Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Operadores $\mathcal{I}$-parcialmente múltiplo somantes: uma unificação dos conceitos de somabilidade absoluta e múltipla

Emanuelle Claudia da Silva

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2018

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Operadores $\mathcal{I}$-parcialmente múltiplo somantes: uma unificação dos conceitos de somabilidade absoluta e múltipla

por

Emanuelle Claudia da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2018

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

S586o Silva, Emanuelle Claudia.
Operadores $\mathcal{I}$-parcialmente múltiplo somantes
uma unificação dos conceitos de somabilidade absoluta e múltipla / Emanuelle Claudia da Silva - João Pessoa, 2018.
68 f. : il.

Orientação: Nacib Gurgel Albuquerque
Dissertação (Mestrado) - UFPB/Ciências exatas.

1. Operadores absolutamente somantes. 2.operadores multilineares múltiplos somantes. 3. operadores $\mathcal{I}$-parcialmente somantes.

BS/CCEN CDU: xxxx(xxx)

Operadores $\mathcal{I}$-parcialmente múltiplo somantes: uma unificação dos conceitos de somabilidade absoluta e múltipla

por

Emanuelle Claudia da Silva [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise Funcional

Aprovada em 27 de fevereiro de 2018.

Banca Examinadora:

NGAlbuquerque

Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho – UFU
(Examinador Externo)

Joedson Silva dos Santos

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB
(Examinador Interno)

[1]O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DA ALUNA EMANUELLE CLÁUDIA DA SILVA, CANDIDATA AO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA NA ÁREA DE ANÁLISE FUNCIONAL.

Aos 27 (vinte e sete) dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezoito, às 15:00 horas, na sala de aula 1 da Pós-Graduação em Matemática, do Centro de Ciências Exatas e da Natureza – CCEN, da Universidade Federal da Paraíba – UFPB, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **Emanuelle Cláudia da Silva**, candidata ao grau de Mestre em Matemática, na área de **Análise Funcional**. Foram componentes da Banca Examinadora, os professores Nacib André Gurgel e Albuquerque (Orientador) - Doutor em Matemática, - Joedson Silva dos Santos - Doutor em Matemática, e Geraldo Márcio de Azevedo Botelho - Doutor em Matemática, sendo o primeiro integrante do corpo docente da UFPB, o segundo integrante do corpo docente da UFPB, e o terceiro integrante do corpo docente da UFU. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, Nacib André Gurgel e Albuquerque, após declarar os objetivos da reunião, apresentou a candidata a quem concedeu a palavra para que dissertasse, oral e sucintamente, sobre o tema apresentado, intitulado "Operadores I-parcialmente múltiplo somantes: uma unificação dos conceitos de somabilidade absoluta e múltipla**"**. Após discorrer sobre o referido tema, a candidata foi arguida pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo passou a comissão, em caráter secreto, a proceder à avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito **Aprovada**. Em face de aprovação, declarou o Presidente achar-se a avaliada legalmente habilitada a receber o Grau de Mestre em Matemática, cabendo a Universidade Federal da Paraíba, providências como de direito, à expedição do Diploma a que a mesma fez jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Roseli Agapito da Silva Guedes, na qualidade de secretária, lavrei a Ata, que submeto a aprovação da Comissão Examinadora.

João Pessoa, 27 de fevereiro de 2018

Banca Examinadora:

Nacib André Gurgel e Albuquerque ______________________

Joedson Silva dos Santos ______________________

Geraldo Márcio de Azevedo Botelho ______________________

Resumo

Neste trabalho investigamos noções de somabilidade e conceitos relacionados aos operadores multilineares absolutamente ou múltiplo somantes. Inicialmente, desenvolvemos e detalhamos os resultados clássicos da teoria linear e, em seguida, apresentamos conceitos e principais teoremas relacionados à somabilidade absoluta e múltipla. Após isso, investigamos os operadores multilineares múltiplo somantes com vários expoentes, cujo conceito é motivado pelas Desigualdades de Bohnenblust-Hille e Hardy-Litttlewood, e provamos um resultado de inclusão para essa classe de operadores. Por fim, trabalharemos com os operadores $\mathcal{I}$-parcialmente somantes, que unificam os conceitos de somabilidade apresentados anteriormente.

Palavras-chave: Operadores absolutamente somantes, operadores multilineares múltiplos somantes, operadores $\mathcal{I}$-parcialmente somantes.

Abstract

In this work we investigate notions of somability and concepts related to absolutely or multiple multilinear operators. Initially, we developed and detailed the classical results of linear theory, and then presented concepts and main theorems related to absolute and multiple somability. After that, we investigated the multiple summing multilinear operators with several exponents whose concept is motivated by the Inequalities of Bohnenblust-Hille Inequalities and Hardy-Litttlewood Inequalities, and we proved an inclusion result for this class of operators. Finally, we will work with the $\mathcal{I}$-partial operators, which unify the somability concepts presented above.

Keywords: Multiple multilinear operators, absolutely multilinear operators, $\mathcal{I}$-partial operators.

Sumário

Introdução

Ao resolver um problema publicado em 1935 no “Scotish Book”[18], A. Dvoretzky e C. A. Rogers em [11], atraíram a atenção que Alexander Grothendieck [15], que acabou dando origem aos primórdios da teoria dos operadores absolutamente somantes ao publicar uma demonstração diferente das já publicadas anteriormente. O problema em questão é:

> *Existe em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita uma série incondicionalmente convergente que não é absolutamente convergente?*

Apenas nos anos 60, a teoria dos operadores foi devidamente divulgada através dos trabalhos de Pietsch [23], Pelczyński [20] e Lindenstrauss em [17]. Na década de 80, Pietsch [24] estuda os operadores multilineares absolutamente somantes. Já em 2003, é apresentado por D. Pérez-García [13] e M.C. Matos [19], de modo independente, o conceito de operadores múltiplos somantes. E desde então esta classe vem sido estudada por muitos outros autores.

Nosso trabalho se baseia no estudo da teoria dos operadores $\mathcal{I}$-parcialmente somantes, uma classe de operadores multi-indice que unifica os conceitos de somabilidade absoluta e múltipla.

Iniciamos o primeiro capítulo apresentando brevemente conceitos e resultados básicos de Análise funcional, que são indispensáveis para nossos estudos como, por exemplo, a definição de sequencias fortemente ou fracamente somantes, propriedades dos espaços ℓ_p, com $1 \leq p \leq \infty$, e das suas respectivas normas. Logo em seguida o leitor é apresentado a classe dos operadores lineares absolutamente p-somantes e provamos algumas de suas propriedades. Ainda no capítulo um falamos sobre os operados multilineares absolutamente e múltiplo $(p;q)$-somantes.

No segundo capítulo trabalharemos com os operadores multilineares múltiplos $(p;q)$-somantes com vários expoentes, falando primeiramente sobre a motivação para o estudo dessa classe de operadores e logo em seguida demonstramos uma série de importantes propriedades e resultados de inclusão.

O objetivo principal desse trabalho é alcançado no terceiro capítulo, apresentaremos uma classe de operadores que unifica os conceitos de operadores que mencionamos. Assim como algumas releitura de resultados bem conhecidos como as Desigualdades de Hardy-littlewood e de Bonhenblust-Hille.

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

• Em todo este texto, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, a menos que se mencione algo em contrário.

• $\mathcal{X}$ denota um espaço de Banach;

• $\mathcal{X}'$ denota o dual topológico de um espaço de Banach X;

• $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}$ denota uma bola unitária em $\mathcal{X}$;

• O espaço das sequências fortemente p-somáveis será denotado por

$$\ell_p(\mathcal{X}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é fortemente p-somável}\}$$

cuja norma é denotada por

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|, \text{ para } p = \infty.$$

e

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|, \text{ para } p = \infty;$$

• O espaço das sequências fracamente p-somáveis será denotado por

$$\ell_p^w(\mathcal{X}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é fracamente p-somável}\},$$

cuja norma é denotada por

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w} = \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n))_n\|_p;$$

• $\ell_p^u(\mathcal{X})$ denota o espaços das sequências incondicionalmente somantes;

- $\Pi_{(p;q)}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ denota a classe dos operadores lineares $(p;q)$-somantes de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$ munido da norma $\pi_{(p;q)}(\cdot)$;

- $\Pi^{m,\mathrm{as}}_{(p;\mathbf{q})}(\mathcal{X})$ denota a classe dos operadores multilineares $(p;\mathbf{q})$-absolutamente somantes, $\mathbf{q} := (q_1,\ldots,q_m)$, munido da norma $\pi_{\mathrm{as}(p;\mathbf{q})}$;

- $\Pi^{m,\mathrm{mult}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}$ denota a classe dos operadores multilineares $(\mathbf{p};\mathbf{q})$-absolutamente somantes, com $\mathbf{p} := (p_1,\ldots,p_m)$ e $\mathbf{q} := (q_1,\ldots,q_m)$, munido da norma $\pi_{\mathrm{mult}(\mathbf{p};\mathbf{q})}$;

- $\Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}$ denota a classe dos operadores multilineares $\mathcal{I}$-parcialmente $(\mathbf{p};\mathbf{q})$-somantes, com $\mathbf{p} := (p_1,\ldots,p_m)$ e $\mathbf{q} := (q_1,\ldots,q_m)$, munido da norma $\pi_{\mathcal{I}(\mathbf{p};\mathbf{q})}$.

Capítulo 1

Operadores múltiplos somantes

O objetivo principal deste capítulo é apresentar resultados referentes a teoria de espaços de Banach e operadores absolutamente somantes, que serão necessários no decorrer dos próximos capítulos.

Na primeira seção apresentamos conceitos importantes como, o espaço das sequências absolutamente somantes, algumas propriedades e, em seguida introduzimos a teoria de operadores lineares absolutamente somantes. Na segunda seção exibimos alguns resultados sobre a teoria de operadores multilineares múltiplo somante.

1.1 Operadores lineares absolutamente somantes

Nesta seção, exibiremos brevemente alguns resultados da teoria dos operadores absolutamente somantes, que servirá de base para teoria de operadores multilineares múltiplo somantes, que será estudada nos próximos capítulos.

Definição 1.1. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\mathcal{X}$ um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{X}$ é dita fortemente p-somável, quando a sequência de escalares correspondente $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ for elemento de $\ell_p(\mathcal{X})$.

O conjunto das sequências fortemente p-somável em $\mathcal{X}$, é denotado por

$$\ell_p(\mathcal{X}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é fortemente p-somável}\}$$

é um espaço vetorial, cuja norma natural é

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|, \text{ para } p = \infty.$$

Teorema 1.1. *Se $1 \leq p \leq \infty$ e $\mathcal{X}$ é um espaço de Banach, $(\ell_p(\mathcal{X}), \|.\|_p)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Faremos apenas o caso $p < \infty$, usando argumento similar, obtêm-se o caso $p = \infty$. Seja $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(\mathcal{X})$, onde cada $x^n = (x_k^n)_{k=1}^{\infty} = (x_1^n, x_2^n, \dots) \in \ell_p(\mathcal{X})$. Com isso, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varepsilon > \|x^k - x^l\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^k - x_n^l\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } k, l \geq k_0.$$

Logo, para cada n natural fixado, temos

$$\|x_n^k - x_n^l\| < \varepsilon, \text{ para } k, l \geq k_0$$

e, portanto, $(x_k^n)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{X}$, logo é convergente, pois $\mathcal{X}$ é completo. Consideremos $x_n \in \mathcal{X}$ tal que $\lim\limits_{k \to \infty} x_n^k = x_n$, e seja $x := (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Mostraremos que $x \in \ell_p(\mathcal{X})$. Fixado m natural, temos

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \|x_n^k - x_n^l\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \text{ para } \ k, l \geq k_0.$$

Fixemos $k \geq k_0$. Fazendo $l \to \infty$, e usando a continuidade da soma, norma e função real $t \longmapsto t^{\alpha}$, $\alpha > 0$, obtemos

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \|x_n^k - x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Fazendo agora $m \to \infty$, temos

$$\|x^k - x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_n^k - x_n\right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Isso significa que $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x$ e $x^p - x \in \ell_p(\mathcal{X})$, como este é um espaço vetorial, concluímos que $x \in \ell_p(\mathcal{X})$.

$\square$

Proposição 1.2. O conjunto das sequências em $\ell_p(\mathcal{X})$ com um número finito de termos não nulos é um subespaço denso em $\ell_p(\mathcal{X})$.

Demonstração. Dado $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_p(\mathcal{X})$ e $\varepsilon > 0$, temos

$$\left(\sum_{n > k+1} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Tomemos $y_k = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$. Note que

$$\|x - y\|_p = \|(x_1, x_2, \dots) - (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots)\|_p$$

$$
\begin{aligned}
&= \|(0, \ldots, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)\|_p \\
&= \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Com isso concluímos o resultado.

□

Definição 1.2. Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $\mathcal{X}$ um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{X}$ é fracamente p-somável, quando a sequência de escalares $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ for um elemento de ℓ_p para cada funcional linear contínuo $f \in \mathcal{X}'$.

O conjunto das sequências fracamente p-somáveis em $\mathcal{X}$,

$$\ell_p^w(\mathcal{X}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é fracamente p-somável}\},$$

é um espaço vetorial normado com a norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w} = \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n))_n\|_p$, conforme garantido pela próxima proposição.

Proposição 1.3. A expressão

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w} = \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n))_n\|_p$$

é norma em $\ell_p^w(\mathcal{X})$.

Demonstração. Primeiramente mostraremos que o supremo é finito. Seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\mathcal{X})$. Definamos o operador

$$
\begin{aligned}
u_x : &\mathcal{X}' \longrightarrow \ell_p \\
&f \longmapsto (f(x_n))_{n=1}^{\infty},
\end{aligned}
$$

Claramente u_x é bem definido e linear. Usaremos o Teorema do gráfico fechado para mostrar que u é limitado. Sejam $(f_n), f$ em $\mathcal{X}'$ e $y \in \ell_p$ tais que

$$f_k \to f \text{ em } \mathcal{X}' \tag{1.1}$$

e

$$u_x f_n \to y \text{ em } \ell_p. \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2) temos

$$\lim_{k\to\infty} u_x f_k = \lim_{k\to\infty} (f_k(x_n))_{n=1}^{\infty} = y = (y_n),$$

logo obtemos a convergência em cada coordenada, i.e.,

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_n) = x, \text{ para todo } n. \tag{1.3}$$

Por outro lado, de (1.2), obtemos $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \ \forall\, x \in \mathcal{X}$. Em particular

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_n) = f(x_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4) concluímos que

$$y_n = f(x_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

isto significa que

$$u_x f = y.$$

Portanto o Teorema do gráfico fechado garante que u_x é limitado, e portanto, contínuo. Consequentemente, deduzimos que o supremo é finito, pois

$$\|x\|_{p,w} = \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n))_n\|_p = \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(u_x(f))\|_p = \|u_x\| < \infty.$$

Agora, vejamos que $\|.\|_{p,w}$ é uma norma em $\ell_p^w(\mathcal{X})$. Se $(x_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$ cuja

$$0 = \|(x_n)_n\|_{p,w} = \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n))_n\|_p,$$

então $(f(x_n))_n = 0_{\ell_p}$, onde $0_{\ell_p} = (0, 0, \dots)$ é o elemento nulo de ℓ_p, para cada funcional limitado $f \in B_{\mathcal{X}'}$, logo o teorema da Hahn-Banach assegura que $(x_n)_n = 0_{\ell_p}$. Para cada $y \in B_{\mathcal{X}'}$ e para as sequências $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ em $\ell_p^w(\mathcal{X})$, e $g \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}$

$$\begin{aligned} \|(g(x_n + y_n))_n\|_p &= \|(g(x_n) + g(y_n))_n\|_p \\ &\leq \|(g(x_n))_n\|_p + \|(g(y_n))_n\|_p \\ &\leq \|(x_n)_n\|_{p,w} + \|(y_n)_n\|_{p,w}, \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue da desigualdade triangular em $\|\cdot\|_{\ell_p}$ e a segunda definição da norma $\|.\|_{p,w}$. Agora para cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e sequência $(y_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$

$$\begin{aligned} \|\alpha \cdot (y_n)_n\|_{p,w} &= \|(\alpha y_n)\|_{p,w} \\ &= \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|f(\alpha.y_n)_n\|_p \\ &= \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|\alpha(f(y_n))_n\|_p \\ &= \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} |\alpha|\|(f(y_n))_n\|_p \\ &= |\alpha|\|(y_n)_n\|_{p,w}. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova.

$\square$

Teorema 1.4. *$(\ell_p^w(\mathcal{X}), \|.\|_{p,w})$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Sejam $(x^n)_n$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p^w(\mathcal{X})$. Dado $\varepsilon > 0$, para $k, l \in \mathbb{N}$, com $k, l \geq k_0(\varepsilon)$ teremos

$$\varepsilon > \left\|x^k - x^l\right\|_{p,w} = \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left\|(f(x_n^k - x_n^l))_n\right\|_p \geq \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left|f(x_n^k - x_n^l)\right| = \left\|x_n^k - x_n^l\right\|_{\mathcal{X}},$$

para cada n natural, pois a última igualdade é consequência do Teorema de Hahn-Banach. Logo, fixado $n \in \mathbb{N}$, $(x_n^k)_k$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{X}$ e, consequentemente, existe $\lim_{k\to\infty} x_n^k = x_n \in \mathcal{X}$. Mostraremos que $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$ e $x^k \to x$, o que concluirá a demonstração.

Inicialmente faremos o caso $1 \leq p < \infty$: para cada $f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}$ e $N, k, j \in \mathbb{N}$, com $k, j \geq k_0$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^p > \|x^k - x^j\|_{p,w}^p &= \left(\sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n^k - x_n^j))_n\|_p\right)^p \\
&= \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n^k - x_n^j))_n\|_p^p \\
&= \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n^k - x_n^j)|^p\right) \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} \left|f\left(x_n^k - x_n^j\right)\right|^p.
\end{aligned}$$

Fazendo $j \to \infty$, obteremos

$$\sum_{n=1}^{N} \left|f(x_n^k - x_n)\right|^p \leq \varepsilon^p,$$

para todo $f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}, n \in \mathbb{N}$ e $k \geq k_0$, logo

$$\|x^k - x\|_{p,w} < \varepsilon,\ k > k_0.$$

Consequentemente, $x^n - x \in \ell_p^w(\mathcal{X})$, e como esté é um espaço vetorial $x \in \ell_p^w(\mathcal{X})$ e $x^n \to x$ em $\ell_p^w(\mathcal{X})$.

Agora mostraremos o caso $p = \infty$. Provaremos que $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\infty,w}$ e que $\ell_\infty(\mathcal{X}) = \ell_\infty^w(\mathcal{X})$. Tome $(x_n)_n$ uma sequência limitada em $\mathcal{X}$, então

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_n\|_\infty &= \sup_n \|x_n\| = \sup_n \left(\sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} |f(x_n)|\right) \\
&\overset{(*)}{=} \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sup_n |f(x_n)|\right) = \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n))_n\|_\infty
\end{aligned}$$

$$= \quad \|(x_n)_n\|_{\infty,w}\,.$$

Veremos a justificativa de $(*)$ em seguida. Supondo que isto é válido, provamos que $\|.\|_\infty = \|.\|_{\infty,w}$. Note que toda sequência $(x_n)_n \in \ell_\infty(\mathcal{X})$ está contida em $\ell_\infty^w(\mathcal{X})$ e vice-versa, ou seja, $\ell_\infty(\mathcal{X}) = \ell_\infty^w(\mathcal{X})$. Consequentemente, concluímos que $\ell_\infty^w(\mathcal{X})$ é Banach.

Voltemos à $(*)$: para cada x_n, o teorema de Hahn-Banach nos assegura a existência de $f_{x_n} \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}$, que cumpre $\|x_n\| = f_{x_n}(x_n)$, logo,

$$\|x_n\| = f_{x_n}(x_n) \leq \sup_n |f_{x_n}(x_n)| \leq \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} (\sup_n |f(x_n)|).$$

Isso implica que

$$\sup_n \|x_n\| = \sup_n(\sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} |f(x_n)|) \leq \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} (\sup_n |f(x_n)|).$$

Por outro lado, para todo $f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}$ fixo temos,

$$|f(x_n)| \leq \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} |f(x_n)| = \|x_n\|.$$

Logo

$$\sup_n |f(x_n)| \leq \sup_n \|x_n\| = \sup_n \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} |f(x_n)|,$$

o que implica

$$\sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sup_n |f(x_n)| = \sup_n \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} |f(x_n)|.$$

□

Proposição 1.5. $\ell_p(\mathcal{X})$ é subespaço de $\ell_p^w(\mathcal{X})$.

Demonstração. Como $\ell_p(\mathcal{X})$ é um espaço vetorial, basta mostrar a inclusão. Seja $(x_n)_n \in \ell_p(\mathcal{X})$ e $f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}$, então para $g \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}$ fixado,

$$\|(x_n)_n\|_{p,w} = \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n))_n\|_p \leq \|f\|.\|(x_n)_n\| = \|(x_n)_n\|,$$

portanto $(x_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$. □

Quando $p \in [1, \infty)$ é útil trabalharmos com o espaço

$$\ell_p^u(\mathcal{X}) = \{(x_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X}); \lim_{k\to\infty} \|(x_n)_{n>k}\|_{p,w} = 0\}$$

pois, como mostraremos, em seguida, para o caso $p = 1$, $\ell_p^u(\mathcal{X})$ é o conjunto das sequências incondicionalmente convergentes.

Lema 1.6. Se $(\lambda_n)_n$ é uma sequência de escalares e $C > 0$ são tais que, para cada conjunto

$M \subset \mathbb{N}$ finito,

$$\left|\sum_{n\in M} \alpha_n\right| \leq C, \text{ então} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| \leq 4C$$

Demonstração. Dado $M \subset \mathbb{N}$ finito, escrevamos $M = M^+_{\mathrm{Re}} \bigcup M^-_{\mathrm{Re}} \bigcup M^+_{\mathrm{Im}} \bigcup M^-_{\mathrm{Im}}$, onde

$$\begin{aligned}
M^+_{\mathrm{Re}} &= \{n \in M; \mathrm{Re}\ \lambda_n \geq 0\};\\
M^-_{\mathrm{Re}} &= \{n \in M; \mathrm{Re}\ \lambda_n < 0\};\\
M^+_{\mathrm{Im}} &= \{n \in M; \mathrm{Im}\ \lambda_n \geq 0\};\\
M^-_{\mathrm{Im}} &= \{n \in M; \mathrm{Im}\ \lambda_n < 0\},
\end{aligned}$$

com $\mathrm{Re}(w)$, e $\mathrm{Im}(w)$ representando a parte real e a parte imaginaria de w, respectivamente, com $w \in \mathbb{C}$.

Com isso,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in M} |\lambda_n| &= \sum_{n\in M} |\mathrm{Re}(\lambda_n) + \mathrm{Im}(\lambda_n)|\\
&\leq \sum_{n\in M} |\mathrm{Re}(\lambda_n)| + \sum_{n\in M} |\mathrm{Im}(\lambda_n)|\\
&= \sum_{n\in M^+_{\mathrm{Re}}} \mathrm{Re}(\lambda_n) + \sum_{n\in M^-_{\mathrm{Re}}} (-\mathrm{Re}(\lambda_n)) + \sum_{n\in M^+_{\mathrm{Im}}} \mathrm{Im}(\lambda_n) + \sum_{n\in M^-_{Im}} (-\mathrm{Im}(\lambda_n)).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\left|\sum_{n\in M^+_{\mathrm{Re}}} \mathrm{Re}(\lambda_n)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\sum_{n\in M^+_{\mathrm{Re}}} \lambda_n\right)\right| \leq \left|\sum_{n\in M^+_{\mathrm{Re}}} \lambda_n\right| \leq C.$$

Com argumento similar, obtemos a mesma estimativa a soma sobre os conjuntos de índices M^-_{Re}, M^+_{Im} e M^-_{Im}:

$$\left|\sum_{n\in M^-_{\mathrm{Re}}} (-Re(\lambda_n))\right| \leq C, \quad \left|\sum_{n\in M^+_{\mathrm{Im}}} Im(\lambda_n)\right| \leq C \quad \text{e} \left|\sum_{n\in M^-_{\mathrm{Im}}} (-\mathrm{Im}\,(\lambda_n))\right| \leq C.$$

Tomando $M = \{1, 2, \ldots, k\}$ com $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, concluímos que $\sum_{n+1}^{K} |\lambda_n| \leq 4C$, e o resultado segue.

□

Lema 1.7. Seja $(x_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{X}$. São equivalentes:

i) $(x_n)_n$ é incondicionalmente somável;

ii) Para todo ε, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $F \subset \mathbb{N}$ é finito e mín $F \geq n_\varepsilon$, então $\left\|\sum_{x_n\in F}\right\| \leq \varepsilon$.

Proposição 1.8. Uma sequência $(x_n)_n \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ é incondicionalmente somável se, e somente se, $(x_n)_n \in \ell_1^u(\mathcal{X})$.

Demonstração. Seja $(x_n)_n$ incondicionalmente somável. De acordo com o Lema 1.7, fixado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M \subset \mathbb{N}$, M finito e mín $M > n_0$ implica $\| \sum_{n \in M} x_n \| < \frac{\varepsilon}{4}$. Para $f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}$

$$\left| \sum_{n \in M} f(x_n) \right| \leq \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left| \sum_{n \in M} f(x_n) \right| = \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left| f(\sum_{n \in M} x_n) \right| = \left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Aplicando o Lema 1.6 a $((f(x_n)))_{n > n_0}$ e pela desigualdade acima, obtemos

$$\sum_{n > n_0} |f(x_n)| < \varepsilon.$$

Tomando o supremo

$$\varepsilon > \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sum_{n > n_0} |f(x_n)| = \|(x_n)_{n.n_0}\|_{1,w} \geq \|(x_n)_{n > k}\|_{1,w},$$

sempre que $k > n_0$ Portanto $(x_n)_n \in \ell_1^u(\mathcal{X})$.

Agora considere $(x_n)_n \in \ell_1^u(\mathcal{X})$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(x_i)_{i > n}\|_{1,w} = \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sum_{i > n} |f(x_i)| < \varepsilon, \text{ para todo } n > n_\varepsilon,$$

Para $M \subset \{n_\varepsilon, n_{\varepsilon+1}, \ldots\}$ finito, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| &= \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left| f\left(\sum_{n \in M} x_n \right) \right| \\
&= \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left| \sum_{n \in M} f(x_n) \right| \\
&\leq \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sum_{n \in M} |f(x_n)| \\
&\leq \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sum_{n > n_\varepsilon} |f(x_n)| \\
&= \|(x_n)_{n > \varepsilon}\|_{1,w} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, do Lema 1.7 segue que $(x_n)_n$ é incondicionalmente somável, e isso conclui o resultado.

□

Proposição 1.9. $\ell_p^u(\mathcal{X})$ é um subespaço fechado de $\ell_p^w(\mathcal{X})$.

Demonstração. A linearidade é facilmente verificada. Seja $(x^k)_k$ uma sequência em $\ell_p^u(\mathcal{X})$ que converge para $x = (x_n) \in \ell_p^w(\mathcal{X})$ na norma $\|.\|_{p,w}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_0$, vale

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \geq \|x^k - x\|_{p,w} &= \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n^k - x_n))_n\|_p \\ &\geq \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n^k - x_n))_{n>N}\|_p \\ &= \|(x_n^k - x_n)_{n>N}\|_{p,w}, \end{aligned}$$

para cada N natural. Existe também $n_0(\varepsilon, k_0) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$,

$$\|(x_n^{k_0})_{n>n_0}\|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n>n_0}\|_{p,w} &= \|(x_n)_{n>n_0} - (x_n^{k_0})_{n>n_0} + (x_n^{k_0})_{n>n_0}\|_{p,w} \\ &\leq \|(x_n - x_n^{k_0})_{n>n_0}\|_{p,w} + \|(x_n^{k_0})_{n>n_0}\|_{p,w} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $\lim_{k\to\infty} \|(x_n)_{n>k}\|_{p,w} = 0$. Portanto $x \in \ell_p^u(\mathcal{X})$ provando que $\ell_p^u(\mathcal{X})$ é fechado. $\square$

O próximo exemplo nos informa que a inclusão da proposição anterior pode ser estrita.

Exemplo 1.1. Considere a sequência $(e_n)_n \in \ell_2^{\mathbb{N}}$, onde $e_i = (\delta_{in})_n$. Mostraremos que $(e_n)_n \in \ell_2^w \backslash \ell_2^u$. Em outras palavras, mostraremos que a inclusão é estrita. De fato, pela identificação entre $(\ell_2)'$ e ℓ_2, cada $f \in (\ell_2)'$ pode ser escrito como o elemento $(f(e_n))_n \in \ell_2$, com $\|f\| = \|(f(e_n))_n\|_2$.

Logo, para cada $f \in (\ell_2)'$,

$$\sum_n |f(e_n)|^2 = \|f\|_2^2 < \infty \Longrightarrow \forall f \in (\ell_2)', (f(e_n))_n \in \ell_2 \Longrightarrow (e_n)_n \in \ell_2^w(\ell_2).$$

No entanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, temos

$$\|(e_n)_{n>k}\|_{2,w} = \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|(f(e_n))_{n>k}\|_2 = \sup_{\alpha_n \in \mathrm{B}_{\ell_2}} \|(\alpha_n)_{n>k}\|_2 = 1.$$

Portanto, $(e_n)_n \notin \ell_2^u(\ell_2)$.

É fácil ver que, todo operador

$$u : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$$

linear e contínuo, com $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços de Banach, que leva sequências $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(\mathcal{X})$ em sequências $(ux_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(\mathcal{Y})$ e, analogamente, se $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(\mathcal{X})$, então $(ux_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$.

Em outras palavras, se $u : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ é um operador linear limitado entre espaços de Banach, a correspondência

$$(x_n)_{n=1}^\infty \longrightarrow (ux_n)_{n=1}^\infty,$$

induz os operadores lineares limitados

$$\widehat{u}^s : \ell_p(\mathcal{X}) \longrightarrow \ell_p(\mathcal{Y})$$

e

$$\widehat{u}^w : \ell_p^w(\mathcal{X}) \longrightarrow \ell_p^w(\mathcal{Y}).$$

Proposição 1.10. $\|\widehat{u}^s\| = \|\widehat{u}^w\| = \|u\|$.

Demonstração. Se $\widehat{u}^s : \ell_p(\mathcal{X}) \longrightarrow \ell_p(\mathcal{Y})$, então

$$\|\widehat{u}^s\| = \sup_{\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p \leq 1} \left(\sum_{n=1}^\infty \|ux_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p \leq 1} \|u\| \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}) \leq \|u\|$$

e

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|ux\| = \sup_{\|(y_n)_{n=1}^\infty = (x,0,0,\dots)\|_p \leq 1} \|\widehat{u}^s(y_n)_{n=1}^\infty\|_p \leq \|\widehat{u}^s\|.$$

Logo $\|\widehat{u}^s\| = \|u\|$. De modo análogo mostramos que $\|\widehat{u}^w\| = \|u\|$.

□

Note que quando temos um operador u linear e continuo entre espaços de Banach $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, este induz naturalmente um operador linear

$$\widehat{u} : \ell_p^w(\mathcal{X}) \longrightarrow \ell_p^w(\mathcal{Y}),$$

com $p \in [1, \infty)$ que leva sequências $(x_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$ em $(ux_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{Y})$, ocorrendo o mesmo com $\ell_p(\mathcal{X})$ e $\ell_p(\mathcal{Y})$, e até mesmo com $\ell_p(\mathcal{X})$ e $\ell_p(\mathcal{Y})$ uma vez que $\ell_p(\mathcal{X}) \subset \ell_p^w(\mathcal{X})$. Algumas vezes esse processo induz um operador linear de $\ell_q^w(\mathcal{X})$ em $\ell_p(\mathcal{Y})$, onde $p, q \in [1, \infty)$, e nesse caso teremos um operador absolutamente (p, q)-somante.

Definição 1.3. Sejam $1 \leq p, q < \infty$. Dizemos que um operador linear limitado $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é absolutamente $(p; q)$-somante, ou simplesmente $(p; q)$-somante, quando a aplicação induzida

$$\begin{aligned} \widehat{u} : \quad \ell_q^w(\mathcal{X}) &\longrightarrow \ell_p(\mathcal{Y}) \\ (x_n)_{n=1}^\infty &\longmapsto (ux_n)_{n=1}^\infty, \end{aligned}$$

está bem definido, i.e., $\widehat{u}(x_n)_n := (ux_n)_n$ é de fato elemento de $\ell_p(\mathcal{Y})$.

Denotamos por $\Pi_{p,q}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ o conjunto formado pelos operadores $(p; q)$-somantes de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$. Quando $p = q$, escrevemos simplesmente $\Pi_p(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Veremos que $\Pi_{p,q}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ e $\pi_{p,q}(u) = \|\widehat{u}\|$ define uma norma nesse espaço que cumpre $\|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})} \leq \pi_{(p;q)}(u)$.

Proposição 1.11. Seja $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ um operador linear limitado. São equivalentes:

i) u é absolutamente $(p;q)$-somante;

ii) Existe $C_1 \geq 0$ tal que, para quaisquer n natural e $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u \cdot x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 \cdot \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}};$$

iii) Existe $C_2 \geq 0$ tal que, para cada $(x_n)_n \in \ell_q^w(\mathcal{X})$,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ux_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 \cdot \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}};$$

iv) Existe $C_3 \geq 0$ tal que, para cada $(x_n)_n \in \ell_q^u(\mathcal{X})$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ux_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_3. \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}};$$

v) $(u \cdot x_n)_n \in \ell_p(\mathcal{Y})$ sempre que $(x_n)_n \in \ell_q^u(\mathcal{X})$.

Mais ainda, o ínfimo das constantes em cada um dos itens ii), iii) e iv) é precisamente $\pi_{(p;q)}(u)$.

Demonstração. i)$\Longrightarrow$ ii) Suponhamos que u seja $(p;q)$-somante. Provaremos que $\widehat{u}$ possui gráfico fechado. Seja $(x^k)_k$ uma sequência em $\ell_q^w(\mathcal{X})$ que converge para $x = (x_n)_n \in \ell_q^w(\mathcal{X})$, de modo que $\widehat{u}(x^k)$ converge para $y = (y_n)_n \in \ell_p(\mathcal{Y})$. Devemos concluir que $\widehat{u}(x) = y$. Como $(x^k)_k$ converge para $(x_n)_n$, dados $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{X}'$ e k suficientemente grande, vale

$$\varepsilon > \|x^k - x\|_{q,w} = \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n^k - x_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq |f(x_n^k - x_n)|.$$

Dessa forma obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n^k - x_n)|^q < \varepsilon^q, \text{ para todo } f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}.$$

Como cada termo do somatório é dominado por ε^q, segue que

$$\|x_n^k - x_n\| = \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} |f(x_n^k - x_n)| \leq \varepsilon,$$

para todo n e k suficientemente grande. Logo, como $\lim_k x_n^k = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e pela continuidade do operador, segue que

$$\lim_{k \to \infty} ux_n^k = ux_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ fixo. Por outro lado, como $(\widehat{u}(x^k))_k$ converge para $y = (y_n)_n$ em $\ell_p(\mathcal{Y})$, vale

$$\|\widehat{u}x_k - y\|_p < \varepsilon$$

para k suficientemente grande. Segue que

$$\|(ux_n^k)_n - (y_n)_n\|_p < \varepsilon \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ux_n^k - y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Consequentemente,

$$\|ux_n^k - y_n\| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\lim_{k\to\infty} ux_n^k = y_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$\widehat{u}(x) = \widehat{u}(x_n)_n = (ux_n)_n = (y_n)_n = y,$$

o que prova que Graf$(\widehat{u})$ é fechado, e portanto $\widehat{u}$ é continua. Logo para qualquer sequência finita $(x_j)_{j=1}^n$ em $\mathcal{X}$, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \|(u(x_k))_{k=1}^n\|_p = \|\widehat{u}((x_k)_{k=1}^n)\|_p \\ &\leq \|\widehat{u}\|\|(x_k)_{k=1}^n\|_{q,w} = \|\widehat{u}\| \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum |f(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

isso demonstra a desigualdade em questão, e além disso, o ínfimo α_1 das constantes que satisfazem tal desigualdade cumpre $\alpha_1 \leq \|\widehat{u}\| = \pi_(p;q)(u)$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Suponha que para quaisquer $x_1, \ldots, x_n$ em $\mathcal{X}$ e $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1. \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q^w(\mathcal{X})$. Então

$$\begin{aligned}\|(u(x_n))_{n=1}^{\infty})\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_n \left((x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_n C_1. \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}] \\ &= C_1 \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_1 \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C_1 \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w},
\end{aligned}
$$

o que prova ii), e mais ainda, que $\alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \pi_{(p;q)}(u)$, onde α_2 representa o ínfimo das constantes em iii).

iii) $\Longrightarrow$ i) Segue de iii) que $(\widehat{u}(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\mathcal{Y})$ sempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q^w(\mathcal{X})$. Note que

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{u}\| &= \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} \|\widehat{u}((x_n)_{n=1}^{\infty})\|_p \\
&= \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} \left(\sum \|u(x_n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} C_2 \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} = C_2.
\end{aligned}
$$

Isso prova i), e ainda que $\pi_{(p;q)}(u) = \|\widehat{u}\| \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \pi_{(p;q)}(u)$.

iii) $\Longrightarrow$ iv) Obvio, pois $\ell_q^u(\mathcal{X}) \subset \ell_q^w(\mathcal{X})$ e $\pi_{(p;q)}(u) = \pi_{(p;q)}(u)$.

iv) $\Longrightarrow$ v) Se $(x_n)_n \in \ell_q^u(\mathcal{X}) \subset \ell_q^w$, então, por

$$
\|(x_n)_n\|_{q,w} = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_n |f(x_n)|^q \right)^{\frac{1}{q}}
$$

ser finito, temos

$$
\left(\sum_n \|ux_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_3 . \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_n |f(x_n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.
$$

Portanto $(ux_n)_n \in \ell_p(\mathcal{Y})$.

v) $\Longrightarrow$ i) O operador linear

$$
\begin{aligned}
\widetilde{u} : \quad \ell_q^u(\mathcal{X}) &\longrightarrow \ell_p(\mathcal{Y}) \\
(x_n)_{n=1}^{\infty} &\longmapsto (ux_n)_{n=1}^{\infty}
\end{aligned}
$$

é bem definido por v). Repetindo o argumento usado em i) $\Longrightarrow$ ii), concluímos que Graf($\widetilde{u}$) é fechado, e portanto, $\widetilde{u}$ é limitado. Dados n natural e $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$, consideramos $(x_i)_{i=1}^n \in \ell_q^u(\mathcal{X})$. Pela continuidade de $\widetilde{u}$, segue

$$
\left(\sum_{n=1}^{n} \|ux_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|\widetilde{u}(x_i)_{i=1}^n\|_p \leq \|\widetilde{u}\| . \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,w}
$$

$$= \|\widetilde{u}\|. \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

provando i) e $\pi_{(p;q)(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(u) = \|\widetilde{u}\| = \alpha_1 \leq \|\widetilde{u}\| = \alpha_3 \leq \|\widetilde{u}\| = \pi_{(p;q)(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(u)$. Disso concluimos a igualdade entre os ínfimos.

□

Proposição 1.12. $\left(\Pi_{(p;q)}(\mathcal{X},\mathcal{Y}), \pi_{(p;q)}(\cdot)\right)$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração. Sejam $u, v \in \Pi_{(p;q)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Mostraremos que $u + \lambda v$ satisfaz a desigualdade do item ii) da proposição anterior. Sabemos que, como u e $v \in \Pi_{(p;q)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ vale

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{(p;q)}(u) \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{i=1}^{m} \|f(x_i)\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{(p;q)}(v) \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{i=1}^{m} \|f(x_i)\|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n$ em $\mathcal{X}$. A desigualdade de Minkowski nos dá

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{m} \|(u+\lambda v)(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{m} \|v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\pi_{(p;q)}(u) + |\lambda|\pi_{(p;q)}(v)\right) \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{i=1}^{m} |f(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Logo $u + \lambda v \in \Pi_{(p;q)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Sejam $u, v \in \Pi_{(p;q)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\pi_{(p;q)}(u) \geq 0$$

e

$$\pi_{(p;q)}(u) = 0 \Leftrightarrow \|\widehat{u}\| = 0 \Leftrightarrow \widehat{u} = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Além disso

$$\pi_{(p;q)}(\lambda u) = \|\lambda \widehat{u}\| = |\lambda| \|\widehat{u}\| = |\lambda| \pi_{(p;q)}(u).$$

Portanto $\pi_{(p;q)}$ é uma norma. □

Proposição 1.13. Para cada $u \in \pi_{(p;q)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $\|u\| \leq \pi_{(p;q)}(u)$, isto é, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \leq \Pi_{(p;q)}(\cdot)$.

Demonstração. Tomando $n = 1$ no item i) da Proposição 1.11, temos

$$\|u\| = \sup_{x\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \|ux\| \leq \sup_{x\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\Pi_{(p;q)}(u) \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} |f(x)|\right) = \Pi_{(p;q)}(u) \sup_{x\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sup_{f\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} |f(x)| = \Pi_{(p;q)}(u).$$

□

Proposição 1.14. Se $p < q$, então $\Pi_{(p;q)}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \{0\}$.

Demonstração. Como $q > p$, existe $(\lambda_n)_n \in \ell_q \setminus \ell_p$. Logo, fixado $x \in \mathcal{X} \setminus 0$, $(\lambda_n x) \in \ell_q(\mathcal{X}) \subset \ell_q^w(\mathcal{X})$. Suponhamos que exista $u \in \prod_{(p;q)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, um operador não nulo. Consequentemente, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|ux\| \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \|u \cdot \lambda_i x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C. \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(\lambda_i x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C. \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{f \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} |f(x)| \\
&\leq C.\|x\| \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Para todo n natural. Tomando $\sup n \to \infty$, obtemos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

o que significaria $(\lambda_n)_n \in \ell_p$, contradizendo $(\lambda_n)_n \in \ell_q \setminus \ell_p$.

□

Teorema 1.15. $\left(\Pi_{(p;q)}(\mathcal{X},\mathcal{Y}), \pi_{(p;q)}(\cdot)\right)$ *é Banach.*

Demonstração. Vamos supor que $1 \leq q \leq p < \infty$, uma vez que quando $p < q$ temos o caso trivial $\Pi_{(p;q)}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \{0\}$. Seja $(u_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $\left(\Pi_{(p;q)}(\mathcal{X},\mathcal{Y}), \pi_{(p;q)}(\cdot)\right)$. Pela Proposição 1.13 segue que $(u_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, logo converge para $u \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Definamos

$$\begin{aligned}
\widehat{u}: \ \ell_q^w(\mathcal{X}) &\longrightarrow \ell_p^w(\mathcal{Y}) \\
(x_n)_n &\longmapsto (ux_n)_n.
\end{aligned}$$

Note que $\widehat{u}$ é linear e limitado, pois herda a linearidade de u e,

$$\|\widehat{u}((x_n)_n)\|_{p,w} = \|(ux_n)_n\|_{p,w} \leq \|u\| \cdot \|(x_n)_n\|_{p,w}.$$

A desigualdade acima é justificada pelo fato de $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$ sempre que $q \leq p$. Para cada n natural, consideremos o operador linear limitado induzido $\widehat{u}_n$, como na definição. Como $\pi_{(p;q)}(u_n) = \|\widehat{u}_n\|$, $(\widehat{u}_n)_n$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(\ell_q^w(\mathcal{X}), \ell_p(\mathcal{Y}))$, que é um espaço de Banach, logo converge para $u \in \mathcal{L}\left(\ell_q^w(\mathcal{X}), \ell_p(\mathcal{Y})\right)$. Com isso, dada $(x_k)_k \in \ell_q^w(\mathcal{X})$, consideremos

$(y_k)_k = w \cdot (x_k)_k \in \ell_p(\mathcal{Y})$. Fixado $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$\|x_n \cdot x_k - y_k\| \leq \|(u_n \cdot x_k - y_k)_k\|_p = \|\widehat{u}_n(x_k)_k - w(x_k)_k\|_p \to 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} u_n \cdot x_k = y_k.$$

Por outro lado, $u_n \to u$ implica $\lim_{n\to\infty} u_n \cdot x_k = u \cdot x_k$. Portanto, $y_k = u \cdot x_k$, para cada k natural fixado e consequentemente, $\widehat{u}(x_k)_k = (u \cdot x_k)_k = (y_k)_k = w \cdot (x_k)_k$, isto é, $\widehat{u} = w \in \mathcal{L}(\ell_q^w(\mathcal{X}), \ell_p(\mathcal{Y}))$.

□

Proposição 1.16. Todo operador $u \in \mathcal{L}(\ell_q^w(\mathcal{X}), \ell_p(\mathcal{Y}))$ de posto finito é absolutamente p-somante.

Demonstração. Seja u um operador limitado de posto 1, então existem $y \in \mathcal{Y} \setminus \{0\}$ e $f \in \mathcal{X}' \setminus \{0\}$ tais que

$$u(x) = f(x) \cdot y,$$

para cada $x \in \mathcal{X}$ e, consequentemente, vemos que

$$\|u\| = \|f\| \cdot \|y\|.$$

Com isso, para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \|ux_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^n \|f(x_i).y\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \left\|\|f\|.\frac{f}{\|f\|}.(x_i).y\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\| \cdot \|y\| \left(\sum_{i=1}^n |\frac{f}{\|f\|}(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|f\|\|y\|\|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w}.
\end{aligned}$$

As Proposições 1.11 e 1.13 garantem que u e p-somante e que $\pi_p(u) = \|u\|$. Note que, um operador de posto finito é uma combinação linear de operadores de posto 1, portanto, é também um operador p-somante. □

O resultado a seguir é um teorema clássico sobre inclusão de operadores lineares absolutamente somantes, que apesar de ser um resultado básico de inclusão é muito útil.

Teorema 1.17 (Inclusão linear). *Se $s \geq r, q \geq p$ e $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{q} - \frac{1}{s}$, então todo operador linear absolutamente $(r;p)$-somantes é absolutamente $(s;q)$-somante.*

1.2 Operadores multilineares absolutamente somantes

Essa seção tem como objetivo apresentar alguns resultados da teoria dos operadores multilineares absolutamente somantes (ver [13], [21] e [27]).

Definição 1.4. T é um operador $(p; q_1, \cdots, q_m)$-somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\|T\left(x_j^1, \cdots, x_j^m\right)\right\|_p \leq C \prod_{s=1}^{m} \left\|\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_s},$$

para todas $(x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_k}^w$, $k = 1, \ldots, m$. Além disso, o ínfimo das constantes C que satisfazem a desigualdade acima, define uma norma no espaço $\Pi_{(p;\mathbf{q})}^{m,\mathrm{as}}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$ e será denotada por $\pi_{\mathrm{as}(p;\mathbf{q})}$, onde $\mathbf{q} := (q_1, \cdots, q_m)$.

A próxima proposição traz um resultado muito importante de inclusão. Para ver a demonstração consultar [12].

Proposição 1.18. Sejam $s \leq \tilde{s}$ e $r_j \leq \tilde{r}_j$, mais ainda, $\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n} - \frac{1}{s} \leq \frac{1}{\tilde{r}_1} + \cdots + \frac{1}{\tilde{r}_n} - \frac{1}{\tilde{s}}$, então

$$\Pi_{(s;r_1,\ldots,r_n)}^{m,\mathrm{as}}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n; \mathcal{Y}) \subset \Pi_{(\tilde{s};\tilde{r}_1,\ldots,\tilde{r}_n)}^{m,\mathrm{as}}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n; \mathcal{Y})$$

e

$$\pi_{\mathrm{as},(s;r_1,\ldots,r_n)}(\cdot) \geq \pi_{\mathrm{as},(\tilde{s};\tilde{r}_1,\ldots,\tilde{r}_n)}(\cdot).$$

O teorema abaixo mostra um importante resultado de coincidência.

Teorema 1.19. *(Defant-Voigt generalizado [21, Th.5.13]) Sejam $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$ e $\mathbf{q} := (q_1, \ldots, q_s)$, e suponha que existe $1 \leq r < m$ e $C > 0$ tais que para qualquer $x_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, x_r \in \mathcal{X}_r$, a aplicação s-linear $(s = m - r)$ $A_{x_1,\ldots,x_r}(x_{r+1}, \ldots, x_m)$ é absolutamente $(p; \mathbf{q})$-somante e*

$$\pi_{as,(p;\mathbf{q})}(A_{x_1,\ldots,x_r}) \leq C\|A\|\|x_1\| \cdots \|x_r\|,$$

então A é absolutamente $(p; 1, \ldots, 1, \mathbf{q})$-somante. Em particular

$$\mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) = \Pi_1^{m,as}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}).$$

Teorema 1.20. *([21, Th.5.14]) $\Pi_{(1;2)}^{as}({}^n c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}({}^n c_0; \mathbb{K})$ para todo $n \geq 2$.*

Teorema 1.21. *(Blasco, Botelho, Pellegrino, Rueda, 2010 [21, Th.5.15]) Seja $1 \leq r \leq 2$. Se $\mathcal{L}({}^2\mathcal{X}; \mathbb{K}) = \Pi_{(1;r)}^{as}({}^2\mathcal{X}; \mathbb{K})$ e $\mathcal{L}({}^3\mathcal{X}; \mathbb{K}) = \Pi_{(1;r)}^{as}({}^3\mathcal{X}; \mathbb{K})$, então*

$$\mathcal{L}({}^n\mathcal{X}; \mathbb{K}) = \Pi_{(1;r)}^{as}({}^n\mathcal{X}; \mathbb{K}),$$

para todo $n \geq 2$.

1.3 Operadores multilineares múltiplo somante

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e definições sobre a teoria dos operadores multilineares múltiplo somante, mas não demostraremos os resultados pois, as demonstrações são análogas as que estão presentes no capitulo 2.

Definição 1.5. Um operador multilinear limitado T $\in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$ será denominado múltiplo $(q; \mathbf{p})$-somante se existe uma constante $C \geq 0$ que cumpre

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \|T(x^1_{i_1}, \ldots, x^m_{i_m})\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \cdot \prod_{k=1}^{m} \|(x^k_i)_{i=1}^N\|_{p_k,w},$$

para quaisquer $N \in \mathbb{N}$ e $x^k_i \in \mathcal{X}_k, \ i, \ldots, N, \ k = 1, \ldots, m$. A classe dos operadores múltiplo $(q; p_1, \ldots, p_m)$-somantes é representada por $\Pi^{m,\text{mult}}_{q;\mathbf{p}}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$, e, naturalmente é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$. O ínfimo das constantes C anteriores define uma norma denotada por $\pi_{\text{mult}(q;\mathbf{p})}(\cdot)$. Quando $p = p_1 = \cdots = p_m$ e $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 = \cdots = \mathcal{X}_m$, simplesmente escrevemos $\left(\Pi^{m,\text{mult}}_{(q,p)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \pi_{\text{mult}(p;q)}(\cdot)\right)$.

Os resultados apresentados a seguir são facilmente adaptados para o caso dos operadores múltiplo somantes com múltiplos expoentes, e suas demonstrações são análogas. Portanto, deixaremos para demonstra-los no Capitulo 2, onde falaremos melhor desta classe de operadores.

A proposição a seguir traz uma caracterização dos operadores múltiplo $(q; p_1, \ldots, p_m)$-somantes, e conseguimos mostrar existe uma isometria entre a classe desses operadores e o espaço $\mathcal{L}\left(\ell^w_{p_1}(\mathcal{X}_1), \ldots, \ell^w_{p_m}(\mathcal{X}_m); \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})\right)$.

Proposição 1.22. Sejam $q, p_1, \ldots, p_m \in [1, \infty]$, $\mathbf{q} \overset{def}{=} (q, \overset{\text{m vezes}}{\ldots}, q)$ e T : $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_m \to \mathcal{Y}$ um operador m-linear. São equivalentes:

i) T é múltiplo $(q; p_1, \ldots, p_m)$-somante;

ii) $\left(T\left(x^1_{i_1}, \ldots, x^m_{i_m}\right)\right)_{i_1,\ldots i_m \in \mathbb{N}} \in \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})$ sempre que $(x^k_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^w_{p_k}$, $k = 1, \ldots, m$.

Neste caso, os espaços $\Pi^{m,\text{mult}}_{(q;\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$ e $\mathcal{L}\left(\ell^w_{p_1}(\mathcal{X}_1), \ldots, \ell^w_{p_m}(\mathcal{X}_m); \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})\right)$ são isometricamente isomorfos via a correspondência que associa a cada operador múltiplo $(q; p_1, \ldots, p_m)$-somante $T : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_m \to \mathcal{Y}$, o operador m-linear $\widehat{T} : \ell^w_{p_1}(\mathcal{X}_1) \times \cdots \times \ell^w_{p_m}(\mathcal{X}_m) \to \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})$ definido por

$$\widehat{T}\left((x^1_i)_{i\in\mathbb{N}}, \ldots, (x^m_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) \overset{def}{=} \left(T(x^1_{i_1}, \ldots, x^m_{i_m})\right)_{i_1,\ldots,i_m\in\mathbb{N}}.$$

Os resultados a seguir revelam comportamento da classe dos operadores multilineares múltiplos $(p; q)$-somantes. Provaremos nos capítulos seguintes resultados que englobam esses apresentados abaixo.

Proposição 1.23. Se $q < p_j$ para algum $1 \leq j \leq m$, então $\Pi_{q;p_1,\ldots,p_m}^{m,\text{mult}}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) = \{0\}$.

Proposição 1.24. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})} \leq \pi_{\text{mult}(q;\mathbf{p})}(\cdot)$.

Teorema 1.25. $\left(\Pi_{(q;\mathbf{p})}^{m,mult}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}), \pi_{mult(q;\mathbf{p})}(\cdot)\right)$ *é Banach.*

Capítulo 2

Operadores múltiplo somantes com múltiplos expoentes

O principal objetivo desse capítulo é apresentar a classe de operadores múltiplos somantes com múltiplos expoentes, a saber, os operadores $(\mathbf{p},\mathbf{q})$-somantes . A primeira seção fala sobre a motivação para o estudo dos operadores múltiplo somantes com múltiplos expoente, mostrando um pouco do contexto histórico e sobre as Desigualdades de Hardy-Littlewood e Bohnenblust-Hille. A segunda seção apresenta o conceito de operador múltiplo somante com múltiplos expoente e apresenta alguns resultados que caracterizam essa classe de operadores. Por último, na seção 3, apresentaremos uma serie de importantes resultados de inclusão.

2.1 Motivação para o estudo dos operadores múltiplo somantes com múltiplos expoentes

Com o interesse em resolver um problema envolvendo a largura máxima da faixa vertical no plano na qual uma série de Dirichlet $\sum_n a_n n^{-s}$ converge uniformemente mas não absolutamente, F. Bohnenblust e E. Hille conseguiram, não apenas resolver o problema em questão como também obtiveram uma generalização da famosa Desigualdade 4/3 de Littlewood. Atualmente essa generalização é conhecida com a Desigualdade de Bohnenblust-Hille, afirma que, para cada inteiro positivo $m \geq 1$, existe uma constante positiva $B_{\mathbb{K},m}^{mult} \geq 1$, tal que

$$\left(\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},\cdots,e_{j_n})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m}^{mult}\|T\|,$$

quaisquer que sejam o inteiro positivo n e a forma m-linear $T : \ell_\infty^n \times \cdots \times \ell_\infty^n \to \mathbb{K}$. Mais ainda, o expoente $2m/(m+1)$ é ótimo. A otimalidade do expoente $2m/(m+1)$ significa o seguinte: é o menor expoente para qual a desigualdade ocorre e a contante $B_{\mathbb{K},m}^{mult}$ dependa apenas de m.

A Desigualdade de Bohnenblust-Hille, além de interesse matemático intrínseco, possui aplicações em diversos campos da análise, na teoria analítica dos números e ainda, aplicações na Teoria Quântica da Informação. Atualmente essa desigualdade possui uma forma generalizada, a qual apresentaremos ao final da próxima seção.

No contexto dos operadores múltiplos somantes, foi mostrado em [1], que a Desigualdade de Bohnenblust-Hille é traduzida no seguinte resultado de inclusão.

Proposição 2.1. Para todo inteiro positivo m e espaços de Banach $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m$.

$$\Pi^{m,mult}_{\left(\frac{2m}{m+1};1\right)}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K})$$

e existe $C_m > 0$ tal que

$$\pi_{\text{mult}\left(\frac{2m}{m+1};1\right)}(\cdot) \leq C_m \| \cdot \|.$$

Posteriormente, algumas generalizações da versão clássica da Desigualdade de Bohnenblust–Hille e Hardy-Littlewood foram obtidas (ver em [2], [10]). A versão unificada desses resultados resume-se como apresentado a seguir. Por simplicidade, convencionamos a seguinte notação: X_p representa os espaços ℓ_p ou ℓ_∞, $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| = \sum_k \frac{1}{p_k}$, e $e_{\mathbf{i}} := (e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})$, para um multi-índice $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m$ fixado.

Teorema 2.2 (Generalização das Desigualdades Bohnenblust–Hille / Hardy–Littlewood / Praciano–Pereira / Dimant–Sevilla)**.** *Sejam $m \geq 1$ e $\mathbf{p} := (p_1, \cdots, p_m) \in [1, \infty]^m$.*

(1) Se $0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$ e $\mathbf{q} := (q_1, \cdots, q_m) \in \left[\left(1 - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1}, 2\right]^m$, então existe uma constante $C^{mult}_{\mathbb{K},m,\mathbf{p},\mathbf{q}}$ tal que,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |Te_{\mathbf{i}}|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C^{mult}_{\mathbb{K},m,\mathbf{p},\mathbf{q}} \|T\|,$$

para toda forma m-linear contínua $T : X_{p_1} \times \cdots \times X_{p_m} \to \mathbb{K}$, se, e somente se,

$$\left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| \leq \frac{(m+1)}{2} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|.$$

(2) Se $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$, então,

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |Tx_{\mathbf{i}}|^{\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|} \leq D^{mult}_{\mathbb{K},m,\mathbf{p}} \|T\|,$$

para toda forma m-linear contínua $T : X_{p_1} \times \cdots \times X_{p_m} \to \mathbb{K}$. Mais ainda, o expoente $\left(1 - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1}$ é ótimo.

Assim como a Desigualdade de Bohnenblust-Hille teve uma releitura no contexto de operadores múltiplos somantes, na Proposição 2.1, é natural questionar o seguinte:

> *"O Teorema 2.2 possui um correspondente no contexto de operadores múltiplo somantes?"*

Nas seções seguintes, veremos que a resposta para esta pergunta é positiva. Note que, no Teorema 2.2, o lado direito do item (1) lida com *normas mistas* de espaços ℓ_p, ou seja, deveremos lidar com operadores que envolvem tais normas, ou que possuem *múltiplos expoentes*. A necessidade desta noção será introduzida a seguir.

2.2 Operadores múltiplos $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$-somantes com múltiplos expoentes

Neste capítulo lidaremos com a versão multi-índice do espaço das sequências fortemente p-somáveis. Sabemos que

$$\ell_p(\mathcal{X}) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} : \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p < \infty\}.$$

Consideremos os espaços $\ell_{p_1}(\mathcal{X})$ e $\ell_{p_2}(\mathbb{K})$, onde $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$, definidos no Capitulo 1, com $\mathcal{X}$ Banach. Se $\mathcal{X} = \ell_{p_2}(\mathbb{K})$ temos que

$$\ell_{p_1}(\ell_{p_2}) := \ell_{p_1}(\ell_{p_2}(\mathcal{X})) = \left\{\mathbf{x} = (x^i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_2}^{\mathbb{N}} : (\|x^i\|_{p_2})_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_1}\right\}$$

Note que cada $(x^i)_{i=1}^{\infty} = (x^1, x^2, \cdots, x^i, \cdots)$ possui cada entrada $x^i = (x_{i,j})_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_2}$. Com isso, $\mathbf{x} \in \ell_{p_1}(\ell_{p_2})$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_{p_1,p_2} &:= \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{p_1} \\
&= \|(\|x_i\|_{p_2})_{i=1}^{\infty}\|_{p_1} \\
&= \left\| \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{i,j}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p_1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{i,j}|^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} < \infty.
\end{aligned}$$

Repetindo esse processo finitas vezes, construímos o espaço $\ell_{\mathbf{p}}$. Para $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_m) \in [1, +\infty]^m$, o espaço

$$\ell_{\mathbf{p}}(X) := \ell_{p_1}\left(\ell_{p_2}\left(\cdots\left(\ell_{p_m}(X)\right)\cdots\right)\right)$$

reúne as matrizes vetoriais $\mathbf{x} := (x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m} \in X^{\mathbb{N}^m}$ que possuem $\mathbf{p}$-norma finita, onde $\mathbf{i} := (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m$ representa um multi-índice. Em particular para $\mathbf{p} \in [1, +\infty)^m$,

$\mathbf{x} \in \ell_{\mathbf{p}}$ se, e somente se,

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{p}} := \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} \|\mathbf{x_i}\|_X^{p_m} \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} < \infty.$$

Quando $X = \mathbb{K}$, simplesmente escreveremos $\ell_{\mathbf{p}}$.

A próxima definição generaliza os operadores múltiplo somantes para vários expoentes (foi introduzido em [5]).

Definição 2.1. Sejam $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, +\infty)^m$. Um operador multilinear $T : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_m \to \mathcal{Y}$ é *múltiplo* $(\mathbf{q}; \mathbf{p})$*-somante*, se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} \|Tx_{\mathbf{i}}\|_{\mathcal{Y}}^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \prod_{k=1}^{m} \left\| x^k \right\|_{w,p_k},$$

para todo $x^k := \left(x_j^k\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)$, onde $Tx_{\mathbf{i}} := T\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_m}^m\right)$. Representaremos a classe de todos os operadores múltiplos $(\mathbf{q}; \mathbf{p})$-somantes por $\Pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^{m,\text{mult}}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$. Quando $q_1 = \cdots = q_m = q$, $p_1 = \cdots = p_m = p$, escreveremos $(q; \mathbf{p})$, $(\mathbf{p}; q)$ no lugar de $(\mathbf{q}; \mathbf{p})$, respectivamente. O ínfimo das constantes $C > 0$ define uma norma nessa classe de operadores, denotada por $\pi_{\text{mult}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(\cdot)$.

O próximo resultado é similar ao resultado do caso linear apresentado na Proposição 1.11 e fornece alternativas de provarmos quando um operador é $(\mathbf{q}; \mathbf{p})$-somante.

Proposição 2.3. Sejam $T : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_m \to \mathcal{Y}$ um operador multilinear contínuo e $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, +\infty)^m$. São equivalentes:

i) T é múltiplo $(\mathbf{q}; \mathbf{p})$-somante;

ii) $(Tx_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^m} \in \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})$ sempre que $x^k := \left(x_j^k\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)$, $k = 1, \ldots, m$;

iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \|Tx_{\mathbf{i}}\|_{\mathcal{Y}}^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \prod_{k=1}^{m} \left\| x^k \right\|_{w,p_k},$$

para todo inteiro positivo n e todo $x^k := \left(x_j^k\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ O resultado segue da definição de operadores múltiplos $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$-somante.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supondo (ii) podemos definir o operador m-linear

$$\widehat{T} : \ell_{p_1}^w(\mathcal{X}_1) \times \cdots \times \ell_{p_m}^w(\mathcal{X}_m) \longrightarrow \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}) \tag{2.1}$$

$$(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^m} := \left(x^1, \cdots, x^m\right) \quad \longmapsto \quad (Tx_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^m}.$$

Mostraremos que $\widehat{T}$ é contínuo usando o Teorema do Gráfico Fechado. Para cada $k = 1, \dots, m$, consideremos uma sequência $\left(x_n^k\right)_n$ em $\ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)$, *i.e.*, cada $x_n^k = (x_{n,j}^k)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)$, tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^k = x^k = \left(x_j^k\right)_j \in \ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k) \tag{2.2}$$

e $y := (y_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^m}$ tais que,

$$\lim_{n\to+\infty} \widehat{T}\mathbf{x}_n = y \in \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}) \tag{2.3}$$

com $\widehat{T}\mathbf{x}_n := \widehat{T}(x_n^1, \dots, x_n^m)$. De (2.2) temos que, dado $\varepsilon > 0$, para todo $k \in \{1..., m\}$ fixo, existe $N \in \mathbb{N}$ que satisfaz

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{\varphi\in B_{\mathcal{X}_k'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_{n,j}^k - x_j^k\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}} < \varepsilon,$$

então $n \geq N \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_{n,j}^k - x_j^k\right)\right|^{p_k} < \varepsilon^{p_k}$ para todo $\varphi \in B_{\mathcal{X}_k'}$ e todo $k \in \{1, ..., m\}$. Daí $\left|\varphi\left(x_{n,j}^k - x_j^k\right)\right| < \varepsilon$ para todo $\varphi \in B_{\mathcal{X}_k'}$ e todo $\{j, k\} \in \mathbb{N} \times \{1, ..., m\}$. Por Hahn-Bannach concluímos que

$$n \geq N \Rightarrow \|x_n^k - x^k\|_{\mathcal{X}_k} = \sup_{\varphi\in B_{\mathcal{X}_k'}} \left|\varphi\left(x_{n,j}^k - x_j^k\right)\right| < \varepsilon, \ \forall \{j, k\} \in \mathbb{N} \times \{1, ..., m\},$$

isto é, $\lim_n x_{n,j}^k = x_j^k$ em $\mathcal{X}_k$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $k \in \{1, ..., m\}$. Como T é um operador multilinear contínuo, segue que

$$\lim_{n\to\infty} T\left(x_{n,j_1}^1, \dots, x_{n,j_m}^m\right) = T\left(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_m}^m\right)$$

em $\mathcal{Y}$ para todos $j_1, \dots, j_m \in \mathbb{N}$ fixos. De (2.3), dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq M \Rightarrow \left\|\widehat{T}\left(\left(x_{n_1,j}^1\right)_{n_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{n_m,n}^m\right)_{n_m=1}^{\infty}\right) - y_{j_1,...,j_m}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} < \varepsilon,$$

ou seja,

$$n \geq M \Rightarrow \left\|T\left(x_{n_1,j}^1, ..., x_{n_m,j}^m\right) - y_{j_1,...,j_m}\right\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon$$

para todos $j_1, ..., j_m \in \mathbb{N}$ fixados. Pela unicidade do limite podemos concluir que $T\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_m}^m\right) = y_{j_1,...,j_m}$ para todos $j_1, ..., j_m \in \mathbb{N}$ fixados. Portanto

$$\widehat{T}\left(\left(x_{n_1,j}^1\right)_{n_1=1}^{\infty}, \dots, \left(x_{n_m,j}^m\right)_{n_m=1}^{\infty}\right) = \left(T\left(x_{n_1,j}^1, \dots, x_{n_m,j}^m\right)\right)_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} = y.$$

Logo, pelo Teorema do Gráfico Fechado concluímos que $\widehat{T}$ é um operador m-linear contínuo. Mais ainda, existe um $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\left(x_{n_1}^1, \cdots, x_{n_m}^m\right)\right)_{n_1,\cdots,n_m=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} &= \left\|\widehat{T}\left(\left(x_{n_1}^1\right)_{n_1=1}^{\infty}, \cdots, \left(x_{n_m=1}^m\right)_{n_m=1}^{\infty}\right)\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} \\ &\leq C\left\|\left(x_n^1\right)_{n=1}^{\infty}\right\|_{w,p_1} \cdots \left\|\left(x_n^m\right)_{n=1}^{\infty}\right\|_{w,p_m}.\end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (iii)$ Fixe $n \in \mathbb{N}$ e sejam $(x_n^1)_{n=1}^m \subseteq \mathcal{X}_1, \cdots, (x_n^m)_{n=1}^m \subseteq \mathcal{X}_m$. Então $\left(x_n^k\right)_{n=1}^{\infty} = \left(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k, 0, 0, \cdots\right) \in \ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$. Usando (i) temos

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\left(x_{n_1}^1, \cdots, x_{n_m}^m\right)\right)_{n_1,\ldots,n_m=1}^{n}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} &= \left\|\left(T\left(x_{n_1}^1, \cdots, x_{n_m}^m\right)\right)_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} \\ &\leq C\left\|\left(x_n^1\right)_{n=1}^{\infty}\right\|_{w,p_k} \cdots \left\|\left(x_n^m\right)_{n=1}^{\infty}\right\|_{w,p_k} \\ &= C\left\|\left(x_n^1\right)_{n=1}^{m}\right\|_{w,p_k} \cdots \left\|\left(x_n^m\right)_{n=1}^{m}\right\|_{w,p_k}.\end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Considere $(x_n^1)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_1}^w(\mathcal{X}_1), \cdots, \left(x_j^m\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_m}^w(\mathcal{X}_m)$.

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\left(x_{n_1}^1, \cdots, x_{n_m}^m\right)\right)_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} &= \sup_n \left\|\left(T\left(x_{n_1}^1, \cdots, x_{n_m}^m\right)\right)_{n_1,\ldots,n_m=1}^{n}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} \\ &\leq C \sup_n \left\|\left(x_n^1\right)_{n=1}^{n}\right\|_{w,p_1} \cdots \left\|\left(x_n^m\right)_{n=1}^{n}\right\|_{w,p_m} \\ &= C\left\|\left(x_n^1\right)_{n=1}^{\infty}\right\|_{w,p_1} \cdots \left\|\left(x_n^m\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p_m}.\end{aligned}$$

□

Observação 2.1. Dado $T \in \Pi_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}^{m,\text{mult}}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$, definimos em 2.1 o operador contínuo m-linear $\widehat{T}$. Mostraremos agora que

$$\|\widehat{T}\| = \pi_{\text{mult}(\mathbf{q},\mathbf{p})}(T). \tag{2.4}$$

De fato, primeiramente note que

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\left(x_{j_1}^1, \cdots, x_{j_m}^m\right)\right)_{j_1,\cdots,j_m=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} &= \left\|\widehat{T}\left(\left(x_j^1\right)_{j=1}^{\infty}, \cdots, \left(x_j^m\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} \\ &\leq \left\|\widehat{T}\right\| \prod_{k=1}^{m} \left\|\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p_k},\end{aligned}$$

isto é, $\pi_{\text{mult}(\mathbf{q},\mathbf{p})}(T) \leq \left\|\widehat{T}\right\|$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{T}\right\| &= \sup_{\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{B}_{\ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)}} \left\|\widehat{T}\left(\left(x_j^1\right)_{j=1}^{\infty}, \cdots, \left(x_j^m\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\| \\ &= \sup_{\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{B}_{\ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)}} \left\|\left(T\left(x_{j_1}^1, \cdots, x_{j_m}^m\right)\right)_{j_1,\cdots j_m=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{B}_{\ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)}} \pi_{\text{mult}(\mathbf{q},\mathbf{p})}(T) \prod_{k=1}^{m} \left\| \left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p_k} \\
&= \pi_{\text{mult}(\mathbf{q},\mathbf{p})}(T),
\end{aligned}
$$

o que prova a igualdade 2.4. Podemos naturalmente definir o operador linear contínuo

$$
\begin{aligned}
\hat{\Theta} : \Pi\left(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}\right) &\longrightarrow \mathcal{L}\left(\ell_{p_1}^w(\mathcal{X}_1), \cdots, \ell_{p_m}^w(\mathcal{X}_m); \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})\right) \\
T &\longmapsto \widetilde{T},
\end{aligned}
$$

que, devido a igualdade 2.4, é uma isometria.

Proposição 2.4. Seja $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, +\infty)^m$. Se $T \in \Pi_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}^{m,\text{mult}}(\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$, então

$$
\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,...,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})} \leq \pi_{\text{mult}(\mathbf{q},\mathbf{p})}(T).
$$

Demonstração. Considere $x_j \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}_j}$, $j = 1, ..., m$, e defina $\left(x_i^j\right)_{i=1}^{\infty} := (x_j, 0, \cdots)$. Claramente vemos que $\left(x_i^j\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_j}^w(\mathcal{X}_j)$ para todo $j = 1, ..., m$. Portanto, para $T \in \Pi_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}^{m,\text{mult}}(\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$,

$$
\begin{aligned}
\|T\left(x_1, \cdots, x_m\right)\|_{\mathcal{Y}} &= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \|T(x_{j_1}^1, ..., x_{j_m}^m)\|_{\mathcal{Y}}^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\leq \pi_{\text{mult}(\mathbf{q},\mathbf{p})}(T) \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{w,p_j} \\
&= \pi_{\text{mult}(\mathbf{q},\mathbf{p})}(T) \prod_{j=1}^{m} \sup \left(\sum_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}_j'}}^{\infty} |\varphi\left(x_i^j\right)|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}} \\
&= \pi_{\text{mult}(\mathbf{q},\mathbf{p})}(T) \prod_{j=1}^{m} \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}_k'}} |\varphi(x_j)| \\
&= \pi_{\text{mult}(\mathbf{q},\mathbf{p})}(T) \prod_{j=1}^{m} \|x_j\|_{\mathcal{X}_j} \\
&= \pi_{\text{mult}(\mathbf{q},\mathbf{p})}(T).
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 2.5. *Sejam* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, +\infty)^m$. *Então* $\left(\Pi_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}^{m,mult}\left(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}\right), \pi_{mult(\mathbf{q},\mathbf{p})}(\cdot)\right)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(T_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\Pi_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}^{m,\text{mult}}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$. Como

$\|\cdot\| \leq \pi_{\mathrm{mult}(\mathbf{q},\mathbf{p})}(\cdot)$ pela Proposição 2.4 segue que $(T_j)_{j=1}^{\infty}$ também é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\cdots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$ e portanto existe $T_j \to T$ em $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\cdots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$. Provaremos que $T \in \Pi^{m,\mathrm{mult}}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1,\cdots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$. Considere $(x_j^k)_{j=1}^{\infty} \subset \ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)$, $k=1,\cdots,m$. Basta mostrar que $\left(T\left(x_{j_1}^1,\cdots,x_{j_m}^m\right)\right)_{j_1,\cdots,j_m=1}^{\infty} \in \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})$. Como $\hat{\Theta}$ é uma isometria, $(\widehat{T}_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}\left(\ell_{p_1}^w(\mathcal{X}_1),\cdots,\ell_{p_m}^w(\mathcal{X}_m);\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})\right)$, que é um espaço de Banach, uma vez que $\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})$ é um espaço de Banach. Portanto, existe um operador m-linear $S \in \mathcal{L}\left(\ell_{p_1}^w(\mathcal{X}_1),\cdots,\ell_{p_m}^w(\mathcal{X}_m);\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})\right)$, tal que

$$\widehat{T}_j \to S \text{ em } \mathcal{L}\left(\ell_{p_1}^w(\mathcal{X}_1),\cdots,\ell_{p_m}^w(\mathcal{X}_m);\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})\right).$$

Entretanto, se nós considerarmos $P_{\mathbf{k}}:\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}) \to \mathcal{Y}$ um operador linear continuo, com $\mathbf{k}=(k_q,\cdots,k_m)$, dado por,

$$(y_{j_1,\cdots,j_m})_{j_1,\cdots,j_m=1}^{\infty} \longmapsto y_{k_1,\cdots,k_m},$$

e $\epsilon>0$ um número real positivo, existe um inteiro positivo N tal que

$$\begin{aligned}
& \left\|P_{\mathbf{k}}\left(S\left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty},\cdots,\left(x_{j_m}^m\right)_{j_m=1}^{\infty}\right)\right)-T\left(x_{k_1}^1,\cdots,x_{k_m}^m\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \\
\leq\ & \left\|P_{\mathbf{k}}\left(\widehat{T}_j\left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty},\cdots,\left(x_{j_m}^m\right)_{j_m=1}^{\infty}\right)\right)-P_{\mathbf{k}}\left(S\left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty},\cdots,\left(x_{j_m}^m\right)_{j_m=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \\
& +\left\|P_{\mathbf{k}}\left(\widehat{T}_j\left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty},\cdots,\left(x_{j_m}^m\right)_{j_m=1}^{\infty}\right)\right)-T\left(x_{k_1}^1,\cdots,x_{k_m}^m\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \\
=\ & \left\|P_{\mathbf{k}}\left(\widehat{T}_j\left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty},\cdots,\left(x_{j_m}^m\right)_{j_m=1}^{\infty}\right)-S\left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty},\cdots,\left(x_{j_m}^m\right)_{j_m=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \\
& +\left\|P_{\mathbf{k}}\left(T_j\left(x_{j_1}^1,\cdots,x_{j_m}^m\right)_{j_1,\cdots,j_m=1}^{\infty}\right)-T\left(x_{k_1}^1,\cdots,x_{k_m}^m\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \\
\leq\ & \|P_{\mathbf{k}}\|\left\|\widehat{T}_j\left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty},\cdots,\left(x_{j_m}^m\right)_{j_m=1}^{\infty}\right)-S\left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty},\cdots,\left(x_{j_m}^m\right)_{j_m=1}^{\infty}\right)\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} \\
& +\left\|T_j\left(x_{k_1}^1,\cdots,x_{k_m}^m\right)-T\left(x_{k_1}^1,\cdots,x_{k_m}^m\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \\
\leq\ & C\|P_{\mathbf{k}}\|\left\|\widehat{T}_j-S\right\|+C\|T_j-T\| \\
<\ & \epsilon.
\end{aligned}$$

para todo $j \geq N$. Então $P_{k_1,\cdots,k_m}\left(S\left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty},\cdots,\left(x_{j_m}^m\right)_{j_m=1}^{\infty}\right)\right)=T\left(x_{k_1}^1,\cdots,x_{k_m}^m\right)$ para todo $k_1,\cdots,k_m \in \mathbb{N}$, e consequentemente

$$S\left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty},\cdots,\left(x_{j_m}^m\right)_{j_m=1}^{\infty}\right)=T\left(x_{k_1}^1,\cdots,x_{k_m}^m\right)_{j_1,\cdots,j_m=1}^{\infty}.$$

Isso prova que $\left(T\left(x_{j_1}^1,\cdots,x_{j_m}^m\right)\right)_{j_1,\cdots,j_m=1}^{\infty} \in \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})$ como queriamos.

Por definição temos $\widehat{T}\left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty},\cdots,\left(x_{j_m}^m\right)_{j_m=1}^{\infty}\right)=\left(T\left(x_{k_1}^1,\cdots,x_{k_m}^m\right)\right)_{j_1,\cdots,j_m=1}^{\infty}$. Substituindo na expressão acima concluimos que $\widehat{T}=S$. Portanto, dado $\epsilon>0$, segue de (2.4) que, para um j suficientemente grande,

$$\pi_{\text{mult}(\mathbf{q},\mathbf{p})}(T_i - T) = \|T_j - T\| = \|\widehat{T}_j - \widehat{T}\| = \|\widehat{T}_j - S\| < \epsilon$$

isto é, $T_j \to T$ em $\Pi^{m,\text{mult}}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$, e o resultado segue.

□

Proposição 2.6. Se $q_j < p_j$, para algum $j \in \{1, \cdots, m\}$, então

$$\Pi^{m,\text{mult}}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) = \{0\}.$$

Demonstração. Como $q_j < p_j$, existe uma sequência $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_j} \backslash \ell_{q_j}$. Seja $x_j \in \mathcal{X}_j \backslash \{0\}$. Então para todo $\varphi \in \mathcal{X}'_j$ temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(\alpha_i x_j)|^{p_j} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi\|^{p_j} |\alpha_i|^{p_j} \|x_j\|^{p_j} = \|\varphi\|^{p_j} \|x_j\|^{p_j} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{p_j} < \infty,$$

i.e., $(\alpha_i x_j)_{i=1}^{\infty} \in \ell^w_{p_j}(\mathcal{X}_j)$. Por contradição, assumiremos que existe

$$T \in \Pi^{m,\text{mult}}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) \backslash \{0\}.$$

Então, podemos escolher $x_k \in \mathcal{X}_k \backslash \{0\}$, $k \in \{1, \cdots, m\} \backslash \{j\}$, tal que $T(x_1, \cdots, x_m) \neq 0$. Para cada $k \in \{1, \cdots, m\} \backslash \{j\}$ consideraremos $(x_i^k)_{i=1}^{\infty} = (x_k, 0, \cdots)$. Se $(x_i^k)_{i=1}^{\infty} \in \ell^w_{p_k}(\mathcal{X}_k)$ para todo $k \in \{1, \cdots, m\} \backslash \{j\}$ e $(\alpha_i x_j)_{i=1}^{\infty} \in \ell^w_{p_j}(\mathcal{X}_j)$, a Proposição (2.1) assegura que

$$\begin{aligned} &\left\| \left(T\left(x^1_{i_1}, \cdots, x^{(j-1)}_{i_{j-1}}, \alpha_{ij} x_j, x^{(j+1)}_{i_{j+1}}, \cdots, x^m_{i_m} \right) \right)_{i_1, \cdots, i_m = 1}^{\infty} \right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} \\ &\qquad \leq C \left(\prod_{k=1, k\neq j}^{m} \left\| (x_i^k)_{i=1}^{\infty} \right\|_{w, p_k} \right) \left\| (\alpha_i x_j)_{i=1}^{\infty} \right\|_{w, p_j}. \end{aligned}$$

Contudo,

$$\begin{aligned} &\left\| \left(T\left(x^1_{i_1}, \cdots, x^{(j-1)}_{i_{j-1}}, \alpha_{ij} x_j, x^{(j+1)}_{i_{j+1}}, \cdots, x^m_{i_m} \right) \right)_{i_1, \cdots, i_m = 1}^{\infty} \right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} \\ &= \left(\sum_{i_j=1}^{\infty} \left\| T\left(x_1, \cdots, x_{j-1}, \alpha_{i_j} x_j, x_{j+1}, \cdots, x_m \right) \right\|^{q_j} \right)^{\frac{1}{q_j}} \\ &= \|T(x_1, \cdots, x_m)\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{q_j} \right)^{\frac{1}{q_j}} \end{aligned}$$

Com isso,

$$\|T(x_1, \cdots, x_m)\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{q_j} \right)^{\frac{1}{q_j}} \leq C \left(\prod_{k=1, k\neq j}^{m} \left\| (x_i^k)_{i=1}^{\infty} \right\|_{w, p_k} \right) \left\| (\alpha_i x_j)_{i=1}^{\infty} \right\|_{w, p_j}.$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{q_j} < \infty$, o que contradiz $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_j} \backslash \ell_{q_j}$. $\square$

Lema 2.7. A correspondência $u \longmapsto (ue_n)_n$ fornece um isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}(\ell'_p, \mathcal{X})$ em $\ell_p^w(\mathcal{X})$ quando $1 < p < \infty$. Para $p = 1$, o isomorfismo isométrico é de $\mathcal{L}(c_0, \mathcal{X})$ em $\ell_1^w(\mathcal{X})$.

A demostração completa desse lema está apresentada no apêndice. Os próximos resultados são releituras das Desigualdades de Bonhenblust-Hille e Hardy-Littlewood para essa nova classe de operadores, respondendo afirmativamente ao problema proposto no início do capítulo:

> *"O Teorema 2.2 possui um correspondente no contexto de operadores múltiplo somantes?"*

Proposição 2.8 (Releitura da Desigualdade de Bohnenblust-Hille)**.** Se $\mathbf{q} = (q_1, \cdots, q_m) \in [1,2]^m$ é tal que $|\frac{1}{\mathbf{q}}| \leq \frac{m+1}{2}$, então

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |Tx_{\mathbf{i}}|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq \mathrm{B}_{\mathbb{K},m,\mathbf{q}}^{\mathrm{mult}} \|T\| \prod_{k=1}^{m} \|(x_i^k)_{i=1}^{\infty}\|_{w,1},$$

para toda forma $T : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_m \longrightarrow \mathbb{K}$ e toda sequencia $(x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(\mathcal{X}_k),\ k = 1, \cdots, m$. Em outras palavras, temos a seguinte coincidência de espaços:

$$\Pi_{(\mathbf{q};1)}^{m,\mathrm{mult}}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K}).$$

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K})$ e $(x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(\mathcal{X}_k),\ k = 1, \ldots, m$. Pelo Lema 2.7, é garantida a continuidade do operador linear

$$\begin{aligned} u_k : \quad c_0 &\longrightarrow \mathcal{X}_k \\ (e_j) &\longmapsto u(e_j) = x_j^k \end{aligned}$$

e $\|u_k\| = \|(x_j^k)_{j=1}^{\infty}\|_{w,1}$ para cada $k = 1, \ldots, m$. Então, $S : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{K}$ definido por $S(y^1, \ldots, y^m) = T(u_1(y^1), \ldots, u_m(y^m))$ é um operador m-linear limitado e $\|S\| \leq \|T\| \|u_1\| \cdots \|u_m\|$. Portanto,

$$\left(\sum_{j_1 \ldots, j_m=1}^{\infty} |T(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_m}^m)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} = \left(\sum_{j_1 \ldots, j_m=1}^{\infty} |S(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}}.$$

Pelo Teorema 2.2 temos a seguinte desigualdade:

$$\left(\sum_{j_1 \ldots, j_m=1}^{\infty} |S(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq \mathrm{B}_{\mathbb{K},m,\mathbf{q}}^{\mathrm{mult}} \|S\|,$$

portanto,

$$\left(\sum_{j_1\dots,j_m=1}^{\infty}|T(x^1_{j_1},\dots,x^m_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \le \mathrm{B}^{\mathrm{mult}}_{\mathbb{K},m,\mathbf{q}}\|T\|\prod_{k=1}^{m}\|u_k\|$$
$$= \mathrm{B}^{\mathrm{mult}}_{\mathbb{K},m,\mathbf{q}}\|T\|\prod_{k=1}^{m}\|(x^k_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,1},$$

como queríamos. $\square$

Proposição 2.9 (Releitura da Desigualdade de Hardy-Littlewood)**.** Sejam $m \ge 1$, $\mathbf{p} := (p_1,\cdots,p_m) \in [1,\infty]^m$ e $\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m$ Banach.

(1) Se $0 \le \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \le \frac{1}{2}$ e $\mathbf{q} := (q_1,\cdots,q_m) \in \left[\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1},2\right]^m$ são tais que $\left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| \le \frac{(m+1)}{2} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|$, então,

$$\Pi^{m,\mathrm{mult}}_{(\mathbf{q},p_1^*,\cdots,p_m^*)}(\mathcal{X}_1,\cdots,\mathcal{X}_m;\mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\cdots,\mathcal{X}_m;\mathbb{K}).$$

(2) Se $\frac{1}{2} \le |1/\mathbf{p}| < 1$, então,

$$\Pi^{m,\mathrm{mult}}_{((1-|1/\mathbf{p}|)^{-1};p_1^*,\cdots,p_m^*)}(\mathcal{X}_1,\cdots,\mathcal{X}_m;\mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\cdots,\mathcal{X}_m;\mathbb{K}).$$

Demonstração. (1) Devemos provar que existe uma constante $C^{\mathrm{mult}}_{\mathbb{K},m,\mathbf{p},\mathbf{q}}$ tal que, para toda forma m-linear contínua $T:\mathcal{X}_1\times\cdots\times\mathcal{X}_m\to\mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|Tx_{\mathbf{i}}|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \le C^{\mathrm{mult}}_{\mathbb{K},m,\mathbf{p},\mathbf{q}}\|T\|\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,p_k'},$$

quaisquer que sejam as sequências $x^k := (x^k_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^w_{p_k'}(\mathcal{X}_k)$, $k = 1,\cdots,m$. Considere $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m;\mathbb{K})$ e $e_{\mathbf{i}} := (e_i)_{i=1}^{m}$. Pelo Lema 2.7, sabemos que o operador

$$\begin{aligned} u_k :& \ell'_{p_k} \longrightarrow \mathcal{X}_k \\ & e_j \longmapsto u_k(e_j) = (x^k_j)_{j=1}^{k} \end{aligned} \quad ,$$

é limitado e $\|u_k\| = \|(x^k_j)_{j=1}^{k}\|_{w,p_k'}$. Então, $S:\ell'_{p_1}\times\cdots\times\ell'_{p_m}\to\mathbb{K}$ definido por $S(y^1,\dots,y^m) = T(u_1(y^1),\dots,u_m(y^m))$ é um operador m-linear limitado e $\|S\| \le \|T\|\|u_1\|\cdots\|u_m\|$. Portanto,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\cdots\left(\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|Tx_{\mathbf{i}}|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} = \left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\cdots\left(\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|Tu(e_{\mathbf{i}})|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$= \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \left(\left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |S(e_{\mathbf{i}})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Pelo Teorema 2.2, temos que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \left(\left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |S(e_{\mathbf{i}})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C_{\mathbb{K},m,\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\text{mult}} \|S\|,$$

portanto, pela definição de S concluímos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |Tx_{\mathbf{i}}|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} &\leq C_{\mathbb{K},m,\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\text{mult}} \|S\| \\
&\leq C_{\mathbb{K},m,\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\text{mult}} \|T\| \prod_{k=1}^{m} \|u_k\| \\
&= C_{\mathbb{K},m,\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\text{mult}} \|T\| \prod_{k=1}^{m} \|x^k\|_{w,{p'}_k},
\end{aligned}$$

(2) Analogamente ao item anterior, devemos provar que, existe uma constante $D_{\mathbb{K},m,\mathbf{p}}^{\text{mult}}$ tal que, para toda forma m-linear contínua $T : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_m \to \mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} |T(x_{\mathbf{i}})|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{p}\right|}} \right)^{1-\left|\frac{1}{p}\right|} \leq D_{\mathbb{K},m,\mathbf{p}}^{\text{mult}} \|T\| \prod_{k=1}^{m} \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'_k},$$

quaisquer que sejam as sequências $x^k := (x_i^k)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'_k}^{w}(\mathcal{X}_k),\ k = 1, \cdots, m$. Considere $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K})$ e $e_{\mathbf{i}} := (e_i)_{i=1}^{m}$. Considere também os operadores u_k e S apresentados na demonstração no item (1). Logo,

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} |T(x_{\mathbf{i}})|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{p}\right|}} \right)^{1-\left|\frac{1}{p}\right|} = \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} |S(u(e_{\mathbf{i}}))|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{p}\right|}} \right)^{1-\left|\frac{1}{p}\right|}.$$

Pelo teorema 2.2, temos que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} |S(u(e_{\mathbf{i}}))|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{p}\right|}} \right)^{1-\left|\frac{1}{p}\right|} \leq D_{\mathbb{K},m,\mathbf{p}}^{\text{mult}} \|S\|,$$

e pela definição de S sabemos que

$$\|S\| \leq \|T\| \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} |T(x_{\mathbf{i}})|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{p}\right|}}\right)^{1-\left|\frac{1}{p}\right|} &\leq D_{\mathbb{K},m,\mathbf{p}}^{\mathrm{mult}} \|T\| \prod_{k=1}^{m} \|u_k\| \\ &= D_{\mathbb{K},m,\mathbf{p}}^{\mathrm{mult}} \|T\| \prod_{k=1}^{m} \|(x_{\mathbf{i}})\|_{w,p'_k}\end{aligned}$$

como queríamos. □

Lema 2.10 (Desigualdade de Khintchine)**.** Para todo $0 < p < \infty$, existem constantes positivas A_p e B_p tais que, independentemente da sequência de escalares $(\alpha_n)_n \in \ell_2$, teremos

$$A_p \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_I \left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r_n(t)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou equivalentemente,

$$A_p \cdot \|\alpha_n\|_2 \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r_n\right\|_{L_p[0,1]} \leq B_p \cdot \|\alpha_n\|_2.$$

Proposição 2.11. Seja $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, +\infty)^m$. Se

$$\Pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^{m,\mathrm{mult}}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K}),$$

então

$$\Pi_{(\mathbf{q},2;\mathbf{p},1)}^{m+1,\mathrm{mult}}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m, \mathcal{X}_{m+1}; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m, \mathcal{X}_{m+1}; \mathbb{K}).$$

Demonstração. Primeiramente vamos provar que, para toda forma $(m+1)$-linear contínua $T : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_m \times c_0 \to \mathbb{K}$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n} |T(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_m}^m, e_{j_{m+1}})|^2\right)^{\frac{q_m}{2}} \cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &\leq C \cdot A_{\mathbb{K},q_m}^{-1} \|T\| \prod_{k=1}^{m} \|(x_j^k)_{j=1}^n\|_{w,p_k},\end{aligned} \tag{2.5}$$

onde $A_{\mathbb{K},q_m}^{-1}$ é a constante da desigualdade de Khintchine. De fato, da Desigualdade de

Khintchine, temos

$$A_{\mathbb{K},q_m}\left(\sum_{j_{m+1}}^{n}|T(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_m}^m,e_{j_{m+1}})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 |\sum_{j_{m+1}}^{n} r_{j_{m+1}}(t)T(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_m}^m,e_{j_{m+1}})|^{q_m}dt\right)^{\frac{1}{q_m}}$$
$$= \left(\int_0^1 |T(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_m}^m,r_{j_{m+1}}(t)e_{j_{m+1}})|^{q_m}dt\right)^{\frac{1}{q_m}}.$$

Então,

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n}|T(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_m}^m,e_{j_{m+1}})|^2\right)^{\frac{q_m}{2}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$
$$\leq A_{\mathbb{K},q_m}^{-1}\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n}\int_0^1|T(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_m}^m,\sum_{j_m=1}^{n}r_{j_{m+1}}(t)e_{j_{m+1}})|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m+1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$
$$= A_{\mathbb{K},q_m}^{-1}\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\int_0^1\sum_{j_m=1}^{n}|T(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_m}^m,\sum_{j_m=1}^{n}r_{j_{m+1}}(t)e_{j_{m+1}})|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m+1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$
$$\leq A_{\mathbb{K},q_m}^{-1}\sup_{t\in[0,1]}\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n}|T(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_m}^m,\sum_{j_m=1}^{n}r_{j_{m+1}}(t)e_{j_{m+1}})|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m+1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$
$$\leq A_{\mathbb{K},q_m}^{-1}\sup_{t\in[0,1]}\pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}\left(T\left(\sum_{j_m=1}^{n}r_{j_{m+1}}(t)e_{j_{m+1}}\right)\right)\prod_{k=1}^{m}\|(x_j^k)_{j_1}^n\|_{w,p_k}.$$

Visto que $\|\cdot\|\leq\pi_{\mathrm{mult}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(\cdot)$ e pela Proposição 2.4 e pela hipótese temos

$$\Pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^{m,\mathrm{mult}}(\mathcal{X}_1,\cdots,\mathcal{X}_m;\mathbb{K})=\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\cdots,\mathcal{X}_m;\mathbb{K}).$$

O Teorema da Aplicação Aberta garante que as normas $\pi_{\mathrm{mult}(\mathbf{q};\mathbf{p})}$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes. Portanto, existe uma constante $C>0$ tal que

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n}\left|T(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_m}^m,e_{j_{m+1}})\right|^2\right)^{\frac{q_m}{2}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$
$$\leq C\cdot A_{\mathbb{K},q_m}^{-1}\sup_{t\in[0,1]}\left\|T\left(\cdot,\ldots,\cdot,\sum_{j_{m+1}}^{n}r_{j_{m+1}}e_{j_{m+1}}\right)\right\|\prod_{k=1}^{m}\left\|(x_j^k)_{j=1}^n\right\|_{w,p_k}$$
$$\leq C\cdot A_{\mathbb{K},q_m}^{-1}\sup_{t\in[0,1]}\left\|\sum_{j_{m+1}}^{n}r_{j_{m+1}}e_{j_{m+1}}\right\|\prod_{k=1}^{m}\left\|(x_j^k)_{j=1}^n\right\|_{w,p_k}.$$

Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m, \mathcal{X}_{m+1}; \mathbb{K})$, $(x_j^k)_{j=1}^n \in \ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)$, $k = 1, \ldots, m$ e $(x_j^{m+1})_{j=1}^n \in \ell_1^w(\mathcal{X}_{m+1})$. De 2.7, temos a limitação do operador linear $u : c_0 \longrightarrow \mathcal{X}_{m+1}$ dado por $e_j \longmapsto u(e_j) = (x_j^{m+1})$ e $\|u\| = \|(x_j^{m+1})_{j=1}^n\|_{1,w}$. Então

$$S : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_m \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$$

definido por

$$S(y_1, \ldots, y_{m+1}) = T(y_1, \ldots, y_m, u(y_{m+1})),$$

é uma forma m-linear contínua e $\|S\| \leq \|T\|\|u\|$. Portanto, de 2.5,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^n \left|T(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_m}^m, x_{j_{m+1}}^{m+1})\right|^2\right)^{\frac{q_m}{2}} \cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^n \left|T(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_m}^m, e_{j_{m+1}})\right|^2\right)^{\frac{q_m}{2}} \cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\leq C A_{\mathbb{K},q_m}^{-1} \|T\|\|u\| \prod_{k=1}^m \|(x_j^k)_{j=1}^n\|_{w,p_k} \\
&= C A_{\mathbb{K},q_m}^{-1} \|T\|\|(x_j^{m+1})_{j=1}^n\| \prod_{k=1}^m \|(x_j^k)_{j=1}^n\|_{w,p_k},
\end{aligned}$$

i.e., $T \in \Pi_{(\mathbf{q},2;\mathbf{p},1)}^{m+1,\text{mult}}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m, \mathcal{X}_{m+1}; \mathbb{K})$. □

2.3 Resultados de inclusão

Com o desenvolvimento da teoria, teoremas de inclusão se revelaram como problemas desafiadores (ver [13]). Em [22], os autores provaram o seguinte resultado.

Teorema 2.12 (Pellegrino-Santos-Serrano-Teixeira, [22])**.** *Sejam m um inteiro positivo, $r, p, q \in [1, \infty)$ tais que $q \geq p$ e*

$$\frac{1}{r} - \frac{m}{p} + \frac{m}{q} > 0.$$

Então

$$\Pi_{(r;p)}^{m,mult}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) \subset \Pi_{(s;q)}^{m,mult}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$$

para quaisquer espaços de Banach $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m$ e $\mathcal{Y}$, com

$$\frac{1}{s} - \frac{m}{q} = \frac{1}{r} - \frac{m}{p},$$

e o operador inclusão tem norma 1.

Teorema 2.13 (Bayart, [7])**.** *Sejam m um inteiro positivo, $r, s \in [1, \infty)$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, \infty)^m$*

tais que $q_k \geq p_k$, $k = 1, \ldots, m$ *e*

$$\frac{1}{r} - \left|\frac{m}{\mathbf{p}}\right| + \left|\frac{m}{\mathbf{q}}\right| > 0.$$

Então

$$\Pi^{m,mult}_{(r;\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) \subset \Pi^{m,mult}_{(s;\mathbf{q})}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}),$$

para quaisquer espaços de Banach $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m$ *e* $\mathcal{Y}$*,com*

$$\frac{1}{s} - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| = \frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|.$$

A seguir enunciamos um resultado básico sobre inclusão de normas no espaço ℓ_p, que usaremos na demonstração do teorema 2.16.

Teorema 2.14 (Inclusão da norma p)**.** *Para* $q \geq p > 0$, $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$.

Para a demonstração do teorema 2.16 também precisaremos de uma consequência da famosa Desigualdade de Minkowski. Para detalhes da demonstração veja [14].

Teorema 2.15 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Para quaisquer* $0 < p \leq q < \infty$ *e qualquer matriz escalar* $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$*,*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 2.16. *Sejam* m *um inteiro positivo,* $r \geq 1$*,* $\mathbf{s}$*,* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, \infty)^m$ *tais que* $q_k \geq p_k$*,* $k = 1, \ldots, m$ *e*

$$\frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| + \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| > 0.$$

Então

$$\Pi^{m,mult}_{(r;\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) \subset \Pi^{m,mult}_{(\mathbf{s};\mathbf{q})}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}),$$

para quaisquer espaços de Banach $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m$ *e* $\mathcal{Y}$*, com*

$$\frac{1}{s_k} - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|_{\geq k} = \frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq k}.$$

Demonstração. O argumento é inspirado pelo principio da regularidade de [[22], Teorema 2.1]. Faremos a indução em m. O caso inicial bilinear é uma aplicação direta da inclusão clássica dos operadores lineares e os espaços ℓ_p. As ideias usadas serão reveladas no caso $m = 3$. Seja $T \in \Pi^{3,\text{mult}}_{(r;\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3; \mathcal{Y})$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_3=1}^{\infty}\left(\sum_{j_1,j_2=1}^{\infty}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^r\right)^{\frac{1}{r}\cdot r}\right)^{\frac{1}{r}} = \|(T(x))_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^3}\|_r \leq C\prod_{k=1}^{3}\|x^k\|_{w,p_k}, \tag{2.6}$$

para toda sequencia $x^k = (x^k_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^w_{p_k}(\mathcal{X}_k)$, $k = 1,2,3$. Seja $x^k \in \ell^w_{p_k}(\mathcal{X}_k)$ com $k = 1,2$ fixos. Defina $v_3 : \mathcal{X}_3 \to \ell_{(r,r)}(\mathcal{Y})$ como

$$v_3(x_3) = (T(x^1_{j_1}, x^2_{j_2}, x_3))_{j_1,j_2\in\mathbb{N}}$$

para todo $x_3 \in \mathcal{X}_3$. Por 2.6, obtemos, para todo $x^3 \in \ell^w_{p_3}(\mathcal{X}_3)$,

$$\left(\sum_{j_3=1}^{\infty} \|v_3(x^3_{j_3})\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C_3\|x^3\|_{w,p_3},$$

com $C_3 = C\prod_{k=1}^{2}\|x^k\|_{w,p_3}$, *i.e.*, $v_3 \in \Pi_{(r;p_3)}(\mathcal{X}_3;\ell_{(r,r)}(\mathcal{Y}))$. A inclusão linear, apresentada em 1.17, nos leva a $v_3 \in \Pi_{(s_3;q_3)}\left(\mathcal{X}_3;\ell_{(r,r)}(\mathcal{Y})\right)$ com $q_3 \geq p_3$ e $s_3 \geq r$ tais que

$$\frac{1}{p_3} - \frac{1}{r} = \frac{1}{q_3} - \frac{1}{s_3}.$$

Aplicando a inclusão da norma em ℓ_p com os expoentes $r \geq s_3$ e usando que v_3 é $(s_3;q_3)$-somante, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\sum_{j_3=1}^{\infty}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{s_3}\right)^{\frac{s_3}{s_3}}\right)^{\frac{s_3}{s_3}}\right)^{\frac{1}{s_3}} &= \left(\sum_{j_3=1}^{\infty}\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{s_3}\right)^{\frac{s_3}{s_3}}\right)^{\frac{s_3}{s_3}}\right)^{\frac{1}{s_3}} \\
&\leq \left(\sum_{j_3=1}^{\infty}\left(\sum_{j_1,j_2=1}^{\infty}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{r}\right)^{\frac{s_3}{r}}\right)^{\frac{1}{s_3}} \\
&\leq C\|x^3\|_{w,q_3}\prod_{k=1}^{2}\|x^k\|_{w,p_k}. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Fixando $x^1 \in \ell^w_{p_1}(\mathcal{X}_1)$, $x^3 \in \ell^w_{q_3}(\mathcal{X}_3)$ e definindo $v_2 : \mathcal{X}_2 \to \ell_{(s_3,s_3)}(\mathcal{Y})$ por

$$v_2(x_2) = (T(x^1_{j_1}, x_2, x^3_{j_3}))_{j_1,j_3\in\mathbb{N}}$$

de 2.7, podemos concluir que

$$\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\|v_2(x^2_{j_2})\|^{s_3}\right)^{\frac{1}{s_3}} \leq C_2\|x^2\|_{w,p_2},$$

para todo $x^2 \in \ell^w_{p_2}(\mathcal{X}_2)$ com $C_2 = C\|x^3\|_{w,q_3}\|x^1\|_{w,p_1}$ *i.e.*, $v_2 \in \Pi_{(s_3;p_2)}(\mathcal{X}_2;\ell_{(s_3,s_3)}(\mathcal{Y}))$. Pelo teorema de inclusão linear, $v_2 \in \Pi_{(s_2;p_2)}(\mathcal{X}_2;\ell_{(s_3,s_3)}(\mathcal{Y}))$ com $q_2 \geq p_2$, $s_2 \geq s_3$ e

$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{s_3} = \frac{1}{q_2} - \frac{1}{s_2}$. Dai,

$$\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\sum_{j_3=1}^{\infty}\|T(x_{\mathbf{j}})\|_3^{s}\right)^{\frac{s_3}{s_3}}\right)^{\frac{s_2}{s_3}}\right)^{\frac{1}{s_2}} \leq C_2\|x^2\|_{w,q_2} = C\|x^1\|_{w,p_1}\prod_{k=2}^{3}\|x^k\|_{w,q_k},$$

com

$$\frac{1}{s_2} = \frac{1}{s_3} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p_3} + \frac{1}{q_3}\right) - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{r} - \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right) + \left(\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}\right).$$

Pela inclusão da norma em ℓ_p com $s_3 \leq s_2$ e e a estimativa obtida anteriormente de $v_2 \in (s_2; q_2)$-somante, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\left(\sum_{j_3=1}^{\infty}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{s_3}\right)^{\frac{s_2}{s_3}}\right)^{\frac{s_2}{s_2}}\right)^{\frac{1}{s_2}} &= \left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\sum_{j_3=1}^{\infty}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{s_3}\right)^{\frac{s_2}{s_3}}\right)^{\frac{s_2}{s_2}}\right)^{\frac{1}{s_2}} \\ &\leq \left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\sum_{j_3=1}^{\infty}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{s_3}\right)^{\frac{s_3}{s_3}}\right)^{\frac{s_2}{s_3}}\right)^{\frac{1}{s_2}} \\ &\leq C\|x^1\|_{w,p_1}\prod_{k=2}^{3}\|x^k\|_{w,q_k}. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Agora, fixemos $x^k \in \ell_{q_k}^w(\mathcal{X}_k)$ com $k = 2, 3$ e definamos, para todo $x_1 \in \mathcal{X}_1$,

$$v_1(x_1) = (T(x_1, x_{j_2}^2, x_{j_3}^3))_{j_2,j_3\in\mathbb{N}}.$$

Portanto, $v_1 \in \Pi_{(s_2;p_1)}(\mathcal{X}_1; \ell_{(s_2,s_3)}(\mathcal{Y}))$. Considerando 2.8 e o teorema de inclusão linear, conseguimos $v_1 \in \Pi_{(s_2;p_1)}(\mathcal{X}_1; \ell_{(s_2,s_3)}(\mathcal{Y}))$ com $q_1 \geq p_1$ e $s_1 \geq s_2$ tais que $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{s_1}$, isso é,

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_1} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} &= \left(\frac{1}{r} - \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right) + \left(\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}\right)\right) - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \\ &= \frac{1}{r} - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{p_k} + \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{q_k} > 0.\end{aligned}$$

Então

$$\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\left(\sum_{j_3=1}^{\infty}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{s_3}\right)^{\frac{s_2}{s_3}}\right)^{\frac{s_1}{s_2}}\right)^{\frac{1}{s_1}} \leq C\prod_{k=1}^{3}\|x^k\|_{w,q_k},$$

uma vez que $v_1 \in \Pi_{(s_1;q_1)}(\mathcal{X}_1; \ell_{(s_2,s_3)}(\mathcal{Y}))$, e, além disso, $T \in \Pi_{(\mathbf{s};\mathbf{q})}^{3,\text{mult}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3; \mathcal{Y})$.

Agora, concluiremos a prova por um argumento de indução. Vamos supor que o resultado é verdadeiro para $m-1$ e seja $T \in \Pi^{m,\text{mult}}_{(r;\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$, *i.e.*,

$$\left(\sum_{j_2=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \|T(x_{\mathbf{j}})\|^r \right)^{\frac{1}{r}\cdot r} \right)^{\frac{1}{r}\cdot r} \cdots \right)^{\frac{1}{r}\cdot r} \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} \|T(x_{\mathbf{j}})\|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$
$$\leq C \prod_{k=1}^{m} \|x^k\|_{w,p_k},$$

para toda sequencia $x^k \in \ell^w_{p_k}(\mathcal{X}_k)$. Fixando $x^1 \in \ell^w_{p_1}(\mathcal{X}_1)$, $v : \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_m \to \ell_r(\mathcal{Y})$ dado por

$$v(x_2, \cdots, x_m) := (T(x^1_{j_1}, x_2, \cdots, x_m))_{j_1 \in \mathbb{N}},$$

pertence a $\Pi^{m-1,\text{mult}}_{(r;p_2,\cdots,p_m)}(\mathcal{X}_2, \cdots, \mathcal{X}_m; \ell_r(\mathcal{Y}))$. Consequentemente, pela hipótese de indução, a inclusão da norma e a desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\sum_{j_2=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \|T(x_{\mathbf{j}})\|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \cdots \right)^{s} \frac{s_2}{s_3} \right)^{\frac{s_2}{s_2}} \right)^{\frac{1}{s_2}} \\
&\leq \left(\sum_{j_2=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \|T(x_{\mathbf{j}})\|^r \right)^{\frac{s_m}{r}} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \cdots \right)^{\frac{s_2}{s_3}} \right)^{\frac{1}{s_2}} \\
&\leq C \|x^1\|_{w,p_1} \prod_{k=2}^{m} \|x^k\|_{w,q_k},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

com $r \leq s_m \leq \cdots \leq s_2$ e

$$\frac{1}{s_2} = \frac{1}{r} - \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{p_k} + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{q_k}.$$

Fixando $x^k \in \ell^w_{q_k}(\mathcal{X}_k)$, $k = 2, \cdots, m$ e definindo, para todo $x_1 \in \mathcal{X}_1$,

$$u(x_1) = (T(x_1, x^2_{j_2}, \cdots, x^m_{j_m}))_{j_2,\cdots,j_m \in \mathbb{N}},$$

nós temos que $u \in \Pi_{(s_2;p_1)}(\mathcal{X}_1; \ell_{(s_2,\cdots,s_m)}(\mathcal{Y}))$. Aplicando a inclusão linear clássica em 2.9, com $q_1 \geq p_1$ e $s_1 \geq s_2$ tais que

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{s_1},$$

concluímos que $u \in \Pi_{(s_1;q_1)}(\mathcal{X}_1; \ell_{(s_2,\cdots,s_m)}(\mathcal{Y}))$. Como

$$\frac{1}{s_1} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \left(\frac{1}{r} - \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{p_k} + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{q_k} \right) - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right| > 0$$

e $u \in \Pi_{(s_1;q_1)}(\mathcal{X}_1; \ell_{(s_2,\cdots,s_m)}(\mathcal{Y}))$, temos

$$\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{s_m}\right)^{\frac{s_m-1}{s_m}}\cdots\right)^{\frac{s_1}{s_2}}\right)^{\frac{1}{s_1}} \leq C\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,q_k}.$$

Entretanto, $T \in \Pi^{m,\mathrm{mult}}_{(\mathbf{s};\mathbf{q})}(\mathcal{X}_1,\cdots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$. Além disso, note que o operador inclusão tem norma 1, uma vez que a constante C seja preservada. Isto conclui a prova. $\square$

Capítulo 3

Operadores $\mathcal{I}$-parcialmente somantes

Este capítulo apresentará uma nova classe de operadores que abrangerá as classes de operadores multilineares absolutamente e múltiplo somante. Investigaremos o que ocorre quando os índices das somas são repetidos.

3.1 Motivação

Além das célebres Desigualdades de Bonheblust-Hille e Hardy-Littlewood, os resultados a seguir são bastante conhecidos e dizem respeito à somabilidade das formas $T : \mathcal{X}_{p_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{p_m} \to \mathbb{K}$.

I- Somas em um índice:

• Aron e Globevnik [6] : para toda forma m-linear contínua $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{K}$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |T(e_i, \cdots, e_i)| \leq \|T\|,$$

e o expoente 1 é ótimo.

• Zalduendo [28] : Seja $|1/\mathbf{p}| < 1$ Para toda forma m-linear continua $T : \mathcal{X}_{p_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{p_m} \to \mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |T(e_i, \cdots, e_i)|^{\frac{1}{1-|1/\mathbf{p}|}} \right)^{1-|1/\mathbf{p}|} \leq \|T\|$$

e o expoente $1 - |1/\mathbf{p}|$ é ótimo.

II- Somas em vários índices:

• Bohnenblust-Hille [8]: existe uma constante $C_{m,\infty}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que, para toda forma m-linear continua $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1,\ldots,e_{i_m}})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_{m,\infty}^{\mathbb{K}} \|T\|.$$

• Hardy-Littlewood [16] e Praciano-Pereira [25]: Seja $|\frac{1}{\mathbf{p}}| \leq \frac{1}{2}$. Existe uma constante

$C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que, para toda forma m-linear continua $T : \mathcal{X}_{p_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{p_m} \to \mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1,\ldots,e_{i_m}})|^{\frac{2m}{m+1-2|1/\mathbf{p}|}} \right)^{\frac{m+1-2|1/\mathbf{p}|}{2m}} \leq C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\|.$$

• Hardy-Littlewood [16] e Dimant-Sevilla-Peris [10]: Seja $\frac{1}{2} \leq |\frac{1}{\mathbf{p}}| < 1$. Existe uma constante $D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1,\ldots,e_{i_m}})|^{\frac{1}{1-|1/\mathbf{p}|}} \right)^{1-|1/\mathbf{p}|} \leq D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\|,$$

para toda forma m-linear continua $T : \mathcal{X}_{p_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{p_m} \to \mathbb{K}$.

• Albuquerque et al. [3]: Sejam $|1/\mathbf{p}| \leq 1/2$ e $\mathbf{q} := (q_1, \ldots, q_m) \in [(1 - |1/\mathbf{p}|)^{-1}, 2]^m$. Existe uma constante $C_{m,\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |A(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C_{m,\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbb{K}} \|A\|$$

para toda forma m-linear $A : \mathcal{X}_{p_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{p_m} \to \mathbb{K}$ se, e somente se

$$\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} \leq \frac{m+1}{2} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|.$$

III- Somas em blocos de índices:

O resultado apresentado a seguir é uma unificação das Desigualdades de Bonhnenblust-Hille, Hardy-Littlewood, Praciano-Pereira e Dimant-Sevilla.

Teorema 3.1. *Sejam m, k inteiros positivos com $1 \leq k \leq m$, $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ uma família de subconjuntos não-vazios e dois a dois disjuntos de $\{1, \ldots, m\}$ tal que $\cup_{i=1}^{k} I_i = \{1, \ldots, m\}$. Para $\mathbf{p} := (p_1, \cdots, p_m) \in [1, \infty]^m$, seja*

$$\frac{1}{r_n} = \sum_{j \in I_n} \frac{1}{p_j}, \quad n = 1, \ldots, k.$$

(1) Se $0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$ e $\mathbf{q} := (q_1, \cdots, q_m) \in \left[\left(1 - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1}, 2 \right]^m$, então existe uma constante $C_{k,(r_1,\ldots,r_k),\mathbf{q}}^{\mathbb{K}}$ tal que,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} \left| T \left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j \in I_n} e_{i_n} \cdot e_j \right) \right|^{q_n} \right)^{\frac{q_{n-1}}{q_n}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C_{k,(r_1,\ldots,r_k),\mathbf{q}}^{\mathbb{K}} \|T\|,$$

para toda forma m-linear contínua $T : \mathcal{X}_{p_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{p_m} \to \mathbb{K}$, se, e somente se,

$$\left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| \leq \frac{(m+1)}{2} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|.$$

(2) Se $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$, então,

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} \left|T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} e_{i_n}\cdot e_j\right)\right|^{\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|} \leq D^{\mathbb{K}}_{k,(r_1,\ldots,r_k)}\|T\|,$$

para toda forma m-linear contínua $T : \mathcal{X}_{p_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{p_m} \to \mathbb{K}$. Mais ainda, o expoente $\left(1 - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1}$ é ótimo.

O resultado apresentado abaixo é um caso particular do Teorema 3.1. Neste caso os índices estão todos organizados, i.e., os primeiros elementos de $\{1, \ldots, m\}$ estão em I_1, os próximos em I_2, e assim sucessivamente.

Corolário 3.2. Sejam $1 \leq k \leq m$ e $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ inteiros positivos tais que $n_1+\cdots+n_k = m$ e suponha que

$$\mathbf{p} := \left(\underbrace{p_1^1, \cdots, p_{n_1}^1}_{n_1 \text{ vezes}}, \cdots, \underbrace{p_1^k, \cdots, p_{n_k}^k}_{n_k \text{ vezes}}\right) \in [1,\infty]^m$$

é tal que $0 \leq |1/\mathbf{p}| < 1$. Seja r_i dado por $\frac{1}{r_i} = \sum_{j\in I_i} \frac{1}{p_j^i}$, $i = 1, \ldots, k$.

(1) Se $0 \leq |1/\mathbf{p}| \leq 1/2$ e $\mathbf{q} := (q_1, \ldots, q_k) \in \left[(1 - |1/\mathbf{p}|)^{-1}, 2\right]^k$ então, para toda forma m-linear continua $T : (\mathcal{X}_{p_1} \times \cdots \mathcal{X}_{p^1_{n_1}}) \times \cdots \times (\mathcal{X}_{p^k_1} \times \cdots \mathcal{X}_{p^k_{n_k}}) \to \mathbb{K}$

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{\infty}|T(e^{n_1}_{i_1}, \ldots, e^{n_k}_{i_k})|^{q_k}\right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C^{\mathbb{K}}_{k,(r_1,\ldots,r_k),\mathbf{q}}\|T\|,$$

se e somente se $|1/\mathbf{q}| \leq (k + 1)/2 - |1/\mathbf{p}|$.

(2) Se $1/2 \leq |1/\mathbf{p}| < 1$ então, para toda forma m-linear continua $T : (\mathcal{X}_{p^1_1} \times \cdots \mathcal{X}_{p^1_{n_1}}) \times \cdots \times (\mathcal{X}_{p^k_1} \times \cdots \mathcal{X}_{p^k_{n_k}}) \to \mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty}|T(e^{n_1}_{i_1}, \ldots, e^{n_k}_{i_k})|^{\frac{1}{1-|1/\mathbf{p}|}}\right)^{1-|1/\mathbf{p}|} \leq C^{\mathbb{K}}_{k,(r_1,\ldots,r_k)}\|T\|.$$

Mais ainda, o expoente $\left(1 - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1}$ é ótimo.

Note que este ultimo corolário engloba todos os resultados de somas em um e em vários índices citados anteriormente.

(a) Ao considerarmos $k = 1$ e $p_1 = \cdots = p_m = \infty$, então $x_p = c_0$, $|1/p| = 0$ e $q = 1$, retornaremos ao resultado de Aron e Globevnik.

(b) Para retomarmos o resultado de Zalduendo basta considerar $k = 1$, então teremos $q \leq 1 - |1/p|$.

(c) Quando $k = m$ e $|1/\mathbf{p}| \leq 1/2$ conseguimos voltar a desigualdade de Hardy-Littlewood e Praciano-Pereira.

(d) O caso 3.2, é a desigualdade de Hardy-Littlewood e Demant-Sevilla-Peris para somas em blocos de índices.

Nesses dois últimos casos os índices $p_1, \ldots, p_m$ não precisam ser iguais.

3.2 Operadores $\mathcal{I}$-parcialmente somantes

Nesta seção apresentaremos uma versão unificada das Desigualdades de Bonheblust-Hille e Hardy-Littlewood com somas parciais que abrange também as Desigualdes de Zalduendo e Aron-Globevnik, ou seja, será mostrada uma nova classe de soma de operadores multilineares que abrange a classe dos operadores absolutamente e múltiplo somantes

Definição 3.1. Seja $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m$ espaços de Banach, m, k inteiros positivos com $1 \leq k \leq m$, e $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := (p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_k) \in [1, \infty)^{m+k}$. Seja também $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ uma família de conjuntos dois a dois disjuntos não-vazios de $\{1, \ldots, m\}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{k} I_i = \{1, \ldots, m\}$. Um operador multilinear $T : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_m \to \mathcal{Y}$ é $\mathcal{I}$-parcialmente múltiplo $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$-somante se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_k=1}^{\infty} \left\| T \left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j \in I_n} x_{i_n}^{j} \cdot e_j \right) \right\|_{\mathcal{Y}}^{q_k} \right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \prod_{j_1}^{m} \| \left(x_i^j \right)_{i=1}^{\infty} \|_{w, p_j}, \quad (3.1)$$

para todo $\left(x_i^j \right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_j}^{w} \left(\mathcal{X}_j \right)$, $j = 1, \ldots, m$. Representaremos a classe dos operadores $\mathcal{I}$-parcialmente $(\mathbf{q}; \mathbf{p})$-somante por

$$\Pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^{k,m,\mathcal{I}} \left(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y} \right).$$

O ínfimo das constantes $C > 0$ que satisfazem a desigualdade acima, define uma norma em $\Pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^{k,m,\mathcal{I}} \left(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y} \right)$, que é denotado por $\pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(\cdot)$.

Note que quando

• $k = 1$, recuperamos a classe dos operadores absolutamente $(q;\mathbf{p})$-somantes, i.e.,

$$\Pi_{(q;\mathbf{p})}^{1,m,\{1,\ldots,m\}}\left(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y}\right) = \Pi_{(q;\mathbf{p})}^{m,\mathrm{as}}\left(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y}\right);$$

• $k = m$ e $q_1 = \cdots = q_m =: q$, recuperamos a classe dos operadores múltiplos $(q;\mathbf{p})$-somantes, i.e.,

$$\Pi_{(q;\mathbf{p})}^{m,m,\{\{1\},\ldots,\{m\}\}}\left(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y}\right) = \Pi_{(q;\mathbf{p})}^{m,\mathrm{mult}}\left(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y}\right);$$

• $k = m$, recuperamos a classe dos operadores múltiplo $(\mathbf{q};\mathbf{p})$-somantes, como definidos na seção 2.2.

Proposição 3.3. Seja $T : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_m \to \mathcal{Y}$ um operador multilinear. São equivalentes:

(i) T é $\mathcal{I}$-parcialmente múltiplo $(\mathbf{q};\mathbf{p})$-somante;

(ii) $\left(T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x_{i_n}^j \cdot e_j\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \in \ell_{\mathbf{q}}\left(\mathcal{Y}\right)$ sempre que $\left(x_i^j\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_j}^{w}\left(\mathcal{X}_j\right)$, para $j = 1,\ldots,m$;

(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{n}\left\|T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x_{i_n}^j\cdot e_j\right)\right\|_{\mathcal{Y}}^{q_k}\right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \le C\prod_{k=1}^{m}\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^{n}\|_{w,p_j}$$

para todo inteiro positivo n e toda sequência $\left(x_i^j\right)_{i=1}^{n} \in \ell_{p_j}^{w}\left(\mathcal{X}_j\right),\ j = 1,\ldots,m$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Segue da definição.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supondo (ii), podemos definir o operador m-linear

$$\begin{aligned}\widehat{T} : \ell_{p_1}^{w}(\mathcal{X}_1) \times \cdots \times \ell_{p_m}^{w}(\mathcal{X}_m) &\to \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})\\ \left((x_i^1)_{i=1}^{\infty},\cdots,(x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right) &\mapsto \left(T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x_{i_n}^j\cdot e_j\right)\right)_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty}\end{aligned}$$

Vejamos que o operador m-linear $\widehat{T}$ é continuo. De fato, sejam $((x_{i,s}^j)_{i=1}^{\infty})_{s=1}^{\infty} \subset \ell_{p_j}^{w}(\mathcal{X}_j)$, $j = 1,\ldots,m$, tais que

$$(x_{i,s}^j)_{i=1}^{\infty} \to (x_i^j)_{i=1}^{\infty} \text{ em } \ell_{p_j}^{w}(\mathcal{X}_j) \tag{3.2}$$

e

$$\widehat{T}\left((x_{i,s}^1)_{i=1}^{\infty},\cdots,(x_{i,s}^m)_{i=1}^{\infty}\right) \to (y_{i_1,\ldots,i_k})_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} \text{ em } \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}). \tag{3.3}$$

De (3.2) temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$s > N \Rightarrow \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{E_j'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_{i,s}^j - x_i^j)|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}} < \varepsilon.$$

Então

$$s \geq N \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_{i,s}^j - x_i^j)|^{p_j} < \varepsilon \text{ para todo } \varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}_j'} \text{ e todo } j \in \{1, \dots, m\}$$

e logo $s \geq N \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_{i,s}^j - x_i^j)| < \varepsilon$ para todo $\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}_j'}$ e todos $\{i, j\} \in \mathbb{N} \times \{1, \dots, m\}$. Portanto, pelo Teorema de Hahn-Banach concluímos que

$$s \geq N \Rightarrow \|x_{i,s}^j - x_i^j\|_{\mathcal{X}_j} = \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}_j'}} |\varphi(x_{i,s}^j - x_i^j)| \leq \varepsilon \text{ para todo } \{i, j\} \in \mathbb{N} \times \{1, \dots, m\},$$

i.e., $x_{i,s}^j \to x_i^j$ em $\mathcal{X}_j$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Como T é um operador multilinear contínuo, segue que

$$T\left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j \in I_n} x_{i_n,s}^j \cdot e_j \right) \to T\left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j \in I_n} x_{i_n}^j \cdot e_j \right)$$

em $\mathcal{Y}$ para todos $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ fixados. De (3.3), dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$s \geq M \Rightarrow \left(\sum_{i_1=1}^{n} \left(\cdots \left(\sum_{i_k=1}^{n} \left\| T\left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j \in I_n} x_{i_n}^j \cdot e_j \right) - y_{i_1,\dots,i_k} \right\|_{\mathcal{Y}}^{q_k} \right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} < \varepsilon$$

logo,

$$s \geq M \Rightarrow \left\| T\left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j \in I_n} x_{i_n}^j \cdot e_j \right) - y_{i_1,\dots,i_k} \right\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon$$

para todo $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ fixados. Pela unicidade do limite concluímos que

$$T\left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j \in I_n} x_{i_n}^j \cdot e_j \right) = y_{i_1,\dots,i_k}$$

para todo $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$. Consequentemente

$$\widehat{T}\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, \cdots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty} \right) = \left(T\left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j \in I_n} x_{i_n}^j \cdot e_j \right) \right)_{i_1,\dots,i_k=1}^{\infty} = (y_{i_1,\dots,i_k})_{i_1,\dots,i_k=1}^{\infty}$$

e então, pelo Teorema do Gráfico Fechado, obtemos que $\widehat{T}$ é um operador m-linear contínuo. Sendo assim, existe $C := \|\widehat{T}\| > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{n}\left\|T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n}x_{i_n}^{j}\cdot e_j\right)-y_{i_1,\dots,i_k}\right\|_{\mathcal{Y}}^{q_k}\right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \tag{3.4}$$

$$= \|\widehat{T}\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty},\cdots,(x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right)\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} \leq \|\widehat{T}\|\prod_{j=1}^{m}\|(x_i^j)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p_j}. \tag{3.5}$$

$(i) \Rightarrow (iii)$ Fixe $n \in \mathbb{N}$ e sejam $(x_i^1)_{i=1}^n \in \mathcal{X}_1, \ldots, (x_i^m)_{i=1}^n \in \mathcal{X}_m$. Então

$$(x_i^j)_{i=1}^n = (x_1^j, x_2^j, \ldots, x_n^j, 0, 0, \ldots) \in \ell_{p_j}^w(\mathcal{X}_j)$$

para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. Portanto, usando (i), temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{n}\left\|T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n}x_{i_n}^{j}\cdot e_j\right)\right\|_{\mathcal{Y}}^{q_k}\right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
&=\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{\infty}\left\|T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n}x_{i_n}^{j}\cdot e_j\right)\right\|_{\mathcal{Y}}^{q_k}\right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
&\leq C\prod_{j=1}^{m}\|(x_i^j)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p_j} = C\prod_{k=1}^{m}\|(x_i^j)_{i=1}^{n}\|_{w,p_j}.
\end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Considere $(x_i^1)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_1}^w(\mathcal{X}_1), \ldots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_m}^w(\mathcal{X}_m)$. Sendo assim

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{\infty}\left\|T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n}x_{i_n}^{j}\cdot e_j\right)\right\|_{\mathcal{Y}}^{q_k}\right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
&=\sup_n\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{n}\left\|T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n}x_{i_n}^{j}\cdot e_j\right)\right\|_{\mathcal{Y}}^{q_k}\right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
&\leq C\sup_n\prod_{j=1}^{m}\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^{n}\|_{w,p_j} = C\prod_{j=1}^{m}\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p_j},
\end{aligned}$$

isso conclui a prova.

$\square$

Proposição 3.4. $\Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$ é um subespaço de $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$.

Demonstração. Considere $T_1, T_2 \in \Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{\mathbf{q},\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_i^j)_{i=1}^{\infty} \in \ell^w_{p_j}(\mathcal{X}_j)$ temos

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{\infty}\left\|(T_1+\lambda T_2)\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{i_n}\cdot e_j\right)\right\|_{\mathcal{Y}}^{q_k}\right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
&=\left\|\left((T_1+\lambda T_2)\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{i_n}\cdot e_j\right)\right)_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})}\\
&=\left\|\left(T_1\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{i_n}\cdot e_j\right)+\lambda T_2\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{i_n}\cdot e_j\right)\right)_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})}\\
&=\left\|\left(T_1\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{i_n}\cdot e_j\right)\right)_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty}+\lambda\left(T_2\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{i_n}\cdot e_j\right)\right)_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})}\\
&\leq\left\|\left(T_1\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{i_n}\cdot e_j\right)\right)_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})}+|\lambda|\left\|\left(T_2\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{i_n}\cdot e_j\right)\right)_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})}\\
&=\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{\infty}\left\|T_1\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{i_n}\cdot e_j\right)\right\|_{\mathcal{Y}}^{q_k}\right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
&+|\lambda|\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{\infty}\left\|T_2\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{i_n}\cdot e_j\right)\right\|_{\mathcal{Y}}^{q_k}\right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
&\leq C_1\prod_{j=1}^{m}\|\,(x_i^j)_{i=1}^{\infty}\,\|_{w,p_j}+C_2\prod_{j=1}^{m}\|\,(x_i^j)_{i=1}^{\infty}\,\|_{w,p_j}+C_3\prod_{j=1}^{m}\|\,(x_i^j)_{i=1}^{\infty}\,\|_{w,p_j},
\end{aligned}
$$

o que prova que $T_1+\lambda T_2 \in \Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$. □

Consideraremos

$$\pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(T) := \inf\{C>0,\ \text{tal que } C \text{ satisfaça (3.1) para todo } (x_i^j)_{i=1}^{\infty}\in \ell_{p_j}(\mathcal{X}_j),\ j=1,\ldots,m\}.$$

Além disso $\pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(\cdot)$ define uma norma em $\Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$.

As demonstrações das afirmações acima são análogas as Proposições 1.11 e 1.12 respectivamente.

Proposição 3.5. Se $T \in \Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$, então

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})} \leq \pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(T).$$

Demonstração. Considere $x_j \in B_{\mathcal{X}_j}$, $j = 1, \dots, m$ e defina $(x_i^j)_{i=1}^{\infty} ;= (x_j, 0, \dots)$. Claramente $(x_i^j)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_j}^{w}(\mathcal{X}_j)$ para todo $j = 1, \dots, m$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|T(x_1, \dots, x_m)\|_{\mathcal{Y}} &= \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_k=1}^{\infty} \left\| T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in I_n} x_{i_n}^j \cdot e_j \right) \right\|_{\mathcal{Y}}^{q_k} \right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\leq \pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(T) \prod_{j=1}^{m} \|(x_i^j)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p_j} = \pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(T) \prod_{j=1}^{m} \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{X}_k'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i^j)|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}} \\
&= \pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(T) \prod_{j=1}^{m} \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{X}_k'}} |\varphi(x_j)| = \pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(T) \prod_{j=1}^{m} \|x_j\|_{\mathcal{X}_j} \\
&= \pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(T),
\end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Observação 3.1. Dado $T \in \Pi_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}^{k,m,\mathcal{I}}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$ podemos definir um operador m-linear continuo

$$\begin{aligned}
\widehat{T} : \ell_{p_1}^{w}(\mathcal{X}_1) \times \cdots \times \ell_{p_m}^{w}(\mathcal{X}_m) &\to \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}) \\
((x_i^1)_{i=1}^{\infty} \ \dots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty}) &\mapsto \left(T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in I_n} x_{i_n}^j \cdot e_j \right) \right)_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Vejamos que

$$\|\widehat{T}\| = \pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(T). \tag{3.6}$$

Pela definição de $\pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q},\mathbf{p})}$ e pela desigualdade 3.4, podemos concluir que

$$\pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(T) \leq \|\widehat{T}\|.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\|\widehat{T}\| &= \sup_{(x_i^j)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p_j}^w(\mathcal{X}_j)}} \left\| \widehat{T}\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty} \ \dots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty} \right) \right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} \\
&= \sup_{(x_i^j)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p_j}^w(\mathcal{X}_j)}} \left\| \left(T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in I_n} x_{i_n}^j \cdot e_j \right) \right)_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} \\
&\leq \sup_{(x_i^j)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p_j}^w(\mathcal{X}_j)}} \pi_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}^{k,m,\mathcal{I}}(T) \prod_{j=1}^{m} \|(x_i^j)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p_j} \\
& \pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(T),
\end{aligned}$$

o que prova $\|\widehat{T}\| = \pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(T)$. Sabendo disso, podemos definir naturalmente o operador

$$\begin{aligned} \widehat{\theta} : \Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) &\to \mathcal{L}(\ell^w_{p_1}(\mathcal{X}_1), \ldots, \ell^w_{p_m}(\mathcal{X}_m); \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})) \\ T &\mapsto \widehat{T}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Teorema 3.6. $\left(\Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}), \pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(\cdot)\right)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(T_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$. Como $\|\cdot\| \leq \pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(\cdot)$, segue que $(T_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$. Portanto. considere $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$ tal que $T_i \to T$ em $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$. Devemos mostrar que

$$T \in \Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}).$$

De fato, pela Proposição 3.3, para $(x_i^j)_{i=1^\infty} \subset \ell^w_{p_j}(\mathcal{X}_j)$, $j = 1, \ldots, m$ é suficiente provar que

$$\left(T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{i_n} \cdot e_j\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \in \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}).$$

Como mostrado em 3.7, $\widehat{\theta}$ é uma isometria, logo $(\widehat{T}_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(\ell^w_{p_1}(\mathcal{X}_1), \ldots, \ell^w_{p_m}(\mathcal{X}_m); \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}))$, que é um espaço de Banach pois $\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})$ é um espaço de Banach. Portanto existe $S \in \mathcal{L}(\ell^w_{p_1}(\mathcal{X}_1), \ldots, \ell^w_{p_m}(\mathcal{X}_m); \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}))$ tal que $\widehat{T}_i \to S$ em $\mathcal{L}(\ell^w_{p_1}(\mathcal{X}_1), \ldots, \ell^w_{p_m}(\mathcal{X}_m); \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}))$. Entretanto, considerando o operador continuo

$$P_{\mathbf{r}} : P_{r_1,\ldots,r_k} : \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathcal{Y}(y_{i_1,\ldots,i_k})_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} \longmapsto y_{r_1,\ldots,r_k},$$

e $\varepsilon > 0$ um real positivo, existe um inteiro positivo $N > 0$ tal que,

$$\begin{aligned}
&\left\|P_{\mathbf{r}}\left(S\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, \ldots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right)\right) - T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{r_n} \cdot e_j\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \\
&\leq \left\|P_{\mathbf{r}}\left(\widehat{T}_i\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, \ldots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right)\right) - P_{\mathbf{r}}\left(S\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, \ldots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \\
&+ \left\|P_{\mathbf{r}}\left(\widehat{T}_i\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, \ldots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right)\right) - T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{r_n} \cdot e_j\right)\right\|_{F} \\
&= \left\|P_{\mathbf{r}}\left(\widehat{T}_i\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, \ldots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right) - S\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, \ldots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_{F} \\
&+ \left\|P_{\mathbf{r}}\left(T_i\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{i_n} \cdot e_j\right) - T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{r_n} \cdot e_j\right)\right)\right\|_{F} \\
&\leq \|P_{\mathbf{r}}\| \left\|\widehat{T}_i\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, \ldots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right) - S\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, \ldots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right)\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(F)} \\
&+ \left\|T_i\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{r_n} \cdot e_j\right) - T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n} x^j_{r_n} \cdot e_j\right)\right\|_{F} \\
&\leq C\|P_{\mathbf{r}}\|\|\widehat{T}_i - S\| + C\|T_i - T\|
\end{aligned}$$

$$< \varepsilon,$$

para todo $i > N$. Então $P_{\mathbf{r}}\left(S\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, \ldots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right)\right) = T\left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j \in I_n} x_{r_n}^j \cdot e_j\right)$ para todo $\mathbf{r} = r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$, consequentemente,

$$\left(T\left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j \in I_n} x_{i_n}^j \cdot e_j\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} = S\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, \ldots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right) \in \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}).$$

Como $\widehat{T}\left((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, \ldots, (x_i^m)_{i=1}^{\infty}\right) = T\left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j \in I_n} x_{i_n}^j \cdot e_j\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty}$, de 3.2 concluímos que $\widehat{T} = S$, Portanto, dado $\varepsilon > 0$, segue de 3.6 que, para i suficientemente grande,

$$\pi_{\mathcal{I}(\mathbf{q};\mathbf{p})}(T_i - T) = \|\widehat{T_i - T}\| = \|\widehat{T}_i - \widehat{T}\| \|\widehat{T}_i - S\| < \varepsilon,$$

isto, é, $T_i \to T$ em $\pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^{k,m,\mathcal{I}}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$, o que prova o resultado. □

Proposição 3.7. Se existe $n \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\frac{1}{q_n} > \sum_{j \in I_n} \frac{1}{p_j}$, então

$$\Pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^{k,m,\mathcal{I}}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) = \{0\}.$$

Demonstração. Sabemos que se $q_j < p_j$, existe uma sequência $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_j} \backslash \ell_{q_j}$. Considere $x_j \in \mathcal{X}_j \backslash \{0\}$. Então para todo $\varphi \in \mathcal{X}_j'$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(\alpha_i x_j)|^{p_j} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi\|^{p_j} |\alpha_i|^{p_j} \|x_j\|^{p_j} \\
&= \|\varphi\|^{p_j} \|x_j\|^{p_j} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{p_j} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

i.e., $(\alpha_i x_j)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_j}^{w}(\mathcal{X}_j)$. Consideremos por contradição que existe um operador

$$T \in \Pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^{m,\text{mult}}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) \backslash \{0\}.$$

Então, podemos escolher $x_k \in \mathcal{X}_k \backslash \{0\}$, $k \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{j\}$ tal que $T(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$, para todo $k \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{j\}$. Considere $\left(x_i^k\right)_{i=1}^{\infty} = (x_k, 0, \ldots)$. Se $\left(x_i^k\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p_k}^{w}(\mathcal{X}_k)$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{j\}$ e $(\alpha_i x_j) \in \ell_{p_j}^{w}(\mathcal{X}_j)$ a proposição 3.3 garante que

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(T\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_{j-1}}^{j-1}, \alpha_i x_j, x_{i_{j+1}}^{j+1}, \ldots, x_{i_m}^m\right)\right)_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})} \\
&\leq C\left(\prod_{k=1, k\neq j}^{m} \|\left(x_j^k\right)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p_k}\right) \|(\alpha_i x_j)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p_j}.
\end{aligned}$$

Contudo,

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(T\left(x_{i_1}^{1},\ldots,x_{i_{j-1}}^{j-1},\alpha_i x_j,x_{i_{j+1}}^{j+1},\ldots,x_{i_m}^{m}\right)\right)_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})}\\
&=\left(\sum_{i_j=1}^{\infty}\|T\left(x_{i_1},\ldots,x_{i_{j-1}},\alpha_i x_j,x_{i_{j+1}},\ldots,x_{i_m}\right)\|^{q_j}\right)^{\frac{1}{q_j}}\\
&=\|T\left(x_1,\ldots,x_m\right)\|\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^{q_j}\right)^{\frac{1}{q_j}},
\end{aligned}$$

logo, podemos concluir que

$$\|T\left(x_1,\ldots,x_m\right)\|\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^{q_j}\right)^{\frac{1}{q_j}}\leq C\left(\prod_{k=1,k\neq j}^{m}\|\left(x_j^k\right)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p_k}\right)\|\left(\alpha_i x_j\right)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p_j}.$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^{q_j}<\infty$, o que contradiz $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{p_j}\backslash\ell_{q_j}$. □

Teorema 3.8 (Releitura da generalização da desigualdade de Hardy-Littlewood com somas parciais)**.** *Sejam $\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m$ espaços de Banach, m, k inteiros positivos com $1\leq k\leq m$, e $\mathcal{I}=\{I_1,\ldots,I_k\}$ uma partição de $\{1,\ldots,m\}$. Considere também $\mathbf{p}:=(p_1,\ldots,p_m)\in[1,\infty]^m$ com $0\leq|1/\mathbf{p}|<1$.*

(1) Se $0\leq|1/\mathbf{p}|<1$ e $\mathbf{q}:=(q_1,\ldots,q_m)\in[(1-|1/\mathbf{p}|)^{-1},2]^k$ são tais que $|1/\mathbf{p}|\leq(k+1)/2-|1/\mathbf{p}|$, então

$$\Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{(\mathbf{q};p_1',\ldots,p_m')}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m,\mathbb{K})=\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m,\mathbb{K});$$

(2) Se $1/2\leq|1/\mathbf{p}|<1$, temos

$$\Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{\left((1-|1/\mathbf{p}|)^{-1};p_1',\ldots,p_m'\right)}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m,\mathbb{K})=\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m,\mathbb{K})$$

Demonstração. (1) Sejam $T\in\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_m,\mathbb{K})$ e $(x_i^j)_{i=1}^{\infty}\in\ell^w_{p_j'}(\mathcal{X}_j)$, $j=1,\ldots,m$. Pelo Lema 2.7 sabemos que o operador linear $u_j:X_{p_j}\to\mathcal{X}_j$ definido por $u_j(e_i)=x_i^j$ e $\|u_j\|=\|(x_i^j)_{i=1}^{\infty}\|_{p_j',w}$ é limitado para todo $j=1,\ldots,m$. Portanto, $S:X_{p_1}\times\cdots\times X_{p_m}\to\mathbb{K}$ definido por $S(y_1,\ldots,y_m)=T(u_1(y_1),\ldots,u_m(y_m))$ é um operador m-linear e $\|S\|\leq\|T\|\|u_1\|\cdots\|u_m\|$. Além disso, pelo item (1) do Teorema 3.1 segue que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{\infty}\left|T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n}x_{i_n}^{j}\cdot e_j\right)\right|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
&=\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{\infty}\left|T\left(\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in I_n}u_j(e_{i_n})\cdot e_j\right)\right|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_k=1}^{\infty} \left| S \left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j \in I_n} e_{i_n} \cdot e_j \right) \right|^{q_m} \right)^{\frac{q_m-1}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\leq C^{\mathbb{K}}_{k,(r_1,\ldots,r_k),\mathbf{q}} \|S\| \leq C^{\mathbb{K}}_{k,(r_1,\ldots,r_k),\mathbf{q}} \|T\| \prod_{j=1}^{m} \|u_j\| \leq C^{\mathbb{K}}_{k,(r_1,\ldots,r_k),\mathbf{q}} \|T\| \prod_{j=1}^{m} \|(x_i^j)_{i=1}^{\infty}\|_{p'_j,w}.$$

(2) A demonstração é similar à demonstração do item (1). A única diferença é que devemos considerar o segundo item do Teorema 3.1. □

Corolário 3.9. Se $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m$ são espaços de Banach, m, k são inteiros positivos com $1 \leq k \leq m$, $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ é uma partição de $\{1, \ldots, m\}$ e $\mathbf{q} := (q_1, \ldots, q_m) \in [1,2]^k$ é tal que $|1/\mathbf{q}| \leq (k+1)/2$, então

$$\Pi^{k,m,\mathcal{I}}_{(\mathbf{q};1,\ldots,1)}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m, \mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m, \mathbb{K}).$$

Teorema 3.10. *Sejam $a \leq d \leq m$ um inteiro positivo, $r \geq 1, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1,\infty)^m$ são tais que $q_j \geq \pi_j$ para $j = 1, \cdots, m$ e*

$$\frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| + \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| > 0.$$

Seja também $\mathcal{J} = \{J_1, \cdots, J_d\}$ uma partição de $\{1, \cdots, m\}$. Então

$$\Pi^{d,m,\mathcal{J}}_{(r;\mathbf{p})}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) \subset \Pi^{d,m,\mathcal{J}}_{(s;\mathbf{q})}(\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m; F),$$

para quaisquer espaços de Banach $\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_m, F$, com

$$\frac{1}{s_k} - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|_{j \in \cup_{i=k}^{d} J_k} = \frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{j \in \cup_{i=k}^{d} J_k},$$

para cada $k \in \{1, \cdots, d\}$, e o operador inclusão tem norma 1.

Apêndice A

Resultados Básicos

Teorema A.1 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Sejam $\mathcal{X}$ e F espaços de Banach e $T : \mathcal{X} \longrightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $\mathcal{X} \times F$.*

O resultado abaixo é uma consequência do famoso Teorema de Hahn-Banach.

Teorema A.2. *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço normado, $\mathcal{X} \neq \{0\}$, e $x \in \mathcal{X}$. Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in \mathcal{X}' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in \mathcal{X}' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}.$$

Proposição A.3. Seja $1 \leq p < \infty$. Se $(a_j)_{j=1}^n \in \ell_p^n$ com $a_j \geq 0$, temos para todo $j = 1, \ldots, n$ que

$$\|(a_j)_{j=1}^n\|_p = \sup_{y \in B_{(\ell_p^n)'}} \sum_{j=1}^n |y_j a_j|.$$

Lema A.4. A correspondência $u \longmapsto (ue_n)_n$ fornece um isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}(\ell_p', \mathcal{X})$ em $\ell_p^w(\mathcal{X})$ quando $1 < p < \infty$. Para $p = 1$, o isomorfismo isométrico é de $\mathcal{L}(c_0, \mathcal{X})$ em $\ell_1^w(\mathcal{X})$.

Demonstração. Mostraremos o resultado apenas para o caso $p = 1$. Usando o mesmo argumento, prova-se o caso $1 < p < \infty$. Seja

$$\begin{aligned} T : \mathcal{L}(c_0; \mathcal{X}) &\to \ell_1^w(\mathcal{X}) \\ u &\mapsto (ue_n)_{n=1}^\infty. \end{aligned}$$

Note que $(e_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1^w(c_0)$ e $\|(e_n)_{n=1}^\infty\| = 1$. Segue facilmente que T está bem definido. De fato, se $\varphi \in \mathcal{X}'$ temos

$$\sum_{n=1}^\infty |\varphi(ue_n)| = \sum_{n=1}^\infty |\varphi \circ u(e_n)| < \infty$$

pois $\varphi \circ u \in c_0'$ e $(e_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1^w(c_0)$. Claramente T é linear. Vejamos que T é isometria.

Fixado $u \neq 0$, teremos

$$
\begin{aligned}
\|Tu\|_{w,1} &= \|(ue_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,1} \\
&= \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(ue_n)| \\
&= \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi \circ u)(e_n)| \\
&= \|u\| \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\varphi \circ u}{\|u\|} \right)(e_n) \right| \\
&\leq \|u\| \sup_{\psi \in \mathrm{B}_{(c_0)'}} \sum_{n=1}^{\infty} |\psi(e_n)|.
\end{aligned}
$$

Pela relação de dualidade $\phi \in (c_0)' \longleftrightarrow \left(\phi(e_n)\right)_n \in \ell_1$,

$$
\|\psi\| = \|(\psi(e_n)_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\psi(e_n)|.
$$

Logo,

$$
\|Tu\|_{w,1} \leq \|u\| \sup_{\psi \in \mathrm{B}_{(c_0)'}} \sum_{n=1}^{\infty} |\psi(e_n)| = \|u\|.
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\|Tu\|_{w,1} &= \|(ue_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,1} \\
&= \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(ue_n)| \\
&= \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \| \left(\varphi(ue_n)\right)_n \|_1 \\
&\overset{\text{HB}}{=} \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{B}_{\ell_\infty}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} y_n \varphi(ue_n) \right| \\
&\geq \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{B}_{c_o}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} y_n \varphi(ue_n) \right| \\
&= \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{B}_{c_o}} \left| \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n (ue_n) \right) \right| \\
&= \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{B}_{c_o}} \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left| \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n (ue_n) \right) \right| \\
&= \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{B}_{c_o}} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} y_n (ue_n) \right\| \\
&= \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{B}_{c_o}} \left\| u \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n \right) \right\| \\
&= \|u\|.
\end{aligned}
$$

Logo T é uma isometria sobre a imagem. Por último, Vejamos que T é sobrejetivo. De fato, se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1^w(\mathcal{X})$, tome $u \in \Pi(c_0;\mathcal{X})$ dado por

$$u((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Logo para cada $n \in \mathbb{N}$

$$u(e_n) = x_n.$$

Veja também que u está bem definido pela Proposição A.3. Além disso u é contínuo pois

$$\begin{aligned}
\|u((a_n)_{n=1}^{\infty})\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \\
&= \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left| \varphi \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) \right| \\
&\leq \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left| \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(x_n) \right) \right| \\
&\leq \|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{c_0} \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| \right) \\
&= \|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{c_0} \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,1} \qquad .
\end{aligned}$$

Portanto, T é sobrejetora e temos o resultado desejado. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] D. N. Alarcón, *O Teorema de Bonhenblust-Hille*, dissertação de Mestrado, João Pessoa, Brasil, 2011.

[2] N. G. Albuquerque, *Desigualdade de Bohnenblust-Hille: estimativas e comportamento assintótico*, dissertação de Mestrado, João Pessoa, Brasil, 2012.

[3] N. G. Albuquerque, F. Bayart, D.Pellegrino e J. B. Seoane-Sepúlveda, *Sharp generalization of yhe multilinear Bonhneblus-Hille inequality*, J. Funct., 2014.

[4] D. T. Araújo, *Desigualdade de Hölder generalizada com normas mistas e aplicações*, dissertação de Mestrado, João Pessoa, Brasil, 2016.

[5] G. S. Araújo, *Some classical inequalities, summability of multilinear operators and strange functions*, tese de Doutorado, João Pessoa, Brasil, 2016.

[6] R. Aron and J. Globevnik *Analytic functions on c_0*, Congress on Functional Analysis (Madrid, 1988), Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 2 (1989).

[7] F. Bayart, *Multiple summing maps: Coordinatewise summability, inclusion theorems and p-Sidon sets*, para publicação em J. Funct. Anal., 2017.

[8] H. F. Bonhenblust e E. Hille *On the absolute convergence of Dirichlet series*, Ann. of Math, (1931). 600-622.

[9] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, *Absolutely summing operators*, vol 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1995 cap. 3 e 4.

[10] V. Dimant e P. Sevilla-Peris, *Summation of coefficients of polynomials on ℓ_p spaces*, Publ. Math., 182-193.

[11] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed spaces.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950)., 192-197.

[12] D. P. García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Dissertação, 2002.

[13] D. P. García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Tese, 2003.

[14] D. J. H. Garling, *Inequalities: A Journey Into Linear Analysis*, Cambridge University Press, 2007.

[15] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Memoirs Acad. Math. Soc. 16, (1955), 1-79.

[16] G. Hardy e J. E. Littlewood, *Bilinear forms bounded is space* $[p, q]$, Quart. J. Math.

[17] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in* L_p *spaces and their applications*, Studia Math. 29 (1968), 276-326.

[18] R. D. Maudlin, *The Scottish Book*, Mathematics from the Scottish Café, Birkhauser Verlag, Boston-Basel-Stuttgart (1981)

[19] M. C. Matos. *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings*, Collect. Math. 54 (2003).

[20] B. Mitjagin and A. Pełczyński, *Nuclear operators and approximative dimension.* Proc. of ICM, Moscow, (1966).

[21] D. Pellegrino, J. Santos, *Absolutely summing multilinear operators: a panorama*, Quaestiones Mathematicae, 34:4, 447-478 2011.

[22] D. Pellegrino, J. Santos, D. Serrano e E. Teixeira, *Regularity principle in sequence spaces and applications*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 2017.

[23] A. Pietsch, *Absolut p-summierende Abbildungen in normieten Raumen.* Studia Math. 27 (1967), 333-353.

[24] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in theoretical Physics*, Teubner-Texte, Leipzig, 1983, 185-199.

[25] T. Praciano-Pereira, *On bounded multilinear forms on a class of* ℓ_p *spaces*, J. Math. Anal. Appl, pp. 561-568.

[26] D. M. S. Rodríguez, *Resultados de Coincidência para operadores multilineares múltiplos somantes*, Dissertação de Mestrado. João Pessoa, Brasil, 2011.

[27] D. M. S. Rodríguez, *Sobre as extensões multilineares dos operadores absolutamente somantes*, Tese de Doutorado. João Pessoa, Brasil, 2014.

[28] I. Zalduendo *An estimates for multilinear forms on* ℓ_p *spaces*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 93 (1993).