

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**Danielle Apolinário da Silva**

**A utilização dos Softwares Geogebra, Winplot e K3dsurf no estudo  
das Superfícies Quádricas: Uma experiência com alunos do Curso de  
Licenciatura em Matemática**

Rio Tinto – PB  
2017

**Danielle Apolinário da Silva**

**A utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf no estudo das Superfícies Quádricas: Uma experiência com alunos do Curso de Licenciatura em Matemática**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como Requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Claudilene Gomes da Costa

Rio Tinto - PB  
2017

S586u Silva, Danielle Apolinário da.

A utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf no estudo das Superfícies Quádricas: uma experiência com alunos do Curso de Licenciatura em Matemática. / Danielle Apolinário da Silva. – Rio Tinto: [s.n.], 2017.

83 f. : il.-

Orientador (a): Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa.  
Monografia (Graduação) – UFPB/CCAIE.

1. Matemática - ensino e aprendizagem. 2. Matemática - geometria. 3. Informática na educação.

UFPB/BS-CCAIE

CDU: 39:004(043.2)

**Danielle Apolinário da Silva**

**A utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf no estudo  
das Superfícies Quádricas: Uma experiência com alunos do Curso de  
Licenciatura em Matemática**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

**Orientadora:** Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Claudilene Gomes da Costa

**Aprovado em** \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Claudilene Gomes da Costa (Orientadora)

---

Prof.<sup>a</sup> Ms. Agnes Liliane Lima Soares de Santana (CCAÉ – DCX – UFPB)

---

Prof. Ms. Givaldo de Lima (CCAÉ – DCX – UFPB)

Dedico este trabalho a minha mãe Maria Apolinário dos Santos, por ter me incentivado e acreditado sempre em meus sonhos, e aos meus avós maternos Francisca Pereira da Silva (in memoriam) e João Apolinário dos Santos (in memoriam), por terem sido a base para o meu caráter e minha dignidade.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por diariamente me dar forças para vencer todos os desafios e por tornar possível a concretização da minha graduação.

Agradeço de todo o meu coração a minha mãe Maria Apolinário dos Santos, por ela ser maravilhosamente “mãe e pai” em todos os momentos da minha vida, por ter me guiado diariamente e dado sempre os melhores conselhos. Sem ela nada disso seria possível. Obrigada por estar sempre ao meu lado!

Ao meu namorado Joseilson Gomes, que vivenciou comigo todos os momentos de medo e insegurança, e acreditou na minha capacidade de vencer, me dando todo apoio e incentivo.

À toda minha família, especialmente as minhas primas Verônica, Luciene, Josilene, Gerlane e Maria Gerlane, por serem as melhores irmãs que eu poderia ter em toda a minha vida.

Aos meus amigos do curso de Licenciatura em Matemática, Elissandra Viegas, Kacieli de Lima, Sandra Maria, Lívia Mônica, Francisca Lívia, Ana Paula, Suelâne, Vânia, Jéssica Pontes, Sherliano, Lindomar, Josemberg e aos demais, que vivenciaram esses cinco anos junto a mim, com força e determinação.

Às minhas amigas, Clara Farias, Nathane Henrique, Cinthia Danielle, Ana Caroline, Géssica Monique, Camila Alexandre e Cláudia Balbino, que compartilharam comigo suas vidas em Rio Tinto, onde vivemos momentos tristes, alegres e também de conquistas.

Agradeço imensamente à minha orientadora, Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Claudilene Gomes da Costa, por ter participado diretamente dessa fase tão importante do meu curso, por toda confiança depositada, por sua generosidade, por sempre me incentivar a desenvolver-me profissionalmente. Você é uma pessoa espetacular. Sou grata a Deus por ter lhe colocado em minha vida.

À Prof.<sup>a</sup> Ms. Agnes Liliane Lima Soares de Santana, por ter contribuído de forma significativa para o meu desenvolvimento no curso e para a minha carreira docente, me dando a oportunidade de participar durante quatro anos do PIBID.

Aos professores do Curso, Givaldo de Lima, Elias Filho, Cristiane Souza, Jussara Patrícia, Jamilson Campos, Marcos André, Hélio Pires, Emmanuel Falcão, Gilmar Leite e aos demais, que contribuíram diretamente para a minha formação docente. Sou imensamente grata a todos vocês.

“Os sonhos não envelhecem... Vai em frente. Sorriso no rosto e firmeza nas decisões. Deus resolveu reformar o mundo, e escolheu o seu coração para iniciar a reforma. Isso prova que Ele ainda acredita em você. E se Ele ainda acredita, quem é você para duvidar!...”.

Padre Fábio de Melo

## RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo geral apresentar um estudo capaz de contribuir e facilitar a aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica e o desenvolvimento da visualização geométrica de objetos tridimensionais, a partir da utilização dos softwares computacionais Geogebra, Winplot e K3DSurf. O estudo foi desenvolvido com os alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal da Paraíba/Campus IV, em Rio Tinto–PB, surgindo como elemento de apoio diante das dificuldades de aprendizagem que esses alunos apresentam no que diz respeito ao estudo das quádricas. A metodologia utilizada para o desenvolvimento da pesquisa caracteriza-se em relação aos objetivos como exploratória e descritiva. Quanto aos procedimentos técnicos utilizados caracteriza-se como pesquisa bibliográfica e estudo de caso e em relação ao método de abordagem, caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa e quantitativa. Já os instrumentos empregados na coleta de dados da pesquisa foram atividades realizadas com o auxílio dos softwares e um questionário diagnóstico, contendo vinte questões fechadas. Com relação aos resultados, observou-se que os alunos mesmo estando em um Curso de Licenciatura em Matemática apresentam algumas dificuldades de aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica, especificamente no que se refere à visualização e construção gráfica de superfícies. Entretanto, os dados obtidos através da aplicação das atividades permitem afirmar que os softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf se caracterizam como um instrumento que contribui de modo significativo para que essas dificuldades sejam elucidadas. Verificou-se ainda que esses softwares facilitam, principalmente, a visualização gráfica das superfícies, além de permitir o estudo dos elementos e propriedades das quádricas, a partir de suas potenciais ferramentas de construção e animação. Ainda dentre os resultados, os alunos puderam opinar sobre o uso dos softwares para o estudo de conteúdos matemáticos em outras disciplinas do curso. Todos afirmaram que o suporte dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf, poderiam também contribuir e facilitar a aprendizagem em outras disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática.

Palavras-chaves: Software Geogebra. Software Winplot. Software K3dsurf. Quádricas. Ensino da Matemática.

## ABSTRACT

The present work had as general objective to present a study capable of contributing to and facilitating a learning of concepts of Analytical Geometry and geometric development of three - dimensional objects, using the computational software Geogebra, Winplot and K3DSurf. The study was developed with the students of the discipline of Differential and Integral Calculus III, a course of Mathematics Degree, of the Federal University of Paraíba / Campus IV, in Rio Tinto-PB, appearing as an element of support to the learning difficulties that Students do not speak On the study of quadrilaterals. The methodology used for the development of the research is characterized in relation to objectives as exploratory and descriptive. As for the technical procedures used are characterized as the bibliographic research and case study and in relation to the method of approach, are characterized as a qualitative and quantitative research. The instruments used in the data collection of the research were performed with the help of softwares and a diagnostic questionnaire, containing twenty closed information. Regarding the results, it was observed that students even being in a Degree in Mathematics in some difficulties learning concepts of Analytical Geometry, specifically not referring to the visualization and graphical construction of surfaces. However, the data obtained on the application of the activities related to the software Geogebra, Winplot and K3DSurf are characterized as an instrument that contributes in a significant way so that the difficulties are elucidated. It was also verified that these softwares facilitate, mainly, a graphical perspective of the surfaces, besides allowing the study of the elements and properties of the quadric, from its potentialities tools of construction and animation. Still among the results, the students can opine on the use of the softwares to study mathematical contents in other disciplines of the course. All software related to Geogebra, Winplot and K3DSurf, also help and facilitate learning in other disciplines of the Degree in Mathematics.

Keywords: Geogebra Software. Winplot Software. K3dsurf Software. Quadric. Mathematics Teaching.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 01 – Tela inicial do software Geogebra .....	29
Figura 02 – Menu e Barra de ferramentas .....	29
Figura 03 – Janela de visualização 3D do software Geogebra .....	30
Figura 04 – Tela inicial do software Winplot .....	32
Figura 05 – Opções da ferramenta janela .....	32
Figura 06 – Janela de visualização 2D do Winplot .....	33
Figura 07 – Janela de visualização 3D do Winplot .....	34
Figura 08 – Interface do K3DSurf .....	36
Figura 09 – Menu de ícones do software K3DSurf .....	36
Figura 10 – Recursos IsoSurface do software K3DSurf .....	37
Figura 11 – Janela de visualização gráfica do software K3DSurf .....	38
Figura 12 – Elipsóide de equação $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$ , gerado no software Geogebra .....	42
Figura 13 – Elipsóide de equação $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$ , gerado no software Winplot .....	45
Figura 14 – Elipsóide de equação $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$ , gerado no software K3DSurf .....	46
Figura 15 – Representação gráfica do elipsóide de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{2} = 16$ , obtida no software Geogebra .....	47
Figura 16 – Representação gráfica do elipsóide de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{15} = 16$ , obtida no software Geogebra .....	48
Figura 17 – Representação gráfica do hiperbolóide de uma folha e de equação $4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$ obtida no software K3DSurf .....	49
Figura 18 – Representação gráfica do hiperbolóide de duas folhas de equação $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$ obtida no software K3DSurf .....	50
Figura 19 – Representação gráfica do parabolóide hiperbólico de equação $-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = z$ no software Geogebra .....	51

Figura 20 – Representação gráfica do parabolóide hiperbólico de equação $-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = z$ no software Winplot .....	52
Figura 21 – Representação gráfica do parabolóide hiperbólico de equação $-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = z$ no software K3DSurf .....	53
Figura 22 – Representação gráfica do parabolóide elíptico de equação $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{6} = z$ no software Geogebra .....	54
Figura 23 – Representação gráfica no software K3DSurf do hiperbolóide de uma folha de equação $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ .....	55
Figura 24 – Representação gráfica no software K3DSurf do hiperbolóide de uma folha de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ .....	55
Figura 25 – Representação gráfica no software K3DSurf do hiperbolóide de uma folha de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ .....	56
Figura 26 – Identificação e esboço das superfícies quádricas dos itens <i>a</i> e <i>b</i> .....	57
Figura 27 – Representação gráfica do elipsóide no software Geogebra .....	58
Figura 28 – Representação gráfica da esfera no software Geogebra .....	58
Figura 29 – Representação gráfica do elipsóide no software Winplot .....	59
Figura 30 – Identificação e esboço das superfícies quádricas dos itens <i>c</i> e <i>d</i> .....	60
Figura 31 – Representação gráfica do cilindro parabólico no software K3DSurf .....	61
Figura 32 – Representação gráfica do elipsóide no software Geogebra .....	62
Figura 33 – Identificação e esboço das superfícies quádricas dos itens <i>e</i> e <i>f</i> .....	63
Figura 34 – Representação gráfica do hiperbolóide de uma folha no software Winplot .....	64
Figura 35 – Representação gráfica do parabolóide elíptico no software Geogebra .....	64
Figura 36 – Identificação e esboço das superfícies quádricas dos itens <i>g</i> e <i>h</i> .....	65
Figura 37 – Representação gráfica do parabolóide hiperbólico (sela) no software Geogebra .....	66
Figura 38 – Representação gráfica do parabolóide elíptico no software Geogebra .....	67

## LISTA DE TABELAS E GRÁFICOS

Tabela 01 – Equações padrão das principais superfícies quádricas .....	24
Tabela 02 – Questionamentos acerca da informatização e de softwares computacionais .....	68
Tabela 03 – Questionamentos sobre a utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf no estudo de quádricas .....	69
Tabela 04 – Benefícios dos softwares Geogebra, Winplot e K3Dsurf para o estudo de quádricas .....	70
Tabela 05 – Avaliação dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf.....	70
Tabela 06 – Os softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf como recurso para a aprendizagem matemática .....	71
Gráfico – Estudo das superfícies quádricas a partir da utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf .....	72

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

LEPEM	Laboratório de Estudos e Pesquisas em Ensino de Matemática
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PB	Paraíba
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TIC	Tecnologia de Informação e Comunicação
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UNICAMP	Universidade Estadual De Campinas

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>15</b>
<b>1.1 Apresentação do Tema.....</b>	<b>15</b>
<b>1.2 Problemática e Justificativa.....</b>	<b>16</b>
<b>1.3 Objetivos.....</b>	<b>18</b>
<b>1.3.1 Objetivo Geral.....</b>	<b>18</b>
<b>1.3.2 Objetivos Específicos.....</b>	<b>19</b>
<b>1.4 Estrutura do trabalho.....</b>	<b>19</b>
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>21</b>
<b>2.1 Conteúdo matemático: Superfícies Quádricas (Quádricas).....</b>	<b>21</b>
<b>2.1.1 Contexto histórico.....</b>	<b>21</b>
<b>2.1.2 Definição e exemplos.....</b>	<b>22</b>
<b>2.2 Tecnologias de Informação e Comunicação e o ensino e aprendizagem da Matemática.....</b>	<b>24</b>
<b>2.2.1 O software Geogebra.....</b>	<b>28</b>
<b>2.2.2 O software Winplot.....</b>	<b>31</b>
<b>2.2.3 O software K3DSurf.....</b>	<b>35</b>
<b>3 METODOLOGIA DA PESQUISA.....</b>	<b>39</b>
<b>3.1 Tipologias da Pesquisa.....</b>	<b>39</b>
<b>3.1.1 Quanto aos Objetivos.....</b>	<b>39</b>
<b>3.1.2 Quanto aos Procedimentos Técnicos.....</b>	<b>40</b>
<b>3.1.3 Quanto à Abordagem do Problema.....</b>	<b>40</b>
<b>3.1.4 Quanto ao Método.....</b>	<b>40</b>
<b>3.2 Amostra da Pesquisa.....</b>	<b>41</b>
<b>3.3 Construção do Instrumento de Coleta de Dados.....</b>	<b>41</b>

<b>4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>43</b>
<b>4.1 Análise dos Resultados da Oficina Pedagógica .....</b>	<b>43</b>
<b>4.2 Análise e Discussão dos Dados do Questionário.....</b>	<b>67</b>
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>73</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>75</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>77</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Apresentação do Tema

No atual contexto social que vivenciamos, de permanente processo de informatização, as tecnologias estão diretamente relacionadas à formação de ideias e comportamentos dos indivíduos. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN “as tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas.” (BRASIL, 1998, p. 43). Dessa forma, vem surgindo nas instituições de ensino a grande necessidade de aperfeiçoamentos nos métodos didáticos para o ensino e aprendizagem, tornando-se cada vez mais necessária a utilização de recursos tecnológicos.

Nessa concepção, a demanda por essas inovações didáticas vem adquirindo cada dia mais relevância para as práticas pedagógicas por serem instrumentos que podem gerar um maior aprendizado e tornar as aulas mais dinâmicas e atraentes.

A respeito ao uso das tecnologias como recurso para o processo de aprendizagem da Matemática, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM expõem que:

Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. (BRASIL, 2006, pg. 87).

A utilização de softwares computacionais para o ensino da Matemática pode desenvolver no aluno a capacidade de representação, interpretação, visualização, comprovação e demonstração de conceitos matemáticos. Segundo Ghiggi, Schmidt e Koch (2013, p. 04), “a incorporação de softwares educacionais como ferramenta de apoio ao ensino de matemática favorece a compreensão de conceitos, a exploração e relação de diversas representações, a exploração de propriedades e relações matemáticas”. Dessa forma, os softwares aliados ao ensino de Matemática podem oferecer ao discente um meio eficaz para promover a aprendizagem.

Os softwares computacionais vêm adquirindo um espaço relevante na sala de aula, embora muitos docentes ainda não se sentem seguros para trabalhar com esse recurso, seja pela ausência de

disciplinas que envolvam a utilização de tecnologias como recurso didático durante a sua formação e não procurarem fazer uma formação continuada, ou mesmo pelo o seu próprio comodismo.

No curso de Licenciatura em Matemática, especificamente nas disciplinas de Cálculo Vetorial e Cálculo Diferencial e Integral (CDI), a aprendizagem de conteúdos de Geometria Analítica vem enfrentando algumas dificuldades, decorrentes das necessidades apresentadas pelos discentes devido à ausência dos conteúdos de Geometria, especificamente da Geometria Analítica, durante o ensino básico, ou até mesmo pela própria desmotivação do aluno diante da metodologia adotada pelo professor em sala de aula.

Diante disso, o presente trabalho tem como tema “A utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf no estudo das superfícies quádricas: uma experiência com alunos do curso de Licenciatura em Matemática”. Nosso intuito é apresentar uma proposta de ensino que venha a contribuir para a aprendizagem das quádricas utilizando como metodologias softwares computacionais, surgindo como elemento de apoio diante das dificuldades que os alunos do curso de Licenciatura em Matemática, especificamente da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, apresentam na aprendizagem desses conceitos.

## 1.2 Problemática e Justificativa

Conforme Nascimento (2012, p. 03), “a proposta do uso de softwares de geometria dinâmica, no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange à visualização geométrica”. Sendo assim, a utilização de softwares educacionais está sendo um recurso bastante significativo para o ensino de conteúdos matemáticos. Esse fator, sem dúvida, contribui com o enriquecimento das metodologias de ensino, contribuindo para a aprendizagem de conceitos geométricos, diante as necessidades que os alunos apresentam.

Diante disso, essa pesquisa pretende responder a seguinte questão: **A utilização de softwares computacionais como recurso pedagógico pode facilitar e contribuir com o processo de ensino e aprendizagem das quádricas?**

No intuito de proporcionar subsídios com o tema apresentado, serão apresentados alguns estudos realizados sobre a utilização de softwares computacionais no estudo de Geometria Analítica e Espacial.

O trabalho realizado por Fialho (2010) teve o intuito de investigar a viabilidade da utilização de um programa de Geometria Dinâmica para ensinar Geometria Analítica. Com base nos dados

obtidos a partir de uma aplicação de 11 (onze) Roteiros de Aprendizagem num laboratório de Informática para duas turmas do Ensino Médio do Colégio Estadual Antônio Gonçalves, da cidade de São João de Meriti – RJ. Os resultados da pesquisa tornaram evidente que o uso do software Geogebra levou os estudantes com grandes dificuldades de abstração na aula tradicional, isto é, nas aulas pautadas em definição, exemplo e exercícios exclusivamente por aplicação de fórmulas, a obterem bons resultados e que de fato aprenderam com o software.

A pesquisa de Nascimento (2012) visou fazer a descrição de uma proposta de utilização de nova tecnologia para auxiliar o assunto da matemática onde é pouco explorado principalmente em escolas públicas, a partir de uma análise experimental em relação a uma aplicação prática em sala de aula com o uso do software livre Geogebra. A partir dos resultados obtidos foi possível concluir que de modo geral, a utilização do software foi considerada pelos alunos uma metodologia de fácil compreensão e assimilação, pelo fato que os assuntos escolhidos são geralmente feitos com certa facilidade por eles, proporcionando usabilidade e eficiência.

A pesquisa de Ritter (2011) apresenta uma proposta didática para o ensino de Geometria Espacial com a utilização do software Calques 3D, tendo como finalidade desenvolver as habilidades da visualização de objetos tridimensionais a partir de suas representações no plano. A partir da análise dos dados, foi possível observar que alunos que não gostavam de Matemática e que nas aulas convencionais nem sempre realizavam as atividades, avançaram nas explorações com o software e passaram a compreender e serem mais ágeis na execução de tarefas.

Ghiggi, Schmidt e Koch (2013) por meio de um minicurso destinado a estudantes, pesquisadores e professores de Matemática de todos os níveis de ensino visaram propor uma alternativa para o ensino e aprendizagem de Cônicas a partir de um ambiente de Geometria Dinâmica, mais especificamente com o auxílio do software Geogebra. Essa proposta é um recorte do projeto de pesquisa que vinha sendo desenvolvido junto ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina desde fevereiro de 2012, envolvendo uma investigação profunda do software Geogebra, dos seus recursos e suas possibilidades. A partir da realização do minicurso, acreditam que o Geogebra é um instrumento computacional que possui características e recursos que possibilitam a investigação de conceitos e a confirmação de teorias, auxiliando no processo de ensino e aprendizagem.

O trabalho de Valentim (2014) teve como objetivo verificar a potencialidade do software matemático Winplot, bem como o conhecimento dos professores em relação à utilização de softwares em sala de aula, por meio de uma pesquisa realizada na Escola Estadual José Miguel

Leão, da cidade de Campina Grande – PB. A partir dos dados adquiridos e de todos os estudos feitos, foi constatado que o software Winplot é uma ferramenta relevante para a aprendizagem tanto dos alunos como dos docentes, além de ter gerado aos professores uma reflexão sobre sua própria prática.

Apoiando-se no que foi apresentado, percebe-se que essa pesquisa tem conexão com outros estudos realizados anteriormente. Dessa forma, presume-se que essa pesquisa desenvolvida irá contribuir de modo expressivo com o assunto discutido, pois busca apresentar um estudo que possa promover a aprendizagem efetiva de conceitos de Geometria Analítica e o desenvolvimento da visualização de objetos geométricos no  $E^3$ , a partir da utilização de softwares computacionais, diante das grandes necessidades que os alunos apresentam na aprendizagem das quádricas.

A pesquisa torna-se significativa para o meio acadêmico, por buscar a demonstração de como é o estudo de quádricas com um recurso que permite a construção de objetos e a visualização geométrica, propiciando aos discentes uma maneira diferente de estudar o conteúdo, levando-os a comprovação de teorias que quando estudadas em um ambiente tradicional, permitem apenas a construção de esboços, gerando alguns conflitos na aprendizagem, por se tratar de superfícies no  $E^3$ .

O estudo também é relevante à prática profissional, por proporcionar aos docentes uma proposta de ensino que possa tornar suas aulas mais dinâmicas e proveitosas, que venha gerar o rendimento dos discentes, quanto à aprendizagem dos conteúdos estudados.

Quanto à realização pessoal, é bastante significativa, pois se acredita que os softwares é um recurso facilitador para o estudo de diversas áreas da Matemática, podendo oferecer aos alunos uma maneira diferente e prazerosa de estudar e comprovar conceitos matemáticos.

Nesse intuito espera-se apresentar uma metodologia, que por meio de estudos, venha auxiliar e facilitar o estudo das superfícies quádricas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III no curso de Licenciatura em Matemática, no que se refere à utilização de softwares computacionais como ferramenta facilitadora na aprendizagem.

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo Geral**

Apresentar um estudo que venha a contribuir e facilitar a aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica e o desenvolvimento da visualização geométrica de objetos tridimensionais, a partir da utilização dos softwares computacionais Geogebra, Winplot e K3DSurf.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Verificar o interesse e o desempenho dos alunos com o conteúdo de quádricas a partir da utilização de softwares computacionais;
- Averiguar possíveis dificuldades de aprendizagem relacionadas às quádricas;
- Apresentar por meio da utilização de softwares computacionais algumas sugestões que venham contribuir com a visualização geométrica das quádricas;
- Verificar se o uso de softwares no ensino das quádricas é um recurso facilitador para a aprendizagem e visualização das quádricas.

### 1.4 Estrutura do trabalho

O presente trabalho encontra-se dividido em quatro capítulos, além de apresentar as considerações finais, as referências utilizadas e apêndices compostos pelos conteúdos aplicados na oficina pedagógica aplicada com os alunos da turma de Cálculo Diferencial e Integral III, da Universidade Federal da Paraíba, e questionário.

No primeiro capítulo apresentamos a introdução da pesquisa, na qual se encontra a apresentação do tema, embasada em algumas concepções vistas em documentos, como os PCN, bem como a problemática e justificativa, os objetivos a serem atingidos na pesquisa e as considerações metodológicas adotadas.

No segundo capítulo composto pelo referencial teórico, são apresentados o contexto histórico das quádricas, definição e exemplos, as tecnologias de informação e comunicação como recurso para o ensino e a aprendizagem de Matemática, a origem dos softwares computacionais Geogebra, Winplot e K3Dsurf e a fundamentação teórica acerca desses três programas, enfatizando a importância da utilização desse recurso tecnológico para o estudo de conteúdos matemáticos.

O terceiro capítulo apresenta a metodologia adotada na pesquisa, evidenciando todos os procedimentos empregados para que os objetivos do trabalho fossem alcançados, além de apresentar o instrumento de coleta de informações desenvolvido a partir da oficina pedagógica

aplicada na turma de Cálculo Diferencial e Integral III, da UFPB/Campus IV, fundamentada nos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf aliados ao estudo das quádras.

No quarto capítulo são tratadas a análise e a discussão dos resultados, sendo expostos os resultados evidenciados, além de serem discutidas algumas questões levantadas através da pesquisa.

Por último são apontadas as considerações finais sobre o trabalho, evidenciando os objetivos traçados quanto à problemática sistematizada, onde serão apresentadas algumas reflexões a respeito de trabalhos posteriores que poderão surgir a partir do estudo realizado.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Conteúdo matemático: Superfícies Quádricas (Quádricas)

#### 2.1.1 Contexto histórico

Sabe-se que o desenvolvimento da Geometria Analítica se deu por volta do século XVII, baseando-se nas aplicações da Geometria com a Álgebra. Muitos estudiosos deram grandes contribuições para o desenvolvimento concebido pela Geometria Analítica de três dimensões que é conhecida e estudada nos dias de hoje.

Estudos relatam que fundamentado<sup>1</sup> nos geômetras gregos e no desenvolvimento da Álgebra em toda a Europa, Pierre de Fermat concluiu em 1629 o manuscrito **Ad locos planos et solidos isagoge** (Introdução aos lugares planos e sólidos). Embora existam controvérsias, tal manuscrito representa o centro da Geometria Analítica. Em Fermat é notável a percepção de uma Geometria Analítica de três dimensões: “Se o problema proposto envolve três incógnitas, deve se achar, para satisfazer a equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície”. (VENTURI, p. 161).

De acordo com Venturi (2003, p. 161) muitas obras de Euclides (séc. III a.C.) se perderam. Mas há consistentes referências que o grande geômetra tenha escrito um tratado sobre elipsóides, parabolóides, hiperbolóides, além de esfera, cilindro e cone.

É reconhecido também que existem<sup>2</sup> contribuições relevantes dos matemáticos Apolônio de Perga (ca. 262 – ca. 190 a.C.) e Pappus de Alexandria (séc. IV d.C.) sobre as quádricas. Entretanto, deve-se a Leonhard Euler (1707-1783) uma das mais significativas contribuições à geometria no  $E^3$ . O seu livro **Introductio in Analysin Infinitorum** (Introdução à Análise Infinita, publicado em 1748) apresenta a primeira exposição em livro-texto de quádricas, considerando-as como superfícies do 2º grau no  $E^3$ . Nesse livro, Euler expõe as equações dos cones, parabolóides, hiperbolóides e elipsóides, utilizando o sistema cartesiano no espaço tridimensional.

Foi a partir do século XVIII que as superfícies tiveram um notável desenvolvimento com o surgimento da Geometria Diferencial, com interações nas aplicações do Cálculo Diferencial e Integral e da Geometria. (VENTURI, 2003, p. 163).

---

<sup>1</sup> Retirado de Resenha histórica, presente no livro *Cônicas e Quádricas*, de Jacir J. Venturi. 2003.

<sup>2</sup> Retirado de Resenha histórica, presente no livro *Cônicas e Quádricas*, de Jacir J. Venturi. 2003.

### 2.1.2 Definição e exemplos

Uma quádrlica ou superfície quádrlica<sup>3</sup> é o conjunto dos pontos do espaço tridimensional, cujas coordenadas cartesianas verificam uma equação do 2º grau a, no máximo três variáveis:  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$ , denominada de equação cartesiana da superfície quádrlica. Se o termo independente J da equação acima for nulo, a quádrlica passa pela origem, pois o ponto  $O = (0, 0, 0)$  satisfaz tal equação.

Boulos e Camargo (1987, p. 332-343) fazem um estudo de casos especiais da equação acima e os definem da seguinte forma:

#### (1) Elipsóide

Um subconjunto S de  $E^3$  é um **elipsóide** se existe um sistema ortogonal de coordenadas e números a, b, c, positivos, tais que

$$S = \{P = (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \}$$

É uma superfície, tendo por equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

#### (2) Hiperbolóide de uma folha

Um subconjunto S de  $E^3$  é um **hiperbolóide de uma folha** se existe um sistema ortogonal de coordenadas e números a, b, c, positivos, tais que

$$S = \{P = (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \}$$

É uma superfície de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

#### (3) Hiperbolóide de duas folhas

---

<sup>3</sup> VENTURI, Jacir J. Definição de Quádricas retirada do livro: Cônicas e Quádricas. 2003.

Um subconjunto  $S$  de  $E^3$  é um **hiperbolóide de duas folhas** se existe um sistema ortogonal de coordenadas e números  $a, b, c$ , positivos tais que

$$S = \{P = (x, y, z) \mid -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

É uma superfície de equação

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

#### (4) Parabolóide elíptico

Um subconjunto  $S$  de  $E^3$  é um **parabolóide elíptico** se existe um sistema ortogonal de coordenadas e números  $a, b$ , positivos, tais que

$$S = \{P = (x, y, z) \mid z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\}$$

É uma superfície de equação

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

#### (5) Parabolóide hiperbólico

Um subconjunto  $S$  de  $E^3$  é um **parabolóide hiperbólico** se existe um sistema ortogonal de coordenadas e números  $a, b$ , positivos, tais que

$$S = \{P = (x, y, z) \mid z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\}$$

É uma superfície de equação

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Além desses casos de superfícies quádricas, existem outros exemplos:

Cone elíptico; quádricas cilíndricas; as quádricas degeneradas, que podem ser um ponto, o conjunto vazio, um plano, uma reta, pares de planos paralelos e transversais, que são representados por equações do 2º grau de três variáveis no  $E^3$ .

Cada superfície quádrlica possui uma equação padrão. A tabela a seguir apresenta as equações dos casos mais estudados de quádrlicas.

**Tabela 01 - Equações padrão das principais superfícies quádrlicas**

Quádrlica	Equação
Hiperbolóide de uma folha	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Hiperbolóide de duas folhas	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Elipsóide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Parabolóide hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$
Parabolóide elíptico	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$
Cone	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$
Cilindro de base elíptica	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Equação da elipse)
Cilindro de base hiperbólica	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Equação da hipérbole)
Cilindro de base parabólica	$y^2 = cx$ (Equação da parábola)

**Fonte:** Elaboração dos pesquisadores

## 2.2 Tecnologias de Informação e Comunicação e o ensino e aprendizagem da Matemática

As tecnologias de informação e comunicação (TIC) vêm passando por um constante processo de modernização, e estão cada vez mais presentes nos ambientes educacionais, dentre as quais, os recursos de informática vêm adquirindo grande espaço e significação, principalmente pelo fato da Internet ter se expandido para as escolas e universidades. De acordo com Valente e Almeida (1997, p. 01), “a História da Informática na Educação no Brasil data de mais de 20 anos. Nasceu no início dos anos 70 a partir de algumas experiências na UFRJ, UFRGS e UNICAMP”.

Valente e Almeida falam em seu trabalho sobre a influência de outros países no desenvolvimento da informática na educação brasileira:

A Informática na Educação no Brasil nasce a partir do interesse de educadores de algumas universidades brasileiras motivados pelo que já vinha acontecendo em outros países como nos Estados Unidos da América e na França. Embora o contexto mundial de uso do

computador na educação sempre foi uma referência para as decisões que foram tomadas aqui no Brasil, a nossa caminhada é muito particular e difere daquilo que se faz em outros países. Apesar das nossas inúmeras diferenças, os avanços pedagógicos conseguidos através da informática são quase os mesmos que em outros países. Nesse sentido estamos no mesmo barco. (VALENTE E ALMEIDA, 1997, p. 02).

Para Valentim (2014, p. 17), as TIC são responsáveis por mudanças profundas e positivas na educação, softwares, televisão, computadores, programas e etc., tornaram as aulas mais atrativas e mais dinamizadas [...].

Nos tempos atuais o processo educativo ainda apresenta um padrão, com algumas práticas de ensino, que não favorecem um processo construtivo do conhecimento matemático. Embora haja diversas metodologias tecnológicas e inovadoras que podem contribuir diretamente e que podem ser usadas no ambiente de ensino, não há grandes avanços no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, tendo em vista que grande parte desses recursos oferece apenas uma transferência do saber, o que compete ao professor à seleção dessas ferramentas e o modo de como utilizá-las.

A esse respeito Gravina e Santarosa, expõem que:

Se almeja-se uma mudança de paradigma para a educação, é necessário ser crítico e cuidadoso neste processo de uso da informática. A informática por si só não garante esta mudança, e muitas vezes se pode ser enganado pelo visual atrativo dos recursos tecnológicos que são oferecidos, mas os quais simplesmente reforçam as mesmas características do modelo de escola que privilegia a transmissão do conhecimento. (GRAVINA e SANTAROSA, 1998, p. 02).

Existem muitos recursos tecnológicos que oferecem ambientes de ensino nos quais a aprendizagem é transmitida de forma repetitiva, e o conhecimento é apenas memorizado e reproduzido. Mas também existem ferramentas que oferecem ao ensino e aprendizagem uma abordagem construtivista, e por meio delas o aluno passa a ser um sujeito ativo, podendo construir o próprio conhecimento matemático. “Nestes ambientes os alunos expressam, confrontam e refinam suas idéias, e ‘programam’ o computador sem precisar usar recursos de linguagem de programação [...]”. (GRAVINA e SANTAROSA, 1998, p. 02).

Para Gravina e Santarosa, é necessário dar enfoque a duas questões principais para que seja estabelecida uma pedagogia construtivista:

- quanto ao aspecto matemático: como projetar atividades que façam com que os alunos se apropriem de idéias matemáticas profundas e significativas (e que exigiram de matemáticos altamente qualificados alguns anos para serem concebidas e estruturadas) ?
- quanto ao aspecto cognitivo: como fazer para que estas atividades coloquem os alunos em atitudes sintonizadas com os processos que são naturais ao desenvolvimento cognitivo do sujeito ? (GRAVINA e SANTAROSA, 1998, p. 07).

Alguns recursos computacionais se constituem como importantes metodologias para o ensino e aprendizagem da Matemática, e podem conceder o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno e a construção do seu conhecimento.

Para Nascimento,

A utilização das novas tecnologias, principalmente as de comunicação e de interação (TCI), vem causando a reestruturação do método tradicional de ensino, denominado por (Freire, 1987) de “concepção bancária da educação”. Nesta concepção, o professor é a figura central do aprendizado, cabendo ao aluno assimilar, de forma passiva e sem considerar o seu ritmo de aprendizagem, todo o conteúdo exposto no quadro-negro. (NASCIMENTO, 2012, p. 2-3).

De acordo com Gravina e Santarosa (1998, p. 08) “Os ambientes informatizados apresentam-se como ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem”. Vários estudos constatam que o uso bem planejado de programas e aplicativos com fins educacionais contribui efetivamente para a aprendizagem, principalmente por envolver um fator que estar presente cada vez mais no dia a dia dos indivíduos: a tecnologia.

Na visão de Hebenstreint, o computador permite criar um novo tipo de objeto - os objetos ‘concreto-abstratos’. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais. (HEBENSTREINT 1987, apud GRAVINA e SANTAROSA, 1998, p. 08).

Dessa forma, a inserção de softwares computacionais no ensino e aprendizagem da Matemática pode desencadear o interesse pelo conteúdo matemático a ser estudado, tendo em vista que essas tecnologias podem favorecer ao aluno o estudo da matemática concreta e abstrata, e estão cada vez mais acessíveis e presentes em seu cotidiano. Com isso, havendo a possibilidade de um avanço significativo no processo educativo da Matemática.

A respeito ao uso da tecnologia para a Matemática, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio expõem que:

[...] Há programas de computador (*softwares*) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão.<sup>2</sup> Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o “pensar matematicamente”, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. (BRASIL, 2006, pg. 88).

Softwares como esses, oferecem ao discente a possibilidade de desenvolver e criar o seu conhecimento matemático, além de “[...] oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica; [...]; permitir a manipulação dos objetos que estão na tela”. (BRASIL, 2006, pg. 88).

Dessa forma, o professor deve ser antes de tudo, um professor pesquisador, pois não adianta fazer uso de programas computacionais que não proporcionem a compreensão da Matemática a partir da construção do conhecimento, e que apenas reproduza o mesmo cenário de transmissão e repetição que muitas metodologias oferecem para a sala de aula.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio discorrem sobre a escolha e o uso dessas tecnologias para o aprendizado da Matemática:

No uso de tecnologia para o aprendizado da Matemática, a escolha de um programa torna-se um fator que determina a qualidade do aprendizado. É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e idéias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática. (BRASIL, 2006, pg. 89-90).

Assim, é de competência do professor a escolha de programas que possuam tais características que favoreçam uma aprendizagem expressiva da Matemática, e também a utilização desses instrumentos, de modo que favoreça ao aluno a possibilidade de criar significados para conceitos matemáticos estudados.

Nesse contexto, Nascimento (2012, p. 07) enfatiza que o uso de softwares educacionais tem se tornado uma realidade nos últimos anos e se titulando como uma real importância para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

De tal modo, a utilização de softwares para o estudo de conteúdos matemáticos estabelece uma ferramenta que o docente pode adotar na finalidade de alcançar uma melhoria na aprendizagem por meio de suas mediações, podendo proporcionar aos alunos uma maior compreensão e gerar um bom desempenho nas atividades propostas.

Assim sendo, diante das necessidades de aprendizagem apresentadas constantemente pelos discentes, o uso de softwares computacionais pode tornar-se um recurso pedagógico bastante significativo e considerado como um instrumento auxiliador para a aprendizagem matemática, desde que seja utilizado de forma adequada e planejada.

Fialho enfatiza a importância da utilização adequada da informática para a aprendizagem:

Um recurso que tem sido bastante valorizado recentemente é a utilização de informática nas escolas. De modo inadequado, alguns desses momentos são mais de informática do que educacionais, o que acaba sendo contraproducente. Não somos favoráveis à utilização da informática de modo indiscriminado; em nossa opinião, cada momento passado no laboratório de informática é tão ou mais importante que em sala de aula tradicional, e, portanto deve ser cuidadosamente planejado. (FIALHO 2010, p. 1).

Sabe-se que para toda metodologia obter êxito tanto para o ensino como para a aprendizagem, deve ser bem planejada, de modo que o docente esteja preparado para fazer o uso do

recurso. Da mesma forma ocorre com os softwares educacionais. A sua utilização será significativa para o processo educacional se houver o planejamento e a organização mediante os conteúdos a serem abordados.

Nesse contexto, Fialho expõe que:

[...] O que faz a diferença é aprimorar a qualidade do aprendizado no tempo em que os estudantes ficam dentro de escola, ou seja, fazer com que haja melhor rendimento no mesmo tempo. Dentro desse objetivo, estamos convictos que o uso planejado de recursos de informática para ensinar pode produzir os resultados esperados. (FIALHO 2010, p. 105).

Nessa concepção, é necessário que o docente esteja constantemente atualizado e atento aos recursos tecnológicos que possam vir a ser utilizados no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e que possam contribuir de modo significativo para o desenvolvimento do pensamento cognitivo do aluno.

### 2.2.1 O software Geogebra

O software Geogebra<sup>4</sup> é um software gratuito e de acesso livre, criado por Markus Hohenwarter, em 2001. Foi desenvolvido para o estudo de várias áreas da Matemática, podendo ser utilizado desde o ensino básico ao ensino superior. Assim, o software apresenta ferramentas que permitem o estudo de Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Sendo visto como uma importante ferramenta para o estudo de tais conteúdos, uma vez que propicia ao usuário a construção, o estudo e diferentes representações de um mesmo objeto. Escrito na linguagem JAVA, pode ser instalado em computadores com sistemas operacionais Windows, Linux ou Mac OS.

Ghiggi, Schmidt e Koch conceituam o Geogebra como sendo:

[...] um software livre, que possibilita que as construções geométricas sejam realizadas de maneira dinâmica e interativa, permitindo que as mesmas sejam exploradas com mais riqueza de detalhes do que as construções tradicionais. Além disso, ele também tem a vantagem de apresentar, simultaneamente, duas representações diferentes de um mesmo objeto: a representação geométrica e a representação algébrica. (GHIGGI, SCHMIDT E KOCH 2013, p.1).

O Geogebra vem sendo utilizado em diversos países e possui tradução para cerca de 60 idiomas, inclusive o português. Sua versão atualizada pode ser facilmente obtida em sites de busca na Internet ou por meio do endereço oficial <https://www.geogebra.org/>. Este software apresenta

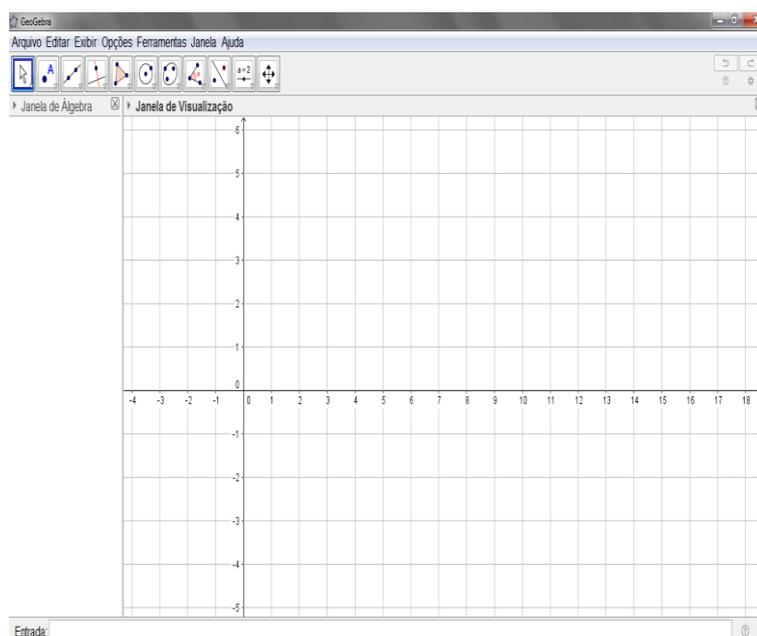
---

<sup>4</sup> Informações retiradas da página do Instituto Geogebra no Rio de Janeiro. Disponível em: < <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/cig.html>>. Acesso em 29/03/2017.

uma interface bem inteligível, com diversas funcionalidades, as quais são apresentadas em uma linguagem clara, além de mostrar as janelas de álgebra e visualização e o campo de entrada.

É possível observar a interface do software Geogebra na figura 01, formada por uma tela inicial composta por duas janelas, a janela de álgebra e a janela de visualização geométrica (área de trabalho); campo de entrada, onde são inseridas equações, funções, coordenadas de pontos a serem marcadas, e após pressionar a tecla Enter, os objetos geométricos são exibidos.

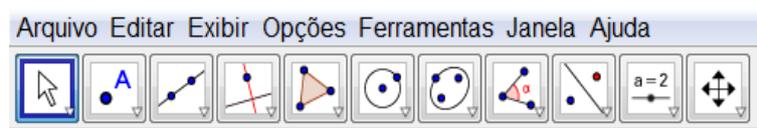
**Figura 01 - Tela inicial do software Geogebra**



**Fonte:** software Geogebra

A interface do software apresenta um menu com sete comandos: Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda. Além de apresentar uma barra de ferramentas composta por onze caixas de ferramentas, e cada uma dessas caixas apresenta outras ferramentas que se relacionam com a função do ícone inicial. A seguir, podem ser observadas o menu e barra de ferramentas.

**Figura 02 - Menu e Barra de ferramentas**

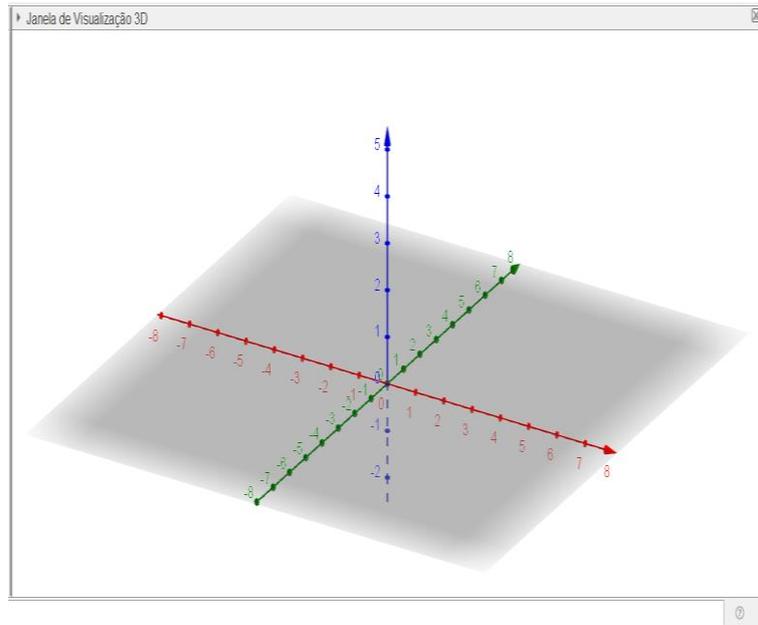


**Fonte:** software Geogebra

O software Geogebra também possui uma janela de visualização 3D, o que possibilita o estudo de objetos em um espaço tridimensional, permitindo a construção de gráficos de superfícies no  $E^3$  e a visualização em diversas perspectivas, além de permitir a análise das características existentes.

Na figura 03, é apresentada a janela de visualização 3D do software Geogebra:

**Figura 03 - Janela de visualização 3D do software Geogebra**



**Fonte:** software Geogebra

Assim, o uso do Geogebra como recurso pedagógico nas aulas de Matemática, pode contribuir para o desenvolvimento da visualização geométrica e a comprovação de teorias e conceitos matemáticos.

Para Nascimento (2012, p. 03), “a habilidade de visualizar pode ser desenvolvida, à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo”.

Dessa forma, a inserção do software Geogebra nas práticas didáticas também pode direcionar os discentes a serem construtores de seus próprios saberes, por proporcioná-los um ambiente de Geometria Dinâmica e Interativa.

Nascimento em seu discurso apresenta um entendimento sobre o termo Dinâmico e o termo Interativo:

O termo “Dinâmico” do nome pode ser mais bem entendido como oposição à estrutura “estática” das construções da geometria tradicional. E o termo “Interativo” é que após o aluno realizar uma construção, ele pode alterar as posições dos objetos iniciais e o programa redesenha a construção, preservando as propriedades originais. (NASCIMENTO, 2012, p. 05).

O Geogebra por ser um programa de geometria dinâmica e interativa, favorece um ambiente com diversas ferramentas que permitem animação, movimentação, criatividade nas construções e interação entre o sujeito e o objeto construído.

Corroborando com essa ideia Ghiggi, Schmidt e Koch, expõem que:

Nos softwares de geometria dinâmica, a característica principal é a possibilidade de realizar construções que usualmente seriam feitas com régua e compasso, porém com a vantagem de movimentar os objetos. Isso permite que o usuário teste conjecturas e descubra propriedades, faça investigações, levante hipóteses e confirme resultados com base nas construções realizadas. (GHIGGI, SCHMIDT E KOCH 2013, p. 04).

Nessa concepção, a utilização do software Geogebra para o estudo de Quádricas pode proporcionar aos alunos o aprimoramento da visualização geométrica, tendo em vista que no quadro ou com lápis e papel, só é possível construir esboços de gráficos no  $E^3$ , e o Geogebra viabiliza a construção dos gráficos rapidamente, possibilitando ainda o estudo dos elementos dessas superfícies.

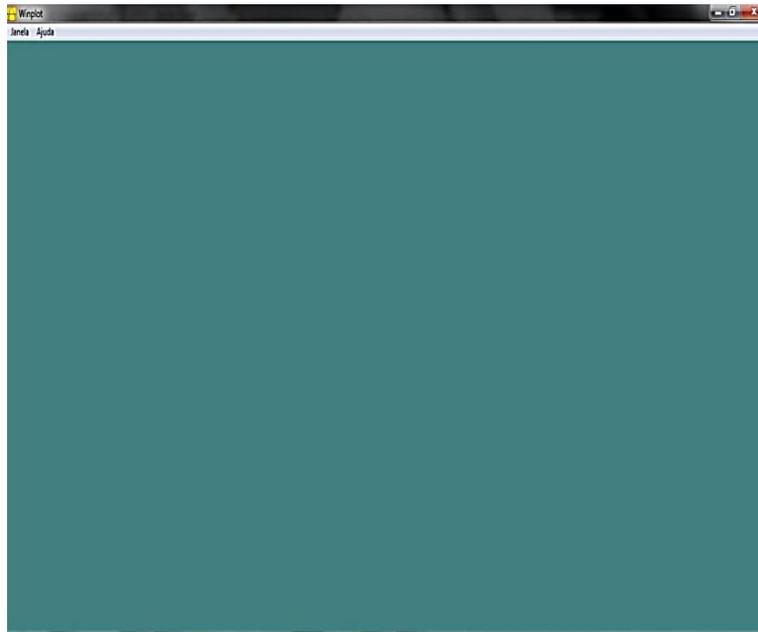
Diante disso, o Geogebra pode conceber a capacidade de generalizar conceitos matemáticos através de suas construções. Com isso, levando-o a uma maior abstração das propriedades e características a partir da representação e visualização dos objetos construídos.

### 2.2.2 O software Winplot

O software Winplot<sup>5</sup> é um software gratuito, criado por Richard Parris (professor do Departamento de Matemática da Philips Exeter Academy – Estados Unidos). Possui versões em vários idiomas, dentre eles o português, mas o seu idioma original é o inglês. É um programa gráfico destinado ao estudo de gráficos, que permite o traçado e animação de gráficos em 2D e em 3D, através de equações explícitas, implícitas, paramétricas, polar, cilíndrica e esférica, o que possibilita o estudo de funções de duas e três variáveis facilitando o estudo da Geometria Analítica.

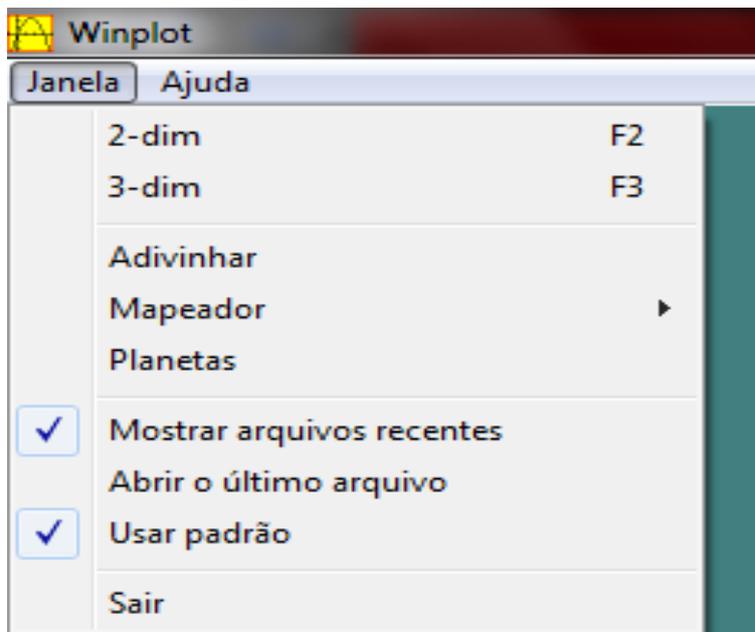
Ao abrir a área de trabalho do software Winplot, é apresentada a tela inicial composta por um menu com os itens Janela e Ajuda, como pode ser observado na figura 04.

<sup>5</sup> Informações retiradas do Projeto TIC – Aprendizagem de Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Disponível em: <<http://www.es.iff.edu.br/softmat/projetotic/portaltic/apresentacao-secoes-de-prisma/80-categoria-dos-artigos/148-winplot-softmat>> Acesso em 03/04/21017.

**Figura 04 - Tela inicial do software Winplot**

**Fonte:** software Winplot

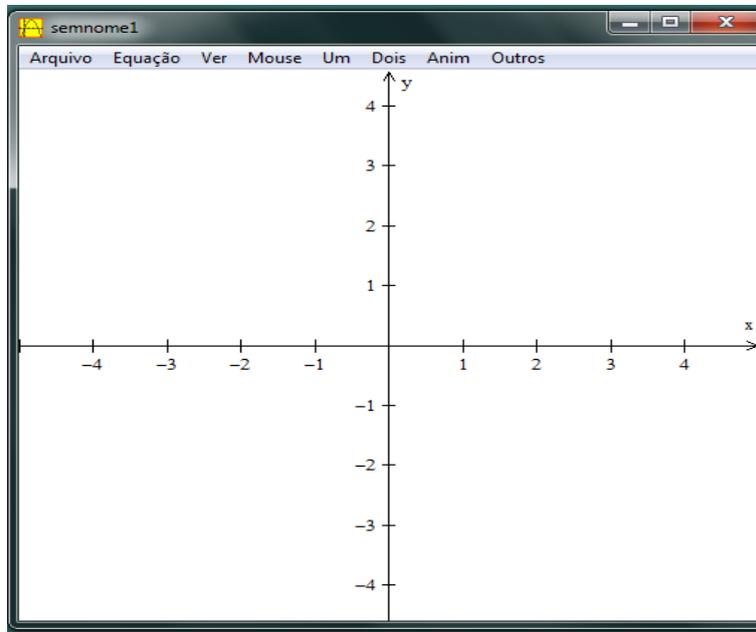
Para dar início aos estudos no software, é preciso que seja escolhida a janela de visualização a ser utilizada. Para isso, basta clicar na ferramenta janela e as seguintes opções são apresentadas, de acordo com a figura 05:

**Figura 05 - Opções da ferramenta janela**

**Fonte:** Software Winplot

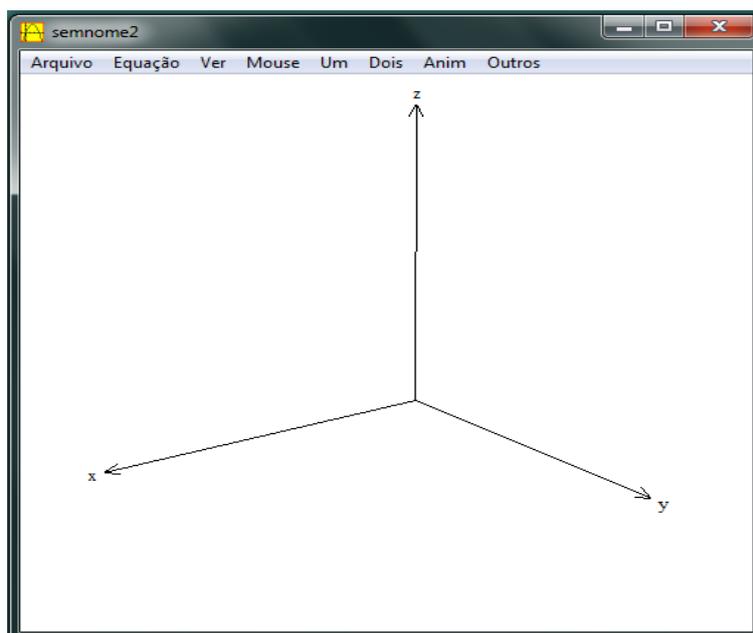
O Winplot apresenta janelas de visualização de duas dimensões (2D) e de três dimensões (3D), as quais podem ser observadas respectivamente nas figuras 06 e 07.

**Figura 06 - Janela de visualização 2D do Winplot**



**Fonte:** Software Winplot

Na janela de visualização de duas dimensões é possível trabalhar com equações do tipo explícita, paramétrica, implícita e polar.

**Figura 07 - Janela de visualização 3D do Winplot**

**Fonte:** Software Winplot

Já a janela de três dimensões além de equações explícita, paramétrica e implícita, admite as equações cilíndrica e esférica. Assim, as janelas de visualização 2D e 3D permitem o estudo de funções e equações no plano e no espaço. Nessa concepção, o software Winplot apresenta ferramentas capazes de favorecer o estudo gráfico de vários conteúdos matemáticos, podendo ser um recurso pedagógico que auxilie o professor em suas práticas.

Conforme Valentim (2014), o software Winplot pode ser este aliado ao ensino com mediação da tecnologia e que o professor que leciona matemática pode lançar mão desta possibilidade quando se apropria destes saberes que envolvem software, matemática e prática pedagógica.

O Winplot é uma das ferramentas tecnológicas capaz de auxiliar o ensino de muitos conteúdos matemáticos, diferentemente de algumas tecnologias que são usadas e apenas reproduzem o conhecimento e a memorização.

Para Araújo, o software Winplot é um recurso relevante para o estudo da Geometria Analítica:

[...] o WinPlot pode despertar no estudante o fascínio pela exploração matemática e o gosto pelo raciocínio lógico. Para muitos, o verdadeiro significado da Geometria Analítica — como uma forma de "geometria algébrica" — se revela pela primeira vez! (ARAÚJO, 2003, apud FRECKI 2008, p. 67).

Nessa concepção, o Winplot pode ser um instrumento que apresente meios ao aluno que leve-o a descobrir o significado real da Geometria Analítica.

Scheffer e Dallazen fazem ênfase à importância da utilização do Winplot para a aprendizagem do usuário:

A partir da utilização e análise desse software, pode-se dizer que o mesmo contribui no desenvolvimento da capacidade de observação, investigação e senso crítico; possibilita a associação de idéias, evitando, assim, a simples memorização; contribui para despertar o interesse do usuário, promovendo a aprendizagem e favorecendo a construção do conhecimento (SCHEFFER e DALLAZEN, 2016, apud FRECKI 2008, p. 68).

O Winplot pode contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, levando-os a desenvolverem a visualização geométrica, a investigarem conceitos e a fazerem suas próprias construções, além de oferecê-los um ambiente de aprendizagem diferente do que estão habituados, no qual eles podem interagir diretamente com a ferramenta de ensino.

Dessa forma, a utilização do software Winplot no ensino da Matemática pode contribuir para a aprendizagem, além de ser um recurso pedagógico capaz de tornar as aulas mais dinâmicas e interativas, por desencadear no aluno o interesse e a curiosidade de interagir com as ferramentas e buscar soluções.

### 2.2.3 O software K3DSurf

O K3DSurf<sup>6</sup> foi criado por Abderrahman Taha e é um programa desenvolvido para visualizar e manipular superfícies multidimensionais através de equações matemáticas. O software suporta equações paramétricas e isosurfaces (funções na forma implícita), bem como adicionar e remover algumas funções da equação e desse modo, visualizar os efeitos provocados através dessas mudanças. É uma maneira mais criativa e interativa de entender o comportamento das funções matemáticas em 3D, além de permitir o estudo de funções mais complexas em 4D, 5D e 6D.

O software K3DSurf é um software gratuito, de linguagem simples e é bastante interessante, pois apresenta 51 exemplos de gráficos de funções, superfícies paramétricas e superfícies representadas por equações implícitas e que podem ser facilmente exibidas selecionando o nome do modelo matemático, e foi desenvolvido para ser utilizado por alunos do curso de licenciatura em Matemática, especificamente para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Seu idioma é o inglês, mas o site <http://k3dsurf.sourceforge.net> oferece um suporte para a sua utilização.

---

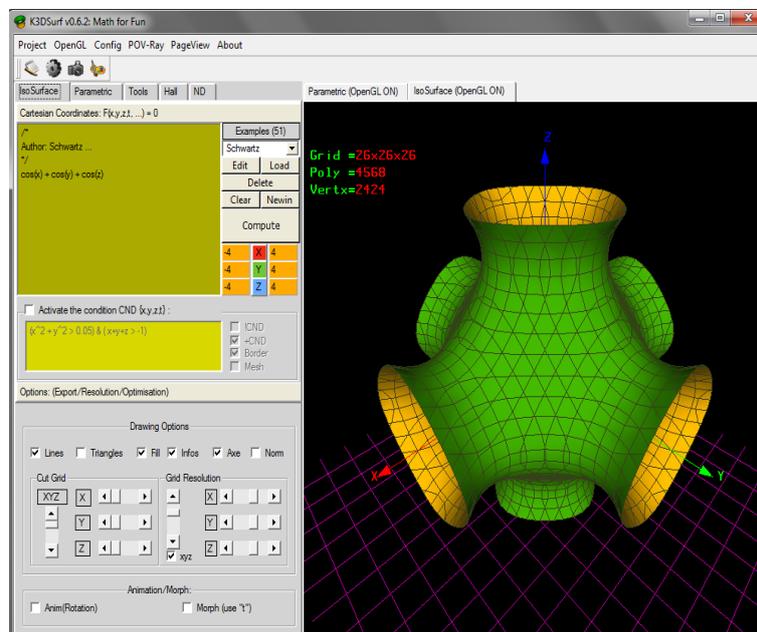
<sup>6</sup> Informações retiradas do site de ajuda do software K3DSurf. Disponível em: <<http://k3dsurf.sourceforge.net/>>. Acesso em 04/04/2017.

A respeito do K3DSurf, Gouveia expõe que:

Essa tecnologia computacional apresenta um ambiente propício para visualização e manipulação de modelos matemáticos em três dimensões (3D), quatro dimensões (4D), cinco dimensões (5D) e seis dimensões (6D) e também permite rotacionar, transformar (morfar) e escalonar esses objetos. Esses recursos possibilitam a exploração das representações das funções matemáticas no espaço no qual tal função pode ser inserida no software na forma  $F(x,y,z,...) = 0$  ou da forma de funções paramétricas. (GOUVEIA, 2011, P. 04).

Ao iniciar o software é exibida sua interface, a qual pode ser observada na figura 08 a seguir.

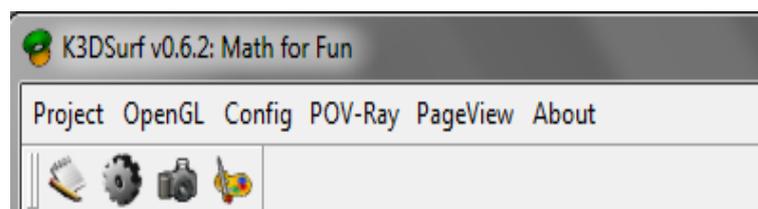
**Figura 08 - Interface do K3DSurf**



Fonte: Software K3Dsurf

O K3DSurf apresenta diferentes recursos que possuem diversas funcionalidades quanto a sua utilização. Por exemplo, o menu, composto pelos comandos: Project, OpenGL, Config, POV-Ray, PageView e About, e a barra de ícones, os quais podem ser visualizados nas figuras 09.

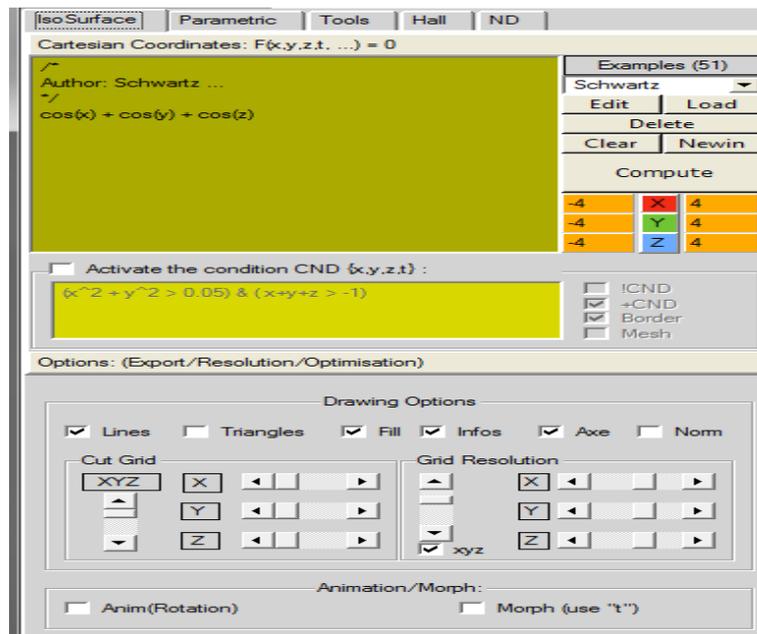
**Figura 09 - Menu de ícones do software K3DSurf**



Fonte: Software K3Dsurf

A figura 10 exibe os recursos disponíveis na ferramenta IsoSurface: o campo de entrada onde as funções matemáticas podem ser inseridas de forma implícita; comandos que devem ser utilizados para a exibição dos modelos matemáticos; ferramentas que permitem modificações na resolução do gráfico da função e no intervalo de cada eixo e animações gráficas.

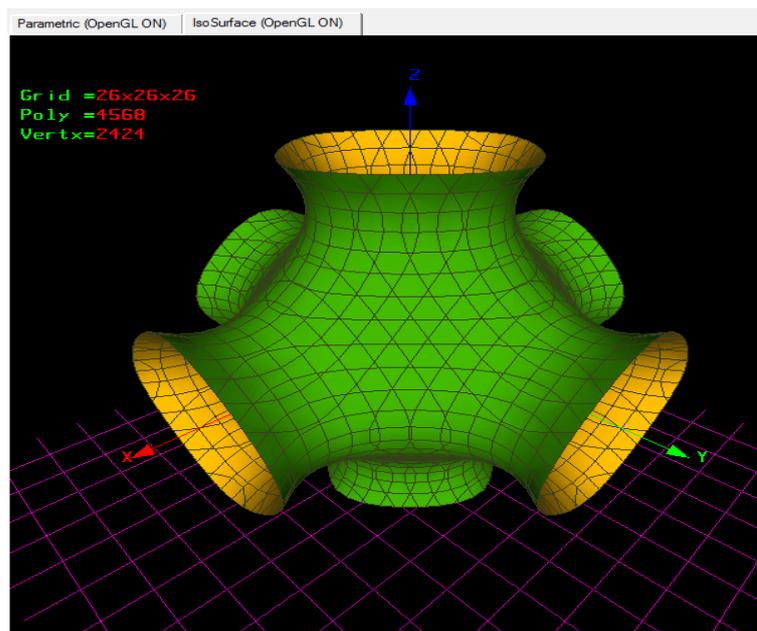
**Figura 10 - Recursos IsoSurface do software K3DSurf**



**Fonte:** Software K3Dsurf

Todas as modificações realizadas nos exemplos de modelos matemáticos já existentes no software ou em novas funções matemáticas, serão exibidas na janela de visualização IsoSurface (OpenGL on), a qual pode ser observada na figura 11.

**Figura 11 - Janela de visualização gráfica do software K3DSurf**



**Fonte:** Software K3DSurf

Conforme Fonseca:

Este programa permite uma forma de estudar e conhecer conceitos matemáticos com muita interatividade, através de visualizações com controle de rotação e ampliação/redução dos modelos. Outro recurso do software é a geração de animações. Tais animações acontecem em tempo real e você pode ver cada detalhe dos modelos a fundo, ainda podendo capturar cenas para guardar em forma de imagens, ou mesmo num pequeno vídeo. (FONSECA, 2011, p. 57).

O K3DSurf também é um software que proporciona ao usuário (aluno ou professor) o comando para a construção do modelo matemático, podendo favorecer o desenvolvimento da visualização geométrica através de seus recursos de controle e animação.

Fonseca em seu trabalho, dar ênfase aos benefícios que o K3DSurf oferece ao estudo de superfícies:

No programa K3DSurf podemos visualizar a interseção de várias superfícies geométricas. [...]. Além disso, podemos editar os dados da superfície, função e intervalos de visualização através de um diálogo [...]. Com o uso do software o aluno poderá rapidamente visualizar várias superfícies no espaço, a fim de facilitar a identificação dos limites de integração que deverão levar em consideração ao efetuarem o cálculo dos volumes das quádricas. Acreditamos que esta visualização facilitará bastante o entendimento do cálculo de volumes durante as aulas de cálculo. (FONSECA, 2011, p. 57).

Nessa concepção, o software K3DSurf é uma ferramenta que pode auxiliar no ensino e aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica, especificamente no estudo de superfícies, e o seu uso adequado pode conceder a construção do conhecimento matemático.

### **3 METODOLOGIA DA PESQUISA**

Segundo Rampazzo (2005), o significado da palavra “metodologia” é o “estudo do método”. Assim, para que uma pesquisa científica seja desenvolvida é necessário que alguns passos sejam seguidos, ou seja, é preciso adotar métodos técnicos que favoreçam a concretização do objetivo desejado.

Pode-se definir método como caminho para se chegar a determinado fim. E método científico como o conjunto de procedimentos intelectuais e técnicos adotados para se atingir o conhecimento. (GIL, 2008, p. 08).

Assim, o presente trabalho teve sua metodologia desenvolvida para a aplicação e verificação por meio de uma pesquisa aplicada, que segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 51), “objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática dirigidos à solução de problemas específicos.” Assim, a maior finalidade desta pesquisa é apresentar um estudo que venha a contribuir com o ensino e aprendizagem em relação ao conteúdo de superfícies quádricas e que traga soluções para as necessidades dessa aprendizagem.

#### **3.1 Tipologias da Pesquisa**

##### **3.1.1 Quanto aos Objetivos**

Em relação aos objetivos a pesquisa caracteriza-se como exploratória e descritiva. É exploratória por visar uma familiarização com o problema a ser estudado, no caso dessa pesquisa, o estudo das quádricas, com a finalidade de apresentar um estudo que venha a contribuir e facilitar a aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica e o desenvolvimento da visualização geométrica de objetos tridimensionais, a partir da utilização dos softwares computacionais Geogebra, Winplot e K3DSurf. E descritiva por pretender descrever se o uso de softwares no ensino das quádricas é um recurso facilitador para a aprendizagem e visualização das quádricas.

Nessa concepção, Gil afirma que “as pesquisas descritivas são, juntamente com as exploratórias, as que habitualmente realizam os pesquisadores sociais preocupados com a atuação prática. São também as mais solicitadas por organizações como instituições educacionais [...]”. (GIL, 2008, p. 42).

### 3.1.2 Quanto aos Procedimentos Técnicos

Quanto aos procedimentos técnicos utilizados, a pesquisa classifica-se como pesquisa bibliográfica e estudo de caso. A pesquisa bibliográfica foi utilizada para nortear a realização da fundamentação teórica, tendo alguns meios para consultas sobre o que já foi estudado e publicado a respeito do estudo das quádras. Já o estudo de caso foi utilizado, por buscar apresentar um estudo aprofundado sobre as quádras a partir da utilização de softwares computacionais, por meio de uma oficina e questionário aplicados em uma turma específica do curso de Licenciatura em Matemática. A esse respeito, Gil enfatiza que o estudo de caso “é caracterizado pelo estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, de maneira a permitir o seu conhecimento amplo e detalhado [...]”. (GIL, 2008, p. 57).

### 3.1.3 Quanto à Abordagem do Problema

Em relação ao método de abordagem, a pesquisa caracteriza-se como qualitativa e quantitativa. Na abordagem qualitativa, a pesquisa tem o ambiente como fonte direta dos dados. O pesquisador mantém contato direto com o ambiente e o objeto de estudo em questão, necessitando de um trabalho mais intensivo de campo. (PRODANOV E FREITAS, 2013 p. 70).

Dessa forma, utilizando a abordagem qualitativa, esse estudo objetiva identificar e verificar o desempenho dos alunos com a utilização de softwares computacionais no estudo de conceitos de Geometria analítica, a partir da análise das informações adquiridas.

O método quantitativo foi utilizado na pesquisa por meio de um questionário, com a finalidade de facilitar a compreensão e interpretação dos dados. “Essa forma de abordagem é empregada em vários tipos de pesquisa, inclusive nas descritivas, principalmente quando buscam a relação causa-efeito entre os fenômenos”. (PRODANOV E FREITAS, 2013 p. 70).

### 3.1.4 Quanto ao Método

Em relação ao método, adotamos o indutivo, tendo em vista que esse método propicia averiguações de modo geral através do estudo de casos particulares. Conforme GIL, o método indutivo

parte do particular e coloca a generalização como um produto posterior do trabalho de coleta de dados particulares. De acordo com o raciocínio indutivo, a generalização não deve

ser buscada aprioristicamente, mas constatada a partir da observação de casos concretos suficientemente confirmadores dessa realidade. (GIL, 2008, p. 10).

Nessa concepção, a escolha desse método é justificada pelo fato da pesquisa verificar um estudo realizado em uma turma do curso de Licenciatura em Matemática para se chegar a uma conclusão geral a respeito do desempenho dos alunos do curso, a partir da utilização de recursos tecnológicos para o ensino de conteúdos matemáticos.

### **3.2 Amostra da Pesquisa**

Segundo Prodanov e Freitas (2013 p. 98), universo da pesquisa “é a totalidade de indivíduos que possuem as mesmas características definidas para um determinado estudo”.

Assim, o estudo foi realizado na Universidade Federal da Paraíba/Campus IV, em Rio Tinto–PB, visto que é um espaço que apresenta pessoas que possuíam as características fundamentais para o desenvolvimento da nossa pesquisa, dessa forma, nos fornecendo a amostra necessária.

Segundo Gil (2008, p. 90), amostra é um “subconjunto do universo ou da população, por meio do qual se estabelecem ou se estimam as características desse universo ou população”.

Foram tomados como amostra da pesquisa 20 alunos do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática, da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, do horário noturno.

A pesquisa foi desenvolvida a partir da coleta de dados favorecida por meio da aplicação de um questionário diagnóstico (apêndice A), acerca do estudo proposto na oficina pedagógica aplicada (apêndice B), com a finalidade de verificar, principalmente, o desempenho dos alunos com o conteúdo de superfícies quádricas a partir da utilização dos softwares computacionais Geogebra, Winplot e K3DSurf, e se o uso desses softwares pode ser um recurso facilitador para o estudo das quádricas.

Dessa forma, empregou-se na pesquisa esse tipo de amostra por se acreditar que a amostra escolhida representa a realidade do universo da nossa pesquisa, de modo que poderia nos fornecer uma abordagem bem ampla na obtenção dos dados a serem analisados.

### **3.3 Construção do instrumento de Coleta de Dados**

O instrumento de coleta de dados utilizado na pesquisa foi construído em duas fases. A primeira constituiu-se de uma oficina pedagógica com a finalidade de apresentar e propor aos

alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, um estudo acerca das superfícies quádricas com a utilização dos softwares computacionais Geogebra, Winplot e K3DSurf, e a partir desse estudo verificar a aprendizagem dos alunos. Na segunda fase, foi proposto aos alunos um questionário diagnóstico contendo vinte questões fechadas a respeito do ambiente informatizado de ensino e do desempenho de cada software utilizado na oficina.

Conforme Gil,

Pode-se definir questionário como a técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado etc. (GIL, 2008, p. 121).

Assim, foi aplicado um questionário visando identificar a percepção dos alunos a respeito ao uso de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos de matemática, especificamente para o conteúdo de quádricas. O questionário apresentou questões fechadas, compreendendo tanto perguntas com escolha de uma única alternativa, como perguntas com escolha de mais de uma alternativa, em busca de investigar a aprendizagem dos alunos a partir do estudo proposto e desenvolvido na oficina.

## 4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo será apresentada a análise e discussão dos resultados obtidos por meio da pesquisa desenvolvida. Tendo em vista à aplicação de uma oficina pedagógica e de um questionário, este capítulo foi dividido em duas seções: a primeira referente à análise dos resultados obtidos pelos alunos na oficina e a segunda referente à análise dos dados do questionário.

### 4.1 Análise dos Resultados da Oficina Pedagógica

A oficina pedagógica foi aplicada para os alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, do período 2016.2, do curso de Licenciatura em Matemática. Sendo realizada no LEPEN – Laboratório de Estudos e Pesquisas em Ensino de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, Campus IV. A oficina teve duração de 180 minutos.

Primeiramente foi realizada uma revisão acerca do conteúdo das superfícies quádricas, proporcionando um estudo das quádricas mais estudadas e conhecidas pelos alunos visto em sala de aula, a partir das mediações do professor, tais como: elipsóide, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas, parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico, cone elíptico, e as quádricas cilíndricas, que se classificam em cilindro elíptico, cilindro hiperbólico e cilindro parabólico. Após essa etapa, foram apresentados os softwares que seriam utilizados para o estudo dessas superfícies – os softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf.

Assim, foram apresentadas algumas informações a respeito da criação e desenvolvimento, e principais características e indicações de cada software. Foram mostradas as áreas de trabalho, as janelas de visualização gráfica, as barras de ferramentas, os menus, os campos de entrada e também alguns comandos que são necessários na construção das quádricas. Em seguida, foi feito juntamente com os alunos um exemplo que solicitava a representação geométrica das superfícies quádricas, dadas pelas equações apresentadas a seguir, utilizando os softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf, mostrando todos os procedimentos necessários e todos os comandos para as construções em cada um dos softwares, como pode-se observar nas figuras 11, 12 e 13.

- $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$

- $4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$

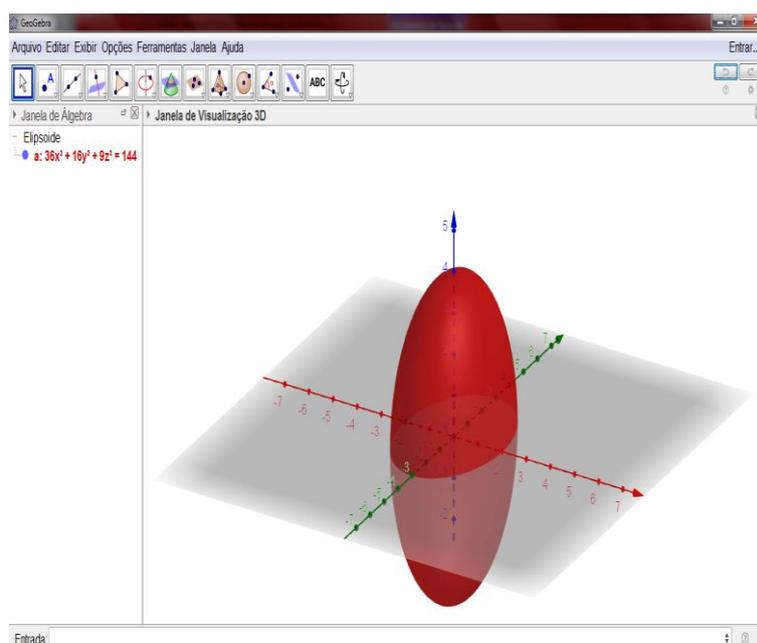
- $-4x^2 - 4y^2 + z^2 - 4 = 0$

Para que a superfície quádrlica de equação  $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$  (elipsóide) seja exibida na janela de visualização 3D do software Geogebra, basta clicar duas vezes no ícone do software para que exiba sua área de trabalho, clicar na ferramenta exibir e em seguida em janela de visualização 3D. E no campo de entrada, a equação correspondente a quádrlica deve ser inserida, utilizando alguns comandos, como é exposto a seguir.

$$36x^2+16y^2+9z^2=144$$

Assim, no teclado do computador, basta dar um Enter e logo o objeto tridimensional será exibido, como é apresentado na figura 12.

**Figura 12 - Elipsóide de equação  $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$ , gerado no software Geogebra**



**Fonte:** Software Geogebra

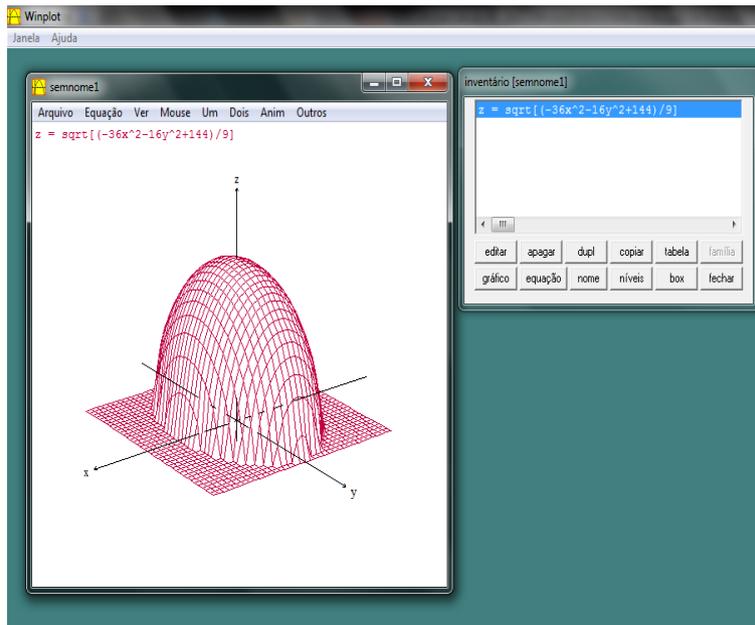
No software Winplot, também é preciso exibir a área de trabalho e clicar na ferramenta janela, em seguida em 3-dim, ou se preferirmos, podemos selecionar o comando F3 no teclado do computador. Ao ser aberta a janela de 3 dimensões, deve-se clicar em equação e em seguida em Explícita ou Paramétrica. Uma observação bem importante é que antes que a equação da quádrlica seja inserida no campo indicado do software, é necessário transformá-la em uma equação explícita

ou paramétrica e utilizar alguns comandos, como pode-se observar a seguir, e em seguida, a equação poder ser inserida.

$$z = \sqrt{(-36x^2 - 16y^2 + 144)/9} \text{ (equação explícita do elipsóide)}$$

Após inserir a equação, basta clicar em ok e a superfície quádrlica será exibida na janela de visualização 3-dim, como mostra a figura 13.

**Figura 13 - Elipsóide de equação  $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$ , gerado no software Winplot**



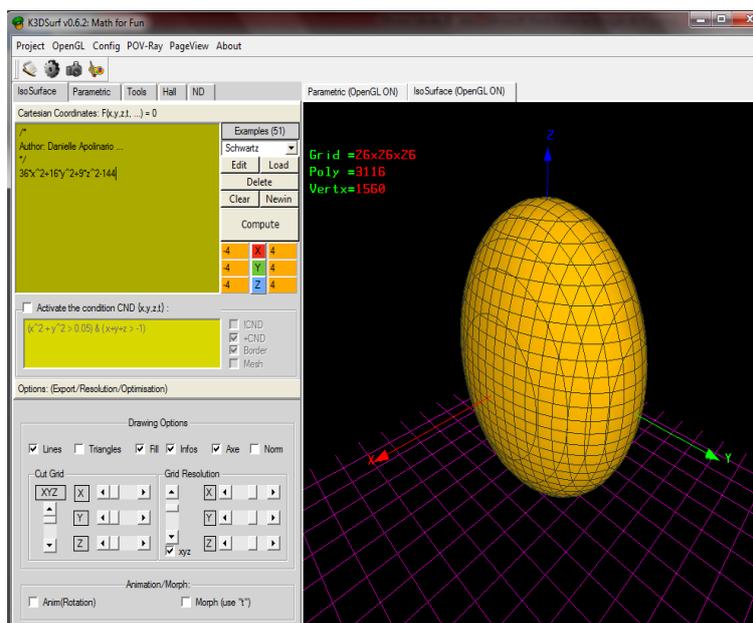
**Fonte:** Software Winplot

Já no software K3DSurf é bem mais simples de exibir as superfícies. Ao abri-lo clicando duas vezes em seu ícone, deve-se inserir no campo de entrada Cartesian Coordinates a equação correspondente a quádrlica, utilizando os comandos necessários, como pode ser verificado a seguir.

$$36*x^2+16*y^2+9*z^2-144$$

Em seguida, a ferramenta compute deve ser selecionada e assim a superfície será exibida.

**Figura 14 - Elipsóide de equação  $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$ , gerado no software K3DSurf**



**Fonte:** Software K3DSurf

Dessa forma, os alunos foram conhecendo as potencialidades de cada software para o estudo das superfícies, tais como: construir gráficos em um espaço tridimensional; alterar a cor; mover, ampliar e reduzir as janelas de visualização; visualizar em diversas perspectivas; salvar as construções obtidas e enviá-las via e-mail; analisar características das quádras.

Foi levado em consideração o fato de que os alunos nunca haviam feito o estudo de conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III com o auxílio desses recursos tecnológicos, além do que nenhum dos alunos conhecia o software K3DSurf e alguns deles também não conheciam o Winplot, sendo apenas o Geogebra conhecido por todos. Por essa razão, jugou-se necessária a apresentação das ferramentas e funcionalidades de todos os três softwares, especificamente daquelas que são necessárias para o estudo das superfícies quádras.

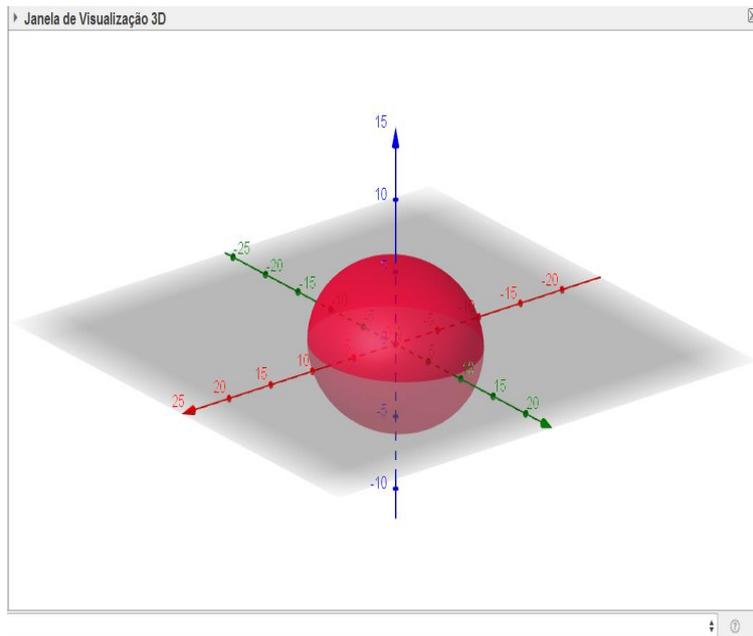
Em seguida, foram propostas algumas atividades com a utilização dos três softwares na finalidade de instigar nos alunos à comprovação de teorias estudadas e principalmente, à construção de conhecimentos por meio das ferramentas que os softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf dispõem.

Na primeira atividade proposta, foi solicitada a identificação da superfície quádras de equação  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{2} = 16$  e a sua representação gráfica utilizando os três softwares. Na sequência, solicitava-se para representar nos softwares a quádras de equação  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{15} =$

16, utilizando os mesmos coeficientes para as variáveis x e y da equação anterior, mudando apenas o coeficiente para a variável z, e a partir das duas representações foi questionado sobre o que ocorreu com a superfície.

A seguir, pode-se observar na figura 15 a representação gráfica obtida do primeiro elipsóide, pelo aluno A no software Geogebra.

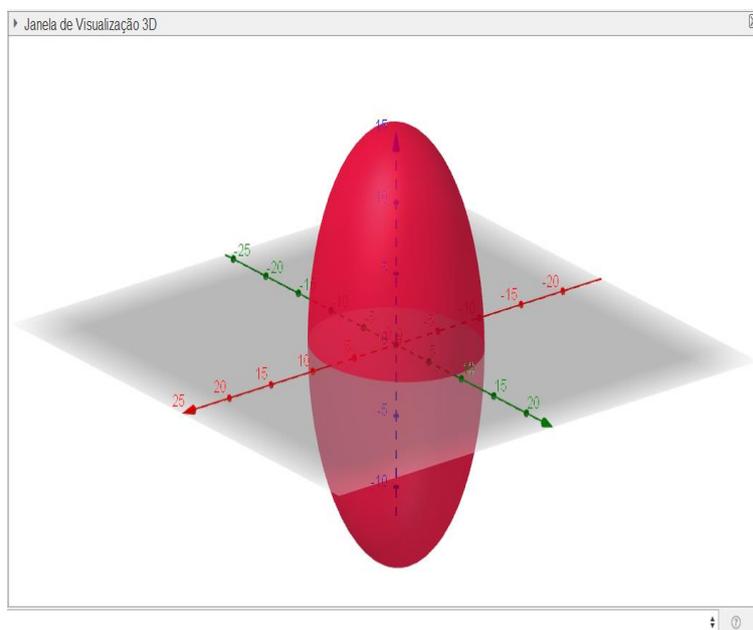
**Figura 15 - Representação gráfica do elipsóide de equação  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{2} = 16$ , obtida no software Geogebra**



**Fonte:** Software Geogebra

Na figura 16, é apresentado o segundo elipsóide com os mesmos coeficientes das variáveis x e y do primeiro elipsóide e apenas com variável z possuindo coeficiente distinto.

**Figura 16 - Representação gráfica do elipsóide de equação  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{15} = 16$ , obtida no software Geogebra**

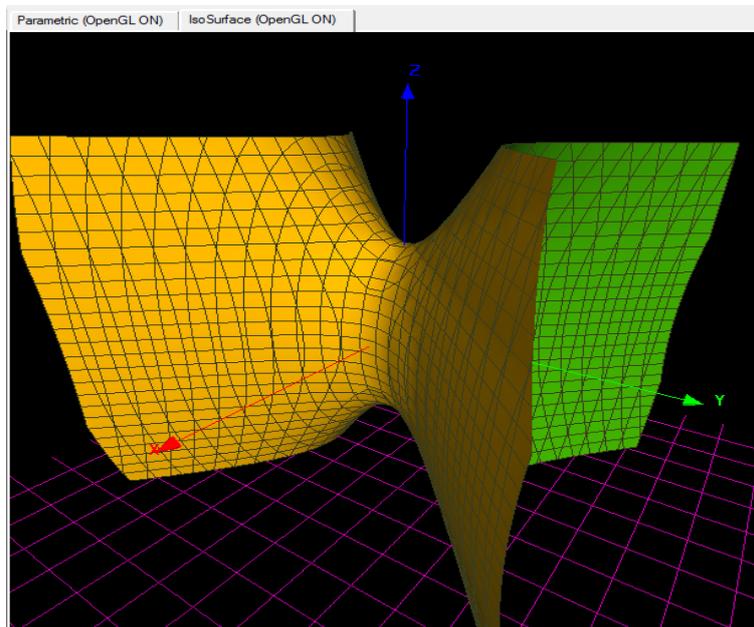


**Fonte:** Software Geogebra

Dos alunos envolvidos no estudo, todos conseguiram identificar os elipsóides e representá-los nos softwares, visualizar e expressar o que ocorreu com as superfícies, ao ser modificada a variação para o eixo Oz, além de comprovarem o que ocorreu sobre os eixos e os planos coordenados, isto é, comprovaram que a superfície quádrlica é simétrica em relação a todos os eixos e planos coordenados e a origem.

A segunda atividade solicitava a construção do hiperbolóide de uma folha de equação  $4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$ , e do hiperbolóide de duas folhas dado pela equação  $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$ , nos softwares, utilizando-se os mesmos coeficientes para as variáveis x, y e z, diferenciando-se apenas o sinal do coeficiente da variável x. Dessa forma, os alunos teriam que observar a relação entre as equações estabelecidas e as superfícies geradas, quanto à classificação, como mostram as representações a seguir, realizadas no software K3DSurf, por um dos alunos envolvidos no estudo.

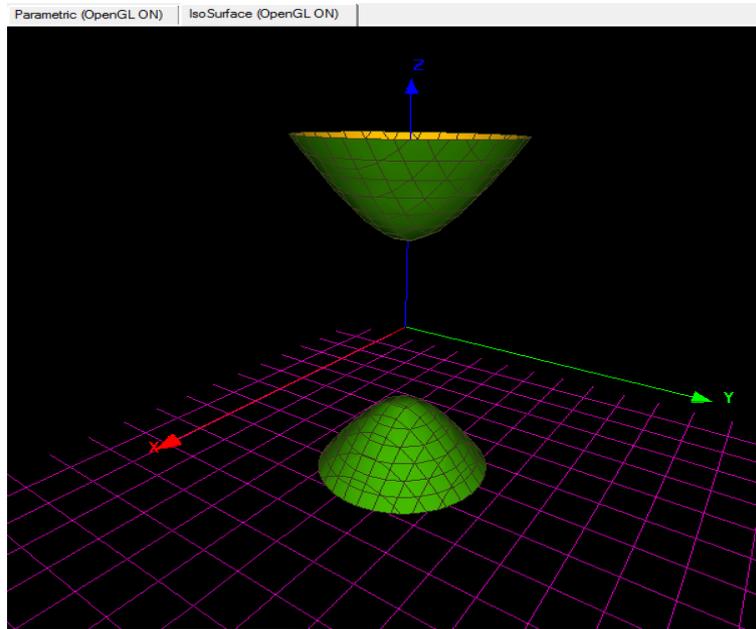
**Figura 17 - Representação gráfica do hiperbolóide de uma folha e de equação  $4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$  obtida no software K3DSurf**



**Fonte:** Software K3DSurf

Nessa primeira representação, todos os alunos observaram e afirmaram que quando a equação apresenta um coeficiente negativo para uma das variáveis, a superfície ficará em torno do eixo coordenado correspondente à variável.

**Figura 18 - Representação gráfica do hiperbolóide de duas folhas de equação  $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$  obtida no software K3DSurf**



**Fonte:** Software K3DSurf

Com essa atividade os alunos puderam verificar a relação entre as equações e os hiperbolóides gerados, quanto à classificação de cada um. Dessa forma, comprovaram as definições estudadas dos tipos de hiperbolóides, observando a relação entre os sinais dos coeficientes das variáveis e as superfícies obtidas.

Na terceira atividade os alunos teriam que representar nos softwares três parabolóides e analisar a relação entre suas equações com os gráficos gerados, levando em consideração a classificação de cada um deles.

A seguir, é possível observar as equações estabelecidas nos três itens.

$$a) \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} - z = 0$$

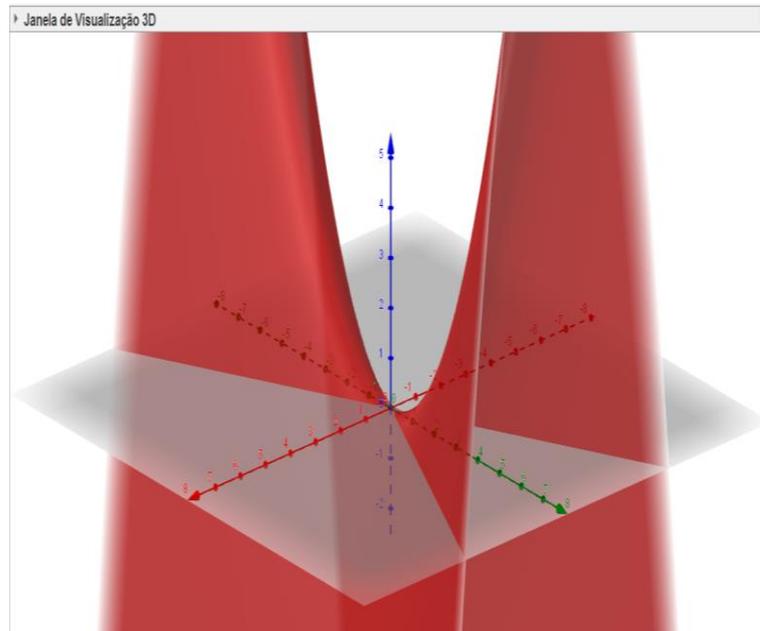
$$b) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z = 0$$

$$c) \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{6} = z$$

No primeiro item tem-se a equação de um parabolóide hiperbólico, na qual o coeficiente da variável  $y$  apresenta sinal negativo e assim, a superfície é gerada tanto na parte inferior do plano

como na superior e ao longo do eixo Oy. Pode-se verificar a seguir, a sua representação gráfica nos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf.

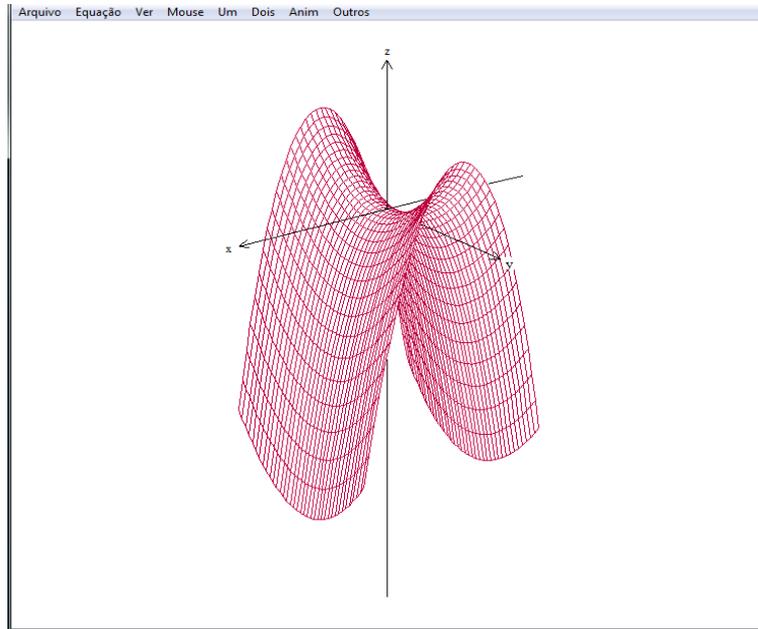
**Figura 19 - Representação gráfica do parabolóide hiperbólico de equação  $-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = z$  no software Geogebra**



**Fonte:** Software Geogebra

Figura 20 - Representação gráfica do parabolóide hiperbólico de equação  $-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = z$  no

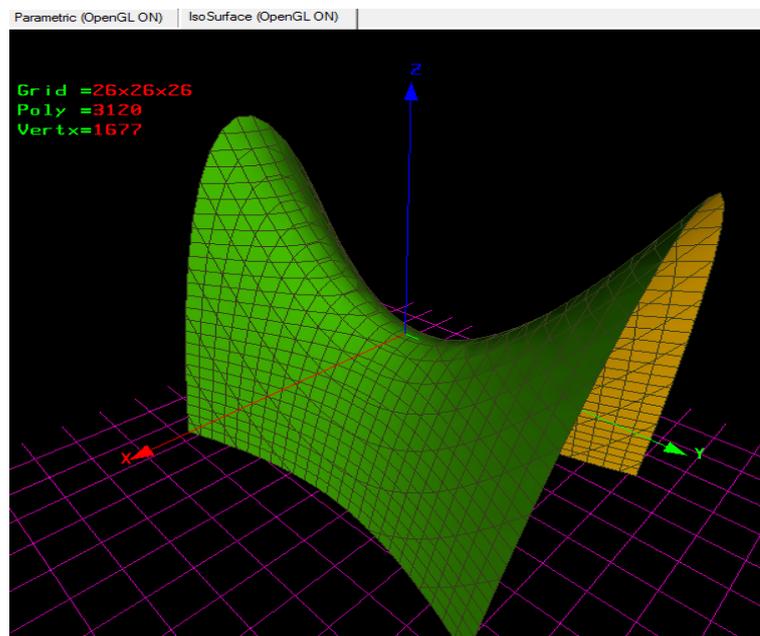
software Winplot



Fonte: Software Winplot

Figura 21 - Representação gráfica do parabolóide hiperbólico de equação  $-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = z$  no

software K3DSurf



Fonte: Software K3DSurf

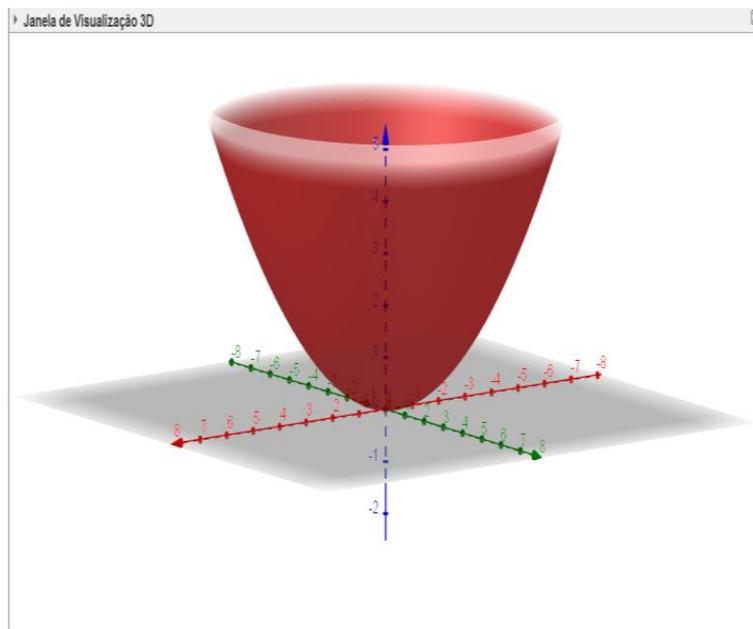
No segundo item tem-se novamente a equação de um parabolóide hiperbólico em torno do eixo Oy, e suas representações gráficas nos três softwares são bem parecidas com as do parabolóide do item a, diferenciando-se apenas os coeficientes das variáveis x, y e z, o que causa uma maior aproximação das bordas inferiores da superfície ao plano e ao eixo Ox.

O terceiro item apresenta a equação de um parabolóide elíptico, a qual indica que as variações dos eixos Ox e Oy da superfície quádrlica apresentam sinais positivos, e dessa forma, o parabolóide é gerado apenas na parte superior do plano e ao longo do eixo Oz, o que podemos observar na figura 22, a partir da representação gráfica no software Geogebra.

Observando a forma genérica da equação de um parabolóide, é perceptível que já é apresentada na forma explícita. Assim, para ser representado graficamente um parabolóide utilizando o software Winplot, não há a necessidade de transformar sua equação. Nos softwares Geogebra e K3DSurf, nenhuma das equações das superfícies quádrlicas precisam ser transformadas em explícitas ou paramétricas para gerarem os gráficos, uma vez que os programas reconhecem as equações na forma geral.

**Figura 22 - Representação gráfica do parabolóide elíptico de equação  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{6} = z$  no software**

### Geogebra



**Fonte:** Software Geogebra

Na quarta atividade foi proposta a representação gráfica nos softwares, de hiperbolóides de uma folha dados por equações que podem ser observadas a seguir, as quais apresentavam a mesma

variação para x, y e z e, diferindo-se apenas os sinais de cada uma. Feito isso, deveriam ser analisadas as características existentes entre os hiperbolóides.

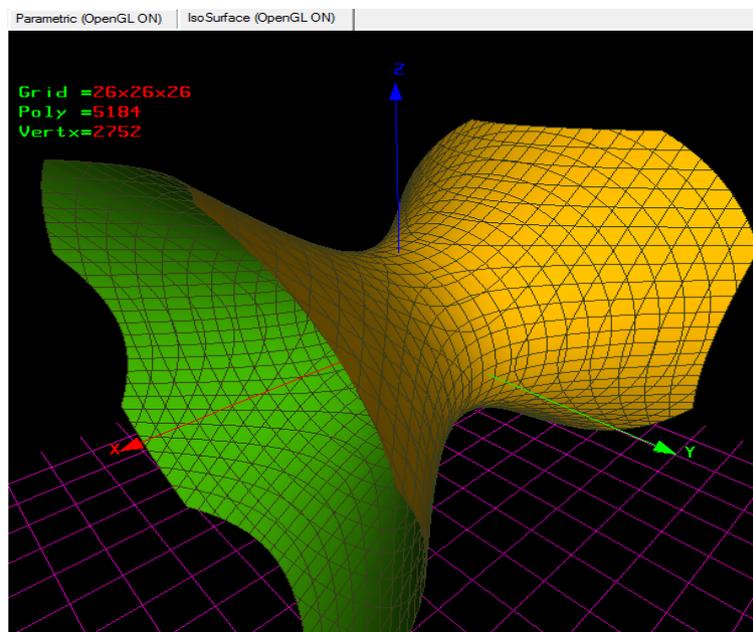
- $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$
- $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$
- $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0$

Nas equações de um hiperbolóide de uma folha, se o coeficiente da variável x apresentar o sinal negativo, logo a superfície será gerada em torno do eixo Ox. De modo análogo, se o coeficiente da variável y estiver com o sinal negativo, a quádrlica será gerada em volta do eixo Oy. O mesmo acontece com o eixo Oz.

As representações gráficas dos hiperbolóides de uma folha no software K3DSurf são apresentadas nas figuras 23, 24 e 25.

**Figura 23 - Representação gráfica no software K3DSurf do hiperbolóide de uma folha de**

$$\text{equação } -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

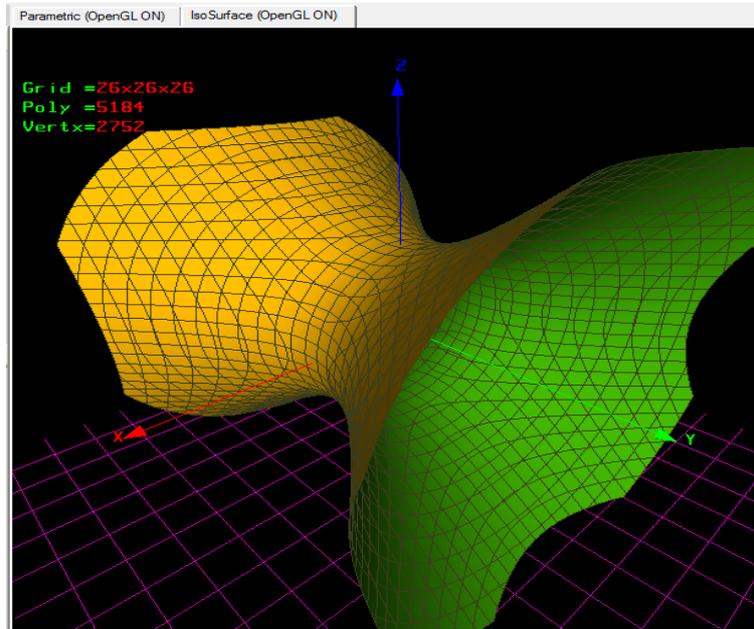


Fonte: Software K3DSurf

Como pode ser observado na figura 23, o hiperbolóide de uma folha é gerado em torno do eixo Ox, pois sua equação apresenta sinal negativo para o coeficiente da variável x.

**Figura 24 - Representação gráfica no software K3DSurf do hiperbolóide de uma folha de**

$$\text{equação } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

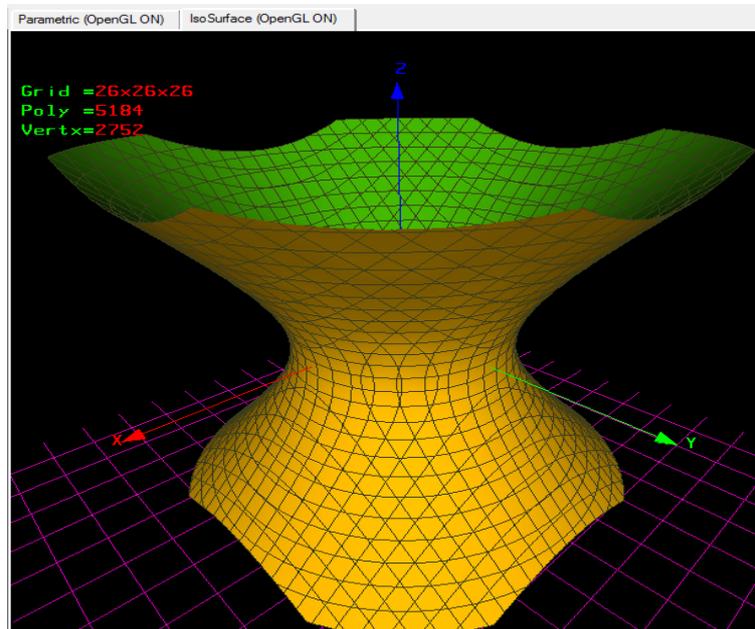


**Fonte:** Software K3DSurf

Na figura 24, a superfície é gerada em torno do eixo Oy, uma vez que o coeficiente da variável y é negativo.

**Figura 25 - Representação gráfica no software K3DSurf do hiperbolóide de uma folha de**

$$\text{equação } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$



**Fonte:** Software K3DSurf

Como é possível verificar na figura 25, o hiperbolóide de uma folha é concebido ao longo do eixo Oz, tendo em vista que a sua equação possui coeficiente negativo correspondente a variável z.

Dessa forma, os alunos constataram a relação que existe entre as equações estabelecidas e a superfície obtida, ou seja, o hiperbolóide será gerado em torno do eixo coordenado correspondente à variável com coeficiente negativo.

A quinta e última atividade apresentada na oficina, propôs aos alunos a identificação de algumas quádricas a partir de suas equações, as quais são apresentadas a seguir, e que encontrassem os seus traços e esboçasse-os em folhas ou no caderno. Em seguida, foram propostas suas construções nos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf.

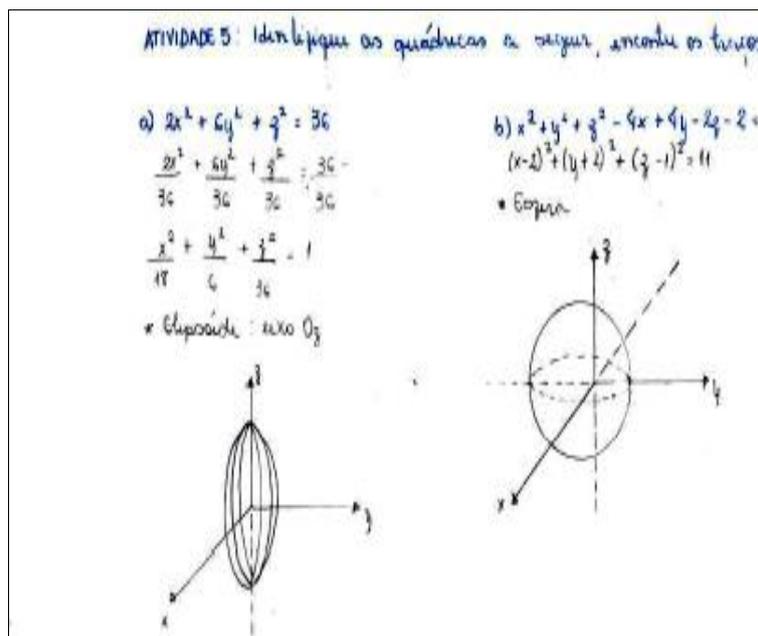
- a)  $2x^2 + 6y^2 + z^2 = 36$
- b)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 2 = 0$
- c)  $y^2 = 6z$
- d)  $9x^2 - 18x + 9y^2 + 4z^2 + 16z - 11 = 0$
- e)  $x^2 - 4y^2 + 6z^2 = 12$
- f)  $x^2 + z^2 - 4y = 0$
- g)  $7x^2 - y^2 = z$

$$h) x^2 + y^2 = z$$

A seguir, serão apresentadas as resoluções obtidas por alguns alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, envolvidos no estudo. Nelas serão enfatizadas as principais características das superfícies quádricas evidenciadas. O aluno realizou todas as identificações das quádricas e fez os seus esboços a partir dos traços encontrados.

As soluções obtidas pelo aluno A do item *a* e *b* podem ser averiguadas na figura 26. De acordo com essa figura, o aluno A conseguiu identificar e encontrar os traços das superfícies quádricas a partir de suas equações. No item *a* tem-se um elipsóide e no *b*, um caso particular de superfície quádrica, uma esfera. É possível perceber que o aluno levou em consideração os traços sobre os planos coordenados e a questão da simetria entre a superfície e todos os eixos, planos e origem.

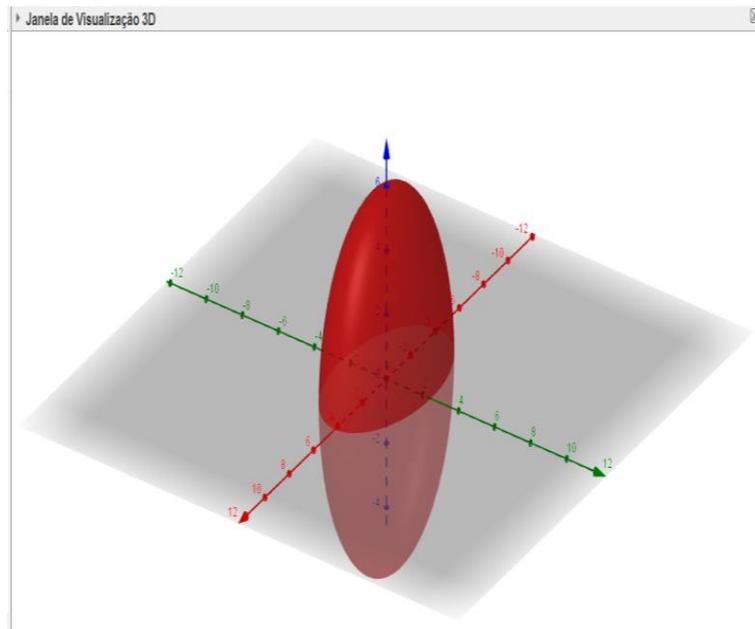
**Figura 26 - Identificação e esboço das superfícies quádricas dos itens *a* e *b***



Fonte: Dados da pesquisa (2017)

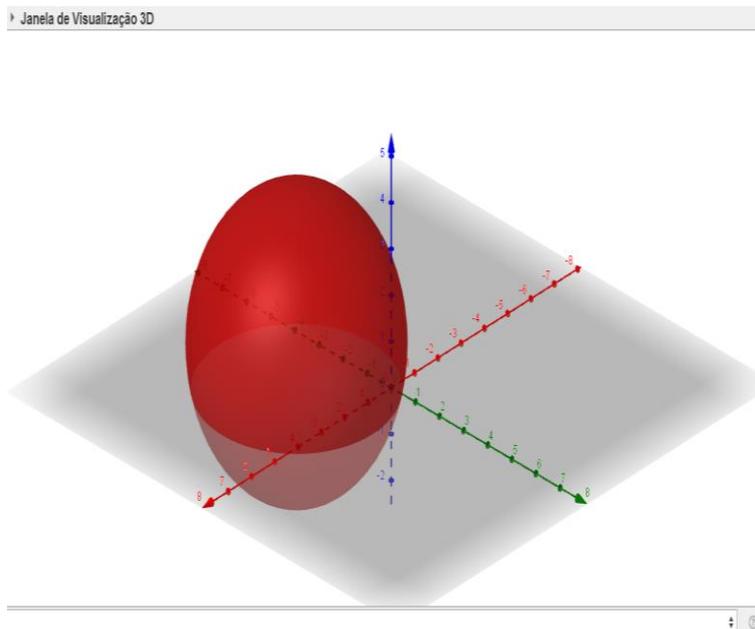
Na figura 27 e 28, podem ser observadas as representações gráficas do elipsóide e da esfera no software Geogebra.

**Figura 27 - Representação gráfica do elipsóide no software Geogebra**



**Fonte:** Software Geogebra

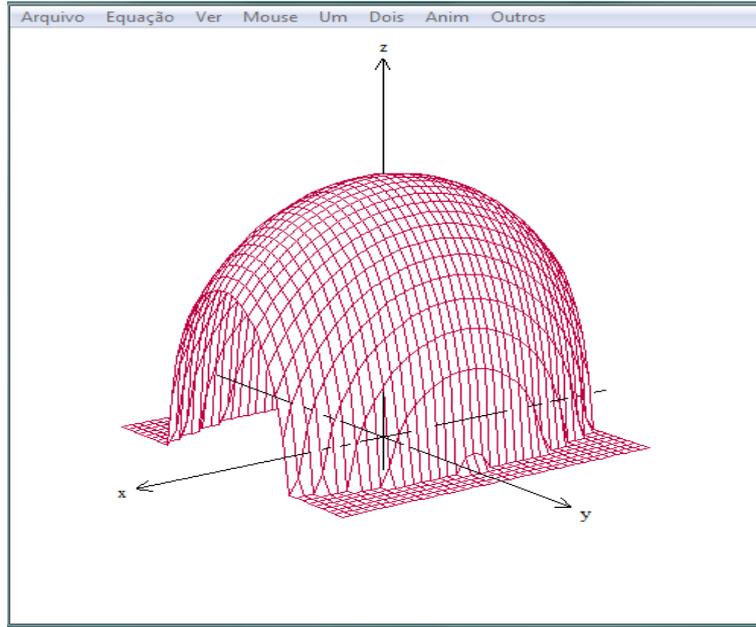
**Figura 28 - Representação gráfica da esfera no software Geogebra**



**Fonte:** Software Geogebra

Os alunos representaram graficamente o elipsóide nos três softwares, mas obtiveram maior desempenho no Geogebra e no K3DSurf. Já no software Winplot essa superfície quádrica não toma totalmente a forma de um elipsóide, o que pode ser verificado na figura 29.

**Figura 29 - Representação gráfica do Elipsóide no software Winplot**

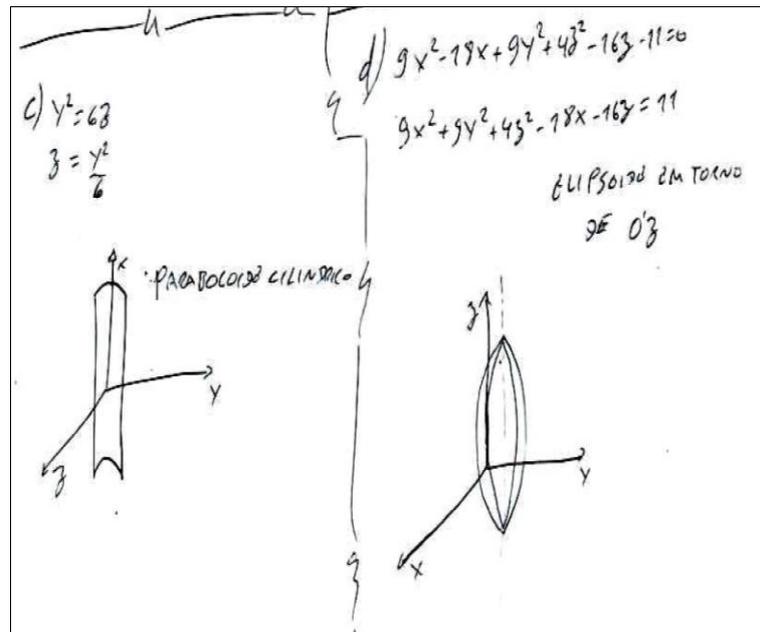


**Fonte:** Software Winplot

É possível observar que o elipsóide de equação  $2x^2 + 6y^2 + z^2 = 36$  não é gerado perfeitamente no software Winplot, há uma interrupção da continuidade entre a superfície sobre o eixo Ox.

A figura 30 apresenta as soluções obtidas pelo aluno B dos itens *c* e *d*.

**Figura 30 - Identificação e esboço das superfícies quádricas dos itens c e d**

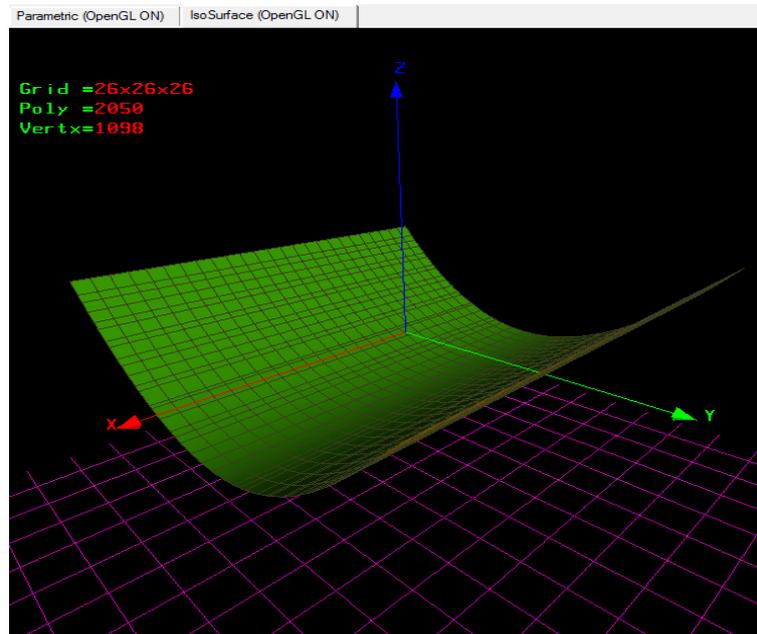


**Fonte:** Dados da pesquisa (2017)

Nessa figura é notório que o aluno reconheceu o cilindro parabólico (quádrlica cilíndrica) gerado em torno do eixo  $Ox$ , e o elipsóide gerado em torno do eixo  $Oz$ . No item  $d$ , é perceptível que foi levado em consideração os traços sobre os planos coordenados da superfície (elipses). A maioria dos alunos não conseguiu fazer essa identificação e não souberam fazer o esboço da superfície, pois não encontraram os traços sobre os planos.

Assim, as representações gráficas do cilindro parabólico e do elipsóide nos softwares K3DSurf e Geogebra, podem ser verificadas nas figuras 31 e 32.

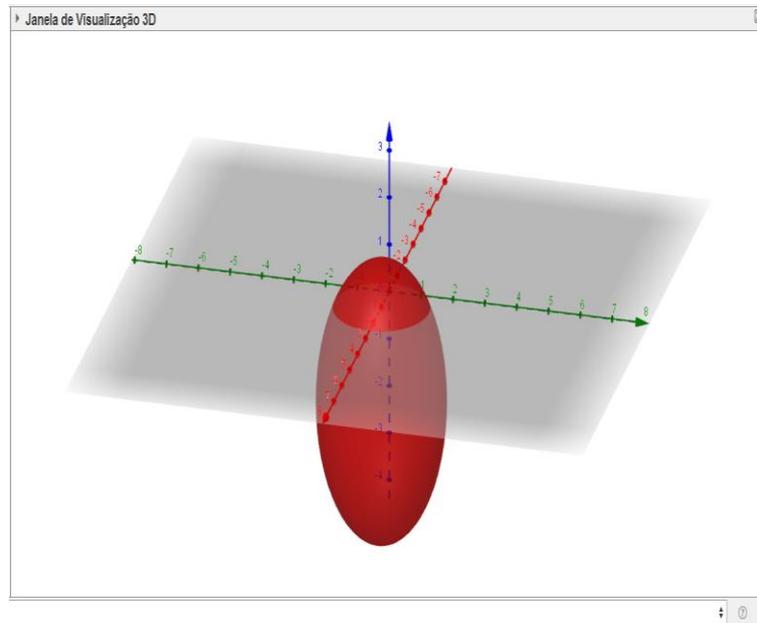
**Figura 31 - Representação gráfica do cilindro parabólico no software K3DSurf**



**Fonte:** Software K3DSurf

Os alunos não apresentaram dificuldades para representarem graficamente o cilindro parabólico nos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf, tendo em vista que não são necessárias grandes transformações em sua equação. Já o elipsóide teve sua representação gráfica realizada apenas no Geogebra, pois no Winplot era preciso transformar a equação estabelecida em explícita ou paramétrica e nenhum dos alunos conseguiu realizar essa modificação. E no K3DSurf, ao ser inserida a equação e selecionada a opção Compute, abria-se uma janela informando um erro de sintaxe, e dessa forma, a superfície não era gerada.

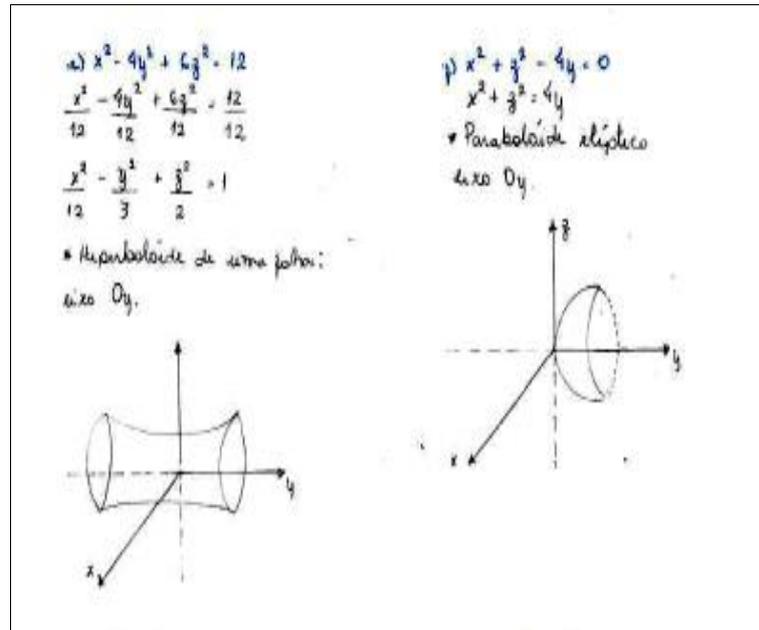
Na figura a seguir, pode ser observada a representação gráfica do elipsóide no software Geogebra.

**Figura 32 - Representação gráfica do elipsóide no software Geogebra**

**Fonte:** Software Geogebra

Nos itens *e* e *f*, os alunos fizeram o reconhecimento das quádricas e a maioria deles esboçou os gráficos. Apresentaram um bom desempenho quanto às principais características das superfícies. Em relação ao hiperbolóide de uma folha (item *e*), procuraram manter a simetria entre os eixos, planos e origem, e quanto ao parabolóide elíptico (item *f*), a interseção da superfície com os eixos coordenados que é  $O(000)$ , o que pode ser verificado na figura a seguir, que mostra a solução encontrada pelo aluno C.

**Figura 33 - Identificação e esboço das superfícies quádricas dos itens e e f**

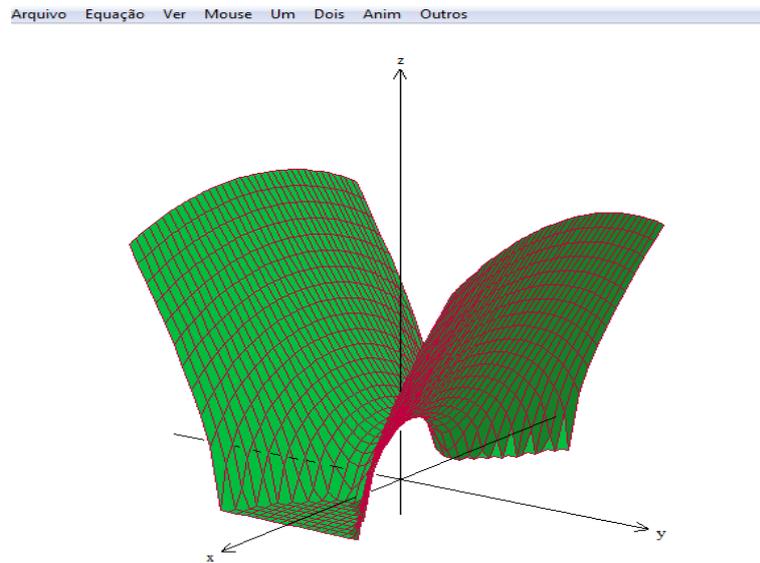


**Fonte:** Dados da pesquisa (2017)

Os alunos não apresentaram dificuldades para representarem graficamente essas duas superfícies no software Geogebra. As representações que demonstraram mais complexidade foram nos programas Winplot e K3DSurf. No Winplot, porque era preciso transformar as equações em explícitas e no K3DSurf, porque tiveram dificuldade na escrita das equações.

Na figura 34, pode ser verificada a representação gráfica do hiperbolóide de uma folha (item e) no software Winplot. Através dessa superfície gerada no Winplot, os alunos constataram conceitos que antes já haviam estudado. Além de terem se certificado de que a superfície é simétrica quanto aos eixos e planos coordenados e a origem. Comprovaram que ela é gerada ao decorrer do eixo coordenado que corresponde a variável que possui coeficiente negativo na equação estabelecida.

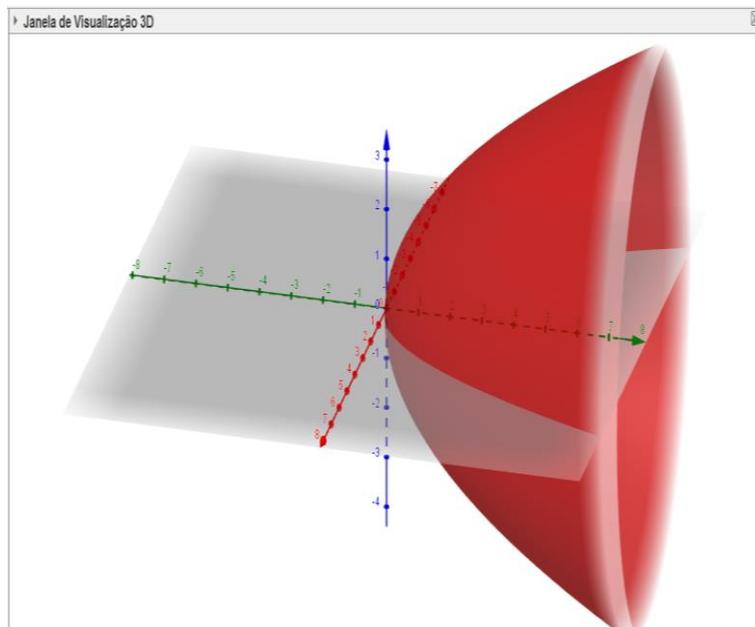
**Figura 34 - Representação gráfica do hiperbolóide de uma folha no software Winplot**



**Fonte:** Software Winplot

A figura 35 apresenta o gráfico do parabolóide elíptico (item f) obtido no software Geogebra.

**Figura 35 - Representação gráfica do parabolóide elíptico no software Geogebra**

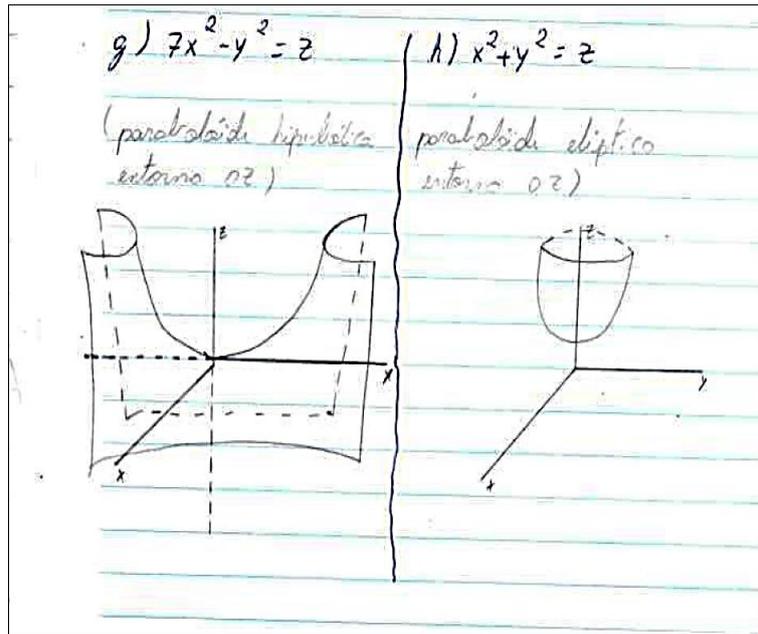


**Fonte:** Software Geogebra

Com a representação dessa superfície quádrlica no Geogebra, os alunos comprovaram que quando se refere a um parabolóide elíptico, a superfície é concebida ao longo do eixo que corresponde a variável de primeiro grau na forma padrão da equação. No caso dessa superfície quádrlica, a variável de primeiro grau é o  $y$ .

Na figura 36 serão apresentadas as soluções obtidas pelo aluno D nos itens  $g$  e  $h$ .

**Figura 36 - Identificação e esboço das superfícies quádrlicas dos itens  $g$  e  $h$**

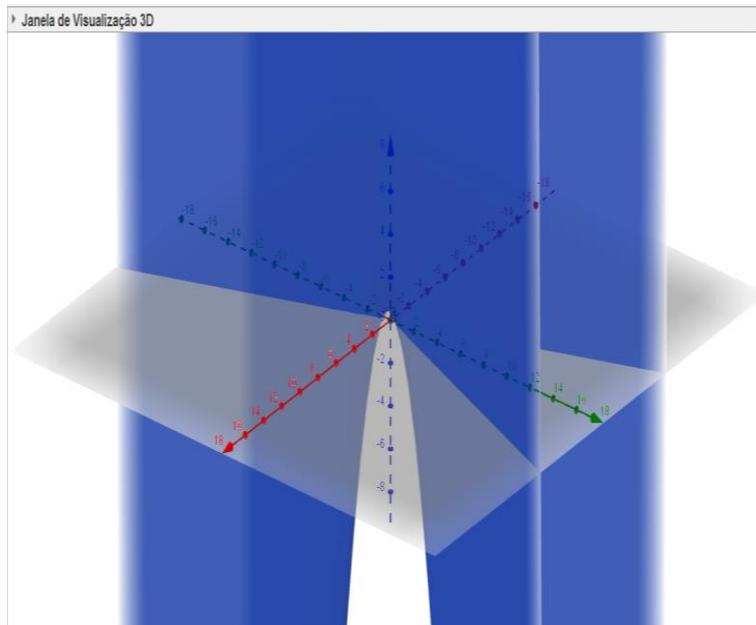


**Fonte:** Dados da pesquisa (2017)

No item  $g$ , os alunos identificaram o parabolóide hiperbólico, também conhecido por sela, gerado em torno do eixo  $Oz$ , analisando a simetria em relação ao eixo  $Oz$  e aos planos coordenados  $xz$  e  $yz$ . Já no item  $h$ , fizeram a identificação do parabolóide elíptico e ressaltaram a questão da simetria quanto ao eixo  $Oz$  e os planos  $xz$  e  $yz$ , mas alguns alunos desprezaram a interseção da superfície com os eixos coordenados que é  $O(0000)$ .

Os alunos demonstraram dificuldades em gerar os gráficos das superfícies dos itens  $g$  e  $h$  nos softwares Winplot e K3dsurf, apresentando um maior desempenho com a utilização do software Geogebra. Assim, podem ser observadas a seguir, as representações gráficas das superfícies dos itens  $g$  e  $h$  no software Geogebra.

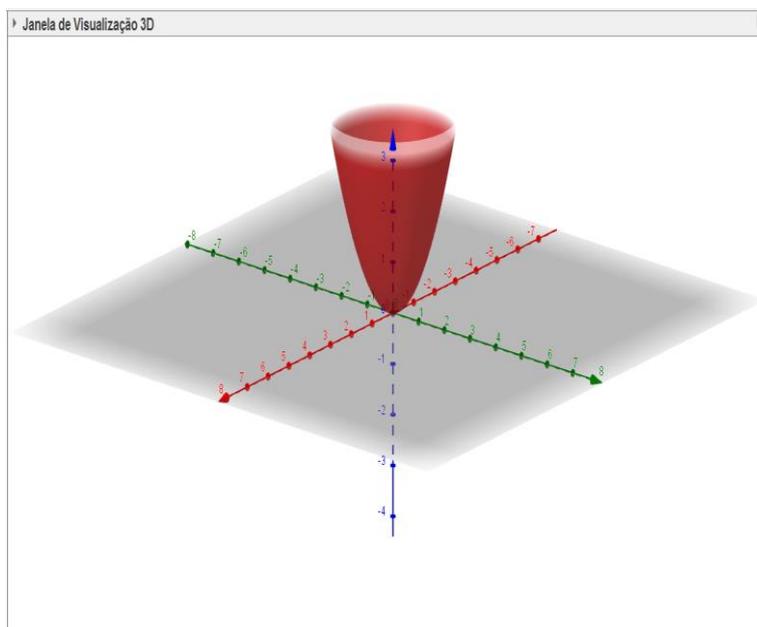
**Figura 37 - Representação gráfica do parabolóide hiperbólico (sela) no software Geogebra**



**Fonte:** Software Geogebra

Ao representarem graficamente o parabolóide hiperbólico (item g) no software Geogebra, os alunos comprovaram que a interseção da superfície com os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$  é  $O(000)$  e que a superfície se encontra em torno do eixo que corresponde na equação à variável do primeiro grau na forma padrão.

A partir da representação gráfica do parabolóide elíptico (item h) de equação  $x^2 + y^2 = z$ , no software Geogebra, apresentada na figura 38, os alunos evidenciaram o fato de que quando  $c > 0$ , o parabolóide elíptico é gerado inteiramente acima do plano  $xy$ , tendo em vista que  $z > 0$ .

**Figura 38 - Representação gráfica do parabolóide elíptico no software Geogebra**

**Fonte:** Software Geogebra

Assim sendo, foi constatado que os softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf, proporcionaram aos alunos o estudo das características e propriedades das superfícies quádricas, por meio do qual investigaram e evidenciaram conceitos que já haviam estudado com o auxílio de recursos tradicionais de ensino, conceberam novos conhecimentos, além de terem aprimorado a visualização gráfica dos objetos tridimensionais estudados.

#### 4.2 Análise e Discussão dos Dados do Questionário

Foi aplicado um questionário para os alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, logo após a realização da oficina pedagógica. O questionário apresentou 20 questões fechadas acerca do estudo das superfícies quádricas por meio da utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf e das concepções dos alunos a respeito das contribuições dos softwares para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos.

A análise dos dados obtidos através do questionário é apresentada por meio de tabelas, sendo elas referentes ao ambiente informatizado de ensino e à utilização de softwares computacionais, desempenho dos softwares Geogebra, Winplot e K3Dsurf no estudo das quádricas, metodologia que apresenta usabilidade, desenvolvimento da visualização e compreensão de conceitos, avaliação dos softwares para o estudo de quádricas, recurso facilitador que contribui para

a aprendizagem e o estudo das quádricas a partir da utilização dos softwares. O percentual apresentado em todas as tabelas é referente aos 20 alunos envolvidos na pesquisa.

A tabela a seguir apresenta as respostas dos alunos em relação aos três primeiros questionamentos presentes no questionário. Dos 20 alunos, todos afirmaram que o ambiente informatizado de ensino torna as aulas mais atrativas. Os alunos conheciam pelo menos um dos softwares utilizados no estudo, sendo apenas o Geogebra conhecido por todos. No terceiro questionamento, 100% dos alunos afirmaram que os conteúdos matemáticos tornam-se mais compreensíveis quando mediados com o auxílio de softwares computacionais.

Dessa forma, ressalta-se que a utilização de ambientes informatizados representa um grande suporte para as aulas de Matemática, podendo favorecer a aprendizagem.

**Tabela 2 - Questionamentos acerca da informatização e de softwares computacionais**

Questionamentos	Sim	Não	Total	%
O ambiente informatizado de ensino torna as aulas mais atrativas?	20	0	20	100%
Conhecia algum dos softwares computacionais que foram utilizados no estudo das quádricas?	20	0	20	100%
Os conteúdos matemáticos tornam-se mais compreensíveis quando mediados com o auxílio de softwares computacionais?	20	0	20	100%

**Fonte:** Estudo de Caso, 2017.

A tabela 3 expõe questionamentos a respeito de qual software utilizado no estudo apresenta maior facilidade ou dificuldade e maior desempenho diante do estudo proposto.

É possível observar na tabela que 17 alunos indicaram o Geogebra como o software que apresenta maior facilidade para o estudo das quádricas, indicando 85% do total de alunos envolvidos na pesquisa, 10% apontaram o Winplot e apenas 5% alegaram que o K3DSurf apresenta maior facilidade para o estudo proposto.

Verifica-se também que o Winplot foi apontado como o software que apresentou maior dificuldade para o estudo das quádricas, representando um percentual de 55%. Em segunda posição, encontra-se o K3Dsurf, representando 45% e por último o Geogebra, caracterizando 0% da amostra da pesquisa. A tabela ainda mostra que 95% dos alunos afirmaram que o software Geogebra apresenta maior desempenho diante do estudo proposto na oficina pedagógica, apenas 5% indicam que é o software Winplot e 0% o K3Dsurf.

Assim, pode-se afirmar que a maioria dos alunos indica o Geogebra como o software que apresenta maior facilidade e desempenho para o estudo das quádricas.

**Tabela 03 - Questionamentos sobre a utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf no estudo de quádricas**

Questionamentos	Geogebra	%	Winplot	%	K3DSurf	%	Total %
Qual (is) software apresenta maior facilidade para o estudo das quádricas?	17	85%	2	10%	1	5%	100%
Qual (is) software apresenta maior dificuldade para o estudo das quádricas?	0	0%	11	55%	9	45%	100%
Qual (is) software apresenta maior desempenho diante do estudo proposto?	19	95%	1	5%	0	0%	100%

**Fonte:** Estudo de Caso, 2017.

A tabela a seguir apresenta alguns questionamentos acerca dos benefícios que os softwares Geogebra, Winplot e K3Dsurf podem proporcionar para o estudo das superfícies quádricas.

Dessa forma, constatou-se na tabela 4 que 100% dos alunos, afirmaram que a utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf despertaram interesse e motivação para o estudo proposto na oficina; 90% que os três softwares apresentaram usabilidade e eficiência para o estudo das figuras tridimensionais; 95% que os softwares proporcionam o desenvolvimento da visualização e compreensão das propriedades de cada uma das figuras estudadas; 90% alegaram que a utilização dos softwares pode ser considerada uma metodologia de fácil compreensão para o estudo de quádricas e 90% indicaram que a partir da utilização dos três softwares, investigaram conceitos e comprovaram teorias estudadas anteriormente.

De modo geral, os softwares Geogebra, Winplot e K3Dsurf proporcionam benefícios para a aprendizagem das superfícies quádricas, tendo em vista que a maioria dos alunos afirmou que a partir do estudo proposto, aprimoraram e investigaram os conhecimentos e conjecturas que já possuíam acerca do conteúdo, além de terem construído novos saberes por meio da utilização dos softwares.

**Tabela 04 - Benefícios dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf para o estudo de quádricas**

Os softwares utilizados	Sim	%	Não	%	Total %
Despertam interesse e motivação	20	100%	0	0%	100%
Apresentam usabilidade e eficiência	18	90%	2	10%	100%
Proporcionam o desenvolvimento da visualização e compreensão das propriedades das quádricas	19	95%	1	5%	100%
Metodologia de fácil compreensão	18	90%	2	10%	100%
Investigam e comprovam conceitos e teorias	18	90%	2	10%	100%

**Fonte:** Estudo de Caso, 2017.

Na tabela 5 é apresentada uma avaliação dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf para o estudo de quádricas, presente no questionário. Do total de alunos, 60% avaliaram o software Geogebra como bom e 40% como excelente. Quanto ao software Winplot, 35% dos alunos o avaliaram como regular; 50% como bom e 15% como excelente. Em relação ao software K3DSurf, 30% o avaliaram como regular; 60% como bom e 10% como excelente.

Dessa forma, pode-se afirmar que o Geogebra foi visto pelos alunos como o software que apresentou maior desempenho diante das atividades propostas, mas os softwares Winplot e K3DSurf também foram avaliados de forma bem positiva.

**Tabela 05 - Avaliação dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf**

Softwares	Ruim	%	Regular	%	Bom	%	Excelente	%	Total %
Geogebra	0	0%	0	0%	12	60%	8	40%	100%
Winplot	0	0%	7	35%	10	50%	3	15%	100%
K3DSurf	0	0%	6	30%	12	60%	2	10%	100%

**Fonte:** Estudo de Caso, 2017.

A tabela 6 expõe as percepções dos alunos sobre a utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf como recurso para a aprendizagem matemática.

Como foi verificado na tabela, todos os alunos afirmaram que os softwares são um recurso facilitador para a aprendizagem de quádricas e que contribuem efetivamente para a aprendizagem desse conteúdo matemático. Indicaram ainda que os softwares podem contribuir para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos e que oferecem benefícios se comparados ao trabalho no papel e no quadro. E por último, afirmaram que o suporte dos softwares computacionais

pode contribuir e facilitar a aprendizagem em algumas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática.

Assim, a utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf como recurso para a aprendizagem matemática recebeu plena aceitação pelos alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III.

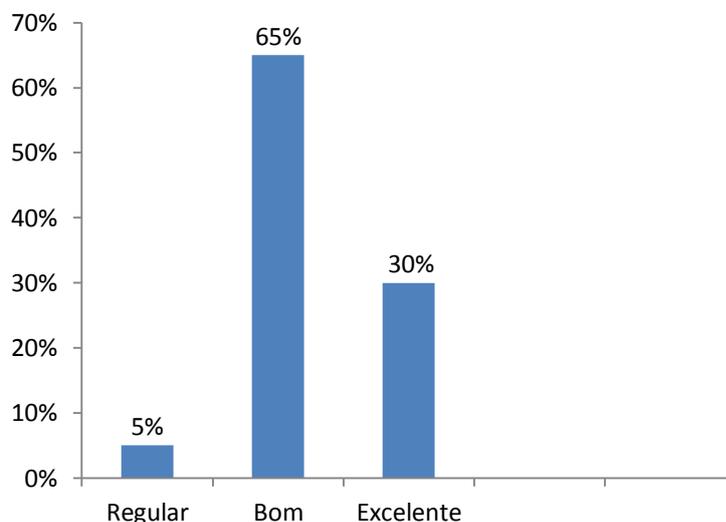
**Tabela 06 - Os softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf como recurso para a aprendizagem matemática**

Os softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf	Sim	Não	Total	%
É um recurso facilitador para a aprendizagem de quádricas	20	0	20	100%
Contribuem efetivamente para a aprendizagem de quádricas	20	0	20	100%
Podem contribuir para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos	20	0	20	100%
Oferecem benefícios se comparados ao trabalho no papel e no quadro	20	0	20	100%
Podem contribuir e facilitar a aprendizagem em algumas disciplinas do curso	20	0	20	100%

**Fonte:** Estudo de Caso, 2017.

O gráfico a seguir, indica a opinião dos alunos acerca do estudo das superfícies quádricas a partir da utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf.

**Gráfico - Estudo das superfícies quádricas a partir da utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf**



Fonte: Estudo de Caso, 2017.

De toda amostra da pesquisa, apenas 5% dos alunos indicaram que o estudo proposto foi regular; 65% afirmaram ter sido bom e 30% afirmaram que o estudo realizado foi excelente, o que permite a constatação de que quase todos os alunos da amostra, com exceção de um, caracterizaram positivamente o estudo desenvolvido sobre as quádricas.

Assim sendo, constatou-se que a oficina pedagógica desenvolvida com os alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, trouxe resultados relevantes para o estudo das superfícies quádricas, tendo em vista que todos os alunos participaram ativamente do estudo proposto e demonstraram grande entusiasmo e desenvolvimento diante das atividades.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve por objetivo apresentar um estudo que viesse a contribuir e facilitar a aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica e o desenvolvimento da visualização geométrica de objetos tridimensionais, a partir da utilização dos softwares computacionais Geogebra, Winplot e K3DSurf.

Para atingir esse objetivo, foi realizada uma revisão da literatura sobre a utilização de recursos tecnológicos para o estudo de conteúdos de Matemática, por meio de pesquisas já desenvolvidas, e posteriormente, a aplicação de uma oficina pedagógica e um questionário, em uma turma do Curso de Licenciatura em Matemática. Esse estudo nos conduziu a responder a questão de nosso trabalho: A utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf é um recurso didático que pode facilitar e contribuir com o processo de ensino e aprendizagem das superfícies quádricas?

Após o desenvolvimento desse estudo, observou-se que os alunos mesmo estando em um Curso de Licenciatura em Matemática apresentam algumas dificuldades de aprendizagem em relação a conteúdos de Geometria Analítica, especificamente no que se refere à visualização e construção gráfica de superfícies. Entretanto, os dados obtidos através da aplicação da oficina permitem afirmar que os softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf se caracterizam como um instrumento que contribui de modo significativo para que essas dificuldades sejam elucidadas. Assim, foi possível responder a questão da pesquisa de forma positiva.

A partir dessa constatação e considerando que o estudo de superfícies quádricas desenvolvido apenas com recursos tradicionais de ensino, isto é, com auxílio do quadro e lápis, torna-se mais complexo por se tratar de objetos tridimensionais, fica evidenciada a necessidade da inserção desses softwares computacionais no estudo dessas superfícies.

Com relação ao estudo das superfícies quádricas a partir da utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf, foi verificado que de todos os alunos envolvidos na pesquisa, somente um concluiu que foi regular, treze o indicaram como bom e seis alunos afirmaram que foi excelente. Diante desses dados, fica evidente que os softwares aliados ao ensino das quádricas, favorecem a aprendizagem dos alunos.

Verificou-se ainda, que esses softwares facilitam, principalmente, a visualização gráfica das superfícies, além de permitir o estudo dos elementos e propriedades das quádricas, a partir de suas potenciais ferramentas de construção e animação.

Os estudantes da disciplina de Cálculo diferencial e Integral III apresentaram uma grande aceitação diante do estudo desenvolvido. Todos os alunos afirmaram que o suporte dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf, pode também contribuir e facilitar a aprendizagem de conteúdos matemáticos em outras disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática.

De modo geral, os softwares computacionais facilitaram a compreensão dos conceitos estudados e a visualização dos gráficos e características das superfícies estudadas, despertando nos discentes a curiosidade de interagir com as suas ferramentas e de aprender a construir objetos e soluções.

Vale ressaltar, que o professor deve ter a percepção de que nem sempre a utilização de recursos tecnológicos irá contribuir efetivamente com o ensino e aprendizagem de conceitos de Matemática. Acredita-se que os benefícios e vantagens desses tipos de instrumentos didáticos, decorrerão da forma que como serão utilizados, ou seja, para que esses recursos sejam inseridos em sala de aula e surtam efeitos positivos, é necessário que haja um estudo intenso e planejamento do material que será proposto.

Sugere-se para a produção de pesquisas futuras uma investigação aprofundada sobre o tema, com uma amostra maior de alunos. Que o estudo também seja expandido com o envolvimento de docentes do curso de Licenciatura em Matemática, para que dessa forma, possam ser averiguadas suas concepções acerca da utilização de softwares computacionais e de outras tecnologias para o ensino, nas disciplinas do curso.

## REFERÊNCIAS

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Superfícies**. In: Geometria Analítica – Um Tratamento Vetorial. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1987.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

**Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Básica, Brasília: MEC/SEB, 2006.

FIALHO, E. S. C. **Uma proposta de utilização do software Geogebra para o ensino de Geometria Analítica**. 2010. Dissertação (Mestrado), Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca. Disponível em: <dippg.cefet-rj.br/index.php?option=com\_docman&task=doc\_download&gid;...>. Acesso em: 02 fev. 2017.

FONSECA, R. C. **Uma abordagem geométrica para cálculo do volume das quádricas**. 2011. Dissertação (mestrado) – Educação matemática, Universidade Severino Sombra. Vassouras. Disponível em: <<http://www.uss.br/arquivos;jsessionid=878FE3484470177F9A43419B1A7EA8C0/posgraduacao/s-trictosensu/educacaoMatematica/dissertacoes/2011/dissertacaofinal-ramon.pdf> >. Acesso em: 09 abr. 2017.

FRESCKI, F. B. **Avaliação da Qualidade de Softwares Educacionais para o Ensino de Álgebra**. Trabalho de Conclusão de curso. Universidade UNIOESTE, Cascavel. 2008. Disponível em: <[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos\\_teses/MATEMATICA/Monografia\\_Fran.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Fran.pdf)>. Acesso em: 25 mar. 2017.

GHIGGI, I. M. F.; SCHMIDT, C. E.; KOCH, B. C. **Estudo das cônicas em um ambiente de Geometria Dinâmica**. 2013. IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática. ULBRA – Canoas, RS. Disponível em: <[www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/1150/400](http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/1150/400)>. Acesso em: 02 fev. 2017.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social** / Antonio Carlos Gil. - 6. ed. - São Paulo: Atlas, 2008.

GOUVEIA, C. A. A. **Tecnologias de Informação e Comunicação: da pesquisa à prática**. XIII Conferência Internacional de Educação Matemática - CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011. Disponível em: <[http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii\\_ciaem/xiii\\_ciaem/paper/viewFile/2047/989](http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2047/989)>. Acesso em: 29/03/2017.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. Acta do IV Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, Brasília, 1998. Campinas, 2003.

K3DSurf. Disponível em: <<http://k3dsurf.sourceforge.net/>>. Acesso em 28 de mar. de 2017.

NASCIMENTO, E. G. A. **Avaliação do uso do Software Geogebra no Ensino de Geometria: REFLEXÃO DA PRÁTICA NA ESCOLA.** 2012. Actos de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra. Uruguai. Disponível em: <<http://www.geogebra.org/2012/actas/67.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2017.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico.** 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

Projeto TIC – Aprendizagem de Matemática. Disponível em: <<http://www.es.iff.edu.br/softmat/projetotic/portaltic/apresentacao-secoes-deprisma/80-categoria-dos-artigos/148-winplot-softmat>>. Acesso em: 25 de mar. de 2017.

RAMPAZZO, L. **Metodologia científica: Para alunos dos cursos de graduação e pósgraduação.** 3. ed. São Paulo: Loyola, 2005.

RITTER, A. M. **A Visualização no ensino de Geometria espacial: Possibilidades com o software calques 3D.** 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/32385>>. Acesso em: 21 jan. 2017.

VALENTE, J. A.; ALMEIDA, F. J. Visão Analítica da Informática na Educação no Brasil: a questão da formação do professor. 1997. **Revista Brasileira de Informática Educativa [online]**, Florianópolis, n. 1, p. 1-28. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_nlinks&ref=000160&pid=S0101-7330201200040000600022&lng=en](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_nlinks&ref=000160&pid=S0101-7330201200040000600022&lng=en)>. Acesso em: 18 jan. 2017.

VALENTIM, E. S. **O software Winplot e a prática pedagógica do professor de matemática.** 2014. Monografia (Especialização em fundamentos da educação: práticas pedagógicas interdisciplinares). Universidade Estadual da Paraíba. Disponível em: <<http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/4460/1/PDF%20%20Erivan%20Sousa%20valentim.pdf>>. Acesso em: 20 de jan. de 2017.

VENTURI, J. J. **Quádricas: Resenha Histórica; Quádricas.** In: Cônicas e Quádricas. 5. ed. Curitiba, 2003.

# APÊNDICES



5) Qual (is) software apresenta maior dificuldade para o estudo das quádricas?

Software Geogebra       Software Winplot       Software K3DSurf

6) Qual (is) software apresentou maior desempenho diante do estudo proposto?

Software Geogebra       Software Winplot       Software K3DSurf

7) A utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf despertaram-lhe interesse e motivação para o estudo proposto na oficina?

Sim       Não

8) Os três softwares apresentam usabilidade e eficiência para o estudo das figuras tridimensionais?

Sim       Não

9) Os softwares usados proporcionaram o desenvolvimento da visualização e compreensão das propriedades de cada uma das figuras estudadas?

Sim       Não

10) A utilização dos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf pode ser considerada uma metodologia de fácil compreensão para o estudo de quádricas?

Sim       Não

11) Com a utilização desses três softwares você conseguiu investigar conceitos e comprovar teorias já antes estudadas?

Sim       Não

12) Como você avalia a utilização do software Geogebra para o estudo de quádricas?

Péssimo       Ruim       Regular       Bom       Excelente

13) Como você avalia a utilização do software Winplot para o estudo de quádricas?



## APÊNDICE B – OFICINA PEDAGÓGICA



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO  
CAMPUS IV – LITORAL NORTE – RIO TINTO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**Orientando (a): Danielle Apolinário da Silva**  
**Orientador (a): Claudilene Gomes da Costa**

**Oficina: A utilização de Softwares Geogebra, Winplot e K3Dsurf para o estudo das superfícies quádricas**

**Exemplo:** Representar geometricamente as quádricas dadas pelas equações a seguir utilizando os softwares Geogebra, Winplot e K3Dsurf:

- $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$
- $4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$
- $z^2 - 4x^2 - 4y^2 - 4 = 0$

**No software Geogebra:**

- Clique duas vezes no ícone do software;
- Clique em exibir e em seguida em janela de visualização 3D;
- No campo de entrada, insira a equação correspondente a cada quádrica;

$$36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$$

$$36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$$

- No teclado do seu computador, der um Enter e logo o objeto tridimensional será exibido.

**No software Winplot:**

- Clique duas vezes no ícone do software;
- Clique na ferramenta janela e em seguida em 3-dim, ou se preferir der um F3;

- Ao abrir a janela de 3 dimensões, clique em equação e em seguida em Explícita;
- Digite a equação no campo indicado

$$36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$$

$$z = \sqrt{(-36x^2 - 16y^2 + 144)/9}$$

- Em seguida clique em ok e a quádrlica será exibida.

#### No software K3DSurf:

- Clique duas vezes no ícone do software;
- No campo de entrada Cartesian Coordinates insira a equação correspondente a quádrlica;

$$36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$$

$$36*x^2+16*y^2+9*z^2-144$$

- Em seguida clique na ferramenta compute e a quádrlica será exibida.

### Atividades propostas com os softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf:

#### Atividade 1:

- Identifique a quádrlica de equação  $x^2/4 + y^2/5 + z^2/2 = 16$  e represente-a geometricamente utilizando os softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf.
- Represente a quádrlica de equação  $x^2/4 + y^2/5 + z^2/15 = 16$ , utilizando a mesma variação para x e y da equação anterior, o que ocorre com a superfície?

**Atividade 2:** Represente nos softwares os gráficos do hiperbolóide de uma folha dado pela equação  $4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$  e do hiperbolóide de duas folhas dado pela equação  $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$ . Observe a relação entre as equações e as quádrlicas geradas, quanto à classificação.

**Atividade 3:** Represente os gráficos dos parabolóides dados pelas equações a seguir e observe a relação de suas equações com os gráficos gerados, quanto a classificação:

a)  $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} - z = 0$

b)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z = 0$

$$c) \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{6} = z$$

**Atividade 4:** Represente graficamente os hiperbolóides de uma folha e analise as características existentes entre eles:

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

**Atividade 5:** Identifique as quádricas a seguir, encontre os traços e represente-as graficamente nos softwares Geogebra, Winplot e K3DSurf.

$$a) 2x^2 + 6y^2 + z^2 = 36$$

$$b) x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 2 = 0$$

$$c) y^2 = 6z$$

$$d) 9x^2 - 18x + 9y^2 + 4z^2 + 16z - 11 = 0$$

$$e) x^2 - 4y^2 + 6z^2 = 12$$

$$f) x^2 + z^2 - 4y = 0$$

$$g) 7x^2 - y^2 = z$$

$$h) x^2 + y^2 = z$$