

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

José Erinaldo Martins

Modelos Para Geometria Hiperbólica

João Pessoa – PB

2011

José Erinaldo Martins

Modelos Para Geometria hiperbólica

Trabalho de conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para a obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Joaquim Rodrigues Feitosa.

João Pessoa – PB

2011

Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN
Catalogação na publicação

M379m Martins, José Erinaldo.

Modelos para geometria hiperbólica / José Erinaldo Martins,
João Pessoa, 2011.

43 p. -

Monografia (Licenciatura em Matemática a Distância) – UFPB
Orientador: Prof. Dr. Antônio Joaquim Rodrigues Feitosa.
Inclui referências.

1. Geometria. 2. Geometria Hiperbólica. I. Título.

CDU: 514(043.2)

BS/CCEN

José Erinaldo Martins

Modelos Para Geometria Hiperbólica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Joaquim Rodrigues Feitosa.

Aprovado em: ____/____/____

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio Joaquim Rodrigues Feitosa

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

Prof. Ms. João Batista Alves Parente

Dedicatória

Aos meus pais, por todo apoio,
que foi fundamental durante
todos esses anos.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, aos professores que fizeram parte desta caminhada acadêmica, e a todos os meus amigos do curso de Matemática e do curso de Química.

RESUMO

O presente trabalho traz uma breve descrição histórica da descoberta de um tipo de Geometria não euclidiana, a saber, a Geometria hiperbólica. Apresentando algumas de suas propriedades e modelos que se aplicam a esse tipo de Geometria.

Palavras-chaves: Geometria. Euclidiana. Postulado. Hiperbólica.

ABSTRACT

This work presents a brief historical description of the discovery of a type of non-Euclidean geometry, namely the hyperbolic geometry. Featuring some of their properties and that the models represent.

Keywords: Geometry. Euclidean. Postulate. Hyperbolic.

SUMÁRIO

Introdução.....	9
Capítulo 1	
Breve descrição histórica.....	11
Capítulo 2	
Descrição Matemática da Geometria hiperbólica.....	18
Capítulo 3	
Alguns modelos que se aplicam a Geometria hiperbólica.....	35
Considerações finais.....	39
Referências bibliográficas.....	41

INTRODUÇÃO

Este trabalho se insere no contexto do ensino e aprendizagem, especificamente, no campo das Geometrias não Euclidianas. O interesse por este tema surgiu ao longo do desenvolvimento do Curso de Graduação, Licenciatura em Matemática, fundamentado nos PCN,s para o ensino médio. Nesta descrição, procuramos refletir sobre o pensamento e as ideias originais dos precursores da construção do conhecimento geométrico, com base nas necessidades formalizadas nas possíveis motivações que levaram a tais preocupações legítimas.

O surgimento da Geometria está ligado a necessidades do cotidiano, como medição de terras e construções. Ao reunir todo o conhecimento geométrico existente até a sua época, colocando-o em um livro contendo treze volumes conhecido como os *Elementos*, Euclides fundamentou esses conhecimentos a partir de um conjunto de cinco axiomas, que são verdades aceitas naturalmente, isto é, que podem ser entendidas sem esforço do raciocínio e, portanto, sem necessidade de serem demonstradas. Tais saberes fundamentou a solução de problemas e se mostrou suficiente para o entendimento das ciências naturais até o século XIX, mas com a evolução do conhecimento surgiram várias concepções e alternativas à Geometria Euclidiana. E, como consequências de diferentes reconsiderações conceituais surgidas ao longo do século XX se solidificou o entendimento sobre as Geometrias não euclidianas. O principal motivo para esta mudança de paradigma foi à polêmica surgida em torno da validade do quinto postulado de Euclides, pois já na época em que Euclides apresentou os *Elementos* alguns estudiosos acreditavam que não se tratavam de um postulado e sim de uma proposição que poderia ser demonstrada a partir das quatro primeiras.

Durante vários séculos muitos matemáticos tentaram deduzir o quinto postulado de Euclides dos quatro primeiros, no entanto, o que muitos conseguiam eram afirmações equivalentes ao quinto postulado de Euclides, ou seja, afirmações que quando substituídas pelo quinto postulado desenvolvia uma Geometria que coincidia com a de Euclides.

Depois de várias tentativas sem sucesso, surgiram algumas suspeitas que pudessem existir Geometrias diferentes da euclidiana com o mesmo rigor lógico desta última. Essas suspeitas só foram confirmadas quando o matemático russo, Nikolay Ivanovich Lobachewsky, publicou um livro que apresentava um tipo de Geometria diferente da de Euclides e que era fundamentada na seguinte afirmação:

Postulado de Lobachewsky: *Dada uma reta e um ponto exterior a ela, existem pelos menos duas retas paralelas a reta dada passando pelo ponto exterior.*

Esse trabalho traz alguns aspectos que diferenciam essa Geometria, apresentando os seus principais idealizadores, e alguns resultados e modelos que se aplicam a esse tipo de Geometria não euclidiana. Exploramos alguns métodos de cálculos de áreas, distancias entre dois pontos e medidas de ângulos, possíveis de ser compreendidos ao nível de ensino médio.

Capítulo 1

BREVE DESCRIÇÃO HISTÓRICA

A origem da Geometria está intimamente ligada a situações do cotidiano relacionadas à agricultura e construções. Historicamente, os primeiros povos da antiguidade que iniciaram o estudo da Geometria foram os egípcios, babilônios e os gregos, aproximadamente por volta do século XX a.C.

Em meados do século III a.C. durante o reinado de Ptolomeu I, coube ao grego Euclides (325 – 265 a.C.) reunir todo o conhecimento matemático existente até então, reescrevendo-o em uma ordem lógica. Dessa forma surgiu os *Elementos*, que foi o primeiro tratado científico até aquela época, e serviu de modelo para todos os outros.



Euclides. Fonte: Wikipédia.

Ao escrever os *Elementos* Euclides considerou um conjunto de dez axiomas, que são verdades absolutas que não necessitam de demonstração, a partir dos quais toda a teoria geométrica foi deduzida. Esse conjunto de dez axiomas foi dividido em dois grupos, um contendo cinco noções comuns e o outro contendo cinco postulados, a saber:

Noções comuns:

- a) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
- b) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
- c) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- d) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
- e) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Postulados:

- 1) Pode-se traçar uma reta ligando quaisquer dois pontos distintos.
- 2) Pode-se continuar qualquer segmento de reta indefinidamente de maneira a obter uma reta.
- 3) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
- 4) Todos os ângulos retos são iguais.
- 5) É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

A partir desses dez axiomas, todas as proposições e teoremas da Geometria euclidiana foram demonstrados. Portanto, a Geometria euclidiana foi à primeira teoria axiomática a ser desenvolvida, e os *Elementos* era a fonte onde se encontrava toda essa teoria axiomática.

A obra de Euclides influenciou fortemente o mundo matemático, servindo inclusive como referência para grandes estudiosos dessa ciência. Ao ter causado tamanha influência, os *Elementos* tornou-se alvo de críticas, uma vez que, na época em que fora escrito, a Matemática não era rigorosa como a conhecemos hoje. Ao longo dos séculos que sucederam a publicação dos *Elementos* de Euclides, a Matemática foi ganhando forma e rigor, devido à contribuição de diversos matemáticos que marcaram seus nomes na história dessa ciência. Os *Elementos* foi sendo publicado e estudado em vários lugares longe da Grécia. No ano de 1899, o matemático alemão *David Hilbert* (1862-1943), apresentou uma de suas obras, *Fundamentos da Geometria*, onde fazia um estudo aprofundando dos *Elementos* de Euclides.

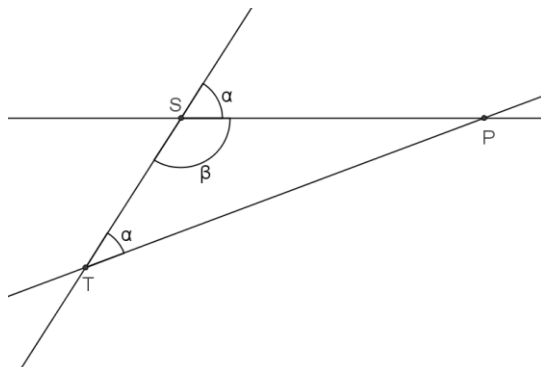
O ponto alvo das críticas dos *Elementos* era o quinto postulado. Já na época em que Euclides apresentou sua obra muitos olhavam o quinto postulado com desconfiança, uma vez que seu enunciado se diferenciava dos demais pelo seu tamanho e sua complexidade. Nos anos que sucederam a publicação dos *Elementos* foram muitas as tentativas de provar o quinto postulado a partir dos quatro primeiros.

E nessas inúmeras tentativas de provar o quinto postulado surgiu várias afirmações equivalentes a ele, que foram chamados de *substitutos*. Uma proposição era dita substituta do quinto postulado, quando fazendo uso dela juntamente com os quatros primeiros postulados seria possível desenvolver uma teoria que coincidia com a Geometria euclidiana. E mais, na teoria desenvolvida seria possível demonstrar o quinto postulado a partir dos quatro primeiros juntamente com a proposição substituta. Um dos postulados substitutos mais conhecidos é atribuído ao matemático escocês *John Playfair* (1748-1819):

Axioma de Playfair. *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.*

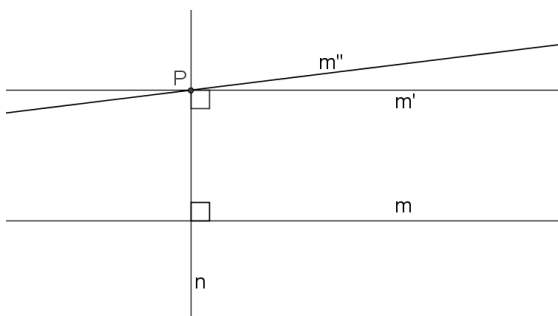
Prova. Para provar este resultado iremos utilizar a seguinte proposição:

Proposição: *Se uma reta corta duas outras formando ângulos correspondentes iguais, então, as duas retas são paralelas.*



Prova. Suponha que as retas não sejam paralelas. Assim, elas se encontrariam formando um triângulo com um ângulo externo igual a um ângulo não adjacente como na figura acima. E isto contraria o teorema do ângulo externo. Logo as retas são paralelas.

Voltemos à prova do axioma de Playfair. Seja m uma reta dada e P um ponto exterior a esta. Seja n a reta perpendicular a m passando pelo ponto P , como na figura abaixo.



A partir do ponto P trace a reta m' perpendicular à reta n . Pela proposição acima as retas m e m' são paralelas. Suponhamos agora que existe outra reta m'' paralela a m passando pelo ponto P . Esta reta formará um ângulo agudo com a reta n , logo pelo quinto postulado de Euclides m'' intercepta a reta m . O que é absurdo.

Muitos outros substitutos foram propostos, entre eles podemos destacar:

- 1) *A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.*
- 2) *Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último também é reto.*

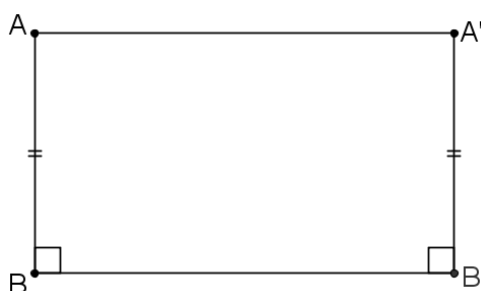
Estes e os outros substitutos serviram para mostrar a complexidade e a importância que envolvia o quinto postulado.

Suas consequências incluem as proposições mais conhecidas e mais utilizadas da Geometria. Sem ele, ou um de seus equivalentes, não teríamos o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, toda a teoria dos triângulos semelhantes e, conseqüentemente, a trigonometria, deixariam de existir, e o tratamento dado por Euclides para o conceito de área teria de ser amplamente revisto. (BARBOSA, 2002, p. 19).

As tentativas de demonstrar o quinto postulado continuaram, grandes matemáticos da história e alguns estudiosos tentaram sem sucesso demonstrá-lo. Nessas tentativas ou se admitia uma proposição equivalente ao quinto postulado ou as afirmações feitas não podiam ser provadas partindo dos quatro primeiros postulados.

Segundo relato de *Proclus* (410-485), que foi um dos muitos que tentaram demonstrar o quinto postulado, já na época de Euclides surgiram tentativas de provar o quinto postulado. O soberano grego *Ptolomeu I* que reinava no período em que Euclides apresentou os *Elementos*, escreveu um livro sobre o quinto postulado e nele continha uma tentativa de demonstração do mesmo.

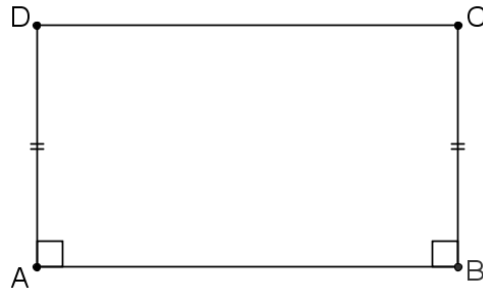
Os árabes tiveram uma grande contribuição nas descobertas matemáticas. E, alguns dentre aqueles estudiosos de matemática tentaram demonstrar o famoso postulado. Dentre esses, *Nasir-Edin* (1201-1274), que escreveu uma versão dos *Elementos* de Euclides em árabe, foi quem, em sua tentativa de demonstração, utilizou de uma figura que depois ficaria famosa com o nome de outro matemático. Esta figura era um quadrilátero, onde os ângulos da base eram retos e os lados adjacentes a esse ângulos retos eram congruentes.



Ele concluiu que os dois ângulos superiores também eram retos, e que a figura era um retângulo. Traçando uma diagonal, ele dividiu a figura acima em dois triângulos retângulos congruentes. Chegando à conclusão, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . E isto, como vimos anteriormente, é uma proposição equivalente ao quinto postulado de Euclides.

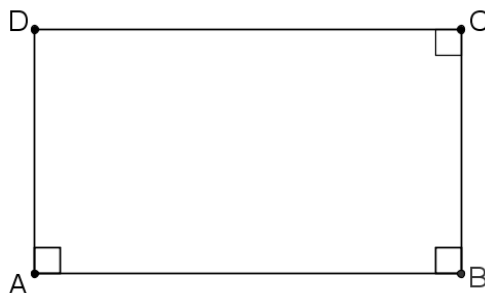
Outros matemáticos continuaram a incansável busca da demonstração do quinto postulado. No ano de 1889, foi encontrado um livro que havia sido publicado na cidade de Milão em 1733, pelo padre jesuíta *Girolamo Saccheri* (1667-1733) que havia tentado demonstrar o quinto postulado, substituindo-o por uma proposição que lhe fosse contraditória. Devido a este fato, Saccheri é considerado o precursor daqueles que viriam a descobrir as Geometrias não euclidianas. Em sua demonstração, Saccheri utilizou um quadrilátero ABCD que têm dois ângulos retos e dois lados congruentes. Nesse quadrilátero os lados congruentes

AD e BC são perpendiculares à base AB. Embora esse quadrilátero coincida com o do persa Nasir-Edin, ele ficou conhecido como o *quadrilátero de Saccheri*.



Outro matemático que conseguiu trilhar caminhos semelhantes aos de Saccheri foi *Johann Heinrich Lambert* (1728-1777) que escreveu um tratado sobre a teoria das paralelas, publicado depois de sua morte.

Assim como Saccheri, Lambert considerou um quadrilátero em sua demonstração. O *quadrilátero de Lambert* contém três ângulos retos.



Em seus estudos Lambert conseguiu muitos resultados importantes, conseguindo ir mais longe do que Saccheri em suas descobertas, escrevendo inclusive sobre triângulos em superfícies esféricas.

À medida que o tempo passava novas descobertas eram feitas a respeito de uma Geometria diferente da euclidiana.

No início do século XIX era considerável o avanço que se tinha alcançado com as tentativas de demonstrar o quinto postulado. O principal representante da Matemática nessa época era *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855). Como era de se esperar, Gauss, assim como Saccheri e Lambert, estava tentando uma demonstração por redução ao absurdo. Embora não tenha publicado nada a respeito, pelos documentos encontrados, entre eles, cartas enviadas a outros interessados no assunto, Gauss foi o primeiro a compreender que seria possível existir uma Geometria com estrutura lógica e diferente da euclidiana. A não publicação por parte de Gauss de algo relativo a essa teoria deve-se muito ao fato da igreja ter adotado a Geometria euclidiana como verdade única. Ao publicar suas ideias em relação a essa nova Geometria,

Gauss estaria confrontando o ideal que a igreja defendia, e em, tempos como aqueles, onde a Inquisição perseguia a todos que fossem contrários ao que a igreja pregava, isto seria o mesmo que cometer suicídio. Entre os matemáticos da época, com quem Gauss trocava correspondência a respeito do quinto postulado, merece destaque o húngaro *Wolfgang Bolyai* (1775-1856) que foi autor de um trabalho a respeito da teoria das paralelas e que continha uma demonstração equivocada do quinto postulado. Sua obra mais importante foi o *Tentamen*, livro que trazia como apêndice importantes descobertas sobre uma Geometria não euclidiana. Estas descobertas devem-se ao filho de Wolfgang, *Johann Bolyai* (1802-1860). Johann cresceu vendo seu pai tentar demonstrar o quinto postulado sem muito sucesso. Dessa forma, foi natural seu interesse em tentar conseguir aquilo que seu pai durante tanto tempo tentou e não havia obtido resultados concretos. Em meados de 1820, depois de alguns anos tentando demonstrar o quinto postulado, Johann começou a descobrir resultados que direcionava para uma Geometria geral que tinha a Geometria euclidiana como caso particular.

Ao admitir que existia mais de uma paralela passando por um ponto exterior a uma reta dada, Johann percebeu que a existência de duas dessas retas implicaria em uma infinidade delas. As proposições que surgiram a partir dessa observação não dependiam do quinto postulado e constituíram-se como a base de uma Geometria geral para o espaço.

Johann comentou com seu pai a respeito de suas descobertas, e ele sugeriu que esse trabalho fosse publicado como apêndice de seu livro *Tentamen*. A publicação só ocorreu em 1832. Como na Matemática algumas descobertas ocorrem em uma mesma época em diferentes partes do mundo, Johann teve que dividir sua descoberta com o russo *Nikolay Ivanovich Lobachewsky* (1793-1856). Lobachewsky publicou vários trabalhos a respeito dessa nova Geometria e suas conclusões relacionadas ao assunto foram publicadas em 1829. Nessa publicação, Lobachewsky sugeriu que, nesta nova Geometria, existia mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto, e a soma dos ângulos internos de um triângulo seria menor que dois ângulos retos. Por isso, Lobachewsky é considerado o pai dessa Geometria não euclidiana, que hoje é considerada como *Geometria hiperbólica*.

Depois do surgimento da Geometria hiperbólica a sociedade Matemática perguntava-se se seria possível existir outras Geometrias diferentes da euclidiana e da hiperbólica. Essa pergunta ficou sem resposta até o ano de 1851, quando o matemático alemão *Georg Bernhard Riemann* (1826-1866) no processo de admissão para professor-adjunto da Universidade de Göttingen, expôs em sua aula inaugural resultados que ele tinha descoberto ao negar o quinto postulado de Euclides. Essa Geometria é desenvolvida na superfície de uma esfera, e diferentemente da Geometria euclidiana, não existem retas paralelas, e a soma dos ângulos

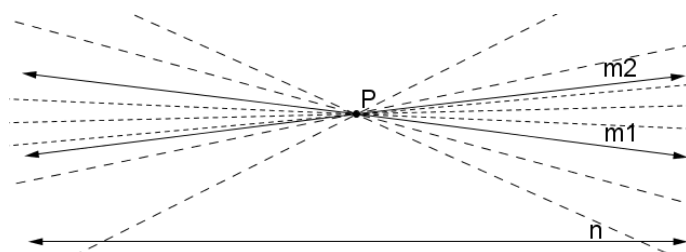
internos de um triângulo é maior que dois ângulos retos. Essa Geometria foi denominada de *Geometria de Riemann* em homenagem ao seu descobridor.

Capítulo 2

DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

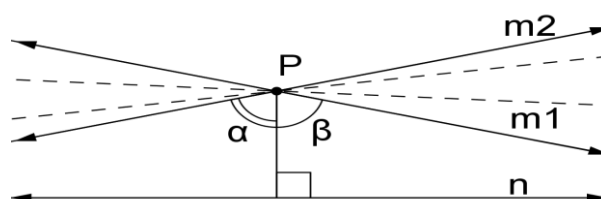
A Geometria hiperbólica é fundamentada em uma forma de substituir o quinto postulado de Euclides. Essa substituição do quinto postulado é conhecida como *Postulado de Lobachewsky*.

Postulado de Lobachewsky: “Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada”. (Barbosa, 2002, p.56).



Pelo postulado acima foi possível afirmar que existem duas retas m_1 e m_2 que passam por P , um ponto exterior a uma reta dada, e não encontram a reta dada n , essas duas retas m_1 e m_2 separam o conjunto de retas que interceptam a reta n , passando por P , do conjunto de retas que não interceptam a reta n . As retas m_1 e m_2 são chamadas de retas paralelas a n passando por P , e têm a particularidade de formarem ângulos α e β agudos com a perpendicular baixada de P em relação à reta n dada.

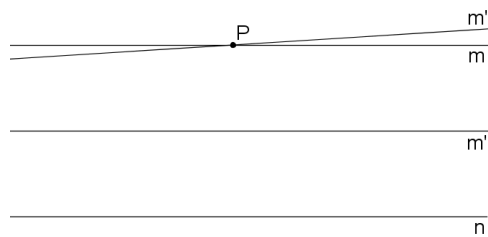
Por uma questão de simplificar alguns enunciados e demonstrações na Geometria hiperbólica fez-se necessário distinguir as duas retas paralelas uma da outra em relação à direção do paralelismo, denominando uma de reta paralela à direita e a outra de reta paralela à esquerda. Na figura anterior m_1 é a reta paralela à direita e m_2 é a reta paralela à esquerda. Dessa forma, dada uma reta e um ponto exterior qualquer, temos uma única reta paralela à direita e uma única reta paralela à esquerda.



Algumas propriedades das retas paralelas que valem na Geometria euclidiana continuam valendo na Geometria hiperbólica, tais como:

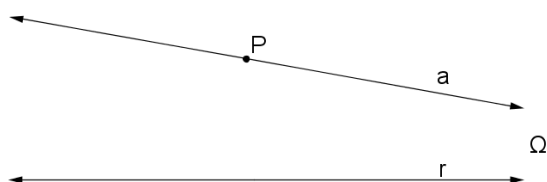
Consideremos as retas como na figura acima. Sejam m a reta que passa pelos pontos A e B , m' a reta que passa pelos pontos C e D e n a reta que passa pelos E e F , com m e m' paralelas à reta n na mesma direção. Suponhamos que o segmento AC seja perpendicular a CD . Considere ainda o ponto H situado no interior do ângulo $C\hat{A}B$ e seja u a reta que passa pelos pontos A e H . sendo m paralela a n , temos que u interceptará a reta que passa pelos pontos E e F em um ponto I . Trace o segmento CI . Usando o fato de que *se uma reta é paralela a uma segunda, então, a segunda é paralela a primeira* temos que a reta que passa pelos pontos E e F é paralela à reta que passa pelos pontos C e D . Dessa forma, a reta entra no ângulo $C\hat{I}F$ interceptará a reta que passa pelos pontos C e D . Logo, as retas m e m' são paralelas.

Consideremos agora o caso em que as duas retas m e m' estão do mesmo lado da reta n .

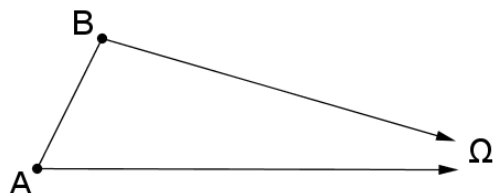


Suponhamos que m' seja a reta que encontra-se entre as retas m e n . Tome um ponto P em m . Considere a reta m'' passando pelo ponto P e paralela a m' na mesma direção do paralelismo entre m e n . Do que provamos na parte inicial temos que m'' é paralela a n . Sendo m paralela a reta n e como o paralelismo de m e m'' ocorre na mesma direção, temos que $m = m''$, pois, a reta paralela em um determinado sentido é única. Logo, as retas m e m' são paralelas.

Nas representações de figuras da Geometria hiperbólica, podemos perceber pontos que são imaginados com interseção de retas paralelas, são os chamados pontos ideais. “Na Geometria Hiperbólica duas retas paralelas não têm um ponto comum, porém se diz que se encontram num ponto ideal. Portanto, chama-se de ideal o ponto de encontro de duas retas paralelas”. (Coutinho, 2001, p. 47). Iremos denotar os pontos ideais por letras gregas maiúsculas como na figura abaixo.

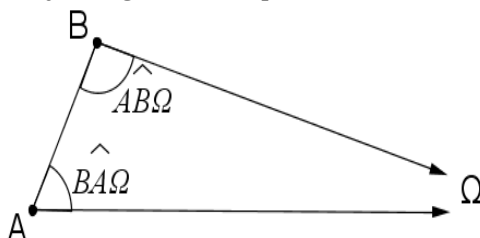


Sabemos que na Geometria euclidiana os triângulos são todos ordinários, ou seja, seus vértices são formados apenas por pontos ordinários. Na Geometria hiperbólica, além dos triângulos ordinários, temos também os *triângulos generalizados*, que são triângulos que contêm um, dois ou três pontos ideais em seus vértices.



De maneira semelhante aos triângulos ordinários, os triângulos generalizados dividem o plano em duas regiões, uma *interior* e outra *exterior*. A região interior é formada pelos pontos dos segmentos de reta cujas extremidades são dois pontos dos lados do triângulo generalizado. O complementar desta região é o exterior.

Considerando um triângulo generalizado $AB\Omega$ com apenas um vértice ideal, ou seja, A e B representam os vértices ordinários e Ω o vértice ideal, temos uma figura formada por um segmento AB e por duas semirretas paralelas cujas origens são os pontos A e B .



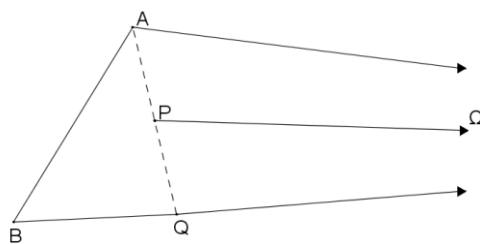
Como no triângulo $AB\Omega$, temos a interseção de duas semirretas paralelas com um segmento AB , é natural falarmos de ângulos *internos* e *externos* de um triângulo generalizado. No triângulo considerado acima $\hat{A}\hat{B}\Omega$ e $\hat{B}\hat{A}\Omega$ são os ângulos internos, e de maneira semelhante ao que ocorre com os triângulos ordinários, os ângulos externos serão os suplementos destes ângulos.

A partir da ideia de ângulo interno e externo, diremos que *dois triângulos generalizados* $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ são **congruentes** se existe uma correspondência entre seus vértices, de maneira que, os lados finitos se correspondam e sejam congruentes, e os ângulos correspondentes sejam iguais.

Dessa forma, para um triângulo generalizado $AB\Omega$ temos as seguintes propriedades:

Teorema 3. Se uma reta corta um triângulo generalizado $AB\Omega$ por um de seus vértices, então, ela intercepta o lado oposto a este vértice.

Prova. Considere o triângulo generalizado como na figura abaixo.



Se a reta penetra por um dos vértices A ou B ela interceptará o lado oposto, pois, as retas $A\Omega$ e $B\Omega$ são paralelas. Considere uma reta que vem do ponto Ω e passa por algum ponto P interior ao triângulo generalizado $AB\Omega$. Pelo paralelismo das retas $A\Omega$ e $B\Omega$, temos que a semirreta SAP intercepta a reta $B\Omega$ em algum ponto, digamos Q . Pelo Axioma de Pasch, a reta que vem do ponto ideal Ω e passa pelo ponto P interceptará um dos outros dois lados do triângulo ABQ . Tal reta deve interceptar o lado AB , pois do contrário ela coincidiria com o lado $B\Omega$.

Teorema 4. *Se uma reta corta um dos lados do triângulo generalizado $AB\Omega$ e não passa por nenhum de seus vértices, então, intercepta um e somente um dos outros dois lados.*

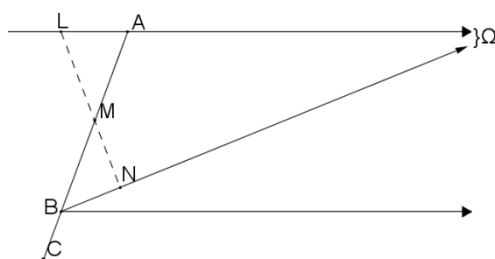
Prova. Suponha que a reta intercepte $A\Omega$, o caso em que a reta intercepta $B\Omega$ é feito inteiramente análogo. Sendo as semirretas $A\Omega$ e $B\Omega$ paralelas e pelo Axioma de Pasch, temos que a reta interceptará apenas um dos outros dois lados do triângulo generalizado $AB\Omega$. Se a reta intercepta o segmento AB em um ponto Q , basta considerar a semirreta $Q\Omega$ e utilizar o teorema anterior.

Para a demonstração do Teorema do Ângulo Externo para triângulo generalizado iremos considerar o seguinte resultado auxiliar:

As retas paralelas a n passando por P formam ângulos iguais com a perpendicular baixada de P à reta n . Além disto, o ângulo mencionado é agudo.

Teorema 5. (Teorema do Ângulo Externo). *Um ângulo externo de um triângulo generalizado $AB\Omega$ é sempre maior do que o interno que não lhe é adjacente.*

Prova. Seja $AB\Omega$ um triângulo generalizado. Seja C um ponto da semirreta S_{AB} tal que B encontra-se entre A e C , como na figura abaixo.



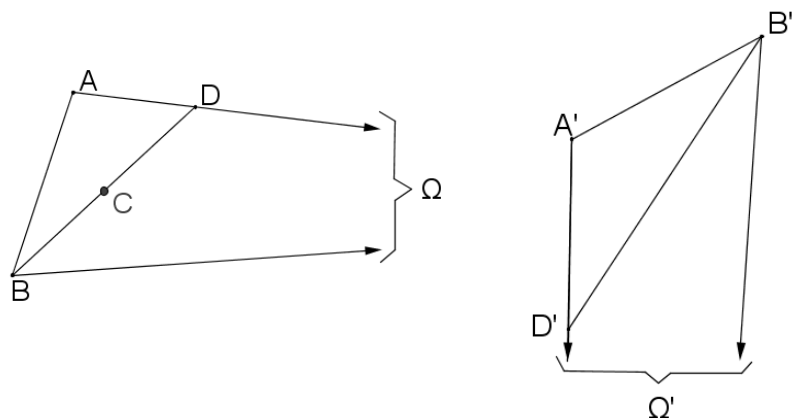
O ângulo $C\hat{B}\Omega$ é um dos ângulos externos do triângulo $AB\Omega$. Mostremos que $B\hat{A}\Omega < C\hat{B}\Omega$. Considere um ponto D e trace o segmento BD de maneira que $C\hat{B}D = B\hat{A}\Omega$. A reta que passa pelos B e D não intercepta $A\Omega$, pois do contrário formaria um triângulo com um de seus ângulos externo igual a um ângulo não adjacente. Dessa forma, o ponto D não pertence ao interior do triângulo $AB\Omega$. Se o ponto D ficar fora do triângulo $AB\Omega$ como na figura acima, o resultado fica provado. Suponha que D esteja sobre $B\Omega$. Seja M o ponto médio de AB . Seja N o pé da perpendicular baixada do ponto M à $B\Omega$. Considere um ponto L em $A\Omega$ tal que $LA = BN$ e que os L e N estejam em lados opostos da semirreta S_{AB} . Logo, os triângulos LAM e NBM são congruentes. Portanto, LN é uma perpendicular comum a $L\Omega$ e $N\Omega$. Isto contradiz o resultado auxiliar considerado acima, já que um desses ângulos deve ser agudo.

Para o caso de congruência de triângulos, temos:

Teorema 6. (Caso 1 de Congruência de Triângulos). Se $AB = A'B'$ e $B\hat{A}\Omega = B'\hat{A}'\Omega'$, então, $AB\Omega = A'B'\Omega'$.

Prova. Mostremos que $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$. Assim o resultado fica demonstrado pelo caso de congruência no triângulo ordinário. Suponhamos por absurdo que $A\hat{B}\Omega > A'\hat{B}'\Omega'$. Para o caso em que $A\hat{B}\Omega < A'\hat{B}'\Omega'$ é feito de maneira inteiramente análoga.

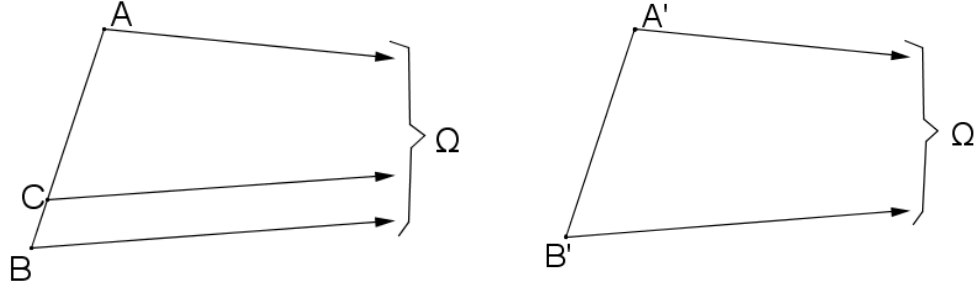
Tome uma semirreta S_{BC} de maneira que $A\hat{B}C = A'\hat{B}'\Omega'$. Esta semirreta penetra no ângulo $A\hat{B}\Omega$ como podemos perceber na figura abaixo.



Pelo teorema 3 acima, ela corta o lado $A\Omega$ em um ponto D . Considere um agora um ponto D' em $A'\Omega'$, de maneira que $A'D' = AD$. Como os triângulos ABD e $A'B'D'$ têm dois lados e um ângulo congruentes por construção, temos que $ABD = A'B'D'$.

Como consequência dessa congruência, $A'\hat{B}'D' = A\hat{B}D = A'\hat{B}'\Omega'$, o que é absurdo, pois, a semirreta $S_{B'D'}$ corta o triângulo $A'B'\Omega'$ no vértice B , sendo $A'\hat{B}'D' < A'\hat{B}'\Omega'$.

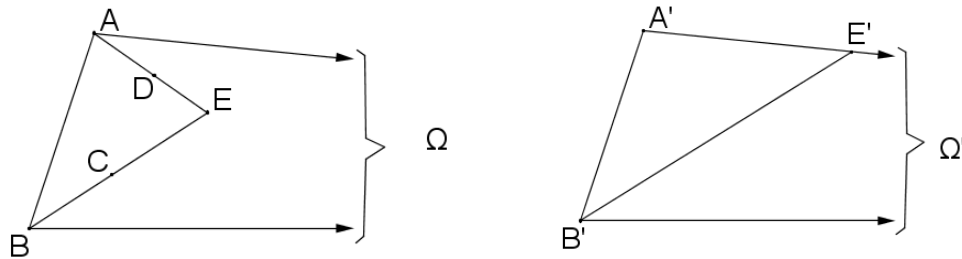
Teorema 7. (Caso 2 de Congruência de Triângulos). Se $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$ e $B\hat{A}\Omega = B'\hat{A}'\Omega'$, então, $AB\Omega = A'B'\Omega'$.



Prova. Mostremos que $AB = A'B'$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $AB > A'B'$. Considere um ponto C pertencente ao segmento AB , de maneira que $AC = A'B'$ como na figura acima. Considere a semirreta que tem origem no ponto C e passa pelo ponto ideal Ω . Pelo primeiro caso de congruência de triângulos generalizados, temos que $AC\Omega = A'B'\Omega'$. Dessa congruência, segue-se que $A\hat{C}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$. Por hipótese, $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$. Assim, o triângulo generalizado $CB\Omega$ possui um ângulo externo igual a um não adjacente. O que contraria o teorema do ângulo externo para triângulos generalizados.

Teorema 8. Se $AB = A'B'$, $A\hat{B}\Omega = B\hat{A}\Omega$ e $A'\hat{B}'\Omega' = B'\hat{A}'\Omega'$, então, $AB\Omega = A'B'\Omega'$.

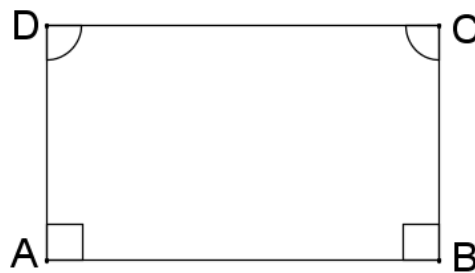
Prova. Basta mostrarmos que $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$. Suponhamos que a igualdade não ocorra. Sem perda de generalidade, podemos supor que $A\hat{B}\Omega > A'\hat{B}'\Omega'$. Construa os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{A}D$ de maneira que $A\hat{B}C = B\hat{A}D = A'\hat{B}'\Omega'$ como na figura abaixo.



Pelo teorema 3 e pelo Axioma de Pash, as semirretas S_{AD} e S_{BC} se interceptam em um ponto, digamos E , no interior do triângulo generalizado $AB\Omega$.

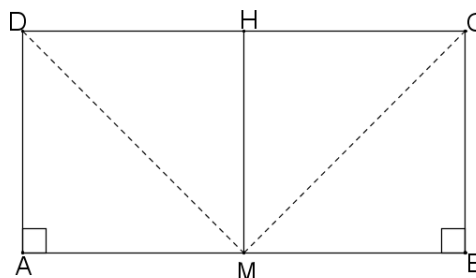
Considere um ponto E' no lado $A'\Omega'$ do triângulo generalizado $A'B'\Omega'$, de maneira que $AE = A'E'$. Por construção, segue que $ABE = A'B'E'$. Dessa congruência, temos que $A'\hat{B}'E' = A\hat{B}E$. Pela construção do ângulo $A\hat{B}C$, segue que $A\hat{B}E = A'\hat{B}'\Omega'$. Assim, o ponto E' deve pertencer à semirreta $B'\Omega'$, o que é absurdo.

Antes da descoberta de Lobachewsky e Johann Bolyai, dois matemáticos merecem destaque por ter conseguido alguns resultados que futuramente iriam fazer parte das Geometrias não euclidianas. Na tentativa de demonstrar o quinto postulado de Euclides, o jesuíta *Girolamo Saccheri* e o matemático alemão *Johann Heinrich Lambert* usaram dois quadriláteros que na Geometria euclidiana são retângulos, mas na Geometria hiperbólica possuem algumas características importantes. Os *quadriláteros de Saccheri* como são conhecidos, são quadriláteros $ABCD$ que têm dois lados congruentes e dois ângulos retos. O lado AB é a *base*, os lados AD e BC são os lados congruentes e ambos são perpendiculares à base AB , o lado DC é chamado o *topo* do quadrilátero e forma dois ângulos não retos com os lados congruentes, esses ângulos são chamados *ângulos do topo*.



Algumas propriedades são relacionadas a esses tipos especiais de quadriláteros na Geometria hiperbólica.

Teorema 10. *A reta ligando os pontos médios da base e do topo de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular ao topo e a base; os ângulos do topo são congruentes.*



Prova. Seja AB a base do quadrilátero de Saccheri $DABC$ como na figura acima. Sejam M e H os pontos médios da base e do topo, respectivamente. Trace os segmentos DM e CM . Temos que os triângulos DAM e CBM são congruentes, logo, $DM = CM$. Como os triângulos DMH e CMH têm um lado comum, temos que $DMH = CMH$. Assim o triângulo DMC é

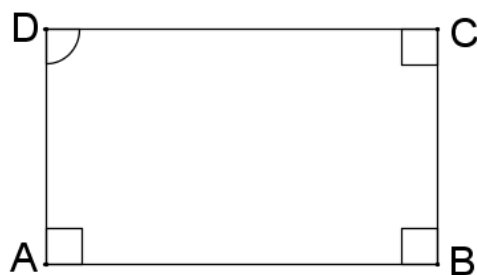
isósceles e, portanto, MH é perpendicular ao topo DC . Somando os ângulos em M temos que MH também é perpendicular à base AB . Somando os ângulos nos vértices C e D temos a igualdade dos ângulos do topo.

Teorema 11. *A base e o topo de um quadrilátero de Saccheri fazem parte de retas que não se interceptam.*

Este resultado segue como corolário do teorema 10.

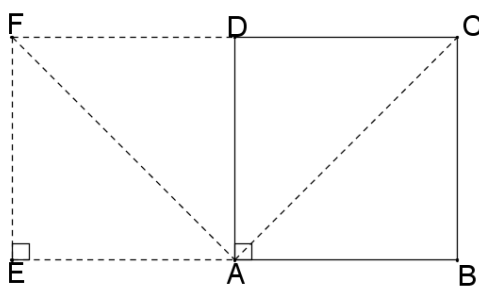
Teorema 12. *Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.¹*

Os quadriláteros $ABCD$ que têm três ângulos retos são conhecidos como *quadriláteros de Lambert*, o quarto ângulo do quadrilátero de Lambert é comumente conhecido como o *ângulo do quadrilátero de Lambert*.



AFIRMAÇÃO: *O ângulo de um quadrilátero de Lambert é sempre agudo.*

Prova. Seja $ABCD$ um quadrilátero de Lambert onde $\hat{A} = \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$. Considere um ponto E na semirreta S_{BA} tal que $EA = AB$. Considere um ponto F de maneira que o segmento FE seja congruente ao segmento BC e perpendicular a S_{BA} , como na figura abaixo.



Trace os segmentos FA , FD e AC . Por construção os triângulos FEA e CBA são congruentes. Como consequência temos que $FA = CA$. E, portanto, o triângulo FAC é isóscele. Sendo AD um lado comum aos triângulos FAD e CAD , segue-se que $FAD = CAD$. Portanto, o ângulo $\hat{ADF}$ é reto, e os pontos F , D e C estão sobre a mesma reta. Por construção, o quadrilátero $FEBC$ é um quadrilátero de Saccheri. E como havíamos mostrado anteriormente, o ângulo $\hat{BCD}$ é agudo.

¹ O leitor que estiver interessado pode consultar a prova deste resultado no livro *Geometria Hiperbólica* do autor João Lucas Marques Barbosa.

Teorema 13. *A soma dos ângulos de qualquer triângulo retângulo é menor do que dois ângulos retos.*

Teorema 14. *A soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor do que dois ângulos retos.*

A diagram of a triangle ABC with vertices A , B , and C . An altitude BD is drawn from vertex B to the base AC , meeting AC at point D . The altitude BD is perpendicular to the base AC , indicated by a right-angle symbol at D . The angles are labeled as follows: $\angle A = \gamma$, $\angle C = \beta$, $\angle ABD = \theta$, and $\angle CBD = \alpha$.

² Segundo o autor João Lucas Marques Barbosa esta é a prova original de Lobachewsky.

propriedade acima temos que a soma dos ângulos internos dos triângulos ADB e BDC são ambas menores que dois ângulos retos. Logo, a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é menor que 180° .

Teorema 15. *A soma dos ângulos de todo quadrilátero é menor do que quatro ângulos retos.*

Prova. Essa propriedade é uma consequência do resultado anterior.

Uma das propriedades da Geometria euclidiana é que duas retas que têm uma perpendicular em comum não se interceptam. Na Geometria hiperbólica a recíproca desta afirmação é válida, e se constitui uma das mais importantes de suas propriedades.

Teorema 16. *Duas retas que não se interceptam têm uma e somente uma perpendicular comum.*

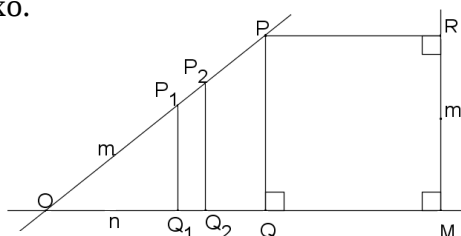
A prova deste resultado será omitida, uma vez que, necessita de definições e resultados que não foram abordados neste trabalho. O leitor que tiver interessado pode encontrá-la no livro *Geometria hiperbólica* do autor João Lucas Marques Barbosa.

Dadas duas retas m e n , podemos determinar a distância de um ponto qualquer de m a reta n . Para isto considere um ponto P em m e trace a perpendicular baixada de P a reta n . Seja o ponto Q o pé desta perpendicular, o comprimento do segmento PQ será a distância do ponto P a reta n .

Como na Geometria hiperbólica, se são dadas duas retas quaisquer temos três possíveis posições entre elas, a saber, retas que se interceptam, retas paralelas e retas que não se interceptam, temos três propriedades que relacionam as posições das retas com a distância de um ponto P percorrendo uma delas, a saber:

Teorema 17. *Sejam m e n retas concorrentes em um ponto O . Seja P um ponto de m . A distância do ponto P à reta n cresce quando P se desloca ao longo da reta m se afastando do ponto O , tornando-se maior do que qualquer comprimento prefixado. Esta distância decresce quando P se move na direção de O tornando-se menor do que qualquer número positivo prefixado.*

Prova. Sejam m e n duas retas concorrentes no ponto O . Tome P_1 e P_2 em m de maneira que P_1 pertença ao segmento OP_2 . Baixe as perpendiculares dos pontos P_1 e P_2 em relação à reta n . Sejam Q_1 e Q_2 os pés das perpendiculares baixadas dos P_1 e P_2 , respectivamente, como podemos ver na figura abaixo.



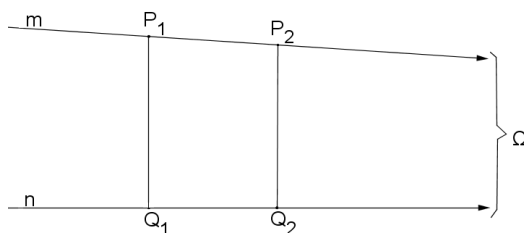
Assim o quadrilátero $P_1Q_1Q_2P_2$ têm ângulos retos nos vértices Q_1 e Q_2 , um ângulo obtuso em P_1 e um agudo em P_2 . Segue-se que $P_1Q_1 < P_2Q_2$. Logo, à medida que o ponto que percorre a reta m se afasta do ponto O essa distância aumenta, diminuindo quando o ponto variável aproxima-se do ponto O .

Considere o ângulo $P_1\hat{O}Q_1$ como sendo o ângulo de paralelismo que corresponde a uma determinada distância h . Tome um ponto M sobre a reta n de maneira que o comprimento de OM seja h . No ponto M trace uma reta m' perpendicular à reta n . Assim, as retas m e m' são paralelas.

Seja r um número positivo qualquer. Tome um ponto R em m' tal que o comprimento do segmento MR seja igual ao número r . Trace a perpendicular a reta m' passando pelo ponto R . Esta perpendicular a m' interceptará a reta m em um ponto P . Seja Q o pé da perpendicular baixada do ponto P à reta n . Temos que o quadrilátero de $PQMR$ é um quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no ponto P . Logo, $PQ > RM = r$.

Teorema 18. *Sejam m e n duas retas paralelas e P um ponto de m . A distância de P à reta n decresce quando P se move na direção do paralelismo, tornando-se menor do que qualquer número positivo prefixado. A distância cresce na direção oposta ao paralelismo, tornando-se maior do que qualquer valor prefixado.*

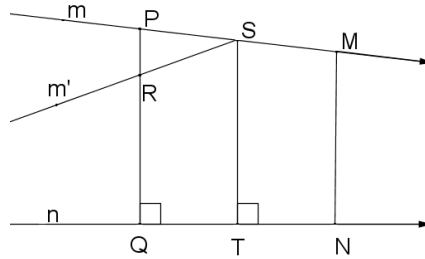
Prova. Sejam m e n duas retas paralelas e Ω o ponto ideal. Sejam P_1 e P_2 dois pontos de m . Baixe as perpendiculares dos pontos P_1 e P_2 à reta n . Sejam Q_1 e Q_2 os pés das perpendiculares baixadas dos pontos P_1 e P_2 em relação à reta n , respectivamente. Suponha que P_2 seja um ponto de $P_1\Omega$ como na figura abaixo.



Assim, Q_2 pertence à $P_1\Omega$ e o quadrilátero $P_1Q_1Q_2P_2$ têm ângulos retos nos vértices Q_1 e Q_2 , ângulo agudo em P_1 e ângulo agudo em P_2 , já P_2 encontra-se no lado do paralelismo entre m e n . Logo, $P_1Q_1 > P_2Q_2$.

Mostremos agora que a distância de um ponto de m em relação à reta n pode ser tão grande ou tão pequena quanto se queira, ou seja, vamos provar que dado qualquer número positivo r , existe um ponto R em m tal que a distância desse ponto à reta n é igual a r . Seja Q o pé da perpendicular baixada

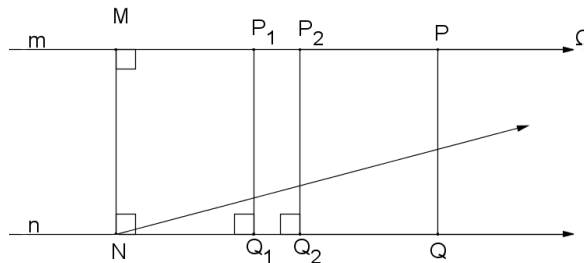
do ponto P à reta n . Se o comprimento do segmento PQ é igual a r , o ponto P é ponto procurado. Se não for, considere um ponto R em S_{PQ} tal que o comprimento do segmento RQ seja igual a r . Trace pelo ponto R a reta m' paralela à reta n na direção oposta do paralelismo entre as retas m e n , como podemos ver na figura abaixo.



Temos que a reta m' intercepta a reta m em um ponto S . Seja T o pé da perpendicular baixada do ponto S à reta n . Tome um ponto M em m e N em n de maneira que $SM = SR$ e $TQ = TN$. Ao compararmos os quadriláteros $STNM$ e $STQR$ podemos concluir que eles são congruentes, logo, $MN = RQ = r$ e o segmento MN é perpendicular à reta n . E neste caso, o ponto M é o ponto procurado.

Teorema 19. *Sejam m e n duas retas que não se interceptam e P um ponto de m . Seja MN o segmento da perpendicular comum com M pertencente à reta m e N um ponto da reta n . A distância de P à reta n cresce quando P se afasta do ponto M tornando-se maior do que qualquer valor prefixado, e decresce quando o ponto P se afasta de M até torna-se igual a MN quando $P = M$.*

Prova. Sejam m e n retas que não se interceptam. Pela propriedade P1) acima as retas m e n têm uma perpendicular. Seja MN essa perpendicular com M em m e N em n . Considere os pontos P_1 e P_2 pertencentes à reta m e situados do mesmo lado relativamente ao ponto M , de maneira que $MP_1 < MP_2$. Sejam Q_1 e Q_2 os pés das perpendiculares baixadas dos pontos P_1 e P_2 à reta n , respectivamente, como podemos ver na figura abaixo.



Temos que o quadrilátero MNQ_1P_1 é um quadrilátero de Lambert com ângulo agudo em P_1 . Portanto, $P_1Q_1 > MN$. Examinando o quadrilátero $P_1Q_1Q_2P_2$, temos que os ângulos em Q_1 e Q_2 são retos, o ângulo em P_1 é obtuso e o ângulo em P_2 é agudo, já que o quadrilátero

MQ_2P_2 é um quadrilátero de Lambert. Logo, $P_1Q_1 < P_2Q_2$. Assim, à medida que um ponto P da reta m se afasta de M sua distância em relação à reta n torna-se maior.

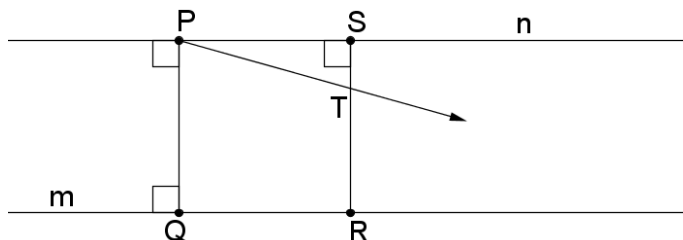
Seja Ω o ponto ideal da semirreta S_{MP1} . Considere a semirreta $N\Omega$. Assim, toda perpendicular baixada de um ponto de S_{MP1} à reta n , interceptará $N\Omega$. Portanto, usando o teorema 17 acima, segue-se que a distância de um ponto de m é maior quando este ponto afasta de M .

Das propriedades acima constatamos que, diferentemente da Geometria euclidiana, na Geometria hiperbólica retas paralelas não são equidistantes.

Uma pergunta natural que poderia surgir ao estudar essa Geometria seria: Dada uma reta m e um ponto P fora desta, é possível construir uma paralela a m passando por P ?

A resposta a essa pergunta está na seguinte propriedade:

Teorema 20. *Trace a perpendicular PQ do ponto P à reta m . Marque, agora, na reta m , um ponto R diferente do ponto Q . Trace a reta n perpendicular ao segmento PQ passando pelo ponto P . Trace, em seguida, a perpendicular RS do ponto R à reta n . Formamos, assim, um quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no ponto R . Com P como centro e raio igual à QR , trace um círculo. Este interceptará o segmento RS em um ponto T . A reta que passa por P e T é uma das paralelas à reta m passando pelo ponto P . A outra pode ser construída de forma análoga, escolhendo-se o ponto R do outro lado do ponto Q .*



A demonstração deste resultado necessita de resultados que não foram abordados neste trabalho.

Passaremos agora a discutir questões relacionadas à noção de área. Sabemos que na Geometria euclidiana a noção de área inicia-se relacionando a cada triângulo um número não negativo. Estando bem definida, esta função associa a triângulos congruentes o mesmo número, ou seja, triângulos congruentes têm mesma área.

A obtenção da área de um polígono qualquer, é feita subdividindo-o em triângulos, de maneira que a área do polígono é igual à soma das áreas dos triângulos que fazem parte da subdivisão.

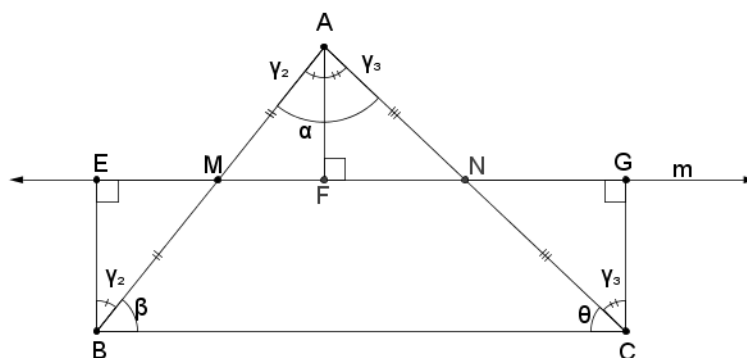
Na geometria hiperbólica a noção de área é construída de modo semelhante ao que ocorre na Geometria euclidiana. Para que esta definição seja consistente, faz-se necessário provar que o valor da área do polígono é o mesmo independente de como fazemos a subdivisão do polígono em triângulos. Iremos apenas admitir este resultado, uma vez que sua demonstração está acima do nível deste trabalho.

Vejam agora uma construção que será importante na demonstração de um resultado posteriormente.

Se considerarmos um triângulo ABC qualquer, podemos associar a ele um quadrilátero de Saccheri, de maneira que a área do quadrilátero é a mesma do triângulo. Para a construção do quadrilátero, consideremos inicialmente os pontos médios dos lados AB e AC como sendo os pontos M e N , respectivamente. Seja m a reta que passa por M e N .

Sejam E , F e G , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas dos pontos B , A e C relativamente à reta m . Como os triângulos BEM e AFM , têm dois ângulos e um lado congruentes, temos que $BEM = AFM$.

De modo semelhante, $AFN = CGN$. Da congruência desses triângulos, segue que $EB = AF = CG$. Assim, o quadrilátero $BEGC$, é um quadrilátero de Saccheri, já que $BE = CG$ e ambos os lados são por construção perpendiculares a base EG , como podemos ver na figura abaixo.



$BEGC$ será denominado de *quadrilátero associado ao triângulo*, e terá área igual ao triângulo ABC .

Precisaremos agora de uma definição que será importante na obtenção da área de um triângulo. Sabemos que na Geometria euclidiana a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Tal fato não ocorre na Geometria hiperbólica, uma vez que como foi visto anteriormente essa soma é menor que dois ângulos retos. Assim, ficou definido na Geometria hiperbólica como *defeito* do triângulo a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos seus ângulos internos. No caso dos quadriláteros e dos polígonos em geral, o defeito é definido

como a diferença entre o valor que a soma dos ângulos internos assume na Geometria euclidiana e a real soma desses ângulos internos.

Destas definições decorre a seguinte afirmação.

AFIRMAÇÃO: Um triângulo qualquer e o quadrilátero de Saccheri associado possuem o mesmo defeito.

Prova: Para facilitar a demonstração, consideremos o triângulo ABC e o quadrilátero de Saccheri $BEGC$ a ele associado como na figura anterior. Seja η o defeito de ABC e η_1 o defeito de $BEGC$, mostremos que $\eta = \eta_1$. Da congruência dos triângulos $BEM = AFM$ e $AFN = CGN$ segue que $\alpha = \gamma_2 + \gamma_3$. Como os ângulos cujos vértices são os pontos E e G são retos, e sendo o ângulo cujo vértice é o ponto B igual a $\beta + \gamma_2$ e o ângulo do vértice C igual a $\theta + \gamma_3$, temos que:

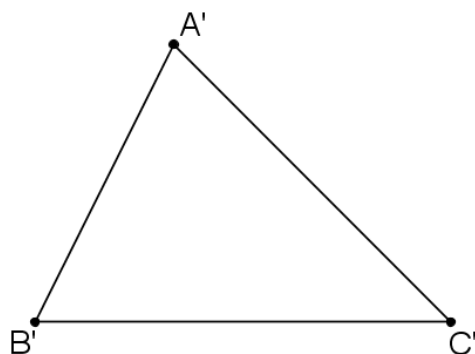
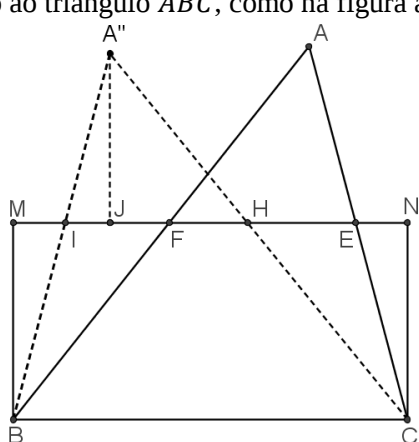
$$\eta_1 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \beta - \gamma_2 - \theta - \gamma_3 = 180^\circ - (\gamma_2 + \gamma_3) - \beta - \theta = 180^\circ - \alpha - \beta - \theta = \eta.$$

Da afirmação acima temos duas propriedades que relacionam o defeito de um triângulo com sua área. Para demonstrar tais propriedades necessitaremos do seguinte resultado auxiliar:

Dados dois triângulos, se eles têm o mesmo defeito e, se um lado de um é congruente a um lado do outro, eles possuem a mesma área.

Teorema 21. *Dois triângulos que têm o mesmo defeito têm a mesma área.*

Prova. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos com o mesmo defeito. Se algum dos lados do triângulo ABC for congruente a algum dos lados de $A'B'C'$ usando a propriedade acima temos que eles têm a mesma área. Suponha que $A'C' > AC$. A partir do lado BC construa o quadrilátero de Saccheri associado ao triângulo ABC , como na figura abaixo.



Seja m a reta que contém a base do quadrilátero de Saccheri associado ao triângulo ABC . Considere um ponto H em m tal que o comprimento do segmento HC seja igual à metade do

comprimento de $A'C'$. Tome agora o ponto A'' na semirreta S_{CH} tal que $A''C = A'C'$. Assim, H é ponto médio de $A''C$. Trace a reta passando pelos pontos H e I , onde I é ponto médio de $A''B$. Pelos casos de congruência de triângulos retângulos, segue-se que $A''JI = BMI$ e $A''JH = CNH$. Logo o triângulo $A''BC$ tem sobre o lado BC , o mesmo quadrilátero de Saccheri que o triângulo ABC . Logo, pela afirmação provada anteriormente eles possuem o mesmo defeito. Como os triângulos ABC e $A''BC$ tem o lado BC em comum, pelo resultado auxiliar eles possuem a mesma área. Sendo $A''C = A'C'$, pelo mesmo raciocínio segue-se que os triângulos $A''BC$ e $A'B'C'$ possuem a mesma área. Logo, o mesmo acontece com os triângulos ABC e $A'B'C'$.

Seja ABC um triângulo qualquer. Se subdividirmos esse triângulo em dois por uma transversal, a soma dos defeitos dos dois triângulos será igual ao defeito do triângulo original. De forma mais geral, se fizermos essa subdivisão em um número finito de triângulos a soma dos defeitos dos triângulos que fazem parte da subdivisão será igual ao defeito do triângulo original ABC . E mais, se essa subdivisão for feita com triângulos de qualquer forma, a partição resultante pode sempre ser transformada em uma partição por transversais, desde que sejam adicionados alguns segmentos. De forma que, o defeito do triângulo será igual à soma dos defeitos dos triângulos da partição. Como consequência disto, temos o seguinte resultado.

Teorema 22. *Dois triângulos que possuem a mesma área têm o mesmo defeito.*

De uma forma geral a área de um triângulo pode ser obtida a partir da seguinte equação:

$$\text{Área do triângulo } ABC = c^2(\text{defeito do triângulo})$$

A constante positiva c , é escolhida de maneira que um triângulo particular tenha área igual a um.

Para a área de um polígono qualquer, temos:

$$\text{Área do polígono} = c^2(\text{defeito do polígono})$$

Das duas equações descritas anteriormente, podemos perceber que a função área e a função defeito são múltiplas.

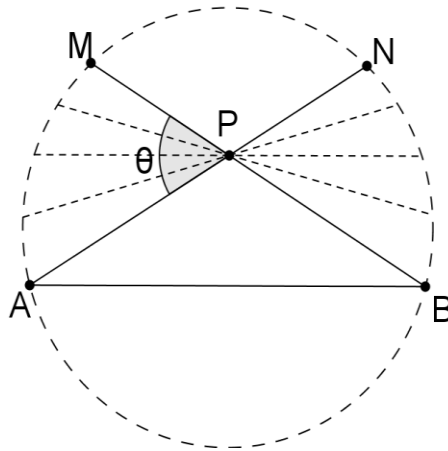
Vale ressaltar que a obtenção das duas fórmulas para o cálculo de áreas de triângulos e quadriláteros deve-se ao grande matemático Gauss, que muito contribuiu para o desenvolvimento da Geometria hiperbólica.

Capítulo 3

ALGUNS MODELOS QUE SE APLICAM A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Inicialmente vejamos o modelo plano apresentado pelo matemático alemão *Felix Christian Klein* (1849-1925):

Para o modelo de Klein toma-se no plano euclidiano um círculo cuja fronteira é desconsiderada, ou seja, considera-se apenas a região interior ao círculo, tal região será o *plano de Lobachewsky*.

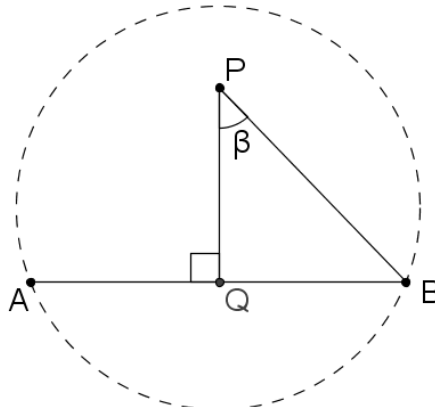


Como se pode ver na figura acima, as retas do plano de Lobachewsky são consideradas excluindo suas extremidades, ou seja, as retas PA e PB são paralelas à reta AB . Temos infinitas retas passando por P situadas no interior do ângulo θ . Essas são as retas não secantes à AB .

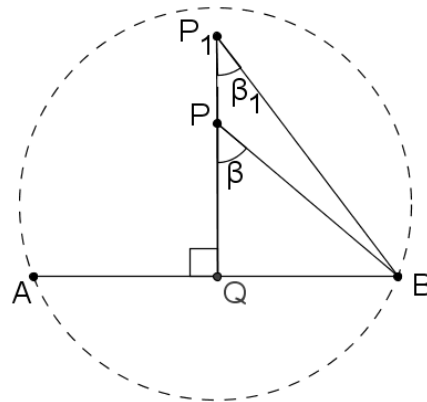
Para que as retas do plano de Lobachewsky tenham uma extensão infinita, considera-se uma unidade de medida variável, isto é, seu tamanho diminui na proporção que a reta se aproxima da fronteira do círculo.

Do modelo de Klein, podemos extrair algumas consequências dessa Geometria:

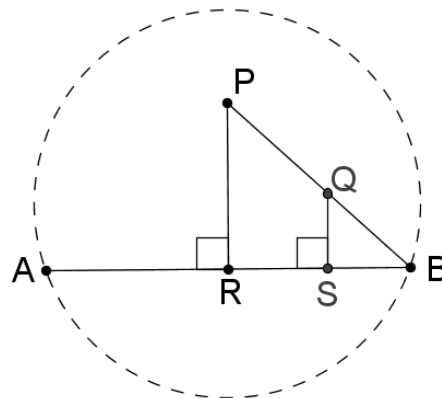
Propriedade 1. *Baixando a perpendicular PQ a reta AB temos que o ângulo β que a reta PB forma com a perpendicular a AB é menor que 90° . Tal ângulo é denominado **ângulo de paralelismo**.*



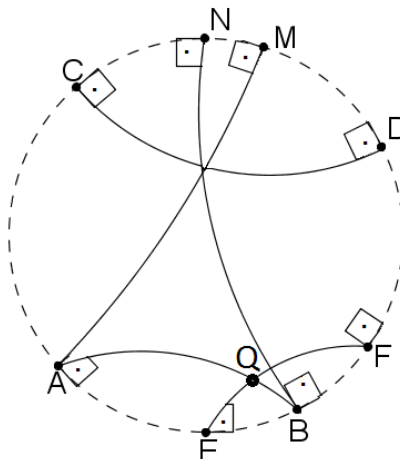
Propriedade 2. O ângulo de paralelismo depende da distância do ponto P à reta AB , ou seja, se a distância de P a AB aumenta o ângulo de paralelismo diminui.



Propriedade 3. Duas retas distintas e perpendiculares a AB formam um quadrilátero $PRSQ$, que será o “retângulo” da Geometria hiperbólica, como se pode ver na figura abaixo.



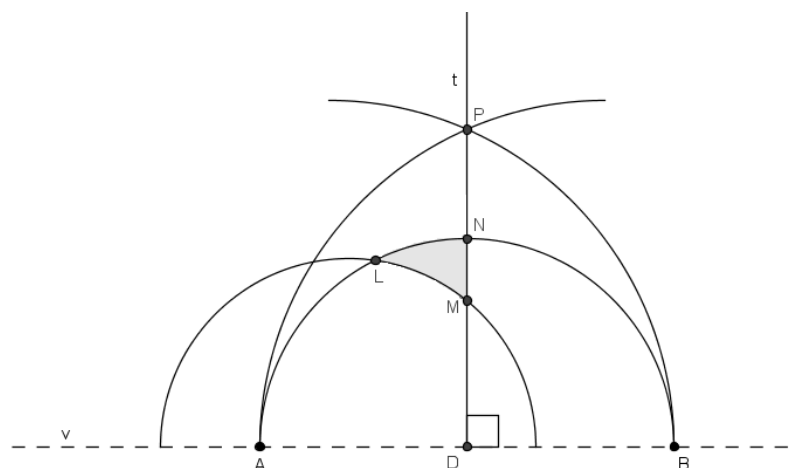
O modelo criado pelo matemático francês *Jules Henri Poincaré* (1854-1912) para a Geometria hiperbólica difere do de Klein no tocante às retas. No modelo de Poincaré, as retas são arcos de círculos perpendiculares³ ao círculo que representa o plano de Lobachewsky. Esse modelo ficou conhecido como o *disco de Poincaré*.



³ Diremos que dois círculos são perpendiculares quando se interceptam, e suas tangentes no ponto de interseção são perpendiculares.

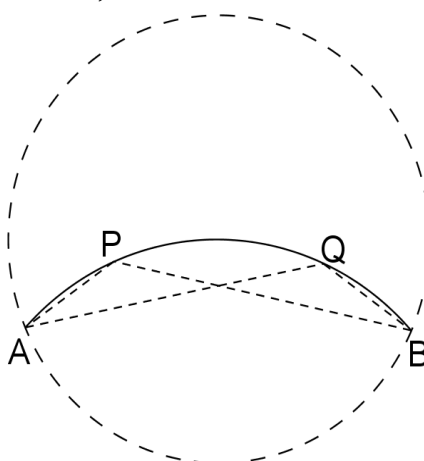
Na figura anterior, as retas AB e EF se interceptam no ponto Q , enquanto que às retas AM e BN são ambas paralelas à AB .

O mesmo Poincaré criou um modelo no semiplano que é semelhante ao seu disco. No modelo do semiplano de Poincaré, a fronteira não é mais a circunferência do disco e sim uma reta que, assim como a circunferência do disco é também desconsiderada. As retas são semicírculos e retas perpendiculares à reta fronteira.



Na figura acima, a reta t intercepta a reta AB no ponto N , às retas PA e PB são ambas paralelas à reta AB , temos ainda o triângulo MLN , cuja soma dos ângulos internos é menor que dois ângulos retos.

No modelo do disco de Poincaré distância entre dois pontos situados em uma mesma reta hiperbólica como na figura abaixo,



é dada pela seguinte fórmula:

$$d_{(P,Q)} = \ln \frac{PB \cdot AQ}{AP \cdot QB}$$

onde AP , PB , AQ , QB são segmentos de reta ligando os pontos A e B aos pontos P e Q , respectivamente, como na Geometria euclidiana.

A distância entre dois pontos no disco de Poincaré satisfaz as seguintes propriedades:

i) $d_{(M,N)} = d_{(N,M)}$.

De fato.

$$d_{(M,N)} = \ln \left(\frac{MB}{AM} \frac{AN}{NB} \right) = \ln \left(\frac{AN}{NB} \frac{MB}{AM} \right) = d_{(N,M)}$$

ii) $d_{(M,N)} \geq 0$ e $d_{(M,N)} = 0$ se, e somente se, $M = N$.

De fato. Temos que $MB \geq NB$ e $AN \geq AM$. Logo,

$$\frac{MB}{NB} \geq 1 \text{ e } \frac{AN}{AM} \geq 1 \rightarrow \frac{MB}{NB} \frac{AN}{AM} \geq 1 \rightarrow \frac{MB}{AM} \frac{AN}{NB} \geq 1 \rightarrow \ln \left(\frac{MB}{AM} \frac{AN}{NB} \right) \geq 0$$

Das desigualdades acima segue-se que $d_{(M,N)} = 0$ se $M = N$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, foi feito uma breve abordagem histórica de um tipo de Geometria não euclidiana, a saber, a Geometria hiperbólica. Descrevemos ainda de maneira resumida e objetiva algumas propriedades e definições que compõem esse tipo de Geometria não euclidiana e que são fundamentais para os aspectos que a diferencia da Geometria euclidiana, como estão destacados na tabela abaixo.

COMPARAÇÃO ENTRE CONCEITOS E PROPRIEDADES

A comparação que estabelecemos aqui levou em consideração a consistência do sistema axiomático segundo o ponto de vista de Hilbert.

Conceitos e Propriedades	Geometria Euclidiana	Geometria Hiperbólica
Plano	Espaço que não se curva.	Espaço Curvo.
Retas	Objeto determinado por dois pontos, não tem comprimento definido.	Objeto curvo não tem comprimento definido.
Duas retas distintas	Interceptam no máximo em um ponto.	Interceptam no máximo em um ponto.
Dada uma reta r e um ponto P fora de r ,	Existe exatamente uma reta s que passa por P e não intercepta r .	Existem no mínimo duas retas, s e t , que passam por p e não interceptam r .
Retas Paralelas	São equidistantes.	Nunca são equidistantes.
Área de um triângulo	Independente da soma dos ângulos internos.	Proporcional à soma dos ângulos internos.
Dado três Pontos A , B e C numa mesma reta	Sempre existe um dos pontos entre os outros dois.	Sempre existe um dos pontos entre os outros dois.
Triângulos Semelhantes	Sempre existem Triângulos semelhantes.	Não existem Triângulos semelhantes.
Soma dos ângulos internos de um triângulo	Igual a dois ângulos retos.	Menor de que dois ângulos retos.
Distância entre dois pontos	O comprimento do segmento de reta determinado pelos dois pontos.	Independente do modelo Utilizado. As distâncias aumentam à medida que os pontos se aproximam do círculo limite.

Da tabela acima podemos perceber algumas propriedades que são comuns a Geometria euclidiana e a hiperbólica, como também podemos destacar a principal diferença entre as duas Geometrias, que diz respeito às retas paralelas passando por um ponto exterior a uma reta dada. Enquanto que, na Geometria euclidiana existe uma única reta paralela passando por um ponto exterior a uma reta dada, na hiperbólica existem duas dessas retas paralelas.

O estudo dessas duas Geometrias não euclidianas serviu para mostrar que a euclidiana não é a verdade absoluta que se adéqua ao nosso cotidiano, pois, existem outras Geometrias tão consistentes quanto à euclidiana e que podem ser aplicadas no nosso cotidiano.

É importante refletir sobre a possibilidade de se incluir nos cursos de licenciatura em Matemática disciplinas relacionada às Geometrias não euclidianas, pois, oferece a oportunidade dos professores graduados em Matemática, Modalidade Licenciatura, conhecerem alguns tipos de Geometrias diferentes da usual, capacitando-os para apresentarem este conteúdo aos alunos do ensino fundamental e médio, mostrando-lhe a possibilidade de existirem outras Geometrias diferentes da apresentada por Euclides, permitindo que o aluno deste nível de ensino descubra a aplicabilidade da Matemática em situações do seu cotidiano e em outras ciências.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALEKSANDROV, A., D., e et al. **La Matemática 1: su contenido, métodos y significado**. ed. Alianza Universidad, 1973.
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria hiperbólica**. Goiânia: Ed. da UFG, 2002.
- [3] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.
- [4] BONOLA, Roberto. **Geometrías no euclidianas**. Editora Espasa-Calpe Argentina. Buenos Aires, 1945.
- [5] COSTA, S. I. R., SANTOS, S. A., **Geometria Não-Euclidiana**. Ciências, Vol. 11, nº 65, Agosto de 1990, pp 14 – 23.
- [6] COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não euclidianas**. 2.Ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.
- [7] COXETER, H. S. M., et al. **Non-Euclidean Geometry**. The Mathematical Association of America. Sixth Edition. Washington, D. C, 2006.
- [8] EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. Editora UNESP, 2009.
- [9] FERRAZ, Antônio Santana. **Trigonometria Esférica Fundamentos**. Caderno Didático. Editora UFV, 2006.
- [10] QUEIROZ, Flávia Cristina Martins, SANTOS, Patrícia Borges dos, AUGUSTINI, Edson. **Tópicos de Geometria Hiperbólica**. III Bienal da SBM – UFG, www.ime.ufg.br/bienal/2006/poster/flavia.pdf, último acesso em 23/03/2011.
- [11] ROCHA, Luiz Fernando Carvalho da. **Introdução à Geometria Hiperbólica Plana**. 16º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA. Rio de Janeiro, 1987.

