

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Imersão estacionária de variedades
Riemannianas no espaço-tempo
 $I \times_f \mathbb{S}^n$

Samuel Albuquerque Ramalho

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2024

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Imersão estacionária de variedades Riemannianas no espaço-tempo

$$I \times_f \mathbb{S}^n$$

por

Samuel Albuquerque Ramalho

sob a orientação do

Prof. Dr.Eraldo Almeida Lima Júnior

João Pessoa – PB
Julho de 2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R165i Ramalho, Samuel Albuquerque.

Imersão estacionária de variedades Riemannianas no
espaço-tempo FLRW esférico / Samuel Albuquerque
Ramalho. - João Pessoa, 2024.

71 f. : il.

Orientação: Eraldo Almeida Lima Júnior.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Espaço-tempo FLRW esférico. 2. Produto Warped. 3.
Imersão isométrica estacionária. 4. Hipersuperfície de
rotação. I. Lima Júnior, Eraldo Almeida. II. Título.

UFPB/BC

CDU 514.7(043)

Imersão estacionária de variedades Riemannianas no espaço-tempo

$$I \times_f \mathbb{S}^n$$

por

Samuel Albuquerque Ramalho ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração:

Aprovada em 17 de Julho de 2024.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior – UFPB

(Orientador)



Prof. Dr. Antônio Wilson Rodrigues da Cunha – UFPI

(Examinador Externo)



Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB

(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

*Aos meus pais, João Bosco
e Luiza e a minha irmã
Gabriela.*

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo, e em primeiro lugar, a Deus, pela ajuda e por se fazer presente em todos os momentos.

Agradeço aos meus pais, João Bosco Mendes Ramalho e Luiza Albuquerque Ramalho, e a minha irmã Gabriela Albuquerque Ramalho, pelas palavras de apoio e conforto durante essa trajetória, por sempre me apoiarem a seguir meus sonhos.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha trajetória, antes da faculdade vale destacar: Bruno Serafim de Souza, Edjan Fernandes dos Santos, Luciana Siqueira Ferreira Lourenço e Vanderli de Araújo Alves. Durante a graduação agradeço aos professores da Universidade Regional do Cariri, principalmente aos professores: Flávio França Cruz, José Tiago Nogueira Cruz, Paulo César Cavalcante de Oliveira e Pedro Ferreira de Lima por me apoiarem e incentivarem a seguir com meus estudos, em especial agradeço ao professor Jocel Faustino Norberto de Oliveira, pela orientação durante o programa de Iniciação Científica, pelas palavras de motivação, pelo conhecimento transmitido e por sempre ter acreditado em mim.

Agradeço aos meus amigos da graduação que me incentivaram a iniciar o mestrado, faltam nomes, Cicera Regilânia Gomes, Gabriel Teles, Josinaldo Ribeiro, Júlio Cordeiro, Lucas Alves, Sérgio Gledson e Rafael Rodrigues, fora da Universidade agradeço Maria Isabel Oliveira e Emanuella Ramalho.

Sou grato ao meu orientador Prof. Eraldo Almeida Lima Júnior, pela paciência durante essa trajetória, pelos conhecimentos transmitidos que se estendem muito além do meio acadêmico, pelas horas de estudo e pelo seu contínuo bom humor.

Agradeço aos meus amigos que fiz durante os dias do mestrado, em especial a Álvaro Rocha de Araújo, Lucas Machado Fernandes, Henrique Bezerra Alcântara, Victor Rafael Santos Silva, Yasmin Lopes de Carvalho e aos que além de amigos foram companheiros de Geometria: Cícero Keyson De Moura Pereira e Guilherme Francisco do Nascimento pelos conhecimentos e risadas compartilhadas.

Sou grato aos meus irmãos em Cristo que tive a honra de conhecer, pessoas realmente notórias que tornaram meus finais de semana muito mais felizes e renovadores, faltam nomes, Alexandre Barbosa, Ana Gabryelle Moura, Augusto Soares, Daniela de Lima, Denis Pereira, Davi Barbosa, Edleide Machado, Giovanna Lopes, Jeferson Pires, Laura Beatriz Moura e William Machado.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram nessa jornada.

Resumo

Nesse trabalho, estudamos uma extensão do clássico teorema de Takahashi, dando assim uma condição necessária e suficiente para que uma imersão tipo-espaço de uma variedade Riemanniana M em $\mathbb{L}^{n+2}$ seja estacionária (vetor curvatura média nulo) em $I \times_f \mathbb{S}^n$. Para isso abordamos os principais conceitos de geometria semi-Riemanniana os quais nos serão úteis. Exploramos o mergulho isométrico de $I \times_f \mathbb{S}^n$ em $\mathbb{L}^{n+2}$, o qual nos permite contemplar $I \times_f \mathbb{S}^n$ como uma hipersuperfície de rotação em $\mathbb{L}^{n+2}$. Após um estudo detalhado dessa hipersuperfície podemos ver qualquer variedade tipo-espaço de $I \times_f \mathbb{S}^n$ como uma subvariedade tipo-espaço de $\mathbb{L}^{n+2}$. Depois, estudamos o teorema de Takahashi e o teorema de Markvorsen, dando assim um contexto histórico para, por fim, chegarmos no teorema principal.

Palavras-chave: Espaço-tempo FLRW esférico, Produto Warped, imersão isométrica estacionária, hipersuperfície de rotação.

Abstract

In this work, we study an extension of the classical Takahashi's theorem, thus giving a necessary and sufficient condition for a space-like immersion of a Riemannian manifold M in $\mathbb{L}^{n+2}$ to be stationary (zero mean curvature vector) in $I \times_f \mathbb{S}^n$. For this we approach the main concepts of semi-Riemannian geometry which will be useful to us. We explore the isometric embedding of $I \times_f \mathbb{S}^n$ into $\mathbb{L}^{n+2}$, which allows us to contemplate $I \times_f \mathbb{S}^n$ as a rotation hypersurface in $\mathbb{L}^{n+2}$. After a detailed study of this hypersurface we can see any spacelike submanifold of $I \times_f \mathbb{S}^n$ as a spacelike submanifold of $\mathbb{L}^{n+2}$. Finally, we study Takahashi's theorem and Markvorsen's theorem thus giving a historical context to arrive at the main theorem.

Keywords: Spherical Robertson-Walker spacetime, Warped Product, stationary isometric immersion, rotational hypersurface.

Conteúdo

Introdução	2
1 Preliminares	4
1.1 Variedades semi-Riemannianas	4
1.1.1 Produto de Variedades	5
1.2 Conexão Levi-Civita	6
1.3 Curvatura	8
1.3.1 Curvatura Riemanniana	8
1.3.2 Curvatura seccional	9
1.3.3 Curvatura de Ricci e escalar	10
1.4 Gradiente, Divergente e Laplaciano.	10
1.4.1 Gradiente	10
1.4.2 Divergente	11
1.4.3 Hessiano	13
1.4.4 Laplaciano	13
1.5 Imersões isométricas	14
1.5.1 Subvariedade semi-Riemanniana	19
1.5.2 Subvariedades totalmente geodésicas e Subvariedades totalmente umbílicas.	20
1.5.3 Hipersuperfície semi-Riemanniana e o operador de Weingarten	20
1.6 Produto Warped	22
1.6.1 Espaços-tempo FLRW	24
1.7 Variedade Lorentziana tempo orientável	26
1.8 Isometrias em $\mathbb{R}_\nu^n$	28
2 FLRW Esféricos e as Rotacionais	29
2.1 Mergulho isométrico de $I \times_f \mathbb{S}^n$ em $\mathbb{L}^{n+2}$	29
2.2 Mergulho Isométrico de $I \times_f \mathbb{S}^n$ em $Q(r)$	32
2.3 A geometria de $Q(r)$	35



3	Takahashi, Markvorsen e principais resultados	43
3.1	Teorema de Takahashi	43
3.2	Teorema de Markvorsen	50
3.3	Imersão estacionária tipo-espaço em $I \times_f \mathbb{S}^n$	53
	Referências Bibliográficas	63

Introdução

Neste trabalho, com base no artigo de D. Ferreira, E.A. Lima Jr., F.J. Palomo e A. Romero [3], estudamos uma condição necessária e suficiente para que uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M seja estacionária (vetor curvatura média nulo) no espaço-tempo esférico FLRW $I \times_f \mathbb{S}^n$. Dada a importância desse espaço por se tratar de um dos modelos padrões da cosmologia moderna, uma das soluções exatas das equações de campos de Einstein da Relatividade Geral, tal resultado se torna bastante pertinente. Resultados desse tipo para espaços mais gerais foram obtidos nos clássicos artigos de T. Takahashi [17] e S. Markvorsen [13]. Focando nos seus principais resultados, exploraremos também esses trabalhos para assim obter o nosso resultado desejado.

No *Capítulo 1*, estudamos os principais conceitos da geometria semi-Riemanniana os quais serão fundamentais durante o decorrer do trabalho, e assumimos conhecimentos prévios de geometria Riemanniana e variedades diferenciáveis.

O *Capítulo 2* é dedicado ao estudo do mergulho isométrico do espaço-tempo FLRW $I \times_f \mathbb{S}^n$ no espaço $\mathbb{L}^{n+2}$, em que ao explorarmos a imagem dessa aplicação nota-se que se trata de uma rotação de uma curva tipo-tempo. Tal hipersuperfície de rotação será dada por

$$Q(r) = \left\{ (t, x) \in J \times \mathbb{E}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = \|x\|^2 = r(t)^2 \right\} \subset \mathbb{L}^{n+2}. \quad (1)$$

onde $r \in C^\infty(J)$ com $r(t) > 0$ e $|r'(t)| < 1$, para $J \subset \mathbb{R}$, um intervalo decorrente do mergulho isométrico falado anteriormente, e esta função será chamada de admissível. Fazemos um estudo detalhado da geometria do espaço $Q(r)$ adquirindo assim as ferramentas necessárias para o teorema principal.

No *Capítulo 3*, trazemos de início os clássicos teoremas de Takahashi e Markvorsen juntamente com alguns exemplos, e por fim o teorema principal. Takahashi provou em 1966 que uma condição necessária e suficiente para que uma imersão isométrica Ψ de uma variedade Riemanniana M^n em $\mathbb{R}^{n+k+1}$ realize uma imersão estacionária na esfera



é que

$$\Delta\Psi = -\lambda\Psi. \quad (2)$$

Na mesma vertente, Markvorsen em 1989 conseguiu uma extensão de tal resultado, mostrando que uma imersão isométrica de M^k em um espaço semi-Euclidiano $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ é estacionária em $\mathcal{S}_\nu^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} : |\langle x, x \rangle| = r^2\}$ se, e somente se (2) é verificado.

Em 2022 D. Ferreira, E.A. Lima Jr., F.J. Palomo e A. Romero [3] obtiveram um teorema tipo Takahashi para subvariedades tipo-espaço em um espaço-tempo FLRW esférico arbitrário, que se estende amplamente para o teorema de Markvorsen, onde concluíram que uma imersão isométrica $\Psi : M \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ realiza uma imersão tipo-espaço, estacionária em $Q(r)$ se, somente se

$$\Delta\Psi + q_{\Psi_0}\mathbf{P} = 0 \quad (3)$$

onde $\mathbf{P}$ é um campo vetorial ao longo da imersão $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{n+1})$, dada por $\mathbf{P} = (r(\Psi_0)r'(\Psi_0), \Psi_1, \dots, \Psi_{n+1})$, e q_{Ψ_0} é obtido a partir da função admissível r do espaço $Q(r)$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo trazemos as definições e resultados que nos serão úteis durante o decorrer do trabalho. Para isso, estendemos várias definições e teoremas clássicos de Geometria Riemanniana para o ambiente das variedades semi-Riemannianas.

1.1 Variedades semi-Riemannianas

Sob o impulso da teoria da relatividade de Einstein (1915), variedades com métricas não necessariamente positivas definidas ganharam um novo destaque.

Definição 1. Uma métrica semi-Riemanniana g é um campo tensorial simétrico suave de tipo $(0,2)$ que atribui a cada ponto $p \in M^k$ um produto interno não degenerado,

$$\begin{aligned} g|_p : T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto g_p(v, w) = -v_1 w_1 - \dots - v_q w_q + v_{q+1} w_{q+1} + \dots + v_k w_k, \end{aligned}$$

onde $v = (v_1, \dots, v_k)$ e $w = (w_1, \dots, w_k)$. Às vezes quando for claro escrevemos $g_p(v, w) = \langle v, w \rangle$.

Seja g_{ij} as componentes da métrica g em coordenadas locais, então a suposição de não degenerescência é equivalente à condição de que o determinante da matriz (g_{ij}) seja diferente de zero.

O índice ν de g é definido como a quantidade de autovalores negativos de g . Veja que a métrica acima possui índice $\nu = q$.

Definição 2. Uma variedade semi-Riemanniana é um par (M, g) onde M é uma variedade suave e g é uma métrica semi-Riemanniana.

Se o índice ν de uma variedade semi-Riemanniana M^k é nulo, ela será uma variedade Riemanniana. Se $\nu = 1$ e $n \geq 2$, então M é dita uma variedade Lorentziana.



Exemplo 1. O espaço $\mathbb{R}^n$ munido com a métrica semi-Riemanniana,

$$g(v, w) = \sum_{i=1}^{\nu} -v_i w_i + \sum_{i=\nu+1}^n v_i w_i$$

é conhecido como espaço semi-Euclidiano e denotado por $\mathbb{R}_\nu^n$, e claramente uma variedade semi-Riemanniana. Quando $\nu = 1$ temos o espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^n$. Esse espaço terá um certo destaque nos capítulos seguintes.

Cada vetor tangente se enquadra em determinada categoria determinada pela métrica, essa categoria é chamada caráter causal do vetor.

Definição 3 (Caráter ou Tipo Causal). Um vetor $v \in T_p M$ é classificado como:

- i) tipo-espaço, se $\langle v, v \rangle > 0$, ou $v = 0$;
- ii) tipo-tempo, se $\langle v, v \rangle < 0$;
- iii) tipo-luz ou nulo, se $\langle v, v \rangle = 0$, mas $v \neq 0$.

O conjunto de todos os vetores tipo luz em $T_p M$ é chamado *cone de luz* em $p \in M$. Os vetores no interior deste cone são os vetores tipo-tempo, enquanto os vetores no exterior são tipo-espaço e os vetores na fronteira são tipo-luz.

Definição 4. Dois vetores $u, v \in T_p M$ são ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$. Dizemos que $w \in T_p M$ é unitário se $\langle w, w \rangle = +1$ ou -1 .

Assim, uma base ortonormal $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ de $T_p M$ satisfaz

$$\langle E_i, E_i \rangle = \varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{para } 1 \leq i \leq \nu \\ +1 & \text{para } \nu + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

1.1.1 Produto de Variedades

Teorema 1. Sejam M e N variedades semi-Riemannianas com tensores métricos g_M e g_N . Se π e σ são as projeções de $M \times N$ em M e N , respectivamente, seja

$$g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N).$$

Então g é um tensor métrico em $M \times N$. Temos assim uma variedade produto semi-Riemanniana.



Demonstração. Queremos mostrar que g é um tensor métrico em $M \times N$. Sejam $v, w \in T_{(p,q)}(M \times N)$, então pela definição de *pullback*,

$$g(v, w) = g_M(d\pi(v), d\pi(w)) + g_N(d\sigma(v), d\sigma(w)).$$

Logo g é simétrico. Para mostrar que g é não degenerado, suponha $g(v, w) = 0$ para todo $w \in T_{(p,q)}(M \times N)$. Então, em particular, para todo $w \in T_{(p,q)}(M \times q)$ temos $g_M(d\pi(v), d\pi(w)) = 0$, já que $d\sigma(w) = 0$. Mas $d\pi(w)$ pertence $T_p(M)$, portanto $d\pi(v) = 0$. Similarmente $d\sigma(v) = 0$; portanto $v = 0$.

Bases ortonormais para $T_p(M)$ e $T_q(N)$ combinam-se para fornecer uma base ortonormal para $T_{(p,q)}(M \times N)$. Portanto o índice de g tem valor constante igual ao índice de M juntamente com o índice de N , ou seja, $\text{ind}(M) + \text{ind}(N) = \text{índice de } g$. $\square$

1.2 Conexão Levi-Civita

Sejam V e W campos de vetores em uma variedade semi-Riemanniana M . Queremos em cada ponto $p \in M$ calcular a taxa de variação de W na direção de V_p . Nos espaços semi-Euclidianos $\mathbb{R}_\nu^n$ há uma maneira natural de se fazer isso.

Definição 5. Sejam $x^1, \dots, x^n$ coordenadas naturais em $\mathbb{R}_\nu^n$. Se V e $W = \sum W^i \partial_i$ são campos de vetores em $\mathbb{R}_\nu^n$, o campo vetorial

$$\nabla_V W = \sum V(W^i) \partial_i$$

é chamada de derivada covariante natural de W com respeito a V .

A definição acima não deixa claro como calcular tal derivada em uma variedade semi-Riemanniana qualquer, uma vez que nela se utiliza as coordenadas de $\mathbb{R}_\nu^n$. Para generalizar essa definição, iniciamos axiomatizando suas propriedades.

Definição 6. Uma conexão ∇ em uma variedade suave M é uma função

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

tal que

- i) $\nabla_{fV_1 + gV_2} W = f\nabla_{V_1} W + g\nabla_{V_2} W$ ($\nabla_V W$ é $\mathfrak{F}(M)$ -linear em V);
- ii) $\nabla_V (W_1 + W_2) = \nabla_V W_1 + \nabla_V W_2$ ($\nabla_V W$ é $\mathbb{R}$ -linear em W);
- iii) $\nabla_V (fW) = f\nabla_V W + V(f)W$



onde V, W, V_1, V_2, W_1 e $W_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e f, g são aplicações suaves, $\nabla_V W$ é chamado de derivada covariante de W com respeito a V para a conexão ∇ .

O axioma (i) nos diz que $\nabla_V W$ é um tensor em V , portanto podemos calcular o seu valor pontualmente, isto é, se $v \in T_p M$ temos $\nabla_v W \in T_p M$. Por outro lado, (iii) mostra que $\nabla_V W$ não é um tensor em W .

Para conseguirmos a unicidade da conexão devemos acrescentar duas condições na definição anterior, para que assim tenhamos um certo ligamento entre a métrica e a conexão, conforme nos mostra o seguinte resultado, que foi chamado de milagre da geometria semi-Riemanniana:

Teorema 2 (Levi-Civita). *Em uma variedade semi-Riemanniana M existe uma única conexão ∇ tal que*

$$i) [V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V \quad (\text{Simetria})$$

$$ii) X\langle V, W \rangle = \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle \quad (\text{Compatibilidade com a métrica})$$

para todo $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Chamada de conexão de Levi-Civita de M , é caracterizada pela fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_V W, X \rangle &= V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle \\ &\quad - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Demonstração. Suponha, inicialmente que tal conexão exista. Usando a compatibilidade com a métrica e a simetria, obtemos

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X - [Z, X] \rangle \quad (1.2)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y - [X, Y] \rangle \quad (1.3)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z - [Y, Z] \rangle. \quad (1.4)$$

Agora somando (1.2) e (1.3), e substituindo em (1.4) teremos

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle - \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle \\ &\quad + \langle Z, \nabla_X Y \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle - \langle X, \nabla_Y Z \rangle \\ &= \langle X, [Y, Z] \rangle \\ &= 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle. \end{aligned}$$

Organizando a equação acima obtemos a fórmula de Koszul (1.1) que garante que se a conexão existir ela será única. Por fim, para provar a existência basta definir ∇



por (1.1), é imediato verificar que ∇ assim definida é uma conexão e que valem as propriedades desses teoremas.

□

Definição 7. Seja V um campo vetorial em uma variedade semi-Riemanniana M . A derivada covariante (Levi-Civita) é a única derivação tensorial em M tal que

$$\nabla_V f = V(f) \quad \text{para } f \in \mathfrak{F}(M)$$

e $\nabla_V W$ é a derivada covariante de Levi-Civita para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$.

1.3 Curvatura

1.3.1 Curvatura Riemanniana

As derivadas de Lie satisfazem a identidade $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$, onde por definição de colchete de Lie $[L_X, L_Y] = L_X L_Y - L_Y L_X$. Porém esse resultado em geral não é verdadeiro para a derivada covariante ∇_X . Esse erro é medido pelo chamado tensor curvatura Riemanniano.

Lema 3. Seja M uma variedade semi-Riemanniana com conexão Levi-Civita ∇ . A função $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$\begin{aligned} R_{XY}Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z \\ &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z \end{aligned}$$

é um (1,3) campo tensorial em M chamado de tensor curvatura Riemanniano de M .

Demonstração. Basta identificar R com $\bar{R} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ de tal forma que $\bar{R}(\theta, X, Y, Z) = \theta(R_{XY}Z)$. Note que é suficiente que R seja $\mathfrak{F}(M)$ -linear, e por um cálculo direto temos $R_{XY}fZ = fR_{XY}Z$ e $R_fXYZ = fR_{XY}Z$. □

Exemplo 2. O espaço semi-Euclideo $\mathbb{R}_\nu^n$ possui tensor curvatura R nulo, uma vez que os símbolos de Christoffel desaparecem. Quando $R = 0$ a variedade é considerada plana.

Se $x, y \in T_p(M)$, o operador linear $R_{xy} : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ leva cada z para $R_{xy}z$ e é chamado de operador curvatura.

As seguintes identificações são as simetrias da curvatura.



Lema 4. Se $x, y, z, w \in T_p M$, então

- i) $R_{xy} = -R_{yx}$
- ii) $\langle R_{xy}v, w \rangle = -\langle R_{xy}w, v \rangle$
- iii) $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$ (Primeira identidade de Bianche)
- iv) $\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{vw}x, y \rangle$

Demonstração. Consultar O'Neill [1]. □

1.3.2 Curvatura seccional

O tensor curvatura Riemanniana R é um pouco complicado, pensando nisso definamos uma função de valor real que determina completamente R .

Definição 8. Sejam M uma variedade semi-Riemanniana e $p \in M$. Considere Π um subespaço de $T_p M$ de dimensão dois não-degenerado. O número

$$K(v, w) = \frac{\langle R(v, w)v, w \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$$

onde v, w é uma base para Π , é a chamada *curvatura seccional* $K(\Pi)$ de Π .

Assim a curvatura seccional K de M é uma função de valor real sobre o conjunto de todos os planos tangentes não degenerados em M . A seguir trazemos alguns exemplos de variedades de curvatura seccional constante.

Exemplo 3. O espaço De Sitter $\mathbb{S}_1^n$ dado por

$$\mathbb{S}_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+2} : \langle x, x \rangle = 1\}$$

onde $\mathbb{R}_1^{n+2}$ é o espaço de Minkowski $(n+2)$ -dimensional, e tem curvatura seccional constante igual a 1.

Exemplo 4. O espaço anti-De Sitter dado por

$$\mathbb{H}_1^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+2} : \langle x, x \rangle = -1\}$$

tem curvatura seccional constante igual a -1.

Proposição 5. Se $K = 0$ em $p \in M$, então $R = 0$ em p . Explicitamente, se $K(\Pi) = 0$ para todo plano não degenerado em $T_p(M)$, então $R_{xy}z = 0$ para todo x, y, z em $T_p(M)$.

Demonstração. Consultar O'Neill [1]. □



1.3.3 Curvatura de Ricci e escalar

A contração da curvatura Riemanniana produz invariantes mais simples.

Definição 9. Seja M uma variedade semi-Riemanniana n -dimensional, e considere $E_1, \dots, E_n$ um referencial ortonormal local em M . A aplicação $Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ dada por

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle$$

onde $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$, é o chamado *tensor curvatura de Ricci* de M .

Definição 10. A curvatura escalar S de uma variedade semi-Riemanniana M é definida como o traço do tensor curvatura de Ricci.

Definição 11. Uma variedade semi-Riemanniana M é dita uma variedade de Einstein se $Ric = c\langle \cdot, \cdot \rangle$ para alguma constante c .

1.4 Gradiente, Divergente e Laplaciano.

Para esse trabalho alguns operadores diferenciáveis clássicos do cálculo em $\mathbb{R}^3$ serão utilizados, para isso devemos generalizá-los para espaços semi-Riemannianos.

1.4.1 Gradiente

Definição 12. O gradiente de uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ denotado por ∇f é metricamente equivalente ao diferencial $df \in \mathfrak{X}^*(M)$. Então

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = X(f) \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Em termos de um sistema de coordenadas $df = \sum (\partial f / \partial x^i) dx^i$, portanto

$$\nabla f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j.$$

Exemplo 5. Para espaços semi-Euclidianos $\mathbb{R}_\nu^n$ o gradiente de uma função $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_\nu^n)$ é dado por $\nabla f = \sum \varepsilon_i (\partial f / \partial u^i) \partial_i$.

Assim se $\nu = 0$ teremos que $\nabla f = \sum (\partial f / \partial u^i) \partial_i$, concordando assim com a definição de gradiente para uma função real do $\mathbb{R}^n$.



1.4.2 Divergente

Definição 13. Seja X é um campo vetorial em uma variedade semi-Riemanniana M , definimos o divergente do campo X como

$$\operatorname{div} X = \varepsilon_i \operatorname{Tr} \nabla X(p) = \sum \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle,$$

onde $E_1, \dots, E_n$ é um referencial ortonormal local em M e $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$.

Proposição 6. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $x : U \rightarrow M$ uma parametrização de modo que, em $x(u)$, tenhamos $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Então para esse sistema de coordenadas

$$\operatorname{div} X = \sum_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \sum_j a_j \Gamma_{ij}^i \right).$$

Consequentemente, $\operatorname{div} X \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Por definição, para cada $p \in M$,

$$\operatorname{div} X(p) = \varepsilon_i \operatorname{Tr} \nabla X(p).$$

Note que,

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X(p) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_j \left(a_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_k a_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} + \sum_j a_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Desta última expressão, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \nabla X(p) &= \varepsilon_1^2 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \sum_j a_j \Gamma_{1j}^1 \right) + \dots + \varepsilon_n^2 \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_n} + \sum_j a_j \Gamma_{nj}^n \right) \\ &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \sum_j a_j \Gamma_{1j}^1 \right) + \dots + \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_n} + \sum_j a_j \Gamma_{nj}^n \right). \end{aligned}$$

Verifica-se assim a equação desejada. □



Proposição 7. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $x : U \rightarrow M$ uma parametrização de modo que, em $x(u)$, tenhamos $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Então para esse sistema de coordenadas

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kj})}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \sqrt{\det(g_{kj})} \right).$$

Demonstração. Pela Proposição anterior,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \sum_j a_j \Gamma_{ij}^i \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \sum_{j,k} \frac{a_i}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) g^{ki} \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j,k} \frac{a_i}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{ki} + \sum_{i,j,k} \frac{a_i}{2} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} g^{ki} - \sum_{i,j,k} \frac{a_i}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{ki}. \end{aligned}$$

Notando que a segunda e a quarta parcela se anulam, temos que

$$\operatorname{div} X = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j,k} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{ki}. \quad (1.5)$$

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \sqrt{\det(g_{kj})} \right) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \sqrt{\det(g_{kj})} + \frac{a_i}{2\sqrt{\det(g_{kj})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g_{kj})} \right).$$

Usando o fato que se A é uma matriz $n \times n$ com entradas de classe C^∞ , então $(\det A)' = \det A \cdot \operatorname{Tr}(A' A^{-1})$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g_{kj})} \right) &= \left(\sqrt{\det(g_{kj})} \right) \cdot \operatorname{Tr} \left(\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} \right)_{n \times n} (g^{kj})_{n \times n} \right) \\ &= \left(\sqrt{\det(g_{kj})} \right) \left(\sum_k \frac{\partial g_{1k}}{\partial x_i} g^{k1} + \dots + \sum_k \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kn} \right) \\ &= \left(\sqrt{\det(g_{kj})} \right) \left(\sum_{k,j} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \sqrt{\det(g_{kj})} \right) &= \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \sqrt{\det(g_{kj})} + \frac{a_i}{2\sqrt{\det(g_{kj})}} \left(\sqrt{\det(g_{kj})} \right) \left(\sum_{k,j} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} \right) \\ &= \left(\sqrt{\det(g_{kj})} \right) \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{kj} \right). \end{aligned}$$



Logo,

$$\frac{a_i}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} g^{kj} + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kj})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \sqrt{\det(g_{kj})} \right).$$

Substituindo na equação (1.5) obtemos,

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kj})}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \sqrt{\det(g_{kj})} \right).$$

O que encerra a prova. □

Exemplo 6. Para espaços semi-Euclidianos $\mathbb{R}_\nu^n$ o divergente de um campo V em M é dado por $\operatorname{div} V = \sum \partial V^i / \partial u^i$.

1.4.3 Hessiano

Definição 14. Dado $f \in \mathfrak{F}(M)$, a Hessiana de f é definida como a segunda derivada covariante de f :

$$\operatorname{Hess} f = \nabla(\nabla f).$$

Lema 8. O hessiano da função $f \in \mathfrak{F}(M)$ é um campo tensorial do tipo $(0, 2)$ simétrico tal que para $\operatorname{Hess}(X, Y) = \langle \operatorname{Hess} f(X), Y \rangle$ temos

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle. \quad (\text{Forma Hessiana})$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f(X, Y) &= \langle \operatorname{Hess} f(X), Y \rangle = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle \\ &= X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f). \end{aligned}$$

Na segunda linha usamos a compatibilidade com a métrica, na terceira a definição de gradiente. □

1.4.4 Laplaciano

Definição 15. Seja $f \in \mathfrak{F}(M)$ definimos o Laplaciano de f como o divergente do gradiente de f :

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) \in \mathfrak{F}(M).$$



Também podemos definir o Laplaciano como o traço da Hessiana.

Proposição 9. Dada $f \in \mathfrak{F}(M)$, então

$$\Delta f = \text{Tr}(\text{Hess}f).$$

Demonstração. Será suficiente provamos essa igualdade em cada ponto $p \in M$. Seja $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal definido em uma vizinhança $U \in M$ de p , então

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\text{Hess}f)_p &= \langle (\text{Hess}f)_p E_i, E_i \rangle = \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle_p \\ &= \text{div}(\nabla f)(p) = \Delta f(p). \end{aligned}$$

□

Proposição 10. Seja $f \in \mathfrak{F}(M)$ e $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M$. Então

$$\Delta f = E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i}(E_i(f)) - (\nabla_{E_i} E_i)(f)).$$

Demonstração. Segue-se diretamente da Proposição anterior com o Lema 8. □

Proposição 11. Sejam $f \in C^\infty(M)$ e $x : U \rightarrow M$ um sistema de coordenadas. Então, em $x(U)$,

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

onde $G = \det(g_{ij})$.

Demonstração. Segue usando a Proposição anterior, considerando $X = \nabla f$, pois assim $a_i = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$ obtendo a equação desejada. □

Exemplo 7. Calculando o Laplaciano do espaço semi-Euclidiano $\mathbb{R}_\nu^n$ teremos que $\nabla f = \sum \varepsilon_i \partial^2 f / \partial (u^i)^2$.

1.5 Imersões isométricas

Durante essa seção fixaremos $\overline{M}, M$ como variedades semi-Riemannianas. Também usaremos barras superiores para distinguir objetos geométricos correspondentes em M e $\overline{M}$. Assim, para tensor métrico, conexão e curvatura, temos $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_M$, ∇ , e R em M e $\bar{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}}$, $\bar{\nabla}$ e $\bar{R}$ em $\overline{M}$.



Iniciamos pela definição de imersão.

Definição 16. Uma aplicação $\psi : M \rightarrow \overline{M}$ diferenciável é dita uma imersão se sua diferencial $d\psi_p$ for injetiva para todo $p \in M$.

Se $\psi : M \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão, então a métrica de $\overline{M}$ induz um tensor métrico em M , o tensor $\psi^*(\overline{g})$. Estudando ele, podemos classificar as imersões da seguinte forma.

Definição 17. Uma imersão $\psi : M \rightarrow \overline{M}$ é dita:

- i) tipo-espaco, se $\psi^*(\overline{g})$ for Riemanniano;
- ii) tipo-tempo, se $\psi^*(\overline{g})$ for não-degenerado, mas não positivo;
- iii) tipo-luz, se $\psi^*(\overline{g})$ for degenerado positivo semi-definido.

Como vemos, o tensor $\psi^*(\overline{g})$ em M é importante para o estudo das imersões, e ainda mais, quando esse tensor coincide com o próprio tensor g em M , temos a seguinte definição.

Definição 18. Uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$ é uma imersão suave $\psi : M \rightarrow \overline{M}$ tal que $\psi^*(\overline{g}) = g$. Explicitamente, se tivermos

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle \psi_* X, \psi_* Y \rangle_{\overline{M}} \quad (1.6)$$

para todo $p \in M$ e todo $X, Y \in T_p M$, ψ será uma imersão isométrica. Um mergulho isométrico é uma imersão isométrica injetiva.

Seja $\psi : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão isométrica. Em torno de cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que a restrição de ψ a U é um mergulho em $\psi(U)$. Portanto, podemos identificar U com a sua imagem em ψ , ou seja, ψ localmente a aplicação inclusão. Portanto, podemos considerar o espaço tangente de $\overline{M}$ em p , e escrever

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$. Logo todo vetor $x \in T_p(\overline{M})$ tem uma expressão única dada por:

$$x = \tan x + \text{nor } x$$

onde $\tan : T_p \overline{M} \rightarrow T_p M$ e $\text{nor} : T_p \overline{M} \rightarrow (T_p M)^\perp$, obviamente são $\mathbb{R}$ -lineares.

De forma análoga temos que, para $X \in \mathfrak{X}(M)$, vale a igualdade

$$X = \tan X + \text{nor } X.$$



Para isso estamos tomando $\tan : \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ e $\text{nor} : \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$, que são $\mathfrak{F}(M)$ -linear. Assim,

$$\overline{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)^\perp.$$

De maneira bem natural a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}$, usando extensões locais suaves de campos, da origem à função $\overline{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \overline{\mathfrak{X}}(M)$, conhecida como conexão induzida.

Lema 12. A conexão induzida $\overline{\nabla}_V X$ é um campo vetorial suave bem definido em M .

Demonstração. Para cada $p \in M$, sejam $\overline{V}$ e $\overline{X}$ extensões locais suaves de V e X sobre uma vizinhança coordenada U de p em $\overline{M}$. Como $\overline{\nabla}_{\overline{V}} \overline{X}|_{U \cap M}$ é suave e depende unicamente de V e X , temos $\overline{\nabla}_V X$ é suave e bem definido. $\square$

A conexão induzida está tão intimamente relacionada com a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$ que usamos a mesma notação para ambas. Em particular, a conexão induzida possui as cinco propriedades que caracterizam as conexões de Levi-Civita.

Observe que $\overline{\nabla}_V W$ não necessariamente é tangente a M , onde $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, podemos nos perguntar sobre o que as projeções ortogonais de $\overline{\nabla}_V W$ significam.

Lema 13. Para $M \subset \overline{M}$, se $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$\nabla_V W = \tan \overline{\nabla}_V W$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de M .

Demonstração. Consultar O'Neill [1]. $\square$

Lema 14. A função $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ definida por

$$II(V, W) = \text{nor } \overline{\nabla}_V W$$

é $\mathfrak{F}(M)$ -bilinear e simétrica. II é chamada de tensor forma (ou tensor segunda forma fundamental).

Demonstração. Primeiramente mostraremos que II é $\mathfrak{F}(M)$ -bilinear. Como $\overline{\nabla}_V W$ é $\mathfrak{F}(M)$ -linear em V e $\mathbb{R}$ -linear em W , a função II herda essas propriedades, logo só nos resta mostrar a propriedade em W . Note que

$$II(V, fW) = \text{nor } \overline{\nabla}_V (fW) = \text{nor}(VfW) + f \text{nor } \overline{\nabla}_V W = f \text{nor } \overline{\nabla}_V W = fII(V, W),$$

onde usamos o fato de W ser tangente a M , e a projeção nor ser $\mathfrak{F}(M)$ -linear. Para a simetria,



$$II(V, W) - II(W, V) = \text{nor}(\bar{\nabla}_V W - \bar{\nabla}_W V) = \text{nor}[V, W] = 0.$$

□

Os dois lemas anteriores podem ser resumidos na seguinte igualdade

$$\bar{\nabla}_V W = \underbrace{\nabla_V W}_{\text{tangente a } M} + \underbrace{II(V, W)}_{\text{normal a } M}. \quad (1.7)$$

Esta decomposição leva a um resultado de curvatura fundamental chamada de equação de Gauss.

Teorema 15 (Equação de Gauss). *Seja $\psi : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica, então para os campos vetoriais V, W, X, Y tangentes a M vale*

$$\langle R_{VW}X, Y \rangle - \langle \bar{R}_{VW}X, Y \rangle = \langle II(V, X), II(W, Y) \rangle - \langle II(V, Y), II(W, X) \rangle.$$

Demonstração. Pela definição de tensor curvatura Riemanniano, temos que

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}_{VW}X, Y \rangle &= \langle -\bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W X + \bar{\nabla}_W \bar{\nabla}_V X + \bar{\nabla}_{[V, W]}Z, Y \rangle \\ &= -\underbrace{\langle \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W X, Y \rangle}_{\text{Termo 1}} + \underbrace{\langle \bar{\nabla}_W \bar{\nabla}_V X, Y \rangle}_{\text{Termo 2}} + \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{[V, W]}Z, Y \rangle}_{\text{Termo 3}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Primeiramente trabalhemos com o termo 1 da equação acima. De (1.7) podemos escrever

$$\langle \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W X, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_V \nabla_W X, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_V II(W, X), Y \rangle.$$

Como Y é tangente a M , segue-se que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W X, Y \rangle &= \langle \tan \bar{\nabla}_V \nabla_W X, Y \rangle + \langle \tan \bar{\nabla}_V II(W, X), Y \rangle \\ &= \langle \nabla_V \nabla_W X, Y \rangle + \langle \nabla_V II(W, X), Y \rangle \\ &= \langle \nabla_V \nabla_W X, Y \rangle + V \langle II(W, X), Y \rangle - \langle II(W, X), \bar{\nabla}_V Y \rangle, \end{aligned}$$

Onde na última igualdade usamos a compatibilidade da conexão com a métrica. Como $II(W, X)$ é normal a M , temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W X, Y \rangle &= \langle \nabla_V \nabla_W X, Y \rangle - \langle II(W, X), \text{nor } \bar{\nabla}_V Y \rangle \\ &= \langle \nabla_V \nabla_W X, Y \rangle - \langle II(W, X), II(V, Y) \rangle. \end{aligned} \quad (1.9)$$



Agora para o termo 2 de forma análoga,

$$\langle \bar{\nabla}_W \bar{\nabla}_V X, Y \rangle = \langle \nabla_W \nabla_V X, Y \rangle - \langle II(V, X), II(W, Y) \rangle. \quad (1.10)$$

Para o termo 3 mais uma vez de (1.7), temos

$$\langle \bar{\nabla}_{[V,W]} Z, Y \rangle = \langle \nabla_{[V,W]} Z, Y \rangle + \langle II([V, W], Z), Y \rangle = \langle \nabla_{[V,W]} Z, Y \rangle. \quad (1.11)$$

Substituindo (1.9), (1.10) e (1.11) em (1.8), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}_{VW} X, Y \rangle &= -\langle \nabla_V \nabla_W X, Y \rangle + \langle II(W, X), II(V, Y) \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_W \nabla_V X, Y \rangle - \langle II(V, X), II(W, Y) \rangle + \langle \nabla_{[V,W]} Z, Y \rangle \\ &= -\langle \nabla_V \nabla_W X, Y \rangle + \langle \nabla_W \nabla_V X, Y \rangle + \langle \nabla_{[V,W]} Z, Y \rangle \\ &\quad - \langle II(V, X), II(W, Y) \rangle + \langle II(W, X), II(V, Y) \rangle \\ &= \langle R_{VW} X, Y \rangle - \langle II(V, X), II(W, Y) \rangle + \langle II(W, X), II(V, Y) \rangle. \end{aligned}$$

Reorganizando obtemos a equação de Gauss

$$\langle R_{VW} X, Y \rangle - \langle \bar{R}_{VW} X, Y \rangle = \langle II(V, X), II(W, Y) \rangle - \langle II(V, Y), II(W, X) \rangle.$$

□

Temos também a equação de Gauss correspondente quando nos referimos a curvatura escalar, que provem diretamente do teorema anterior.

Corolário 16. Se os vetores v e w formam uma base para um plano não degenerado de M , então

$$K(v, w) = \bar{K}(v, w) + \frac{\langle II(v, v), II(w, w) \rangle - \langle II(v, w), II(v, w) \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}.$$

Definição 19. Seja $\psi : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica, definimos o campo vetorial curvatura média de ψ em cada $p \in M$ por

$$H_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i II(E_i, E_i)$$

onde $n = \dim M$ e $E_1, \dots, E_n$ é um referencial ortonormal à M em p .

No caso de imersões isométricas obtemos as seguintes equações para o Hessiano e o Laplaciano, que nos serão úteis no decorrer do trabalho.



Proposição 17. Seja $\Psi : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão isométrica e $g : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, então o Hessiano da função $h = g \circ \psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ para todo $X, Y \in T_p M$ é dado por

$$\text{Hess } h(X, Y) = \text{Hess } g(X, Y) + \langle \nabla g, II(X, Y) \rangle.$$

Demonstração. Temos em $p \in M$ que

$$\langle \nabla h, X \rangle = \langle \nabla g, X \rangle$$

onde $\text{nor}(\nabla g)$ é perpendicular a $T_p M$. Assim para todo $X, Y \in T_p M$,

$$\begin{aligned} \text{Hess } h(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla h, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \nabla h, Y \rangle \\ &= X \langle \nabla h, Y \rangle - \langle \nabla h, \overline{\nabla}_X Y \rangle \\ &= X \langle \nabla g - \text{nor}(\nabla g), Y \rangle - \langle \nabla g - \text{nor}(\nabla g), \overline{\nabla}_X Y \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \nabla g, Y \rangle + \langle \nabla g, II(X, Y) \rangle \end{aligned}$$

Portanto

$$\text{Hess } h(X, Y) = \text{Hess } g(X, Y) + \langle \nabla g, II(X, Y) \rangle.$$

□

Proposição 18. Nas condições da proposição anterior, para $q \in M$ segue que

$$\Delta_M \Psi = \sum_i^n \varepsilon_i \text{Hess } g(E_i, E_i) + n \langle \nabla g, H(q) \rangle,$$

onde $E_1, \dots, E_n$ é uma base ortonormal de $T_p M$ e $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$.

Demonstração. Segue da proposição anterior, já que $\Delta = \text{div}(\nabla) = \text{trace}(\text{Hess})$. □

A partir de agora adotaremos a seguinte convenção:

$$\text{tan} = ()^\top \text{ e } \text{nor} = ()^\perp.$$

1.5.1 Subvariedade semi-Riemanniana

Voltemos para o caso em que $\psi : M \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão, mas $\psi^*(\overline{g})$ não necessariamente é igual a g . Restringindo um pouco esse cenário, tomando $M \subset \overline{M}$ e ψ como a aplicação inclusão, temos a seguinte definição.

Definição 20. Seja M uma subvariedade de uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$. Se o *pullback* $j^*(g)$, como acima, é um tensor métrico em M teremos que M é uma subvariedade semi-Riemanniana de $\overline{M}$.



Exemplo 8. A n -esfera canônica de raio $r > 0$, $\mathbb{S}^n(r) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = r\}$ é uma subvariedade Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Temos assim que uma forma prática de encontrar outra variedade semi-Riemanniana M a partir de $\overline{M}$ é olhar para as subvariedades de $\overline{M}$ com a métrica induzida pelo *pullback* $\psi^*(g)$.

Como vimos uma imersão isométrica é localmente uma aplicação de inclusão, portanto todos os resultados anteriores de imersões isométricas são válidos para subvariedades semi-Riemannianas.

1.5.2 Subvariedades totalmente geodésicas e Subvariedades totalmente umbílicas.

No ambiente das subvariedades, as que possuem a forma mais simples possível são chamadas subvariedades totalmente geodésicas, visto que do ponto de vista extrínseco, elas não possuem curvatura.

Definição 21. Uma subvariedade semi-Riemanniana M de $\overline{M}$ é totalmente geodésica se $II = 0$.

Pela equação de Gauss concluímos que se M é uma subvariedade semi-Riemanniana totalmente geodésica de $\overline{M}$ então $R = \overline{R}$ e $K = \overline{K}$.

Exemplo 9. No espaço semi-Euclidiano $\mathbb{R}_\nu^n$, para $\mathcal{W}$ um subespaço k -dimensional (não-degenerado) de $\mathbb{R}_\nu^n$, qualquer translação $x + \mathcal{W}$ chamado k -plano em $\mathbb{R}_\nu^n$, é claramente uma subvariedade semi-Riemanniana totalmente geodésica de $\mathbb{R}_\nu^n$.

Definição 22. Dizemos que um ponto $p \in M \subset \overline{M}$ é umbílico se existe um vetor normal $z \in T_p M^\perp$ tal que

$$II(v, w) = \langle v, w \rangle z \quad \text{para todo } v, w \in T_p M.$$

O vetor z é chamado *vetor curvatura normal* de M em p . Assim, M será totalmente umbílica se todos os seus pontos forem umbílicos.

Uma subvariedade totalmente geodésica é uma subvariedade totalmente umbílica para a qual o vetor curvatura normal z é nulo.

1.5.3 Hipersuperfície semi-Riemanniana e o operador de Weingarten

Voltando nossa atenção para o caso em que a diferença entre as dimensões de M e N é 1, temos a seguinte definição.



Definição 23. Dizemos que $M \subset \overline{M}$ é uma hipersuperfície semi-Riemanniana de $\overline{M}$, se $\dim \overline{M} - \dim M = 1$.

Para hipersuperfícies, a segunda forma fundamental pode ser reduzida a tensores mais simples como segue.

Definição 24. Seja $M \subset \overline{M}$ uma hipersuperfície semi-Riemanniana de $\overline{M}$. Definamos o operador linear $A : TM \times TM^\perp \rightarrow TM$ como sendo o operador que satisfaz a igualdade

$$\langle A_U(V), W \rangle = \langle II(V, W), U \rangle$$

onde V, W são campos vetoriais de TM e U é um campo vetorial de $TM^\perp$. Temos assim o chamado *operado de Weingarten* com respeito a U da hipersuperfície $M \subset \overline{M}$ ou, por abuso de linguagem, de segunda forma fundamental na direção normal U .

Por essa definição percebe-se que $II(V, W) = \varepsilon \langle A_U(V), W \rangle U$ onde $\varepsilon = \langle U, U \rangle$. De fato, uma vez que substituindo na equação da definição anterior a igualdade é preservada. Podemos reescrever a equação (1.7) como

$$\overline{\nabla}_V W = \nabla_V W + \varepsilon \langle A_U V, W \rangle U, \quad (1.12)$$

chamada fórmula de Gauss.

Lema 19. O operador de Weingarten A é auto-adjunto e $A_U(V) = -(\overline{\nabla}_V U)^\top$.

Demonstração. A simetria de II implica que A_U é auto-adjunto. Para a igualdade, note que se $W \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$\langle A_U(V), W \rangle = \langle II(V, W), U \rangle = \langle (\overline{\nabla}_V W)^\perp, U \rangle.$$

Pela compatibilidade com a métrica,

$$V \langle W, U \rangle = \langle \overline{\nabla}_V W, U \rangle + \langle W, \overline{\nabla}_V U \rangle = \langle (\overline{\nabla}_V W)^\perp, U \rangle + \langle W, (\overline{\nabla}_V U)^\top \rangle.$$

Como $\langle W, U \rangle = 0$, por W ser tangente e U ser normal, chegamos na igualdade

$$\langle W, (\overline{\nabla}_V U)^\top \rangle = -\langle (\overline{\nabla}_V W)^\perp, U \rangle = -\langle A_U(V), W \rangle.$$

Portanto $A_U(V) = -(\overline{\nabla}_V U)^\top$. □

Por esse resultado podemos decompor o campo $\overline{\nabla}_X U$ na seguinte soma

$$\overline{\nabla}_X U = -A_U X + (\overline{\nabla}_V U)^\perp,$$



chamada *formula de Weingarten*.

Lema 20. Uma hipersfície semi-Riemanniana $M \subset \overline{M}$ é totalmente umbílica se, e somente se, o operador de Weingarten é escalar.

Demonstração. Suponha primeiramente que M é totalmente umbílica com campo vetorial curvatura normal z . Para um campo normal unitário U vale

$$\langle A_U, W \rangle = \langle II(V, W), U_U \rangle = \langle z \langle V, W \rangle, U \rangle = \langle V, W \rangle \langle z, U \rangle,$$

para todo campo vetorial tangente V, W . Assim $A_U = \langle U, z \rangle V$ para todo V , logo A_U é escalar.

Por outro lado, suponha que A_U seja escalar, ou seja, existe uma função K_U no domínio de U tal que $A_U(V) = K_U(V)$ para todo V . Então

$$II(V, W) = \varepsilon \langle A_U(V), W \rangle U = \varepsilon K_U \langle V, W \rangle U.$$

Como $K_{-U} = -K_U$, o campo vetorial $z = \varepsilon K_U U$ é globalmente bem definido e a equação acima torna-se $II(V, W) = \langle V, W \rangle z$. $\square$

1.6 Produto Warped

Ao estudarem variedades produto Bishop e O'Neill (1969) introduziram um tipo especial de produto entre variedades ao qual chamaram de Produtos Warped.

Nesta seção fixaremos as funções π e σ como as projeções de qualquer variedade produto semi-Riemanniano na primeira variedade do produto e na segunda variedade, respectivamente. Por exemplo, para B e F variedades semi-Riemannianas, teremos $\pi(B \times F) = B$ e $\sigma(B \times F) = F$.

Definição 25. Suponha que B e F são variedades semi-Riemannianas, e seja $f > 0$ uma função suave em B . O produto Warped $M = B \times_f F$ é a variedade produto $B \times F$ munido com o tensor métrico

$$g = \pi^*(g_B) + f(\pi)^2 \sigma^*(g_F).$$

Explicitamente, se x é tangente a $B \times F$ em (p, q) , então

$$\langle x, x \rangle = \langle d\pi(x), d\pi(x) \rangle_B + f^2(p) \langle d\sigma(x), d\sigma(x) \rangle_F.$$

B é chamado de *base* de $M = B \times_f F$, e F de *fibra*. (Fig. 1.1)



Como no caso de um produto semi-Riemanniano, é fácil ver que as fibras $p \times F = \pi^{-1}(p)$ e as folhas $B \times q = \sigma^{-1}(q)$ são variedades semi-Riemannianas de M .

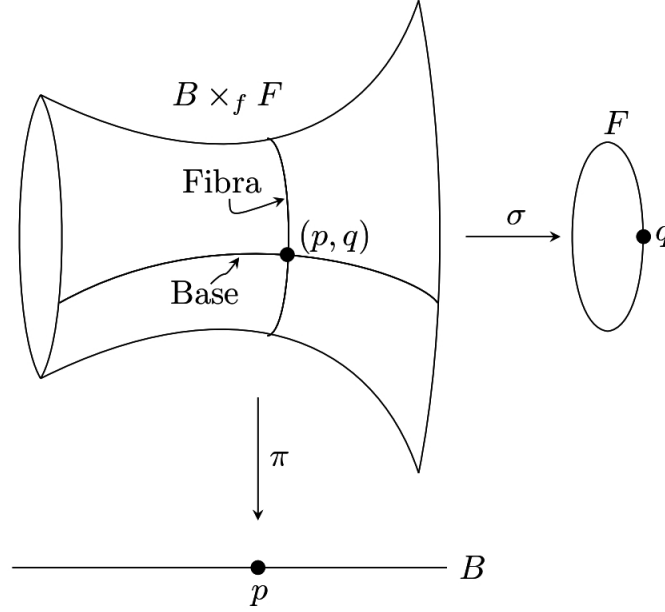


Figura 1.1: Produto Warped

Dados $(p, q) \in B \times F$, temos a decomposição $T_{(p,q)}(B \times F) = T_p B \oplus T_q F$. Então, se $(v, w), (v', w') \in T_p B \oplus T_q F$, temos que

$$g_{B \times_f F}((v, w), (v', w')) = (g_B)_p(v, v') + f(p)^2 (g_F)_q(w, w').$$

Dadas bases ortonormais $\{v_1, \dots, v_{\dim(B)}\}$ e $\{w_1, \dots, w_{\dim(F)}\}$ de $T_p B$ e $T_q F$, respectivamente, vemos que

$$\left\{ (v_1, 0), \dots, (v_{\dim(B)}, 0), \left(0, \frac{w_1}{f(p)} \right), \dots, \left(0, \frac{w_{\dim(F)}}{f(p)} \right) \right\}$$

é uma base ortonormal de $T_{(p,q)}(B \times_f F)$. Utilizando tais bases, é fácil ver que

$$\text{ind}(B \times_f F) = \text{ind}(B) + \text{ind}(F).$$

Em particular,

- i) Se B é Lorentziana e F é Riemanniana, então $B \times_f F$ é Lorentziana. Nesse caso denominamos como produto Warped Lorentziano.
- ii) Se B e F são Riemannianas, então $B \times_f F$ é Riemanniana.

Vejamos alguns exemplos de Produto Warped.



Exemplo 10. Seja $\mathbb{R}$ com a métrica positiva canônica, dt^2 , e $\mathbb{S}^n$ a n -esfera com métrica $g_{\mathbb{S}^n}$. Então, o produto $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ com a métrica $dt^2 + g_{\mathbb{S}^n}$ é um produto Warped, o cilindro (Riemanniano) canônica.

Exemplo 11. Para a versão Lorentziana do exemplo anterior, tomamos $\mathbb{R}$ com a métrica $-dt^2$, assim o produto warped $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ possui métrica $-dt^2 + g_{\mathbb{S}^n}$, é chamado de cilindro de Einstein.

Exemplo 12. Se M é obtida girando uma curva plana C em torno de um eixo em $\mathbb{R}^3$ e $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ dá a distância ao eixo, então M é igual ao produto Warped $C \times_f \mathbb{S}^1(1)$.

Exemplo 13. Os modelos canônicos do espaço-tempo do universo são produtos Warped (falaremos mais à frente), assim como os modelos mais simples de vizinhanças de estrelas e buracos negros.

1.6.1 Espaços-tempo FLRW

Um importantíssimo uso do produto Warped se trata dos espaços-tempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), o modelo padrão da cosmologia moderna, já que sua métrica é uma solução exata das equações de campo de Einstein da Relatividade Geral e descreve, na Cosmologia, um Universo homogêneo e isotrópico em expansão ou contração. Essa métrica também está associada a modelo por vezes muito mais elaborado, como os que são usados para descrever a chamada matéria escura fria.

Iniciamos por uma definição um pouco mais geral.

Definição 26. Um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado (GRW) é o produto Warped Lorentziano $I \times_f M$, ou seja a variedade produto $I \times M$ com tensor métrico Lorentziano,

$$g = -\pi^*(dt^2) + f(\pi)^2 \sigma^*(g_M)$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo com métrica $-dt^2$ e M uma variedade Riemanniana com tensor métrico g_M , e $f > 0$ é uma função suave de I .

Quando a fibra Riemanniana tem curvatura constante denominamos o produto Warped $I \times_f M$ como um *espaço-tempo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)*, também conhecido como espaço-tempo Robert-Walker (RW). Explicitamente, temos a seguinte definição:

Definição 27. Um espaço-tempo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) é o produto Warped Lorentziano $I \times_f M$, onde M é uma das seguintes variedades Riemannianas, $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{S}^n$, simplesmente conexos e com curvatura $K = \{-1, 0, +1\}$,



respectivamente (Fig.1.2). Explicitamente é a variedade produto $I \times M$ com tensor métrico Lorentziano

$$g^f = -\pi^*(dt^2) + f(\pi)^2 \sigma^*(g_M).$$

Temos três casos para a geometria do espaço-tempo FLRW: quando $K = 1$ a geometria é a de uma hiperesfera, quando $K = -1$ a geometria é hiperbólica e quando $K = 0$ a geometria é plana (euclideana). Nos próximos capítulos tralharemos com o espaço-tempo esférico, ou seja $K = 1$.

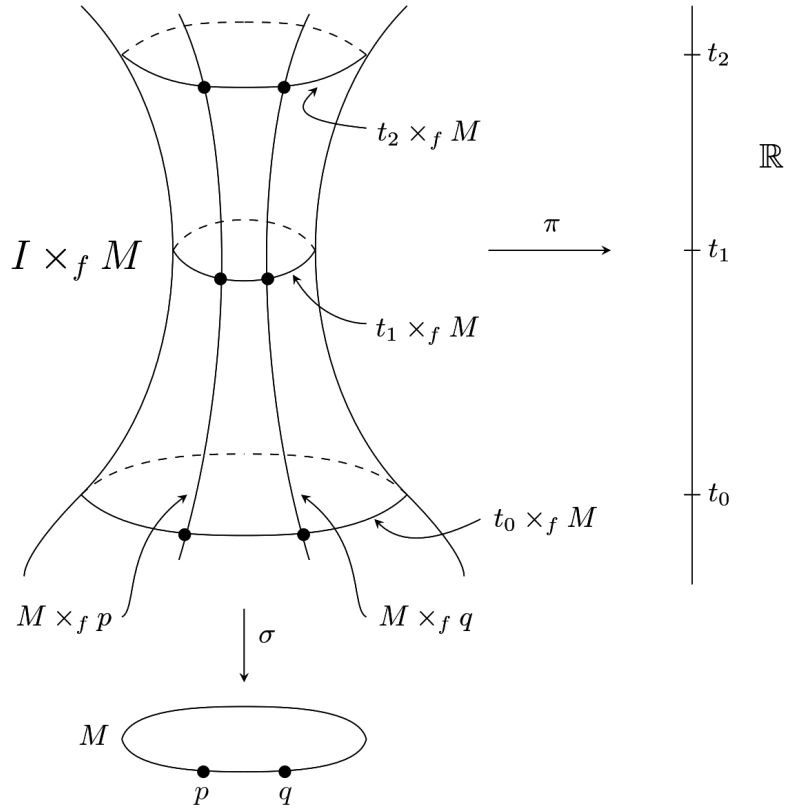


Figura 1.2: Espaço tempo FLRW

No caso quadridimensional é costume escrever o elemento de linha do espaço-tempo (FLRW) na seguinte forma:

$$ds^2 = -dt^2 + f(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right),$$

onde $K = \{1, 0, -1\}$.

Exemplo 14. O espaço-tempo estático de Einstein $(n+1)$ -dimensional, nomeadamente $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ é trivialmente um espaço tempo esférico FLRW.

Exemplo 15. Por O'Neill [1] o espaço-tempo De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}(R)$, de raio arbitrário $R > 0$ é isométrico ao espaço-tempo esférico $I \times_f \mathbb{S}^n$ onde $f(t) = R \cosh(t/R)$.



1.7 Variedade Lorentziana tempo orientável

Seja $\mathfrak{S}$ o conjunto de todos os vetores tipo tempo em um espaço vetorial Lorentziano V . Para $u \in \mathfrak{S}$, o conjunto

$$C(u) = \{v \in \mathfrak{S} \mid \langle u, v \rangle < 0\}$$

é o chamado cone temporal de V contendo u .

Lema 21. Dois vetores tipo-tempo v e w em um espaço vetorial Lorentziano, estão no mesmo cone temporal se, e somente se $\langle v, w \rangle < 0$.

Demonstração. Suponha que $v, w \in C(u)$, sem perda de generalidade $\langle u, u \rangle = -1$. Escrevamos $v = au + \vec{v}$ e $w = bu + \vec{w}$, com $\vec{v}, \vec{w} \in v^\perp$, multiplicando escalarmente com u as duas equações anteriores, obtemos a, b positivos. Já multiplicando-as por si próprias, temos $a > |v|$ e $b > |w|$, pois $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são tipo-espaço. Portanto, $\langle v, w \rangle = -ab + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \leq -ab + |\vec{v}||\vec{w}| < 0$.

Reciprocamente, se $\langle v, w \rangle < 0$ temos $v, w \in C(v)$.

□

Segue-se para vetores tipo tempo que

$$u \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(u) \Leftrightarrow C(v) = C(u).$$

Além disso, os cones temporais são convexos, pois se $v, w \in C(u)$ e $a \leq 0, b \leq 0$ (ambos não nulos), então é fácil verificar que $av + bw$ está em $C(u)$.

A existência de cones temporais levanta uma questão global fundamental sobre uma variedade arbitrária de Lorentz M . Em cada espaço tangente (Lorentz) $T_p(M)$ existem dois cones temporais, e não há nenhuma maneira intrínseca de distinguir um do outro. Escolher um deles é orientar no tempo $T_p(M)$. A questão é: todo espaço tangente de M pode ser orientado no tempo de maneira adequadamente contínua?

Definição 28. Uma orientação temporal para uma variedade Lorentziana M é uma função τ em M que atribui a cada ponto p um cone temporal τ_p em $T_p(M)$, com τ suave, ou seja, para cada $p \in M$ existe um campo vetorial (suave) V em alguma vizinhança $\mathcal{U}$ de p tal que $V_q \in \tau_q$, para cada $q \in \mathcal{U}$. Se M admite uma orientação no tempo, diz-se que M é orientável no tempo.

Escolher uma orientação temporal específica em M é orientar M no tempo. Por exemplo, o espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^n$, é orientável no tempo, sua orientação temporal usual é aquela que contém o campo vetorial coordenado ∂_0 de coordenadas naturais $u^0, \dots, u^{n-1}$.



Lema 22. Uma variedade Lorentziana M é tempo orientável se, e somente se, existe um campo vetorial tipo-tempo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Se tal campo X existir, então (como acima para $\mathbb{R}_1^n$) atribuir a cada $p \in M$ o cone temporal contendo X_p fornece uma orientação temporal.

Por outro lado, seja τ uma orientação temporal de M . Como τ é suave, cada ponto de M tem uma vizinhança $\mathcal{U}$ na qual é definida um campo vetorial semelhante ao tempo $X_{\mathcal{U}}$ cujo valor em cada $p \in \mathcal{U}$ está em τ_p .

Agora seja $\{f_{\alpha} | \alpha \in A\}$ uma partição suave da unidade subordinada à cobertura de M por todas essas vizinhanças. Assim, cada $\text{supp } f_{\alpha}$ está contido em algum membro $\mathcal{U}(\alpha)$ da cobertura. As funções f_{α} são não negativas e os cones temporais são convexos. Assim, o campo vetorial $X = \sum f_{\alpha} X_{\mathcal{U}(\alpha)}$ é tipo-tempo. $\square$

Por exemplo, todas as esferas de Lorentz $\mathbb{S}_1^n$ são tempo orientáveis, porque se ∂_0 é um campo vetorial de coordenadas naturais (tipo-tempo) em $\mathbb{R}_1^{n+1}$, então $X = \tan \partial_0$ é um campo vetorial tipo tempo em $\mathbb{S}_1^n$. Além disso, todos os espaços hiperbólicos $\mathbb{H}_1^n \subset \mathbb{R}_2^{n+1}$ são tempo orientáveis. De fato, como $P = \sum u^i \partial_i$ é normal a $\mathbb{H}_1^n$, é fácil verificar que $u^2 \partial_1 - u^1 \partial_2$ é tangente a $\mathbb{H}_1^n$ e tipo-tempo.

Para uma variedade Lorentziana não há relação entre orientabilidade no sentido usual de variedades diferenciáveis e orientabilidade no tempo. Por exemplo, é fácil atribuir uma métrica de Lorentz tempo orientável à faixa $\mathbb{S}^1 \times I$ que é orientável, e uma métrica não tempo orientável à faixa de Möbius (não orientável). A situação inversa é sugerida na seguinte figura.

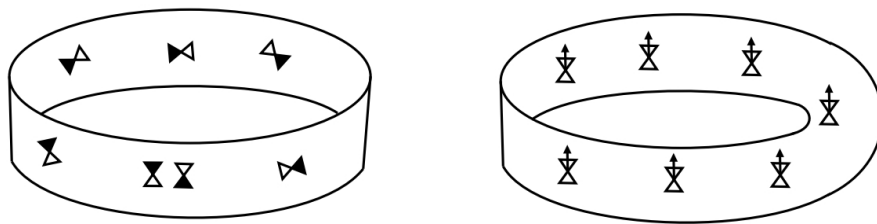


Figura 1.3: Tempo não orientável e tempo orientável, respectivamente.

Definição 29. Um espaço-tempo é uma variedade Lorentziana (M, g) juntamente com uma escolha de orientação temporal.



1.8 Isometrias em $\mathbb{R}_\nu^n$.

Definição 30 (Transformações pseudo-ortogonais). Uma transformação linear $T : \mathbb{R}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ é dita uma transformação pseudo-ortogonal se

$$\langle T(x), T(y) \rangle_\nu = \langle x, y \rangle_\nu,$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}_\nu^n$. O conjunto de todas as transformações pseudo-ortogonais em $\mathbb{R}_\nu^n$ é denotado por $O_\nu(n)$.

Quando $\nu = 1$ as transformações pseudo-ortogonais são chamadas de transformações de Lorentz.

Identificaremos transformações lineares com suas matrizes na base canônica e vetores do $\mathbb{R}_\nu^n$ com vetores coluna.

Exemplo 16 (Rotações em eixos coordenados em $\mathbb{L}^3$). Atentando-se aos tipos causais dos eixos coordenados, dado $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in \mathbb{R}$, pode-se, dentre outras, considerar aplicações dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposição 23. O conjunto $O_\nu(n)$ é um grupo com a operação usual de multiplicação entre matrizes.

Demonstração. Consultar Ivo Terek [6] □

Assim $O_\nu(n)$ é chamado de grupo pseudo-ortogonal. Em particular, $O_0(n) \equiv O(n)$ e $O_1(n)$ são os grupos ortogonal e Lorentz, respectivamente.

Definição 31. O grupo

$$SO_\nu(n) = \{T \in O_\nu(n) | \det T = 1\}$$

é chamado grupo especial pseudo-ortogonal.

Quando $\nu = 1$ temos o grupo especial de Lorentz.

Definição 32. Uma função $g : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $M_n(\mathbb{R})$ denota o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais, é dita $SO(n)$ -invariante, se

$$\forall \xi \in M_n(\mathbb{R}), \quad \forall U \in SO(n), \quad g(U\xi) = g(\xi). \quad (1.13)$$

Capítulo 2

FLRW Esféricos e as Rotacionais

Neste capítulo construiremos o mergulho isométrico do espaço-tempo esférico FLRW $I \times_f \mathbb{S}^n$ em $\mathbb{L}^{n+2}$. Ao olhar para a imagem de $I \times_f \mathbb{S}^n$ por esse mergulho isométrico, percebe-se que estamos tratando do rotacional de uma curva em $\mathbb{L}^{n+2}$. Estudaremos a relação entre $I \times_f \mathbb{S}^n$ e esse rotacional e logo em seguida deduziremos as principais propriedades geométricas desse espaço.

2.1 Mergulho isométrico de $I \times_f \mathbb{S}^n$ em $\mathbb{L}^{n+2}$

Para mostrarmos que o espaço-tempo esférico FLRW $I \times_f \mathbb{S}^n$ pode ser mergulhado isometricamente no espaço Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$, será suficiente focarmos no caso $n = 3$, já que devido a simetria máxima da fibra não perdemos a generalidade.

De início, como inspiração, mostraremos que o espaço De Sitter pode ser mergulhado isometricamente no espaço de Minkowski com uma dimensão a mais.

Proposição 24. A aplicação $\psi : \mathbb{S}_1^3(r) \rightarrow \mathbb{L}^5$ dada por,

$$\psi(p) = \left(\pm \sqrt{\|p\|^2 - 1}, \mathbb{S}^3(\|p\|) \right) \quad (2.1)$$

onde $\mathbb{S}^3(\|p\|)$ denota (x_2, x_3, x_4, x_5) tal que $x_2^2 + \cdots + x_5^2 = \|p\|$, é um mergulho isométrico.

Demonstração. Iniciemos com a métrica de Minkowski em coordenadas polares em cinco dimensões:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 g(\mathbb{S}^3, can) \quad (2.2)$$

onde $g(\mathbb{S}^3, can)$ é a métrica $SO(4)$ -invariante canônica em $\mathbb{S}^3$. Note que para $r=0$, temos uma singularidade para essa métrica. Iremos construir uma superfície no espaço de Minkowski que possua a mesma métrica que o espaço De Sitter. Para isso, considere

uma hipersuperfície $SO(4)$ -invariante em (2.2) dada por

$$t = F(r), \quad (2.3)$$

ou seja, uma curva no plano $t - r$ de (2.2). Anexando a cada ponto uma esfera de raio igual à coordenada r da curva, obtemos uma hipersuperfície de rotação que possui como métrica induzida,

$$ds^2 = (1 - F'^2)dr^2 + r^2g(\mathbb{S}^3, can).$$

Veja que

$$t = F(r) \Rightarrow dt = F' dr.$$

Teremos que a hipersuperfície é tipo-tempo se $F'^2 > 1$ e tomando $(F'^2 - 1) = 1/(r^2 - 1)$, obtêm-se

$$ds^2 = -\frac{1}{r^2 - 1}dr^2 + r^2g(\mathbb{S}^3, can) \quad (2.4)$$

que é facilmente reconhecível como a métrica De Sitter. Com $r = \cosh \tau$, podemos obter a forma mais familiar:

$$ds^2 = -d\tau^2 + \cosh^2 \tau g(\mathbb{S}^3, can)$$

que cobre todo o espaço De Sitter, exceto nas mesmas singularidades triviais de (2.2). Finalmente, integrando $F'(r)$, obtemos

$$F(r) = \int \pm \sqrt{\frac{1}{r^2 - 1}} + 1.$$

Logo,

$$t = \pm \sqrt{r^2 - 1}$$

como as hipersuperfícies (2.3). Portanto, a nossa aplicação desejada leva o espaço de De Sitter na rotação da curva

$$C : r \rightarrow \left(\pm \sqrt{r^2 - 1}, r \right)$$

em torno do eixo t , obtendo assim (2.1). Note que essa curva nada mais é do que os dois lados da hipérbole $r^2 - t^2 = 1$ no plano $t - r$ de (2.2). A transição da imagem usual do De Sitter como uma hiperbolóide no espaço de Minkowski, unidimensional superior para a de uma curva no espaço de Minkowski bidimensional é possível porque fomos capazes de

identificar e fatorar a simetria esférica comum entre o espaço de Minkowski e o espaço De Sitter, escrevendo-os em coordenadas semelhantes, (2.2) e (2.4), respectivamente. Em ambos, r desempenha o papel comum do raio da esfera. $\square$

Com base na construção da demonstração da proposição anterior podemos enunciar o seguinte Teorema.

Teorema 25. *Dado um espaço-tempo esférico FLRW $I \times_f \mathbb{S}^n$, assumimos $0 \in I$ sem perda de generalidade. Temos que para uma função $h \in C^\infty(I)$ tal que $h'(s) = \sqrt{1 + f'(s)^2} > 0$, para todo $s \in I$ com $h(0) = 0$, a aplicação $\Psi : I \times_f \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ dada por*

$$\Psi(s, p) = (h(s), f(s)p) \quad (2.5)$$

para qualquer $(s, p) \in I \times_f \mathbb{S}^n$, é um mergulho isométrico.

Demonstração. Escrevendo a métrica do espaço-tempo FLRW na seguinte forma Warped,

$$ds^2 = -dr^2 + f(t)^2(d\mathcal{X}^2 + \sin^2 \mathcal{X}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \quad (2.6)$$

e tomando a métrica pentadimensional de Minkowski em coordenadas polares, dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\mathcal{X}^2 + \sin^2 \mathcal{X}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad (2.7)$$

podemos proceder como na proposição acima, tomando uma hipersuperfície $SO(4)$ -invariante definida por $t = F(r)$ que representa uma curva no subespaço $t - r$. No entanto, isto não levaria, em geral, a uma expressão compacta como era possível para o espaço De Sitter. Uma abordagem melhor seria considerar a curva parametrizada com η :

$$C = (h(\eta), a(\eta)), \quad (2.8)$$

onde consideramos $r = a(\eta)$ e $t = h(\eta)$. A métrica 4 - d na hipersuperfície é

$$ds^2 = (-h'^2 + a'^2)d\eta^2 + a(\eta)^2(\mathcal{X}^2 + \sin \mathcal{X}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad (2.9)$$

onde representamos a diferenciação com respeito a η . Escolhendo

$$-h'^2 + a'^2 = -1 \quad (2.10)$$

a métrica (2.9) fornece (2.6) ao identificar τ e η . Assim, a curva (2.8) no plano $t - r$, que é um espaço de Minkowski bidimensional, é uma curva tipo-tempo unitária . Reorganizando, encontramos

$$h'(\tau)^2 = 1 + a'(\tau)^2$$

que para qualquer $a(\tau)$ possa ser integrado. Assim, tomando $a(\tau) = f(\tau)$ e integrando, obtemos

$$h(\tau) = \int \sqrt{1 + f'(\tau)^2} d\tau.$$

Logo existe uma curva de velocidade unitária parametrizada por,

$$C : t \rightarrow \left(\int \sqrt{1 + f'(t)^2} dt, f(t) \right). \quad (2.11)$$

Uma vez que as coordenadas da esfera já estão identificadas, para ver se temos de fato um mergulho isométrico ou não, temos que verificar a curva como uma parametrização a partir da reta real. Segue-se imediatamente de (2.10) que se trata, em primeiro lugar, de uma imersão, uma vez que h' e a' não podem ser simultaneamente nulos, pelo que o jacobiano da carta terá o posto necessário. Além disso, a curva (2.11) é injetiva para qualquer $f(t)$ contínuo e diferenciável, logo, é um mergulho. Assim, como na proposição anterior, obtemos a aplicação (2.5). $\square$

2.2 Mergulho Isométrico de $I \times_f \mathbb{S}^n$ em $Q(r)$

Motivado pela geometria de $\Psi(I \times_f \mathbb{S}^n)$ em $\mathbb{L}^{n+2}$, já que se trata de uma hipersuperfície de rotação em $\mathbb{L}^{n+2}$, definiremos o conjunto $Q(r)$, que nos será bastante útil. Para isso, faremos uso de uma função r que descreverá a geometria do mergulho isométrico de $I \times_f \mathbb{S}^n$ em $\mathbb{L}^{n+2}$ e tal função será chamada de admissível.

Definição 33. Uma função $r \in C^\infty(J)$ será chamada de *admissível* em relação a um espaço-tempo esférico $I \times_f \mathbb{S}^n$ se

$$r(t) > 0 \text{ e } |r'(t)| < 1 \quad (2.12)$$

onde $J = h(I)$, e h que decorre da construção do mergulho de $I \times_f \mathbb{S}^n$ em $\mathbb{L}^{n+2}$.

Vale lembrar que o mergulho isométrico de $I \times_f \mathbb{S}^n$ em $\mathbb{L}^{n+2}$ é dado por

$$\Psi(t, p) = (h(t), f(t)p) \text{ onde } h(t) = \int \sqrt{1 + f'(t)^2} dt. \quad (2.13)$$

Observe que, para cada espaço-tempo $I \times_f \mathbb{S}^n$, teremos a determinação do correspondente intervalo J , relacionando assim o intervalo ao espaço.



Exemplo 17. Dado o espaço $I \times_f \mathbb{S}^n$, onde f é qualquer função Warping, então a função $(f \circ h^{-1})$ é uma função admissível. De fato, $(f \circ h^{-1})' > 0$ pela definição de função Warping, e

$$(f \circ h^{-1})' = f'(h^{-1}) \cdot (h^{-1})' = f'(h^{-1}) \cdot \frac{f'(h^{-1})}{\sqrt{1 + f'(h^{-1})^2}} < 1.$$

Observação 1. Para $r = f \circ h^{-1}$, temos que

$$r'(t) = \frac{f'(s)}{\sqrt{1 + f'(s)^2}} \text{ e } r''(t) = \frac{f''(s)}{(1 + f'(s)^2)^{3/2}}, \quad (2.14)$$

para qualquer $t = h(s)$. De fato, pelo Teorema da Função Inversa real $(h^{-1}(t))' = 1/h'(s)$, logo pela regra da cadeia

$$r'(t) = f'(h^{-1}(t)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f'(s)^2}} = \frac{f'(s)}{\sqrt{1 + f'(s)^2}}.$$

Obtemos $r''(t)$ com um cálculo direto da derivada de $r'(t)$ acima.

Agora podemos definir o espaço $Q(r)$.

Definição 34. Dado uma função admissível r , definamos

$$Q(r) = \left\{ (t, x) \in J \times \mathbb{E}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = \|x\|^2 = r(t)^2 \right\} \subset \mathbb{L}^{n+2}. \quad (2.15)$$

Observe que $Q(r)$ é uma hipersuperfície de rotação em $\mathbb{L}^{n+2}$, uma vez que, dada uma função admissível $r \in C^\infty(J)$ e uma curva $\gamma : J \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, dada por

$$\gamma(t) = (t, r(t), \overbrace{0, \dots, 0}^n)$$

denotando por G o subgrupo $\{1\} \times O(n+1)$ de $O^1(n+2)$, segue que

$$Q(r) = \{(A \circ \gamma)(t) : A \in G, t \in J\}, \quad (2.16)$$

donde se conclue que $Q(r)$ é uma hipersuperfície de rotação em $\mathbb{L}^{n+2}$, com curva de perfil γ e eixo de rotação $x_j = 0$, $j = 1, \dots, n+1$.

Note também que $\gamma(J)$ não atinge ao eixo tipo-tempo $x_j = 0$ ($j = 1, \dots, n+1$), pois $r(t) > 0$ e por $|r'(t)| < 1$, γ é tipo-tempo.

Se E_t é um hiperplano ortogonal ao eixo de rotação através do ponto $(t, \overbrace{0, \dots, 0}^{n+1})$, então é tipo-espaço, e portanto, identificável ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Observe também que a fatia $Q(r) \cap E_t$ é uma esfera n -dimensional em E_t , com raio $r(t)$.



Proposição 26. Dado um espaço-tempo esférico $I \times_f \mathbb{S}^n$, existe uma aplicação Ψ e uma função admissível r tal que $Q(r) = \Psi(I \times_f \mathbb{S}^n)$. Por outro lado, dada uma função admissível r , existe uma função warping f e uma aplicação Ψ tal que $Q(r) = \Psi(I \times_f \mathbb{S}^n)$.

Demonstração. Iniciando pela primeira afirmação do teorema, supondo que tenhamos um espaço $I \times_f \mathbb{S}^n$ qualquer, conseguimos a aplicação $\Psi : I \times_f \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ como antes. Agora devemos encontrar uma função admissível r tal que $\Psi(I \times_f \mathbb{S}^n) \subset Q(r)$. Note que, se tomamos $r = f \circ h^{-1}$, como $\Psi(t, p) = (h(t), f(t)p)$ e $\|f(t)p\| = \|f(t)\|^2 = \|f(h^{-1}(s))\|^2$, teremos $\Psi(t, p) \subset Q(r)$. Pela construção de $Q(r)$ ganhamos que $Q(r) \subset \Psi(I \times_f \mathbb{S}^n)$, provando a igualdade.

Nos resta a questão, e se tivermos apenas $Q(r)$ é possível encontrar o espaço $I \times_f \mathbb{S}^n$ e a aplicação Ψ correspondente? A resposta é afirmativa. Para isso, considere a função $\tilde{h} : J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{h}'(t) = \sqrt{1 - r'(t)^2}$, $\tilde{h}(0) = 0$, para todo $t \in J$. Por isso, $\tilde{h}$ está estritamente crescente, e, portanto, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, com $0 \in I$ tal que $\tilde{h} : J \rightarrow I$ é um difeomorfismo.

Agora defina $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(s) = (r \circ \tilde{h}^{-1}(s)) > 0$, para todo $s \in I$ e seja $I \times_f \mathbb{S}^n$ o correspondente espaço-tempo esférico FLRW. Fazendo $h = \tilde{h}^{-1} : I \rightarrow J$, então $h(0) = 0$ e

$$h'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - r'(h(s))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f(s)^2}{1 + f'(s)^2}}} = \sqrt{1 + f'(s)^2},$$

para todo $s \in I$. Finalmente temos $Q(r) = \Psi(I \times_f \mathbb{S}^n)$. □

Esse resultado nos permite contemplar $I \times_f \mathbb{S}^n$ como uma hipersuperfície Lorentziana de rotação em $\mathbb{L}^{n+2}$. Quando for claro pelo contexto, identificaremos $I \times_f \mathbb{S}^n$ por $Q(r)$.

Exemplo 18. Para $r(t) = \sqrt{1 + t^2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ a variedade $Q(r)$ é isométrica ao espaço-tempo De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

De fato, temos $r'(t) = t/\sqrt{1 + t^2}$, logo,

$$h'(t) = \sqrt{1 - (t/\sqrt{1 + t^2})^2} = \frac{1}{1 + t^2},$$

assim,

$$h(t) = \int \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} dt = \ln|\sqrt{t^2 + 1} + t|,$$

cujas a inversa é $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$h^{-1}(s) = \frac{e^{2s} - 1}{2e^s}.$$

2.3. A geometria de $Q(r)$.



De fato, fazendo $s = \ln|\sqrt{t^2 + 1} + t| \Rightarrow e^s = \sqrt{t^2 + 1} + t \Rightarrow e^{2s} = (t^2 + 1) + 2t\sqrt{t^2 + 1} + t^2$ logo, $e^{2s} - 1 = 2t\sqrt{t^2 + 1} + t^2 \Rightarrow e^{2s} - 1 = 2te^s \Rightarrow t = (e^{2s} - 1)/2e^s$.

Agora podemos encontrar a função warping f , que é dada por

$$\begin{aligned} f(s) &= r \circ h^{-1}(s) = \sqrt{1 + (h^{-1}(s))^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{e^{2s} - 1}{2e^s}\right)^2} = \sqrt{\frac{e^{4s} + 2e^{2s} + 1}{4e^{2s}}} \\ &= \frac{e^{2s} + 1}{2e^s} = \frac{e^s + e^{-s}}{2} \\ &= \cosh(s). \end{aligned}$$

Pelo Teorema anterior $Q(r)$ é isométrico a $I \times_{\cosh(t)} \mathbb{S}^n$ que é isométrico a $\mathbb{S}_1^{n+1}$, portanto $Q(r)$ é isométrico a $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

2.3 A geometria de $Q(r)$.

Nesta seção vamos explorar alguns elementos geométricos do espaço $Q(r)$, iniciando pelo espaço tangente.

Proposição 27. O espaço tangente de $Q(r)$ em (t, x) é dado por

$$T_{(t,x)}Q(r) = \left\{ (a, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} : -r(t)r'(t)a + \sum_{i=1}^{n+1} v_i x_i = 0 \right\} = (r(t)r'(t), x)^\perp \quad (2.17)$$

onde $(r(t)r'(t), x)^\perp$ denota o subespaço ortogonal em $\mathbb{L}^{n+2}$ do vetor tipo-espaço $(r(t)r'(t), x)$, para cada $(t, x) \in Q(r)$.

Demonstração. Seja $\alpha(s)$ uma curva em $Q(r)$ tal que $\alpha(0) = (t(0), x(0)) = (t_0, x_0)$ e $\alpha'(0) = V = (a, v)$ onde $a \in \mathbb{R}$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2(s) = r^2(t(s)).$$

Derivando temos

$$2 \sum_{i=1}^{n+1} x_i(s) x'_i(s) = 2r(t(s))r'(t(s))t'(s),$$

donde para $s = 0$ temos

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i(0) v_i = r(t_0) r'(t_0) a.$$



Ou seja,

$$-r(t_0)r'(t_0)a + \sum_{i=1}^{n+1} x_i(0)v_i = 0.$$

Portanto, $\langle (r(t_0)r'(t_0), x_1(0), \dots, x_{n+1}(0)), (a, v_1, \dots, v_{n+1}) \rangle = 0$ mostrando que os vetores tangentes a $Q(r)$ no ponto (t, x) são ortogonais ao vetor $(r(t)r'(t), x)$. $\square$

Olhando para $Q(r)$ como uma variedade Lorentziana, temos que é orientável no tempo.

Proposição 28. O campo vetorial $k = \psi_*(f\partial/\partial t) \in \mathfrak{X}(Q(r))$ é dado explicitamente por,

$$k(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - r'(t)^2}}(r(t), r'(t)x), \quad (2.18)$$

é tipo tempo, simétrico e conforme.

Demonstração. Para comprovar essa igualdade, como $\psi(s, p) = (h(s), f(s)p)$ temos

$$\psi_*(f\partial/\partial s) = f\psi_*(\partial/\partial s) = f \cdot \frac{\partial}{\partial s}(h(s), f(s)p) = f \cdot (h'(s), f'(s)p).$$

Para $t = h(s)$, sabemos que

$$f'(s) = \frac{r'(t)}{\sqrt{1 - r'(t)^2}} \text{ e } h'(s) = \sqrt{1 + f'(s)^2}.$$

Como

$$\sqrt{1 + f'(s)^2} = \sqrt{1 + \frac{r'(t)^2}{1 - r'(t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - r'(t)^2}},$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \psi_*(f\partial/\partial s) &= f(s) \left(\frac{1}{\sqrt{1 - r'(t)^2}}, \frac{r'(t)}{\sqrt{1 - r'(t)^2}}p \right) \\ &= \left(\frac{f(h^{-1}(t))}{\sqrt{1 - r'(t)^2}}, \frac{f(s)pr'(t)}{\sqrt{1 - r'(t)^2}} \right) \\ &= \left(\frac{r(t)}{\sqrt{1 - r'(t)^2}}, \frac{r'(t)x}{\sqrt{1 - r'(t)^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - r'(t)^2}}(r(t), r'(t)x). \end{aligned}$$

Normalizando tal vetor obtemos o campo tangente $T \in \mathfrak{X}(Q(r))$ dado por



$$T(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - r'(t)^2}} \left(1, \frac{r'(t)}{r(t)} x \right) \quad (2.19)$$

satisfazendo $\langle T, T \rangle = -1$. Temos também que,

$$\bar{\nabla}_V K = \frac{r'(t)}{\sqrt{1 - r'(t)^2}} V \quad (2.20)$$

para qualquer $V \in T_{(t,x)}Q(r)$.

Isso mostra que o campo vetorial K em $Q(r)$ é conforme com $\mathcal{L}_K \langle \cdot, \cdot \rangle = 2\rho \langle \cdot, \cdot \rangle$, onde $\rho(t, x) = r'(t)/\sqrt{1 - r'(t)^2}$ e é metricamente equivalente a 1-forma para K fechado. $\square$

Como $T_{(t,x)}Q(r) = (r'(t)r(t), x)^\perp$ temos que a hipersuperfície Lorentziana $Q(r)$ de $\mathbb{L}^{n+2}$ admite um campo vetorial normal tipo-espaço unitário, $N \in \mathfrak{X}^\perp(Q(r))$ dado em $(t, x) \in Q(r)$ por

$$N(t, x) = \frac{1}{r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}} (r'(t)r(t), x), \quad (2.21)$$

se trata da normalização do campo vetorial $(r'(t)r(t), x)$.

Agora, vamos denotar por ∇^0 e $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+2}$ e $Q(r)$, respectivamente. Para qualquer $V, W \in \mathfrak{X}(Q(r))$, a formula de Gauss e Weingarten de $Q(r) \in \mathbb{L}^{n+2}$ são respectivamente escritas como

$$\nabla_V^0 W = \bar{\nabla}_V W + \langle AV, W \rangle N \quad (2.22)$$

e

$$\nabla_V^0 N = -A(V), \quad (2.23)$$

onde A é o operador de Weingarten em relação a N , que é explicitamente dado pelo seguinte resultado.

Lema 29. O operador de Weingarten A com respeito a N da hipersuperfície Lorentziana $Q(r) \in \mathbb{L}^{n+2}$ é dado por

$$A(V) = \alpha(t)V + \beta(t)\langle T(t, x), V \rangle T(t, x) \quad (2.24)$$

para todo $V \in T_{(t,x)}Q(r)$ onde

$$\alpha(t) = \frac{-1}{r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}}, \quad \beta(t) = \frac{r''(t)r(t) + r'(t)^2 - 1}{r(t)(1 - r'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.25)$$

Demonstração. Escreva $V = (a, v) \in T_{(t_0, x_0)}Q(r)$ isto é $\langle (a, v), (r'(t)r(t), x_0) \rangle = 0$,



ou seja, $ar'(t_0)r(t_0) = \langle x_0, v \rangle$. Considere a curva $s \mapsto (t(s), x(s))$ em $Q(r)$ tal que $(t(0), x(0)) = (t_0, x_0)$ e $(t'(0), x'(0)) = (a, v)$.

Usando $N(t, x)$ em (2.21), temos

$$\begin{aligned} A(V) &= -\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} N(t(s), x(s)) \\ &= -\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \left(\frac{r'(t(s))r(t(s))}{r(t(s))\sqrt{1-r'(t(s))^2}}\right), \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \left(\frac{x(s)}{r(t(s))\sqrt{1-r'(t(s))^2}}\right)\right). \end{aligned}$$

Primeiramente temos que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \left(\frac{r'(t(s))r(t(s))}{r(t(s))\sqrt{1-r'(t(s))^2}}\right) &= \left(\frac{r''(t(s))t'(s)(1-r'(t(s))) + r'(t(s))^2}{(1-r'(t(s))^2)^{3/2}}\right)\Big|_{s=0} \\ &= \left(\frac{r''(t(s))t'(s)}{(1-r'(t(s))^2)^{3/2}}\right)\Big|_{s=0} \\ &= \left(\frac{r''(t_0)a}{(1-r'(t_0)^2)^{3/2}}\right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Calculando a segunda entrada de $A(V)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{x(s)}{r(t(s))\sqrt{1-r'(t(s))^2}}\right)\Big|_{s=0} &= \left(\frac{x'(s)r(t(s))(1-r'(t(s))^2)}{r(t(s))^2(1-r'(t(s))^2)^{3/2}}\right)\Big|_{s=0} \\ &\quad - \left(\frac{x(s)(r'(t(s))t'(s)(1-r'(t(s))^2)}{r(t(s))^2(1-r'(t(s))^2)^{3/2}}\right)\Big|_{s=0} \\ &\quad + \left(\frac{x(s)(r(t(s))(r'(t(s))r''(t(s))t'(s)))}{r(t(s))^2(1-r'(t(s))^2)^{3/2}}\right)\Big|_{s=0} \\ &= \left(\frac{vr(t_0)(1-r'(t_0)^2)}{r(t_0)^2(1-r'(t_0)^2)^{3/2}}\right) \\ &\quad - \left(\frac{x_0(r'(t_0)a(1-r'(t_0)^2)}{r(t_0)^2(1-r'(t_0)^2)^{3/2}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{x_0(r(t_0)(r'(t_0)r''(t_0)a))}{r(t_0)^2(1-r'(t_0)^2)^{3/2}}\right) \\ &= \frac{v}{r'(t_0)\sqrt{1-r'(t_0)^2}} \\ &\quad + a\frac{r'(t_0)}{r(t_0)}\left(\frac{r''(t_0)r(t_0) + r'(t_0)^2 - 1}{r(t_0)(1-r'(t_0)^2)^{3/2}}\right)x_0 \\ &= -\alpha(t_0)v + a\frac{r'(t_0)}{r(t_0)}\beta(t_0)x_0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Por manipulações algébricas em (2.26) obtemos

$$\left(\frac{r''(t_0)a}{(1-r'(t_0)^2)^{3/2}}\right) = -a\frac{r'(t_0)}{r(t_0)}\beta(t_0)r'(t_0)r(t_0) + \alpha(t_0)a(r''(t_0)r(t_0) + r'(t_0)^2). \quad (2.28)$$



De fato, uma vez que o lado direito pode ser escrito por (2.25) como

$$\begin{aligned}
 & -ar'(t_0)^2 \frac{r''(t_0)r(t_0) + r'(t_0) - 1}{r(t_0)(1 - r'(t_0)^2)^{3/2}} - \frac{ar''(t_0)r(t_0) + ar'(t_0)^2}{r(t_0)\sqrt{1 - r'(t_0)^2}} \\
 = & -ar'(t_0)^2 \frac{r''(t_0)r(t_0) + r'(t_0) - 1}{r(t_0)(1 - r'(t_0)^2)^{3/2}} - \frac{(1 - r'(t_0)^2)(ar''(t_0)r(t_0) + ar'(t_0)^2)}{r(t_0)(1 - r'(t_0)^2)^{3/2}} \\
 = & \frac{ar'(t_0)^2 - ar''(t_0)r(t_0) - ar'(t_0)^2}{r(t_0)(1 - r'(t_0)^2)^{3/2}} \\
 = & \frac{-ar''(t_0)r(t_0)}{r(t_0)(1 - r'(t_0)^2)^{3/2}} \\
 = & \frac{-ar''(t_0)}{(1 - r'(t_0)^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Assim por (2.28) e (2.27) temos que

$$\begin{aligned}
 A(V) &= -\left(\frac{r''(t_0)a}{(1 - r'(t_0)^2)^{3/2}}, -\alpha(t_0)v + a \frac{r'(t_0)}{r(t_0)}\beta(t_0)x_0 \right) \\
 &= -a \frac{r'(t_0)}{r(t_0)}\beta(t_0) \left(r'(t_0)r(t_0), x_0 \right) \\
 &\quad + \alpha(t_0) \left(a(r''(t_0)r(t_0) + r'(t_0)^2), v \right).
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Primeiro de todo, suponha que $\langle T(t_0, x_0), V \rangle = 0$. Então, de

$$ar(t_0) = r'(t_0)\langle x_0, v \rangle = ar'(t_0)^2 r(t_0)$$

obtemos $a=0$. Portanto, a equação 2.29 reduce para

$$A(V) = \alpha(t_0)V \tag{2.30}$$

Agora, para o caso $V = T(t_0, x_0)$ temos de $T(t, x)$ em (2.19) e $A(V)$ em (2.29), que

$$\begin{aligned}
 A(T(t_0, x_0)) &= \frac{-r'(t_0)}{r(t_0)\sqrt{1 - r'(t_0)^2}}\beta(t_0) \left(r'(t_0)r(t_0), x_0 \right) \\
 &\quad - \beta(t_0)\sqrt{1 - r'(t_0)^2} \left(1, 0 \right) + \alpha(t_0)T(t_0, x_0) \\
 &= -\beta(t_0) \left(\frac{r'(t_0)^2}{\sqrt{1 - r'(t_0)^2}} + \sqrt{1 - r'(t_0)^2}, \frac{r'(t_0)}{r(t_0)\sqrt{1 - r'(t_0)^2}}x_0 \right) \\
 &\quad + \alpha(t_0)T(t_0, x_0) \\
 &= (\alpha(t_0) - \beta(t_0))T(t_0, x_0),
 \end{aligned}$$

o que encerra a prova. □

Pelo Lema 29, $Q(r)$ não é totalmente geodésica para qualquer função admissível r .



Pelo mesmo lema podemos concluir o seguinte resultado,

Proposição 30. $Q(r)$ é totalmente umbílica se, e somente se $r(t) = \sqrt{t^2 + at + b}$, onde as constantes satisfazem $b > 0$ e $a^2 > 4b$.

Demonstração. Pelo Lema 29 temos que

$$\begin{cases} A(T) = (\alpha(t) - \beta(t))T, \\ A(V) = \alpha(t)V, \text{ para qualquer } V \in T_{(t,x)}Q(r) \text{ ortogonal a } T(t, x). \end{cases} \quad (2.31)$$

Pelo sistema acima, A é diagonalizável em qualquer ponto. Lembre-se que o fato de o operador de Weingarten ser auto-adjunto não é suficiente para garantirmos que A é diagonalizável, uma vez que a métrica Lorentziana não é positiva definida.

Sabemos que $Q(r)$ é totalmente umbílica se, e somente se A é escalar. Logo $Q(r)$ é totalmente se, e somente se, $\beta(t) = 0$ em todos os lugares de $Q(r)$, isto é, se e somente se, a função r satisfaz a equação diferencial $r(t)r''(t)^2 = 1$ ou equivalentemente $\frac{d^2}{dt^2}r(t)^2 = 2$. Consequentemente, $r(t)^2 = t^2 + at + b$, onde $b = r(0)^2$ desde que $r > 0$ e $a = 2r(0)r'(0)$ com $a^2 < 4b$, fazendo uso de $|r'| < 1$. $\square$

Corolário 31. Se $Q(r)$ é totalmente umbílica então $\alpha(t, x) = \frac{-2}{\sqrt{4b-a^2}}$, e, portanto o operador de Weingarten é $A = \frac{-2}{\sqrt{4b-a^2}}I$, onde I denota o operador identidade, em quase todo lugar.

Demonstração. Sabemos que se $Q(r)$ é totalmente umbílica então $r(t) = \sqrt{t^2 + at + b}$, logo

$$\alpha(t, x) = \frac{-1}{r(t)\sqrt{1-r'(t)}} = \frac{-1}{\sqrt{t^2 + at + b} \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2\sqrt{t^2 + at + b}}} = \frac{-2}{\sqrt{4b-a^2}}. \quad (2.32)$$

Daí por (2.24),

$$A = \frac{-2}{\sqrt{4b-a^2}}I.$$

$\square$

Corolário 32. Se $Q(r)$ é totalmente umbílica então a equação de Gauss de $Q(r)$ em $\mathbb{L}^{n+2}$ para o tensor curvatura R de $Q(r)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \left(\frac{4}{4b-a^2} \right) \{ \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y \},$$

isto é, $Q(r)$ tem curvatura seccional $\frac{4}{(4b-a^2)}$. De fato $Q(r)$ é, até uma translação, o espaço-tempo $(n+1)$ -dimensional de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2})$.



Demonstração. A equação de Gauss é dada por,

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle.$$

Sabemos que $II(V, K) = \varepsilon \langle A(V), W \rangle N$ onde $\varepsilon = \langle N, N \rangle$ e $\bar{R}(X, Y)Z = 0$, assim

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \langle (\varepsilon \langle A(X), Z \rangle N), (\varepsilon \langle A(Y), W \rangle N) \rangle - \langle (\varepsilon \langle A(Y), Z \rangle N), (\varepsilon \langle A(X), W \rangle N) \rangle \\ &= \varepsilon^3 \langle A(X), Z \rangle \langle A(Y), W \rangle - \varepsilon^3 \langle A(Y), Z \rangle \langle A(X), W \rangle \\ &= -\langle A(X), Z \rangle \langle A(Y), W \rangle + \langle A(Y), Z \rangle \langle A(X), W \rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \langle A(Y), Z \rangle A(X) - \langle A(X), Z \rangle A(Y) \\ &= R(X, Y)Z = \left(\frac{4}{4b - a^2} \right) \{ \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y \} \end{aligned}$$

já que $A = \frac{-2}{\sqrt{4b - a^2}} I$, concluindo assim a prova. □

Corolário 33. A função curvatura média de $Q(r)$ em relação a N é definida por $H := \frac{1}{n+1} \text{tr}(A)$, e satisfaz

$$H(t, x) = \alpha(t) - \frac{\beta(t)}{n+1} = -\frac{n(1 - r'(t)^2) + r''(t)r(t)}{(n+1)r(t)(1 - r'(t)^2)^{3/2}}. \quad (2.33)$$

Demonstração. Tomando uma base ortonormal para $T_{(t,x)}Q(r)$ que contenha $T(t, x)$, pelo sistema (2.31),

$$\begin{aligned} H(t, x) &= \frac{1}{n+1} (\alpha(t) - \beta(t) + n\alpha(t)) \\ &= \frac{(n+1)\alpha(t) - \beta(t)}{n+1} \\ &= \alpha(t) - \frac{\beta(t)}{n+1} \\ &= \frac{-1}{r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}} - \frac{r''(t)r(t) + r'(t)^2 - 1}{(n+1)r(t)(1 - r'(t)^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{n(1 - r'(t)^2) + r''(t)r(t)}{(n+1)r(t)(1 - r'(t)^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

□



Corolário 34. A hipersuperfície Lorentziana $Q(r)$ em $\mathbb{L}^{n+2}$ tem curvatura média constante se, e somente se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\beta(t) = \frac{c}{r^{n+1}(t)}. \quad (2.34)$$

Equivalentemente,

$$\frac{r(t)^n(r''(t)r(t) + r'(t)^2 - 1)}{(1 - r'(t)^2)^{3/2}} = c \quad (2.35)$$

para todo $t \in J$. Nesse caso, temos

$$\alpha(t) = \frac{c}{(n+1)r^{n+1}(t)} + H. \quad (2.36)$$

Demonstração. Se $H(t, x)$ é constante, então por 2.33

$$\alpha'(t) - \frac{\beta'(t)}{n+1} = 0.$$

Calculando $\alpha'(t)$, temos

$$\alpha'(t) = \frac{r'(t)\sqrt{1 - r'(t)^2} + r(t)\left(\frac{-2r'(t)r''(t)}{2\sqrt{1 - r'(t)^2}}\right)}{r(t)^2(1 - r'(t)^2)}.$$

Desenvolvendo chegaremos em

$$\alpha'(t) = -\frac{r'(t)}{r(t)} \left(\frac{r''(t)r(t) + r'(t)^2 - 1}{r(t)(1 - r'(t)^2)^{3/2}} \right).$$

Portanto $\alpha'(t) = -\beta(t)r'(t)/r(t)$ e assim

$$-(n+1)\frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}.$$

Integrando isto temos:

$$\begin{aligned} -(n+1)\ln r(t) &= \ln \beta(t) + C_1 \\ \ln(r^{-(n+1)}(t)) &= \ln(C_2\beta(t)) \\ r^{-(n+1)}(t) &= C_2\beta(t) \\ \frac{C_3}{r^{n+1}(t)} &= \beta(t), \end{aligned}$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes, obtendo assim (2.34). As equações (2.35) e (2.36) seguem substituindo (2.34) em (2.25) e (2.33) respectivamente. $\square$

Capítulo 3

Takahashi, Markvorsen e principais resultados

Nesse capítulo visitamos os clássicos teoremas de Takahashi e Markvorsen, em seguida expomos o resultado principal desse trabalho, um teorema do tipo Takahashi para subvariedades tipo-espaço em um espaço-tempo esférico FLRW arbitrário, que se estende para o teorema de Markvorsen.

3.1 Teorema de Takahashi

Uma fórmula que permite interpretar suposições geométricas em $\mathbf{H}$ em analíticas em Ψ é bastante conveniente. O seguinte resultado exerce essa função.

Teorema 35. [*Fórmula de Beltrami*] Dado uma imersão isométrica $\Psi : M^k \rightarrow \mathbb{R}_s^m$, onde M^k é uma variedade semi-Riemanniana, então

$$\Delta\Psi = k\mathbf{H} \tag{3.1}$$

onde, Ψ denota o campo vetorial posição, Δ o Laplaciano operado em M^k e $\mathbf{H}$ o campo vetorial curvatura média de Ψ .

Demonstração. Seja Ψ o campo vetorial posição e v um vetor qualquer em $\mathbb{R}_s^m$, então para $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \langle \Psi, v \rangle, X \rangle &= X \langle \Psi, v \rangle = \langle \nabla_X \Psi, v \rangle + \langle \Psi, \nabla_X v \rangle \\ &= \langle X, v \rangle. \end{aligned}$$

Assim $\nabla \langle \Psi, v \rangle = v^\top$. Tendo isso em mente, sejam $\{e_1, \dots, e_m\}$ e $\{E_i, \dots, E_k\}$ referen-



ciais ortonormais para $\mathbb{R}_s^m$ e M^k respectivamente, então

$$\begin{aligned}\Delta\langle\Psi, e_i\rangle &= \operatorname{div}_M(\nabla\langle\Psi, e_i\rangle) = \operatorname{div}_M(e_i^\top) \\ &= \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \langle \nabla_{E_j} e_i^\top, E_j \rangle = - \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \langle \nabla_{E_j} e_i^\perp, E_j \rangle.\end{aligned}$$

Como para todo $X \in \mathfrak{X}(M^k)$, $X\langle e_i, E_j \rangle = 0$ onde $i \in \{1, \dots, k\}$, temos pela compatibilidade da métrica que $\langle \nabla_X e_i, E_j \rangle = -\langle e_i, \nabla_X E_j \rangle$. Logo,

$$\Delta\langle\Psi, e_i\rangle = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \langle e_i^\perp, \nabla_{E_j} E_j \rangle.$$

Portanto $\Delta\langle\Psi, e_i\rangle = \langle e_i, k\mathbf{H} \rangle$, ou seja $\Delta\Psi = k\mathbf{H}$.

□

Definição 35. Uma variedade M^k é dita estacionária se $\mathbf{H} = 0$.

Com tal fórmula em mãos, podemos concluir, por exemplo, que M^k é estacionária se, e somente se, as componentes de Ψ são funções harmônicas em M^k . Da mesma forma, suposições em Ψ envolvendo Laplaciano também são traduzidas para condições em $\mathbf{H}$, por exemplo, o seguinte Teorema de Takahashi.

Teorema 36 (Takahashi). *Se uma imersão isométrica $\Psi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ de uma variedade Riemanniana M^n em um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+k+1}$ satisfaz*

$$\Delta_{M^k} \Psi + \lambda \Psi = 0 \tag{3.2}$$

para alguma constante $\lambda \neq 0$, então λ é necessariamente positivo, e Ψ realiza uma imersão estacionária em uma hipersuperfície $\mathbb{S}^{n+k}(\sqrt{n/\lambda})$ de raio $\sqrt{n/\lambda}$ em $\mathbb{R}^{n+k+1}$. Por outro lado, se Ψ realiza uma imersão isométrica em uma esfera de raio R em $\mathbb{R}^n$, então Ψ satisfaz (3.2) a menos de um deslocamento paralelo em $\mathbb{R}^{n+k+1}$ e $\lambda = n/R^2$.

Demonstração. Pelo Teorema 35, $\Delta\Psi = n\mathbf{H}$, logo $n\mathbf{H} = -\lambda\Psi$, donde concluímos que Ψ é normal a imersão. Observe que para todo $X \in TM^n$

$$X(\|\Psi\|^2) = X\langle\Psi, \Psi\rangle = 2\langle\bar{\nabla}_X \Psi, \Psi\rangle = \langle X, \Psi\rangle = 0,$$

ou seja, $\|\Psi\|$ é constante.

Tendo em mente que $\Delta\|\Psi\|^2 = \operatorname{Tr}(Hess\|\Psi\|^2)$ e $Hess\|\Psi\|^2 = \nabla(\nabla\|\Psi\|^2)$, segue-se após algumas manipulações que

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\|\Psi\|^2\right) = n + \langle\Delta\Psi, \Psi\rangle$$



assim

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\|\Psi\|^2\right) = n - \lambda\|\Psi\|^2.$$

Como $\|\Psi\|$ é constante, temos que

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\|\Psi\|^2\right) = 0 \Rightarrow n - \lambda\|\Psi\|^2 = 0.$$

Portanto $\|\Psi\| = (n/\lambda)^{1/2}$, provando assim que $\Psi(M^k) \subset \mathbb{S}^{m-1}(\sqrt{n/\lambda})$.

Agora vamos mostrar que a imersão $\Psi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+k+1}$ é mínima se, e somente se,

$$\Delta\Psi + \lambda\Psi = 0.$$

Sejam $p \in M^n$ e $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial local em uma vizinhança $U \subset M^n$ de p , geodésico em p . Assim, podemos completar esse referencial a um referencial adaptado $\{E_1, \dots, E_n, \dots, \nu_1, \dots, \nu_k\}$ para $\Psi(U)$, de modo que $\{E_1, \dots, E_n, \dots, \nu_1, \dots, \nu_k, \Psi\}$ é uma base ortonormal de $T_q\mathbb{R}^{n+k+1}$ para todo $q \in U$.

Denotaremos por $\nabla, \nabla^s, \nabla^r$ as conexões Riemannianas de $M^n, \mathbb{S}^{n+k+1}, \mathbb{R}^{n+k+1}$ e por II, II^s a segunda forma fundamental de $\Psi : M \rightarrow \mathbb{S}^{n+k+1}$ e $\Psi^s : \mathbb{S}^{n+k+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ respectivamente. Temos assim,

$$\begin{aligned} \Delta_{M^n}\Psi &= \left(\sum_{i=1}^n E_i E_i(\Psi_1), \dots, \sum_{i=1}^n E_i E_i(\Psi_{n+k+1}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i}^r \nabla_{E_i}^r \Psi \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$= \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i}^r E_i. \tag{3.4}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \nabla_{E_i}^r E_i &= (\nabla_{E_i}^r E_i)^\top + (\nabla_{E_i}^r E_i)^\perp = \nabla_{E_i}^s E_i + II^s(E_i, E_i) \\ &= \nabla_{E_i}^s E_i + \langle A_\Psi(E_i), E_i \rangle \Psi \\ &= \nabla_{E_i}^s E_i - \langle \nabla_{E_i}^r \Psi, E_i \rangle \Psi \\ &= \nabla_{E_i}^s E_i - \langle E_i, E_i \rangle \Psi. \end{aligned}$$

Como $\nabla_{E_i}^s E_i = II(E_i, E_i) + \nabla_{E_i} E_i$, teremos

$$\nabla_{E_i}^r E_i = II(E_i, E_i) + \nabla_{E_i} E_i - \langle E_i, E_i \rangle \Psi. \tag{3.5}$$

Sendo o referencial geodésico em M , temos $\nabla_{E_i} E_i = 0$. Substituindo 3.5 em 3.3, segue



a igualdade

$$\begin{aligned}\Delta_{M^n}\Psi &= \sum_{i=1}^n II(E_i, E_i) - \sum_{i=1}^n \langle E_i, E_i \rangle \Psi \\ &= n\mathbf{H} - n\Psi\end{aligned}$$

Portanto Ψ é mínima se, e somente se $\Delta_{M^n}\Psi = -n\Psi$.

□

A seguir faremos uma aplicação do teorema de Takahashi, mostrando que a superfície de Veronese é imersa minimamente de $\mathbb{S}^2(1/3)$ em $\mathbb{S}^4$. Antes disso, temos os seguintes resultados que são bem úteis para problemas semelhantes.

Lema 37. Seja $\psi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de variedades Riemannianas. Se $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então

$$\Delta_{\overline{M}}f = \Delta_M f - n\mathbf{H}(f) - (Hess_{\overline{M}}f)(N, N)$$

em cada $p \in M$, onde $\mathbf{H}$ é o vetor curvatura média da imersão e N é um campo unitário, normal a M em uma vizinhança de p .

Demonstração. Denote por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Levi-Civita de M e $\overline{M}$, respectivamente. Se $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = N\}$ é um referencial adaptado em uma vizinhança de $p \in M$ em $\overline{M}$, temos em p que

$$\begin{aligned}\Delta_M f &= \sum_{i=1}^{n+1} (e_i e_i(f) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)) \\ &= \sum_{i=1}^n \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f) - II(e_i, e_i)(f)\} + N(N(f)) - (\overline{\nabla}_N N)(f) \\ &= \Delta_M f - n\mathbf{H}(f) - (Hess_{\overline{M}}f)(N, N).\end{aligned}$$

□

Corolário 38. Seja $P : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $P(x) = \sum_{|i| \leq m} a_i x^i$, onde $i = (i_1, \dots, i_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, um polinômio harmônico, homogêneo de grau m em $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $f = P|_{\mathbb{S}^n}$, então

$$\Delta_{\mathbb{S}^n} f + \lambda f = 0,$$

onde $\lambda = k(k + n - 1)$.

Demonstração. Seja $x : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a imersão canônica. Desde que P é harmônico,



segue do Lema 37 que

$$0 = \Delta P = \Delta_{\mathbb{S}^n} f - nH(P) + HessP(x, x) \quad (3.6)$$

onde Δ é o Laplaciano e $Hess$ é o Hessiano de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja A seu operador forma em relação ao campo normal unitário $N = -x$, então, para um vetor v tangente à esfera, temos

$$A(v) = -(\bar{\nabla}_v N)^\top = (\bar{\nabla}_v x)^\top = v,$$

isto é, $A = Id$, onde Id denota o operador identidade. Portanto.

$$H(x) = \frac{1}{n}(tr A)N = -x.$$

Fazendo $\gamma(t) = (1+t)x$, obtemos

$$H(P) = -\frac{d}{dt}P((1+t)x)|_{t=0} = -\frac{d}{dt}(1+t)^k|_{t=0}P(x) = -kP(x) = kf(x). \quad (3.7)$$

Usando por fim o fato de P ser um polinômio homogêneo de grau k e escrevendo $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$, obtemos

$$HessP(x, x) = \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = k(k-1)f(x). \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) e (3.8) em (3.6) teremos que

$$0 = \Delta_{\mathbb{S}^n} f - nkf(x) + k(k-1)f(x)$$

ou seja, $\Delta_{\mathbb{S}^n} f = -k(k+n-1)f$. □

No caso em que P não é harmônico temos o seguinte Lema.

Lema 39. Seja $P : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $P(x) = \sum_{|i| \leq m} a_i x^i$, onde $i = (i_1, \dots, i_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Então, temos

$$\Delta P|_{\mathbb{S}^2} = - \sum_{|i| \leq m} |i|(n+|i|-1)a_i x^i + \Delta_0 P$$

onde $\Delta_0 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ denota o laplaciano em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. Consultar [16]. □

Agora podemos seguir para o exemplo,



Exemplo 19. A superfície de Veronese $\Psi : \mathbb{S}^2(\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{R}^5$ definida por

$$\Psi(x, y, z) = \left(\frac{xy}{\sqrt{3}}, \frac{xz}{\sqrt{3}}, \frac{yz}{\sqrt{3}}, \frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{3}}, \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{6} \right)$$

é uma imersão mínima de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ em $\mathbb{S}^4$. Para provar essa afirmação, inicialmente mostremos que Ψ é uma imersão isométrica. Veja que,

$$\begin{aligned} \Psi^*(dx_1^2 + \cdots + dx_5^2) &= d\left(\frac{xy}{\sqrt{3}}\right)^2 + d\left(\frac{xz}{\sqrt{3}}\right)^2 + d\left(\frac{yz}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ &\quad + d\left(\frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{3}}\right)^2 + d\left(\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{6}\right)^2. \end{aligned}$$

Derivando e desenvolvendo esses termos, obtemos

$$\begin{aligned} \Psi^*(dx_1^2 + \cdots + dx_5^2) &= \frac{y^2 dx^2 + 2xy dx dy + x^2 dy^2}{3} + \frac{z^2 dx^2 + 2xz dx dz + x^2 dz^2}{3} \\ &\quad + \frac{y^2 dz^2 + 2yz dy dz + z^2 dy^2}{3} + \frac{x^2 dx^2 - 2xy dx dy + y^2 dy^2}{3} \\ &\quad + \left(\frac{2x dx + 2y dy - 4z dz}{6} \right)^2. \end{aligned}$$

Como $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, temos

$$x dx + y dy + z dz = 0. \quad (3.9)$$

Podemos assim substituir $2x dx + 2y dy = -2z dz$ no último termo de Ψ^* , obtemos

$$\begin{aligned} \Psi^*(dx_1^2 + \cdots + dx_5^2) &= \frac{y^2 dx^2 + 2xy dx dy + x^2 dy^2}{3} + \frac{z^2 dx^2 + 2xz dx dz + x^2 dz^2}{3} \\ &\quad + \frac{y^2 dz^2 + 2yz dy dz + z^2 dy^2}{3} + \frac{x^2 dx^2 - 2xy dx dy + y^2 dy^2}{3} \\ &\quad + \frac{3z^2 dz^2}{3}. \end{aligned}$$

Reorganizando,

$$\begin{aligned} \Psi^*(dx_1^2 + \cdots + dx_5^2) &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)dx^2 + (x^2 + y^2 + z^2)dy^2 + (x^2 + y^2 + z^2)dz^2}{3} \\ &\quad + \frac{2xz dx dz + 2yz dy dz + 2z dz}{3} + \frac{x^2 dx^2 - 2xy dx dy + y^2 dy^2}{3} \\ &\quad + \frac{3z^2 dz^2}{3}. \end{aligned}$$



Colocando $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $2zdz$ em evidência e usando (3.9), obtemos

$$\begin{aligned}\Psi^*(dx_1^2 + \cdots + dx_5^2) &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{3} + \frac{2zdz(xdx + ydy + zdz)}{3} \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2\end{aligned}$$

Portanto, Ψ é uma imersão isométrica. Como as coordenadas de Ψ são polinômios harmônicos homogêneos de grau 2, pelo Corolário 38 temos que

$$\Delta_{\mathbb{S}^n(1)}\Psi|_{\mathbb{S}^n(1)} + 6\Psi|_{\mathbb{S}^n(1)} = 0. \quad (3.10)$$

Devemos encontrar uma equação semelhante, envolvendo $\Delta_{\mathbb{S}^2(\sqrt{3})}$. Para isso, considere a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ dada por $\varphi(u) = \sqrt{3}x(u)$, onde $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$ é dada por $x(u) = \left(\frac{2u}{1+|u|}, \frac{|u|^2-1}{1+|u|^2} \right)$, uma parametrização para $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$. Assim, os coeficientes da métrica induzida por φ e x satisfazem

$$g_{ij}^\varphi = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(\sqrt{3}x)}{\partial u_i}, \frac{\partial(\sqrt{3}x)}{\partial u_j} \right\rangle = 3 \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle = 3g_{ij}^x,$$

ou seja,

$$\det(g)^\varphi = 3^2 \det(g)^x \text{ e } g_\varphi^{ij} = \frac{1}{3} g_x^{ij}.$$

Denotando o Laplaciano de $\mathbb{S}^n(1)$ por Δ , usando a Proposição 11 temos

$$\begin{aligned}\Delta_{ds_\varphi^2} &= \frac{1}{\sqrt{g^\varphi}} \sum_{i,j}^n \partial_i \left(g_\varphi^{ij} \sqrt{g^\varphi} \partial_j \right) = \frac{1}{\sqrt{3^2 g^x}} \sum_{i,j}^n \partial_i \left(\frac{1}{3} g_x^{ij} \sqrt{3^2 g^x} \partial_j \right) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{g^x}} \sum_{i,j}^n \partial_i \left(g_x^{ij} \sqrt{g^x} \partial_j \right) \\ &= \frac{1}{3} \Delta_{ds_x^2} = \frac{1}{3} \Delta,\end{aligned}$$

onde $\Delta_{ds_\varphi^2}$ e $\Delta_{ds_x^2}$ são os laplacianos na métrica induzida por φ e x , respectivamente. Pela igualdade acima podemos escrever a equação (3.10) na forma

$$\Delta_{ds_\varphi^2} \Psi + 2\Psi = 0.$$

Como $d\Psi_1^2 + \cdots + d\Psi_5^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, temos que $\Delta_{ds_\Psi^2} = \Delta_{ds_\varphi^2}$. Logo,

$$\Delta_{ds_\Psi^2} \Psi + 2\Psi = 0.$$

Segue então do Teorema de Takahashi que Ψ é uma imersão mínima de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ em $\mathbb{S}^4$.



3.2 Teorema de Markvorsen

Uma extensão do teorema de Takahashi foi obtida por Markvorsen em 1989, mostrando assim, que o comportamento do Teorema de Takahashi pode ser elevado a cenários mais gerais, de uma imersão semi-Riemanniana em qualquer componente de qualquer esfera "generalizada", no espaço semi-Euclidiano $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$.

Teorema 40 (Markvorsen). *Se uma imersão isométrica $\Psi : M^k \rightarrow \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ de uma variedade semi-Riemanniana M^k em um espaço semi-Euclidiano $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ satisfaz*

$$\Delta\Psi + \lambda\Psi = 0 \quad (3.11)$$

para alguma constante $\lambda \neq 0$, então Ψ realiza uma imersão estacionária em

$$\mathcal{S}_\nu^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} : |\langle x, x \rangle| = r^2\},$$

onde $r = (\sqrt{k/|\lambda|})$ e $\text{sign } \lambda = \text{sign} \langle \Psi, \Psi \rangle$. Por outro lado, se Ψ realiza uma imersão isométrica estacionária em $\mathcal{S}_\nu^n(r)$, então Ψ satisfaz (3.11) a menos de um deslocamento paralelo em $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ e $\lambda = (k/r) \text{sign} \langle \Psi, \Psi \rangle$.

Demonstração. Analogamente às primeiras linhas da demonstração do Teorema de Takahashi, $\mathbf{H} = -\frac{\lambda}{k}\Psi$ e $\|\Psi\|$ é constante, assim

$$\langle \Psi, \Psi \rangle = \varepsilon_\Psi r^2.$$

onde $\varepsilon_\Psi = \text{sign} \langle \Psi, \Psi \rangle$. Portanto $\Psi(M^k) \subset \mathcal{S}_\nu^n(r)$.

Agora vamos provar que $r = (k/r) \text{sign} \langle \Psi, \Psi \rangle$. Definamos $\zeta = \frac{1}{2} \langle \Psi, \Psi \rangle$, e para todo campo V temos

$$\langle \nabla \zeta, V \rangle = V\zeta = V \frac{1}{2} \langle \Psi, \Psi \rangle = \langle \nabla_V \Psi, \Psi \rangle = \langle V, \Psi \rangle.$$

Pela arbitrariedade do campo vetorial V , $\nabla \zeta = \Psi$. Logo,

$$\text{Hess} \zeta(X, X) = \langle \nabla_X \nabla \zeta, X \rangle = \langle \nabla_X \Psi, X \rangle = \langle X, X \rangle$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= \sum_{i=1}^m \text{Hess} \zeta(X_i, X_i) + k \langle \text{grad} \zeta, \mathbf{H} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle X_i, X_i \rangle + k \langle \Psi, \mathbf{H} \rangle = k(1 + \langle \Psi, \mathbf{H} \rangle). \end{aligned}$$



Como Ψ é constante, $\Delta\Psi = 0$ pela igualdade acima, $\langle\Psi, \mathbf{H}\rangle = -1$. Logo $\langle\Psi, \frac{\lambda}{k}\Psi\rangle = +1$ e portanto $\frac{\lambda}{k}\varepsilon_p r^2 = +1$, ou seja $r = (k/r)\text{sign}\langle\Psi, \Psi\rangle$.

Para a recíproca do teorema, supondo que Ψ realiza uma imersão isométrica em $\mathcal{S}_\nu^n(r)$, defina II, II^s, II^{sr} como a segunda forma fundamental de $\Psi : M^k \rightarrow \mathbb{R}_\nu^{n+1}$, $\Psi^s : M^k \rightarrow \mathcal{S}^n$, $\Psi^{sr} : \mathcal{S}^n(r) \rightarrow \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ respectivamente. Então por (1.12) temos a formula de Gauss para Ψ^{sr} dada por

$$\nabla_V^r W = \nabla_V^s W + \varepsilon\langle A_U V, W\rangle U.$$

para todo $V, W \in TM$. Assim,

$$\nabla_V^r W - \nabla_V W = \nabla_V^s W - \nabla_V W + \varepsilon\langle A_U V, W\rangle U.$$

Portanto,

$$II(V, W) = II^s(V, W) + II^{sr}(V, W) \quad \text{para todo } V, W \in TM.$$

Consequentemente os campos vetoriais curvatura média $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}^s$ estão relacionados por

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^s + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i II^{sr}(X_i, X_i),$$

onde $\{X_i\}$ é uma base ortonormal do campo vetorial tangente a M^k . Agora como $\mathbf{H}$ é proporcional a Ψ que é perpendicular a $\mathcal{S}_\nu^n(r)$ obtemos $\mathbf{H}^s = 0$. $\square$

Exemplo 20. Seja $\Phi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^4 \subset \mathbb{L}^4$ uma imersão isométrica dada por

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}, \frac{2x}{1-x^2-y^2}, \frac{2y}{1-x^2-y^2}, 0 \right), \quad (3.12)$$

onde $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, munido da métrica Riemanniana

$$g = \begin{pmatrix} \frac{4}{1-x^2-y^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

é conhecido como disco de Poincaré.

Mostraremos que Φ realiza uma imersão estacionaria em $\mathbb{H}^4$. Calculando o laplaciano dessa aplicação.

$$\Delta\Phi = (\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2, \Delta\Phi_3, \Delta\Phi_4)$$



Usando a Proposição 11,

$$\Delta\Phi_k = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \left(\sum_{i,j} \sqrt{\det(g)} g^{ij} \frac{\partial\Phi_k}{\partial x_j} \right) \text{ onde } k= 1,2,3,4.$$

Logo,

$$\Delta\Phi_4 = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_1 &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2} \right) \right) \right) \\ &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4x}{(1-x^2-y^2)^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4y}{(1-x^2-y^2)^2} \right) \right) \\ &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \left(\frac{4(3x^2-y^2+1)}{(1-x^2-y^2)^3} + \frac{4(3y^2-x^2+1)}{(1-x^2-y^2)^3} \right) \\ &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \left(\frac{12x^2-4y^2+4+12y^2-4x^2+4}{(1-x^2-y^2)^3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{8x^2+8y^2+8}{1-x^2-y^2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_2 &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{1-x^2-y^2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{1-x^2-y^2} \right) \right) \right) \\ &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2(x^2-y^2+1)}{(1-x^2-y^2)^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2} \right) \right) \\ &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \left(\frac{4x(x^2+3-3y^2)}{(1-x^2-y^2)^3} + \frac{4x(3y^2-x^2+1)}{(1-x^2-y^2)^3} \right) \\ &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \left(\frac{16x}{(1-x^2-y^2)^3} \right) \\ &= 2 \left(\frac{2x}{1-x^2-y^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi_3 &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) \right) \right) \\
 &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4yx}{(1-x^2-y^2)^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2(1-x^2+y^2)}{(1-x^2-y^2)^2} \right) \right) \\
 &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \left(\frac{4y(3x^2-y^2+1)}{(1-x^2-y^2)^3} + \frac{4y(y^2+3-3y^2)}{(1-x^2-y^2)^3} \right) \\
 &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \left(\frac{16y}{(1-x^2-y^2)^3} \right) = 2 \left(\frac{2y}{1-x^2-y^2} \right).
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi &= 2 \left(\frac{2x}{1-x^2-y^2}, \frac{2y}{1-x^2-y^2}, \frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2} \right) \\
 &= 2\Phi.
 \end{aligned}$$

Pelo teorema de Markvorsen Φ realiza uma imersão estacionária em $\mathbb{H}^4$.

Como um caso particular de tal resultado temos o seguinte Corolário, para subvariedades no espaço-tempo Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^n$.

Corolário 41 (Markvorsen). Se uma imersão isométrica $\Psi : M^k \rightarrow \mathbb{L}^n$ de uma variedade Riemanniana M^k em um espaço-tempo Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^n$ é tal que

$$\Delta\Psi + \lambda\Psi = 0 \tag{3.13}$$

para alguma constante $\lambda > 0$, então Ψ realiza uma imersão estacionária tipo-espaço em um $(n-1)$ -dimensional, espaço-tempo De Sitter $\mathbb{S}_1^{n-1}(\sqrt{k/\lambda})$ de raio $(\sqrt{k/\lambda})$ em $\mathbb{L}^n$. Por outro lado, se Ψ realiza uma imersão estacionária tipo-espaço em $\mathbb{S}_1^{n-1}(R)$, então Ψ satisfaz (3.13) a menos de um deslocamento paralelo em $\mathbb{L}^n$ e $\lambda = k/R^2$.

Demonstração. Segue diretamente do teorema anterior fazendo as devidas adaptações. $\square$

3.3 Imersão estacionária tipo-espaço em $I \times_f \mathbb{S}^n$

Feito as considerações acima, agora estamos em condições de enunciar o resultado principal citado anteriormente. Primeiramente, seja $\Psi : M^k \rightarrow I \times_f \mathbb{S}^n$ uma imersão tipo espaço, identificaremos $\varphi \circ \Psi$ por Ψ , onde φ é o mergulho isométrico de $I \times_f \mathbb{S}^n$ em $Q(r)$ dado em (2.13) para uma função admissível r adequada.



Teorema 42. *Seja $\Psi : M^k \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^k em $\mathbb{L}^{n+2}$ satisfazendo*

$$\Delta\Psi + q_{\Psi_0}\mathbf{P} = 0 \quad (3.14)$$

onde $\mathbf{P}$ é um campo vetorial ao longo da imersão $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{n+1})$, dada por $\mathbf{P} = (r(\Psi_0)r'(\Psi_0), \Psi_1, \dots, \Psi_{n+1})$, e

$$q_{\Psi_0} = \frac{k - (r''(\Psi_0)r(\Psi_0) + r'(\Psi_0)^2 - 1)\|\nabla\Psi_0\|^2}{r(\Psi_0)^2(1 - r'(\Psi_0)^2)} \in C^\infty(M^k), \quad (3.15)$$

para alguma função admissível r com $q_{\Psi_0} > 0$. Então, Ψ realiza uma imersão tipo-espaço, estacionária em $Q(r)$. Por outro lado, se Ψ realiza, para alguma função admissível r com $q_{\Psi_0} > 0$, uma imersão estacionária tipo-espaço na hipersuperfície Lorentziana $Q(r)$ então a 3.14 é verdadeira.

Demonstração. Primeiramente mostraremos que para uma função admissível adequada, $\Psi(M^k) \subset Q(r)$. De fato, como

$$\Delta\Psi + q_{\Psi_0}\mathbf{P} = 0 \text{ e } \Delta\Psi = k\mathbf{H},$$

temos

$$k\mathbf{H} + q_{\Psi_0}\mathbf{P} = 0. \quad (3.16)$$

Isso implica que o campo vetorial $\mathbf{P}$ ao longo da imersão tipo-espaço $\Psi : M^k \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, é normal em todos os lugares.

Agora, a formula de Weingarten para $\Psi : M^k \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ e o campo vetorial normal $\mathbf{P}$ fornecem

$$\nabla_V^0 \mathbf{P} = -A_p(V) + \nabla_V^\perp \mathbf{P} \quad (3.17)$$

Calculamos o lado esquerdo de (3.17) para cada $V = (v_0, v_1, \dots, v_{n+1}) \in T_x M^k$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_V^0 \mathbf{P} &= V(r(\Psi_0)r'(\Psi_0))\partial_0 + \sum_{i=1}^{n+1} V(\Psi_i)\partial_i \\ &= \left([r'(\Psi_0(x))^2 + r(\Psi_0(x))r''(\Psi_0(x))]v_0, v_1, \dots, v_{n+1} \right) \\ &= \left([r'(\Psi_0(x))^2 + r(\Psi_0(x))r''(\Psi_0(x))]v_0 + v_0 - v_0, v_1, \dots, v_{n+1} \right) \\ &= V + v_0[r'(\Psi_0(x))^2 + r(\Psi_0(x))r''(\Psi_0(x)) - 1] \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\Psi(x)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por (3.17) temos

$$A_P(V) = -(\nabla_V^0 P)^\top,$$

por 3.18 concluimos,

$$\begin{aligned} A_P(V) &= -\left(V + v_0[r'(\Psi_0(x))^2 + r(\Psi_0(x))r''(\Psi_0(x)) - 1]\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\Psi(x)}\right)^\top \\ &= -Id(V) - [r'(\Psi_0(x))^2 + r(\Psi_0(x))r''(\Psi_0(x)) - 1]d\Psi_0(V)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\top \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por resultados anteriores, para cada $a \in \mathbb{L}^{n+2}$, temos o campo vetorial $a^\top = \nabla\langle\Psi, a\rangle \in \mathfrak{X}(M^k)$. Em particular,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\Psi(x)}\right)^\top = \nabla\langle\Psi, e_0\rangle = -\nabla\Psi_0. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.19) obtemos

$$A_{\mathbf{P}} = -Id + [r'(r'(\Psi_0)^2 + r(\Psi_0)r''(\Psi_0) - 1)]d\Psi_0 \oplus \nabla\Psi_0. \quad (3.21)$$

Portanto, para uma base ortonormal $\{E_i\}$ do campo vetorial tangente para M^k ,

$$\begin{aligned} Tr(A_{\mathbf{P}}) &= \sum_1^k \langle A_{\mathbf{P}}(E_i), E_i \rangle \\ &= -k + [r'(\Psi_0)^2 + r(\Psi_0)r''(\Psi_0) - 1] \sum_1^k \langle d\Psi_0 \oplus \nabla\Psi_0(E_i), E_i \rangle \\ &= -k + [r'(\Psi_0)^2 + r(\Psi_0)r''(\Psi_0) - 1] \sum_1^k \langle d\Psi_0(E_i) \nabla\Psi_0, E_i \rangle \\ &= -k + [r'(\Psi_0)^2 + r(\Psi_0)r''(\Psi_0) - 1] \sum_1^k d\Psi_0(E_i) \langle \nabla\Psi_0, E_i \rangle \\ &= -k + [r'(\Psi_0)^2 + r(\Psi_0)r''(\Psi_0) - 1] \|\nabla\Psi_0\|^2 \\ &= -\left(\frac{k - [r'(\Psi_0)^2 + r(\Psi_0)r''(\Psi_0) - 1] \|\nabla\Psi_0\|^2}{r(\Psi_0)^2(1 - r'(\Psi_0)^2)}\right) r(\Psi_0)^2(1 - r'(\Psi_0)^2) \\ &= -q_{\Psi_0} r(\Psi_0)^2(1 - r'(\Psi_0)^2), \end{aligned} \quad (3.22)$$

e por (3.16), temos

$$\begin{aligned}
 Tr(A_{\mathbf{H}}) &= \langle A_{\mathbf{H}}(E_i), E_i \rangle = \langle \alpha(E_i, E_i), \mathbf{H} \rangle = \left\langle \alpha(E_i, E_i), -\frac{q_{\Psi_0}}{k} \mathbf{P} \right\rangle \\
 &= -\frac{q_{\Psi_0}}{k} \langle \alpha(E_i, E_i), \mathbf{P} \rangle = -\frac{q_{\Psi_0}}{k} \sum_1^k \langle A_{\mathbf{P}}(E_i), E_i \rangle \\
 &= \frac{q_{\Psi_0}^2}{k} r(\Psi_0)^2 (1 - r'(\psi_0)^2).
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Note que

$$Tr(A_{\mathbf{H}}) = \langle \alpha(E_i, E_i), \mathbf{H} \rangle = k \|\mathbf{H}\|^2.$$

Assim por (3.23)

$$\|\mathbf{H}\|^2 = \frac{q_{\Psi_0}^2}{k^2} r(\Psi_0)^2 (1 - r'(\psi_0)^2). \tag{3.24}$$

Por outro lado, a fórmula (3.16) nos dá

$$\|\mathbf{H}\|^2 = \frac{q_{\Psi_0}^2}{k^2} \|\mathbf{P}\|^2 = \frac{q_{\Psi_0}^2}{k^2} \left(-r(\Psi_0)^2 r'(\Psi_0)^2 + \sum_{j=1}^{n+1} \Psi_j^2 \right). \tag{3.25}$$

As duas fórmulas acima, (3.24) e (3.25) implicam que

$$\sum_{j=1}^{n+1} \Psi_j^2 = r(\Psi_0)^2, \tag{3.26}$$

concluindo que $\Psi(M^k) \subset Q(r) \subset \mathbb{L}^{n+2}$.

Resta provar que $\Psi : M^k \rightarrow Q(r)$ é estacionária se, e somente se

$$\Delta \Psi + q_{\Psi_0} \mathbf{P} = 0. \tag{3.27}$$

Sejam II e II^Q a segunda forma fundamental de $\Psi : M^k \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ e $\Psi : M^k \rightarrow Q(r)$ respectivamente. De (2.22) e denotando ∇ a conexão de M^k , temos

$$\nabla_X^0 Y - \nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N,$$

logo,

$$II(X, Y) = II^Q(X, Y) + \langle AX, Y \rangle N,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M^k)$, onde N , é o campo vetorial normal unitário para $Q(r)$ em $\mathbb{L}^{n+2}$ e A corresponde ao operador de Weingarten (2.24). Consequentemente, os

respectivos campos vetoriais, curvatura média, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}^Q$ estão relacionadas por

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^Q + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \langle AE_i, E_i \rangle N.$$

Então $\mathbf{H}^Q = 0$ pelo Lema 29 se, e somente se

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \langle AE_i, E_i \rangle \right) N \\ &= \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \langle \alpha(t) E_i, E_i \rangle + \sum_{i=1}^k \left\langle \beta(t) \langle T(t, x), E_i \rangle T(t, x), E_i \right\rangle \right) N \\ &= \left(\frac{\alpha(t)}{k} \sum_{i=1}^k \langle E_i, E_i \rangle + \frac{\beta(t)}{k} \sum_{i=1}^k \langle T(t, x), E_i \rangle \sum_{i=1}^k \langle T(t, x), E_i \rangle \right) N \\ &= \left(\alpha(\Psi_0) + \frac{\beta(\Psi_0)}{k} \|T^\top\|^2 \right) N, \end{aligned}$$

onde $T^\top$ denota a componente tangente de T em M^k . Pela equação de Beltrami (3.1), temos

$$\Delta \Psi = \left(k\alpha(\Psi_0) + \beta(\Psi_0) \|T^\top\|^2 \right) N. \quad (3.28)$$

Agora, para qualquer referencial, ortonormal tangente $\{E_i\}$, temos

$$\begin{aligned} \|T^\top\| &= \sum_{i=1}^k \langle T(t, x), E_i \rangle \\ &= \frac{1}{1 - r'(\Psi_0)^2} \sum_{i=1}^k \left\langle \left(1, \frac{r'(\Psi_0)}{r(\Psi_0)} \Psi_1, \dots, \frac{r'(\Psi_0)}{r(\Psi_0)} \Psi_{n+1} \right), (E_i(\Psi_0), \dots, E_i(\Psi_{n+1})) \right\rangle \\ &= \frac{1}{1 - r'(\Psi_0)^2} \sum_{i=1}^k \left(-E_i(\Psi_0) + \frac{r'(\Psi_0)}{r(\Psi_0)} \Psi_1 E_i(\Psi_1) + \dots + \frac{r'(\Psi_0)}{r(\Psi_0)} \Psi_{n+1} E_i(\Psi_{n+1}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{1 - r'(\Psi_0)^2} \sum_{i=1}^k (-E_i(\Psi_0) + r'(\Psi_0)^2 E_i(\Psi_0))^2 \\ &= (1 - r'(\Psi_0)^2) \sum_{i=1}^k (E_i(\Psi_0))^2 \\ &= (1 - r'(\Psi_0)^2) \|\nabla \Psi_0\|^2. \end{aligned}$$

Dá expressão acima e a fórmula (2.25) obtemos

$$\begin{aligned}
 k\alpha(\Psi_0) + \beta(\Psi_0)\|T^\top\| &= \frac{-k}{r(\Psi_0)\sqrt{1-r'(\Psi_0)^2}} \\
 &\quad + \frac{r''(\Psi_0)r(\Psi_0) + r'(\Psi_0)^2 - 1}{r(\Psi_0)(1-r'(\Psi_0)^2)^{\frac{3}{2}}} (1-r'(\Psi_0)^2)\|\nabla\Psi_0\|^2 \\
 &= \frac{-k + (r''(\Psi_0)r(\Psi_0) + r'(\Psi_0)^2 - 1)\|\nabla\Psi_0\|^2}{r(\Psi_0)\sqrt{1-r'(\Psi_0)^2}},
 \end{aligned}$$

que permite reescrever o lado direito de (3.28) como

$$\begin{aligned}
 \Delta\Psi &= \left(k\alpha(\Psi_0) + \beta(\Psi_0)\|T^\top\|^2 \right) N \\
 &= \left(\frac{-k + (r''(\Psi_0)r(\Psi_0) + r'(\Psi_0)^2 - 1)\|\nabla\Psi_0\|^2}{r(\Psi_0)\sqrt{1-r'(\Psi_0)^2}} \right) N \\
 &= - \left(\frac{k - (r''(\Psi_0)r(\Psi_0) + r'(\Psi_0)^2 - 1)\|\nabla\Psi_0\|^2}{r(\Psi_0)^2(1-r'(\Psi_0)^2)} \right) (r'(\Psi_0)r(\Psi_0), \Psi_1, \dots, \Psi_{n+1}) \\
 &= -q_{\Psi_0}\mathbf{P}.
 \end{aligned}$$

Portando $\mathbf{H}^Q = 0$ se, e somente se

$$\Delta\Psi + q_{\Psi_0}\mathbf{P} = 0 \quad (3.29)$$

□

Observe que o teorema anterior nos fornece um sistema de equações diferenciais elípticas para as componentes da imersão tipo-espaço $\Psi : M^k \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$,

$$\begin{cases} \Delta\Psi_0 + q_{\Psi_0}r(\Psi_0)r'(\Psi_0) = 0 \\ \Delta\Psi_i + q_{\Psi_0}\Psi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \end{cases} \quad (3.30)$$

onde dado uma variedade Riemanniana M^k e uma função admissível $r(t)$, ao solucionar tal sistema encontramos a imersão estacionária que leva M^k em $Q(r)$.

Explorando q_{Ψ_0} , podemos procurar uma função admissível r tal que

$$r''(\Psi_0)r(\Psi_0) + r'(\Psi_0)^2 - 1 = 0.$$

Temos a seguinte EDO,

$$yy'' + (y')^2 = 1.$$

3.3. Imersão estacionária tipo-espaço em $I \times_f \mathbb{S}^n$



Usando os métodos de solução de EDO, encontramos

$$y^2 = (x^2 + Cx + C_1).$$

Tomando $C = 0$, temos

$$y^2 = (x^2 + C_1) \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + C_1}.$$

Assim sendo, $r(t) = \sqrt{t^2 + C_1}$ e $r'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + C_1}}$ quando $C_1 > 0$ claramente temos uma função admissível. Calculando q_{Ψ_0} para essa função r teremos

$$\begin{aligned} q_{\Psi_0} &= \frac{k}{(\Psi_0^2 + C_1)(1 - \frac{\Psi_0^2}{\Psi_0^2 + C_1})} \\ &= \frac{k}{\Psi_0^2 + C_1 - \Psi_0^2} \\ &= \frac{k}{C_1}. \end{aligned}$$

Logo, a função q_{Ψ_0} uma função constante. Observe também que o espaço $Q(r)$ será um De Sitter de raio $\sqrt{C_1}$.

Para $r(t) = \sqrt{t^2 + C_1}$, temos $\mathbf{P} = (\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{n+1})$, portanto a equação (3.14) acaba recaindo na expressão do Teorema de Markvorsen,

$$\Delta \Psi + \frac{k}{C_1} \Psi = 0.$$

Exemplo 21. Seja o espaço De Sitter $\mathbb{S}_1^2(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 \mid -x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, parametrizado pela aplicação $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por

$$\psi(u, t) = \left(u, \cos(t)\sqrt{1+u^2}, \sin(t)\sqrt{1+u^2} \right).$$

À procura de uma subvariedade tipo-espaço de $\mathbb{S}_1^2(1)$, tomemos o plano $\Pi : 2x - y - z = 0$ (Fig. 3.1) cujo vetor normal é $(2, -1, -1)$, um vetor tipo-tempo, implicando assim que o plano Π é tipo-espaço. Devemos determinar $\mathbb{S}_1^2(1) \cap \Pi$, pois claramente será uma subvariedade tipo-espaço de $\mathbb{S}_1^2(1)$.

Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal para Π . Se $p \in \Pi$ então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $p = ae_1 + be_2$, logo se p também pertence a $\mathbb{S}_1^2(1)$ então $\langle p, p \rangle = a^2 + b^2 = 1$. Portanto,

$$\alpha(t) = \cos(t)e_1 + \sin(t)e_2$$

é uma parametrização para $\Pi \cap \mathbb{S}_1^2(1)$.

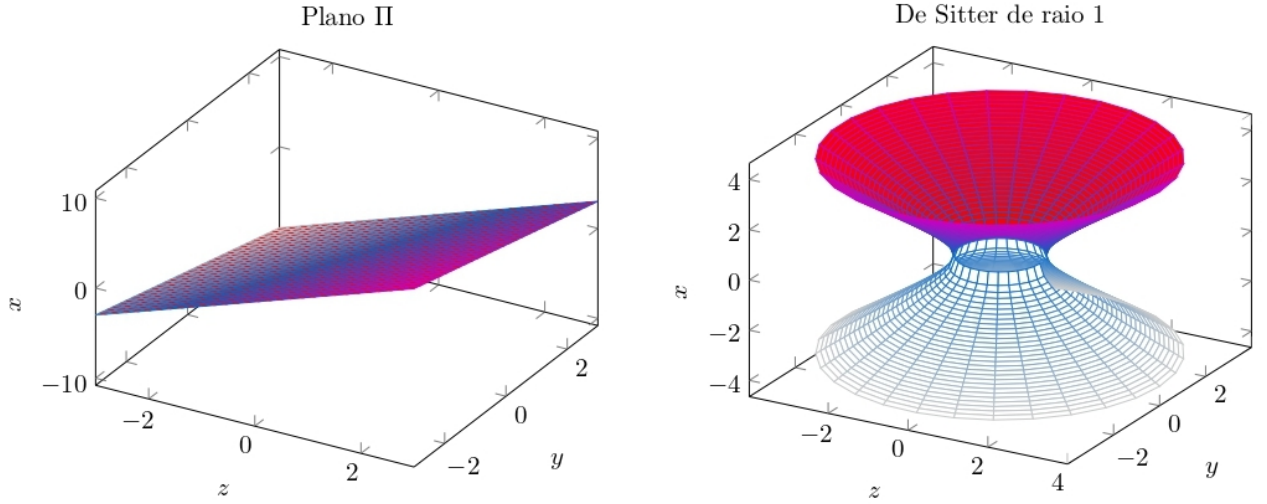


Figura 3.1: Gráficos, plano II e De Sitter de raio 1.

Note $\alpha'(t) = -\sin(t)e_1 + \cos(t)e_2$, assim

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1.$$

Portanto, $\alpha'(t)$ é tipo-espaço. Além disso, temos também que

$$\alpha''(t) = -\cos(t)e_1 - \sin(t)e_2 = -\alpha(t)$$

Implicando que $\alpha''(t)$ é normal a $\mathbb{S}_1^2(1)$, portanto $\alpha(t)$ é uma geodésica de $\mathbb{S}_1^2(1)$. Por $\alpha(t)$ ser tipo tempo, sua métrica é positiva definida. Tomando a curva $\alpha(t)$ no $\mathbb{R}^3$ definamos a aplicação $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{L}^3$ como a inclusão da curva $\alpha(t)$ do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{L}^3$. Como $\alpha'(t_0)$ é um referencial geodésico em $\alpha(t_0) = p$, teremos que

$$\Delta \Psi(\alpha(t)) = \alpha'(t)(\alpha'(t)(\Psi))(p) = \frac{d^2}{dt^2} \Psi(p) = \alpha''(t_0) = -\Psi.$$

Pelo teorema anterior, Ψ realiza uma imersão tipo-espaço estacionária em $Q(r)$ para $r(t) = \sqrt{1+t^2}$. Pelo exemplo 18, $Q(r)$ é isométrico $I \times_{\cosh(t)} \mathbb{S}$. Seja $\xi : Q(r) \rightarrow I \times_{\cosh(t)} \mathbb{S}^n$ essa isometria, então $\xi \circ \Psi$ é uma imersão tipo-espaço estacionária de $\alpha(t)$ em $I \times_{\cosh(t)} \mathbb{S}^n$.

Para determinar os vetores e_1, e_2 note que

$$u_1 = \left(1/\sqrt{3}, 0, 2/\sqrt{3}\right), u_2 = \left(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$$

uma base para Π , porém não é ortonormal. Usando o processo de ortogonalização de

3.3. Imersão estacionária tipo-espaço em $I \times_f \mathbb{S}^n$



Gram-Schmidt

$$v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^k \varepsilon_{v_i} \frac{\langle u_{k+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

onde $\varepsilon_{v_i} = \langle v_i, v_i \rangle$, tomando $v_1 = u_1$, logo em notação de matrizes

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Note que $\langle v_2, v_2 \rangle = \frac{1}{4}$. Normalizando v_2 temos a base ortonormal para o plano Π dada por

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Assim temos explicitamente que

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos(t) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(t), \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(t), \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(t) \right).$$

Graficamente temos,

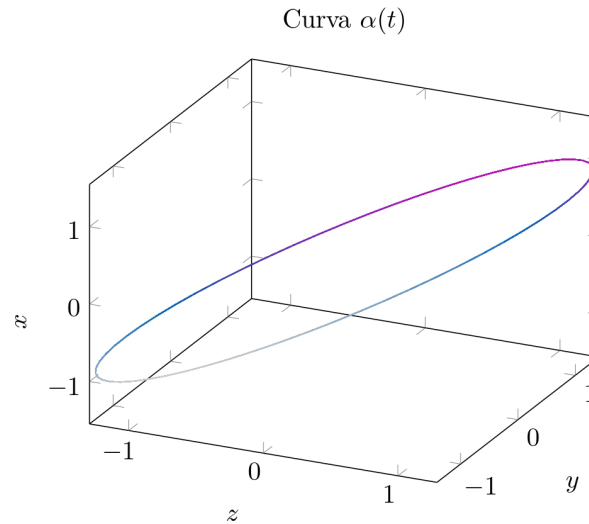


Figura 3.2: Curva $\alpha(t)$

Por $\alpha(t)$ ser uma curva tipo-espaço, sua métrica é Riemanniana.

Se tomarmos $r(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $Q(r)$ é isométrico ao espaço-tempo estático de Eintein $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$, consequentemente temos

Corolário 43. Uma imersão tipo espaço, $\Psi : M^k \rightarrow Q(1) \subset \mathbb{L}^{n+2}$ é estacionária se, e somente se

$$\Delta \Psi_0 = 0, \quad \Delta \Psi_i + (k + \|\nabla \Psi_0\|^2) \Psi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (3.31)$$

Como uma consequência imediata, as únicas subvariedades, compacta, estacionária e tipo-espaço em $Q(r)$ são as subvariedades compactas e estacionárias de uma fatia $\{t_0\} \times \mathbb{S}^n \equiv \mathbb{S}^n$.

Proposição 44. Dado uma imersão estacionária tipo-espaço $\Psi : M^k \rightarrow Q(r)$, se função $r(\Psi_0)^2$ sobre M^k atinge um valor máximo local em $x \in M^k$ então $q_{\Psi_0}(x) > 0$.

Demonstração. Temos pela definição que

$$q_{\Psi_0} = \frac{k - (r''(\Psi_0)r(\Psi_0) + r'(\Psi_0)^2 - 1)\|\nabla \Psi_0\|^2}{r(\Psi_0)^2(1 - r'(\Psi_0)^2)}. \quad (3.32)$$

Se $r(\Psi_0)^2$ atinge um valor máximo local em $x \in M^k$, então $2r(\Psi_0(x))r'(\Psi_0(x)) = 0$ e $r'(\Psi_0(x))^2 + r(\Psi_0(x))r''(\Psi_0(x)) < 0$. Portanto, $k - (r''(\Psi_0)r(\Psi_0) + r'(\Psi_0)^2 - 1)\|\nabla \Psi_0\|^2 > 0$, assim $q_{\Psi_0}(x) > 0$. $\square$

Bibliografia

- [1] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic press, 1983.
- [2] C. A. DAVID RIBEIRO, *Imersões isométricas em produtos Warped*, Tese de Doutorado, UFC 2019.
- [3] D. FERREIRA, E. A. LIMA, F. J. PALOMO, A. ROMERO, *A new approach to the study of spacelike submanifolds in a spherical Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker spacetime: characterization of the stationary spacelike submanifolds as an application*, J. Phys. A: Math., 2023.
- [4] F. F. SANTANA, *Identidades de Hsiung–Minkowski e Aplicações Geométricas*, Dissertação de Mestrado, UFMG 2012.
- [5] I. T. COUTO, *Topics in Lorentz Geometry*, Notas de aula, 2019.
- [6] I. T. COUTO, A. LYMBEROPOULOS, *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2018.
- [7] J. K. BEEM, P. E. EHRLICH, *Global Lorentzian Geometry*, Monographs and Text- books in Pure and Applied Mathematics, vol 202, 1996.
- [8] J. M. LEE, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2013.
- [9] L. C. EVANS, *Partial Defferential Equations*, American Mathematical Society, 1997.
- [10] M. M. AKBAR, *Embedding FLRW geometries in pseudo-Euclidean and anti-de Sitter spaces*, 2017.
- [11] M. P. DO CARMO, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [12] M. P. DO CARMO, *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática pura e aplicada, Berlin, 1970.



- [13] S. MARKVORSEN , *A Characteristic Eigenfunction for Minimal Hypersurfaces in Space Forms*, *Math Z.*, 202, (1989), pp. 375–382.
- [14] P. A. MULLER, *Teoria de comparação de volume na geometria de Lorentz*, Dissertação de Mestrado, UFSC 2020.
- [15] R. H SACHS, H WU, *General Relativity for Mathematicians* Graduate Texts in Mathematics vol 48, 1977.
- [16] R. N. RODRIGUES DA CUNHA , *Imersões isométrica e o teorema de Takahashi*, Dissertação de Mestrado, UFC 2014.
- [17] T. TAKAHASHI, *Minimal immersion of Riemannian manifolds*, *J. Math. Soc. Japan.*, 18 (1966), pp. 380–385.
- [18] W. KUHNEL, *Differential geometry : curves — surfaces - manifolds*, translated by Bruce Hunt, 2nd ed, 1950.