, por meio da eq.(4.278), é possível determiná-los em um ponto "$A$"no domínio, conforme apresentado na figura 4.6.

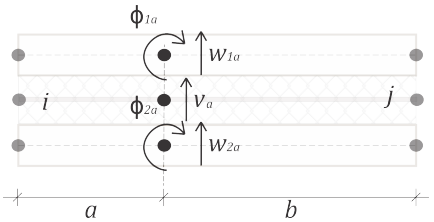



FIGURA 4.6 – Deslocamentos em um ponto $A$ no domínio das vigas.

$$\{u(x_a)\} = -[H]\{u\} + [G]\{p\} + \{f\} \tag{4.349}$$

A matriz de influência $[H]$ será dada por:

$$[H] = \left[ \begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \end{array} \right], \text{ com: } \begin{array}{l} [H_{11}] = -[N], \ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ [H_{12}] = \ \ [N], \ para\ r = L\ e\ S = S_d \end{array} \tag{4.350}$$

onde a matriz $[H]$ e seus coeficientes foram definidos anteriormente, com pode ser visto nas eqs.(4.301) e (4.302). Já a matriz de influência dos esforços $[G]$ será dada por:

$$[G] = \left[ \begin{array}{cc} G_{11} & G_{12} \end{array} \right], \text{ com: } \begin{array}{l} [G_{11}] = -[Q], \ para\ r = 0\ e\ S = S_a \\ [G_{12}] = \ \ [Q], \ para\ r = L\ e\ S = S_d \end{array} \tag{4.351}$$

sendo a matriz $[Q]$ conforme equações (4.283) e (4.285). Quanto ao vetor de carga $\{f\}$ para um carregamento uniformemente distribuído ao longo das vigas, tem-se:

$$\{f\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} f_{w_1} & f_{w_2} & f_{w_3} & f_{w_4} & f_{w_5} \end{array} \right\}^T, \tag{4.352}$$

onde os coeficientes $\theta$ são:

$$f_{w_1} = \int_0^{x_a} g_i \beta_{1\theta}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g_i \beta_{1\theta}(L-x)dx, \tag{4.353}$$

$$f_{w_2} = \int_0^{x_a} g_i \beta_{2\theta}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g_i \beta_{2\theta}(L-x)dx, \tag{4.354}$$

$$f_{w_3} = \int_0^{x_a} g_i \beta_{3\theta}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g_i \beta_{3\theta}(L-x)dx, \tag{4.355}$$

$$f_{w_4} = \int_0^{x_a} g_i \beta_{4\theta}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g_i \beta_{4\theta}(L-x)dx, \tag{4.356}$$

$$f_{w_5} = \int_0^{x_a} g_i \beta_{5\theta}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} g_i \beta_{5\theta}(L-x)dx. \tag{4.357}$$

Para um carregamento atuando em um ponto $x_1$ na viga superior e/ou $x_2$ na viga inferior, o vetor de carga $\{f\}$ fica:

$$\{f_p\} = p \left[ \begin{array}{cccc} \gamma_{11}(r_1) & S_1\gamma_{21}(r_1) & \gamma_{31}(r_1) & S_1\gamma_{41}(r_1) \end{array} \right]^T, \tag{4.358}$$

onde $r_1 = |x_1 - a|$, $S_1 = \left\{ \begin{array}{c} -1, \text{ se } x_1 < a \\ 1, \text{ se } x_1 > a \end{array} \right.$ e os coeficientes $\gamma$ dados por:

$$\gamma_{11}(r_1) = \beta_{11}(r_1), \tag{4.359}$$

$$\gamma_{21}(r_1) = \beta_{21}(r_1), \tag{4.360}$$

$$\gamma_{31}(r_1) = \beta_{31}(r_1). \tag{4.361}$$

# Capítulo 5

# Aplicações numéricas

Neste capítulo, a validação da formulação do MEC desenvolvida para o cálculo estático de vigas sore camada elástica de Kerr e vigas duplas conectadas por base elástica de Kerr serão feitas por meio de comparações com as respostas exatas ou outras encontradas na literatura.

## 5.1 Viga sobre camada de Kerr

### 5.1.1 Simplesmente apoiada e submetida a carga concentrada

Considere que uma viga de comprimento $L(m)$ apoiada em uma camada do tipo Kerr esteja submetida a uma carga pontual aplicada no meio do vão da viga, cuja intensidade é $p = 1000000N$, atuando para baixo, conforme mostrado na figura 5.1. As propriedades da viga são: módulo de elasticidade longitudinal $E = 2 \cdot 10^{11} N/m^2$; largura $b = 0,2m$ e altura $h = 0,5m$; e coeficiente de Poisson nulo. A camada elástica possui as seguintes propriedades: molas de rigidez $k_c = k_k = 10^5 N/m^2$; e módulo cisalhante $G_s = 5 \cdot 10^6 kN$.

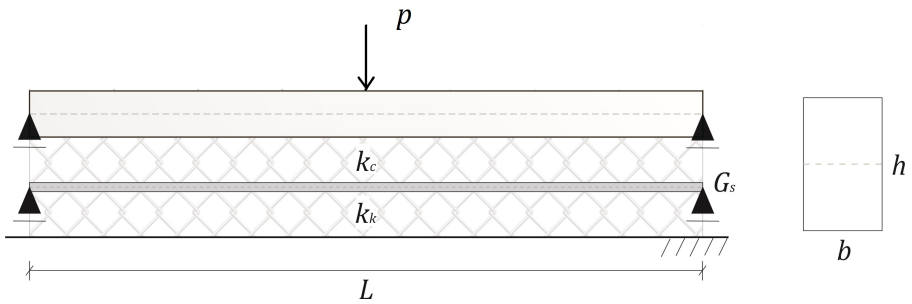



FIGURA 5.1 – Viga sobre camada elástica, simplesmente apoiada, submetida a carregamento uniforme.

Na tabela 5.1 são apresentados os resultados em deslocamentos medidos no meio do vão da viga e da camada cisalhante para diferentes razões de aspecto $(h/L)$, e ainda

segundo as teorias de vigas de Euler-Bernoulli (TEB) e Timoshenko (TT). Os resultados do MEC são comparados com a solução analítica apresentada no apêndice A, seção A.1.1 para a TEB e seção A.1.2 para a TT.

| | | **TEB** | | **TT** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **h/L** | $x = L/2$ | **MEC** | **Exato** | **MEC** | **Exato** |
| 0,01 | $w \cdot 10$ | -7,3675833 | -7,3675833 | -7,3702275 | -7,3702274 |
| | $v \cdot 10$ | -3,1784446 | -3,1784446 | -3,1788887 | -3,1788887 |
| 0,025 | $w \cdot 10$ | -3,1560604 | -3,1560604 | -3,1601955 | -3,1601955 |
| | $v \cdot 10$ | -0,96209 | -0,96209 | -0,9630684 | -0,9630684 |
| 0,05 | $w \cdot 10^2$ | -4,8982247 | -4,8982247 | -4,9272267 | -4,9272266 |
| | $v \cdot 10^2$ | -0,6972824 | -0,6972824 | -0,7007148 | -0,7007148 |
| 0,1 | $w \cdot 10^3$ | -6,240963 | -6,240963 | -6,3906024 | -6,3906018 |
| | $v \cdot 10^3$ | -0,2833712 | -0,2833712 | -0,289037 | -0,289037 |
| 0,5 | $w \cdot 10^5$ | -4,9999879 | -4,9999879 | -7,9999729 | -7,9999668 |
| | $v \cdot 10^8$ | -0,9959663 | -0,9959663 | -1,4939713 | -1,4939713 |

TABELA 5.1 – Deslocamentos (em $m$) no meio do vão da viga ($w$) e da camada cisalhante ($v$).

Importante destacar que, para esse exemplo, as soluções fundamentais desacopladas do MEC para a TEB e TT foram aquelas apresentadas pelas Eqs.(3.26) e (3.212), respectivamente.

Os resultados em deslocamentos apresentados na tabela 5.1 mostram que a solução do MEC para cada uma das teorias de vigas estudadas nesse trabalho apresentaram resultados excelentes quando comparados a suas respectivas soluções exatas, sendo o erro praticamente nulo considerando sete casas decimais, para todas as razões de aspecto consideradas. Tal afirmativa também é confirmada avaliando as rotações mostradas na tabela 5.2. Vale ainda ressaltar que o problema foi discretizado com apenas um elemento de contorno.

Vê-se ainda que, para vigas com razão de aspecto pequenas as soluções na TEB e TT produzem praticamente os mesmos resultados — erro aproximadamente zero para $h/L = 0,01$. Já para maiores valores de razão de aspecto, vê-se que os resultados obtidos via TET, que não considera o efeito do cortante na viga, se afasta dos resultados da TT — erro de 37,5% em termos do deslocamento na viga e de 33,33% na camada de cisalhamento quando $h/L = 0,5$.

| | | **TEB** | | **TT** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **h/L** | $x = L$ | **MEC** | **Exato** | **MEC** | **Exato** |
| 0,010 | $\phi \cdot 10^2$ | 3,0892115 | 3,0892115 | -3,0887328 | -3,0887328 |
| 0,025 | $\phi \cdot 10^2$ | 4,6756901 | 4,6756901 | -4,6744159 | -4,6744159 |
| 0,050 | $\phi \cdot 10^2$ | 1,4680488 | 1,4680488 | -1,467895 | -1,467895 |
| 0,100 | $\phi \cdot 10^3$ | 3,7443254 | 3,7443254 | -3,744214 | -3,744214 |
| 0,5 | $\phi \cdot 10^4$ | 1,4999962 | 1,4999962 | -1,4999943 | -1,4999943 |

TABELA 5.2 – Rotações (em *rad*) no contorno à direita, quando $x = L$.

### 5.1.2 Simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído

Considere agora que a viga do exemplo 5.1.1 esteja agora submetida apenas a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade $g = 1000N/m^2$, conforme mostrado na figura 5.2.

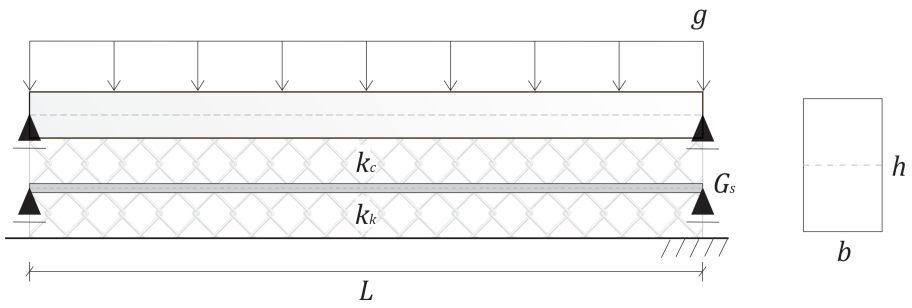



FIGURA 5.2 – Viga sobre camada elástica, simplesmente apoiada, submetida a carregamento uniforme.

A tabela 5.3 mostra os resultados obtidos em termos de deslocamentos considerando diferentes razões de aspecto ($h/L$), aos quais foram comparados tanto com a solução exata obtido via séries de Fourier (Exato), Eqs.(3.26) e (3.212).

| | | **TEB** | | **TT** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **h/L** | $x = L/2$ | **MEC** | **Exato** | **MEC** | **Exato** |
| 0,01 | $w \cdot 10^2$ | -2,0222153 | -2,0222153 | -2,0221708 | -2,0221708 |
| | $v \cdot 10^3$ | -9,3217188 | -9,3217188 | -9,3216618 | -9,3216618 |
| 0,025 | $w \cdot 10^3$ | -3,9258369 | -3,9258369 | -3,9294709 | -3,9294709 |
| | $v \cdot 10^3$ | -1,2184494 | -1,2184494 | -1,219616 | -1,219616 |
| 0,05 | $w \cdot 10^4$ | -3,0602234 | -3,0602234 | -3,0745895 | -3,0745895 |
| | $v \cdot 10^5$ | -4,4275168 | -4,4275168 | -4,4488104 | -4,4488104 |
| 0,1 | $w \cdot 10^5$ | -1,950249 | -1,950249 | -1,9876345 | -1,9876345 |
| | $v \cdot 10^7$ | -9,0013903 | -9,0013903 | -9,1781465 | -9,1781465 |
| 0,5 | $w \cdot 10^8$ | -3,1249923 | -3,1249923 | -4,6249828 | -4,6249828 |
| | $v \cdot 10^{11}$ | -6,3284923 | -6,3284924 | -9,4408161 | -9,4408163 |

TABELA 5.3 – Deslocamentos (em $m$) no meio do vão da viga ($w$) e da camada cisalhante ($v$) para um carregamento uniformemente distribuído.

Mais uma vez vê-se a precisão com que as repostas exatas são recuperadas, mostrando a alta performance da formulação proposta nessa tese. As tabelas 5.4 e reforçam tal afirmativa, uma vez que as rotações e esforços também foram obtidos de forma precisa. Outra fato importante de se notar é que o erro relativo percentual entre as duas teorias, para uma razão de aspecto $h/L = 0,5$, se manteve na mesma faixa de valores que o exemplo 5.1.1: $32,43\%$ para os deslocamentos na viga; e 32.97% na camada cisalhante. Dessa forma, vê-se que o tipo de carregamento também influencia, mesmo que em menor grau se comparado a razão de aspecto, na distribuição de tensões cisalhantes ao longo da seção transversal da viga.

| | | **TEB** | | **TT** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **h/L** | $x = L$ | **MEC** | **Exato** | **MEC** | **Exato** |
| 0,010 | $\phi \cdot 10^3$ | 1,4735167 | 1,4735167 | -1,4732539 | -1,4732539 |
| 0,025 | $\phi \cdot 10^4$ | 6,3121208 | 6,3121208 | -6,3104799 | -6,3104799 |
| 0,05 | $\phi \cdot 10^5$ | 9,7964495 | 9,7964495 | -9,7954643 | -9,7954643 |
| 0,10 | $\phi \cdot 10^5$ | 1,2481926 | 1,2481926 | -1,2481569 | -1,2481569 |
| 0,5 | $\phi \cdot 10^8$ | 9,9999758 | 9,9999758 | -9,9999638 | -9,9999638 |

TABELA 5.4 – Rotações (em $rad$) no contorno à direita, quando $x = L$, para um carregamento uniformemente distribuído.

### 5.1.3 Extremidade com engaste móvel

Seja uma viga de comprimento $L = 10m$, com uma guia na sua extremidade direita, submetida aos carregamentos mostrados na figura 5.3, cujos valores são: $g = 1000N/m^2$

e $p = 15000N$, aplicado a uma distância $x = 7,5m$ da extremidade esquerda. As propriedades dos materiais são: $E = 2 \cdot 10^{11} N/m^2$; $A = 0,1m^2$, $I = 2,083 \cdot 10^{-3} m^4$; $\nu = 0$; e $k_c = k_k = G_s/0,5 = 10^3 N/m^2$.

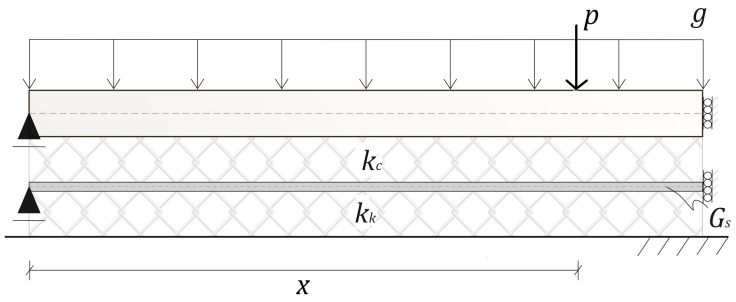



FIGURA 5.3 – Viga sobre camada elástica com guia móvel na extremidade direita.

As respostas do MEC em foram comparadas com as soluções analíticas, Eqs.(3.26) e (3.212), adaptadas. Os resultados podem em termos de deslocamentos e rotações ao longo do comprimento da viga podem ser conferidos na tabela 5.5, enquanto que os esforços apresentados pela tabela 5.6.

| | | **TEB** | | **TT** | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | **MEC** | **Exata** | **MEC** | **Exata** |
| $w$ | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\phi$ | 0 | 0,068796 | 0,068796 | -0,0691508 | -0,0691508 |
| $v$ | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $w$ | | 0,3589091 | 0,3589091 | 0,3523543 | 0,3523543 |
| $\phi$ | 2,5 | 0,2768866 | 0,2768866 | -0,2767261 | -0,2767261 |
| $v$ | | 0,1960936 | 0,1960936 | 0,1929492 | 0,1929492 |
| $w$ | | 1,501755 | 1,501755 | 1,4956258 | 1,4956258 |
| $\phi$ | 5 | 0,6214137 | 0,6214137 | -0,6203735 | -0,6203735 |
| $v$ | | 0,7621365 | 0,7621365 | 0,7592997 | 0,7592997 |
| $w$ | | 3,135087 | 3,135087 | 3,1412892 | 3,1412892 |
| $\phi$ | 7,5 | 0,559202 | 0,559202 | -0,5581672 | -0,5581672 |
| $v$ | | 1,5442163 | 1,5442163 | 1,5469072 | 1,5469072 |
| $w$ | | 3,7706235 | 3,7706235 | 3,7737015 | 3,7737015 |
| $\phi$ | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $v$ | | 1,8623548 | 1,8623548 | 1,8643011 | 1,8643011 |

TABELA 5.5 – Deslocamentos (em $m$) e rotações (em $rad$) ao longo da coordenada $x$.

Todos os resultados obtidos mostram a precisão da formulação proposta nesse trabalho, uma vez que recuperam os exatos, tando em deslocamento quanto em esforços, mesmo utilizando apenas um elemento de contorno.

| | | **TEB** | | **TT** | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | **MEC** | **Exata** | **MEC** | **Exata** |
| $V$ | | -3625,555 | -3625,556 | -3617,729 | -3617,730 |
| $M$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $V_k$ | | 21,874 | 21,874 | 21,019 | 21,019 |
| $V$ | | -981,519 | -981,520 | -978,737 | -978,738 |
| $M$ | 2,5 | -5839,695 | -5839,695 | -5824,686 | -5824,686 |
| $V_k$ | | 70,637 | 70,637 | 70,311 | 70,311 |
| $V$ | | 2548,994 | 2548,992 | 2542,561 | 2542,559 |
| $M$ | 5 | -4181,703 | -4181,703 | -4171,297 | -4171,297 |
| $V_k$ | | 151,441 | 151,441 | 151,971 | 151,971 |
| $V$ | | 7969,470 | 7969,463 | 7960,988 | 7960,981 |
| $M$ | 7,5 | 8514,407 | 8514,407 | 8502,784 | 8502,784 |
| $V_k$ | | 131,883 | 131,883 | 133,217 | 133,217 |
| $V$ | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $M$ | 10 | 7068,072 | 7068,072 | 7048,818 | 7048,818 |
| $V_k$ | | 0 | 0 | 0 | 0 |

TABELA 5.6 – Esforços cortantes (em $N$) e momento (em $Nm$) fletor ao longo da coordenada $x$.

## 5.2 Sistema de vigas duplas conectadas pela base de Kerr

### 5.2.1 Simplesmente apoiada com carga concentrada

Duas vigas idênticas de comprimento $L = 10m$, simplesmente apoiadas nas extremidades, estão conectadas por uma camada elástica de propriedades $k_c = k_k = G_s/0,5 = 10^5 N/m^2$. Além disso, sobre a viga superior atua uma força concentrada $p = 50000N$ no meio do vão, conforme mostrado na figura 5.4.

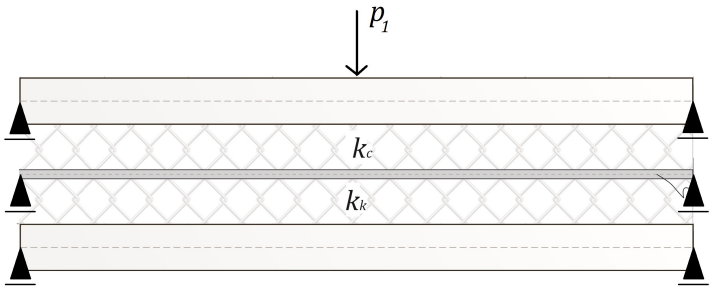



FIGURA 5.4 – Viga dupla submetida a força concentrado no meio da viga superior.

Propriedades das vigas:$E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^7 N/m^2$; $I_1 = I_2 = 4,5 \cdot 10^{-3} m^4$, $A_1 = A_2 = 0.15m$ e $\kappa = 5/6$.

As soluções fundamentais desacopladas utilizadas nesse exemplo correspondem as Eqs.(4.56) e (4.209), nas teorias de TEB E TT, respectivamente. Os resultados obtidos pelo MEC em termos de deslocamentos e rotações ao longo das vigas e camada cisalhante estão apresentados na tabela 5.7, onde foram comparadas com as soluções exatas disponíveis no apêndice A.1.4.

| | | **TEB** | | **TT** | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | **MEC** | **Exata** | **MEC** | **Exata** |
| $\phi_1$ | 0 | 0,4320048 | 0,4320048 | -0,4307073 | -0,4307073 |
| $\phi_2$ | | 0,4385519 | 0,4385519 | -0,436012 | -0,436012 |
| $w_1$ | | 1,6814935 | 1,6814935 | 1,6969643 | 1,6969642 |
| $v$ | 5 | 1,5382293 | 1,5382293 | 1,5449357 | 1,5449357 |
| $w_2$ | | 1,5003529 | 1,5003529 | 1,5056109 | 1,5056109 |
| $\phi_1$ | 10 | -0,4320048 | -0,4320048 | 0,4307073 | 0,4307073 |
| $\phi_2$ | | -0,4385519 | -0,4385519 | 0,436012 | 0,436012 |

TABELA 5.7 – Deslocamentos (em $m$) e rotações (em $rad$) ao longo da coordenada $x$ do sistema de vigas duplas submetidas a carga concentrada.

Os esforços ao longo do comprimento $x$ também foram obtidos e estão apresentados na tabela 5.8. Note que o sistema respondeu de forma simétrica com valores máximos em deslocamentos e momentos fletores no meio do vão e em rotação e cortante nas extremidades esquerda e direita. Note que os deslocamentos ficaram bastante próximos

| | | **TEB** | | **TT** | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | **MEC** | **Exata** | **MEC** | **Exata** |
| $V_1$ | | 1163,813 | 1163,812 | 1203,760 | 1203,760 |
| $V_k$ | 0,0 | 21501,493 | 21501,493 | 21480,336 | 21480,336 |
| $V_2$ | | 2334,694 | 2334,694 | 2315,903 | 2315,903 |
| $M_1$ | 5,0 | 32656,570 | 32656,570 | 32327,881 | 32327,881 |
| $M_2$ | | 15431,967 | 15431,967 | 15425,332 | 15425,332 |
| $V_1$ | | -1163,813 | -1163,812 | -1203,760 | -1203,760 |
| $V_k$ | 10,0 | -21501,493 | -21501,493 | -21480,336 | -21480,336 |
| $V_2$ | | -2334,694 | -2334,694 | -2315,903 | -2315,903 |

TABELA 5.8 – Cortantes (em $N$) e momentos fletores (em $Nm$) ao longo da coordenada $x$ do sistema de vigas duplas submetidas a carga concentrada.

### 5.2.2 Simplesmente apoiada com carga axial e vertical distribuída

A figura 5.5 mostra um sistema de vigas conectadas submetidas a ação de carregamentos verticais distribuídos nas vigas superior e inferior, de sentidos opostos, e cargas axiais. O sistema simplesmente apoiado possui diferentes rigidez, porém mesma seção transversal:

$E_1 = 2E_2 = 2 \cdot 10^7 N/m^2$; $I_1 = I_2 = 4,5 \cdot 10^{-3} m^4$, $A_1 = A_2 = 0.15m$ e $\kappa = 5/6$. A camada conectora de Kerr possui as seguintes propriedades: $k_c = k_k = G_s/0,5 = 10^5 N/m^2$. Considere ainda as seguintes ações: $g_1 = 2000N/m^2$, $g_2 = 1000N/m^2$, $P_1 = 10000N$ e $P_2 = 20000N$. As tabelas 5.9 e 5.10 mostram os deslocamentos e esforços ao longo do comprimento $x$.

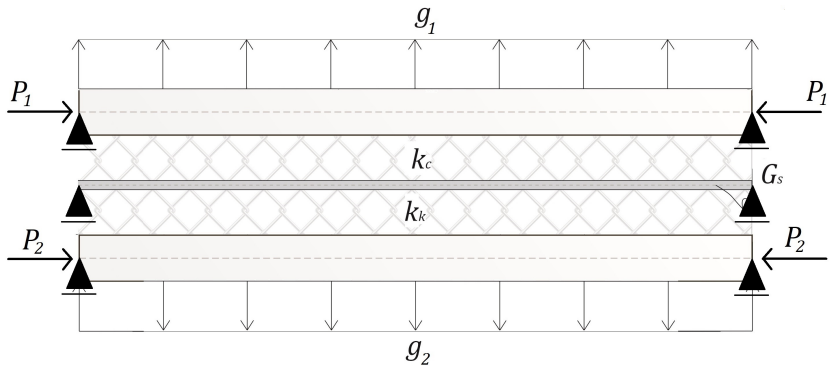



FIGURA 5.5 – Viga sobre camada elástica, simplesmente apoiada, submetida a carregamento uniforme.

Os resultados obtidos via MEC foram comparados com soluções analíticas e outras do MEF, baseada em polinômios de nona ordem. Foram consideradas duas discretizações do MEF: a primeira considerando dez elementos finitos (MEF$^1$); e outra utilizando noventa elementos finitos (MEF$^2$).

Os resultados obtidos mostram a elegância na formulação do MEC uma vez que os resultados obtidos, com apenas um elemento de contorno, recupera com alta precisão as respostas exatas.

| | | **TEB** | | | | **TT** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | **MEC** | **MEF$^1$** | **MEF$^2$** | **Exata** | **MEC** | **Exata** |
| $\phi_1$ | 0,0 | 2,8432422 | 2,8431815 | 2,8432422 | 2,8432422 | -2,7963822 | -2,7963822 |
| $\phi_2$ | | 0,3976055 | 0,3980715 | 0,3976055 | 0,3976055 | -0,4063391 | -0,4063391 |
| $w_1$ | | 4,2049807 | 4,204909 | 4,2049807 | 4,2049807 | 4,2387755 | 4,2387755 |
| $v$ | 2,5 | 2,1547507 | 2,1550935 | 2,1547507 | 2,1547507 | 2,1904239 | 2,1904239 |
| $w_2$ | | 0,9553201 | 0,9558867 | 0,9553201 | 0,9553201 | 1,0069224 | 1,0069224 |
| $\phi_1$ | 5,0 | -2,8432422 | -2,8431815 | -2,8432422 | -2,8432422 | 2,7963822 | 2,7963822 |
| $\phi_2$ | | -0,3976055 | -0,3980715 | -0,3976055 | -0,3976055 | 0,4063391 | 0,4063391 |

TABELA 5.9 – Deslocamentos (em $m \cdot 10^2$) e rotações (em $rad$) ao longo da coordenada $x$.

| | | **TEB** | | **TT** | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | **MEC** | **Exata** | **MEC** | **Exata** |
| $V_1$ | | 1592,510 | 1592,510 | 1562,596 | 1562,596 |
| $V_k$ | 0,0 | 1353,652 | 1353,652 | 1375,881 | 1375,881 |
| $V_2$ | | -446,162 | -446,162 | -438,477 | -438,477 |
| $M_1$ | 2,5 | 1329,905 | 1329,905 | 1307,433 | 1307,433 |
| $M_2$ | | 251,906 | 251,906 | 252,405 | 252,405 |
| $V_1$ | | -1592,510 | -1592,510 | -1562,596 | -1562,596 |
| $V_k$ | 5,0 | -1353,652 | -1353,652 | -1375,881 | -1375,881 |
| $V_2$ | | 446,162 | 446,162 | 438,477 | 438,477 |

TABELA 5.10 – Cortantes (em $N$) e momentos fletores (em $Nm$) ao longo da coordenada $x$.

# Capítulo 6

# Introdução à teoria de placas

Neste capítulo é feita uma introdução ao estudo de placas, apresentando os conceitos básicos das teorias disponíveis na literatura para placas delgadas e espessas e suas peculiaridades. Posteriormente, são deduzidas as equações de equilíbrio para placas apoiadas em camada elástica de três parâmetros de Kerr relacionadas a cada uma dessas teorias. As formulações matemáticas apresentadas neste capítulo são utilizadas na formulação do MEC.

## 6.1 Fundamentos da teoria de placas

Pode-se definir placa como sendo um elemento limitado por duas faces planas, simétricas, e sujeitas a carregamentos perpendiculares à superfície média. Devido a duas das suas dimensões serem muito maiores que a terceira, espessura, é considerada como um elemento bidimensional, podendo apresentar uma curvatura suave (PAIVA, 1987). Uma outra classificação comum em placas é segundo a relação entre a espessura ($h$) e a dimensão do menor lado ($a$), estando cada classificação associada a um modelo matemático específico. Como referência, alguns autores costumam classificá-las em (MENDONÇA, 2002):

$$Muito\ delgada:\ h/a \leq 0,01, \tag{6.1}$$

$$Delgada:\ 0,01 < h/a \leq 0,2, \tag{6.2}$$

$$Espessa: h/a \geq 0,2. \tag{6.3}$$

Uma definição mais completa é feita baseando-se no efeito das tensões cisalhantes normais ao plano da placa, similar ao discutido em vigas. A literatura apresenta diferentes teorias que permitem analisar o comportamento da placa submetidas à flexão simples segundo a distribuição de tensões cisalhantes na seção média (WANG *et al.*, 2000b).

Em 1850, Kirchhoff estabeleceu as hipóteses fundamentais da teoria clássica de placas delgadas (ou finas), onde considerou que os planos normais à superfície média da placa, inicialmente planos, permanecem planos na configuração deformada. Isso implica em dizer que as tensões cisalhantes na direção transversal à placa são desconsideradas. Dessa forma, a teoria limita-se apenas aos casos onde haja pequenos deslocamentos transversais, sendo aplicável apenas a placas delgadas.

Contudo, a teoria clássica se torna insuficiente para uma descrição mais realista do comportamento de placas quando a relação entre a espessura e o menor lado é relativamente grande, uma vez que ocorrerá deformação por cisalhamento. Entendendo a limitação da teoria clássica de placas, Reissner (1945) e Mindlin (1951) formularam diferentes teorias que levam em conta os efeitos das deformações cisalhantes. Considerando uma distribuição de tensões conhecidas, Reissner (1945) assume uma variação linear das tensões normais ao longo da espessura da placa e considera as deformações cisalhantes transversais segundo uma variação quadrática, resultando em campos médios ponderados ao longo da espessura da placa definidas no plano médio. Já Mindlin (1951) considera que os deslocamentos horizontais variam linearmente com a espessura, assumindo a hipótese de seção plana, semelhante a teoria de vigas de Timoshenko, sendo esta denominada de teoria de placas deformáveis por cisalhamento de primeira ordem (FSDT). As equações diferenciais de ambas as teorias permitem que três condições de contorno do problema sejam satisfeitas, descartando-se a necessidade de reações concentradas nos vértices da placa, como ocorre na teoria clássica.

Há ainda teorias mais refinadas de placas em que levam em consideração a deformação por cortante segundo polinômios de ordem maiores ou igual a dois. Dentre essas teorias, destaca-se a de alta ordem de Reddy (1984) em que a deformação por cortante é considerada de terceira ordem, não sendo necessária a consideração de um fator de correção de cisalhamento no modelo. A abordagem cinemática da teoria proposta por Reddy se assimila à teoria de vigas de Bickford (1982). O problema de placas apoiadas em camada elástica de Kerr segundo as teorias de alta ordem não são tratadas nesta tese.

Antes de tratar sobre as hipóteses específicas a cada teoria de placa em particular, podem-se pontuar aquelas comuns a todas:

- A espessura é pequena se comparada às outras dimensões da placa;
- Material elástico linear, homogêneo e isotrópico;
- É considerada a hipótese de pequenos deslocamentos;
- As componentes tangenciais são nulas nas faces da placa.

### 6.1.1 Teoria de Kirchhoff

A teoria de Kirchhoff se baseia no neglicenciamento das tensões cisalhantes normais ao plano da placa. Dessa forma, as retas normais ao plano médio na posição indeformada permanecem normais após a deformação. Isto significa desprezar as deformações por cortante que causam distorção. Além disso, consideram-se as seguintes hipóteses:

- os deslocamentos normais ao plano da placa são pequenos e as deformações na direção da espessura são pequenas o suficiente para serem desprezadas;
- as tensões normais ao plano médio são pequenas, portanto desprezadas;
- As componentes de deslocamento contidas no plano da placa variam linearmente com a espessura;
- Não existem tensões de cisalhamento nas faces externas paralelas ao plano médio da placa.

A partir das hipóteses simplificadoras, podem-se definir os campos em deslocamentos da teoria de Kirchhoff segundo as expressões:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \tag{6.4}$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{6.5}$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w \tag{6.6}$$

onde $w$ é o deslocamento transversal no plano médio da placa e $u_\alpha$ são os deslocamentos normais à seção média dados em função da inclinação do plano médio nas direções $x_1$ e $x_2$, respectivamente.

A partir do tensor das deformações, eq.(2.20), escreve-se as relações entre deformações e deslocamentos da placa:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -x_3 w_{,\alpha\beta}, \tag{6.7}$$

Considerando que o material se comporte segundo a lei de Hooke generalizada, eq.(2.26), escreve-se as relações entre tensão-deformação como:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{(1+\nu)} \left( \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right), \tag{6.8}$$

lembrando que no EPT a deformação $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$.

Substituindo a eq.(6.7) na eq.(6.8), obtêm-se as relações tensão-deslocamento:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -x_3 \frac{E}{(1+\nu)} \left( w_{,\alpha\beta} + \frac{\nu}{(1-\nu)} w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right). \tag{6.9}$$

Com isso, podem-se definir os esforços como sendo as resultantes das integrais das componentes de tensão ao longo da espessura da placa. Para os momentos fletores e volvente, as seguintes expressões podem ser escritas:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3, \tag{6.10}$$

Substituindo a eq.(6.9) na eq.(6.10), obtêm-se:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} -x_3^2 \frac{E}{(1+\nu)} \left( w_{,\alpha\beta} + \frac{\nu}{(1-\nu)} w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) dx_3. \tag{6.11}$$

Dessa forma, os momentos fletores e volvente são expressos por:

$$M_{\alpha\beta} = -D\,(1-\nu) \left( w_{,\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right), \tag{6.12}$$

onde $D$ é o módulo de rigidez à flexão da placa, dado por:

$$D = \frac{Eh^3}{12\,(1-\nu^2)}. \tag{6.13}$$

Já as forças cortantes, obtidas por meio das equações de equilíbrio da placa, são definidas em função dos deslocamentos transversais como sendo:

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3. \tag{6.14}$$

Da equação governante da placa de Kirchhoff, chega-se à expressão do esforço cortante como sendo (TIMOSHENKO *et al.*, 1959):

$$Q_\alpha = -D w_{,\gamma\gamma\alpha}. \tag{6.15}$$

### 6.1.2 Teoria de Mindlin

Diferentemente da teoria proposta por Kirchhoff, Mindlin assume que a seção média da placa, inicialmente ortogonal ao plano médio da placa, não necessariamente permanece ortogonal na posição deformada. Com isso, as tensões cisalhantes $\varepsilon_{xz}$ e $\varepsilon_{yz}$ não são mais

consideradas nulas.

Dessa forma, é considerado que a deformação da placa é completamente descrita por meio do deslocamento transversal e rotações:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = x_3\phi_1, \tag{6.16}$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = x_3\phi_2, \tag{6.17}$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w, \tag{6.18}$$

onde $w$ é o deslocamento transversal na superfície média da placa e $\phi_\alpha(x_1, x_2) = \phi_\alpha$ corresponde às rotações nas direções $Ox_1$ e $Ox_2$ do plano médio.

Considerando a teoria linear da elasticidade, as componentes de deformação são dadas em função dos deslocamentos por:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\right) x_3, \tag{6.19}$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\left(u_\alpha + u_{3,\alpha}\right). \tag{6.20}$$

Segundo a lei generalizada de Hooke, eq.(2.26), a relação tensão-deformação será dada por:

$$\sigma_{\alpha\beta} = G\left[u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu}u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right] x_3, \tag{6.21}$$

$$\sigma_{\alpha 3} = G\left(u_\alpha + u_{3,\alpha}\right), \tag{6.22}$$

onde $G$ é o módulo de elasticidade transversal.

Os momentos fletor e volvente e o esforço cortante, por unidade de comprimento, são dados por:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3, \tag{6.23}$$

$$Q_{\alpha 3} = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{\sigma}_{\alpha 3} dx_3. \tag{6.24}$$

Importante notar que pelas hipóteses adotadas por Mindlin, as tensões cisalhantes são consideradas constantes ao longo da espessura da placa. Para isso, a energia de deformação devido às tensões cisalhantes será igual àquela definida pela elasticidade tridimensional ou equivalente, a qual será compatibilizada por meio de um fator de correção, ou de forma, $\kappa_p$. Assim, a tensão cisalhante será dada por:

$$\overline{\sigma}_{\alpha 3} = \kappa_p \sigma_{\alpha 3} \tag{6.25}$$

Substituindo as eqs.(6.21) e (6.22) nas eqs.(6.23) e (6.24), e ainda por meio da eq.(6.25), obtêm-se:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} G\left[u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu}u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right] x_3^2 dx_3, \tag{6.26}$$

$$Q_{\alpha 3} = \int_{-h/2}^{h/2} \kappa_p G\left(u_\alpha + u_{3,\alpha}\right) dx_3. \tag{6.27}$$

Portanto, o momento fletor, volvente e cortante, na teoria de Mindlin, são dados por:

$$M_{\alpha\beta} = D\frac{1-\nu}{2}\left[u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu}u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right], \tag{6.28}$$

$$Q_{\alpha 3} = \kappa_p G h\left(u_\alpha + u_{3,\alpha}\right), \tag{6.29}$$

onde a rigidez da placa $D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$.

## 6.2 Equações de equilíbrio

Nesta seção são apresentadas as equações diferenciais governantes do problema de placas apoiadas em camada elástica de Kerr. Dois caminhos podem ser tomados para obtenção destas equações: o primeiro via equilíbrio de esforços e momentos em um elemento infinitesimal; e o segundo via funcional de energia.

### 6.2.1 Pelas hipóteses de Kirchhoff

Dadas as hipóteses da teoria de Kirchhoff, pode-se escrever a equação da energia potencial total de deformação da placa apoiada em camada elástica de Kerr pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} U = &\frac{1}{2}\int_V \sigma_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}dV + \frac{1}{2}\int_\Omega c\left(w-v\right)^2 d\Omega + \\ &+\frac{1}{2}\int_\Omega G_k\left[\left(v_{,1}\right)^2 + \left(v_{,2}\right)^2\right] d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega kv^2 d\Omega, \end{aligned} \tag{6.30}$$

onde $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\varepsilon_{\alpha\beta}$ são as tensões e deformações normais e cisalhantes, que atuam no plano médio da placa, $w$ é o deslocamento transversal da placa e $v$ o deslocamento transversal da camada de cisalhamento. Pode-se ainda definir os parâmetros da camada elástica de Kerr como sendo: $c$ e $k$, as rigidezes das molas superior e inferior, respectivamente; e $G_k$ a rigidez da camada cisalhante.

Substituindo a eqs.(6.7) na equação da energia total, eq.(6.30), obtêm-se:

$$U = \frac{1}{2}\int_V -\sigma_{\alpha\beta}x_3 w_{,\alpha\beta}dV + \frac{1}{2}\int_\Omega c\left(w-v\right)^2 d\Omega + \\ +\frac{1}{2}\int_\Omega G_k\left[\left(v_{,1}\right)^2+\left(v_{,2}\right)^2\right]d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega kv^2 d\Omega. \tag{6.31}$$

Desenvolvendo a eq.(6.31), chega-se a:

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega\int_{-h/2}^{h/2} -\sigma_{\alpha\beta}x_3 w_{,\alpha\beta}dx_3 d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega c\left(w-v\right)^2 d\Omega + \\ +\frac{1}{2}\int_\Omega G_k\left[\left(v_{,1}\right)^2+\left(v_{,2}\right)^2\right]d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega kv^2 d\Omega. \tag{6.32}$$

Note que, as tensões resultantes associadas ao momentos fletor e volvente, dadas pela eq.(6.9), podem ser expressas por:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha\beta}x_3 dx_3 = -DC_{\alpha\beta\gamma\theta}w_{,\gamma\theta}, \tag{6.33}$$

onde $C_{\alpha\beta\gamma\theta}$ é um tensor de quarta ordem definido por:

$$C_{\alpha\beta\gamma\theta} = \nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\theta} + \frac{1-\nu}{2}\left(\delta_{\alpha\theta}\delta_{\beta\gamma}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\theta}\right). \tag{6.34}$$

Substituindo a eq.(6.33) na eq.(6.32), obtêm-se:

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega DC_{\alpha\beta\gamma\theta}\left(w_{,\alpha\beta}\right)^2 d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega c\left(w-v\right)^2 d\Omega + \\ +\frac{1}{2}\int_\Omega G_k\left[\left(v_{,1}\right)^2+\left(v_{,2}\right)^2\right]d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega kv^2 d\Omega. \tag{6.35}$$

Aplicando a primeira variação da energia total de deformação do problema, tem-se:

$$\delta U = -\int_\Omega\left\{M_{\alpha\beta}\delta w_{,\alpha\beta}+g(x_1,x_2)\delta w\right\}d\Omega + \int_\Omega c\left(w-v\right)\delta\left(w-v\right)d\Omega + \\ +\int_\Omega G_k\left(v_{,1}\delta v_{,1}+v_{,2}\delta v_{,2}\right)d\Omega + \int_\Omega kv\delta v d\Omega = 0, \tag{6.36}$$

Integrando por partes

$$-\int_\Omega\left[M_{\alpha\beta,\alpha\beta}-c\left(w-v\right)+g\right]\delta w d\Omega + \int_\Omega\left[-c\left(w-v\right)-G_k v_{,\alpha\alpha}+kv\right]\delta v d\Omega + \\ -\int_\Gamma M_{\alpha\beta}\eta_\alpha\delta w_\beta d\Gamma + \int_\Gamma M_{\alpha\beta,\alpha}\eta_\beta\delta w d\Gamma + \int_\Gamma G_k v_{,\alpha}\eta_\alpha\delta v d\Gamma = 0, \tag{6.37}$$

onde $\eta_1$ e $\eta_2$ são os cossenos diretores das normais no contorno $\Gamma$.

Aplicando o princípio do cálculo variacional, das integrais definidas no domínio na eq.(6.37) originam-se as equações de equilíbrio da placa de Kirchhoff sobre camada elástica de Kerr:

$$-M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + c\,(w - v) - g = 0, \tag{6.38}$$

$$-c\,(w - v) - G_k v_{,\alpha\alpha} + kv = 0. \tag{6.39}$$

Substituindo a equação de momento eq.(6.12) na eq.(6.38), reescreve-se a equação de equilíbrio em função dos deslocamentos:

$$Dw_{,\alpha\alpha\beta\beta} + c\,(w - v) - g = 0, \tag{6.40}$$

$$-G_k v_{,\alpha\alpha} - c\,(w - v) + kv = 0, \tag{6.41}$$

ou ainda na forma (KERR, 1964b):

$$D\nabla^2\nabla^2 w + c\,(w - v) - g = 0, \tag{6.42}$$

$$-G_k\nabla^2 w - c\,(w - v) + kv = 0, \tag{6.43}$$

sendo o operador laplaciano definido em coordenadas cartesianas por $\nabla^2\,(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x_1}\,(\cdot) + \frac{\partial}{\partial x_2}\,(\cdot)$ e o operador biharmônico $\nabla^2\nabla^2\,(\cdot) = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4}\,(\cdot) + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\,(\cdot) + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\,(\cdot)$.

Para determinar as condições de contorno, parte-se das integrais no contorno dadas pela eq.(6.37), obtendo as expressões nos contornos paralelos aos eixos $x$ e $y$:

$$M_{\alpha\beta}\eta_\alpha = 0, \tag{6.44}$$

$$M_{\alpha\beta,\alpha}\eta_\beta = Q_\beta\eta_\beta = 0, \tag{6.45}$$

$$G_k v_{,\alpha}\eta_\alpha = T_\alpha\eta_\alpha = 0, \tag{6.46}$$

sendo $Q_\alpha$ e $T_\alpha$ os esforços cortantes na placa e na camada de cisalhamento, respectivamente.

A Figura 6.1 descreve os esforços internos atuantes sobre o elemento de placa de Kirchhoff apoiada em camada elástica de Kerr, bem como a convenção adotada.

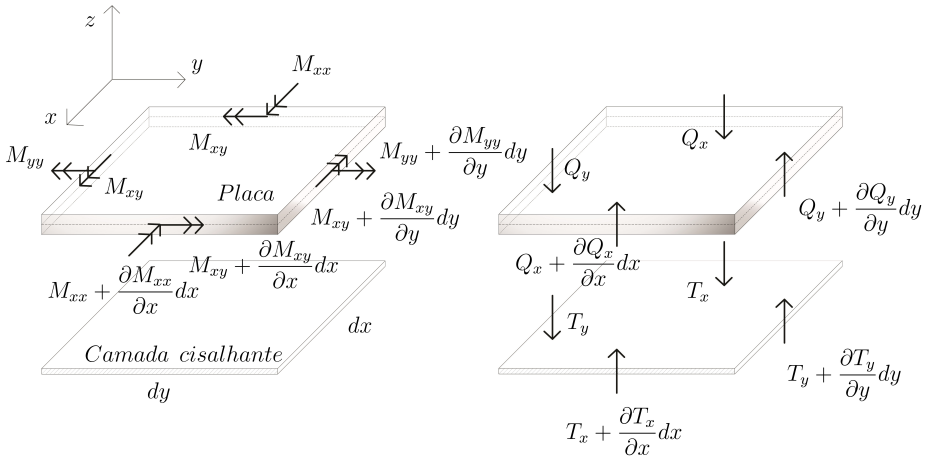


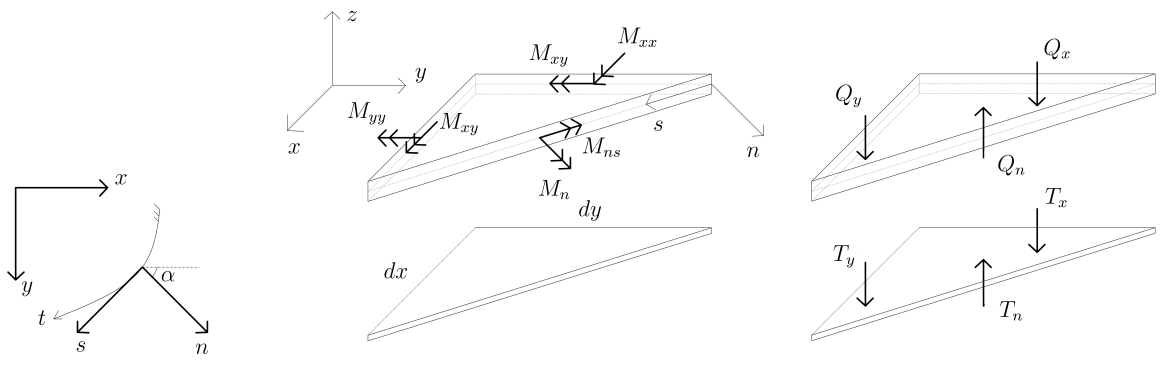

FIGURA 6.1 – Esforços internos em um elemento de placa sobre camada de Kerr.

Os momentos e esforços cortantes definidos pelas eqs.(6.12) e (6.15) se referem ao sistema de coordenadas $(x_1, x_2, x_3)$ inicialmente adotado. Entretanto, é conveniente escrevê-los em relação a um sistema de coordenadas genérico $(n, s, x_3)$ dados pelos cossenos diretores da normal e tangente a um contorno qualquer de um elemento, como pode ser visto na Figura 6.2. Transformando as coordenadas do sistema $(x_1, x_2, x_3)$ para o $(n, s, x_3)$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= n \cdot cos\alpha - s \cdot sen\alpha = n \cdot \eta_x - s \cdot \eta_y, \\ x_2 &= n \cdot sen\alpha + s \cdot cos\alpha = n \cdot \eta_y + s \cdot \eta_x. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Com isso, as seguintes relações são definidas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x_1} &= \frac{\partial w}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial n}\eta_1 - \frac{\partial w}{\partial s}\eta_2, \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} &= \frac{\partial w}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{\partial w}{\partial n}\eta_2 + \frac{\partial w}{\partial s}\eta_1. \end{aligned} \tag{6.48}$$




(a) (b)

FIGURA 6.2 – Sistema de coordenadas genérico (a) e seus correspondentes esforços internos (b).

Substituindo as relações (6.48) nas integrais definidas sobre o contorno da eq.(6.37), chega-se a:

$$M_n = M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta, \tag{6.49}$$

$$M_{ns} = M_{\alpha\beta} n_\alpha s_\beta, \tag{6.50}$$

$$Q_n = Q_\alpha n_\alpha \tag{6.51}$$

$$T_n = T_\alpha n_\alpha. \tag{6.52}$$

Para resolver a equação de equilíbrio da placa apoiada em camada elástica de Kerr, é necessário impor condições de contorno com relação ao deslocamento na placa $w$, na camada de cisalhamento $v$ e à inclinação do plano médio da placa $\partial w/\partial n$, sendo $n$ a direção normal ao contorno, ou aos esforços correspondentes $Q_n$, $T_n$, $M_n$ e $M_{ns}$. Assim como ocorre para a placa de Kirchhoff sem camada elástica, podem-se agrupar as condições de contorno relativas a $Q_n$ e $M_{ns}$ em uma única, definindo assim o esforço cortante equivalente $V_n$ como sendo (TIMOSHENKO *et al.*, 1959):

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}. \tag{6.53}$$

Como consequência, surgem reações concentradas nos cantos da placa. Essas reações são expressar por:

$$Rc = M_{ns}^{+} - M_{ns}^{-}, \tag{6.54}$$

onde o sinal negativo indica momento volvente anterior ao canto enquanto que o positivo indica o momento volvente posterior ao canto.

### 6.2.2 Pelas hipóteses de Mindllin

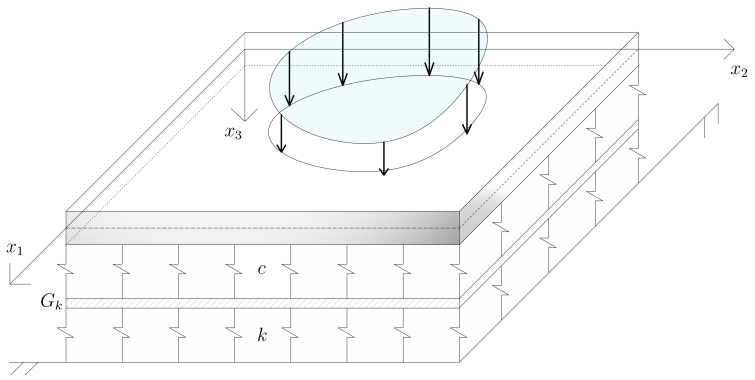



FIGURA 6.3 – Placa de Mindlin sobre camada elástica de Kerr.

A energia potencial $\pi_p$ relacionada à placa de Mindlin sob a base elástica de Kerr é dada pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}\pi_p &= \frac{1}{2}\int_V \sigma_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}dV + \frac{1}{2}\int_V \sigma_{3\alpha}\varepsilon_{3\alpha}dV + \frac{1}{2}\int_\Omega c\left(w-v\right)^2 d\Omega + \\ &+\frac{1}{2}\int_\Omega kv^2 d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega G_k\left[\left(v_{,1}\right)^2 + \left(v_{,2}\right)^2\right] d\Omega, \end{aligned} \tag{6.55}$$

onde $\sigma_{i\alpha}$ e $\varepsilon_{i\alpha}$ são as tensões e deformações normais e transversais, ou cisalhantes, que atuam em um plano $(x_1, x_2)$, $w\left(x_1, x_2\right)$ é o deslocamento transversal da placa e $v\left(x_1, x_2\right)$ o deslocamento transversal da camada de cisalhamento. Os parâmetros da camada elástica de Kerr são: $c$ e $k$, que correspondem as rigidezes das molas superior e inferior, respectivamente, e $G_k$ a rigidez da camada cisalhante.

Devido às hipóteses da placa de Mindlin, a deformação da placa pode ser obtida a partir de suas respectivas curvaturas $\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{x_3}{2}\left(\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}\right)$, $\varepsilon_{3\alpha} = \phi_\alpha + w_{,\alpha}$, obtidas por meio da eq.(2.20) para o EPT. Se essas relações forem substituídas na eq.(6.55) e após a integração ao longo do eixo $x_3$, o funcional de energia passa a ser:

$$\begin{aligned}\pi_p &= \frac{1}{2}\int_\Omega\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}x_3\phi_{\alpha,\beta}\ dx_3 d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{3\alpha}\left(\phi_\alpha + w_{,\alpha}\right)\ dx_3 d\Omega + \\ &+\frac{1}{2}\int_\Omega c\left(w-v\right)^2 d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega kv^2 d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega G_k\left(v_{,\alpha}\right)^2 d\Omega. \end{aligned} \tag{6.56}$$

As tensões resultantes associadas ao momento fletor, volvente e cortante, em termos das rotações e deslocamento vertical, são dadas por:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}x_3 dx_3 = DC_{\alpha\beta\gamma\theta}\phi_{\gamma,\theta}, \tag{6.57}$$

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{3\alpha}dx_3 = \kappa Gh\left(\phi_\alpha + w_{,\alpha}\right), \tag{6.58}$$

onde $D$ é a rigidez à flexão da placa, $E$ é o módulo de Young, $G$ é o módulo de deformação transversal, $\nu$ é a constante de Poisson, $\kappa$ é o coeficiente de cisalhamento ($\kappa = 5/6$), $h$ é a espessura da placa e o tensor de quarta ordem $C_{\alpha\beta\gamma\theta}$ dado por:

$$C_{\alpha\beta\gamma\theta} = \nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\theta} + \frac{1-\nu}{2}\left(\delta_{\alpha\theta}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\theta}\right), \tag{6.59}$$

onde $\delta_{\alpha\beta}$ é o delta de Kronecker.

Substituindo as eqs.(6.57) e (6.58) na eq.(6.56) e aplicando a primeira variação do

funcional de energia, obtêm-se:

$$\begin{aligned}\delta\pi_p &= D\int_\Omega \left[\nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\theta} + \frac{1-\nu}{2}\left(\delta_{\alpha\theta}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\theta}\right)\right]\phi_{\gamma,\theta}\delta\phi_{\alpha,\beta}d\Omega + \\ &+ \int_\Omega \kappa Gh\left(\phi_\alpha + w_{,\alpha}\right)\delta\left(\phi_\alpha + w_{,\alpha}\right)d\Omega + \int_\Omega c\left(w-v\right)\delta\left(w-v\right)d\Omega + \\ &+ \int_\Omega kv\delta v d\Omega + \int_\Omega G_k v_{,\alpha}\delta v_{,\alpha}d\Omega. \end{aligned} \tag{6.60}$$

Após algumas integrações por partes, a eq.(6.60) passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned}\delta\pi_p &= \int_\Gamma M_{\alpha\beta}\eta_\beta\delta\phi_\alpha d\Gamma + \int_\Gamma Q_\alpha n_\alpha\delta w d\Gamma + \int_\Gamma G_k v_{,\alpha}n_\alpha\delta v d\Gamma + \\ &+ \int_\Omega \left[-D\left(\frac{1+\nu}{2}\phi_{\beta,\beta\alpha} + \frac{1-\nu}{2}\phi_{\alpha,\beta\beta}\right) + \kappa Gh\left(\phi_\alpha + w_{,\alpha}\right)\right]\delta\phi_{\alpha,\beta}d\Omega + \\ &- \int_\Omega \left[\kappa Gh\left(\phi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}\right) - c\left(w-v\right)\right]\delta w d\Omega + \\ &+ \int_\Omega \left[-c\left(w-v\right) + kv - G_k v_{,\alpha\alpha}\right]\delta v d\Omega. \end{aligned} \tag{6.61}$$

onde

$$\begin{aligned} p_\alpha &= M_{\alpha\beta}\eta_\beta, \\ p_3 &= Q_\alpha n_\alpha, \\ P_4 &= G_k v_{,\alpha}n_\alpha, \end{aligned} \tag{6.62}$$

são os esforços generalizados no contorno do plano médio da placa.

Para a completa definição das equações de equilíbrio, é necessário definir a primeira variação das cargas externas como:

$$\delta W = \int_\Omega g\delta w d\Omega + \int_\Omega m_\alpha\delta\phi_\alpha d\Omega, \tag{6.63}$$

onde $g$ corresponde a um carregamento distribuído e $m_\alpha$ a um momento distribuído.

Da minimização do funcional, $\delta\Pi = \delta\pi_p - \delta W = 0$, chega-se à equação governante do problema dada por:

$$\begin{aligned} &-D\left(\frac{1+\nu}{2}\phi_{\beta,\beta\alpha} + \frac{1-\nu}{2}\phi_{\alpha,\beta\beta}\right) + \kappa Gh\left(\phi_\alpha + w_{,\alpha}\right) - m_\alpha = 0, \\ &-\kappa Gh\left(\phi_{\alpha,\alpha} + w_{,\alpha\alpha}\right) + c\left(w-v\right) - g = 0, \\ &-c\left(w-v\right) + kv - G_k v_{,\alpha\alpha} = 0. \end{aligned} \tag{6.64}$$

Fazendo $\kappa Gh = Ds_1$, $s_1 = \left(\frac{1-\nu}{2}\right)\lambda^2$, $a_1 = \frac{(1-\nu)}{2}$, $b_1 = \frac{(1+\nu)}{2}$, $s_2 = c/D$, $s_3 = k/D$ e $s_4 = G_k/D$, e substituindo nas eqs.(6.64), reescreve-se a equação governante do problema real na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_1\nabla^2 - s_1 + b_1\frac{\partial^2}{\partial x^2} & b_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & -s_1\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ b_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & a_1\nabla^2 - s_1 + b_1\frac{\partial^2}{\partial y^2} & -s_1\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ s_1\frac{\partial}{\partial x} & s_1\frac{\partial}{\partial y} & s_1\nabla^2 - s_2 & s_2 \\ 0 & 0 & s_2 & s_4\nabla^2 - (s_2+s_3) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \\ v \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} m_x/D \\ m_y/D \\ g/D \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6.65)$$

onde $\nabla^2 = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}$ é o operador de Laplace e $\lambda^2 = 10/h^2$ é o parâmetro característico de Reissner, sendo $\lambda^2 = 12\kappa/h^2$ com $\kappa = 5/6$.

As relações momento-curvatura são:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= D\frac{1-\nu}{2}\left(\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu}\phi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right), \\ Q_{3\alpha} &= D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(\phi_\alpha + w_{,\alpha}\right), \\ T_{3\alpha} &= G_k v_{,\alpha}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

onde $T_{3\alpha}$ corresponde ao cortante que atua na camada cisalhante de Kerr.

Substituindo as eqs.(6.66) e suas derivadas nas equações de equilíbrio, eqs.(6.64), obtêm-se a equação diferencial parcial governante do problema em esforços:

$$\begin{aligned} &M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{3\alpha} + m_\alpha = 0, \\ &Q_{3\alpha,\alpha} - c\left(w - v\right) + g = 0, \\ &c\left(w - v\right) - kv + T_{3\alpha,\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (6.67)$$

## 6.3 Equações de placas em coordenadas polares

A representação das equações diferenciais e demais relações de placas por meio de coordenadas polares pode ser conveniente para alguns problemas. Por exemplo, no tratamento do problema fundamental do MEC, por questões de simetria, utilizar o sistema de coordenadas polares facilita a sua análise. Dessa forma, são apresentadas nesta seção de forma sucinta algumas relações necessárias para o tratamento de placas em coordenadas

polares.

Considere um ponto $P$ qualquer de coordenadas $(x_1, x_2)$ distante $r$ da origem do sistema cartesiano e formando um ângulo $\theta$ com o eixo $x_1$, conforme mostra a Figura 6.4. Pode-se definir o ponto $P$ em função das componentes $r$ e $\theta$ a partir das relações:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 = r \cdot cos\theta, \\ x_2 &= r_2 = r \cdot sen\theta. \end{aligned} \tag{6.68}$$

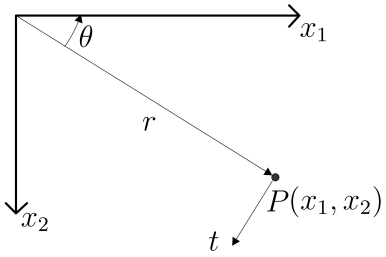



FIGURA 6.4 – Sistema de coordenadas polares e cartesiano.

Já a conversão das coordenadas cartesianas para polar são dadas por pelas expressões:

$$\begin{aligned} r^2 &= r_1^2 + r_2^2 = r_i r_i, \\ \theta &= arctg\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \end{aligned} \tag{6.69}$$

Das relações (6.68) e (6.69), obtêm-se as expressões das derivadas em relação às direções $x_1$ e $x_2$:

$$r_{,1} = \frac{r_1}{r} = cos\theta, \tag{6.70}$$

$$r_{,2} = \frac{r_2}{r} = sen\theta, \tag{6.71}$$

que são os cossenos diretores correspondentes a direção $r$. Os cossenos diretores do versor $t$ são dados por:

$$\begin{aligned} t_1 &= -r_{,2} = -sen(\theta), \\ t_2 &= r_{,1} = cos(\theta). \end{aligned}$$

Outras derivadas de interesse são:

$$\theta_{,1} = -\frac{sen(\theta)}{r}, \tag{6.72}$$

$$\theta_{,2} = \frac{cos(\theta)}{r}, \tag{6.73}$$

$$\frac{\partial r_{,i}}{\partial \theta} = t_i, \tag{6.74}$$

$$\theta_{,i} = \frac{t_i}{r}. \tag{6.75}$$

Para os casos em que há simetria em relação à origem do sistema de coordenadas, as variáveis do problema são função apenas de r, já que não variam com $\theta$.

Será interessante ainda estudar as expressões de momentos e forças cortantes em direções genéricas do contorno. Com isso, considere um ponto $p$ sobre um contorno genérico de vetores normal e tangente definidos por $n$ e $s$, respectivamente, com origem nesse mesmo ponto.

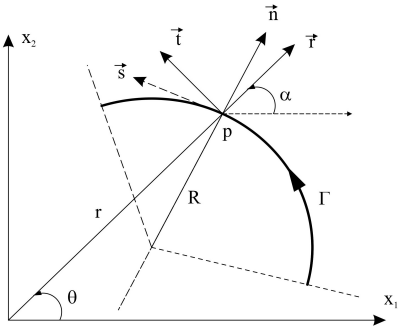



FIGURA 6.5 – Sistema de coordenadas local

Da figura 6.5, podem-se definir os cossenos diretores das direções $n$ e $s$, respectivamente, como sendo:

$$n_1 = cos(\alpha), \tag{6.76}$$

$$n_2 = sen(\alpha), \tag{6.77}$$

$$s_1 = -sen(\alpha), \tag{6.78}$$

$$s_2 = cos(\alpha). \tag{6.79}$$

onde $R$ é o raio de curvatura do contorno nesse ponto.

# Capítulo 7

# O MEC em Placas de Kirchhoff sobre camada de Kerr

Neste capítulo é feita uma revisão do estudo de placas delgadas apoiadas em camada elástica de Kerr pelo MEC. As soluções fundamentais e as equações integrais para a determinação dos deslocamentos no contorno e domínio foram apresentadas e discutidas por Souza (2019). Como contribuição, serão deduzidas equações integrais para determinação dos momentos fletores e volventes em pontos internos do domínio da placa.

## 7.1 O problema fundamental

A solução fundamental advém de um problema virtual de domínio infinito e sujeito a fontes concentradas em termos de força aplicadas em um ponto $q$ qualquer do domínio $\Omega_\infty$ representadas matematicamente pela função Delta de Dirac, $\delta(p,q)$, tendo as mesmas propriedades mecânicas e geométricas de seção transversal do problema real. Como consequência, surgirão deslocamentos e esforços em um ponto $p$, chamado de ponto campo, associados a essa fonte. Esses deslocamentos e esforços são chamados de fundamentais, representadas com o sobrescrito $^*$. No problema alvo desse capítulo, duas situações independentes de aplicação das fontes são analisadas: no primeiro caso, a fonte está aplicada apenas no domínio da placa; já no segundo, a fonte é aplicada apenas na camada de cisalhamento. A Figura 7.1 detalha cada uma das situações de aplicação da fonte em termos de força.

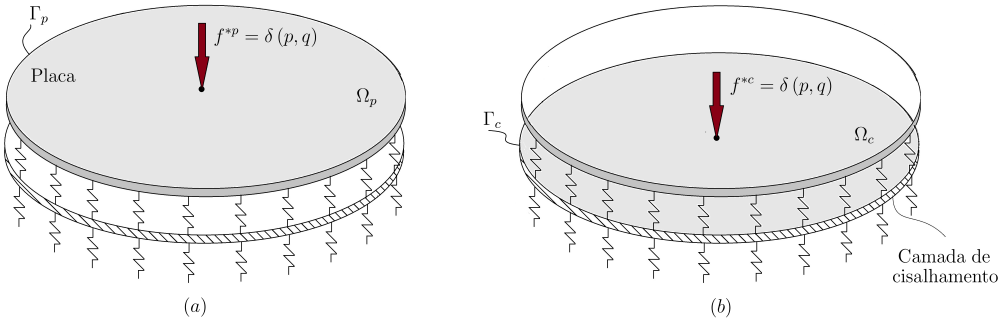



FIGURA 7.1 – Fonte aplicada na superfície média da placa (a) e da camada cisalhante de Kerr (b).

As equações de equilíbrio do problema fundamental são análogas às do problema real, eq.(6.43). Dessa forma, quando for ativada a fonte na placa, tem-se a equação:

$$\begin{aligned} &D\nabla^4 w^{*p}(p,q) + c\left[w^{*p}(p,q) - v^{*p}(p,q)\right] = \delta(p,q), \\ &-c\left[w^{*p}(p,q) - v^{*p}(p,q)\right] + kv^{*p}(p,q) - G_k\nabla^2 v^{*p}(p,q) = 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Da mesma forma, aplicando a fonte na camada de cisalhamento, obtêm-se:

$$\begin{aligned} &D\nabla^4 w^{*c}(p,q) + c\left[w^{*c}(p,q) - v^{*c}(p,q)\right] = 0, \\ &-c\left[w^{*c}(p,q) - v^{*c}(p,q)\right] + kv^{*c}(p,q) - G_k\nabla^2 v^{*c}(p,q) = \delta(p,q). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Agrupando as eqs.(7.1) e (7.2) e reescrevendo na forma matricial, obtêm-se o sistema de equações dado por:

$$\begin{bmatrix} D\nabla^4 + c & -c \\ -c & -G_k\nabla^2 + c + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{*p} & w^{*c} \\ v^{*p} & v^{*c} \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{7.3}$$

ou ainda na forma compacta como sendo:

$$[B]\,[G^*] = \delta(p,q)\,[I], \tag{7.4}$$

sendo $[I]$ a matriz identidade e as matrizes de operadores e esforços fundamentais, respectivamente, dadas por:

$$[B] = \begin{bmatrix} D\nabla^4 + c & -c \\ -c & -G_k\nabla^2 + c + k \end{bmatrix}, [G^*] = \begin{bmatrix} w^{*p} & w^{*c} \\ v^{*p} & v^{*c} \end{bmatrix}. \tag{7.5}$$

Importante destacar as seguintes propriedades da função delta de Dirac:

$$\delta\left(p,q\right)=0,\text{se } p\neq q, \tag{7.6}$$

$$\delta\left(p,q\right)=\infty,\text{se } p=q, \tag{7.7}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(p,q\right)f(q)=f(p), \tag{7.8}$$

onde a partir da propriedade da filtragem da Delta, pode-se escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(p,q\right)=1, \tag{7.9}$$

ou seja, a resultante do carregamento transversal aplicado sobre o domínio fundamental é uma carga unitária aplicada no ponto $q$ (PAIVA, 1987).

Note que as equações governantes do problema fundamental da placa delgada sobre a base de Kerr consiste em um sistema de variáveis acopladas. Assim como feito nos capítulos anteriores, utiliza-se o método de Hörmander (1963) para fazer seu desacoplamento, simplificando o processo de solução das equações diferenciais. Com isso, da aplicação do método, obtêm-se a equação fundamental desacoplada dada por:

$$\left[-G_kD\nabla^6+\left(c+k\right)D\nabla^4-G_kc\nabla^2+ck\right]\psi\left(r\right)=\delta\left(p,q\right), \tag{7.10}$$

ou ainda

$$\left(\nabla^6+a_2\nabla^4+a_1\nabla^2+a_0\right)\psi\left(r\right)=-\frac{\delta\left(p,q\right)}{G_kD}, \tag{7.11}$$

onde $a_2=-\frac{(c+k)}{G_k}$ ,$a_1=\frac{c}{D}$, $a_0=-\frac{ck}{G_kD}$.

Por meio da eq.(7.11), e ainda fazendo uma mudança de variável $\nabla^2\psi=z$, escreve-se a equação homogênea característica como sendo:

$$z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0, \tag{7.12}$$

cujas raízes são dadas por:

$$z_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}+h, \tag{7.13}$$

$$z_2=-\frac{1}{2}\left(a_2-z_1\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(a_2-z_1\right)^2-4\left[z_1\left(a_2-z_1\right)+a_1\right]}, \tag{7.14}$$

$$z_3=-\frac{1}{2}\left(a_2-z_1\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\left(a_2-z_1\right)^2-4\left[z_1\left(a_2-z_1\right)+a_1\right]}, \tag{7.15}$$

para $\Delta \geq 0$, ou ainda

$$z_1 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + h, \tag{7.16}$$

$$z_2 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) + h, \tag{7.17}$$

$$z_3 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) + h, \tag{7.18}$$

para $\Delta < 0$, sendo os parâmetros $h = -a_2/3$, $p = 3h^2 + 2a_2h + a_1$, $q = h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0$, $\rho = \sqrt{\frac{q^2}{4} + |\Delta|}$, $\theta = acos\left(-\frac{q}{2\rho}\right)$ e determinante $\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$.

Por meio de uma análise do sinal do discriminante, conclui-se que três casos são possíveis de ocorrer:

- Caso 1: dado por uma raiz real positiva e um par de raízes complexas conjugadas, obtidas fazendo $k = kf_2$ ou $k = kf_1$, com $\mu < 1/8$;
- Caso 2: dado por três raízes reais positivas distintas, obtidas fazendo $kf_2 < k < kf_1$, com $\mu < 1/8$;
- Caso 3: dado por três raízes reais positivas com duas raízes reais iguais positivas, obtidas fazendo $k < kf_2$ ou $k > kf_1$, com $\mu < 1/8$, ou para qualquer valor de $\mu \geq 1/8$.

Os valores de $kf_1$ e $fk_2$ são dados por:

$$kf_1 = \frac{D\mu\left(20\mu - 8\mu^2 + 1\right)}{8\lambda^2} + \frac{D\mu\left(8\mu + 1\right)}{8\lambda^2}\sqrt{1 - 8\mu}, \tag{7.19}$$

$$kf_2 = \frac{D\mu\left(20\mu - 8\mu^2 + 1\right)}{8\lambda^2} - \frac{D\mu\left(8\mu + 1\right)}{8\lambda^2}\sqrt{1 - 8\mu} \tag{7.20}$$

onde $\lambda = \frac{G_k}{c}$ e $\mu = \frac{k}{c}$.

Dessa forma, as soluções fundamentais propostas dependerão da natureza das raízes da equação característica. A seguir são apresentadas as três soluções fundamentais propostas por Souza (2019).

**Caso I** Sendo uma raiz positiva real e duas raízes complexas conjugadas, a solução fundamental desacoplada é dada por:

$$\psi(r) = \frac{1}{2\pi G_k D\left[\left(\alpha - z_1\right)^2 - \beta^2\right]}\left\{K_0\left(r\sqrt{z_1}\right) + \frac{1}{\beta}\, Im\left[\left(2\alpha - z_2 - z_1\right) K_0\left(r\sqrt{z_2}\right)\right]\right\}, \tag{7.21}$$

onde $\alpha = Re(z_2)$ e $\beta = Im(z_2)$ são as partes real e imaginária, respectivamente, das raízes complexas.

**Caso II** Considerando que todas as raízes sejam reais e positivas, com $z_2 = z_3$, a solução fundamental desacoplada será expressa por:

$$\psi(r) = \frac{1}{2\pi G_k D(z_1 - z_2)} \left[ \frac{r}{2\sqrt{z_2}} K_1\left(r\sqrt{z_2}\right) + \frac{K_o(r\sqrt{z_2}) - K_o(r\sqrt{z_1})}{z_2 - z_1} \right]. \tag{7.22}$$

**Caso III** Por fim, para o caso onde as três raízes sejam reais e positivas, distintas, a solução proposta é dada por:

$$\psi(r) = \frac{1}{2\pi D G_k} \left[ \mu_1 K_0\left(r\sqrt{z_1}\right) + \mu_2 K_0\left(r\sqrt{z_2}\right) + \mu_3 K_0\left(r\sqrt{z_3}\right) \right], \tag{7.23}$$

com constantes,

$$\mu_1 = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}, \tag{7.24}$$

$$\mu_2 = \frac{-1}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)}, \tag{7.25}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)}. \tag{7.26}$$

As funções $K_0(z), K_1(z)$ correspondem às funções de bessel modificadas de segunda espécie e de ordens zero e um, respectivamente.

Conhecida a função escalar $\psi(r)$, torna-se possível obter as soluções fundamentais em deslocamentos do problema. Como já discutido nos capítulos anteriores, as soluções fundamentais em deslocamentos são obtidas fazendo

$$[G^*] = [B^{cof}]^T \psi(r), \tag{7.27}$$

sendo expressas por:

$$w^{*p} = -G_k \nabla^2 \psi(r) + (c + k)\psi(r), \tag{7.28}$$

$$w^{*c} = v^{*p} = c\psi(r), \tag{7.29}$$

$$v^{*c} = D\nabla^4 \psi(r) + c\psi(r), \tag{7.30}$$

sendo $\nabla^2(\cdot)$ o operador de Laplace e $\nabla^4(\cdot) = \nabla^2\nabla^2(\cdot)$ o biharmônico. A forma explícita das soluções fundamentais para cada um dos casos tratados anteriormente são obtidas substituindo as eqs.(7.21) a (7.23) nas eqs.(7.28) a (7.30).

A partir da derivada dos deslocamentos fundamentais em relação à direção $n$, do ponto

campo, obtêm-se a solução fundamental para inclinação do plano médio da placa:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{dw^*}{dr}\frac{dr}{dn} = \frac{dw^*}{dr} r_n, \tag{7.31}$$

onde $r_n = r_{,i} n_i$.

Já as soluções fundamentais em esforços são obtidas de forma análoga aos reais, eqs.(6.49) a (6.53), sendo expressos por:

$$\begin{aligned}
M_n^* &= -D\left\{\frac{d^2w^*}{dr^2}\left[\nu + (1-\nu)\left(r_{,i}n_i\right)^2\right] + \frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\left[\nu + (1-\nu)\left(r_{,i}s_i\right)^2\right]\right\},\\
M_{ns}^* &= -D\,(1-\nu)\left(r_{,i}n_i\right)\left(r_{,j}s_j\right)\left(\frac{d^2w^*}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\right),\\
V_n^* &= -D\,(1-\nu)\, r_{,i}n_i\left\{\left[1 - 4\left(r_{,j}s_j\right)^2\right]\frac{1}{r}\left(\frac{d^2w^*}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\right) + \right.\\
&\quad \left. + \left[\left(r_{,j}s_j\right)^2 + \frac{1}{1-\nu}\right]\left(\frac{d^3w^*}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w^*}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw^*}{dr}\right)\right\} +\\
&\quad + D\,(1-\nu)\,\frac{1}{R}\left[1 - 2\left(r_{,i}s_i\right)^2\right]\left(\frac{d^2w^*}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\right),\\
T_n^* &= G_k\left(r_{,i}n_i\right)\frac{dv^*}{dr}.
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Posteriormente, quando deduzidas as equações integrais, serão necessários obter também as derivadas dos deslocamentos e dos esforços fundamentais em relação a uma direção $m$, do ponto fonte. A relação entre as derivadas no ponto campo e ponto fonte é dada por:

$$\frac{\partial\left(\cdot\right)}{\partial x_i\left(q\right)} = -\frac{\partial\left(\cdot\right)}{\partial x_i\left(p\right)}. \tag{7.33}$$

Dessa forma, as derivadas dos deslocamentos fundamentais em relação ao ponto fonte na direção $m$ são dadas por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{dw^*}{dr}\frac{dr}{dm} = -\frac{dw^*}{dr} r_m, \tag{7.34}$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial m} = \frac{d^2w^*}{dr^2} r_n r_m + \frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\left(mn - r_n r_m\right). \tag{7.35}$$

Já as derivadas dos esforços fundamentais em relação ao ponto fonte na direção $m$

ficam:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_n^*}{\partial m} &= D\left\{\frac{d^3w^*}{dr^3}\left[\nu+(1-\nu)\,r_n^2\right]r_m+\frac{1}{r}\frac{d^2w^*}{dr^2}\left\{(1-\nu)\left[r_s^2r_m+\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.+2\left(mn\cdot r_n-r_n^2r_m\right)\right]+\nu r_m\right\}+\frac{1}{r^2}\frac{dw^*}{dr}\left\{(1-\nu)\left[2ms\cdot r_s-3r_s^2r_m\right]-\nu r_m\right\}\right\},\\
\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial m} &= D\,(1-\nu)\left\{\frac{d^3w^*}{dr^3}r_nr_sr_m+\frac{1}{r}\left[\frac{d^2w^*}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\right](mn\cdot r_s+\right.\\
&\quad\left.+ms\cdot r_n-3r_nr_sr_m)\right\},\\
\frac{\partial V_n^*}{\partial m} &= D\,(1-\nu)\,\frac{1}{R}\left\{\frac{d^3w^*}{dr^3}\left[1-2r_n^2\right]r_m-\frac{1}{r}\left(\frac{d^2w^*}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\right)\{4ms\cdot r_s+\right.\\
&\quad\left.+\left(1-6r_s^2\right)r_m\right\}\Big\}+D\,(1-\nu)\,\frac{1}{r}\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{d^2w^*}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\right)\left\{n_m\left(4r_s^2-1\right)+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+r_n\left\{8msr_s+r_m\left[3-20r_sr_n\right]\right\}\right\}-\frac{d^3w^*}{dr^3}\left(1-r_n^2\right)r_mr_n\right\}+\\
&\quad-D\,(1-\nu)\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{d^3w^*}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w^*}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw^*}{dr}\right)\left[2r_nr_s\left(ms-r_mr_s\right)+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\left(ms-3r_mr_n\right)\left(r_s^2+\frac{1}{1-\nu}\right)\right]+r_mr_n\left(\frac{d^4w^*}{dr^4}+\frac{3}{r}\frac{d^3w^*}{dr^3}\right)\left(r_s^2+\frac{1}{1-\nu}\right)\right\},\\
\frac{\partial T_n^*}{\partial m} &= -G_k\left[\frac{d^2v^*}{dr^2}r_nr_m+\frac{1}{r}\frac{dv^*}{dr}\left(mn-r_nr_m\right)\right].
\end{aligned}\tag{7.36}$$

Note que, as soluções fundamentais tanto em deslocamentos quanto em esforços serão dadas pelas funções modificadas de Bessel de segunda espécie $K_0$, $K_1$ e ainda por funções que representam suas partes imaginárias. Com isso, as derivadas requeridas nas soluções fundamentais para cada uma dessas funções estão descritas no anexo A.

## 7.2 Equações integrais

A solução do problema pode ser obtida a partir da transformação das equações diferenciais de equilíbrio em equações integrais equivalentes, necessárias à formulação do MEC. Dessa forma, a dedução dessas equações integrais podem seguir dois caminhos: o primeiro via Teorema da Reciprocidade de Betti; o segundo por meio do método dos resíduos ponderados (MRP). Com isso, obtêm-se as representações integrais para os deslocamentos e esforços em pontos do domínio e do contorno do problema.

### 7.2.1 Equações integrais para deslocamentos em pontos do domínio

Buscando-se obter uma representação integral para determinação dos deslocamentos, aplica-se o MRP nas eqs.(6.43), tomando-se como funções-peso as soluções fundamentais

em deslocamentos.

Ponderando pelas soluções fundamentais devido a aplicação da fonte em termos de força na placa, obtêm-se:

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[ D\nabla^4 w(p) + c\left(w(p) - v(p)\right) - g(p) \right] w^{*p}(p,q) + \right. \\ \left. + \left[ -G_k \nabla^2 v(p) - c\left(w(p) - v(p)\right) + kv(p) \right] v^{*p}(p,q) \right\} d\Omega = 0, \tag{7.37}$$

onde, após algumas integrações por partes e manipulações algébricas, chega-se à primeira equação integral para de determinação dos deslocamentos em pontos internos da placa:

$$w(q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^{*p}(p,q)\, w(p) - M_n^{*p}(p,q) \frac{\partial w}{\partial n}(p) + T_n^{*p}(p,q)\, v(p) \right] d\Gamma + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^{*p}(p,q)\, w_{ci}(p) = \int_{\Gamma} \left[ w^{*p}(p,q)\, V_n(p) - \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p,q)\, M_n(p) + \right. \\ \left. + v^{*p}(p,q)\, T_n(p) \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} w_{c_i}^{*p}(p,q)\, R_{c_i}(p) + \int_{\Omega_g} g(p)\, w^{*p}(p,Q)\, d\Omega_g, \tag{7.38}$$

onde $Q$ corresponde a um ponto sobre o contorno do carregamento real $g(p)$.

Da mesma forma, pondera-se pelas soluções fundamentais em termos de força na camada de cisalhamento, obtendo-se:

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[ D\nabla^4 w(p) + c\left(w(p) - v(p)\right) - g(p) \right] w^{*c}(p,q) + \right. \\ \left. + \left[ -G_k \nabla^2 v(p) - c\left(w(p) - v(p)\right) + kv(p) \right] v^{*c}(p,q) \right\} d\Omega = 0, \tag{7.39}$$

onde, após algumas manipulações, chega-se a equação integral para determinação dos deslocamentos em pontos internos da camada de cisalhamento:

$$v(q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^{*c}(p,q)\, w(p) - M_n^{*c}(p,q) \frac{\partial w}{\partial n}(p) + T_n^{*c}(p,q)\, v(p) \right] + d\Gamma + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^{*c}(p,q)\, w_{c_i}(p) = \int_{\Gamma} \left[ w^{*c}(p,q)\, V_n(p) - \frac{\partial w^{*c}}{\partial n}(p,q)\, M_n(p) + \right. \\ \left. + v^{*c}(p,q)\, T_n(p) \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} w_{c_i}^{*c} R_{c_i}(p)\,(p,q) + \int_{\Omega_g} g(p)\, w^{*c}(p,Q)\, d\Omega_g. \tag{7.40}$$

Torna-se ainda necessário o conhecimento de uma equação integral adicional relacionada a inclinação do plano médio da placa, obtida pela derivada da eq.(7.38) em relação

a $m$, ponto-fonte:

$$\frac{\partial w}{\partial m}(q)+\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial V_n^{*p}}{\partial m}(p,q)\,w(p)-\frac{\partial M_n^{*p}}{\partial m}(p,q)\,\frac{\partial w}{\partial n}(p)+\frac{\partial T_n^{*p}}{\partial m}(p,q)\,v(p)\right]d\Gamma+$$
$$+\sum_{i=1}^{N_c}\frac{\partial R_{c_i}^{*p}}{\partial m}(p,q)\,w_{ci}(q)=\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial w^{*p}}{\partial m}(p,q)\,V_n(p)-\frac{\partial^2 w^{*p}}{\partial n\partial m}(p,q)\,M_n(q)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial v^{*p}}{\partial m}(p,q)\,T_n(p)\right]d\Gamma+\sum_{i=1}^{N_c}\frac{\partial w_{c_i}^{*p}}{\partial m}(p,q)\,R_{c_i}(p)+\int_{\Omega_g}g(p)\,\frac{\partial w^{*p}}{\partial m}(p,Q)\,d\Omega_g. \tag{7.41}$$

### 7.2.2 Equações integrais para deslocamentos no contorno

Para a completa formulação do MEC, é necessária a obtenção de equações integrais para pontos situados sobre o contorno do problema. Para isso, considere que um ponto $p$, inicialmente situado no contorno $\Gamma$, seja envolvido por uma região auxiliar de contorno $\Gamma_\xi$, com raio $\xi$, tornando-se interior a esse domínio com a retirada da parcela $\bar{\Gamma}$ do contorno inicial, indicada na Fig. 7.2.

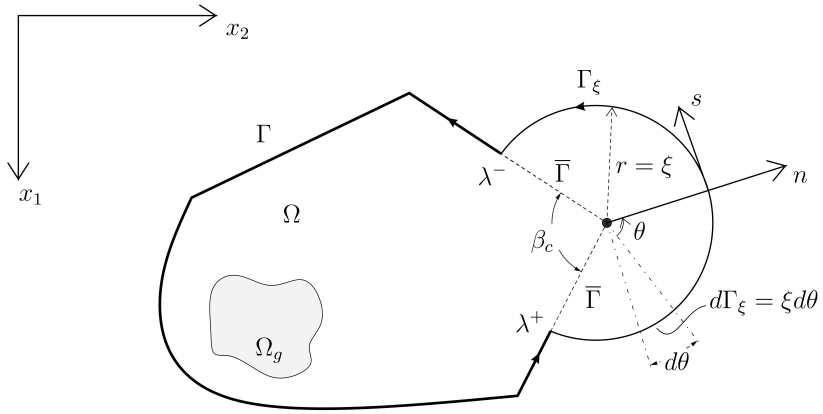



FIGURA 7.2 – Contorno circular acrescido a um ponto p de um canto da placa.

Com a modificação imposta ao contorno, os novos cantos da placa serão representados por $\lambda^-$ e $\lambda^+$, sendo $\beta_c$ é o ângulo interno do canto da placa e $\theta = 2\pi - \beta_c$.

Após o acréscimo da região auxiliar ao domínio do problema inicial, a equação integral para o cálculo do deslocamento transversal em um ponto $q$ na placa, eq. (7.38), passa a

ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
w\left(q\right) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}+\Gamma_\xi} \left[ V_n^{*p}\left(p,q\right) w\left(p\right) - M_n^{*p}\left(p,q\right) \frac{\partial w}{\partial n}\left(p\right) + T_n^{*p}\left(p,q\right) v(p) \right] d\Gamma + \\
+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}^{*p}\left(p,q\right) w_{c_i}\left(p\right) + R_{c_{\lambda^-}}^{*p}\left(p,q\right) w_{c_{\lambda^-}}\left(p\right) + R_{c_{\lambda^+}}^{*p}\left(p,q\right) w_{c_{\lambda^+}}\left(p\right) = \\
\int_{\Gamma-\bar{\Gamma}+\Gamma_\xi} \left[ w^{*p}\left(p,q\right) V_n\left(p\right) - \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}\left(p,q\right) M_n\left(p\right) + v^{*p}(p,q) T_n\left(p\right) \right] d\Gamma + \\
+ \sum_{i=1}^{N_c-1} w_{c_i}^{*p}\left(p,q\right) R_{ci}\left(p\right) + w_{c_{\lambda^-}}^{*p}\left(p,q\right) R_{c_{\lambda^-}}\left(p\right) + \\
+ w_{c_{\lambda^+}}\left(p,q\right) R_{c_{\lambda^+}}^{*p}\left(p\right) + \int_{\Omega_g} g\left(p\right) w^{*p}\left(p,Q\right) d\Omega_g
\end{aligned}
\tag{7.42}
$$

Fazendo o raio $\xi$ da região auxiliar tender a zero, ou seja, ponto fonte se aproximando do contorno, a equação (7.42) passa a ser reescrita como:

$$
\begin{aligned}
w\left(q\right) + \lim_{\bar{\Gamma}\to 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n^{*p}\left(p,q\right) w\left(p\right) - M_n^{*p}\left(p,q\right) \frac{\partial w}{\partial n}\left(p\right) + T_n^{*p}\left(p,q\right) v(p) \right] d\Gamma + \\
+ \lim_{\xi\to 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[ V_n^{*p}\left(p,q\right) w\left(p\right) - M_n^{*p}\left(p,q\right) \frac{\partial w}{\partial n}\left(p\right) + T_n^{*p}\left(p,q\right) v(p) \right] d\Gamma_\xi + \\
+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}^{*p}\left(p,q\right) w_{c_i}\left(p\right) + \lim_{\xi\to 0} \left[ R_{c_{\lambda^-}}^{*p}\left(p,q\right) w_{c_{\lambda^-}}\left(p\right) + R_{c_{\lambda^+}}^{*p}\left(p,q\right) w_{c_{\lambda^+}}\left(p\right) \right] = \\
\lim_{\bar{\Gamma}\to 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ w^{*p}\left(p,q\right) V_n\left(p\right) - \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}\left(p,q\right) M_n\left(p\right) + v^{*p}(p,q) T_n\left(p\right) \right] d\Gamma + \\
+ \lim_{\xi\to 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[ w^{*p}\left(p,q\right) V_n\left(p\right) - \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}\left(p,q\right) M_n\left(p\right) + v^{*p}(p,q) T_n\left(p\right) \right] d\Gamma_\xi + \\
+ \sum_{i=1}^{N_c-1} w_{c_i}^{*p}\left(p,q\right) R_{ci}\left(p\right) + \lim_{\xi\to 0} \left[ w_{c_{\lambda^-}}^{*p}\left(p,q\right) R_{c_{\lambda^-}}\left(p\right) + w_{c_{\lambda^+}}^{*p}\left(p,q\right) R_{c_{\lambda^+}}(p) \right] + \\
+ \int_{\Omega_g} g\left(p\right) w^{*p}\left(p,Q\right) d\Omega_g.
\end{aligned}
\tag{7.43}
$$

Na condição limite, o valor das integrais definidas sobre o contorno $\Gamma - \overline{\Gamma}$ representam

o valor principal das mesmas:

$$\lim_{\bar{\Gamma}\to 0}\int_{\Gamma-\bar{\Gamma}}\left[V_n^{*p}(p,q)\,w(p)-M_n^{*p}(p,q)\,\frac{\partial w}{\partial n}(p)+T_n^{*p}(p,q)\,v(p)\right]d\Gamma=$$
$$\int_{\Gamma}\left[V_n^{*p}(p,q)\,w(p)-M_n^{*p}(p,q)\,\frac{\partial w}{\partial n}(p)+T_n^{*p}(p,q)\,v(p)\right]d\Gamma, \tag{7.44}$$
$$\lim_{\bar{\Gamma}\to 0}\int_{\Gamma-\bar{\Gamma}}\left[w^{*p}(p,q)\,V_n(p)-\frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p,q)\,M_n(p)+v^{*p}(p,q)T_n(p)\right]d\Gamma=$$
$$=\int_{\Gamma}\left[w^{*p}(p,q)\,V_n(p)-\frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p,q)\,M_n(p)+v^{*p}(p,q)T_n(p)\right]d\Gamma. \tag{7.45}$$

Para completar a análise da equação integral dada pela eq.(7.43) é necessário avaliar as parcelas definidas no contorno $\Gamma_\xi$. Utilizando-se o artifício de somar e subtrair deslocamentos e rotações no ponto fonte, as seguintes relações podem ser escritas:

$$\lim_{\xi\to 0}\int_{\Gamma_\xi}\left[V_n^{*p}(p,q)\,w(p)-M_n^{*p}(p,q)\,\frac{\partial w}{\partial n}(p)+T_n^{*p}(p,q)\,v(q)\right]d\Gamma_\xi+$$
$$=\lim_{\xi\to 0}\int_{\Gamma_\xi}\left\{V_n^{*p}(p,q)\,[w(p)-w(q)]-M_n^{*p}(p,q)\left[\frac{\partial w}{\partial n}(p)-\frac{\partial w}{\partial n}(q)\right]+\right.$$
$$\left.+T_n^{*p}(p,q)\,[v(p)-v(q)]\right\}d\Gamma_\xi+\lim_{\xi\to 0}\int_{\Gamma_\xi}V_n^{*p}(p,q)\,w(q)\,d\Gamma_\xi+$$
$$-\lim_{\xi\to 0}\int_{\Gamma_\xi}M_n^{*p}(p,q)\,\frac{\partial w}{\partial n}(q)\,d\Gamma_\xi+$$
$$+\lim_{\xi\to 0}\int_{\Gamma_\xi}T_n^{*p}(p,q)\,v(q)\,d\Gamma_\xi. \tag{7.46}$$

Utilizando a condição de Hölder para os deslocamentos e rotações da placa, assim como deslocamentos na camada de cisalhamento, as seguintes relações podem ser escritas:

$$|w(p)-w(q)|\le C_1 r^{\alpha_1(p,q)}, \tag{7.47}$$
$$\left|\frac{\partial w}{\partial n}(p)-\frac{\partial w}{\partial n}(q)\right|\le C_2 r^{\alpha_2(p,q)}, \tag{7.48}$$
$$|v(p)-v(q)|\le C_3 r^{\alpha_1(p,q)}, \tag{7.49}$$

onde $C_1$, $C_2$ e $C_3$ são constantes e $0<\alpha_i\le 1$, com $i=1,2$. Substituindo tais condições

na eq.(7.46), vê-se que a primeira integral se anula, restando apenas:

$$\lim_{\xi\to 0}\int_{\Gamma_\xi}\left[V_n^{*p}(p,q)\,w(q)-M_n^{*p}(p,q)\,\frac{\partial w}{\partial n}(q)+\right.$$
$$\left.+T_n^{*p}(p,q)\,v(q)\right]d\Gamma_\xi = w(q)\lim_{\xi\to 0}\int_{\Gamma_\xi}V_n^{*p}(p,q)\,d\Gamma_\xi+$$
$$-\frac{\partial w}{\partial n}(q)\lim_{\xi\to 0}\int_{\Gamma_\xi}M_n^{*p}(p,q)\,d\Gamma_\xi+v(q)\lim_{\xi\to 0}\int_{\Gamma_\xi}T_n^{*p}(p,q)\,d\Gamma_\xi, \tag{7.50}$$

uma vez que $w(p), \partial w(p)/\partial n$ e $v(p)$ são valores do domínio. Para o cálculo dos limites dos esforços fundamentais, é importante notar que eles são dependentes das funções de Bessel de segunda espécie e de ordens zero e um, cujas expansões em série são dadas por:

$$K_0(z) = -\frac{z}{2}I_0(z)+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\frac{1}{k!k!}\left(\psi(k+1)+\psi(k+2)\right)\right], \tag{7.51}$$

$$K_1(z) = -\frac{z}{2}I_1(z)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-1}-\frac{z}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\,(k+1)!}\left(\psi(k+1)+\psi(k+2)\right)\right], \tag{7.52}$$

onde

$$I_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k!\,(k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m}\right]. \tag{7.53}$$

Para pequenos argumentos, isto é, $z << 1$, as funções são reduzidas a:

$$K_0(z) = -\gamma - ln\left(\frac{z}{2}\right), \tag{7.54}$$

$$K_1(z) = \frac{1}{z}. \tag{7.55}$$

onde $\gamma = 0,5772156649$ é a constante de Euler-Mascheroni. Além disso, como o raio vetor $r$ coincide com a normal do contorno da região adicional, conforme mostrado na Figura 7.2, então $r_{,i}n_i = 1$, $r_{,i}s_i = 0$, $m_in_i = r_{,i}m_i$, de forma que as soluções fundamentais em

deslocamentos e em esforços podem ser reduzidas a:

$$\frac{\partial w^{*p}}{\partial n} = \frac{dw^{*p}}{dr} \tag{7.56}$$

$$M_n^{*p} = -D\left\{\frac{d^2w^{*p}}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw^{*p}}{dr}\right\}, \tag{7.57}$$

$$M_{ns}^{*p} = 0, \tag{7.58}$$

$$\begin{aligned} V_n^{*p} = &-D\left(1-\nu\right)\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{d^2w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw^{*p}}{dr}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{d^3w^{*p}}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw^{*p}}{dr}\right)\right\} + \\ &+ D\left(1-\nu\right)\frac{1}{R}\left(\frac{d^2w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw^{*p}}{dr}\right), \end{aligned} \tag{7.59}$$

$$T_n^{*p} = G_k\frac{dv^{*p}}{dr}. \tag{7.60}$$

Como $d\Gamma_\xi = \xi d\phi$, desenvolvendo-se as integrais e após convenientes manipulações, obtém-se a equação integral para um ponto do contorno:

$$\begin{aligned} A(q)w\left(q\right) + \int_\Gamma \left[V_n^{*p}\left(p,q\right)w\left(p\right) - M_n^{*p}\left(p,q\right)\frac{\partial w}{\partial n}\left(p\right) + T_n^{*p}\left(p,q\right)v\left(p\right)\right]d\Gamma + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^{*p}\left(p,q\right)w_{c_i}\left(p\right) = \\ \int_\Gamma \left[w^{*p}\left(p,q\right)V_n\left(p\right) - \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}\left(p,q\right)M_n\left(p\right) + v^{*p}\left(p,q\right)T_n\left(q\right)\right]d\Gamma + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} w_{c_i}^{*p}\left(p,q\right)R_{c_i}\left(p\right) + \int_{\Omega_g} g\left(p\right)w^{*p}\left(p,Q\right)d\Omega \end{aligned} \tag{7.61}$$

sendo o termo livre dado por:

$$A(q) = \begin{cases} 1, \ se\ p \in \Omega \\ \frac{1}{2}, se\ p \in \Gamma \\ 0, se\ p \notin \Omega \cup \Gamma \end{cases} \tag{7.62}$$

Um procedimento análogo pode ser empregando na equação integral de contorno em

deslocamento transversal na camada de cisalhamento, resultando em:

$$A\left(q\right)v\left(q\right)+\int_{\Gamma}\left[V_{n}^{*c}\left(p,q\right)w\left(q\right)-M_{n}^{*c}\left(p,q\right)\frac{\partial w}{\partial n}\left(q\right)+T_{n}^{*c}\left(p,q\right)v\left(q\right)\right]d\Gamma+$$
$$+\sum_{i=1}^{N_{c}}R_{c_{i}}^{*c}\left(p,q\right)w_{c_{i}}\left(q\right)=$$
$$\int_{\Gamma}\left[V_{n}\left(q\right)w^{*c}\left(p,q\right)-M_{n}\left(q\right)\frac{\partial w^{*c}}{\partial n}\left(p,q\right)+T_{n}^{*c}\left(p,q\right)v\left(q\right)\right]d\Gamma+$$
$$+\sum_{i=1}^{N_{c}}R_{c_{i}}\left(q\right)w_{c_{i}}^{*c}\left(p,q\right)+\int_{\Omega_{g}}g\left(q\right)w^{*c}\left(p,Q\right)d\Omega \tag{7.63}$$

Os termos livres para as rotações também são obtidos de forma análoga por meio da equação integral (7.98):

$$A(q)\frac{\partial w}{\partial m}\left(q\right)+\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial V_{n}^{*p}}{\partial m}\left(p,q\right)w\left(p\right)-\frac{\partial M_{n}^{*p}}{\partial m}\left(p,q\right)\frac{\partial w}{\partial n}\left(p\right)+\frac{\partial T_{n}^{*p}}{\partial m}\left(p,q\right)v\left(p\right)\right]d\Gamma+$$
$$+\sum_{i=1}^{N_{c}}\frac{\partial R_{c_{i}}^{*p}}{\partial m}\left(p,q\right)w_{ci}\left(q\right)=\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial w^{*p}}{\partial m}\left(p,q\right)V_{n}\left(p\right)-\frac{\partial w^{*p}}{\partial n}\left(p,q\right)M_{n}\left(q\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial v^{*p}}{\partial m}\left(p,q\right)T_{n}\left(p\right)\right]d\Gamma+\sum_{i=1}^{N_{c}}\frac{\partial w_{c_{i}}^{*p}}{\partial m}\left(p,q\right)R_{c_{i}}\left(p\right)+\int_{\Omega_{g}}g\left(p\right)\frac{\partial w^{*p}}{\partial m}\left(p,Q\right)d\Omega_{g}. \tag{7.64}$$

### 7.2.3 Transformação das integrais de domínio para o contorno

Buscando obter uma formulação unicamente do MEC, as integrais de domínio, relativas à influência do carregamento distribuído, devem ser transformadas em equações integrais definidas sobre o contorno do problema. Tal transformação permite o uso da principal característica da técnica: redução dimensional em uma ordem da solução numérica do problema.

A Figura 7.3 mostra a região $\Omega_g$ do carregamento distribuído $g$, de contorno $\Gamma_g$, cujo ponto de carregamento é dado pelo ponto $q$. Admitindo-se um sistema de coordenadas polares, estabelecem-se as seguintes relações geométricas:

$$d\Omega_{g}=rdrd\theta \tag{7.65}$$

e ainda

$$d\theta=\frac{r_{,i}n_{i}}{R}d\Gamma_{g} \tag{7.66}$$

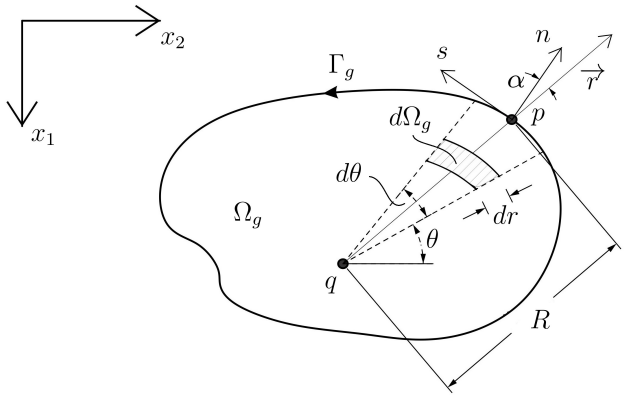



FIGURA 7.3 – Região $\Omega_g$ do carregamento distribuído.

Considerando um carregamento uniformemente distribuído no plano da placa, $g(r) = g_0$, escreve-se a integral de domínio de carga, tomando-se uma solução fundamental em deslocamento genérico $w^*$, dependente apenas de $r$, como:

$$\int_{\Omega} g(p) w^* (p,q)\, d\Omega_g = \int_{\Omega} w^* g_0 d\Omega_g. \tag{7.67}$$

Substituindo a relação definida pela eq.(7.65) na equação integral do carregamento (7.67), obtêm-se:

$$\int_{\Omega} g(p) w^* d\Omega = \int_0^{\theta} \int_0^{R} w^* g_0 r dr d\theta. \tag{7.68}$$

Devido às singularidades presentes nas soluções fundamentais, da análise dos limites de integração, conclui-se que:

$$\int_0^{R} w^* r dr = F^* (r) - \lim_{\xi \to 0} F^* (\xi), \tag{7.69}$$

onde

$$F^*(r) = \int w^* r dr, \tag{7.70}$$

Desta forma, substituindo a eq.(7.65) na eq.(7.67), chega-se a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g = g_0 \int_0^{\theta} F^* d\theta - g_0 \lim_{\xi \to 0} \int_0^{\theta} F^* (\xi)\, d\theta \tag{7.71}$$

Pode-se ainda transformar a primeira parcela do lado direito da equação (7.71) em

integral de contorno utilizando a relação definida pela eq.(7.66), sendo expressa por:

$$g_0 \int_0^{\theta} F^* d\theta = g_0 \int_{\Gamma_g} \chi^*(r) r_{,n} d\Gamma_g, \tag{7.72}$$

onde:

$$\chi^*(r) = \frac{F^*(r)}{r} = \frac{1}{r} \int w^* r dr, . \tag{7.73}$$

Analisando a parcela da eq.(7.71) que contém o limite em $\xi$, defini-se o termo livre de carregamento como sendo:

$$TL = g_0 \lim_{\xi \to 0} \int_0^{\theta} F^*(\xi) d\theta. \tag{7.74}$$

Finalmente, a equação integral de carregamento, inicialmente no domínio, será definida sobre o contorno pela expressão:

$$\int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g = g_0 \int_{\Gamma_g} \chi^*(r) r_{,n} d\Gamma_g - TL \tag{7.75}$$

Com base no que foi discutido, escreve-se as integrais de carregamento requeridas no problema como sendo:

$$\int_{\Omega_g} g(p)\, w^{*p}(p,q)\, d\Omega_g = g_0 \int_{\Gamma_g} \chi_1^* r_{,n} d\Gamma_g - TL_1, \tag{7.76}$$

$$\int_{\Omega_g} g(p)\, w^{*c}(p,q)\, d\Omega_g = g_0 \int_{\Gamma_g} \chi_2^* r_{,n} d\Gamma_g - TL_2, \tag{7.77}$$

$$\int_{\Omega_g} g(p)\, \frac{\partial w^{*p}}{\partial m}(p,q)\, d\Omega_g = g_0 \int_{\Gamma_g} \chi_3^* r_{,n} d\Gamma_g - TL_3 \tag{7.78}$$

Na sequência serão deduzidos as soluções fundamentais $\chi^*$ e os termos livres para cada um dos casos de raízes possíveis. As integrais das funções de Bessel requeridas nas deduções estão disponíveis no anexo A.

**Caso I:** Uma raiz real positiva e duas complexas conjugadas

Substituindo-se as eqs.(7.28) e (7.21) na equação integral (7.76), obtêm-se:

$$\chi_1^* = -\alpha_0 \left\{ \frac{1}{\beta} Im \left[ \frac{\overline{\alpha}_2}{\sqrt{z_2}} K_1\left(r\sqrt{z_2}\right) \right] + \frac{\alpha_1}{\sqrt{z_1}} K_1\left(r\sqrt{z_1}\right) \right\}, \tag{7.79}$$

onde $\alpha = Re(z_2)$, $\beta = Im(z_2)$, $\alpha_2 = (2\alpha - z_1 - z_2)$, $\overline{\alpha}_2 = (c + k - G_k z_2)\,\alpha_2$, $\alpha_1 =$

$(c+k-G_k z_1)$, $\alpha_0 = \dfrac{1}{2\pi G_k D\left[(\alpha-z_1)^2+\beta^2\right]}$.

Por meio das eqs.(7.29) e (7.21) e ainda da equação integral (7.77), obtêm-se:

$$\chi_2^* = -\alpha_0 c\left\{\frac{1}{\beta} Im\left[\frac{\alpha_2}{\sqrt{z_2}} K_1\left(r\sqrt{z_2}\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{z_1}} K_1\left(r\sqrt{z_1}\right)\right\}. \tag{7.80}$$

Por fim, substituindo as eqs.(7.28) e (7.21) na equação integral (7.78), obtêm-se:

$$\chi_3^* = \alpha_0\left\{\frac{1}{\beta} Im\left[\frac{\overline{\alpha}_2}{r\sqrt{z_2}} \Psi_k\left(r\sqrt{z_2}\right)\right] + \frac{\alpha_1}{r\sqrt{z_1}} \Psi_k\left(r\sqrt{z_1}\right)\right\} r_{,m}. \tag{7.81}$$

Já para a obtenção dos termos livres de cargas indicados nas eqs.(7.76) a (7.78), é feita uma análise da solução fundamental para pequenos argumentos. Com isso, os termos livres serão dados por:

$$TL_1 = -\alpha_0 g_0 \lim_{\xi\to 0}\int_0^\theta \left[\frac{1}{\beta} Im\left(\frac{\overline{\alpha}_2}{z_2}\right) + \frac{\alpha_1}{z_1}\right] d\theta, \tag{7.82}$$

$$TL_2 = -\alpha_0 c g_0 \lim_{\xi\to 0}\int_0^\theta \left[\frac{1}{\beta} Im\left(\frac{\alpha_2}{z_2}\right) + \frac{1}{z_1}\right] d\theta, \tag{7.83}$$

$$TL_3 = \alpha_0 g_0 \lim_{\xi\to 0}\int_0^\theta \left\{\frac{1}{\beta} Im\left[\frac{\overline{\alpha}_2}{\sqrt{z_2}} \Psi_k\left(r\sqrt{z_2}\right)\right] + \frac{\alpha_1}{\sqrt{z_1}} \Psi_k\left(r\sqrt{z_1}\right)\right\} r_{,m} d\theta, \tag{7.84}$$

ou ainda, após a aplicação dos limites:

$$TL_1 = -\alpha_0 g_0\left[\frac{1}{\beta} Im\left(\frac{\overline{\alpha}_2}{z_2}\right) + \frac{\alpha_1}{z_1}\right]\theta, \tag{7.85}$$

$$TL_2 = -\alpha_0 c g_0\left[\frac{1}{\beta} Im\left(\frac{\alpha_2}{z_2}\right) + \frac{1}{z_1}\right]\theta, \tag{7.86}$$

$$TL_3 = 0. \tag{7.87}$$

sendo

$$\theta = \begin{cases} 2\pi, \text{ se } q \in \Omega, \\ \pi, \text{ se } q \in \Gamma \text{ (contorno suave)}, \\ 0, \text{ se } q \notin \Omega \cup \gamma \end{cases} \tag{7.88}$$

Procede-se de forma análoga para os demais casos, utilizando a devida solução fundamental.

**Caso II:** Três raízes positivas reais, sendo duas idênticas.

As soluções fundamentais requeridas nas integrais de carregamento, eqs.(7.76) a (7.78),

serão dadas por:

$$\chi_1^* = -\alpha_0 \left\{ \frac{\overline{\alpha}_1}{\sqrt{z_1}} K_1\left(r\sqrt{z_1}\right) + \frac{\overline{\alpha}_2}{\sqrt{z_2}} K_1\left(r\sqrt{z_2}\right) + \frac{\overline{\alpha}_3}{\sqrt{z_2}} \left[ rK_0\left(r\sqrt{z_2}\right) + \frac{2}{\sqrt{z_2}} K_1\left(r\sqrt{z_2}\right) \right] \right\},$$
$$\chi_2^* = -c\alpha_0 \left\{ \frac{\alpha_1}{\sqrt{z_1}} K_1\left(r\sqrt{z_1}\right) + \frac{\alpha_2}{\sqrt{z_2}} K_1\left(r\sqrt{z_2}\right) + \frac{\alpha_3}{\sqrt{z_2}} \left[ rK_0\left(r\sqrt{z_2}\right) + \frac{2}{\sqrt{z_2}} K_1\left(r\sqrt{z_2}\right) \right] \right\},$$
$$\chi_3^* = \alpha_0 \left\{ \frac{\overline{\alpha}_1\sqrt{z_1}}{rz_1} \Psi_k\left(r\sqrt{z_1}\right) + \frac{\overline{\alpha}_2\sqrt{z_2}}{rz_2} \Psi_k\left(r\sqrt{z_2}\right) - \frac{\overline{\alpha}_3\sqrt{z_2}}{\sqrt{z_2}} \left[ rK_1\left(r\sqrt{z_2}\right) - \frac{1}{rz_2} \Psi_k\left(r\sqrt{z_2}\right) \right] \right\} r_{,m}, \tag{7.89}$$

onde $\alpha_0 = \dfrac{1}{2\pi G_k D\left(z_1 - z_2\right)}$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{z_1 - z_2}$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{z_2 - z_1}$, $\alpha_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{z_2}}$, $\overline{\alpha}_1 = \dfrac{1}{z_1 - z_2}\left(c + k - G_k z_1\right)$, $\overline{\alpha}_2 = \dfrac{1}{z_2 - z_1}\left(c + k - G_k z_2\right) + G_k$ e $\overline{\alpha}_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{z_2}}\left(c + k - G_k z_2\right)$.

Já os termos livres serão dados por:

$$TL_1 = -g_0\alpha_0 \left[ \frac{\overline{\alpha}_1}{z_1} + \frac{\overline{\alpha}_2}{z_2} + \frac{2\overline{\alpha}_3}{z_2\sqrt{z_2}} \right] \theta, \tag{7.90}$$

$$TL_2 = -g_0\alpha_0 c \left[ \frac{\alpha_1}{z_1} + \frac{\alpha_2}{z_2} + \frac{2\alpha_3}{z_2\sqrt{z_2}} \right] \theta, \tag{7.91}$$

$$TL_3 = 0. \tag{7.92}$$

**Caso III:** Três raízes reais positivas distintas

As soluções fundamentais requeridas nas integrais de carregamento, eqs.(7.76) a (7.78), serão dadas por:

$$\chi_1^* = -\alpha_0 \left\{ \frac{\overline{\alpha}_1}{\sqrt{z_1}} K_1\left(r\sqrt{z_1}\right) + \frac{\overline{\alpha}_2}{\sqrt{z_2}} K_1\left(r\sqrt{z_2}\right) + \frac{\overline{\alpha}_3}{\sqrt{z_2}} K_1\left(r\sqrt{z_2}\right) \right\},$$
$$\chi_2^* = -c\alpha_0 \left\{ \frac{\alpha_1}{\sqrt{z_1}} K_1\left(r\sqrt{z_1}\right) + \frac{\alpha_2}{\sqrt{z_2}} K_1\left(r\sqrt{z_2}\right) + \frac{\alpha_3}{\sqrt{z_2}} K_1\left(r\sqrt{z_2}\right) \right\},$$
$$\chi_3^* = \alpha_0 \left\{ \frac{\overline{\alpha}_1\sqrt{z_1}}{rz_1} \Psi_k\left(r\sqrt{z_1}\right) + \frac{\overline{\alpha}_2\sqrt{z_2}}{rz_2} \Psi_k\left(r\sqrt{z_2}\right) + \frac{\overline{\alpha}_3\sqrt{z_2}}{rz_2} \Psi_k\left(r\sqrt{z_2}\right) \right\} r_{,m}, \tag{7.93}$$

onde $\alpha_0 = \dfrac{1}{2\pi D G_k}$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{\left(z_1 - z_2\right)\left(z_1 - z_3\right)}$, $\alpha_2 = \dfrac{-1}{\left(z_1 - z_2\right)\left(z_2 - z_3\right)}$, $\alpha_3 = \dfrac{1}{\left(z_1 - z_3\right)\left(z_2 - z_3\right)}$, $\overline{\alpha}_1 = \alpha_1'\left(c + k - G_k z_1\right)$, $\overline{\alpha}_2 = \alpha_2\left(c + k - G_k z_2\right) + G_k$ e $\overline{\alpha}_3 = \alpha_3\left(c + k - G_k z_3\right)$.

Já os termos livres serão dados por:

$$TL_1 = -g_0\alpha_0 \left[\frac{\overline{\alpha}_1}{z_1} + \frac{\overline{\alpha}_2}{z_2} + \frac{\overline{\alpha}_3}{z_3}\right]\theta, \tag{7.94}$$

$$TL_2 = -g_0\alpha_0 c \left[\frac{\alpha_1}{z_1} + \frac{\alpha_2}{z_2} + \frac{\alpha_3}{z_3}\right]\theta, \tag{7.95}$$

$$TL_3 = 0. \tag{7.96}$$

### 7.2.4 Equações integrais para esforços no domínio

A obtenção das respostas em momentos em pontos localizados no domínio do problema é de fundamental importância na análise e dimensionamento do elemento estrutural. O cálculos dos momentos pode ser feito a partir da combinação das derivadas dadas pela eq.(6.12), obtidas numericamente a partir dos valores calculados em deslocamentos. No entanto, em termos de precisão dos resultados, esse procedimento não é o mais recomendado, apesar de ser um procedimento usual em outros métodos, como no MDF e MEF. Uma maneira mais conveniente para obtenção dos esforços seria a partir de uma equação integral específica para esse fim, garantindo tanto a precisão dos resultados quanto a redução no tempo de processamento.

Dessa forma, parte-se para a formulação da equação integral das curvaturas, obtida derivando a equação integral em deslocamentos em relação ao ponto fonte $q$, e posteriormente substitui-se nas equações de momentos eq.(6.12), obtendo as expressões desejadas. Como a derivada é feita em relação ao ponto fonte, a seguinte relação pode ser estabelecida:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i(q)} = -\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i(p)}. \tag{7.97}$$

Dessa forma, derivando a eq.(7.98) em relação a uma direção $t$ no ponto fonte, obtêm-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t}(q) + \int_\Gamma \left[\frac{\partial^2 V_n^{*p}}{\partial m \partial t}(p,q)\, w(p) - \frac{\partial^2 M_n^{*p}}{\partial m \partial t}(p,q)\, \frac{\partial w}{\partial n}(p) + \frac{\partial^2 T_n^{*p}}{\partial m \partial t}(p,q)\, v(p)\right] d\Gamma + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^{*p}}{\partial m \partial t}(p,q)\, w_{ci}(q) = \int_\Gamma \left[\frac{\partial^2 w^{*p}}{\partial m \partial t}(p,q)\, V_n(p) - \frac{\partial^3 w^{*p}}{\partial n \partial m \partial t}(p,q)\, M_n(q) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 v^{*p}}{\partial m \partial t}(p,q)\, T_n(p)\right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 w_{c_i}^{*p}}{\partial m \partial t}(p,q)\, R_{c_i}(p) + \int_{\Omega_g} g(p)\, \frac{\partial^2 w^{*p}}{\partial m \partial t}(p,q)\, d\Omega_g.\end{aligned} \tag{7.98}$$

Por meio da eq.(6.12), escreve-se as expressões para o cálculo dos momentos fletores e

volvente no domínio:

$$M_{mm}(q) = -D\left(w^*_{,mm} + \nu w^*_{,tt}\right), \tag{7.99}$$

$$M_{tt}(q) = -D\left(w^*_{,tt} + \nu w^*_{,mm}\right), \tag{7.100}$$

$$M_{mt}(q) = -D(1-\nu)\, w^*_{,mt}, \tag{7.101}$$

onde as derivadas das soluções fundamentais dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w^*}{\partial m \partial t} &= \frac{d^2 w^*}{dr^2} r_{,t} r_{,m} + \frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\left(mt - r_{,m} r_{,t}\right), \\
\frac{\partial^3 v^*}{\partial n \partial m \partial t} &= -\left(\frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{3}{r}\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{3}{r^2}\frac{dw^*}{dr}\right) r_{,n} r_{,m} r_{,t} + \\
&\quad - \frac{1}{r}\left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\right)\left(mt\ r_{,n} + r_{,m}\ tn + mn\ r_t\right), \\
\frac{\partial^2 v^*}{\partial m \partial t} &= \frac{d^2 v^*}{dr^2} r_{,t} r_{,m} + \frac{1}{r}\frac{dv^*}{dr}\left(mt - r_{,m} r_{,t}\right), \\
\frac{\partial^2 V^*_n}{\partial m \partial t} &= -D(1-\nu)\left\{\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{3}{r}\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{3}{r^2}\frac{dw^*}{dr}\right)\beta_1 + \right. \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{d^4 w^*}{dr^4} - \frac{6}{r}\frac{d^3 w^*}{dr^3} + \frac{15}{r^2}\frac{d^2 w^*}{dr^2} - \frac{15}{r^3}\frac{dw^*}{dr}\right)\beta_2 + \frac{1}{r}\left(\frac{d^4 w^*}{dr^4} - \frac{3}{r^2}\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{3}{r^3}\frac{dw^*}{dr}\right)\beta_3 + \\
&\quad \left. + \left(\frac{d^5 w^*}{dr^5} - \frac{2}{r}\frac{d^4 w^*}{dr^4} - \frac{3}{r^2}\frac{d^3 w^*}{dr^3} + \frac{15}{r^3}\frac{d^2 w^*}{dr^2} - \frac{15}{r^4}\frac{dw^*}{dr}\right)\beta_4\right\}, \\
\frac{\partial^2 M^*_n}{\partial m \partial t} &= -D(1-\nu)\left\{\frac{2}{r^2}\left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\right) mn\ tn + \frac{1}{r}\left(\frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{3}{r}\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{3}{r^2}\frac{dw^*}{dr}\right)\beta_5 + \right. \\
&\quad + \left[\frac{1}{r}\frac{d^3 w^*}{dr^3} + \left(\frac{d^4 w^*}{dr^4} - \frac{1}{r}\frac{d^3 w^*}{dr^3}\right) r^2_{,n}\right] r_{,m} r_{,t} + \\
&\quad \left. + \frac{1}{1-\nu}\left[\frac{1}{r}\left(\nu\frac{d^3 w^*}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2 w^*}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\right) mt + \left(\nu\frac{d^4 w^*}{dr^4} - \frac{3}{r^2}\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{3}{r^3}\frac{dw^*}{dr}\right) r_{,m} r_{,t}\right]\right\}, \\
\frac{\partial^2 T^*_n}{\partial m \partial t} &= G_k\left[\left(\frac{d^3 v^*}{dr^3} - \frac{3}{r}\frac{d^2 v^*}{dr^2} + \frac{3}{r^2}\frac{dv^*}{dr}\right) r_{,n} r_{,m} r_{,t} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r}\left(\frac{d^2 v^*}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dv^*}{dr}\right)\left(mn\ r_{,t} + mt\ r_{,n} + tn\ r_{,m}\right)\right], \\
\frac{\partial^2 M_{ns}}{\partial m \partial t} &= -D(1-\nu)\left[\frac{d^4 w^*}{dr^4} r_{,n} r_{,s} r_{,m} r_{,t} + \frac{1}{r}\frac{d^3 w^*}{dr^3}\beta_6 + \frac{1}{r}\left(\frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{2}{r}\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{2}{r^2}\frac{dw^*}{dr}\right)\beta_7 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw^*}{dr}\right)\beta_8\right],
\end{aligned} \tag{7.102}$$

sendo os coeficientes $\beta$ dados por:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \left(1-6r_{,s}^2\right)\left(mn\ r_{,t}+mt\ r_{,n}+tn\ r_{,m}\right)+2\left(mn\ ts\ r_{,s}+ms\ ts\ r_{,n}+ms\ tn\ r_{,s}\right),\\
\beta_2 &= \left(r_{,m}r_{,t}-8r_{,s}^2r_{,m}r_{,t}+2ms\ r_{,s}r_{,t}+2ts\ r_{,s}r_{,m}\right)r_{,n},\\
\beta_3 &= \left(mn\ r_{,t}+mt\ r_{,n}+tn\ r_{,m}\right)\left(\frac{1}{1-\nu}+r_{,s}^2\right),\\
\beta_4 &= r_{,n}r_{,m}r_{,t}\left(\frac{1}{1-\nu}+r_{,s}^2\right),\\
\beta_5 &= \left(2mn\ r_{,t}+mt\ r_{,n}+2tn\ r_{,m}-5r_{,n}r_{,m}r_{,t}\right)r_{,n},\\
\beta_6 &= mt\ r_{,n}r_{,s}+ts\ r_{,n}r_{,m}+tn\ r_{,s}r_{,m}-3r_{,n}r_{,s}r_{,m}r_{,t},\\
\beta_7 &= \left(mn\ r_{,s}+ms\ r_{,n}-3r_{,n}r_{,s}r_{,m}\right)r_{,t},\\
\beta_8 &= mn\left(ts-r_{,s}r_{,t}\right)+ms\left(tn-r_{,n}r_{,t}\right)-3\left(mt\ r_{,n}r_{,s}+ts\ r_{,m}r_{,s}+tn\ r_{,s}r_{,m}-3r_{,n}r_{,n}r_{,m}r_{,t}\right).
\end{aligned} \tag{7.103}$$

Para as integrais de domínio relativas a influência do carregamento distribuído vale a transformação para o contorno conforme discutido na seção 7.2.3, sendo dada por:

$$\int_{\Omega_g} g\left(p\right)\frac{\partial^2 w^{*p}}{\partial m\partial t}\left(p,q\right)d\Omega_g = g_0\int_{\Gamma_g}\widehat{\chi}^{*}r_{,n}d\Gamma_g, \tag{7.104}$$

onde

$$\widehat{\chi}^{*} = \frac{1}{r}\int\left[\left(\frac{d^2w^{*p}}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dw^{*p}}{dr}\right)r_{,t}r_{,m}+\frac{1}{r}\frac{dw^{*p}}{dr}mt\right]rdr. \tag{7.105}$$

Por meio da eq.(7.28) e da solução fundamental para o caso I, eq.(7.21), pode-se escrever as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi}^{*} = -\alpha_0\Bigg\{&\alpha_1\left[\frac{z_1}{\sqrt{z_1}}K_1\left(r\sqrt{z_1}\right)r_{,m}r_{,t}-\frac{1}{r}K_0\left(r\sqrt{z_1}\right)\left(mt-2r_{,m}r_{,t}\right)\right]+\\
&+\frac{1}{\beta}Im\left\{\overline{\alpha}_2\left[\frac{z_2}{\sqrt{z_2}}K_1\left(r\sqrt{z_2}\right)r_{,m}r_{,t}-\frac{1}{r}K_0\left(r\sqrt{z_2}\right)\left(mt-2r_{,m}r_{,t}\right)\right]\right\}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{7.106}$$

Para o caso II, utiliza-se a solução dada pela eq.(7.22), ficando:

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi}^{*} = -\alpha_0\Bigg\{&\overline{\alpha}_1\left[\frac{z_1}{\sqrt{z_1}}K_1\left(r\sqrt{z_1}\right)r_{,m}r_{,t}-\frac{1}{r}K_0\left(r\sqrt{z_1}\right)\left(mt-2r_{,m}r_{,t}\right)\right]+\\
&+\overline{\alpha}_2\left[\frac{z_2}{\sqrt{z_2}}K_1\left(r\sqrt{z_2}\right)r_{,m}r_{,t}-\frac{1}{r}K_0\left(r\sqrt{z_2}\right)\left(mt-2r_{,m}r_{,t}\right)\right]+\\
&+\overline{\alpha}_3\left[\frac{z_3}{\sqrt{z_3}}\left(rK_0\left(r\sqrt{z_3}\right)+\frac{2}{\sqrt{z_3}}K_1\left(r\sqrt{z_3}\right)\right)r_{,m}r_{,t}-K_1\left(r\sqrt{z_3}\right)mt\right]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{7.107}$$

Já para o caso III, utiliza-se a solução dada pela eq.(7.23), sendo:

$$\begin{aligned}\widehat{\chi}^{*} = -\alpha_0 \Bigg\{ & \overline{\alpha}_1 \left[ \frac{z_1}{\sqrt{z_1}} K_1\left(r\sqrt{z_1}\right) r_{,m} r_{,t} - \frac{1}{r} K_0\left(r\sqrt{z_1}\right)\left(mt - 2r_{,m} r_{,t}\right) \right] + \\ & + \overline{\alpha}_2 \left[ \frac{z_2}{\sqrt{z_2}} K_1\left(r\sqrt{z_2}\right) r_{,m} r_{,t} - \frac{1}{r} K_0\left(r\sqrt{z_2}\right)\left(mt - 2r_{,m} r_{,t}\right) \right] + \\ & + \overline{\alpha}_3 \left[ \frac{z_3}{\sqrt{z_3}} K_1\left(r\sqrt{z_3}\right) r_{,m} r_{,t} - \frac{1}{r} K_0\left(r\sqrt{z_3}\right)\left(mt - 2r_{,m} r_{,t}\right) \right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{7.108}$$

## 7.3 Montagem do sistema algébrico

Apesar das equações integrais estarem definidas no contorno do problema, elas representam um problema contínuo, isto é, existem infinitos pontos que requerem que as variáveis sejam determinadas no contorno. Como a solução analítica do problema contínuo é inviável na maioria dos casos, a alternativa é partir para a discretização e interpolação das variáveis com o intuito de criação de um número finito de pontos onde as variáveis possam ser determinadas por um sistema algébrico de dimensão finita.

Dessa forma, a solução do problema baseado no MEC é feito considerando as seguintes etapas:

- Discretização do contorno (gerando equações integrais discretizadas);
- Interpolação das variáveis em cada elemento de contorno;
- Cálculo das integrações em cada elemento de contorno;
- Montagem do sistema algébrico do problema;
- Aplicação das condições de contorno e resolução do sistema, determinação das incógnitas no contorno.

### 7.3.1 Discretização do contorno

O procedimento adotado para a solução do problema em questão consiste em dividir o contorno original em vários segmentos, denominados elementos de contorno, conforme mostrados na figura 7.4. A quantidade e a geometria desses elementos deve ser escolhida de tal forma que represente adequadamente o contorno do problema original, não possuindo necessariamente a mesma geometria.

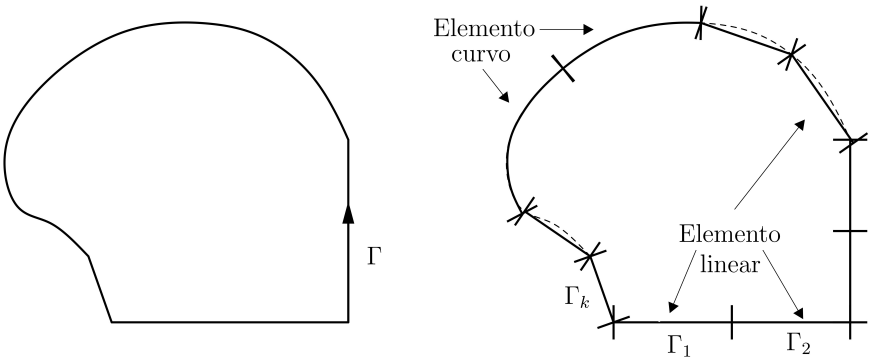



FIGURA 7.4 – Discretização do problema real em elementos de contorno.

A cada elemento de contorno associam-se um ou mais pontos nodais, onde os valores das variáveis em deslocamentos ou esforços são obtidos de forma aproximada por meio de funções interpoladoras.

Em relação a posição do nó no elemento, podem-se classificá-los em: contínuos ou descontínuos. Nos elementos contínuos há nós postos nas extremidades do elemento enquanto que nos descontínuos não há nós coincidentes com as extremidades do elemento de contorno.

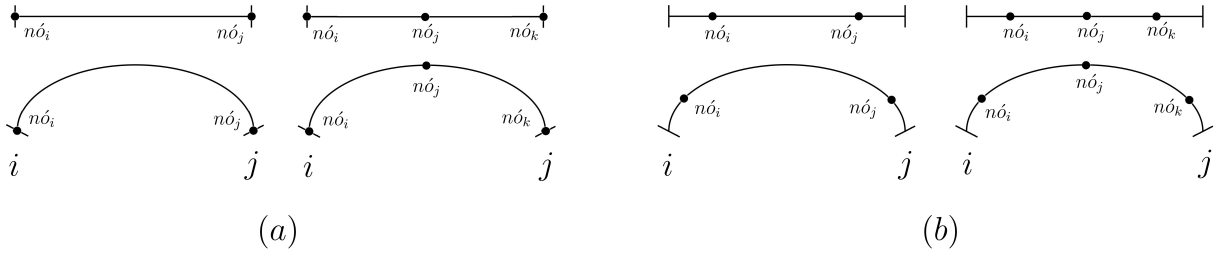



FIGURA 7.5 – Elementos de contorno contínuos (a) e descontínuos (b) com geometria linear e circular.

Como os valores nodais são parâmetros, podem ser tiradas da integral, sendo apenas os termos restantes integrados. Com isso, monta-se o sistema algébrico onde, após a imposição das condições de contorno do problema, resolve-se o sistema de equações resultantes finais. Com posse dos resultados nodais, é possível calcular as variáveis do problema em qualquer ponto do domínio.

### 7.3.2 Interpolação das variáveis

Tanto a descrição da geometria do problema quanto a aproximação dos campos físicos são feitos utilizando funções de interpolação, também chamadas de funções de forma. Estas são expressas por polinômios, cuja quantidade de nós presentes no elemento de contorno se dará em função da sua ordem. As expressões que definem tais funções são obtidas considerando que a função interpoladora $\varphi_k$ possua valor unitário no nó $k$ e nulo

nos demais. Por exemplo, conforme mostra a figura 7.6, as funções de forma para um elemento contínuo e descontínuo com variação linear serão dadas por, respectivamente:

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad \text{e} \quad \varphi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi), \tag{7.109}$$

$$\varphi_1^d(\xi) = \frac{\delta_j + \xi - 1}{\delta_i + \delta_j - 2} \quad \text{e} \quad \varphi_2^d(\xi) = \frac{\delta_i - \xi - 1}{\delta_i + \delta_j - 2}. \tag{7.110}$$

onde $\delta_i, \delta_j$ são as distâncias entre os nós e as extremidades do elemento.

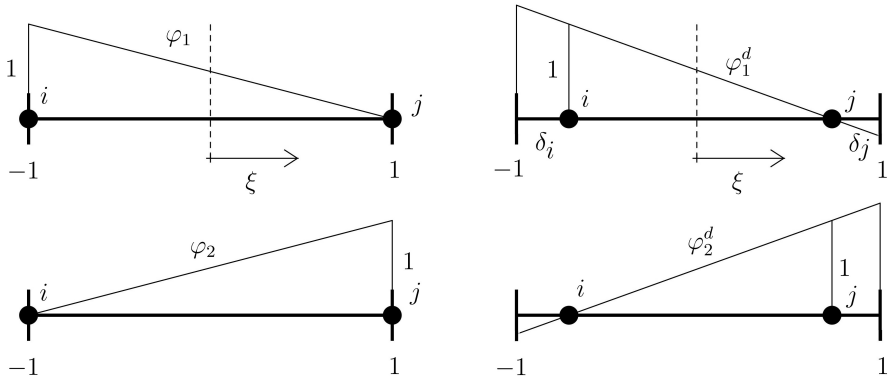



FIGURA 7.6 – Variação linear um elemento contínuo (a) e descontínuo (b) com geometria linear e circular.

Nesta tese, dois tipos de elementos de contorno são utilizados: um com geometria linear e outro com geometria circular, ambos com campos físicos aproximados por funções lineares. Por conveniência, adota-se um sistema de coordenadas locais homogêneas $\xi$ simplificando as integrações numéricas em torno do contorno $\Gamma$.

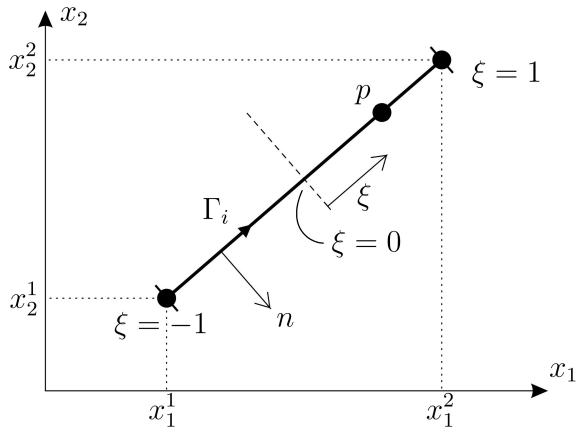



FIGURA 7.7 – Representação do elemento de contorno linear.

Por meio da figura 7.7, escrevem-se as coordenadas de um ponto $p$ qualquer sobre o

contorno do elemento reto como sendo:

$$x_1^p = \varphi_1(\xi)\, x_1^1 + \varphi_2(\xi)\, x_1^2, \tag{7.111}$$

$$x_2^p = \varphi_1(\xi)\, x_2^1 + \varphi_2(\xi)\, x_2^2, \tag{7.112}$$

onde $x_i^j$ são as coordenadas cartesianas dos nós $j = 1, 2$ da extremidade do elemento.

Podem-se ainda escrever as coordenadas do ponto $p$ na forma matricial:

$$\{X^p\} = [\Phi]\, \{X\}_{\Gamma_i}, \tag{7.113}$$

sendo

$$\{X^p\} = \left\{ \begin{array}{c} x_1^p \\ x_2^p \end{array} \right\},\ [\Phi] = \left[ \begin{array}{cccc} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 \end{array} \right], \text{e}\ \{X\}_{\Gamma_i} = \left\{ \begin{array}{c} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \end{array} \right\}, \tag{7.114}$$

onde $\{X^p\}$ é o vetor que contém as coordenadas cartesianas do ponto $p$, $[\Phi]$ é a matriz das funções de interpolação e $\{X\}_{\Gamma_i}$ o vetor que contém as coordenadas dos nós de extremidade do elemento de contorno $\Gamma_i$.

Já para um elemento de contorno circular, conforme mostrado na figura 7.8, as coordenadas de um ponto $p$ qualquer localizado sobre o contorno do elemento será dado pela seguinte expressão:

$$\left\{\widehat{X}^p\right\} = [R_c] \left\{\widehat{X}\right\}_{\Gamma_i} + \{X^c\}_{\Gamma_i}, \tag{7.115}$$

sendo

$$\left\{\widehat{X}^p\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \widehat{x}_1^p \\ \widehat{x}_2^p \end{array} \right\},\ [R_c] = \left[ \begin{array}{cc} cos\,(d \cdot \alpha) & -sen\,(d \cdot \alpha) \\ sen\,(d \cdot \alpha) & cos\,(d \cdot \alpha) \end{array} \right], \tag{7.116}$$

$$\left\{\widehat{X}\right\}_{\Gamma_i} = \left\{ \begin{array}{c} \widehat{x}_1^1 - x_1^c \\ \widehat{x}_2^1 - x_2^c \end{array} \right\},\ \left\{ \begin{array}{c} X^c \end{array} \right\}_{\Gamma_i} = \left\{ \begin{array}{c} x_1^c \\ x_2^c \end{array} \right\} \tag{7.117}$$

onde $\left\{\widehat{X}\right\}_{\Gamma_i}$ é a distância entre um nó do elemento circular (inicial ou final) e o seu centro, $d$ é a parcela do ângulo $\alpha$ correspondente à coordenada do ponto $p$, $x_i^j$ as coordenadas cartesianas correspondentes às extremidades do elemento e $x_i^c$ ao centro do elemento circular.

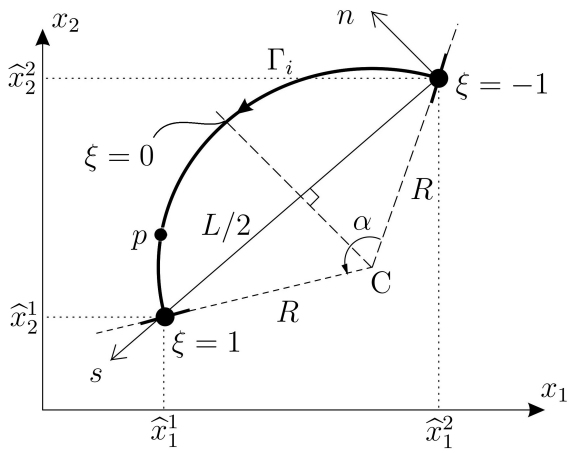



FIGURA 7.8 – Elemento de contorno circular.

O ângulo $\alpha$ é dado em função dos nós extremos do elemento de contorno:

$$\alpha = arcsen\left(\frac{L}{2R}\right) \tag{7.118}$$

onde $R$ corresponde ao raio do elemento circular e $L$ ao o comprimento reto entre os nós inicial e final do elemento.

Os campos em deslocamentos e forças de superfície são interpolados por meio das funções lineares dadas pelas eqs.(7.109), sendo expressas por:

$$\{u\} = [\Phi]\{U\}_{\Gamma_i}, \tag{7.119}$$

$$\{p\} = [\Phi]\{P\}_{\Gamma_i}, \tag{7.120}$$

onde $\{U\}_{\Gamma_i}$ e $\{P\}_{\Gamma_i}$ são os vetores dos valores nodais dos deslocamentos e forças de superfície nas extremidades dos elementos de contorno. Se tratando da placa de Kirchhoff apoiada em camada elástica de Kerr, tem-se:

$$\{u\} = \left\{ \begin{array}{c} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \\ v \end{array} \right\}, \tag{7.121}$$

$$\{p\} = \left\{ \begin{array}{c} V_n \\ M_{nn} \\ T_n \end{array} \right\}. \tag{7.122}$$

Note que, pelo fato das aproximações na geometria e nos valores de contorno serem expressos em função da coordenada $\xi$, deve-se fazer uma mudança de variável nas integrais

sobre o contorno. Assim, pode-se escrever a seguinte relação:

$$\Gamma = \frac{L}{2}\xi \tag{7.123}$$

onde o determinante Jacobiano da transformação é dado por:

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{L}{2} \tag{7.124}$$

Em problemas onde se precise representar descontinuidades entre elementos adjacentes, deve-se utilizar o conceito do elemento descontínuo cujas funções interpoladoras estão definidas na eq.(7.110).

### 7.3.3 Equações algébricas

As equações integrais dadas em (7.61), (7.63) e (7.64) podem ser agrupadas em uma única equação:

$$A(q)u_i + \int_\Gamma P^* U d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} P^*_{c_i} U_{c_i} = \int_\Gamma U^* P d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} U^*_{c_i} P_{c_i} + \int_{\Omega_g} g\,(p)\, U^*_g d\Omega_g. \tag{7.125}$$

onde

$$u_i = \left\{ \begin{array}{c} w\,(q) \\ \frac{\partial w}{\partial n}\,(q) \\ v\,(q) \end{array} \right\},\ U = \left\{ \begin{array}{c} w\,(p) \\ \frac{\partial w}{\partial n}\,(p) \\ v\,(p) \end{array} \right\},\ P = \left\{ \begin{array}{c} V_n\,(p) \\ M_{nn}\,(p) \\ T_n\,(p) \end{array} \right\},$$

$$P^* = \left[ \begin{array}{ccc} p^*_{11} & p^*_{12} & p^*_{13} \\ p^*_{21} & p^*_{22} & p^*_{32} \\ p^*_{31} & p^*_{32} & p^*_{33} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} V^{*p}_n & -M^{*p}_n & T^{*p}_n \\ \frac{\partial V^{*p}_n}{\partial m} & -\frac{\partial M^{*p}_n}{\partial m} & \frac{\partial T^{*p}_n}{\partial m} \\ V^{*c}_n & -M^{*c}_n & T^{*c}_n \end{array} \right],$$

$$U^* = \left[ \begin{array}{ccc} u^*_{11} & u^*_{12} & u^*_{13} \\ u^*_{21} & u^*_{22} & u^*_{32} \\ u^*_{31} & u^*_{32} & u^*_{33} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} w^{*p} & \frac{\partial w}{\partial n}^{*p} & v^{*p} \\ \frac{\partial w^{*p}}{\partial m} & \frac{\partial^2 w^{*p}}{\partial n \partial m} & \frac{\partial v^{*p}}{\partial m} \\ w^{*c} & \frac{\partial w}{\partial n}^{*c} & v^{*c} \end{array} \right], \tag{7.126}$$

$$P^*_{c_i} = \left\{ \begin{array}{c} R^{*p}_{c_i} \\ \frac{\partial R^{*p}_{c_i}}{\partial m} \\ R^{*c}_{c_i} \end{array} \right\},\ U^*_{c_i} = \left\{ \begin{array}{c} w^{*p}_{c_i} \\ \frac{\partial w^{*p}_{c_i}}{\partial m} \\ v^{*c}_{c_i} \end{array} \right\},\ U^*_g = \left\{ \begin{array}{c} w^{*p} \\ \frac{\partial w^{*p}}{\partial m} \\ v^{*c} \end{array} \right\} \tag{7.127}$$

sendo $N_c$ a quantidade de pontos angulosos (cantos) da placa.

Discretizando o contorno do problema em elementos, aplicando as funções de interpolação dadas pelas eqs.(7.119) e (7.120) e efetuando-se a mudança de variável $\Gamma$ para $\xi$, as integrais definidas no contorno tornam-se somatórios de integrais sobre os elementos de

contorno:

$$A(q)u_i + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\xi} P^* \Psi |J| d\xi_j \; U_j + \sum_{i=1}^{N_c} P^*_{c_i} U_{c_i} = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\xi} U^* \Psi |J| d\xi_j P_j + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} U^*_{c_i} P_{c_i} + g_0 \sum_{j=1}^{N_g} \int_{\xi_g} U^*_{\chi} d\xi_{g_j}, \tag{7.128}$$

sendo $N_e$ o número de elementos de contorno, $N_g$ o número de elementos de contorno utilizados para discretizar o carregamento distribuído, e ainda

$$U^*_{\chi} = \left\{ \begin{array}{c} \chi^*_1 r_{,n} \\ \chi^*_2 r_{,n} \\ \chi^*_3 r_{,n} \end{array} \right\}. \tag{7.129}$$

A eq.(7.128) pode ainda ser escrita como:

$$A(q)u_i + \sum_{j=1}^{N_e} \widehat{H}_{ij} U_j + \sum_{i=1}^{N_c} P^*_{c_i} U_{c_i} = \sum_{j=1}^{N_e} G_{ij} P_j + \sum_{i=1}^{N_c} U^*_{c_i} P_{c_i} + g_0 \sum_{j=1}^{N_g} \int_{\xi_g} U^*_{\chi} d\xi_{g_j}, \tag{7.130}$$

onde $[G]$ e $[H]$ são as matrizes de influência

$$\widehat{H}_{ij} = \int_{\xi} P^* \Psi |J| d\xi_j, \tag{7.131}$$

$$G_{ij} = \int_{\xi} U^* \Psi |J| d\xi_j \tag{7.132}$$

Considerando que

$$H_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} \widehat{H}_{ij}, \text{ se } i \neq j \\ \widehat{H}_{ij} + A_i, \text{ se } i = j \end{array} \right. \tag{7.133}$$

então a eq.(7.130) pode ser reescrita como:

$$\sum_{j=1}^{N_e} H_{ij} U_j + \sum_{i=1}^{N_c} P^*_{c_i} U_{c_i} = \sum_{j=1}^{N_e} G_{ij} P_j + \sum_{i=1}^{N_c} U^*_{c_i} P_{c_i} + g_0 \sum_{j=1}^{N_g} \int_{\xi_g} U^*_{\chi} d\xi_{g_j}. \tag{7.134}$$

Sendo a eq.(7.134) válida apenas para o nó $i$, faz-se necessária a colocação do ponto fonte para todos os nós de contorno e cantos do problema discretizado, obtendo-se o

sistema algébrico final da estrutura:

$$\begin{bmatrix} H_{\Gamma\Gamma} & H_{\Gamma C} \\ H_{C\Gamma} & H_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\Gamma \\ u_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\Gamma\Gamma} & G_{\Gamma C} \\ G_{C\Gamma} & G_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_\Gamma \\ p_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_\Gamma \\ f_C \end{Bmatrix}, \tag{7.135}$$

onde a submatriz $H_{ij}$ exprime a influência do ponto fonte colocado em $i$ sobre os valores do ponto de medição $j$, com $i, j = \Gamma$ correspondente ao contorno e $i, j = C$ ao canto da placa.

Dessa forma, pode-se escrever a eq.(7.136) na forma compacta como sendo:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{F\}, \tag{7.136}$$

onde $[H]$ e $[G]$ são as matrizes de influência dos deslocamentos $\{F\}$ e forças $\{P\}$, respectivamente, e $\{F\}$ é o vetor de carregamento.

A equação matricial (7.136) pode ainda ser rearranjada, trocando as colunas das matrizes $[H]$ e $[G]$ para separar as incógnitas em um mesmo vetor $\{X\}$, resultando no seguinte sistema de equações:

$$[A]\{X\} = [B], \tag{7.137}$$

onde $[A]$ é a matriz dos coeficientes que multiplicam as incógnitas e $[B]$ formada pela multiplicação da matriz e do vetor onde todas as variáveis são conhecidas.

# Capítulo 8

# O MEC em Placas Mindlin sobre camada de Kerr

Neste capítulo será apresentada uma formulação baseada no MEC para a solução de placas de Mindlin apoiadas em camada elástica de Kerr. As soluções fundamentais propostas para o problema são apresentadas explicitamente. Além disso, são deduzidas as equações integrais para determinação dos campos em deslocamentos e forças tanto no contorno quanto domínio do problema.

## 8.1 O problema fundamental

O problema fundamental consiste na leitura do efeito em um ponto $p$ do domínio infinito causada pela aplicação de uma fonte concentrada em um ponto $q$ desse domínio. Essa fonte concentrada é representada pela função delta de Dirac $\delta(p,q)$.

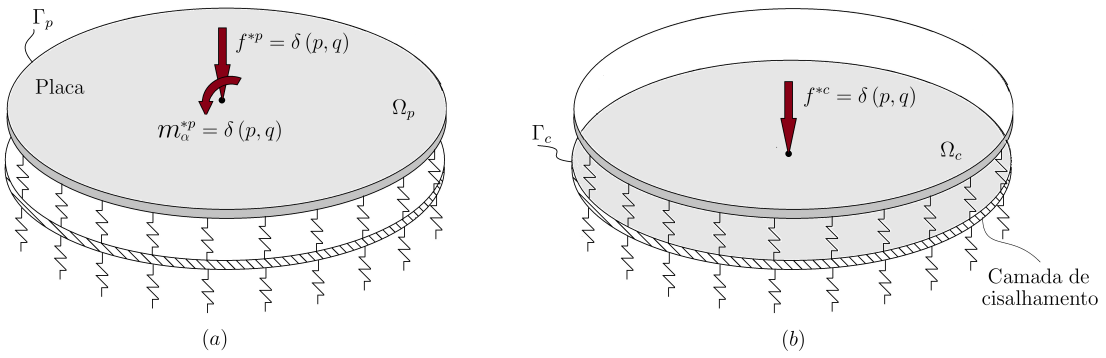



FIGURA 8.1 – O problema fundamental com fonte concentrada aplicada na placa (a) e na camada cisalhante (b).

Para a placa de Mindlin apoiada em camada elástica de Kerr, duas situações deverão ser levadas em consideração: a primeira para ativação da fonte concentrada em força ou

momento fletor na placa; e a segunda para ativação da fonte concentrada na camada cisalhante. Dessa forma, por analogia ao problema real, eq.(6.65), a equação governante do problema fundamental na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} a_1\nabla^2 - s_1 + b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -s_1\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & a_1\nabla^2 - s_1 + b_1\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -s_1\frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ s_1\frac{\partial}{\partial x_1} & s_1\frac{\partial}{\partial x_2} & s_1\nabla^2 - s_2 & s_2 \\ 0 & 0 & s_2 & s_4\nabla^2 - (s_2 + s_3) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_x^{*m_x} & \phi_x^{*m_y} & \phi_x^{*g_x} & \phi_x^{*g_y} \\ \phi_y^{*m_x} & \phi_y^{*m_y} & \phi_y^{*g_x} & \phi_y^{*g_y} \\ w^{*m_x} & w^{*m_y} & w^{*g_x} & w^{*g_y} \\ v^{*m_x} & v^{*m_y} & v^{*g_x} & v^{*g_y} \end{bmatrix} = -\delta(p,q)[I], \tag{8.1}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} a_1\nabla^2 - s_1 + b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -s_1\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & a_1\nabla^2 - s_1 + b_1\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -s_1\frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ s_1\frac{\partial}{\partial x_1} & s_1\frac{\partial}{\partial x_2} & s_1\nabla^2 - s_2 & s_2 \\ 0 & 0 & s_2 & s_4\nabla^2 - (s_2 + s_3) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* & u_{14}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* & u_{24}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* & u_{34}^* \\ u_{41}^* & u_{42}^* & u_{43}^* & u_{44}^* \end{bmatrix} = -\delta(p,q)[I], \tag{8.2}$$

onde $[I]$ é a matriz identidade. De forma compacta, pode-se escrever a equação governante do problema fundamental como:

$$[B][G^*] = -\delta(p,q)[I], \tag{8.3}$$

onde $[B]$ é a matriz dos operadores e $[G^*]$ a matriz das soluções fundamentais em deslo-

camento, dadas por:

$$[B] = \begin{bmatrix} a_1\nabla^2 - s_1 + b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -s_1\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & a_1\nabla^2 - s_1 + b_1\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -s_1\frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ s_1\frac{\partial}{\partial x_1} & s_1\frac{\partial}{\partial x_2} & s_1\nabla^2 - s_2 & s_2 \\ 0 & 0 & s_2 & s_4\nabla^2 - (s_2 + s_3) \end{bmatrix}, \quad (8.4)$$

$$[G^*] = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* & u_{14}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* & u_{24}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* & u_{34}^* \\ u_{41}^* & u_{42}^* & u_{43}^* & u_{44}^* \end{bmatrix}. \quad (8.5)$$

Assim como feito nos capítulos anteriores, a eq.(8.3) pode ser desacoplada por meio do método de Hörmander (1963), obtendo-se a equação de oitava ordem desacoplada em função do escalar $\psi(r)$:

$$\left(\nabla^2 - \lambda\right)\left(\nabla^6 + \alpha\nabla^4 + \beta\nabla^2 + \gamma\right)\psi(r) = -\frac{1}{a_1 s_1 s_4 D}\delta\left(r\right) \quad (8.6)$$

onde $\lambda = \sqrt{10}/h$, $r$ é a distância entre o ponto campo $p$ e o ponto fonte $q$ e ainda

$$\alpha = -\frac{s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_4}{s_1 s_4} \quad (8.7)$$

$$\beta = \frac{s_2 s_3 + s_1 s_2 s_4}{s_1 s_4} \quad (8.8)$$

$$\gamma = -\frac{s_1 s_2 s_3}{s_1 s_4} \quad (8.9)$$

Para resolver o problema é necessário definir uma solução fundamental desacoplada $\psi$. Para isso, inicialmente reescreve-se a eq.(8.6) na forma fatorada:

$$\left(\nabla^2 - z_1^2\right)\left(\nabla^2 - z_2^2\right)\left(\nabla^2 - z_3^2\right)\left(\nabla^2 - z_4^2\right)\psi(r) = -\frac{1}{a_1 s_1 s_4 D}\delta(r) \quad (8.10)$$

Vê-se então que a equação desacoplada eq.(8.6) terá quatro raízes, sendo uma já conhecida ($z_1 = \lambda$), restando apenas definir as demais $z_2$, $z_3$ e $z_4$. Dessa forma, fazendo $\nabla^2\psi = y$, a equação característica homogênea será dada por:

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \quad (8.11)$$

Com isso, obtém-se as raízes da equação característica por meio das eqs.(7.16), onde a natureza das raízes é dada em função do discriminante da equação, a saber:

- Se $\Delta > 0$ a equação terá uma raiz real e duas raízes complexas e conjugadas;

- Se $\Delta = 0$ tem-se três raízes reais, sendo uma repetida;
- Se $\Delta < 0$ as três raízes da equação serão reais e distintas.

Com isso, as soluções fundamentais propostas para os possíveis casos de ocorrência para o problema em questão são apresentadas na sequência.

**Caso I.** Considerando uma raiz real positiva e um par de complexas conjugadas, a solução proposta é dada por:

$$\begin{aligned}\psi(r) = \frac{1}{2\pi D a_1 s_1 s_4 (\lambda - z_2)} \Bigg\{ & \frac{1}{(\lambda - z_3)(\lambda - z_4)} K_0\left(r\sqrt{z_1}\right) + \\ & - \frac{1}{(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} K_0\left(r\sqrt{z_2}\right) + \\ & + \frac{(\lambda - z_2)}{(\lambda - z_3)(z_2 - z_3)(z_3 - z_4)} K_0\left(r\sqrt{z_3}\right) + \\ & - \frac{(\lambda - z_2)}{(\lambda - z_4)(z_2 - z_4)(z_3 - z_4)} K_0\left(r\sqrt{z_4}\right) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

**Caso II.** A solução para o caso onde as três raízes são reais, sendo duas iguais, é dada por:

$$\begin{aligned}\psi(r) = \frac{1}{2\pi D a_1 s_1 s_4 (\lambda - z_2)} \Bigg\{ & \frac{1}{(\lambda - z_3)^2} K_0\left(r\sqrt{z_1}\right) - \frac{1}{(z_2 - z_3)^2} K_0\left(r\sqrt{z_2}\right) + \\ & + \left[ \frac{1}{(z_2 - z_3)^2} - \frac{1}{(\lambda - z_3)^2} \right] K_0\left(r\sqrt{z_3}\right) + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda - z_3}{\sqrt{z_3}(\lambda - z_3)^2} - \frac{z_2 - z_3}{\sqrt{z_3}(z_2 - z_3)^2} \right] r K_1\left(r\sqrt{z_3}\right) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

**Caso III.** Considerando agora que uma raiz seja real positiva e as outras duas complexas conjugadas, é proposto a seguinte solução:

$$\begin{aligned}\psi(r) = \frac{1}{2\pi D a_1 s_1 s_4 (\lambda - z_2)} \Bigg\{ & \frac{1}{(a - \lambda)^2 + b^2} K_0\left(r\sqrt{z_1}\right) - \frac{1}{(a - z_2)^2 + b^2} K_0\left(r\sqrt{z_2}\right) + \\ & + \left[ \frac{1}{(a - z_2)^2 + b^2} - \frac{1}{(a - \lambda)^2 + b^2} \right] Re\left(K_0\left(r\sqrt{z_3}\right)\right) + \\ & - \frac{(\lambda - z_2)\left[b^2 - (a - \lambda)(a - z_2)\right]}{b\left[(a - \lambda)^2 + b^2\right]\left[(a - z_2)^2 + b^2\right]} Im\left(K_0\left(r\sqrt{z_3}\right)\right) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{8.14}$$

onde $a = Re(z_3)$ e $b = Im(z_3)$ são as partes real e imaginária das raízes complexas, respectivamente.

De forma a simplificar os cálculos a posteriori, pode-se reescrever as eqs.(8.12) a (8.14) de forma generalizada como sendo:

$$\psi(r) = \frac{1}{2\pi D a_1 s_1 s_4 \left(z_2 - \lambda\right)} \sum_{n=1}^{4} C_n f_n(r). \tag{8.15}$$

onde as funções $f_n$ e as constantes $C_n$ são apresentadas nas Tabelas 8.1 e 8.2, respectivamente.

TABELA 8.1 – Funções auxiliares da solução fundamental desacoplada.

| | $f_1(r)$ | $f_2(r)$ | $f_3(r)$ | $f_4(r)$ |
|---|---|---|---|---|
| Caso I | $K_0\left(r\sqrt{\lambda}\right)$ | $K_0\left(r\sqrt{z_2}\right)$ | $K_0\left(r\sqrt{z_3}\right)$ | $K_0\left(r\sqrt{z_4}\right)$ |
| Caso II | $K_0\left(r\sqrt{\lambda}\right)$ | $K_0\left(r\sqrt{z_2}\right)$ | $K_0\left(r\sqrt{z_3}\right)$ | $rK_1\left(r\sqrt{z_3}\right)$ |
| Caso III | $K_0\left(r\sqrt{\lambda}\right)$ | $K_0\left(r\sqrt{z_2}\right)$ | $Re\left(K_0\left(r\sqrt{z_3}\right)\right)$ | $Im\left(K_0\left(r\sqrt{z_3}\right)\right)$ |

TABELA 8.2 – Constantes da equação fundamental desacoplada.

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Caso I | $\frac{1}{(\lambda-z_3)(\lambda-z_4)}$ | $-\frac{1}{(z_2-z_3)(z_2-z_4)}$ | $\frac{(\lambda-z_2)}{(\lambda-z_3)(z_2-z_3)(z_3-z_4)}$ | $-\frac{(\lambda-z_2)}{(\lambda-z_4)(z_2-z_4)(z_3-z_4)}$ |
| Caso II | $\frac{1}{(\lambda-z_3)^2}$ | $-\frac{1}{(z_2-z_3)^2}$ | $\left[\frac{1}{(z_2-z_3)^2} - \frac{1}{(\lambda-z_3)^2}\right]$ | $\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda-z_3}{\sqrt{z_3}(\lambda-z_3)^2} - \frac{z_2-z_3}{\sqrt{z_3}(z_2-z_3)^2}\right]$ |
| Caso III | $\frac{1}{(a-\lambda)^2+b^2}$ | $-\frac{1}{(a-z_2)^2+b^2}$ | $\left[\frac{1}{(a-z_2)^2+b^2} - \frac{1}{(a-\lambda)^2+b^2}\right]$ | $-\frac{(\lambda-z_2)\left[b^2-(a-\lambda)(a-z_2)\right]}{b\left[(a-\lambda)^2+b^2\right]\left[(a-z_2)^2+b^2\right]}$ |

As funções de Bessel modificadas de segunda espécie $K_0(\cdot)$ e $K_1(\cdot)$ são definidas pelas eqs.(7.51) e (7.52), respectivamente. As componentes de $r$ e as derivadas na direção de $x_\alpha$ são dadas por:

$$r^2 = r_\alpha r_\alpha, \text{ com } r_\alpha = x_\alpha(p) - x_\alpha(q), \tag{8.16}$$

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = \frac{r_\alpha}{r}, \tag{8.17}$$

$$\frac{\partial r_{,\alpha}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{r}\left(\delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha} r_{,\beta}\right). \tag{8.18}$$

As derivadas das funções de Bessel, necessárias posteriormente para definir as soluções fundamentais em deslocamentos e esforços podem ser vistas no apêndice A.

Conhecidas as funções escalares $\psi$, parte-se para a obtenção das soluções fundamentais em deslocamentos para cada um dos casos em questão. As soluções fundamentais em deslocamentos são obtidas fazendo

$$[G^*] = [B^{cof}]^T \psi(r), \tag{8.19}$$

chegando às soluções fundamentais em deslocamentos dadas pelas expressões:

$$
\begin{aligned}
U^*_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\pi D a_1 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left\{ \left[ \Delta^3 f_n - \left( \frac{s_2+s_3}{s_4} + \frac{s_2}{s_1} \right) \Delta^2 f_n + \left( s_2 + \frac{s_2 s_3}{s_4 s_1} \right) \Delta f_n + \right.\right. \\
&\quad \left. - \frac{s_2 s_3}{s_4} f_n \right] \delta_{\alpha\beta} - b_1 \frac{d^2}{dr^2} \left[ \Delta^2 f_n + \left( \frac{s_1}{b_1} - \frac{s_2}{s_1} - \frac{s_2+s_3}{s_4} \right) \Delta f_n + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{s_4} \left( \frac{s_1}{b_1}(s_2+s_3) - \frac{s_2 s_3}{s_1} \right) f_n \right] r_{,\alpha} r_{,\beta} + \frac{b_1}{r} \frac{d}{dr} \left[ \Delta^2 f_n + \left( \frac{s_1}{b_1} - \frac{s_2}{s_1} - \frac{s_2+s_3}{s_4} \right) \Delta f_n + \right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{1}{s_4} \left( \frac{s_1}{b_1}(s_2+s_3) - \frac{s_2 s_3}{s_1} \right) f_n \right] (r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \right\}, \\
U_{3\alpha} &= -U_{\alpha 3} = \frac{1}{2\pi D (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \frac{d}{dr} \left[ \Delta^2 f_n - \left( \frac{s_2+s_3}{s_4} + \lambda \right) \Delta f_n + \lambda \left( \frac{s_2+s_3}{s_4} \right) f_n \right] r_{,\alpha}, \\
U_{4\alpha} &= -U_{\alpha 4} = \frac{-s_2}{2\pi D s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \frac{d}{dr} \left[ \Delta f_n - \lambda f_n \right] r_{,\alpha}, \\
U_{33} &= \frac{1}{2\pi D s_1 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left\{ \Delta^3 f_n - (\lambda + s_1) \Delta^2 f_n + s_1 \lambda \Delta f_n + \right. \\
&\quad \left. + \frac{s_2+s_3}{s_4} \left( -\Delta^2 f_n + (\lambda + s_1) \Delta f_n - s_1 \lambda f_n \right) \right\}, \\
U_{34} &= U_{43} = \frac{s_2}{2\pi D a_1 s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left[ \frac{-1}{\lambda} \Delta^2 f_n + (a_1+1) \Delta f_n - s_1 f_n \right], \\
U_{44} &= \frac{1}{2\pi D a_1 s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left[ a_1 \Delta^3 f_n - \left( \frac{s_2}{\lambda} + s_1 \right) \Delta^2 f_n + s_2 (a_1+1) \Delta f_n - s_1 s_2 f_n \right],
\end{aligned}
\tag{8.20}
$$

onde o operador $\Delta^n(\cdot) = (\nabla^2)^n(\cdot)$, sendo o operador laplaciano em coordenadas polares definido por $\nabla^2(\cdot) = \frac{d^2}{dr^2}(\cdot) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\cdot)$. Pode-se ainda ainda reescrever as eqs.(8.20) de

forma simplificada como:

$$
\begin{aligned}
U^*_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\pi D a_1 s_1 s_4 (\lambda - z_2)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left( \tilde{A}^{(0)} - \frac{1}{r}\tilde{B}^{(1)} \right) \delta_{\alpha\beta} - \left( \tilde{B}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{B}^{(1)} \right) r_{,\alpha} r_{,\beta}, \\
U_{3\alpha} &= -U_{\alpha 3} = \frac{1}{2\pi D a_1 s_4 (\lambda - z_2)} \sum_{n=1}^{4} C_n \tilde{C}^{(1)} r_{,\alpha}, \\
U_{4\alpha} &= -U_{\alpha 4} = \frac{1}{2\pi D a_1 s_4 (\lambda - z_2)} s_2 \sum_{n=1}^{4} C_n \tilde{D}^{(1)} r_{,\alpha}, \\
U_{33} &= \frac{1}{2\pi D a_1 s_1 s_4 (\lambda - z_2)} \sum_{n=1}^{4} C_n \tilde{E}^{(0)} \\
U_{34} &= U_{43} = \frac{1}{2\pi D a_1 s_1 s_4 (\lambda - z_2)} \sum_{n=1}^{4} C_n \tilde{F}^{(0)}, \\
U_{44} &= \frac{1}{2\pi D a_1 s_1 s_4 (\lambda - z_2)} \sum_{n=1}^{4} C_n \tilde{G}^{(0)},
\end{aligned}
\tag{8.21}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}^{(m)} &= \frac{d^m}{dr^m} \left\{ s_1 s_4 \Delta^3 f_n - \left[ s_1 (s_2 + s_3) + s_2 s_4 \right] \Delta^2 f_n + s_2 (s_3 + s_1 s_4) \Delta f_n - s_1 s_2 s_3 f_n \right\}, \\
\tilde{B}^{(m)} &= \frac{d^m}{dr^m} \left\{ b_1 s_1 s_4 \Delta^2 f_n + \left[ s_4 \left( s_1^2 - b_1 s_2 \right) - b_1 s_1 (s_2 + s_3) \right] \Delta f_n + \right. \\
&\left. + \left[ b_1 s_2 s_3 - s_1^2 (s_2 + s_3) \right] f_n \right\}, \\
\tilde{C}^{(m)} &= a_1 \frac{d^m}{dr^m} \left[ s_4 \Delta^2 f_n - (s_2 + s_3 + \lambda s_4) \Delta f_n + \lambda (s_2 + s_3) f_n \right], \\
\tilde{D}^{(m)} &= -a_1 \frac{d^m}{dr^m} \left[ \Delta f_n - \lambda f_n \right], \\
\tilde{E}^{(m)} &= a_1 \frac{d^m}{dr^m} \left\{ - (s_2 + s_3) \left[ \Delta^2 f_n - (\lambda + s_1) \Delta f_n + s_1 \lambda f_n \right] + \right. \\
&\left. + s_4 \left[ \Delta^3 f_n - (\lambda + s_1) \Delta^2 f_n + s_1 \lambda \Delta f_n \right] \right\}, \\
\tilde{F}^{(m)} &= -s_1 s_2 \frac{d^m}{dr^m} \left[ \frac{1}{\lambda} \Delta^2 f_n + (a_1 + 1) \Delta f_n - s_1 f_n \right], \\
\tilde{G}^{(m)} &= s_1 \frac{d^m}{dr^m} \left[ a_1 \Delta^3 f_n - \left( \frac{s_2}{\lambda} + s_1 \right) \Delta^2 f_n + s_2 (a_1 + 1) \Delta f_n - s_1 s_2 f_n \right].
\end{aligned}
\tag{8.22}
$$

É necessário ainda estabelecer as soluções fundamentais associadas aos esforços generalizados na placa e na camada de cisalhamento. Por analogia ao problema real, as

soluções fundamentais em esforços são dadas por:

$$P^*_{\gamma\alpha}(p,q) = M^*_{\gamma\alpha\beta}(p,q)\,\eta_\beta, \tag{8.23}$$
$$P^*_{3\alpha}(p,q) = M^*_{3\alpha\beta}(p,q)\,\eta_\beta, \tag{8.24}$$
$$P^*_{\gamma 3}(p,q) = Q^*_{\gamma 3\beta}(p,q)\,\eta_\beta, \tag{8.25}$$
$$P^*_{33}(p,q) = Q^*_{33\beta}(p,q)\,\eta_\beta, \tag{8.26}$$
$$P^*_{\gamma 4}(p,q) = T^*_{\gamma 4\beta}(p,q)\,\eta_\beta, \tag{8.27}$$
$$P^*_{44}(p,q) = T^*_{44\beta}(p,q)\,\eta_\beta. \tag{8.28}$$

ou ainda

$$P^*_{\gamma\alpha}(p,q) = D\frac{1-\nu}{2}\left(U^*_{\gamma\alpha,\beta} + U^*_{\gamma\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu}U^*_{\gamma\theta,\theta}\delta_{\alpha\beta}\right)\eta_\beta, \tag{8.29}$$
$$P^*_{3\alpha}(p,q) = D\frac{1-\nu}{2}\left(U^*_{3\alpha,\beta} + U^*_{3\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu}U^*_{3\theta,\theta}\delta_{\alpha\beta}\right)\eta_\beta, \tag{8.30}$$
$$P^*_{\gamma 3}(p,q) = D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(U_{\gamma\beta} + U_{\gamma 3,\beta}\right)\eta_\beta, \tag{8.31}$$
$$P^*_{33}(p,q) = D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(U_{3\beta} + U_{33,\beta}\right)\eta_\beta, \tag{8.32}$$
$$P^*_{\gamma 4}(p,q) = G_k U_{\gamma 4,\beta}\eta_\beta, \tag{8.33}$$
$$P^*_{44}(p,q) = G_k U_{44,\beta}\eta_\beta. \tag{8.34}$$

sendo $M^*_{i\alpha\beta}$, $Q^*_{i3\beta}$ e $T^*_{i4\beta}$ os momentos, esforços cortantes da placa e da camada cisalhante fundamentais, respectivamente, nas direções generalizadas $\gamma$ e $x_3$.

Dessa forma, substituindo as devidas soluções fundamentais em deslocamento, chega-

se aos esforços fundamentais:

$$
\begin{aligned}
P_{\alpha\beta} &= \frac{(1-\nu)}{4\pi a_1 s_1 s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left\{ \frac{2\nu}{(1-\nu)} \left[ \tilde{A}^{(1)} - \tilde{B}^{(3)} - \frac{1}{r}\left( \tilde{B}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{B}^{(1)} \right) \right] r_{,\alpha} n_\beta + \right. \\
&+ \tilde{A}^{(1)} \left( r_{,\beta} n_\alpha + r_{,n} \delta_{\beta\alpha} \right) - \frac{2}{r}\left( \tilde{B}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{B}^{(1)} \right) \left( r_{,\alpha} n_\beta + r_{,n}\delta_{\beta\alpha} + r_{,\beta} n_\alpha \right) + \\
&\left. -2\left( \tilde{B}^{(3)} - \frac{3}{r}\tilde{B}^{(2)} + \frac{3}{r^2}\tilde{B}^{(1)} \right) r_{,n} r_{,\beta} r_{,\alpha} \right\}, \\
P_{3\alpha} &= \frac{(1-\nu)}{4\pi a_1 s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left\{ \frac{2\nu}{(1-\nu)} \left( \tilde{C}^{(2)} + \frac{1}{r}\tilde{C}^{(1)} \right) n_\alpha + \right. \\
&\left. +2\left[ \left( \tilde{C}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{C}^{(1)} \right) r_{,n} r_\alpha + \frac{1}{r}\tilde{C}^{(1)} n_\alpha \right] \right\}, \\
P_{4\alpha} &= \frac{-s_2 (1-\nu)}{4\pi a_1 s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left\{ \frac{2\nu}{(1-\nu)} \left( \tilde{D}^{(2)} + \frac{1}{r}\tilde{D}^{(1)} \right) n_\alpha + \right. \\
&\left. +2\left[ \tilde{D}^{(2)} r_{,\alpha} r_{,n} + \frac{1}{r}\tilde{D}^{(1)} \left( n_\alpha - r_{,\alpha} r_{,n} \right) \right] \right\}, \\
P_{\alpha 3} &= \frac{(1-\nu)}{4\pi a_1 s_1 s_4 (z_2-\lambda)} \lambda^2 \sum_{n=1}^{4} C_n \left\{ \left( \tilde{A}^{(0)} - \frac{1}{r}\tilde{B}^{(1)} - \frac{s_1}{r}\tilde{C}^{(1)} \right) n_\alpha + \right. \\
&\left. - \left[ \tilde{B}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{B}^{(1)} + s_1 \left( \tilde{C}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{C}^{(1)} \right) \right] r_{,\alpha} r_{,n} \right\}, \\
P_{\alpha 4} &= \frac{s_2 G_k}{2\pi D a_1 s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left[ \tilde{D}^{(2)} r_{,n} r_{,\alpha} + \frac{1}{r}\tilde{D}^{(1)} \left( n_\alpha - r_{,n} r_{,\alpha} \right) \right], \\
P_{33} &= \frac{(1-\nu)\lambda^2 r_{,n}}{4\pi a_1 s_1 s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left( s_1 \tilde{C}^{(1)} + \tilde{E}^{(1)} \right), \\
P_{34} &= \frac{G_k r_{,n}}{2\pi D a_1 s_1 s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \tilde{F}^{(1)}, \\
P_{43} &= \frac{(1-\nu)\lambda^2 r_{,n}}{4\pi a_1 s_1 s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left( s_1 s_2 \tilde{D}^{(1)} + \tilde{F}^{(1)} \right), \\
P_{44} &= \frac{G_k r_{,n}}{2\pi D a_1 s_1 s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \tilde{G}^{(1)},
\end{aligned}
\tag{8.35}
$$

onde $r_{,n} = r_{,i} n_i$.

## 8.2 Equações integrais

As equações diferenciais parciais acopladas podem ser transformadas em equações integrais aproximadas em termos de deslocamentos e esforços em pontos do domínio por meio do método dos resíduos ponderados (MRP) ou ainda pelo teorema de reciprocidade

de Betti. No caso do MRP, para distribuir o erro produzido, as equações de equilíbrio no domínio serão ponderadas por funções-peso tomadas como sendo as soluções fundamentais do problema: considerando a fonte concentrada em força e momento fletor na placa; e fonte concentrada na camada de cisalhamento.

### 8.2.1 Equações integrais para pontos no domínio

Por meio do MRP, as equações diferenciais parciais eqs.(6.67) serão transformadas em equações integrais, onde o erro será distribuído da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{3\alpha} + m_{\alpha} \right) u_{\alpha}^{*} + \left( Q_{3\alpha,\alpha} + g - p_1 \right) u_{3}^{*} + \left( p_1 - p_2 \right) v^{*} \right] d\Omega = \\ \int_{\Gamma_u} \left( \overline{u}_j - u_j \right) p_j^{*g} d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} \left( p_j - \overline{p}_j \right) u_j^{*g} d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} \left( \overline{v} - v \right) p_4^{*g} d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} \left( p_4 - \overline{p}_4 \right) v^{*g} d\Gamma_p, \tag{8.36}$$

onde $p_1$ e $p_2$ são as reações da camada elástica de Kerr, $u_j^{*}$ é a solução fundamental genérica em deslocamentos na placa e $v^{*}$ é a solução fundamental em deslocamento na camada de cisalhamento, ambas na superfície média da placa. Importante notar ainda que $\Omega$ corresponde ao domínio do problema real, $\Gamma_p$ é a parte do contorno sobre a qual são prescritas as forças de superfície generalizadas e $\Gamma_u$ a parte do contorno sobre a qual são prescritos os deslocamentos generalizados, sendo o contorno total $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p$.

Resolvendo inicialmente para ativação das fontes na placa, figura 8.1 (a), escreve-se a seguinte integral de domínio

$$\int_{\Omega} \left[ \left( M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{3\alpha} + m_{\alpha} \right) u_{\alpha}^{*g} + \left( Q_{3\alpha,\alpha} + g - c\left( u_3 - v \right) \right) u_{3}^{*g} + \right. \\ \left. + \left( c\left( u_3 - v \right) - kv + T_{3\alpha,\alpha} \right) v^{*g} \right] d\Omega = \int_{\Gamma_u} \left( \overline{u}_j - u_j \right) p_j^{*g} d\Gamma_u + \\ + \int_{\Gamma_p} \left( p_j - \overline{p}_j \right) u_j^{*g} d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} \left( \overline{v} - v \right) p_4^{*g} d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} \left( p_4 - \overline{p}_4 \right) v^{*g} d\Gamma_p. \tag{8.37}$$

Integrando-se a eq.(8.37) por partes, chega-se a:

$$\int_{\Gamma} \left( M_{\alpha\beta} \eta_{\beta} u_{\alpha}^{*g} + Q_{3\alpha} \eta_{\alpha} u_{3}^{*g} + T_{3\alpha} \eta_{\alpha} v^{*g} \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left( M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^{*g} + Q_{3\alpha} u_{3,\alpha}^{*g} + T_{3\alpha} v_{,\alpha}^{*g} \right) d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \left[ \left( -Q_{3\alpha} + m_{\alpha} \right) u_{\alpha}^{*g} + \left( g - c\left( u_3 - v \right) \right) u_{3}^{*g} + \left( c\left( u3 - v \right) - kv \right) v^{*g} \right] d\Omega = \\ \int_{\Gamma_u} \left( \overline{u}_j - u_j \right) p_j^{*g} d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} \left( p_j - \overline{p}_j \right) u_j^{*g} d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} \left( \overline{v} - v \right) p_4^{*g} d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} \left( p_4 - \overline{p}_4 \right) v^{*g} d\Gamma_p, \tag{8.38}$$

onde $\eta_\alpha$ representa o cosseno diretor da normal no contorno com o eixo $x_\alpha$. Substituindo os deslocamentos generalizados, eqs.(6.62), a equação integral passa então a ser dada por:

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma \left(p_j u_j^{*g} + p_4 v^{*g}\right) d\Gamma - \int_\Omega \left(M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^{*g} + Q_{3\alpha} u_{3,\alpha}^{*g} + T_{3\alpha} v_{,\alpha}^{*g}\right) d\Omega + \\
&+ \int_\Omega \left[\left(-Q_{3\alpha} + m_\alpha\right) u_\alpha^{*g} + \left(g - c\left(u_3 - v\right)\right) u_3^{*g} + \left(c\left(u3 - v\right) - kv\right) v^{*g}\right] d\Omega = \\
&\int_{\Gamma_u} \left(\overline{u}_j - u_j\right) p_j^{*g} d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} \left(p_j - \overline{p}_j\right) u_j^{*g} d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} \left(\overline{v} - v\right) p_4^{*g} d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} \left(p_4 - \overline{p}_4\right) v^{*g} d\Gamma_p,
\end{aligned} \tag{8.39}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
&- \int_\Omega \left(M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^{*g} + Q_{3\alpha} u_{3,\alpha}^{*g} + T_{3\alpha} v_{,\alpha}^{*g}\right) d\Omega + \\
&+ \int_\Omega \left[\left(-Q_{3\alpha} + m_\alpha\right) u_\alpha^{*g} + \left(g - c\left(u_3 - v\right)\right) u_3^{*g} + \left(c\left(u3 - v\right) - kv\right) v^{*g}\right] d\Omega = \\
&- \int_{\Gamma_u} \left(p_j u_j^{*g} + p_4 v^{*g}\right) d\Gamma_u + \\
&+ \int_{\Gamma_u} \left(\overline{u}_j - u_j\right) p_j^{*g} d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} \overline{p}_j u_j^{*g} d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} \left(\overline{v} - v\right) p_4^{*g} d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} \overline{p}_4 v^{*g} d\Gamma_p.
\end{aligned} \tag{8.40}$$

As relações recíprocas entre momentos e curvaturas dos problemas real e fundamental podem ser estabelecidas como:

$$M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^{*g} = D\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\left(u_{\alpha,\beta} u_{\alpha,\beta}^{*g} + u_{\beta,\alpha} u_{\beta,\alpha}^{*g} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} u_{\beta,\beta}^{*g}\right) = M_{\alpha\beta}^{*g} u_{\alpha,\beta}. \tag{8.41}$$

Da mesma forma, as relações para os esforços cortantes serão dadas por:

$$Q_{3\alpha}\left(u_\alpha^{*g} + u_{3,\alpha}^{*g}\right) = D\frac{1-\nu}{2}\lambda^2\left(u_\alpha + u_{3,\alpha}\right)\left(u_\alpha^{*g} + u_{3,\alpha}^{*g}\right) = Q_{3\alpha}^{*g}\left(u_\alpha + u_{3,\alpha}\right) \tag{8.42}$$

$$T_{3\alpha} v_{,\alpha}^{*g} = Gsv_{,\alpha} v_{,\alpha}^{*g} = T_{3\alpha}^{*g} v_{,\alpha} \tag{8.43}$$

Dessa forma, a eqaução integral, eq.(8.40), passa a ser dada por:

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega}\left(M_{\alpha\beta}^{*g}u_{\alpha,\beta}+Q_{3\alpha}^{*g}\left(u_{\alpha}+u_{3,\alpha}\right)+T_{3\alpha}^{*g}v_{,\alpha}\right)d\Omega+\\
&+\int_{\Omega}\left[m_{\alpha}u_{\alpha}^{*g}+gu_{3}^{*g}-c\left(u_{3}-v\right)u_{3}^{*g}+c\left(u_{3}-v\right)v^{*g}-kvv^{*g}\right]d\Omega=\\
&-\int_{\Gamma_u}\left(p_{j}u_{j}^{*g}+p_{4}v^{*g}\right)d\Gamma_{u}+\\
&+\int_{\Gamma_u}\left(\overline{u}_{j}-u_{j}\right)p_{j}^{*g}d\Gamma_{u}-\int_{\Gamma_p}\overline{p}_{j}u_{j}^{*g}d\Gamma_{p}+\int_{\Gamma_u}\left(\overline{v}-v\right)p_{4}^{*g}d\Gamma_{u}-\int_{\Gamma_p}\overline{p}_{4}v^{*g}d\Gamma_{p}
\end{aligned}
\tag{8.44}
$$

Integrando novamente por partes e considerando os esforços generalizados fundamentais, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Gamma}\left(p_{\alpha}^{*g}u_{\alpha}+p_{3}^{*g}u_{3}+p_{4}^{*g}v\right)d\Gamma+\\
&+\int_{\Omega}\left(M_{\alpha\beta,\beta}^{*g}u_{\alpha}+Q_{3\alpha}^{*g}u_{\alpha}+Q_{3\alpha,\alpha}^{*g}u_{3}+T_{3\alpha,\alpha}^{*g}v\right)d\Omega+\\
&+\int_{\Omega}\left[m_{\alpha}u_{\alpha}^{*g}+gu_{3}^{*g}-c\left(u_{3}-v\right)u_{3}^{*g}+c\left(u_{3}-v\right)v^{*g}-kvv^{*g}\right]d\Omega=\\
&-\int_{\Gamma_u}\left(p_{j}u_{j}^{*g}+p_{4}v^{*g}\right)d\Gamma_{u}+\\
&+\int_{\Gamma_u}\left(\overline{u}_{j}-u_{j}\right)p_{j}^{*g}d\Gamma_{u}-\int_{\Gamma_p}\overline{p}_{j}u_{j}^{*g}d\Gamma_{p}+\int_{\Gamma_u}\left(\overline{v}-v\right)p_{4}^{*g}d\Gamma_{u}-\int_{\Gamma_p}\overline{p}_{4}v^{*g}d\Gamma_{p}
\end{aligned}
\tag{8.45}
$$

ou ainda

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\Omega}\left(M_{\alpha\beta,\beta}^{*g}u_{\alpha}+Q_{3\alpha}^{*g}u_{\alpha}+Q_{3\alpha,\alpha}^{*g}u_{3}+T_{3\alpha,\alpha}^{*g}v\right)d\Omega+\\
&+\int_{\Omega}\left[m_{\alpha}u_{\alpha}^{*g}+gu_{3}^{*g}-c\left(u_{3}-v\right)u_{3}^{*g}+c\left(u_{3}-v\right)v^{*g}-kvv^{*g}\right]d\Omega=\\
&-\int_{\Gamma_u}\left(p_{j}u_{j}^{*g}+p_{4}v^{*g}\right)d\Gamma_{u}+\int_{\Gamma_p}\left(p_{j}^{*g}u_{j}+p_{4}^{*g}v\right)d\Gamma_{p}+\\
&+\int_{\Gamma_u}\overline{u}_{j}p_{j}^{*g}d\Gamma_{u}-\int_{\Gamma_p}\overline{p}_{j}u_{j}^{*g}d\Gamma_{p}+\int_{\Gamma_u}\overline{v}p_{4}^{*g}d\Gamma_{u}-\int_{\Gamma_p}\overline{p}_{4}v^{*g}d\Gamma_{p}
\end{aligned}
\tag{8.46}
$$

Reagrupando os termos dentro da integral de domínio, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\Omega}\left(M^{*g}_{\alpha\beta,\beta}u_{\alpha}+Q^{*g}_{3\alpha}u_{\alpha}\right)d\Omega+\int_{\Omega}\left[Q^{*g}_{3\alpha,\alpha}u_{3}-c\left(u^{*g}_{3}-v^{*g}\right)u_{3}\right]d\Omega+\\
&+\int_{\Omega}\left[c\left(u^{*g}_{3}-v^{*g}\right)v-kv^{*g}v+T^{*g}_{3\alpha,\alpha}v\right]d\Omega+\int_{\Omega}\left(m_{\alpha}u^{*g}_{\alpha}+gu^{*g}_{3}\right)d\Omega=\\
&-\int_{\Gamma_{u}}\left(p_{j}u^{*g}_{j}+p_{4}v^{*g}\right)d\Gamma_{u}+\int_{\Gamma_{p}}\left(p^{*g}_{j}u_{j}+p^{*g}_{4}v\right)d\Gamma_{p}+\\
&+\int_{\Gamma_{u}}\overline{u}_{j}p^{*g}_{j}d\Gamma_{u}-\int_{\Gamma_{p}}\overline{p}_{j}u^{*g}_{j}d\Gamma_{p}+\int_{\Gamma_{u}}\overline{v}p^{*g}_{4}d\Gamma_{u}-\int_{\Gamma_{p}}\overline{p}_{4}v^{*g}d\Gamma_{p}
\end{aligned}
\tag{8.47}
$$

Considerando as soluções fundamentais representadas pela fonte concentrada aplicada no ponto fonte $(q)$ na placa, as seguintes relações são aplicadas nos termos das integrais de domínio

$$
\int_{\Omega}b^{*g}_{ij,j}\left(p,q\right)u_{i}\left(p\right)d\Omega=-\int_{\Omega}\delta\left(p,q\right)u_{i}\left(p\right)d\Omega=-u_{i}\left(q\right)
\tag{8.48}
$$

$$
\int_{\Omega}\left(c\left(u^{*g}_{3}-v^{*g}\right)-kv^{*g}+T^{*g}_{3\alpha,\alpha}\right)vd\Omega=0
\tag{8.49}
$$

Portanto, substituindo as eqs. (8.48) e (8.49) na equação integral eq. (8.47) chega-se a:

$$
\begin{aligned}
&-u_{i}\left(q\right)+\int_{\Omega}\left(m_{\alpha}u^{*g}_{\alpha}+gu^{*g}_{3}\right)d\Omega=\\
&-\int_{\Gamma_{u}}\left(p_{j}u^{*g}_{j}+p_{4}v^{*g}\right)d\Gamma_{u}+\int_{\Gamma_{p}}\left(p^{*g}_{j}u_{j}+p^{*g}_{4}v\right)d\Gamma_{p}+\\
&+\int_{\Gamma_{u}}\overline{u}_{j}p^{*g}_{j}d\Gamma_{u}-\int_{\Gamma_{p}}\overline{p}_{j}u^{*g}_{j}d\Gamma_{p}+\int_{\Gamma_{u}}\overline{v}p^{*g}_{4}d\Gamma_{u}-\int_{\Gamma_{p}}\overline{p}_{4}v^{*g}d\Gamma_{p}
\end{aligned}
\tag{8.50}
$$

Após algumas manipulações matemáticas, obtém-se a partir da eq.(8.50) a primeira equação integral para determinação dos deslocamentos transversais e rotações no domínio da placa:

$$
\begin{aligned}
&u_{i}\left(q\right)+\int_{\Gamma}\left(p^{*}_{ij}\left(p,q\right)u_{j}\left(p\right)+p^{*}_{i4}\left(p,q\right)v\left(p\right)\right)d\Gamma=\\
&\int_{\Gamma}\left(p_{j}\left(p\right)u^{*}_{ij}\left(p,q\right)+p_{4}\left(p\right)v^{*}_{i}\left(p,q\right)\right)d\Gamma+\\
&+\int_{\Omega}\left(m_{\alpha}u^{*}_{i\alpha}\left(p,q\right)+gu^{*}_{i3}\left(p,q\right)\right)d\Omega
\end{aligned}
\tag{8.51}
$$

O mesmo procedimento deve ser feito para obter a equação integral em termos de deslocamento na camada cisalhante. Dessa forma, resolvendo inicialmente para ativação

das fontes na camada, figura 8.1 (b), escreve-se:

$$\int_{\Omega}\left[\left(M_{\alpha\beta,\beta}-Q_{3\alpha}+m_{\alpha}\right)u_{\alpha}^{*k}+\left(Q_{3\alpha,\alpha}+g-c\left(u_{3}-v\right)\right)u_{3}^{*k}+\right.$$
$$\left.+\left(c\left(u_{3}-v\right)-kv+T_{3\alpha,\alpha}\right)v^{*k}\right]d\Omega=\int_{\Gamma_{u}}\left(\overline{u}_{j}-u_{j}\right)p_{j}^{*k}d\Gamma_{u}+$$
$$+\int_{\Gamma_{p}}\left(p_{j}-\overline{p}_{j}\right)u_{j}^{*k}d\Gamma_{p}+\int_{\Gamma_{u}}\left(\overline{v}-v\right)p_{4}^{*k}d\Gamma_{u}+\int_{\Gamma_{p}}\left(p_{4}-\overline{p}_{4}\right)v^{*k}d\Gamma_{p}\qquad(8.52)$$

Fazendo as devidas integrações e manipulações matemáticas, chega-se a:

$$v\left(q\right)+\int_{\Gamma}\left(p_{ij}^{*k}\left(p,q\right)u_{j}\left(p\right)+p_{44}^{*k}\left(p,q\right)v\left(p\right)\right)d\Gamma=$$
$$\int_{\Gamma}\left(u_{ij}^{*k}\left(p,q\right)p_{j}\left(p\right)+v^{*k}\left(p,q\right)\right)p_{4}\left(p\right)d\Gamma+$$
$$+\int_{\Omega_{g}}\left(m_{\alpha}u_{\alpha}^{*k}\left(p,q\right)+gu_{3}^{*k}\left(p,q\right)\right)d\Omega_{g}\qquad(8.53)$$

Considere agora que os índices $i,j=1,...,4$. Podem-se agrupar as equações integrais (8.51) e (8.53) em uma única equação:

$$u_{i}\left(q\right)+\int_{\Gamma}p_{ij}^{*}\left(p,q\right)u_{j}\left(p\right)d\Gamma=\int_{\Gamma}u_{ij}^{*}\left(p,q\right)p_{j}\left(p\right)d\Gamma+$$
$$+\int_{\Omega}\left(m_{\alpha}u_{i\alpha}^{*}\left(p,q\right)+gu_{i3}^{*}\left(p,q\right)\right)d\Omega,\qquad(8.54)$$

onde $u_4=v$.

### 8.2.2 Equações integrais para esforços no domínio

A determinação dos esforços em pontos internos à placa é de suma importância na análise e dimensionamento do elemento estrutural. A obtenção de uma expressão integral para o cálculo dos esforços internos é interessante do ponto de vista de precisão, evitando derivá-los numericamente, procedimento usual no MDF e MEF.

A obtenção da equação integral em termos de momentos no domínio se dará por meio da eq.(8.54), com auxílio da expressão dos momentos eq.(6.28), onde a expressão integral dos deslocamentos no domínio e suas derivadas em relação ao ponto fonte $q$ são substituídas nas relações esforço/deslocamento. Note que a relação entre as derivadas no ponto fonte e no ponto campo é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}(q)}=-\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}(p)}.\qquad(8.55)$$

Assim, escreve-se a equação integral para determinação dos momentos fletores e volvente em pontos internos à placa:

$$M_{\alpha\beta}(q) = D\frac{1-\nu}{2}\left\{-\int_\Gamma\left[P^*_{\alpha j,\beta}(p,q)+P^*_{\beta j,\alpha}(p,q)+\frac{2\nu}{1-\nu}P^*_{\theta j,\theta}(p,q)\,\delta_{\alpha,\beta}\right]u_j(p)\,d\Gamma+\right.$$
$$+\int_\Gamma\left[U^*_{\alpha j,\beta}(p,q)+U^*_{\beta j,\alpha}(p,q)+\frac{2\nu}{1-\nu}U^*_{\theta j,\theta}(p,q)\,\delta_{\alpha,\beta}\right]p_j(p)\,d\Gamma+$$
$$\left.-\int_\Omega g\left[U^*_{\alpha 3,\beta}(p,q)+U^*_{\beta 3,\alpha}(p,q)+\frac{2\nu}{1-\nu}U^*_{\theta 3,\theta}(p,q)\,\delta_{\alpha,\beta}\right]d\Omega\right\}, \tag{8.56}$$

ou ainda

$$M_{\alpha\beta}(q) = -\int_\Gamma P^*_{\alpha\beta j}(p,q)\,u_j(p)\,d\Gamma+\int_\Gamma U^*_{\alpha\beta j}(p,q)\,p_j(p)\,d\Gamma-\int_\Omega gU^*_{\alpha\beta 3}(p,q)\,d\Omega. \tag{8.57}$$

sendo

$$P^*_{\alpha\beta j} = D\frac{1-\nu}{2}\left[P^*_{\alpha j,\beta}+P^*_{\beta j,\alpha}+\frac{2\nu}{1-\nu}P^*_{\theta j,\theta}\delta_{\alpha,\beta}\right], \tag{8.58}$$

$$U^*_{\alpha\beta j} = D\frac{1-\nu}{2}\left[U^*_{\alpha j,\beta}+U^*_{\beta j,\alpha}+\frac{2\nu}{1-\nu}U^*_{\theta j,\theta}\delta_{\alpha,\beta}\right]. \tag{8.59}$$

As derivadas da solução fundamental em deslocamentos, eqs.(8.21), no ponto fonte são dadas por:

$$U_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{-1}{2\pi Da_1s_1s_4(z_2-\lambda)}\left[\tilde{A}^{(1)}\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}-\left(\tilde{B}^{(3)}-\frac{3}{r}\tilde{B}^{(2)}+\frac{3}{r^2}\tilde{B}^{(1)}\right)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}+\right.$$
$$\left.-\frac{1}{r}\left(\tilde{B}^{(2)}-\frac{1}{r}\tilde{B}^{(1)}\right)\right](\delta_{\alpha\gamma}r_{,\beta}+\delta_{\beta\gamma}r_{,\alpha}+\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}), \tag{8.60}$$

$$U_{\alpha 3,\gamma} = \frac{1}{2\pi Da_1s_4(z_2-\lambda)}\left[\left(\tilde{C}^{(2)}-\frac{1}{r}\tilde{C}^{(1)}\right)r_{,\alpha}r_{,\gamma}+\frac{1}{r}\tilde{C}^{(1)}\delta_{\alpha\gamma}\right], \tag{8.61}$$

$$U_{\alpha 4,\gamma} = \frac{s_2}{2\pi Da_1s_4(z_2-\lambda)}\left[\left(\tilde{D}^{(2)}-\frac{1}{r}\tilde{D}^{(1)}\right)r_{,\alpha}r_{,\gamma}+\frac{1}{r}\tilde{D}^{(1)}\delta_{\alpha\gamma}\right]. \tag{8.62}$$

As derivadas das soluções fundamentais em termos de esforços, eqs.(8.35), no ponto

fonte são dadas por:

$$P^*_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial}{\partial x_\gamma} P^*_{\alpha\beta} = -\frac{(1-\nu)}{4\pi a_1 s_1 s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left\{ \frac{2\nu}{(1-\nu)} \left\{ \left[ \tilde{A}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{A}^{(1)} - \tilde{B}^{(4)} + \right.\right.\right.$$
$$\left. + \frac{3}{r^2}\left(\tilde{B}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{B}^{(1)}\right)\right] r_{,\beta} r_{,\gamma} n_\alpha + \frac{1}{r}\left[\tilde{A}^{(1)} - \tilde{B}^{(3)} - \frac{1}{r}\left(\tilde{B}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{B}^{(1)}\right)\right] n_\alpha \delta_{\beta\gamma} \Bigg\} +$$
$$+ \left(\tilde{A}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{A}^{(1)}\right)\left(r_{,\alpha} n_\beta + r_{,n}\delta_{\alpha\beta}\right) r_\gamma + \frac{1}{r}\tilde{A}^{(1)}\left(\delta_{\alpha\gamma}\eta_\beta + \eta_\gamma \delta_{\alpha\beta}\right) +$$
$$- \frac{2}{r}\left(\tilde{B}^{(3)} - \frac{3}{r}\tilde{B}^{(2)} + \frac{3}{r}\tilde{B}^{(1)}\right)\left(r_{,\beta} r_{,\gamma} n_\alpha + r_{,\gamma} r_{,n}\delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} n_\beta + r_{,\alpha} r_{,\beta}\eta_\gamma + \right.$$
$$\left. + r_{,\beta} r_{,n}\delta_{\alpha\gamma} + r_{,\alpha} r_{,n}\delta_{\beta\gamma}\right) - \frac{2}{r^2}\left(\tilde{B}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{B}^{(1)}\right)\left(\delta_{\beta\gamma}\eta_\alpha + \delta_{\alpha\beta}\eta_\gamma + \delta_{\alpha\gamma}\eta_\beta\right) +$$
$$\left. - 2\left(\tilde{B}^{(4)} - \frac{6}{r}\tilde{B}^{(3)} + \frac{15}{r^2}\tilde{B}^{(2)} - \frac{15}{r^3}\tilde{B}^{(1)}\right) r_{,n} r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right\}, \tag{8.63}$$

$$P_{\alpha 3,\gamma} = -\frac{(1-\nu)}{4\pi a_1 s_1 s_4 (z_2-\lambda)} \lambda^2 \sum_{n=1}^{4} C_n \left\{ \left(\tilde{A}^{(1)} - \frac{1}{r}\tilde{B}^{(2)} + \frac{1}{r^2}\tilde{B}^{(1)} - \frac{s_1}{r}\tilde{C}^{(2)} + \frac{s_1}{r^2}\tilde{C}^{(1)}\right) r_{,\gamma} n_\alpha + \right.$$
$$- \left[\tilde{B}^{(3)} - \frac{3}{r}\tilde{B}^{(2)} + \frac{3}{r^2}\tilde{B}^{(1)} + s_1\left(\tilde{C}^{(3)} - \frac{3}{r}\tilde{C}^{(2)} + \frac{3}{r^2}\tilde{C}^{(1)}\right)\right] r_{,\alpha} r_{,n} r_{,\gamma} +$$
$$\left. - \frac{1}{r}\left[\tilde{B}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{B}^{(1)} + s_1\left(\tilde{C}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{C}^{(1)}\right)\right]\left(r_{,\alpha}\eta_\gamma + \delta_{\alpha,\gamma} r_{,n}\right) \right\}, \tag{8.64}$$

$$P_{\alpha 4,\gamma} = -\frac{s_2 G_k}{2\pi D a_1 s_4 (z_2-\lambda)} \sum_{n=1}^{4} C_n \left[ \left(\tilde{D}^{(3)} - \frac{3}{r}\tilde{D}^{(2)} + \frac{3}{r^2}\tilde{D}^{(1)}\right) r_{,n} r_{,\alpha} r_{,\gamma} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\left(\tilde{D}^{(2)} - \frac{1}{r}\tilde{D}^{(1)}\right)\left(r_{,\alpha}\eta_\gamma + n_\alpha r_{,\gamma} + \delta_{\alpha,\gamma} r_{,n}\right) \right]. \tag{8.65}$$

### 8.2.3 Transformação das equações integrais de domínio

Buscando uma formulação unicamente no contorno, parte-se agora para a transformação das equações integrais do carregamento definidas no domínio para o contorno. Na seção 7.2.3 foi discutido sobre o processo de transformação das integrais de domínio.

Para um carregamento uniformemente distribuído $g(r) = g_0$, com $g_0$ sendo a intensidade da caga no ponto $q$, sobre uma região $\Omega_g$, define-se a equação integral do carregamento sobre o contorno pela seguinte expressão:

$$\int_{\Omega_g} g(r) w^* d\Omega_g = g_0 \int_{\Gamma_g} \chi^*(r) r_{,n} d\Gamma_g - TL, \tag{8.66}$$

sendo

$$\chi^*(r) = \frac{F^*(r)}{r} = \frac{1}{r}\int u^* r dr, \tag{8.67}$$

obtido segundo a correspondente solução fundamental $u^*$, e $TL$ os termos livres de carregamento dados por:

$$TL = g_0 \lim_{\xi \to 0} \int_0^\theta F^* (\xi) d\theta. \tag{8.68}$$

Da Figura 7.3, estabelece-se as seguintes relações:

$$d\Omega_g = r dr d\theta, \tag{8.69}$$

$$d\theta = \frac{r_{,i} n_i}{R} d\Gamma_g \tag{8.70}$$

Dessa forma, substituindo o primeiro grupo de soluções fundamentais (8.12) na eq.(8.67), obtém-se as soluções fundamentais do carregamento:

$$\begin{aligned}
\chi_\alpha &= \alpha_0 \frac{r_{,\alpha} s_1}{r} \sum_{n=1}^{4} \frac{\alpha_{1_n}}{\sqrt{z_n}} \psi_k \left( r\sqrt{z_n} \right), \\
\chi_3 &= \alpha_0 \sum_{n=1}^{4} \frac{\beta_{1_n}}{\sqrt{z_n}} K_1 \left( r\sqrt{z_n} \right), \\
\chi_4 &= \alpha_0 s_2 \sum_{n=1}^{4} \frac{\gamma_{1_n}}{\sqrt{z_n}} K_1 \left( r\sqrt{z_n} \right),
\end{aligned} \tag{8.71}$$

onde $\alpha_0 = \frac{1}{2\pi D a_1 s_1 s_4}$, $\alpha_{1_n} = C_n \left( s_1 - a_1 z_n \right) \left( s_2 + s_3 - s_4 z_n \right)$, $\beta_{1_n} = C_n \alpha_{1_n} \left( s_1 - z_n \right)$, $\gamma_{1_n} = C_n . \left( s_1 - z_n \right) \left( s_1 - a_1 z_n \right)$

Por sua vez, substituindo a eq.(8.12) na eq.(8.68) obtém-se as expressões para o cálculo dos termos livres de carregamento:

$$TL_\alpha = g_0 \lim_{\xi \to 0} \int_0^\theta \alpha_0 r_{,\alpha} s_1 \sum_{n=1}^{4} \frac{\alpha_{1_n}}{\sqrt{z_n}} \psi_k \left( \xi\sqrt{z_n} \right) d\theta, \tag{8.72}$$

$$TL_3 = g_0 \lim_{\xi \to 0} \int_0^\theta \alpha_0 \sum_{n=1}^{4} \frac{\beta_{1_n}}{\sqrt{z_n}} \xi K_1 \left( \xi\sqrt{z_n} \right) d\theta,$$

$$TL_4 = g_0 \lim_{\xi \to 0} \int_0^\theta \alpha_0 s_2 \sum_{n=1}^{4} \frac{\gamma_{1_n}}{\sqrt{z_n}} \xi K_1 \left( \xi\sqrt{z_n} \right) d\theta, \tag{8.73}$$

onde, após o cálculo dos limites, resulta em:

$$TL_1 = 0, \tag{8.74}$$

$$TL_2 = 0, \tag{8.75}$$

$$TL_3 = g_0\alpha_0 \int_0^\theta \sum_{n=1}^{4} \frac{\beta_{1_n}}{z_n} d\theta = g_0\alpha_0\theta \sum_{n=1}^{4} \frac{\beta_{1_n}}{z_n},$$

$$TL_4 = g_0\alpha_0 \int_0^\theta s_2 \sum_{n=1}^{4} \frac{\gamma_{1_n}}{z_n} d\theta = g_0\alpha_0 s_2\theta \sum_{n=1}^{4} \frac{\gamma_{1_n}}{z_n}, \tag{8.76}$$

sendo

$$\theta = \begin{cases} 2\pi, \text{ se } q \in \Omega, \\ \pi, \text{ se } q \in \Gamma \text{ (contorno suave)}, \\ 0, \text{ se } q \notin \Omega \cup \gamma \end{cases} \tag{8.77}$$

Procedimento análogo deve ser tomado para obter as soluções fundamentais dos casos II e III.

Para o caso II, tem-se:

$$\chi_\alpha = \alpha_0 \frac{r_{,\alpha} s_1}{r} \left\{ \sum_{n=1}^{3} \frac{\alpha_{1_n}}{\sqrt{z_n}} \psi_k\left(r\sqrt{z_n}\right) + \frac{\alpha_{1_3}}{\sqrt{z_3}} \left[ r^2 K_1\left(r\sqrt{z_3}\right) - \frac{1}{z_4} \psi_k\left(r\sqrt{z_3}\right) \right] \right\},$$

$$\chi_3 = \alpha_0 \left\{ \sum_{n=1}^{3} \frac{\beta_{1_n}}{\sqrt{z_n}} K_1\left(r\sqrt{z_n}\right) - \frac{\beta_{1_3}}{\sqrt{z_3}} \left[ \frac{r^2}{\sqrt{z_3}} K_0\left(r\sqrt{z_3}\right) + \frac{2r}{z_3} K_1\left(r\sqrt{z_3}\right) \right] \right\},$$

$$\chi_4 = \alpha_0 s_2 \left\{ \sum_{n=1}^{3} \frac{\gamma_{1_n}}{\sqrt{z_n}} K_1\left(r\sqrt{z_n}\right) - \frac{\gamma_{1_3}}{\sqrt{z_3}} \left[ \frac{r^2}{\sqrt{z_3}} K_0\left(r\sqrt{z_3}\right) + \frac{2r}{z_3} K_1\left(r\sqrt{z_3}\right) \right] \right\}, \tag{8.78}$$

do qual os termos livres de carregamento serão dados por:

$$TL_1 = 0, \tag{8.79}$$

$$TL_2 = 0, \tag{8.80}$$

$$TL_3 = g_0\alpha_0 \int_0^\theta \sum_{n=1}^{3} \frac{\beta_{1_n}}{z_n} d\theta = g_0\alpha_0\theta \sum_{n=1}^{3} \frac{\beta_{1_n}}{z_n},$$

$$TL_4 = g_0\alpha_0 s_2 \int_0^\theta \sum_{n=1}^{3} \frac{\gamma_{1_n}}{z_n} d\theta = g_0\alpha_0 s_2\theta \sum_{n=1}^{3} \frac{\gamma_{1_n}}{z_n}. \tag{8.81}$$

Para o grupo de soluções fundamentais III, tem-se:

$$\chi_\alpha = \alpha_0 \frac{r_{,\alpha} s_1}{r}\left[\sum_{n=1}^{2}\frac{\alpha_{1_n}}{\sqrt{z_n}}\psi_k\left(r\sqrt{z_n}\right)+\frac{\alpha_{1_3}}{\sqrt{z_3}}Re\left(\psi_k\left(r\sqrt{z_3}\right)\right)+\frac{\alpha_{1_3}}{\sqrt{z_3}}Im\left(\psi_k\left(r\sqrt{z_3}\right)\right)\right],$$

$$\chi_3 = \alpha_0\left[\sum_{n=1}^{2}\frac{\beta_{1_n}}{\sqrt{z_n}}K_1\left(r\sqrt{z_n}\right)+\frac{\beta_{1_3}}{\sqrt{z_3}}Re\left(K_1\left(r\sqrt{z_3}\right)\right)+\frac{\beta_{1_3}}{\sqrt{z_3}}Im\left(K_1\left(r\sqrt{z_3}\right)\right)\right],$$

$$\chi_4 = \alpha_0 s_2\left[\sum_{n=1}^{2}\frac{\gamma_{1_n}}{\sqrt{z_n}}K_1\left(r\sqrt{z_n}\right)+\frac{\gamma_{1_3}}{\sqrt{z_3}}Re\left(K_1\left(r\sqrt{z_3}\right)\right)+\frac{\gamma_{1_3}}{\sqrt{z_3}}Im\left(K_1\left(r\sqrt{z_n}\right)\right)\right], \quad (8.82)$$

cujos termos livres são dados por:

$$TL_1 = 0, \quad (8.83)$$

$$TL_2 = 0, \quad (8.84)$$

$$TL_3 = g_0\alpha_0\int_0^\theta\sum_{n=1}^{4}\frac{\beta_{1_n}}{z_n}d\theta = g_0\alpha_0\theta\sum_{n=1}^{4}\frac{\beta_{1_n}}{z_n},$$

$$TL_4 = g_0\alpha_0\int_0^\theta s_2\sum_{n=1}^{4}\frac{\gamma_{1_n}}{z_n}d\theta = g_0\alpha_0\theta s_2\sum_{n=1}^{4}\frac{\gamma_{1_n}}{z_n}, \quad (8.85)$$

Da mesma forma, transforma-se as integrais de domínio da eq.(8.57) em equações integrais definidas sobre o contorno do problema segundo a expressão:

$$\int_{\Omega_g} gU^*_{\alpha\beta 3}d\Omega_g = g_0\int_{\Gamma_g}\widehat{\chi}^*(r)r_{,n}d\Gamma_g - \widehat{TL} \quad (8.86)$$

sendo

$$\widehat{\chi}^*\left(r\right) = \frac{1}{r}\int U^*_{\alpha\beta 3}rdr,, \quad (8.87)$$

e $\widehat{TL}$ os termos livres de carregamento dados por:

$$\widehat{TL} = g_0\lim_{\xi\to 0}\int_0^\theta\int U^*_{\alpha\beta 3}rdrd\theta. \quad (8.88)$$

Substituindo as soluções fundamentais dadas pela eq.(8.12) na eq.(8.87), obtém-se:

$$\widehat{\chi}^*_{11} = \widehat{s}\sum_{n=1}^{4}\widehat{c}_n\left[-\left(\sqrt{z_n}K_1(r\sqrt{z_n})+\frac{2}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right)\left(r^2_{,1}+\nu r^2_{,2}\right)+\frac{(1+\nu)}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right],$$
$$\widehat{\chi}^*_{22} = \widehat{s}\sum_{n=1}^{4}\widehat{c}_n\left[-\left(\sqrt{z_n}K_1(r\sqrt{z_n})+\frac{2}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right)\left(r^2_{,2}+\nu r^2_{,1}\right)+\frac{(1+\nu)}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right],$$
$$\widehat{\chi}^*_{12} = -(1-\nu)\,\widehat{s}\sum_{n=1}^{4}\widehat{c}_n\left(\sqrt{z_n}K_1(r\sqrt{z_n})+\frac{1}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right)r_{,1}r_{,2}, \tag{8.89}$$

onde $\widehat{s}=\frac{1}{2\pi s_4(z_2-\lambda)}$, $\widehat{c}_n = C_n\widehat{a}_n$ e $\widehat{a}_n = \left[s_4 z_n^2-(s_2+s_3+\lambda s_4)\,z_n+\lambda\,(s_2+s_3)\right]$ .

Já os termos livres serão dados por:

$$\widehat{TL}_{11} = -g_0\widehat{s}\theta\,(1+\nu)\sum_{n=1}^{4}\widehat{c}_n, \tag{8.90}$$

$$\widehat{TL}_{22} = -g_0\widehat{s}\theta\,(1+\nu)\sum_{n=1}^{4}\widehat{c}_n, \tag{8.91}$$

$$\widehat{TL}_{12} = 0. \tag{8.92}$$

Considerando a eq.(8.13), caso II, chega-se as seguintes expressões:

$$\widehat{\chi}^*_{11} = \widehat{s}\left\{\sum_{n=1}^{3}\widehat{c}_n\left[-\left(\sqrt{z_n}K_1(r\sqrt{z_n})+\frac{2}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right)\left(r^2_{,1}+\nu r^2_{,2}\right)+\frac{(1+\nu)}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right]+\right.$$
$$\left.+\widehat{c}_4\left[-\left(2K_1(r\sqrt{z_4})+r\sqrt{z_4}K_0(r\sqrt{z_4})\right)\left(r^2_{,1}+\nu r^2_{,2}\right)+(1+\nu)\,K_1\left(r\sqrt{z_4}\right)\right]\right\},$$
$$\widehat{\chi}^*_{22} = \widehat{s}\left\{\sum_{n=1}^{3}\widehat{c}_n\left[-\left(\sqrt{z_n}K_1(r\sqrt{z_n})+\frac{2}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right)\left(r^2_{,2}+\nu r^2_{,1}\right)+\frac{(1+\nu)}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right]+\right.$$
$$\left.+\widehat{c}_4\left[-\left(2K_1(r\sqrt{z_4})+r\sqrt{z_4}K_0(r\sqrt{z_4})\right)\left(r^2_{,2}+\nu r^2_{,1}\right)+(1+\nu)\,K_1\left(r\sqrt{z_4}\right)\right]\right\},$$
$$\widehat{\chi}^*_{12} = -(1-\nu)\,\widehat{s}\sum_{n=1}^{4}\widehat{c}_n\left(\sqrt{z_n}K_1(r\sqrt{z_n})+\frac{1}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right)r_{,1}r_{,2}, \tag{8.93}$$

cujos termos livres são dados por:

$$\widehat{TL}_{11} = -g_0\widehat{s}\theta\,(1+\nu)\sum_{n=1}^{4}\widehat{c}_n, \tag{8.94}$$

$$\widehat{TL}_{22} = -g_0\widehat{s}\theta\,(1+\nu)\sum_{n=1}^{4}\widehat{c}_n, \tag{8.95}$$

$$\widehat{TL}_{12} = 0. \tag{8.96}$$

Finalmente, para o caso III, tem-se:

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi}^{*}_{11} &= \widehat{s}\left\{\sum_{n=1}^{2}\widehat{c}_n\left[-\left(\sqrt{z_n}K_1(r\sqrt{z_n})+\frac{2}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right)\left(r_{,1}^2+\nu r_{,2}^2\right)+\frac{(1+\nu)}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right]+\right.\\
&+C_3Re\left\{\widehat{a}_3\left[-\left(\sqrt{z_3}K_1(r\sqrt{z_3})+\frac{2}{r}K_0(r\sqrt{z_3})\right)\left(r_{,1}^2+\nu r_{,2}^2\right)+\frac{(1+\nu)}{r}K_0(r\sqrt{z_3})\right]\right\}+\\
&\left.+C_3Im\left\{\widehat{a}_3\left[-\left(\sqrt{z_3}K_1(r\sqrt{z_3})+\frac{2}{r}K_0(r\sqrt{z_3})\right)\left(r_{,1}^2+\nu r_{,2}^2\right)+\frac{(1+\nu)}{r}K_0(r\sqrt{z_3})\right]\right\}\right\},\\
\widehat{\chi}^{*}_{22} &= \widehat{s}\left\{\sum_{n=1}^{2}\widehat{c}_n\left[-\left(\sqrt{z_n}K_1(r\sqrt{z_n})+\frac{2}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right)\left(r_{,2}^2+\nu r_{,1}^2\right)+\frac{(1+\nu)}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right]+\right.\\
&+C_3Re\left\{\widehat{a}_3\left[-\left(\sqrt{z_3}K_1(r\sqrt{z_3})+\frac{2}{r}K_0(r\sqrt{z_3})\right)\left(r_{,2}^2+\nu r_{,1}^2\right)+\frac{(1+\nu)}{r}K_0(r\sqrt{z_3})\right]\right\}+\\
&\left.+C_3Im\left\{\widehat{a}_3\left[-\left(\sqrt{z_3}K_1(r\sqrt{z_3})+\frac{2}{r}K_0(r\sqrt{z_3})\right)\left(r_{,2}^2+\nu r_{,1}^2\right)+\frac{(1+\nu)}{r}K_0(r\sqrt{z_3})\right]\right\}\right\},\\
\widehat{\chi}^{*}_{12} &= -(1-\nu)\,\widehat{s}\left\{\sum_{n=1}^{2}\widehat{c}_n\left(\sqrt{z_n}K_1(r\sqrt{z_n})+\frac{1}{r}K_0(r\sqrt{z_n})\right)r_{,1}r_{,2}+\right.\\
&+C_3Re\left[\widehat{a}_3\left(\sqrt{z_3}K_1(r\sqrt{z_3})+\frac{1}{r}K_0(r\sqrt{z_3})\right)r_{,1}r_{,2}\right]+\\
&\left.+C_3Im\left[\widehat{a}_3\left(\sqrt{z_3}K_1(r\sqrt{z_3})+\frac{1}{r}K_0(r\sqrt{z_3})\right)r_{,1}r_{,2}\right]\right\},
\end{aligned}\tag{8.97}$$

cujos termos livres são dados por:

$$\widehat{TL}_{11} = -g_0\widehat{s}\theta\,(1+\nu)\left(\sum_{n=1}^{2}\widehat{c}_n + C_3Re\,(\widehat{a}_3) + C_3Im\,(\widehat{a}_3)\right),\tag{8.98}$$

$$\widehat{TL}_{22} = -g_0\widehat{s}\theta\,(1+\nu)\left(\sum_{n=1}^{2}\widehat{c}_n + C_3Re\,(\widehat{a}_3) + C_3Im\,(\widehat{a}_3)\right),\tag{8.99}$$

$$\widehat{TL}_{12} = 0.\tag{8.100}$$

## 8.3 Montagem do sistema algébrico

Nesta seção será apresentado os passos para obtenção do sistema algébrico da estrutura, e consequentemente para solução do problema. Todos os passos (discretização do contorno, funções interpoladoras, resolução do sistema algébrico) são semelhantes aos apresentados na seção 7.3 para placa de Kirchhoff sobre camada elástica de Kerr.

### 8.3.1 Interpolação dos campos físicos

Os campos em deslocamentos e forças de superfície são interpolados por meio das funções lineares dadas pelas eqs.(7.109), sendo expressas por:

$$\{u\} = [\Phi]\,\{U\}_{\Gamma_i}\,, \tag{8.101}$$

$$\{p\} = [\Phi]\,\{P\}_{\Gamma_i}\,, \tag{8.102}$$

onde $\{U\}_{\Gamma_i}$ e $\{P\}_{\Gamma_i}$ são os vetores dos valores nodais dos deslocamentos e forças de superfície, sendo:

$$\{u\} = \left\{ \begin{array}{c} u_\alpha \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \phi_x \\ \phi_y \\ w \\ v \end{array} \right\}, \tag{8.103}$$

$$\{p\} = \left\{ \begin{array}{c} p_\alpha \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} p_x \\ p_y \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \right\}, \tag{8.104}$$

e a matriz das funções interpoladoras dada por:

$$[\Psi] = \left[ \begin{array}{ccccccc} \varphi_1 & 0 & 0 & 0\varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & 0\varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & 0\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & 0\varphi_2 \end{array} \right]. \tag{8.105}$$

### 8.3.2 Equações algébricas

A equação integral de deslocamento, eq.(8.54), quando discretizada em $N_e$ elementos de contorno, e após a aplicação das funções de interpolação e mudança de variável $\Gamma$ para $\xi$, será dada por:

$$C(q)u_i + \sum_{j=1}^{N_e} \int_\xi P^*\Psi|J|d\xi_j\ U_j = \sum_{j=1}^{N_e} \int_\xi U^*\Psi|J|d\xi_j P_j + g_0 \sum_{j=1}^{N_g} \int_{\xi_g} U^*_\chi d\xi_{g_j} + g_{,k} \sum_{j=1}^{N_g} \int_{\xi_g} U^*_\Lambda d\xi_{g_j}, \tag{8.106}$$

onde

$$u_i = \left\{ \begin{array}{c} u_\alpha(q) \\ u_3(q) \\ u_4(q) \end{array} \right\},\ U = \left\{ \begin{array}{c} u_\alpha(p) \\ u_3(p) \\ u_4(p) \end{array} \right\},\ P = \left\{ \begin{array}{c} p_\alpha(p) \\ p_3(p) \\ p_4(p) \end{array} \right\},$$

$$P^* = \left[ \begin{array}{ccc} p^*_{11} & p^*_{13} & p^*_{13} \\ p^*_{21} & p^*_{32} & p^*_{24} \\ p^*_{31} & p^*_{33} & p^*_{34} \end{array} \right],\ U^* = \left[ \begin{array}{ccc} u^*_{\alpha\beta} & u^*_{\alpha 3} & u^*_{\alpha 4} \\ u^*_{3\alpha} & u^*_{33} & u^*_{34} \\ u^*_{4\alpha} & u^*_{43} & u^*_{44} \end{array} \right],$$

$$U^*_g = \left\{ \begin{array}{c} u^{*p}_{\alpha 3} \\ u_{33} \\ u_{43} \end{array} \right\},\ U^*_\chi = \left\{ \begin{array}{c} \chi^*_\alpha r_{,n} \\ \chi^*_2 r_{,n} \\ \chi^*_3 r_{,n} \end{array} \right\},\ U^*_\Lambda = \left\{ \begin{array}{c} \Lambda^*_\alpha r_{,i} r_{,n} \\ \Lambda^*_2 r_{,i} r_{,n} \\ \Lambda^*_3 r_{,i} r_{,n} \end{array} \right\} \tag{8.107}$$

sendo $N_g$ o número de elementos de contorno da região do carregamento distribuído.

A eq.(8.106) pode ser reescrita na forma:

$$C(q)u_i + \sum_{j=1}^{N_e} \widehat{H}_{ij} U_j = \sum_{j=1}^{N_e} G_{ij} P_j + F_i, \tag{8.108}$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{ij} &= \int_\xi P^* \Psi |J| d\xi_j, \\ G_{ij} &= \int_\xi U^* \Psi |J| d\xi_j, \\ F_i &= g_0 \sum_{j=1}^{N_g} \int_{\xi_g} U^*_\chi d\xi_{g_j} + g_{,j} \sum_{j=1}^{N_g} \int_{\xi_g} U^*_\Lambda d\xi_{g_j}. \end{aligned} \tag{8.109}$$

Sendo a eq.(8.108) válida apenas para o nó $i$, faz-se necessário a colocação do ponto fonte para todos os nós de contorno discretizado, obtendo-se o sistema algébrico final da estrutura, escrito na forma compacta como:

$$[C]\{U\} + [H]\{U\} = [G]\{P\} + \{F\}, \tag{8.110}$$

onde $[C]$ é a matriz diagonal que contém os termos livres de contorno, $[H]$ e $[G]$ são as matrizes de influência dos deslocamentos $\{F\}$ e forças $\{P\}$, respectivamente, e $\{F\}$ é o vetor de carregamento.

Note que os valores das variáveis obtidas por meio da equação integral (8.110) estão referidas ao sistema de coordenadas global. Entretanto, em certos problemas o uso de um sistema de coordenadas local é conveniente, como por exemplo em problemas com bordas poligonais esconsas ou ainda com bordas curvas, facilitando tanto a inserção das condições

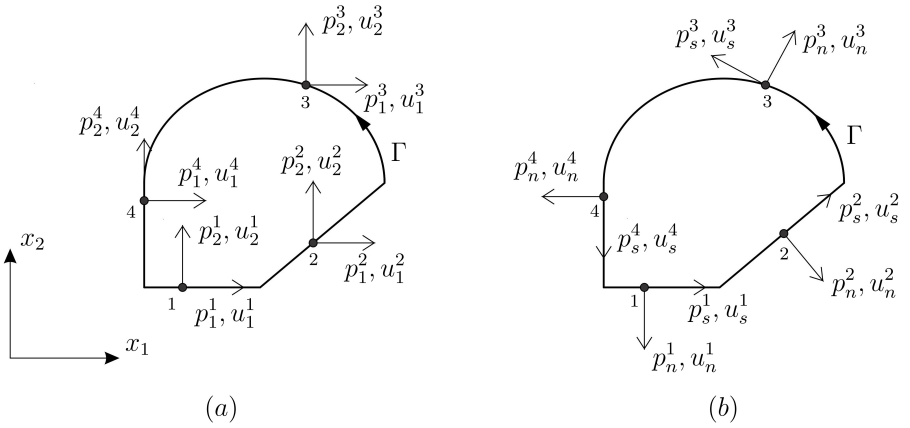



FIGURA 8.2 – Variáveis referidas ao sistema global (a) e local (b) de referência.

de contorno quanto a leitura das respostas. A figura 8.3 apresenta os dois sistemas de coordenadas.

Dessa forma, pode-se relacionar as variáveis do sistema de coordenadas global com o sistema de coordenadas local, referido à direção normal e tangencial do correspondente elemento de contorno, a partir da seguinte expressão:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_n \\ u_s \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} \tag{8.111}$$

Portanto, as coordenadas globais serão transformadas em coordenadas locais segundo:

$$\left\{ \begin{array}{c} \phi_x \\ \phi_y \\ w \\ v \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccc} n_1 & s_1 & 0 & 0 \\ n_2 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \phi_n \\ \phi_s \\ w \\ v \end{array} \right\} \tag{8.112}$$

Assim, dois sistemas locais de coordenadas serão necessários: o primeiro referente ao ponto fonte e o segundo referente ao ponto campo, associado às direções normais e tangenciais do contorno, conforme mostrado na figura 8.3. Finalmente, a eq.(8.110) pode ser escrita em relação ao sistema local:

$$[C]\{U\} + [R_q][H][R_p]\{U\} = [R_q][G][R_p]\{P\} + [R_q]\{F\}, \tag{8.113}$$

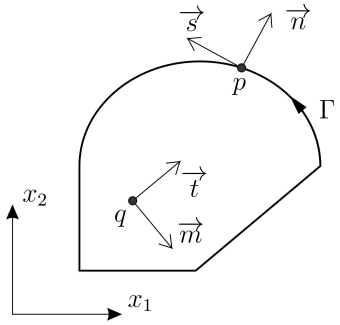



FIGURA 8.3 – Sistema de coordenadas local no ponto fonte e campo.

onde

$$[R_q] = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & 0 & 0 \\ -m_2 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [R_p] = \begin{bmatrix} n_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.114}$$

A equação matricial (8.113) pode ainda ser rearranjada, trocando as colunas das matrizes $[H]$ e $[G]$ para separar as incógnitas em um mesmo vetor $\{X\}$, resultando no sistema de equações :

$$[A]\{X\} = [B], \tag{8.115}$$

onde $[A]$ é a matriz dos coeficientes que multiplicam as incógnitas e $[B]$ formada pela multiplicação da matriz e do vetor onde todas as variáveis são conhecidas.

# Capítulo 9

# Aplicações numéricas

Neste capítulo são apresentadas algumas aplicações numéricas de placas apoiadas em camada elástica de Kerr a fim de validar a formulação do MEC desenvolvida, comparando os resultados obtidos com soluções analíticas ou outras disponíveis na literatura.

## 9.1 Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a carga concentrada

Considere uma placa quadrada com bordas simplesmente apoiadas, de lados $a = 1m$ e espessura $h = 1/100m$, submetida a um carregamento concentrado de $P = 10kN$ em seu centro, conforme mostrado na figura 9.1.

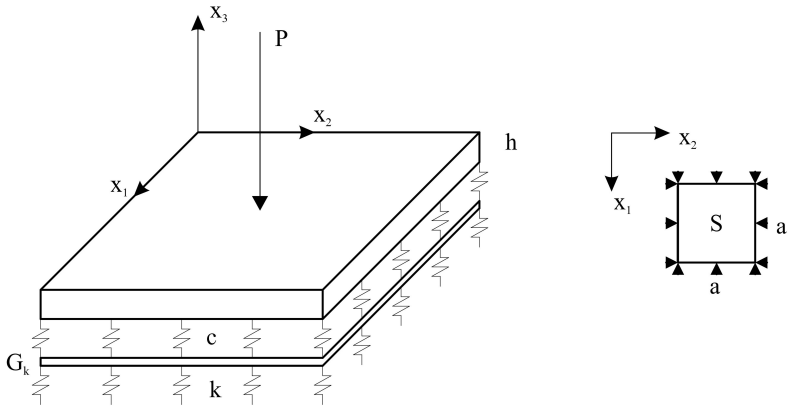



FIGURA 9.1 – Placa circular submetida a carga pontual aplicada no centro.

Assume-se ainda que as propriedades da placa são: módulo de elasticidade $E = 28GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$. Já os parâmetros da camada elástica de Kerr são: molas com rigidez $c = 100k = D/10\ kN/m^2$ e módulo de cisalhamento $G_k = D/100$, sendo $D$ a rigidez da placa.

Tendo como objetivo investigar a influência da malha na tendência da resposta via MEC se aproximar da solução exata, 4 tipos de discretização em elementos de contorno retos são consideradas: malhas de 8, 16, 32 e 64 elementos, conforme mostra a figura 9.2.

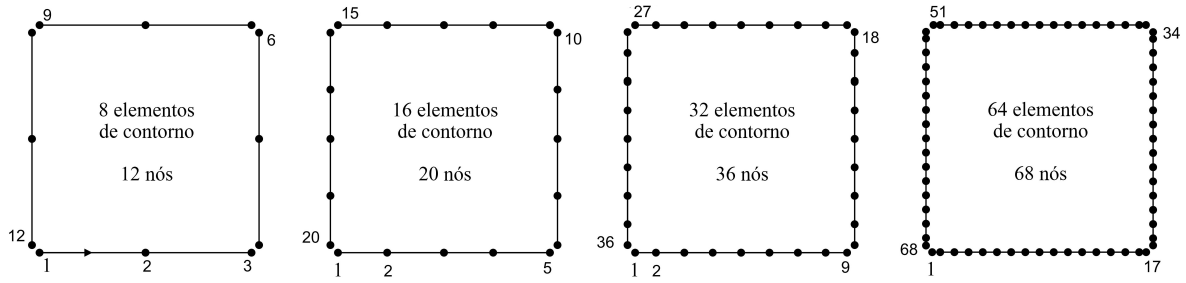



FIGURA 9.2 – Discretização do problema quadrado.

Os valores obtidos em deslocamentos e rotação ao longo do eixo central do problema ($x_1 = 0,5m$) são apresentados nas tabelas 9.1 a 9.3. Os resultados obtidos são ainda comparados com as soluções analíticas da placa de Kirchhoff e Mindlin sobre camada de Kerr disponível no apêndice B.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-8** | **MEC-16** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0.125 | 1.5059 | 1.5090 | 1.5060 | 1.5086 | 1.5093 | 1.5095 | 1.5096 |
| 0.25 | 2.9314 | 2.9368 | 2.9320 | 2.9364 | 2.9375 | 2.9379 | 2.9380 |
| 0.5 | 4.7651 | 4.7721 | 4.7746 | 4.7803 | 4.7817 | 4.7822 | 4.7824 |
| 0.75 | 2.9314 | 2.9368 | 2.9320 | 2.9364 | 2.9375 | 2.9379 | 2.9380 |
| 0.875 | 1.5059 | 1.5090 | 1.5060 | 1.5086 | 1.5093 | 1.5095 | 1.5096 |

TABELA 9.1 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^5$) da placa ao longo do eixo $x_2$.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-8** | **MEC-16** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0.125 | 0.5311 | 0.5319 | 0.5312 | 0.5318 | 0.5320 | 0.5321 | 0.5321 |
| 0.25 | 0.9967 | 0.9983 | 0.9970 | 0.9983 | 0.9986 | 0.9987 | 0.9988 |
| 0.5 | 1.4504 | 1.4527 | 1.4509 | 1.4528 | 1.4533 | 1.4535 | 1.4536 |
| 0.75 | 0.9967 | 0.9983 | 0.9970 | 0.9983 | 0.9986 | 0.9987 | 0.9988 |
| 0.875 | 0.5311 | 0.5319 | 0.5312 | 0.5318 | 0.5320 | 0.5321 | 0.5321 |

TABELA 9.2 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^5$) da camada cisalhante ao longo do eixo $x_2$.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-8** | **MEC-16** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0.125 | 1.1855 | 1.1877 | -1.1852 | -1.1871 | -1.1875 | -1.1877 | -1.1877 |
| 0.25 | 1.0777 | 1.0790 | -1.0775 | -1.0786 | -1.0789 | -1.0790 | -1.0790 |
| 0.5 | 0.0222 | 0.0215 | -0.0222 | -0.0222 | -0.0222 | -0.0222 | -0.0224 |
| 0.75 | -1.0777 | -1.0790 | 1.0775 | 1.0786 | 1.0789 | 1.0790 | 1.0790 |
| 0.875 | -1.1855 | -1.1877 | 1.1852 | 1.1871 | 1.1875 | 1.1877 | 1.1877 |

TABELA 9.3 – Rotações ($rad\ x10^4$) na placa ao longo do eixo $x_2$.

A partir da análise das Tabelas 9.1 a 9.3, vê-se que os valores obtidos por meio do MEC para as teorias de Kirchhoff e de Mindlin tendem a solução exata para ambas as teorias. Tratando apenas da placa de Mindlin, com o refinamento da malha, observa-se que as respostas obtidas pelo MEC, quando comparadas à sua correspondente solução exata, sai de um erro relativo máximo de 6.77% ($v(0,125)$) utilizando a malha MEC-8 para um erro relativo de 0.07% ($w(0,125)$) com a malha MEC-64.

Da mesma forma, foram avaliados os momentos fletores no domínio do problema. As tabelas 9.4 e 9.5 mostra os valores obtidos dos momentos $M_{xx}$ e $M_{yy}$, respectivamente, comparados com suas correspondentes soluções analíticas.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | **MEC** | **Exata** | **MEC-8** | **MEC-16** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0.25 | 0.5038 | 0.5055 | 0.4524 | 0.4923 | 0.5009 | 0.5023 | 0.5055 |
| 0.375 | 1.1005 | 1.1020 | 1.0327 | 1.0648 | 1.0714 | 1.0725 | 1.1020 |
| 0.5 | 5.6869 | 5.7760 | 5.6173 | 5.6462 | 5.6523 | 5.6534 | 5.7760 |
| 0.625 | 1.1005 | 1.1020 | 1.0327 | 1.0648 | 1.0714 | 1.0725 | 1.1020 |
| 0.75 | 0.5038 | 0.5055 | 0.4524 | 0.4923 | 0.5009 | 0.5023 | 0.5055 |

TABELA 9.4 – Momento fletor na direção $x_1$ ($kN/m$) ao longo do eixo $x_2$.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | **MEC** | **Exata** | **MEC-8** | **MEC-16** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0.25 | 0.9524 | 0.9539 | 0.9249 | 0.9440 | 0.9488 | 0.9499 | 0.9539 |
| 0.375 | 1.6879 | 1.6894 | 1.6270 | 1.6530 | 1.6589 | 1.6600 | 1.6894 |
| 0.5 | 6.3235 | 6.3210 | 6.2540 | 6.2828 | 6.2889 | 6.2900 | 6.3210 |
| 0.625 | 1.6879 | 1.6894 | 1.6270 | 1.6530 | 1.6589 | 1.6600 | 1.6894 |
| 0.75 | 0.9524 | 0.9539 | 0.9249 | 0.9440 | 0.9488 | 0.9499 | 0.9539 |

TABELA 9.5 – Momento fletor na direção $x_1$ ($kN/m$) ao longo do eixo $x_2$.

De forma geral, as soluções propostas do MEC levam a obtenção de valores muito próximos às soluções analíticas mesmo considerando malhas menos discretizadas.

## 9.2 Placa quadrada submetida a carregamento uniformemente distribuído

Considere que a placa do exemplo 9.1 esteja agora submetida a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade de $g = 10kN$, conforme mostrado na figura 9.3.

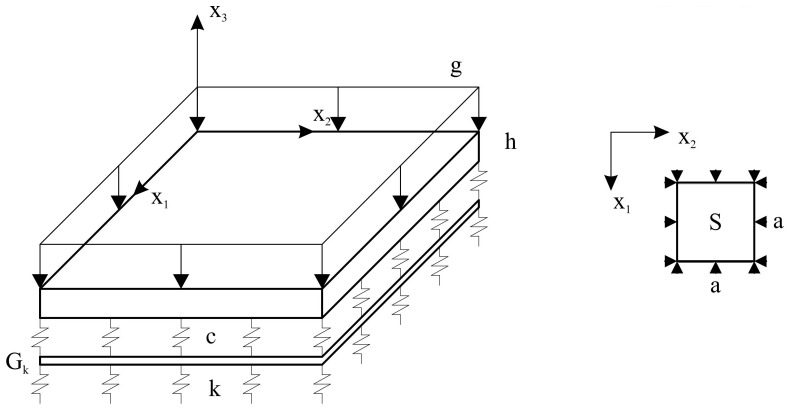



FIGURA 9.3 – Placa circular submetida a carga pontual aplicada no centro.

Os valores obtidos dos deslocamentos transversais e das rotações ao longo do eixo central da placa (em $x_1 = 0,5m$) são apresentados nas tabelas 9.6 a 9.8. Os resultados obtidos são ainda comparados com as soluções analíticas apresentadas no apêndice B.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | **MEC** | **Exata** | **MEC-8** | **MEC-16** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0.125 | 0.6673 | 0.6677 | 0.6660 | 0.6676 | 0.6680 | 0.6682 | 0.6681 |
| 0.25 | 1.2078 | 1.2086 | 1.2055 | 1.2084 | 1.2091 | 1.2093 | 1.2092 |
| 0.5 | 1.6698 | 1.6711 | 1.6670 | 1.6708 | 1.6716 | 1.6719 | 1.6718 |
| 0.75 | 1.2076 | 1.2086 | 1.2055 | 1.2084 | 1.2091 | 1.2093 | 1.2092 |
| 0.875 | 0.6671 | 0.6677 | 0.6660 | 0.6676 | 0.6680 | 0.6682 | 0.6681 |

TABELA 9.6 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^5$) da placa ao longo do eixo $x_2$.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | **MEC** | **Exata** | **MEC-8** | **MEC-16** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0.125 | 2.2054 | 2.2062 | 2.2013 | 2.2062 | 2.2073 | 2.2077 | 2.2073 |
| 0.25 | 4.0528 | 4.0550 | 4.0451 | 4.0546 | 4.0568 | 4.0575 | 4.0570 |
| 0 .5 | 5.6925 | 5.6963 | 5.6823 | 5.6955 | 5.6986 | 5.6996 | 5.6990 |
| 0.75 | 4.0524 | 4.0550 | 4.0451 | 4.0546 | 4.0568 | 4.0575 | 4.0570 |
| 0.875 | 2.2052 | 2.2062 | 2.2013 | 2.2062 | 2.2073 | 2.2078 | 2.2073 |

TABELA 9.7 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^6$) da camada cisalhante ao longo do eixo $x_2$.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | **MEC** | **Exata** | **MEC-8** | **MEC-16** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0.125 | 4.9591 | 4.9624 | -4.9466 | -4.9590 | -4.9617 | -4.9625 | -4.9624 |
| 0.25 | 3.6007 | 3.6033 | -3.5938 | -3.6013 | -3.6029 | -3.6034 | -3.6033 |
| 0.5 | 0.0145 | 0.0152 | -0.0151 | -0.0151 | -0.0151 | -0.0152 | -0.0152 |
| 0.75 | -3.6009 | -3.6033 | 3.5938 | 3.6013 | 3.6029 | 3.6034 | 3.6033 |
| 0.875 | -4.9579 | -4.9624 | 4.9466 | 4.9590 | 4.9617 | 4.9625 | 4.9624 |

TABELA 9.8 – Rotação na placa ($rad\ x10^5$) ao longo do eixo $x_2$.

Observa-se que as respostas obtidas pelo MEC para placa de Mindlin tendem a valores muito próximos, em termos de deslocamentos e rotação, à solução exata, saindo de um erro relativo máximo de 9.69% ($v(0,125)$) para um erro relativo de 0.07% ($\phi_1(0,125)$) com uma malha mais discretizada.

## 9.3 Placa circular submetida a carga concentrada

Considere que sobre um placa circular de raio $R = 3m$ e espessura $h = R/100m$, apoiada em uma camada elástica de Kerr, atue um carregamento concentrado $P = 10kN$ em seu centro, conforme mostrado na figura 9.4.

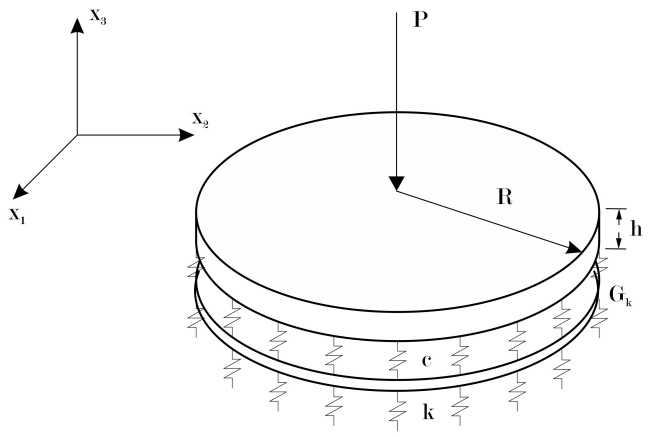



FIGURA 9.4 – Placa circular submetida a carga pontual aplicada no centro.

Considere ainda que as propriedades mecânicas do problema sejam os mesmos do exemplo 9.3.

Buscando verificar a tendência da solução do MEC em se aproximar da solução exata, 4 tipos de discretização em elementos de contorno circulares foram consideradas: malhas com 4, 8, 32 e 64 elementos, conforme mostra a figura 9.4. Além disso, foram consideradas duas situações: na primeira as bordas estão engastadas e na segunda simplesmente apoiadas.

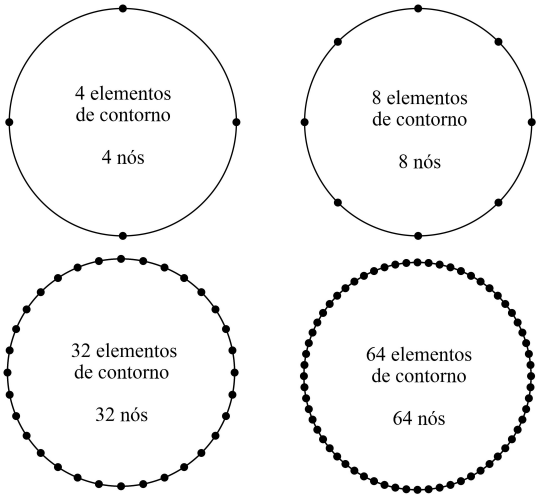



FIGURA 9.5 – Discretização do problema circular.

As tabelas 9.9 a 9.11 apresentam os valores obtidos em termos de deslocamentos transversais na placa, na camada de cisalhamento e também de rotação ao longo do raio da placa considerando as bordas engastadas. Os resultados obtidos são comparados com as devidas soluções analíticas para placa de Kirchhoff e Mindlin apresentados no anexo B.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **R** | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-4** | **MEC-8** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0 | -27,135 | -27,135 | -27,598 | -27,223 | -27,173 | -27,172 | -27,172 |
| 0,5 | -23,672 | -23,672 | -24,090 | -23,731 | -23,682 | -23,682 | -23,682 |
| 1 | -17,482 | -17,482 | -17,845 | -17,533 | -17,489 | -17,488 | -17,488 |
| 1,5 | -10,936 | -10,936 | -11,212 | -10,976 | -10,940 | -10,940 | -10,940 |
| 2 | -5,289 | -5,289 | -5,456 | -5,317 | -5,292 | -5,292 | -5,292 |
| 2,5 | -1,419 | -1,419 | -1,473 | -1,430 | -1,420 | -1,420 | -1,420 |

TABELA 9.9 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^3$) da placa ao longo do raio.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **R** | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-4** | **MEC-8** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0 | -22,984 | -22,984 | -23,390 | -23,043 | -22,996 | -22,996 | -22,995 |
| 0,5 | -20,832 | -20,832 | -21,218 | -20,887 | -20,841 | -20,841 | -20,841 |
| 1 | -15,959 | -15,959 | -16,292 | -16,006 | -15,965 | -15,965 | -15,965 |
| 1,5 | -10,369 | -10,369 | -10,619 | -10,407 | -10,373 | -10,373 | -10,373 |
| 2 | -5,402 | -5,402 | -5,550 | -5,427 | -5,404 | -5,404 | -5,404 |
| 2,5 | -1,890 | -1,890 | -1,942 | -1,902 | -1,891 | -1,891 | -1,891 |

TABELA 9.10 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^3$) da camada cisalhante ao longo do raio.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **R** | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-4** | **MEC-8** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0 | 0,251 | 0,251 | -0,251 | -0,251 | -0,251 | -0,251 | -0,251 |
| 0,5 | 10,821 | 10,821 | -10,890 | -10,827 | -10,821 | -10,821 | -10,821 |
| 1 | 13,252 | 13,252 | -13,388 | -13,264 | -13,252 | -13,252 | -13,252 |
| 1,5 | 12,530 | 12,530 | -12,728 | -12,550 | -12,531 | -12,530 | -12,530 |
| 2 | 9,769 | 9,769 | -10,000 | -9,796 | -9,769 | -9,769 | -9,769 |
| 2,5 | 5,491 | 5,491 | -5,685 | -5,522 | -5,491 | -5,491 | -5,491 |

TABELA 9.11 – Rotações da placa ($rad\ x10^3$) ao longo do raio.

Os resultados obtidos via MEC tanto para a teoria de Mindlin quanto para a teoria de Kirchhoff são muito próximos àqueles obtidos via solução exata. Além disso, comparando os valores obtidos entre as duas teorias, vê-se que são praticamente iguais. Isso ocorre devido a razão de aspecto $R/h$ da placa ser pequena, fazendo com que as respostas em deslocamentos e rotações segundo a teoria de Mindlin tenda a do Kirchhoff. Observa-se ainda que, mesmo com uma malha pobre em elementos de contorno (MEC-4), o erro

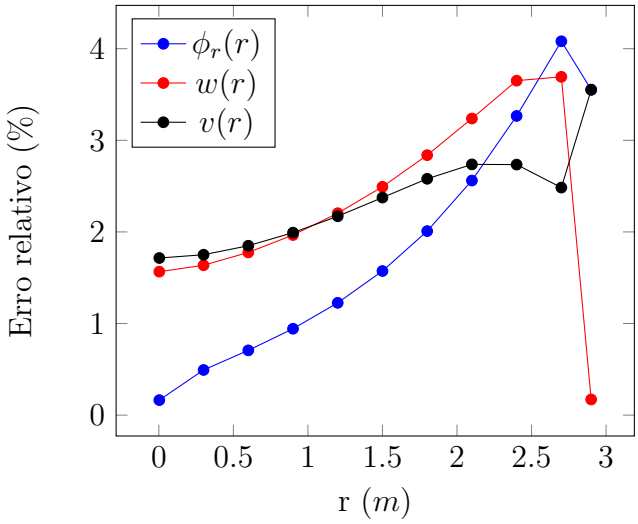



FIGURA 9.6 – Erro relativo ao longo do raio da placa engastada – Mindlin MEC-4.

relativo máximo foi de aproximadamente 4% $\phi_r(2,7)$), enquanto que em uma malha mais rica (MEC-64) esse erro cai para 0.019% para o deslocamento na placa próximo a borda. Tais fatos comprovam a eficiência dos resultados e convergência acelerada do MEC.

Considere agora que as bordas do problema estejam simplesmente apoiadas. As tabelas 9.13 a 9.14 apresentam os valores de rotação e deslocamentos obtidos ao longo do raio do problema.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **R** | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-4** | **MEC-8** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0 | -7,117 | -7,117 | -6,675 | -7,017 | -7,116 | -7,120 | -7,120 |
| 0,5 | -6,649 | -6,649 | -6,220 | -6,549 | -6,645 | -6,649 | -6,650 |
| 1 | -5,665 | -5,665 | -5,280 | -5,575 | -5,662 | -5,665 | -5,666 |
| 1,5 | -4,401 | -4,401 | -4,088 | -4,327 | -4,398 | -4,401 | -4,402 |
| 2 | -2,982 | -2,982 | -2,766 | -2,930 | -2,980 | -2,982 | -2,982 |
| 2,5 | -1,493 | -1,493 | -1,390 | -1,469 | -1,492 | -1,493 | -1,493 |

TABELA 9.12 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^2$) da placa ao longo do raio.

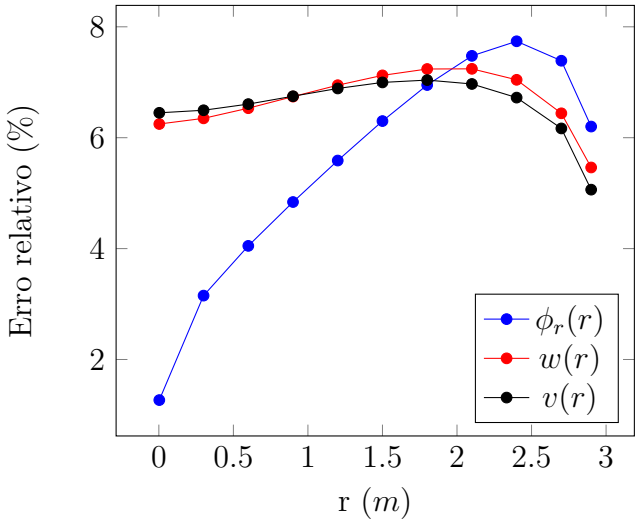



FIGURA 9.7 – Erro relativo ao longo do raio da placa simplesmente apoiada – Mindlin MEC-4.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **R** | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-4** | **MEC-8** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0 | -6,467 | -6,467 | -6,051 | -6,371 | -6,464 | -6,468 | -6,468 |
| 0,5 | -6,132 | -6,132 | -5,730 | -6,038 | -6,128 | -6,132 | -6,132 |
| 1 | -5,283 | -5,283 | -4,925 | -5,199 | -5,280 | -5,283 | -5,284 |
| 1,5 | -4,122 | -4,122 | -3,834 | -4,053 | -4,120 | -4,122 | -4,123 |
| 2 | -2,786 | -2,786 | -2,591 | -2,739 | -2,784 | -2,786 | -2,786 |
| 2,5 | -1,377 | -1,377 | -1,286 | -1,355 | -1,376 | -1,377 | -1,377 |

TABELA 9.13 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^2$) na camada cisalhante ao longo do raio.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **R** | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-4** | **MEC-8** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0 | 0,028 | 0,028 | -0,028 | -0,028 | -0,028 | -0,028 | -0,028 |
| 0,5 | 1,568 | 1,568 | -1,509 | -1,556 | -1,568 | -1,568 | -1,568 |
| 1 | 2,299 | 2,299 | -2,182 | -2,273 | -2,298 | -2,298 | -2,299 |
| 1,5 | 2,716 | 2,716 | -2,545 | -2,677 | -2,714 | -2,716 | -2,716 |
| 2 | 2,933 | 2,933 | -2,718 | -2,881 | -2,931 | -2,932 | -2,933 |
| 2,5 | 3,001 | 3,001 | -2,770 | -2,943 | -2,999 | -3,001 | -3,001 |

TABELA 9.14 – Rotações na placa ($rad\ x10^2$) ao longo do raio.

O mesmo comportamento das respostas é visto para o problema com bordas simplesmente apoiadas. Os resultados obtidos pelo MEC considerando a teoria de Mindlin se aproximam das do Kirchhoff em todos os pontos no domínio do elemento.

Com isso, os resultados apresentados mostram a eficiência do MEC, uma vez que recupera todas as respostas analíticas com ótima precisão.

## 9.4 Placa circular submetida a carga distribuída

Considere que sobre um placa circular de raio $R = 3m$ e espessura $h = R/20m$, apoiada em uma camada elástica de Kerr, atue um carregamento uniformemente distribuído $g = 13kN/m^2$, conforme mostrado na figura 9.8. As propriedades mecânicas do problema são as mesmas que o exemplo 9.3.

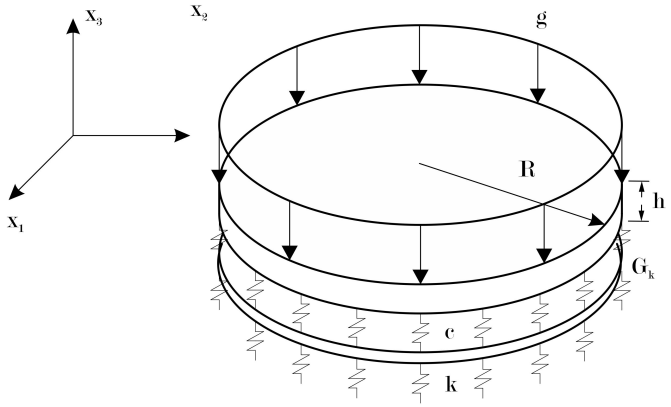



FIGURA 9.8 – Placa circular submetida a carga pontual aplicada no centro.

Nas tabelas 9.15 a 9.17 são apresentados os valores obtidos comparando as soluções do MEC com suas correspondentes soluções analíticas, disponíveis no anexo B, considerando as bordas engastadas.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **R** | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0 | -1,993 | -1,993 | -2,013 | -2,013 | -2,013 |
| 0,5 | -1,884 | -1,884 | -1,903 | -1,903 | -1,903 |
| 1 | -1,575 | -1,575 | -1,593 | -1,593 | -1,593 |
| 1,5 | -1,122 | -1,122 | -1,137 | -1,137 | -1,137 |
| 2 | -0,616 | -0,616 | -0,627 | -0,627 | -0,627 |
| 2,5 | -0,186 | -0,186 | -0,192 | -0,192 | -0,192 |

TABELA 9.15 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^3$) da placa ao longo do raio.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **R** | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0 | -1,815 | -1,815 | -1,834 | -1,834 | -1,834 |
| 0,5 | -1,717 | -1,717 | -1,735 | -1,735 | -1,735 |
| 1 | -1,439 | -1,439 | -1,456 | -1,456 | -1,456 |
| 1,5 | -1,037 | -1,037 | -1,051 | -1,051 | -1,051 |
| 2 | -0,596 | -0,596 | -0,606 | -0,606 | -0,606 |
| 2,5 | -0,225 | -0,225 | -0,230 | -0,230 | -0,230 |

TABELA 9.16 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^3$) da camada cisalhante ao longo do raio.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **R** | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0 | 0,027 | 0,027 | -0,027 | -0,027 | -0,027 |
| 0,5 | 4,302 | 4,302 | -4,301 | -4,301 | -4,301 |
| 1 | 7,868 | 7,868 | -7,868 | -7,868 | -7,868 |
| 1,5 | 9,963 | 9,963 | -9,963 | -9,963 | -9,963 |
| 2 | 9,847 | 9,847 | -9,847 | -9,847 | -9,846 |
| 2,5 | 6,775 | 6,775 | -6,776 | -6,775 | -6,775 |

TABELA 9.17 – Rotações da placa ($rad\ x10^4$) ao longo do raio.

Os resultados obtidos via MEC tanto para a teoria de Mindlin quanto de Kirchhoff se aproximam bastante das respectivas soluções analíticas, sendo o erro praticamente nulo, como pode ser visto na figura 9.9 para a malha MEC-32. Mais uma vez, vê-se a precisão do método mesmo considerando malhas pouco robustas.

Os resultados em rotação e deslocamentos obtidos para o problema simplesmente apoiado pode ser visto nas tabelas 9.19 a 9.20.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **R** | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0 | -8,481 | -8,481 | -8,492 | -8,498 | -8,500 |
| 0,5 | -8,193 | -8,193 | -8,203 | -8,210 | -8,211 |
| 1 | -7,346 | -7,346 | -7,356 | -7,362 | -7,363 |
| 1,5 | -5,995 | -5,996 | -6,004 | -6,009 | -6,010 |
| 2 | -4,230 | -4,230 | -4,237 | -4,240 | -4,241 |
| 2,5 | -2,177 | -2,178 | -2,181 | -2,183 | -2,183 |

TABELA 9.18 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^3$) da placa ao longo do raio.

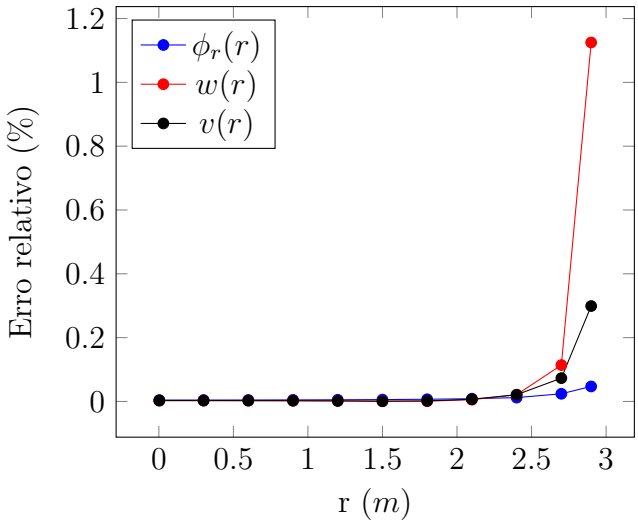



FIGURA 9.9 – Erro relativo ao longo do raio da placa engastada – Mindlin MEC-32.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **R** | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0 | -7,957 | -7,958 | -7,968 | -7,974 | -7,976 |
| 0,5 | -7,682 | -7,682 | -7,692 | -7,698 | -7,699 |
| 1 | -6,872 | -6,872 | -6,881 | -6,887 | -6,888 |
| 1,5 | -5,583 | -5,583 | -5,590 | -5,595 | -5,596 |
| 2 | -3,905 | -3,905 | -3,911 | -3,914 | -3,915 |
| 2,5 | -1,975 | -1,975 | -1,978 | -1,980 | -1,980 |

TABELA 9.19 – Deslocamentos transversais ($m\ x10^3$) na camada cisalhante ao longo do raio.

| | **Kirchhoff** | | **Mindlin** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **R** | **MEC-32** | **Exata** | **MEC-32** | **MEC-64** | **Exata** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,5 | 1,147 | 1,147 | -1,146 | -1,146 | -1,146 |
| 1 | 2,221 | 2,221 | -2,219 | -2,221 | -2,221 |
| 1,5 | 3,152 | 3,152 | -3,149 | -3,151 | -3,152 |
| 2 | 3,866 | 3,866 | -3,862 | -3,865 | -3,866 |
| 2,5 | 4,291 | 4,291 | -4,286 | -4,290 | -4,291 |

TABELA 9.20 – Rotações na placa ($rad\ x10^3$) ao longo do raio.

Comportamento similar é visto nas respostas do problema com bordas simplesmente apoiadas, comprovando a eficiência da formulação do MEC desenvolvida nesta tese para diferentes condições de contorno e carregamento.

# Capítulo 10

# Conclusão

Formulações baseadas no Método dos Elementos de Contorno para análise estática de vigas e placas apoiadas em camada elástica e vigas duplas conectadas por camada elástica de Kerr são objetivo desta tese.

Buscando preencher algumas lacunas existentes na literatura em relação aos temas estudados, contribuições originais podem ser destacados: dedução das soluções fundamentais para cada um dos problemas pertinentes; estabelecimento de equações integrais em deslocamentos e esforços puramente do MEC, ou seja, sem integrais de domínio; e montagem do sistema algébrico para cálculo dos campos em deslocamentos e forças no contorno e domínio dos problemas estudados.

Inicialmente foi feito um estudo sobre a flexão de vigas simples ou duplas pelo MEC submetidas a cargas transversais e axiais. A qualidade das soluções fundamentais propostas foram comprovadas por meio de exemplos numéricos, onde os valores obtidos pelo MEC são praticamente iguais aqueles obtidos por soluções exatas. Importante destacar que apenas um elemento de contorno é suficiente para recuperar com uma ótima precisão os valores exatos, tanto no caso das vigas simples quanto para vigas duplas. A formulação puramente do MEC contribui para este fato, uma vez que nenhuma integração numérica é requerida sobre os elementos de contorno de vigas.

Posteriormente, foi feito um estudo sobre a flexão de placas de Kirchhoff e Mindlin sobre camada elástica de Kerr. Na teoria de Kirchhoff, o trabalho desenvolvido por Souza (2019) foi revisitado, onde foi proposta uma formulação integral para determinação dos momentos no domínio do problema. Na teoria de Mindlin, foram propostas ainda soluções fundamentais e equações integrais preenchendo uma lacuna na literatura sobre o tema. Buscando uma formulação puramente no contorno, foram feitas as transformações das integrais de domínio relacionadas ao carregamento para o contorno. Considerou-se ainda o carregamento como sendo linearmente distribuído, fazendo um estudo do limite quando a distância entre ponto fonte e campo tendem a zero, surgindo termos livres de

carregamento.

A qualidade das soluções propostas foram comprovadas por meio de exemplos numéricos, onde testes de convergência foram realizados comparando com as soluções exatas ou outra disponível na literatura. As respostas obtidas pelo MEC se mostraram precisas e eficientes em todos os casos estudados. A versatilidade das formulações desenvolvidas pode ser percebida por meio dos exemplos considerando diferentes condições de contorno, diferentes tipos de carregamento e propriedades mecânicas das vigas e camada elástica.

## Sugestões para Trabalhos Futuros

Diante da revisão da literatura realizada, vê-se que alguns temas poderiam ser explorados pelo MEC em trabalhos futuros, são eles:

- Análise dinâmica de vigas simples e duplas conectadas por camada de Kerr;
- Placas de Reissner e Reddy apoiadas sobre camada elástica de Kerr;
- Análise dinâmica de placas sobre camada elástica de Kerr;
- Aplicação do Método da Reciprocidade Múltipla (MRM) para vigas e placa submetidas a carregamentos polinomiais genéricos.

# Referências


ABDALLA, J.; IBRAHIM, A. Development of a discrete reissner–mindlin element on winkler foundation. **Finite elements in analysis and design**, Elsevier, v. 42, n. 8-9, p. 740–748, 2006.

AGBOOLA, O. O.; GBADEYAN, J. A.; IYASE, S. A. Vibration of an elastically connected non-prismatic double-beam system using differential transform method. *In*: **Proceedings of the World Congress on Engineering**. **Proceedings** [...]. [*S.l.: s.n.*], 2017. v. 1.

AL-HOSANI, K. Boundary element analysis of thick plates on winkler foundation under generalized loading. **WIT Transactions on Modelling and Simulation**, WIT Press, v. 20, 1998.

AL-HOSANI, K.; FADHIL, S.; EL-ZAFRANY, A. Fundamental solution and boundary element analysis of thick plates on winkler foundation. **Computers & structures**, Elsevier, v. 70, n. 3, p. 325–336, 1999.

ALISJAHBANA, S. W.; ALISJAHABANA, I.; KIRYU, S.; GAN, B. S. Semi analytical solution of a rigid pavement under a moving load on a kerr foundation model. **Journal of Vibroengineering**, JVE International Ltd., v. 20, n. 5, p. 2165–2174, 2018.

ALTOé, M.; RIBEIRO, N.; KARAM, V. Analysis of simply supported and clamped reissner's plates on pasternak-type foundation by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 52, p. 64–70, 2015. ISSN 0955-7997.

ANTES, H. Fundamental solution and integral equations for timoshenko beams. **Computers & Structures**, v. 81, n. 6, p. 383 – 396, 2003. ISSN 0045-7949.

ANTES, H.; SCHANZ, M.; ALVERMANN, S. Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and timoshenko beams. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 276, n. 3-5, p. 807–836, 2004.

ARIMAN, T. Buckoing of thick plates on elastic foundation. **Bautechnik**, v. 46, n. 2, p. 59–63, cited By :10, 1969.

ATANASOV, M. S.; KARLIČIĆ, D.; KOZIĆ, P.; JANEVSKI, G. Thermal effect on free vibration and buckling of a double-microbeam system. **Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering**, v. 15, n. 1, p. 45–62, 2017.

AVRAMIDIS, I.; MORFIDIS, K. Bending of beams on three-parameter elastic foundation. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 43, n. 2, p. 357–375, 2006.

AYDOĞAN, M. Stiffness-matrix formulation of beams with shear effect on elastic foundation. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 121, n. 9, p. 1265–1270, 1995.

BANERJEE, P.; BUTTERFIELD, R. **Boundary element methods in engineering science**. [*S.l.*]: McGraw-Hill Book Co. (UK), 1981. ISBN 9780070841208.

BARROS, P. L. de A.; PAVANELLO, R.; MESQUITA, E.; MOROOKA, C. K. Scr-seafloor interaction modeling with winkler, pasternak and kerr beam-on-elastic-foundation theories. *In*: **International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering**. **Proceedings** [...]. [*S.l.: s.n.*], 2009. v. 43437, p. 343–349.

BEAUFAIT, F. W.; HOADLEY, P. W. Analysis of elastic beams on nonlinear foundations. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 12, n. 5, p. 669–676, 1980.

BEZERRA, W.; SANTOS, S. dos; SOARES, L. S. Dynamic response of timoshenko beams on pasternak foundation. *In*: . **Proceedings** [...]. [*S.l.: s.n.*], 2017.

BEZERRA, W.; SOARES, L.; HOEFEL, S. Free vibration analysis for euler-bernoulli beam on pasternak foundation. *In*: **24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering (COBEM)**. **Proceedings** [...]. [*S.l.: s.n.*], 2017. p. 1–9.

BICKFORD, W. A consistent higher order beam theory. **Developments in Theoretical and Applied Mechanics**, Department of Mechanical Engineering–The University of Alabama in Huntsville Huntsville, v. 11, p. 137–150, 1982.

BOUDAA, S.; KHALFALLAH, S.; BILOTTA, E. Static interaction analysis between beam and layered soil using a two-parameter elastic foundation. **International Journal of Advanced Structural Engineering**, Springer, v. 11, n. 1, p. 21–30, 2019.

BRITO, W.; MAIA, C.; MENDONCA, A. Bending analysis of elastically connected euler–bernoulli double-beam system using the direct boundary element method. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 74, p. 387–408, 2019.

BRITO, W. K. F.; MACIEL, W. G. M.; PEREIRA, A. C.; MENDONçA, A. V. Fem analysis of a timoshenko double-beam system with a pasternak inner layer. *In*: **Proceedings of the XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC**. **Proceedings** [...]. Natal - RN, Brasil: [*s.n.*], 2019. Available at: https://cilamce.com.br/anais/arearestrita/apresentacoes/128/6330.pdf.

BRITO, W. K. F.; MAIA, C. D. C. D.; MACIEL, W. G. M.; MENDONçA, A. V. Static analysis of a double-beam system by finite element method. *In*: **6TH INTERNATIONAL CONGRESS ON TECHNOLOGY - ENGINEERING & SCIENCE**. **Proceedings** [...]. Kuala Lumpur - Malaysia: [*s.n.*], 2018. Available at: https://procedia.org/cpi/ICONTES-6-2111337.

BRITO, W. K. F.; PEREIRA, A. C. A.; MACIEL, W. G. M.; MENDONçA, A. V. Finite element solution of an elastically connected double bernoulli-euler beam system on winkler-kerr foundation. *In*: **Proceedings of the XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering and III Pan-American Congress on Computational Mechanics**. **Proceedings** [...]. Rio de Janeiro, Brasil: [*s.n.*], 2021. Available at: https://cilamce.com.br/anais/arearestrita/apresentacoes/240/9481.pdf.

BRITO, W. K. F.; PEREIRA, A. C. A.; OLIVEIRA, D. B.; MENDONçA, A. V. Flexão de vigas duplas elasticamente conectadas por base de kerr pelo método dos elementos finitos. *In*: **Anais do congresso XXXIX Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural**. **Proceedings** [...]. Brasil: [*s.n.*], 2022. Available at: https://cdn.congresse.me/64xsldmqv1v7mqdwkax1qb03afaz.

BRITO, W. K. F. d. Análise estática e dinâmica de vigas elasticamente conectadas: Uma abordagem pelo método dos elementos de contorno. Universidade Federal da Paraíba, 2018.

BUCZKOWSKI, R. Finite element modelling of thick plates on two-parameter elastic foundation. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 25, p. 1409–1427, 01 2001.

CALDERON, E. T. **Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno**. Thesis (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1991.

CALIO, I.; GRECO, A. Free vibrations of timoshenko beam-columns on pasternak foundations. **Journal of Vibration and Control**, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 19, n. 5, p. 686–696, 2013.

CHAKRAVERTY, S.; PRADHAN, K. Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on winkler elastic foundation with general boundary conditions using rayleigh–ritz method. **International Journal of Applied Mechanics**, World Scientific, v. 6, n. 04, p. 1450043, 2014.

CHAKRAVORTY, A.; GHOSH, A. Finite difference solution for circular plates on elastic foundations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 9, n. 1, p. 73–84, 1975.

CHIWANGA, M.; VALSANGKAR, A. Generalized beam element on two-parameter elastic foundation. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 114, n. 6, p. 1414–1430, 1988.

CHONAN, S. Dynamical behaviours of elastically connected double-beam systems subjected to an impulsive load. **Bulletin of JSME**, The Japan Society of Mechanical Engineers, v. 19, n. 132, p. 595–603, 1976.

CHUNG, M.; LIN, K. Model and analysis method for machine components in contact. *In*: **Computational Mechanics' 88**. [*S.l.*]: Springer, 1988. p. 957–958.

CRUZ, J. M. F. Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo método dos elementos de contorno. Universidade Federal da Paraíba, 2012.

DAVIES, J. An exact finite element for beam on elastic foundation problems. **Journal of structural mechanics**, Taylor & Francis, v. 14, n. 4, p. 489–499, 1986.

DOYLE, P. F.; PAVLOVIC, M. N. Vibration of beams on partial elastic foundations. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, Wiley Online Library, v. 10, n. 5, p. 663–674, 1982.

EISENBERGER, M.; YANKELEVSKY, D.; ADIN, M. Vibrations of beams fully or partially supported on elastic foundations. **Earthquake engineering & structural dynamics**, Wiley Online Library, v. 13, n. 5, p. 651–660, 1985.

EISENBERGER, M.; YANKELEVSKY, D. Z. Exact stiffness matrix for beams on elastic foundation. **Computers & structures**, Elsevier, v. 21, n. 6, p. 1355–1359, 1985.

EULER, L. **Elements of algebra**. [*S.l.*]: Springer Science & Business Media, 2012.

FADHIL, S.; EL-ZAFRANY, A. Boundary element analysis of thick reissner plates on two-parameter foundation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 31, n. 21, p. 2901–2917, 1994. ISSN 0020-7683.

HAMADA, T. R.; NAKAYAMA, H.; HAYASHI, K. Free and forced vibrations of elastically connected double-beam systems. **Bulletin of JSME**, The Japan Society of Mechanical Engineers, v. 26, n. 221, p. 1936–1942, 1983.

HAN, J. B.; LIEW, K. Numerical differential quadrature method for reissner/mindlin plates on two-parameter foundations. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 39, n. 9, p. 977–989, 1997. ISSN 0020-7403.

HAO, Q.; ZHAI, W.; CHEN, Z. Free vibration of connected double-beam system with general boundary conditions by a modified fourier–ritz method. **Archive of Applied Mechanics**, Springer, v. 88, n. 5, p. 741–754, 2018.

HARIZ, M.; MARREC, L. L.; LERBET, J. Buckling of timoshenko beam under two-parameter elastic foundations. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 244, p. 111583, 2022.

HETÉNYI, M.; HETBENYI, M. I. **Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering**. [*S.l.*]: University of Michigan press Ann Arbor, MI, 1946.

HÖRMANDER, L. Linear differential operators. **Actes Congr. Int. Math. Nice 1970**, v. 1, p. 121–133, 1963.

HUANG, M.-H.; THAMBIRATNAM, D. Analysis of plate resting on elastic supports and elastic foundation by finite strip method. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 79, n. 29-30, p. 2547–2557, 2001.

IKE, C. Flexural analysis of rectangular kirchhoff plate on winkler foundation using galerkin-vlasov variational method. **Mathematical Modelling of Engineering Problems**, v. 5, n. 2, p. 83–92, 2018.

IKE, C. C. Flexural analysis of kirchhoff plates on winkler foundations using finite fourier sine integral transform method. **Mathematical Modelling of Engineering Problems (MMEP)**, v. 4, n. 4, p. 145–154, 2017.

JIANGUO, W.; XIUXI, W.; MAOKUANG, H. A boundary integral equation formulation for thick plates on a winkler foundation. **Computers & structures**, Elsevier, v. 49, n. 1, p. 179–185, 1993.

JR, W. W.; TIMOSHENKO, S. P.; YOUNG, D. H. **Vibration problems in engineering**. [*S.l.*]: John Wiley & Sons, 1991.

KAPLUNOV, J.; PRIKAZCHIKOV, D.; ROGERSON, G. Edge bending wave on a thin elastic plate resting on a winkler foundation. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society Publishing, v. 472, n. 2190, p. 20160178, 2016.

KARAM, V. Aplicação do método dos elementos de contorno à teoria de reissner para flexão de placas. **Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado)–Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE**, 1986.

KARAM, V. J. Analysis of plate bending by the boundary element method considering pasternak-type foundation. **Blucher Mechanical Engineering Proceedings**, v. 1, n. 1, p. 4414 – 4426, 2014. ISSN 2358-0828.

KARKON, M.; KARKON, H. New element formulation for free vibration analysis of timoshenko beam on pasternak elastic foundation. ASIAN JOURNAL OF CIVIL ENGINEERING (BUILDING AND HOUSING), 2016.

KATSIKADELIS, J.; ARMENAKAS, A. Plates on elastic foundation by bie method. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 110, n. 7, p. 1086–1105, 1984.

KE-RANG, W. Thick rectangular plates with free edges on elastic foundations. **Applied Mathematics and Mechanics**, Springer, v. 11, n. 9, p. 869–879, 1990.

KELLY, S. G.; SRINIVAS, S. Free vibrations of elastically connected stretched beams. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 326, n. 3-5, p. 883–893, 2009.

KERR, A. D. Elastic and viscoelastic foundation models. 1964.

KERR, A. D. Elastic and viscoelastic foundation models. 1964.

KERR, A. D. An extension of the kantorovich method. **Congress of Applied Mechanics**, Proc. 5th U.S. National, p. p. 290, 1966.

KERR, A. D. An extension of the kantorovich method. **N.Y.U. Report No. AA-66-70**, 1966.

KERR, A. D.; ALEXANDER, H. An application of the extended kantorovich method to the stress analysis of a clamped rectangular plate. **Acta Mechanica**, Springer, v. 6, n. 2, p. 180–196, 1968.

KESSEL, P. Resonances excited in an elastically connected double-beam system by a cyclic moving load. **The Journal of the Acoustical Society of America**, ASA, v. 40, n. 3, p. 684–687, 1966.

KIRCHHOFF, G. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 40, p. 51–88, 1850. Available at: http://eudml.org/doc/147439http://eudml.org/doc/147439.

KNEIFATI, M. C. Analysis of plates on a kerr foundation model. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 111, n. 11, p. 1325–1342, 1985.

KOBAYASHI, H.; SONODA, K. Rectangular thick plates on linear viscoelastic foundations. *In*: JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers**. **Proceedings** [...]. [*S.l.: s.n.*], 1984. v. 1984, n. 341, p. 33–40.

KOBAYASHI, H.; SONODA, K. Rectangular mindlin plates on elastic foundations. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 31, n. 9, p. 679–692, 1989.

KOZIĆ, P.; PAVLOVIĆ, R.; KARLIČIĆ, D. The flexural vibration and buckling of the elastically connected parallel-beams with a kerr-type layer in between. **Mechanics Research Communications**, Elsevier, v. 56, p. 83–89, 2014.

LEE, H. Dynamic response of a timoshenko beam on a winkler foundation subjected to a moving mass. **Applied Acoustics**, Elsevier, v. 55, n. 3, p. 203–215, 1998.

LI, J.; HUA, H. Spectral finite element analysis of elastically connected double-beam systems. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 43, n. 15, p. 1155–1168, 2007.

LIMKATANYU, S.; DAMRONGWIRIYANUPAP, N.; KWON, M.; PONBUNYANON, P. Force-based derivation of exact stiffness matrix for beams onwinkler-pasternak foundation. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, Wiley Online Library, v. 95, n. 2, p. 140–155, 2015.

LIU, F.-L. Rectangular thick plates on winkler foundation: differential quadrature element solution. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 37, n. 12, p. 1743–1763, 2000.

LIU, S.; YANG, B. A closed-form analytical solution method for vibration analysis of elastically connected double-beam systems. **Composite Structures**, Elsevier, v. 212, p. 598–608, 2019.

MAIA, C. D. de C. D. **Flexão e Estabilidade de Barras Usando o Modelo de Bickford-Reddy: uma Abordagem pelo Método dos Elementos de Contorno**. Dissertation (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2016.

MAMA, B.; IKE, C.; ONAH, H.; NWOJI, C. Analysis of rectangular kirchhoff plate on winkler foundation using finite fourier sine transform method. **IOSR Journal of Mathematics**, v. 13, n. 4, p. 58–66, 2017.

MANZOLI, O. L. Formulação do método dos elementos de contorno para placas sobre fundação elástica. 1992.

MAO, Q. Free vibration analysis of elastically connected multiple-beams by using the adomian modified decomposition method. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 331, n. 11, p. 2532–2542, 2012.

MENDONÇA, Â. V. **Estudo de estruturas compostas por lâminas planas de espessuras constantes: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno**. Thesis (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2002.

MIAO, Y.; SHI, Y.; WANG, G.; ZHONG, Y. Closed-form solution of beam on pasternak foundation under inclined dynamic load. **acta mechanica solida sinica**, Elsevier, v. 30, n. 6, p. 596–607, 2017.

MILENKOVIĆ, B.; KARLIČIĆ, D.; JOVANOVIĆ, ■. Determination of natural frequency and amplitude ratio of a rayleigh double beam system with a keer middle layer subjected to compressive axial load. Technical faculty “Mihajlo Pupin”, Zrenjanin, University of Novi Sad, 2021.

MINDLIN, R. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. American Society of Mechanical Engineers, 1951.

MIRZABEIGY, A.; DABBAGH, V.; MADOLIAT, R. Explicit formulation for natural frequencies of double-beam system with arbitrary boundary conditions. **Journal of Mechanical Science and Technology**, Springer, v. 31, n. 2, p. 515–521, 2017.

MOHAMMADI, N.; NASIRSHOAIBI, M. Forced transverse vibration analysis of a rayleigh double-beam system with a pasternak middle layer subjected to compressive axial load. **Journal of vibroengineering**, JVE International Ltd., v. 17, n. 8, p. 4545–4559, 2015.

MORFIDIS, K. Research and development of methods for the modeling of foundation structural elements and soil. **Thessaloniki: Aristotle University of Thessaloniki**, 2003.

MORFIDIS, K. Exact matrices for beams on three-parameter elastic foundation. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 85, n. 15-16, p. 1243–1256, 2007.

MORFIDIS, K. Vibration of timoshenko beams on three-parameter elastic foundation. **Computers & structures**, Elsevier, v. 88, n. 5-6, p. 294–308, 2010.

MOURELATOS, Z. P.; PARSONS, M. G. A finite element analysis of beams on elastic foundation including shear and axial effects. **Computers & structures**, Elsevier, v. 27, n. 3, p. 323–331, 1987.

NASIRSHOAIBI, M.; MOHAMMADI, N. Effects of pasternak layer on forced transverse vibration of a timoshenko double-beam system with compressive axial load. v. 10, p. 6686–6704, 01 2015.

NEVEL, D. E. **A semi-infinite plate on an elastic foundation**. [*S.l.*]: US Army Materiel Command, Cold Regions Research & Engineering Laboratory, 1965.

ONISZCZUK, Z. Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 232, n. 2, p. 387–403, 2000.

ONISZCZUK, Z. Forced transverse vibrations of an elastically connected complex simply supported double-beam system. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 264, n. 2, p. 273–286, 2003.

ÖZDEMIR, Y. Dynamic analysis of thick plates resting on winkler foundation using a new finite element. **Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering**, Springer, v. 44, n. 1, p. 69–79, 2020.

OZGAN, K.; DALOGLU, A. T. Alternative plate finite elements for the analysis of thick plates on elastic foundations. **Structural engineering and mechanics: An international journal**, v. 26, n. 1, p. 69–86, 2007.

PAIVA, J. B. de. **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas**. Thesis (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1987.

PALIWAL, D.; GHOSH, S. K. Stability of orthotropic plates on a kerr foundation. **AIAA journal**, v. 38, n. 10, p. 1994–1997, 2000.

PASSOS, J. J. S. dos. **Análise da Estabilidade Estática e Dinâmica de vigas pelo Método dos Elementos de Contorno**. Dissertation (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2014.

PASTERNAK, P. On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two-constants [dissertation]. **Moscow, USSR: Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitecture**, 1954.

PEACH, R. W. **"Bending stresses in a continuous semi-infinite ice field" in Investigation of structural stresses in ice-breaking vessels**. [*S.l.*]: Office of Naval Research, U. S. Navy, Appendix C, Section d., 1950.

PROVIDAKIS, C.; BESKOS, D. Dynamic analysis of beams by the boundary element method. **Computers & structures**, Elsevier, v. 22, n. 6, p. 957–964, 1986.

RADEŞ, M. Steady-state response of a finite beam on a pasternak-type foundation. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 6, n. 6, p. 739–756, 1970.

RADEŞ, M. Dynamic response of a rigid circular plate on a kerr-type foundation model. **International Journal of Engineering Science**, Elsevier, v. 9, n. 11, p. 1061–1073, 1971.

RADEŞ, M. Forced vibrations of a rigid body on a three-parameter foundation. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 13, n. 7, p. 573–583, 1971.

RAHMAN, A. A. A. Closed formed solution for thick plates resting on kerr foundation. **Int. J. Appl. Eng. Res.**, v. 12, n. 22, p. 12133–12143, 2017.

RAO, G. V.; RAJU, K. K. Elegant and accurate closed form solutions to predict vibration and buckling behaviour of slender beams on pasternak foundation. NISCAIR-CSIR, India, 2002.

RAO, S. Natural vibrations of systems of elastically connected timoshenko beams. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 55, n. 6, p. 1232–1237, 1974.

RASHED, Y.; ALIABADI, M.; BREBBIA, C. A boundary element formulation for a reissner plate on a pasternak foundation. **Computers & Structures**, v. 70, n. 5, p. 515–532, 1999. ISSN 0045-7949.

RASHED, Y. F.; ALIABADI, M.; BREBBIA, C. The boundary element method for thick plates on a winkler foundation. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 41, n. 8, p. 1435–1462, 1998.

RAZAQPUR, A. G.; SHAH, K. Exact analysis of beams on two-parameter elastic foundations. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 27, n. 4, p. 435–454, 1991.

REDDY, J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. **Journal of applied mechanics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 51, n. 4, p. 745–752, 1984.

REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. American Society of Mechanical Engineers, 1945.

ROSA, M. D. Free vibrations of timoshenko beams on two-parameter elastic foundation. **Computers & structures**, Elsevier, v. 57, n. 1, p. 151–156, 1995.

SADD, M. H. **Elasticity: theory, applications, and numerics**. [*S.l.*]: Academic Press, 2009.

SEELIG, J.; HOPPMANN, W. Impact on an elastically connected double-beam system. **Journal of Applied Mechanics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 31, n. 4, p. 621–626, 1964.

SEELIG, J.; HOPPMANN, W. Normal mode vibrations of systems of elastically connected parallel bars. **The Journal of the Acoustical Society of America**, ASA, v. 36, n. 1, p. 93–99, 1964.

SHEN, H.-S.; YANG, J.; ZHANG, L. Free and forced vibration of reissner–mindlin plates with free edges resting on elastic foundations. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 244, n. 2, p. 299–320, 2001.

SIGUEIRA, L.; CORTEZ, R. L.; HOEFEL, S. Vibration analysis of an axial-loaded euler-bernoulli beam on two-parameter foundation. *In*: **25th ABCM International congress of Mechanical Engineering, Uberlandia, Brazil**. **Proceedings** [...]. [*S.l.: s.n.*], 2019. p. 1–4.

SOARES, L. S.; BEZERRA, W. K. da S.; HOEFEL, S. dos S. Dynamic analysis of timoshenko beam on pasternak foundation. *In*: **Proceeding of XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianópolis, SC, Brazil**. **Proceedings** [...]. [*S.l.: s.n.*], 2017.

SOUZA, M. M. d. Formulação do método dos elementos de contorno para placas delgadas apoiadas em bases elásticas de kerr. Universidade Federal da Paraíba, 2019.

STOJANOVIĆ, V.; KOZIĆ, P.; JANEVSKI, G. Exact closed-form solutions for the natural frequencies and stability of elastically connected multiple beam system using timoshenko and high-order shear deformation theory. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 332, n. 3, p. 563–576, 2013.

STOJANOVIĆ, V.; KOZIĆ, P.; PAVLOVIĆ, R.; JANEVSKI, G. Effect of rotary inertia and shear on vibration and buckling of a double beam system under compressive axial loading. **Archive of Applied Mechanics**, Springer, v. 81, n. 12, p. 1993–2005, 2011.

SVEC, O. J. Thick plates on elastic foundations by finite elements. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, American Society of Civil Engineers, v. 102, n. 3, p. 461–477, 1976.

TANAHASHI, H. Formulas for an infinitely long bernoulli-euler beam on the pasternak model. **Soils and foundations**, Elsevier, v. 44, n. 5, p. 109–118, 2004.

TIMOSHENKO, S. **Theory of elasticity**. [*S.l.*]: McGraw-Hill, 1951. (Engineering societies monographs).

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. *et al.* **Theory of plates and shells**. [*S.l.*]: McGraw-hill New York, 1959.

TIMOSHENKO, S. P. Lxvi. on the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 41, n. 245, p. 744–746, 1921.

WANG, C.; REDDY, J. N.; LEE, K. **Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions**. [*S.l.*]: Elsevier, 2000.

WANG, C.; REDDY, J. N.; LEE, K. **Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions**. [*S.l.*]: Elsevier, 2000.

WANG, T.; STEPHENS, J. Natural frequencies of timoshenko beams on pasternak foundations. **Journal of Sound Vibration**, v. 51, n. 2, p. 149–155, 1977.

WESTERGAARD, M. M. **Om beregning af plader paa elastisk underlag med saerligt henblik paa sporgsmaalet om spaendinger i betonveje**. [*S.l.*]: Ingenioren, 1923.

WILLIAMS, F.; KENNEDY, D. Exact dynamic member stiffnesses for a beam on an elastic foundation. **Earthquake engineering & structural dynamics**, Wiley Online Library, v. 15, n. 1, p. 133–136, 1987.

WINKLER, E. **Die lehrevon elastizitat und festigkeit (On elasticity and fixity)**. [*S.l.*]: Prague, 1867.

WU, Y.; GAO, Y. Analytical solutions for simply supported viscously damped double-beam system under moving harmonic loads. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 141, n. 7, p. 04015004, 2015.

XIANG, Y.; WANG, C.; KITIPORNCHAI, S. Exact vibration solution for initially stressed mindlin plates on pasternak foundations. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 36, n. 4, p. 311–316, 1994. ISSN 0020-7403.

XIAOBIN, L.; SHUANGXI, X.; WEIGUO, W.; JUN, L. An exact dynamic stiffness matrix for axially loaded double-beam systems. **Sadhana**, Springer, v. 39, n. 3, p. 607–623, 2014.

XIE, H.; GONG, W.; ZHOU, D. Analysis of elastic plate resting on winkler foundation subjected to moving load by isoparametric element method. **ROCK AND SOIL MECHANICS-WUHAN-**, JOURNAL OFFICE OF ROCK AND SOIL MECHANICS, v. 28, n. 7, p. 1495, 2007.

XU, Y.; WANG, N. Transverse free vibration of euler-bernoulli beam with pre-axial pressure resting on a variable pasternak elastic foundation under arbitrary boundary conditions. **Latin American Journal of Solids and Structures**, SciELO Brasil, v. 17, 2020.

YANKELEVSKY, D. Z.; EISENBERGER, M. Analysis of a beam column on elastic foundation. **Computers & structures**, Elsevier, v. 23, n. 3, p. 351–356, 1986.

YETTRAM, A.; WHITEMAN, J.; HENWOOD, D. Effect of thickness on the behaviour of plates on foundations. **Computers & structures**, Elsevier, v. 19, n. 4, p. 501–509, 1984.

YU, L.; WANG, C. Buckling of rectangular plates on an elastic foundation using the levy method. **AIAA journal**, v. 46, n. 12, p. 3163–3167, 2008.

YU, Y.-Y. Axisymmetrical bending of circular plates under simultaneous action of lateral load, force in the middle plane, and elastic foundation. **Journal of Applied Mechanics**, v. 24, n. 1, p. 141–143, 06 2021. ISSN 0021-8936.

ZENG, X.; ZHU, A.; DENG, A. Natural element method for analysis of thick plates lying over winkler foundations. **Chinese Journal of Solid Mechanics**, v. 29, n. 2, p. 163–169, 2008.

ZHANG, Y.; LU, Y.; WANG, S.; LIU, X. Vibration and buckling of a double-beam system under compressive axial loading. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 318, n. 1-2, p. 341–352, 2008.

ZHANG, Z.; HUANG, X.; ZHANG, Z.; HUA, H. On the transverse vibration of timoshenko double-beam systems coupled with various discontinuities. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 89, p. 222–241, 2014.

ZHAO, X.; CHEN, B.; LI, Y.; ZHU, W.; NKIEGAING, F.; SHAO, Y. Forced vibration analysis of timoshenko double-beam system under compressive axial load by means of green's functions. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 464, p. 115001, 2020.

ZHAOHUA, F.; COOK, R. D. Beam elements on two-parameter elastic foundations. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 109, n. 6, p. 1390–1402, 1983.

ZIENKIEWICZ, O. **The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics: Numerical Solution of Problems in Structural and Contimuum Mechanics**. [*S.l.: s.n.*], 1967.

# Apêndice A

# Soluções analíticas de vigas

A partir das equações governantes obtidas no capítulo 2, para as diferentes teorias de vigas, serão obtidas as soluções analíticas de vigas simples e duplas conectadas pela camada de Kerr considerando as bordas simplesmente apoiadas, via séries de Fourier.

## A.1 Extremidades simplesmente apoiadas

Considerando que o carregamento aplicado transversalmente será sinusoidal, a expressão para quando for uniformemente distribuído ao longo da viga será dada por:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{4g}{n\pi} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{A.1}$$

onde $g$ é a intensidade do carregamento aplicado.

Caso atue uma carga em um ponto de coordenada $\hat{x}$ qualquer da viga, então a equação do carregamento fica:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2p}{L} sen\left(\frac{n\pi \hat{x}}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{A.2}$$

onde $\hat{x}$ corresponde ao ponto de aplicação da carga pontual e $x$ o ponto de medição do efeito.

O sistema algébrico para determinação dos deslocamentos e esforços nos diferentes tipos de problemas e teorias de vigas serão apresentadas nas seções subsequentes.

### A.1.1 Viga de Euler-Bernoulli sobre fundação de Kerr

Sabendo que as extremidades da viga e da camada cisalhante estão simplesmente apoiadas, $w(0) = w(L) = v(0) = v(L)$, e ainda $M(0) = M(L)$, então as funções para representar os deslocamentos serão:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{N} A sen\left(\lambda_n x\right), \tag{A.3}$$

$$v(x) = \sum_{n=1}^{N} B sen\left(\lambda_n x\right), \tag{A.4}$$

sendo $w$ e $v$ são os deslocamentos transversais da viga e da camada de cisalhamento da fundação elástica de Kerr, respectivamente, e $\lambda_n = n\pi/L$.

Substituindo as Eqs.(A.3) e (A.4) na equação governante do problema real de Euler-Bernoulli sobre fundação elástica de Kerr, Eq.(2.88) a (2.89), tem-se:

$$EI\frac{d^4}{dx^4}\left[\sum_{n=1}^{N} A sen\left(\lambda_n x\right)\right] + P\frac{d^2}{dx^2}\left[\sum_{n=1}^{N} A sen\left(\lambda_n x\right)\right] + k_c \sum_{n=1}^{N} A sen\left(\lambda_n x\right) +$$
$$-k_c \sum_{n=1}^{N} B sen\left(\lambda_n x\right) = g, \tag{A.5}$$

$$-k_c\left(\sum_{n=1}^{N} A sen\left(\lambda_n x\right) - \sum_{n=1}^{N} B sen\left(\lambda_n x\right)\right) - G_s\frac{d^2}{dx^2}\left[\sum_{n=1}^{N} B sen\left(\lambda_n x\right)\right] +$$
$$+k_k \sum_{n=1}^{N} B sen\left(\lambda_n x\right) = 0. \tag{A.6}$$

Fazendo as devidas derivações e manipulações nas Eqs.(A.5) e (A.6), obtem-se:

$$\sum_{n=1}^{N}\left[EI\lambda_n^4 A - P\lambda_n^2 A + k_c\left(A - B\right)\right] sen\left(\lambda_n x\right) = g, \tag{A.7}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\left[-k_c\left(A - B\right) + G_s\lambda_n^2 B + k_k B\right] sen\left(\lambda_n x\right) = 0. \tag{A.8}$$

A partir das Eqs.(A.7) e (A.8), monta-se o sistema para determinar as constantes $A$ e $B$:

$$\sum_{n=1}^{N}\left\{\begin{array}{c} A \\ \\ B \end{array}\right\} = \sum_{n=1}^{N} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^{-1}\left[\begin{array}{cc} EI\lambda_n^4 - P\lambda_n^2 + k_c & -k_c \\ \\ -k_c & G_s\lambda_n^2 + k_c + k_k \end{array}\right]^{-1}\left\{\begin{array}{c} g(x) \\ \\ 0 \end{array}\right\} \tag{A.9}$$

onde $g(x)$ é dado segundo Eq.(A.1) ou Eq. (A.2) a depender se o carregamento é uniformemente distribuído ou concentrado, respectivamente. Sendo a inclinação da elástica dada pela derivada da equação Eq.(A.3) e ainda, o momento fletor e esforços cortantes conforme Eqs.(2.83) a (2.85), respectivamente, então:

$$\frac{dw}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{N} A\lambda_n cos\left(\lambda_n x\right), \tag{A.10}$$

$$M_i(x) = EI \sum_{n=1}^{N} A\lambda_n^2 sen\left(\lambda_n x\right), \tag{A.11}$$

$$V_i(x) = \sum_{n=1}^{N} A\left(EI\lambda_n^3 - P\lambda_n\right) cos\left(\lambda_n x\right), \tag{A.12}$$

$$V_k(x) = \sum_{n=1}^{N} BG_s\lambda_n cos\left(\lambda_n x\right) \tag{A.13}$$

### A.1.2 Viga de Timoshenko sobre fundação de Kerr

Considerando as hipóteses de Timoshenko, para o caso simplesmente apoiado as funções que representam os deslocamentos e rotações serão:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{N} Asen\left(\lambda_n x\right), \tag{A.14}$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{N} Bcos\left(\lambda_n x\right), \tag{A.15}$$

$$v(x) = \sum_{n=1}^{N} Csen\left(\lambda_n x\right), \tag{A.16}$$

onde $\lambda_n = n\pi/L$. Substituindo as Eqs.(A.14) a (A.16) na equação governante do problema real de Timoshenko, Eqs.(2.105) a (2.107), então:

$$\sum_{n=1}^{N}\left[-\kappa GA\left(\frac{d}{dx}\left\langle Bcos\left(\lambda_n x\right)\right\rangle + \frac{d^2}{dx^2}\left\langle Asen\left(\lambda_n x\right)\right\rangle\right) + k_c Asen\left(\lambda_n x\right) + \right.$$
$$\left. -k_c Csen\left(\lambda_n x\right) + P\frac{d^2}{dx^2}\left\langle Asen\left(\lambda_n x\right)\right\rangle\right] = g \tag{A.17}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\kappa GA\left(Bcos\left(\lambda_n x\right) + \frac{d}{dx}\left\langle Asen\left(\lambda_n x\right)\right\rangle\right) - EI\frac{d^2}{dx^2}\left\langle Bcos\left(\lambda_n x\right)\right\rangle\right] = m \tag{A.18}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\left[-k_c\left(A - C\right) sen\left(\lambda_n x\right) - G_s\frac{d^2}{dx^2}\left\langle Csen\left(\lambda_n x\right)\right\rangle + k_k Csen\left(\lambda_n x\right)\right] = 0. \tag{A.19}$$

Fazendo as derivadas e após algumas manipulações nas Eqs.(A.17) a (A.19), monta-se o sistema para determinar as constantes $A$, $B$ e $C$:

$$\sum_{n=1}^{N}\left\{\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\right\} = \sum_{n=1}^{N}\left[\begin{array}{ccc} D_1\lambda_n^2 + k_c - P\lambda_n^2 & D_1\lambda_n & -k_c \\ D_1\lambda_n & D_1 + D_2\lambda_n^2 & 0 \\ -k_c & 0 & G_s\lambda_n^2 + k_c + k_k \end{array}\right]^{-1} [T]^{-1}\left\{\begin{array}{c} g(x) \\ m(x) \\ 0 \end{array}\right\} \quad \text{(A.20)}$$

onde $D_1 = \kappa GA$ e $D_2 = EI$, $g(x)$ e $m(x)$ são o carregamento transversal e o momento fletor atuantes na viga, e a matriz $[T]$ é dada por:

$$[T] = \left[\begin{array}{ccc} sen\,(\lambda_n x) & 0 & 0 \\ 0 & cos\,(\lambda_n x) & 0 \\ 0 & 0 & sen\,(\lambda_n x) \end{array}\right] \quad \text{(A.21)}$$

De posse dos coeficientes $A$, $B$ e $C$, torna-se possível a determinação dos deslocamentos e rotações dadas pelas Eqs.(A.14) a (A.16), bem como a determinação dos esforços segundo Eqs.(2.102), (2.103) e (2.104):

$$V(x) = \sum_{n=1}^{N}\left[D_1\left(B + A\lambda_n\right) - PA\lambda_n\right] cos\,(\lambda_n x) \quad \text{(A.22)}$$

$$M(x) = -D_2\sum_{n=1}^{N} B\lambda_n sen\,(\lambda_n x) \quad \text{(A.23)}$$

$$V_k(x) = G_s\sum_{n=1}^{N} C\lambda_n cos\,(\lambda_n x) \quad \text{(A.24)}$$

### A.1.3 Vigas duplas de Euler-Bernoulli conectadas por base de Kerr

Considerando que as extremidades simplesmente estão simplesmente apoiadas, as função para os deslocamentos serão

$$w_i = \sum_{n=1}^{N} A_i sen\,(k_n \cdot x) \quad \text{(A.25)}$$

$$v = \sum_{n=1}^{N} A_3 sen\,(k_n \cdot x)\,, \quad \text{(A.26)}$$

onde $k_n = n\pi/L$ e o índice $i = 1, 2$ diz respeito as vigas superior e inferior, respectivamente. Substituindo as Eqs.(A.25) e (A.25) na equação governante do sistema de vigas duplo

conectadas por base de Kerr, Eqs.(2.94) a (2.96), obtem-se

$$A_1 E_1 I_1 \sum_{n=1}^{N} \frac{d^4}{dx^4} sen\left(k_n \cdot x\right) + A_1 P_1 \sum_{n=1}^{N} \frac{d^2}{dx^2} sen\left(k_n \cdot x\right) +$$

$$+ \left(A_1 - A_3\right) k_c \sum_{n=1}^{N} sen\left(k_n \cdot x\right) = g \tag{A.27}$$

$$A_2 E_2 I_2 \sum_{n=1}^{N} \frac{d^4}{dx^4} sen\left(k_n \cdot x\right) + A_2 P_2 \sum_{n=1}^{N} \frac{d^2}{dx^2} sen\left(k_n \cdot x\right) +$$

$$+ \left(A_2 - A_3\right) k_k \sum_{n=1}^{N} sen\left(k_n \cdot x\right) = 0 \tag{A.28}$$

$$-A_3 Gs \sum_{n=1}^{N} \frac{d^2}{dx^2} sen\left(k_n \cdot x\right) + \left(A_3 - A_1\right) k_c \sum_{n=1}^{N} sen\left(k_n \cdot x\right) +$$

$$0 + \left(A_3 - A_2\right) k_k \sum_{n=1}^{N} sen\left(k_n \cdot x\right) = 0 \tag{A.29}$$

Resolvendo as derivadas, chega-se a

$$\sum_{n=1}^{N} \left[A_1 E_1 I_1 k_n^4 - A_1 P_1 k_n^2 + \left(A_1 - A_3\right) k_c\right] sen\left(k_n \cdot x\right) = g \tag{A.30}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \left[A_2 E_2 I_2 k_n^4 - A_2 P_2 k_n^2 + \left(A_2 - A_3\right) k_k\right] sen\left(k_n \cdot x\right) = 0 \tag{A.31}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \left[A_3 G_s k_n^2 + \left(A_3 - A_1\right) k_c + \left(A_3 - A_2\right) k_k\right] sen\left(k_n \cdot x\right) = 0 \tag{A.32}$$

Dessa forma, o sistema algébrico

$$\sum_{n=1}^{N} \begin{bmatrix} k_c + D1 k_n^4 - P_1 k_n^2 & 0 & -k_c \\ 0 & k_k + D2 k_n^4 - P_2 k_n^2 & -k_k \\ -k_c & -k_k & k_c + k_k + Gs k_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} sen\left(k_n x\right) = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{A.33}$$

Por meio das Eqs.(2.97) a (2.99), os momentos fletores e esforços cortantes serão dados

por:

$$M_j(x) = E_j I_j \sum_{n=1}^{N} A_j k_n^2 sen(k_n \cdot x) \tag{A.34}$$

$$V_j(x) = E_j I_j \sum_{n=1}^{N} A_j k_n^3 cos(k_n \cdot x) - P_j \sum_{n=1}^{N} A_j k_n cos(k_n \cdot x) \tag{A.35}$$

$$V_k(x) = G_s \sum_{n=1}^{N} A_3 k_n cos(k_n \cdot x) \tag{A.36}$$

### A.1.4 Vigas duplas de Timoshenko conectadas por base de Kerr

Os deslocamentos e rotações do sistema de vigas dupla conectadas por base de Kerr podem ser definidas via séries de Fourier, ao qual para o caso simplesmente apoiado, tem-se

$$wi = \sum_{n=1}^{N} A_{n_i} sen(k_n x), \tag{A.37}$$

$$\phi i = \sum_{n=1}^{N} B_{n_i} cos(k_n x), \tag{A.38}$$

$$v = \sum_{n=1}^{N} C sen(k_n x), \tag{A.39}$$

onde $k_n = n\pi/L$ e o índice $i = 1, 2$ diz respeito as vigas superior e inferior, respectivamente. Substituindo as Eqs.(A.37) a (A.39) na equação governante do sistema de vigas duplo,

Eqs.(2.111) a (2.115), obtem-se

$$(P_1 - D_1)\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=1}^{N} A_{n_1} sen\,(k_n x) - D_1\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{N} B_{n_1} sen\,(k_n x) +$$
$$+k_c\sum_{n=1}^{N}(A_{n_1} - C)\,sen\,(k_n x) = 0, \tag{A.40}$$
$$-D_2\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=1}^{N} B_{n_1} sen\,(k_n x) + D_1\frac{d^1}{dx^1}\sum_{n=1}^{N} A_{n_1} sen\,(k_n x) +$$
$$+D_1\sum_{n=1}^{N} B_{n_1} sen\,(k_n x) = 0, \tag{A.41}$$
$$(P_2 - D_3)\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=1}^{N} A_{n_2} sen\,(k_n x) - D_3\frac{d^1}{dx^1}\sum_{n=1}^{N} B_{n_2} sen\,(k_n x) +$$
$$+k_k\sum_{n=1}^{N}(A_{n_2} - C)\,sen\,(k_n x) = 0, \tag{A.42}$$
$$-D_4\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=1}^{N} B_{n_2} sen\,(k_n x) + D_3\frac{d^1}{dx^1}\sum_{n=1}^{N} A_{n_2} sen\,(k_n x) +$$
$$+D_3\sum_{n=1}^{N} B_{n_2} sen\,(k_n x) = 0, \tag{A.43}$$
$$-G_s\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=1}^{N} C sen\,(k_n x) + (k_c + k_k)\sum_{n=1}^{N} C sen\,(k_n x) +$$
$$-k_c\sum_{n=1}^{N} A_{n_1} sen\,(k_n x) - k_k\sum_{n=1}^{N} A_{n_2} sen\,(k_n x) = 0. \tag{A.44}$$

Resolvendo-se as derivadas das Eqs.(A.40) a (A.44), pode-se reescrevê-las como sendo:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\left(D_1 - P_1\right)k_n^2 A_{n_1} + D_1 k_n B_{n_1} + k_c\left(A_{n_1} - C\right)\right) sen\,(k_n x) = 0 \tag{A.45}$$
$$\sum_{n=1}^{N}\left(D_2 k_n^2 B_{n_1} + D_1 k_n A_{n_1} + D_1 B_{n_1}\right) cos\,(k_n x) = 0 \tag{A.46}$$
$$\sum_{n=1}^{N}\left(\left(D_3 - P_2\right)k_n^2 A_{n_2} + D_3 k_n B_{n_2} + k_k A_{n_2} - k_k C\right) sen\,(k_n x) = 0 \tag{A.47}$$
$$\sum_{n=1}^{N}\left(D_4 k_n^2 B_{n_2} + D_3 k_n A_{n_2} + D_3 B_{n_2}\right) cos\,(k_n x) = 0 \tag{A.48}$$
$$\sum_{n=1}^{N}\left(G_s k_n^2 C + \left(k_c + k_k\right)C - k_c A_{n_1} - k_k A_{n_2}\right) sen\,(k_n x) = 0 \tag{A.49}$$

Dessa forma, o sistema algébrico para cálculo das constantes ficará:

$$\begin{bmatrix} (D_1 - P_1)\,k_n^2 + k_c & D_1 k_n & 0 & 0 & -k_c \\ D_1 k_n & D_2 k_n^2 + D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (D_3 - P_2)\,k_n^2 + k_k & D_3 k_n & -k_k \\ 0 & 0 & D_3 k_n & D_4 k_n^2 + D_3 & 0 \\ -k_c & 0 & -k_k & 0 & G_s k_n^2 + k_c + k_k \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{Bmatrix} A_{n_1} \\ B_{n_1} \\ A_{n_2} \\ B_{n_2} \\ C \end{Bmatrix} [T] = \begin{Bmatrix} g1 \\ m1 \\ g2 \\ m2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{A.50}$$

onde a matriz T é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} sen\,(k_n x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,(k_n x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sen\,(k_n x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos\,(k_n x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sen\,(k_n x) \end{bmatrix} \tag{A.51}$$

Por meio das Eqs.(2.116) a (2.118), obtem-se os momentos fletores e esforços cortantes nas vigas e camada cisalhante:

$$M_j\,(x) = -\sum_{n=1}^{N} D_{2j} B_{n_i} k_n sen\,(x k_n) \tag{A.52}$$

$$V_j\,(x) = \sum_{n=1}^{N} \left[ D_{2j-1}\,(B_{n_i} + k_n A_{n_i}) - P_j A_{n_j} k_n \right] cos\,(k_n x) \tag{A.53}$$

$$V_k\,(x) = G_s \sum_{n=1}^{N} C k_n cos\,(x k_n) \tag{A.54}$$

# Apêndice B

# Solução analítica placa sobre camada de Kerr

## B.1 Placa retangular simplesmente apoiada

### B.1.1 Pela teoria de Kircchoff

Considere que uma placa de dimensões $a, b$ apoiada em camada elástica de Kerr tenha todas as bordas da placa e da camada de cisalhamento simplesmente apoiadas. As soluções em termos de deslocamentos são dadas por:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} A_{mn} sen\left(k_m x_1\right) sen\left(k_n x_2\right), \tag{B.1}$$

$$v(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} D_{mn} sen\left(k_m x_1\right) sen\left(k_n x_2\right), \tag{B.2}$$

onde $k_m = m\pi/a$, $k_n = n\pi b$, $w$ é o deslocamentos transversal da placa e $v$ o deslocamento na camada de cisalhamento.

Substituindo as eqs.(B.1) e (B.2) na equação governante do problema (6.43) e fazendo as devidas manipulações matemáticas, chega-se a:

$$A_{mn} = \frac{g_{mn}}{D\beta\left(\beta^2 + \frac{c+k}{G_k}\beta + \frac{c}{D}\right) + \frac{ck}{G_k}}\left(\beta + \frac{c+k}{G_k}\right), \tag{B.3}$$

$$B_{mn} = \frac{g_{mn}\ c}{DG_k\beta\left(\beta^2 + \frac{c+k}{G_k}\beta + \frac{c}{D}\right) + \frac{ck}{G_k}}, \tag{B.4}$$

onde $g_{mn}$ é dado em função do tipo do carregamento.

Considerando um carregamento uniformemente distribuído em todo o domínio da placa:

$$g_{mn} = \frac{16 g_0}{\pi^2 m\ n}, \tag{B.5}$$

onde $g$ é a intensidade do carregamento.

Se o carregamento for concentrado de intensidade $P$ aplicado em um ponto de coordenadas $(x_1^p, x_2^p)$, então:

$$g_{mn} = \frac{4P}{ab} sen\left(k_m x_1^p\right)\left(k_n x_2^p\right) \tag{B.6}$$

As inclinações do plano médio são obtidos derivando as equações em deslocamentos, assim

$$w_{,1}(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} A_{mn} k_m cos\left(k_m x_1\right) sen\left(k_n x_2\right), \tag{B.7}$$

$$w_{,2}(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} A_{mn} k_n sen\left(k_m x_1\right) cos\left(k_n x_2\right). \tag{B.8}$$

Já os momentos fletores serão dados por:

$$M_{11} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} D A_{mn} sen\left(k_m x_1\right) sen\left(k_n x_2\right)\left(k_m^2 + \nu k_n^2\right), \tag{B.9}$$

$$M_{22} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} D A_{mn} sen\left(k_m x_1\right) sen\left(k_n x_2\right)\left(k_n^2 + \nu k_m^2\right). \tag{B.10}$$

### B.1.2 Pela teoria de Mindlin

Considerando que todas as bordas da placa estejam simplesmente apoiadas, escreve-se as seguintes soluções para deslocamentos transversais e rotações:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} A_{mn} sen\left(k_m x_1\right) sen\left(k_n x_2\right), \tag{B.11}$$

$$\phi_x(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} B_{mn} cos\left(k_m x_1\right) sen\left(k_n x_2\right), \tag{B.12}$$

$$\phi_y(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} C_{mn} sen\left(k_m x_1\right) cos\left(k_n x_2\right), \tag{B.13}$$

$$v(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} D_{mn} sen\left(k_m x_1\right) sen\left(k_n x_2\right), \tag{B.14}$$

onde $k_m = m\pi/a$, $k_n = n\pi b$, $a$ e $b$ são os comprimentos da placa ao longo dos eixos $x_1$ e $x_2$, respectivamente, $w, \phi_x, \phi_y$ são os deslocamentos e rotações na placa e $v$ o deslocamento na camada de cisalhamento.

Substituindo as eqs.(B.11) a (B.14) na equação governante do problema de Mindlin sobre camada elástica de Kerr, eq.(6.65), obtém-se:

$$[SC]\begin{bmatrix} k_m s_1 & s_1+\beta+-b_1k_n^2 & b_1k_mk_n & 0 \\ k_n s_1 & b_1k_mk_n & \beta - b_1k_m^2 + s_1 & 0 \\ s_2+\beta s_1 & k_m s_1 & k_n s_1 & -s_2 \\ -s_2 & 0 & 0 & s_2+s_3+\beta s_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p_{mn}}{D} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{B.15}$$

onde $\beta = k_m^2 + k_n^2$ e

$$[SC] = \begin{bmatrix} C_m(x_1)S_n(x_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_m(x_1)C_n(x_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_m(x_1)S_n(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_m(x_1)S_n(x_2) \end{bmatrix} \tag{B.16}$$

sendo $C_j(x_k) = cos\left(k_j x_k\right)$, $S_j(x_k) = sen\left(k_j x_k\right)$.

$$A_{mn} = \frac{1}{\mu D}\left(\beta + s_1\right)\left(s_2 + s_3 + \beta s4\right)\left(\beta - b_1\beta + s_1\right), \tag{B.17}$$

$$B_{mn} = -\frac{k_m s_1}{\mu D}\left(s_2 + s_3 + \beta s4\right)\left(\beta - b_1\beta + s_1\right), \tag{B.18}$$

$$C_{mn} = -\frac{k_n s_1}{\mu D}\left(s_2 + s_3 + \beta s4\right)\left(\beta - b_1\beta + s_1\right), \tag{B.19}$$

$$D_{mn} = \frac{s_2}{\mu D}\left(\beta + s_1\right)\left(\beta - b_1\beta + s_1\right), \tag{B.20}$$

onde $\mu = \left[\left(1 - b_1\right)\beta + s_1\right]\left[s_1 s_4\beta^3 + \left(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_4\right)\beta^2 + \left(s_2 s_3 + s_1 s_2 s_4\right)\beta + s_1 s_2 s_3\right]$

Para o cálculo dos momentos fletores e voltente, recorre-se a:

$$M_{11} = -D\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} sen\left(k_m x_1\right) sen\left(k_n x_2\right)\left(B_{mn}k_m + C_{mn}k_n\nu\right), \tag{B.21}$$

$$M_{22} = -D\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} sen\left(k_m x_1\right) sen\left(k_n x_2\right)\left(C_{mn}k_n + B_{mn}k_m\nu\right). \tag{B.22}$$

Os carregamentos atuantes na placa serão dados conforme eqs.(B.5) e (B.6).

## B.2 Placa circular

### B.2.1 Pela teoria de Kirchhoff

A equação diferencial governante da placa de Kirchhoff sobre camada elástica de Kerr, em coordenadas polares, é dada por:

$$\begin{bmatrix} D\nabla^4 + c & -c \\ -c & -G_k\nabla^2 + c + k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w(r) \\ v(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g(r) \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{B.23}$$

onde $r$ é a coordenada ao longo do raio.

Considerando o problema axissimétrico, os esforços cortantes na placa e na camada de cisalhamento, em coordenadas polares, são expressos por:

$$Q_r(r) = -D\frac{d}{dr}\nabla w(r), \tag{B.24}$$

$$T_r(r) = G_k\frac{dv(r)}{dr}, \tag{B.25}$$

enquanto que o momento fletor é dado por

$$M_r(r) = -D\left[\nabla w(r) - \frac{1-\nu}{r}\frac{dw(r)}{dr}\right]. \tag{B.26}$$

Sendo a equação diferencial ordinária governante do problema acoplada, uma mudança de variável pode ser feita na equação homogênea, desacoplando-a. Dessa forma, assume-se que os deslocamentos na placa e na camada de cisalhamento sejam dados por:

$$w(r) = -G_k\nabla^2\psi(r) + (c+k)\,\psi(r), \tag{B.27}$$

$$v(r) = c\psi(r). \tag{B.28}$$

Substituindo as eqs.(B.27) e (B.28) na forma homogênea da equação governante do problema (B.23), obtém-se a equação desacoplada:

$$\left(\nabla^6 + a_2\nabla^4 + a_1\nabla^2 + a_0\right)\psi\left(r\right) = 0, \tag{B.29}$$

onde $a_2 = -\frac{(c+k)}{G_k}$ ,$a_1 = \frac{c}{D}$, $a_0 = -\frac{ck}{G_kD}$, cujas raízes foram apresentadas na seção 7.1. Assim, a depender da natureza das raízes da eq.(B.29), a solução será dada por:

$$\psi(r) = \sum_{n=1}^{3} A_n f_{n0}\left(r\right) + A_{(n+3)}h_{n0}\left(r\right), \tag{B.30}$$

onde as funções auxiliares $f_{nm}$ e $h_{nm}$ são apresentadas na tabela B.1 e dadas segundo os três possíveis casos:

I– quando uma raiz for real e positiva e as duas outras complexas conjugadas;

II– quando todas as raízes forem reais e positivas, com $z_2 = z_3$;

III– quando as três raízes forem reais e positivas distintas.

Com isso, baseados nas eqs.(B.27) e (B.28), as soluções homogêneas para os deslocamentos ficam:

$$w(r) = \sum_{n=1}^{3} A_n s_{n0}(r) + A_{(n+3)}p_{n0}(r), \tag{B.31}$$

$$v(r) = c\sum_{n=1}^{3} A_n f_{n0}(r) + A_{(n+3)}h_{n0}(r), \tag{B.32}$$

| Caso | I | | | |
|---|---|---|---|---|
| n | $f_{nm}$ | $g_{nm}$ | $h_{nm}$ | $t_{nm}$ |
| 1 | $x_{1m}K_0\left(\sqrt{z_1}r\right)$ | $x_{1m}K_1\left(\sqrt{z_1}r\right)$ | $x_{1m}I_0\left(\sqrt{z_1}r\right)$ | $x_{1m}I_1\left(\sqrt{z_1}r\right)$ |
| 2 | $Re\left(x_{2m}K_0\left(\sqrt{z_2}r\right)\right)$ | $Re\left(x_{2m}K_1\left(\sqrt{z_2}r\right)\right)$ | $Re\left(x_{2m}I_0\left(\sqrt{z_2}r\right)\right)$ | $Re\left(x_{2m}I_1\left(\sqrt{z_2}r\right)\right)$ |
| 3 | $Im\left(x_{3m}K_0\left(\sqrt{z_3}r\right)\right)$ | $Im\left(x_{3m}K_1\left(\sqrt{z_3}r\right)\right)$ | $Im\left(x_{3m}I_0\left(\sqrt{z_3}r\right)\right)$ | $Im\left(x_{3m}I_1\left(\sqrt{z_3}r\right)\right)$ |
| n | $s_{nm}$ | $r_{nm}$ | $p_{nm}$ | $q_{nm}$ |
| 1 | $\alpha_{1m}K_0\left(\sqrt{z_1}r\right)$ | $\alpha_{1m}K_1\left(\sqrt{z_1}r\right)$ | $\alpha_{1m}I_0\left(\sqrt{z_1}r\right)$ | $\alpha_{1m}I_1\left(\sqrt{z_1}r\right)$ |
| 2 | $Re\left(\alpha_{2m}K_0\left(\sqrt{z_2}r\right)\right)$ | $Re\left(\alpha_{2m}K_1\left(\sqrt{z_2}r\right)\right)$ | $Re\left(\alpha_{2m}I_0\left(\sqrt{z_2}r\right)\right)$ | $Re\left(\alpha_{2m}I_1\left(\sqrt{z_2}r\right)\right)$ |
| 3 | $Im\left(\alpha_{3m}K_0\left(\sqrt{z_3}r\right)\right)$ | $Im\left(\alpha_{3m}K_1\left(\sqrt{z_3}r\right)\right)$ | $Im\left(\alpha_{3m}I_0\left(\sqrt{z_3}r\right)\right)$ | $Im\left(\alpha_{3m}I_1\left(\sqrt{z_3}r\right)\right)$ |
| Caso | III | | | |
| n | $f_{nm}$ | $g_{nm}$ | $h_{nm}$ | $t_{nm}$ |
| 1 a 3 | $x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $x_{nm}K_1\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $x_{nm}I_1\left(\sqrt{z_n}r\right)$ |
| n | $s_{nm}$ | $r_{nm}$ | $p_{nm}$ | $q_{nm}$ |
| 1 a 3 | $\alpha_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_{nm}K_1\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_{nm}I_1\left(\sqrt{z_n}r\right)$ |

TABELA B.1 – Funções auxiliares relacionadas a cada combinação de raízes da equação desacoplada da placa de Kirchhoff sobre camada de Kerr.

enquanto que a inclinação do plano médio da placa é dada por:

$$\frac{dw(r)}{dr} = \sum_{n=1}^{3} -A_n r_{n1}(r) + A_{(n+3)} q_{n1}(r), \tag{B.33}$$

onde $\alpha_{nm} = \left[-G_k z_n + (c+k)\right] x_{nm}$, $x_{nm} = \left(\sqrt{z_n}\right)^m$ e as demais funções auxilares apresentadas na tabela B.1.

Já os esforços cortantes serão dados segundo as eqs.(B.24) e (B.25), ficando:

$$Q_r(r) = D \sum_{n=1}^{3} A_n r_{n3}(r) - A_{(n+3)} q_{n3}(r), \tag{B.34}$$

$$T_r(r) = G_k c \sum_{n=1}^{3} -A_n g_{n1}(r) + A_{(n+3)} t_{n1}(r), \tag{B.35}$$

enquanto que o momento fletor, eq.(B.26), passa a ser dado por:

$$M_r(r) = -D \sum_{n=1}^{3} \left\{ A_n s_{n2}(r) + A_{(n+3)} p_{n2}(r) - \frac{1-\nu}{r} \left[ -A_n r_{n1}(r) + A_{(n+3)} q_{n1}(r) \right] \right\}. \tag{B.36}$$

#### B.2.1.1 Placa submetida a carregamento distribuído

Para a situação onde a placa circular esteja submetida a um carregamento distribuído axissimétrico, são esperados valores finitos para os deslocamento no ponto central do problema. Consequentemente, as constantes $A_1$, $A_2$ e $A_3$ devem ser consideradas nulas.

Assim, as soluções homogêneas em deslocamentos passam a serem dadas por:

$$w(r) = \sum_{n=1}^{3} A_{(n+3)} p_{n0}(r), \tag{B.37}$$

$$v(r) = c \sum_{n=1}^{3} A_{(n+3)} h_{n0}(r), \tag{B.38}$$

$$\frac{dw(r)}{dr} = \sum_{n=1}^{3} A_{(n+3)} q_{n1}(r). \tag{B.39}$$

Da mesma forma, as soluções homogêneas em esforços serão dadas por:

$$Q_r(r) = -D \sum_{n=1}^{3} A_{(n+3)} q_{n3}(r), \tag{B.40}$$

$$T_r(r) = G_k c \sum_{n=1}^{3} A_{(n+3)} t_{n1}(r), \tag{B.41}$$

$$M_r(r) = -D \sum_{n=1}^{3} A_{(n+3)} \left[ p_{n2}(r) - \frac{1-\nu}{r} q_{n1}(r) \right]. \tag{B.42}$$

Já a solução particular da eq.(B.23) depende do tipo de carregamento considerado. No caso de um carregamento uniformemente distribuído $g(r) = g_0$ atuando na placa, as soluções particulares serão dadas por:

$$w_p(r) = \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{k} \right) g_0, \tag{B.43}$$

$$v_p(r) = \frac{g_0}{k}. \tag{B.44}$$

Com isso, agrupando a solução homogênea e particular, obtêm-se as soluções exatas para o cálculo dos deslocamentos e inclinação do plano médio em um ponto qualquer $r$ ao longo do raio da placa:

$$\left\{ \begin{array}{c} w(r) \\ \dfrac{dw(r)}{dr} \\ v(r) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} p_{10} & p_{20} & p_{30} \\ q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ ch_{10} & ch_{20} & ch_{30} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\} + g \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{k}\right) \\ 0 \\ \frac{1}{k} \end{array} \right\}, \tag{B.45}$$

ou ainda na forma compacta

$$\{U\} = [B] \left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\} + \{F_g\}, \tag{B.46}$$

sendo

$$\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} \phi(r) \\ w(r) \\ v(r) \end{array} \right\}, \; [B] = \left[ \begin{array}{ccc} p_{10} & p_{20} & p_{30} \\ q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ ch_{10} & ch_{20} & ch_{30} \end{array} \right], \; \{F_g\} = g \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{k}\right) \\ 0 \\ \frac{1}{k} \end{array} \right\}. \tag{B.47}$$

Já em termos de esforços, tem-se:

$$\{E\} = [T] \left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\}, \tag{B.48}$$

sendo

$$\{E\} = \left\{ \begin{array}{c} Q(r) \\ M(r) \\ T(r) \end{array} \right\}, \; [T] = \left[ \begin{array}{ccc} -Dq_{13} & -Dq_{13} & -Dq_{13} \\ -D\left[p_{12} - \frac{1-\nu}{r} q_{11}\right] & -D\left[p_{22} - \frac{1-\nu}{r} q_{21}\right] & -D\left[p_{32} - \frac{1-\nu}{r} q_{31}\right] \\ G_k ct_{11} & G_k ct_{21} & G_k ct_{31} \end{array} \right]. \tag{B.49}$$

#### B.2.1.2 Placa submetida a carga concentrada

Considere que a placa circular esteja submetida a uma carga concentrada $P$ aplicada no centro. Como discutido na seção B.2.1.1, dos seis coeficientes que há na eq.(B.30), três são determinados a partir das condições de contorno do problema enquanto que os demais são definidos a partir do tipo do carregamento atuante. Com isso, para o caso de carga concentrada, as equações adicionais podem ser obtidas utilizando as condições de equilíbrio e de axissimetria na vizinhança do centro da placa, segundo as relações:

$$\begin{aligned} &\lim_{r \to 0} 2\pi r Q_r - c(w - v)\pi r^2 + P = 0, \\ &\lim_{r \to 0} 2\pi r T_r + c(w - v)\pi r^2 - kv\pi r^2 = 0, \\ &\lim_{r \to 0} \frac{dw}{dr}(r) = 0. \end{aligned} \tag{B.50}$$

Substituindo as eqs.(B.31) a (B.35) nas eqs.(B.50), obtém-se a expressão:

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} = lim_{r \to 0} \left[ \begin{array}{ccc} -r \cdot r_{13} & -r \cdot r_{23} & -r \cdot r_{33} \\ r \cdot g_{11} & r \cdot g_{21} & r \cdot g_{31} \\ r_{11} & r_{21} & r_{31} \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{P}{2\pi D} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}. \tag{B.51}$$

Dessa forma, as soluções exatas para o cálculo dos deslocamentos e inclinação do plano médio em um ponto qualquer $r$ ao longo do raio da placa serão representadas pela equação

na forma compacta:

$$\{U\} = \left[\widehat{B}\right] \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} + [B] \left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\} + \{F_g\}\,. \tag{B.52}$$

onde $\{F_g\}$ é o vetor de carga uniformemente distribuído, eq.(B.47) e a matriz $\left[\widehat{B}\right]$ dada por:

$$\left[\widehat{B}\right] = \left[ \begin{array}{ccc} s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ -r_{11} & -r_{21} & -r_{31} \\ cf_{10} & cf_{20} & cf_{30} \end{array} \right]. \tag{B.53}$$

Já em termos de esforços, tem-se:

$$\{E\} = \left[\widehat{T}\right] \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} + [T] \left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\}, \tag{B.54}$$

onde

$$\left[\widehat{T}\right] = \left[ \begin{array}{ccc} Dr_{13} & Dr_{23} & Dr_{33} \\ -D\left[s_{12} + \frac{1-\nu}{r} r_{11}\right] & -D\left[s_{22} + \frac{1-\nu}{r} r_{21}\right] & -D\left[s_{32} + \frac{1-\nu}{r} r_{31}\right] \\ -G_k c g_{11} & -G_k c g_{21} & -G_k c g_{31} \end{array} \right]. \tag{B.55}$$

#### B.2.1.3 Aplicação das condições de contorno

Para a completa definição das eqs.(B.52) e (B.54), torna-se necessário definir o valor das constantes $A_4$, $A_5$ e $A_6$.

Para o caso onde as extremidades da placa estão engastadas, as condições de contorno prescritas são: $w\,(R) = v\,(R) = \dfrac{dw}{dr}(R) = 0$, sendo $R$ o raio da placa. Dessa forma, obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\} = -\,[B]^{-1} \left\{ \left[\widehat{B}\right] \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} + \{F_g\} \right\}. \tag{B.56}$$

Para o caso onde as extremidades da placa estão simplesmente apoiadas, as condições

de contorno são: $w\left(R\right) = v\left(R\right) = M_r(R) = 0$. Assim, obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\} = -\left[S\right]^{-1} \left\{ \left[\widehat{S}\right] \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} + \left\{F_g\right\} \right\}. \tag{B.57}$$

onde

$$\left[S(R)\right] = \left[ \begin{array}{ccc} p_{10} & p_{20} & p_{30} \\ -D\left[p_{12} - \frac{1-\nu}{r} q_{11}\right] & -D\left[p_{22} - \frac{1-\nu}{R} q_{21}\right] & -D\left[p_{32} - \frac{1-\nu}{R} q_{31}\right] \\ ch_{10} & ch_{20} & ch_{30} \end{array} \right], \tag{B.58}$$

$$\left\{\widehat{S}(R)\right\} = \left[ \begin{array}{ccc} s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ -D\left[s_{12} + \frac{1-\nu}{R} r_{11}\right] & -D\left[s_{22} + \frac{1-\nu}{R} r_{21}\right] & -D\left[s_{32} + \frac{1-\nu}{R} r_{31}\right] \\ cf_{10} & cf_{20} & cf_{30} \end{array} \right]. \tag{B.59}$$

### B.2.2 Pela teoria de Mindlin

A equação diferencial governante da placa de Mindlin sobre camada elástica de Kerr é dada, em coordenadas polares, por:

$$\left[ \begin{array}{ccc} -\left(\nabla^2 - s_1\right) & s_1 \frac{d}{dr} & 0 \\ -s_1\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) & -s_1\nabla^2 + s_2 & -s_2 \\ 0 & -s_2 & s_2 + s_3 - s_4\nabla^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \phi(r) \\ w(r) \\ v(r) \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{g(r)}{D} \\ 0 \end{array} \right\}. \tag{B.60}$$

onde $r$ é a coordenada ao longo do raio.

Se tratando do problema axissimétrico, os esforços cortantes na placa e na camada de cisalhamento, respectivamente, são expressos por:

$$Q_r(r) = \kappa G h \left(\phi(r) + \frac{dw(r)}{dr}\right) = D s_1 \left(\phi(r) + \frac{dw(r)}{dr}\right), \tag{B.61}$$

$$T_r(r) = G_k \frac{dv(r)}{dr}, \tag{B.62}$$

enquanto que o momento fletor na direção radial é dado por:

$$M_r(r) = D\left(\frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{\nu}{r}\phi(r)\right). \tag{B.63}$$

O desacoplamento da equação governante do problema é feito por meio de uma mudança de variável, por meio do qual se assume que as rotações e deslocamentos na placa,

e na camada de cisalhamento, respectivamente, sejam dados por:

$$\phi(r) = s_1 \frac{d}{dr}\left[s_4 \nabla^2 \psi(r) - (s_2 + s_3)\,\psi(r)\right], \tag{B.64}$$

$$w(r) = s_4 \nabla^2 \nabla^2 \psi(r) - (s_2 + s_3 + s_1 s_4)\,\nabla^2 \psi(r) + s_1\,(s_2 + s_3)\,\psi(r), \tag{B.65}$$

$$v(r) = -s_2\left(\nabla^2 \psi(r) - s_1\right). \tag{B.66}$$

Substituindo as eqs.(B.64) a (B.66) na forma homogênea da equação governante do problema (B.60), obtém-se:

$$a_3 \Delta^3 \psi(r) + a_2 \Delta^2 \psi(r) + a_1 \Delta \psi(r) + a_0 = 0, \tag{B.67}$$

onde $a_3 = -s_1 s_4$, $a_2 = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_4$ ,$a_1 = -s_2\,(s_3 + s_1 s_4)$, $a_0 = s_1 s_2 s_3$, $\Delta^n(\cdot) = \left(\nabla^2(\cdot)\right)^n$, cujas raízes foram apresentadas na seção 7.1. Assim, a depender da natureza das raízes da eq.(B.67), a solução será dada por:

$$\psi(r) = \sum_{n=1}^{3} A_n f_{n0}(r) + A_{(n+3)} h_{n0}(r), \tag{B.68}$$

onde as funções auxiliares $f_{nm}$ e $h_{nm}$ são apresentadas na tabela B.2 e dadas segundo os três possíveis casos:

I– quando uma raiz for real e positiva e as duas outras complexas conjugadas;

II– quando todas as raízes forem reais e positivas, com $z_2 = z_3$;

III– quando as três raízes forem reais e positivas distintas.

Com isso, baseados nas eqs.(B.64) a (B.66), as soluções homogêneas ficam:

$$\phi(r) = s_1 \sum_{n=1}^{3} A_n r_{n1}(r) - A_{(n+3)} q_{n1}(r), \tag{B.69}$$

$$w(r) = \sum_{n=1}^{3} A_n h_{n0}(r) + A_{(n+3)} t_{n0}(r), \tag{B.70}$$

$$v(r) = s_2 \sum_{n=1}^{3} A_n \widehat{s}_{n0}(r) + A_{(n+3)} \widehat{p}_{n0}(r), \tag{B.71}$$

onde $\alpha_n = -G_k z_n + (c + k)$, $\beta_n = s_1 - z_n$, $x_{nm} = \left(\sqrt{z_n}\right)^m$ e as demais funções auxilares apresentadas na tabela B.2.

Já os esforços cortantes da placa e da camada de cisalhamento, respectivamente, serão

| Caso | I | | | |
|---|---|---|---|---|
| n | $f_{nm}$ | $g_{nm}$ | $h_{nm}$ | $t_{nm}$ |
| 1 | $x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_n\beta_n x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_n\beta_n x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ |
| 2 | $Re\left(x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Re\left(x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Re\left(\alpha_n\beta_n x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Re\left(\alpha_n\beta_n x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ |
| 3 | $Im\left(x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Im\left(x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Im\left(\alpha_n\beta_n x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Im\left(\alpha_n\beta_n x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ |
| n | $s_{nm}$ | $r_{nm}$ | $p_{nm}$ | $q_{nm}$ |
| 1 | $\alpha_n x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_n x_{nm}K_1\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_n x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_n x_{nm}I_1\left(\sqrt{z_n}r\right)$ |
| 2 | $Re\left(\alpha_n x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Re\left(\alpha_n x_{nm}K_1\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Re\left(\alpha_n x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Re\left(\alpha_n x_{nm}I_1\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ |
| 3 | $Im\left(\alpha_n x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Im\left(\alpha_n x_{nm}K_1\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Im\left(\alpha_n x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Im\left(\alpha_n x_{nm}I_1\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ |
| n | $\widehat{s}_{nm}$ | $\widehat{r}_{nm}$ | $\widehat{p}_{nm}$ | $\widehat{q}_{nm}$ |
| 1 | $\beta_n x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\beta_n x_{nm}K_1\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\beta_n x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\beta_n x_{nm}I_1\left(\sqrt{z_n}r\right)$ |
| 2 | $Re\left(\beta_n x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Re\left(\beta_n x_{nm}K_1\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Re\left(\beta_n x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Re\left(\beta_n x_{nm}I_1\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ |
| 3 | $Im\left(\beta_n x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Im\left(\beta_n x_{nm}K_1\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Im\left(\beta_n x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ | $Im\left(\beta_n x_{nm}I_1\left(\sqrt{z_n}r\right)\right)$ |
| Caso | III | | | |
| n | $f_{nm}$ | $g_{nm}$ | $h_{nm}$ | $t_{nm}$ |
| 1 a 3 | $x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_n\beta_n x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_n\beta_n x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ |
| n | $s_{nm}$ | $r_{nm}$ | $p_{nm}$ | $q_{nm}$ |
| 1 a 3 | $\alpha_n x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_n x_{nm}K_1\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_n x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\alpha_n x_{nm}I_1\left(\sqrt{z_n}r\right)$ |
| n | $\widehat{s}_{nm}$ | $\widehat{r}_{nm}$ | $\widehat{p}_{nm}$ | $\widehat{q}_{nm}$ |
| 1 a 3 | $\beta_n x_{nm}K_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\beta_n x_{nm}K_1\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\beta_n x_{nm}I_0\left(\sqrt{z_n}r\right)$ | $\beta_n x_{nm}I_1\left(\sqrt{z_n}r\right)$ |

TABELA B.2 – Funções auxiliares relacionadas a cada combinação de raízes da equação desacoplada da placa de Mindlin sobre camada de Kerr.

dados segundo as eqs.(B.61) e (B.62), ficando:

$$Q_r(r) = Ds_1 \sum_{n=1}^{3} A_n r_{n3}(r) - A_{(n+3)} q_{n3}(r), \tag{B.72}$$

$$T_r(r) = -s_2 s_4 \sum_{n=1}^{3} A_n \widehat{r}_{n1}(r) - A_{(n+3)} \widehat{q}_{n1}(r), \tag{B.73}$$

enquanto que o momento fletor, eq.(B.63), passa a ser dado por:

$$M_r(r) = -Ds_1 \sum_{n=1}^{3} \left\{ A_n \left( s_{n2} + \frac{1-\nu}{r} r_{n1} \right) + A_{(n+3)} \left( p_{n2} - \frac{1-\nu}{r} q_{n1} \right) \right\}. \tag{B.74}$$

#### B.2.2.1 Placa submetida a carregamento distribuído

Considere que sobre a placa atue um carregamento distribuído $g(r) = g_0$. Como são esperados valores finitos para deslocamentos no ponto central do problema, as constantes $A_1$, $A_2$ e $A_3$ devem ser consideradas nulas. Com isso, as eqs.(B.69) a (B.71) passam a

serem dadas por:

$$\phi(r) = -s_1 \sum_{n=1}^{3} A_{(n+3)} q_{n1}(r), \tag{B.75}$$

$$w(r) = \sum_{n=1}^{3} A_{(n+3)} t_{n0}(r), \tag{B.76}$$

$$v(r) = s_2 \sum_{n=1}^{3} A_{(n+3)} \widehat{p}_{n0}(r). \tag{B.77}$$

Da mesma forma, as soluções homogêneas em esforços serão dadas por:

$$Q_r(r) = -Ds_1 \sum_{n=1}^{3} A_{(n+3)} q_{n3}(r), \tag{B.78}$$

$$T_r(r) = s_2 s_4 \sum_{n=1}^{3} A_{(n+3)} \widehat{q}_{n1}(r), \tag{B.79}$$

$$M_r(r) = -Ds_1 \sum_{n=1}^{3} A_{(n+3)} \left( p_{n2}(r) - \frac{1-\nu}{r} q_{n1}(r) \right). \tag{B.80}$$

Já as soluções particulares serão dadas por:

$$\phi_p(r) = 0 \tag{B.81}$$

$$w_p(r) = \left( \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \right) g_0, \tag{B.82}$$

$$v_p(r) = \frac{g_0}{s_3}. \tag{B.83}$$

Com isso, agrupando a solução homogênea e particular, obtêm-se as soluções exatas para cálculo dos deslocamentos e rotação do plano médio em um ponto qualquer $r$ ao longo do raio da placa:

$$\left\{ \begin{array}{c} \phi(r) \\ w(r) \\ v(r) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} -s_1 q_{11} & -s_1 q_{21} & -s_1 q_{31} \\ t_{10} & t_{20} & t_{30} \\ s_2 \widehat{p}_{10} & s_2 \widehat{p}_{20} & s_2 \widehat{p}_{30} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\} - g \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \left( \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \right) \\ \frac{1}{s_3} \end{array} \right\}, \tag{B.84}$$

ou ainda na forma compacta

$$\{U\} = [B] \left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\} + \{F_g\}, \tag{B.85}$$

sendo

$$\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} w(r) \\ \dfrac{dw(r)}{dr} \\ v(r) \end{array} \right\},\ [B] = \left[ \begin{array}{ccc} -s_1 q_{11} & -s_1 q_{21} & -s_1 q_{31} \\ t_{10} & t_{20} & t_{30} \\ s_2 \widehat{p}_{10} & s_2 \widehat{p}_{20} & s_2 \widehat{p}_{30} \end{array} \right],\ \{F_g\} = g \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \left(\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3}\right) \\ \frac{1}{s_3} \end{array} \right\}. \tag{B.86}$$

Já em termos de esforços, tem-se:

$$\{E\} = [T] \left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\}, \tag{B.87}$$

sendo

$$\{E\} = \left\{ \begin{array}{c} Q(r) \\ M(r) \\ T(r) \end{array} \right\},\ [T] = \left[ \begin{array}{ccc} -Ds_1 q_{13} & -Ds_1 q_{23} & -Ds_1 q_{33} \\ -Ds_1 \left(p_{12} - \frac{1-\nu}{r} q_{11}\right) & -Ds_1 \left(p_{22} - \frac{1-\nu}{r} q_{21}\right) & -Ds_1 \left(p_{32} - \frac{1-\nu}{r} q_{31}\right) \\ s_2 s_4 \widehat{q}_{11} & s_2 s_4 \widehat{q}_{21} & s_2 s_4 \widehat{q}_{31} \end{array} \right]. \tag{B.88}$$

#### B.2.2.2 Placa submetida a carga concentrada

Considere agora que a placa circular esteja submetida a uma carga concentrada $P$ aplicada no centro. Define-se as condições de equilíbrio e de axissimetria na vizinhança do centro da placa, segundo as relações:

$$\begin{aligned} &\lim_{r \to 0} 2\pi r Q_r - c(w - v)\pi r^2 + P = 0, \\ &\lim_{r \to 0} 2\pi r T_r + c(w - v)\pi r^2 - kv\pi r^2 = 0, \\ &\lim_{r \to 0} \phi\,(r) = 0. \end{aligned} \tag{B.89}$$

Substituindo as eqs.(B.69) a (B.73) nas eqs.(B.89), obtém-se a expressão:

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} = lim_{r \to 0} \left[ \begin{array}{ccc} r \cdot r_{13} & r \cdot r_{23} & r \cdot r_{33} \\ r \cdot \widehat{r}_{11} & r \cdot \widehat{r}_{21} & r \cdot \widehat{r}_{31} \\ r_{11} & r_{21} & r_{31} \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{-P}{2\pi\kappa G h} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}. \tag{B.90}$$

Assim, as soluções exatas para o cálculo dos deslocamentos e inclinação do plano médio em um ponto qualquer $r$ ao longo do raio da placa serão representadas pela equação na

forma compacta:

$$\{U\} = \left[\widehat{B}\right] \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} + [B] \left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\} + \{F_g\}\,. \tag{B.91}$$

onde $\{F_g\}$ é o vetor de carga uniformemente distribuído, eq.(B.86) e a matriz $\left\{\widehat{B}\right\}$ dada por:

$$\left\{\widehat{B}\right\} = \left[ \begin{array}{ccc} s_1 r_{11} & s_1 r_{21} & s_1 r_{31} \\ h_{10} & h_{20} & h_{30} \\ s_2 \widehat{s}_{10} & s_2 \widehat{s}_{20} & s_2 \widehat{s}_{30} \end{array} \right]. \tag{B.92}$$

Já em termos de esforços, tem-se:

$$\{E\} = \left[\widehat{T}\right] \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} + [T] \left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\}, \tag{B.93}$$

onde

$$\left[\widehat{T}\right] = \left[ \begin{array}{ccc} D s_1 r_{13} & D s_1 r_{23} & D s_1 r_{33} \\ -D s_1 \left(s_{12} + \frac{1-\nu}{r} r_{11}\right) & -D s_1 \left(s_{22} + \frac{1-\nu}{r} r_{21}\right) & -D s_1 \left(s_{32} + \frac{1-\nu}{r} r_{31}\right) \\ -s_2 s_4 \widehat{r}_{11} & -s_2 s_4 \widehat{r}_{21} & -s_2 s_4 \widehat{r}_{31} \end{array} \right]. \tag{B.94}$$

#### B.2.2.3 Aplicação das condições de contorno

Para a completa definição das eqs.(B.91) e (B.93), torna-se necessário definir o valor das constantes $A_4$, $A_5$ e $A_6$.

Para o caso onde as extremidades da placa estão engastadas, as condições de contorno prescritas são: $w\,(R) = v\,(R) = \phi(R) = 0$, sendo $R$ o raio da placa. Dessa forma, obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \right\} = -\,[B]^{-1} \left\{ \left[\widehat{B}\right] \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} + \{F_g\} \right\}. \tag{B.95}$$

Para o caso onde as extremidades da placa estão simplesmente apoiadas, as condições

de contorno são: $w\left(R\right)=v\left(R\right)=M_r(R)=0$. Assim, obtêm-se:

$$\left\{\begin{array}{c} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array}\right\} = -\left[S\right]^{-1}\left\{\left[\widehat{S}\right]\left\{\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\right\}+\left\{F_g\right\}\right\}. \tag{B.96}$$

onde

$$\left[S(R)\right]=\left[\begin{array}{ccc} -Ds_1\left(p_{12}-\frac{1-\nu}{R}q_{11}\right) & -Ds_1\left(p_{22}-\frac{1-\nu}{R}q_{21}\right) & -Ds_1\left(p_{32}-\frac{1-\nu}{R}q_{31}\right) \\ t_{10} & t_{20} & t_{30} \\ s_2\widehat{p}_{10} & s_2\widehat{p}_{20} & s_2\widehat{p}_{30} \end{array}\right], \tag{B.97}$$

$$\left\{\widehat{S}(R)\right\}=\left[\begin{array}{ccc} -Ds_1\left(s_{12}+\frac{1-\nu}{R}r_{11}\right) & -Ds_1\left(s_{22}+\frac{1-\nu}{R}r_{21}\right) & -Ds_1\left(s_{32}+\frac{1-\nu}{R}r_{31}\right) \\ h_{10} & h_{20} & h_{30} \\ s_2\widehat{s}_{10} & s_2\widehat{s}_{20} & s_2\widehat{s}_{30} \end{array}\right]. \tag{B.98}$$

# Anexo A

# Derivadas e integrais das funções de Bessel modificadas de segunda espécie

## A.1 Derivadas das funções K

Derivadas de $K_0(r\sqrt{z})$:

$$\Delta^m K_0(r\sqrt{z}) = z^m K_0(r\sqrt{z}), \tag{A.1}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\Delta^m K_0(r\sqrt{z})\right] = -z^m\sqrt{z}K_1(r\sqrt{z}), \tag{A.2}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[\Delta^m K_0(r\sqrt{z})\right] = z^m\left(zK_0(r\sqrt{z}) + \frac{\sqrt{z}}{r}K_1(r\sqrt{z})\right), \tag{A.3}$$

$$\frac{d^3}{dr^3}\left[\Delta^m K_0(r\sqrt{z})\right] = -z^m\left[\frac{\sqrt{z}}{r}K_0(r\sqrt{z}) + \left(z - \frac{2}{r^2}\right)K_1(r\sqrt{z})\right], \tag{A.4}$$

onde $m = 1, 2, ...$ é a ordem do operador $\Delta^m f(r) = (\nabla^2)^m f(r)$.

Derivadas de $Im\left(\mu K_0(r\sqrt{z})\right)$:

$$\Delta^m Im\left(\mu K_0(r\sqrt{z})\right) = Im\left(z^m\mu K_0(r\sqrt{z})\right), \tag{A.5}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\Delta^m Im\left(\mu K_0(r\sqrt{z})\right)\right] = -Im\left(z^m\sqrt{z}\mu K_1(r\sqrt{z})\right), \tag{A.6}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[\Delta^m Im\left(\mu K_0(r\sqrt{z})\right)\right] = Im\left[z^m\mu\left(zK_0(r\sqrt{z}) + \frac{\sqrt{z}}{r}K_1(r\sqrt{z})\right)\right], \tag{A.7}$$

$$\frac{d^3}{dr^3}\left[\Delta^m Im\left(\mu K_0(r\sqrt{z})\right)\right] = -Im\left\{z^m\mu\left[\frac{\sqrt{z}}{r}K_0(r\sqrt{z}) + \left(z - \frac{2}{r^2}\right)K_1(r\sqrt{z})\right]\right\}, \tag{A.8}$$

onde $Im(\cdot)$ designa a parte imaginária.

Derivadas de $rK_1(r\sqrt{z})$:

$$\Delta^m rK_1(r\sqrt{z}) = z^{m-1}\sqrt{z}\left(r\sqrt{z}K_1\left(r\sqrt{z}\right) - 2mK_0\left(r\sqrt{z}\right)\right), \tag{A.9}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\Delta^m rK_1(r\sqrt{z})\right] = -z^m\left(r\sqrt{z}K_0\left(r\sqrt{z}\right) - 2mK_1\left(r\sqrt{z}\right)\right), \tag{A.10}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[\Delta^m rK_1(r\sqrt{z})\right] = -z^m\left[\sqrt{z}\left(2m+1\right)K_0\left(r\sqrt{z}\right) - \left(rz - \frac{2m}{r}\right)K_1\left(r\sqrt{z}\right)\right], \tag{A.11}$$

$$\frac{d^3}{dr^3}\left[\Delta^m rK_1(r\sqrt{z})\right] = z^m\left\{-\sqrt{z}\left(rz - \frac{2m}{r}\right)K_0\left(r\sqrt{z}\right) + \left[z + 2m\left(z + \frac{2}{r^2}\right)\right]K_1\left(r\sqrt{z}\right)\right\}. \tag{A.12}$$

## A.2 Integrais das funções K

Seguem algumas integrais requeridas nas deduções desta tese:

$$\begin{aligned}
\int K_0\left(r\sqrt{z}\right)dr &= \frac{1}{\sqrt{z}}\left(r\sqrt{z}K_0\left(r\sqrt{z}\right) + \Psi_k\left(r\sqrt{z}\right)\right),\\
\int rK_0\left(r\sqrt{z}\right)dr &= -\frac{1}{\sqrt{z}}rK_1\left(r\sqrt{z}\right),\\
\int r^2K_0\left(r\sqrt{z}\right)dr &= -\frac{1}{\sqrt{z}}\left[r^2K_1\left(r\sqrt{z}\right) - \frac{1}{z}\Psi_k\left(r\sqrt{z}\right)\right],\\
\int r^3K_0\left(r\sqrt{z}\right)dr &= -\frac{r}{z}\left[r^2\sqrt{z}K_1\left(r\sqrt{z}\right) + 2rK_0\left(r\sqrt{z}\right) + \frac{4}{\sqrt{z}}K_1\left(r\sqrt{z}\right)\right],\\
\int K_1\left(r\sqrt{z}\right)dr &= -\frac{1}{\sqrt{z}}K_0\left(r\sqrt{z}\right),\\
\int rK_1\left(r\sqrt{z}\right)dr &= \frac{1}{z}\Psi_k\left(r\sqrt{z}\right),\\
\int r^2K_1\left(r\sqrt{z}\right)dr &= -\frac{1}{\sqrt{z}}\left[r^2K_0\left(r\sqrt{z}\right) + \frac{2r}{\sqrt{z}}K_1\left(r\sqrt{z}\right)\right],\\
\int r^3K_1\left(r\sqrt{z}\right)dr &= \frac{1}{z^2}\left[3\Psi_k\left(r\sqrt{z}\right) - 3r^2zK_1\left(r\sqrt{z}\right) - r^3z\sqrt{z}K_0\left(r\sqrt{z}\right)\right].
\end{aligned} \tag{A.13}$$

onde

$$\Psi_k(x) = \frac{\pi x}{2}\left[K_0(x)L_1(x) + K_1(x)L_0(x)\right], \tag{A.14}$$

sendo $L_\nu(x)$ a função modificada de Struve definida por

$$L_\alpha\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\alpha+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha+1}, \tag{A.15}$$

com $\Gamma(x) = (x-1)!$.