



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT



Poliedros de Platão e de Arquimedes: Um estudo sobre poliedros clássicos e uma proposta de ensino desses objetos.

por

Rammon Rodrigues da Nóbrega

João Pessoa, 27 de agosto de 2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT



Poliedros de Platão e de Arquimedes: Um estudo sobre poliedros clássicos e uma proposta de ensino desses objetos. †

por

Rammon Rodrigues da Nóbrega

sob a orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

João Pessoa, 27 de agosto de 2024

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N754p Nóbrega, Rammon Rodrigues da.

Poliedros de Platão e de Arquimedes : um estudo sobre poliedros clássicos e uma proposta de ensino desses objetos. / Rammon Rodrigues da Nóbrega. - João Pessoa, 2024.

164 f. : il.

Orientação: Carlos Bocker Neto.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Poliedros de Platão. 2. Característica de Euler.
3. Poliedros de Arquimedes. 4. Áreas e volumes. I.
Bocker Neto, Carlos. II. Título.

UFPB/BC

CDU 514.113.5(043)

Poliedros de Platão e de Arquimedes: Um estudo sobre poliedros clássicos e uma proposta de ensino desses objetos.

por

Rammon Rodrigues da Nóbrega

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada por:

Carlos Bocker Neto

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto - UFPB (Orientador)

Adriano Alves de Medeiros

Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros - UFPB

Yane Lísley Ramos Araújo

Prof^a. Dr(a). Yane Lísley Ramos Araújo - UFRPE

João Pessoa, 28 de maio de 2024

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades.

A toda minha família, a minha querida, dedicada e companheira esposa Vanessa Carreiro Paulino, de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades e minha filha, Maria Júlia Carreiro da Nóbrega por participar deste trabalho e por me manter sempre feliz com sua vitalidade e carinho.

A minha mãe, Maria José Rodrigues da Nóbrega e meus irmãos, Julyanna Rodrigues da Nóbrega, Anna Clara Rodrigues da Nóbrega e Rennan Rodrigues da Nóbrega, pela formação humana, caráter e valores que levarei por toda a minha vida.

Ao meu orientador Carlos Bocker, pela paciência, aulas, indicações e pronto atendimento ao trabalho de orientação e pelo compromisso contínuo durante todo o programa de mestrado.

Agradeço aos professores, pelas aulas ministradas e dedicação neste projeto de mestrado.

Agradeço a todos os colegas do PROFMAT que contribuíram a distância e presencialmente nas disciplinas do mestrado e em todas as ajudas na conclusão do projeto de dissertação.

Agradeço a todos os responsáveis pela criação deste programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional, em especial aos professores idealizadores Elon Lages Lima (em memória), Eduardo Wagner e Paulo César Pinto Carvalho.

Dedicatória

A todos os que se dedicam a tornar o mundo um lugar bom de se viver

Resumo

Este trabalho tem por objetivo fazer um estudo dos poliedros, com ênfase nos poliedros de Platão e Arquimedes, tratando das relações métricas e relações entre seus elementos. Inicialmente definimos de maneira precisa o que é um poliedro, a área e o volume de um poliedro e apresentamos os prismas e as pirâmides como principais exemplos desses objetos vistos no ensino básico. Além disso, tratamos sobre a característica de Euler de um poliedro e apresentamos a prova de que $V - A + F = 2$ para poliedros convexos. Em seguida, apresentamos os poliedros de Platão (ou poliedros regulares), provando que existem apenas cinco poliedros de Platão e, complementarmente, discorremos acerca dos elementos e das relações métricas desses poliedros: número de vértices, arestas e faces; a área total e o volume de cada um dos poliedros com relação aos raios das esferas circunscritas. Descrevemos, na sequência, os poliedros de Arquimedes e damos uma prova da existência de treze e, somente treze, poliedros dessa classe. Também fazemos um estudo sobre seus elementos, suas áreas e seus volumes. Por fim, visando destacar a contribuição deste trabalho ao ensino básico, relatamos o que a BNCC e os PCNs trazem a respeito do tema e abordamos algumas questões de vestibulares envolvendo os temas presentes nessa dissertação, apresentamos uma forma de criar ferramentas no GEOGEBRA para fazer o truncamento tipo 1 e tipo 2 e apresentamos um recurso educacional, onde utilizamos jogos, puzzle e material concreto para os estudos dos poliedros de Platão e Arquimedes.

Palavras-chaves: Poliedros de Platão; Característica de Euler; Poliedros de Arquimedes; área e volumes.

Abstract

This work aims to study polyhedra, with emphasis on the polyhedra of Plato and Archimedes, dealing with metric relationships and relationships between their elements. Initially, we precisely define what a polyhedron is, the area and volume of a polyhedron and present prisms and pyramids as the main examples of these objects seen in basic education. Furthermore, we deal with the Euler characteristic of a polyhedron and present the proof that $V - A + F = 2$ for convex polyhedra. Next, we present Plato's polyhedra (or regular polyhedra), proving that there are only five Plato's polyhedra and, in addition, we discuss the elements and metric relationships of these polyhedra: number of vertices, edges and faces; the total area and volume of each of the polyhedra with respect to the radii of the circumscribed spheres. We then describe Archimedes' polyhedra and provide proof of the existence of thirteen, and only thirteen, polyhedra of this class. We also carry out a study of its elements, areas and volumes. Finally, aiming to highlight the contribution of this work to basic education, we report what the BNCC and the PCNs bring regarding the topic and we bring some entrance exam questions involving the topics covered in this dissertation, we present a way of creating tools in GEOGEBRA to do the truncation type 1 and type 2 and we present an educational resource, where we use games, puzzles and concrete material to study the polyhedra of Plato and Archimedes.

Key-words: Plato's polyhedra; Euler characteristic; Archimedes' polyhedra; area and volumes.

Sumário

Sumário	viii
Lista de Figuras	x
1 Poliedros	5
1.1 Poliedros: definição, exemplos, contraexemplos e classificação	5
1.2 Área e volume de um poliedro	8
1.2.1 Área de um poliedro	8
1.2.2 Volume de um poliedro	8
1.3 Prismas e pirâmides: definições, áreas e volumes	10
1.3.1 Prisma	10
1.3.2 Pirâmide	12
1.4 A característica de Euler de um poliedro	16
2 Poliedros de Platão	23
2.1 Definição e características dos poliedros de Platão	23
2.2 Contando faces, vértices e arestas	24
2.3 Teorema da existência de apenas cinco poliedros regulares	26
2.4 Poliedros regulares: um tratamento métrico	28
2.4.1 Tetraedro	31
2.4.2 Hexaedro (Cubo)	32
2.4.3 Octaedro	33
2.4.4 Dodecaedro	35
2.4.5 Icosaedro	37
2.5 Poliedros duais	41
3 Poliedros de Arquimedes e suas métricas	43
3.1 Poliedros semirregulares	43
3.1.1 Truncamento e Snubificação	44
3.2 Os poliedros de Arquimedes	47
3.2.1 Poliedros arquimedianos: $m = 3$	49
3.2.2 Poliedros arquimedianos: $m = 4$	58

3.2.3	Poliedros arquimedianos: $m = 5$	64
3.3	Relações métricas nos poliedros de Arquimedes	67
3.3.1	Tetraedro Truncado	68
3.3.2	Octaedro Truncado	71
3.3.3	Icosaedro Truncado	75
3.3.4	Cubo Truncado	79
3.3.5	Cuboctaedro Truncado	82
3.3.6	Cuboctaedro	88
3.3.7	Rombicuboctaedro	90
4	BNCC, PCN's e Geometria	94
4.1	BNCC: Base Nacional Comum Curricular	94
4.2	PCN's: Parâmetros Curriculares Nacionais	96
4.3	Geometria e educação nos anos iniciais, finais e ensino médio	100
4.3.1	Poliedros em Olimpíadas de Matemática	104
5	Geogebra	106
5.1	Um novo ícone como ferramenta	107
5.1.1	Truncamento tipo 1	108
5.1.2	Truncamento tipo 2	113
5.1.3	Geogebra online	118
6	Recurso Educacional	119
6.1	Título	119
6.2	Público alvo	119
6.3	Assunto	119
6.4	Objetivos	119
6.5	Ponto de partida	120
6.6	Procedimento didático metodológico	120
6.7	Primeira atividade	120
6.7.1	Primeira aula	120
6.7.2	Segunda aula	121
6.8	Segunda atividade	126
6.9	Terceira atividade	129
6.10	Quarta atividade	132
7	Conclusões	135
	Referências Bibliográficas	152

Lista de Figuras

1	Euclides de Alexandria	2
1.1	Exemplos de Poliedros	6
1.2	Exemplo de sólido que não é poliedro.	6
1.3	Exemplo de sólido que não é poliedro.	7
1.4	Exemplo de poliedro não convexo	7
1.5	Exemplo de planificação do cubo	8
1.6	Bloco retangular	9
1.7	Princípio de Cavalieri	10
1.8	Elementos de um prisma.	11
1.9	Volume do prisma.	12
1.10	Pirâmide de base $A_1A_2 \cdots A_n$	13
1.11	Pirâmides com volumes iguais.	14
1.12	Decomposição de um prisma em três pirâmides de volumes iguais.	15
1.13	Decomposição de uma pirâmide em pirâmides de base triangular.	15
1.14	Prisma de base triangular	17
1.15	Soma dos ângulos internos de um pentágono	18
1.16	Cubo “pendurado pelo vértice A” (Projeção ortogonal dos pontos do cubo no plano H)	19
1.17	Cubo “pendurado pelo vértice A' - contorno aparente	20
1.18	Cubo - Região P_1 (sombra das faces iluminadas unido com contorno)	21
1.19	Analizando a soma dos ângulos de uma possível região P_1	21
2.1	Poliedros regulares	24
2.2	Poliedros e suas planificações	28
2.3	Superfície esférica	29
2.4	Determinação da superfície esférica	29
2.5	Teorema de Commandino	30
2.6	Tetraedro inscrito	31
2.7	Hexaedro inscrito	32
2.8	Octaedro inscrito	34
2.9	Dodecaedro inscrito	35

2.10	Icosaedro inscrito	37
2.11	Poliedros regulares inscritos em uma esfera de raio R	40
2.12	Poliedros duais	41
3.1	Exemplos de prismas uniformes.	44
3.2	Exemplos de antiprismas uniformes.	44
3.3	Truncamento tipo 1	45
3.4	Truncamento tipo 2	45
3.5	Truncamento do cubo tipo 1	46
3.6	Cubo snub	46
3.7	Rombicuboctaedro	47
3.8	Selo grego com Arquimedes e seu trabalho sobre volume de sólidos irregulares, 1983	48
3.9	Arranjo da forma (A_X, A_X, A_Y)	50
3.10	Arranjo da forma (A_6, A_6, A_Y)	51
3.11	Tetraedro truncado	52
3.12	Octaedro truncado	53
3.13	Icosaedro truncado	53
3.14	Arranjo da forma $(8,8,Y)$	54
3.15	Cubo truncado	55
3.16	Arranjo da forma (A_{10}, A_{10}, A_Y)	56
3.17	Dodecaedro truncado	56
3.18	Cuboctaedro Truncado	57
3.19	Icosidodecaedro truncado	58
3.20	Arranjo da forma (A_X, A_X, A_Y, A_Y)	59
3.21	Arranjo da forma (A_X, A_X, A_Y, A_Z)	60
3.22	Arranjo da forma (X, Y, X, Z)	60
3.23	Cuboctaedro	61
3.24	Icosidodecaedro	62
3.25	Rombicuboctaedro	63
3.26	Rombicuboctaedro	64
3.27	Cubo snub	65
3.28	Dodecaedro snub	66
3.29	Os 13 poliedros arquimedianos	67
3.30	Tetraedro truncado	68
3.31	Tetraedro Γ	69
3.32	Cálculo do raio do tetraedro inscrito	70
3.33	Octaedro truncado	71
3.34	Face lateral de um Octaedro truncado	72
3.35	Pirâmide de base quadrada	72
3.36	Raio da esfera com relação a aresta do octaedro truncado	74

3.37	Icosaedro truncado	75
3.38	Base pentagonal da pirâmide	76
3.39	Pirâmide Pentagonal	76
3.40	Relação entre a aresta do icosaedro truncado e o raio da esfera circunscrita.	78
3.41	Cubo truncado	79
3.42	Face do cubo truncado	80
3.43	Pirâmides retiradas do cubo	80
3.44	Cálculo do raio da esfera no cubo truncado	81
3.45	Cuboctaedro truncado	83
3.46	Cuboctaedro truncado - face do cubo Ω	83
3.47	Cuboctaedro truncado - face do cubo Ω	84
3.48	Cuboctaedro truncado - Truncamentos	84
3.49	Cuboctaedro truncado - Sólido 1 do truncamento	85
3.50	Cuboctaedro truncado - Sólido 2 do truncamento	86
3.51	Cálculo do raio da esfera no cubo truncado	87
3.52	Cuboctaedro	88
3.53	Face do cuboctaedro	88
3.54	Pirâmides retiradas do cuboctaedro	89
3.55	Raio da esfera inscrita no cuboctaedro	90
3.56	Rombicuboctaedro	91
3.57	Decomposição do Rombicuboctaedro	91
3.58	Relação entre R e a	92
4.1	Código alfa numérico de habilidades	95
4.2	FACULDADE MACKENZIE PARANÁ - PROCESSO SELETIVO DO CURSO DE MEDICINA – 2023, prova tipo 1 - branca	101
4.3	Universidade Federal de Juiz de Fora - 2018 - 1 dia	102
4.4	Universidade Estadual do Rio de Janeiro - 1 a fase/20 de dezembro de 1999	103
4.5	Módulo de Geometria Espacial I - Fundamentos Poliedros - 3o ano/E.M	104
4.6	OBMEP 2012	105
5.1	GeoGebra	107
5.2	Criar Uma Nova Ferramenta no GeoGebra	108
5.3	Objetos Finais	109
5.4	Objetos Iniciais	109
5.5	Nome e Ícone	110
5.6	Cubo com os vetores	111
5.7	Cubo com os vetores ligados	111
5.8	Cuboctaedro	112
5.9	Criando uma nova ferramenta - Objetos Finais - truncamento tipo 2	113
5.10	Criando uma nova ferramenta - Objetos Fnciais - truncamento tipo 2	114
5.11	Criando uma nova ferramenta - Nome e Ícone - truncamento tipo 2	114

5.12	Barra de ferramentas - truncamento tipo 2	115
5.13	Segmento com dois pontos para truncamento	115
5.14	Objetos Finais 2 - truncamento tipo 2	116
5.15	Ferramenta truncamento duplo - tipo 2	116
5.16	Barra de ferramentas - truncamento duplo - tipo 2	117
5.17	Finalizando o tetraedro truncado	117
6.1	Puzzle	126
6.2	Puzzle montados	127
6.3	Maria Júlia e o Puzzle	127
6.4	Jujuba e palitos	128
6.5	Quebra cabeça - peças	130
6.6	Peças quebra cabeça - imagem original	131
7.1	Maria Júlia e o Puzzle	140
7.2	Puzzle	141
7.3	Puzzle	142
7.4	Aulas de geometria espacial	143
7.5	Jogos e Puzzle	144
7.6	Jogos e Puzzle	145
7.7	Jogos e Puzzle	146
7.8	Jogos e Puzzle	147
7.9	Jogos e Puzzle	148
7.10	Jogos e Puzzle	149
7.11	Exemplo de não poliedro	150
7.12	Exemplo de não poliedro	151

Introdução

Os geômetras ao longo dos tempos procuraram leis e regras para explicar a beleza do mundo. As formas geométricas existem na natureza e o homem procura replicar essa regularidade nas suas obras, não só na construção e arquitetura, mas em todas as áreas do conhecimento. Durante a Renascença, especialmente após a introdução da perspectiva na arte, pintores e artesãos produziram imagens dos cinco sólidos regulares. Para alterar seu design, eles cortaram os cantos e arestas desses sólidos, no processo conhecido como truncamento, produzindo naturalmente alguns sólidos semirregulares.

Quatro matemáticos se destacam nos estudos desse poliedros: Platão, Euclides, Pitágoras e Arquimedes. Platão (428-348 a.C.), que contribuiu não apenas para os poliedros regulares, mas para toda a geometria. Ao longo de seus estudos, enfatizou a necessidade de uma argumentação tão rigorosa, que promoveu o trabalho de Euclides. Euclides viveu em Alexandria por volta de 300 a.C. No entanto, seu legado na forma escrita foi tão vasto que ele foi considerado o matemático mais importante da antiguidade. O seu tratado, "*Os Elementos*", com seus 13 livros, representam uma compilação abrangente do conhecimento acumulado pelos gregos até aquele momento. Essa obra inclui tópicos como geometria elementar, geometria de polígonos e círculos, teoria dos números, teoria dos incomensuráveis, bem como medidas de áreas e volumes. No livro 13 dos Elementos de Euclides, inicia-se o tratamento matemático dos sólidos.

Figura 1: Euclides de Alexandria



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides#/media/Ficheiro:Euklid-von-Alexandria_1.jpg

Platão e seus seguidores estudaram esses sólidos tão minuciosamente que ficaram

conhecidos como “sólidos de Platão”. Mas segundo Manoel de Campos Almeida, em seu livro “PLATÃO REDIMIDO” [2], Platão se inspirou no trabalho de Pitágoras para seu tratamento com os poliedros regulares.

Como a primeira descrição dos cinco poliedros regulares aparece somente no Timeu de Platão, o seguinte fragmento, enigmático, preservado por Stobaeus, atribuído a Filolaus, um dos primeiros pitagóricos, cujos escritos, sabe-se, influenciaram Platão, é de significativa importância: “Há cinco corpos na esfera: fogo, água, terra, ar e o círculo da esfera, que faz o quinto” (GUTHRIE, 1998, p. 174). Há razões para acreditar que os cinco corpos mencionados são os sólidos platônicos, embora alguns autores discordem, achando que os “corpos” devem ser entendidos como os “elementos” (HEATH, 1981, p. 158). Além disso, também encontramos a associação platônica dos poliedros regulares com os “elementos”: fogo (tetraedro), água (icosaedro), terra (cubo), ar (octaedro). É igualmente interessante notar a observação de que os cinco corpos são inscritíveis na esfera. Se o fragmento é genuíno, então fornece mais uma pista sobre a fonte de inspiração da cosmologia platônica: a doutrina pitagórica.

Pappus (290 - 350) em seu Quinto Livro de Matemática atribuiu a descoberta dos treze poliedros a Arquimedes, embora muitas figuras sólidas com várias faces possam ser definidas, aquelas que parecem formas formadas regularmente merecem mais atenção. Estas incluem não apenas as cinco figuras encontradas nos papíros de Platão, mas também as treze figuras sólidas sobrepostas por Arquimedes. Pappus continua descrevendo os treze personagens. Ele os classifica em ordem com base no número total de faces e lista os tipos de faces que compõem cada poliedro.

Arquimedes foi um dos três maiores matemáticos de todos os tempos, sendo Newton e Gauss geralmente considerados seus únicos pares. As realizações de Arquimedes foram vistas como excepcionais e diversos historiadores o reconheciam como o principal matemático da sua época. Ele melhorou um procedimento para calcular áreas e volumes de superfícies, chamado de método da exaustão, uma evolução das técnicas previamente desenvolvidas por Eudoxo e Menaechmo, e que antecedeu as técnicas de integração desenvolvidas posteriormente por Kepler, Cavalieri, Fermat, Newton e Leibniz.

Além de Euclides e Arquimedes, Bonaventura Cavalieri (1598 — 1647) também se destacou no estudo dos volumes dos poliedros. Em 1635 publicou sua obra mais conhecida, *Geometria indivisibilibus continuorum nova* (Nova Geometria dos Indivisíveis Contínuos), onde ele utiliza a ideia de Kepler para seccionar os sólidos em partes infinitesimais. Essa teoria simplificava o cálculo de áreas e volumes de várias figuras geométricas. Em seguida ele postulou o que seria conhecido como *O princípio de Cavalieri*, onde ele prova que se todo plano paralelo ao plano dado secciona os sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.

Este trabalho tem por objetivo fazer um estudo dos poliedros, com ênfase nos poliedros de Platão e Arquimedes, tratando das relações métricas e relações entre seus elementos.

O trabalho está desenvolvido da seguinte forma: iniciamos no capítulo 1 com a definição de poliedro convexo, definindo área e volume de poliedros regulares, dos prismas e das pirâmides. Tratamos sobre a característica de Euler de um poliedro. Apresentamos no capítulo 2 os poliedros de Platão, provando que existem apenas cinco poliedros de Platão (os poliedros regulares) e as relações métricas desses poliedros (vértices, arestas, faces, a medida da aresta, a área total e o volume de cada um dos poliedros com relação aos raios das esferas circunscritas, assim como os ângulos entre as faces). No capítulo 3, passando para os poliedros de Arquimedes, definimos o que são poliedros semirregulares, definindo as relações de truncamento e snubificação de poliedros, definimos o que são poliedros arquimedianos, demonstrando a existência de apenas treze poliedros, mostrando a composição de cada um deles (tipos de faces, total de arestas, vértices e faces).

Por se tratar de um estudo dos poliedros voltados para alunos do ensino básico (ensino fundamental anos finais e ensino médio), buscamos utilizar conhecimentos adquiridos nesse nível para fazer um tratamento métrico dos poliedros de Arquimedes. Com os conteúdos e o nível de conhecimentos desenvolvidos nesse grau de escolaridade (geometria plana, geometria espacial e trigonometria), os alunos tem condições de entender e desenvolver as relações métricas de sete poliedros Arquimedes: tetraedro truncado, cubo truncado, cuboctaedro, rombicuboctaedro, cuboctaedro truncado, octaedro truncado e o icosaedro truncado.

No capítulo 4, foi feita uma busca sobre os poliedros na BNCC e nos PCNs, assim como a existência de questões de vestibulares envolvendo os temas abordados nessa dissertação. Passando para o capítulo 5, apresentamos um recurso no GEOGEBRA para fazer o truncamento tipo 1 e tipo 2, criando novas ferramentas.

Por fim, apresentamos no capítulo 6 um recurso educacional, onde utilizamos de jogos, puzzle e material concreto para os estudos dos poliedros de Platão e Arquimedes.

Concluimos nesse trabalho a existência de uma possibilidade de estudos dos poliedros arquimedianos na educação básica.

Capítulo 1

Poliedros

O estudo de poliedros faz parte do estudo de objetos espaciais, para tanto faz-se necessário o conhecimento prévio dos elementos estudados em geometria plana, tais como ponto, reta, plano, ângulo, polígono, etc e também dos principais resultados em trigonometria. Prismas e pirâmides, como também os poliedros de Platão, são importantes exemplos de famílias de poliedros que são estudados no Ensino Médio no Brasil e em diversos países. As coleções de livros trazem esses tópicos dentro da grade de conteúdos, com textos explicativos, exemplos e exercícios. Para professores, um estudo mais detalhado desses temas pode ser encontrado em coleções mais avançadas, por exemplo, a coleção do professor de matemática: “A Matemática do Ensino Médio”, SBM de 1998 [17].

1.1 Poliedros: definição, exemplos, contraexemplos e classificação

Para o estudo que desenvolvemos nesta pesquisa, adotamos a formulação abaixo para definição de poliedro. Essa definição é simples, concisa, adotada pela maioria dos autores e não permite grandes liberdades. Adaptamos essa formulação de Lima (2006) e pode ser encontrada em [17].

Definição 1.1 *Poliedro é uma reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas faces onde:*

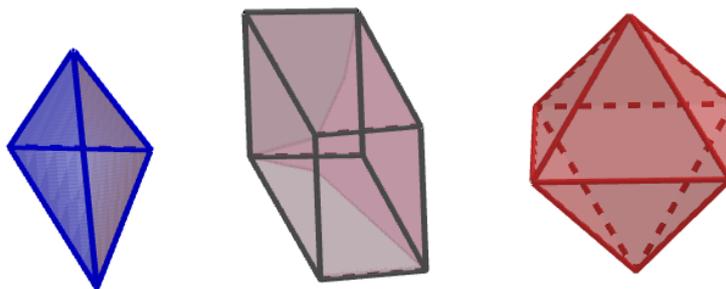
- i) Cada lado de uma dessas regiões poligonais é também lado de uma, e somente uma outra região poligonal;
- ii) A intersecção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia;

1.1. POLIEDROS: DEFINIÇÃO, EXEMPLOS, CONTRAEXEMPLOS E CLASSIFICAÇÃO

- iii) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, deslocando-se sobre o poliedro, sem passar por nenhum vértice.

Observamos na imagem abaixo três exemplos de poliedros, onde todos os três itens da definição são satisfeitos.

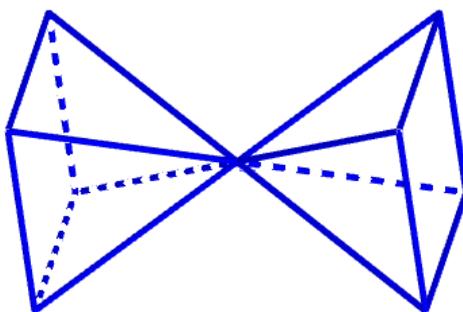
Figura 1.1: Exemplos de Poliedros



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Na próxima imagem, temos um sólido que não é um poliedro, pois, apesar de ser formado por duas pirâmides unidas por um vértice. O conjunto não satisfaz a definição 1.1, item (iii), pois não é possível passar de um ponto de uma pirâmide para um ponto da outra, sem passar pelo vértice em comum, deslocando-se sobre o sólido.

Figura 1.2: Exemplo de sólido que não é poliedro.



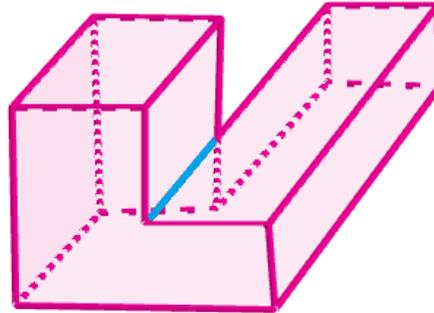
Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Um outro exemplo de sólido que não é um poliedro é o da Figura (1.3). Embora seja formado por polígonos, ele não se encaixa na definição de poliedro acima. Note que o

1.1. POLIEDROS: DEFINIÇÃO, EXEMPLOS, CONTRAEXEMPLOS E CLASSIFICAÇÃO

segmento azul na figura (1.3) é lado de apenas um dos polígonos que compõe o sólido. Ou seja, há duas faces cuja interseção não é um lado comum, não é um vértice e não é vazia. Logo, o item (ii) da definição 1.1 não é satisfeito.

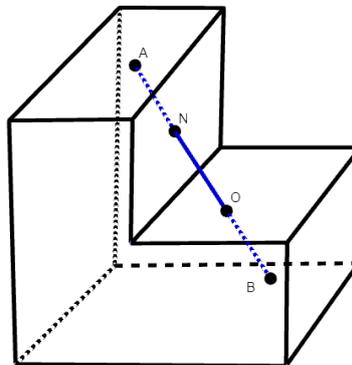
Figura 1.3: Exemplo de sólido que não é poliedro.



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Note que todo poliedro divide o espaço em duas regiões, uma limitada e outra ilimitada. Dizemos que o poliedro é **convexo** se para quaisquer dois pontos A e B pertencentes ao poliedro, o segmento AB está contido na região limitada. Caso contrário, o poliedro é classificado como **não convexo**.

Figura 1.4: Exemplo de poliedro não convexo



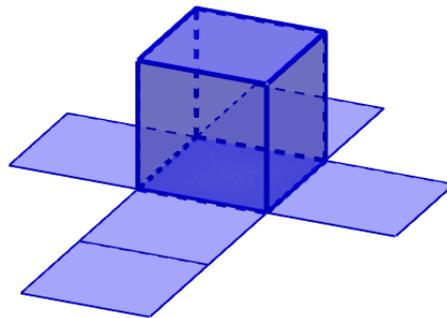
Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

1.2 Área e volume de um poliedro

1.2.1 Área de um poliedro

Para a definição da área de um poliedro, faz-se necessário o processo de planificação do poliedro, isto é, colocar todas as faces no mesmo plano, todas juntas, como se o poliedro fosse “desmontado e aberto”.

Figura 1.5: Exemplo de planificação do cubo



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Pela definição 1.1 de poliedros, os poliedros são sólidos geométricos limitados por um número finito de polígonos planos chamados de faces. A **área de um poliedro** é então definida como a soma de todas as áreas de suas faces ou, de maneira equivalente, a área ocupada por sua planificação.

1.2.2 Volume de um poliedro

Conhecido como “Estereometria”, a parte da geometria que ensina a calcular o volume dos sólidos (do grego stereós, “sólido” + métron, “medida” + -ia)[18]. . Em geral, o volume de um objeto é a quantidade de espaço ocupada por este objeto. No caso de poliedros, temos a seguinte definição:

Definição 1.2 *O volume de um poliedro é a quantidade de espaço ocupada pela região limitada por ele.*

Esta definição pode ser vista também como uma medida de capacidade, pois não estamos medindo de fato o espaço ocupado pelo poliedro e, sim, a quantidade de espaço “cercada”, por ele.

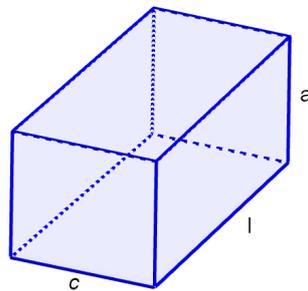
Volume é uma medida e, portanto, necessita de alguma unidade padrão que servirá de base de comparação com outros objetos de mesma natureza. Em geral, utilizamos como

1.2. ÁREA E VOLUME DE UM POLIEDRO

unidade padrão de volume o cubo unitário, que é o poliedro formado por seis quadrados, com aresta de medida uma unidade de comprimento. Por definição, seu volume será uma unidade de volume. Assim, para calcular o volume de um sólido, devemos determinar quantos cubos unitários cabem nele.

No caso de um **bloco retangular** (poliedro formado por seis faces retangulares, veja figura (1.6)) de arestas inteiras medindo c , l e a unidades respectivamente é possível mostrar que seu volume é equivalente ao volume de $c.l.a$ cubos unitários. E, de maneira geral, mesmo que essas dimensões não sejam inteiras mostra-se, usando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (ver na página 6 de [15]), que seu volume é também o produto $c.l.a$.

Figura 1.6: Bloco retangular



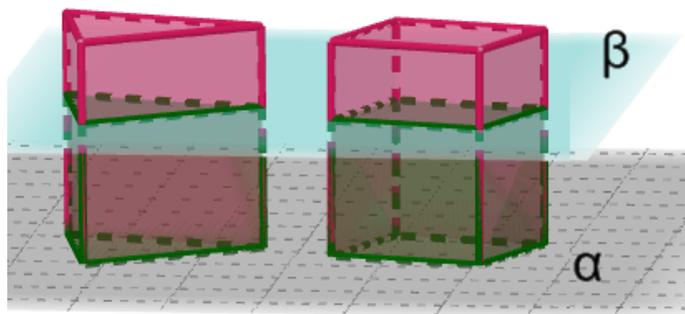
Fonte: Feito pelo autor no Geogebra

A partir do volume do bloco retangular, podemos calcular o volume de outros sólidos utilizando-se do chamado Princípio de Cavalieri, cuja afirmação é dada a seguir e interpretada pela Figura 1.7.

Axioma 1.1 (Princípio de Cavalieri) *São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.*

Uma outra versão do Princípio de Cavalieri é a seguinte: Dados dois sólidos incluídos entre um par de planos paralelos, se todo plano paralelo ao par de planos e que intersecta os sólidos o faz em seções cujas áreas estão sempre na mesma razão, então os volumes dos sólidos também estão nessa mesma razão.

Figura 1.7: Princípio de Cavalieri



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/pzbnmcj>

1.3 Prismas e pirâmides: definições, áreas e volumes

Como exemplos de poliedros, vamos discutir a respeito de duas importantes classes de poliedros, presentes no ensino básico, que são os prismas e as pirâmides.

1.3.1 Prisma

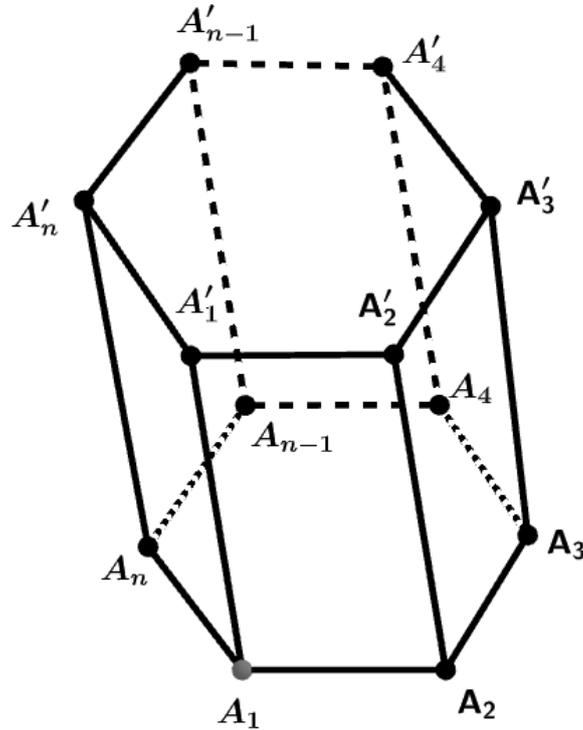
Primeiramente, vamos definir de maneira precisa um prisma. Dados dois planos paralelos α e β (não-coincidentes) e uma região poligonal em α , digamos $A_1A_2A_3 \cdots A_n$, tomamos um ponto A'_1 em β e consideramos o segmento $A_1A'_1$. Em seguida, tomamos os pontos A'_2, A'_3, \cdots, A'_n em β tais que $A_iA'_i$ sejam paralelos a $A_1A'_1$ para todo $i = 2, 3, \cdots, n$. O poliedro formado pelas faces $A_1A_2 \cdots A_n$ e $A'_1A'_2 \cdots A'_n$, chamadas de **bases** e pelos paralelogramos $A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i$, para $i = 1, 2, \cdots, n$ (identificando A_{n+1} com A_1), chamados de **faces laterais**, formam o que denominamos prisma. Veja a Figura 1.8.

Seus elementos são

- **Vértices:** $A_1, A_2, \cdots, A_n, A'_1, A'_2, \cdots, A'_{n-1}$ e A'_n .
- **Arestas:** $A_iA_{i+1}, A'_iA'_{i+1}$ e $A_iA'_i$, com $i = 1, 2, \cdots, n$, identificando A_{n+1} com A_1 .
- **Faces:** Bases: $A_1A_2 \cdots A_n$ e $A'_1A'_2 \cdots A'_n$ e
 Faces laterais: $A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i$, para $i = 1, 2, \cdots, n$ (identificando A_{n+1} com A_1).

Observamos que as bases de um prisma são polígonos congruentes e suas faces laterais são paralelogramos. Classificamos como **prisma reto** a todo prisma cujas faces laterais sejam retângulos, caso contrário o prisma é classificado como **prisma oblíquo**.

Figura 1.8: Elementos de um prisma.



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Quando o prisma é reto e suas bases são polígonos regulares, dizemos que o prisma é **regular**.

O prisma cuja base é um retângulo é chamado de paralelepípedo. Se além disso, este prisma for reto, ele é chamado de paralelepípedo reto ou simplesmente de **bloco retangular**.

O **cubo** é um prisma regular de base quadrada e faces laterais também quadradas, ou seja, é um poliedro formado por seis faces quadradas congruentes. Ele também é chamado de hexaedro e faz parte da família dos poliedros ditos regulares que vamos estudar mais adiante.

Área de um prisma

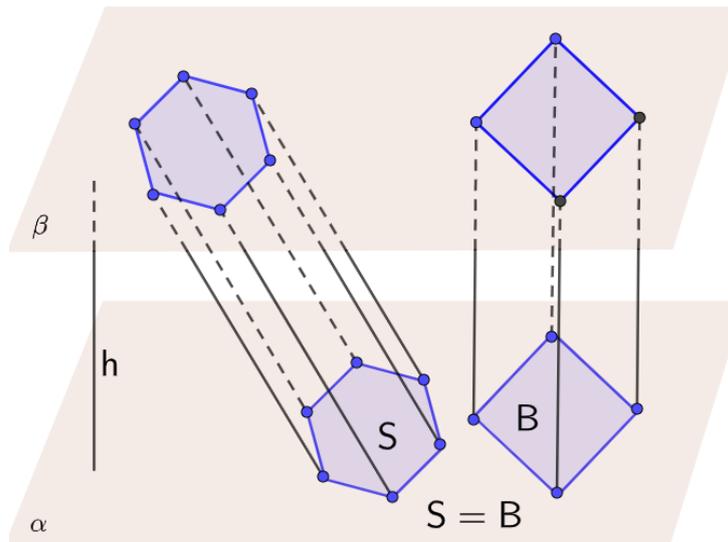
A área de um prisma é dado pela soma das áreas de suas faces, o que coincide com duas vezes a área do polígono base somado com as áreas das n faces laterais que são paralelogramos. Mais especificamente

$$\boxed{\text{Área do Prisma} = 2 \times \text{área}(A_1 A_2 \cdots A_n) + \sum_{i=1}^n \text{área}(A_i A_{i+1} A'_{i+1} A'_i)}$$

Volume de um prisma

Dado um prisma P , considere os planos paralelos α e β que contêm suas bases. Definimos a altura h do prisma como a distância entre os planos α e β . Note que é possível encontrar um retângulo contido em α que tenha a mesma área da base do prisma dado e, então, formar um bloco retangular R com uma outra face em β de altura também h (note que o bloco retangular também é um prisma). Veja Figura 1.9.

Figura 1.9: Volume do prisma.



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Dessa forma, temos que $\text{volume}(R) = \text{área da base do prisma} \times h$

Como todo plano paralelo a α secciona o prisma e o bloco retangular segundo figuras de mesma área, pelo Princípio de Cavalieri, $\text{volume}(R) = \text{volume}(P)$.

Portanto, o volume de um prisma é dado pelo produto da área de sua base por sua altura, isto é,

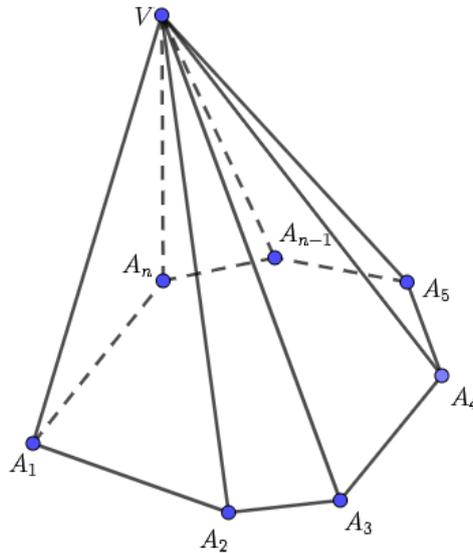
$$\boxed{\text{Volume do Prisma} = \text{área da base do prisma} \times \text{altura do prisma.}}$$

1.3.2 Pirâmide

Agora, vamos definir e discutir a respeito das pirâmides. Dada uma região poligonal $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ sobre um plano α , tomamos um ponto V qualquer fora de α . O poliedro formado pelas faces $A_1A_2 \cdots A_n$, chamada de **base** da pirâmide, e pelos triângulos $A_iA_{i+1}V$, para $i = 1, 2, \dots, n$ (identificando A_{n+1} com A_1), chamados de **faces laterais**, formam o que denominamos pirâmide, veja a Figura 1.10.

Seus elementos são:

Figura 1.10: Pirâmide de base $A_1A_2 \cdots A_n$.



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

- **Vértices:** A_1, A_2, \dots, A_n e V .
- **Arestas:** A_iA_{i+1} e A_iV , com $i = 1, 2, \dots, n$, identificando A_{n+1} com A_1 .
- **Faces:** Base: $A_1A_2 \cdots A_n$ e
Faces laterais: $A_iA_{i+1}V$, para $i = 1, 2, \dots, n$ (identificando A_{n+1} com A_1).

Observe que se a base da pirâmide for um polígono de pelo menos quatro vértices, o vértice V da pirâmide é o único que se liga a todos os demais através de alguma aresta. Ou seja, existe um único vértice que se liga a todos os vértices da base e, conseqüentemente essa base é única. Quando a base da pirâmide é triangular, a pirâmide é também chamada de tetraedro. Neste caso, quaisquer de suas faces podem fazer o papel de base e as outras de faces laterais.

Vamos usar a seguinte notação $V - A_1A_2 \dots A_n$ para indicar uma pirâmide de base $A_1A_2 \cdots A_n$ e vértice V . Note que uma pirâmide de base triangular pode ser denotada por mais de um tipo, ou seja, uma pirâmide $A - BCD$ também pode ser representada por $B - ACD$, $C - ABD$ ou $D - ABC$.

Dizemos que uma pirâmide é reta quando todas as suas faces laterais são triângulos congruentes. Se, além disso, a base da pirâmide for um polígono regular então dizemos que a pirâmide é regular. Note que, nessas condições, todas as suas faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

Uma pirâmide particularmente especial é o tetraedro regular, formado por quatro triângulos equiláteros congruentes. Ele é um dos poliedros de Platão que vamos estudar mais adiante.

Área de uma pirâmide

A área de uma pirâmide é dada pela soma das áreas de suas faces, ou seja, é a soma da área da base com a soma das áreas dos triângulos laterais:

$$\text{Área da Pirâmide} = \text{área}(A_1A_2 \cdots A_n) + \sum_{i=1}^n \text{área}(A_iA_{i+1}V).$$

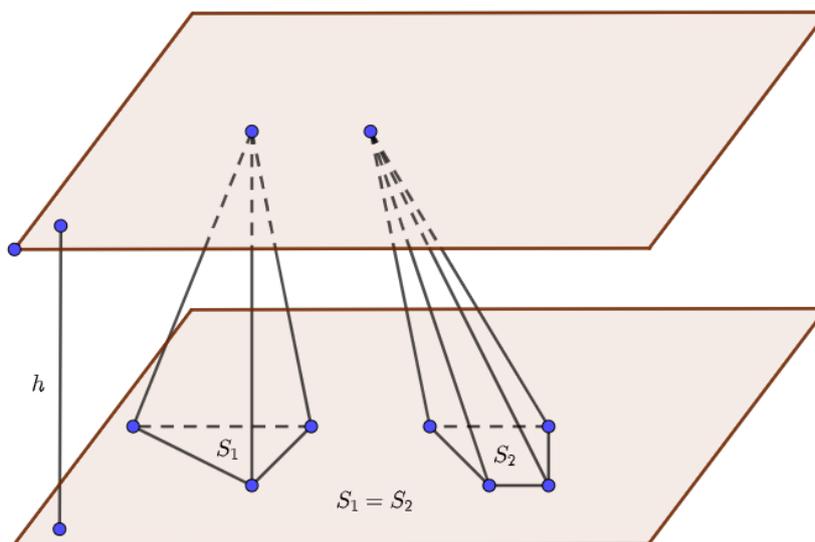
Volume de uma pirâmide

Dada uma pirâmide $V - A_1A_2 \cdots A_n$, definimos sua altura h pela distância de V ao plano que contém sua base $A_1A_2 \cdots A_n$. Vamos discutir e relatar as principais ideias que mostram que o volume da pirâmide é um terço do produto da base pela altura, isto é,

$$\text{Volume da Pirâmide} = \frac{1}{3} \times \text{área da base da pirâmide} \times \text{altura da pirâmide}.$$

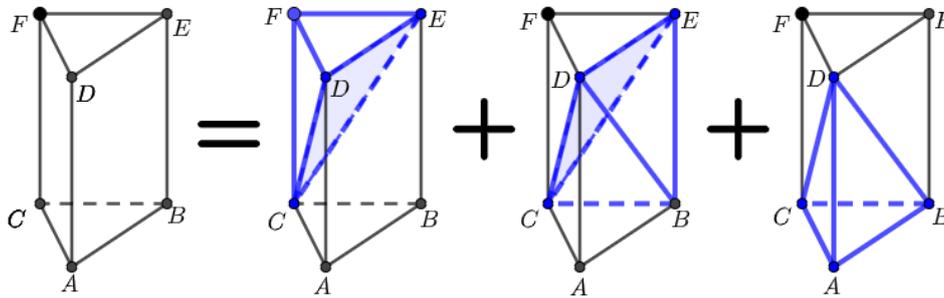
A prova da validade dessa fórmula utiliza os seguintes fatos que podem ser encontrados no livro [16].

Figura 1.11: Pirâmides com volumes iguais.



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

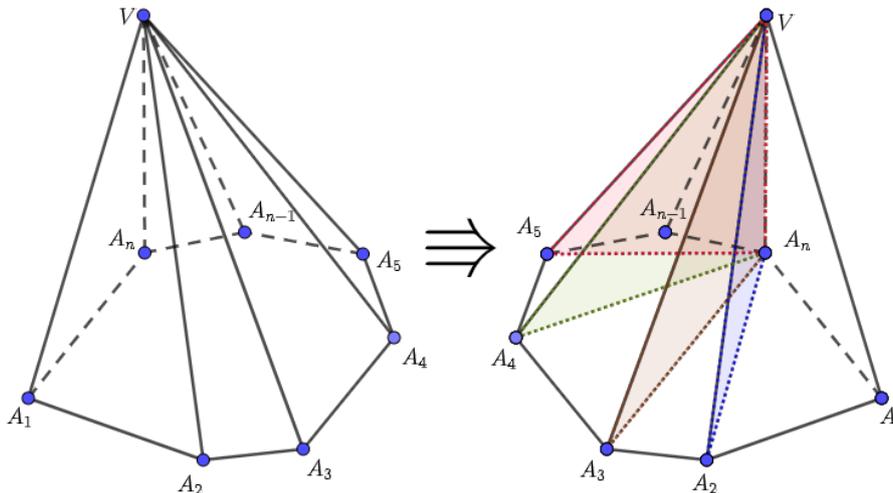
Figura 1.12: Decomposição de um prisma em três pirâmides de volumes iguais.



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

1. Pirâmides que possuem bases com áreas iguais e têm a mesma altura possuem o mesmo volume. Na Figura 1.11 as duas pirâmides têm a mesma altura h e bases de mesma área e , e portanto mesmo volume.
2. Dada uma pirâmide $D - ABC$ de base triangular e altura h , formamos um prisma $ABCDEF$, de base triangulares ABC e DEF e altura h . Decompõe-se, em seguida, este prisma em três pirâmides $C - DEF$, $B - CED$ e $D - ABC$. Mostra-se que estas três pirâmides têm o mesmo volume, utilizando-se a propriedade acima. Isso mostra que a fórmula acima vale para pirâmides de bases triangulares. Veja a Figura 1.12.

Figura 1.13: Decomposição de uma pirâmide em pirâmides de base triangular.



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

3. Decompõe-se a base da pirâmide $V - A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$ em triângulos da forma $A_nA_{i+1}A_i$ para $i = 1, 2, \dots, n - 2$ e, conseqüentemente, dá uma decomposição da pirâmide nas pirâmides de bases triangulares $V - A_nA_{i+1}A_i$ que possuem a mesma altura da pirâmide original, veja Figura 1.13.

Assim, denotando-se por S_i a área do triângulo $A_nA_{i+1}A_i$ e usando o que já foi provado no item anterior, concluímos que

$$\text{Volume da Pirâmide} = \frac{1}{3} \times \sum_{i=1}^{n-2} S_i \times \text{altura do pirâmide.}$$

Como a área da base da pirâmide coincide com a soma dos S_i , o resultado segue.

1.4 A característica de Euler de um poliedro

A característica de Euler de um poliedro é o número $V - A + F$, onde V , A e F são os números de vértices, de arestas e de faces, respectivamente. Embora seja possível dar exemplos de poliedros de características distintas, Euler descobriu em 1758 que $V - A + F = 2$ para todo poliedro convexo.

A seguir, apresentamos o Teorema de Euler e uma belíssima demonstração, usando ideias bastante elementares, que tem como referência Azambuja Filho [9], Lima et al. [17] e Fanti [7]. Apresentamos a demonstração de forma bastante detalhada, intercalando com algumas ilustrações de situações particulares, visando uma melhor compreensão da mesma.

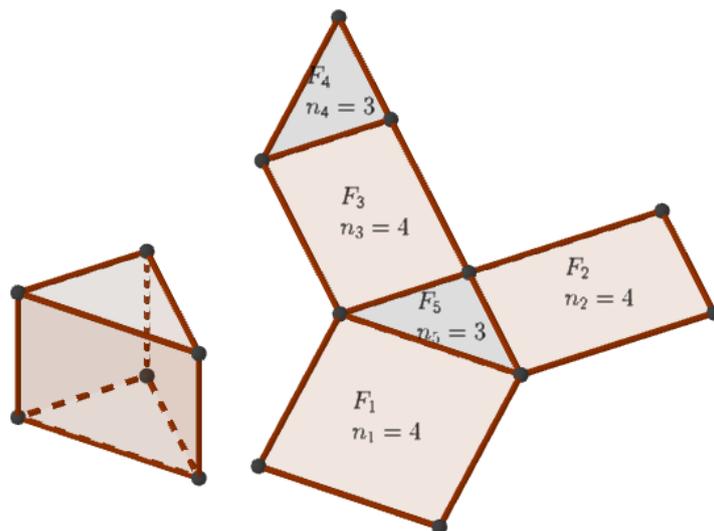
Teorema 1.1 *Para qualquer poliedro convexo vale a relação $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces.*

Demonstração: Seja P um poliedro convexo. A demonstração consistirá, essencialmente, em determinar, de duas maneiras distintas, a soma S dos ângulos internos dos polígonos que constituem as faces do poliedro P e, em seguida, comparar os resultados obtidos.

Primeiro caso: Seja F o número de faces do poliedro convexo P , numerando essas faces, obtemos F_1, F_2, \dots, F_F . Seja n_k o gênero da k -ésima face, isto é, n_k é o número de lados do polígono correspondente a face F_k (podendo ter $n_i = n_j$, com $i \neq j$). Por exemplo, num prisma triangular, temos 5 faces, F_1, F_2, F_3, F_4 e F_5 . De acordo com a Figura 1.14, $n_1=3, n_2=4, n_3=4, n_4=4$ e $n_5=3$.

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é $(n - 2)\pi$. Isto pode ser deduzido triangularizando o polígono a partir de um vértice, de modo a obter $n - 2$ triângulos e usar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é π (como ilustrado no pentágono indicado na Figura 1.15, em que $n = 5$, de modo a obter $n - 2 = 3$ triângulos e $S = 3\pi$).

Figura 1.14: Prisma de base triangular



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Observando que em um poliedro convexo todas as suas faces são polígonos convexos, teremos para a soma dos ângulos internos de todas as faces de P a expressão:

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \dots + \pi(n_F - 2) = \pi(n_1 + n_2 + \dots + n_F) - \pi(2 + 2 + \dots + 2). \quad (1.1)$$

Agora, a soma dos números de lados de todas as faces $n_1 + n_2 + \dots + n_F$ do poliedro é igual ao dobro do número de arestas ($2A$), e no segundo parênteses (da igualdade acima) temos F (número de faces) parcelas iguais a 2, logo

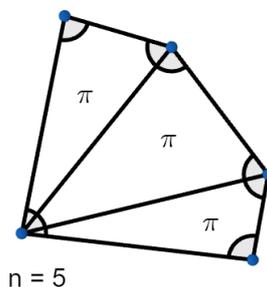
$$S = \pi.2A - \pi.2F, \quad \text{isto é,} \quad S = 2\pi(A - F). \quad (1.2)$$

Por exemplo, para o tetraedro, tem-se: 4 faces F_1, F_2, F_3 e F_4 e $n_j = 3$, para $j = 1, 2, 3, 4$. De modo que:

$$\begin{aligned} S &= \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \pi(n_3 - 2) + \pi(n_4 - 2) \\ &= \pi(3 - 2) + \pi(3 - 2) + \pi(3 - 2) + \pi(3 - 2) \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

Segundo caso: Para o segundo cálculo da soma S , tomemos agora o poliedro P e r uma reta não paralela a nenhuma de suas faces (tal reta sempre existe, pois existe um número finito de faces). Seja também H o plano perpendicular à reta r que não intersecta P (como ilustrado na Figura 1.16).

Figura 1.15: Soma dos ângulos internos de um pentágono



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

O plano H será chamado plano horizontal, o qual divide o espaço em dois semi-espacos. Consideremos o semi-espaço que contém P como o semi-espaço superior, ou seja, os pontos de P que estão acima de H . As retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) são chamadas retas verticais.

Suponhamos o sol brilhando a pino sobre o semi-espaço superior onde todos os seus raios são retas paralelas à reta r . Todo ponto x do semi-espaço superior, possui uma projeção ortogonal (sombra) x' no plano H (estamos seguindo aqui a notação de Azambuja Filho (1983, p. 15-17)). A sombra de qualquer conjunto X , contido no semi-espaço superior é, por definição, o conjunto X' , contido em H , formado pelas sombras dos pontos de X .

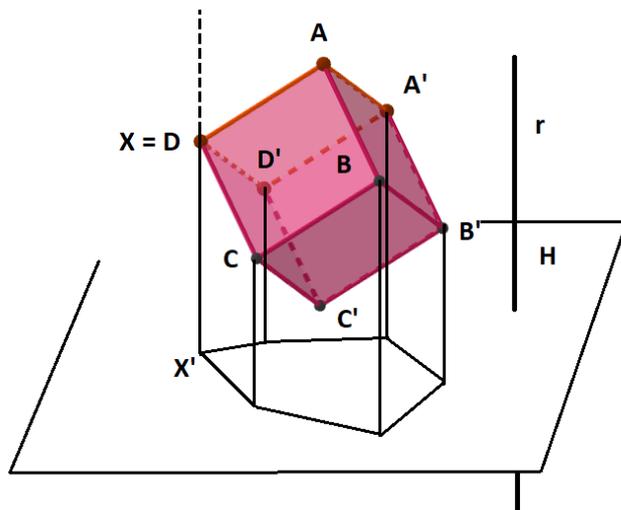
A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro P é um subconjunto convexo dessa reta, logo (se não for vazio) é um segmento de reta, cujos extremos pertencem a P , ou é um único ponto de P . Segue que uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo P .

O fato anterior pode ser reformulado do seguinte modo: Seja P' a sombra do poliedro P , cada ponto da sombra P' é sombra de um ou de dois pontos de P . Ora, a sombra P' do poliedro P é um polígono convexo no plano horizontal, cujo contorno Γ' é a sombra de uma poligonal fechada Γ , formada por arestas de P . Cada ponto de Γ' é formada por um único ponto de P (pertencente a Γ). A poligonal Γ é chamada o contorno aparente do poliedro P . Cada ponto interior de P' (isto é, não pertence a Γ') é sombra de dois pontos de P .

Se dois pontos de P têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) chamaremos ponto iluminado; o mais baixo será chamado sombrio. Assim, o poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente.

1.4. A CARACTERÍSTICA DE EULER DE UM POLIEDRO

Figura 1.16: Cubo “pendurado pelo vértice A” (Projeção ortogonal dos pontos do cubo no plano H)



Fonte: Feito pelo autor no Geogebra

Por exemplo, seja P o cubo que tem os quadrados $ABCD$ e $A'B'C'D'$ como faces opostas. Pendurando pelo vértice A (de modo que A e C' estejam na mesma vertical e suas projeções, no plano, seja o mesmo ponto y'), as faces $AA'B'B$, $AA'D'D$ e $ABCD$ são iluminadas e as outras três faces são sombrias.

Observemos que na Figura (1.17), os vértices A, A', B, B', C, D e D' são aparentes, A é iluminado e C é sombrio (A e C tem a mesma sombra). Ainda, o contorno aparente será a poligonal $A'B'BCDD'A'$ e Γ' é a sombra desse contorno, ou seja, a poligonal fechada Γ' .

Considere P_1 o conjunto formado pelos pontos iluminados de P , unido com o contorno aparente Γ , e seja P_1' a sombra de P_1 . Temos claramente uma correspondência biunívoca entre os elementos de P_1 e P_1' .

No exemplo (cubo), P_1' é formado pela reunião dos polígonos justapostos Q_1 (sombra da face iluminada $ABCD$); Q_2 (sombra da face iluminada $AA'BB'$) e Q_3 (sombra da face iluminada $AA'DD'$), como mostrado na Figura (1.18).

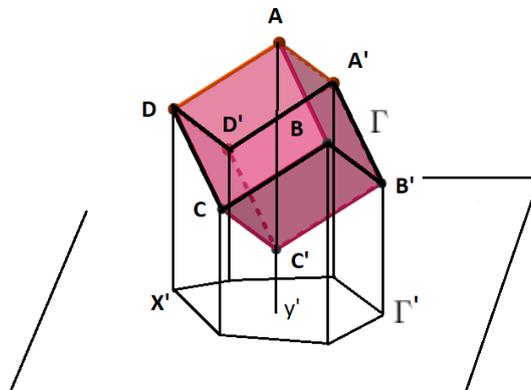
Evidentemente, poderíamos também considerar o conjunto P_2 , formado pelos pontos sombrios de P unido com o contorno aparente Γ . A regra que associa a cada ponto de P_2 a sua sombra, também é uma correspondência biunívoca entre P_2 e P' .

Escreveremos P_2' para indicar a sombra de P_2 , expressa como reunião das sombras das faces sombrias de P contidas em P_2 (o que nos dá também uma reunião de polígonos justapostos).

Calculemos então a soma de todos os ângulos das faces de P . Observemos que a soma

1.4. A CARACTERÍSTICA DE EULER DE UM POLIEDRO

Figura 1.17: Cubo “pendurado pelo vértice A' - contorno aparente



Fonte: Feito pelo autor no Geogebra

dos ângulos internos de uma face F_k de P é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra F_k' (já que a reta r escolhida não é paralela a nenhuma face e a sombra de um polígono de n lados será um polígono de n lados). Ao considerar a parte iluminada e a parte sombria de P , temos que há V_1 vértices iluminados, V_2 vértices sombrios e V_0 vértices no contorno aparente Γ . Temos assim que o número de vértices do poliedro é:

$$V = V_0 + V_1 + V_2.$$

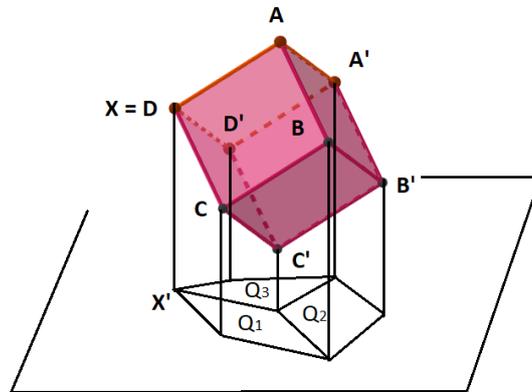
Notemos ainda que V_0 é também o número de vértices (e de lados) da poligonal Γ' , contorno do polígono convexo P' . A face iluminada nos dá então um polígono convexo com V_0 lados, V_0 vértices e que possui V_1 pontos interiores que são os vértices iluminados de P . Analogamente, a face sombria também possui o mesmo número de lados V_0 , mas por sua vez possui V_2 pontos interiores.

Temos ainda que $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos das faces iluminadas e S_2 é a soma dos ângulos internos das faces sombrias. Para calcular S_1 , usamos a observação anterior que a soma dos ângulos internos de uma face F_k de P é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra F_k' . Daí S_1 é igual à soma dos ângulos internos dos polígonos convexos nos quais está decomposto o polígono convexo P_1' , sombra de P_1 . Para calcular esta última soma, somemos os ângulos vértice a vértice, em vez de somá-lo face por face.

Em P_1' temos V_1 vértices interiores (sombrias dos vértices iluminados) mais V_0 vértices do contorno Γ' (sombra do contorno aparente Γ). A soma dos ângulos que têm como vértices um dado vértice interior é igual a 2π radianos (4 ângulos retos). A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno Γ' é igual a $\pi(V_0 - 2)$, de acordo com a soma dos ângulos internos de um polígono com V_0 lados.

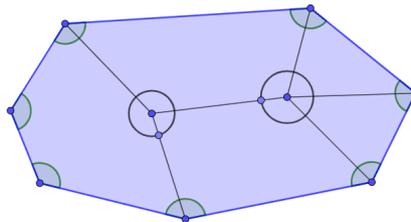
1.4. A CARACTERÍSTICA DE EULER DE UM POLIEDRO

Figura 1.18: Cubo - Região P_1 (sombra das faces iluminadas unido com contorno)



Fonte: Feito pelo autor no Geogebra

Figura 1.19: Analizando a soma dos ângulos de uma possível região P_1



Fonte: Feito pelo autor no Geogebra

No exemplo ilustrativo na Figura (1.19), os vértices interiores (sombas de certos vértices iluminados) são X' e Y' , de modo que teríamos $V_1 = 2$, os demais vértices pertencem a Γ' , isto é, são sombas de vértices do contorno aparente, e no caso teríamos $V_0 = 7$.

Calculando S_1 e S_2 , temos então

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2) \quad \text{e} \quad S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Somando, membro a membro, as equações acima obtemos

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2) \tag{1.3}$$

$$= 2\pi(V_1 + V_2 + V_0 - 2) \tag{1.4}$$

$$= 2\pi(V - 2). \tag{1.5}$$

Comparando as equações obtidas em (1.2) e (1.5) temos:

1.4. A CARACTERÍSTICA DE EULER DE UM POLIEDRO

$$2\pi(A - F) = 2\pi(V - 2).$$

Dividindo ambos os membros por 2π obtemos que:

$$A - F = V - 2$$

e temos então a Relação de Euler:

$$V - A + F = 2$$

■

Capítulo 2

Poliedros de Platão

Neste capítulo falaremos a respeito dos poliedros regulares, também conhecidos por Poliedros de Platão em homenagem ao filósofo Platão (428-348 a. C). Faremos um estudo de suas características, suas áreas superficiais e seus volumes.

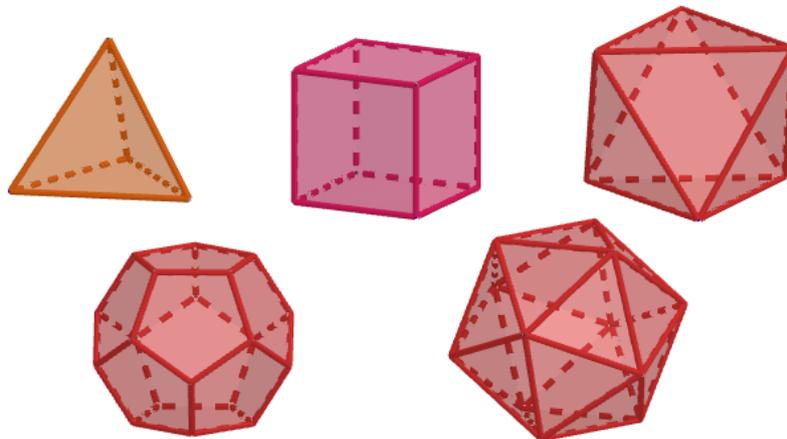
2.1 Definição e características dos poliedros de Platão

Definição 2.1 *Um poliedro regular (ou de Platão) é um poliedro em que todas as faces são polígonos regulares congruentes e todos os vértices são rodeados pelo mesmo número de faces.*

Veremos mais adiante que há apenas cinco tipos de poliedros regulares, os quais passamos a descrevê-los, veja Figura 2.1.

1. Tetraedro: é o sólido geométrico que possui 4 faces, todas triangulares e congruentes, e também 4 vértices e 6 arestas. Ele é um caso particular de pirâmide, que possui todas as faces triangulares.
2. Hexaedro: é o sólido geométrico que possui 6 faces no formato de quadrados, 8 vértices e 12 arestas. O hexaedro é conhecido também como cubo.
3. Octaedro: é o sólido geométrico que possui 8 faces triangulares, 6 vértices e 12 arestas.
4. Dodecaedro: é o sólido geométrico que possui 12 faces pentagonais, 20 vértices e 30 arestas.
5. Icosaedro: é o sólido geométrico que possui 20 faces triangulares, 12 vértices e 30 arestas.

Figura 2.1: Poliedros regulares



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

A definição implica que um poliedro regular é convexo porque se houvessem arestas diferentes ou vértices com configuração de faces diferentes, haveria distinção entre certas arestas e outras, ou entre certos vértices e outros.

Os poliedros de Platão possuem as seguintes características:

- 1) Todas as faces apresentam o mesmo número de arestas;
- 2) Todos os vértices possuem o mesmo número de arestas, isto é, se um vértice é a extremidade de três arestas, por exemplo, então todos serão também.
- 3) São convexos;
- 4) Por serem poliedros convexos, então vale a seguinte relação de Euler ou característica de Euler de um poliedro, demonstrado na subseção 1.4. Isto é, se o número de faces é igual a F , de arestas é igual a A e de vértices é igual a V então $V - A + F = 2$.

2.2 Contando faces, vértices e arestas

Nessa seção, considere um poliedro qualquer (não necessariamente um poliedro de Platão). Vamos tratar do problema de contar as suas faces, os seus vértices e as suas arestas. Mais precisamente, denotando por A o número de arestas, por F o número de faces, e por V o seu número de vértices, valem as seguintes desigualdades

$$2A \geq 3F \quad \text{e} \quad (2.1)$$

$$2A \geq 3V. \quad (2.2)$$

2.2. CONTANDO FACES, VÉRTICES E ARESTAS

Além disso, vale a igualdade em (2.1) somente quando todas as faces forem triangulares e a igualdade em (2.2) vale somente se em todos os vértices concorrem exatamente três arestas.

Primeiramente observe que, como as faces podem ser de polígonos diferentes, representaremos por F_n ($n > 3$) o número de faces que possuem n lados. Da mesma forma, como os vértices também podem ser de gêneros diferentes, representaremos por V_n o número de vértices nos quais concorrem n arestas. São então evidentes as relações:

$$F = F_3 + F_4 + \dots \quad \text{e} \quad V = V_3 + V_4 + \dots$$

Vamos agora contar as arestas observando quantas aparecem em cada face. Devemos então multiplicar o número de triângulos por 3, o número de quadriláteros por 4, o número de pentágonos por 5 e assim por diante, e depois somar os resultados. Mas, como cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces, a soma anterior é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + \dots \tag{2.3}$$

Também podemos contar as arestas observando os vértices do poliedro. Observando os vértices, podemos contar quantas arestas nele concorrem, somando os resultados obteremos também o dobro do número de arestas, porque cada aresta terá sido contada duas vezes (em um extremo e no outro). Logo,

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + \dots \tag{2.4}$$

Para provar a primeira desigualdade (2.1), usamos a equação (2.3) e deduzimos que

$$\begin{aligned} 2A &= 3F_3 + 4FV_4 + 5FV_5 + \dots \\ &= 3(F_3 + F_4 + F_5 + \dots) + F_4 + 2F_5 + \dots \end{aligned}$$

Como $F_3 + F_4 + F_5 + \dots = F$, concluímos que $2A = 3F + F_4 + 2F_5 + \dots$ e portanto (2.1) segue. Repare que a igualdade só é válida se $F_4 = F_5 = \dots = 0$, ou seja, se o poliedro tiver apenas faces triangulares.

Analogamente, para provar a segunda desigualdade (2.2), usamos (2.4) e temos que

$$\begin{aligned} 2A &= 3V_3 + 4V_4 + \dots \\ &= 3(V_3 + V_4 + V_5 + \dots) + V_4 + 2V_5 + \dots \end{aligned}$$

Como $V_3 + V_4 + V_5 + \dots = V$, concluímos que $2A = 3V + V_4 + 2V_5 + \dots$ e portanto $2A \geq 3V$. Note que a igualdade só é válida se $V_4 = V_5 = \dots = 0$, neste caso, a igualdade ocorrerá apenas quando em todos os vértices concorrerem exatamente três arestas.

2.3 Teorema da existência de apenas cinco poliedros regulares

Apresentamos, na Seção 2.1, cinco poliedros regulares: o tetraedro, o hexaedro (cubo), o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Vamos demonstrar que esses, de fato, são os únicos poliedros regulares. A prova que apresentaremos utiliza o Teorema de Euler para poliedros convexos.

Teorema 2.1 *Existem apenas cinco poliedros regulares: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.*

Demonstração:

Considere um poliedro (convexo) regular P com V vértices, A arestas e F faces. Chamaremos por n o número de lados do polígono que forma cada face e por p o número de arestas concorrentes em cada vértice de P . Temos então a relação $2A = nF$ e $2A = pV$, onde encontramos:

$$A = \frac{nF}{2}, \quad (2.5)$$

e, utilizando (2.5), temos também:

$$V = \frac{2A}{p} = \frac{2 \frac{nF}{2}}{p} = \frac{nF}{p}. \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) e (2.6) na relação de Euler, $V - A + F = 2$, temos $\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2$ e portanto, isolando F , concluímos que

$$F = \frac{4p}{2n - pn + 2p}. \quad (2.7)$$

Observe que $2n - pn + 2p > 0$, pois, pela equação (2.7), $2n - pn + 2p = \frac{4p}{F}$, onde $p > 0$ porque é o número de arestas concorrentes em cada vértice e $F > 0$ porque corresponde ao número de faces. Consequentemente, $2n > np - 2p$, ou equivalentemente

$$\frac{2n}{n-2} > p.$$

O poliedro com o menor números de arestas possíveis é o tetraedro, logo, o número mínimo de arestas em um vértice de um poliedro é 3, isto é, $p \geq 3$. Então,

$$\frac{2n}{n-2} > 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6-n}{n-2} > 0.$$

2.3. TEOREMA DA EXISTÊNCIA DE APENAS CINCO POLIEDROS REGULARES

De modo que $2 < n < 6$, ou seja o número de lados dos polígonos (que são as faces do poliedro P), deve ser $n = 3, 4$ ou 5 .

Vamos fazer uma análise dos possíveis valores de p e F , para n natural, satisfazendo a desigualdade acima.

1. Quando $n = 3$, o poliedro encontrado é formado apenas por triângulos, substituindo em (2.7), temos então $F = \frac{4p}{6-p}$, de modo que $3 \leq p < 6$.

- Para $p = 3$, temos que $F = 4$, obtendo o tetraedro.
- Para $p = 4$, temos que $F = 8$, obtendo o octaedro.
- Para $p = 5$, temos que $F = 20$, obtendo o icosaedro.

2. Quando $n = 4$, o poliedro encontrado é formado apenas por quadrados. Substituindo em (2.7), temos então $F = \frac{2p}{4-p}$, de modo que o único valor possível para p é 3, uma vez que $3 \leq p < 4$.

- Para $p = 3$, temos que $F = 6$, obtendo o cubo.

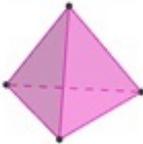
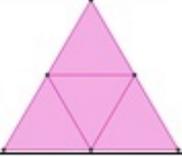
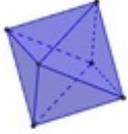
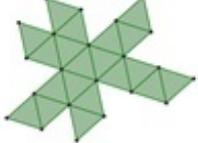
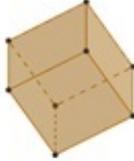
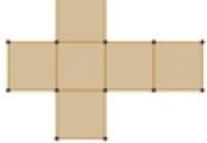
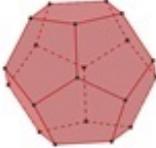
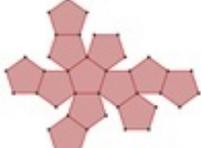
3. Quando $n = 5$, o poliedro encontrado é formado apenas por pentágonos. Substituindo em (2.7), temos então $F = \frac{4p}{10-3p}$, de modo que o único valor possível para p é 3, uma vez que $3 \leq p < \frac{10}{3}$.

- Para $p = 3$, temos que $F = 12$, obtendo o dodecaedro.

Como $2 < n < 6$, mostramos com os três tópicos acima que só é possível encontrar cinco poliedros regulares. ■

Vejamos abaixo os poliedros de Platão e suas planificações.

Figura 2.2: Poliedros e suas planificações

Poliedro	Faces	Planificação
	4 faces triangulares	
	8 faces triangulares	
	20 faces triangulares	
	6 faces quadradas	
	12 faces pentagonais	

Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

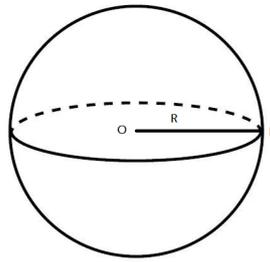
2.4 Poliedros regulares: um tratamento métrico

Falaremos nessa seção sobre algumas métricas nos poliedros de Platão: Relações Métricas, Ângulos entre Faces, Áreas das Superfícies, Volumes, Teorema de Hípsicles e as comparações.

Definição 2.2 *Dado um ponto O e um segmento de reta R , denomina-se superfície esférica o lugar geométrico dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O sejam congruentes com o segmento R . O ponto O é denominado centro da superfície esférica e o segmento R é seu raio.*

A superfície esférica não é desenvolvível sobre o plano e pode ser imaginada como aquela gerada pela rotação de um semicírculo em torno de seu diâmetro.

Figura 2.3: Superfície esférica



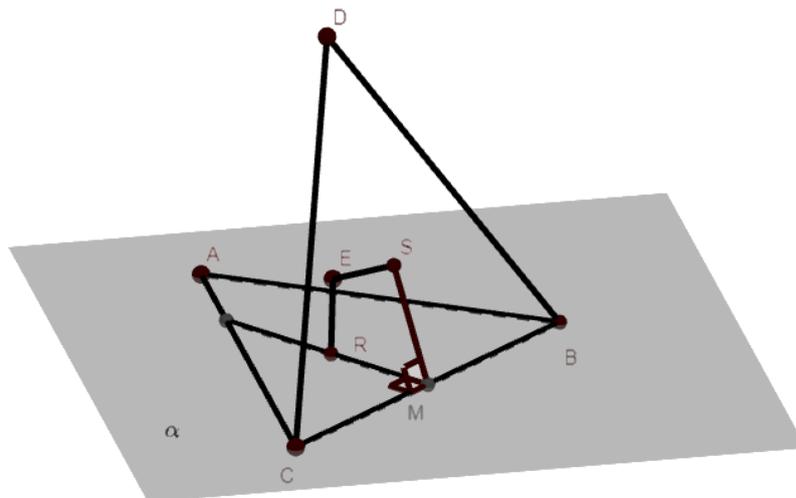
Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

O teorema a seguir garante que os poliedros regulares são circunscritíveis. Isso será necessário para os cálculos subsequentes.

Teorema 2.2 *Por quatro pontos não coplanares passa uma e somente uma superfície esférica.*

Demonstração:

Figura 2.4: Determinação da superfície esférica



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

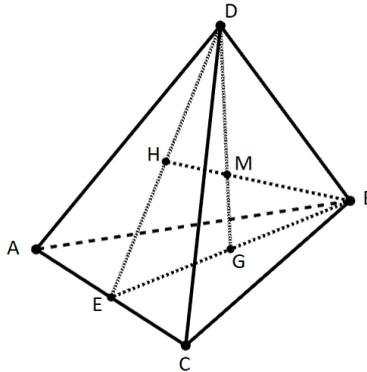
Sejam, conforme a Figura (2.4), os pontos A , B , C e D , não pertencentes a um mesmo plano. As trincas de pontos (A, B, C) e (B, C, D) formam dois triângulos com o lado \overline{BC} em comum (três pontos quaisquer dos 4 nunca são colineares, caso contrário os 4 pontos seriam coplanares). Sejam R e S respectivamente os centros das circunferências circunscritas aos triângulos ABC e BCD . A perpendicular ao plano ABC traçada por R

é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos pontos A , B e C porque, tomando um ponto P qualquer sobre ela, os triângulos PRA , PRB e PRC são congruentes, já que são retângulos, \overline{PR} é comum e $\overline{RA} = \overline{RB} = \overline{RC}$. Da mesma forma, a perpendicular traçada por S ao plano BCD é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos pontos B , C e D . O ponto R está sobre a perpendicular ao lado \overline{BC} , traçada por seu ponto médio M , no plano ABC . O ponto S está sobre a perpendicular ao lado \overline{BC} , traçada por seu ponto médio M , no plano BCD . Essas suas perpendiculares a \overline{BC} determinam um plano α , porque contem a reta \overline{BC} , perpendicular a α . Logo, α é perpendicular ao plano ABC . Como o ponto R está na interseção do plano ABC com α , a perpendicular a ABC por R está em α . Da mesma forma, o plano α é perpendicular ao plano BCD e a perpendicular a esse plano, traçada pelo ponto S , também está em α . Logo, as retas, lugares geométricos dos pontos equidistantes de A , B , C e B , C , D estão ambas no plano α . Essas retas não podem ser paralelas, porque, caso o fossem, os planos ABC coincidiriam, o que contraria a hipótese. Logo, elas se encontram em um ponto O , equidistante de A , B , C e D . Como duas retas distintas somente podem cruzar-se em um ponto, O é o único e, conseqüentemente, a superfície esférica que passa por A , B , C e D é única. ■

Teorema 2.3 (De Frederigo Commandino [1509-1575]) *Em qualquer tetraedro, os quatros segmentos que unem cada vértice ao baricentro da face oposta cruzam-se em um único ponto cuja distância a cada vértice é $\frac{3}{4}$ do respectivo segmento.*

Demonstração:

Figura 2.5: Teorema de Commandino



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

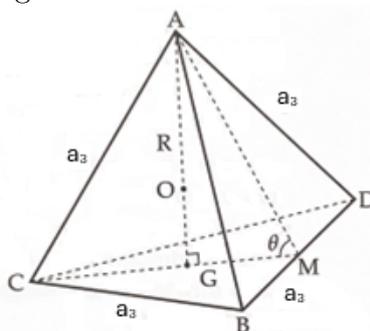
Sejam, conforme a Figura (2.5), o tetraedro $ABCD$ e os baricentros H e G do par de bases ACD e ABC , respectivamente. As retas \overline{BH} e \overline{DG} estão contidas no plano determinado pelos pontos B , D e E . Logo, elas se cruzam em um ponto M . Como \overline{EH} e \overline{EG} são $\frac{1}{3}$ de \overline{ED} e \overline{EB} , respectivamente, as retas \overline{HG} e \overline{BD} são paralelas e

$HG = \frac{1}{3}BD$ ou $\frac{BD}{GH} = \frac{3}{1}$. Como $\overline{GH} \parallel \overline{BD}$, os triângulos GHM e BDN são semelhantes e $\frac{DM}{MG} = \frac{BM}{MH} = \frac{HD}{GB} = \frac{3}{1}$. Logo, $\frac{MD}{MD+MG} = \frac{MB}{MB+MH} = \frac{3}{3+1}$ e, como $DM + MG = DG$ e $BM + MH = CH$, temos $DM = \frac{3}{4}DG$ e $BM = \frac{3}{4}BH$. Com o mesmo raciocínio, prova-se que os segmentos que unem os vértices A e C aos baricentros das faces BCD e ABD , respectivamente, também passam por M e são por elas divididos naquela proporção. ■

Iremos provar nas próximas subseções que todo poliedro regular pode ser inscrito em uma esfera de raio R e iremos determinar as medidas das arestas, os volumes e as áreas das superfícies dos cinco poliedros de Platão em função de R . Calcularemos também os ângulos entre duas faces adjacentes em cada um dos sólidos.

2.4.1 Tetraedro

Figura 2.6: Tetraedro inscrito



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Como foi visto no Teorema 2.2, todo tetraedro é inscritível em uma esfera. Sendo ele regular, o centro O da esfera encontra-se no cruzamento das retas que unem cada vértice ao baricentro da face oposta. Chamando de a_4 a medida da aresta do tetraedro regular, temos $AC^2 = AG^2 + CG^2$. Mas $AC = a_4$ e $CG = \frac{2}{3}a_4 \frac{\sqrt{3}}{2} = a_4 \frac{\sqrt{3}}{3}$. Logo, $AG^2 = a_4^2 - \frac{a_4^2}{3} = \frac{2}{3}a_4^2$ ou $AG = \sqrt{\frac{2}{3}}a_4$. Mas, pelo Teorema de Commandino (Teorema 2.3), $AO = \frac{3}{4}AG$. Logo, $AO = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a_4$. Como $AO = R$, $R = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a_4 = \frac{3}{2}\frac{a_4}{\sqrt{6}}$ ou $a_4 = \frac{2}{3}\sqrt{6}R \cong 1,632993...R$. A área total das faces do Tetraedro regular é:

$$S_4 = 4S_{BCD} = 4 \left(\frac{1}{2}a_4 \cdot a_4 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}a_4^2.$$

2.4. POLIEDROS REGULARES: UM TRATAMENTO MÉTRICO

E, como $a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$, então temos $S_4 = \sqrt{3} \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}R \right)^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}R^2 \cong 4,618802\dots R^2$. O volume do tetraedro é

$$V_4 = \frac{1}{3}AG \cdot S_{BCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}a_4 \cdot \left(\frac{1}{2}a_4 \cdot a_4 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{12}a_4^3.$$

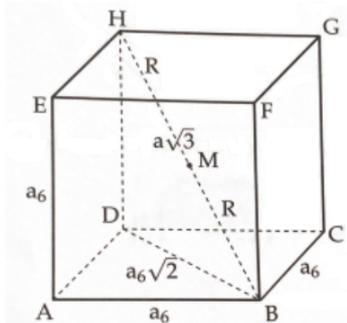
E como $a_4 = \frac{2}{3}\sqrt{6}R$, temos que $V_4 = \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}R \right)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3 \cong 0,513200\dots R^3$.

Vamos determinar o ângulo entre duas faces adjacentes do tetraedro regular. Sabendo que os triângulos que formam o tetraedro são equiláteros e as medianas são o mesmo segmento da altura, temos M o ponto médio da aresta \overline{BD} (conforme a Figura (2.6)). Então, \overline{GM} é ortogonal a \overline{BD} . Da mesma forma, \overline{AM} é ortogonal a \overline{BD} . Logo, o ângulo θ entre \overline{AM} e \overline{GM} é o ângulo entre duas faces adjacentes. Este ângulo é caracterizado pela relação $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$, pois \overline{AM} é uma altura de face e GM é um terço dela. Podemos então calcular o cosseno do ângulo θ : $\cos \theta = \frac{1}{3}$. Logo, o ângulo $\theta \cong 70^\circ 32'$, o que significa que o ângulo entre as faces é aproximadamente $70^\circ 32'$.

2.4.2 Hexaedro (Cubo)

O hexaedro é um poliedro inscritível, pois o ponto médio das diagonais, que é o centro do hexaedro, é equidistante dos 8 vértices (Figura (2.7)).

Figura 2.7: Hexaedro inscrito



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Observando as medidas do cubo, podemos relacionar a medida do lado do cubo com a diagonal do cubo (\overline{BH}) que também é a medida do diâmetro da esfera circunscrita.

Vejamos agora que o quadrado da diagonal é três vezes o quadrado da aresta. De fato, do triângulo retângulo BDH , temos que $HB^2 = HD^2 + DB^2$ e do triângulo

2.4. POLIEDROS REGULARES: UM TRATAMENTO MÉTRICO

retângulo BAD , obtemos $DB^2 = AB^2 + AD^2$. Assim, observando que $HB = 2R$ e $HD = AB = AD = a_6$, concluímos que

$$\begin{aligned}(2R)^2 &= HD^2 + DB^2 \\ &= HD^2 + AB^2 + AD^2 \\ &= 3a_6^2.\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R = 1,154701\dots R.$$

Vamos determinar agora a área total do cubo:

$$S_6 = 6a_6^2 = 6 \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R \right)^2 = 8R^2.$$

E agora, vamos determinar o volume do cubo:

$$\begin{aligned}V_6 &= a_6^3 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R \right)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}R^3. \\ V_6 &\cong 1,539601\dots R^3\end{aligned}$$

Como todas as faces do cubo são quadrados, os ângulos entre as faces são retos, ou seja, mede 90° .

2.4.3 Octaedro

Como o octaedro é formado por triângulos equiláteros, as arestas são todas congruentes, o que faz com que os polígonos $ABCD$ e $EBFD$ sejam quadrados. Suas diagonais se encontram no centro O do octaedro e são equidistante dos 6 vértices do octaedro. Logo, O é o centro da superfície esférica que os contém.

Se a_8 é a medida da aresta do octaedro regular (Figura (2.8)), então, usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC , temos $AC^2 = AB^2 + BC^2$, o que é equivalente a $(2R)^2 = a_8^2 + a_8^2$, onde R é o raio da esfera circunscrita no octaedro. Portanto concluímos que

$$a_8 = \sqrt{2}R \cong 1,414213\dots R$$

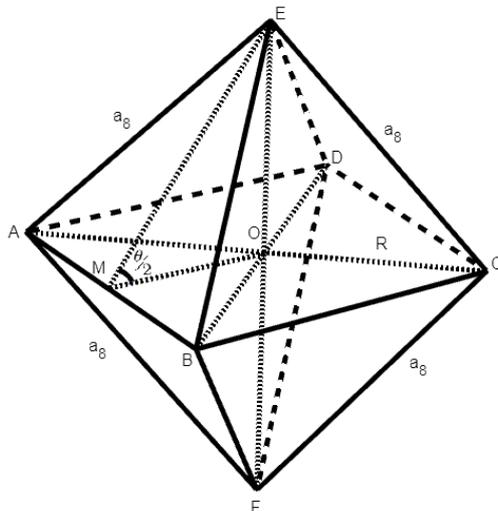
A área total das faces do octaedro é

$$S_8 = 8S_{ABC} = 8 \frac{1}{2} a_8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a_8 = 2\sqrt{3}a_8^2.$$

E, como $a_8 = \sqrt{2}R$, temos que

$$S_8 = 4\sqrt{3}R^2 \cong 6,928203\dots R^2.$$

Figura 2.8: Octaedro inscrito



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Consideremos agora as duas pirâmides de bases quadradas e congruentes $ABCD$ com vértices E e F , podemos considerar o volume do octaedro como sendo duas vezes o volume de uma dessas pirâmides, cujas bases são quadrados de lado a_8 e cujas alturas medem $\frac{\sqrt{2}}{2}a_8$. Logo,

$$V_8 = 2 \frac{1}{3} a_8^2 \frac{\sqrt{2}}{2} a_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} a_8^3 = \frac{4}{3} R^3 = 1,333333...R^3.$$

Para determinar o ângulo entre as faces adjacentes, traçamos o segmento \overline{EM} , no qual M é o ponto médio de \overline{AB} . Traçamos também o segmento \overline{OM} , que mede a metade da aresta do octaedro. O ângulo formado pelos segmentos \overline{EM} e \overline{MB} é reto, pois o segmento \overline{EM} é a altura do triângulo equilátero ABE . Utilizando o teorema de Pitágoras, $EB^2 = EM^2 + MB^2$ e substituindo os valores de EB e MB , temos

$$a_8^2 = EM^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2 \Leftrightarrow EM = \frac{\sqrt{3}}{2}a_8.$$

Calculando a metade do ângulo formado pelas faces adjacentes, obtemos o ângulo $\frac{\theta}{2}$ usando o cosseno, temos que $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{OM}{EM} = \frac{\frac{a_8}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a_8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ou seja,

$$\theta = 2 \cdot \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 109^\circ 29'.$$

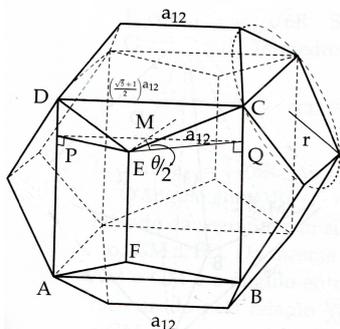
2.4.4 Dodecaedro

Sabendo que, tomadas convenientemente, 12 diagonais das faces de um dodecaedro, conseguimos formar um cubo. Seja um dodecaedro de aresta a_{12} , encontramos a medida de uma diagonal $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a_{12}$ que é a medida da aresta do cubo dual. Podemos então calcular a medida do raio da esfera que passa pelo vértice do cubo.

Pela relação estabelecida no cubo neste capítulo, temos $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a_{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$. Fazendo os devidos cálculos, encontramos

$$a_{12} = \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{3}R = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}}R.$$

Figura 2.9: Dodecaedro inscrito



Fonte: Retirado do livro C.Q.D. [12]

Para calcular a área total das faces do Dodecaedro regular, temos que calcular a área de 12 vezes pentágonos regulares de aresta a_{12} . Utilizando a demonstração da área de um pentágono a_{12} em [13], cujo lado mede a_{12} , temos:

$$A_5 = \frac{a_{12}^2}{4} \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{12} R^2 \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}.$$

Então, a área total S_{12} do dodecágono será:

$$S_{12} = 12A_5 = R^2(\sqrt{5} - 1)^2 \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}.$$

O que nos resulta em:

$$S_{12} = \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot (6 - 2\sqrt{5}) R^2.$$

2.4. POLIEDROS REGULARES: UM TRATAMENTO MÉTRICO

Pra calcular o volume do dodecaedro, podemos calcular a soma de 12 pirâmides congruentes, onde as bases pentagonais são as faces do poliedro. A altura dessa pirâmide é o cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o raio da esfera e cujo outro cateto é o raio da circunferência circunscrita ao pentágono da face.

Sabemos que o lado do pentágono inscrito em uma circunferência de raio r é $l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Como a aresta do dodecaedro é o lado de um pentágono, $a_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, onde r é o raio da circunferência que circunscribe a face. Mas $a_{12} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}R$. Logo, $a_{12} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}R = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, ou seja:

$$r = \frac{2(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{3(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})}R = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{15}}R.$$

Chamando de h a medida da altura da pirâmide,

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}R.$$

Como o volume do dodecaedro é $V_{12} = \frac{h}{3}S_{12}$ temos:

$$V_{12} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot (6 - 2\sqrt{5})R^3 = \frac{2}{9}\sqrt{30(3 + \sqrt{5})}R^3.$$

Podemos calcular o ângulo entre duas faces adjacentes do dodecaedro da seguinte maneira: toma-se uma aresta qualquer, por exemplo \overline{EF} , e por E traçam-se \overline{EP} e \overline{EQ} , perpendiculares às diagonais \overline{AD} e \overline{BC} paralelas a \overline{EF} , das faces que têm \overline{EF} em comum. Os segmentos \overline{EP} e \overline{EQ} são congruentes entre si e o ângulo entre eles é o ângulo procurado. O triângulo \overline{ECQ} é retângulo e \overline{CQ} é a metade da diferença entre \overline{BC} e \overline{EF} . Como as medidas de EF e BC são, respectivamente, a_{12} e $\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)a_{12}$, a medida de CQ é $\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)a_{12}$. Logo $EQ^2 = a_{12}^2 - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}a_{12}$, ou seja, $EQ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}a_{12}$.

Como a medida do segmento PQ é $\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)a_{12}$, a metade do ângulo procurado é caracterizado pela relação:

$$\frac{QM}{EQ} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)a_{12}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}a_{12}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \cong 0,8506508$$

onde M é o ponto médio de PQ . Em linguagem trigonométrica diríamos que

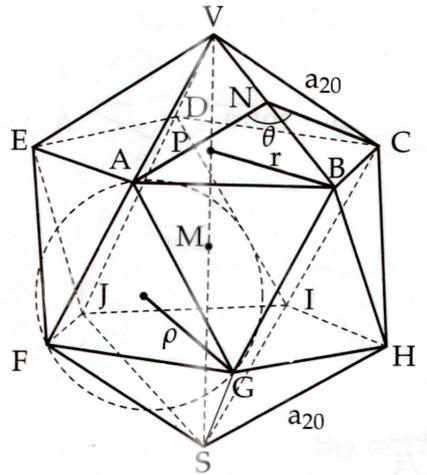
$$\theta = 2 \arcsen \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \right) \cong 116^\circ 34'$$

2.4.5 Icosaedro

Seja um Icosaedro e um de seus vértices, V . Em tal vértice convergem 5 triângulos equiláteros, cujas bases \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EA} , formam o pentágono regular $ABCDE$. Os vértices das faces que compartilham as arestas \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{EA} formam outro pentágono regular, congruente com o primeiro, $FGHIJ$. O lugar geométrico dos pontos equidistantes dos vértices A , B , C , D e E é a perpendicular ao plano do pentágono, passando por seu centro P .

Seja S o vértice comum das faces cujas bases são \overline{FG} , \overline{GH} , \overline{HI} , \overline{IJ} e \overline{JF} . Como $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \overline{SD}$, S pertence ao referido lugar. Logo, \overline{VS} é perpendicular ao plano do primeiro pentágono. Da mesma forma, prova-se que \overline{VS} é perpendicular ao plano do segundo pentágono. A partir desse fato, é imediata a prova de que o ponto M , médio do segmento \overline{VS} , é equidistante de todos os vértices do Icosaedro. Logo, ele é inscritível em uma esfera com centro em M .

Figura 2.10: Icosaedro inscrito



FONTE: Retirado do livro "C. Q. D." [12]

Seja r a medida dos raios das circunferências circunscritas àqueles pentágonos. No triângulo retângulo VPB , $VB^2 = VP^2 + PB^2$ e, como $VB = BC$, $BC^2 = VP^2 + PB^2$. Mas \overline{BC} é o lado do pentágono inscrito na circunferência de raio $PB = r$. Logo, \overline{VP} é congruente com o lado do decágono inscrito naquelas circunferências. Assim, se $l_5 = a_{20}$, temos $a_{20} = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ e $\overline{VP} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ de onde se deduz que:

$$\frac{\overline{VP}}{a_{20}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

ou

$$\overline{VP} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} a_{20}.$$

O triângulo VCS é retângulo, porque o ângulo $\angle VCS$ está inscrito em uma semicircunferência de diâmetro VS . Logo, $\overline{VC}^2 = \overline{VP} \cdot \overline{VS}$. Como $\overline{VS} = 2R$, onde R é a medida do raio da esfera circunscrita, $a_{20}^2 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} a_{20} \cdot 2R$, ou seja $a_{20} = \frac{R}{5} \sqrt{10(5 - \sqrt{5})} \cong 1,051462...R$.

A área total das faces do Icosaedro é 20 vezes a área de um triângulo equilátero de lado a_{20} , ou seja $S_{20} = 20 \cdot \frac{1}{2} a_{20} \cdot a_{20} \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} a_{20}^2 = 5\sqrt{3} \cdot \frac{R^2}{25} \cdot 10(5 - \sqrt{5})$ ou $S_{20} = 2\sqrt{3}(5 - \sqrt{5})R^2 \cong 9,574541...R^2$.

Se as faces do icosaedro são triângulos equiláteros cujos lados medem a_{20} , a medida dos raios das circunferências circunscritas a tais faces é $\rho = \frac{a_{20}}{\sqrt{3}}$. Como $a_{20} = \frac{R}{5} \sqrt{10(5 - \sqrt{5})}$.

$$\rho = \frac{R}{5} \sqrt{\frac{10(5 - \sqrt{5})}{3}} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{15}} R$$

Ao estudar o Dodecaedro, havíamos visto que o raio das circunferências que circunscvem suas faces pentagonais também mede $\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{15}} R$, ou seja, **os raios das circunferências que circunscvem as faces do Dodecaedro são iguais aos raios das circunferências que circunscvem as faces do Icosaedro inscritos em uma mesma esfera**. Esse admirável fato foi demonstrado pelo geômetra Hípsicles, de Alexandria, que viveu por volta de 180 a.C. e que escreveu um tratado com 8 proposições muito importantes sobre aqueles dois poliedros. O conteúdo das proposições de Hípsicles é de excelente nível e seu trabalho veio a ser conhecido como "O Livro XIV dos Elementos".

Uma decorrência imediata da descoberta de Hípsicles é que as alturas das pirâmides com vértices no centro da esfera e bases nas faces do Dodecaedro e do Icosaedro são iguais ou, o que é o mesmo, os raios das esferas inscritas no Dodecaedro e no Icosaedro inscritos em uma mesma esfera são iguais. Assim, o volume do Icosaedro é:

$$\begin{aligned}
 V_{20} &= \frac{1}{3}hS_{20} = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \cdot 2\sqrt{3}(5-\sqrt{5})R^2 \\
 &= \frac{2}{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}R^3 \\
 &\cong 2,536151R^3
 \end{aligned}$$

O ângulo entre duas faces adjacentes do Icosaedro pode ser determinado da seguinte maneira: se N é o ponto médio da aresta VB , o ângulo $\angle ANC$ é o ângulo procurado. Como AC é a diagonal de um pentágono regular cujo lado mede $a + 20$, sua medida é $AC = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)a_{20}$. Por sua vez, $NA = NC = \frac{\sqrt{3}}{2}a_{20}$. Logo, a metade do ângulo procurado é caracterizada pela relação:

$$\frac{\frac{AC}{2}}{NA} = \frac{\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}a_{20}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a_{20}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{6} \cong 0,93417235895$$

Em linguagem trigonométrica diríamos que

$$\theta = 2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{6}\right) \cong 138^\circ 12'$$

Embora Hípsicles tenha enunciado seu teorema apenas para o Dodecaedro e o Icosaedro, também é verdadeiro o seguinte:

Teorema 2.4 *Dados um Cubo e um Octaedro inscritos em uma mesma esfera, os raios das circunferências circunscritas às faces quadradas do cubo e às faces triangulares do octaedro são congruentes.*

Demonstração:

De fato, vimos que as arestas do cubo e do octaedro inscritos em uma esfera de raio de medida R medem, respectivamente, $a_6 = 2R\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $a_8 = \sqrt{2}R$. A medida do raio da circunferência circunscrita em um quadrado cujo lado mede a_6 é $\rho_1 = a_6\frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, $\rho_1 = 2R\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R\frac{\sqrt{6}}{3}$. A medida do raio da circunferência circunscrita em um triângulo equilátero cujo lado mede a_8 é $\rho_2 = a_8\frac{\sqrt{3}}{3}$. Logo, $\rho_2 = \sqrt{2}R\frac{\sqrt{3}}{3} = R\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Logo, $\rho_1 = \rho_2$. ■

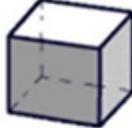
2.4. POLIEDROS REGULARES: UM TRATAMENTO MÉTRICO

A tabela que se segue sumariza as principais características dos poliedros regulares. Nela ficam visíveis algumas propriedades que contrariam nossa intuição. Por exemplo, quando em uma circunferência inscrevemos polígonos regulares com 3, 4, 5, 6, 8, 10, etc., lados, é verdadeiro e intuitivo que, quanto maior o número de lados, menor a medida do lado e maior a área do polígono. Seria razoável conjecturar, então, que nos poliedros regulares quanto maior o número de faces menor a medida da aresta e maior o volume do sólido mas isso não é verdade:

- a aresta do octaedro é maior do que a aresta do cubo e o volume do cubo é maior do que o volume do octaedro, inscritos na mesma esfera.
- a aresta do icosaedro é maior do que a aresta do dodecaedro e o volume do dodecaedro é maior do que o volume do icosaedro, inscritos na mesma esfera.

É fácil provar, entretanto, que para uma mesma área total, os volumes dos poliedros regulares crescem com o número de faces.

Figura 2.11: Poliedros regulares inscritos em uma esfera de raio R

					
	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Faces	4	6	8	12	20
Arestas	6	12	12	30	30
Vértices	4	8	6	20	12
Aresta n_a	$\frac{2}{3}\sqrt{6}R$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}R$	$\sqrt{2}R$	$(\sqrt{15} - \sqrt{3})R$	$\sqrt{10(5 - \sqrt{5})} \frac{R}{5}$
\cong	1,632993R	1,1574701R	1,414213R	0,713644R	1,051462R
Área total	$\frac{8\sqrt{3}}{3}R^2$	$6R^2$	$4\sqrt{3}R^2$	$\sqrt{10 + 2\sqrt{5}(5 - \sqrt{5})} R^2$	$2\sqrt{3}(5 - \sqrt{5}) R^2$
\cong	4,618802 R^2		6,928203 R^2	10,514622 R^2	9,574541 R^2
Volume	$\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}R^3$	$\frac{4}{3}R^3$	$\frac{2}{9}\sqrt{30(3 + \sqrt{5})}R^3$	$\frac{2}{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}R^3$
\cong	0,513200 R^3	1,539601 R^3	1,333333 R^3	2,785164 R^3	2,536151 R^3
Ângulo entre faces	$\text{Arccos}\frac{1}{3}$	90°	$2\text{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2\text{Arccos}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	$2\text{Arccos}\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{6}$
\cong	70°32'		109°29'	116°34'	138°12'

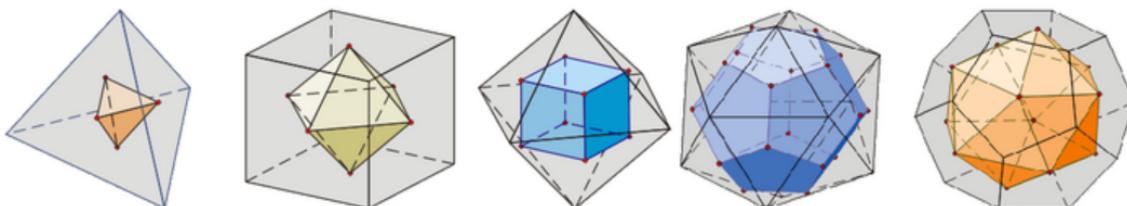
Fonte: Tabela criada pelo autor

2.5 Poliedros duais

Dois poliedros são duais quando o número de vértices de um deles é igual ao número de faces do outro. Por exemplo, o Cubo e o Octaedro são poliedros duais (ver figura abaixo). O Tetraedro é dual com ele mesmo e o Dodecaedro é dual com o Icosaedro.

O dual de um poliedro regular é o poliedro que se obtém unindo-se por segmentos de reta os centros das faces consecutivas do poliedro dado.

Figura 2.12: Poliedros duais



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/exVwHtmk>

Ao ligarmos os centros geométricos (pontos centrais) de faces consecutivas de um poliedro, formando segmentos de reta, obtemos outro poliedro. O sólido formado é chamado de dual do sólido original. Neste novo sólido, o número de vértices será igual ao número de faces do poliedro original, já que os vértices do novo poliedro equivalem aos pontos centrais das faces do primeiro poliedro, e as faces serão os polígonos formados pela reunião dos segmentos obtidos com a ligação dos pontos centrais das faces consecutivas que circundam cada vértice.

Se fizermos este procedimento com os sólidos platônicos, os poliedros resultantes também serão poliedros de Platão.

O cubo e o octaedro são poliedros duais

Observe que o dual do cubo terá seis vértices (número de faces do cubo), e suas faces serão triângulos (polígono formado pela reunião dos segmentos obtidos com a ligação dos pontos centrais das faces consecutivas que circundam cada vértice do cubo). Como cada face possui três arestas, temos que $3F = 2A$, ou seja, $A = \frac{3F}{2}$. Substituindo na relação de Euler, obtemos $6 - \frac{3}{2}F + F = 2$ e, portanto, $F = 8$.

Repetindo o mesmo raciocínio com o octaedro, seu dual terá oito vértices e suas faces serão quadrados. Como cada face possui quatro arestas, temos que $4F = 2A$, isto é, $A = 2F$. E, substituindo na relação de Euler encontramos $F = 6$.

Então, o dual do octaedro será o cubo, uma vez que possui seis faces, doze arestas e oito vértices.

O dodecaedro e o icosaedro são poliedros duais

Enquanto o dual do dodecaedro terá doze vértices, e suas faces serão triângulos. Como cada face possui três arestas, temos que, tal qual o dual do cubo, $3F = 2A$. Substituindo o número de vértices na relação de Euler para poliedros $V - A + F = 2$, temos $12 - \frac{3}{2}F + F = 2$. Resolvendo a equação encontramos $F = 20$.

Logo, o dual do dodecaedro é o icosaedro, já que possui vinte faces, doze vértices e trinta arestas.

Repetindo o mesmo raciocínio com o icosaedro, seu dual terá vinte vértices e suas faces serão pentágonos. Como cada face possui cinco arestas, temos que $5F = 2A$, ou seja, $A = \frac{5F}{2}$.

Substituindo o número de vértices na relação de Euler encontramos $F = 12$.

Logo, o dual do icosaedro é o dodecaedro, já que possui doze faces, vinte vértices e trinta arestas.

Como o cubo é o dual do octaedro e o dodecaedro é o dual do icosaedro, vemos que os raios das circunferências que circunscrevem os polígonos das faces de pares de poliedros regulares reciprocamente duais, inscritos em uma mesma esfera, são congruentes.

Auto-dualidade do tetraedro

Por fim, o dual do tetraedro terá quatro vértices, e suas faces serão triângulos. Como cada face possui três arestas, temos que, tal qual o dual do cubo, $3F = 2A$.

Substituindo a expressão acima e o número de vértices na relação de Euler para poliedros $V - A + F = 2$, encontramos $F = 4$.

Logo, o dual do tetraedro é o próprio tetraedro, já que possui quatro faces, quatro vértices e seis arestas.

Capítulo 3

Poliedros de Arquimedes e suas métricas

3.1 Poliedros semirregulares

Notamos que nos poliedros regulares todas as suas faces devem ser iguais. Neste sentido, podemos imaginar a possibilidade de construir poliedros geométricos com mais de um tipo de faces poligonais congruentes. Essa ideia se reflete na construção de classes de poliedros semirregulares.

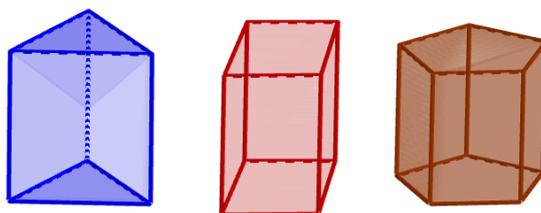
Definição 3.1 *Poliedros semirregulares são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares e todas as configurações dos seus vértices são congruentes, ou seja, são caracterizados por possuírem o mesmo arranjo de polígonos em torno de todos os seus vértices.*

Note que a Definição 3.1 contempla também os poliedros regulares, isto é, se um poliedro é regular então ele é semirregular. Veremos a seguir que há outras classes de poliedros que se encaixam na definição de poliedro semirregular. Inicialmente veremos que há subclasses dos prismas e antiprismas que satisfazem a Definição 3.1.

Na subseção 1.3.1, definimos prismas e detalhamos seus elementos. Aqui vamos definir duas classes derivadas desses objetos que são poliedros semirregulares. A saber, os prismas uniformes e os antiprismas uniformes, como definidos abaixo.

Definição 3.2 (Prisma Uniforme) *Um n -prisma uniforme é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares de n lados congruentes e suas faces laterais são quadrados. Alternativamente, dizemos que é um poliedro convexo formado por dois polígonos regulares de n lados congruentes, que estão em planos paralelos não-coincidentes, ligados por quadrados (Veja Figura 3.1).*

Figura 3.1: Exemplos de prismas uniformes.

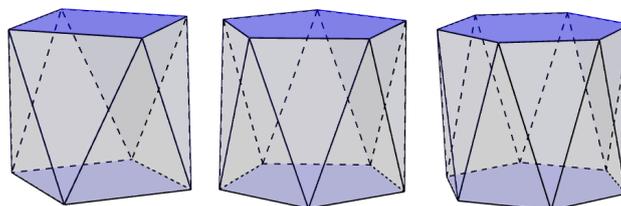


Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Definição 3.3 (Antiprisma Uniforme) *Um n -antiprisma uniforme é um poliedro convexo formado por dois polígonos regulares de n lados congruentes (chamados de bases), que estão contidos em planos paralelos não-coincidentes, ligados por triângulos equiláteros (Veja Figura 3.2).*

Observe para formar um n -antiprisma uniforme, suas bases devem estar em planos paralelos, mas não devem ser paralelas. De fato, uma delas deve ser girada em um ângulo de π/n em torno de seu eixo, a partir da posição em que elas ficam paralelas. Em seguida, a distância entre os planos deve ser ajustada para que os triângulos laterais sejam equiláteros.

Figura 3.2: Exemplos de antiprismas uniformes.



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Observação 3.1 *Perceba que para cada polígono regular de n lados temos um n -prisma uniforme e um n -antiprisma uniforme associados. Isso implica que há uma infinidade desses objetos e, portanto, há uma infinidade de poliedros regulares. Na Figura (3.2) temos três exemplos: um antiprisma de base quadrada, um pentagonal e um hexagonal.*

3.1.1 Truncamento e Snubificação

Outros poliedros semirregulares são obtidos a partir dos poliedros regulares, através de “operações” nas faces dos sólidos platônicos. Essas operações são chamadas de truncamentos, que são cortes nas faces do sólido e snubificação, onde acontece um afastamento das faces do sólido de forma regular.

3.1. POLIEDROS SEMIRREGULARES

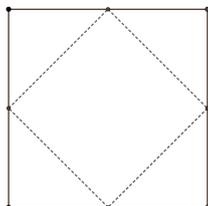
Vamos definir essas operações do seguinte modo:

Definição 3.4 *Truncamento é a operação que consiste em recortar igualmente as faces de um poliedro, de modo que cada vértice se transforme em uma pirâmide e que todas as pirâmides são congruentes.*

A partir desta definição, ampliaremos o conceito afirmando que, iremos utilizar dois tipos de cortes:

1. O primeiro chamaremos de truncamento tipo 1, em que os cortes são feitos passando pelo ponto médio de cada aresta.

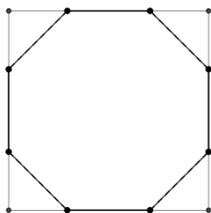
Figura 3.3: Truncamento tipo 1



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

2. O segundo, chamaremos de truncamento tipo 2, em que os cortes são feitos de modo que cada face do sólido primitivo, após a operação, tenha o dobro de arestas, todas congruentes.

Figura 3.4: Truncamento tipo 2



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

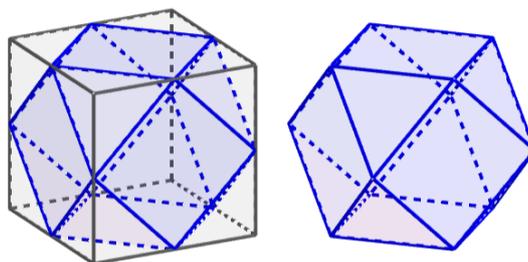
É importante ressaltar que, por cada vértice truncado, irá se formar uma pirâmide em que o número de lados da base é igual ao número de arestas que concorrem um mesmo vértice do sólido primitivo. Além disso, pela regularidade dos sólidos, o corte é sempre perpendicular ao eixo da pirâmide, e conseqüentemente a altura correspondente a esta base.

3.1. POLIEDROS SEMIRREGULARES

- Sólidos obtidos pelo truncamento tipo 1: cuboctaedro e icosidodecaedro.
- Sólidos obtidos pelo truncamento tipo 2: tetraedro truncado, cubo truncado, octaedro truncado, dodecaedro truncado e icosaedro truncado.
- Sólidos obtidos pelo truncamento tipo 1, seguido de um truncamento tipo 2: cuboctaedro truncado e icosidodecaedro truncado.

Temos aqui um exemplo de truncamento a partir do cubo.

Figura 3.5: Truncamento do cubo tipo 1



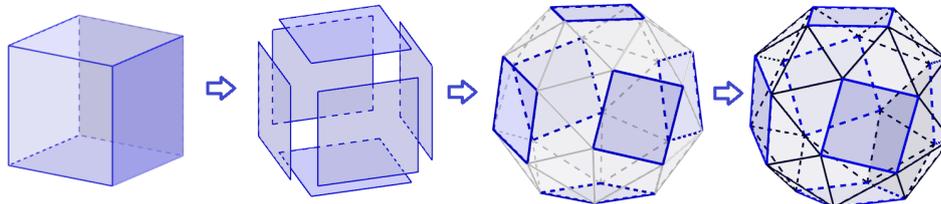
Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Definição 3.5 *Snubficação é a operação que consiste em afastar igualmente as faces de um poliedro regular, girando-as ou não, e preenchendo os espaços vazios com polígonos regulares.*

Se na snubficação não houver rotação, dizemos que a operação foi uma expansão e os sólidos formados são ditos rombos, caso contrário, havendo a expansão e a rotação, teremos uma snubficação em que os sólidos formados são ditos snub.

Sólidos obtidos pela snubficação com rotação: cubo snub e dodecaedro snub.

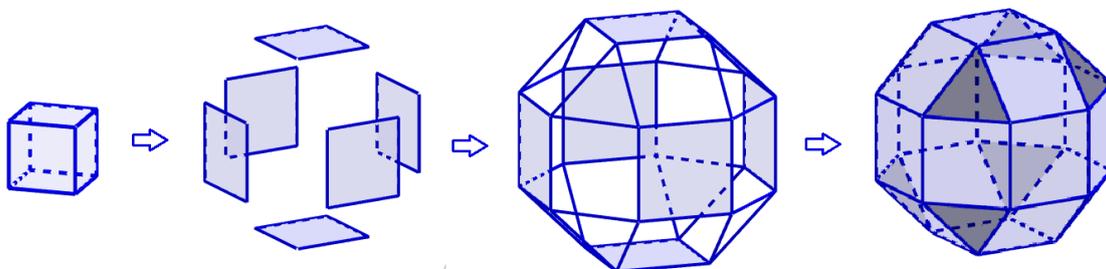
Figura 3.6: Cubo snub



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Sólidos obtidos pela snubificação sem rotação: rombicuboctaedro e rombicosidodecaedro.

Figura 3.7: Rombicuboctaedro



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

3.2 Os poliedros de Arquimedes

Um sólido arquimediano é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo, e por seus vértices ocorrem o mesmo arranjo de polígonos (em número e ordem), que não seja um prisma uniforme nem um antiprisma uniforme.

Esses sólidos têm o nome do matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego Arquimedes de Siracusa [10] (287-212 a.C.) porque foi ele quem os estudou no século III a.C. Infelizmente, o trabalho original de Arquimedes sobre estes sólidos, Evas (1911 – 2004), está agora perdido, segundo o geômetra e historiador norte-americano Howards.

Além de Piero della Francesca, muitos artistas e matemáticos redescobriram gradualmente os sólidos durante o Renascimento. Essas descobertas foram feitas pelo astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler [11] (1571 – 1630) por volta de 1619 em sua obra *Harmonices Mundi*, na qual propôs um estudo sistemático.

Definição 3.6 *Os poliedros arquimedianos são poliedros semirregulares, com excessão dos poliedros regulares, dos prismas e antiprismas uniformes.*

Passaremos em seguida à descrição dos poliedros arquimedianos. O lema a seguir garante que em torno de cada vértice não pode haver mais de três tipos de faces para esses poliedros.

Lema 3.1 *Se todas as faces de um poliedro convexo são polígonos regulares, então, no máximo três tipos diferentes de faces podem aparecer em torno de qualquer ângulo sólido.*

Demonstração:

3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Figura 3.8: Selo grego com Arquimedes e seu trabalho sobre volume de sólidos irregulares, 1983



Fonte: <https://www.preparaenem.com/quimica/densidade-solidos-irregulares-principio-arquimedes.htm>

Se combinarmos quatro a quatro diferentes polígonos regulares, teremos sempre a soma de seus ângulos internos maiores que 360° . O triângulo equilátero tem ângulo interno medindo 60° , o quadrado tem ângulo interno medindo 90° , o pentágono regular tem ângulo interno medindo 108° e um hexágono regular têm ângulo interno medindo 120° . A soma dos ângulos internos desses quatro polígonos regulares resulta em 378° , o que passa de 360° , então se torna impossível de ser construído um poliedro com essas medidas. Como os quatro polígonos regulares citados são os que tem os ângulos internos de menores medidas, ou demais polígonos regulares também são impossíveis de serem utilizados para a construção de um poliedro. ■

O teorema a seguir é o principal resultado dessa seção. Ele garante a existência de exatamente treze poliedros de Arquimedes e sua prova consiste em varrer todas as possibilidades de arranjos das faces em torno de cada vértice, excluindo-se os arranjos impossíveis e exibindo o poliedro de Arquimedes para as configurações possíveis.

Teorema 3.1 *Existem exatamente treze poliedros de Arquimedes.*

A partir de agora provaremos a existência de 13 sólidos de Arquimedes (menos dos prismas e antiprismas). Provaremos isso observando os possíveis arranjos dos polígonos em torno de cada vértice do poliedro para cada valor de m .

Nas demonstrações a seguir observaremos sempre os dois itens seguintes, condições básicas para a construção de um poliedro de Arquimedes.

- Cada vértice possui um mesmo arranjo de polígonos. Como consequência, todos os vértices possuem o mesmo valor para m .

3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

- A soma S_V dos ângulos em torno de um vértice V deve ser menor do que 360° ($S_V < 360^\circ$).

NOTAÇÃO: Iremos adotar a seguinte notação para os tipos de polígonos que formam os poliedros: A_3 para triângulos, A_4 para quadrados, A_5 para pentágonos, A_6 para hexágonos, A_8 para octógonos, A_{10} para decágonos e A_{12} para dodecágonos. Adotaremos também como notação a letra \mathbf{m} para a quantidade de arestas que partem do mesmo vértice. Por exemplo, $\mathbf{m} = \mathbf{3}$ é o poliedro que tem em cada vértice três arestas em seu entorno.

Observação 3.2 Consideremos P um poliedro arquimediano e suponha que em torno de cada vértice de P o polígono regular A , de n lados, apareça uma única vez. Então, cada vértice de P corresponde a um, e somente um vértice de A , ou seja, $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n .

3.2.1 Poliedros arquimedianos: $m = 3$

Lema 3.2 Seja P um poliedro arquimediano tal que o número de arestas que concorrem no mesmo vértice seja 3 ($m = 3$). Então os possíveis arranjos de polígonos em torno de cada vértice são do tipo (X, X, Y) ou do tipo (X, Y, Z) . Além disso, temos:

1. Se o arranjo for do tipo (X, X, Y) então o número de lados de X é par.
2. Se o arranjo for do tipo (X, Y, Z) então o número de lados de X , Y e Z é par.

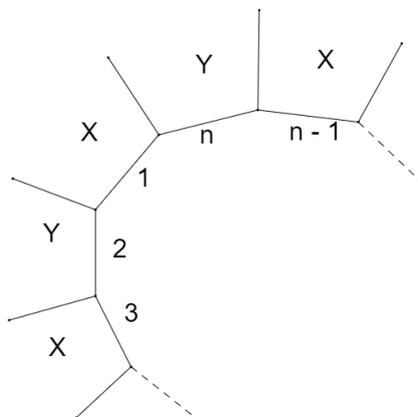
Demonstração: 1. Considere um polígono X de n lados, sendo n um número ímpar. Como a configuração desse poliedro é (X, X, Y) , é preciso que, em cada lado do polígono X (polígono central), tenhamos, alternadamente, um polígono X e um polígono Y (figura 3.9). Lembrando que, as configurações (X, X, Y) , (X, Y, X) e (Y, X, X) são iguais, por permutação circular.

Se o lado 1 receber o polígono X então todos os lados ímpares receberão o polígono X e todos os lados pares o Y . Como n é ímpar, o vértice formado pelos lados 1 e n será da forma (A_X, A_X, A_X) , contrariando a definição de poliedro arquimediano. O raciocínio seria o mesmo se o lado 1 iniciasse com o polígono Y . Neste caso o vértice formado pelo lado 1 e pelo lado n será da forma (A_X, A_X, A_Y) .

2. Suponha que o polígono X tenha número ímpar de lados. Como a configuração desse poliedro é (A_X, A_Y, A_Z) , é preciso que em cada lado do polígono X (polígono central), tenhamos, alternadamente, um polígono Y e um Z . Usando o mesmo argumento anterior, verifica-se que um dos vértices de X ficará com a configuração diferente. ■

Lema 3.3 Seja P um poliedro arquimediano tal que, em cada vértice, o arranjo de polígonos é da forma (A_X, A_Y, A_Z) ($m = 3$). Considere A_X , A_Y e A_Z o número de lados de cada um desses polígonos. Então:

Figura 3.9: Arranjo da forma (A_X, A_X, A_Y)



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

$$\frac{1}{A_X} + \frac{1}{A_Y} + \frac{1}{A_Z} > \frac{1}{2}.$$

Demonstração: Sejam α_X , α_Y e α_Z os ângulos internos dos polígonos X, Y, Z , respectivamente. Sabendo que a soma de todos os ângulos em torno de um vértice V será sempre $S_V < 360^\circ$, então, $S_V = \alpha_X + \alpha_Y + \alpha_Z < 360^\circ$.

Temos então:

$$\begin{aligned} \frac{180^\circ(A_X - 2)}{A_X} + \frac{180^\circ(A_Y - 2)}{A_Y} + \frac{180^\circ(A_Z - 2)}{A_Z} &< 360^\circ \\ \frac{(A_X - 2)}{A_X} + \frac{(A_Y - 2)}{A_Y} + \frac{(A_Z - 2)}{A_Z} &< 2 \\ 1 - \frac{2}{A_X} + 1 - \frac{2}{A_Y} + 1 - \frac{2}{A_Z} &< 2 \\ \frac{2}{A_X} + \frac{2}{A_Y} + \frac{2}{A_Z} &> 1 \\ \frac{1}{A_X} + \frac{1}{A_Y} + \frac{1}{A_Z} &> \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

■

Proposição 3.1 Para $m = 3$, teremos 7 possíveis arranjos de polígonos em torno de cada vértice V de um poliedro arquimediano.

Demonstração: Começaremos analisando os possíveis arranjos do tipo (X, X, Y) . Pelo Lema 3.2, o número de lados de X tem que ser par e pela observação (3.1) deduzimos que $A_X \geq 6$, pois se caso $A_X = 4$, teríamos a composição $(4, 4, Y)$, o que representaria a

3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

soma $90^\circ + 90^\circ + A_Y < 360^\circ$ e essa composição é possível para A_Y qualquer polígono, o que representaria um prisma.

Vamos analisar agora caso a caso observando o Lema 3.3.

- O arranjo (A_6, A_6, A_Y)

Esse arranjo só pode acontecer se Y for um triângulo equilátero ou um quadrado ou um pentágono regular (ver Figura (3.10)). Observe que

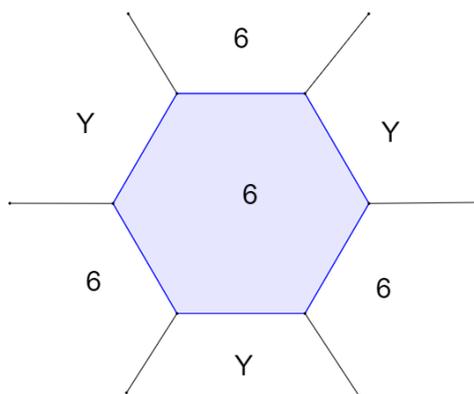
$$\frac{1}{A_6} + \frac{1}{A_6} + \frac{1}{A_Y} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{Y} > \frac{1}{2}$$

$$A_Y < 6.$$

Logo, $A_Y = 3$, $A_Y = 4$ ou $A_Y = 5$.

Figura 3.10: Arranjo da forma (A_6, A_6, A_Y)



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Encontramos então as possíveis configurações: (A_6, A_6, A_3) , (A_6, A_6, A_4) e (A_6, A_6, A_5) . Encontraremos agora o número de faces, vértices e arestas destes arranjos.

1. O arranjo (A_6, A_6, A_3)

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces hexagonais. Pela observação (3.2) temos $V = 3x$. Sendo $m = 3$ então $A = \frac{3V}{2} = \frac{9x}{2}$.

Mas, temos também que $A = \frac{3x + 6y}{2}$. Então, temos $\frac{3x + 6y}{2} = \frac{9x}{2} \Rightarrow x = y$

Pelo Teorema de Euler, $F + V = A + 2$, substituindo os valores acima, temos:
 $x + y + 3x = \frac{9x}{2} + 2.$

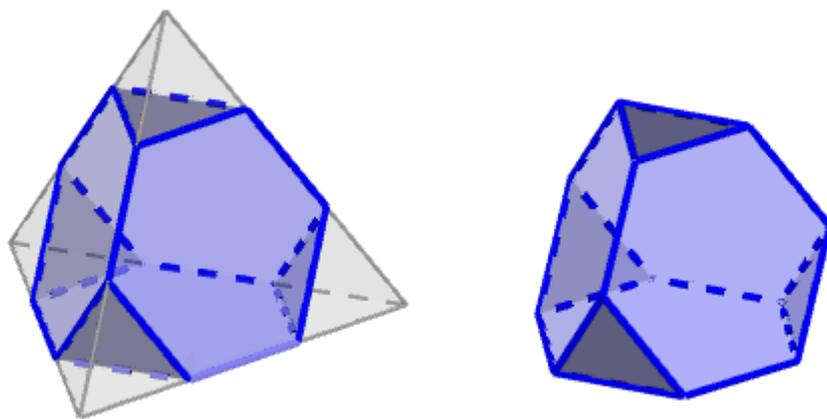
3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Logo, $x + x + 3x = \frac{9x}{2} + 2 \Leftrightarrow x = y = 4$. Portanto, $A = 18$, $F = 8$ e $V = 12$. Temos o **tetraedro truncado**.

O Tetraedro truncado é o resultado do truncamento do tetraedro. Em cada um de seus 4 vértices são seccionados pirâmides de bases triangulares, e esses triângulos são equiláteros. Temos então a configuração (A_3, A_6, A_6) em cada vértice, o que quer dizer que em cada vértice temos uma face triangular e duas faces hexagonais.

Composição: 4 triângulos equiláteros e 4 hexágonos regulares, num total de 8 faces. 18 arestas e 12 vértices.

Figura 3.11: Tetraedro truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

2. O arranjo (A_6, A_6, A_4)

Suponha que o poliedro tenha x faces quadradas e y faces hexagonais. Pela observação (3.2) temos $V = 4x$. Sendo $m = 3$ então $A = \frac{3V}{2} = \frac{12x}{2} = 6x$.

Mas, temos também que $A = \frac{4x + 6y}{2} = 2x + 3y$. Então, temos $2x + 3y = 6x \Rightarrow 4x = 3y$

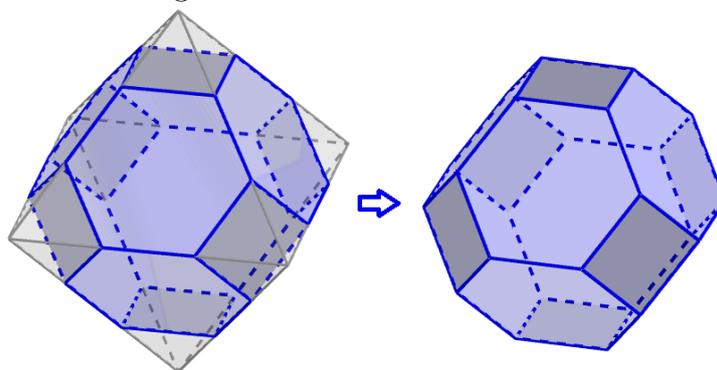
Pelo Teorema de Euler, $F + V = A + 2$, substituindo os valores acima, temos: $x + y + 4x = 6x + 2$.

Logo, $x + \frac{4x}{3} + 4x = 6x + 2 \Leftrightarrow x = 6$ e $y = 8$. Portanto, $A = 36$, $F = 14$ e $V = 24$. Temos o **Octaedro truncado**.

O octaedro truncado, como o próprio nome já sugere, é o resultado do truncamento tipo 2 do octaedro. Em cada um de seus 6 vértices são seccionados pirâmides de bases quadradas. Temos a configuração (A_4, A_6, A_6) em cada vértice, o que quer dizer que em cada vértice temos uma face quadrada e duas faces hexagonais.

Composição: 6 quadrados e 8 hexágonos regulares, 14 faces, 36 arestas e 24 vértices.

Figura 3.12: Octaedro truncado



Fonte: próprio autor no GEOGEBRA

3. O arranjo (A_6, A_6, A_5)

Suponha que o poliedro tenha x faces pentagonais e y faces hexagonais. Pela observação (3.2) temos $V = 5x$. Sendo $m = 3$ então $A = \frac{3V}{2} = \frac{15x}{2} = 6x$.

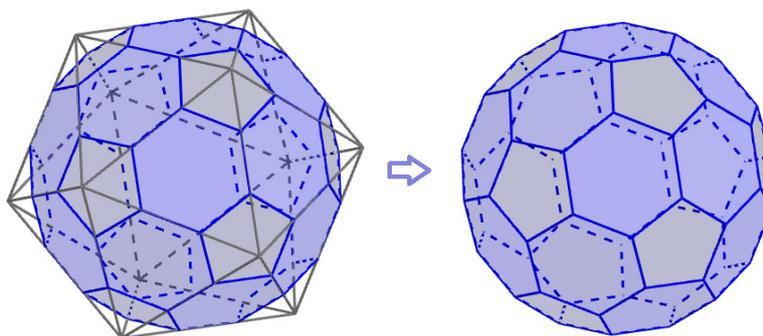
Mas, temos também que $A = \frac{5x + 6y}{2} = \frac{15x}{2}$. Então, temos $5x + 6y = 15x \Rightarrow 5x = 3y$.

Pelo teorema de Euler, $F + V = A + 2$, substituindo os valores acima, temos: $x + y + 5x = \frac{15x}{2} + 2 \Leftrightarrow x + \frac{5x}{3} + 5x = \frac{15x}{2} + 2 \Leftrightarrow x = 12$ e $y = 20$. Portanto, $A = 90$, $F = 32$ e $V = 60$. Temos o **Icosaedro truncado**.

O Icosaedro truncado, como o próprio nome já sugere, é o resultado do truncamento tipo 2 do Icosaedro. Em cada um de seus 12 vértices são seccionados pirâmides de bases pentagonais regulares. Temos a configuração (A_5, A_6, A_6) em cada vértice, o que quer dizer que em cada vértice temos uma face pentagonal e duas hexagonais.

Composição: 12 pentágonos regulares e 20 hexágonos regulares, 32 faces 90 arestas e 60 Vértices.

Figura 3.13: Icosaedro truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

4. O arranjo (A_8, A_8, A_Y)

Pelo Lema 3.3, observamos que:

$$\frac{1}{A_8} + \frac{1}{A_8} + \frac{1}{A_Y} > \frac{1}{2}$$

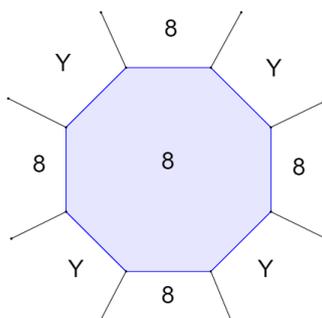
$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{Y} > \frac{1}{2}$$

$$A_Y < 4.$$

Logo, $A_Y = 3$.

Esse arranjo só pode acontecer se Y for um triângulo equilátero (ver Figura (3.14)).

Figura 3.14: Arranjo da forma $(8,8,Y)$



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Encontramos então a ÚNICA configuração possível: (A_8, A_8, A_3) . Encontraremos agora o número de faces, vértices e arestas deste arranjo.

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces octogonais. Pela observação (3.2) temos $V = 3x$. Sendo $m = 3$ então $A = \frac{3V}{2} = \frac{9x}{2}$.

Mas, temos também que $A = \frac{3x + 8y}{2}$. Então, temos $\frac{3x + 8y}{2} = \frac{9x}{2} \Rightarrow 3x + 8y = 9x \Rightarrow 3x = 4y$

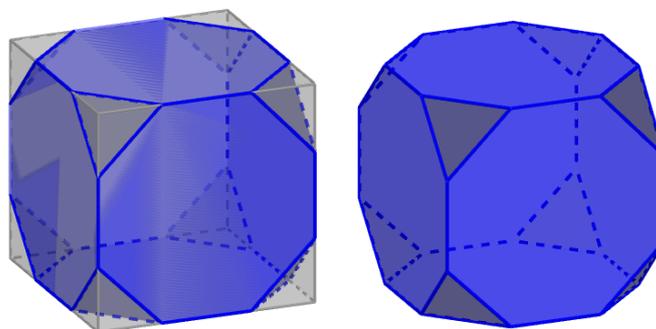
Pelo Teorema de Euler, $F + V = A + 2$, substituindo os valores acima, temos: $x + y + 3x = \frac{9x}{2} + 2$.

Logo, $x + \frac{3x}{4} + 3x = \frac{9x}{2} + 2 \Leftrightarrow x = 8$ e $y = 6$. Portanto, $A = 36$, $F = 14$ e $V = 24$. Temos o **Cubo truncado**.

O cubo truncado, como o próprio nome já sugere, é o resultado do truncamento tipo 2 do cubo. Em cada um de seus 8 vértices são seccionados pirâmides de bases triangulares, novamente triângulos equiláteros. Temos a configuração (A_8, A_8, A_3) em cada vértice, o que quer dizer que em cada vértice temos duas faces octogonais e uma triangular.

Composição: 8 triângulos equiláteros e 6 octógonos regulares, 14 faces, 36 arestas e 24 vértices.

Figura 3.15: Cubo truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

5. O arranjo (A_{10}, A_{10}, Y)

Pelo Lema 3.3, observamos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_x} + \frac{1}{A_Y} + \frac{1}{A_Z} &> \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{Y} &> \frac{1}{2} \\ A_Y < \frac{10}{3} &\Rightarrow A_Y = 3. \end{aligned}$$

Logo, $n_Y = 3$. Esse arranjo só pode acontecer se Y for um triângulo equilátero (ver Figura (3.16)).

Encontramos então a ÚNICA configuração possível: (A_{10}, A_{10}, A_3) . Encontraremos agora o número de faces, vértices e arestas deste arranjo.

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces decagonais. Pela observação (3.2) temos $V = 3x$. Sendo $m = 3$ então $A = \frac{3V}{2} = \frac{9x}{2}$.

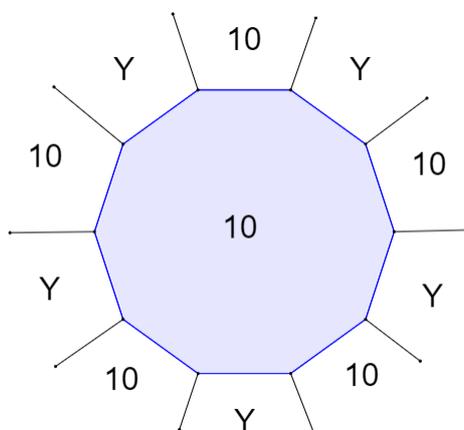
Mas, temos também que $A = \frac{3x + 10y}{2}$. Então, temos $\frac{3x + 10y}{2} = \frac{9x}{2} \Rightarrow 3x + 8y = 9x \Rightarrow 3x = 5y$

Pelo Teorema de Euler, $F + V = A + 2$, substituindo os valores acima, temos: $x + y + 3x = \frac{9x}{2} + 2$.

Logo, $x + \frac{3x}{5} + 3x = \frac{9x}{2} + 2 \Leftrightarrow x = 20$ e $y = 12$. Portanto, $A = 90$, $F = 32$ e $V = 60$. Temos o **Dodecaedro truncado**.

O dodecaedro truncado é o resultado do truncamento tipo 2 do dodecaedro. Em cada um de seus 20 vértices são seccionados pirâmides, cujas bases são triângulos equiláteros.

Figura 3.16: Arranjo da forma (A_{10}, A_{10}, A_Y)

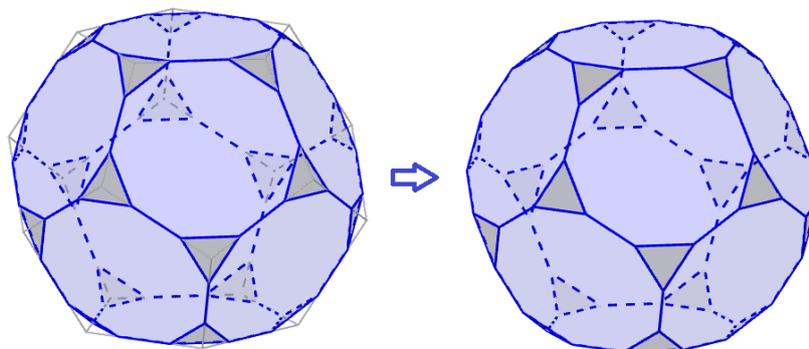


Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Temos a configuração (A_{10}, A_{10}, A_3) em cada vértice, o que quer dizer que em cada vértice temos uma face triangular e duas decagonais.

Composição: 20 triângulos equiláteros, 12 decágonos regulares, 32 faces, 90 arestas e 60 vértices.

Figura 3.17: Dodecaedro truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Observação 3.3 O arranjo (A_{12}, A_{12}, Y) (dodecágono-dodecágono- Y) não é possível ser construído, pois a soma dos ângulos em cada vértice seria igual ou maior a 360° . Vejamos como ficaria (A_{12}, A_{12}, A_3) : $S_V = 150^\circ + 150^\circ + 60^\circ = 360^\circ$, o que não pode acontecer.

Vamos agora verificar como fica se os três poliedros em cada vértice forem diferentes. Considere agora o arranjo em torno de um vértice do tipo (X, Y, Z) (os três polígonos

3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

regulares são diferentes). Usando o Lema 3.3 verificamos que as configurações possíveis são:

6. O arranjo (A_4, A_6, A_8)

Primeiro devemos observar se é possível ter um vértice com esses ângulos, $S_V = 90^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 345^\circ < 360^\circ$. Logo, é possível a construção.

Suponha que o poliedro tenha x quadrados, y hexágonos e z octógonos. Pela observação (3.2) temos: $V = 4x = 6y = 8z$, então $A = \frac{3V}{2} = 6x$.

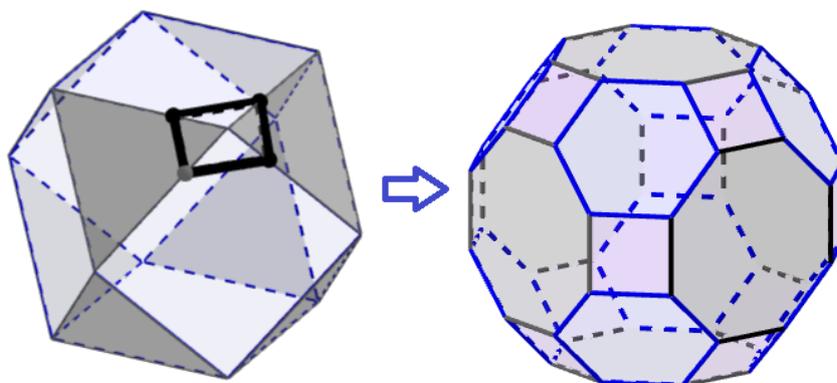
Mas, temos também que $A = \frac{3x + 6y + 8z}{2} = 6x$. Então, temos $2x + 3y + 4z = 6x$

Pelo Teorema de Euler, $F + V = A + 2$, substituindo os valores acima, temos: $x + y + z + 4x = 6x + 2 \Leftrightarrow x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} + 4x = 6x + 2 \Rightarrow x = 12, y = 8$ e $z = 6$. Portanto, $A = 72, F = 26$ e $V = 48$. Temos o **cupoctaedro truncado**.

O cupoctaedro truncado, é o resultado do truncamento do cupoctaedro e da expansão após o truncamento. Após o cupoctaedro ser truncado, os vértices formam pirâmides de base retangular. Após esse truncamento, as faces sofrem uma expansão para que os seus lados sejam congruentes, formando a configuração (A_4, A_6, A_8) em cada vértice, ou seja, em cada vértice temos uma face quadrada, uma face hexagonal e uma octogonal, e criando assim o cupoctaedro truncado.

Composição: 12 quadrados, 6 octógonos regulares e 8 hexágonos regulares, 26 faces, 72 arestas e 48 vértices.

Figura 3.18: Cupoctaedro Truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

7. O arranjo (A_4, A_6, A_{10})

Primeiro devemos observar se é possível ter um vértice com esses ângulos, $S_V = 90^\circ + 120^\circ + 144^\circ = 354^\circ < 360^\circ$. Logo, é possível a construção.

Suponha que o poliedro tenha x quadrados, y hexágonos e z decágonos. Pela observação (3.2) temos: $V = 4x = 6y = 10z$, então $A = \frac{3V}{2} = 6x$.

3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

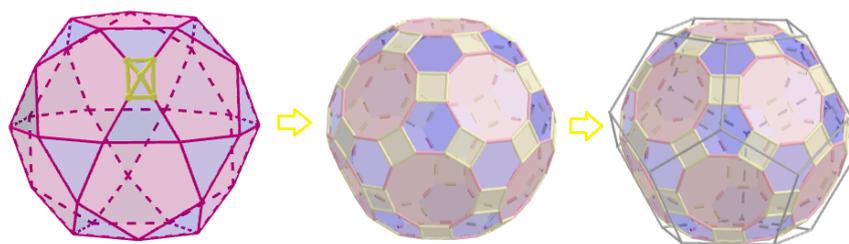
Mas, temos também que $A = \frac{4x + 6y + 10z}{2} = 6x$. Então, temos $2x + 3y + 5z = 6x$

Pelo Teorema de Euler, $F + V = \frac{2}{3}A + 2$, substituindo os valores acima, temos:
 $x + y + z + 4x = 6x + 2 \Leftrightarrow x + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{5} + 4x = 6x + 2 \Rightarrow x = 30, y = 20$ e $z = 12$.
 Portanto, $A = 180, F = 62$ e $V = 120$. Temos o **icosidodecaedro truncado**.

O icosidodecaedro truncado é obtido pelo truncamento tipo 2 do icosidodecaedro. Assim como o cuboctaedro truncado, o truncamento do icosidodecaedro não gera um novo polígono regular, uma vez que a configuração é (A_3, A_3, A_5, A_5) , o truncamento gera um retângulo na base da pirâmide de cada truncamento. Nesse caso é necessário uma expansão para gerar o icosidodecaedro truncado. Temos a configuração (A_4, A_6, A_{10}) em cada vértice, o que quer dizer que em cada vértice temos uma face quadrada, uma hexagonal e uma decagonal.

Composição: 30 quadrados, 20 hexágonos regulares e 12 decágonos regulares, 62 faces, 180 arestas e 120 Vértices.

Figura 3.19: Icosidodecaedro truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Observação 3.4 O arranjo $A_4A_6A_{12}$ (quadrado-hexágono-dodecágono) não é possível ser construído, pois a soma dos ângulos em cada vértice seria igual a 360° . Vejamos como ficaria (A_4, A_6, A_{12}) : $S_V = 90^\circ + 120^\circ + 150^\circ = 360^\circ$, o que não pode acontecer.

■

3.2.2 Poliedros arquimedianos: $m = 4$

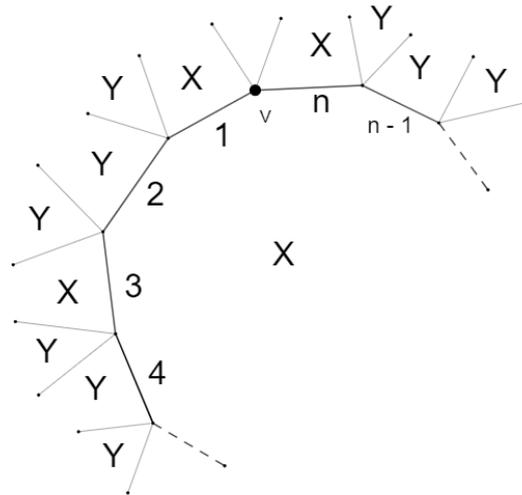
Lema 3.4 Seja P um poliedro arquimediano tal que o número de arestas que concorrem no mesmo vértice seja 4 ($m = 4$). Então os possíveis arranjos de polígonos em torno de cada vértice são do tipo (A_X, A_X, A_X, A_Y) , (A_X, A_Y, A_X, A_Y) ou do tipo (A_X, A_Y, A_X, A_Z) . Além disso, se o arranjo for do tipo (A_X, A_Y, A_X, A_Z) então o número de lados de X é par.

Demonstração:

3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Usando análise combinatória podemos notar que os casos possíveis de arranjos são (A_X, A_X, A_X, A_Y) , (A_X, A_X, A_Y, A_Y) , (A_X, A_Y, A_X, A_Y) , (A_X, A_X, A_Y, A_Z) , (A_X, A_Y, A_X, A_Z) e (A_X, A_Y, A_Z, A_W) . Vamos mostrar que, pelas hipóteses do problema, os casos (A_X, A_X, A_Y, A_Y) , (A_X, A_X, A_Y, A_Z) e (A_X, A_Y, A_Z, A_T) não podem acontecer. A distribuição (A_X, A_X, A_Y, A_Y) só é possível se o número de lados de X e Y for par. De fato, suponha que X tenha um número ímpar de lados n , então em torno de X (polígono central) distribuiremos os polígonos X e Y levando-se em consideração o tipo de arranjo. ■

Figura 3.20: Arranjo da forma (A_X, A_X, A_Y, A_Y)



Fonte: Feito pelo próprio autor no GEOGEBRA

Considere um polígono X de n lados, sendo n um número ímpar. Se o lado de numeração 1 receber o polígono X então todos os lados ímpares receberão o polígono X e todos os lados pares o Y . Como existem n lados, e n é ímpar, o vértice V (formado pelos lados 1 e n) será da forma (A_X, A_X, A_Y, A_X) , o que por definição de poliedro arquimediano não é possível (Figura (3.20)). O mesmo argumento ocorre se o lado de numeração 1 iniciar com o polígono Y .

O quadrado (A_4) e o hexágono (A_6) são os polígonos de menor quantidade de lados pares. Portanto, X e Y tem um número par de lados. teremos o arranjo (A_4, A_4, A_6, A_6) que não será possível, pois, pela soma dos ângulos internos desses polígonos, $S_V = 90^\circ + 90^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 420^\circ > 360^\circ$.

Na configuração (A_X, A_X, A_Y, A_Z) só é possível se X , Y e Z tiverem número de lados par. Vamos começar com X no centro. Se o lado de número 1 receber o polígono X então todos os lados ímpares receberão o polígono X e todos os lados pares o Z . Como n é ímpar, o vértice V (formado pelos lados de numeração 1 e n) será da forma (A_X, A_X, A_Y, A_X) , contrariando a definição de poliedro arquimediano (Figura (3.21)).

3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

ser par ou ímpar. Suponha, por contradição, que o polígono X tenha número ímpar de lados, ou seja, n é um polígono com a quantidade de lados ímpar. Colocando o polígono X no centro, e alternando X, Y e Z entre os lados do polígono central (Figura (3.22)), observe que os arranjos de todos os vértices serão da forma (A_X, A_Y, A_X, A_Z) , exceto o vértice V (formado pelas arestas de lados 1 e n). Fixando Y ou Z no centro, segue o mesmo raciocínio. Logo, n tem que ser par.

Lembrando pela definição 3.3, um antiprisma limitado convexo é uma região compreendida entre duas seções paralelas e distintas, **lateralmente ligadas por triângulos**. Isso quer dizer que o poliedro da forma (A_3, A_3, A_3, A_n) será um antiprisma, logo, essa configuração não será utilizada para nossa demonstração.

Considerando as afirmações acima, é possível, para $m = 4$, termos apenas 4 possibilidades de arranjos de polígonos em torno de cada vértice V de um poliedro arquimediano.

8. O arranjo (A_3, A_4, A_3, A_4)

Suponha que o poliedro tenha 2 faces triangulares e 2 faces quadradas. Observando a soma dos ângulos em torno desse vértice, temos: $60^\circ + 90^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 300^\circ < 360^\circ$, logo, é possível a construção.

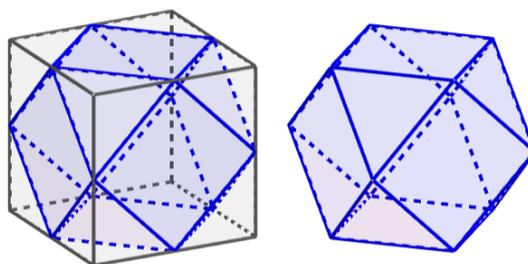
Pela observação (3.2), temos: $V = \frac{3x}{2} = \frac{4y}{2} \rightarrow 3x = 4y$. Como $m = 4$, temos que $A = \frac{4V}{2} = 2V = 3x = 4y$.

Pelo Teorema de Euler, temos $V + F = A + 2$, substituindo os valores, encontramos: $x + y + \frac{3x}{2} = 3x + 2 \Leftrightarrow x + \frac{3x}{4} + \frac{3x}{2} = 3x + 2 \Rightarrow x = 8$ e $y = 6 \Rightarrow A = 24, F = 14$ e $V = 12$. Temos o **Cuboctaedro**.

O cuboctaedro, é o resultado do truncamento tipo 1 do cubo. Em cada um de seus 8 vértices são seccionados pirâmides de bases triangulares, novamente triângulos equiláteros. Temos a configuração (A_3, A_4, A_3, A_4) em cada vértice, o que quer dizer que em cada vértice temos duas faces triangulares e duas faces quadradas.

Composição: 8 triângulos equiláteros e 6 quadrados, 14 faces, 24 arestas e 12 vértices.

Figura 3.23: Cuboctaedro



Fonte: Feito pelo próprio autor no GEOGEBRA

3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

9. O arranjo (A_3, A_5, A_3, A_5)

Suponha que o poliedro tenha 2 faces triangulares e 2 faces pentagonais. Observando a soma dos ângulos em torno desse vértice, temos:

$$60^\circ + 108^\circ + 60^\circ + 108^\circ = 336^\circ < 360^\circ$$

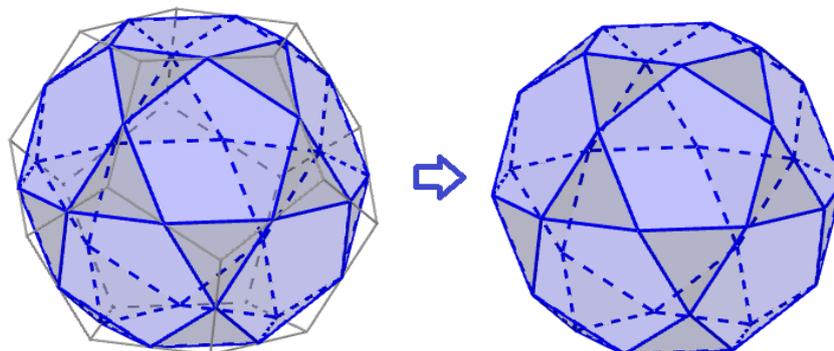
Pela observação (3.2), temos: $V = \frac{3x}{2} = \frac{5y}{2} \rightarrow 3x = 5y$. Como $m = 4$, temos que $A = \frac{4V}{2} = 2V = 3x = 5y$.

Pelo Teorema de Euler, temos $V + F = A + 2$, substituindo os valores, encontramos: $x + y + \frac{3x}{2} = 3x + 2 \Leftrightarrow x + \frac{3x}{5} + \frac{3x}{2} = 3x + 2 \Rightarrow x = 20$ e $y = 12 \Rightarrow A = 60$, $F = 32$ e $V = 30$. Temos o **Icosidodecaedro**.

O icosidodecaedro é o resultado do truncamento tipo 1 do dodecaedro. Em cada um de seus 20 vértices são seccionados pirâmides, cujas bases são triângulos equiláteros. Temos a configuração (A_3, A_5, A_3, A_5) em cada vértice, o que quer dizer que em cada vértice temos duas faces pentagonais regulares e duas faces triangulares equiláteros.

Composição: 20 triângulos equiláteros e 12 pentágonos regulares, 32 faces, 60 arestas e 30 vértices.

Figura 3.24: Icosidodecaedro



Fonte: Feito pelo próprio autor no GEOGEBRA

Observação 3.5 O arranjo (A_3, A_6, A_3, A_6)

Suponha que o poliedro tenha 2 faces triangulares e 2 faces hexagonais. Observando a soma dos ângulos em torno desse vértice, temos:

$$60^\circ + 120^\circ + 60^\circ + 120^\circ = 360^\circ.$$

O que torna esse ou qualquer outro poliedro da configuração (A_3, A_n, A_3, A_n) , com $n \geq 6$ impossível de ser construído.

3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

10. O arranjo (A_4, A_4, A_4, A_n)

Suponha que o poliedro tenha 2 faces triangulares e 2 faces quadradas. Observando a soma dos ângulos em torno desse vértice, temos:

$$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + A_n < 360^\circ, A_n < 360^\circ - 270^\circ, A_n < 90^\circ$$

O polígono que tem ângulo interno menor que 90° é o triângulo equilátero. Então temos a configuração (A_4, A_4, A_4, A_3)

Pela observação (3.2), temos: $V = 3x$. Como $m = 4$, temos que $A = \frac{4V}{2} = 6x$.

Mas temos também que $A = \frac{3x + 4y}{2} = 6x \Leftrightarrow 9x = 4y$.

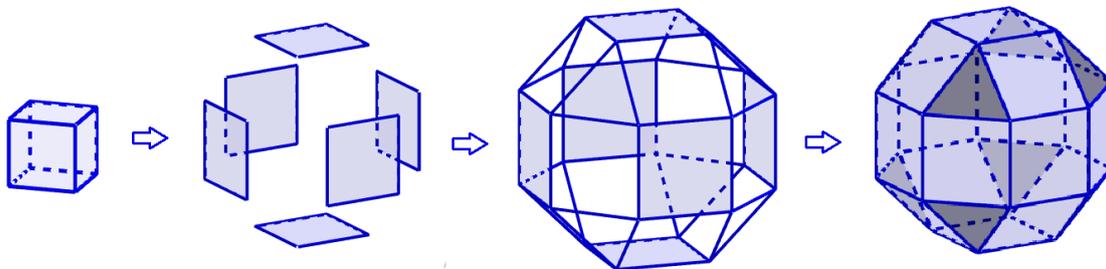
Pelo Teorema de Euler, temos $V + F = A + 2$, substituindo os valores, encontramos: $x + y + 3x = 6x + 2 \Leftrightarrow x + \frac{9x}{4} + 3x = 6x + 2 \Rightarrow x = 8$ e $y = 18 \Rightarrow A = 42, F = 26$ e $V = 24$. Temos o **rombicuboctaedro**.

O rombicuboctaedro, é o resultado da expansão do cubo. Cada uma de suas faces são separadas e afastadas igualmente a mesma distância, considerando o centro do cubo e mantendo suas faces opostas paralelas. Após a separação, as arestas dos quadrados se ligam, formando novos quadrados e os vértices se ligam formando triângulos equiláteros.

Temos a configuração (A_3, A_4, A_4, A_4) em cada vértice, ou seja, em cada vértice temos três faces quadradas e uma triangular.

Composição: 18 quadrados e 8 triângulos equiláteros, 26 faces, 42 arestas e 24 vértices.

Figura 3.25: Rombicuboctaedro



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

11. O arranjo (A_4, A_3, A_4, A_5)

Suponha que o poliedro tenha 1 face triangular, 2 faces quadradas e 1 face pentagonal. Observando a soma dos ângulos em torno desse vértice, temos:

$$90^\circ + 60^\circ + 90^\circ + 108^\circ = 348^\circ < 360^\circ.$$

Logo, é possível a construção.

3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares, y faces quadradas e z faces pentagonais. Pela observação (3.2), temos: $V = 3x = \frac{4y}{2} = 5z$. Como $m = 4$, temos que

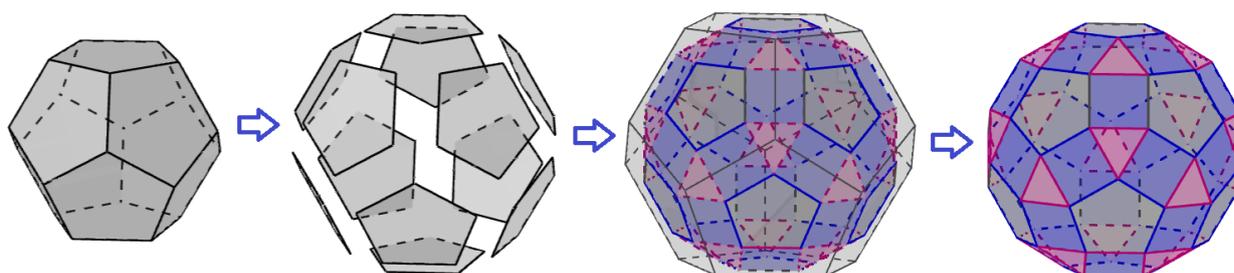
$$A = \frac{4V}{2} = 2V = 6x = 4y = 10z.$$

Pelo Teorema de Euler, temos $V + F = A + 2$, substituindo os valores, encontramos: $x + y + z + 3x = 6x + 2 \Leftrightarrow y + z = 2x + 2 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} + \frac{3x}{5} = 2x + 2 \Leftrightarrow x = 20, y = 30$ e $z = 12 \Rightarrow A = 120, F = 62$ e $V = 60$. Temos o **rombicosidodecaedro**.

O rombicosidodecaedro é o resultado da expansão do dodecaedro, onde cada uma de suas faces são separadas e afastadas igualmente a mesma distância, considerando o centro do dodecaedro e mantendo suas faces opostas paralelas. Após a separação, as arestas dos pentágonos se ligam, formando novos quadrados e triângulos equiláteros. Temos a configuração (A_3, A_4, A_4, A_5) em cada vértice, o que quer dizer que em cada vértice temos uma face triangular, duas quadradas e uma pentagonal.

Composição: 20 triângulos equiláteros, 30 quadrados e 12 pentágonos regulares, 62 faces, 120 arestas e 60 vértices.

Figura 3.26: Rombicuboctaedro



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

3.2.3 Poliedros arquimedianos: $m = 5$

Para $m = 5$, teremos 5 polígonos em cada vértice do poliedro.

Observação 3.6 Vamos considerar o primeiro caso, onde todos os polígonos são triângulos equiláteros, ou seja $(A_3, A_3, A_3, A_3, A_3)$. Esse poliedro é o icosaedro, um poliedro platônico.

12. O segundo caso, vamos considerar o poliedro $(A_3, A_3, A_3, A_3, A_4)$. Vamos ver a soma dos ângulos em cada vértice:

3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

$$S_V = A_3 + A_3 + A_3 + A_3 + A_4$$

$$S_V = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 330^\circ < 360^\circ.$$

Logo, é possível a construção.

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces quadradas.

Pela observação (3.2), temos: $V = 4y$. Como $m = 5$, temos que $A = \frac{5V}{2} = \frac{20y}{2} = 10y$.

Pelo Teorema de Euler, temos $V + F = A + 2$, substituindo os valores, encontramos: $x + y + 4y = 10y + 2 \Leftrightarrow x = 5y + 2$.

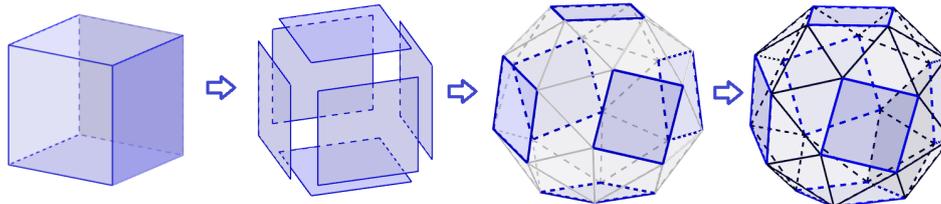
Mas, temos também que $A = \frac{3x + 4y}{2} = 10y \Leftrightarrow 3x = 16y$. Então, temos $x = 32$ e $y = 16$. Logo, $A = 60$, $F = 38$ e $V = 24$. Temos o **cubo snub**.

O cubo snub é o resultado da snubificação do cubo. Cada uma de suas faces são separadas e afastadas igualmente a mesma distância, considerando o centro do cubo e depois tem uma rotação síncrona desses quadrados. Por cada vértice dessa nova configuração são formados 4 triângulos equiláteros.

Temos a configuração $(A_3, A_3, A_3, A_3, A_4)$ em cada vértice, ou seja, em cada vértice temos uma face quadrada, e quatro faces triangulares.

Composição: 6 quadrados e 32 triângulos equiláteros, 38 faces, 60 arestas e 24 vértices.

Figura 3.27: Cubo snub



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

13. O terceiro caso é $(A_3, A_3, A_3, A_3, A_5)$. Vamos ver a soma dos ângulos em cada vértice:

$$S_V = A_3 + A_3 + A_3 + A_3 + A_5$$

$$S_V = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 108^\circ = 348^\circ < 360^\circ.$$

Logo, é possível a construção.

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces pentagonais.

Pela observação (3.2), temos: $V = 5y$. Como $m = 5$, temos que $A = \frac{5V}{2} = \frac{25y}{2} = 10y$.

Pelo Teorema de Euler, temos $V + F = A + 2$, substituindo os valores, encontramos: $x + y + 5y = \frac{25y}{2} + 2 \Leftrightarrow 2x = 13y + 4$.

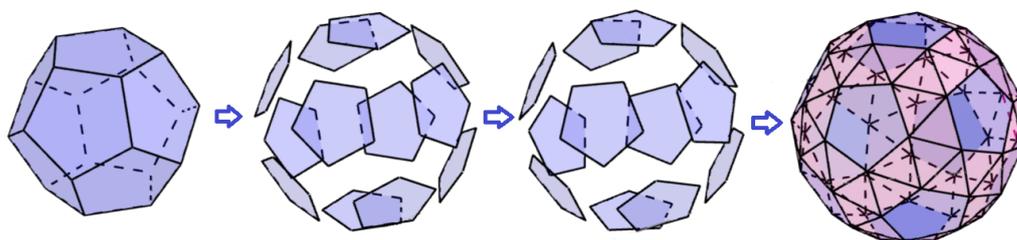
Mas, temos também que $A = \frac{3x + 5y}{2} = \frac{25y}{2} \Leftrightarrow 3x = 20y$. Então, temos $x = 80$ e $y = 12$. Logo, $A = 150$, $F = 92$ e $V = 60$. Temos o **dodecaedro snub**.

3.2. OS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

O dodecaedro snub é obtido por snubificação do dodecaedro. A partir do dodecaedro, existe uma expansão, onde cada uma de suas faces são separadas e afastadas igualmente a mesma distância, considerando o centro do dodecaedro e mantendo suas faces opostas paralelas. Após a expansão, existe uma rotação das faces, todas no mesmo sentido e mesmo ângulo até o ponto onde é possível formar, através dos vértices dos pentágonos, triângulos equiláteros. Temos a configuração $(A_3, A_3, A_3, A_3, A_5)$ em cada vértice, o que quer dizer que em cada vértice temos quatro faces triangulares e uma pentagonal.

Composição: 80 triângulos equiláteros, 12 pentágonos regulares, 92 faces, 150 arestas e 60 vértices.

Figura 3.28: Dodecaedro snub



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Observação 3.7 Para o caso $(A_3, A_3, A_3, A_3, A_5)$. Vamos ver a soma dos ângulos em cada vértice:

$$S_V = A_3 + A_3 + A_3 + A_3 + A_5$$

$$S_V = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 120^\circ = 360^\circ.$$

O que torna impossível de ser construído o poliedro $(A_3, A_3, A_3, A_3, A_5)$.

Afirmção 3.1 Nesse caso, qualquer que seja o valor para $n \geq 6$ na configuração $S_V = A_3 + A_3 + A_3 + A_3 + A_n$ é impossível de ser construído. Como o triângulo é o polígono com menor valor de ângulo interno, também se torna impossível formar outro poliedro com outra configuração. Vejamos:

Demonstração:

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares, y faces quadradas e z faces pentagonais. A soma dos ângulos desses polígonos será: $60x + 90y + 108z < 360^\circ$. Sabemos que, como $m = 5$, existem 5 polígonos em torno de cada vértice, logo: $x + y + z = 5$. Então, temos o sistema:

$$\begin{cases} 60x + 90y + 108z < 360^\circ \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Simplificando a primeira equação e multiplicando a segunda equação por (-10) , temos:

$$\begin{cases} 10x + 15y + 18z < 60^\circ \\ -10x - 10y - 10z = -50 \end{cases}$$

Juntando as duas equações, encontramos $5y + 8z < 10$, onde as possíveis soluções são $(0, 0)$, $(1, 0)$ ou $(0, 1)$.

A solução $(0, 0)$ não será possível, pois como já vimos, teríamos $x = 5$, ou seja, teríamos todos os polígonos congruentes em torno de um vértice (5 triângulos equiláteros). Portanto, as únicas soluções são $(4, 1, 0)$, o que seria 4 triângulos e 1 quadrado ou $(4, 0, 1)$, o que seria 4 triângulos e 1 pentágono. ■

Concluimos assim que existem 13 arranjos de polígonos em torno de cada vértice de um poliedro arquimediano. Dos treze arranjos, temos que 7 são do tipo $m = 3$, 4 do tipo $m = 4$ e 2 do tipo $m = 5$. Para cada tipo de arranjo temos um determinado poliedro arquimediano. Vejamos a tabela completa de todos os 13 poliedros arquimedianos.

Figura 3.29: Os 13 poliedros arquimedianos

N	Combinações	S_V	F	V	A	Poliedro
1	(A_6, A_6, A_3)	300°	8	12	18	tetraedro truncado
2	(A_6, A_6, A_4)	330°	14	24	36	octaedro truncado
3	(A_6, A_6, A_5)	348°	32	60	90	icosaedro truncado
4	(A_8, A_8, A_3)	330°	14	24	36	cubo truncado
5	(A_{10}, A_{10}, A_3)	348°	32	60	90	dodecaedro truncado
6	(A_4, A_6, A_8)	345°	26	48	72	cuboctaedro truncado
7	(A_4, A_6, A_{10})	354°	62	120	180	icosidodecaedro truncado
8	(A_3, A_4, A_3, A_4)	300°	14	12	24	cuboctaedro
9	(A_3, A_5, A_3, A_5)	336°	32	30	60	icosidodecaedro
10	(A_4, A_4, A_4, A_3)	330°	26	24	42	rombicuboctaedro
11	(A_4, A_3, A_4, A_5)	348°	62	60	120	rombicosidodecaedro
12	$(A_3, A_3, A_3, A_3, A_4)$	330°	38	24	60	cubo snub
13	$(A_3, A_3, A_3, A_3, A_5)$	348°	92	60	150	dodecaedro snub

Fonte: Feito pelo autor

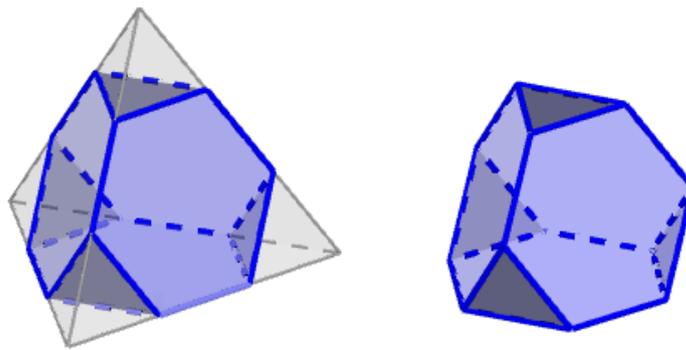
3.3 Relações métricas nos poliedros de Arquimedes

Nesta seção vamos apresentar o cálculo do volume de alguns dos poliedros de Arquimedes em função da aresta e também em função do raio da esfera circunscrita.

Optamos por apresentar apenas o volume daqueles que, na nossa visão, tem uma geometria mais simples e que seu volume pode ser deduzido mais facilmente, usando apenas ferramentas elementares do ensino básico. Estudaremos, portanto, o volume dos poliedros 1 (tetraedro truncado), 2 (octaedro truncado), 3 (icosaedro truncado), 4 (cubo truncado), 6 (cuboctaedro truncado), 8 (cuboctaedro) e 10 (rombicuboctaedro) da tabela acima (Figura 3.29).

3.3.1 Tetraedro Truncado

Figura 3.30: Tetraedro truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

O truncamento do tetraedro é do tipo 2, onde é gerado 4 faces hexagonais regulares e 4 triângulos equiláteros.

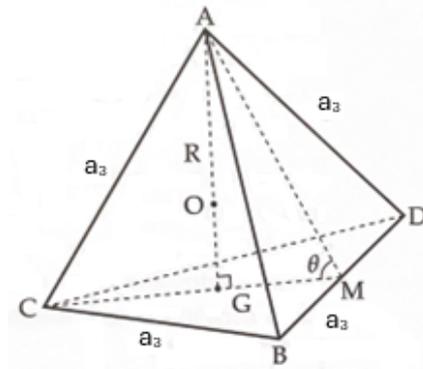
O truncamento do tetraedro gera 4 novos tetraedros, todos congruentes. Chamaremos esses novos tetraedros de Γ .

Observando que a face criada após o truncamento é um hexágono regular (o ângulo interno do hexágono regular é 120°), temos em cada uma das faces, três triângulos equiláteros (o ângulo interno do triângulo equilátero é 60°), fazendo com que cada um dos tetraedros Γ sejam tetraedros regulares.

Algumas observações sobre o tetraedro Γ :

- G é o baricentro do triângulo BCD ;
- a_3 é a medida da aresta do tetraedro;
- $\overline{OG} = \frac{1}{4}\overline{AG}$

Figura 3.31: Tetraedro Γ



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

- \overline{AG} é a altura do tetraedro. Logo, temos a relação:

$$\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CM}. \quad (3.1)$$

Pelo triângulo BCM , temos a relação métrica do triângulo retângulo $BC^2 = BM^2 + CM^2$. Logo $a_3^2 = \left(\frac{a_3}{2}\right)^2 + CM^2$ e

$$CM = \frac{\sqrt{3}}{2}(a_3). \quad (3.2)$$

Substituindo (3.2) em (3.1), temos:

$$CG = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(a_3) = \frac{\sqrt{3}}{3}(a_3).$$

Pelo triângulo ACG , temos a relação métrica do triângulo retângulo $AC^2 = AG^2 + CG^2$ e então $a_3^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a_3\right)^2 + AG^2$. Isolando AG , temos

$$AG = a_3\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a_3\sqrt{6}}{3}.$$

Calculando a área do triângulo BCD :

$$A = \frac{BD \cdot CM}{2} = \frac{a_3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(a_3)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a_3^2.$$

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Calculando o volume de Γ :

$$V_{\Gamma} = \frac{1}{3}A_bH = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} (a_3)^2 a_3 \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} (a_3)^3.$$

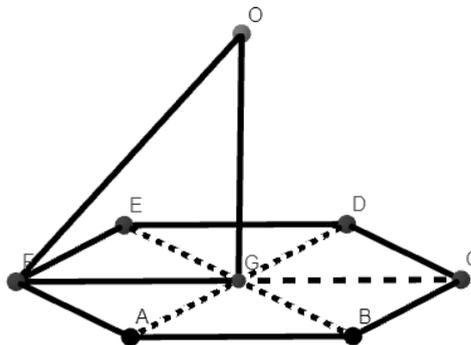
Vamos calcular agora o volume do Tetraedro Truncado (chamaremos de V_{TT}). Para isso, devemos considerar o volume do tetraedro inicial (chamaremos de V_T) e os volumes dos tetraedros Γ .

$$V_{TT} = V_T - 4.V_{\Gamma} = \frac{9\sqrt{2}}{4} (a_3)^3 - \frac{4\sqrt{2}}{12} (a_3)^3 = \frac{23\sqrt{2}}{12} (a_3)^3. \quad (3.3)$$

Sabendo que $OG = \frac{1}{4}AG$, temos:

$$OG = \frac{1}{4}AG = \frac{\sqrt{6}}{12} a_3. \quad (3.4)$$

Figura 3.32: Cálculo do raio do tetraedro inscrito



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Vamos calcular o valor da aresta do tetraedro truncado em função do raio da esfera inscrita.

Pelo triângulo FGO , utilizando o teorema de Pitágoras $OF^2 = FG^2 + GO^2$, temos:

$$\begin{aligned} R^2 &= a^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)^2 \\ a^2 + \frac{a^2}{24} &= R^2 \\ a &= \frac{2\sqrt{6}}{5}R. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Substituindo (3.5) em (3.3), temos:

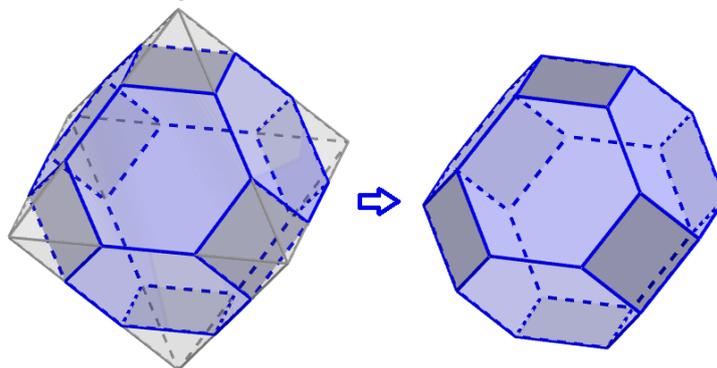
$$\begin{aligned}V_{TT} &= \frac{23\sqrt{2}}{12} \cdot \left(\frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot R\right)^3 \\ &= \frac{23 \cdot \sqrt{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sqrt{6}}{12 \cdot 125} R^3 \\ &= \frac{184\sqrt{3}}{125} R^3.\end{aligned}$$

Concluimos então que o volume do Tetraedro Truncado inscrito numa esfera de raio R é aproximadamente $2,54958 \times R^3$, o que equivale a 61% do volume da esfera.

3.3.2 Octaedro Truncado

O octaedro truncado é o truncamento do octaedro regular. O octaedro é truncado em cada um dos seus seis vértices, retirando pirâmides de bases quadradas.

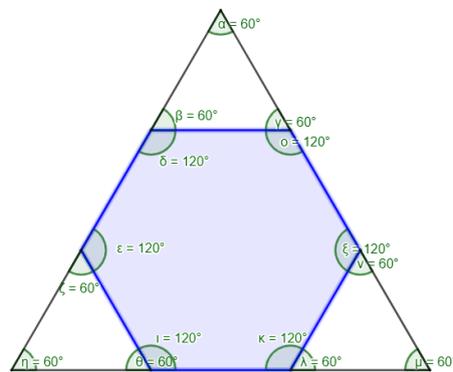
Figura 3.33: Octaedro truncado



Fonte: próprio autor no GEOGEBRA

Cada uma das faces do octaedro será truncada da seguinte forma: três triângulos equiláteros e um hexágono regular, todos de medidas de aresta a .

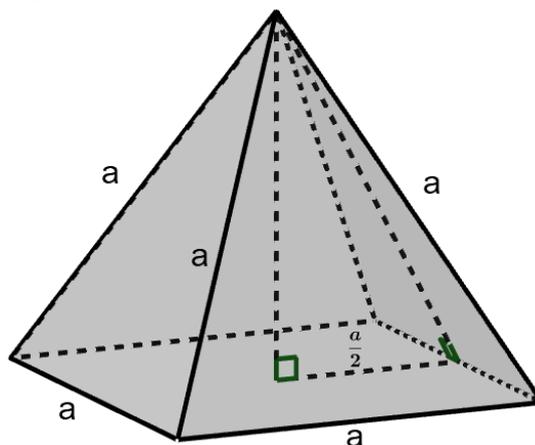
Figura 3.34: Face lateral de um Octaedro truncado



Fonte: próprio autor no GEOGEBRA

Formando assim pirâmides de bases quadradas de arestas a .

Figura 3.35: Pirâmide de base quadrada



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

A altura dessa pirâmide pode ser calculada pelo triângulo retângulo, cujos lados são a apótema da base, a altura de uma face lateral e a altura da pirâmide.

A apótema da base é a metade de sua aresta, por ser um quadrado. A altura da face lateral (triângulo equilátero) é dado por: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Temos então:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2$$

$$H^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$H^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$$H = \frac{\sqrt{2}}{2}a. \quad (3.6)$$

O volume V_p de cada uma dessas pirâmides é dado por

$$V_p = \frac{1}{3}A_b.H = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3. \quad (3.7)$$

Para calcular o volume do octaedro, divide-se em duas pirâmides iguais e calcula-se o volume de uma delas. Como ambas as pirâmides são iguais, o volume do octaedro será o volume das duas pirâmides.

Como visto na Figura (3.34), cada face lateral do octaedro tem aresta $3a$, onde podemos calcular o volume V_P através de 3.7.

$$V_P = \frac{\sqrt{2}}{6}(3a)^3 = \frac{\sqrt{2}}{6}27a^3 = \frac{9\sqrt{2}}{2}a^3.$$

Como são duas pirâmides iguais, temos o volume do octaedro V_O igual a:

$$V_O = 2V_P = 2 \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2}a^3 = 9\sqrt{2}a^3.$$

Agora, para calcular o volume do octaedro truncado, subtraímos o valor do volume do octaedro das seis pirâmides que foram truncadas.

$$\begin{aligned} V_{OT} &= V_O - 6.V_p \\ &= 9\sqrt{2}a^3 - 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6}a^3 \\ &= 9\sqrt{2}a^3 - \sqrt{2}a^3 \\ &= 8\sqrt{2}a^3. \end{aligned}$$

Portanto, o volume do octaedro truncado de aresta a é $8\sqrt{2}a^3$.

Agora vamos determinar a relação entre a aresta a e o raio R da esfera que circunscreve o octaedro truncado. Primeiramente, observamos que o raio da esfera que circunscreve o octaedro (não-truncado) coincide com a metade da diagonal do quadrado de lado igual a aresta do octaedro, isto é, se a aresta do octaedro é $3a$ então o raio da esfera que circunscreve o octaedro é $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Ao truncar o octaedro, como visto acima, retiramos pirâmides quadrangulares de altura $H = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ e portanto a distância do centro da esfera que circunscreve o octaedro truncado ao centro de cada face quadrada é

$$D_{CF} = R - H = \frac{3\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{2\sqrt{2}}{2}a = \sqrt{2}a.$$

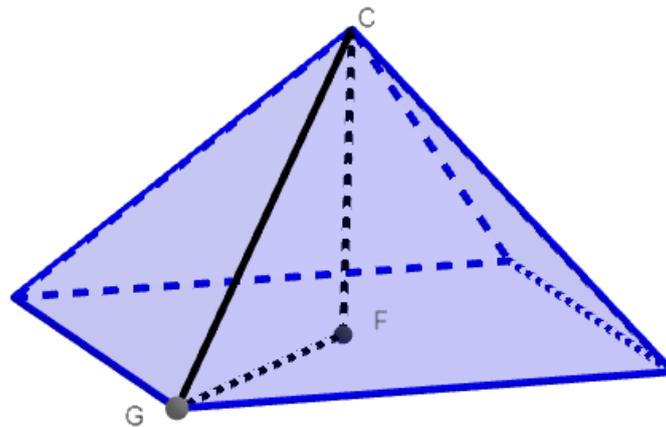
Calculando o raio da esfera, utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo CFG , da Figura (3.36), $CG^2 = CF^2 + FG^2$, temos:

$$\begin{aligned} R^2 &= (\sqrt{2}a)^2 + \left(\frac{(a\sqrt{2})}{2}\right)^2 \\ &= 2a^2 + \frac{2a^2}{4} \\ &= \frac{5}{2}a^2. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$a = \frac{\sqrt{10}}{5}R. \quad (3.8)$$

Figura 3.36: Raio da esfera com relação a aresta do octaedro truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Substituindo (3.8) na equação $V_{OT} = 8\sqrt{2}a^3$, temos:

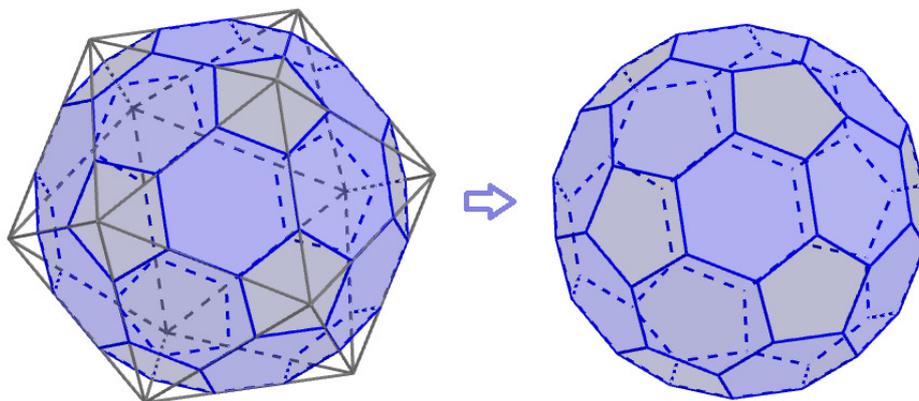
$$V_{OT} = 8\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{10}}{5}R\right)^3 = 8\sqrt{2} \left(\frac{10\sqrt{10}}{125}\right) R^3 = \frac{32\sqrt{5}}{25}R^3.$$

Concluimos então que o volume do octaedro truncado inscrito numa esfera de raio R é aproximadamente $2,862167 \times R^3$, o que corresponde a aproximadamente 68% do volume da esfera.

3.3.3 Icosaedro Truncado

O icosaedro truncado, pode ser obtido a partir do truncamento tipo 2 em um icosaedro regular. O truncamento nos doze vértices resultam em pirâmides pentagonais.

Figura 3.37: Icosaedro truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Para calcular o icosaedro truncado, deve-se calcular o volume do icosaedro e das pirâmides que serão truncadas para fazer a diferença desses valores.

Assim como no octaedro, o icosaedro tem suas faces laterais triângulos equiláteros. No truncamento tipo 2 de ambos os poliedros, temos faces separadas em três triângulos equiláteros pequenos e um hexágono regular. Assim, temos a mesma configuração da Figura (3.34), logo o icosaedro terá aresta medindo $3a$ e a pirâmide truncada terá base pentagonal de aresta a .

Dessa forma, o volume do icosaedro truncado é dado por:

$$V_{IT} = V_{IR} - 12V_{PP} \quad (3.9)$$

Onde V_{IT} é o volume do icosaedro truncado, V_{IR} é o volume do icosaedro regular e V_{PP} é o volume das pirâmides pentagonais.

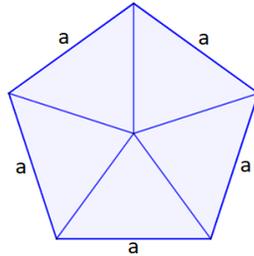
Segundo Rudimar Luiz e Victoria Mazotti [19], o volume do icosaedro Regular é dado por:

$$V_{IR} = \frac{45(\sqrt{5} + 3)}{4} a^3. \quad (3.10)$$

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Para calcular os volumes das pirâmides retiradas, vamos calcular a área da base pentagonal e a altura dessas pirâmides.

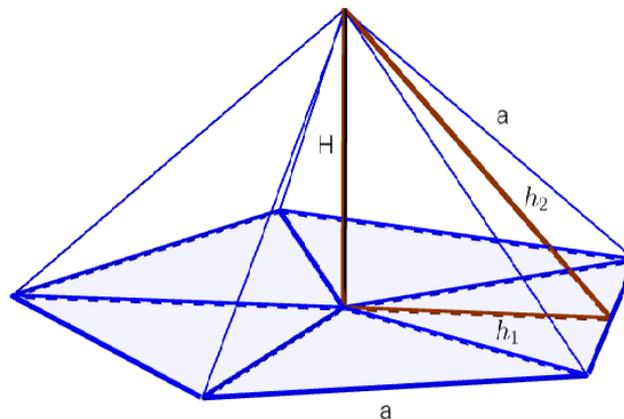
Figura 3.38: Base pentagonal da pirâmide



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA.

Com o pentágono regular dividido em cinco triângulos isósceles congruentes como na Figura (3.38), precisamos calcular as áreas desses triângulos, determinando a medida da altura h_1 , ilustrada na Figura (3.39). No cálculo de h_1 , podemos utilizar $\tan 36^\circ$ ou $\cos 54^\circ$ ($\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ e h_1 divide o ângulo central ao meio, pois é a altura).

Figura 3.39: Pirâmide Pentagonal



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA.

Utilizando o valor de $\cos 36^\circ$ [3], temos:

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}. \quad (3.11)$$

E, usando a relação fundamental trigonométrica $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, encontramos

$$\sin 36^\circ = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \quad (3.12)$$

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Usando (3.11) e (3.12), encontramos a tangente de 36° .

$$\tan 36^\circ = \frac{\text{sen } 36^\circ}{\text{cos } 36^\circ} = \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

Encontramos

$$h_1 = \frac{a}{2 \tan 36^\circ} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}a.$$

Assim a área da base pentagonal da pirâmide truncada é

$$A_5 = 5 \cdot \frac{1}{2}a \cdot h_1 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2.$$

Vamos agora calcular a altura H da pirâmide, utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, cujos catetos medem H e h_1 e a hipotenusa mede h_2 . Como cada triângulo lateral da pirâmide é equilátero, h_2 é a altura desse triângulo e já calculamos essa medida em 3.2, temos:

$$\begin{aligned} H^2 &= h_2^2 - h_1^2 \\ &= \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}a\right)^2 \\ &= H^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{25+10\sqrt{5}}{100}a^2 \\ &= \frac{50-10\sqrt{5}}{100}a^2. \end{aligned}$$

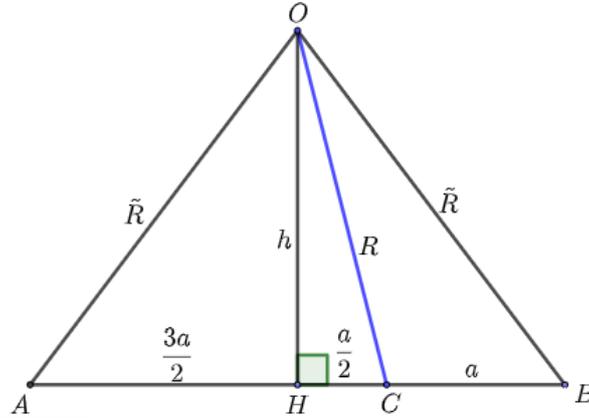
Calculando o volume da pirâmide pentagonal V_{PP} :

$$\begin{aligned} V_{PP} &= \frac{1}{3}A_5 \cdot H \\ &= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}a \\ &= \frac{\sqrt{(25+10\sqrt{5}) \cdot (50-10\sqrt{5})}}{120}a^3 \\ &= \frac{\sqrt{30+10\sqrt{5}}}{24}a^3. \end{aligned}$$

Temos no numerador o chamado radical duplo, onde podemos utilizar de ferramentas algébricas para simplificar a expressão.

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Figura 3.40: Relação entre a aresta do icosaedro truncado e o raio da esfera circunscrita.



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA.

$$\sqrt{30 + 10\sqrt{5}} = \sqrt{30 + \sqrt{500}} = \sqrt{\frac{30 + \sqrt{30^2 - 500}}{2}} + \sqrt{\frac{30 - \sqrt{30^2 - 500}}{2}} = 5 + \sqrt{5}$$

Logo, temos a medida do volume V_{PP} igual a:

$$V_{PP} = \frac{5 + \sqrt{5}}{24} a^3. \quad (3.13)$$

Concluindo o cálculo do volume do icosaedro truncado, substituindo (3.13) e (3.10) em (3.9), temos:

$$V_{IT} = V_{IR} - 12V_{PP} \quad (3.14)$$

$$= \frac{45(\sqrt{5} + 3)}{4} a^3 - 12 \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{24} a^3 \quad (3.15)$$

$$= \frac{(125 + 43\sqrt{5})}{4} a^3. \quad (3.16)$$

Para determinar o volume do icosaedro truncado inscrito na esfera de raio R , em função do desse raio, basta que conheçamos a relação entre R e a . Para isso, considere o triângulo formado pelo centro O da esfera que circunscribe o icosaedro e pelos vértices A e B de uma mesma aresta. Como o centro das esferas que circunscribe o icosaedro e o icosaedro truncado coincidem, o raio R da esfera que circunscribe o icosaedro truncado é o comprimento do segmento OC , onde C é um dos pontos de truncamento da aresta AB do icosaedro, conforme a figura 3.40.

Agora observando os triângulos retângulos OHC e OHA , temos $R^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$ e $\tilde{R}^2 = h^2 + \frac{9a^2}{4}$. Combinando essas duas equações encontramos $\tilde{R}^2 - R^2 = 2a^2$.

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

De acordo com a Subseção 2.4.5, uma aresta $3a$ do Icosaedro Regular se relaciona com o raio \tilde{R} de sua esfera circunscrita por $3a = \frac{\tilde{R}}{5} \sqrt{10(5 - \sqrt{5})}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} R^2 &= \tilde{R}^2 - 2a^2 \\ &= \left[\frac{9 \cdot 25}{10(5 - \sqrt{5})} - 2 \right] a^2 \\ &= \frac{29 + 9\sqrt{5}}{8} a^2 \end{aligned}$$

e portanto $a = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{29 + 9\sqrt{5}}} R$. Logo, usando a fórmula (3.16), encontramos

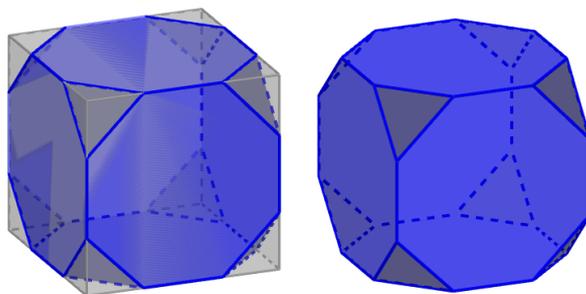
$$V_{IT} = \frac{(125 + 43\sqrt{5})}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{29 + 9\sqrt{5}}} \right)^3 \cdot R^3.$$

Com o auxílio de uma calculadora, concluímos então que o volume do icosaedro truncado inscrito numa esfera de raio R é aproximadamente $3,633415 \times R^3$, o que corresponde a 87% do volume da esfera.

3.3.4 Cubo Truncado

Para o truncamento tipo 2 do cubo, observamos que são seccionados 8 pirâmides de base triangular.

Figura 3.41: Cubo truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

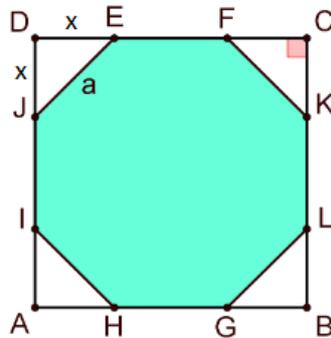
Inicialmente precisamos calcular o valor da aresta das bases dessas pirâmides.

Pelo triângulo retângulo DEJ (Figura 3.42), utilizando a relação métrica $EJ^2 = DE^2 + DE^2$, temos:

$$a^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad (3.17)$$

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

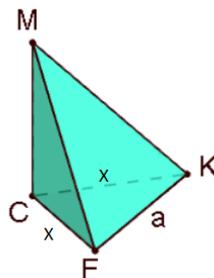
Figura 3.42: Face do cubo truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Vamos agora calcular o volume de cada uma dessas 8 pirâmides que são retiradas do cubo. Chamaremos essas pirâmides de μ . Como todas as pirâmides são congruentes, só precisamos calcular o volume de apenas uma, pois todas as outras terão o mesmo volume.

Figura 3.43: Pirâmides retiradas do cubo



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Área da base da pirâmide:

$$A_b = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} \quad (3.18)$$

Substituindo (3.17) em (3.18), temos:

$$A_b = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}, \text{ logo } A_b = \frac{a^2}{4}$$

O volume da pirâmide será:

$$V_\mu = \frac{1}{3} A_b \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}. \quad (3.19)$$

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Lembrando que o volume do cubo truncado é dado por $V_{CT} = V_C - 8.V_\mu$ e sabendo que o volume do cubo inicial é $(a + 2x)^3$, vamos determinar o seu volume utilizando (3.19).

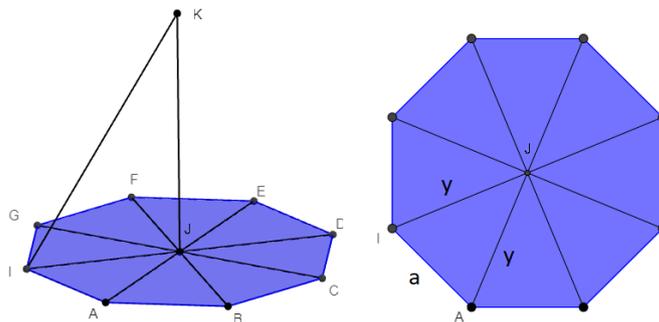
$$V_{CT} = (a + 2x)^3 - 8 \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$$

$$V_{CT} = (a + a\sqrt{2})^3 - \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

$$V_{CT} = \left(\frac{21 + 14\sqrt{2}}{3} \right) a^3. \quad (3.20)$$

Para determinar o raio da esfera circunscrita, observamos a face resultante do truncamento do cubo: um octógono. Marcamos o centro desse octógono e ligamos segmentos de retas para os vértices. O ângulo central de um desses triângulos formados é de 45° $\left(\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \right)$.

Figura 3.44: Cálculo do raio da esfera no cubo truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Pelo triângulo AIJ, utilizando a lei dos cossenos, podemos determinar a medida do segmento \overline{AJ} . Usando a lei dos cossenos, temos a relação $a^2 = y^2 + y^2 - 2.y.y \cdot \cos 45^\circ$, ou seja $a^2 = 2.y^2 - y^2 \cdot \sqrt{2}$ e, isolando y obtemos

$$y = \frac{a}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}. \quad (3.21)$$

Pela Figura (3.42), podemos observar que a medida da aresta do cubo é $(a + 2x)$. Sabemos por (3.17) o valor de x . O centro do cubo também é o centro da esfera inscrita no cubo e no cubo truncado. Logo, podemos calcular a medida do raio dessa esfera $r = \frac{(a + 2x)}{2}$, substituindo a medida de x , encontramos

$$r = \frac{a(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

Pelo triângulo retângulo IJK, utilizando o teorema de Pitágoras $IK^2 = IJ^2 + JK^2$ temos:

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\frac{a}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{a(1 + \sqrt{2})}{2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2 - \sqrt{2}} \right) a^2 + \left(\frac{(3 + 2\sqrt{2})}{4} \right) a^2 \\ &= \left(\frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \frac{(3 + 2\sqrt{2})}{4} \right) a^2 = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} + \frac{(3 + 2\sqrt{2})}{4} \right) a^2 = \left(\frac{7 + 4\sqrt{2}}{4} \right) a^2. \end{aligned}$$

Logo, temos

$$a = \frac{2}{\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}} R. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.21), temos

$$V_{CT} = \left(\frac{21 + 14\sqrt{2}}{3} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}} \right)^3 R^3.$$

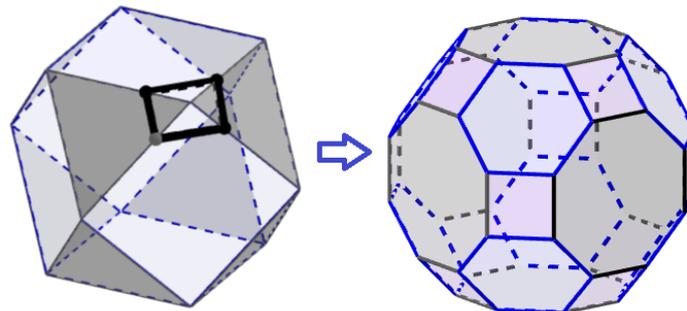
Portanto o volume do Cubo Truncado inscrito numa esfera de raio R é aproximadamente $2,41618 \times R^3$ o que equivale a 58% do volume da esfera, aproximadamente.

3.3.5 Cuboctaedro Truncado

Truncar o cuboctaedro por si só não produz um poliedro de Arquimedes, requer ampliar a porção cortada. Cada truncamento produz uma pirâmide de base retangular, já que as superfícies de corte são dois triângulos equiláteros e dois quadrados. O retângulo é expandido nos lados menores dos retângulos até que suas dimensões sejam iguais às dos lados maiores dos retângulos, criando um cuboctaedro truncado.

Após o truncamento e da expansão, o cuboctaedro truncado está inscrito em um novo cubo, o qual chamaremos de Ω .

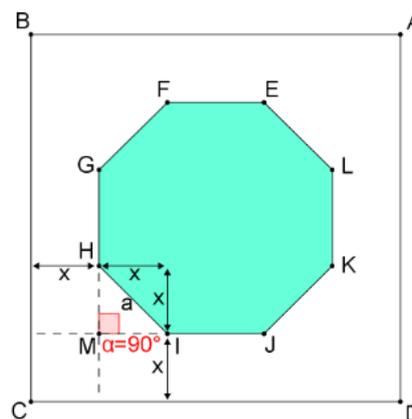
Figura 3.45: Cuboctaedro truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Chamaremos a aresta do cuboctaedro truncado de a .
Observando a parte lateral desse cubo Ω , vemos na Figura (3.46) suas medidas a e x .

Figura 3.46: Cuboctaedro truncado - face do cubo Ω



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

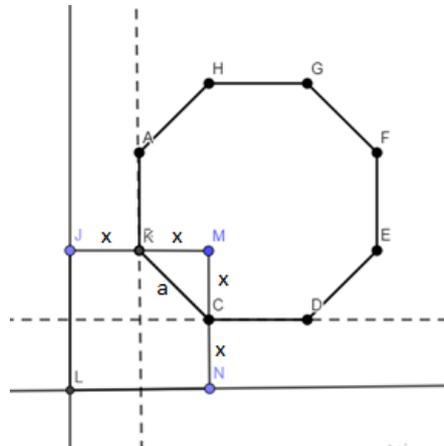
Pelo triângulo retângulo CRM da Figura (3.47), utilizando a relação métrica $CR^2 = RM^2 + CM^2$, temos:

$$a^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Pela Figura 3.47, temos que a aresta do cubo Ω (A_Ω) é dado por:

$$\begin{aligned} A_\Omega &= a + 4x \\ A_\Omega &= a + 4 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \\ A_\Omega &= a(1 + 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Figura 3.47: Cuboctaedro truncado - face do cubo Ω



Fonte: Feito pelo próprio autor no GEOGEBRA

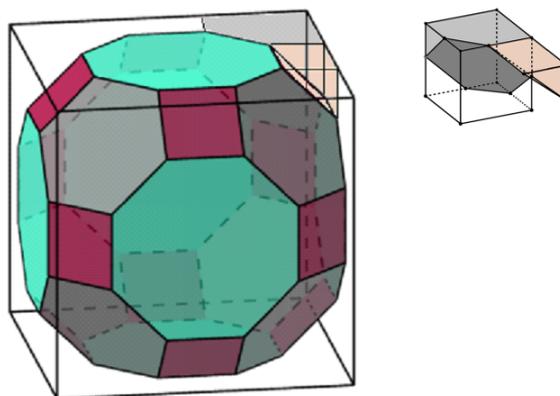
E o volume do cubo Ω (V_Ω) é dado por:

$$V_\Omega = A_c^3 = (a(1 + 2\sqrt{2}))^3$$

$$V_\Omega = (25 + 22\sqrt{2})a^3. \quad (3.23)$$

Observando os truncamentos, podemos encontrar 8 sólidos como o destacado na Figura (3.48). São dois poliedros para cada uma dessas configurações: uma é a retirada dos vértices do cubo e a outra é um prisma triangular.

Figura 3.48: Cuboctaedro truncado - Truncamentos

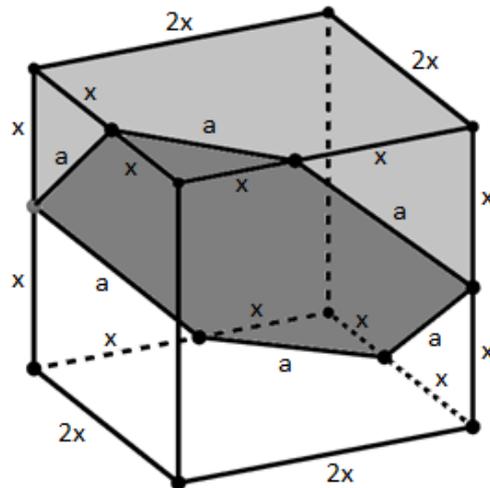


Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Como todos os sólidos são congruentes, podemos calcular o volume de um e todos os outros terão o mesmo volume.

Figura 3.49: Cuboctaedro truncado - Sólido 1 do truncamento



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Pela simetria do truncamento, podemos observar na Figura (3.49) que o volume do sólido é exatamente a metade do cubo de aresta $2x$.

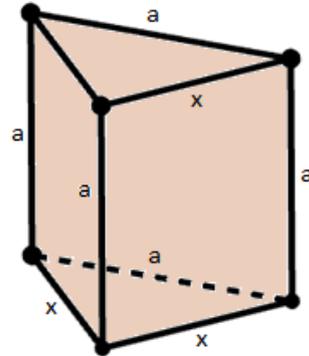
Ou seja:

$$V_1 = \frac{1}{2}V_c = \frac{1}{2}(2x)^3 \Rightarrow V_1 = 4x^3.$$

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

O segundo sólido encontrado no truncamento é um prisma de base triangular.

Figura 3.50: Cuboctaedro truncado - Sólido 2 do truncamento



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Volume do prisma da Figura (3.50), temos:

$$V_2 = A_b \cdot H = \frac{x \cdot x}{2} \cdot a = \frac{x^2 \cdot a}{2} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot a}{2} \Rightarrow V_2 = \frac{a^3}{4}.$$

Volume do cuboctaedro truncado:

$$\begin{aligned} V_{CT} &= V_C - 8V_1 - 12V_2 \\ V_{CT} &= (25 + 22\sqrt{2})a^3 - 8.4x^3 - 12 \cdot \frac{a^3}{4} \\ V_{CT} &= 25a^3 + 22\sqrt{2}a^3 - 8.4 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3a^3 \\ V_{CT} &= (22 + 14\sqrt{2})a^3. \end{aligned} \tag{3.24}$$

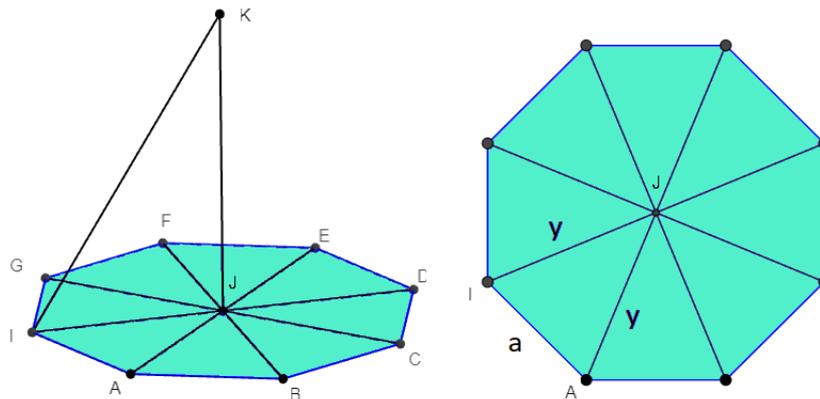
Para encontrar o raio da esfera circunscrita, observemos que:

Pelo triângulo AIJ , utilizando a lei dos cossenos, podemos determinar a medida do segmento \overline{IJ} .

$$\begin{aligned} a^2 &= y^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot y \cdot \cos 45^\circ \\ a^2 &= 2 \cdot y^2 - 2 \cdot y^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 &= 2 \cdot y^2 - y^2 \sqrt{2} \\ a^2 &= y^2(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$y^2 = \frac{a^2}{2 - \sqrt{2}}. \tag{3.25}$$

Figura 3.51: Cálculo do raio da esfera no cubo truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Calculando o raio da esfera circunscrita, pelo triângulo retângulo AJK , temos a relação métrica $IK^2 = IJ^2 + JK^2$. Substituindo os valores conhecidos, temos:

$$\begin{aligned}
 R^2 &= y^2 + \left(\frac{1}{2}A_C\right)^2 \\
 &= \left(\frac{a^2}{2 - \sqrt{2}}\right) + \left(\frac{a(1 + 2\sqrt{2})}{2}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{a^2(2 + \sqrt{2})}{2}\right) + \left(\frac{a^2(1 + 2\sqrt{2})^2}{4}\right) \\
 &= \frac{2a^2(2 + \sqrt{2}) + a^2(1 + 2\sqrt{2})^2}{4} \\
 &= \frac{13 + 6\sqrt{2}.a^2}{4}
 \end{aligned}$$

Resultando em

$$a = \frac{2}{\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}}R \quad (3.26)$$

Substituindo (3.26) em (3.24), temos:

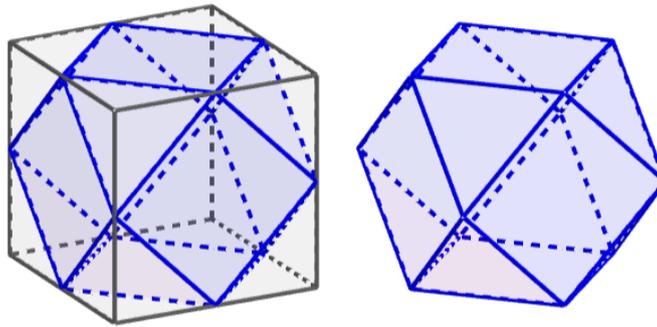
$$\begin{aligned}
 V_{CT} &= (22 + 14\sqrt{2}) \left(\frac{2}{\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}}R\right)^3 \\
 V_{CT} &= \left(\frac{8.(22 + 14\sqrt{2})}{(13 + 6\sqrt{2})\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}}\right) R^3.
 \end{aligned}$$

Portanto, o volume do cuboctaedro truncado inscrito na esfera de raio R é aproximadamente $3,357718 \times R^3$, que é cerca de 80% do volume da esfera.

3.3.6 Cuboctaedro

Para o truncamento tipo 1 do cubo, observamos que são seccionados 8 pirâmides, cujas bases são triângulos equiláteros.

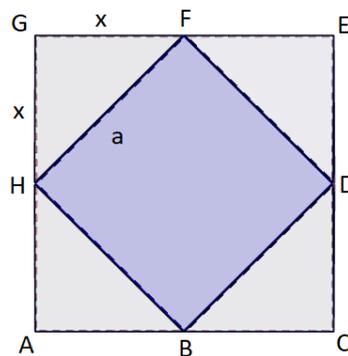
Figura 3.52: Cuboctaedro



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Para iniciar o cálculo do volume das pirâmides truncadas, vamos determinar as medidas das arestas x em função da aresta da base a , conforme a Figura (3.53).

Figura 3.53: Face do cuboctaedro



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Pelo triângulo retângulo FGH , utilizando a relação métrica $FH^2 = FG^2 + GH^2$, temos:

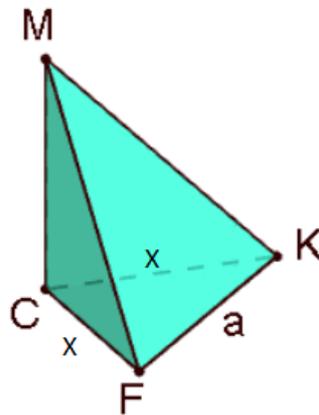
$$a^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$

O que resulta em:

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad (3.27)$$

Vamos agora calcular o volume de cada uma dessas 8 pirâmides que são retiradas do cubo. Chamaremos essas pirâmides de μ . Como todas as pirâmides são congruentes, só precisamos calcular o volume de apenas uma, pois todas as outras terão o mesmo volume.

Figura 3.54: Pirâmides retiradas do cuboetaedro



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Temos que a área da base da pirâmide é dada por:

$$A_b = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}. \quad (3.28)$$

Substituindo (3.27) em (3.28), temos $A_b = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}$. O volume da pirâmide será:

$$V_\mu = \frac{1}{3} A_b H = \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}.$$

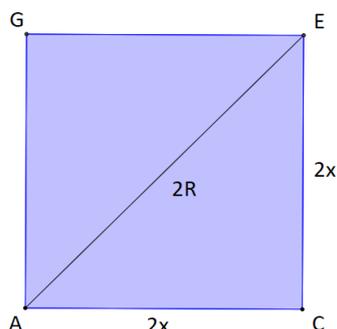
Calculando o volume do cuboetaedro ($V_{cub} = V_C - 8 \cdot V_\mu$):

$$V_{cub} = (2x)^3 - 8 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{24} = 8 \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}a^3 - \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

$$V_{cub} = \frac{5\sqrt{2}}{3}a^3. \quad (3.29)$$

Como o centro da esfera inscrita no cuboctaedro é o mesmo do centro do cubo, o raio da esfera é igual a metade da diagonal da face do cubo.

Figura 3.55: Raio da esfera inscrita no cuboctaedro



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Pelo triângulo retângulo ACE, utilizando a relação métrica $AE^2 = AC^2 + CE^2$, temos:

$$(2R)^2 = (2x)^2 + (2x)^2 \Rightarrow 4R^2 = 8x^2 \Rightarrow R^2 = 2x^2. \quad (3.30)$$

Substituindo (3.27) em (3.30), temos:

$$R^2 = 2x^2 \Rightarrow R^2 = 2 \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \Rightarrow R^2 = 2 \left(\frac{a\sqrt{a^2}}{2} \right) \Rightarrow R^2 = a^2 \Rightarrow R = a.$$

Logo,

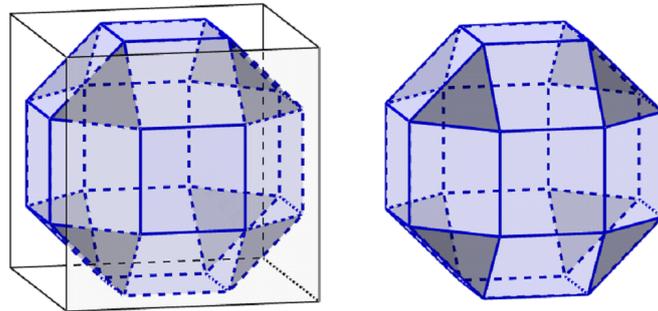
$$V_{cub} = \frac{5\sqrt{2}}{3}R^3.$$

Portanto, o volume do cuboctaedro inscrito numa esfera de raio R é aproximadamente $2,35702 \times R^3$, o que equivale a 56% do volume da esfera, aproximadamente.

3.3.7 Rombicuboctaedro

O Rombicuboctaedro é a snubificação do cubo, sem rotação. O cubo sofre uma expansão e depois são ligados os vértices nos formatos de quadrados e triângulos equiláteros.

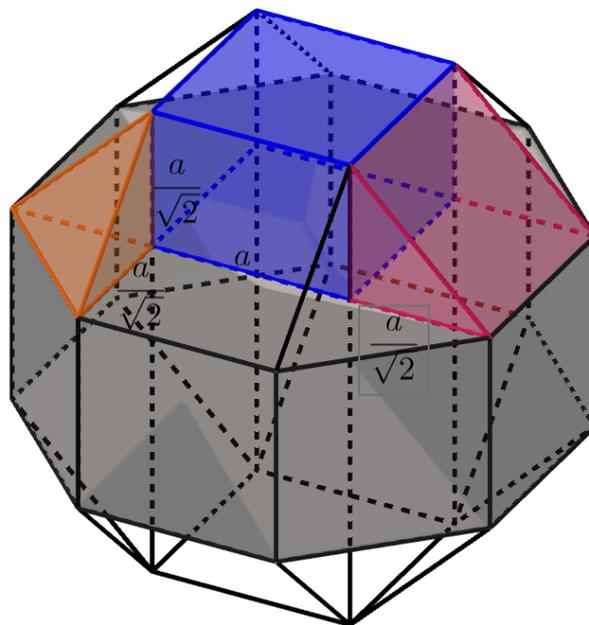
Figura 3.56: Rombicuboctaedro



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Para calcular o volume do rombicuboctaedro, vamos usar a simetria e observar que este sólido é formado pela união de um prisma octogonal uniforme de aresta a , dois paralelepípedos retos de dimensões a, a e $\frac{a}{\sqrt{2}}$ localizados na parte central superior e na parte central inferior do prisma octogonal, oito tetraedros e oito prismas, completando assim o sólido arquimediano, conforme a Figura 3.57.

Figura 3.57: Decomposição do Rombicuboctaedro



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA 3D.

Assim o volume V do rombicuboctaedro é a soma dos volumes do prisma octogonal (V_o), dos dois paralelepípedos ($2V_{pa}$), das oito pirâmides ($8V_{pi}$) e dos oito prismas ($8V_{pr}$).

3.3. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Calculemos então V_o , V_{pa} , V_{pi} e V_{pr} .

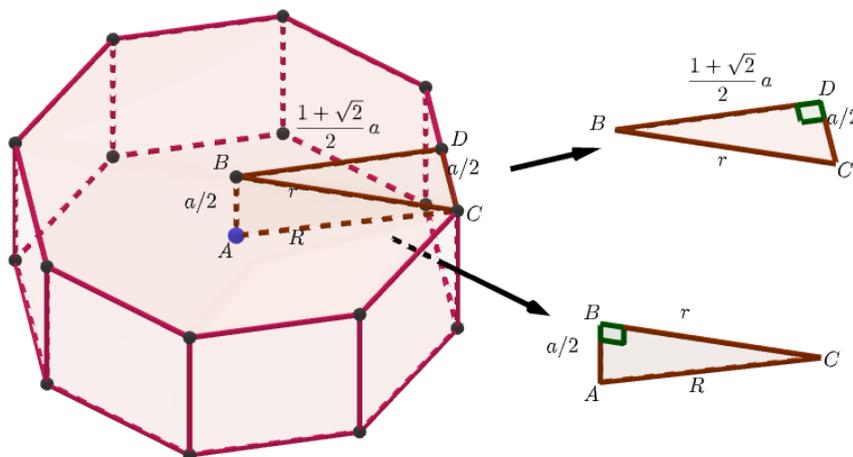
Como a área do octógono é $4 \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right) a^2$, segue que $V_o = 4 \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right) a^3 = 2(1 + \sqrt{2}) a^3$.

Os outros volumes são $V_{pa} = \frac{a^3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^3$, $V_{pi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^3 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$ e $V_{pr} = \frac{a^3}{4}$.
Portanto concluímos que o volume do rombicuboctaedro é dado por

$$\begin{aligned} V &= V_o + 2V_{pa} + 8V_{pi} + 8V_{pr} \\ &= [(2 + 2) + (2 + 1 + \frac{1}{3})\sqrt{2}]a^3 \\ &= \left(4 + \frac{10\sqrt{2}}{3} \right) a^3. \end{aligned}$$

Para calcular o volume do Rombicuboctaedro inscrito em uma esfera de raio R basta, portanto, determinar a relação entre a e R . Notemos que este sólido contém um prisma octogonal uniforme de aresta a e tal esfera é a mesma que circunscreve este prisma. Assim, conforme a Figura 3.58 temos

Figura 3.58: Relação entre R e a .



Fonte: Feito pelo próprio autor no GEOGEBRA 3D.

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 \\
 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \\
 &= \frac{5+2\sqrt{2}}{4}a^2 \\
 &= \frac{17}{20-8\sqrt{2}}a^2
 \end{aligned}$$

o que implica que $a = \frac{\sqrt{20-8\sqrt{2}}}{\sqrt{17}}R$. Consequentemente, temos que o volume V do rombicuboctaedro é

$$V = \left(4 + \frac{10\sqrt{2}}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{20-8\sqrt{2}}}{\sqrt{17}}\right)^3 R^3.$$

Portanto o volume do rombicuboctaedro inscrito na esfera de raio R é aproximadamente $3,182717 \times R^3$, o que é cerca de 76% do volume da esfera.

Capítulo 4

BNCC, PCN's e Geometria

4.1 BNCC: Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

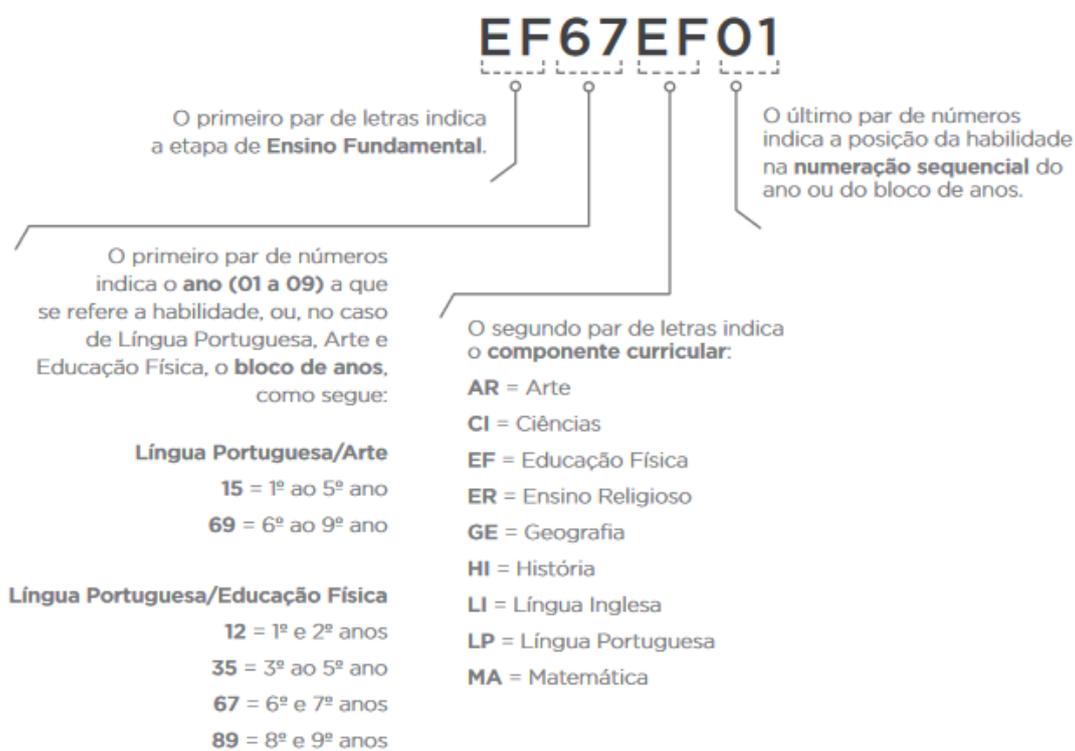
Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996) [4], e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) [6].

Para garantir o desenvolvimento de competências específicas, cada componente do currículo oferece um conjunto de competências. Essas competências estão relacionadas a diversos objetos de conhecimento, aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos. Em seguida, é organizado em unidades temáticas. A matemática é separada em cinco unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística.

Para a separação das habilidades, existe um código alfa numérico (separado em quatro partes) onde são apresentados o segmento do estudante (EF ou EM), as séries que abrangem o conhecimento e habilidade, o componente curricular (disciplina) e a habilidade desenvolvida no tópico.

Desde o início dos anos iniciais, o estudo da geometria se faz presente, tanto a plana como a espacial. Os alunos adquirem o conhecimento geométrico tanto das características como dos cálculos que envolvem o estudo de figuras geométricas.

Figura 4.1: Código alfa numérico de habilidades



Fonte: BNCC, página 30

4.2. PCN'S: PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. [BNCC, Página 271]

Por exemplo, na unidade temática de Geometria, no 6º ano, temos dois objetos de conhecimentos que envolvem geometria espacial.

1. OBJETOS DE CONHECIMENTO: Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas).

(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.

2. OBJETOS DE CONHECIMENTO: Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.

(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.

4.2 PCN's: Parâmetros Curriculares Nacionais

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), o Ensino Fundamental deve ter os seguintes objetivos:

- compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;
- posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;
- conhecer características fundamentais do Brasil nas dimensões sociais, materiais e culturais como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal e o sentimento de pertinência ao país;
- conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crenças, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais;
- perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente, identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente;
- desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;
- conhecer o próprio corpo e dele cuidar, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida e agindo com responsabilidade em relação à sua saúde e à saúde coletiva;
- utilizar as diferentes linguagens - verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal - como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;

4.2. PCN'S: PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

- Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

(BRASIL, 1998, p. 7-8).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destinam-se a auxiliar os professores na reflexão e discussão de aspectos da prática docente diária e estão sujeitos a mudanças contínuas por parte dos professores.

Por meio dos PCN's, os professores podem revisar objetivos, conteúdos, como as atividades são orientadas, expectativas de aprendizagem e métodos de avaliação. Da mesma forma, esses parâmetros podem auxiliar o educador ajudando-o a refletir sobre sua prática docente de forma condizente com os objetivos propostos.

Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos, etc (Brasil, 1997, pp. 82 e 83).
[5]

Observa-se uma cuidadosa preocupação com relação ao estudo da geometria, mostrando ao professor como os alunos devem perceber o uso da geometria em diversas áreas do conhecimento humano e no mundo em que vivem.

Na organização dos PCN's, são separados os Conteúdos Conceituais e Procedimentos, onde encontramos as divisões conceituais:

1. Números Naturais e Sistema de Numeração Decimal;
2. Operações com Números Naturais;
3. Espaço e Forma;
4. Grandezas e Medidas;
5. Tratamento da Informação;
6. Conteúdos Atitudinais.

O estudo dos poliedros inclui tópicos de espaço e forma, bem como tópicos de magnitude e medição.

Dentro do Espaço e Forma, desde os anos iniciais, encontra-se o tópico onde é tratado dos sólidos: "Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (como os prismas, as pirâmides e outros) e identificação de elementos como faces, vértices e arestas".

O tratamento dos poliedros na temática do espaço e da forma no terceiro ciclo do ensino básico, ou seja, quinto/sexto ano e sexto/sétimo ano, envolve o planeamento de figuras espaciais e a sua composição e decomposição. Neste ciclo é importante que os alunos tenham uma visão concreta ao observar e manipular os poliedros, devem observar características principais, as formas e fazer observações sobre propriedades e relações existentes.

Ainda no terceiro ciclo, os poliedros podem ser estudados com o objetivo de ampliar a compreensão dos alunos sobre o processo de medição, dentro da disciplina de quantidade e medição. Isto pode envolver a relação entre comprimento, massa, capacidade, superfície, melhorando o resultado real da medição.

No que diz respeito aos conceitos e procedimentos do terceiro ciclo, dentro dos temas espaço e forma, tamanho e medida, segundo os PCN's podemos abordar o estudo dos poliedros das seguintes formas:

Espaço e Forma

- Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria;
- Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados;
- Composição e decomposição de figuras planas;
- Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros;
- Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números;

Grandezas e Medidas

- Reconhecimento de grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazendo uso de terminologia própria;
- Obtenção de medidas por meio de estimativas e aproximações e decisão quanto a resultados razoáveis dependendo da situação-problema;

4.3. GEOMETRIA E EDUCAÇÃO NOS ANOS INICIAIS, FINAIS E ENSINO MÉDIO

- Utilização de instrumentos de medida, como régua, escalímetro, transferidor, esquadro, trena, relógios, cronômetros, balanças para fazer medições, selecionando os instrumentos e unidades de medida adequadas à precisão que se requerem, em função da situação-problema;
- Indicar o volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior;
- Estabelecimento de conversões entre algumas unidades de medida mais usuais (para comprimento, massa, capacidade, tempo) em resolução de situações-problema. (BRASIL, 1998, p. 72-74).

4.3 Geometria e educação nos anos iniciais, finais e ensino médio

Observa-se nos documentos diretores que o estudo da geometria está presente desde o início da educação básica até o final do ensino médio, com o estudo de sólidos, seus elementos, características, relação de Euler, o estudo dos truncamentos dos sólidos (troncos de pirâmides e cones por exemplo) e finalizando com posições no espaço em geometria analítica.

Em provas para ingresso de faculdades e universidades são usados esses conteúdos nos pré-requisitos de conhecimentos dos alunos. Vejamos abaixo uma questão da Faculdade Mackenzie Paraná, no processo seletivo do curso de medicina, no ano de 2023. A questão fala sobre uma pirâmide pentagonal que é replicada, invertida e as faces pentagonais são unificadas, formando um sólido de 10 faces triangulares. Em seguida, os vértices são truncados, formando outro sólido. O conhecimento do “truncamento de sólidos” deve ser estudado para que os alunos calculem as formas das faces e até mesmo volumes de troncos de prismas e pirâmides, mostrando que é possível estudar outros tipos de poliedros convexos que não seja apenas os platônicos.

A questão apresentada a seguir pode ser encontrada na prova tipo 1 - branca, na página 22 na questão 79, na prova tipo 2 - verde, na página 22 na questão 80, na prova tipo 3 - amarela, na página 22 na questão 77 e na prova tipo 4 - azul, na página 23 na questão 80. Veja Figura 4.2.

4.3. GEOMETRIA E EDUCAÇÃO NOS ANOS INICIAIS, FINAIS E ENSINO MÉDIO

Figura 4.2: FACULDADE MACKENZIE PARANÁ - PROCESSO SELETIVO DO CURSO DE MEDICINA – 2023, prova tipo 1 - branca

77

A figura a seguir ilustra uma parede retangular de 6,0 m de largura e 3,0 m de altura.



Um cabo de energia elétrica retilíneo liga duas tomadas localizadas nos pontos A e B, estando A sobre a borda esquerda da parede, a 50 cm da borda superior. O ponto B está na base da parede, a 50 cm da sua borda esquerda.

Deseja-se passar um outro cabo retilíneo que ligue o ponto C, na quina da parede, a um ponto D na mesma borda que contém o ponto A. Sendo esse um cabo de internet, é fundamental que passe pelo cabo AB perpendicularmente.

Uma das formas de se determinar a posição do ponto D é imaginar eixos cartesianos \vec{Ox} e \vec{Oy} colocados, respectivamente, sobre as bordas inferior e esquerda e tratar os cabos como segmentos de retas perpendiculares.

A distância do ponto D à base inferior da parede é igual a

- (A) 1,70m.
- (B) 1,75m.
- (C) 1,80m.
- (D) 1,85m.
- (E) 2,00m.

78

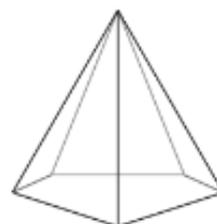
Frequentemente ouve-se dizer que "a probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos". Entretanto, é importante saber que isso só é verdade para espaços amostrais equiprováveis, ou seja, quando todas as possibilidades têm a mesma probabilidade de acontecer.

O paralelepípedo retangular ilustrado a seguir foi utilizado na confecção de um dado. Esse é um exemplo de espaço amostral não-equiprovável, posto que as probabilidades dos resultados dependem das áreas das faces.

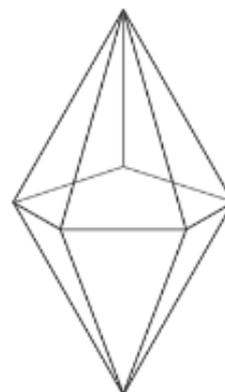
3cm

79

A figura a seguir ilustra uma pirâmide de base pentagonal.



Duas dessas pirâmides idênticas foram coladas pelas bases formando um novo sólido com 7 vértices e 10 faces.



Nas proximidades de cada um desses 7 vértices, são feitos cortes no sólido produzindo 7 pequenas pirâmides que serão, posteriormente, removidas. A esse processo se chama *truncamento*.

Após o truncamento descrito, o sólido passará a ter

- (A) 5 faces quadrangulares, 2 faces pentagonais e 10 faces hexagonais.
- (B) 5 faces quadrangulares, 7 faces pentagonais e 10 faces hexagonais.
- (C) 10 faces triangulares, 5 faces quadrangulares e 2 faces pentagonais.
- (D) 10 faces triangulares e 7 faces quadrangulares.
- (E) 10 faces triangulares e 7 faces pentagonais.

Fonte: https://conhecimento.fgv.br/sites/default/files/concursos/medicinacnm001_tipo_1.pdf

4.3. GEOMETRIA E EDUCAÇÃO NOS ANOS INICIAIS, FINAIS E ENSINO MÉDIO

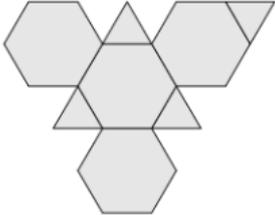
Outras faculdades também utilizaram de poliedros arquimedianos em suas avaliações para ingresso de alunos. Veja Figuras (4.3) e (4.4).

Figura 4.3: Universidade Federal de Juiz de Fora - 2018 - 1 dia

https://arquivos.qconcursos.com/prova/arquivo_prova/59755/copese-uff-2018-uff-vestibular-1-dia-modulo-ii-prova

110%

QUESTÃO 15 - A figura abaixo corresponde à planificação de um determinado poliedro:



O número de vértices desse poliedro é

- (A) 12
- (B) 18
- (C) 21
- (D) 30
- (E) 36

Página 11 de 19

Fonte: https://arquivos.qconcursos.com/prova/arquivo_prova/59755/copese-uff-2018-uff-vestibular-1-dia-modulo-ii-prova.pdf?_ga=2.30879359.118225920.1706275118-1833896844.1706275118

Figura 4.4: Universidade Estadual do Rio de Janeiro - 1ª fase/20 de dezembro de 1999

euquerouerj.com.br/sites/default/files/1999_f1d2_mat.pdf

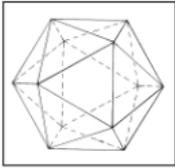
Zoom automático

matemática

1ª fase/20 DE DEZEMBRO

Questão 08

Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais retiram-se 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a $\frac{1}{3}$ da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas. Observe as figuras.



Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha. Depois de pronta a bola, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

- (A) 7,0 m
- (B) 6,3 m
- (C) 4,9 m
- (D) 2,1 m

Fonte: http://euquerouerj.com.br/sites/default/files/1999_f1d2_mat.pdf

4.3.1 Poliedros em Olimpíadas de Matemática

Trataremos nessa seção de algumas questões de olimpíadas e de listas de exercícios para treinamento para olimpíadas.

- Extraído do Banco de Questões 2015

Exercício 20. Francisco acaba de aprender em sua aula de geometria espacial a Relação de Euler para poliedros convexos:

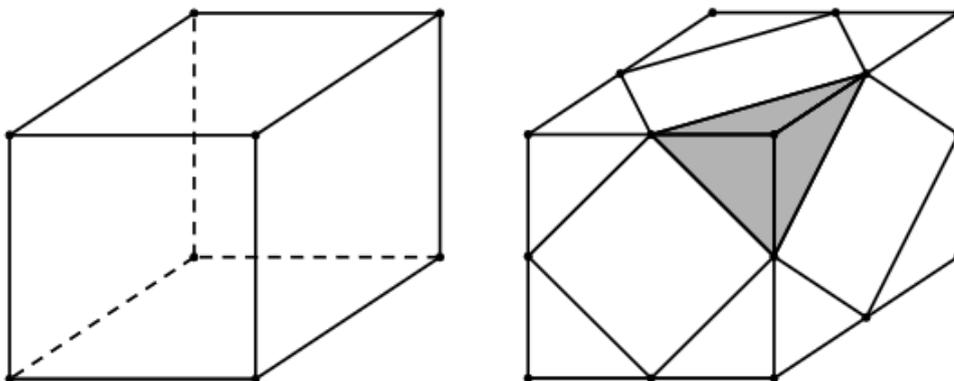
$$V + F = A + 2.$$

Na equação acima, V , A e F representam o número de vértices, de arestas e de faces do poliedro, respectivamente. Podemos verificar que a Relação de Euler é válida no cubo abaixo, pois existem 6 faces, 12 arestas, 8 vértices e

$$V + F = 8 + 6 = 12 + 2 = A + 2.$$

João decidiu verificar a Relação de Euler em outro poliedro obtido de um cubo de madeira. Ele marcou os pontos médios de cada aresta e, em cada face, os uniu formando quadrados, como mostra a figura abaixo. Em seguida, ele cortou as 8 pirâmides formadas em torno de cada vértice obtendo um novo poliedro. Determine:

Figura 4.5: Módulo de Geometria Espacial I - Fundamentos Poliedros - 3º ano/E.M



Fonte: <https://cdnportaldabmp.impa.br/portaldabmp/uploads/material/5yr0i51riokc0.pdf>

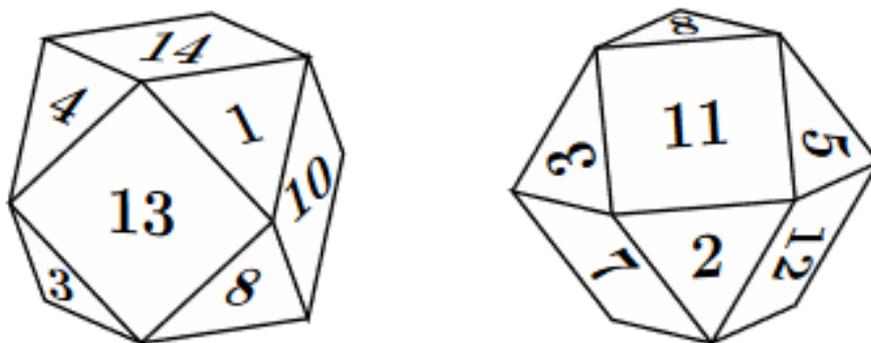
- a) o novo número de vértices;
- b) o novo número de arestas;
- c) o novo número de faces.

4.3. GEOMETRIA E EDUCAÇÃO NOS ANOS INICIAIS, FINAIS E ENSINO MÉDIO

• OBMEP 2012 – N2Q14 – 1a fase

Fazendo oito cortes em um cubo, perto de seus vértices, obtemos um sólido com 14 faces, que numeramos de 1 a 14. Na figura observamos esse sólido sob dois pontos de vista diferentes. Qual é o número da face oposta à face de número 13?

Figura 4.6: OBMEP 2012



Fonte:

<https://drive.google.com/file/d/1bFeDAB7P912IXnSfdAKGwWXstWmMc1tR/view>

- A) 5
- B) 6
- C) 7
- D) 11
- E) 12

Capítulo 5

Geogebra

Neste capítulo vamos introduzir uma nova ferramenta dentro do *Software Geogebra*. Mas primeiramente vamos conhecer o Software.

O GeoGebra é uma ferramenta poderosa e versátil que combina geometria, álgebra, cálculo e gráficos em um único software. Ele permite aos estudantes e professores explorar conceitos matemáticos de forma interativa e visual, facilitando a compreensão e a aplicação prática de teorias matemáticas.

Na página oficial do Geogebra, existe uma descrição bem detalhada do que é o GeoGebra hoje e o que ele representa no mundo para a Matemática. [14]

GeoGebra é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma. Além disso, o GeoGebra oferece uma plataforma online com mais de 1 milhão de recursos gratuitos criados por nossa comunidade em vários idiomas. Esses recursos podem ser facilmente compartilhados através de nossa plataforma de colaboração GeoGebra Tarefa, onde o progresso dos alunos pode ser monitorado em tempo real.

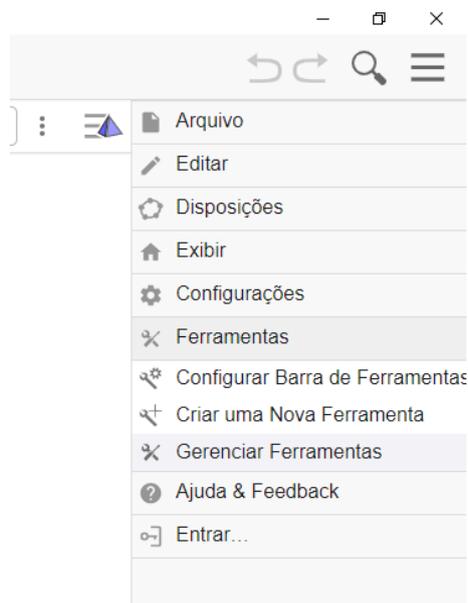
GeoGebra é uma comunidade de milhões de usuários localizada em quase todos os países. Tornou-se o fornecedor líder de software dinâmico de matemática, apoiando a educação em ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo. O mecanismo matemático da GeoGebra alimenta centenas de sites educacionais em todo o mundo de diferentes maneiras, desde demonstrações simples até sistemas de avaliação online completos.

5.1.1 Truncamento tipo 1

Para o tipo 1, começaremos criando dois pontos, A e B . Em seguida, criamos o vetor \overrightarrow{AB} com o ícone de “vetor” e no campo de entrada de equações, escrevemos a equação “ $C = A + \text{Vetor}(A, B)/2$ ”, que tem como resultado o ponto C , o qual estará no centro do vetor \overrightarrow{AB} .

Clicando nas três barras que ficam no lado direito da tela, na parte superior encontramos o ícone de “Ferramentas”, onde encontraremos outro ícone: “Criar Uma Nova Ferramenta”.

Figura 5.2: Criar Uma Nova Ferramenta no GeoGebra



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Aparecerá uma nova janela com três partes: “Objetos Finais”, “Objetos Iniciais” e “Nome e Ícone”.

Em Objetos Finais colocaremos o ponto C , como mostra na Figura (5.3). Em Objetos Iniciais colocaremos os pontos A e B , como mostra na Figura (5.4). Em Nome e Ícone, escolhe-se o nome que será dado ao ícone que está sendo criado, no nosso caso foi escolhido “Truncar”, como mostra na Figura (5.5). A imagem que ficará no ícone pode ser escolhido também. Após todos os preenchimentos dos campos, clicar em “concluído” e o novo ícone aparecerá na barra de ferramentas.

5.1. UM NOVO ÍCONE COMO FERRAMENTA

Figura 5.3: Objetos Finais



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Figura 5.4: Objetos Iniciais



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

5.1. UM NOVO ÍCONE COMO FERRAMENTA

Figura 5.5: Nome e Ícone

Criar uma Nova Ferramenta

Objetos Finais Objetos Iniciais Nome e Ícone

Nome da ferramenta
Truncar

Nome do comando
Truncar

Ajuda da ferramenta

Ícone ... Exibir na Barra de Ferramentas

< VOLTAR CONCLUÍDO

CANCELAR

Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

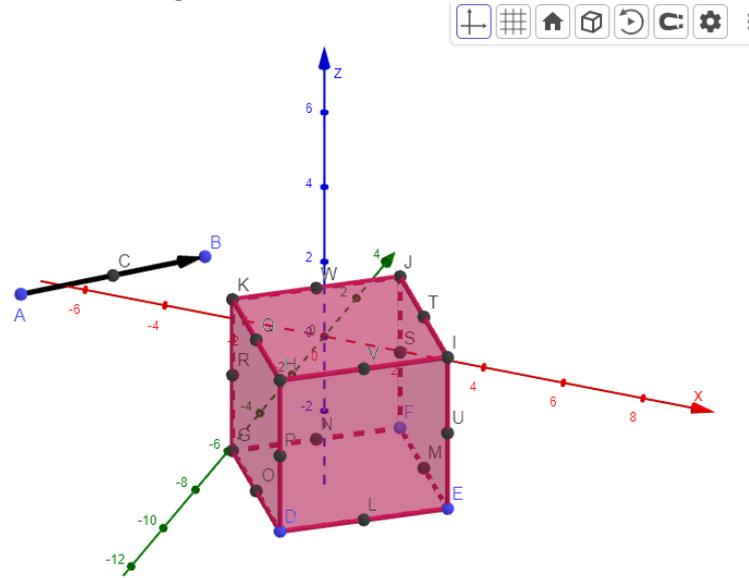
Agora, com o ícone “Truncar” criado, criamos o cubo que será truncado para a criação do cuboctaedro. Selecionamos o ícone e partimos para criar os vetores, clicando em dois vértices subsequentes do cubo. Note que cada vez que for clicado nos vértices, um novo ponto será criado no centro da aresta, como mostra na Figura (5.6).

Após todos os vetores serem criados e os pontos médios aparecerem, deve-se criar segmentos ligando os quatro novos pontos médios de cada face do cubo (para melhor visualização desses segmentos, é sugerido que utilize uma cor diferente do cubo), como mostra na Figura (5.7).

Agora, com todos os segmentos finalizados, desmarca o ícone do cubo na janela de álgebra e o cuboctaedro está finalizado, como mostra na Figura (5.8).

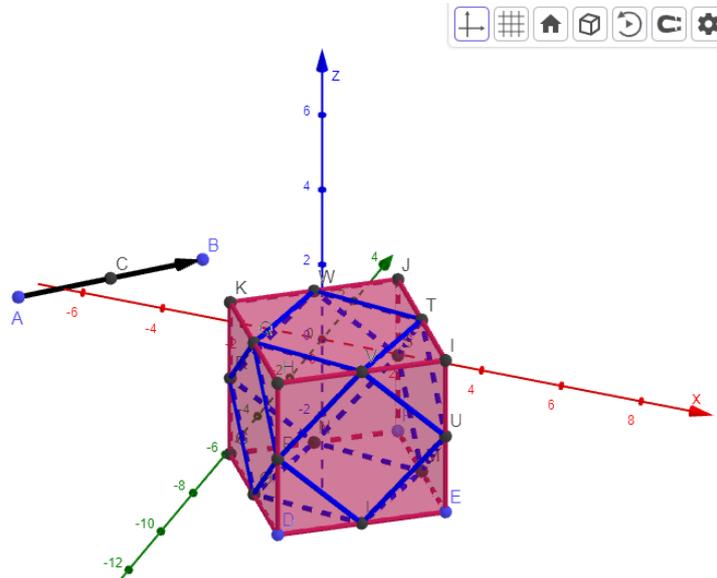
5.1. UM NOVO ÍCONE COMO FERRAMENTA

Figura 5.6: Cubo com os vetores



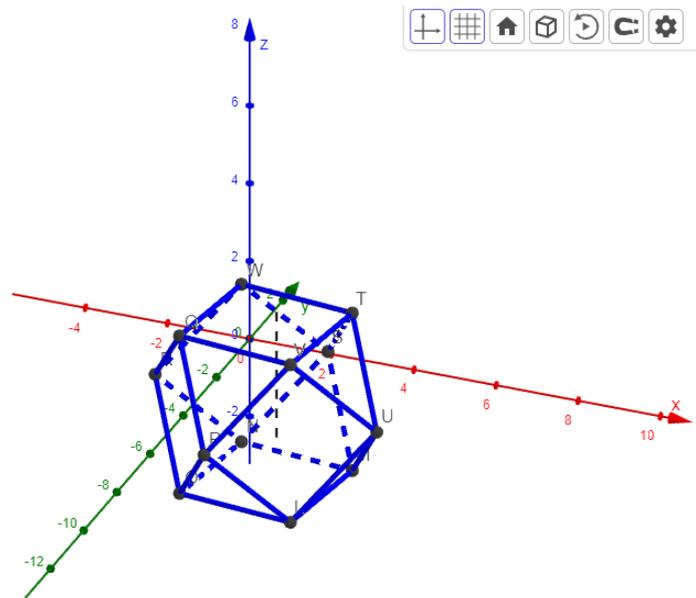
Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Figura 5.7: Cubo com os vetores ligados



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Figura 5.8: Cuboctaedro



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

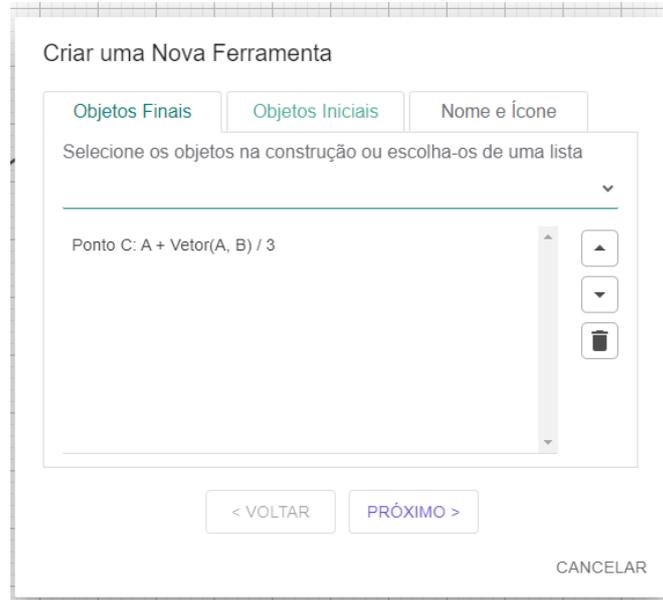
Existe também a opção de uma animação no GeoGebra, onde as pirâmides que são truncadas aparecem deslizando para fora do cubo ¹

¹Referência para esse tópico: Antônio Cerino Dias Ferreira. [8]

5.1.2 Truncamento tipo 2

Para o truncamento tipo 2 no Geogebra 3D, faremos o mesmo procedimento que do tipo 1, mas com uma diferença: a medida do vetor não será no centro da aresta do poliedro. Cada poliedro que será truncado deverá ter um vetor específico para a medida do corte. Por exemplo, em (3.3.1) estudou-se o truncamento do tetraedro e ficou determinado que a aresta dos tetraedros que foram truncados tem a mesma medida do tetraedro truncado. Logo, a medida da aresta do tetraedro inicial será dividida em três partes iguais, o que vai gerar um vetor no Geogebra “ $C = A + \text{Vetor}(A, B)/3$ ”.

Figura 5.9: Criando uma nova ferramenta - Objetos Finais - truncamento tipo 2



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

5.1. UM NOVO ÍCONE COMO FERRAMENTA

Figura 5.10: Criando uma nova ferramenta - Objetos Iniciais - truncamento tipo 2



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

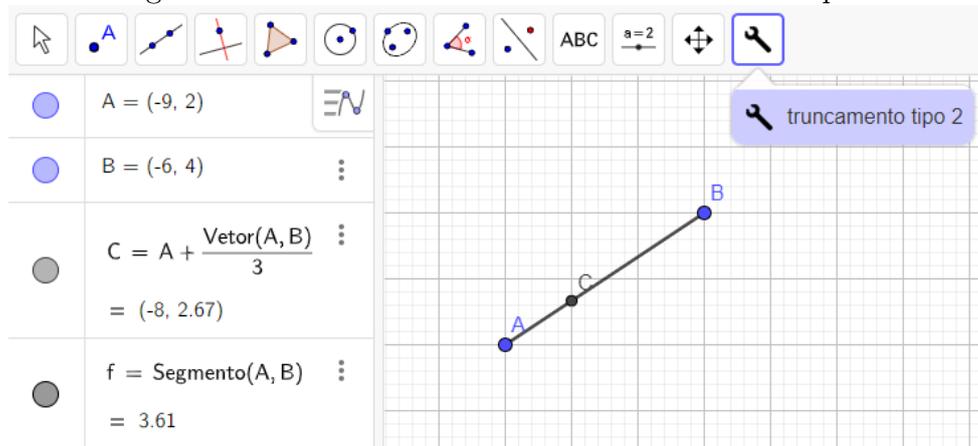
Figura 5.11: Criando uma nova ferramenta - Nome e Ícone - truncamento tipo 2



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

5.1. UM NOVO ÍCONE COMO FERRAMENTA

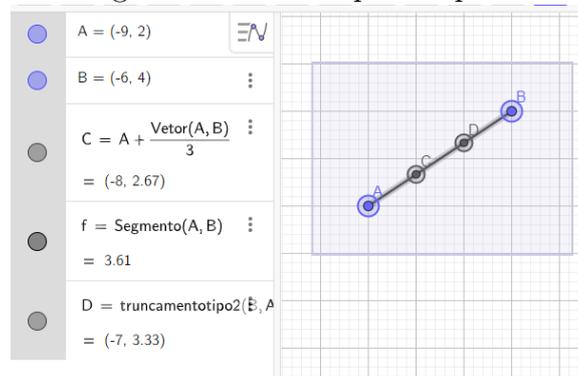
Figura 5.12: Barra de ferramentas - truncamento tipo 2



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Para criar a ferramenta que partirá a aresta nas duas medidas certas, podemos criar uma nova ferramenta com o truncamento duplo. Primeiro criamos o vetor, truncamos em ambos os sentidos de modo que apareça os dois pontos de cortes. Selecionamos a imagem clicando em “ctrl + a”. Clicamos em “criar uma nova ferramenta” e seguimos novamente os passos, mas agora aparecerá nos “Objetos Finais” o segmento duplamente partido e chamaremos essa nova ferramenta de “truncamento duplo”.

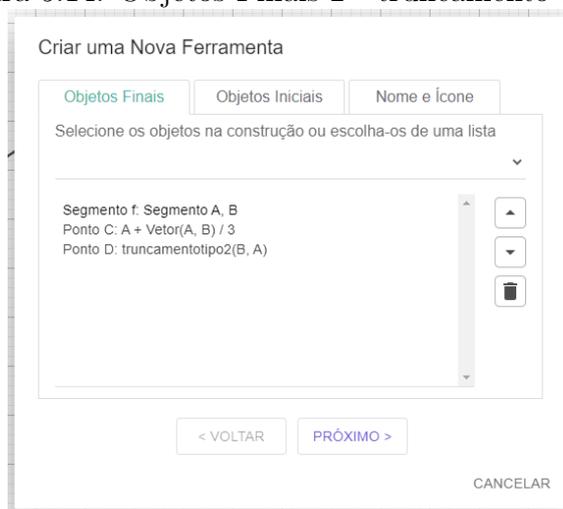
Figura 5.13: Segmento com dois pontos para truncamento



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

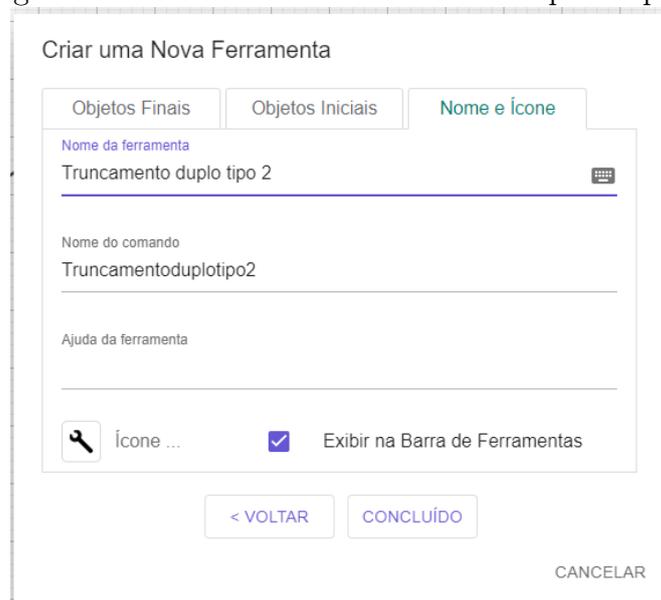
5.1. UM NOVO ÍCONE COMO FERRAMENTA

Figura 5.14: Objetos Finais 2 - truncamento tipo 2



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Figura 5.15: Ferramenta truncamento duplo - tipo 2



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

5.1. UM NOVO ÍCONE COMO FERRAMENTA

Figura 5.16: Barra de ferramentas - truncamento duplo - tipo 2

Criar uma Nova Ferramenta

Objetos Finais Objetos Iniciais Nome e Ícone

Nome da ferramenta
Truncamento duplo tipo 2

Nome do comando
Truncamentoduplotipo2

Ajuda da ferramenta

Ícone ... Exibir na Barra de Ferramentas

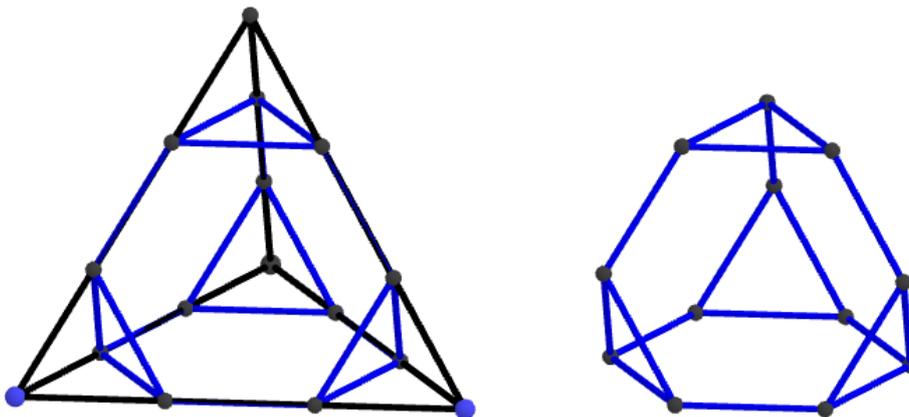
< VOLTAR CONCLUÍDO

CANCELAR

Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Agora, com a ferramenta do truncamento duplo criada, podemos criar o tetraedro regular e criar os pontos em todas as arestas, ligando os segmentos novos e finalizando o tetraedro truncado.

Figura 5.17: Finalizando o tetraedro truncado



Fonte: Feito pelo autor no GEOGEBRA

Deixamos para o leitor a construção dos outros tipos de truncamentos, criando

as devidas ferramentas no Geogebra com as medidas dos truncamentos demonstradas na dissertação. Para maiores construções de poliedros truncados feitos no Geogebra, indicamos a dissertação de Pedro Vitor Silva Rodrigues [20], da Universidade Federal Rural De Pernambuco.

5.1.3 Geogebra online

A seguir, listamos algumas sugestões para visualizar os poliedros de Arquimedes construídos no Geogebra online, pelo autor **Derivando a matemática** https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matem%C3%A1tica.

- Tetraedro Truncado
<https://www.geogebra.org/m/ehyabcdn>
- Cubo Truncado
<https://www.geogebra.org/m/tyfnjr6q>
- Cuboctaedro
<https://www.geogebra.org/m/m8kh29as>
- Rombicuboctaedro
<https://www.geogebra.org/m/eetdgxvu>
- Cuboctaedro Truncado
<https://www.geogebra.org/m/bq2sttbq>
- Octaedro Truncado
<https://www.geogebra.org/m/mzhyugqa>
- Icosaedro Truncado
<https://www.geogebra.org/m/dkgj35sb>
- Icosidodecaedro
<https://www.geogebra.org/m/m7ugxt9v>
- Dodecaedro Truncado
<https://www.geogebra.org/m/xvpu6bha>
- Rombicosidodecaedro.
<https://www.geogebra.org/m/kyvhrb4m>
- Cubo Snub.
<https://www.geogebra.org/m/hhjajs3k>

Capítulo 6

Recurso Educacional

6.1 Título

UTILIZAÇÃO DE MATERIAL CONCRETO E JOGOS PARA O ESTUDO DOS POLIEDROS DE PLATÃO E DE ARQUIMEDES

6.2 Público alvo

Estudantes do 6º ao 9º Ano do Ensino Fundamental.

6.3 Assunto

Poliedros: estudo dos elementos dos poliedros: imagens, nomenclatura dos poliedros, estudo das planificações e faces.

6.4 Objetivos

Ao final da atividade didática, o estudante deve:

- Identificar as imagens dos poliedros com os referidos nomes, as quantidades de faces, assim como as planificações;
- Saber a quantidade faces de cada um dos poliedros afim de conseguir montar os poliedros com a utilização do material concreto e do Puzzle.

6.5 Ponto de partida

Conhecer os poliedros de Platão e os poliedros de Arquimedes, assim como fazer um estudo de seus elementos e características

6.6 Procedimento didático metodológico

Dividido em quatro atividades, a primeira tem como objetivo fazer a relação dos nomes, elementos, planificações e imagem dos poliedros nas cartas, disponíveis abaixo no trabalho. A segunda atividade consiste em fazer a montagem dos poliedros utilizando o material concreto disponibilizado pelo professor, utilizando apenas as imagens dos poliedros impressos ou projetados em televisão ou data show. A terceira atividade são dois quebra cabeças com as imagens dos poliedros de Platão e os poliedros de Arquimedes, onde os alunos podem ou não utilizar as imagens originais para se basear nas montagens. A quarta atividade consiste em um caça palavras com os nomes dos poliedros de Platão e Arquimedes. Essa atividade é destinada ao conhecimento dos nomes dos poliedros.

6.7 Primeira atividade

6.7.1 Primeira aula

A primeira atividade deverá ser realizada em até 2 aulas, onde na primeira aula o professor irá apresentar os poliedros aos alunos, identificando os elementos, características e planificações de cada um deles. Esta proposta foi idealizada para ser aplicada no ensino presencial, ou seja, o aluno deve confeccionar e manipular os poliedros, sendo eles físicos ou virtuais. Pode-se propor grupos de 4 alunos, o que incentiva a colaboração, trazendo melhor aproveitamento do tempo de aula. Ao final da apresentação da aula, o professor poderá fazer algumas perguntas aos alunos para verificar se o conteúdo foi realmente entendido pelos alunos, como por exemplo:

1. Quantos poliedros de Platão existem?
2. Qual é a principal característica dos poliedros de Platão?
3. Quantos poliedros de Arquimedes existem?
4. O que são Vértices?
5. O que são Arestas?
6. O que são Faces?

6.7. PRIMEIRA ATIVIDADE

7. Observando esse poliedro que temos aqui (o professor coloca o poliedro físico na mesa ou mostra em projeção na tela), quantos vértices, arestas e faces temos?
8. Qual seria o poliedros que tem um total de () arestas, () vértices e () faces? (o professor escolhe um poliedro e indica aos alunos os totais de elementos descritos)
9. Existe alguma relação dos poliedros de Platão com os poliedros de Arquimedes?

Realizada essa primeira aula, com todas as informações passadas para os alunos e confirmando com o questionário o aprendizado dos alunos, pode-se passar para a segunda aula: o jogo.

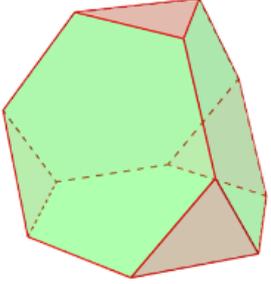
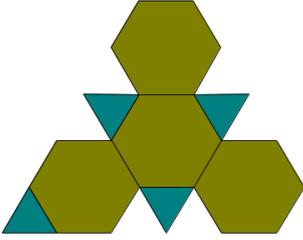
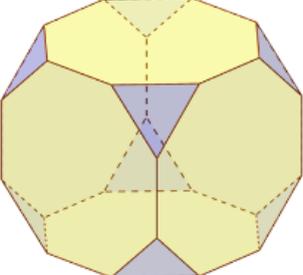
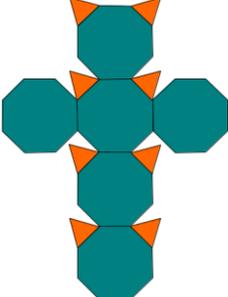
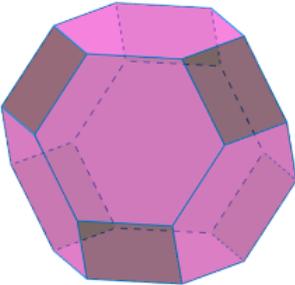
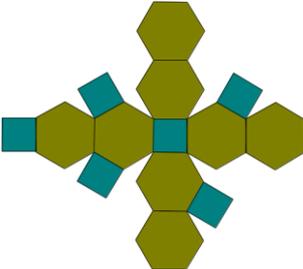
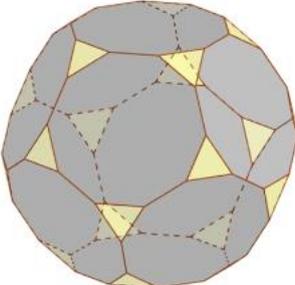
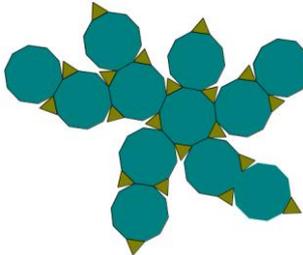
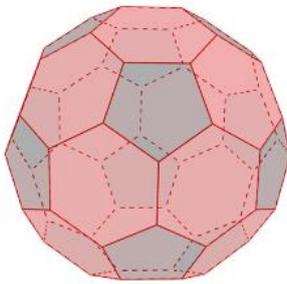
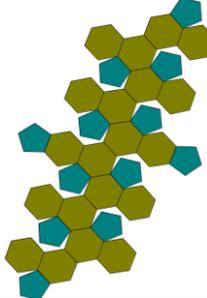
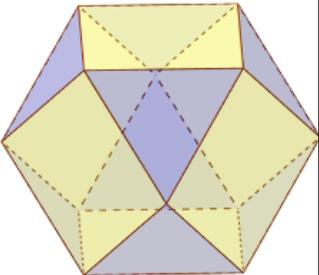
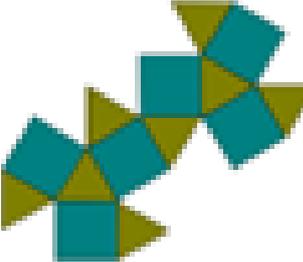
6.7.2 Segunda aula

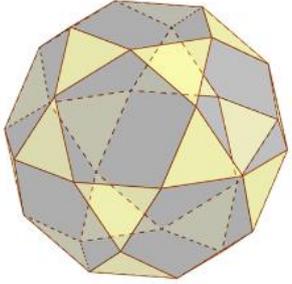
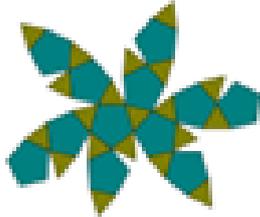
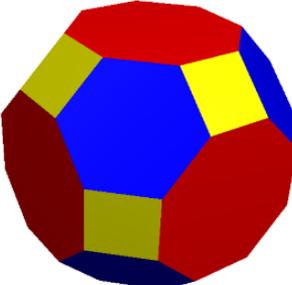
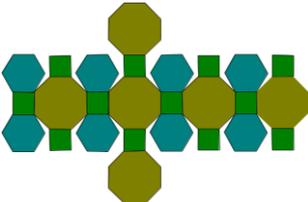
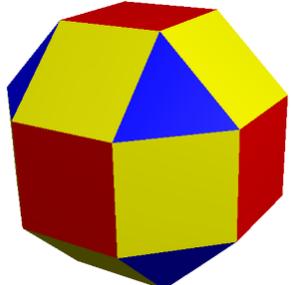
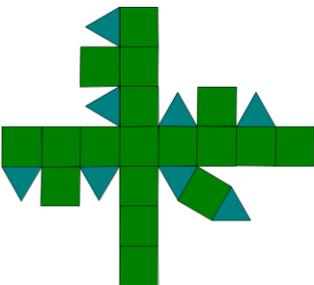
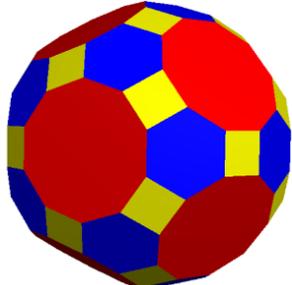
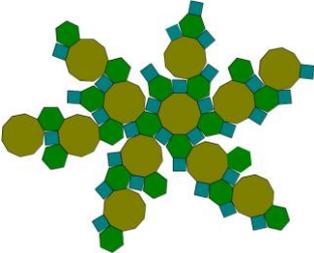
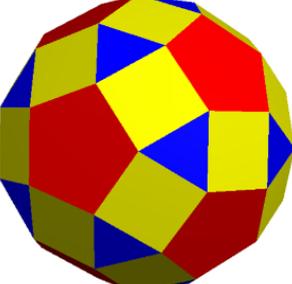
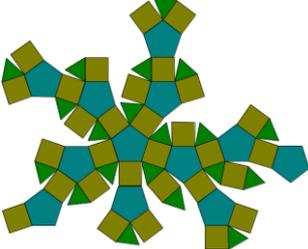
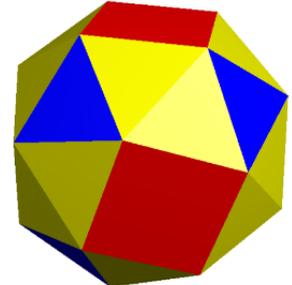
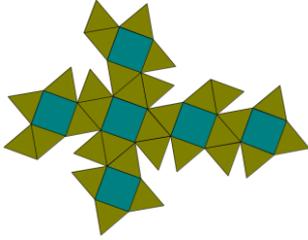
A segunda etapa será realizada com a utilização do jogo de cartas, composta por quatro grupos de cartas, num total de 72 cartas: a primeira com as imagens dos poliedros, a segunda com os nomes dos poliedros, a terceira com as planificações dos poliedros e a quarta com os elementos de cada um dos poliedros (vértices, arestas e faces).

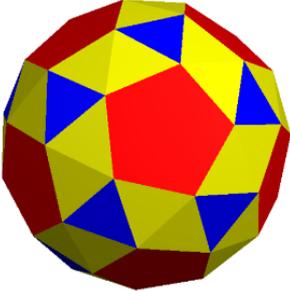
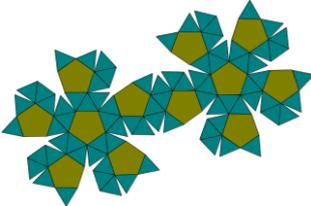
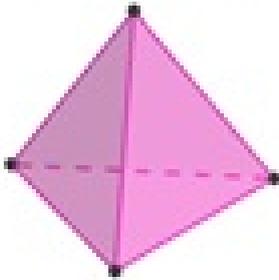
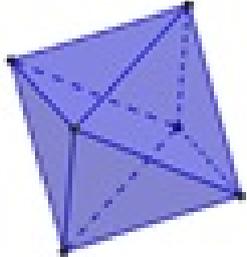
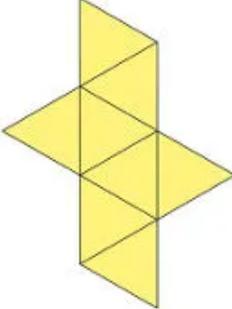
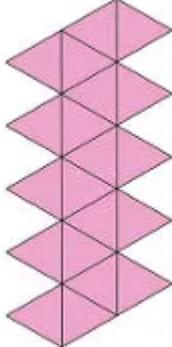
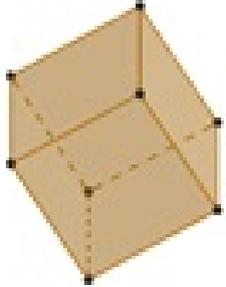
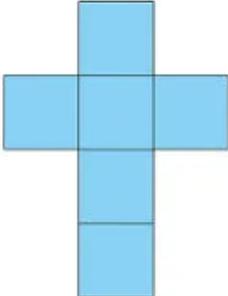
Separando os grupos de cartas em quatro partes sobre a mesa, podemos fazer dois tipos de atividades.

1. Na primeira atividade todas as cartas estão espalhadas voltadas para cima. Os alunos podem escolher uma carta de cada grupo, correlacionando as informações de cada carta de forma a separar todos os 18 conjuntos corretamente.
2. Já segunda atividade, um dos blocos de cartas deve estar junto e empilhados e embaralhadas de forma que as informações estejam voltadas para baixo. O aluno pega a primeira carta do monte e deve procurar nos outros conjuntos de cartas as correspondentes da carta sorteada.

As atividades podem ser realizadas individualmente ou em grupo. Ganha a partida quem conseguir acertar mais conjuntos de cartas de forma correta.

	<p>Tetraedro Truncado</p>		<p>4 triângulos 4 hexágonos</p>
	<p>Cubo Truncado</p>		<p>8 triângulos 6 octógonos</p>
	<p>Octaedro Truncado</p>		<p>6 quadrados 8 hexágonos</p>
	<p>Dodecaedro Truncado</p>		<p>20 triângulos 12 decágonos</p>
	<p>Icosaedro Truncado</p>		<p>12 pentágonos 20 hexágonos</p>
	<p>Cuboctaedro</p>		<p>8 triângulos 6 quadrados</p>

	Icosidodecaedro		20 triângulos 12 pentágonos
	Cuboctaedro Truncado		12 quadrados 8 hexágonos 6 octógonos
	Rombicuboctaedro		8 triângulos 18 quadrados
	Icosidodecaedro Truncado		30 quadrados 20 hexágonos 12 Decágonos
	Rombicosidode- caedro		20 triângulos 30 quadrados 12 pentágonos
	Cubo Snub		32 triângulos 6 quadrados

	<p>Dodecaedro Snub</p>		<p>80 triângulos 12 pentágonos</p>
	<p>Tetraedro</p>		<p>4 triângulos</p>
	<p>Octaedro</p>		<p>8 triângulos</p>
	<p>Icosaedro</p>		<p>20 triângulos</p>
	<p>Cubo</p>		<p>6 quadrados</p>

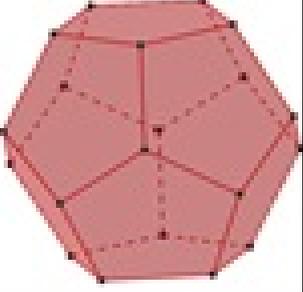
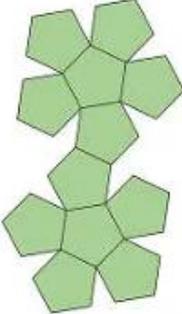
	<p>Dodecaedro</p>		<p>12 pentágonos</p>
---	-------------------	--	----------------------

Figura 6.2: Puzzle montados



Fonte: <https://www.edulig.com.br/solidos-de-arquimedes>.

Figura 6.3: Maria Júlia e o Puzzle



Fonte: Próprio autor. Puzzle 3D Geométrico Sólidos de Arquimedes.

6.8. SEGUNDA ATIVIDADE

Maria Júlia, filha do professor Rammon Rodrigues da Nóbrega montou três poliedros de Arquimedes utilizando apenas a imagem impressa dos sólidos e o puzzle. Nessa época, Maria Júlia tinha apenas 10 anos de idade e estudava no 5^o ano do ensino fundamental 1. A mesma já tinha estudado sobre objetos espaciais, sabia o que era aresta, vértices e faces mas não conhecia os poliedros de Arquimedes. Mesmo com poucos conhecimentos matemáticos, foi possível fazer a construção e responder as seguintes perguntas sobre os poliedros:

1. Quantos vértices tem o poliedro?
2. Quantas arestas tem o poliedro?
3. Quantas faces tem o poliedro? Quantas peças foram utilizadas para a montagem dos sólidos?

Mas sabemos que nem toda escola tem condições de comprar materiais para todos os alunos, pois o mesmo se tornaria muito dispendioso.

Os professores Rogéria Galdencio do Rêgo, Rômulo Marinho do Rêgo e Kleber Mendes Vieira [21] falam sobre como fazer a construção do tetraedro e do octaedro utilizando palitos de churrasco e conexões na forma de x , feitas com borracha de garrote (produto vendido em farmácia, por metro, e utilizado quando na aplicação de injeções intravenosas).

Uma outra alternativa para a construção dos poliedros é a utilização de jujuba e palitos de dente.

Figura 6.4: Jujuba e palitos



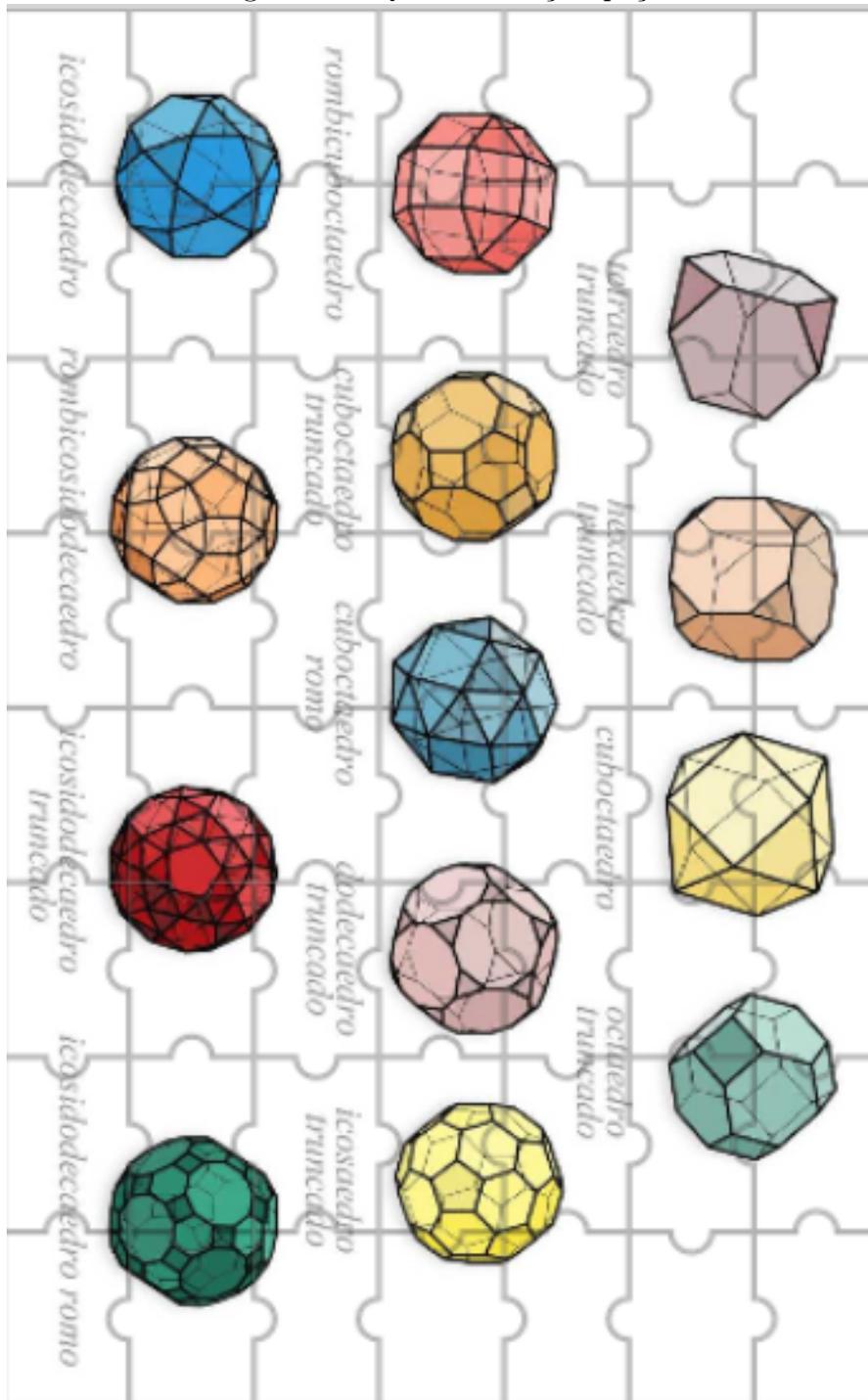
Fonte: Próprio autor.

6.9 Terceira atividade

Na terceira atividade, os alunos irão fazer a montagem do quebra cabeça dos poliedros de Platão e Arquimedes, contando com a ajuda ou não da imagem original.

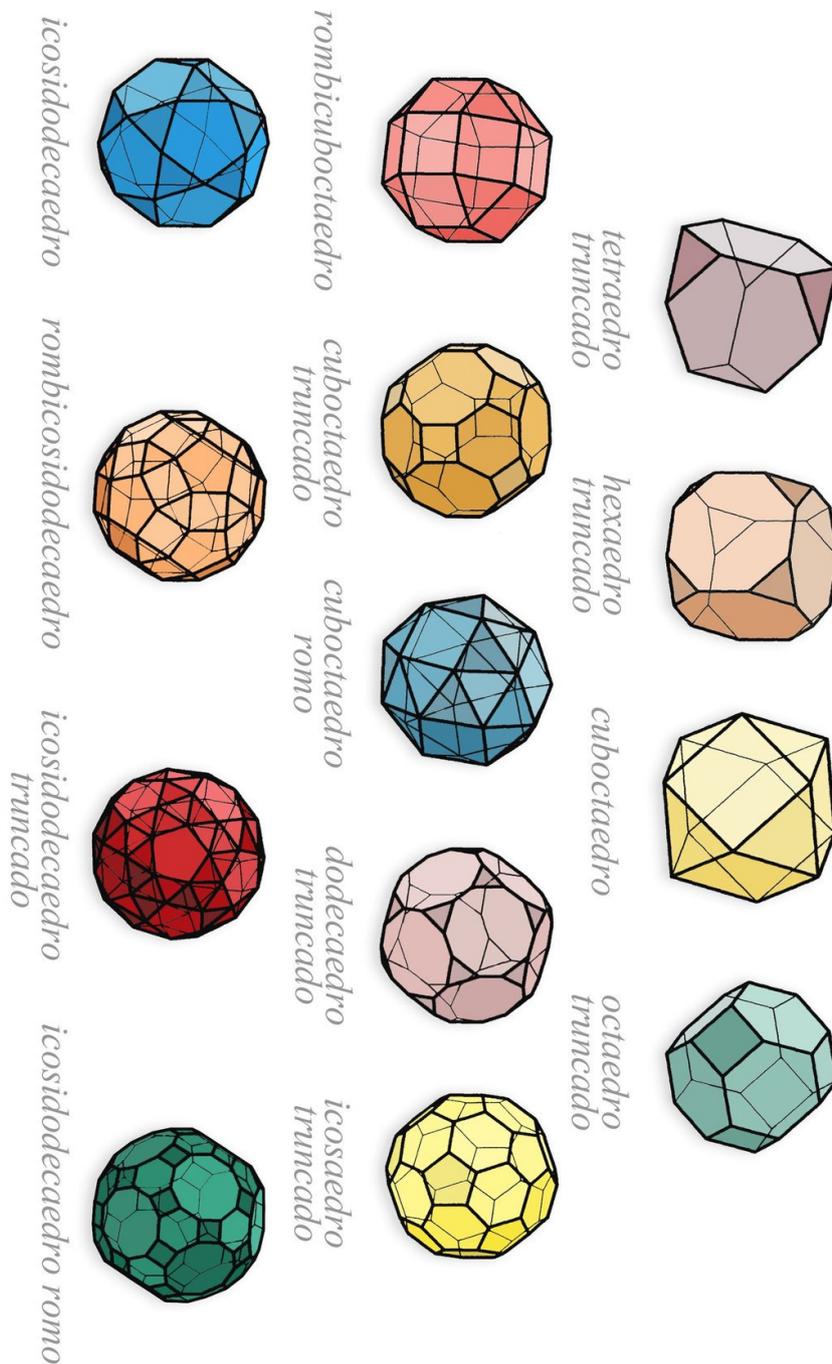
A imagem utilizada no nosso quebra cabeça está disponível no site <https://twitter.com/funfunfunctions/status/1057545215567892480> e o jogo foi criado no site <https://puzzel.org/pt>, onde também existem outras possíveis construções de jogos.

Figura 6.5: Quebra cabeça - peças



Fonte: Feito pelo autor no site <<https://puzzel.org/pt>>.

Figura 6.6: Peças quebra cabeça - imagem original



Fonte: Feito pelo autor no site <<https://puzzel.org/pt>>.

6.10 Quarta atividade

A quarta atividade consiste em um caça palavras com os nomes dos poliedros de Platão e Arquimedes. Essa atividade é destinada ao conhecimento dos nomes dos poliedros.

Existem diversos sites que criam caça palavras. o que utilizamos para essa atividade é o site <https://gsantiago.github.io/gerador-caca-palavras/> [1]

Caça palavras – Poliedros de Platão e Arquimedes

H W M F X U R E J G N F S T V L U E K T Z S O O W R B J F U
 Y I X L X E R Y J D P G T G T R V Y W Z A S N Q Z J T R Y X
 I W K Y E R W Q S P U Q C J Z B S O P Y Q R A N K I N E J T
 C Y O G J E Y A S Q S T D F L P J X N Z T B T U F Z Z C U Y
 O V R Y C W V P I Y T T V S A P Q A W I S K W C Y U U X A A
 S B M B C H H G B F L Y H P D D L Q B Y S B M E X G A B P T
 I U G G U D S P S L U R Z Q J B G Q J V X B Q E C D S J B G
 D V F M B U E J E V X O X X W Q L C F R C M B V T E Z P M V
 O S B D O M M H L R R R X C T S F L W F R Y H W F V Y V M J
 D G F A C E J N P B O R H C P K K L Y K C H R E J M N H D V
 E Q X S T C B E T H H D S R Q P M P H O C T A E D R O S J V
 C M P K A D Q O R D E A T C O B U C I B M O R H E V T S W R
 A C O A E Y D F C J K W T R X Z G D M K O R K L B N L P E L
 E P F K D N L Y W O R D E A C E D O D I S O C I B M O R T V
 D Q S Z R Z C R K U A T S Q J Z U O W H F B H A W M D W Z T
 R B I H O Y J D M M M A X X F D H E X A E D R O S A O F M Y
 O Q V H X L R F D W V I F C J I K I W A E K S B R S I G N W
 W L Y D B D J E R O F J H F H X T E C B I Z B S O U L I I U
 F T R G P Z O E O S C O S A I I E J Y S M D W O A D V O G N
 V E B I G Q R D T I L A T I P W T C P M Q H X M E O I I J R
 Z B F U T Y V H E G J N L Y Y R L P S A W W T X E D D N A
 T J X N O I N G Y C L J J E S I A M L I V J U G I E F T Z R
 T T Q C K C I G K E A O D X F B E G O X W I U P A O K T W P
 L I Y O R O Y C I X F E U Y W V D I H G U T G P H S C U S O
 A H D Z H S A O D T K Z D P L M R Y P N H Z D E M L A I F H
 N E A P M A F L Q Q G V A R I M O A B P Z Q W F F G R P X G
 R B H Y D E L Q B U T B Y X O W L R P S U Z Z N S S M S Z C
 M O W Y E D E Z Y L G F S S Z Q W F Q U H I B L C Q W G B T
 E Q U V P R C A Q Y G R T X F W W T P C X Y F Q L M L F K G
 S Y X S V O K W E F A L L M L M M V B A L Z Q A T D O L Y M

tetraedro
 hexaedro
 octaedros
 dodecaedro
 icosaedro
 tetraedro truncado,
 cuboctaedro
 cubo truncado

octaedro truncado
 rombicuboctaedro
 cuboctaedro truncado
 icosidodecaedro
 dodecaedro truncado
 icosaedro truncado
 rombicoidodecaedro

icosidodecaedro
 truncado
 cubo snub
 icosidodecaedro snub

Caça palavras – Poliedros de Platão e Arquimedes

HWMFXURE JGNFSTVLUEKTZSOOWRB JFU
YIXLXERYJDPGTGTRVYWZASNQZJTRYX
IWKYERWQSPUQCJZBSOPYQRANKINEJT
CYOGJEYASQSTDFLPJXNZTBTUFZZCUY
OVRWCWVPIYTTVSA PQAWISKWCYUUXAA
SBMBCHHGBFLYHPDDLQBYSBMEXGABPT
IUGGU D S P S L U R Z Q J B G Q J V X B Q E C D S J B G
DVFBUEJEVXOXXWQLCFRCMBVTEZPMV
OSBDOMMHLRRRXCTSF L W F R Y H W F V Y V M J
DGFACEJNPBORHCPKKLYKCHREJMNHDV
EQXSTCBETHHDSRQPMPHOCTAEDROSJV
CMPKADQORDEATCOBUCIBMORHEVTSWR
ACOA E Y D F C J K W T R X Z G D M K O R K L B N L P E L
EPFKDNLYWORDEACEDODISOCIBMORTV
DQSZRZCRKUATSQJZUOWHFBHAWMDWZT
RBIHOYJDMMMAXXF D H E X A E D R O S A O F M Y
OQVHXLRFDWVIFCJIKIWAEEKSBR SIGNW
WLYDBDJEROFJHFHXTECBIZBSOULIU
FTRGPZOEOSCOSAIEJYSMDWOADVOGN
VEBIGQRDTILATIPWTCPMQHXMEOIIR
ZBFUTYVHEGJNLYYYRLPSAWWTXEDDNA
TJXNOINGYCLJJESIAMLIVJUGIEFTZR
TTQCKCIGKEAODXFBEGOXWIUPAOKTWP
LIYOROYCXFEUYWVDIHGUTGPHSCUSO
AHDZHSAODTKZDPLMRYPNHZDEMLAIFH
NEAPMAFLQQGVARIMOABPZQWFFGRP XG
RBHYDELBQUTBYXOWL R P S U Z Z N S S M S Z C
MOWYEDEZYLGFSSZQWFQUHIBLCQWGBT
EQUVP R C A Q Y G R T X F W W T P C X Y F Q L M L F K G
SYXSVOKWEFALLMLMMVBALZQATDOLYM

Capítulo 7

Conclusões

A pesquisa teve como objetivo desenvolver um tratamento métrico dos poliedros, com ênfase nos poliedros regulares, os poliedros de Platão e nos poliedros de Arquimedes. As demonstrações matemáticas sobre volumes dos poliedros, tanto dos cinco poliedros de Platão como de sete dos treze poliedros de Arquimedes foram os pontos principais do trabalho. Para alcançar o objetivo proposto, foi realizado um estudo sobre as relações do princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes e da característica de Euler para as relações entre elementos dos poliedros.

A partir do estudo, ficou evidente que os temas abordados podem ser estudados, tanto numa perspectiva para ensino nos anos finais, quanto no ensino médio, visto que todos os cálculos e relações foram obtidas com conteúdos estudados desde o sexto ano dos anos finais até o terceiro ano do ensino médio. As relações estudadas nos anos iniciais já contemplam a relação de Euler e os poliedros regulares. Entretanto, nenhum dos poliedros de Arquimedes são estudados no ensino básico, o que, de conforme abordado no estudo em tela, restou comprovado que seria viável, haja vista algumas questões de exames, para admissão em Universidades, trataram sobre o estudo dos truncamentos dos poliedros platônico, resultando nos poliedros arquimedianos.

Tanto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) foram encontrados elementos que demonstraram que, os temas abordados nessa dissertação, fazem parte dos conteúdos estudados no ensino básico, o que corrobora nossa sugestão de que os poliedros arquimedianos devem compor o conteúdo curricular em tais séries.

De forma a cumprir uma das exigências do curso, este estudo apresentou uma série de recursos educacionais, que poderá ser utilizado para facilitar o entendimento do assunto, como sabemos, frequentemente é exigido dos docentes, o conhecimento de ferramentas para um melhor aproveitamento dos estudos pelos discentes, a exemplo dos materiais concretos, como jogos e ferramentas digitais. Tanto os jogos sugeridos como o próprio Geogebra são ferramentas viáveis para quaisquer idade e nível de conhecimento. Atividades gratuitas ou de baixo custo, a exemplo da sugerida neste estudo, podem

facilitar a compreensão por parte dos alunos, tornando os conteúdos mais prazerosos para o estudante e, conseqüentemente, facilitando a jornada de trabalho para o professor.

Mesmo com a utilização de tais ferramentas, ainda temos limitações para algumas das atividades, a exemplo do próprio Geogebra que apesar de ser uma ferramenta gratuita, sua utilização pode se tornar inviável em algumas localidades, por limitações de infraestrutura e de conexões de internet, devido a realidade das escolas brasileiras, que divergem a depender da região na qual se localizam, levando a situações onde o professor necessita arcar com todas as despesas de impressão ou de outros materiais, o que dificulta e pode até diminuir o interesse de alguns profissionais pela atividade.

Como sugestão para estudos futuros, outros tipos de poliedros existentes, como os de Catalan, Johnson ou os poliedros estrelados podem ser amplamente estudados.

Anexos



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
Fone/Ramal: (83) 3216-7563 <http://www.ufpb.br/pos/profmat>



À Coordenação do Programa em Matemática em Rede Nacional

Assunto: Solicitação de utilização de Puzzle da empresa EDULUDI

Caro representante,

Eu, RAMMON RODRIGUES DA NÓBREGA, matrícula Nº 20221000298, discente do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática da UFPB, venho solicitar a autorização para utilização das imagens e do jogo “Puzzla 3D Sólidos de Arquimedes” na dissertação de mestrado que possui como título Relações Métricas nos Poliedros de Arquimedes, tendo como orientador o professor Dr. Carlos Bocker Neto, bem como autorização para publicação em periódicos após conclusão do estudo, de acordo com o art. 56 da Resolução CONSEPE Nº 79/2013.

Diante do exposto, reitero meus votos de estima e consideração perante a empresa, envio sugestão de modelo e aguardo deferimento do pleito.

João Pessoa – PB, 14 de dezembro de 2023

Documento assinado digitalmente
gov.br RAMMON RODRIGUES DA NOBREGA
Data: 14/12/2023 15:57:13-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Rammon Rodrigues da Nóbrega
Discente

Documento assinado digitalmente
gov.br CARLOS BOCKER NETO
Data: 15/12/2023 07:55:21-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Carlos Bocker Neto
Orientador



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
Fone/Ramal: (83) 3216-7563 <http://www.ufpb.br/pos/profmat>



Eu, ISMAEL LIBANIO NETO,
nacionalidade brasileiro, estado civil divorciado, portador da Cédula de
identidade RG nº. M659726, inscrito no CPF/MF sob nº
317530866-04, residente à Av./Rua
Neonio, nº. 205 /101 município de
Ipatinga - MG, REPRESENTANTE DA EMPRESA Eduludi Objetos
Pedagógicos LTDA. AUTORIZO o uso de imagem e do jogo em todo e qualquer material, para ser
utilizada na dissertação de mestrado que possui como título **Relações Métricas nos Poliedros de
Arquimedes** de autoria do discente Rammon Rodrigues da Nóbrega sob a orientação do professor
Dr. Carlos Boccer Neto.

Fica ainda **autorizada**, de livre e espontânea vontade, para os mesmos fins, a cessão de
direitos da veiculação das imagens não recebendo para tanto qualquer tipo de remuneração, para
publicação em periódicos após a conclusão do curso.

Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem
que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à imagem ou a qualquer outro, e assino a
presente autorização em 02 vias de igual teor e forma.

Ipatinga, dia 18 de dezembro de 2023.

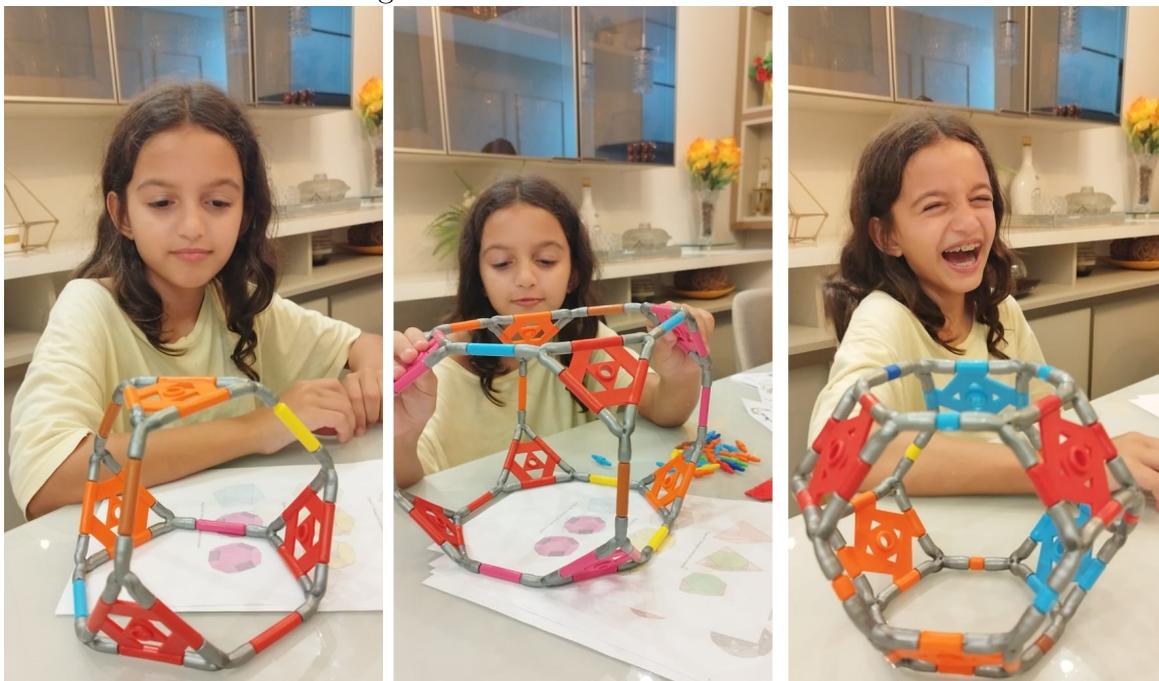
Documento assinado digitalmente
gov.br ISMAEL LIBANIO NETO
Data: 19/12/2023 08:17:56-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

(Assinatura)

Nome:

Telefone p/ contato:

Figura 7.1: Maria Júlia e o Puzzle



Fonte: Próprio autor. Puzzle 3D Geométrico Sólidos de Arquimedes.

Figura 7.2: Puzzle



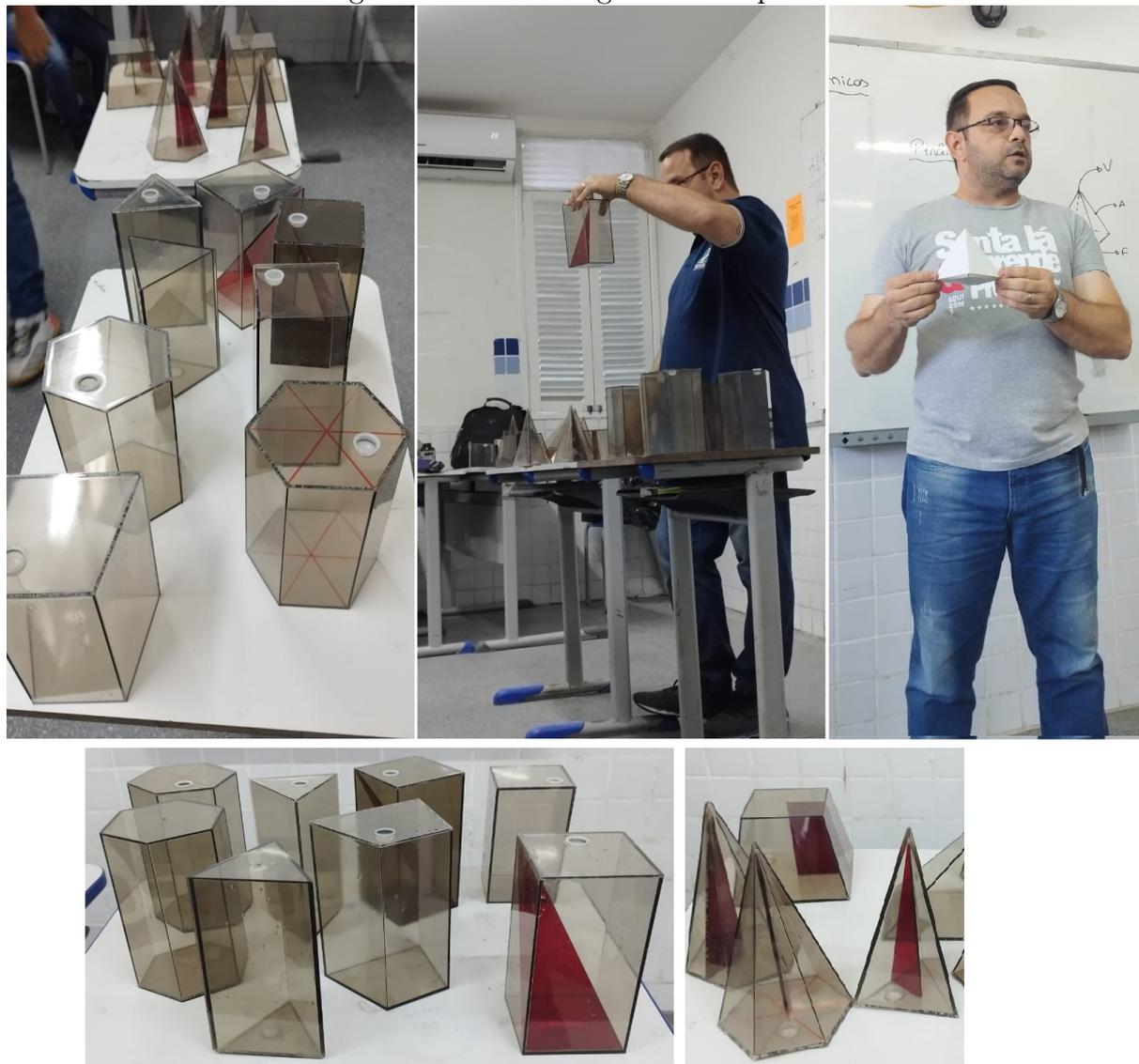
Fonte: Puzzle 3D Geométrico Sólidos de Arquimedes.

Figura 7.3: Puzzle



Fonte: Puzzle 3D Geométrico Sólidos de Arquimedes.

Figura 7.4: Aulas de geometria espacial



Fonte: O próprio autor, Maio de 2023, 6^o anos

Figura 7.5: Jogos e Puzzle



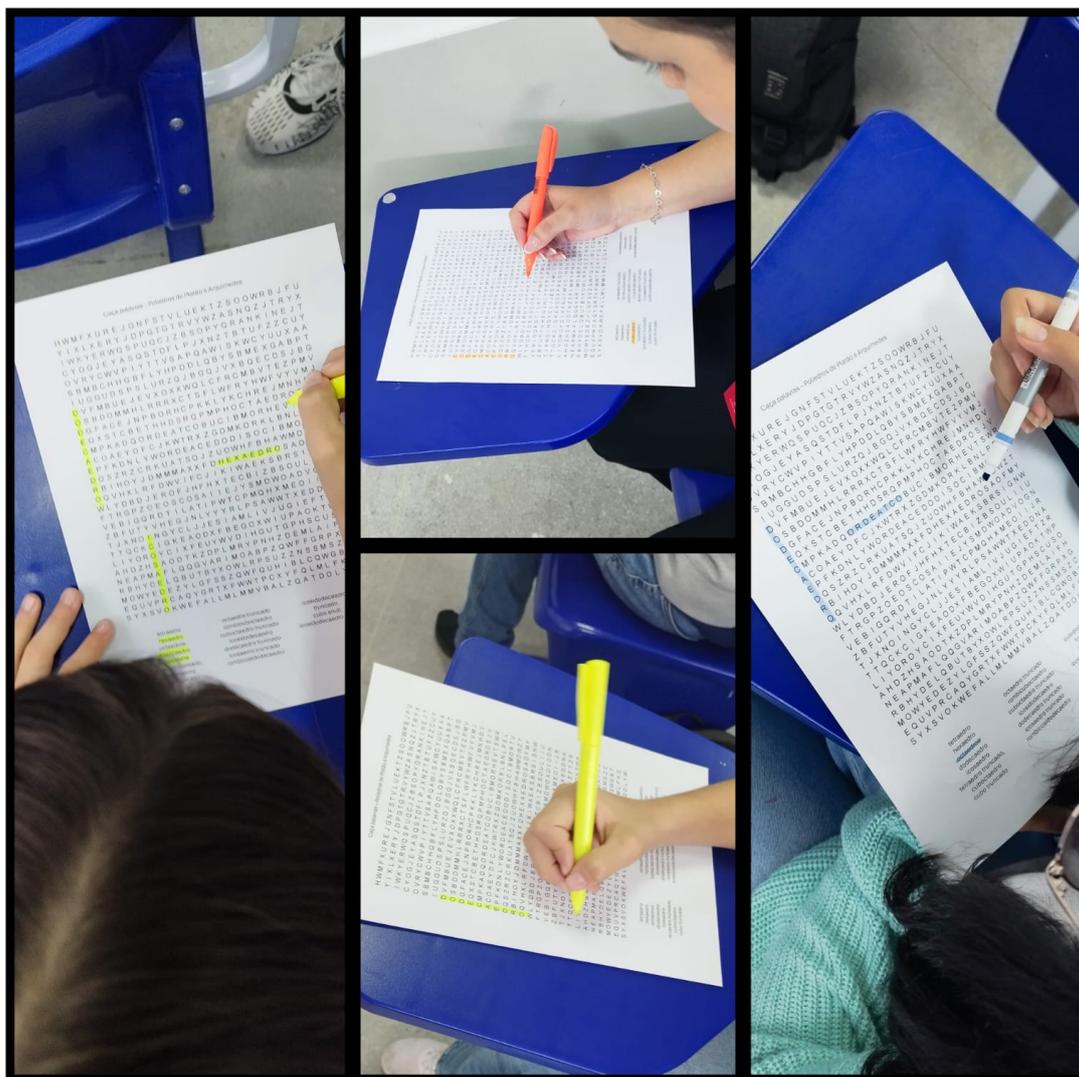
Fonte: Atividades dos Recursos Educacionais

Figura 7.6: Jogos e Puzzle



Fonte: Atividades dos Recursos Educacionais

Figura 7.7: Jogos e Puzzle



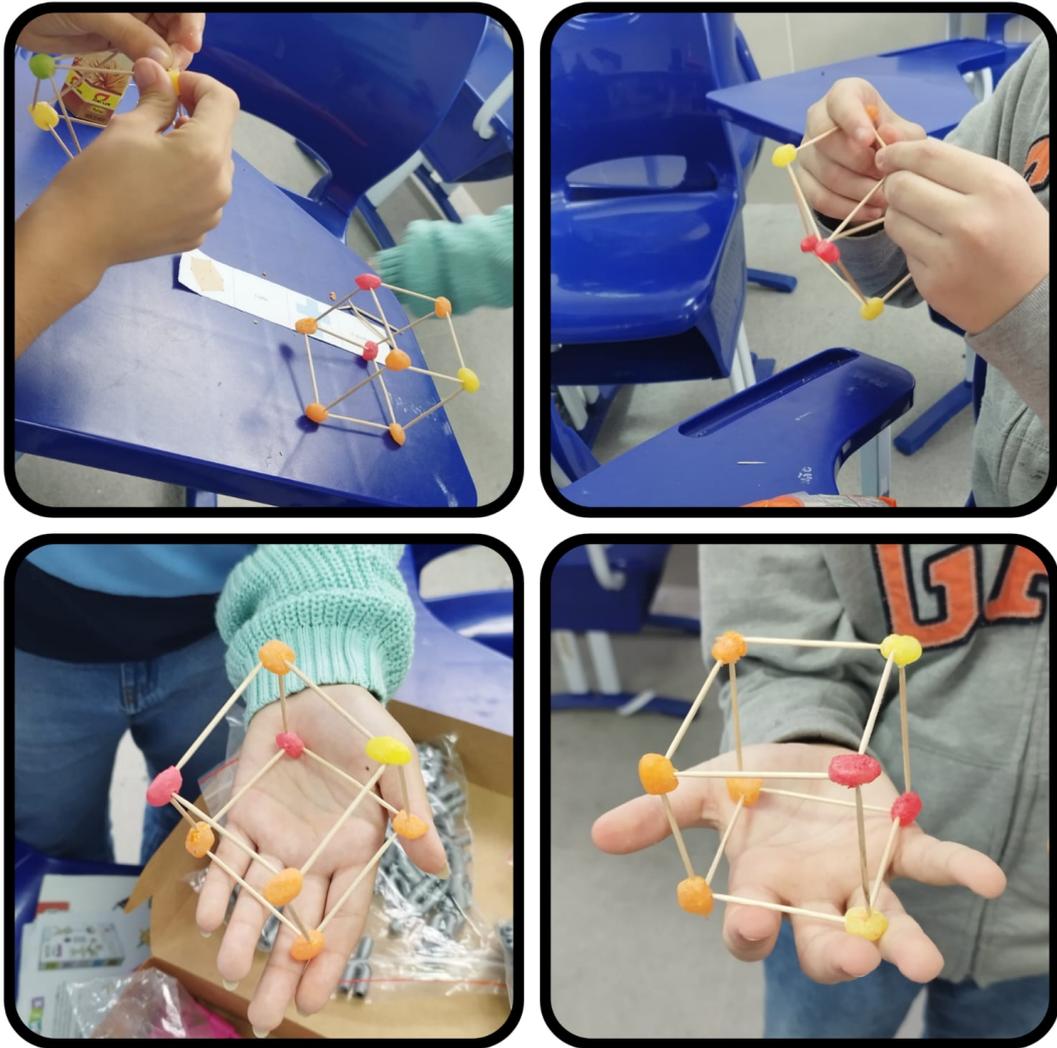
Fonte: Atividades dos Recursos Educacionais

Figura 7.8: Jogos e Puzzle



Fonte: Atividades dos Recursos Educacionais

Figura 7.9: Jogos e Puzzle



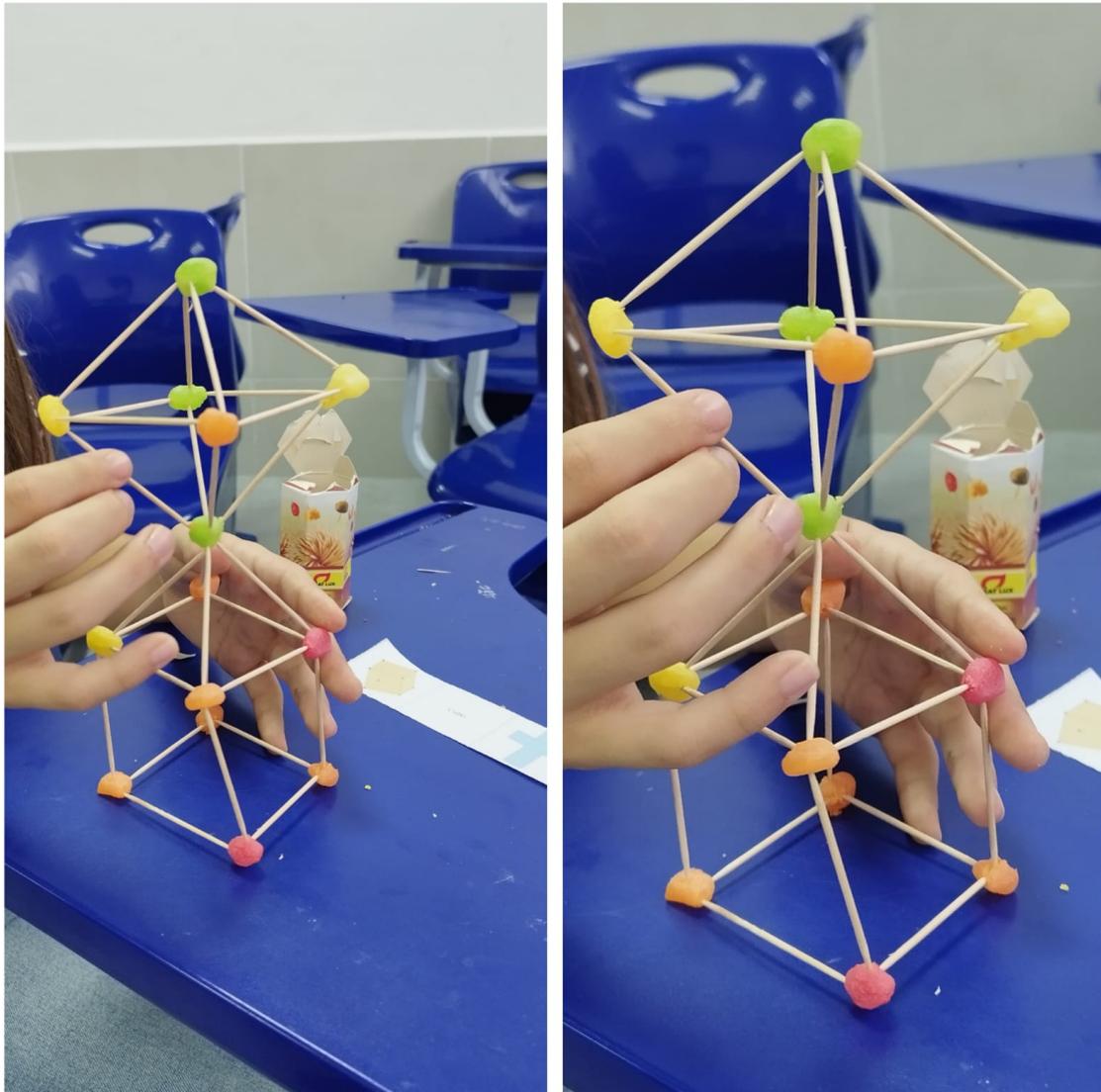
Fonte: Atividades dos Recursos Educacionais

Figura 7.10: Jogos e Puzzle



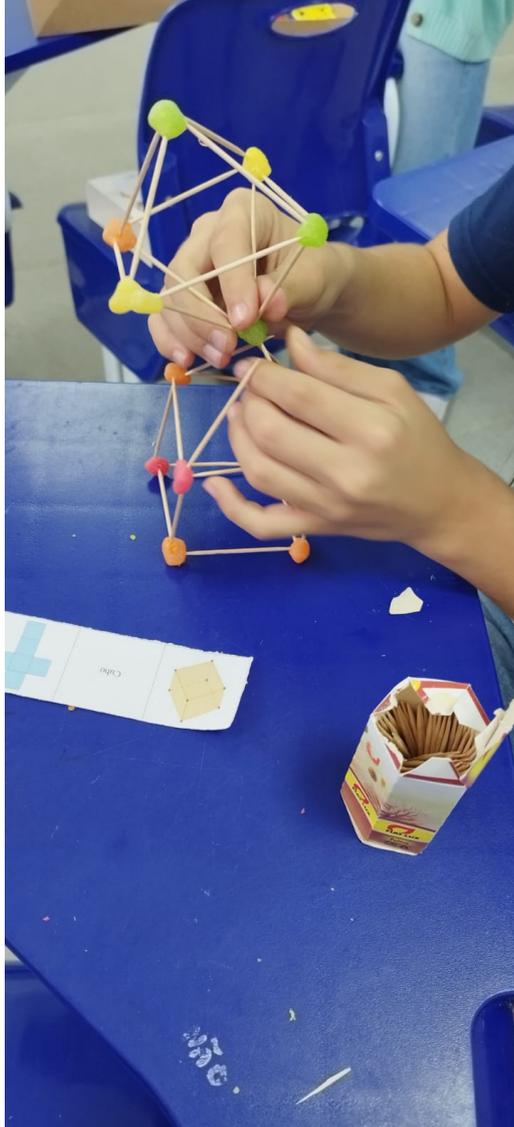
Fonte: Atividades dos Recursos Educacionais

Figura 7.11: Exemplo de não poliedro



Fonte: Atividades dos Recursos Educacionais

Figura 7.12: Exemplo de não poliedro



Fonte: Atividades dos Recursos Educacionais

Referências Bibliográficas

- [1] Caça palavras. URL <https://gsantiago.github.io/gerador-caca-palavras/>.
- [2] M. d. C. ALMEIDA. Platão redimido. *A Teoria dos Números Figurados na Ciência Antiga e Moderna*, 2003.
- [3] $\cos(36^\circ)$. <https://byjus.com/question-answer/find-the-value-of-cos-36-circ/>.
- [4] M. da Educação. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União*. BRASIL., Brasília, 23 de dezembro de 1996, 1996. URL <http://www.planalto.gov.br/ccivil03/leis/L9394.htm-Acessoem:23jan.2024>.
- [5] M. da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. MEC/SEF, Brasília, 1997.
- [6] M. da Educação. Diretrizes curriculares nacionais gerais da educação básico, jun 2013. URL http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curriculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192. MEC; SEB; DICEI.
- [7] E. Fanti, H. Kodama, and M. Necchi. Explorando poliedros convexos no ensino médio com o software poly.
- [8] A. C. D. FERREIRA et al. O processo de construção dos poliedros de arquimedes: uma visão dinâmica a partir do geogebra. 2019.
- [9] A. Filho. Demonstração do teorema de euler para poliedros convexos. *Revista do Professor de Matemática*, pages 15 – 17, 1983. São Paulo. Sociedade Brasileira de Matemática, nº 3, p. 15-17, 1983.
- [10] D. Frazão. Biografia de arquimedes. <https://www.ebiografia.com/arquimedes/>, 17/11/2022.
- [11] D. Frazão. Biografia de johannes kepler. 2022. URL https://www.ebiografia.com/johannes_kepler/.

- [12] G. Garbi. *CQD: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. ISBN 9788578610753. URL <https://books.google.com.br/books?id=D02uuAAACAAJ>.
- [13] G. G. Garbi. C.q.d.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria. *Editora Livraria da Física*, page 342, 2010. São Paulo.
- [14] GEOGEBRA. <https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT>.
- [15] E. L. Lima. *Temas e Problemas/ Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado*. Rio de Janeiro, SBM, 2010.
- [16] E. L. Lima. Meu professor de matemática e outras histórias. *SBM - Sociedade Brasileira de Matemática*, Edição 6, 2012.
- [17] Lima, E.; Carvalho, P.; Wagner, E.; Morgado, A. A matemática do ensino médio. coleção do professor de matemática. *Sociedade Brasileira de Matemática*, Volume 2, 1998. Rio de Janeiro.
- [18] meudicionario.org. estereometria. <https://www.meudicionario.org/estereometria>.
- [19] R. L. Nos and V. M. R. da Silva. Radicais duplos no cálculo do volume de poliedros convexos. *Revista eletrônica Paulista de Matemática*, 16 de dezembro de 2019. ISSN 2316-9664.
- [20] P. V. S. Rodrigues. Poliedros regulares: Aplicações e construções utilizando o software geométrico geogebra como instrumento facilitador no processo de ensino-aprendizagem. Master's thesis, UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, <http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/pedro.pdf>, 2020.
- [21] R. G. d. RÊGO, R. M. d. RÊGO, and K. M. VIEIRA. *Laboratório de Ensino de Matemática*. Autores Associados, 2012.