Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre o Lema de Compacidade de Strauss e aplicações

Fábio Lima de Oliveira

João Pessoa – PB
Dezembro de 2023

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre o Lema de Compacidade de Strauss e aplicações

por

Fábio Lima de Oliveira

sob a orientação de

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

João Pessoa – PB
Dezembro de 2023

Sobre o Lema de Compacidade de Strauss e aplicações

por

Fábio Lima de Oliveira [1]

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 21 de dezembro de 2023

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br EVERALDO SOUTO DE MEDEIROS
Data: 02/03/2024 15:16:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros – UFPB

(Orientador)

Documento assinado digitalmente
gov.br JOAO MARCOS BEZERRA DO O
Data: 02/03/2024 13:46:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó – UFPB

(Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente
gov.br JONISON LUCAS DOS SANTOS CARVALHO
Data: 29/02/2024 17:19:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jônison Lucas dos Santos Carvalho – UFS

(Examinador Externo)

[1]Este trabalho contou com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior - CAPES

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

O48s Oliveira, Fábio Lima de.
Sobre o lema de compacidade de Strauss e aplicações / Fábio Lima de Oliveira. - João Pessoa, 2023.
74 f. : il.

Orientação: Everaldo Souto de Medeiros.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Funções radiais. 2. Lema de compacidade de Strauss. 3. Solução de energia mínima. I. Medeiros, Everaldo Souto de. II. Título.

UFPB/BC CDU 517.5(043)

Elaborado por ANNA REGINA DA SILVA RIBEIRO - CRB-15/24

A Deus e a minha família, a quem eu amo com todas as minhas forças.

Agradecimentos

Meus agradecimentos não poderiam começar de outra maneira que não agradecendo a Deus por tudo que eu consegui até aqui. Minha trajetória não faria sentido se eu não O tivesse sempre ao meu lado.

Agradeço aos meus pais, José de Assis e Tereza, por me amarem, sempre me apoiarem e proporcionarem as melhores condições para que eu conquistasse tudo que consegui. Também aos meus irmãos Fabrício, Fabiana, Fabiano, Carine e Maria Júlia, pelo incentivo e parceria.

Aqui externo minha gratidão a Lidiane e Simon Gautschi por serem imprescidíveis nessa caminhada, me ajudando finaceiramente e espiritualmente. E ao professor da escolinha de futebol, Diego Hallen, que foi o meio pelo qual conheci à Lidiane e Simon.

Aos meus amigos e familiares que estão na torcida por mim e fazem desta jornada da vida prazerosa e feliz. Em especial, aos participantes do grupo "Apartments 332" e aos da Igreja Presbiteriana dos Bancários, pois fizeram da minha estadia em João Pessoa a melhor possível, de tal forma que me senti como se estivesse em casa.

Aos meus mestres do ensino infantil a graduação que me inspiraram e motivaram minha escolha de se tornar um professor. Em especial, agradeço ao professor Dr. Everaldo Souto de Medeiros que tão prontamente aceitou tornar-se meu orientador neste trabalho e meu amigo. De maneira geral, a todos os professores que tive o prazer de ser aluno no Departamento de Matemática da UFPB.

Também agradeço aos professores que aceitarem o convite para se tornarem membros da banca de avaliação desta dissertação, Dr. João Marcos Bezerra do Ó e Dr. Jônison Lucas dos Santos Carvalho. Não poderia deixar de mencionar que o professor João Marcos também contribuiu para a finalização deste trabalho, esclarecendo algumas dúvidas durante o desenvolvimento do texto.

Como alguém que lembra bem de toda ajuda que teve, agradeço ao professor e Tutor do Grupo PET – Matemática – UFCG, Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho, por contribuir de forma espetacular para minha formação. Além disso, agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática da UFCG, aos quais devo muito.

Aos meus contemporâneos do Grupo PET – Matemática – UFCG, colegas da pós-graduação de Matemática tanto da UFCG como da UFPB e a todos os funcionários que fizeram dos meus dias leves e me ajudaram nas conquistas acadêmicas.

De maneira geral, agradeço a todos que me estiveram comigo nessa empreitada, inclusive àqueles que minha memória não consegue recordar, mas que ainda assim, foram fundamentais em todo o processo. Deus abençoe a todos.

Resumo

Neste trabalho, nosso objetivo é estabelecer a existência de soluções positivas e radialmente simétricas para uma classe de problemas elípticos semilineares da forma:

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

onde $N \geq 3$ e a não linearidade $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com crescimento crítico, satisfazendo condições do tipo Berestycki-Lions. Para alcançar esse objetivo, faremos uso de um resultado importante na literatura conhecido como o Lema de Compacidade de Strauss, que desempenha um papel fundamental quando a não linearidade g não necessariamente é potência. Além disso, provaremos que a solução obtida é uma solução de energia mínima e tem decaimento exponencial.

Palavras-chave: Funções radiais; Lema de compacidade de Strauss; Crescimento crítico; Solução de energia mínima.

Abstract

In this work, our objective is to establish the existence of positive and radially symmetric solutions for a class of semilinear elliptic problems of the form:

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N,$$

where $N \geq 3$, and the nonlinearity $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function with critical growth, satisfying conditions of the Berestycki-Lions type. To achieve this goal, we will make use of an important result in the literature known as the Strauss Compactness Lemma, which plays a fundamental role when the nonlinearity g is not necessarily a power function. Furthermore, we will prove that the obtained solution is a minimal energy solution and exhibits exponential decay.

Keywords: Radial functions; Strauss compactness lemma; Critical growth; Minimal energy solution.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- B_r denota a bola aberta de raio r centrada na origem.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um conjunto aberto.
- $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω.
- $\omega_{_N}$ denota a medida da esfera unitária S^{N-1} de $\mathbb{R}^N$.
- p^* denota o expoente crítico de Sobolev.
- $C_c^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções testes.
- $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$ denota o espaço das funções $u \in L^{2^*}(\Omega)$ tais que $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$.
- $C^{k,\alpha}(\Omega)$ denota o espaço de Hölder.
- $W^{k,p}(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev.
- $W_0^{k,p}(\Omega)$ denota o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.
- $H_r^1(\Omega)$ denota o subespaço de $H^1(\Omega)$ das funções radialmente simétricas.
- $H^{-1}(\Omega)$ denota o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$
- $\| \cdot \|$ - denota a norma euclidiana.
- $\| \cdot \|_p$ - denota a norma usual do espaço $L^p(\Omega)$.
- $\| \cdot \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$ - denota a norma usual do espaço $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

- $\| \cdot \|_{W^{k,p}(\Omega)}$ - denota a norma usual do espaço $W^{k,p}(\Omega)$.

- Dizemos que $f = O(g)$ quando $x \to x_0$, se existe $C > 0$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C;$$

- Dizemos que $f = o(g)$ quando $x \to x_0$, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Introdução

Na teoria das Equações Diferenciais Parciais (E.D.P.), algumas equações ganham notoriedade devido a necessidade de serem resolvidos problemas da própria Matemática e de áreas afins, em especial, da Física. A equação não linear da forma

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

é um exemplo clássico e aparece em problemas que envolvem a equação de Schrödinger e a equação de Klein-Gordon, ambas relacionadas a mecânica quântica [16, 17]. Mais especificamente, Floer e Weinstein em [10], garantiram que se procurarmos soluções do tipo

$$\Psi(x,t) = e^{-iEt}u(x), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

também conhecidas como "standing waves", onde E é uma constante da mecânica quântica, para a equação de Schrödinger não linear

$$ih\Psi_t = -\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi + V(x)\Psi - \gamma|\Psi|^2\Psi,$$

em que h, m, γ são constantes e V é um potencial limitado, obtemos que $u(x)$ deve ser solução da equação não linear

$$-\Delta u + V(x)u = |u|^{p-2}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

De maneira geral, a análise da equação (1) pode ser abordada de diferentes formas, ao serem consideradas algumas condições sobre a função g e a dimensão do espaço. Nesse contexto, na década de 80, Berestycki e Lions, em [2], estabeleceram a existência de solução do tipo 'ground state' para a equação (1), quando $N \geq 3$ e g satisfaz as seguintes hipóteses:

(BL_1) $g \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ é ímpar;

(BL_2) $-\infty < \liminf_{s\to 0} \dfrac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s\to 0} \dfrac{g(s)}{s} = -a < 0;$

(BL_3) $\limsup_{s\to +\infty} \dfrac{g(s)}{|s|^{\frac{N+2}{N-2}}} \leq 0;$

(BL_4) Existe $\xi_0 > 0$ tal que $G(\xi_0) = \displaystyle\int_0^{\xi_0} g(t)dt > 0$.

Para $N = 2$, Berestycki, Gallouët e Kavian, em [1], obtiveram resultados de existência de solução radial positiva para a equação (1) quando a função g satisfaz condições semelhantes.

Em ambos os trabalhos mencionados anteriormente, considerou-se o cenário em que g possui crescimento subcrítico. Nesse contexto, a compacidade da imersão

$$H_r^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N),$$

em que $2 < p < 2^*$, permitiu a aplicação de métodos variacionais convencionais para a obtenção do resultado de existência de solução. No entanto, para o caso crítico, a perda de compacidade da imersão torna o trabalho mais desafiador, destacando a necessidade de um resultado mais abrangente.

Observamos que outros matemáticos já haviam abordado problemas relacionados a soluções radiais de equações diferenciais. Em 1977, Walter Strauss em [17], obteve o famoso Lema de Compacidade, que, além da imersão mencionada anteriormente, também contribuiu para estabelecer a existência de soluções radiais para a equação (1) nos casos em que a não linearidade g não necessariamente é uma potência.

Dessa forma, com base em [20], o objetivo deste trabalho é estabelecer resultados de existência de soluções positivas e radialmente simétricas para a equação (1), onde $N \geq 3$ e a não linearidade $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, possui crescimento crítico e satisfaz as seguintes condições:

(g_1) $g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é ímpar;

(g_2) $\displaystyle\lim_{s \to 0} \frac{g(s)}{s} = -a < 0$;

(g_3) $\displaystyle\lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s^{2^*-1}} = \mu > 0$;

(g_4) Existem $C > 0$ e $q < 2^*$ tais que

$$g(s) - \mu s^{2^*-1} + as \geq Cs^{q-1}, \ \ \forall s > 0.$$

Para atingir esse objetivo, empregaremos o Lema de Compacidade de Strauss e demonstraremos que a solução obtida é uma solução de energia mínima. Além disso, mostraremos que o nível de energia mínima coincide com o valor do passo da montanha do funcional associado à equação. Com esse propósito, dividimos a apresentação deste trabalho da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentaremos como preliminares, alguns resultados clássicos, a saber, o Princípio do Máximo e Teorema do Multiplicador de Lagrange. Além disso, demonstraremos a Identidade de Pohozaev, para o caso ilimitado, que garante a não existência de solução para a equação (1) sob certas condições na não linearidade g.

No Capítulo 2, introduziremos as funções radiais e mostraremos lemas importantes que tratam de boas propriedades dessa classe de funções. Dentre algumas dessas propriedades estão resultados de compacidade, em especial, uma versão do já mencionado Lema de Strauss, devido a [2].

No Capítulo 3, como aplicação do Lema de Compacidade de Strauss, mostraremos que a equação (1) com crescimento crítico tem solução positiva. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 0.0.1. Suponha que g satisfaz (g_1)-(g_4) e que $q > 4$ se $N = 3$ e $q > 2$ se $N \geq 4$. Então, a equação (1) admite uma solução radial positiva $w \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap H^1_r(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) w é solução de energia mínima de (1);

(2) w verifica a Identidade de Pohozaev;

(3) Existe um caminho γ tal que $w(x) \in \gamma([0,1])$ e $\max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = I(w)$;

(4) O valor do passo da montanha de I coincide com o nível de energia mínima;

(5) (i) Existe $R > 0$ tal que $w'(r) \leq 0$ quando $r > R$;

(ii) w e suas primeiras derivadas decaem exponencialmente, isto é, existem $C > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$|D^\alpha w(x)| \leq C e^{-\delta |x|}, \ \ |\alpha| = 0, 1,$$

onde I é o funcional energia associado a equação (1).

Os itens (1) e (2) serão obtidos via argumentos de minimização e Teorema dos Multiplicadores de Lagrange. Para provarmos (3) e (4), que são referentes a geometria do passo da montanha, utilizaremos as ideias encontradas no artigo [12]. O item (5) é obtido via Princípio do Máximo.

Por último, no Apêndice, elencamos alguns resultados mais gerais e lemas auxiliares, os quais usamos nas demonstrações feitas no trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Alguns Resultados Clássicos

Em todo o trabalho, será considerado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. No presente capítulo, vamos elencar alguns teoremas importantes da teoria clássica das equações diferenciais parciais que serão úteis para algumas demonstrações feitas mais adiante neste trabalho. Agora, suponha que Ω é limitado e considere o seguinte problema

$$\begin{cases} Lu = g \quad \text{em} \quad \Omega; \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $g : \Omega \to \mathbb{R}$ é dada, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é desconhecida e L denota o operador da forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u. \tag{1.1}$$

Neste caso, dizemos que a equação $Lu = f$ está na *forma divergente*.

Definição 1.1.1. O operador L é chamado *elíptico (uniformemente)*, se existe $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

q.t.p. em Ω, para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Feitas essas ponderações, vamos enunciar o primeiro resultado, conhecido como Princípio do Máximo. Consideremos então o operador L na forma não divergente e uniformemente elíptico, cujos coeficientes $a^{i,j}, b^i$ e c são funções contínuas e recordemos que $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = -\min\{u, 0\}$.

Teorema 1.1.2 (Princípio do Máximo). Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e $c \geq 0$ em Ω.

(i) Se $Lu \leq 0$ em Ω, então
$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+;$$

(ii) Se $Lu \geq 0$ em Ω, então
$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-.$$

Para a demonstração, veja [9, Teorema 6.4.1]. Um caso particular de um operador elíptico na forma divergente é o operador $(-\Delta)$. Assim, vamos nos preocupar em procurar soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u), & \text{em} \quad \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Uma solução clássica desse problema é uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que verifica a equação. Por outro lado, podemos também estabelecer a definição de solução fraca.

Definição 1.1.3. Uma função $u \in H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ é uma *solução fraca* de $(\mathcal{P})$ quando
$$\int_\Omega \nabla u \nabla \psi dx = \int_\Omega g(u)\psi dx,$$
para toda $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Um outro resultado interessante, que pode nos ajudar na garantia de soluções para E.D.P.'s, é o teorema do Multiplicador de Lagrange, enunciado a seguir:

Teorema 1.1.4 (Multiplicador de Lagrange). Sejam X um espaço de Banach, $I, J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $x_0 \in X$ um extremo local de I restrito ao conjunto

$$\mathcal{M} = \{x \in X; \;\; J(x) = J(x_0)\}.$$

Se $J'(x_0) \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'(x_0)v = \lambda J'(x_0)v,$$

para qualquer $v \in X$. O número λ é chamado *Multiplicador de Lagrange.*

Este resultado pode ser visto em [13, Proposição 14.3], encontramos este teorema. Desta forma, se $\Omega = \mathbb{R}^N$, para encontrar uma solução fraca do problema $(\mathcal{P})$, o procedimento adotado, neste trabalho, consiste em encontrar minimizante $u_0 \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$

para o funcional

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$$

restrito ao chamado *vínculo*

$$J(u) = \int_{\Omega} G(u)dx = J(u_0),$$

no qual $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(t)dt$. E isto acarreta, pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange, na igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla \psi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g(u_0)\psi dx$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, isto é, u_0 é solução fraca de $(\mathcal{P})$ donde λ é obtido fazendo $\psi = u_0$.

1.2 Identidade de Pohozaev

Nesta seção, daremos ênfase a um resultado de não existência, a saber, a Identidade de Pohozaev. Acerca dessa identidade, embora haja uma versão para o caso em que o domínio é limitado, a fim de cumprir nossos objetivos, vamos supor que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio ilimitado de classe C^1 e consideraremos o problema $(\mathcal{P})$ onde $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $g(0) = 0$. Considerando,

$$G(u) := \int_0^u g(s)ds,$$

temos então o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [19].

Teorema 1.2.1 (Identidade de Pohozaev em domínios ilimitados)**.** Seja $u \in H^2_{loc}(\overline{\Omega})$ solução de $(\mathcal{P})$ (não necessariamente valendo a condição de fronteira) tal que $G(u) \in L^1(\Omega)$. Então, para todo $z^* \in \mathbb{R}^N$ fixo, u verifica

$$\frac{N-2}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \langle \sigma - z^*, \eta(\sigma)\rangle d\sigma = N\int_{\Omega} G(u)dx,$$

onde η denota o vetor normal unitário exterior de $\partial\Omega$. Em particular, se $\Omega = \mathbb{R}^N$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = 2^* \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx. \tag{1.2}$$

Demonstração. Seja $\varphi_0 \in C^\infty([0, +\infty))$ tal que

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \in [0,1] \\ 0, & \text{se} \quad t \in [2, +\infty) \end{cases}$$

e definamos

$$\varphi_j(x) := \varphi_0\left(\frac{|x|}{j}\right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Vamos mostrar duas afirmações:

Afirmação 1: $\varphi_j(x) \leq 1$.

De fato, notemos que

$$\varphi_j(x) = 1, \ \frac{|x|}{j} \leq 1 \quad \text{e} \quad \varphi_j(x) = 0, \ \frac{|x|}{j} \geq 2.$$

Além disso, φ_j definida no compacto $[1, 2]$ é contínua, logo

$$\varphi_j(x) \leq 1.$$

Afirmação 2: As seguintes desigualdades são verdadeiras

$$|x||\nabla\varphi_j(x)| \leq \frac{|x|}{j}\left|\varphi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right)\right| \leq \|\varphi_0'\|_\infty.$$

Com efeito, visto que

$$\varphi_{x_i}(x) = \varphi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right)\frac{x_i}{j|x|}$$

e, consequentemente,

$$|\nabla\varphi_j(x)|^2 = \left[\varphi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right)\right]^2\frac{|x|^2}{j^2|x|^2},$$

ou ainda,

$$|\nabla\varphi_j(x)| = \left|\varphi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right)\right|\frac{1}{j}.$$

Ademais,

$$|x||\nabla\varphi_j(x)| \leq \frac{|x|^2}{j^2}\|\varphi_0'\|_\infty \leq \|\varphi_0'\|_\infty,$$

que finaliza a justificativa da afirmação.

Agora, fixemos $1 \leq i \leq N$ e multipliquemos os membros da equação $-\Delta u = g(u)$ por $(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)$, donde obtemos

$$-\Delta u(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x) = g(u)(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x) \tag{1.3}$$

Ao integrar o membro da direita, obtemos

$$\int_\Omega g(u(x))(x_i-z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)dx = -\int_\Omega \varphi_j(x)G(u(x))dx - \int_\Omega (x_i-z_i^*)\partial_i\varphi_j(x)G(u(x))dx.$$

Daí, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e das afirmações 1 e 2, temos

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{\Omega} g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)dx = -\int_{\Omega} G(u(x))dx. \tag{1.4}$$

Por outro lado, ao utilizar a identidade de Green do lado esquerdo da equação (1.3)

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \Delta u(x)(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)dx = &-\int_{\partial\Omega} \langle((\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma))\varphi_j(\sigma)\nabla u(\sigma), \nu(\sigma)\rangle d\sigma \\ &+ \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla((x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x))\rangle dx. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla u(x), \nabla((x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x))\rangle = &|\partial_i u(x)|^2\varphi_j(x) + \frac{1}{2}(x_i - z_i^*)\varphi_j(x)\partial_i(|\nabla u(x)|)^2 \\ &+ (x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\langle \nabla u(x), \nabla\varphi_j(x), \end{aligned}$$

assim, a segunda integral na equação (1.5) pode ser vista da seguinte maneira

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla((x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x))\rangle dx = A_{1j} + A_{2j} + A_{3j},$$

em que

$$A_{1j} = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(x_i - z_i^*)\varphi_j(x)\partial_i(|\nabla u(x)|)^2 dx,$$

$$A_{2j} = \int_{\Omega}(\partial_i u(x)|)^2\varphi_j(x)dx$$

$$A_{3j} = \int_{\Omega}(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\langle \nabla u(x), \nabla\varphi_j(x)\rangle dx.$$

Percebamos que, pela Identidade de Green,

$$\lim_{j\to+\infty} A_{1j} = -\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u(\sigma)|^2(\sigma_i - z_i^*)\nu_i(\sigma)d\sigma.$$

por outro lado, como $\lim\limits_{j\to+\infty}\varphi_j = 1$ e $\lim\limits_{j\to+\infty}\nabla\varphi_j = 0$, segue que

$$\lim_{j\to+\infty} A_{2j} = \int_{\Omega}|\partial_i u(x)|^2 dx \ \text{ e } \ \lim_{j\to+\infty} A_{3j} = 0.$$

Logo, novamente do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e de (1.5), temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{j\to+\infty} - \int_\Omega \Delta u(x)((x_i - z_i^*)\partial_i u(x))\varphi_j(x)dx = &-\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2 dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma_i - z_i^*)\nu_i(\sigma)d\sigma \\
&- \int_{\partial\Omega} ((\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma))\langle \nabla u(\sigma), \nu(\sigma)\rangle d\sigma.
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

Igualando (1.4) e (1.6), obtemos

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma_i - z_i^*)\nu_i(\sigma)d\sigma \\
- \int_{\partial\Omega} ((\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma))\varphi_j \langle \nabla u(\sigma), \nu(\sigma)\rangle d\sigma = - \int_\Omega G(u(x))dx.
\end{aligned}
$$

Ao considerarmos a soma sobre i e usarmos o fato de que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, que implica que $\nabla u(\sigma)$ é paralelo a $\nu(\sigma)$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
-\frac{N}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma - z^*)\nu(\sigma)d\sigma \\
- \int_{\partial\Omega} ((\sigma - z^*)|\nabla u(\sigma)|^2)\langle \nabla u(\sigma), \nu(\sigma)\rangle d\sigma = -N \int_\Omega G(u(x))dx.
\end{aligned}
$$

E, portanto,

$$
\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} ((\sigma - z^*)|\nabla u(\sigma)|^2)\langle \nabla u(\sigma), \nu(\sigma)\rangle d\sigma = N \int_\Omega G(u(x))dx.
$$

A consequência segue imediatamente do fato de que $\partial\mathbb{R}^N = \emptyset$. □

Novamente, vale ressaltar que a Identidade de Pohozaev é útil para garantir a não existência de solução para $(\mathcal{P})$. Vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 1.2.2. Seja $\Omega = \mathbb{R}^N$, onde $N \geq 3$. Para $p \geq 2$ e $\lambda \neq 0$ definamos

$$
g(s) = \lambda |s|^{p-2} s.
$$

Suponhamos que $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N) \cap H^2(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca da equação $(\mathcal{P})$, isto é,

$$
-\Delta u = \lambda |u|^{p-2} u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{1.7}
$$

Então $u \equiv 0$, quando $p < 2^*$. De fato, se u é uma solução fraca do problema dado, então multiplicando ambos os membros da igualdade acima por u, integrando sobre

$\mathbb{R}^N$ e usando a Identidade de Green, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx. \tag{1.8}$$

Por outro lado, temos

$$G(u(x)) = \int_0^{u(x)} \lambda |s|^{p-2} s ds = \lambda \frac{|u(x)|^p}{p}.$$

Dessa forma, segue da Identidade de Pohozaev (1.2) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \lambda \left(\frac{2^*}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx. \tag{1.9}$$

Assim, de (1.8) e (1.9) obtemos

$$0 = \left(\frac{2^*}{p} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx.$$

Como $p < 2^*$, temos

$$\left(\frac{2^*}{p} - 1\right) \neq 0,$$

donde segue que $u \equiv 0$. Portanto, a equação (1.7) não possui solução não nula quando $p < 2^*$.

Todavia, para o caso $p = 2^*$, é possível escolhermos uma constante $C_N > 0$ de modo que, para cada $\varepsilon > 0$, as funções,

$$U_\varepsilon(x) = C_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2}\right)^{\frac{N-2}{2}},$$

conhecidas na literatura com funções *instations*, são soluções da equação (1.7).

Exemplo 1.2.3. Consideremos novamente $\Omega = \mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$. Para $a > 0$ e $\mu > 0$ defina

$$g(s) = \mu |s|^{2^*-2} s - as,$$

e suponhamos que $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N) \cap H^2(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca da equação $(\mathcal{P})$, ou seja,

$$-\Delta u + au = \mu |u|^{2^*-2} u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Então $u \equiv 0$. De fato, se u é uma solução fraca do problema $(\mathcal{P})$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx - a \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx. \tag{1.10}$$

Desde que

$$G(u(x)) = \int_0^{u(x)} (\mu|s|^{2^*-2}s - as)ds = \mu\frac{|u|^{2^*}}{2^*} - a\frac{|u|^2}{2},$$

pela Identidade de Pohozaev (1.2) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx - \frac{a2^*}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx. \tag{1.11}$$

Assim, de (1.10) e (1.11) obtemos

$$0 = a\left(\frac{2^*}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx.$$

Como $a > 0$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = 0,$$

e portanto $u \equiv 0$. Como uma aplicação do Lemma de Strauss, veremos no próximo capítulo, que uma pertubação deste problema tem solução não trivial.

Capítulo 2

Lemas de Compacidade

2.1 Funções radialmente simétricas

O passo seguinte a ser dado, para o estudo realizado neste trabalho, é conhecer algumas propriedades de uma classe de funções conhecidas como *radialmente simétricas.* Inicialmente, recordemos um resultado básico de álgebra Linear que pode ser encontrado em [14]:

Teorema 2.1.1. Sejam E e F espaços vetoriais com produto interno de dimensão finita. Dada uma transformação linear $A : E \to F$ são equivalentes:

(a) A é uma isometria, ou seja, A preserva norma: $|Au| = |u|$, para todo $u \in E$;

(b) A preserva distância: $|Au - Av| = |u - v|$, para quaisquer $u, v \in E$;

(c) A preserva produto interno: $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$, para quaisquer $u, v \in E$;

(d) A matriz de A relativa a qualquer par de bases ortonormais $\mathcal{U} \subset E$, $\mathcal{V} \subset F$ é uma matriz ortogonal.

Observação 1. Quando uma transformação linear A verifica qualquer uma das condições do Teorema 2.1.1, dizemos que A é uma *transformação ortogonal.* Denotaremos por S uma transformação ortogonal.

Definição 2.1.2. Dizemos que $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ é *radialmente simétrica*, ou simplesmente *radial*, se para toda transformação ortogonal $S : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, vale

$$u(Sx) = u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Observação 2. Quando uma função u é radialmente simétrica, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ de tal forma que $|x| = r > 0$, podemos definir $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(r) := u(x)$. Isto acontece porque toda transformação ortogonal é uma isometria.

Exemplo 2.1.3. São exemplos de funções radiais

$$u(x) = |x|, \quad v(x) = 2 + sen(|x|) \quad \text{e} \quad w(x) = e^{\frac{1}{|x|^2-1}}.$$

Note que a função suavizante definida no Exemplo A.1.2, também é uma função radial, visto que w é radial.

Denotaremos por $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ o subespaço das funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^N)$. No caso em que $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ é uma função radial, a norma em $L^p(\mathbb{R}^N)$ pode, graças ao Teorema da Mudança de Variáveis, em coordenadas polares, ser vista da seguinte maneira:

$$\|u\|_p^p = \omega_N \int_0^\infty |f(r)|^p r^{N-1} dr,$$

onde ω_N denota a medida da esfera unitária S^{N-1} de $\mathbb{R}^N$ e $f(r) = u(x)$. Dessa forma, se $u \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = \omega_N \int_0^\infty (|f(r)|^2 + |f'(r)|^2) r^{N-1} dr.$$

Lema 2.1.4. $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Uma vez que $H^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert, basta provarmos que $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ é subespaço fechado. Com efeito, seja (u_n) uma sequência em $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$, segue que $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente, $u_n \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Assim, dada uma transformação ortogonal $S : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, temos

$$u(Sx) = \lim_{n\to\infty} u_n(Sx) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x),$$

q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Portanto, $u \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ é fechado. $\square$

Outro fato muito útil, na procura por soluções radiais de E.D.P's, é que toda função de $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ pode ser aproximada por funções radiais de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para demonstrar esse fato, vamos provar, primeiramente, que a convolução de uma função radial com a função suavizante φ (ver Exemplo A.1.2) é também uma função radial.

Lema 2.1.5. Se φ é uma função suavizante e u é uma função radial, então a convolução $u^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u$ também uma função radial, para todo $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Dada uma transformação ortogonal $S : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, como u e φ são radiais, segue que

$$\begin{aligned}
(\varphi_\varepsilon * u)(Sx) &= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(\frac{Sx-y}{\varepsilon}\right)u(y)dy\\
&= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(S\left(\frac{x-S^Ty}{\varepsilon}\right)\right)u(y)dy\\
&= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(\frac{x-S^Ty}{\varepsilon}\right)u(y)dy\\
&= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)u(Sz)|detS|dz\\
&= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)u(z)dz\\
&= (\varphi_\varepsilon * u)(x).
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos concluir que $u^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u$ também é uma função radial. □

Lema 2.1.6. O conjunto das funções radiais de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H_r^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. De fato, seja $\{B_i\}_i$ tal que $B_i = B_i(0)$, $i \in \mathbb{N}$ e $B_0 = \emptyset$. Note que $B_i \subset\subset B_{i+1}$, para todo i e $\cup B_i = \mathbb{R}^N$. Considere agora a partição da unidade $\{\psi_m\}_m$ subordinada à cobertura do $\mathbb{R}^N$, $\{B_{m+1} - \overline{B_{m-1}}\}$, em que, por convenção, $B_0 = B_{-1} = \emptyset$. Assim, dados $u \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$ e $\varepsilon > 0$, graças ao Lema A.1.4 item (d) sabe-se que é possível escolher $\varepsilon_m < min\{dist(B_{m+1}, \partial B_{m+2}), dist(B_{m-2}, \partial B_{m-1})\}$ tal que

$$\|(\psi_m u)^{\varepsilon_m} - \psi_m u\|_{H_r^1(\mathbb{R}^N)} < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Definindo, então, $v_m = (\psi_m u)^{\varepsilon_m}$ e observamos que, a menos de um número finito, todas as v_m se anulam em qualquer $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ dado. Consequentemente, pode-se definir $v = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, pois é uma soma finita de funções em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Além do mais, pelo Lema 2.1.5, cada v_m é uma função radial donde segue que v é radial, posto que é uma soma finita de funções radiais. Por fim, tem-se também

$$\|v-u\|_{H_r^1(\mathbb{R}^N)} = \|\sum(\psi_m u)^{\varepsilon_m} - \left(\sum \psi_m\right)u\|_{H_r^1(\mathbb{R}^N)} \leq \sum \|(\psi_m u)^{\varepsilon_m} - \psi_m u\|_{H_r^1(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

Assim é possível concluir que o conjunto das funções radiais de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H_r^1(\mathbb{R}^N)$. □

Agora, vamos tratar de lemas conhecidos como "Lemas Radiais", que garantem algumas estimativas para funções radiais, as quais podem ser úteis para resultados de imersão. As demonstrações desses lemas estão no artigo [17] e aqui fizemos de forma mais detalhada.

Lema 2.1.7. Se $u \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$|u(x)| \leq \omega_N^{-\frac{1}{2}} |x|^{-\frac{N-1}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}. \tag{2.1}$$

Em particular, $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$.

Demonstração. Basta que provemos o resultado para as funções regulares, graças a densidade do conjunto das funções radiais de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $H_r^1(\mathbb{R}^N)$. Para isso, seja $f \in C_c^\infty([0,+\infty))$ tal que $u(x) = f(r)$, com $|x| = r$. Do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} f(r)^2 &= \int_r^{+\infty} (f(t)^2)' dt \\ &= -2 \int_r^{+\infty} f(s) f'(s) ds \\ &\leq \int_r^{+\infty} \frac{s^{N-1}}{s^{N-1}} |f'(s)||f(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^{+\infty} (|f(s)|^2 + |f'(s)|^2) s^{N-1} ds. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_0^{+\infty} (|f(s)|^2 + |f'(s)|^2) s^{N-1} ds = \frac{1}{\omega_N} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

logo

$$f(r)^2 \leq \frac{1}{r^{N-1}} \frac{1}{\omega_N} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

ou seja,

$$|f(r)| \leq \omega_N^{-\frac{1}{2}} r^{-\frac{N-1}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

donde podemos concluir que

$$|u(x)| \leq \omega_N^{-\frac{1}{2}} |x|^{-\frac{N-1}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

$\square$

A seguir, vamos enunciar um teorema de compacidade, cuja demonstração usará o fato descrito no lema radial anterior. Este resultado de compacidade atesta mais uma boa propriedade acerca do espaço das funções radiais, ao assegurar que $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso compactamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, quando $2 < p < 2^*$ e $N \geq 3$.

Teorema 2.1.8 (Compacidade)**.** Suponha que $N \geq 3$. Então, para todo $2 < p < 2^*$ a imersão

$$H_r^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$$

é compacta.

Demonstração. Já sabemos que $H_r^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 < p < 2^*$. Agora, seja (v_n) uma sequência que converge fracamente para 0 em $H_r^1(\mathbb{R}^N)$. Para $R > 0$ dado, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^p dx = \int_{|x|<R} |v_n(x)|^p dx + \int_{|x|\geq R} |v_n(x)|^p dx.$$

Por um lado, segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \int_{|x|\geq R} |v_n(x)|^p dx &\leq \|v_n \chi_{[|x|\geq R]}\|_\infty^{p-2} \|v_n\|_2^2 \\ &\leq C(N) R^{-\frac{(p-2)(N-1)}{2}}, \end{aligned}$$

onde $C(N)$ é obtido do Lema 2.1.7. Assim, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher R suficientemente grande de forma que

$$\int_{|x|\geq R} |v_n(x)|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Desde que $2 < p < 2^*$, a imersão $H^1([|x| < R]) \hookrightarrow L^p([|x| < R])$ é compacta, graças ao Teorema A.2.9 (Teorema de Compacidade Relich-Kondrachov). Dessa forma, podemos fixar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{|x|<R} |v_n(x)|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.3}$$

para todo $n \geq n_0$. Das equações (2.2) e (2.3), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^p dx \leq \varepsilon,$$

isto é, quando $\varepsilon \to 0$, temos

$$v_n \to 0 \ \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, a imersão $H_r^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ é compacta. □

Em virtude do Teorema 2.1.8, surgem duas perguntas naturais. Ainda existe compacidade para o caso em que $p = 2$? E se $p = 2^*$? Para responder a essas duas perguntas, apresentamos os dois exemplos a seguir, que certifica a perda de compacidade nos dois casos.

Exemplo 2.1.9. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, com ϕ não nula e $supp\phi \subset [0, 1]$. Agora, defina a sequência de funções em $H^1_r(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$f_k(x) = k^{\frac{1-N}{2}}\phi(|x|-k), \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Notemos que ϕ, ϕ' são limitadas e valem as desigualdades a seguir:

$$\begin{aligned}
\|f_k\|^2_{H^1_r(\mathbb{R}^N)} &= \omega_N \int_0^\infty k^{1-N}((\phi(r-k))^2 + (\phi'(r-k))^2)r^{N-1}dr \\
&= \omega_N C_0\, k^{1-N} \int_k^{k+1} r^{N-1}dr \\
&= \omega_N C_0\, k^{1-N}\left(\frac{(k+1)^N - k^N}{N}\right) \\
&\leq C_1.
\end{aligned}$$

Observe que C_1 não depende de k, garantindo assim a limitação de (f_k) em $H^1_r(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado, para $k \neq l$, tem-se

$$\|f_k - f_l\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N}\left(k^{\frac{1-N}{2}}\phi(|x|-k) - l^{\frac{1-N}{2}}\phi(|x|-l)\right)^2 dx \geq \varepsilon_0,$$

para algum $\varepsilon_0 > 0$, visto que $supp(\phi(|x|-k)) \cap supp(\phi(|x|-l)) = \emptyset$. Portanto, (f_k) não pode possuir subsequência convergente em $L^2(\mathbb{R}^N)$, já que ela não é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, podemos concluir que a imersão $H^1_r(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ não é compacta.

Exemplo 2.1.10. Sejam B a bola unitária do $\mathbb{R}^N$ e $u \in H^1_0(B)$ radial tal que $\|u\|_{L^{2^*}(B)} = 1$ e defina, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k(x) = \begin{cases} k^{\frac{N-2}{2}}u(kx), & \text{se} \quad x \in \frac{1}{k}B, \\ 0, \quad \text{se} \quad x \in B\backslash \frac{1}{k}B. \end{cases}$$

Observe que cada u_k é radial e ao fazer a mudança de variável $y = kx$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|u_k\|^2_{H^1(B)} &= \int_{\frac{1}{k}B} |\nabla u_k|^2 dx + \int_{\frac{1}{k}B} |u_k|^2 dx \\
&= \int_B \frac{k^{N-2}k^2|\nabla u|^2}{k^N}dx + \int_B \frac{k^{N-2}|u|^2}{k^N}dx \\
&= \int_B |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{k^2}\int_B |u|^2 dx \leq C.
\end{aligned}$$

Por outro lado, suponha $k > l$ e perceba que

$$\begin{aligned}\|u_k - u_l\|_{L^{2^*}(B)}^{2^*} &= \int_B |u_k - u_l|^{2^*} dx \\ &= \int_{\frac{1}{k}B} |u_k - u_l|^{2^*} dx + \int_{\frac{1}{l}B\setminus\frac{1}{k}B} |u_l|^{2^*} dx \\ &= \int_{\frac{1}{l}B\setminus\frac{1}{k}B} |u_l|^{2^*} dx.\end{aligned}$$

Note que

$$\int_{\frac{1}{l}B\setminus\frac{1}{k}B} |u_l|^{2^*} dx = \int_{\frac{1}{k}<|x|<\frac{1}{l}} |u_l|^{2^*} dx = \int_{\frac{l}{k}<|x|<1} \frac{l^N |u|^{2^*}}{l^N} dx.$$

Fixemos l e faça $k \to +\infty$, daí,

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_k - u_l\|_{L^{2^*}(B)}^{2^*} = \lim_{k\to+\infty} \int_{\frac{l}{k}<|x|<1} |u|^{2^*} dx = \int_B |u|^{2^*} dx = 1$$

Logo, assim como no exemplo anterior, (u_k) não pode possuir subsequência convergente em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, porque não é uma sequência de Cauchy em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Dessa maneira, concluímos que a imersão $H_r^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ também não é compacta.

Consideremos agora, para $N \geq 3$, o espaço definido por

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N);\ \ |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\},$$

que também pode ser visto como o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx\right)^{1/2}.$$

Todavia, graças a desigualdade de Gagliado-Nirenberg-Sobolev, apresentada no Teorema A.2.8, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right),\ \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

para algum $C > 0$, podemos definir a norma em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ da seguinte maneira:

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} = \|\nabla u\|_2.$$

Ao considerarmos o espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, enunciamos o segundo lema radial:

Lema 2.1.11. Se $N \geq 3$ e $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, então

$$|u(x)| \leq C(N)|x|^{\frac{2-N}{2}}\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}, \ \ |x| > 0,$$

onde $C(N)$ depende apenas de N.

Demonstração. Como no lema anterior, é suficiente considerar as funções regulares. Seja u uma função regular. Faça $r = e^y$ e defina

$$v(y) = u(r)e^{\frac{N-2}{2}y}.$$

Daí, tem-se

$$\|\nabla u\|_2^2 = \omega_N \left[\int_{-\infty}^{+\infty}(v'(y))^2 dy + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(N-2)^2}{4}(v(y))^2 dy\right].$$

Ademais, dada $v \in H^1(\mathbb{R})$, tem-se também

$$\begin{aligned} v(y)^2 &= -\int_y^{\infty}(v(t)^2)'dt \\ &\leq \int_y^{\infty} 2|v(t)||v'(t)|dt \\ &\leq 2\|v\|_2\|v'\|_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$|u(r)r^{\frac{N-2}{2}}| \leq C(N)\|\nabla u\|_2,$$

como queríamos. □

Vejamos que também é possível estabelecer uma estimativa, semelhante às dos lemas anteriores, para funções radiais que possuem uma certa monotonicidade.

Definição 2.1.12. Dizemos que uma função é radialmente

(a) *crescente* (*decrescente*), sempre que $0 \leq u(x) < u(y)$, quando $|x| < |y|$ ($|x| > |y|$);

(b) *não-crescente* (*não-decrescente*), sempre que $0 \leq u(x) \leq u(y)$, quando $|x| > |y|$ ($|x| < |y|$).

Lema 2.1.13. Seja $1 \leq p < +\infty$. Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ é radialmente não-crescente, então

$$|u(x)| \leq |x|^{-N/p}\frac{N^{1/p}}{\omega_N^{1/p}}\|u\|_p, \ \ x \neq 0.$$

Demonstração. Note que, para todo $r > 0$, ao considerar $r = |x|$, segue que

$$\|u\|_p^p \geq \int_{|x|<r} |u(s)|^p ds = \omega_N \int_0^r (u(s))^p s^{N-1} ds \geq \omega_N (u(r))^p \frac{r^N}{N},$$

pois $(u(s))^p \geq (u(r))^p$. Logo, pode-se concluir que

$$|u(x)|^p \leq |x|^{-N} \frac{N}{\omega_N} \|u\|_p^p,$$

para $x \neq 0$ e o resultado segue. □

2.2 O Lema de Compacidade de Strauss

Como veremos na aplicação que será feita no Capítulo 3, onde a não linearidade não necessariamente é uma potência, o Teorema 2.1.8 pode não ser suficiente para garantir compacidade. Desta forma, iremos precisar de um resultado mais geral que é o Lema de Compacidade de Strauss [2, 17]. Precisamente, apresentaremos aqui uma versão devido a Berestycki-Lions [2].

Teorema 2.2.1 (Lema de Compacidade de Strauss)**.** Sejam $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \to 0, \text{ quando } |s| \to \infty. \tag{2.4}$$

Se (u_n) é uma sequência de funções mensuráveis de $\mathbb{R}^N$ tal que

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |Q(u_n(x))| dx < \infty \tag{2.5}$$

$$P(u_n(x)) \to v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \text{ quando } n \to \infty,$$

então,

$$P(u_n(x)) \to v(x) \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^N), \text{ desde que } n \to \infty.$$

Ademais, se

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \to 0, \text{ quando } s \to 0 \tag{2.6}$$

e

$$u_n(x) \to 0, \text{ quando } |x| \to \infty \tag{2.7}$$

uniformemente com respeito a n, então

$$P(u_n(x)) \to v(x) \text{ em } L^1(\mathbb{R}^N) \text{ desde que } n \to \infty.$$

Demonstração. Dado um conjunto limitado $B \subset \mathbb{R}^N$, mostraremos que o $(P(u_n))$ é uniformemente limitada em B e utilizaremos o Teorema A.3.5 (Teorema de Vitalli) para garantir a primeira parte do resultado. Da condição (2.4), segue que existe $C > 0$ tal que

$$|P(u_n(x))| \leq C + C|Q(u_n(x))|, \ \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Daí, do Lema de Fatou e da condição (2.5), segue que $P(u_n), v \in L^1(B)$.

Afirmação: Para alguma $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(K) \to +\infty$ quando $K \to +\infty$, tem-se

$$\int_E |P(u_n(x))|dx \leq \int_F |P(u_n(x))|dx,$$

onde $E =: B \cap \{|P(u_n(x))| \geq K\}$ e $F =: B \cap \{|u_n(x)| \geq \varphi(K)\}$. Com efeito, suponha que a desigualdade é falsa. Assim, existe $B_1 \subset B$, tal que $med(B_1) > 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ e $K > 0$ suficientemente grande,

$$|P(u_n(x))| > K \ \text{ e } \ |u_n(x)| \leq C_1 \ \text{ em } \ B_1,$$

para algum $C_1 > 0$. Mas, a continuidade de P implica que

$$|P(u_n(x))| > K \ \text{ e } \ |P(u_n(x))| \leq C_1 \ \text{ em } \ B_1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O que é um absurdo, logo a afirmação é verdadeira.

Assim, novamente usando as condições (2.4) e (2.5) podemos concluir que

$$\int_E |P(u_n(x))|dx \leq \varepsilon \int_B |Q(u_n(x))|dx \leq \varepsilon C.$$

Portanto, $P(u_n)$ é uniformemente integrável em B e, consequentemente, graças ao Teorema de Vitalli, $P(u_n(x)) \to v(x)$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Agora, observe que dado $\varepsilon > 0$, pelas condições (2.6) e (2.7), existe $R_0 > 0$ tal que

$$|P(u_n(x))| \leq \varepsilon|Q(u_n(x))| \leq \varepsilon C, \ \ n \in \mathbb{N},$$

para $|x| \geq R_0$. Dessa forma, pelo Lema de Fatou, temos

$$\int_{|x| \geq R_0} |v(x)|dx \leq \varepsilon C.$$

Da primeira parte deste Teorema, já sabemos que existe n_0 tal que

$$\int_{|x| < R_0} |P(u_n(x)) - v(x)|dx \leq \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |P(u_n(x)) - v(x)|dx &\leq \int_{|x|<R_0} |P(u_n(x)) - v(x)|dx + \int_{|x|\geq R_0} |P(u_n(x)) - v(x)|dx \\ &\leq 2\varepsilon C + \varepsilon\end{aligned}$$

Portanto, $P(u_n(x)) \to v(x)$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$, desde que $n \to \infty$. $\square$

Exemplo 2.2.2. Sejam $1 < p < q < +\infty$. Suponhamos que (v_n) é uma sequência de funções em $L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ e que exista v, tal que

$$v_n \to v \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

E, além disso, v e cada v_n verificam a condição (2.7). Vamos provar, usando o Teorema 2.2.1, que

$$v_n \to v \text{ em } L^t(\mathbb{R}^N),$$

para qualquer $t \in (p, q)$. Com efeito, pois de início, sabemos pelo Lema de Fatou que $v \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$. Definamos então

$$u_n = v_n - v$$

e

$$P(s) = |s|^t \text{ e } Q(s) = |s|^p + |s|^q.$$

Notemos que

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{|s|^t}{|s|^p + |s|^q} \leq \frac{|s|^t}{|s|^q},$$

daí, quando $s \to +\infty$, temos

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \to 0.$$

Por outro lado, temos também

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{|s|^t}{|s|^p + |s|^q} \leq \frac{|s|^t}{|s|^p},$$

e, por conseguinte, quando $s \to 0$,

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \to 0.$$

Ademais, uma vez que $u_n \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$, sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Q(u_n(x))| dx < \infty.$$

É claro que $u_n(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$ uniformemente com respeito a n. E, por último, devido a continuidade de P, segue que

$$P(u_n) \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Portanto, o Lema de Compacidade de Strauss garante que

$$P(u_n(x)) \to v(x) \text{ em } L^1(\mathbb{R}^N),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n - v|^t dx < +\infty,$$

donde segue a convergência desejada.

2.3 Simetrização de Schwarz

Uma outra ferramenta muito útil para o estudo das soluções radiais de uma E.D.P será apresentado a seguir. Esta ferramenta consiste em considerar uma função positiva e, a partir dela, obter uma função positiva e radialmente decresce.

Definição 2.3.1. Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos bolerianos de $\mathbb{R}^N$, dois a dois, disjuntos de medida finita e $0 < a_n < a_{n-1} < \cdots < a_1$ números reais. Se f é uma função degrau tal que

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

então dizemos que

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]},$$

é um *rearranjo* de f, onde $R_0 = 0$ e $R_{i-1} \leq R_i$ são dados pela relação

$$med([R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]) = med(A_i),$$

em que med é a medida de Lebesgue.

Observe a figura a seguir, a qual apresenta a representação gráfica da simetrização de uma função degrau f.

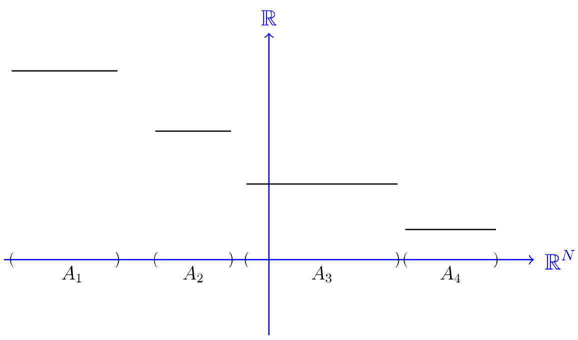

Gráfico de f.

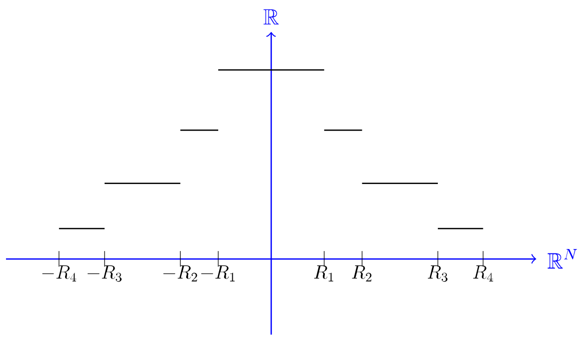

Gráfico de f^*.

Observação 3. Note que esta definição sugere que a partir de uma função degrau f, é possível obtermos uma função f^* que verifica as seguintes propriedades:

(i) É simétrica em relação a origem;

(ii) É radialmente decrescente;

(iii) A integral de Lebesgue de f^* em $\mathbb{R}^N$ é igual a de f, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^* dx = \int_{\mathbb{R}^N} f dx.$$

Consideremos f uma função degrau que possui um número finito de valores

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0.$$

Se $A_i = [f = a_i] = \{x \in \mathbb{R}^N, \ \ f(x) = a_i\}$, então

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

pode ser escrita da forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i,$$

onde $f_i := \chi_{[f \geq a_i]}$, $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_n$ e λ_i são dados pela relação

$$\lambda_i = a_i - a_{i+1},$$

para cada $1 \leq i \leq n$ e $a_{n+1} = 0$.

Lema 2.3.2. A simetrização de f é dada por

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^*,$$

com $f_1^* \geq f_2^* \geq \cdots \geq f_n^*$.

Demonstração. Com efeito, observe que

$$(\lambda_i f_i)^* = \lambda_i f^* = \lambda_i \chi_{[|x| \leq R_i]},$$

onde R_i verifica as seguintes relações

$$med(A_i) = med([R_{i-1} \leq |x| \leq R_i])$$

e

$$med([|x| < R_i]) = med([f \geq a_i]) = med(A_1) + \cdots + med(A_n).$$

Uma vez que $\lambda_i = a_i - a_{i+1}$, conclui-se que

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{[|x| \leq R_i]} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right)^*,$$

donde segue o lema. □

Teorema 2.3.3. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Existe uma única $f^* \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $f^* \geq 0$ e para todo $\alpha > 0$

$$med([f \leq \alpha]) = med([f^* \leq \alpha]),$$

onde o conjunto $[f^* \geq \alpha]$ é uma bola $B_{R_\alpha}(0)$. A função f^* é radialmente decrescente e é chamada de *rearranjo decrescente* ou *simetrização de Schwarz* de f.

Além do mais, para toda função contínua $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $G(f)$ é integrável, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f^*) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(f) dx.$$

Por último, mas não menos importante, uma outra propriedade acerca das simetrizações está enunciada no teorema a seguir.

Teorema 2.3.4 (Desigualdade de Pólya-Szegö). Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Então $u^* \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

As demonstrações dos resultados desta seção podem ser encontradas em [13, Teorema 6.3.3, Proposição 6.3.8].

Capítulo 3

Aplicação

3.1 Um resultado do tipo Berestycki-Lions

Neste capítulo, baseado no artigo [20], vamos estudar a existência de soluções radialmente simétricas da seguinte equação não linear com crescimento crítico:

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{3.1}$$

onde $N \geq 3$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as seguintes hipóteses:

(g_1) $g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é ímpar;

(g_2) $\displaystyle\lim_{s \to 0} \frac{g(s)}{s} = -a < 0$;

(g_3) $\displaystyle\lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s^{2^*-1}} = \mu > 0$;

(g_4) Existem $C > 0$ e $q < 2^*$ tais que

$$g(s) - \mu s^{2^*-1} + as \geq C s^{q-1}, \ \ \forall s > 0.$$

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de não linearidades $g(s)$ satisfazendo as nossas hipóteses.

Exemplo 3.1.1. Sejam $a > 0$, $\mu = 1$ e considere a função definida por

$$g(s) = |s|^{2^*-2} s - as + s^3, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Note que g é uma função contínua e ímpar, isto é, verifica (g_1). Observemos também que

$$\frac{g(s)}{s} = |s|^{2^*-2} - a + s^2,$$

logo,

$$\lim_{s\to 0}\frac{g(s)}{s}=-a<0,$$

donde temos a propriedade (g_2). Do mesmo modo,

$$\frac{g(s)}{s^{2^*-1}}=\frac{|s|^{2^*-2}}{s^{2^*-2}}-\frac{a}{s^{2^*-1}}+\frac{s^3}{s^{2^*-1}},$$

o que nos garante que,

$$\lim_{s\to +\infty}\frac{g(s)}{s^{2^*-1}}=1,$$

ou seja, g satisfaz (g_3). Ademais, quando $s>0$, obtemos

$$g(s)-\mu s^{2^*-1}+as=s^{2^*-1}-as+s^3-s^{2^*-1}+as=s^3.$$

Assim, uma vez que existe $C>0$ tal que $s^2\geq C$, ao considerarmos $q=2$ concluímos que

$$g(s)-\mu s^{2^*-1}+as=s^3\geq Cs^{q-1}.$$

Daí, segue que g também verifica (g_4).

A seguir, temos um exemplo que generaliza o exemplo anterior.

Exemplo 3.1.2. Sejam $a,\mu>0$ e $1<q<2^*-1$. A função definida por

$$g(s)=\mu|s|^{2^*-2}s-as+|s|^{q-1}s,\quad s\in\mathbb{R}$$

satisfaz as hipóteses (g_1)-(g_4).

Não é difícil ver que g é uma função contínua e ímpar e segue a veracidade de (g_1). Observe também que

$$\frac{g(s)}{s}=\mu|s|^{2^*-2}-a+|s|^{q-1},$$

logo,

$$\lim_{s\to 0}\frac{g(s)}{s}=-a<0,$$

donde tem-se a propriedade (g_2). Outrossim,

$$\frac{g(s)}{s^{2^*-1}}=\mu\frac{|s|^{2^*-2}}{s^{2^*-2}}-\frac{a}{s^{2^*-1}}+\frac{|s|^{q-1}}{s^{2^*-2}}$$

e, por conseguinte,

$$\lim_{s\to +\infty}\frac{g(s)}{s^{2^*-1}}=\mu,$$

isto é, g satisfaz (g_3). Ademais, quando $s > 0$, tem-se

$$g(s) - \mu s^{2^*-1} + as = \mu s^{2^*-1} - as + s^q - \mu s^{2^*-1} + as = s^q.$$

Desta forma, é possível concluir que g verifica também (g_4).

Agora, veremos o caso em que a não linearidade não envolve apenas funções do tipo potência.

Exemplo 3.1.3. Sejam $a > 0$, $\mu = 1$ e $1 < q < 2^*$. A função definida por

$$g(s) = |s|^{2^*-2}s - as + (2 + \cos(s))|s|^{q-2}s, \quad s \in \mathbb{R}$$

também verifica as hipóteses (g_1)-(g_4).

Já sabemos que g é uma função contínua. Além disso,

$$\begin{aligned} g(-s) &= |s|^{2^*-2}(-s) - a(-s) + (2 + \cos(-s))|s|^{q-2}(-s) \\ &= -[|s|^{2^*-2}s - as + (2 + \cos(s))|s|^{q-2}s] = -g(s), \end{aligned}$$

ou seja, g também é ímpar. Assim, g verifica (g_1). Ademais

$$\frac{g(s)}{s} = |s|^{2^*-2} - a + (2 + \cos(s))|s|^{q-2},$$

logo,

$$\lim_{s \to 0} \frac{g(s)}{s} = -a < 0.$$

E mais,

$$\frac{g(s)}{s^{2^*-1}} = \frac{|s|^{2^*-2}}{s^{2^*-2}} - \frac{a}{s^{2^*-2}} + \frac{(2 + \cos(s))|s|^{q-2}}{s^{2^*-2}}$$

temos assim

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s^{2^*-1}} = 1,$$

já que $q < 2^*$. Dessa forma, g satisfaz (g_2) e (g_3). Por fim, se $s > 0$, então

$$g(s) - \mu s^{2^*-1} + as = (2 + \cos(s))s^{q-1} \geq s^{q-1},$$

pois $(2 + \cos(s)) \geq 1$. Portanto, g também satisfaz (g_4).

No exemplo a seguir, veremos um exemplo de não linearidade, sobre a qual a propriedade (g_4) não é verificada. Essa função g aparece no Exemplo 1.2.3 e, segundo a identidade de Pohozaev, não é possível encontrar solução não nula para (3.1).

Exemplo 3.1.4. Sejam $a, \mu > 0$ e $g(s) = \mu|s|^{2^*-2}s - as$, em que $s \in \mathbb{R}$. De maneira análoga aos exemplos anteriores, podemos garantir que g verifica (g_1)-(g_3). Entretanto, note que g não satisfaz (g_4), pois

$$g(s) - \mu s^{2^*-1} + as = s^{2^*-1} - as - s^{2^*-1} + as = 0,$$

para $s > 0$. De uma forma geral, este exemplo nos diz que as hipótese $(g_1), (g_2)$ e (g_3) não são suficientes para garantir a existência de solução para a equação (3.1).

Para estabelecer o nosso principal resultado de existência de solução para a equação (3.1), observamos que o funcional energia correspondente a equação é dado por:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx, \;\; u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(t)dt$. Note que podemos reescrevê-lo da maneira a seguir:

$$I(u) = T(u) - V(u),$$

em que

$$T(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \;\text{ e }\; V(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx.$$

Definição 3.1.5. Uma função $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é *solução de energia mínima* (ou *ground state solution*) da equação (3.1) quando $I(\omega) = m$, onde

$$m := \inf\{I(u); u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} \text{ é solução de (3.1)}\}.$$

Ressaltamos que existe um interesse do ponto de vista das aplicações em física na existência de solução do tipo "ground state" para a equação (3.1) quando a não linearidade g satisfaz algumas propriedades do tipo Berestycki-Lions.

Recorde que a existência de solução fraca para (3.1) se reduz à existência de pontos críticos do funcional I. Aqui adotaremos a estratégia clássica para encontrar esses pontos críticos considerando o problema de minimização

$$\inf\{T(u); \; u \in H^1(\mathbb{R}^N), \, V(u) = 1\} \tag{3.2}$$

e usaremos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange.

Nosso principal resultado de existência para equação (3.1) é estabelecido como segue.

Teorema 3.1.6. Suponha que g satisfaz (g_1)-(g_4). Assuma também que $q > 4$ se $N = 3$ e $q > 2$ se $N \geq 4$. Então, a equação (3.1) admite uma solução radial positiva $w \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap H^1_r(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) w é solução de energia mínima de (3.1);

(2) w verifica a identidade de Pohozaev;

(3) Existe um caminho $\gamma \in \Gamma$ tal que $w(x) \in \gamma([0,1])$ e $\max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = I(\omega)$;

(4) $c = m$, isto é, o valor do passo da montanha dá o nível de energia mínima;

(5) (i) Existe $R > 0$ tal que $w'(r) \leq 0$ quando $r > R$;

(ii) w e suas primeiras derivadas decaem exponencialmente, isto é, existem $C > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$|D^\alpha w(x)| \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad |\alpha| = 0, 1.$$

Assumiremos também, sem perda de generalidade, que $\mu = 1$.

3.1.1 Existência de minimizador

Nesta seção, usaremos um argumento de minimização para provar a existência de solução para o problema (3.1). Para isto, vamos inicialmente provar alguns resultados auxiliares.

Seja S a melhor constante da imersão de Sobolev $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$S := \inf_{u\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\right)^{2/2^*}}.$$

De fato, temos

$$S := \inf\{\|\nabla u\|_2^2;\ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N),\ \|u\|_{2^*} = 1\}.$$

Primeiramente, vamos provar o seguinte resultado, cujas ideias são semelhantes às estratégias utilizadas em [5].

Lema 3.1.7. O conjunto $\mathcal{S} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); V(u) = 1\}$ é não vazio.

Demonstração. De fato, seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que *supp*$\varphi \subset B_2$, $\varphi \equiv 1$ em B_1 e em B_2 temos $0 \leq \varphi \leq 1$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $C_\varepsilon = (N(N-2)\varepsilon^2)^{\frac{N-2}{4}}$ e $\psi_\varepsilon(x) = \varphi(x)U_\varepsilon(x)$, onde

$$U_\varepsilon(x) = C_\varepsilon \frac{1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$$

Por um lado, vejamos que

$$\nabla\psi_\varepsilon = C_\varepsilon^2\left(\frac{\nabla\varphi(x)}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} - \frac{(N-2)\varphi(x)x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{N}{2}}}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{B_1}|\nabla\psi_\varepsilon|^2dx &= C_\varepsilon^2(N-2)^2\int_{B_1}\frac{|x|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}dx\\ &= C_\varepsilon^2(N-2)^2\left[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}dx - \int_{\|x\|>1}\frac{|x|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}dx\right],\end{aligned}$$

de modo que

$$\int_{\|x\|>1}\frac{|x|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}dx \le \int_{|x|>1}\frac{|x|^2}{|x|^{2N}}dx = \int_1^\infty \frac{r^{N-1}}{r^{2N-2}}dr < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}dx = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2}{\varepsilon^{2N}(1+|\frac{x}{\varepsilon}|^2)^N}dx = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon^2|x|^2}{\varepsilon^{2N}(1+|x|^2)^N}\varepsilon^N dx = \frac{K_1}{\varepsilon^{N-2}}$$

com $K_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N}dx$. Assim,

$$\|\nabla\psi_\varepsilon\|_2^2 = C_\varepsilon^2\left(\frac{K_1}{\varepsilon^{N-2}} + O(\varepsilon^{N-2})\right), \tag{3.3}$$

Por outro lado, podemos notar que

$$\int_{B_1}|\psi_\varepsilon|^{2^*}dx = C_\varepsilon^{2^*}\int_{B_1}\frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}dx = C_\varepsilon^{2^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}dx - \int_{\|x\|>1}\frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}dx\right),$$

em que

$$\int_{\|x\|>1}\frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}dx \le \int_{|x|>1}\frac{1}{\|x\|^{2N}}dx = \int_1^\infty\frac{r^{N-1}}{r^{2N}}dr < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}dx = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{\varepsilon^{2N}(1+|\frac{x}{\varepsilon}|^2)^N}dx = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{\varepsilon^{2N}(1+|x|^2)^N}\varepsilon^N dx = \frac{K_2'}{\varepsilon^N}$$

com $K_2' = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(1+|x|^2)^N}dx$. Logo,

$$\|\psi_\varepsilon\|_{2^*}^2 = C_\varepsilon^2\left(\int_{B_1}|\psi_\varepsilon|^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} = C_\varepsilon^2\left(\frac{K_2}{\varepsilon^{N-2}} + O(\varepsilon)\right), \tag{3.4}$$

de tal forma que $K_2^{\frac{N}{N-2}} = K_2'$.

Seja $v_\varepsilon = \dfrac{\psi_\varepsilon}{\|\psi_\varepsilon\|_{2^*}}$. De (3.3) e (3.4), segue que

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = \frac{\frac{K_1}{\varepsilon^{N-2}} + O(\varepsilon^{N-2})}{\frac{K_2}{\varepsilon^{N-2}} + O(\varepsilon)} \leq S + O(\varepsilon^{N-2})$$

com $S = K_1/K_2$ é a constante ótima de Sobolev. Por (g_4) existem $C > 0$ e $q < 2^*$ tais que

$$\int_0^{v_\varepsilon} \left(g(s) - s^{2^*-1} + as\right) ds \geq C \int_0^{v_\varepsilon} s^{q-1} ds$$

e ao integrarmos sobre $\mathbb{R}^N$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(G(v_\varepsilon) - \frac{v_\varepsilon^{2^*}}{2^*} + \frac{a v_\varepsilon^2}{2} \right) dx \geq C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{v_\varepsilon^q}{q} dx.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} V(v_\varepsilon) &\geq \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} v_\varepsilon^{2^*} dx + \frac{C}{q} \int_{\mathbb{R}^N} v_\varepsilon^q dx - \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^N} v_\varepsilon^2 dx \\ &= \frac{1}{2^*} + \Gamma_\varepsilon, \end{aligned}$$

desde que $\Gamma_\varepsilon = \dfrac{C}{q} \|v_\varepsilon\|_q^q - \dfrac{a}{2} \|v_\varepsilon\|_2^2$.

Afirmação: $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma_\varepsilon}{\varepsilon^{N-2}} = +\infty$.

Observemos que

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|_q^q &\geq \frac{1}{\|\psi_\varepsilon\|_{2^*}^q} \int_{B_1} |U_\varepsilon|^q dx \\ &= \frac{\omega_N}{\|\psi_\varepsilon\|_{2^*}^q} \int_0^1 \frac{C_\varepsilon^q r^{N-1}}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{N-2}{2} q}} dr \\ &= C_1(N, \varepsilon) \varepsilon^{N - \frac{N-2}{2} q} \int_0^{1/\varepsilon} \frac{r^{N-1}}{(1 + r^2)^{\frac{N-2}{2} q}} dr \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|_2^2 &\leq \frac{1}{\|\psi_\varepsilon\|_{2^*}^2} \int_{B_2} |U_\varepsilon|^q dx \\ &= \frac{\omega_N}{\|\psi_\varepsilon\|_{2^*}^2} \int_0^2 \frac{C_\varepsilon r^{N-1}}{(\varepsilon + r^2)^{N-2}} dr \\ &= C_2(N, \varepsilon) \varepsilon^{2-N} \int_0^{2/\varepsilon} \frac{r^{N-1}}{(1 + r^2)^{N-2}} dr. \end{aligned}$$

Portanto, $\Gamma_\varepsilon \geq \varepsilon^{N-\frac{N-2}{2}q} J(\varepsilon)$ e

$$J(\varepsilon) = \frac{C}{q} C_1(N,\varepsilon) \int_0^{1/\varepsilon} \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{\frac{N-2}{2}q}} dr - \frac{a}{2} C_2(N,\varepsilon) \varepsilon^{2+\frac{N-2}{2}q} \int_0^{2/\varepsilon} \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{N-2}} dr.$$

Como $|\psi_\varepsilon| \leq |U_\varepsilon|$ e vale (3.4) segue que existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} C_1(N,\varepsilon) = C_1 \ \text{ e } \ \lim_{\varepsilon \to 0} C_2(N,\varepsilon) = C_2.$$

Graças as hipóteses do Teorema 3.1.6, tem-se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1/\varepsilon} \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{\frac{N-2}{2}q}} dr = \int_0^{\infty} \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{\frac{N-2}{2}q}} dr \leq \int_0^{\infty} \frac{r^{N-1}}{r^{(N-2)q}} dr < \infty$$

e

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2+\frac{N-2}{2}q} \int_0^{2/\varepsilon} \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{N-2}} dr = 0.$$

Então, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} J(\varepsilon) > 0$. Assim, uma vez que $N - \dfrac{N-2}{2} q < N-2$ segue que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma_\varepsilon}{\varepsilon^{N-2}} = +\infty,$$

logo concluímos a afirmação. Por conseguinte, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$V(v_\varepsilon) \geq \frac{1}{2^*},$$

pois $V(v_\varepsilon) \geq \dfrac{1}{2^*} + \Gamma_\varepsilon$.

Outrossim, seja $\omega(x) = v_\varepsilon\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)$, com $\sigma = (V(v_\varepsilon))^{-\frac{1}{N}}$. Observemos que

$$V(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} G\left(v_\varepsilon\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(v_\varepsilon(x)) \sigma^N dx = \frac{1}{V(v_\varepsilon(x))} \int_{\mathbb{R}^N} G(v_\varepsilon(x)) dx = 1.$$

Portanto, $\mathcal{S}$ é um conjunto não vazio. $\square$

Agora, estabelecido que $\mathcal{S}$ é um conjunto não vazio, podemos definir

$$M := \inf\{T(u);\ V(u) = 1, u \in H^1(\mathbb{R}^N)\}.$$

e enunciar o seguinte lema.

Lema 3.1.8. Se as hipóteses do Teorema 3.1.6 são satisfeitas, então

$$0 < M < \frac{1}{2}(2^*)^{\frac{N-2}{N}} S,$$

onde S é a constante ótima de Sobolev.

Demonstração. Note que $0 \leq M < +\infty$, pois $0 \leq T(u) < +\infty$, para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Considere, novamente, $\omega(x) = v_\varepsilon\left(\frac{x}{\sigma}\right)$, de maneira que $\sigma = (V(v_\varepsilon))^{-\frac{1}{N}}$ e perceba que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega|^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla v_\varepsilon\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right|^2 \sigma^{-2} dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\varepsilon(x)|^2 \sigma^{N-2} dx,$$

isto é,

$$T(\omega) = \sigma^{N-2} T(v_\varepsilon).$$

Consequentemente,

$$M \leq T(\omega) = \sigma^{N-2} T(v_\varepsilon) = \frac{T(v_\varepsilon)}{(V(v_\varepsilon))^{\frac{2}{2^*}}}.$$

Portanto, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, temos

$$M \leq \frac{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}{\left(\frac{1}{2^*} + \Gamma_\varepsilon\right)^{\frac{2}{2^*}}} \leq \frac{(2^*)^{2/2^*}}{2} S \frac{1 + O(\varepsilon^{N-2})}{(1 + 2^*\Gamma_\varepsilon)^{\frac{2}{2^*}}}. \tag{3.5}$$

Pelo Lema A.4.1, se $p \geq 1$, então

$$(1+t)^p \leq 1 + p(1+t)^{1+p} t, \quad \forall t \geq -1.$$

Daí, ao considerar $p = \dfrac{2^*}{2}$ e $t = O(\varepsilon^{N-2})$ temos

$$(1 + O(\varepsilon^{N-2}))^{\frac{2^*}{2}} - 1 \leq \frac{2^*}{2}(1 + O(\varepsilon^{N-2}))^{1+\frac{2}{2^*}} O(\varepsilon^{N-2}) < 2^*\Gamma_\varepsilon,$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Ou ainda,

$$(1 + O(\varepsilon^{N-2}))^{\frac{2^*}{2}} < 1 + 2^*\Gamma_\varepsilon.$$

Dessa forma, segue de (3.5) que

$$M < \frac{(2^*)^{\frac{N-2}{N}}}{2} S.$$

Por outro lado, suponha que $M = 0$. Segue das propriedades de ínfimo que existe uma sequência $\{u_n\}_n$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$V(u_n) = 1 \text{ e } \lim_{n\to\infty} T(u_n) = 0.$$

Assim, da imersão de Gagliado-Nirenberg-Sobolev (Teorema A.2.8), segue que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{2^*} = 0.$$

Das propriedades (g_2) e (g_3),

$$G(s) = \int_0^s \frac{g(t)t^{2^*-1}}{t^{2^*-1}} dt \le C|s|^{2^*}, \ \ s \in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$V(u_n) \le C\|u_n\|_{2^*}^{2^*}$$

e assim

$$\lim_{n\to\infty} V(u_n) = 0,$$

o que é uma contradição, pois $V(u_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, chegamos a conclusão que

$$0 < M < \frac{1}{2}(2^*)^{\frac{N-2}{2}} S.$$

□

Teorema 3.1.9. Se as hipóteses do Teorema 3.1.6 são satisfeitas, então o problema (3.2) tem um minimizante $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ positivo e radialmente simétrico.

Demonstração. No Lema 3.1.7, vimos que o conjunto $\mathcal{S} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N);\ V(u) = 1\}$ é não vazio. Da definição de ínfimo, obtemos uma sequência minimizante (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$V(u_n) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad T(u_n) \to M.$$

Dessa forma, consideremos a simetrização de Schwarz (u_n^*) em $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ de $(|u_n|)$, sobre a qual podemos afirmar que

$$V(u_n^*) = V(u_n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alem do mais, da Desigualdade de Pólya-Szegö temos,

$$T(u_n^*) \to M,$$

donde podemos assumir (u_n) não negativa e radialmente simétrica. Logo, da Desigualdade de Gagliado-Nirenberg-Sobolev, como a convergência de $(T(u_n))$ garante a sua própria limitação, podemos afirmar que (u_n) também é limitada em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Por outro lado, das propriedades (g_2) e (g_3), como também visto no lema anterior, é possível obter $C > 0$ tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$G(s) \leq C|s|^{2^*} - \frac{a}{4}|s|^2.$$

Daí,

$$\|u_n\|_2^2 \leq \frac{4}{a}\left[C\|u_n\|_{2^*}^{2^*} - V(u_n)\right],$$

isto é, (u_n) também é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Sendo assim, (u_n) é limitada em $H_r^1(\mathbb{R}^N)$, logo, podemos assumir que (u_n) converge fracamente em $H_r^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, uma outra consequência da limitação em $L^2(\mathbb{R}^N)$ é a existência de u_0 tal que

$$u_n \to u_0 \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Pelo Lema 2.1.7, é válida a convergência uniforme a seguir:

$$u_n(x) \to 0, \ \ |x| \to +\infty.$$

Ademais, o Teorema 2.1.8, nos garante que (u_n) converge fortemente em $L^q(\mathbb{R}^N)$. Seja $v_n = u_n - u_0$, temos

$$\begin{aligned} T(u_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(v_n + u_0)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n||\nabla u_0| dx \\ &= T(v_n) + T(u_0) + o(1), \end{aligned}$$

com $o(1) \to 0$, quando $n \to +\infty$. Assim, se $S_n = T(v_n)$ e $S_0 = T(u_0)$ então

$$S_n = M - S_0 + o(1). \tag{3.6}$$

Como (u_n) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \to u_0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, pelo Lema A.3.3 (Lema de Brezis-Lieb), segue que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^2 dx\right) = 0,$$

ou ainda,

$$\|u_n\|_2^2 = \|v_n\|_2^2 + \|u_0\|_2^2 + o(1).$$

Analogamente,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*}dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^{2^*}dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*}dx\right) = 0,$$

e consequentemente,

$$\|u_n\|_{2^*}^{2^*} = \|v_n\|_{2^*}^{2^*} + \|u_0\|_{2^*}^{2^*} + o(1).$$

Agora, defina $p(s) = g(s) - s^{2^*-1} + as$ e $Q(s) = s^2 + s^{2^*}$. Por (g_2) e (g_3), temos

$$\frac{p(s)}{s} = \frac{g(s)}{s} - s^{2^*-2} + a \longrightarrow 0 \text{ quando } s \to 0, \tag{3.7}$$

e

$$\frac{p(s)}{s^{2^*-1}} = \frac{g(s)}{s^{2^*-1}} - 1 + \frac{a}{s^{2^*-2}} \longrightarrow 0 \text{ quando } s \to +\infty. \tag{3.8}$$

Se $P(s) = \displaystyle\int_0^s p(t)dt$, então

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{G(s) - \frac{s^{2^*}}{2^*} + \frac{as^2}{2}}{s^2 + s^{2^*}}.$$

Daí, da regra de L'Hôpital e de (3.7), temos

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \longrightarrow \frac{g(s) - s^{2^*-1} + as}{2s + 2^* s^{2^*-1}} = \frac{p(s)}{s} \cdot \frac{1}{2^* s^{2^*-1} + 2} \longrightarrow 0, \text{ quando } s \to 0.$$

Analogamente, de (3.8), obtemos

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \longrightarrow \frac{g(s) - s^{2^*-1} + as}{2s + 2^* s^{2^*-1}} = \frac{p(s)}{s^{2^*-1}} \cdot \frac{1}{2s^{2^*-2} + 2^*} \longrightarrow 0, \text{ quando } s \to +\infty.$$

Também é conhecido que $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} Q(u_n)dx\right)$ é limitada, uma vez que (u_n) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. E mais, como $u_n \to u_0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$, então

$$P(u_n) \to P(u_0) \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Dessa forma, as funções P e Q e a sequência de funções (u_n) verificam as hipóteses do Lema 2.2.1 (Lema de Compacidade de Strauss), e daí, podemos usá-lo para garantir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} P(u_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} P(u_0)dx + o(1).$$

Uma vez que já sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} P(v_n)dx = o(1),$$

temos

$$\begin{aligned}
V(u_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} P(u_n)dx + \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*}dx - \frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} P(u_0)dx + \int_{\mathbb{R}^N} P(v_n)dx + \frac{1}{2^*}\left(\|v_n\|_{2^*}^{2^*} + \|u_0\|_{2^*}^{2^*}dx\right) - \frac{a}{2}\left(\|v_n\|_2^2 + \|u_0\|_2^2 dx\right) + o(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} P(u_0)dx + \frac{1}{2}\|u_0\|_{2^*}^{2^*} - \frac{a}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^N} P(v_n)dx + \frac{1}{2}\|v_n\|_{2^*}^{2^*} - \frac{a}{2}\|v_n\|_2^2 + o(1) \\
&= V(u_0) + V(v_n) + o(1).
\end{aligned}$$

Dessa maneira, se $\lambda_n = V(v_n)$ e $\lambda_0 = V(u_0)$, então

$$\lambda_n = 1 - \lambda_0 + o(1). \tag{3.9}$$

Afirmação: Para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $V(u) \geq 0$, temos

$$T(u) \geq M(V(u))^{\frac{N-2}{N}}.$$

O caso $V(u) = 0$ é imediato. Por outro lado, caso $V(u) > 0$, consideremos como no lema anterior $\sigma = (V(u))^{-\frac{1}{N}}$, $u_\sigma(x) = u\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)$ e as seguintes relações

$$T(u_\sigma) = \sigma^{N-2}T(u) \quad \text{e} \quad V(u_\sigma) = \sigma^N V(u).$$

Daí, uma vez que $V(u_\sigma) = 1$, da definição de M obtemos $T(u_\sigma) = \sigma^{N-2}T(u) \geq M$, isto é,

$$T(u) \geq M(V(u))^{\frac{N-2}{N}}.$$

Devemos, finalmente, provar que $\lambda_0 = 1$, e assim garantiremos a existência de um minimizante de (3.2). Suponha que $\lambda_0 > 1$. Assim, da afirmação, temos

$$S_0 = T(u_0) \geq M(V(u_0))^{\frac{N-2}{N}} = M(\lambda_0)^{\frac{N-2}{N}} > M,$$

o que é uma contradição, pois $S_0 \leq M$, graças a equação (3.6). Suponha, por outro lado, que $\lambda_0 < 0$. De (3.9), segue que para n suficientemente grande, que

$$1 < 1 - \frac{\lambda_0}{2} < \lambda_n$$

e daí, novamente da afirmação,

$$S_n = T(u_n) \geq M(V(u_n))^{\frac{N-2}{N}} = M(\lambda_n)^{\frac{N-2}{N}} > M\left(1 - \frac{\lambda_0}{2}\right)^{\frac{N-2}{N}} > M,$$

mas isto contradiz a equação (3.6). Logo $0 \leq \lambda_0 \leq 1$.

Por último, se $0 \leq \lambda_0 < 1$, então, para n suficientemente grande, $\lambda_n > 0$. Daí e da afirmação,

$$S_0 \geq M(\lambda_0)^{\frac{N-2}{N}} \quad \text{e} \quad S_n \geq M(\lambda_n)^{\frac{N-2}{N}},$$

que nos dá,

$$\begin{aligned}
M &= \lim_{n\to\infty}(S_0 + S_n) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} M((\lambda_0)^{\frac{N-2}{N}} + (\lambda_n)^{\frac{N-2}{N}}) \\
&= M((\lambda_0)^{\frac{N-2}{N}} + (1-\lambda_0)^{\frac{N-2}{N}}) \\
&\geq M(\lambda_0 + 1 - \lambda_0) = M,
\end{aligned}$$

e, como consequência, $(\lambda_0)^{\frac{N-2}{N}} + (1 - \lambda_0)^{\frac{N-2}{N}} = 1$. Dessa forma, ao considerar o Lema A.4.2, para $t = \lambda_0$ e $p = \dfrac{N-2}{N}$, pode-se concluir que $\lambda_0 = 0$, o que nos levaria a $u_0 = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = M$. Assim, de (3.9)

$$\begin{aligned}
1 = \lim_{n\to\infty} \lambda_n &= \limsup_{n\to\infty} V(v_n) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} P(v_n)dx + \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}dx - \frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 dx\right),
\end{aligned}$$

e, no que segue, $\limsup\limits_{n\to\infty} \|v_n\|_{2^*}^{2^*} \geq (2^*)^{\frac{N-2}{2}}$. Logo,

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_2^2 \frac{\|v_n\|_{2^*}^{2^*}}{\|v_n\|_{2^*}^{2^*}} \\
&\geq \frac{1}{2}(2^*)^{\frac{N-2}{2}} \liminf_{n\to\infty} \frac{\|\nabla v_n\|_2^2}{\|v_n\|_{2^*}^{2^*}}.
\end{aligned}$$

Recorde que $S := \inf\{\|\nabla u\|_2^2;\ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{2^*} = 1\}$, donde deduz-se que

$$M \geq \frac{1}{2}(2^*)^{\frac{N-2}{2}} S,$$

chegando a uma contradição com o lema anterior. Portanto, $\lambda_0 = 1$, ou seja, u_0 é uma solução minimizante e radialmente simétrica do problema (3.2). □

3.1.2 Solução de energia mínima

Aqui, vamos iniciar definindo a variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$ dada por

$$\mathcal{P} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\};\ J(u) = 0\},$$

na qual $J \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N))$ e

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx \\ &= (N-2)T(u) - NV(u). \end{aligned}$$

e recorde que

$$\mathcal{S} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\{0\};\ V(u) = 1\}.$$

Assim, podemos enunciar o lema a seguir, que estabelece uma bijeção entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{S}$.

Lema 3.1.10. Dada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$, considere $t_u = \left(\dfrac{N-2}{2N}\right)^{1/2} \|\nabla u\|_2$. A aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{S} &\to \mathcal{P} \\ u &\mapsto (\Phi(u))(x) = u\left(\frac{x}{t_u}\right) \end{aligned}$$

é uma correspondência biunívoca.

Demonstração. Mostremos primeiro que Φ é injetiva. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$, tais que $\Phi(u_1) = \Phi(u_2)$, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$u_1\left(\frac{x}{t_{u_1}}\right) = u_2\left(\frac{x}{t_{u_2}}\right).$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G\left(u_1\left(\frac{x}{t_{u_1}}\right)\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G\left(u_2\left(\frac{x}{t_{u_2}}\right)\right) dx,$$

ou ainda,

$$t_{u_1}^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u_1(x))dx = t_{u_2}^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u_2(x))dx.$$

Como $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$, temos $V(u_1) = V(u_2) = 1$ e, consequentemente $t_{u_1} = t_{u_2}$ e isto implica que

$$u_1(x) = u_2(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto, Φ é injetiva.

Mostremos agora que Φ é sobrejetiva. Dada $u \in \mathcal{P}$, considere $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(x) = u(t_u^{2/N} x).$$

Notemos que

$$\|\nabla v\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t_u^{2/N} x)|^2 dx = t_u^{4/N} t_u^{-2} \|\nabla u\|_2^2,$$

logo

$$\|\nabla v\|_2 = \frac{t_u^{2/N}}{t_u} \|\nabla u\|_2,$$

o que nos leva a

$$t_v = \left(\frac{N-2}{2N} \right)^{1/2} \|\nabla v\|_2 = \left(\frac{N-2}{2N} \right)^{1/2} \|\nabla u\|_2 \frac{t_u^{2/N}}{t_u} = t_u \frac{t_u^{2/N}}{t_u} = t_u^{2/N}.$$

Dessa maneira, obtemos

$$(\Phi(u))(x) = v\left(\frac{x}{t_v} \right) = u\left(\frac{t_u^{2/N} x}{t_u} \right) = u(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Além disso, uma vez que $u \in \mathcal{P}$, temos também

$$V(u) = \frac{N-2}{2N} \|\nabla u\|_2^2 = t_u^2.$$

Isto posto, obtemos

$$V(v) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u(t_u^{2/N} x))dx = \frac{V(u)}{t_u^2} = 1.$$

Assim sendo, temos $v \in \mathcal{S}$ e $\Phi(v) = u$, ou seja, Φ é sobrejetiva. $\square$

Agora, podemos enfim enunciar o resultado principal desta seção:

Teorema 3.1.11. Assuma as hipóteses do Teorema 3.1.6. Então existe uma solução de energia mínima $w(x)$ de (3.1) satisfazendo a identidade de Pohozaev. Além disso, a energia mínima de (3.1), m, verifica

$$m = \frac{2\sigma_0^N}{N-2},$$

em que $\sigma_0 = \left(\frac{N-2}{N}M\right)^{1/2}$.

Demonstração. Do Lema 3.1.10, sabemos que Φ é uma correspondência biunívoca. Seja $u \in \mathcal{S}$, temos

$$\begin{aligned}
I(\Phi(u)) &= T(\Phi(u)) - V(\Phi(u)) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(u\left(\frac{x}{t_u}\right)\right)\right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G\left(u\left(\frac{x}{t_u}\right)\right) dx, \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{t_u^2}|\nabla u(x)|^2 t_u^N dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) t_u^N dx, \\
&= \frac{1}{2} t_u^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx - t_u^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx.
\end{aligned}$$

Recorde que $t_u = \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{1/2} \|\nabla u\|_2$. Logo

$$\begin{aligned}
I(\Phi(u)) &= \frac{1}{2}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} \|\nabla u\|_2^N - \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N}{2}} \|\nabla u\|_2^N \\
&= \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} \|\nabla u\|_2^N \left(\frac{1}{2} - \frac{N-2}{2N}\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} \|\nabla u\|_2^N
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\inf_{u\in\mathcal{P}} I(u) = \inf_{u\in\mathcal{S}} I(\Phi(u)) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} \inf_{u\in\mathcal{S}} \|\nabla u\|_2^N. \tag{3.10}$$

Por outro lado, o Teorema 3.1.9 garante que $u_0 \in \mathcal{S}$ e ainda mais,

$$\inf_{u\in\mathcal{S}} \|\nabla u\|_2^2 = \|\nabla u_0\|_2^2 = 2M. \tag{3.11}$$

Assim, de (3.10) e (3.11), segue que

$$\inf_{u\in\mathcal{P}} I(u) = I(\Phi(u_0)) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} (2M)^{\frac{N}{2}}.$$

Agora, seja $w = \Phi(u_0)$. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'(w) = \mu_0 J'(w) \text{ em } H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Daí, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(w)\varphi dx = \mu_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi dx - \frac{N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} g(w)\varphi dx \right),$$

ou ainda,

$$(1-\mu_0) \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi dx = \left(1 - \mu_0 \frac{N}{N-2}\right) \int_{\mathbb{R}^N} g(w)\varphi dx.$$

Logo, uma vez que $\mu_0 \neq 1$, segue que w é solução fraca para a equação

$$-\Delta u = \left(\frac{1 - \mu_0 \frac{N}{N-2}}{1-\mu_0} \right) g(u).$$

Dessa forma, podemos garantir que w satisfaz a identidade de Pohozaev, isto é,

$$(1-\mu_0)\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx = N \left(1 - \mu_0 \frac{N}{N-2}\right) \int_{\mathbb{R}^N} G(w) dx. \tag{3.12}$$

Entretanto, como $w = \Phi(u_0) \in \mathcal{P}$, segue que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx = \frac{N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(w) dx.$$

Daí e de (3.12), obtemos

$$(1-\mu_0)(N-2)\frac{N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(w) dx = N \left(1 - \mu_0 \frac{N}{N-2}\right) \int_{\mathbb{R}^N} G(w) dx,$$

ou equivalentemente,

$$\mu_0 = \mu_0 \frac{N}{N-2},$$

e isto implica que $\mu_0 = 0$, donde obtemos, $I'(w) = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Por conseguinte,

$w = \Phi(u_0)$ é solução de energia mínima de (3.1) e, além disso

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}}(2M)^{\frac{N}{2}} \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{-1}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N}{2}}(2M)^{\frac{N}{2}} \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{2N}{N-2}\right)\left(\frac{(N-2)2M}{2N}\right)^{\frac{N}{2}} \\
&= \frac{2}{N-2}\left[\left(\frac{(N-2)2M}{2N}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{N}
\end{aligned}
$$

Portanto, $m = \dfrac{2\sigma_0^N}{N-2}$, concluindo assim a demonstração. $\square$

3.1.3 Geometria do Passo da Montanha

Aqui, vamos provar que o funcional I possui a geometria do Passo da Montanha.

Definição 3.1.12. Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional tais que $I(0) = 0$. Dizemos que I satisfaz a *geometria do passo da montanha* quando

(i) Existem $\rho_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que $I(u) \geq \delta_0$ para todo $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \rho_0$;

(ii) Existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} > \rho_0$ e $I(u_0) \leq 0$.

Definição 3.1.13. Dizemos que c é o *nível do passo da montanha* de I se

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)), \tag{3.13}$$

em que

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0\}. \tag{3.14}$$

Lema 3.1.14. Assuma que (g_1)-(g_3) são verificadas. Então o funcional

$$I(u) = T(u) - V(u)$$

satisfaz a geometria do passo da montanha. Em particular, c dado por (3.13) está bem definido.

Demonstração. É imediato que $I(0) = 0$, graças à (g_1). Agora, consideremos $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$. Por (g_2), é possível garantir a existência de $\delta_a > 0$ tal que para $0 < s < \delta_a$, obtemos

$$g(s) < -\frac{a}{2}s + s^{2^*-1}.$$

Por (g_3), existe $R_a > 0$ tal que para $s > R_a$, temos

$$g(s) < -\frac{a}{2}s + \left(1 + \frac{a}{2}\right) s^{2^*-1}.$$

Além disso, da continuidade da função

$$\frac{g(s) + \frac{a}{2}s}{s^{2^*-1}}$$

no compacto $[\delta_a, R_a] \subset \mathbb{R}$, existe $K_a > 0$ tal que

$$g(s) < -\frac{a}{2}s + K_a s^{2^*-1}.$$

Assim, seja $C_a = \max\left\{1 + \frac{a}{2}, K_a\right\} > 0$ e daí, para $s \geq 0$, concluímos que

$$g(s) \leq -\frac{a}{2}s + C_a s^{2^*-1}.$$

Integrando os dois lados dessa desigualdade, desde que G é par, temos

$$G(s) \leq -\frac{a}{4}|s|^2 + C_a'|s|^{2^*}, \quad s \in \mathbb{R},$$

onde, $C_a' = \dfrac{C_a}{2}$. Disso e da imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, notamos que

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{a}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx - C_a' \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \\
&\geq C_0 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - C_1 \|u\|^{2^*}_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\
&= \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \left(C_0 - C_1 \|u\|^{2^*-2}_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right),
\end{aligned}$$

em que $C_0 = \min\{1/2, a/4\}$ e C_1 depende de C_a' e da constante que aparece na imersão. Finalmente, ao escolher $0 < \rho_0 < (C_0/C_1)^{\frac{1}{2^*-2}}$, observamos que, se $\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \rho_0$, então $I(u) \geq \delta_0$, onde

$$\delta_0 = \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \left(C_0 - C_1 \|u\|^{2^*-2}_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right).$$

Isto é, o funcional I verifica a condição (i) da definição 3.1.12.

Novamente por (g_2) e (g_3), para $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, é possível obter $C_a'' > 0$ de modo que, para $s \geq 0$,

$$g(s) \geq \frac{1}{2}s^{2^*-1} - C_a'' s^2$$

e, por conseguinte,

$$G(s) \geq \frac{1}{2 \cdot 2^*}|s|^{2^*} - C_a''|s|, \ \ s \in \mathbb{R}.$$

Dessa maneira, para $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ não nula, tem-se

$$\begin{aligned} I(tv_0) &\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0|^2 dx + \frac{C_a'' t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^2 dx - \frac{t^{2^*}}{2 \cdot 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^{2^*} dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0|^2 dx - \frac{t^{2^*}}{2 \cdot 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^{2^*} dx. \end{aligned}$$

o que leva ao seguinte limite

$$\lim_{t \to +\infty} I(tv_0) = -\infty.$$

Portanto, para t suficientemente grande, é possível concluir que

$$\|u_0\| > \rho_0 \ \text{ e } \ I(u_0) \leq 0,$$

em que $u_0 = tv_0$. Logo, a condição (ii) da definição (3.1.12) também é satisfeita e assim, pode-se afirmar que o funcional I possui a geometria do passo da montanha. $\square$

Agora, consideremos a variedade de Pohozaev $\mathcal{P} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}; \ J(u) = 0\}$ e escrevamos o funcional J da seguinte maneira

$$J(u) = (N-2)T(u) - NV(u) = NI(u) - \|\nabla u\|_2^2.$$

Observação 4. Com as devidas adaptações, é possível, de forma semelhante ao Lema 3.1.14, mostrar que existe $\rho_0 > 0$ tal que para todo $0 < \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_0$, tem-se

$$J(u) > 0.$$

Para finalizar esta seção, utilizaremos os argumentos de [12] a fim de garantir que o nível de energia mínima de I, m, é igual ao valor do passo da montanha, c. Primeiramente, observemos a seguinte desigualdade:

Lema 3.1.15. Temos a seguinte estimativa

$$c \geq m.$$

Demonstração. Vamos mostrar que para todo caminho $\gamma \in \Gamma$, onde Γ está definido em (3.14), é possível garantir que

$$\gamma([0,1]) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset.$$

Considerando a **Observação 4**, existe ρ_0 tal que

$$J(u) > 0,$$

para todo $0 < \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_0$. Por outro lado, para todo $\gamma \in \Gamma$, tem-se $\gamma(0) = 0$ e

$$J(\gamma(1)) \leq NI(\gamma(1)) < 0.$$

Portanto, existe $t_0 \in [0,1]$ de modo que

$$\|\gamma(t_0)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} > \rho_0 \;\; e \;\; J(\gamma(t_0)) = 0,$$

isto é, $\gamma(t_0) \in \gamma([0,1]) \cap \mathcal{P}$, donde segue que $\gamma([0,1]) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$. Ademais, ao considerarmos m, como no Teorema 3.1.11, obtemos como consequência

$$m = \inf_{u \in \mathcal{P}} I(u) \leq I(\gamma(t_0)) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) = c,$$

donde deduz-se a desigualdade desejada. $\square$

A seguir, demonstraremos um segundo lema auxiliar, que nos levará a desigualdade contrária, a saber $c \leq m$.

Lema 3.1.16. É possível encontrar uma curva $\gamma : [0, L] \to H^1(\mathbb{R}^N)$, para L suficientemente grande, de tal forma que

$$\gamma(0) = 0, \;\; I(\gamma(L)) < 0, \;\; w \in \gamma([0, L]) \tag{3.15}$$

e

$$\max_{0 \leq t \leq L} I(\gamma(t)) = m. \tag{3.16}$$

Demonstração. Considere o caminho definido por

$$\gamma(t)(x) := \begin{cases} w\left(\dfrac{x}{t}\right), & t > 0; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \|\nabla\gamma(t)\|^2_2 + \|\gamma(t)\|^2_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla w\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left|w\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{1}{t}\nabla w(x)\right|^2 t^N dx + \int_{\mathbb{R}^N} |w(x)|^2 t^N dx \\
&= t^{N-2}\|\nabla w\|^2_2 + t^N\|w\|^2_2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I(\gamma(t)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla w\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} G\left(w\left(\frac{x}{t}\right)\right) dx \\
&= \frac{t^{N-2}}{2}\|\nabla w\|^2_2 + t^N \int_{\mathbb{R}^N} G(w(x))dx.
\end{aligned}$$

Logo, $\gamma \in C([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^N))$ e mais

$$\frac{d}{dt}I(\gamma(t)) = \frac{(N-2)}{2}t^{N-3}\|\nabla w\|^2_2 - Nt^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N} G(w(x))dx.$$

Da Identidade de Pohozaev (1.2), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(w(x))dx > 0,$$

e

$$\frac{N-2}{2}t^{N-3}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w(x)|^2 dx = t^{N-3}N\int_{\mathbb{R}^N} G(w(x))dx > t^{N-1}N\int_{\mathbb{R}^N} G(w(x))dx,$$

para $0 < t < 1$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}I(\gamma(t)) > 0, \quad \text{para}\, t \in [0,1].$$

De maneira análoga, para $t > 1$, tem-se $\frac{d}{dt}I(\gamma(t)) < 0$. Logo, para L suficientemente grande, é válido (3.15), em que

$$\gamma(1)(x) = w(x).$$

Ademais, $\frac{d}{dt}I(\gamma(1)) = 0$, donde segue (3.16). □

Agora, podemos estabelecer o resultado desejado.

Teorema 3.1.17. O nível do passo da montanha coincide com o nível de energia mínima, isto é, $c = m$.

Demonstração. Usando um *scale* suave, de acordo com o Lema 3.1.16, é possível obter $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\gamma(0) = 0, \ \ I(\gamma(1)) < 0, \ \ w \in \gamma([0,1])$$

e

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) = m.$$

Daí, sendo c o valor do passo da montanha do funcional I, tem-se $c \leq m$. Além do mais, o Lema 3.1.15 garante que $c \geq m$. Logo,

$$c = m$$

donde conclui-se a demonstração. □

3.1.4 Regularidade e comportamento assintótico da solução

Nesta seção, estabeleceremos a regularidade e o decaimento da solução de energia mínima w de (3.1). Vamos começar relembrando alguns resultados fundamentais

Definição 3.1.18. Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e uma função em $L^p(\Omega)$ para algum $p \geq 1$. O *potencial Newtoniano* de f é a função v definida pela convolução

$$v(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y) dy,$$

onde Γ é a solução da equação de Laplace dada por

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{N(2-N)\omega_N}|x-y|^{2-N}, & N > 2 \\ \dfrac{1}{2\pi} \log|x-y|, & N = 2. \end{cases}$$

O teorema a seguir pode ser encontrado em [11, Teorema 9.9].

Teorema 3.1.19. Sejam $f \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$ e v o potencial Newtoniano de f. Então $v \in W^{2,p}(\Omega)$ e

$$\Delta v = f \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

O lema seguinte, por sua vez, está demonstrado em [15, Lema 5.13].

Lema 3.1.20 (Lema de Weyl). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ uma solução fraca da equação $\Delta u = 0$. Então $u \in C^\infty(\Omega)$.

Assim, sendo $w \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$ solução fraca de (3.1), em particular w é solução fraca da equação

$$-\Delta u = h \quad \text{em} \quad B, \tag{3.17}$$

em que $h(x) = g(u(x))$ e B é uma bola qualquer em $\mathbb{R}^N$. Além disso, uma vez que g é contínua, segue que $h \in L^p(B)$, para todo $p \geq 1$. Logo, se v é o potencial Newtoniano de h, pelo Teorema 3.1.19, podemos concluir que $v \in W^{2,p}(B)$ e

$$\Delta v = h \quad \text{q.t.p. em} \quad B. \tag{3.18}$$

Portanto, das equações (3.17) e (3.18), concluímos que

$$\int_B \nabla(v+w)\nabla\varphi = 0 \quad \text{para toda} \quad \varphi \in C_0^\infty(B),$$

ou seja, $w + v$ é uma solução fraca da equação $\Delta u = 0$ em B. Como $w + v \in H^1(B)$, pelo Lema 3.1.20 concluímos que $w + v \in C^\infty(B)$ e, por conseguinte, $w \in W_{loc}^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

Com esse fato em mãos, no próximo lema, vamos enfim constatar qual a regularidade de w.

Lema 3.1.21. $w \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Note que w verifica a equação $-\Delta u = q(x)u$ em $\mathbb{R}^N$, onde $q(x) = \dfrac{g(w)}{w}$. Por (g_2), existem $s_0 > 0$ e $C_1 > 0$ tais que

$$\left|\frac{g(s)}{s}\right| \leq C_1, \tag{3.19}$$

para todo $0 < s < s_0$. Por outro lado, de (g_3), existe $R_0 > 0$ tal que

$$\left|\frac{g(s)}{s}\right| \leq |s^{2^*-2}|,$$

para todo $s > R_0$. Logo, da Desigualdade de Hölder, ao considerarmos um compacto $K \subset \mathbb{R}^N$, se definirmos $K' = \{w|_K;\ w(s) > R_0\}$ então

$$\begin{aligned}
\int_{K'} \left|\frac{g(w)}{w}\right|^{\frac{N}{2}} &\leq \int_{K'} \left|w^{2^*-2}\right|^{\frac{N}{2}} \\
&= \int_{K'} w^{\frac{2N}{N-2}} \\
&\leq \left(\int_{K'} w^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{K'} 1^{\frac{2N}{N+2}}\right)^{\frac{N+2}{2N}} \leq C_2,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

já que $w \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. De (3.19), (3.20) e graças a continuidade de $\dfrac{g(s)}{s}$ no compacto $[s_0, R_0]$, segue que

$$\int_K \left|\frac{g(w)}{w}\right|^{\frac{N}{2}} = \int_{K\setminus K'} \left|\frac{g(w)}{w}\right|^{\frac{N}{2}} + \int_{K'} \left|\frac{g(w)}{w}\right|^{\frac{N}{2}} < +\infty.$$

Dessa forma, concluímos que $q \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Assim, graças ao Lema A.2.11, se considerarmos $f(x,u) = q(x)g(u)$ temos $w \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \geq 1$. Daí, pelo que foi feito no início desta seção, podemos garantir que $w \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \geq 1$. Dessa forma, graças a imersão de Sobolev no Teorema A.2.10, obtemos $w \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, onde $\alpha \in (0,1)$. Para qualquer $\varphi \in C_0^\infty((0,\infty))$, se $\psi(x) = \varphi(r)$ então $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \psi - g(w)\psi = 0.$$

Uma vez que $w \in H_r(\mathbb{R}^N)$, na verdade, a última igualdade pode ser escrita da seguinte maneira

$$\int_0^\infty (w'\varphi' - g(w)\varphi) r^{N-1} dr = 0,$$

para qualquer $\varphi \in C_0^\infty((0,\infty))$. Dessa maneira, nota-se que $r^{N-1}w'$ possui derivada fraca em $(0,\infty)$, a saber,

$$(r^{N-1}w')' = -r^{N-1}g(w)$$

e, consequentemente,

$$(w')' = -\frac{N-1}{r}w' - g(w).$$

Daí, uma vez que $w \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e g é contínua, o lado direito da equação anterior também define uma função contínua, logo $w \in C^2(\mathbb{R}^N\setminus\{0\})$. Além do mais, para todo $r > 0$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$w'(r) = -\frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} g(w(s)) ds.$$

Ao utilizar um *scale* suave, é possível escrever w' da seguinte maneira:

$$w'(r) = -r \int_0^1 t^{N-1} g(w(rt)) dt.$$

Assim, como $w'(0) = 0$, deduz-se que $w''(0)$ existe e

$$w''(0) = -\lim_{r\to 0} \int_0^1 t^{N-1} g(w(rt)) dt = -\frac{g(w(0))}{N}.$$

Por outro lado, como

$$w''(r) = -\frac{N-1}{r}w'(r) - g(w(r))$$

segue que

$$\lim_{r\to 0} w''(r) = -(N-1)w''(0) - g(w(0)) = w''(0).$$

Portanto, $w \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

□

Agora, vamos estabelecer o decaimento dessa solução.

Lema 3.1.22. Existem $C > 0$ e $\delta > 0$ tais que $w(x) \leq Ce^{-\delta|x|}$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Como $w \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema 2.1.7, tem-se que $w(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. Daí e de (g_2), é possível obter $R > 0$ tal que

$$g(w(x)) \leq -\frac{a}{2}w(x),$$

para todo $|x| \geq R$. Assim, uma vez que w é solução de (3.1), tem-se $-\Delta w = g(w)$ e, por conseguinte,

$$-\Delta w + \frac{a}{2}w \leq 0,$$

para todo $|x| \geq R$. Considere $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\delta^2 < \frac{a}{2} \ \text{ e } \ w(x) \leq Me^{-\delta R},$$

com $|x| = R$. Portanto, ao definir $\Psi(x) := Me^{-\delta|x|}$, como Ψ é uma função radial obtém-se $\nabla\Psi = \delta Me^{-\delta|x|}$ e, consequentemente, $\Delta\Psi = \delta^2 Me^{-\delta|x|} = \delta^2\Psi$. Assim,

$$-\Delta\Psi + \frac{a}{2}\Psi \geq \left(\frac{a}{2} - \delta^2\right)\Psi, \quad x \neq 0.$$

Dessa forma, ao considerar $u = \Psi - w$, então u verifica

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{a}{2}u \geq 0, & |x| \geq R; \\ u \geq 0, & |x| = R; \\ u \to 0, & |x| \to \infty. \end{cases}$$

Afirmação: $u \geq 0$, para $|x| \geq R$. Com efeito, suponhamos que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$|x_0| \geq R \ \text{ e } \ u(x_0) < 0.$$

Uma vez que $u(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$ e u é radial, podemos fixar $R_1 > |x_0|$ tal que

$$u(x_0) < u(R_1) < 0.$$

Notemos que o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^N;\ \ R < |x| < R_1\}$ é aberto e limitado. Assim, como $u(x) \geq 0$ quando $|x| = R$, pelo item (ii) do Princípio do Máximo atestamos que

$$u(x_0) \geq \min_{\overline{A}} u \geq -\max_{\partial A} u^- = u(R_1).$$

o que é uma contradição. Logo, $u \geq 0$ e, consequentemente,

$$w(x) \leq Ce^{-\delta|x|}$$

para todo $|x| \geq R$. Dessa forma, uma vez já sabido que $w(x) \leq Ce^{-\delta|x|}$, para $|x| \leq R$, graças a continuidade das funções envolvidas, concluímos então que

$$w(x) \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

$\square$

Agora, acrescentaremos mais um fato sobre a w que nos ajudará a entender o comportamento de ∇w no infinito.

Lema 3.1.23. Existe $R > 0$ tal que $w'(r) \leq 0$, para todo $r > R$.

Demonstração. Assim como no lema anterior, é possível obter $R > 0$ de tal modo que

$$\frac{g(w(r))}{w(r)} < 0,$$

para $r > R$, donde se tem

$$\int_R^\infty r^{N-1} g(w(r))\varphi(r)dr = \int_R^\infty r^{N-1}\frac{g(w(r))}{w(r)} w(r)\varphi(r)dr < 0.$$

Dessa maneira, uma vez que w é solução de (3.1), pode-se notar também, pela continuidade de g, que

$$\int_R^\infty r^{N-1} w'(r)\varphi'(r)dr = \int_R^\infty r^{N-1} g(w(r))\varphi(r)dr < 0, \tag{3.21}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty((0,\infty))$, com $supp\varphi \subset (R, +\infty)$. Suponha que exista $r_0 > R$ tal que $w'(r_0) > 0$. Assim, graças a continuidade de w', existiria $\delta > 0$ tal que $w'(r) > 0$

para todo $r \in (r_0 - \delta, r_0 + \delta)$. Escolha, então, a função teste

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq r_0 - \delta; \\ \dfrac{w(r_0+\delta)}{2\delta}(r - r_0 + \delta), & r_0 - \delta < r \leq r_0 - \delta; \\ w(r), & r \geq r_0 + \delta. \end{cases}$$

Todavia, por (3.21) tem-se

$$\int_{r_0-\delta}^{r_0+\delta} r^{N-1} w'(r)\varphi'(r)dr < 0,$$

o que é uma contradição, pois $w'(r) > 0$ para todo $r \in (r_0 - \delta, r_0 + \delta)$. Deste modo, é possível concluir que existe $R > 0$ tal que $w'(r) \leq 0$, para todo $r > R$. □

Por último, temos então o seguinte resultado.

Lema 3.1.24. Existem $C > 0$ e $\delta > 0$ tais que $|\nabla w(x)| \leq Ce^{-\delta|x|}$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Se $|x| = 0$, o resultado segue diretamente. Suponha agora que $|x| > 0$. Como $w \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$ e é solução fraca de (3.1), temos

$$\int_0^\infty r^{N-1} w'(r)\varphi'(r)dr = \int_0^\infty r^{N-1} g(w(r))\varphi(r)dr,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty((0,\infty))$. Definamos

$$u(r) =: \int_r^\infty s^{N-1} g(w(s))ds \ \text{ e } \ v(r) =: r^{N-1}w'(r) - u(r).$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v(s)\varphi'(s)ds &= \int_0^\infty \left(s^{N-1}w'(s) - \int_s^\infty t^{N-1}g(w(t))dt\right)\varphi'(s)ds \\ &= \int_0^\infty w'(s)\varphi'(s)s^{N-1}ds - \int_0^\infty \left(\int_s^\infty g(w(t))t^{N-1}dt\right)\varphi'(s)ds \\ &= \int_0^\infty w'(s)\varphi'(s)s^{N-1}ds - \int_0^\infty s^{N-1}g(w(s))\varphi(s)ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty((0,\infty))$. Isto é, v tem derivada fraca $v' = 0$ em $(0,\infty)$. Portanto, pela Proposição A.2.6, segue que existe uma constante C tal que $v(r) = C$ q.t.p em $(0,\infty)$. Mas, como $w \in C^2(\mathbb{R}^N)$, temos $v(r) \equiv C$, ou seja, $r^{N-1}w'(r) = C + u(r)$, para todo $r > 0$. Suponhamos que $C \neq 0$. Uma vez que $u(r) \to 0$ quando $r \to +\infty$, é possível garantir a existência de $r_0 > 0$ e $C_1 > 0$ tais que

$$r^{N-1}|w'(r)| \geq C_1 \;\text{ para }\; r \geq r_0.$$

Na verdade, como pelo Lema 3.1.23 existe $r_1 > 0$ tal que $w'(r) \leq 0$, para $r > r_1$, ao escolher $r' = \max\{r_0, r_1\}$ obtemos

$$w'(r) \leq -C_1 r^{1-N} \;\text{ para }\; r \geq r'$$

Integrando ambos os lados dessa desigualdade, obtemos

$$\int_r^\infty w'(t)dt \leq -C_1 \int_r^\infty t^{1-N} dt.$$

Daí,

$$-w(r) \leq -\frac{C_1 r^{2-N}}{N-2}.$$

Logo, para todo $r \geq r'$,

$$w(r) \geq \frac{C_1 r^{2-N}}{N-2},$$

o que contraria o decaimento exponencial de w, visto no Lema 3.1.22. Portanto,

$$r^{N-1} w'(r) = u(r),$$

para todo $r > 0$. Daí, como no Lema 3.1.14, já vimos que $g(t) \leq C_1|t| + C_2|t|^{2^*-1}$, para todo $t > 0$, segue que

$$\begin{aligned} |w'(r)| = \frac{|u(r)|}{r^{N-1}} &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_r^{+\infty} s^{N-1} g(w(s)) ds \\ &\leq \frac{1}{r^{N-1}} \int_r^{+\infty} s^{N-1} \left(C_1|w(s)| + C_2|w(s)|^{2^*-1} \right) ds. \end{aligned}$$

Recorde que do Lema 2.1.7, tem-se $w(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$. Daí,

$$\int_r^{+\infty} s^{N-1} C_2 |w(s)|^{2^*-1} ds \leq C_2' \int_r^{+\infty} s^{N-1} |w(s)| ds.$$

Assim,

$$\frac{1}{r^{N-1}} \int_r^{+\infty} s^{N-1} \left(C_1|w(s)| + C_2|w(s)|^{2^*-1} \right) ds \leq C \int_r^{+\infty} s^{N-1} |w(s)| ds.$$

Logo,
$$|w'(r)| \leq C \int_r^{+\infty} s^{N-1}|w(s)|ds.$$
Por último, novamente graças ao decaimento exponencial de w visto no Lema 3.1.22, existem $C > 0$ e $\delta > 0$ tais que
$$\begin{aligned}
|w'(r)| &\leq C \int_r^{+\infty} s^{N-1}|w(s)|ds \\
&= C \int_r^{+\infty} s^{N-1}e^{-(\delta-\varepsilon)s}e^{-\varepsilon s}ds \\
&\leq Ce^{-(\delta-\varepsilon)r} \int_r^{+\infty} s^{N-1}e^{-\varepsilon s}ds \\
&\leq Ce^{-\delta^2 r},
\end{aligned}$$
ou seja,
$$|\nabla w(x)| \leq Ce^{-\delta|x|}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$
donde concluímos o decaimento desejado. □

Apêndice A

Alguns resultados básicos

A.1 Funções suavizantes e regularizações

Definição A.1.1. Uma *função suavizante* é uma função não negativa $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $supp\varphi \subset B_1(0)$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)dx = 1$.

Exemplo A.1.2. A função

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

em que C é uma constante escolhida de forma que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)dx = 1$, é um exemplo clássico de função suavizante.

Definição A.1.3. Considere $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Dado $\varepsilon > 0$, a *regularização* u^ε de u é definida como sendo a convolução

$$u^\varepsilon(x) = (\varphi_\varepsilon * u)(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)dy.$$

A seguir, listamos algumas propriedades dessas funções.

Lema A.1.4 (Propriedades das regularizações)**.** (a) $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e $u^\varepsilon \to u$ q.t.p. quando $\varepsilon \to 0$.

(b) Se $u \in C(\mathbb{R}^N)$ então $u^\varepsilon \to u$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$;

(c) Se $1 \leq p < +\infty$ e $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então $u^\varepsilon \to u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$;

(d) Se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, α um multi-índice e suponha que $D^\alpha u$ existe. Então

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = (D^\alpha u)^\varepsilon(x),$$

para todo $x \in \Omega_\varepsilon = \{y \in \Omega;\, dist(y, \partial\Omega) > \varepsilon\}$;

(e) Se $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$, então $u^\varepsilon \to u$ em $W^{k,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, isto é, $u^\varepsilon \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$, para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

A.2 Espaços de Hölder e Espaços de Sobolev

Definição A.2.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dizemos que uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é *Hölder contínua* com expoente α em Ω, se

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty,$$

para algum $0 < \alpha \leq 1$. Neste caso, escrevemos $u \in C^\alpha(\Omega)$, se $\alpha < 1$ e $u \in C^0(\Omega)$, se $\alpha = 1$. Além disso, denotaremos também

$$[u]_{C^\alpha(\Omega)} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

como uma seminorma em $C^\alpha(\Omega)$.

Definição A.2.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Os *espaços de Hölder* $C^{k,\alpha}(\Omega)$ são definidos como os subespaços de $C^k(\Omega)$ consistindo das funções cujas derivadas parciais até a ordem k (inclusive) são contínuas de Hölder com expoente α em Ω:

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); D^\gamma u \in C^\alpha(\Omega), \text{para todo } |\gamma| \leq k\}.$$

Permitindo $\alpha = 0$, podemos incluir os espaços $C^k(\Omega)$ entre os espaços de Hölder.

Recorde que funções em $C^k(\Omega)$, bem como suas derivadas, não precisam ser limitadas em Ω, uma vez que Ω é aberto. Dessa maneira, como funções limitadas e uniformemente contínuas em Ω possuem uma única extensão contínua e limitada em $\overline{\Omega}$, consideremos o espaço

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}); D^\gamma u \in C^\alpha(\Omega), \text{para todo } |\gamma| \leq k\},$$

no qual podemos definir a seguinte norma:

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \max_{|\gamma|\leq k} \|D^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)} + \max_{|\gamma|\leq k} [D^\gamma u]_{C^\alpha(\Omega)}.$$

Teorema A.2.3. $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ munido da norma definida acima é um espaço de Banach.

Definição A.2.4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $p \geq 1$ e $k \geq 0$ um inteiro. Definimos

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

conhecido como *espaço de Sobolev*. Neste espaço, somos capazes de definir a norma:

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \left(\int_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{1/p} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_p.$$

Quando $p = 2$, denotamos por

$$W^{k,p}(\Omega) = H^k(\Omega).$$

Teorema A.2.5. $W^{k,p}(\Omega)$ munido da norma descrita acima é um espaço de Banach, separável, se $1 \leq p < \infty$ e reflexivo, se $1 < p < \infty$.

Proposição A.2.6. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $\partial\Omega \in C^1$. Se Ω é conexo e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\nabla u = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

então u é constante q.t.p. em Ω.

Esta proposição é um exercício clássico da teoria dos espaços de Sobolev e foi utilizado no Lema 3.1.24.

Agora, veremos resultados de imersão úteis às nossas demonstrações.

Definição A.2.7. Se $1 \leq p < N$, o **expoente crítico de Sobolev** de p é dado por

$$p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

Teorema A.2.8 (Desigualdade de Gagliado-Nirenberg-Sobolev). Assuma que $1 \leq p < N$. Então existe uma constante $C = C(N,p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p.$$

para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

Esta desigualdade leva ao teorema seguinte, que pode ser encontrado em [9, Teorema 5.7.1].

Teorema A.2.9 (Teorema de Compacidade de Relich-Kondrachov). Assuma que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e $\partial\Omega$ é C^1. Se $1 \leq p < N$, então a imersão

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

é compacta, para cada $1 \leq q < p^*$.

No nosso trabalho, também utilizamos uma outra imersão importante que relaciona os espaços de Hölder com os espaços de Sobolev. Uma versão mais geral desse Teorema encontra-se em [6, Teorema 2.31].

Teorema A.2.10. Se $p \geq 1$ então é válida a seguinte imersão

$$W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$$

onde $0 < \alpha < 1$.

Por último, ainda sobre os espaços de Sobolev, em [18, Lema B.3] temos o seguinte resultado de regularidade.

Lema A.2.11 (Brezis-Kato). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função mensurável em Ω e contínua em $\mathbb{R}$ tais que

$$|f(x,u)| \leq q(x)(1 + |u|), \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

onde $0 \leq q \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\Omega)$. Seja também $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ solução fraca do problema (3.1). Então $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$.

A.3 Alguns Teoremas de Convergência

Lema A.3.1 (Fatou). Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis positivas definidas em Ω. Então

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Teorema A.3.2 (Convergência Dominada de Lebesgue). Sejam (f_n) uma sequência de funções integráveis e f uma função mensurável tais que

$$f_n \to f \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int_\Omega f d\mu = \lim \int_\Omega f_n d\mu.$$

Lema A.3.3 (Brezis-Lieb). Seja (u_n) uma sequencia tal que $u_n \to u$ q.t.p em Ω e $\|u_n\|_p \leq C < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para algum $1 \leq p < \infty$, então

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |u_n|^p dx - \int_\Omega |u_n - u|^p dx \right) = \int_\Omega |u|^p dx.$$

Este lema foi utilizado no Lema 3.1.9 e para ver a demonstração, confira [19, Lema 1.32]. Além do mais, na prova do Teorema 2.2.1, usamos dois fatos importantes de Teoria da Medida, os quais apresentaremos a seguir e estão em [13, Definição 4.12, Teorema 4.13].

Definição A.3.4. Uma sequência de funções (f_n) em $L^1(\Omega)$ é *equi-integrável* se para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto mensurável A, de medida finita, e $\delta > 0$ tais que

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{A^c} |f_n(x)| dx < \varepsilon;$$

(b) Para todo $E \subset \Omega$ tal que $med(E) < \delta$,

$$\int_E |f_n(x)| dx < \varepsilon.$$

Teorema A.3.5 (Vitalli). Sejam (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ e f uma função mensurável tais que $f_n \to f$ q.t.p. em Ω. Então $f_n \to f$ em $L^1(\Omega)$ se, e somente se, f_n é equi-integrável.

A.4 Lemas auxiliares elementares

No nosso trabalho, precisamos de algumas afirmações elementares que nos auxiliaram nas demonstrações dos resultados principais. Os Lemas a seguir foram utilizados nas demonstrações do Lema 3.1.8 e do Teorema 3.1.9 respectivamente.

Lema A.4.1. Para $p \geq 1$, a seguinte desigualdade é válida:

$$(1+t)^p \leq 1 + p(1+t)^{1+p} t, \quad \text{para todo} \quad t \geq -1.$$

Demonstração. Considere a função definida por

$$\begin{aligned} f: [-1,+\infty) &\to \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t) = 1 + p(1+t)^{1+p}t - (1+t)^p. \end{aligned}$$

Note que $f(-1) = 1$ e $f(0) = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} f'(t) &= p(1+t)^{1+p} + p(1+p)(1+t)^p t - p(1+t)^{p-1} \\ &= p(1+t)^{p-1}[(1+t)^2 + (1+p)(1+t)t - 1] \\ &= p(1+t)^{p-1}[(p+3) + (p+2)t]t. \end{aligned}$$

Claramente, $f'(t) > 0$ para $t > 0$ e portanto f é crescente no intervalo $(0, +\infty)$. Por outro lado, para $-1 < t < 0$, tem-se que

$$(p+3) + (p+2)t > 0.$$

Consequentemente, f é decrescente no intervalo $(-1, 0)$. Portanto, ao determinar as imagens de -1 e 0 por f, isto é, $f(-1) = 1$ e $f(0) = 0$ obtemos que $f(t) \geq 0$ donde segue a desigualdade desejada. □

Lema A.4.2. Sejam $0 < p < 1$ e $t \in [0,1]$ tais que

$$t^p + (1-t)^p = 1.$$

Então $t = 0$ ou $t = 1$.

Demonstração. Considere a função definida por

$$\begin{aligned} h: [0{,}1] &\to \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h(t) = t^p + (1-t)^p - 1. \end{aligned}$$

Note que

$$h(0) = h(1) = 0$$

e

$$h'(t) = pt^{p-1} - p(1-t)^{p-1} = p[t^{p-1} - (1-t)^{p-1}].$$

Consequentemente, $h'(t) = 0$ se, e somente se, $t = 1/2$ e mais $h(1/2) = 1/2^{p-1} - 1 > 0$. Além disso, h é crescente para $0 < t < 1/2$, pois $h'(t) > 0$ no intervalo $(0, 1/2)$, e h é decrescente quando $1/2 < t < 1$, já que $h'(t) < 0$ em $(1/2, 1)$. Portanto, $h(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$ ou $t = 1$.

□

Referências Bibliográficas

[1] H. Berestycki; T. Gallouët; O. Kavian, *Equations de champs scalaires euclidiens non linéaire dans le plan*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris Ser. I **297** (1983), 307–310.

[2] H. Berestycki; P.-L.Lions, *Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state*, Arch. Ration. Mech. Anal. **82** (1983), 313–345.

[3] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2010.

[4] H. Brezis; T. Kato, *Remark on Schrödinger operator with singular complex potentials*, J. Math. Pure Appl. **58** (1979), 173–151.

[5] H. Brezis; L. Nirenberg, *Positive Solutions of nonlinear elliptic equations involving critial Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math **36** (1983), 437–477.

[6] F. Demengel; G. Demengel, *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations*, Springer, 2011.

[7] J. M. do Ó; E. S. Medeiros, *Remarks on least energy solutions for quasilinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$, Electron. J. Differ. Equ. (2003), No. 83, 14 pp.

[8] J. M. do Ó; E. S. Medeiros; U. Severo, *On the existence of signed and sign-changing solutions for a class of superlinear Schrödinger equations*, J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 432–445.

[9] L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1998.

[10] A. Floer; A. Weinstein, *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential*, J. Funct. Anal. **69** (1986), 397–408.

[11] D. Gilbarg; N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1983.

[12] L. Jeanjean; K. Tanaka, *A remark on least energy solution in* $\mathbb{R}^N$, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (2002), 2399–2408.

[13] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques: et applications aux problèmes elliptiques*, Springer, 1993.

[14] E. L. Lima, *Curso de Análise, Volume 2*, Impa, 2020.

[15] A. C. Ponce. *Métodos clássicos em teoria do potencial*, Impa, 2009.

[16] P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), 270–291.

[17] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*. Comm. Math. Phys. **55** (1977), 149–162.

[18] M. Struwe, *Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and hamiltonian systems*, Springer, 2000.

[19] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhäuser, 1996.

[20] J. Zhang; W. Zou, *A Berestycki-Lions theorem revisited*, Commun. Contemp. Math. **14** (2012), 14 pp.