



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

O problema de Steiner e variações do tipo ponto reta cônica

Gustavo Teles Mendes

João Pessoa - PB
19 de setembro de 2024

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Gustavo Teles Mendes

**O problema de Steiner e variações do tipo ponto reta
cônica**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente
do Programa de Pós-Graduação em Mate-
mática da Universidade Federal da Paraíba
como requisito parcial para a obtenção do tí-
tulo de Mestre em Matemática.

Orientador: Wállice Manguiera de Sousa

João Pessoa - PB
19 de setembro de 2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M538p Mendes, Gustavo Teles.

O problema de Steiner e variações do tipo ponto reta e cônica / Gustavo Teles Mendes. - João Pessoa, 2024.
74 f. : il.

Orientação: Wallace Mangueira de Sousa.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCET.

1. Anel de Chow. 2. Blow up. 3. Cônicas. 4. Problema de Steiner. I. Sousa, Wallace Mangueira de. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

O problema de Steiner e variações do tipo ponto reta cônica

por

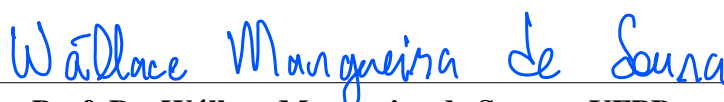
Gustavo Teles Mendes ¹

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

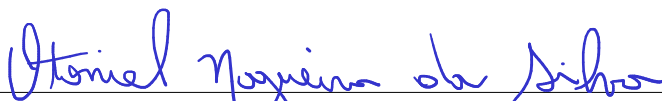
Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em: 22 de agosto de 2023

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Wálace Mangueira de Sousa – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Otoniel Nogueira da Silva – UFPB
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Rodrigo José Godim Neves – UFRPE
(Examinador Externo)

¹Este trabalho contou com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

*"Aqui cresce algo maior do que aquilo que
somos: eis nossa mais secreta esperança..."*
– Friedrich Nietzsche

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, meu pai José, minha irmã Amanda em especial minha mãe Aricinha, por todo suporte incansável durante esses dois anos desafiadores, minha companheira Sarah por todo seu carinho, cuidado e paciência e ao recém chegado, meu filho Bernardo por fazer desse momento ainda mais especial;

Ao grupo Contreras: Nathan, Guilherme, Davi, Cloves, Jojô, Erineu, Ana Bea, Beatriz, Mikaelle, Stefane, e ao nosso eterno Gil;

Ao grupo Flex das Lendas: San, Elmo e Paulo;

As minhas grandes amigas da matemática para a vida, Edna Brito e Mailane Silva;

A minha amiga e companheira de jornada na matemática, Charmilla Freire, por todos os momentos singulares que tivemos em João Pessoa;

Ao meu orientador da Graduação professor Edvalter Sena pelos ensinamentos e incentivo a ingressar na pós-graduação;

A toda a turma do Departamento de Matemática da UFPB, em especial, Manoel, João Pedro, Yasmin, Geivison, Antônio, Alex, Matheus, Ivanildo, Jean, Elias, Diego, Fábio e Álvaro pelas conversas, momentos engraçados, cafés na copa, futebol e vôlei de qualidade. O DM não seria o mesmo sem vocês;

Ao meu orientador, Wállace Sousa, por toda sua dedicação, paciência e ensinamentos na realização deste trabalho. Você tornou-se uma grande inspiração para mim;

Ao corpo docente do Departamento de Matemática da UFPB, em especial, aos professores Damião e Joedson por suas orientações;

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Quantas cônicas são tangentes a outras cinco cônicas dadas? No plano projetivo complexo, o número 3264 se apresenta como solução para este problema. No entanto, encontrar esta solução não parece ser tão simples. Neste trabalho dedicamo-nos a estudar conceitos e ferramentas necessárias para solução de problemas similares ao problema apresentado por Steiner. Se $P + L + Q = 5$, quantas cônicas passam por P pontos e são tangentes a L retas e Q cônicas? No decorrer do texto exploramos resultados clássicos da Teoria de Interseção, principalmente o Teorema de Bézout e um importante exemplo de mapa birracional, o Blow Up. Alguns resultados sobre o Anel de Chow nos ajudarão a entender como essa contagem se relaciona com a topologia de Zariski.

Palavras-chave: Anel de Chow. Blow Up. Cônicas. Problema de Steiner.

Abstract

How many conics are tangent to five given conics? In the complex projective plane, the number 3264 presents itself as solution to this problem. However, finding this solution does not seem to be so simple. In this work, we dedicate ourselves to studying the concepts and tools necessary for solving problems similar to the one presented by Steiner. If $P + L + Q = 5$, how many conics pass through P points and are tangent to L lines and Q conics? Throughout the text, we explore classical results from Intersection Theory, particularly Bézout's Theorem and an important example of a birational map, the Blow Up. Some results on the Chow Ring will help us understand how this count relates to the Zariski topology.

Keywords: Blow Up. Conics. Chow Ring. Steiner's Problem.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Tabelas	vii
Lista de Figuras	viii
Lista de Símbolos	ix
Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Morfismos	3
1.2 Mapas Racionais	6
1.3 Interseções no Espaço Projetivo	7
2 Contando Cônicas em $\mathbb{P}^2$	13
2.1 Cônicas em $\mathbb{P}^2$	13
2.2 Espaço de Parâmetros	15
2.3 A Dualidade de $\mathbb{P}^2$	21
2.4 Excesso de Interseção	22
3 O Blow Up da Veronese	26
3.1 A superfície de Veronese	26
3.2 A Variedade Degenerada	28
3.3 Blowing up	31
3.4 A dualidade encontra o Blowup	36
4 O Anel de Chow	39
4.1 Ciclos e equivalência racional	39
4.2 A Cohomologia do Blow Up	41
4.3 3264 Cônicas	47

A	Espaços Afim e Projetivo	53
A.1	Variedades Afins	53
A.2	Variedades Projetivas	55
B	Ordem de Zeros e Polos	59
	Referências	60

Lista de Tabelas

2.1	Soluções de Cônicas para os problemas Ponto-Reta	24
4.1	Soluções para as variações do problema de Steiner	52

Lista de Figuras

2.1	Cônicas em $\mathbb{R}^2$	14
2.2	Cônicas passando por quatro pontos.	17
2.3	Interseção de duas cônicas	18
2.4	Cônicas tangentes.	20
3.1	Polinômio de Hilbert de $\mathcal{V}$	27
3.2	Algoritmo para mapa g	30
3.3	Pré imagem do Ideal I sob mapa h	31
3.4	Blow Up de $\mathbb{C}^2$ em $(0, 0)$	33
3.5	Algoritmo para as equações do blow up.	35
4.1	Ideal da Veronese	44

Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição
$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$	Espaço afim n dimensional sob o corpo $\mathbb{K}$;
$\mathbb{P}^n$	Espaço projetivo complexo n dimensional
$\check{\mathbb{P}}^n$	Espaço dual de $\mathbb{P}^n$;
$\mathcal{Z}$	Conjunto de zeros;
pls	Polos de uma função racional;
P_Y	Polinômio de Hilbert;
$I(P, F \cap G)$	Número de interseção de F e G em no ponto P ;
$\mathcal{I}$	Ideal associado;
$\mathcal{O}(X)$	Anel de funções regulares em X ;
$\mathbf{K}(X)$	Corpo de funções racionais em X ;
$\dim_{\mathbb{K}}$	dimensão sobre $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.
P_Y	Polinômio de Hilbert de Y ;
$\deg X$	Grau de uma variedade projetiva;
$T_P X$	Espaço tangente a X em P ;
$\mathcal{V}$	Superfície de Veronese;
$Bl_{\mathcal{V}} \mathbb{P}^5$	Blow up de $\mathbb{P}^5$ ao longo de $\mathcal{V}$;
$\tilde{X}$	Transformada estrita de X ;
$ord_W(f)$	Ordem dos zeros de f ao longo de uma subvariedade W ;
$A^*(Bl_{\mathcal{V}} \mathbb{P}^5)$	Anel de Chow do $Bl_{\mathcal{V}} \mathbb{P}^5$.

Introdução

Na história da matemática as cônicas são objetos de estudo há mais de dois milênios. Desenvolvida na maior parte da antiguidade por Apolônio (287-212 a.C.), estas curvas ganharam aplicações pertinentes até hoje, por exemplo, na Astronomia onde Kepler (1571-1630) observou que as órbitas dos planetas do sistema solar são elípticas.

Em Geometria Algébrica, as cônicas ganharam novos espaços e propriedades algébricas, bem como novos problemas. O Professor da Universidade de Berlin, Jakob Steiner em 1848, apresentou o seguinte problema: Dadas cinco cônicas no plano, existe alguma cônica tangente a todas as cinco? Se sim, quantas são? Esse tipo de problema pertence a Geometria Enumerativa, subárea da Geometria Algébrica, e tem como um dos principais desenvolvedores da teoria Hermann Schubert (1848-1911). O rigor matemático para responder corretamente a esses problemas fez com que Hilbert os colocassem como o décimo quinto problema da sua lista, veja (Kleiman, 1976).

Problemas do tipo enumerativo fizeram com que novas ferramentas fossem criadas para que tais problemas tivessem uma solução rigorosa. Nesse sentido, Steiner apresentou uma solução em que o número de cônicas tangentes a cinco cônicas dadas eram 7776, mas não estava correta. Na verdade, a solução para este problema é o número 3264. Esta solução foi encontrada por Ernest de Jonquières em 1859 e mais tarde por Michel Chasles que desenvolveu um método para resolver também outros problemas similares.

Uma pergunta natural seria: o que aconteceu com as 4512 cônicas extras da solução de Steiner? Para responder corretamente esta pergunta vamos entender como as cônicas se comportam no plano projetivo complexo e como podemos fazer essa contagem. O número 3264 tem sua importância na Geometria Enumerativa não por seu valor numérico, mas sim por sua natureza complexa para mostrar que na topologia de Zariski, existe uma quintupla de cônicas $(Q_1, \dots, Q_5)$ para o qual o número de cônicas tangentes a todas as cinco é constante, veja (Eisenbud e Harris, 2016).

Este trabalho tem como motivação principal o artigo: *"Enumerative Algebraic Geometry of Conics"* Bashelor et al. (2008), no entanto, sua vasta teoria pode ser melhor explorada em Fulton (2013) e Eisenbud e Harris (2016). Além do artigo mencionado, também estudamos o trabalho de Bashelor (2005), *"Enumerative algebraic Geometry: counting conics"* para complementar este trabalho.

Partiremos de problemas similares envolvendo pontos, retas e cônicas, mais precisamente: *Dados P pontos, L retas e Q cônicas tais que $P + L + Q = 5$, quantas cônicas passam por P pontos, são tangentes a L retas e a Q cônicas?* Nosso objetivo é responder a essa pergunta usando ferramentas, principalmente, da Teoria de Interseção. O trabalho está estruturado da seguinte forma:

No primeiro capítulo abordaremos algumas noções preliminares sobre Mapas Racionais e Teoria de Interseção, onde o Teorema de Bézout se apresenta como uma ferramenta promissora para resolver nossos problemas enumerativos. Este resultado de grande importância, conduzirá este trabalho ao nosso objetivo, nos permitindo compreender sob quais condições podemos fazer nossa contagem.

No capítulo seguinte, elucidaremos definições básicas sobre o que queremos dizer com "cônica" e introduzimos o espaço de parâmetros. Ao longo do texto vamos perceber que, para cada condição imposta para as cônicas (e.g. $P + L + Q = 5$), existe um subconjunto no espaço de parâmetros (H_P, H_L, H_Q) que satisfaz essas condições. Mais ainda, vamos entender sua disposição no plano projetivo $\mathbb{P}^2$, e como isto está relacionado com o excesso de interseção.

No capítulo 3, veremos que o conjunto de todas as cônicas de reta dupla formam uma variedade em $\mathbb{P}^5$, conhecida como superfície de Veronese. Esta superfície coleciona uma família de cônicas chamadas de reta dupla que são responsáveis pelo excesso de interseção na resposta de Steiner. Uma ferramenta também muito importante na teoria de interseção é o Blow Up que, em resumo, expande nosso espaço ambiente de tal forma que nessa expansão todas as cônicas não se cruzam sob si mesmas. Encerramos o Capítulo 3 na expectativa de que isto seja suficiente mas, na verdade, aplicar o Teorema de Bézout neste novo ambiente pode ser muito complicado.

No Capítulo 4 apresentaremos ciclos e equivalência racional para entendermos como a Cohomologia do Blow Up nos ajudará a contar cônicas. Este, por sua vez, deverá ser equivalente ao Teorema de Bézout. Alguns resultados serão mostrados usando o programa computacional *Macaulay2*, que tem como objetivo auxiliar em algumas de nossas contas. O programa pode ser acessado em *Macaulay2Web*.

Por fim o leitor poderá encontrar no Apêndice deste trabalho definições e resultados clássicos da Geometria Algébrica. Exceto em menção contrária, estaremos sob um corpo de característica zero (corpo dos números complexos). Este último fato é importante, pois para o caso em que o corpo algebricamente fechado tem característica dois, Vainsencher em seu artigo "*Conics in characteristic 2*" (Vainsencher, 1978), mostra que a quantidade de cônicas tangentes a cinco cônicas dadas cai para 51.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, discutiremos quais os tipos de mapeamentos são permitidos entre variedades, bem como entender como variedades se intersectam. Iniciaremos com funções regulares para sabermos quais condições os morfismos entre variedades precisam atender. Ao longo desse capítulo citamos os trabalhos dos autores Hartshorne (2013), Harris (1992), Fulton (2008) e Gathmann (2018). Informações sobre este capítulo podem ser encontradas no Apêndice A.

1.1 Morfismos

O leitor interessado poderá consultar Gonçalves et al. (2010) para mais detalhes sobre esta seção.

Seja Y uma variedade quase afim em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Vamos considerar f uma função de Y para $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ denota um corpo algebricamente fechado.

Definição 1.1. Uma função $f : Y \rightarrow \mathbb{K}$ é *regular* em $P \in Y$, se existe uma vizinhança $U \subseteq Y$ de P e $F, G \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que G não se anula em U , $f = \frac{F}{G}$ em U . Dizemos que φ é regular, se é regular em todo ponto de Y .

Lema 1.2. Uma função regular é contínua, se $\mathbb{K}$ pode ser identificado com $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ na Topologia de Zariski.

Demonstração. Ver Lema 3.1 Hartshorne (2013), página 15. □

Agora vamos considerar $Y \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade quase projetiva.

Definição 1.3. Uma função $f : Y \rightarrow \mathbb{K}$ é *regular* em $P \in Y$, se existe uma vizinhança $U \subseteq Y$ de $P \in U \subset Y$ e polinômios homogêneos $F, G \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ de mesmo grau tais que G não se anula em U e $f = \frac{F}{G}$ em U . Dizemos que uma função f é regular em Y , se for regular em todos os pontos.

Observação 1.4. Como no caso quase afim (Lema 1.2), uma função regular definida sobre uma variedade quase projetiva é necessariamente contínua. Uma consequência disso é o

fato de que se F e G são funções regulares em Y e $F = G$ numa vizinhança aberta $U \subseteq Y$ então $F = G$ em todo o Y . De fato, o conjunto de pontos do conjunto $F - G = 0$ é fechado e denso.

A partir de agora, exceto em menção contrária, o termo variedades estará se referindo as variedades afins, quase afins, projetivas ou quase projetivas como definido no Apêndice A deste trabalho.

Definição 1.5. Sejam X, Y duas variedades. Um morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ é um mapa contínuo tal que para cada conjunto aberto $V \subseteq Y$ e cada função regular $f : V \rightarrow \mathbb{K}$, a função $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{K}$ é regular.

Observação 1.6. A composição de morfismos é um morfismo. De fato, sejam X, Y, Z variedades e $\varphi : X \rightarrow Y, \psi : Y \rightarrow Z$ morfismos. Note que $\psi \circ \varphi$ é contínua pois, ψ e φ são contínuas. Agora tome um conjunto aberto $U \subseteq Z$ e $f : (\psi \circ \varphi)^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{K}$ uma função regular, então $f \circ (\psi \circ \varphi) = (f \circ \psi) \circ \varphi$. Como ψ é um morfismo, então $f \circ \psi$ é uma função regular e como φ também é um morfismo e f é uma função regular qualquer, temos que $(f \circ \psi) \circ \varphi$ é uma função regular. Logo, $\psi \circ \varphi$ é um morfismo.

Definição 1.7. Um morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ é dito um isomorfismo de variedades quando for bijetor e admitir um morfismo inverso $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$.

Definição 1.8. Seja Y uma variedade. Denote por $\mathcal{O}(Y)$ o anel de funções regulares em Y . Se $P \in Y$ definimos o anel local de P em Y , denotado por $\mathcal{O}_P$, como o conjunto de classes de equivalência de pares $\langle U, f \rangle$, onde $U \subseteq Y$ é um aberto tal que $P \in U$ e $f \in \mathcal{O}(U)$, módulo relação de equivalência definida por

$$\langle U, f \rangle \sim \langle V, g \rangle \Leftrightarrow f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}.$$

Observação 1.9. Note que $\mathcal{O}_P$ munido com as operações de soma e multiplicação, $\langle U, f \rangle + \langle V, g \rangle = \langle U \cap V, f + g \rangle$ e $\langle U, f \rangle \cdot \langle V, g \rangle = \langle U \cap V, fg \rangle$ respectivamente, é um anel local cujo ideal maximal é $\mathfrak{m}_P := \{ \langle U, f \rangle \in \mathcal{O}_P \mid f(P) = 0 \}$.

Definição 1.10. Sejam Y uma variedade e $P \in Y$, o *corpo de resíduos* de P , é definido como $\mathbf{K}_P := \mathcal{O}_P / \mathfrak{m}_P$.

Definição 1.11. Se Y é uma variedade projetiva, definimos como *corpo de funções* $\mathbf{K}(Y)$ de Y como sendo o conjunto formado pelas classes de equivalência de pares $\langle U, f \rangle$, onde $U \subseteq Y$ é um aberto e $f \in \mathcal{O}(U)$, módulo a relação de equivalência definida por

$$\langle U, f \rangle \sim \langle V, g \rangle \Leftrightarrow f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}.$$

Cada elemento em $\mathbf{K}(Y)$ é chamado de *função racional* em Y .

Observação 1.12. O conjunto $\mathbf{K}(Y)$ é, de fato, um corpo. Como Y é irredutível qualquer dois conjuntos abertos de Y tem interseção não vazia. Portanto, podemos definir soma e multiplicação dadas, respectivamente, por $\langle U, f \rangle + \langle V, g \rangle = \langle U \cap V, f + g \rangle$ e $\langle U, f \rangle \cdot \langle V, g \rangle = \langle U \cap V, fg \rangle$. Assim, $\mathbf{K}(Y)$ é um anel comutativo e com unidade. Além disso, para cada $\langle U, f \rangle \in \mathbf{K}(Y)$ com $f \neq 0$, podemos restringir f ao aberto $V = U - U \cap \mathcal{Z}(f)$, dessa forma f não se anula em V . Portanto $1/f$ é uma função regular em V e $\langle V, 1/f \rangle$ é o inverso de $\langle U, f \rangle$.

Observação 1.13. Seja Y uma variedade. Para todo ponto $P \in Y$, existem homomorfismos injetores de anéis $\mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow \mathbf{K}(Y)$. Mais ainda, se X e Y são variedades e $\varphi : X \rightarrow Y$ um isomorfismo de variedades, então $\mathcal{O}(Y) \cong \mathcal{O}(X)$, $\mathcal{O}_P \cong \mathcal{O}_{\varphi(P)}$ para todo $P \in X$, e $\mathbf{K}(X) \cong \mathbf{K}(Y)$.

Teorema 1.14. *Seja $Y \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim com anel de coordenadas afim $A(Y)$. Então:*

- (a) $\mathcal{O}(Y) \cong A(Y)$;
- (b) *para cada ponto $P \in Y$, seja $\mathfrak{m}_P \subset A(Y)$ o ideal de funções que se anulam em P . Então $P \mapsto \mathfrak{m}_P$ dá uma correspondência injetiva entre os pontos de Y e os ideias maximais de $A(Y)$;*
- (c) *Para cada P , $\mathcal{O}_P \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$, e a $\dim \mathcal{O}_P = \dim Y$;*
- (d) $\mathbf{K}(Y)$ é isomorfo ao $\text{Frac}(A(Y))$, corpo de frações de $A(Y)$ e, portanto $\mathbf{K}(Y)$ é uma extensão do corpo $\mathbb{K}$ finitamente gerada com grau de transcendência igual a $\dim Y$.

Demonstração. Ver Theorem 3.2 Hartshorne (2013), página 17. □

Teorema 1.15. *Seja $Y \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva com anel de coordenadas homogêneo $S(Y)$. Então:*

- (a) $\mathcal{O}(Y) = \mathbb{K}$;
- (b) *para cada ponto $P \in Y$, seja $\mathfrak{m}_P \subset S(Y)$ o ideal de funções homogêneas que se anulam em P . Então $\mathcal{O}_P = S(Y)_{\mathfrak{m}_P}$;*
- (c) $\mathbf{K}(Y) \cong S(Y)_{(\{0\})}$.

Demonstração. Ver Theorem 3.2 Hartshorne (2013), página 18. □

Proposição 1.16. *Seja X uma variedade qualquer e Y uma variedade afim. Então existe um mapa bijetivo de conjuntos*

$$\alpha : \text{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(A(Y), \mathcal{O}(X))$$

onde o conjunto da esquerda significa morfismo de variedades e o da direita morfismos de $\mathbb{K}$ -álgebras.

Demonstração. Ver Proposition 3.5 Hartshorne (2013), página 19. □

Corolário 1.17. *Se X, Y são variedades afins, então X e Y são isomorfas se, e somente se, $A(X)$ e $A(Y)$ são isomorfos como $\mathbb{K}$ -álgebras.*

Demonstração. Ver Corollary 3.5 Hartshorne (2013), página 19. □

1.2 Mapas Racionais

Nesta seção apresentaremos a noção de mapa racional e equivalência birracional que são importantes para classificação de variedades. Um mapa racional pode ser pensado como uma enupla de funções racionais definida sob um conjunto aberto de uma variedade. Isto nos dá bastante informação uma vez que todo subconjunto aberto não vazio de uma variedade é denso.

Lema 1.18. *Sejam X, Y duas variedades e φ, ψ dois morfismos de X para Y . Sponha que existe um subconjunto aberto $U \subseteq X$ tal que $\varphi|_U = \psi|_U$. Então $\varphi = \psi$.*

Demonstração. Ver Lema 4.1 Hartshorne (2013), página 24. □

Definição 1.19. Sejam X e Y variedades. Um *mapa racional* (ou simplesmente *mapa*) $\varphi : X \rightarrow Y$ é definido como uma classe de equivalência de pares $\langle U, \varphi_U \rangle$ onde U é um subconjunto aberto e não vazio de X e φ_U é um morfismo de U para Y . Dois pares $\langle U, \varphi_U \rangle$ e $\langle V, \varphi_V \rangle$ são equivalentes se $\varphi|_{U \cap V} = \varphi_V|_{U \cap V}$. O mapa racional φ é *dominante* se para algum par $\langle U, \varphi_U \rangle$, a imagem de φ_U é densa em Y .

Observação 1.20. Note que o Lema 1.18 implica que a relação entre pares $\langle U, \varphi_U \rangle$ que acabamos de descrever é uma relação de equivalência. Note também que, em geral, o mapa $\varphi : X \rightarrow Y$ apesar do nome, não é necessariamente uma função de X para Y .

Definição 1.21. Sejam X e Y variedades. Um *mapa birracional* $\varphi : X \rightarrow Y$ é um mapa racional que admite um mapa racional inverso $\psi : Y \rightarrow X$ tal que $\psi \circ \varphi = id_X$ e $\varphi \circ \psi = id_Y$ como mapas racionais. Se existe um mapa birracional de X para Y , então dizemos que X e Y são *birracionalmente equivalentes* ou simplesmente *birracionais*.

Observação 1.22 (Gráficos de Mapas Racionais). Seja X uma variedade e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ um mapa racional. Seja $U \subset X$ um subconjunto aberto onde φ está definida. O gráfico de $\varphi|_U$ é uma subvariedade de $U \times \mathbb{P}^n$. O gráfico do mapa racional φ é definido como o fecho do gráfico $\varphi|_U$ em $X \times \mathbb{P}^n$, que denotaremos por Γ_φ . Note que isto independe da escolha do subconjunto aberto $U \subset X$. Como o gráfico Γ_φ do mapa racional φ é uma subvariedade fechada de $X \times \mathbb{P}^n$, então também é uma variedade.

Lema 1.23. *Seja Y uma hipersuperfície em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ dada pela equação $F(x_1, \dots, x_n) = 0$. Então $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n - Y$ é isomorfo a hipersuperfície H em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n+1}$ dada por $x_{n+1}F = 1$. Em particular, $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n - Y$ é afim, e seu anel afim é $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_f$.*

Demonstração. Ver Lemma 4.2 Hartshorne (2013), página 25. □

Proposição 1.24. *Em qualquer variedade Y , existe uma base para topologia de Zariski que consiste de subconjuntos abertos afins.*

Demonstração. Ver Proposition 4.3 Hartshorne (2013), página 25. □

Seja $\varphi : X \rightarrow Y$ um mapa racional dominante, representado por $\langle U, \varphi_U \rangle$. Seja $f \in \mathbf{K}(Y)$ uma função racional, representada por $\langle V, f \rangle$ onde V é um conjunto aberto em Y , e f é uma função regular em V . Como $\varphi_U(U)$ é denso em Y , $\varphi_U^{-1}(V)$ é um aberto não vazio de X , então $f \circ \varphi_U$ é uma função regular em $\varphi_U^{-1}(V)$. Isto nos dá uma função racional em X , e desta maneira definimos um homomorfismo de $\mathbb{K}$ -álgebras de $\mathbf{K}(Y)$ a $\mathbf{K}(X)$.

Teorema 1.25. *Para quaisquer duas variedades X e Y , a partir da construção acima obtemos uma bijeção entre*

- (a) *o conjunto de mapas racionais dominantes de X para Y , e*
- (b) *o conjunto de homomorfismos $\mathbb{K}$ -álgebras de $\mathbf{K}(Y)$ para $\mathbf{K}(X)$.*

Demonstração. Ver Teorema 4.4 Hartshorne (2013), página 25. □

Corolário 1.26. *Para quaisquer duas variedades X, Y as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) *X e Y são birracionalmente equivalente;*
- (b) *existem subconjuntos abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$ com U isomorfo a V ;*
- (c) *$\mathbf{K}(Y) \simeq \mathbf{K}(X)$ como $\mathbb{K}$ -álgebras.*

Demonstração. Ver Corollary 4.5 Hartshorne (2013), página 26. □

1.3 Interseções no Espaço Projetivo

Nesta seção apresentaremos o Teorema de Bézout, um dos resultados mais importantes na Teoria de Interseção. Antes de chegar a esse resultado iremos mostrar alguns resultados e definições importantes da teoria. Para entender o resultado principal desta seção vamos olhar primeiramente para um caso particular de interseção, as curvas planas afins em $\mathbb{C}^2$.

Seja $\mathcal{Z}(F)$ uma curva plana afim qualquer tal que $F \in \mathbb{C}[x, y]$. Se F for irredutível, então $\mathcal{Z}(F)$ é uma variedade afim. O *grau* da curva é o grau do polinômio que a define.

Definição 1.27. Seja $F = \prod F_i^{e_i}$, onde F_i são componentes irredutíveis de F e e_i é multiplicidade da componente F_i , dizemos que F_i é uma *componente simples* se $e_i = 1$ ou *componente múltipla*, caso contrário.

Definição 1.28. Sejam $\mathcal{Z}(F)$ uma curva e $P = (a, b) \in \mathcal{Z}(F)$. O ponto P é chamado de *ponto simples* de $\mathcal{Z}(F)$ se uma de suas derivadas parciais não se anulam no ponto, ou seja, $F_x(P) \neq 0$ ou $F_y(P) \neq 0$. Nesse caso, a reta $F_x(P)(x - a) + F_y(P)(y - b) = 0$ é chamada de *reta tangente* a F em P . Um ponto que não é simples é chamado de *ponto múltiplo* (ou ponto singular).

Definição 1.29. Sejam $\mathcal{Z}(F)$ uma curva plana qualquer e $P = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Escreva $F = F_m + F_{m+1} + \dots + F_n$, onde F_i é uma forma em $\mathbb{C}[x, y]$ de grau i , $F_m \neq 0$. Definimos m como a multiplicidade de F em P , escrevemos $m = m_P(F)$.

Observação 1.30. A forma de grau m , pode ser decomposta em fatores lineares dados por,

$$F_m := \prod L_i^{r_i}$$

onde L_i são retas *tangentes* a $\mathcal{Z}(F)$ em $P = (0, 0)$ e r_i é a multiplicidade da reta tangente. A reta L_i é uma tangente simples se $r_i = 1$, tangente dupla se $r_i = 2$, etc.

Observação 1.31. Note que $P = (0, 0) \in \mathcal{Z}(F)$ se, e somente se, $m_P(F) > 0$. Podemos usar esse fato para verificar que P é um ponto simples se, e somente se, $m_P(F) = 1$, neste caso F_1 é exatamente a reta tangente a F em P . Se $m = 2$ chamamos de ponto duplo; se $m = 3$, um ponto triplo, etc.

Observação 1.32. Se $F = \prod F_i^{e_i}$ a fatoração de F em componentes irredutíveis. Então $m_P(F) = \sum e_i m_P(F_i)$. Além disso, se L é uma reta tangente a F_i com multiplicidade r_i , então L é tangente a F com multiplicidade $\sum e_i r_i$. Isso é uma consequência do fato de que o termo de menor grau de F é o produto dos termos de menor grau de seus fatores.

Para estender as definições acima a um ponto $P = (a, b) \neq (0, 0)$. Seja T uma translação que leva $(0, 0)$ a P , isto é, $T(x, y) = (x+a, y+b)$. Então $F^T = F(x+a, y+b)$. Defina $m_P(F) = m_{(0,0)}(F^T)$, isto é, escreva $F^T = G_m + G_{m+1} + \dots$, onde G_i são formas de grau i com $G_m \neq 0$ e $m = m_P(F)$. Se $G_m = \prod L_i^{r_i}$, $L_i = \alpha_i x + \beta_i y$, então as retas $\alpha_i(x-a) + \beta_i(y-b)$ são as retas tangentes de F em P e r_i é a multiplicidade da reta tangente. Note que T leva os pontos de F^T aos pontos de F , e as tangentes a F^T em $(0, 0)$ ao tangentes a F em P . Como $F_x^T(0, 0) = F_x(a, b)$ e $F_y^T(0, 0) = F_y(a, b)$, P é um ponto simples em F se, e somente se, $m_P(F) = 1$. Portanto as duas definições de reta tangente em um ponto simples coincidem.

Por simplicidade vamos denotar a curva $\mathcal{Z}(F)$ apenas por F . Considere F uma curva plana irredutível e $P \in F$. O resultado a seguir mostra a multiplicidade em termos do anel local $\mathcal{O}_P(F)$.

Teorema 1.33. *Seja P um ponto de uma curva irredutível F . Então para todo n suficientemente grande,*

$$m_P(F) = \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathfrak{m}_P(F)^n}{\mathfrak{m}_P(F)^{n+1}} \right).$$

Em particular, a multiplicidade de F em P depende apenas do anel local $\mathcal{O}_P(F)$.

Demonstração. Ver Theorem 2 (Fulton, 2008), página 35. □

Definição 1.34. Dizemos que duas curvas F e G se *intersectam transversalmente* em P , se P é um ponto simples tanto em F quanto em G e se a reta tangente a F em P for diferente da reta tangente a G em P . Dizemos que F e G se *intersectam propriamente* em P se não tem componentes em comum passando por P .

Observação 1.35 (Número de Interseção). Considere agora F e G curvas planas e $P \in \mathbb{C}^2$. O número de interseção de F e G em P é denotado por $I(P, F \cap G)$. A definição é pouco intuitiva, devemos primeiro listar sete propriedades que queremos que este número de interseção tenha e então provaremos que só existe uma definição possível e, ao mesmo tempo, que encontre um procedimento simples para calcular $I(P, F \cap G)$ em um número razoável de etapas. Este número deve satisfazer as seguintes propriedades:

- (P.1) $I(P, F \cap G)$ é um inteiro não negativo para qualquer F, G e P tal que F e G se intersectam propriamente em P . $I(P, F \cap G) = \infty$ se F e G não se intersectam propriamente em P .
- (P.2) $I(P, F \cap G) = 0$ se, e somente se, $P \notin F \cap G$. $I(P, F \cap G)$ depende apenas das componentes de F e G que passam por P . $I(P, F \cap G) = 0$ se F ou G é constante diferente de zero.
- (P.3) Se T é uma mudança de coordenadas afim em $\mathbb{C}^2$, e $T(Q) = P$, então $I(P, F \cap G) = I(Q, F^T \cap G^T)$.
- (P.4) $I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$.
- (P.5) $I(P, F \cap G) \geq m_P(F)m_P(G)$ ocorrendo a igualdade se, e somente se, F e G não tiverem retas tangentes em comum em P . Como consequência da Definição 1.34, se F e G se intersectam transversalmente, então ocorre a igualdade.
- (P.6) Se $F = \prod F_i^{r_i}$ e $G = \prod G_j^{s_j}$, então $I(P, F \cap G) = \sum_{i,j} I(P, F_i \cap G_j)$.
- (P.7) Seja $A(F)$ o anel de coordenadas afim de F , e $(G + HF)$ a imagem de G em $A(F)$. Então $I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (G + HF))$ para qualquer $H \in \mathbb{C}[x, y]$.

Estas 7 propriedades fornecem uma boa definição para o número de interseção. A existência e unicidade desse número é mostrada no resultado a seguinte.

Teorema 1.36. *Existe um único número de interseção $I(P, F \cap G)$ definido para todas as curvas planas F e G , e todos os pontos $P \in \mathbb{C}^2$, que satisfaz as propriedades da Observação 1.35, dada por*

$$I(P, F \cap G) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2)}{\langle F, G \rangle} \right).$$

Demonstração. Ver Theorem 3 Fulton (2008), página 37. □

Observação 1.37. Essas noções e resultados sobre a multiplicidade e índice de interseção são invariantes por projetivizações¹. Isto segue do Teorema 1.33 e do isomorfismo da Observação 1.13 sob o mapa natural φ definido no apêndice A deste trabalho. Por exemplo,

¹Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, então a *projetivização* de V , denotada por $\mathbb{P}(V)$, é igual ao quociente de $(V - 0_V)$ pela seguinte relação de equivalência: $u \sim v \Leftrightarrow u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{K}$.

se F e G são curvas projetivas planas e $P = [x : y : 1] \in F \cap G$ então, o número de interseção é dado por

$$I(P, F \cap G) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)}{\langle F_*, G_* \rangle} \right),$$

onde F_* e G_* são as desomogeneizações de F e G em relação a variável z .

Proposição 1.38 (Finitude da Interseção de Curvas Projetivas). *Sejam F e G duas curvas projetivas planas sem componentes em comum, então a interseção $F \cap G$ é finita.*

Assim como no caso afim, o grau de uma curva projetiva plana é mesmo grau do polinômio que a define

Teorema 1.39 (Teorema de Bézout para Curvas Projetivas). *Sejam F e G duas curvas projetivas planas de grau m e n respectivamente. Assuma que F e G não tem componentes em comum. Então*

$$\sum_P I(P, F \cap G) = mn.$$

Demonstração. Ver Bézout's theorem Fulton (2008), página 57. □

Corolário 1.40. *Se F e G não tem componentes em comum, então*

$$\sum_P m_P(F)m_P(G) \leq \deg(F) \cdot \deg(G).$$

Corolário 1.41. *Se F e G encontram-se em mn pontos distintos, onde $m = \deg F$ e $n = \deg G$, então todos esses pontos são simples.*

Corolário 1.42. *Se duas curvas planas de graus m e n tem mais de mn pontos em comum. Então essas duas curvas tem uma componente em comum.*

Em geral, ao considerarmos duas variedades Y e Z , sabemos que $Y \cap Z$ não é necessariamente uma variedade, mas é um conjunto algébrico e portanto podemos questionar sobre a dimensão das suas componentes irredutíveis. Em álgebra linear, sabemos que se U, V são subespaços de dimensões r, s de um espaço vetorial W de dimensão n , então $U \cap V$ é um subespaço de dimensão $\geq r + s - n$. Além disso, se U e V são tais que $U + V = W$, então a dimensão de $U \cap V$ é igual a $r + s - n$ (desde que $r + s - n \geq 0$).

Teorema 1.43 (Teorema da Dimensão Afim). *Sejam Y, Z variedades de dimensões r, s em $\mathbb{A}^n$. Então toda componente irredutível W de $Y \cap Z$ tem dimensão $\geq r + s - n$.*

Demonstração. Ver Proposition 7.1 Hartshorne (2013), página 48. □

Teorema 1.44 (Teorema da Dimensão Projetiva). *Sejam Y, Z variedades de dimensões r, s em $\mathbb{P}^n$. Então toda componente irredutível W de $Y \cap Z$ tem dimensão $\geq r + s - n$. Além disso, se $r + s - n \geq 0$, então $Y \cap Z$ é não vazio.*

Demonstração. Ver Proposition 7.2 Hartshorne (2013), página 48. □

Vamos definir algebricamente o grau de uma variedade usando o polinômio de Hilbert. A ideia é associar a cada variedade projetiva $Y \subset \mathbb{P}^n$ um polinômio $P_Y(z) \in \mathbb{Q}[z]$, tal que $P_Y(n) \in \mathbb{Z}$ para n suficientemente grande.

Definição 1.45. Seja $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ e M um S -módulo graduado. Definimos a *função de Hilbert* φ_M de M por

$$\varphi_M(\ell) = \dim_{\mathbb{C}} M_\ell$$

para cada $\ell \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.46 (Hilbert-Serre). *Seja M um S -módulo graduado finitamente gerado, onde $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_1]$. Então existe um único polinômio $P_M(z) \in \mathbb{Q}[z]$, tal que $\varphi_M(\ell) = P_M(\ell)$ para todo ℓ suficientemente grande. Além disso, $\deg P_M(z) = \dim \mathcal{Z}(\text{Ann} M)$.*

Demonstração. Ver Proposition 7.6 Hartshorne (2013), página 52. $\square$

Definição 1.47. O polinômio P_M do teorema anterior é o polinômio de Hilbert de M .

Definição 1.48. Se $Y \subset \mathbb{P}^n$ é um conjunto algébrico de dimensão r , definimos o *polinômio de Hilbert* de Y , P_Y , por

$$P_Y = P_{S/I(Y)}$$

onde $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$.

Definição 1.49. O *grau* de uma variedade $Y \subset \mathbb{P}^n$ é definida por

$$\deg Y = (\dim Y)! \cdot cl(P_Y)$$

onde $cl(P_Y)$ é o coeficiente líder de P_Y .

Proposição 1.50. (a) *Se $Y \subset \mathbb{P}^n$, $Y \neq \emptyset$, então o grau de Y é um inteiro positivo.*

(b) *Seja $Y = Y_1 \cup Y_2$, onde Y_1 e Y_2 tem mesma dimensão r , e a $\dim(Y_1 \cap Y_2) < r$. Então $\deg Y = \deg Y_1 + \deg Y_2$.*

(c) $\deg \mathbb{P}^n = 1$.

(d) *Se $H \subset \mathbb{P}^n$ é uma hipersuperfície cujo o ideal é gerado por um polinômio homogêneo de grau d , então $\deg H = d$. (Em outras palavras, esta definição de grau é consistente com o grau de uma hipersuperfície.)*

Demonstração. Ver Proposition 7.6 Hartshorne (2013), página 52. $\square$

Nosso objetivo agora é estender a noção de multiplicidade de interseção para variedades em $\mathbb{P}^n$. Denotamos $i(Y, H; Z)$ a multiplicidade de interseção de Y e H ao longo de uma componente irredutível $Z \subset Y \cap H$. Definiremos a multiplicidade de interseção apenas no caso em que H é uma hipersuperfície.

Se $Y \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade projetiva de dimensão r e H uma hipersuperfície que não contém Y , então o Teorema 1.44 garante que $Y \cap H = Z_1 \cup \dots \cup Z_s$, onde Z_j são variedades de dimensão $r - 1$.

Definição 1.51. Seja $\mathfrak{p}_j$ o ideal primo homogêneo associado de Z_j . Definimos a multiplicidade de Y e H ao longo de Z_j como $i(Y, H; Z_j) = \mu_{\mathfrak{p}_j}(S/(\mathcal{I}(Y) + \mathcal{I}(H)))$, onde $\mathcal{I}(Y)$, $\mathcal{I}(H)$ são ideais homogêneos de Y e H , respectivamente, e $\mu_{\mathfrak{p}_j}(S/(\mathcal{I}(Y) + \mathcal{I}(H)))$ é o comprimento² de $S/(\mathcal{I}(Y) + \mathcal{I}(H))_{\mathfrak{p}_j}$ sobre $S_{\mathfrak{p}_j}$.

Apresentaremos agora o resultado principal desta seção sobre interseção de uma variedade projetiva com uma hipersuperfície. Trata-se de uma generalização do Teorema de Bézout para curvas planas.

Teorema 1.52. *Seja Y uma variedade de dimensão ≥ 1 em $\mathbb{P}^n$, e seja H uma hipersuperfície que não contém Y . Sejam $Z_1, \dots, Z_s$ as componentes irredutíveis de $Y \cap H$. Então*

$$\sum_{j=1}^s i(Y, H; Z_j) \cdot \deg Z_j = (\deg Y)(\deg H).$$

Demonstração. Ver Theorem 7.7 Hartshorne (2013), página 53. □

Observação 1.53. Note que, para o caso que Y e H são curvas em $\mathbb{P}^2$, as componentes irredutíveis de $Y \cap H$ tem dimensão zero (Teorema da Dimensão Projetiva). Portanto o polinômio de Hilbert dessas componentes é igual 1, isso implica que o grau é 1. Aplicando Bézout,

$$\sum_{j=1}^s i(Y, H; Z_j) = (\deg Y)(\deg H).$$

Logo a igualdade acima é equivalente ao Teorema de Bézout para Curvas Projetivas.

Observação 1.54. Dadas duas curvas $F, G \subset \mathbb{P}^2$ e $P \in F \cap G$ tais que F e G não tem componentes em comum. Por definição

$$i(F, G; P) = \mu_{\mathfrak{p}}(\mathbb{C}[x, y, z]/(\langle F \rangle + \langle G \rangle)).$$

onde $\mathfrak{p}$ é o ideal primo homogêneo associado ao ponto P . Por outro lado, pela Observação 1.37, temos

$$I(P, F \cap G) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)}{\langle F_*, G_* \rangle} \right).$$

Como

$$\frac{\mathbb{C}[x, y, z]_{\mathfrak{p}}}{\langle F_*, G_* \rangle} \simeq \left(\frac{\mathbb{C}[x, y, z]}{\langle F \rangle + \langle G \rangle} \right)_{\mathfrak{p}},$$

segue do Exercício 19.19, Altman e Kleiman (2021) que

$$\mu_{\mathfrak{p}}(\mathbb{C}[x, y, z]/(\langle F \rangle + \langle G \rangle)) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)}{\langle F_*, G_* \rangle} \right).$$

Portanto, a multiplicidade de interseção, quando restrita as curvas planas, é equivalente ao número de interseção definida para curvas.

²Ver Altman e Kleiman (2021).

Capítulo 2

Contando Cônicas em $\mathbb{P}^2$

Algebricamente as cônicas são curvas projetivas planas determinadas por zeros de um polinômio homogêneo de grau dois. Para os problemas que iremos mostrar aqui, faz-se necessário definir um espaço de parâmetros (módulos) para estas cônicas, pois nesse novo ambiente podemos determinar novos conjuntos algébricos para os quais poderemos encontrar um número de interseção que corresponderá a quantidade de cônicas.

O leitor pode encontrar mais detalhes sobre este capítulo em Bashelor (2005), Fulton (2008), Gathmann (2018) e Hartshorne (2013).

2.1 Cônicas em $\mathbb{P}^2$

Definição 2.1. Uma *Cônica* (projetiva plana) é dado por $\mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^2$, onde $F = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ em que os coeficientes a, b, c, d, e, f não são todos nulos.

Observação 2.2. (Partes Afins e Fechos Projetivos).

- (a) Para uma curva $\mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^2$ seu conjunto de pontos afins é

$$\mathcal{Z}(F) \cap \mathbb{C}^2 = \mathcal{Z}(F(x, y, 1)) = \mathcal{Z}(F_*),$$

via φ_2 da Proposição A.36. Vamos chamar F_* de parte afim de F . Os pontos no infinito de F são dados por $\mathcal{Z}(F(x, y, 0)) \subset \mathbb{P}^1 = \mathcal{Z}(z)$ (reta no infinito).

- (b) Para uma curva afim $\mathcal{Z}(G)$ chamamos $\mathcal{Z}(G^*) \subset \mathbb{P}^2$ seu fecho projetivo (via mapa da Proposição A.36). Pela Observação A.34 é uma curva projetiva cuja parte afim é novamente $\mathcal{Z}(G)$, e que não contém a reta no infinito como componente. No entanto, $\mathcal{Z}(G^*)$ pode conter pontos no infinito: Se $G = G_0 + \dots + G_d$ é a decomposição em partes homogêneas, temos que $G^* = z^d G_0 + z^{d-1} G_1 + \dots + G_d$ e portanto $G^*(x, y, 0) = G_d$. Então os pontos no infinito de $\mathcal{Z}(G^*)$ são dados pelo lugar geométrico dos zeros projetivo da parte homogênea de maior grau.

Exemplo 2.3 (Visualizando cônicas projetivas). Para visualizar uma curva projetiva (real) $\mathcal{Z}(F)$ (que não tem a reta no infinito como componente), desenhamos apenas o conjunto de pontos afim $\mathcal{Z}(F_*)$. Se quisermos, podemos adicionar os pontos no infinito como direções em $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$. A imagem abaixo mostra os fechos projetivos dos três tipos de cônicas reais — uma hipérbole, uma parábola e uma elipse (círculo) — onde as linhas tracejadas correspondem aos pontos no infinito. Vemos que a hipérbole dada por $xy - 1 = 0$ tem dois pontos no infinito que correspondem aos pontos $[1 : 0 : 0]$ e $[0 : 1 : 0]$. A parábola $y - x^2 = 0$ tem um ponto $[0 : 1 : 0]$ e o círculo $x^2 + y^2 - 1 = 0$ não tem pontos no infinito.

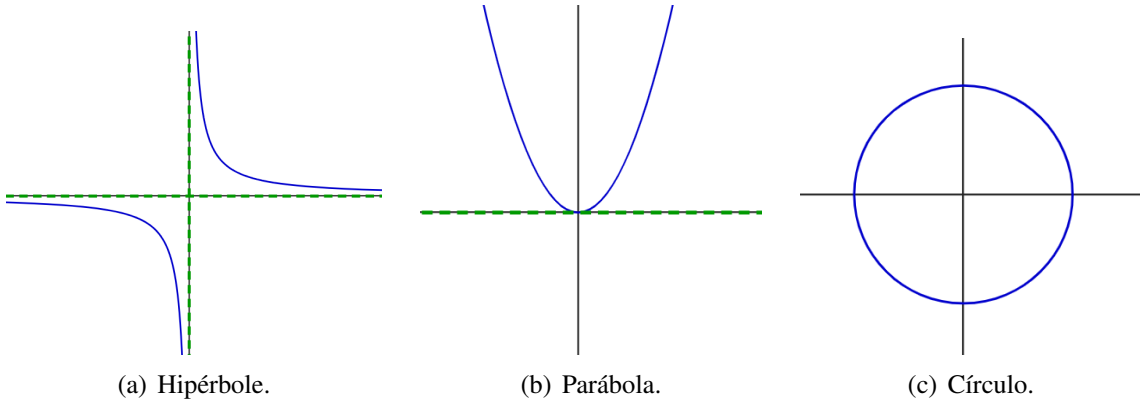


Figura 2.1: Cônicas em $\mathbb{R}^2$

Definição 2.4. Dizemos que uma cônica é *não-degenerada* (não singular) se o polinômio que a define é irredutível. Se o polinômio que define a cônica é fatorado como produto de dois polinômios lineares homogêneos, então dizemos que a cônica é *degenerada* (singular).

Observação 2.5. Podemos dizer também que uma cônica não-degenerada é um conjunto tal que para todo ponto da cônica a multiplicidade da cônica nesse ponto é igual a um. Caso contrário, isto é, se existir um ponto em que a multiplicidade da cônica, nesse ponto, seja maior que um, então tal cônica é degenerada.

Exemplo 2.6. A parábola dada por $\mathcal{Z}(yz - x^2)$ é uma cônica não-degenerada, pois o polinômio $yz - x^2$ não pode ser fatorado em um produto de dois fatores lineares.

Uma cônica degenerada pode ser pensada como o conjunto dos pontos no plano que estão sobre duas retas cruzadas ou como um par de retas que se intersectam em todos os pontos, respectivamente cônica de *reta cruzada* e cônica de *reta dupla*. Além disso, uma cônica é dita *reduzida* quando não for reta dupla. O exemplo a seguir mostra como essa interpretação geométrica se conecta com a definição acima.

Exemplo 2.7. Considere a cônica degenerada que é lugar dos zeros do polinômio $G = 7x^2 - 36z^2 - 2xy + 19xz - 8yz$. Note que $G = G_1G_2$, onde $G_1 = x + 4z$ e $G_2 = 7x - 2y - 9z$. Assim,

$$\mathcal{Z}(G) = \mathcal{Z}(G_1G_2) = \mathcal{Z}(G_1) \cup \mathcal{Z}(G_2).$$

Além disso, $\mathcal{Z}(G_1) \cap \mathcal{Z}(G_2) = [-8 : -37 : 2]$. Este tipo de cônica é chamada de reta cruzada.

Exemplo 2.8. A cônica degenerada dada por $\mathcal{Z}(4x^2 + 12xy + 9y^2) = \mathcal{Z}((2x + 3y)^2)$, é um exemplo de cônica de reta dupla.

É importante compreender a distinção entre cônicas degeneradas e não-degeneradas, pois como veremos mais adiante, cônicas degeneradas impõem dificuldades ao lidar com problemas de interseção de curvas projetivas.

Proposição 2.9. *Se uma cônica C contém três pontos distintos que estão todos em uma reta L , então C tem um fator linear.*

Demonstração. Suponha que C é uma cônica não-degenerada. Nesse caso, C não tem componentes em comum com L . Aplicando o Teorema de Bézout para Curvas Projetivas, temos que $C \cap L$ consiste de $2 = (2)(1) = \deg(C) \deg(L)$ pontos, o que por hipótese é um absurdo. Logo C é uma cônica degenerada. $\square$

2.2 Espaço de Parâmetros

Uma cônica $\mathcal{Z}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz) \subset \mathbb{P}^2$, a menos de multiplicação por escalar, é unicamente determinada por seus coeficientes que podem ser vistos como um ponto $[a : b : c : d : e : f] \in \mathbb{P}^5$. Assim, existe uma correspondência biunívoca entre as cônicas em $\mathbb{P}^2$ e pontos de $\mathbb{P}^5$, dada pelo seguinte mapa

$$\mathcal{Z}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz) \subset \mathbb{P}^2 \mapsto [a : b : c : d : e : f] \in \mathbb{P}^5$$

Portanto podemos ver que $\mathbb{P}^5$ parametriza todas as cônicas do plano projetivo. Isto nos permitirá classificar uma família de cônicas planas observando as relações entre os respectivos pontos do espaço projetivo $\mathbb{P}^5$.

Observação 2.10. Uma variedade algébrica projetiva em $\mathbb{P}^5$ corresponde a um conjunto de curvas de grau dois no plano projetivo complexo. Cada ponto da variedade corresponde a uma cônica em $\mathbb{P}^2$.

Observação 2.11. (Espaço das Curvas de $\mathbb{P}^2$) De maneira geral, um número inteiro $d > 0$, o espaço vetorial formado por polinômios homogêneos de grau d em $\mathbb{C}[x, y, z]$ tem dimensão $\binom{d+2}{2}$, e portanto, é isomorfo a $\mathbb{C}^{n+1}$ com $n = \binom{d+2}{2} - 1$. Consequentemente, o espaço de todas essas curvas de grau d é apenas o espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ o qual é uma variedade.

Observação 2.12. Denote por H_P o conjunto de todas as cônicas que passam por $P = [x_0 : y_0 : z_0] \in \mathbb{P}^2$. As cônicas em H_P estão em correspondência biunívoca com os pontos $[a : b : c : d : e : f] \in \mathbb{P}^5$ que satisfazem a equação

$$x_0^2 a + y_0^2 b + z_0^2 c + x_0 y_0 d + x_0 z_0 e + y_0 z_0 f = 0.$$

O conjunto H_P pode ser interpretado como um hiperplano em $\mathbb{P}^5$.

Exemplo 2.13. Os pontos $[1 : 0 : 0 : -2 : 1 : 0]$ e $[3 : 0 : 0 : -6 : 3 : 0]$ são iguais em $\mathbb{P}^5$ e correspondem as cônicas $x^2 - 2xy + xz = 0$ e $3x^2 - 6xy + 3xz = 0$ respectivamente que descrevem o mesmo conjunto de zeros em $\mathbb{P}^2$.

Lema 2.14. *Dado um arranjo de n pontos em $\mathbb{P}^2$, o conjunto de todas as cônicas passando por cada um dos pontos formam um hiperplano no espaço de parâmetros das cônicas planas. Além disso, se nenhum dos quatro pontos forem colineares, então esses hiperplanos são linearmente independentes¹ para $n \leq 5$.*

Demonstração. Vamos começar fixando um ponto $P_0 = [x_0 : y_0 : z_0] \in \mathbb{P}^2$. A condição para que uma cônica passe por esse ponto é dada por

$$ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 + dx_0y_0 + ex_0z_0 + fy_0z_0 = 0$$

ou

$$x_0^2a + y_0^2b + z_0^2c + x_0y_0d + x_0z_0e + y_0z_0f = 0$$

que por definição é um hiperplano em $\mathbb{P}^5$ e portanto tem dimensão 4.

Considere três hiperplanos em $\mathbb{P}^5$ que são formados pelo conjunto de todas as cônicas que passam por três pontos $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{P}^2$ e assuma que os três hiperplanos são linearmente dependentes. Suponha que um dos hiperplanos, digamos H_2 , contém a interseção $H_0 \cap H_1$. O Teorema da Dimensão Projetiva 1.44 nos garante que a interseção $H_0 \cap H_1$ tem codimensão três. Esta interseção corresponde ao conjunto de todas as cônicas que passam por P_0 e P_1 . O fato de o terceiro hiperplano conter esta interseção implica que qualquer cônica que passe por P_0 e P_1 também deve passar por P_2 . Isto é uma contradição, pois se três dos pontos não são colineares, então podemos escolher uma cônica de reta dupla que passe P_0 e P_1 , mas não passe por P_2 . Por outro lado, se os três pontos forem colineares, então qualquer cônica não-degenerada que passe por P_0 e P_1 não passa por P_2 , pois caso contrário seria um produto de fatores lineares, pela Proposição 2.9. Assim, quaisquer três pontos em $\mathbb{P}^2$ formam três pontos linearmente independentes em $\mathbb{P}^5$.

Sejam H_0, H_1, H_2, H_3 quatro hiperplanos em $\mathbb{P}^5$ formado pelo conjunto de cônicas que passam por $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^2$, respectivamente. Assuma que os hiperplanos são linearmente dependentes e que um dos quatro, digamos H_3 , contém a interseção dos outros três. Além disso, acabamos de mostrar que quaisquer três hiperplanos são linearmente independentes em $\mathbb{P}^5$. Isto implica que qualquer cônica que passe por P_0, P_1 e P_2 também deve passar por P_3 . Assim temos três casos:

Caso 1. P_0, P_1 e P_2 não são todos colineares. Então existe um conjunto de cônicas de retas cruzadas que passam por P_0, P_1 e P_2 , mas não passa por P_3 , ou seja, uma reta que passando por P_0 e P_1 e outra reta que passa por P_2 mas não passa por P_3 . Isto contradiz o fato que os quatro hiperplanos são linearmente dependentes.

Caso 2. Três dos pontos fixos são colineares. Assim podemos escolher uma cônica que passa por P_0, P_1 e P_2 , mas não passa por P_3 , ou seja, é uma cônica de reta dupla.

¹Dois hiperplanos em $\mathbb{P}^5$ são ditos *linearmente independentes* se suas formas lineares são linearmente independentes.

Caso 3. Os quatro pontos são colineares. Nesse caso a reta que passa por P_0, P_1 e P_2 também deve passar por P_3 . As únicas cônicas que podem passar por estes pontos são cônicas que podem ser representadas como produto de fatores lineares. Portanto, se quatro pontos em $\mathbb{P}^2$ não forem todos colineares então os hiperplanos correspondentes em $\mathbb{P}^5$ são linearmente independentes.

Por fim, sejam H_0, H_1, H_2, H_3 e H_4 cinco hiperplanos em $\mathbb{P}^5$ formado por cônicas que passam por seus respectivos pontos em $\mathbb{P}^2$. Suponha que quatro dos cinco pontos não são colineares e que os hiperplanos são linearmente dependentes. Assim o quinto hiperplano, H_4 , contém a interseção $H_0 \cap H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Se assumirmos que os quatro pontos não são colineares então por dependência linear as cônicas que passam por estes quatro pontos também passam por P_4 , mas isso não é verdade pois podemos encontrar um par de retas cruzadas, uma que passe por P_0 e P_1 e outra por P_2 e P_3 . Essa cônica provavelmente não contém P_4 . Se caso a cônica passar por P_4 podemos escolher um outro par de retas, uma passando por P_0 e P_2 e outra P_1 e P_3 , que certamente não contém P_4 . Se três dos cinco pontos são colineares, então podemos obter um conjunto de retas cruzadas que passam por quatro desses cinco pontos, mas não contém o quinto. Ou seja, todas as cônicas degeneradas formadas por uma reta que passa por esses três pontos colineares e um $\mathbb{P}^1$ de retas que contém o quarto ponto. Portanto podemos escolher uma dessas retas de modo que agora tenhamos um par de linhas cruzadas que não contém nosso quinto ponto.

Assim $n \leq 5$ pontos no plano tal que quatro dos pontos não são colineares formam n hiperplanos linearmente independentes em $\mathbb{P}^5$. $\square$

Segue abaixo a ilustração de alguns dos casos mostrados acima para melhor visualização:

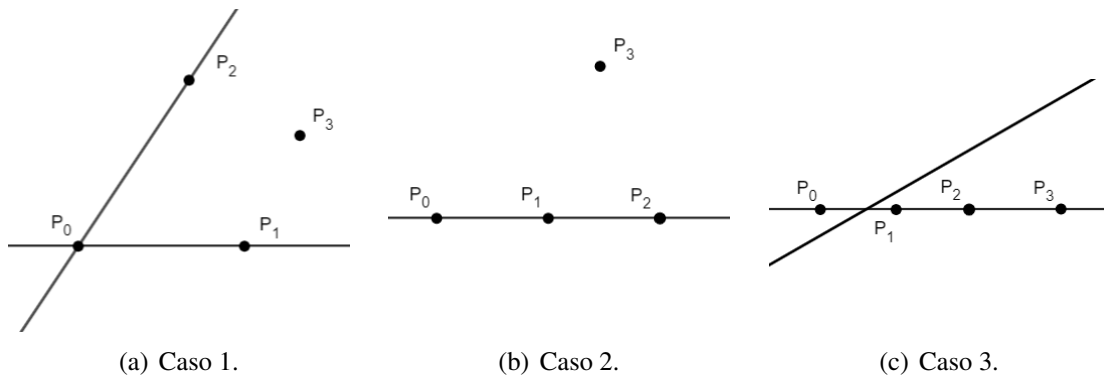


Figura 2.2: Cônicas passando por quatro pontos.

O Lema 2.14 estabelece uma relação ainda mais profunda na teoria de interseção, a independência linear desses hiperplanos está intimamente ligada a interseção transversal, como veremos a seguir. Podemos fazer uso deste lema e do espaço de parâmetros para resolver o nosso primeiro problema enumerativo. O resultado a seguir é conhecido como Teorema dos Cinco Pontos.

Teorema 2.15. *Dados quaisquer cinco pontos em $\mathbb{P}^2$ tais que quatro deles não sejam colineares, existe uma única cônica que passa por eles.*

Demonstração. Para cada $i = 1, \dots, 5$ considere o ponto $[x_i : y_i : z_i] \in \mathbb{P}^2$. O conjunto de todas as cônicas passando por esse ponto forma um hiperplano

$$H_i = \mathcal{Z}(x_i^2 a + y_i^2 b + z_i^2 c + x_i y_i d + x_i z_i e + y_i z_i f).$$

Se quatro dos cinco pontos não são colineares então segue do Lema 2.14 $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 \subset \mathbb{P}^5$ são linearmente independente. Nesse caso, o Teorema 1.44 implica que a interseção desses cinco hiperplanos tem dimensão igual a zero. Segue do Teorema 1.52 que esta interseção consiste de um ponto em $\mathbb{P}^5$. Logo existe uma única cônica que passa por esses cinco pontos em $\mathbb{P}^2$. $\square$

Observação 2.16. O grau de uma variedade projetiva X em $\mathbb{P}^n$ pode ser interpretado como o maior número finito possível de pontos (a menos de multiplicidade) de intersecção de X com uma *subvariedade linear*² $V \subset \mathbb{P}^n$ de dimensão igual a codimensão de X . De fato, aplicando o Teorema 1.44 percebemos que a dimensão das componentes irredutíveis Z_j de $X \cap V$ tem dimensão zero. Temos também que o grau de uma variedade linear é um (ver Cap. 1, Ex. 7.6 de Hartshorne (2013)). Assim, segue do Teorema 1.52 que

$$\sum_j i(X, V; Z_j) = \deg X.$$

Pensando nas cônicas em $\mathbb{P}^2$, a igualdade acima pode ser vista como uma reta (variedade linear) intersectando uma cônica. Sabemos que elas se intersectam em no máximo dois pontos, já que o grau de uma cônica é dois. Em geral, esta interpretação não é útil para determinar o grau de uma variedade, mas pode nos ajudar a resolver alguns problemas enumerativos.

Antes de enunciar nosso próximo resultado, precisamos entender corretamente quando duas curvas são tangentes. Geralmente, ao considerarmos duas curvas não-degeneradas de graus m e n , então elas vão se intersectar em no máximo mn pontos distintos, via Teorema de Bezout.

A figura abaixo retrata bem um exemplo no caso real de interseção de cônicas.

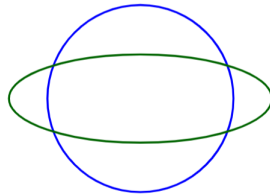


Figura 2.3: Interseção de duas cônicas

²Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ é um conjunto algébrico projetivo. Dizemos que V é k -variedade linear se $V = \mathcal{Z}(L_1, \dots, L_{n-k})$, onde $L_1, \dots, L_{n-k}$ são formas de grau um linearmente independentes.

Isso pode ser verificado restringindo uma das curvas a outra e desomogeneizando em relação a uma das variáveis, obtendo um polinômio em uma única variável de grau igual a mn , cujas raízes são exatamente os pontos de interseção das duas curvas.

Definição 2.17. Sejam F, G duas curvas e $P \in F \cap G$ um ponto em $\mathbb{P}^2$. Dizemos que F é *tangente* a G em P , se elas têm a mesma reta tangente em P , ou equivalentemente, $I(P, F \cap G) > m_P(F)m_P(G)$.

Observação 2.18. Por definição, uma reta L é tangente a uma cônica não-degenerada C em P quando, $I(P, C \cap L) > 1$, ou seja, quando $I(P, C \cap L) = 2$. Isto significa que ao restringirmos a reta à cônica obtemos um polinômio de grau dois (depois de desomogeneizar) com uma raiz dupla.

Lema 2.19. Dada uma reta $L : \mathcal{Z}(ax + by + cz) \subset \mathbb{P}^2$, o conjunto de todas as cônicas tangentes a L forma uma hipersuperfície $H_L \subset \mathbb{P}^5$ de grau 2.

Demonstração. Sabendo que duas retas diferem uma da outra apenas por uma mudança linear de coordenadas, sem perda de generalidade, considere L a reta dada pela equação $z = 0$. Seja

$$C = \mathcal{Z}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz)$$

uma cônica geral (cônica geral não-degenerada). Substituindo L em C obtemos

$$ax^2 + by^2 + dxy = 0.$$

Desomogeneizando em relação a variável y

$$ax^2 + dx + b = 0.$$

A cônica C é tangente a reta L quando o discriminante da expressão acima é zero. Assim a hipersuperfície formada por cônicas que são tangentes a reta $z = 0$ é descrita pelos conjunto dos zeros do polinômio $d^2 - 4ab$. $\square$

Teorema 2.20. Dadas quaisquer quatro pontos não colineares $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^2$ e uma reta qualquer $L \subset \mathbb{P}^2$, existem no máximo duas cônicas que contém os quatro pontos e são tangentes a reta dada.

Demonstração. Dada uma reta L em $\mathbb{P}^2$, o conjunto de cônicas tangentes a essa reta forma uma hipersuperfície, H_L , de grau dois em $\mathbb{P}^5$. Se considerarmos o conjunto de todas as cônicas que passam por P_1, P_2, P_3, P_4 vemos que essa condição forma uma interseção de hiperplanos $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 = S \subset \mathbb{P}^5$. Segue da Observação 2.16 que S é uma variedade de dimensão um e grau um. A interseção $S \cap H_L \subset \mathbb{P}^5$ contém os pontos correspondentes ao conjunto de cônicas que passam por P_1, P_2, P_3, P_4 e são tangentes a L . Logo, esta interseção consiste de no máximo dois pontos que correspondem a no máximo duas cônicas em $\mathbb{P}^2$, desde que $S \not\subset H_L$. $\square$

Observação 2.21. Se duas cônicas não-degeneradas se intersectarem em menos de quatro pontos, isto significa que o polinômio obtido na restrição de uma cônica a outra tem raiz múltipla. Nesse sentido, a raiz múltipla representa um ponto na interseção cuja as retas tangentes às duas cônicas nesse ponto coincidem.

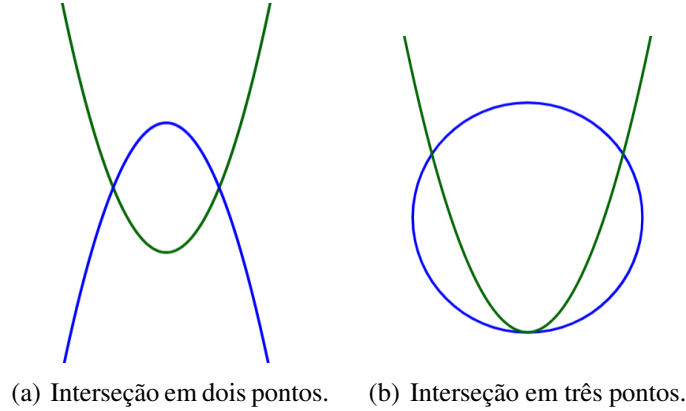


Figura 2.4: Cônicas tangentes.

Lema 2.22. *Seja Q uma cônica não-degenerada em $\mathbb{P}^2$. O conjunto de todas as cônicas tangentes a Q formam uma hipersuperfície de grau 6 em $\mathbb{P}^5$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $Q : xz - y^2 = 0$ em $\mathbb{P}^2$ é tal cônica (Ver Fulton (2008), Ex. 5.9). Considere uma cônica geral (cônica geral não-degenerada) $C : ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$. Vamos deshomogeneizar Q em relação a variável z e restringir à cônica geral C para obter o seguinte polinômio na variável y

$$H : ay^4 + dy^3 + (b + e)y^2 + fy + c = 0.$$

Assim, a cônica C é tangente a Q se, e somente se, o discriminante de H

$$D(H) := \frac{(-1)^6}{a} R_{4,3}(H, H') = 0,$$

onde a, H' , coeficiente líder e a derivada de H , respectivamente e $R_{4,3}(H, H')$ é a resultante da matriz de Sylvester (Ver Eisenbud e Harris (2006), Proposition V-22).

A matriz de Sylvester, cuja as linhas e colunas são formadas por coeficientes de H e

$$H' : 4ay^3 + 3dy^2 + 2(b + e)y + f = 0,$$

está representada abaixo:

$$\begin{bmatrix} a & d & (b+e) & f & c & 0 & 0 \\ 0 & a & d & (b+e) & f & c & 0 \\ 0 & 0 & a & d & (b+e) & f & c \\ 4a & 3d & 2(b+e) & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 3d & 2(b+e) & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a & 3d & 2(b+e) & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a & 3d & 2(b+e) & f \end{bmatrix}.$$

A expressão do discriminante de H é um polinômio homogêneo de grau seis em seis variáveis, cujo o conjunto de zeros em $\mathbb{P}^5$ parametrizam todas as cônicas tangentes a Q . $\square$

2.3 A Dualidade de $\mathbb{P}^2$

Nesta seção apresentaremos uma correspondência fundamental entre pontos e retas no plano projetivo. Intuitivamente, podemos pensar em uma reta como o lugar geométrico de incontáveis pontos assim como um ponto pode ser pensando como o lugar geométrico por onde passam infinitas retas. Essa relação entre ponto e reta torna esses objetos geométricos duais um do outro.

Definição 2.23. Para qualquer espaço projetivo $\mathbb{P}^n$, denotamos por $\check{\mathbb{P}}^n$ o espaço de parâmetros de todos os hiperplanos em $\mathbb{P}^n$. Este espaço é chamado de *dual* de $\mathbb{P}^n$. Um hiperplano dado por $H = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n$, onde $F = a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ com coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ é visto como um ponto $[a_0 : a_1 : \cdots : a_n]$ em $\check{\mathbb{P}}^n$.

Observação 2.24. Ao fixarmos um ponto $P = [b_0 : \cdots : b_n] \in \mathbb{P}^n$, tal ponto define um hiperplano em $\check{\mathbb{P}}^n$ nas variáveis $y_0, \dots, y_n$, dado pelo conjunto de zeros da equação abaixo:

$$b_0y_0 + b_1y_1 + \cdots + b_ny_n = 0.$$

Além disso, pela relação entre os coeficientes de um hiperplano e as coordenadas de um ponto, temos que $\check{\check{\mathbb{P}}}^n = \mathbb{P}^n$.

Princípio da Dualidade (Mohr e Triggs, 1996): Para qualquer resultado estabelecido no espaço projetivo usando pontos e hiperplanos, um resultado simétrico é válido no qual os papéis dos hiperplanos e dos pontos são trocados: os pontos tornam-se hiperplanos, os pontos em um hiperplano tornam-se os hiperplanos através de um ponto, etc.

O próximo resultado nos mostra que podemos também relacionar uma cônica em $\mathbb{P}^2$ com o lugar geométrico das retas tangentes a esta cônica em $\check{\mathbb{P}}^2$.

Lema 2.25. Dada uma cônica não degenerada $Q \subset \mathbb{P}^2$, existe uma cônica não degenerada dual $\check{Q} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ onde o conjunto de retas tangentes a Q formam a cônica $\check{Q}$. Além disso, o conjunto de todas as retas tangentes a $\check{Q}$ correspondem ao lugar geométrico dos pontos que formam a cônica Q .

Demonstração. Seja $Q = \mathcal{Z}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz)$ e uma reta $L = \mathcal{Z}(Ax + By + Cz)$. Como os coeficientes A, B e C não são simultaneamente nulos, podemos supor, sem perda de generalidade, que $A \neq 0$. Assim temos

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z. \quad (2.1)$$

Substituindo (2.1) na cônica Q e reorganizando os termos obtemos

$$\left(\frac{aB^2}{A^2} - \frac{dB}{A}\right)y^2 + \left(\frac{2a^2BC}{A^2} - \frac{dC}{A} - \frac{eB}{A} + f\right)yz + \left(\frac{aC^2}{A^2} - \frac{eC}{A} + c\right)z^2. \quad (2.2)$$

Em seguida vamos desomogeneizar a cônica dada pela Equação (2.2) em relação a variável z . A expressão obtida é um polinômio de grau dois em uma variável. Além disso

sabemos que uma reta e uma cônica são tangentes uma a outra se o discriminante desse polinômio é zero, isto é,

$$\left(\frac{2a^2BC}{A^2} - \frac{dC}{A} - \frac{eB}{A} + f\right)^2 - 4\left(\frac{aB^2}{A^2} - \frac{dB}{A}\right)\left(\frac{aC^2}{A^2} - \frac{eC}{A} + c\right) = 0.$$

Depois de expandir esta expressão e fatorar adequadamente o numerador, temos a seguinte expressão:

$$(f^2 - 4bc)A^2 + (e^2 - 4ac)B^2 + (d^2 - 4ab)C^2 + (4dc - 2ef)AB + (4be - 2df)AC + (4af - 2de)BC. \quad (2.3)$$

O conjunto de zeros da expressão acima nas variáveis A, B, C formam uma cônica $\check{Q}$ que corresponde ao conjunto de todas as retas tangente a Q .

Por fim, vamos mostrar que $\check{Q} = Q$. Sejam Q uma cônica e $\check{Q}$ sua dual. Se o ponto $P \in Q$ e L_1 é uma reta tangente a Q em P . Então, usando o princípio da dualidade em $\mathbb{P}^2$, $\check{L}_1$ é um ponto de $\check{Q}$ e $\check{P}$ é uma reta passando por $\check{L}_1$. Suponha, por absurdo, que $\check{P}$ não é tangente a $\check{Q}$, então $\check{P}$ intersecta $\check{Q}$ em outro ponto, digamos $\check{L}_2$, cujo dual L_2 é uma reta que passa por P , pois $\check{L}_2$ está em $\check{P}$. Como $\check{L}_2$ está em $\check{Q}$, então L_2 é tangente a Q em P . Assim

$$L_2 = L_1 \Rightarrow \check{L}_2 = \check{L}_1$$

o que é um absurdo, pois $\check{L}_1$ é um ponto diferente de $\check{L}_2$. Assim, mostramos que cada um desses pontos são levados para uma única reta tangente $\check{P}$. Com isso temos que dados cinco retas tangentes a uma cônica em $\mathbb{P}^2$ é um conjunto de cinco pontos em $\mathbb{P}^2$. Logo $\check{Q} = Q$. $\square$

A partir desse lema podemos mostrar mais um problema enumerativo de cônicas. Já mostramos anteriormente que dados cinco pontos em $\mathbb{P}^2$ (tal que quatro deles não são colineares) existe uma única cônica que passa por eles, veremos que esse é o mesmo número de cônicas que são tangentes a cinco retas. Mais precisamente,

Teorema 2.26. *Dadas quaisquer 5 retas em $\mathbb{P}^2$ tal que três ou mais delas não se intersectam em um único ponto, então existe uma única cônica que é tangente a essas cinco retas.*

Demonstração. Usando o Princípio da Dualidade podemos ver cinco retas em $\mathbb{P}^2$ como cinco pontos em $\check{\mathbb{P}}^2$. Aplicando o Teorema 2.15 temos que existe uma única cônica $\check{Q}$ que passa por esses cinco pontos. Segue do Lema 2.25 que $\check{Q} = Q$, logo existe uma única cônica Q que é tangente a cinco retas tais que três delas não são concorrentes em $\mathbb{P}^2$. $\square$

2.4 Excesso de Interseção

Na seção 1.3, para curvas, definimos interseção transversal, isto é, quando um ponto na interseção das duas curvas tem retas tangentes distintas a esse ponto. Assim, vamos precisar definir a noção interseção transversal para variedades de dimensão superior.

Como mencionado anteriormente no Lema 2.14, dois hiperplanos são linearmente independentes se suas formas lineares são linearmente independentes, outra forma de ver isso é que em qualquer ponto na interseção dos hiperplanos a interseção dos espaços tangentes consiste de um único ponto.

Definição 2.27. Sejam $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma subvariedade projetiva e $P \in X$. Podemos escolher uma vizinhança afim de P que denotaremos por $X \subset \mathbb{C}^n$. Assumindo que P é a "origem" do espaço $\mathbb{C}^n$, então todo polinômio $F = F_0 + F_1 + \cdots + F_d \in \mathcal{I}(X)$ satisfaz $F_0 = 0$, onde F_i é parte homogênea de grau i . Defina

$$T_P X := \mathcal{Z}(F_1; F \in \mathcal{I}(X)) \subseteq \mathbb{C}^n$$

o espaço tangente a X em P .

Definição 2.28. Dizemos que as hipersuperfícies $H_1, \dots, H_n$ em $\mathbb{P}^n$ se *intersectam transversalmente* em $P \in H_1 \cap \cdots \cap H_n$ quando seus espaços tangentes em P se intersectam no ponto P , ou seja, $T_P H_1 \cap \cdots \cap T_P H_n = P$. As hipersuperfícies $H_1, \dots, H_n$ são ditas *transversais* se a interseção for transversal em todos os pontos.

O resultado a seguir é o Teorema de Bézout para hipersuperfícies que se intersectam transversalmente. A demonstração deste resultado requer uma teoria ainda mais refinada que pode ser encontrada com detalhes em Fulton (2013). Como o nosso objetivo não é demonstrá-lo, vamos apenas enunciar e apresentar informalmente algumas consequências para os problemas enumerativos.

Teorema 2.29 (Teorema de Bézout). *Se n hipersuperfícies de graus $d_1, d_2, \dots, d_n$ se intersectam transversalmente em $\mathbb{P}^n$, então esta interseção consiste de $d_1 d_2 \cdots d_n$ pontos.*

Observação 2.30. O Teorema de Bézout ainda pode ser generalizado para hipersuperfícies que não se intersectam transversalmente. Dadas n hipersuperfícies de graus $d_1, d_2, \dots, d_n$ de tal forma que a interseção destas hipersuperfícies tenha finitos pontos, então sempre obtemos $d_1 d_2 \cdots d_n$ pontos na interseção, desde que contemos suas devidas multiplicidades.

A seguir, precisaremos apenas de dois fatos sobre multiplicidade: a multiplicidade de interseção de $H_1 \cap \cdots \cap H_n$ em um de seus pontos P é sempre um número inteiro positivo, e o número é igual a 1 precisamente quando as hipersuperfícies se intersectam transversalmente em P . Esta multiplicidade de interseção pode ser calculada algebricamente estendendo a relação estabelecida na Observação 1.54 para hipersuperfícies em $\mathbb{P}^n$.

Teorema 2.31. *Dados três pontos $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^2$ e duas retas $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}^2$, existem no máximo 4 cônicas que passam por estes três pontos e são tangentes as duas retas.*

Demonstração. O conjunto de todas as cônicas que passam por três pontos fixos em $\mathbb{P}^2$ corresponde a interseção $S := H_1 \cap H_2 \cap H_3 \subset \mathbb{P}^5$. Esta interseção é uma variedade linear de dimensão dois e grau um. Por outro lado, os conjuntos de cônicas que são tangentes a L_1 e de cônicas tangentes a reta L_2 formam hipersuperfícies H_{L_1} e H_{L_2} de grau dois,

respectivamente. A interseção $S \cap H_{L_1} \cap H_{L_2} \subset \mathbb{P}^5$ é um conjunto de dimensão zero que satisfaz as condições do teorema, logo é conjunto de pontos é finito. Portanto, segue da Observação 2.30 que o número máximo de pontos distintos em $S \cap H_{L_1} \cap H_{L_2} \subset \mathbb{P}^5$ é $(\deg S)(\deg H_{L_1})(\deg H_{L_2}) = (1)(2)(2) = 4$. $\square$

Com estas informações adicionais, vamos voltar aos problemas enumerativos vistos até aqui. Para mostrar o Teorema 2.15 era suficiente verificar que se quatro dos cinco pontos não são colineares então os seus hiperplanos em $\mathbb{P}^5$ são linearmente independentes e isto implica que interseção desses cinco hiperplanos é transversal. Nesse caso, a interseção contém $1^5 = 1$ ponto.

Nas condições do Teorema 2.20, se os quatro hiperplanos e a hipersuperfície de grau dois se intersectarem transversalmente, então essa interseção consiste de $1^4 \cdot 2 = 2$ pontos. Nesse caso, observa-se que a interseção é transversal, a menos que três dos quatro pontos sejam colineares ou um dos pontos esteja na reta dada. É possível verificar também no Teorema 2.31 que a condição para que as cinco hipersuperfícies se intersectem transversalmente é que os três pontos não sejam colineares nem pertençam as retas dadas. Assim nossos problemas enumerativos envolvendo pontos e retas se resumem na tabela abaixo:

Reta L	0	1	2	3	4	5
Ponto P	5	4	3	2	1	0
Solução	1	2	4	?	?	?

Tabela 2.1: Soluções de Cônicas para os problemas Ponto-Reta

Em geral, fica claro que se as hipersuperfícies determinadas por cônicas passando por pontos e tangentes as retas se intersectarem transversalmente, as soluções para os últimos três problemas da tabela acima seguiria diretamente por Bézout. No entanto, para os últimos três problemas de pontos e retas as hipersuperfícies correspondentes não podem se intersectar transversalmente, não importa como nós escolhemos os pontos e as retas. A razão pela qual essas hipersuperfícies não se intersectam transversalmente envolve as cônicas de reta dupla.

O enunciado do Teorema 2.26 nos diz que dadas cinco retas em $\mathbb{P}^2$ tais que mais de três delas não se intersectam em um único ponto, então existe uma única cônica tangente a estas cinco retas. Por outro lado a hipersuperfície de todas as cônicas tangentes a uma reta tem grau igual dois pelo Lema 2.19. Se aplicarmos o Teorema de Bézout, supondo que a interseção destas cinco hipersuperfícies é transversal, temos que $(2)(2)(2)(2)(2) = 2^5 = 32$ pontos em $\mathbb{P}^5$. Este é um exemplo claro de excesso de interseção.

Neste caso, vamos analisar como as cônicas de reta dupla estão intersectando essas cinco retas. Lembre-se que, no plano projetivo, quaisquer duas retas se intersectam (retas paralelas se encontram no infinito), em particular, qualquer cônica de reta dupla passando por uma das retas intersectará cada uma das quatro retas dadas. Estas retas duplas serão tangente a cada uma das retas dadas no sentido algébrico de que a equação para a interseção tem raiz dupla. Assim, obtemos infinitas cônicas de reta dupla como soluções. Como não temos um número finito de soluções, as cinco hipersuperfícies em $\mathbb{P}^5$ não se intersectam transversalmente.

Para os problemas restantes queremos ignorar as soluções de cônicas de retas duplas e contar apenas o número de cônicas que não sejam reta dupla. Na verdade, para cada um dos problemas enumerativos $P + L + Q = 5$ existe uma solução finita que consiste apenas de cônicas não degeneradas. Nos problemas vistos anteriormente nenhuma das soluções podem ser cônicas de reta dupla por causa das condições impostas as retas e os pontos.

No caso do problema Steiner, as hipersuperfícies associadas a cada uma das cônicas tem grau 6, o que implicaria em $7776 = 6^5$ que foi a resposta dada pelo próprio Steiner. A mesma situação de cônicas tangentes a cinco retas se aplicam a este caso pois, as cinco hipersuperfícies H_Q não podem se intersectar transversalmente. Na verdade, cada cônica de reta dupla é tangente a cada uma das cônicas dadas. Para resolver este excesso de contagem vamos introduzir uma nova ferramenta, o *Blow Up*.

Capítulo 3

O Blow Up da Veronese

Neste capítulo definiremos o blow up de $\mathbb{P}^5$ ao longo da superfície de Veronese. Este objeto será fundamental para entendermos como as cônicas de retas duplas estão afetando nossa contagem. Citamos os trabalhos Gathmann (2002), Hartshorne (2013) e Rojas et al. (2023).

3.1 A superfície de Veronese

Definição 3.1. Sejam $m, n > 0$ e $M_0, \dots, M_N$ todos os monômios de grau m nas variáveis $x_0, \dots, x_n$. Defina o mapa $\nu_m : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$ dada por $P \mapsto [M_0(P) : M_1(P) : \dots : M_N(P)]$, onde $N = \binom{n+m}{m} - 1$. A imagem do mapa acima é denominada *m-ésimo mergulho* de $\mathbb{P}^n$ em $\mathbb{P}^N$.

Ao considerarmos a cônica de reta dupla dada por $\mathcal{Z}((ax + by + cz)^2)$. Vemos que

$$\mathcal{Z}((ax + by + cz)^2) = \mathcal{Z}(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz).$$

Definimos a *superfície de Veronese de cônicas de retas duplas* (ou simplesmente *superfície de Veronese*) como a imagem do mapa

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_2 : \tilde{\mathbb{P}}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ [a : b : c] &\mapsto [a^2 : b^2 : c^2 : 2ab : 2ac : 2bc] \end{aligned}$$

que denotaremos por $\mathcal{V}$.

Observação 3.2. Note que a aplicação $\tilde{\nu}_2 : \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$ é injetiva. De fato, dados $[a_1^2 : b_1^2 : c_1^2 : 2a_1b_1 : 2a_1c_1 : 2b_1c_1], [a_2^2 : b_2^2 : c_2^2 : 2a_2b_2 : 2a_2c_2 : 2b_2c_2] \in \mathbb{P}^5$. Assuma que são iguais, então deve existir $\lambda \neq 0$ tal que,

$$a_1^2 = \lambda a_2^2, b_1^2 = \lambda b_2^2, c_1^2 = \lambda c_2^2$$

$$2a_1b_1 = \lambda 2a_2b_2, 2a_1c_1 = \lambda 2a_2c_2, 2b_1c_1 = \lambda 2b_2c_2$$

Para essas condições podemos ver

$$a_1 = \sqrt{\lambda}a_2, b_1 = \sqrt{\lambda}b_2, c_1 = \sqrt{\lambda}c_2$$

Como a multiplicação por escalar não altera o ponto no espaço projetivo, então $\tilde{\nu}_2$ é injetiva. Esta aplicação é, portanto, um mergulho de $\tilde{\mathbb{P}}^2$ em $\mathbb{P}^5$.

Observação 3.3. Este mapa nos fornece a parametrização de uma superfície $\mathcal{V}$ em $\mathbb{P}^5$. Um ponto nessa superfície deve satisfazer as seguintes equações nas variáveis a, b, c, d, e, f .

$$f^2 - 4bc = 0, e^2 - 4ac = 0, d^2 - 4ab = 0,$$

$$4af - 2de = 0, 4dc - 2ef = 0, 4be - 2df = 0.$$

Note que os pontos situados na superfície de Veronese satisfaz as equações acima. Além disso, o ideal gerado por estas seis equações polinomiais, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert - Caso Projetivo, é um ideal radical associado a esta subvariedade em $\mathbb{P}^5$.

Proposição 3.4. *O grau da superfície de Veronese de cônicas de retas duplas é 4.*

Demonstração. Podemos calcular o polinômio de Hilbert associado a superfície de Veronese. O grau do polinômio é a dimensão e o grau da superfície de Veronese é o produto do fatorial da dimensão de $\mathcal{V}$ e o coeficiente líder. O algoritmo abaixo pode ser implementado no Macaulay2, ele nos mostra como encontrar este grau. polinômio.

```
i1 : R = CC[a,b,c,d,e,f]
o1 = R
o1 : PolynomialRing
i2 : I=ideal(e^2-4*c*f, 4*b*f-2*d*e, d^2-4*a*f, 4*c*d-2*b*e, 4*a*e-2*b*d, b^2-4*a*c)
o2 = ideal (e^2 - 4cf, -2de + 4bf, d^2 - 4af, 4cd - 2be, -2bd + 4ae, b^2 - 4ac)
o2 : Ideal of R
i3 : h = hilbertPolynomial I
-- warning: experimental computation over inexact field begun
-- results not reliable (one warning given per session)
o3 = -3P_1 + 4P_2
o3 : ProjectiveHilbertPolynomial
i4 : hilbertPolynomial(I, Projective=>false)
o4 = 2i^2 + 3i + 1
o4 : Q[i]
```

Figura 3.1: Polinômio de Hilbert de $\mathcal{V}$

Segue da Definição 1.49 que o grau da superfície é 4. □

3.2 A Variedade Degenerada

Nesta seção estamos interessados em calcular o grau da variedade degenerada em $\mathbb{P}^5$. Primeiramente definiremos o mergulho de Segre que nos permitirá caracterizar quais dos conjuntos de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ serão denominados conjuntos algébricos. Para isso, sejam $N = (n+1)(m+1) - 1$, $a = [a_0 : \dots : a_n]$ e $b = [b_0 : \dots : b_m]$. Defina

$$\varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$[a_0 : \dots : a_n] \times [b_0 : \dots : b_m] \mapsto [a_0 b_0 : a_0 b_1 : \dots : a_0 b_m : \dots : a_n b_0 : \dots : a_n b_m]$$

Note que, φ está bem definida, é injetora e sua imagem¹ é um conjunto algébrico projetivo em $\mathbb{P}^N$. Esta função nos permite identificar os conjuntos de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ com os conjuntos fechados na imagem do mapa φ em $\mathbb{P}^N$.

Definição 3.5. A função φ como definida acima é denominada *mergulho de Segre*. Diremos que $X \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é um conjunto algébrico se a sua imagem, $\varphi(X)$, for um fechado em $\mathbb{P}^N$.

Exemplo 3.6. Se $m = n = 1$ então $N = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ e $\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ dada por $(a, b) \mapsto [a_0 b_0 : a_0 b_1 : a_1 b_0 : a_1 b_1]$. Sabemos que a imagem de φ é definida pelo menor 2×2 da matriz

$$\begin{bmatrix} z_{00} & z_{01} \\ z_{10} & z_{11} \end{bmatrix}$$

onde $z_{ij} = a_i b_j$ para $i, j \in \{0, 1\}$. Ou seja, $\varphi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ com $F = z_{00} z_{11} - z_{10} z_{01} \in \mathbb{C}[z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}]$. De fato, $F(\varphi(a, b)) = a_0 b_0 a_1 b_1 - a_1 b_0 a_0 b_1 = 0, \forall a, b \in \mathbb{P}^1$.

Teorema 3.7. Um subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é um conjunto algébrico projetivo se, e somente se, existem $G_1, \dots, G_k \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ bihomogêneos nas variáveis $x_0, \dots, x_n$ e $y_0, \dots, y_m$ para cada $i = 1, \dots, k$ tais que

$$X = \{(a, b) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \mid G_i(a, b) = 0, \forall i = 1, \dots, k\}.$$

Demonstração. Ver Rojas et al. (2023), página 82. □

Lema 3.8. Para cada cônica Q em $\mathbb{P}^2$ existe um conjunto de cônicas que são tangentes a Q . Estas cônicas formam uma hipersuperfície H_Q em $\mathbb{P}^5$. Para qualquer ponto $C \in H_Q$ a reta que passa por C e Q está contida em H_Q . Isto é equivalente a dizer que qualquer ponto em $\mathbb{P}^5$ que está na reta que une Q e C representa uma cônica que é tangente a Q .

Demonstração. Sem perda de generalidade vamos considerar uma cônica $Q : xz - y^2 = 0$ e seja H_Q uma variedade em $\mathbb{P}^5$ que corresponde ao conjunto de cônicas tangentes a cônica Q . Escolha um ponto $C = [a_0 : b_0 : c_0 : d_0 : e_0 : f_0]$ pertencente a H_Q . Como a

¹Este é um bom exercício para o leitor verificar

cônica Q corresponde ao ponto $[0 : -1 : 0 : 0 : 1 : 0]$ em $\mathbb{P}^5$, a reta que passa por Q e C tem a seguinte parametrização

$$L(t) = tQ + (1 - t)C$$

$$L_{QC} = [(1 - t)a_0 : -t + (1 - t)b_0 : (1 - t)c_0 : (1 - t)d_0 : t + (1 - t)e_0 : (1 - t)f_0].$$

Portanto uma cônica que está nessa reta é dada por:

$$(1 - t)a_0x^2 + [-t + (1 - t)b_0]y^2 + (1 - t)c_0z^2 + (1 - t)d_0xy + [t + (1 - t)e_0]xz + (1 - t)f_0yz = 0$$

Agora vamos verificar se esta cônica é tangente a Q . Para isso vamos desomogeneizar a curva acima em relação a variável z e restringir a cônica Q . Assim temos a seguinte expressão

$$H : (1 - t)a_0y^4 + (1 - t)d_0y^3 + (1 - t)(b_0 + e_0)y^2 + (1 - t)f_0y + (1 - t)c_0 = 0$$

Derivando a equação polinomial acima obtemos

$$H' : (1 - t)4a_0y^3 + (1 - t)3d_0y^2 + (1 - t)(2b_0 + 2e_0)y + (1 - t)f_0.$$

Encontrando a resultante da matriz abaixo podemos calcular o discriminante como no Lema 2.22.

$$(1 - t) \begin{bmatrix} a_0 & d_0 & (b_0 + e_0) & f_0 & c_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & d_0 & (b_0 + e_0) & f_0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & d_0 & (b_0 + e_0) & f_0 & c_0 \\ 4a_0 & 3d_0 & 2(b_0 + e_0) & f_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_0 & 3d_0 & 2(b_0 + e_0) & f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a_0 & 3d_0 & 2(b_0 + e_0) & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_0 & 3d_0 & 2(b_0 + e_0) & f_0 \end{bmatrix}$$

Como a cônica C foi escolhida para ser tangente a Q , o discriminante

$$D(H) := \frac{(-1)^6}{a_0} R_{4,3}(H, H') = 0$$

é um polinômio nas variáveis $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0$ de grau seis cujo conjunto de zeros pertencem a reta L_{QC} e correspondem as cônicas tangentes a cônica Q . $\square$

Considere agora a cônica degenerada dada por $\mathcal{Z}((ax + by + cz)(dx + ey + fz))$. Vemos que esta cônica pode ser vista como

$$\mathcal{Z}(adx^2 + bey^2 + cfz^2 + (ae + bd)xy + (af + cd)xz + (bf + ce)yz).$$

Como $\check{\mathbb{P}}^2$ parametriza as retas e $\mathbb{P}^5$ parametriza as cônicas em $\mathbb{P}^2$, o mapa racional

$$\gamma : \check{\mathbb{P}}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$$

dada por

$$[a : b : c] \times [d : e : f] \longmapsto [ad : be : cf : ae + bd : af + cd : bf + ce].$$

A imagem do mapa γ é chamada de *variedade degenerada* em $\mathbb{P}^5$.

Lema 3.9. *O grau da variedade degenerada em $\mathbb{P}^5$ é três.*

Demonstração. Vamos definir

$$\gamma := \psi \circ \varphi : \check{\mathbb{P}}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5,$$

onde φ é o mergulho de segre de $\check{\mathbb{P}}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2$ para $\mathbb{P}^8$ e ψ é o mapa racional de $\mathbb{P}^8$ para $\mathbb{P}^5$ dado por:

$$[ad : be : cf : ae : af : bd : bf : cd : ce] \mapsto [ad : be : cf : ae + bd : af + cd : bf + ce].$$

A estratégia para determinar o grau da variedade degenerada é usar os anéis de coordenadas dos espaços envolvidos e definir mapas adequados sobre esses anéis. Para isso, considere $\mathbb{C}[z_{00}, z_{01}, z_{02}, z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{20}, z_{21}, z_{22}]$, $\mathbb{C}[a, b, c, d, e, f]$, $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2]$ os anéis de polinômios de $\mathbb{P}^8$, $\mathbb{P}^5$ e $\check{\mathbb{P}}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2$ respectivamente. O algoritmo a seguir mostra como podemos obter as equações do mergulho de Segre.

```
i1 : R = CC[x0,x1,x2,y0,y1,y2]
o1 = R
o1 : PolynomialRing

i2 : S = CC[z00,z01,z02,z10,z11,z12,z20,z21,z22]
o2 = S
o2 : PolynomialRing

i3 : T = CC[a,b,c,d,e,f]
o3 = T
o3 : PolynomialRing

i4 : g = map(R, S, {x0*y0, x0*y1, x0*y2, x1*y0, x1*y1, x1*y2, x2*y0, x2*y1, x2*y2})
o4 = map(R, S, {x0 y0, x0 y1, x0 y2, x1 y0, x1 y1, x1 y2, x2 y0, x2 y1, x2 y2})
o4 : RingMap R ← S

i5 : I = ker g
```

Figura 3.2: Algoritmo para mapa g

O núcleo da aplicação g é o ideal gerado pelas equações de Segre

$$\begin{array}{lll} z_{00}z_{11} - z_{10}z_{01} = 0 & z_{00}z_{12} - z_{10}z_{02} = 0 & z_{00}z_{21} - z_{20}z_{01} = 0 \\ z_{00}z_{22} - z_{20}z_{02} = 0 & z_{01}z_{12} - z_{11}z_{02} = 0 & z_{01}z_{22} - z_{21}z_{02} = 0 \\ z_{10}z_{21} - z_{20}z_{11} = 0 & z_{10}z_{22} - z_{20}z_{12} = 0 & z_{11}z_{22} - z_{21}z_{12} = 0 \end{array}$$

Por fim, definimos um mapa h dado pelas equações de ψ e determinamos a pré-imagem do ideal gerado pelas equações de Segre via o mapa h .

```

i6 : h = map(S, T, {z00, z11, z22, z01+z10, z02+z20, z12+z21})
o6 = map(S, T, {z00, z11, z22, z01+z10, z02+z20, z12+z21})
o6 : RingMap S ← T
i7 : J = preimage_h I
o7 = ideal (abc - .25cd^2 - .25be^2 + .25def - .25af^2)
o7 : Ideal of T

```

Figura 3.3: Pré imagem do Ideal I sob mapa h .

O polinômio encontrado na penúltima linha do algoritmo acima é homogêneo de grau três e seus zeros definem uma hipersuperfície em $\mathbb{P}^5$. Logo o grau da variedade degenerada é três. $\square$

3.3 Blowing up

Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. Para algum $r \in \mathbb{N}$, sejam $F_1, \dots, F_r \in A(X)$ funções polinomiais em X e $U = X \setminus \mathcal{Z}(F_1, \dots, F_r)$. Como $F_1, \dots, F_r$ não se anulam simultaneamente em U , obtemos um morfismo

$$f : U \longrightarrow \mathbb{P}^{r-1}$$

$$x \longmapsto [F_1(x) : \dots : F_r(x)].$$

Considere o gráfico

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset U \times \mathbb{P}^{r-1}$$

que é isomorfo a U , tendo como morfismo inverso a projeção no primeiro fator. Note que Γ_f é fechado em $U \times \mathbb{P}^{r-1}$ pois,

$$(x, y) \in \Gamma_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y_i F_j(x) = y_j F_i(x)$$

isto é, os pontos em $X \setminus U$ que se anulam simultaneamente em $F_1(x), \dots, F_r(x)$ não estão bem definidos como ponto em $\mathbb{P}^{r-1}$.

Definição 3.10. O fecho do gráfico Γ_f em $X \times \mathbb{P}^{r-1}$ que contém Γ_f como um subconjunto aberto e denso é chamado de blow up de X em $I = \langle F_1, \dots, F_r \rangle$. Denotaremos por $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X$.

Observação 3.11. Note que existe uma projeção natural

$$\pi : Bl_{\mathcal{Z}(I)}X \longrightarrow X$$

$$(x, f(x)) \mapsto x$$

no primeiro fator. As vezes dizemos que esse morfismo é o blow up de X em $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(F_1, \dots, F_r)$.

Observação 3.12 (Conjuntos Excepcionais). Sabemos que $\pi|_{\Gamma_f}: \Gamma_f \rightarrow U$ é um isomorfismo, assim podemos identificar Γ_f com U de modo que U seja um subconjunto aberto de $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X$. Seu complementar $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X \setminus U = \pi^{-1}(\mathcal{Z}(F_1, \dots, F_r))$, em que π geralmente não é um isomorfismo, é chamado de *divisor excepcional* do blow up.

Se X é irredutível e $F_1, \dots, F_r$ não se anulam simultaneamente em todo X , então $U = X \setminus \mathcal{Z}(F_1, \dots, F_r)$ é um conjunto aberto não-vazio e denso em X . Portanto seu fecho no blow up, que por definição é todo $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X$, é também irredutível. Assim podemos concluir que X e $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X$ são birracionais neste caso, tendo em comum o subconjunto aberto e denso, U .

Observação 3.13 (Transformada estrita e blow up de subvariedades). Seja Y uma subvariedade fechada de X . Então o blow up de Y em $I = \langle F_1, \dots, F_r \rangle$ resulta em

$$\tilde{Y} \subset Y \times \mathbb{P}^{r-1} \subset X \times \mathbb{P}^{r-1}$$

e portanto é também uma subvariedade fechada de $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X$. Na verdade, é o fecho de $Y \cap U$ em $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X$ (usando o isomorfismo $\Gamma_f \simeq U$ da Observação 3.12 para identificar $Y \cap U$ com um subconjunto de $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X$). Se considerarmos $\tilde{Y}$ como subconjunto de $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X$ dessa forma, chamaremos de *transformada estrita* de Y no blow up de X .

Em particular, se $X = X_1 \cup \dots \cup X_m$ é a decomposição de X em componentes irredutíveis, então $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X_i \subset Bl_{\mathcal{Z}(I)}X$ para $i = 1, \dots, m$. Além disso, como o fecho de um conjunto comuta para uniões finitas, temos que

$$Bl_{\mathcal{Z}(I)}X = Bl_{\mathcal{Z}(I)}X_1 \cup \dots \cup Bl_{\mathcal{Z}(I)}X_m$$

isto é, para obter o blow up de X é suficiente obter o blow up de suas componentes individualmente. Para muitas situações basta, portanto, considerar o blow up de variedades.

Exemplo 3.14. Com a mesma notação da construção do blow up, seja $r = 1$, nesse caso existe apenas uma função polinomial F_1 . Então $Bl_{\mathcal{Z}(F_1)}X \subset X \times \mathbb{P}^0 \simeq X$, e $\Gamma_f \simeq U$. Nesse caso $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X$ é apenas o fecho de U em X sob este isomorfismo. Se assumirmos, por simplicidade, que X é irredutível e obtemos, portanto, dois casos:

- (a) Se $F_1 \neq 0$ então $U = X \setminus \mathcal{Z}(F_1)$ é um subconjunto aberto não vazio de X , e portanto $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X = X$.
- (b) Se $F_1 = 0$ então $U = \emptyset$, e portanto $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X = \emptyset$.

Lema 3.15. O blow up $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X$ de uma variedade afim X em $I = F_1, \dots, F_r \in A(X)$ satisfaz

$$Bl_{\mathcal{Z}(I)}X \subset \{(x, y) \in X \times \mathbb{P}^n \mid y_i F_j(x) = y_j F_i(x), \forall i, j = 1, \dots, r\}.$$

Demonstração. Ver Gathmann (2002), Lemma 9.14. □

Proposição 3.16. Seja $\pi: Bl_{\mathcal{Z}(I)}X \rightarrow X$ o blow up de variedade irredutível X em $F_1, \dots, F_r \in A(X)$. Então, cada componente irredutível do excepcional $\pi^{-1}(\mathcal{Z}(F_1, \dots, F_r))$ tem codimensão 1 em $Bl_{\mathcal{Z}(I)}X$. É, portanto, chamado de *hipersuperfície excepcional* do blow up.

Demonstração. Ver Gathmann (2002), Proposition 9.23. $\square$

Observação 3.17. Note que o blow up de uma variedade projetiva X pode ser definida essencialmente da mesma forma que para o caso afim. Se $F_1, \dots, F_r \in S(X)$ são polinômios homogêneos de mesmo grau o blow up de X em $F_1, \dots, F_r$ é definido como o fecho do gráfico

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset U \times \mathbb{P}^{r-1}$$

onde $U = X \setminus \mathcal{Z}(F_1, \dots, F_r)$. Este conjunto é, por Segre, uma variedade projetiva.

Exemplo 3.18 (Blow up de uma curva $C \subset \mathbb{C}^2$ na origem). Considere $C = \mathcal{Z}(y^2 - x^2(x + 1))$ uma cúbica em $\mathbb{C}^2$. O blow up de $\mathbb{C}^2$ no ponto $(0, 0)$, é definido por

$$Bl_{(0,0)}\mathbb{C}^2 := \{((x, y), [t : u]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid xu - yt = 0\}$$

onde t, u são coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^1$ e (x, y) são coordenadas de $\mathbb{C}^2$. Isto é o mesmo que olhar $\mathbb{C}^2$ exceto na origem que foi substituído por um $\mathbb{P}^1$ correspondente as direções das retas que passam por $(0, 0)$. Nesse caso, chamamos $\mathbb{P}^1$ de *curva excepcional*, denotado por E . Como $\mathbb{P}^1$ pode ser coberto por abertos afins $t \neq 0$ e $u \neq 0$ (ver Corolário A.37). Se $t \neq 0$, podemos considerar $t = 1$ e u um parâmetro afim qualquer. Então temos as equações

$$y^2 = x^2(x + 1)$$

$$y = xu$$

em $\mathbb{C}^3$ com coordenadas x, y, t . Substituindo, temos $x^2u^2 - x^2(x + 1) = 0$. Assim, obtemos duas componentes irredutíveis, uma definida por $x = 0, y = 0, u$ arbitrário, que é a curva excepcional, e outra definido por $u^2 = x + 1, y = xu$, isto é, $\tilde{C}$. Note que $\tilde{C} \cap E = \{(0, 1), (0, -1)\}$. Estes pontos correspondem as duas direções de C em $(0, 0)$. Analogamente, ao considerarmos o outro conjunto aberto $u \neq 0$ em $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$, vemos que $\tilde{C}$ encontra E no ponto $t = \pm 1$. Além disso, $\tilde{C}$ é uma curva não degenerada, pois é não degenerada em cada um dos conjuntos abertos. O efeito do blow up é, portanto, separar ramos de curvas que passam por $(0, 0)$ de acordo com suas inclinações. Se as inclinações forem diferentes, suas transformadas estritas não se encontram mais em $Bl_{(0,0)}\mathbb{C}^2$. Em vez disso, elas encontram E em pontos correspondentes às diferentes inclinações.



Figura 3.4: Blow Up de $\mathbb{C}^2$ em $(0, 0)$

Considere a superfície de Veronese de cônicas de retas duplas

$$\mathcal{V} = \mathcal{Z}(f^2 - 4bc, e^2 - 4ac, d^2 - 4ab, 4dc - 2ef, 4af - 2de, 4be - 2df)$$

e defina o seguinte mapa racional

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^5 &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ [a : b : c : d : e : f] &\longmapsto [f^2 - 4bc : e^2 - 4ac : d^2 - 4ab : 4dc - 2ef : 4af - 2de : 4be - 2df]. \end{aligned}$$

Note que o lugar de indenfinição desse mapa racional é $\mathcal{V}$ e, portanto, seu gráfico é dado por $\Gamma := \{(x, \phi(x)) : x \in \mathbb{P}^5 \setminus \mathcal{V}\} \subset (\mathbb{P}^5 \setminus \mathcal{V}) \times \mathbb{P}^5$.

Definição 3.19. O fecho do gráfico acima (em $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$), que denotaremos por $Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5)$, é o *blow up de $\mathbb{P}^5$ ao longo da superfície de Veronese*.

Observação 3.20 (Equações para $Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5)$). Sabemos que o gráfico é o conjunto de pontos $([a : b : c : d : e : f], [r : s : t : u : v : w]) \in \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$ que satisfaz as equações

$$\begin{aligned} \lambda r &= f^2 - 4bc & \lambda u &= 4dc - 2ef \\ \lambda s &= e^2 - 4ac & \lambda v &= 4af - 2de \\ \lambda t &= d^2 - 4ab & \lambda w &= 4be - 2df \end{aligned}$$

Com a ajuda do *Macaulay2* podemos determinar as equações para o blow up de $\mathbb{P}^5$ ao longo da superfície de Veronese. A última linha do algoritmo no final desta observação nos retorna o ideal gerado por oito polinômios nas variáveis $a, b, \dots, f, r, s, \dots, w$

$$\begin{aligned} bu + 2cv + 2ew &= 0 & as + bt + 0.5dv &= 0 \\ au + 0.5bv + dw &= 0 & dr + 0.5es + fu &= 0 \\ ds + 2et + 2fv &= 0 & br + cs + 0.5eu &= 0 \\ bs + 4ct - 4fw - du &= 0 & ar - ct + 0.25du - 0.25ev &= 0 \end{aligned}$$

Essas equações podem ser obtidas a partir da *syzygies*, matriz de coeficientes polinomiais usada para calcular o núcleo de um mapa de S -módulos livres. Equivalentemente resolver sistemas de equações lineares sobre S Eisenbud (2013). A matriz abaixo é a *syzygies* para as equações $Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5)$.

$$\begin{bmatrix} d & b & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5e & c & d & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e & -c & b & 4c & 0 & 0 \\ f & 0.5e & 0 & 0.25d & 0 & -d & b & a \\ 0 & 0 & 2f & -0.25e & 0.5d & 0 & 2c & 0.5b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4f & 2e & d \end{bmatrix}$$

Para determinar esta matriz basta acrescentar ao algoritmo abaixo o comando `syz gens`

I.

```

i1 : R = CC[a,b,c,d,e,f]
o1 = R
o1 : PolynomialRing

i2 : I = ideal(f^2-4*b*c, e^2-4*a*c, d^2-4*a*b, 4*d*c-2*e*f, 4*a*f-2*d*e, 4*b*e-2*d*f)
o2 = ideal(-4*b*c + f^2, -4*a*c + e^2, -4*a*b + d^2, 4*c*d - 2*e*f, -2*d*e + 4*a*f, 4*b*e - 2*d*f)
o2 : Ideal of R

i3 : blowUpIdeal = (I) -> (
    r := numgens I;
    S := ring I;

    n := numgens S;
    K := coefficientRing S;
    tR := K[t, gens S, vars(0..r-1),
    MonomialOrder => Eliminate 1];
    h := map(tR, S, submatrix(vars tR, {1..n}));
    F := h(gens I);
    J := ideal apply(1..r, j -> (gens tR)_(n+j)-t*F_(0,(j-1)));
    L := ideal selectInSubring(1, gens gb J);
    R := K[gens S, vars(0..r-1)];
    g := map(R, tR, 0 | vars R);
    trim g(L));

i4 :
J = blowUpIdeal(I)

```

Figura 3.5: Algoritmo para as equações do blow up.

Intuitivamente podemos pensar no $Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5)$ como um prolongamento das cônicas no seu espaço de parâmetros. Este blow up preserva as propriedades de cônicas não degeneradas e cônicas de retas cruzadas, mas adiciona a superfície de Veronese uma informação adicional.

Definição 3.21. O conjunto de pontos adicionados ao tomar o fecho do gráfico Γ , denotado por E , é o *divisor excepcional* no $Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5)$.

Observação 3.22. Seja $\mathcal{V}$ a superfície de Veronese em $\mathbb{P}^5$, então pela observação 3.12, a projeção

$$\begin{aligned} \pi : Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5) &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ (x, \phi(x)) &\longmapsto x \end{aligned}$$

define um isomorfismo entre os abertos

$$Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5) \setminus \pi^{-1}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathbb{P}^5 \setminus \mathcal{V}.$$

Além disso, da observação 3.13, se Z é uma variedade em $\mathbb{P}^5$, então $\pi^{-1}(Z)$ é a transformada total de Z . Se $\pi^{-1}(Z)$ é redutível e tem um múltiplo do divisor excepcional, mE como uma componente, então $\pi^{-1}(Z) \setminus mE$ é chamada de transformada própria de Z . Os pontos do fecho de $\pi^{-1}(Z)$ que estão fora do divisor excepcional é chamado de transformada estrita de Z . Nesse sentido, as variedades que estão fora da superfície de Veronese permanecem inalteradas no blow up.

3.4 A dualidade encontra o Blowup

Nesta seção faremos uma descrição informal para entender o que acontece com as seis ultimas entradas de um ponto que pertence ao divisor excepcional. Isto nos leva a entrar em conceitos ainda mais profundos sobre o assunto como por exemplo compactação do espaço de parâmetros e cônicas completas. O leitor interessado poderá consultar Eisenbud e Harris (2016).

O blow up de $\mathbb{P}^5$ ao longo da superfície de veronese, definido como fecho do gráfico Γ , é uma expansão de $\mathbb{P}^5$ em que a superfície de veronese é deformada em algo com duas dimensões a mais. Na verdade, cada ponto na veronese foi substituído por um $\mathbb{P}^2$ inteiro dentro do $Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5)$. De fato, ao considerarmos a cônica de reta dupla $x^2 = 0$, esta corresponde ao ponto $[1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0]$ na superfície de Veronese. Ao substituirmos esse ponto nas equações do blow up temos,

$$2au = 0 \qquad 2as = 0 \qquad 4ar = 0.$$

Como $a \neq 0$, isto implica que u, s e r são necessariamente zero e t, v e w podem ser qualquer. Então

$$\pi^{-1}([1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0]) = ([1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0], [0 : 0 : t : 0 : v : w]).$$

Portanto estes pontos definem um $\mathbb{P}^2$ dentro do blow up, então $\pi^{-1}([a : b : c : d : e : f]) \simeq \mathbb{P}^2$, com $[a : b : c : d : e : f] \in \mathcal{V}$.

Os pontos adicionados no fecho do gráfico podem ser vistos como limite de sequência de pontos do $Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5) \setminus E =: \mathcal{S}$. Cada ponto $P \in \mathcal{S}$ é dado por um vetor de doze entradas, as primeiras seis entradas denotam uma cônica $C \subset \mathbb{P}^5$ não degenerada e as seis últimas são coeficientes de uma cônica não degenerada $\check{C}$ em $\check{\mathbb{P}}^5$ (isto não seria verdade para corpos de característica 2). Os coeficientes da cônica dual em (2.3) coincide com as equações polinomiais da superfície de Veronese.

Lembre que, E é a pré-imagem da veronese sob o mapa

$$\pi : Bl_{\mathcal{V}}\mathbb{P}^5 \longrightarrow \mathbb{P}^5$$

$$(C, \check{C}) \longmapsto C$$

Tomando um ponto em $P \in E$ sabemos precisamente que as primeiras seis coordenadas descrevem uma cônica de reta dupla em $\mathbb{P}^5$. Por outro lado, não conseguimos identificar o segundo fator previamente pois, dentro de $\mathbb{P}^5$ a dualidade não está bem definida para os pontos da veronese. Usaremos sequências para resolver esse problema.

Considere uma sequência de pontos $P_i \in \mathcal{S}$ que converge para $P \in E$. Vamos observar o que acontece quando uma cônica não degenerada se aproxima de uma cônica de reta dupla. Seja $\{C_i\}$ uma família de cônicas em $\mathbb{P}^5$ a um parâmetro i . Sabemos que o primeiro fator converge para coeficientes de um ponto na veronese. Isto pode ser pensado como uma deformação de uma cônica não degenerada em uma cônica de reta dupla. Para cada instante i dessa deformação temos uma cônica no plano que tem uma cônica dual bem definida. Conforme a sequência de cônicas não degeneradas se aproxima da cônica de reta dupla a sequência de cônicas duais $\{\check{C}_i\}$ se aproxima das últimas seis entradas do ponto P . Intuitivamente, quando uma cônica se degenera em um par de retas cruzadas ou uma reta dupla, a sua dual parece desaparecer, já que o dual de uma reta é apenas um ponto.

Vamos considerar o seguinte mapa

$$\begin{aligned} Bl_V \mathbb{P}^5 &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ [Q : \check{Q}] \in E &\longmapsto \check{Q} \in \mathbb{P}^5 \end{aligned}$$

onde a primeira entrada é um ponto da veronese e a segunda é um ponto da variedade degenerada tal que $\check{\check{Q}} = Q$ (provado no lema 2.25).

Para calcular o $\lim_{i \rightarrow 0} \check{C}_i$, seja $\mathcal{V}$ a superfície veronese em $\mathbb{P}^5$ e escolha um ponto $Q \in \mathcal{V}$, sabemos que Q é da forma $[a_0^2 : b_0^2 : c_0^2 : 2a_0b_0 : 2a_0c_0 : 2b_0c_0]$ onde $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{C}$. Considere o segmento de reta $L_{CQ} \subset \mathbb{P}^5$ que liga $C = [a : b : c : d : e : f]$ a Q . Este segmento tem a seguinte parametrização

$$[a_0^2(1-i) + ai : b_0^2(1-i) + bi : c_0^2(1-i) + ci : 2a_0b_0(1-i) + di : 2a_0c_0(1-i) + ei : 2b_0c_0(1-i) + fi]$$

onde o parâmetro i é um número real que varia de zero a um. Como i se aproxima de zero, a família de cônicas não degeneradas se aproxima de uma cônica de reta dupla, e portanto $L_{CQ}(0) = Q$. Um ponto no divisor excepcional pode ser descrito escolhendo um ponto na variedade degenerada e depois calculando o dual desse ponto sob o mapa

$$\delta : \mathbb{P}^5 \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^5$$

$$[a : b : c : d : e : f] \mapsto [f^2 - 4bc : e^2 - 4ac : d^2 - 4ab : 4dc - 2ef : 4af - 2de : 4be - 2df].$$

O limite de $\check{L}_{CQ}(i)$ quando i se aproxima de zero é o segundo fator que descreve o ponto em E . Podemos considerar esse ponto limite em $\mathbb{P}^5$ como uma cônica nas variáveis x, y, z ;

dado por

$$\begin{aligned} \check{Q} = \mathcal{Z} \Big(& \left[\sqrt{c} \left(b_0 - \frac{f}{2c} c_0 - \sqrt{\frac{f^2 - 4ac}{4c^2}} c_0 \right) x + \sqrt{a} \left(c_0 - \frac{e}{2a} a_0 - \sqrt{\frac{e^2 - 4ac}{4a^2}} a_0 \right) y + \right. \\ & \left. + \sqrt{b} \left(a_0 - \frac{d}{2b} b_0 - \sqrt{\frac{d^2 - 4ac}{4b^2}} b_0 \right) z \right] \left[\sqrt{c} \left(b_0 - \frac{f}{2c} c_0 + \sqrt{\frac{f^2 - 4ac}{4c^2}} c_0 \right) x + \right. \\ & \left. + \sqrt{a} \left(c_0 - \frac{e}{2a} a_0 + \sqrt{\frac{e^2 - 4ac}{4a^2}} a_0 \right) y + \sqrt{b} \left(a_0 - \frac{d}{2b} b_0 + \sqrt{\frac{d^2 - 4ac}{4b^2}} b_0 \right) z \right] \Big). \end{aligned}$$

Isto também nos diz que a imagem de E sob a projeção no segundo fator é variedade degenerada em $\mathbb{P}^5$. O mapa δ está bem definido para pontos de $\mathbb{P}^5$ fora da superfície de veronese, pois toda cônica de reta cruzada e cônica não degenerada tem o dual bem definido.

Assim podemos usar o mapa δ para identificar os pontos que faltavam no $Bl_V(\mathbb{P}^5)$, correspondentes a pontos da veronese. Esses pontos são identificados como conjuntos de cônicas de retas cruzadas que tem como limite uma cônica de reta dupla.

Capítulo 4

O Anel de Chow

Em geral, para uma variedade algébrica, o anel Chow é um anel que descreve como suas subvariedades se intersectam. Também conhecido como o anel das interseções, os elementos deste anel são classes de subvariedades que possuem as mesmas propriedades de interseção. Neste capítulo citamos os trabalhos Bashelor (2005), Ferreira Filho (2014) e Gathmann (2002). O leitor interessado poderá consultar Apêndice B para mais informações sobre o assunto.

4.1 Ciclos e equivalência racional

Definição 4.1. Um ciclo de codimensão k em X é uma soma formal finita de subvariedades de codimensão k numa variedade X . Denotamos o conjunto de todos k -ciclos (ciclos de codimensão k) em X por $Z^k X$.

Observação 4.2. Cada elemento de $Z^k X$ é uma soma linear finita de subvariedades

$$a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_r Y_r$$

onde para cada i , $a_i \in \mathbb{Z}$ e Y_i é uma subvariedades de X de codimensão k .

Observação 4.3. $Z^k X$ é grupo abeliano. De fato, dados $a, b \in Z^k X$ temos que

$$a + b = \sum_{i=1}^r a_i Y_i + \sum_{i=1}^s b_i Y_i = \sum_{i=1}^r (a_i + b_i) Y_i$$

O elemento zero pode ser pensado como o conjunto vazio. Além disso, para cada elemento $\sum_{i=1}^r a_i Y_i$ de $Z^k X$ existe um único elemento $-\sum_{i=1}^r a_i Y_i$ tal que

$$\sum_{i=1}^r a_i Y_i + \left(-\sum_{i=1}^r a_i Y_i\right) = 0$$

A associatividade e comutatividade segue dos números inteiros. Logo $Z^k X$ é um grupo abeliano com a operação de adição.

Definição 4.4. Sejam Y_1 e Y_2 ciclos de codimensão k de uma variedade X . Dizemos que Y_1 e Y_2 são *racionalmente equivalentes* se existe W de codimensão $k - 1$, contendo Y_1 e Y_2 , e uma função racional $f \in \mathbf{K}(W)$ tal que $Y_1 = \mathcal{Z}(f)$ e $Y_2 = \text{pls}(f)$ ¹.

Exemplo 4.5. Note que $Y_1 = \mathcal{Z}(y^2 + x^2)$ e $Y_2 = \mathcal{Z}(yz - x^2)$ são racionalmente equivalentes em $\mathbb{P}^2$, pois $\mathbb{P}^2$ contém as duas cônicas e podemos encontrar uma função racional

$$f(x, y, z) = \frac{y^2 + x^2}{yz - x^2}$$

que tem Y_1 como zeros e Y_2 como os polos de f .

Observação 4.6. Quaisquer duas variedades de mesmo grau em $\mathbb{P}^n$ são racionalmente equivalentes. Esse fato é importante pois podemos dizer que variedades não lineares são racionalmente equivalentes a variedades lineares. Por exemplo, uma hipersuperfície de grau três é racionalmente equivalente a três cópias de um ciclo linear de codimensão 1.

Definição 4.7 (Ver Hartshorne (2013), página 131). Um ciclo associado a uma função racional $f \in \mathbf{K}(X)^*$, não nula, é definido por

$$[f] := \sum_W \text{ord}_W(f) W$$

onde W é uma subvariedade de codimensão 1 em X .

Definição 4.8. Diremos que um $c \in Z^k X$ é racionalmente equivalente a zero se existe uma quantidade finita de subvariedades $W_i \subset X$ com $\text{codim} W_i = k - 1$, e $f_i \in \mathcal{O}(W_i)$ não nulo tal que $c = \sum_i c_i [f_i]$.

Observação 4.9. Note que, para cada i ,

$$\text{ord}_{W_i}(f_i) = \text{ord}_{W_i}\left(\frac{g_i}{h_i}\right) = \text{ord}_{W_i}(g_i) - \text{ord}_{W_i}(h_i)$$

e analogamente $\text{ord}_{W_i}(f_i^{-1}) = \text{ord}_{W_i}(h_i) - \text{ord}_{W_i}(g_i)$. Assim $\text{ord}_{W_i}(f_i) = \text{ord}_{W_i}(f_i^{-1})$, portanto $[f_i] = -[f_i^{-1}]$. Logo os ciclos racionalmente equivalentes a zero formam um subgrupo de $Z^k X$.

Definição 4.10. Seja Y um ciclo de alguma variedade X de dimensão n . O conjunto de todos os ciclos que são racionalmente equivalentes a Y é chamado de *classe de equivalência racional* de Y , denotado por $[Y]$. Definimos $A^k X$ como quociente de $Z^k X$ pelo subgrupo de todos os ciclos racionalmente equivalentes a zero.

Observação 4.11. Seja X uma variedade de dimensão n , então $A^k X$ é o grupo das combinações lineares de classes de equivalência racional de k -ciclos. Definimos $A^* X = \bigoplus_{k=1}^n A^k X$.

¹Sejam X uma variedade e $f \in \mathbf{K}(X)$, denotamos por $\text{pls}(f)$ os polos da função racional f .

Definição 4.12. A multiplicação de dois elementos $[Y_1] \in A^k X$ e $[Y_2] \in A^l X$ é definida como $[Y_1] \cdot [Y_2] \in A^{k+l} X = [Y_\alpha \cap Y_\beta]$ tal que existem $Y_\alpha \in [Y_1]$ e $Y_\beta \in [Y_2]$ que se intersectam transversalmente². O grupo $A^* X$ munido com esta operação de multiplicação forma um anel, chamado *Anel de Chow*.

Proposição 4.13. Se X é uma variedade não singular, a multiplicação definida acima faz de $A^* X$ um anel comutativo com unidade ($A^0 X = [X]$).

Demonstração. Ver (Fulton, 2013), Proposition 4.8 página 140. $\square$

Lema 4.14. Sejam Y_1 e Y_2 subvariedades em um espaço projetivo X . Então existem subvariedades Y'_1 e Y'_2 que são racionalmente equivalentes a Y_1 e Y_2 respectivamente que se intersectam transversalmente.

Demonstração. Ver Eisenbud e Harris (2016). $\square$

Em $\mathbb{P}^5$ conseguimos contar o número de pontos na interseção de cinco hipersuperfícies que se intersectam transversalmente usando o teorema de Bézout, mas no blow up o teorema de Bézout não se sustenta. Isto ocorre porque encontrar o grau de uma hipersuperfície no blow up pode ser mais complicado pois não temos bem definido uma noção de grau para uma variedade no blow up. Assim, as informações extras estão contidas no anel de Chow do $Bl_V(\mathbb{P}^5)$.

4.2 A Cohomologia do Blow Up

Agora podemos estabelecer uma série de resultados sobre classes de equivalência racional de ciclos no espaço projetivo. Isto nos permitirá entender as subvariedades tanto em $\mathbb{P}^5$ como em seu blow up.

Teorema 4.15. Seja Z um subconjunto fechado e irredutível de uma variedade projetiva X e seja $U = X \setminus Z$. Então existe um homomorfismo sobrejetor de $A^1 X$ para $A^1 U$.

Demonstração. Seja Y uma subvariedade de codimensão 1 de um variedade projetiva X com $[Y] \in A^1 X$. Construa o seguinte mapa

$$\begin{aligned} g : A^1 X &\longrightarrow A^1 U \\ [Y] &\longmapsto [Y \cap U] \end{aligned}$$

Portanto se $Y = mZ$ onde $m \in \mathbb{Z}$, então

$$Y \longmapsto \emptyset$$

Vamos mostrar que g está bem definida. Sejam Y_1 e Y_2 ciclos racionalmente equivalentes em X . Note que $g(Y_1)$ e $g(Y_2)$ são racionalmente equivalentes, pois podemos restringir a função racional $f \in \mathbf{K}(X)$ dada por zeros de Y_1 e os polos de Y_2 ao conjunto $X \setminus Z$.

²Dizemos que duas subvariedades A e B se intersectam transversalmente no ponto P se A, B e X são suaves em P , isto é, $T_P A + T_P B = T_P X$.

Para mostrar que o mapa é sobrejetivo vamos considerar uma classe $[W]$ de um ciclo representativo W de U . Seja $\overline{W}$ o fecho de W em X . Como a dimensão de $\overline{W}$ é igual a dimensão de W e X e U também tem mesma dimensão, então $\overline{W}$ é um ciclo de codimensão um em X $\square$

Corolário 4.16. *Seja Z uma variedade de codimensão um e assuma que Z é irredutível no espaço ambiente X . O núcleo do mapa $g : A^1 X \rightarrow A^1 U$ é $\mathbb{Z}[Z]$.*

Demonstração. Na demonstração do teorema anterior vimos que $\mathbb{Z}[Z]$ está no $\ker(g)$. Precisamos mostrar que $\ker(g) \subset \mathbb{Z}[Z]$. Seja $[W] \in A^1 X$ tal que $[W]$ não é um múltiplo inteiro de $[Z]$. Se Y é um ciclo em $[W]$, então sua codimensão é 1 e não pode estar contido em Z e portanto deve conter pontos em $X \setminus Z$. Assim temos que o mapa g leva pontos em $[W]$ para pontos em U , ou seja, $[W] \notin \ker(g)$. Logo $\ker(g) \subset \mathbb{Z}[Z]$ e $\ker(g) = \mathbb{Z}[Z]$. $\square$

Corolário 4.17. *Se a codimensão de Z é maior que 1. O mapa g definido no teorema anterior é um isomorfismo.*

Demonstração. Dado um espaço projetivo X , o mapa sobrejetivo g leva elementos de $A^1 X$ em elementos de $A^1(X \setminus Z)$. Sejam Y_1 e Y_2 ciclos racionalmente equivalentes em $X \setminus Z$ e sejam $\overline{Y_1}, \overline{Y_2}$ seus respectivos fechos em X . Como g mapeia apenas elementos de $A^1 X$ para $A^1(X \setminus Z)$, qualquer ciclo $[Y]$ que possamos escolher tem dimensão maior que a dimensão de Z , ou seja, é grande demais para estar contido em Z . Assim, o $\ker(g)$ é zero e nosso mapa g é injetivo e, portanto, um isomorfismo. $\square$

Agora vamos incorporar os resultados acima para dentro do contexto do blow up de $\mathbb{P}^5$ ao longo da superfície de Veronese. Sejam E o divisor excepcional de $Bl_V(\mathbb{P}^5)$ e $Bl_V(\mathbb{P}^5) \setminus E$ seu complementar.

Teorema 4.18. $A^1(Bl_V(\mathbb{P}^5))$ é isomorfo a $A^1(Bl_V(\mathbb{P}^5) \setminus E) \oplus \mathbb{Z}[E]$.

Demonstração. Sabemos do Teorema 4.15 que o mapa

$$g : A^1(Bl_V(\mathbb{P}^5)) \longrightarrow A^1(Bl_V(\mathbb{P}^5) \setminus E)$$

é sobrejetor. Seja f o mapa que leva múltiplos do divisor excepcional em $A^1(Bl_V(\mathbb{P}^5))$. Como E tem codimensão um no $Bl_V(\mathbb{P}^5)$, então usando o Corolário 4.16 temos que $\ker(g) = \mathbb{Z}[E]$. Agora considere a seguinte sequência de homomorfismos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[E] \xrightarrow{f} A^1(Bl_V(\mathbb{P}^5)) \xrightarrow{g} A^1(Bl_V(\mathbb{P}^5) \setminus E) \longrightarrow 0$$

O mapa f é injetivo pois todo inteiro múltiplo do divisor excepcional é mapeado em $A^1(Bl_V(\mathbb{P}^5))$. Assim a imagem de f é igual ao núcleo de g . Portanto, a sequência curta acima é exata. Por fim, basta considerar o seguinte homomorfismo

$$h : A^1(Bl_V(\mathbb{P}^5) \setminus E) \longrightarrow A^1(Bl_V(\mathbb{P}^5))$$

$$[Y] \longmapsto [\overline{Y}]$$

onde $\bar{Y}$ é o fecho de Y , assim temos uma sequência exata splits e portanto

$$A^1(Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5)) \simeq A^1(Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5) \setminus E) \oplus \mathbb{Z}[E].$$

□

Teorema 4.19. *Seja H um hiperplano geral em $\mathbb{P}^5$ e seja $\tilde{H} = \pi^{-1}(H)$. Então $A^1(Bl_{\mathcal{V}}\mathbb{P}^5)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}[\tilde{H}] \oplus \mathbb{Z}[E]$.*

Demonstração. Sabemos da Seção 3.3 que $Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5) \setminus E \simeq \mathbb{P}^5 \setminus \mathcal{V}$, isto implica que $A^1(Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5) \setminus E) \simeq A^1(\mathbb{P}^5 \setminus \mathcal{V})$. Segue do Corolário 4.17 que $A^1(\mathbb{P}^5 \setminus \mathcal{V}) \simeq A^1(\mathbb{P}^5)$. Observe que cada elemento de $A^1(\mathbb{P}^5)$ é um múltiplo inteiro de alguma classe de hiperplano geral $[H]$. Analisando os isomorfismos acima temos

$$\mathbb{Z}[H] = A^1(\mathbb{P}^5) \simeq A^1(\mathbb{P}^5 \setminus \mathcal{V}) \simeq A^1(Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5) \setminus E) = \mathbb{Z}[\tilde{H}]$$

Usando o teorema anterior o resultado segue. □

Observação 4.20. Se duas variedades X_1 e X_2 são racionalmente equivalente em $\mathbb{P}^5$, então suas imagens inversas sob o mapa $\pi : Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5) \rightarrow \mathbb{P}^5$ são racionalmente equivalentes. De fato, pois existe uma função racional, digamos, $g \in \mathcal{O}(W)$ para alguma subvariedade W de codimensão $k-1$ contendo X_1 e X_2 tal que $X_1 = \mathcal{Z}(g)$ e $X_2 = pls(g)$. Portanto $g \circ \pi$ tem $\pi^{-1}(X_1)$ como seus zeros e $\pi^{-1}(X_2)$ como seus polos. Vendo como ciclos, segue que $n\pi^{-1}(X_1) = \pi^{-1}(nX_1)$, onde n é um número inteiro.

Observação 4.21. Considere H_Q o conjunto de todas as cônicas tangentes a cônica Q . Seja $\tilde{H} = \pi^{-1}(H)$, onde H é algum hiperplano arbitrário em $\mathbb{P}^5$, então segue do Teorema 4.19 que $\pi^{-1}(H_Q) \sim \pi^{-1}(6H)$, além disso da Observação 4.20 sabemos que $\pi^{-1}(6H) = 6\tilde{H}$. Portanto $\pi^{-1}(H_Q) \sim 6\tilde{H}$.

Observação 4.22. O divisor excepcional não pode ser representado como múltiplo de $[H]$, então ele representa uma nova classe $[E]$ no anel de Chow. Como $Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5)$ e $\mathbb{P}^5$ são isomorfos fora da Veronese, $[E]$ é o único novo gerador do anel de Chow. Assim qualquer hipersuperfície de grau d em $Bl_{\mathcal{V}}(\mathbb{P}^5)$ será representada por f . Seja Y uma hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^5$. Então $[\pi^{-1}(Y)] = [\tilde{Y}] + n[E]$ para algum n , equivalentemente $[\tilde{Y}] = d[\tilde{H}] - n[E]$.

Intuitivamente o inteiro n é o número de vezes que o divisor excepcional cabe em $\pi^{-1}(Y)$. Algebricamente podemos avaliar as derivadas parciais de um polinômio ao longo de uma variedade e a ordem das derivadas determinam o inteiro n . Nesse sentido, vamos avaliar se as derivadas parciais do polinômio que define H_Q se anula ao longo da superfície de Veronese. Os resultados a seguir fornecem um procedimento computacional algébrico para encontrar esse inteiro.

Lema 4.23. *Seja $\tilde{H}_Q$ a transformada estrita de H_Q sob a projeção π . Então*

$$\pi^{-1}(H_Q) = \tilde{H}_Q + 2E.$$

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que $\mathcal{I}(\pi^{-1}(H_Q)) \subset \mathcal{I}(E)^2$. Primeiramente provaremos que $\mathcal{I}(H_Q) \subset \mathcal{I}(\mathcal{V})^2$. Lembre que, na demonstração do Lema 2.22 mostramos como encontrar o polinômio que define a hipersuperfície de cônicas tangente a uma cônica dada. Descrevemos esse polinômio a seguir

$$\begin{aligned} F = & -16ab^4c + 128a^2b^2c^2 - 256a^3c^3 + 4b^3cd^2 - 144abc^2d^2 + 27c^2d^4 - 64ab^3ce \\ & + 256a^2bc^2e + 12b^2cd^2e - 144ac^2d^2e - 96ab^2ce^2 + 128a^2c^2e^2 + 12bcd^2e^2 - 64abce^3 \\ & + 4cd^2e^3 - 16ace^4 + 80ab^2cdf + 192a^2c^2df - 18bcd^3f + 160abcdef - 18cd^3ef \\ & + 80acde^2f + 4ab^3f^2 - 144a^2bcf^2 - b^2d^2f^2 + 6acd^2f^2 + 12ab^2ef^2 - 144a^2cef^2 \\ & - 2bd^2ef^2 + 12abe^2f^2 - d^2e^2f^2 + 4ae^3f^2 - 18abdf^3 + 4d^3f^3 - 18adef^3 + 27a^2f^4. \end{aligned}$$

Como F já foi expressa acima, iremos omiti-la do algoritmo. Assim, para encontrar a inclusão desejada

```
i1 : R = CC[a,b,c,d,e,f]
o1 = R
o1 : PolynomialRing

i2 : I = ideal(f^2-4*b*c, e^2-4*a*c, d^2-4*a*b, 4*d*c-2*e*f, 4*a*f-2*d*e, 4*b*e-2*d*f)
o2 = ideal(-4*b*c + f^2, -4*a*c + e^2, -4*a*b + d^2, 4*c*d - 2*e*f, -2*d*e + 4*a*f, 4*b*e - 2*d*f)
o2 : Ideal of R
:
i4 : isSubset(ideal(F), I)
-- warning: experimental computation over inexact field begun
-- results not reliable (one warning given per session)
o4 = true

i5 : isSubset(ideal(F), I^2)
o5 = true

i6 : isSubset(ideal(F), I^3)
o6 = false
```

Figura 4.1: Ideal da Veronese

Note que, na ultima linha o output 6 retorna "*false*", isto nos diz que $\mathcal{I}(H_Q) \subset \mathcal{I}(\mathcal{V})^2$, mas $\mathcal{I}(H_Q) \not\subset \mathcal{I}(\mathcal{V})^3$. Agora, considere os zeros da função $F \circ \pi$ no blow up $Bl_{\mathcal{V}}\mathbb{P}^5$. Para qualquer ponto $\tilde{P} \in \pi^{-1}(H_Q)$,

$$\pi(\tilde{P}) \in H_Q \iff F(\pi(\tilde{P})) = (F \circ \pi)(\tilde{P}) = 0 \quad (4.1)$$

Portanto $(F \circ \pi)$ gera $\mathcal{I}(\pi^{-1}(H_Q))$. Como F também pertence a $\mathcal{I}(\mathcal{V})^2$, então podemos escolher polinômios $F_1, F_2 \in \mathcal{I}(\mathcal{V})$ tal que $F = F_1F_2$. Utilizando o mesmo argumento

de (4.1) em F_1 e F_2 , temos que $(F_1 \circ \pi)$ e $(F_2 \circ \pi)$ estão em $\mathcal{I}(\pi^{-1}(\mathcal{V})) = \mathcal{I}(E)$. Note que para qualquer ponto $\tilde{P}$ em $Bl_V \mathbb{P}^5$,

$$(F \circ \pi)(\tilde{P}) = F(\pi(\tilde{P})) = F_1(\pi(\tilde{P}))F_2(\pi(\tilde{P})) = (F_1 \circ \pi)(\tilde{P})(F_2 \circ \pi)(\tilde{P})$$

assim $(F \circ \pi) = (F_1 \circ \pi)(F_2 \circ \pi)$. Isso implica que $\langle F \circ \pi \rangle \subset \mathcal{I}(E)^2$ e portanto $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(E)^2) \sim 2E \subset \mathcal{Z}(F \circ \pi)$. Logo os zeros de $(F \circ \pi)$ são $\tilde{H}_Q + 2E$. $\square$

Um fato importante é que dado um ponto P , existem muitas cônicas de reta dupla que não passam por P , então o hiperplano H_P de cônicas passando por P não está contido na Veronese. Logo $[\tilde{H}_P] = [\tilde{H}]$. Usando algoritmos semelhantes ao do lema anterior é possível mostrar que $\mathcal{I}(\pi^{-1}(H_L)) \subset \mathcal{I}(E)$ e $\mathcal{I}(\pi^{-1}(H_L)) \not\subset \mathcal{I}(E)^2$. Segue das observações 4.21, 4.22 e do último Lema que

$$[\tilde{H}_L] = 2[\tilde{H}_P] - [E]$$

$$[\tilde{H}_Q] = 6[\tilde{H}_P] - 2[E].$$

Teorema 4.24. *Os ciclos $\tilde{H}_P$, $\tilde{H}_L$ e $\tilde{H}_Q$ em $Bl_V(\mathbb{P}^5)$ estão relacionados pela seguinte identidade*

$$[\tilde{H}_Q] = 2[\tilde{H}_P] + 2[\tilde{H}_L].$$

Demonstração. Sabemos dos lemas anteriores que $[\tilde{H}_Q] = 6[\tilde{H}_P] - 2[E]$ e também $[\tilde{H}_L] = 2[\tilde{H}_P] - [E]$. Assim

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_Q] &= 6[\tilde{H}_P] - 2(2[\tilde{H}_P] - [\tilde{H}_L]) \\ &= 2[\tilde{H}_P] + 2[\tilde{H}_L] \end{aligned}$$

$\square$

Este resultado nos dá uma relação entre os ciclos $\tilde{H}_P$, $\tilde{H}_L$ e $\tilde{H}_Q$ que será usada frequentemente nos problemas enumerativos. Com a multiplicação definida para o Anel de Chow, considere a expressão

$$[\tilde{H}_P]^p [\tilde{H}_L]^l [\tilde{H}_Q]^q,$$

podemos interpretar do seguinte modo: quantas cônicas passam por p pontos e são tangentes a l retas e q cônicas dadas? Isto seria suficiente para resolver o problema de Steiner, mas não sabemos ainda a que tipo de cônicas os pontos correspondem, se o conjunto solução corresponde a cônicas únicas ou se possuem alguma multiplicidade.

Nesse sentido, estamos interessados em saber se o anel de Chow corresponderá adequadamente com o número de cônicas do problema de Steiner já que, em $\mathbb{P}^5$, não podemos aplicar o Teorema de Bézout. Gostaríamos de garantir que a maioria dos arranjos de cinco cônicas estivessem em posição geral, ou ainda, que *quase todos* os arranjos estivessem em posição geral. Dizer isto na Topologia de Zariski é equivalente a dizer que tal propriedade é válida para um conjunto aberto.

Na verdade, mostraremos nesta seção não só que o conjunto de cinco cônicas em posição geral é aberto, como também as cônicas tangentes a elas são reduzidas. Mais ainda, é possível verificar isto para qualquer variação do problema de Steiner por resultados semelhantes aos seguintes, basta usar corretamente as hipersuperfícies em $\mathbb{P}^5$. As cônicas reduzidas em $\mathbb{P}^2$ correspondem aos *pontos isolados* em $\mathbb{P}^5$ no resultado a seguir.

Lema 4.25. *O conjunto $\{(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)\} \subset (\mathbb{P}^5)^5$ tal que $\bigcap_{i=1}^5 \tilde{H}_{Q_i}$ é transversal, isto é, consiste apenas de pontos isolados, é um aberto na topologia de Zariski.*

Demonstração. Vamos começar mostrando que seu complementar é fechado na topologia de Zariski. Defina o conjunto

$$V = \left\{ (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, P) \mid P \in \bigcap_{i=1}^5 \tilde{H}_{Q_i} \right\}$$

onde $V \subset (\mathbb{P}^5)^5 \times Bl_V(\mathbb{P}^5)$. Defina também uma função Θ dada por

$$\Theta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, P) = \dim T_P \left(\bigcap_{i=1}^5 \tilde{H}_{Q_i} \right)$$

(dimensão do espaço tangente a $\bigcap_{i=1}^5 \tilde{H}_{Q_i}$ em P). Sejam $\nabla F_1(P), \dots, \nabla F_5(P)$ os respectivos vetores normais a cada uma das cinco hipersuperfícies no ponto P . Sabemos que qualquer vetor no espaço tangente em P é perpendicular a este conjunto de vetores. Qualquer vetor desse tipo está no núcleo de J , a matriz Jacobiana definida como

$$\begin{bmatrix} \nabla F_1(P) \\ \nabla F_2(P) \\ \nabla F_3(P) \\ \nabla F_4(P) \\ \nabla F_5(P) \end{bmatrix}$$

Sabemos que $\text{rank}(J) + \text{nullity}(J)$ é igual ao número de variáveis. Como $\text{nullity}(J) = \dim T_P \left(\bigcap_{i=1}^5 \tilde{H}_{Q_i} \right)$, obtemos a seguinte igualdade $\Theta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, P) = 6 - \text{rank}(J)$. Note que o posto máximo da matriz J é cinco. Portanto se a matriz J tiver posto máximo, então a função Θ nos dirá que a dimensão do espaço tangente é um. Este é um espaço afim unidimensional, mas quando projetivizado a dimensão cai pra zero. Assim, estamos interessados quando a dimensão é maior ou igual a um, pois dessa forma garantiremos que a interseção das hipersuperfícies $\tilde{H}_{Q_i}$ não é transversal, isto é, se $\Theta > 0$ a multiplicidade a no ponto é maior que um.

Um resultado de álgebra linear nos diz que os menores maximais de J são zero se, e somente se, J não tem posto máximo. Observe que cada linha da matriz é o gradiente do vetor $\nabla F_i(P)$ de alguma hipersuperfície $\tilde{H}_{Q_i} \subset Bl_V(\mathbb{P}^5)$ no ponto P . Dada uma cônica Q_i em $\mathbb{P}^2$ a hipersuperfície $H_{Q_i} \subset \mathbb{P}^5$ formada pelo conjunto de cônicas tangentes a H_{Q_i} é o lugar dos zeros de um polinômio nas variáveis a, b, c, d, e, f de $\mathbb{P}^5$. Como $\tilde{H}_{Q_i}$ é transformada estrita de H_{Q_i} sob a projeção π definida em . Dependendo da localização do ponto P no $Bl_V(\mathbb{P}^5)$, um vetor gradiente específico, $\nabla F_i(P)$ será definido por um polinômio nas variáveis que dão as coordenadas de P com coeficientes a, b, c, d, e, f . Isso nos diz que cada entrada da nossa matriz J é dada por um polinômio. Então a condição para que os determinantes dos menores de ordem 5 sejam zero é dada por equações polinomiais. Portanto V é um fechado na topologia de Zariski. Como a projeção π conjuntos fechados em conjuntos fechados, então $\pi(V) = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$ é fechado em $(\mathbb{P}^5)^5$.

Isto ainda não conclui a prova, pois precisamos mostrar que seu complementar não é vazio, uma vez que o vazio é definido como aberto na topologia de Zariski. $\square$

O lema a seguir mostra que se P estiver no divisor excepcional então o conjunto V definido anteriormente é fechado. Mais ainda, vamos mostrar que o conjunto solução do problema de Steiner consiste apenas de cônicas não degeneradas.

Lema 4.26. *O conjunto $\{(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)\} \subset (\mathbb{P}^5)^5$ tal que $\bigcap_{i=1}^5 \tilde{H}_{Q_i}$, consiste apenas de pontos fora do divisor excepcional, é aberto.*

Demonstração. Vamos mostrar que seu complementar é fechado. Seja $V = \{(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, P) | P \in \bigcap_{i=1}^5 \tilde{H}_{Q_i}\}$. Sabemos que este conjunto é fechado em $(\mathbb{P}^5)^5 \times Bl_V(\mathbb{P}^5)$. Considere agora o espaço $W := [(\mathbb{P}^5)^5 \times E]$. Note que este conjunto também é fechado, pois $(\mathbb{P}^5)^5$ e E são conjuntos fechados. Além disso, temos que

$$V \cap W = \left\{ (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, P_E) | P_E \in \bigcap_{i=1}^5 (\tilde{H}_{Q_i} \cap E) \right\}$$

onde P_E é descrito por coeficientes de uma cônica de reta dupla e uma cônica degenerada, é um conjunto fechado, pois V e W são fechados e portanto a projeção de $V \cap W$ em $(\mathbb{P}^5)^5$ é fechada. Assim o conjunto $\{(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)\}$ tal que existe um ponto $P \in \bigcap_{i=1}^5 \tilde{H}_{Q_i}$, onde P é descrito por coeficientes de uma cônica não degenerada, é fechado em $(\mathbb{P}^5)^5$. Resta mostrar que seu complementar é não vazio. Para isso usaremos o próximo resultado. $\square$

Teorema 4.27 (Fulton, Ronga-Tognoli-Vust). *Existem cinco cônicas reais em posição geral, de modo que todas as 3.264 cônicas tangentes às cinco cônicas são reais.*

Demonstração. Ver Sottile (1997), página 9. $\square$

A existência dessas cinco cônicas nos garante que o conjunto de cinco cônicas satisfazendo as condições do Lema 4.25 é não vazio e portanto um aberto na topologia de Zariski. Os matemáticos Ronga, Tognoli e Vust mostram como construir esse arranjo no artigo *The number of conics tangents to five given conics: the real case* Ronga et al. (1995).

4.3 3264 Cônicas

Na seção anterior mostramos que o conjunto solução consiste apenas de cônicas reduzidas para quase todos os arranjos de cônicas, retas e pontos. Lembre que por conta das condições impostas sob os pontos e retas na Seção 2.4, podíamos garantir a interseção transversal entre as hipersuperfícies correspondentes, que por sua vez, não podia consistir de cônicas de retas duplas nem com multiplicidade maior que um.

Assim, como temos um conjunto finito de soluções reduzidas e todas com multiplicidade um, então dizemos que esses pontos estão em posição geral. Nesse sentido vimos

que para problemas enumerativos envolvendo pontos e retas tínhamos restrições diferentes (por exemplo, nenhum dos três pontos dados estão sob uma mesma reta). A definição abaixo reúne essas restrições para pontos, retas e cônicas.

Definição 4.28. Uma configuração de pontos e retas no plano estão em *posição especial* se:

1. Três ou mais pontos são colineares.
2. Três ou mais retas passam por um único ponto.
3. Um ou mais pontos estão em uma reta dada.

A configuração está em *posição geral* se não está em posição especial.

Definição 4.29. Uma configuração de pontos, retas e cônicas no plano estão em *posição especial* se:

1. Três ou mais pontos são colineares.
2. Três ou mais retas passam por um único ponto. Um ponto está em uma determinada reta ou em uma determinada cônica. Três ou mais cônicas se cruzam em um único ponto.
3. Uma cônica e uma reta são tangentes uma a outra.
4. Uma cônica é tangente à reta definida pelos pontos de interseção de duas outras cônicas.
5. Três ou mais cônicas possuem uma reta tangente em comum.

A configuração está em *posição geral* se não está em posição especial.

Com esta definição acima, voltemos a Tabela 2.4 para os problemas enumerativos restantes envolvendo ponto e reta:

Teorema 4.30. *Dados quaisquer dois pontos $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^2$ e três retas $L_1, L_2, L_3 \in \mathbb{P}^2$ tais que os pontos e as retas estão em posição geral, existem quatro cônicas que passam por esses pontos e são tangentes as retas dadas.*

Demonstração. Podemos considerar o dual da nossa configuração de pontos e retas. Assim, os pontos $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^2$ e as retas $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbb{P}^2$ correspondem a retas $\check{P}_1, \check{P}_2$ e $\check{L}_1, \check{L}_2, \check{L}_3$ pontos em $\check{\mathbb{P}}^2$. Sabemos do Teorema 2.31 que existem 4 cônicas em $\check{\mathbb{P}}^2$ que satisfaz essas condições. Segue do Lema 2.25 que existem 4 cônicas que passam por dois pontos e são tangentes a três retas. $\square$

Teorema 4.31. *Dadas quatro retas e um ponto em $\mathbb{P}^2$ tal que estão em posição geral, existe duas cônicas que passam por esse ponto e são tangentes as quatro retas.*

Demonstração. Ao considerar o dual, a configuração de pontos e retas obtidas em $\check{\mathbb{P}}^2$, o Teorema 2.20 nos diz que existem duas cônicas que possam por quatro pontos e são tangentes a uma reta. Aplicando o Lema 2.25, o resultado segue. $\square$

Agora, vamos usar o anel de Chow do blow up definido neste capítulo para resolver o Problema de Steiner. Ao intersectar as transformadas estritas no blow up estamos excluindo o excesso de interseção que estava causando problema antes.

Teorema 4.32. *Dados quatro pontos $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^2$ e uma cônica $C_0 \subset \mathbb{P}^2$ em posição geral, existem seis cônicas que são tangentes a cônica C_0 e passam por estes pontos.*

Demonstração. Isto é equivalente a calcular $[\tilde{H}_P]^4[\tilde{H}_Q]$.

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_P]^4[\tilde{H}_Q] &= [\tilde{H}_P]^4(2[\tilde{H}_P] + 2[\tilde{H}_L]) \\ &= 2[\tilde{H}_P]^4[\tilde{H}_L] + 2[\tilde{H}_P]^5 \\ &= 2(2) + 2(1) = 6. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.33. *Dadas quatro retas $L_0, L_1, L_2, L_3 \subset \mathbb{P}^2$ e uma cônica $C_0 \subset \mathbb{P}^2$ em posição geral, existem seis cônicas que são tangentes a cônica C_0 e as quatro retas dadas.*

Demonstração. Segue do princípio de dualidade e do Teorema 4.32. $\square$

Teorema 4.34. *Dados três pontos e duas cônicas em posição geral, existem 36 cônicas que são tangentes a as duas cônicas e passam por estes três pontos.*

Demonstração. A afirmação é equivalente a calcular $[\tilde{H}_L][\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_Q]$.

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_L][\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_Q] &= [\tilde{H}_L][\tilde{H}_P]^3(2[\tilde{H}_P] + 2[\tilde{H}_L]) \\ &= 2[\tilde{H}_L][\tilde{H}_P]^4 + 2[\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_L]^2 \\ &= 2(4) + 2(2) = 12. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.35. *Dadas três retas e duas cônicas em posição geral, existem 36 cônicas que são tangentes a as duas cônicas e as três retas.*

Demonstração. Segue do princípio de dualidade e do Teorema 4.34. $\square$

Teorema 4.36. *Dados três pontos, uma reta e uma cônica em posição geral, existem 12 cônicas que são tangentes a reta e a cônica e passam por estes três pontos.*

Demonstração. Esta afirmação é equivalente a calcular $[\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_L][\tilde{H}_Q]$.

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_L][\tilde{H}_Q] &= [\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_L](2[\tilde{H}_P] + 2[\tilde{H}_L]) \\ &= 2[\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_L]^2 + 2[\tilde{H}_P]^4[\tilde{H}_L] \\ &= 2(4) + 2(2) = 12. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.37. *Dados três retas, um ponto e uma cônica em posição geral, existem 12 cônicas que são tangentes as três retas e a cônica e passam por este ponto.*

Demonstração. Segue do princípio de dualidade e do Teorema 4.36. □

Teorema 4.38. *Dados dois pontos, duas retas e uma cônica em posição geral, existem 16 cônicas que são tangentes as duas retas e a cônica dadas e passam por estes dois pontos.*

Demonstração. A afirmação é equivalente a calcular $[\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L][\tilde{H}_Q]$.

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L]^2[\tilde{H}_Q] &= [\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L]^2(2[\tilde{H}_P] + 2[\tilde{H}_L]) \\ &= 2[\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_L]^2 + 2[\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L]^3 \\ &= 2(4) + 2(4) = 16. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.39. *Existem 184 cônicas tangentes a 3 cônicas e 2 pontos fixados em posição geral.*

Demonstração. Isto é equivalente a calcular $[\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_Q]^3$.

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_Q]^3 &= [\tilde{H}_P]^2 \left(2[\tilde{H}_P] + 2[\tilde{H}_L] \right)^3 \\ &= 8[\tilde{H}_P]^5 + 24[\tilde{H}_P]^4[\tilde{H}_L] + 24[\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_L]^2 + 8[\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L]^3 \\ &= 8(1) + 24(2) + 24(4) + 8(4) = 184. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.40. *Existem 184 cônicas tangentes a 3 cônicas e 2 retas fixadas em posição geral.*

Demonstração. Segue do princípio de dualidade e do Teorema 4.39. □

Teorema 4.41. *Existem 816 cônicas tangentes a 4 cônicas e passando por 1 ponto, fixados em posição geral.*

Demonstração. Isto é equivalente a calcular $[\tilde{H}_P][\tilde{H}_Q]^4$

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_P][\tilde{H}_Q]^4 &= [\tilde{H}_P](2[\tilde{H}_P] + 2[\tilde{H}_L])^4 \\ &= [\tilde{H}_P](16[\tilde{H}_P]^4 + 64[\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_L] + 96[\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L]^2 + 64[\tilde{H}_P][\tilde{H}_L]^3 + [\tilde{H}_L]^4) \\ &= 16[\tilde{H}_P]^5 + 64[\tilde{H}_P]^4[\tilde{H}_L] + 96[\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_L]^2 + 64[\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L]^3 + [\tilde{H}_P][\tilde{H}_L]^4 \\ &= 16(1) + 64(2) + 96(4) + 64(4) + 16(2) = 816. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.42. *Existem 816 cônicas tangentes a 4 cônicas e 1 reta fixadas em posição geral.*

Demonstração. Segue do princípio de dualidade e do Teorema 4.41. $\square$

Teorema 4.43. *Existem 224 cônicas que passam por um ponto, tangente a uma reta e a três cônicas, onde o ponto, reta e cônica estão em posição geral.*

Demonstração. A afirmação é equivalente a calcular $[\tilde{H}_P][\tilde{H}_L][\tilde{H}_Q]^3$.

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_P][\tilde{H}_L][\tilde{H}_Q]^3 &= [\tilde{H}_P][\tilde{H}_L](2[\tilde{H}_P] + 2[\tilde{H}_L])^3 \\ &= [\tilde{H}_P][\tilde{H}_L](8[\tilde{H}_P]^3 + 24[\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L] + 24[\tilde{H}_P][\tilde{H}_L]^2 + 8[\tilde{H}_L]^3) \\ &= 8[\tilde{H}_P]^4[\tilde{H}_L] + 24[\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L]^3 + 24[\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_L]^2 + 8[\tilde{H}_P][\tilde{H}_L]^4 \\ &= 8(1) + 24(4) + 24(4) + 8(1) = 224. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.44. *Existem 56 cônicas passando por dois pontos, tangente a uma reta e tangente a duas cônicas em posição geral.*

Demonstração. A afirmação é equivalente a calcular $[\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L][\tilde{H}_Q]^2$.

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L][\tilde{H}_Q]^2 &= [\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L](2[\tilde{H}_P] + 2[\tilde{H}_L])^2 \\ &= [\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L](4[\tilde{H}_P]^2 + 8[\tilde{H}_P][\tilde{H}_L] + 4[\tilde{H}_L]^2) \\ &= 4[\tilde{H}_P]^4[\tilde{H}_L] + 8[\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_L]^2 + 4[\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L]^3 \\ &= 4(2) + 8(4) + 4(4) = 56. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.45. *Existem 56 cônicas tangente a duas retas, passando por um ponto e tangente a duas cônicas em posição geral.*

Demonstração. Segue do princípio de dualidade e do Teorema 4.44. $\square$

Por fim chegamos ao resultado principal deste trabalho, o problema de Steiner.

Teorema 4.46. *Existem 3264 cônicas planas que são tangentes a cinco cônicas dadas que estão posição geral.*

Demonstração. Precisamos calcular $[\tilde{H}_Q]^5$. Assim,

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_Q]^5 &= (2[\tilde{H}_P] + 2[\tilde{H}_L])^5 \\ &= 32([\tilde{H}_P]^5 + 5[\tilde{H}_P]^4[\tilde{H}_L] + 10[\tilde{H}_P]^3[\tilde{H}_L]^2 + 10[\tilde{H}_P]^2[\tilde{H}_L]^3 + 5[\tilde{H}_P][\tilde{H}_L]^4 + [\tilde{H}_L]^5) \\ &= 32(1 + 5(2) + 10(4) + 10(4) + 5(2) + 1) \\ &= 3264. \end{aligned}$$

$\square$

A Tabela abaixo reúne os a de cônicas passando por P pontos, tangentes a L retas e tangentes a Q cônicas. De um lado vemos o resultado esperado aplicando o Teorema de Bézout e de outro a resultado real para as variações do problema de Steiner.

P	L	Q	N Esperado	N Real
5	0	0	1	1
4	1	0	2	2
3	2	0	4	4
2	3	0	8	4
1	4	0	16	2
0	5	0	32	1
4	0	1	6	6
3	0	2	36	36
2	0	3	216	184
1	0	4	1296	880
0	4	1	96	6
0	3	2	288	36
0	2	3	864	184
0	1	4	2592	880
1	1	3	432	224
2	1	2	72	56
3	1	1	12	12
1	3	1	48	12
2	2	1	24	16
1	2	2	144	56
0	0	5	7776	3264

Tabela 4.1: Soluções para as variações do problema de Steiner

Apêndice A

Espaços Afim e Projetivo

A.1 Variedades Afins

Vamos fixar $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado e n um número inteiro não negativo.

Definição A.1. O n -espaço afim $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ sobre $\mathbb{K}$, ou simplesmente $\mathbb{C}^n$ quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, é o conjunto de todas as n -uplas de elementos de $\mathbb{K}$. Um elemento $P \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ é chamado de ponto, e se $P = (a_1, \dots, a_n)$, então $a_i \in \mathbb{K}$ é chamado as *coordenadas* do ponto P .

Exemplo A.2. $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$, $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ e $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ são chamados de *reta*, *plano* e *superfície afim*, respectivamente.

Considere $\mathbb{K}[\underline{x}] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios nas n variáveis sobre $\mathbb{K}$. Interpretamos os elementos de $\mathbb{K}[\underline{x}]$ como funções do n -espaço afim para $\mathbb{K}$, definida por $F(P) := F(a_1, \dots, a_n)$, onde $F \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ e $P \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Assim, podemos definir o *conjunto de zeros* de F dado por $\mathcal{Z}(F) := \{P \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid F(P) = 0\}$. Mais geralmente, se $T \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}]$ definimos o *conjunto de zeros* de T por

$$\mathcal{Z}(T) := \{P \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid F(P) = 0, \forall F \in T\}.$$

Definição A.3. Seja $Y \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Dizemos que Y é um *conjunto algébrico* se existe $T \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}]$ tal que $Y = \mathcal{Z}(T)$.

Observação A.4. Ao considerarmos $I = \langle T \rangle$, o ideal gerado por T , temos que $\mathcal{Z}(T) = \mathcal{Z}(I)$. Além disso, como $\mathbb{K}[\underline{x}]$ é um anel noetheriano, isto é, qualquer ideal é finitamente gerado, então o conjunto $\mathcal{Z}(T)$ pode ser expresso como os zeros comuns do conjunto finito de polinômios.

Proposição A.5. Em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ união de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. A interseção de qualquer família de conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. O conjunto vazio e o espaço todo são conjuntos algébricos.

Definição A.6. A proposição anterior gera uma topologia em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ ao considerarmos os complementares dos conjuntos algébricos como conjuntos abertos. Esta topologia é denominada *Topologia de Zariski* em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Definição A.7. Um subconjunto Y de um espaço topológico X é *irredutível* se não pode ser expresso como união $Y = Y_1 \cup Y_2$, onde Y_1 e Y_2 são fechados próprios e não vazios de Y . O vazio não é considerado irredutível.

Proposição A.8. *Seja $X \neq \emptyset$ um espaço topológico. São equivalentes:*

- (i) X é um espaço topológico irredutível.
- (ii) Todo par de conjuntos abertos não vazios em X tem interseção não vazia.
- (iii) Todo aberto não vazio em X é denso em X .

Definição A.9. Seja $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico afim. Assim, Y será denominada de *variedade afim* se Y for irredutível. Um subconjunto aberto de uma variedade afim será denominado de *variedade quase-afim*.

Agora, vamos estabelecer a relação entre conjuntos algébricos afins e ideais em $\mathbb{K}[x]$. Considere $Y \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. O ideal associado a Y em $\mathbb{K}[x]$ é dado por

$$\mathcal{I}(Y) := \{F \in \mathbb{K}[x] \mid F(P) = 0, \forall P \in Y\}.$$

Portanto, temos uma função $\mathcal{Z}$ que mapeia subconjuntos de $\mathbb{K}[x]$ para conjuntos algébricos e uma função $\mathcal{I}$ que mapeia subconjuntos de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ para ideais.

Proposição A.10. *Sejam T_1, T_2 subconjuntos de $\mathbb{K}[x]$ e Y_1, Y_2 subconjuntos de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.*

- (a) Se $T_1 \subseteq T_2$, então $\mathcal{Z}(T_2) \subseteq \mathcal{Z}(T_1)$.
- (b) Se $Y_1 \subseteq Y_2$, então $\mathcal{I}(Y_2) \subseteq \mathcal{I}(Y_1)$.
- (c) Para quaisquer dois subconjuntos Y_1, Y_2 , temos que $\mathcal{I}(Y_1 \cup Y_2) = \mathcal{I}(Y_1) \cap \mathcal{I}(Y_2)$.
- (d) Para qualquer ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x]$, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) \supseteq \sqrt{I}$.
- (e) Para qualquer subconjunto $Y \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) = \overline{Y}$.

Teorema A.11 (Hilbert's Nullstellensatz). *Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado, I um ideal em $\mathbb{K}[x]$. Então*

- (a) $I = \langle 1 \rangle$ ou $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$.
- (b) $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}$.

Corolário A.12. *Existe uma bijeção entre conjuntos algébricos em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ e ideais radicais em $\mathbb{K}[x]$, dada por $Y \mapsto \mathcal{I}(Y)$ com inversa $I \mapsto \mathcal{Z}(I)$. Além disso, um conjunto algébrico é irredutível se, e somente se, o ideal associado é um ideal primo.*

Definição A.13. Seja Y um conjunto algébrico em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Definimos o *anel de coordenadas* de Y pelo anel quociente, $A(Y) := \mathbb{K}[x]/\mathcal{I}(Y)$.

Observação A.14. Se Y é uma variedade afim, então $A(Y)$ é um domínio de integridade. Além disso, $A(Y)$ é uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada.

Definição A.15. Um espaço topológico X é chamado de *noetheriano* se, para toda cadeia descendente $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$ formada por conjuntos fechados $Y_i \subseteq X$, existe $r \geq 1$ natural tal que $Y_r = Y_{r+j}$ para todo j natural.

Proposição A.16. Em um espaço topológico noetheriano X , todo subconjunto fechado Y pode ser expresso como uma união finita $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_r$ de subconjuntos fechados e irredutíveis Y_i . Se exigirmos que $Y_i \not\supseteq Y_j$ para $i \neq j$, então os Y_i são unicamente determinados. Eles são chamados de *componentes irredutíveis*.

Corolário A.17. Todo conjunto algébrico em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ pode ser expresso unicamente como uma união finita de variedades, sem uma conter a outra.

Definição A.18. Seja X um espaço topológico noetheriano, definimos a *dimensão* de X (denotada por $\dim X$) como sendo o supremo de todos os inteiros n tal que existe uma cadeia $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n$ de subconjuntos fechados e irredutíveis de X . Definimos a *dimensão de uma variedade* afim ou quase-afim como sendo a sua dimensão como um espaço topológico.

Definição A.19. Em um anel A , a *altura* de um ideal primo é o supremo de todos os inteiros n tais que existe uma cadeia $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ de ideais primos distintos. Definimos a *dimensão de Krull* de A como sendo o supremo das alturas de todos os ideais primos de A .

Proposição A.20. Se Y é um conjunto algébrico afim, então a dimensão de Y é igual a dimensão de Krull do seu anel de coordenadas $A(Y)$.

Proposição A.21. A dimensão de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ é n .

Proposição A.22. Se Y é uma variedade quase-afim, então $\dim Y = \dim \overline{Y}$.

Proposição A.23. Uma variedade Y em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ tem dimensão $n - 1$ se, e somente se, $Y = \mathcal{Z}(F)$, onde $F \in \mathbb{K}[x]$ é um polinômio irredutível. Chamamos essa variedade de *hipersuperfície*.

No contexto da Proposição A.23, $\mathcal{Z}(F)$ é uma curva (plana afim), superfície (afim) se $n = 2, 3$, respectivamente.

Lema A.24. Se $\mathcal{Z}(F)$ e $\mathcal{Z}(G)$ são curvas sem componentes em comum, então a interseção $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = \mathcal{Z}(F, G)$ é um conjunto algébrico finito.

A.2 Variedades Projetivas

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, onde $\mathbb{K}$ denota um corpo. Defina a seguinte relação em $V - 0_V$

$$u \sim v \Leftrightarrow u = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{K}$$

Note que:

- $\sim$ define uma relação de equivalência.
- λ é não nulo, pois u e v são, ambos, não nulos.
- Se $v \in V$ é não nulo, a classe de equivalência associada ao vetor v é dada por

$$\bar{v} = \{u \in V - 0_V \mid u \sim v\} = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0\} = [v] - 0_V,$$

sendo $[v]$ o subespaço 1-dimensional de V gerado por v .

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, então a *projetivização* de V , que será denotada por $\mathbb{P}(V)$, é igual ao conjunto quociente $(V - 0_V)/\sim$.

Definição A.25. Considere espaço vetorial de dimensão $n+1$ sobre $\mathbb{K}$, $V = \mathbb{K}^{n+1}$. A projetivização de $\mathbb{K}^{n+1}$, $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$, ou simplesmente $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é denominado *n-espaço projetivo* sobre $\mathbb{K}$. No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ denotaremos $\mathbb{P}^n$.

Observação A.26. Para cada vetor não nulo $v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, usaremos a notação $[v_0 : \dots : v_n]$ para indicar a classe de equivalência do vetor v . As coordenadas $v_0, \dots, v_n$ do vetor v são denominadas *coordenadas homogêneas* do ponto $[v_0 : \dots : v_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Exemplo A.27. Considere $V = \mathbb{C}^{n+1}$ (espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$). Lembre que $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ não nulo determina um ponto $[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n$. Além disso vetores L.D. determinam o mesmo ponto. Assim

$$[a_0 : \dots : a_n] = [\lambda a_0 : \dots : \lambda a_n], \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

- Para $n = 0$, $\mathbb{P}^0$ é um ponto. De fato, $\mathbb{P}^0 = \{[a_0] \mid a_0 \neq 0\}$ então $[a_0 a_0^{-1}] = [1]$ para todo a_0 não nulo.
- Para $n = 1$, A *reta projetiva complexa* consiste de uma cópia da *reta afim* $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ e um ponto no infinito. Lembre que $\mathbb{P}^1 = \{[a_0 : a_1] \mid a_0 \neq 0 \text{ ou } a_1 \neq 0\}$.
Afirmção: $\mathbb{P}^1 = \{[a : 1] \mid a \in \mathbb{C}\} \cup \{[1 : 0]\}$.

Dado $[a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$, temos duas possibilidades $a_1 \neq 0$ ou $a_1 = 0$.

Se $a_1 \neq 0$ então $[a_0 a_1^{-1} : a_1 a_1^{-1}] = [a : 1]$ com $a = a_0 a_1^{-1}$.

Se $a_1 = 0$ então $[a_0 a_0^{-1} : 0 a_0^{-1}] = [1 : 0]$.

Agora observe que a função $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 - \{[1 : 0]\} = \{[a : 1] \mid a \in \mathbb{C}\}$ dada por $a \mapsto [a : 1]$ é uma bijeção. Ou seja, em $\mathbb{P}^1$ existe uma cópia da reta afim $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$. Assim temos a seguinte identificação:

$$\mathbb{P}^1 = \{[a : 1] \mid a \in \mathbb{C}\} \cup \{[1 : 0]\} \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Onde $\{\infty\} := [1 : 0]$ é denominado *ponto no infinito*.

- O plano projetivo complexo $\mathbb{P}^2 = \{[a_0 : a_1 : a_2] \mid (a_0 : a_1 : a_2) \neq (0, 0, 0)\}$ consiste de uma cópia do plano afim $\mathbb{A}^2 = \mathbb{C}^2$ e uma reta no infinito.

$$\mathbb{P}^2 = \{[a : b : 1] \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\} \cup \mathbf{L}_\infty \simeq \mathbb{C}^2 \cup \mathbf{L}_\infty$$

onde $\mathbf{L}_\infty$ é denominada *reta no infinito*.

- Mais geralmente, dado $n \in \mathbb{N}$, o n -espaço projetivo admite uma partição da forma $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathcal{H}_\infty \simeq \mathbb{C}^n \cup \mathcal{H}_\infty$, onde $\mathcal{H}_\infty$ denota o *hiperplano no infinito* podendo ser identificado com $\mathbb{P}^{n-1}$.

Similarmente ao caso afim, conjuntos algébricos projetivos são zeros de polinômios em $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ com a condição de que os polinômios que os definem sejam homogêneos. Além disso, podemos definir a topologia de Zariski em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ ao considerarmos conjuntos abertos como complementares dos conjuntos algébricos.

Definição A.28. Seja $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ um conjunto algébrico projetivo. Desta forma, Y será denominada *hipersuperfície* se existir $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogêneo de grau $d \geq 1$ tal que $Y = \mathcal{Z}(F)$. Se F é livre de quadrados, então dizemos que a hipersuperfície é reduzida de grau $d = \deg(F)$.

Definição A.29. Seja $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto algébrico projetivo. Assim, Y será denominada de *variedade projetiva* se Y for irredutível. Um subconjunto aberto de uma variedade projetiva será denominado de *variedade quase-projetiva*.

Exemplo A.30. Conjuntos abertos e variedades projetivas em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ são variedades quase-projetivas.

Definição A.31. Uma *Curva Projetiva Plana* é a classe de equivalência de um polinômio homogêneo em $\mathbb{C}[x, y, z]$, onde $F \sim G$ se, e somente se, $F = \lambda G$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Exemplo A.32. $Y = \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid a_1 a_2 = 0\}$ é uma curva de grau 2, visto que $Y = \mathcal{Z}(x_1, x_2)$ e $\langle x_1, x_2 \rangle$ é um ideal homogêneo radical do anel $\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$. Y é irredutível. De fato,

$$\mathcal{Z}(x_1, x_2) = \mathcal{Z}(x_1) \cup \mathcal{Z}(x_2) \text{ e } \mathcal{Z}(x_1) \cap \mathcal{Z}(x_2) = \{[1 : 0 : 0]\}$$

Assim Y é a união de retas $L_1 = \mathcal{Z}(x_1)$ e $L_2 = \mathcal{Z}(x_2)$ que se intersectam no ponto $p = [1 : 0 : 0]$.

Se Y é um subconjunto qualquer de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, podemos associar a ele um ideal $\mathcal{I}(Y)$ gerado por polinômios homogêneos. Analogamente ao caso afim, o anel de coordenadas homogêneo de Y é dado por $S(Y) := \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{I}(Y)$. O seguinte lema, junto com a Proposição A.16 nos garante que se Y é um conjunto algébrico não vazio em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, então Y pode ser escrito como uma união finita de componentes irredutíveis, com a condição de serem unicamente determinados (a menos de ordenação) se uma componente não estiver contida na outra.

Lema A.33. *Todo conjunto algébrico em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é um espaço topológico noetheriano.*

Observação A.34 (Homogeneização e Desomogeneização). Para polinômios não nulos:

- (a) Considere o polinômio $G \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e seja $\sum_{i=0}^d G_i$ a decomposição de G em partes homogêneas de grau i não nulo. A *homogeneização* de G relativa a variável x_0 é dada por

$$G^* := \sum_{i=0}^d x_0^{d-i} G_i.$$

- (b) Considere, agora, um polinômio $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogêneo de grau d . A *desomogeneização* de F relativa a variável x_i é dada por

$$F_* := F(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Teorema A.35 (Teorema dos Zeros de Hilbert - Caso Projetivo). *Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado e I um ideal homogêneo de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Tal que $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$. Então $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}$.*

Proposição A.36. *Seja $\mathcal{U}_i := \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n - \mathcal{Z}(x_i)$ aberto de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ para $i = 0, \dots, n$. A aplicação $\varphi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ definida por $[a_0 : \dots : a_n] \mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right)$ é um homeomorfismo (ao considerarmos a Topologia de Zariski).*

Corolário A.37. *Se Y é uma variedade projetiva (respectivamente, quase-projetiva), então Y é coberto por conjuntos abertos $Y \cap \mathcal{U}_i$, $i = 0, \dots, n$ que são homeomorfas as variedades afins (respectivamente quase afins) via aplicação φ_i definida acima.*

Corolário A.38. $\dim \mathcal{U}_i = n$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.

Corolário A.39. $\dim \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = n$.

Corolário A.40. *Se $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é uma hipersuperfície, então $\dim X = n - 1$.*

Apêndice B

Ordem de Zeros e Polos

Definição B.1. Seja A um anel noetheriano local, com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo de resíduos $\mathbf{K} = A/\mathfrak{m}$. Dizemos que A é um *anel local regular* se $\dim_{\mathbf{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$.

Definição B.2. Seja X uma variedade qualquer. Dizemos que X é *não singular em um ponto* $P \in X$ se o anel local $\mathcal{O}_P(X)$ é um anel local regular. Se para todo ponto $P \in X$, X é não singular em P , dizemos apenas que X é *não singular*. Dizemos ainda que X é *singular* se não for não singular.

Definição B.3. Dizemos que uma variedade X é *regular em codimensão um* (ou, as vezes, *não singular em codimensão um*) se todo anel local $\mathcal{O}_P$ de X de codimensão um é regular.

Um ponto de uma variedade X é dito *fechado* se corresponde a um ideal maximal no anel de coordenadas associado. Se X é não singular o anel local de cada ponto fechado é regular. Como todo ponto de X é não singular, isto implica que todos os anéis locais são regulares, uma vez que são localizações dos anéis locais de pontos fechados. Além disso, qualquer anel noetheriano local de dimensão um é um domínio integralmente fechado.

A partir de agora vamos considerar X uma variedade que é regular em codimensão um.

Definição B.4. Um *divisor primo* de uma variedade X é uma subvariedade fechada de codimensão um. Um *Weil divisor* é um elemento de grupo abeliano livre $\text{Div} X$ gerado por divisores primos. Escrevemos um divisor como $D = \sum n_i Y_i$, onde Y_i são divisores primos e n_i são inteiros tais que apenas um número finito de n_i são diferentes de zero. Se todos os $n_i \geq 0$, dizemos que é *efetivo*.

Observação B.5. Seja X uma variedade. Um *ponto genérico* de X é um ponto correspondente ao ideal primo minimal, que é o ideal zero no anel de coordenadas da variedade. Tal ponto é único e tem a propriedade de ser denso em X .

Observação B.6. Se Y um divisor primo de uma variedade X . Seja $\eta \in Y$ é um ponto genérico. Então o anel local $\mathcal{O}_\eta(X)$ é um anel de valorização discreta com corpo quociente, o corpo de funções $\mathbf{K}(X)$. Chamamos a valorização discreta ord_Y a *valorização* de Y . Agora seja $f \in \mathbf{K}(X)^*$ uma função racional. Então $\text{ord}_Y(f)$ é um número inteiro. Se este número for positivo, dizemos que f tem um zero ao longo de Y ; se for negativo, dizemos que f tem um polo ao longo de Y de ordem $-\text{ord}_Y(f)$.

Lema B.7. *Sejam X uma variedade e $f \in \mathbf{K}(X)^*$. Então $\text{ord}_Y(f) = 0$, exceto para uma quantidade finita de divisores primos de Y .*

Definição B.8. *Sejam X uma variedade e $f \in \mathbf{K}(X)^*$. Definimos o *divisor* de f , denotado por $[f]$,*

$$[f] = \sum_Y \text{ord}_Y(f) Y,$$

onde a soma é tomada sobre todos os divisores primos de X . Pelo Lema B.7, isso é uma soma finita, portanto é um divisor. Qualquer divisor igual ao divisor de uma função é chamado de *divisor principal*.

Observação B.9. Note que, se $f, g \in \mathbf{K}(X)^*$, então pelas propriedades de valorização $[f/g] = [f] - [g]$. Portanto ao enviar f ao seu divisor $[f]$, obtem-se um homomorfismo do grupo multiplicativo $\mathbf{K}(X)^*$ ao grupo aditivo $\text{Div}X$, e a imagem, que consiste nos divisores principais, é um subgrupo de $\text{Div}X$.

Observação B.10. Para o caso em que X é não singular ao longo de W , ou seja, $\mathcal{O}_W(X)$ é um anel de valorização discreta. Então $f = GH^m$ e portanto, $\text{ord}_W(f) = m$. Além disso quando X é uma curva sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$, isso é o mesmo que definir

$$\text{ord}_W(f) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{O}_W(X)}{\langle f \rangle}$$

Esta última definição não se estende para variedades de dimensões superiores, pois, neste caso $\mathcal{O}_W(X)/\langle f \rangle$ não tem dimensão finita. A definição geral para $f \in \mathcal{O}_W(X)$

$$\text{ord}_W(f) = \ell_{\mathcal{O}_W(X)} \left(\frac{\mathcal{O}_W(X)}{\langle f \rangle} \right)$$

onde $\ell_{\mathcal{O}_W(X)}$ denota o comprimento do $\mathcal{O}_W(X)$ -módulo. Para um $f \in \mathbf{K}(X)^*$ fixo, existem apenas um número finito de subvariedades W de codimensão um de X , com $\text{ord}_W(f) \neq 0$.

Referências

- Altman, A. e Kleiman, S. (2021). A term of commutative algebra.
- Bashelor, A., Ksir, A., e Traves, W. (2008). Enumerative algebraic geometry of conics. *The American Mathematical Monthly*, 115(8):701–728.
- Bashelor, A. C. (2005). *Enumerative algebraic geometry: counting conics*. US Naval Academy.
- Eisenbud, D. (2013). *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*, volume 150. Springer Science & Business Media.
- Eisenbud, D. e Harris, J. (2006). *The geometry of schemes*, volume 197. Springer Science & Business Media.
- Eisenbud, D. e Harris, J. (2016). *3264 and all that: A second course in algebraic geometry*. Cambridge University Press.
- Ferreira Filho, G. G. (2014). Uma introdução à geometria enumerativa.
- Fulton, W. (2008). Algebraic curves. *An Introduction to Algebraic Geom*, 54.
- Fulton, W. (2013). *Intersection theory*, volume 2. Springer Science & Business Media.
- Gathmann, A. (2002). Algebraic geometry. *Notes for a class taught at the University of Kaiserslautern (2002/2003) disponível em* <http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2002/main.pdf>; último acesso em 22 de julho de 2024.
- Gathmann, A. (2018). Plane algebraic curves. *Class Notes TU Kaiserslautern*.
- Gonçalves, F. S., Bordignon, L., e Carbone, V. L. (2010). Introdução à geometria algébrica. *Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos. São Carlos*.
- Harris, J. (1992). *Algebraic geometry: a first course*, volume 133. Springer Science & Business Media.
- Hartshorne, R. (2013). *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media.

- Kleiman, S. L. (1976). *Chasles's Enumerative Theory of Conics; a Historical Introduction*. Aarhus Universitet. Matematisk Institut.
- Mohr, R. e Triggs, B. (1996). Projective geometry for image analysis. In *XVIIIth International Symposium on Photogrammetry & Remote Sensing (ISPRS'96)*.
- Rojas, J., Andria, S., e Manguiera, W. (2023). *Contando retas em superfícies no espaço projetivo*. IMPA.
- Ronga, F., Tognoli, A., e Vust, T. (1995). *The number of conics tangent to 5 given conics: the real case*. Citeseer.
- Sottile, F. (1997). Enumerative geometry for real varieties. In *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, volume 62, Part 1 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, páginas 435–447. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- Vainsencher, I. (1978). Conics in characteristic 2. *Compositio Mathematica*, 36(1):101–112.