UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Reynald Nascimento da Rocha

Aproximação em análise real: A fórmula de Taylor e o método de Newton

Rio Tinto – PB
Abril de 2024

Reynald Nascimento da Rocha

Aproximação em análise real: A fórmula de Taylor e o método de Newton

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

Rio Tinto – PB
Abril de 2024

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R672a Rocha, Reynald Nascimento da.
Aproximação em análise real: A fórmula de Taylor e o método de Newton / Reynald Nascimento da Rocha – Rio Tinto, 2024.
49f. : il.

Orientação: Jamilson Ramos Campos.
TCC (Graduação) – UFPB/CCAE.

1. Fórmula de Taylor. 2. Aproximação de funções. 3. Método de Newton. 4. Zeros de funções. 5. Aplicações da derivada. I. Campos, Jamilson Ramos. II. Título.

UFPB/CCAE CDU 517.5

Reynald Nascimento da Rocha

Aproximação em análise real: A fórmula de Taylor e o método de Newton

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

Aprovado em 06 de Maio de 2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto - UFPB

Prof. Dr. Carlos Alberto Almeida - UFPB

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos - UFPB
Orientador

Dedicatória

Aos meus pais Ronaldo Silva da Rocha
e Geilza Nascimento da Rocha.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem ele não seria nada. A minha mãe Geilza Nascimento da Rocha e ao meu pai Ronaldo Silva da Rocha, por todo amor e carinho. Agradeço também as professoras Cristiane Fernandes de Souza, Claudilene Gomes da Costa, Graciana Ferreira Dias, Agnes Liliane Lima Soares, Cibelle de Fátima Castro de Assis e Surama Santos Ismael da Costa e aos professores Jamilson Ramos Campos, Emmanuel de Sousa Fernandes Falcão, Carlos Alberto Gomes de Almeida, Givaldo de Lima, Joseilme Fernandes Gouveia, Roy Percy Tocto Guarniz e Marcos André José Valcacio que contribuíram para minha formação. Agradeço aos meus amigos e parentes pelos momentos de descontração e carinho. Agradeço também a duas pessoas muito especiais Ednaldo Silva de Souza Neto pelos momentos de descontração e carinho e a Ednaldo Silva de Souza Junior por todo carinho, todo incentivo e todo apoio para que eu continue percorrendo o caminho do conhecimento. Agradeço também ao professor Jamilson Ramos Campos, por ser meu orientador e por toda paciência que ele teve. Agradeço aos membros da banca examinadora Carlos Alberto Almeida e José Laudelino de Menezes Neto por disporem de seu tempo, atenção e conhecimento para avaliar a qualidade do meu trabalho.

"Tudo posso naquele que me fortalece."
Filipenses 4:13

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é realizar um estudo bibliográfico e teórico sobre dois métodos de aproximação em análise real: a fórmula de Taylor e o método de Newton. Inicialmente apresentamos uma breve resenha histórica sobre o desenvolvimento do Cálculo/Análise e sobre o surgimento dos nossos objetos de estudo. Serão apresentados conceitos e resultados essenciais para o desenvolvimento do trabalho e as técnicas de aproximação serão apresentadas de forma um pouco mais detalhada, acompanhados de uma ou mais aplicações.

Palavras-chave: Fórmula de Taylor, aproximação de funções, método de Newton, zeros de funções, aplicações da derivada.

Abstract

The main goal of this work is to carry out a bibliographic and theoretical study on two approximation methods in real analisys: Taylor's formula and Newton's method. Initially, we present a brief historical review of the development of Calculus/Analysis and the emergence of our objects of study. Essential concepts and necessary results for the development of the work will be stated and the approximation techniques will be presented in a slightly more detailed way, together with one or more applications.

Keywords: Taylor's formula, aproximation of functions, Newton's method, zeros of functions, applications of derivatives.

Sumário

Introdução

Ao final do século XVII a matemática progride de forma notável com o advento do Cálculo, cujos principais expoentes sem dúvida são o Isaac Newton e o Gottfried Wilhelm Leibniz. Ao contrário da sequência natural do tema nos livros e cursos atuais sobre esta área da matemática, o cálculo integral surge primeiro, com processos somatórios relacionados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos, e depois surge o cálculo diferencial, como solução a problemas relacionados a tangencia de curvas e relacionadas máximos e mínimos de funções. Nos séculos XVIII e XIX houve um grande avanço do Cálculo, na direção de uma formalização desta área. Esse esforço teve como consequência o desenvolvimento da *Análise Matemática* que também ficou conhecido como um processo de aritmetização do cálculo. Grandes matemáticos da época como Cauchy, Weierstrass, Riemann, entre outros, ofereceram uma enorme contribuição a esse processo.

Desde a Grécia Antiga foram desenvolvidos métodos para encontrar o que hoje chamamos de raízes de funções como o método das proporções e o método da aplicação de áreas. Tais ferramentas tinham por finalidade resolver problemas de construções geométricas e de proporcionalidade de segmentos. Na atualidade o comportamento e as raízes de uma função são de importância para entendermos e analisarmos muitos problemas em diversas áreas do conhecimento como a física, a química e até mesmo a economia.

Partindo de sua ideia de derivada, por um lado, Newton desenvolveu um método de aproximações sucessivas para calcular as raízes de uma função. Por outro lado e também por meio de derivadas, Taylor desenvolveu uma fórmula que decompõe uma função em um polinômio que pode ser facilmente derivável e analisado na vizinhança de um ponto. Estes dois aspectos do cálculo se traduzem em importantes aplicações que ilustram a versatilidade dessa área da matemática.

O Objetivo principal deste trabalho é realizar um estudo bibliográfico sobre dois métodos de aproximação em análise real: a fórmula de Taylor e o método de Newton. Esses métodos de aproximação são essencialmente aplicações da derivada.

Em primeira instância, a beleza dessas técnicas e suas aplicações, sua utilidade prática e simplicidade nos chamou a atenção e motivou esse trabalho. O segundo interesse neste tema surge de sua não-abordagem ao longo das disciplinas de Cálculo e de Introdução à Análise Real, no curso licenciatura em Matemática do Campus IV da UFPB, e também do pouco contato que tivemos com o tema durante a graduação. Por último, também motiva o desejo do autor de aprofundar os conhecimentos na área de Análise Real, para uma continuidade de seus estudos em uma pós-graduação em Matemática.

O trabalho é dividido em quatro capítulos. No primeiro, faremos uma contextualização histórica do desenvolvimento do Cálculo/Análise nos séculos XVII,XVIII e XIX, destacando em especial conteúdos como diferenciação, integração e limites. Ainda no primeiro capítulo abordaremos também a história dos temas centrais deste trabalho e apresentaremos breves biografias de Newton e Taylor. O segundo capítulo é dedicado a apresentação dos conceitos e resultados básicos de análise necessários à apresentação do nosso tema. No terceiro e quarto capítulos abordaremos enfim a fórmula de Taylor e o método de Newton respectivamente. Apresentamos suas definições, propriedades e algumas aplicações.

As principais referências para a produção do trabalho foram [1, 2, 3, 4, 7] e [9] sobre história da matemática, e os livros [1, 5, 6] e [8] para o desenvolvimento teórico do tema e suas aplicações.

Capítulo 1

Apontamentos históricos

Neste primeiro capítulo, que é baseado nas referências [1, 2, 3, 4, 7] e [9], iremos pautar um pouco da história do Cálculo e da Análise Matemática, caracterizando alguns de seus personagens principais bem como suas valiosas contribuições para a criação e desenvolvimento do tema de nosso trabalho. Contudo, o objetivo deste capítulo é de apenas contextualizar de maneira histórica nosso tema principal, assim não iremos nos aprofundar detalhadamente nessa direção.

1.1 O surgimento do Cálculo

Apesar de o Cálculo ter surgido no fim do século XVII, sua história tem início na Grécia por volta do século V a.C. Segundo Eves [4], desde esse período surgiram os primeiros problemas de cálculo de áreas, volumes e comprimento de arcos. Problemas como o da quadratura do círculo, que consistia em criar um quadrado com a mesma área de um círculo, serviram de grande impulso para a ideia de integral. A técnica de Antífon (c. 430 a.C.), que consistia na duplicação dos lados de um polígono regular inscrito num círculo, caracteriza o método que ficou conhecido como *método de exaustão*. Não só Antífon, mas também outros nomes como Eudoxo (c. 370 a.C.), Demócrito (c. 400 a.C.) e Arquimedes fizeram suas contribuições para o cálculo de áreas e volumes. No entanto, o Cálculo só passou a se desenvolver efetivamente no fim do século XVII quando os textos de Arquimedes chegaram à Europa Ocidental, por volta de 1450, através de traduções encontradas em Constantinopla.

Conforme relatado por Contador [2], o desenvolvimento do Cálculo seguiu um caminho diferente da ordem (didática) da maioria dos cursos de cálculo; na verdade a integração surgiu antes da diferenciação. Coube a Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton, que viveram na mesma época, inspirados pelos trabalhos de Pascal, Cavaliere, Descartes e

Barrow, estabeleceram os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral. Suas ideias de diferenciação resultaram de problemas de tangência de curvas que dependiam das diferenças das ordenadas, enquanto a integração envolvia o cálculo de áreas por meio da soma infinitesimal de áreas retangulares que se aproximam da curva.

Nesse contexto, de dois matemáticos produzindo e trabalhando sobre um mesmo tema, sempre houve discussão sobre a, digamos, paternidade do cálculo. Acredita-se que Newton trabalhou primeiro nessa fundamentação, porém manteve seu Cálculo em segredo durante vários anos, ao contrário de Leibniz, que foi o primeiro a publicar seus resultados. Contudo, atualmente, a ideia que se tem é que ambos criaram o Cálculo independentemente (segundo consta em [1, 2, 4]). Os trabalhos de Leibniz influenciaram a notação matemática atual, pois ele foi o primeiro a utilizar o S alongado para representar a integral. Newton, por sua vez, desenvolveu trabalhos importantes na física, óptica e astronomia.

Chama atenção um método desenvolvido por Newton para obter aproximações de zeros de funções polinomiais, que é um dos temas centrais deste trabalho, o *método de Newton*. Tal método foi desenvolvido e escrito por ele em 1671 e também ficou conhecido como *método Newton-Raphson*, por ter sido aprimorado para qualquer função real em 1960 por Joseph Raphson no seu trabalho chamado *Analysis aequationum universalis*. Toda via, o método foi publicado primeiramente em 1736 no *Method of Fluxions* e neste Newton o descreve ilustrando-o na cúbica $f(x) = x^3 - 2x - 5$ (Eves [4]).

Contador [2] nos apresenta a ferramenta adotada por Newton a fim de encontrar a raiz real aproximada desta mesma cúbica. Inicialmente, Newton identificou que uma das raízes está localizada entre 2 e 3, então representou uma raiz x_0 como sendo $x_0 = 2 + r$, no qual $0 < r < 1$. Substituindo isso na equação da cúbica $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$, obteve em sequência

$$(2 + r)^3 - 2(2 + r) - 5 = 0$$

$$8 + 12r + 6r^2 + r^3 - 4 - 2r - 5 = 0$$

$$r^3 + 6r^2 + 10r - 1 = 0.$$

Como $0 < r < 1$, então r^3 e $6r^2$ são números muito pequenos (relativamente) em relação a $10r$ e podem ser desprezados, reduzindo a última equação a $10r = 1$ e obtendo

$$x_0 = 2 + r = 2 + 0,1 = 2,1.$$

Como a soma de dois termos foi desprezada, não é difícil estimar que r é menor que $0,1$ e desta forma, sendo x_1 uma nova aproximação da raiz, esta deverá ser menor que a primeira aproximação. Tal processo pode ser repetido quantas vezes forem necessárias, gerando valores cada vez mais próximos das raízes.

Vale enfatizar que este método não foi descrito como é trabalhado atualmente e modificações mais modernas e algebricamente mais consistentes foram implementadas. Matemáticos como Cauchy, Fourier, Bennet entre outros, contribuíram para o método provando a sua eficácia [7].

Newton também desenvolveu outro método para aproximar valores das raízes de uma função real. O gráfico a seguir (Figura 1.1) apresenta uma função $y = f(x)$ na qual a raiz é dada por r. No gráfico é traçada a tangente no ponto P_1 de coordenadas (x_1, y_1).

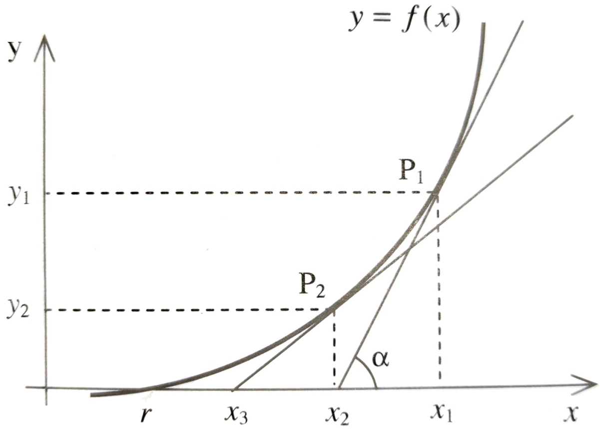

Figura 1.1: Aproximação de valores das raízes pelo método de Newton.
Fonte: Contador [2]

Esta tangente intercepta o eixo das abcissas no ponto x_2 a uma determinada distância da raiz r. Em x_2 é erguido uma perpendicular para que se possa determinar na curva o ponto P_2 de coordenadas (x_2, y_2). Partindo do ponto P_2 é traçado uma nova tangente que determina o ponto x_3, que é ainda mais próximo da raiz r da curva. Ao repetirmos o processo nos aproximamos cada vez mais da raiz da função.

Este método é conhecido como *Método das aproximações sucessivas de Newton*, ou simplesmente método de Newton, para determinar raízes de funções e será objeto de estudo de nosso trabalho no Capítulo 4.

Um outro nome bem comum nos cursos de Cálculo é do matemático Brook Taylor, criador da fórmula de Taylor (ou série de Taylor) que foi publicada em 1715 no *Methodus incrementorum directa et inversa* (ver [2]). Segundo Eves [4], Taylor aplicava essa fórmula para obter a solução aproximada de equações e sua expressão era dada por

$$f(a+b) = f(a) + bf'(a) + \frac{b^2}{2!}f''(a) + ...$$

A fórmula de Taylor, como se sabe, é uma aplicação importante do cálculo diferencial. Entretanto ela só teve sua importância reconhecida em 1755, quando Euler a aplicou no seu cálculo diferencial e quando Lagrange usou a fórmula com um resto como base de sua teoria das funções. Acredita-se que a fórmula fosse algo já conhecido à época, mas Taylor a desenvolveu e foi o primeiro a enunciá-la em sua forma geral. A fórmula de Taylor e suas aplicações será objeto de estudo de nosso trabalho no Capitulo 3.

Finalizando esta breve apresentação história, deixamos alguns comentários importantes. Percebe-se que a história do cálculo não decorreu de forma linear nem contínua e muitos dos trabalhos criados na época de seu surgimento não dispunham de rigor matemático. Isso de fato gerava confusões em seu uso e alcance além de um acúmulo de incoerências e absurdos oriundos de sua deficiente formulação. Da necessidade de formalização do cálculo surge a Análise, como um movimento de reconstrução rigorosa de todas as bases e do cálculo em si. Tal processo ocorreu nos séculos XVIII e XIX.

1.2 Biografias

Como complemento ao capítulo, apresentamos aqui breves biografias de Newton e Taylor.

1.2.1 Isaac Newton

Figura 1.2: Isaac Newton
Fonte: Eves [4]

Isaac Newton (Figura 1.2) nasceu no dia de Natal em 1642 na aldeia de Woolsthorpe, na Inglaterra. Ele recebeu o mesmo nome do pai, que faleceu meses antes do seu nascimento. Seu pai era um pequeno proprietário agrícola e, pelos planos iniciais da família, Newton deveria seguir a mesma atividade. Quando jovem, ele demonstrou grande interesse em experiências e em engenhocas mecânicas, mas não se destacava muito na escola (ver [2]).

Segundo Eves [4], com cerca de 18 anos Newton partiu para Cambridge e ingressou no Trinity College. A partir daí, voltou sua atenção para a matemática, física e óptica. Lá, leu trabalhos de vários matemáticos como Euclides, Descartes, Oughtred, Kepler, Viète e Wallis. Pouco tempo depois, criou sua própria matemática, propondo inicialmente o teorema binomial generalizado, e em seguida, o método dos fluxos. Por volta de 1665, Newton retornou à sua cidade natal fugindo da peste negra. Com seus trabalhos em óptica, ele desenvolveu sua teoria das cores em 1669, partindo da decomposição da luz branca em prismas. Desta forma, concluiu que a luz branca é uma mistura de diversos tipos de raios e que cada raio é responsável por uma cor do espectro (ver [9]).

Sem sombra de dúvidas, sua maior contribuição está contida em seus trabalhos de física e mecânica celeste, e neles está presente sua teoria de gravitação universal. Sua obra mais importante foi *Philosophiae naturalis principia mathematica* publicada em 1687, onde ele explica a mecânica de Galileu tendo como base sua lei de gravitação. Newton também foi o primeiro a construir um telescópio de reflexão e o protótipo para os telescópios ópticos modernos (ver [9]).

Newton passou os últimos anos de sua vida alternando seus interesses entre a matemática e a física. Ele faleceu em 1727 em Kensington, Middlesex e seu corpo foi enterrado na Abadia de Westminster, Londres.

1.2.2 Brook Taylor

Figura 1.3: Brook Taylor
Fonte: Eves [4]

Brook Taylor (Figura 1.3), ou apenas Taylor, foi um matemático inglês contemporâneo a Newton. Nascido em 18 de agosto de 1685 em Edmonton, Middlesex, Inglaterra e era filho de John Taylor e Olivia Tempest. Sua família estava ligada à baixa nobreza e tinha alguma riqueza. Seu pai era muito rígido e o expulsou de casa em 1721 quando ele decidiu se casar com uma mulher que não era muito rica, apesar de vir de uma boa família. Depois da morte de sua primeira esposa durante o parto, acabou voltando para casa em 1723 e em 1725 casou-se novamente, desta vez com a aprovação e bênção de seu pai. Sua segunda esposa também morreu durante o parto em 1730 mas, felizmente, sua filha conseguiu sobreviver (ver [3]).

Taylor era um grande amigo e defensor de Newton na controvérsia entre este e Leibniz sobre a paternidade do Cálculo [2]. De acordo com historiadores como Contador [2] e Eves [4], ele demonstrou um grande potencial matemático desde cedo e se formou no St. John's College da Universidade de Cambridge, chegando a ocupar o cargo de secretário da Royal Society. No entanto, renunciou ao cargo aos trinta e quatro anos para dedicar mais tempo à escrita. Seu principal trabalho, intitulado *Methodus incrementorum directa et inversa*, foi publicado em Londres no ano de 1715 e abordou diversos temas relacionados ao Cálculo, incluindo a apresentação da Fórmula de Taylor. Esse trabalho o qualificou como um dos fundadores do cálculo de diferenças finitas. Além disso, fez contribuições para a história do barômetro e para o estudo da refração da luz (ver [3]). Seu nome também tornou-se conhecido graças ao processo de expansão de funções em séries infinitas que também era utilizado para resolver equações diferenciais.

Taylor faleceu aos 46 anos em Londres no dia 29 de dezembro de 1731.

Capítulo 2

Miscelânea de resultados necessários

Nos nossos estudos sobre a fórmula de Taylor e do método de Newton, empregaremos conceitos essenciais sobre números reais, limites, continuidade e derivadas de funções.

Como nosso trabalho versa sobre aplicações em análise, partimos da premissa de que o leitor tenha conhecimento de um curso introdutório de Análise Real que contemple os conceitos e resultados básicos referidos no parágrafo acima.

Assim, como o próprio título do capítulo sugere, os conceitos e resultados expostos aqui serão colecionados e abordados de maneira informal e sem demonstrações, com o objetivo claro de servir apenas como referência aos demais capítulos do trabalho. As referências [1, 5, 6] e [8] são recomendadas para um estudo mais aprofundado sobre os conceitos abordados aqui.

2.1 Sobre números reais

Dos cursos de Análise Real, sabemos que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado e completo. Como consequência dessa ordenação, está bem definido em $\mathbb{R}$ o valor absoluto de x (ou módulo de x), denotado $|x|$, como o número

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Como consequência direta dessa definição, temos $|x| \geq 0$ e não é difícil perceber que $|x| = \max\{x, -x\}$.

Vejamos algumas propriedades do valor absoluto. Para todo x, y, r e $p \in \mathbb{R}$, temos:

(i) $-|x| \leq x \leq |x|$;

(ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(iii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$;

(iv) $|x.y| = |x|.|y|$;

(v) $|x - p| < r \Leftrightarrow p - r < x < p + r \Leftrightarrow x \in (p - r, p + r)$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito limitado superiormente se existe um número $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in X$. Analogamente, $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in X$. Os números b e a são chamados, respectivamente, cota superior e cota inferior de X.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente. Um número $b \in \mathbb{R}$ é dito supremo do conjunto X, e denota-se $b = \sup X$, quando é a menor das cotas superiores de X. Da mesma forma, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado inferiormente e não-vazio, um número $a \in \mathbb{R}$ será chamado de ínfimo de X, denotado $a = \inf X$, se for a maior das cotas inferiores de X.

Como já foi dito, o conjunto dos números $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado e completo. Mais precisamente, em $\mathbb{R}$ vale a propriedade:

"Todo conjunto não vazio e limitado superiormente $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo $b = \sup(X) \in \mathbb{R}$".

Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V do ponto a contém pontos do conjunto X com exceção do próprio a. Isso equivale a dizer que $V \cap (X - a) \neq \varnothing$, para toda vizinhança V, ou que para todo $\varepsilon > 0$ se tem $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - a) \neq \varnothing$. Indicaremos com X' o conjunto de todos o pontos de acumulação de X. Caso $a \in X$ não seja ponto de acumulação do conjunto X, diremos que a é um ponto isolado de X. Se todos os pontos do conjunto X são isolados, dizemos que X é um conjunto discreto.

2.2 Sobre sequências e séries

Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada natural n associa um número real x_n, chamado n-ésimo termo da sequência. Usamos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou apenas (x_n) para indicar a sequência cujo termo geral é x_n.

Uma sequência (x_n) é dita limitada superiormente quando existe um número real k tal que $x_n \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De forma análoga, uma sequência é dita limitada inferiormente se existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que (x_n) é limitada quando existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que um número real a é limite da sequência (x_n) se, quando $n \to \infty$ a sequência (x_n) convergir para a, em outras palavras, os termos x_n tornam-se tão próximos de a quanto se queira. Simbolicamente

$$a = \lim x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de números reais é definida como uma soma infinita de números, no seguinte sentido: Dada uma sequência (a_n) de números reais, a partir dela podemos formar uma nova sequência (s_n) de somas parciais dadas por

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

Caso exista $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, diremos então que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e o número s é chamado de soma da série. Se tal limite não existir, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. Em certos momentos é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ cujo primeiro termo é a_0 em vez de a_1. Usaremos também a notação simplificada $\sum a_n$ para a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Umas série $\sum a_n$ é dita absolutamente convergente se $\sum |a_n|$ é convergente. Em muitas aplicações, pode ocorrer de ser mais simples mostrar que uma série converge absolutamente do que mostrar que a série converge (sem o módulo). Isso é particularmente útil e na verdade se traduz numa ferramenta importante para testar a convergência de séries. É o que afirma o seguinte teorema.

Teorema 2.2.1 *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Um critério importante para teste de convergência que usaremos adiante em nosso trabalho, o Teste de d'Alembert, será enunciado abaixo.

Proposição 2.2.2 (Teste de d'Alembert) *Se $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e existe uma constante k que satisfaz $|a_{n+1}/a_n| \leq k < 1$ para todo n suficientemente grande, então série $\sum a_n$ será absolutamente convergente (e portanto convergente).*

2.3 Sobre limites, continuidade e derivada

Faremos agora uma breve exposição de conceitos já vistos nos cursos de Cálculo e Análise, como as definições de Limite, Continuidade e Derivada de funções reais.

Iniciaremos com as definições de limite e continuidade de funções. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ com domínio $X \subset \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de X. É dito que um número $L \in \mathbb{R}$ é limite de uma função f quando x tende a, em símbolos, $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ tem-se $|f(x) - L| < \varepsilon$. Caso $a \in X \cap X'$ e $L = f(a)$ na definição anterior, dizemos que a função f é contínua no ponto $a \in X$. Isto é, f é contínua em a se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ tem-se $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Quando uma função f não é contínua no ponto a, dizemos que f é descontínua em a. Se f for contínua em todos os pontos $a \in X$, dizemos apenas que f é uma função contínua.

Recordemos agora a definição de derivada. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A derivada da função f no ponto a, denotada $f'(a)$, é definida pelo limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Esta definição é equivalente, pela mudança de variável $x = a + h$, a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Caso exista o limite $f'(a)$, diremos que f e derivável (ou diferenciável) no ponto a. Quando existe $f'(x)$ para todos os pontos $x \in X \cap X'$, diremos que a função $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável (ou diferenciável) no conjunto X, sendo possível obter uma nova função $f' : X \cap X' \to \mathbb{R}$ onde $x \mapsto f'(x)$, que chamamos de função derivada de f. Se f' for contínua, diremos que f é de classe C^1. O processo pode ser repetido, sob as mesmas condições, obtendo as funções derivadas de ordem superior f'', f''', ... , $f^{(n)}$, ...

Uma função f é dita de classe C^n se possui derivadas até a ordem n contínuas. A função f é dita de classe C^∞ se possui derivadas contínuas em todas as ordens.

Vejamos agora uma coleção de resultados sobre limite, continuidade e derivadas de funções que serão utilizados nos capítulos seguintes de nosso trabalho.

Teorema 2.3.1 (Teorema do sanduíche) *Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$ tais que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$. Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - a$, então $\lim_{x \to a} h(x) = L$*

A regra de L'Hôpital, apresentada abaixo, é um exemplo popular de aplicação da derivada.

Teorema 2.3.2 (A Regra de L'Hôpital) *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ deriváveis em $a \in X'$ e tais que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 0 = g(a) = \lim_{x \to a} g(x)$. Se $g'(a) \neq 0$, então*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Finalizamos esta seção com três teoremas de existência muito importantes em análise.

Teorema 2.3.3 (Teorema de Rolle) *Seja f uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em $(a.b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema 2.3.4 (Teorema do Valor Médio, de Lagrange) *Seja f uma função contínua e definida no intervalo $[a, b]$. Se f é derivável em $(a.b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 2.3.5 (Teorema de Cauchy) *Sejam f e g funções continuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Se $g(b) \neq g(a)$ e $g'(c) \neq 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Capítulo 3

A fórmula de Taylor

Neste capítulo, apresentaremos a fórmula de Taylor de maneira precisa e formal. Isto significa que as afirmações e resultados deste capítulo serão todas demonstradas. Para isso, baseamo-nos nas referências [1, 5, 6] e [8].

Muitos problemas encontrados nas pesquisas na área da Matemática resumem-se ao estudo do comportamento de uma função. No entanto, muitas funções apresentam um comportamento caótico ou são definidas por expressões de difícil manuseio e tratamento.

A fórmula de Taylor é uma ferramenta matemática que utiliza polinômios para aproximar-se do comportamento dessas funções na vizinhança de um ponto de interesse desta função. E é fato de ser uma expressão polinomial que faz com que esse método de aproximação seja tão simples e ao mesmo tempo poderoso, já que pode ser implementado, por exemplo, em computadores de modo a resolver problemas muito rapidamente e de modo eficiente.

Neste capítulo iremos definir a fórmula de Taylor de ordem n, como caso geral, e apresentaremos exemplos diversos inclusive para os casos particulares $n = 1$ e $n = 2$.

3.1 Fórmula de Taylor de ordem n

Antes de apresentarmos nosso tema, vejamos algumas notações e estabeleçamos o ambiente necessário.

Indicaremos por $f^{(n)}(a)$ derivada de ordem n de uma função no ponto a e por simplicidade escreveremos $f'(a)$, $f''(a)$ e $f'''(a)$ para $n = 1, 2$ e 3 respectivamente. Definimos $(f')'(a) = f''(a)$ e assim sucessivamente até: $[f^{(n-1)}]'(a) = f^n(a)$. Para que $f^{(n)}(a)$ tenha sentido, $f^{(n-1)}(x)$ precisa estar definida num conjunto I, onde a é um ponto de acumulação de I e que $f^{(n-1)}(x)$ seja derivável no ponto $x = a$. Para todos os casos que iremos considerar, o conjunto I é um intervalo da reta.

Quando existir $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$, diremos que a função $f : I \to \mathbb{R}$ é n vezes derivável no intervalo I e quando $f : I \to \mathbb{R}$ é $n-1$ vezes derivável numa vizinhança de a e existe $f^{(n)}(a)$ diz-se que f é n vezes derivável no ponto $a \in I$. Consideramos, para efeito de notação, $f = f^{(0)}$.

A fórmula de Taylor de ordem n possibilita analisarmos o comportamento de uma função no entorno da vizinhança de um ponto. Ela é uma função descrita como um polinômio de grau n e esta é da seguinte maneira:

Definição 3.1.1 (Polinômio de Taylor de ordem n) Seja f uma função diferenciável até a ordem n no intervalo I e seja $a \in I$ um ponto de acumulação de I. O *polinômio de Taylor de ordem* n da função f no ponto a é definido por

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Podemos expressar esse polinômio de outra maneira pela mudança de variáveis $x = a + h$, com h satisfazendo $a + h \in I$. Assim, temos

$$P_n(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Antes de avançarmos em fatos e demonstrações relativas à definição, vejamos que de fato o polinômio de Taylor é uma ferramenta que faz aproximações de uma função por um polinômio de grau n em volta de um ponto fixo a, desde que, função e polinômio estejam definidos num mesmo intervalo e o ponto a também pertença a este intervalo. Vejamos também que a margem de erro da aproximação da função pelo polinômio dependerá tanto da quantidade de termos que utilizarmos no polinômio, ou seja do grau do polinômio, quanto da proximidade de x ao ponto a.

Tendo isso em mente, analisaremos alguns exemplos de aproximações feitas com o polinômio de Taylor.

Exemplo 3.1.2 O polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x) = e^x$ numa vizinhança de $a = 0$ é dado por

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2.$$

Como $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ e assim $P_2(x)$ assume a expressão

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

Vejamos agora o erro cometido quando $x = 0,01$: Temos $f(0,01) = e^{0,01} \cong 1,010050167$ e aplicando $x = 0,01$ no polinômio P_2 obtemos

$$P_2(0,01) = 1 + 0,01 + \frac{(0,01)^2}{2} = 1,01005.$$

Note que o erro absoluto desta aproximação é muito pequeno; da ordem de 10^{-6}.

Vejamos agora erro da aproximação para $x = 0,5$ que é um pouco mais distante do ponto $a = 0$: Neste caso $f(0,5) = e^{0,5} \cong 1,648721271$ e substituindo o valor de x no polinômio P_2 temos

$$P_2(0,5) = 1 + 0,5 + \frac{(0,5)^2}{2} = 1,625.$$

Agora perceba que o erro absoluto desta nova aproximação é consideravelmente maior (da ordem de 10^{-2}) que o do caso anterior e isso ocorre devido ao distanciamento de x em relação ao ponto $a = 0$. O que podemos concluir é que quanto mais próximo de a for o valor de x menor será nosso erro absoluto da aproximação de $f(x)$ por $P_2(x)$.

Agora vamos expandir nosso polinômio até a 4ª ordem e usar o mesmo valor $x = 0,5$ do caso acima. Como $P_4(x)$ assume a expressão

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4,$$

tomando $x = 0,5$, segue que

$$P_4(0,5) = 1 + 0,5 + \frac{1}{2}(0,5)^2 + \frac{1}{3!}(0,5)^3 + \frac{1}{4!}(0,5)^4 \cong 1,6484375$$

e percebemos que o erro absoluto da aproximação do polinômio de ordem 4 (da ordem de 10^{-4}) é menor que o erro cometido com o uso do polinômio de ordem 2. Observamos então que quanto maior o grau do polinômio Taylor menor será o erro absoluto cometido na aproximação.

Vejamos mais um exemplo, este necessário a uma comparação do método para diferentes funções.

Exemplo 3.1.3 O polinômio de Taylor de ordem 3 de $f(x) = \ln x$ em torno de $a = 1$ é dado por

$$P_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Neste caso, temos $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$ e portanto P_3 assume a forma

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2x^2}(x-1)^2 + \frac{2}{6x^3}(x-1)^3.$$

Vejamos agora o erro cometido para $x = 1,01$: Temos $f(1,01) = \ln 1,01 \cong 0,0099503$ e aplicando $x = 1,01$ em P_3 obtemos

$$P_3(1,01) = (1,01-1) - \frac{1}{2 \cdot 1,01^2}(1,01-1)^2 + \frac{2}{6 \cdot 1,01^3}(1,01-1)^3 \cong 0,0099513.$$

Note que o erro absoluto desta aproximação é muito pequeno; da ordem de 10^{-5}

Vejamos agora erro da aproximação para $x = 1,5$ que é um pouco mais distante do ponto $a = 1$: Neste caso $f(1,5) = \ln 1,5 \cong 0,4054651$ e substituindo o valor de x em P_3 temos

$$P_3(1,5) = (1,5-1) - \frac{1}{2 \cdot 1,5^2}(1,5-1)^2 + \frac{2}{6 \cdot 1,5^3}(1,5-1)^3 \cong 0,4567901.$$

Agora perceba que o erro absoluto desta nova aproximação é consideravelmente maior (da ordem de 10^{-2}) que o do caso anterior e isso ocorre devido ao distanciamento de x em relação ao ponto $a = 1$. O que podemos observar é que quanto mais próximo de a for o valor de x menor será nosso erro absoluto da aproximação de $f(x)$ por $P_3(x)$.

Agora vamos expandir nosso polinômio até a 5ª ordem e usar o mesmo valor $x = 1,5$ do caso acima. Neste caso $P_5(x)$ é dado pela expressão

$$P_5(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^4(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^5(1)}{5!}(x-1)^5$$

e segue que

$$P_5(1,5) = 0,5 - \frac{1}{2 \cdot 1,5^2}0,5^2 + \frac{2}{6 \cdot 1,5^3}0,5^3 - \frac{6}{24 \cdot 1,5^4}0,5^4 + \frac{24}{120 \cdot 1,5^5}0,5^5 \cong 0,4545267.$$

Percebemos que o erro absoluto da aproximação do polinômio de ordem 5 (também da ordem de 10^{-2}) é um pouco menor que o erro cometido com o uso do polinômio de ordem 3. Ainda sendo a diferença de erros pequena (nesta comparação), observamos que para maiores graus do polinômio Taylor menor será o erro absoluto cometido na aproximação.

Ao consideramos os dois exemplos apresentados, podemos nos questionar do por quê do fato de as aproximações do Exemplo 3.1.2 não serem tão precisas quanto as do Exemplo 3.1.3. Isso ocorre devido ao comportamento das funções serem distintos. Observe a seguir, na Figura 3.1 o gráfico do Exemplo 3.1.2:

No gráfico está destacado o ponto $(a, f(a))$ com $a = 0$ em preto, a função e^x também em preto, P_2 em azul e P_4 em vermelho. A partir da observação do gráfico percebemos que ao nos distanciarmos do ponto $a = 0$ as aproximações P_2 e P_4 se tornam cada vez mais imprecisas e quando mais próximas da vizinhança de $a = 0$, mais se aproximam do valor de e^x no ponto $a = 0$. Note também que a aproximação de P_4 é melhor que a aproximação feita por P_2.

Observemos agora o gráfico do Exemplo 3.1.3, apresentado na Figura 3.2. No gráfico está destacado o ponto $(a, f(a))$ com $a = 1$ em preto, a função $\ln x$ também em preto, P_3 em magenta e P_5 em verde. Ao observarmos o gráfico percebemos que quanto mais nos distanciarmos do ponto $a = 1$, as aproximações P_3 e P_5 tornam-se mais imprecisas. Note também que a aproximação de P_3 é ligeiramente melhor que a aproximação feita por P_5.

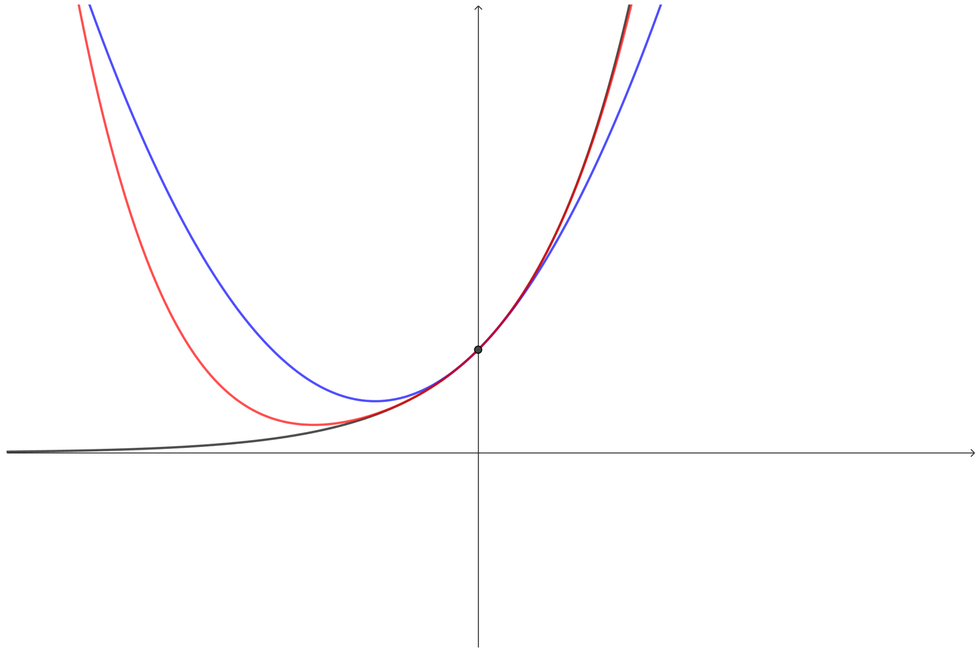

Figura 3.1: $f(x) = e^x$ e o ponto $(a, f(a))$ com $a = 0$ (preto), P_2 (azul) e P_4 (vermelho).
Fonte: Autoria própria (construção no Geogebra)

Ao compararmos as Figuras 3.1 e 3.2 associadas aos Exemplos 3.1.2 e 3.1.3, respectivamente, nos mostra como a natureza da função impacta no polinômio de Taylor associado: para a função $f(x) = \ln x$ os polinômios são “muito próximos”, se comparado aos polinômios obtidos para a função $f(x) = e^x$. Isso também explica os valores obtidos nos exemplos citados.

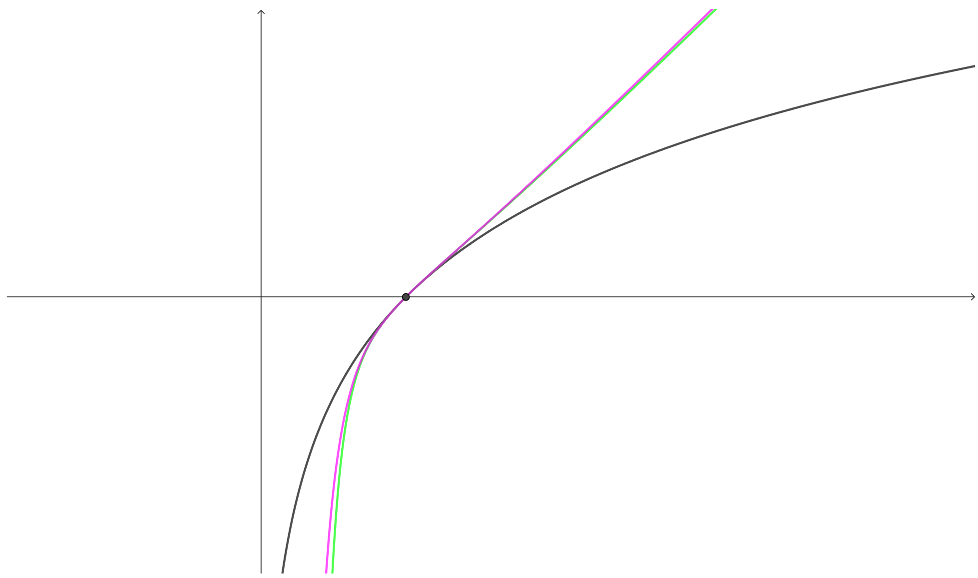

Figura 3.2: $f(x) = \ln x$ e o ponto $(a, f(a))$ com $a = 1$ (preto), P_3 (magenta) e P_5 (verde).
Fonte: Autoria própria (construção no Geogebra)

Como vimos na prática, a fórmula de Taylor nos permite obter valores muito próximos da função original no ponto. Entretanto, por se tratar de uma aproximação, existe sempre um erro que é cometido nesse processo. Tal erro é essencialmente "o que falta" para a aproximação se igualar ao valor exato da função naquele ponto.

Agora podemos definir esse erro, o qual é comumente chamado de *resto*.

Definição 3.1.4 Seja $P_n(a+h)$ o polinômio de Taylor de ordem n definido no intervalo I, com $a \in I$. A função $r_n(h) = f(a+h) - P_n(a+h)$, definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R} : a+h \in I\}$, é chamada de *resto de ordem* n associado a P_n.

Observe que a função resto $r_n(h)$ satisfaz

$$r_n(0) = r_n'(0) = \cdots = r_n^{(n)}(0) = 0.$$

De fato, $r_n(0) = f(a+0) - P_n(a+0) = 0$ (veja a Definição 3.1.1). Além disso, como $P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$, segue que $r_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(a) - P_n^{(n)}(a) = 0$.

Nosso trabalho agora será mostrar a seguinte

Propriedade Fundamental do Polinômio de Taylor de Ordem n: O Polinômio de Taylor de Ordem n é o único polinômio de grau no máximo n que aproxima f na vizinhança ao redor de a e tal que a função $r(h)$ tende a 0 mais rapidamente que h^n, quando $h \to 0$.

Esta propriedade nos diz que a função resto tem um comportamento assintótico próximo ao zero melhor até que o da função h^n, que já possui comportamento assintótico muito significativo. Isso de fato traduz o quanto o Polinômio de Taylor realiza bem a tarefa de aproximação da função numa vizinhança do ponto.

Para mostrarmos a propriedade fundamental, necessitamos de um lema técnico que será apresentado a seguir.

Lema 3.1.5 *Seja* $r : J \to \mathbb{R}$ *uma função derivável até a ordem* n *no ponto* $0 \in J$. *Então* $r^{(i)}(0) = 0\,(i = 0, 1, \ldots, n)$ *se, e somente se,* $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0$.

Demonstração. Suponha que $r^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, \ldots, n$. Para $n = 1$, temos $r(0) = r'(0) = 0$. Então

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h) - r(0)}{h} = r'(0) = 0.$$

Para $n = 2$, temos $r(0) = r'(0) = r''(0) = 0$, e portanto $\lim_{x\to 0} r'(x)/x = 0$. O Teorema 2.3.4 afirma que, para todo $h \neq 0$, existe x no intervalo de extremos 0 e h tal que

$$\frac{r(h)}{h^2} = \frac{r(h) - r(0)}{h^2} = \frac{r'(x).h}{h^2} = \frac{r'(x)}{h}.$$

Dai, segue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{r'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r'(x)/x}{h/x} = 0,$$

já que $h \to 0$ implica $x \to 0$ e sabemos que $|x/h| \leq 1$. De forma análoga, esse processo pode ser repetido n vezes, provando que sempre temos $\lim_{h\to 0} r(h)/h^n = 0$.

Reciprocamente, suponha $\lim_{h\to 0} r(h)/h^n = 0$. Então, para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^i} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)/h^n}{h^{n-i}} = 0.$$

Portanto $r(0) = \lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} r(h)/h^0 = 0$ e $r'(0) = \lim_{h\to 0} r(h)/h = 0$. Para mostrar que $r''(0)$, tomemos a função auxiliar $\varphi : J \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(h) = r(h) - r''(0)h^2/2$. Pelo que já mostramos, vale $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$. Pela parte do lema já demonstrada vale $\lim_{h\to 0} \varphi(h)/h^2 = 0$. Como $\varphi(h)/h^2 = r(h)/h^2 - r''(0)/2$ e sabemos (hipótese) que $\lim_{h\to 0} r(h)/h^2 = 0$, temos $r''(0) = 0$. O mesmo argumento pode ser aplicado também para $i = 3, 4, \ldots, n$ mostrando que tem-se $r^{(i)}(0) = 0$. Os argumentos apresentados para n também podem ser provados pelo princípio da indução. ∎

Agora que expomos e demonstramos o lema, podemos apresentar o teorema da fórmula de Taylor com resto. Também é comum fazer-se referência ao resto como *Resto Infinitesimal*, como no teorema a seguir.

Teorema 3.1.6 (Fórmula de Taylor com resto infinitesimal) *Dado uma função f derivável até a ordem n no intervalo I e com $a \in I$. A função r_n definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in I\}$ pela igualdade*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + r_n(h), \tag{3.1}$$

cumpre $\lim_{h\to 0} r_n(h)/h^n = 0$. *Reciprocamente, se Q_n é um polinômio de grau $\leq n$ tal que $r_n(h) = f(a+h) - Q_n(a+h)$ cumpre* $\lim_{h\to 0} r_n(h)/h^n = 0$ *então Q_n é o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto a, isto é,*

$$Q_n(a+h) = P_n(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Demonstração. Defina r_h pela expressão em (3.1), isto é

$$r_n(h) := f(a+h) - f(a) - f'(a)h - \frac{f''(a)}{2}h^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Para aplicarmos o Lema 3.1.5 e concluirmos a primeira implicação, precisamos mostrar que $r_n^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, \ldots, n$. Os casos $i = 0$ e $i = 1$ são imediatos. Para $i = 2$ temos

$$r_n''(h) = f''(a+h) - f''(a) - f'''(a)h - \cdots - \frac{f^{(n)}}{(n-2)!}h^{n-2}$$

e para $h = 0$ segue que $r_n''(0) = 0$. O processo pode ser repetido para $i = 3, 4, \ldots, n$ mostrando que $r_n^{(i)}(0) = 0$. Então, pelo Lema 3.1.5, tem-se $\lim_{h\to 0} r_n(h)/h^n = 0$.

Reciprocamente, seja $Q_n(a+h) = a_1 + a_2h + a_3h^2 + \ldots + a_nh^n$ um polinômio tal que $r_n(h) = f(a+h) - Q_n(a+h)$ satisfaz $\lim_{h\to 0} r_n(h)/h^n = 0$. Sem perda de generalidade, mostraremos para o caso $n = 2$ que de fato $Q_2 = P_2$. Os demais casos podem ser provados de forma análoga.

Neste caso temos

$$r_2(h) = f(a+h) - a_1 + a_2h + a_3h^2$$

e usando o Lema 3.1.5 segue que

$$0 = r_2(0) = f(a) - a_1 \Rightarrow a_1 = f(a),$$

$$0 = r_2'(0) = f'(a) - a_2 \Rightarrow a_2 = f'(a) \text{ e}$$

$$0 = r_2''(0) = f''(a) - 2a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f''(a)}{2}.$$

logo $Q_2(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dfrac{f''(a)}{2}h^2 = P_2(a+h)$. ■

Agora vejamos uma aplicação do Teorema 3.1.6 para a identificação de pontos de máximo e mínimo estritos de uma função.

Exemplo 3.1.7 Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável até a ordem n no ponto a, com $a \in I$. Suponha que $f^{(i)}(a) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$.

a) Se n é par. então f tem um ponto de mínimo local estrito em a caso $f^{(n)}(a) > 0$ e um máximo local estrito em a quando $f^{(n)}(a) < 0$.

b) Se n é ímpar, então a não é ponto de mínimo e nem de máximo local de f.

De fato, como $f^{(i)}(a) = 0$ para todo $i \in [1, n)$, a fórmula de Taylor pode ser escrita na forma

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + r_n(h)$$

e com uma manipulação simples dessa expressão, podemos escrevê-la na forma

$$f(a+h) - f(a) = h^n \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n}\right],$$

e pela definição de limite, deve existir $\delta > 0$ tal que, para $a + h \in I$ e $|h| \in (0, \delta)$, o número $f^{(n)}(a)$ possui o mesmo sinal que a soma interna aos colchetes (lembre que $\lim_{h\to 0} r_n(h)/h = 0$). Como $a \in \mathrm{Int}(I)$, nos é permitido tomar δ de maneira que $|h| < \delta \Rightarrow a + h \in I$. Quando n for par e $f^{(n)}(a) > 0$, a diferença $f(a+h) - f(a)$ é positiva sempre que $|h| \in (0, \delta)$, consequentemente f tem no ponto a um mínimo local estrito. De forma análoga, se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$ a diferença $f(a+h) - f(a)$ é negativa sempre que $|h| \in (0, \delta)$, consequentemente f tem no ponto a um máximo local estrito. Por fim, se n

for ímpar, os termos h^n e h tem sinais iguais, consequentemente a diferença $f(a+h)-f(a)$ troca de sinal junto a h. Assim f não tem máximo e nem mínimo local no ponto a.

O Teorema 3.1.6 é aplicado na expansão da Regra de L'Hõpital (Teorema 2.3.2) para além das derivadas de primeira ordem. Mostramos essa aplicação no exemplo a seguir.

Exemplo 3.1.8 Dados f e g deriváveis até a ordem n no ponto $a \in I$, com $f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a) = 0$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Se $g^{(n)}(a) \neq 0$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Com efeito, sob essas hipóteses a fórmula de Taylor de f e de g são dadas pelas expressões

$$f(a+h) = h^n \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n} \right]$$

e

$$g(a+h) = h^n \left[\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{s_n(h)}{h^n} \right],$$

onde sabemos que $\lim_{h \to 0} r_n(h)/h^n = \lim_{h \to 0} s_n(h)/h^n = 0$. Disso, segue que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} + \dfrac{r_n(h)}{h^n}}{\dfrac{g^{(n)}(a)}{n!} + \dfrac{s_n(h)}{h^n}} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

e obtemos a regra expandida.

Uma versão da Fórmula de Taylor onde o resto é expresso em função da derivada de ordem $n+1$ de f, chamada *Fórmula de Taylor com resto de Lagrange*, será apresentada a seguir.

Sendo uma Fórmula de Taylor, claro que o resultado aproxima funções por um polinômio. Entretanto, uma interpretação interessante da Fórmula de Taylor com resto de Lagrange é que ela pode ser vista como uma extensão do Teorema do Valor Médio (Teorema 2.3.4) para ordens superiores de derivadas.

Para que fique mais clara essa extensão, antes do teorema ser apresentado, vamos relembrar o Teorema 2.3.4 numa escrita mais conveniente: Sendo f contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável em $(a.b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a).$$

Teorema 3.1.9 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) *Seja f uma função definida em $[a, b]$, derivável até a ordem $n+1$ no intervalo (a, b) e com $f^{(n+1)}$ contínua* *em $[a,b]$. Então para todo $x \in [a,b]$ existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{3.2}$$

E tomando a mudança de variável $x = a+h$, podemos reescrever esta fórmula admitindo a existência de um $\theta \in (0,1)$, tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}. \tag{3.3}$$

Demonstração. Defina $\varphi : [a,x] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(y) = f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) + \cdots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n + \frac{K}{(n+1)!}(x-y)^{n+1},$$

onde vamos admitir por hora que a constante K é tal que $\varphi(a) = 0$ (essa constante será exibida ao final da demonstração). Note que como $\varphi(a) = 0$, se mostrarmos que $K = f^{(n+1)}(c)$, então teremos demonstrado que vale (3.2).

Sendo f derivável até a ordem $n+1$, temos $f^{(i)}$ contínua $(i = 0, 1, \ldots, n)$ e também, por hipótese, temos $f^{(n+1)}$ contínua. Segue então que φ é contínua em $[a,x]$ e derivável em (a,x) (novamente, por f ser derivável até a ordem $n+1$). Calculando diretamente, é fácil mostrar que $\varphi(a) = \varphi(x) = 0$ e que tem-se

$$\varphi'(y) = \frac{K - f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n.$$

Assim, a função φ está nas condições do Teorema de Rolle (Teorema 2.3.3) e portanto existe $c \in (a,x)$ (e portanto em (a,b)) tal que $\varphi'(c) = 0$. Em outras palavras, tem-se $K = f^{(n+1)}(c)$. ■

Observação 3.1.10 Repare que comparando as expressões em (3.3) e em (3.1), temos

$$r_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \theta \in (0,1),$$

e isso nos dá a justificativa do fato, dito anteriormente, de que resto pode ser expresso em função da derivada de ordem $n+1$ de f.

Uma aplicação imediata do teorema acima é apresentado no corolário a seguir.

Corolário 3.1.11 *Seja f uma função definida em $[a,b]$, derivável até a ordem $n+1$ no intervalo aberto (a,b) e $a \leq x_0 \leq b$. Se $f^{(n+1)}$ é limitada em $[a,b]$, isto é, existe $K > 0$*

tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq K, \forall x \in [a,b]$, *então temos*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1},$$

para $P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ *e para todo* $x \in [a,b]$.

Demonstração. Com efeito, do Teorema 3.1.9, para todo x em $[a,b]$, existe c entre x e x_0 tal que

$$|f(x) - P_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| |x - x_0|^{n+1}$$

e como (para todo x em $[a,b]$) $|f^{(n+1)}(x)| \leq K$, temos

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

■

Vejamos na prática um exemplo do uso da aplicação exposta no corolário acima. Vamos mostrar que, para todo $x \in [0,1]$, temos

$$\left|e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2} + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\right)\right| \leq \frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

É claro que $f(x) = e^x$ satisfaz todas as condições do Teorema 3.1.9 e o polinômio de Taylor de ordem n em torno do ponto $a = 0$ de f é dado por

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Como $0 < e^x = f^{(n)}(x) \leq e < 3$ para todo $x \in [0,1]$, segue do corolário anterior que

$$\left|e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\right)\right| < \frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}$$

para todo $x \in [0,1]$.

Duas conclusões interessantes sobre o exemplo que acaba de ser feito acima:

Observação 3.1.12 a) Para $x = 1$, temos

$$\left|e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Suponha que queremos determinar um número n de maneira que nossa margem de erro pela aproximação do número e pelo número $P_n(1)$ seja menor que 10^{-5}. Algumas tentativas nos levam a $n = 8$, resultando em

$$\frac{3}{9!} < 10^{-5}.$$

Assim,

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}$$

com erro inferior a 10^{-5}.

b) Como $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3}{(n+1)!} = 0$, concluímos de a), que

$$\lim_{n\to+\infty} \left[1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] = e.$$

A seguir iremos apresentar como casos especiais, a fórmula de Taylor de ordem 1 e de ordem 2. Faremos isso por conta do apelo geométrico que esses casos possuem, o que torna a interpretação do método como um todo mais próxima do leitor.

3.2 Caso particular: fórmula de Taylor de ordem 1

A fórmula de Taylor de ordem 1 se traduz na aproximação de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ por um polinômio de grau 1 em volta de um ponto $a \in I$. Segue da Definição 3.1.1 para $n = 1$ que

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Isto quer dizer que fórmula de Taylor de ordem 1 é uma aproximação local de uma função diferenciável por uma função afim. Note que $P(x)$ coincide com a equação da reta T tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Em virtude disto, a partir de agora denotaremos $P_1(x)$ por $T(x)$, isto é, faremos

$$T(x) := P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Ao aproximarmos o valor $f(x)$, para x numa vizinhança de a, pelo valor $T(x)$, cometemos um erro de aproximação que pode ser definido pela expressão $E(x) = f(x) - T(x)$. A Figura 3.3 ilustra este erro de aproximação.

Conforme $x \to a$, temos $T(x) \to f(a)$ e, consequentemente, o erro $E(x) \to 0$. Ora, como $E(x)$ é a diferença entre $f(x)$ e $T(x)$, podemos escrever $f(x)$ na forma

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + E(x),$$

para x numa vizinhança de a.

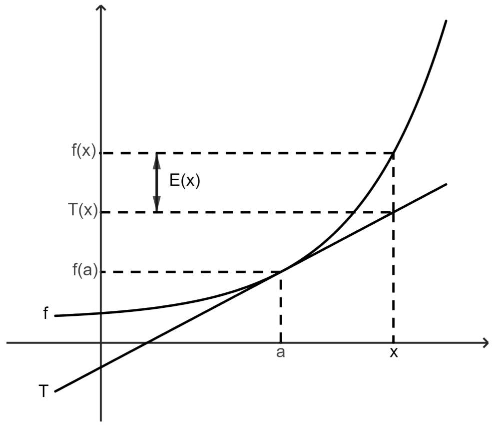

Figura 3.3: Erro da aproximação de f por T, para x numa vizinhança de a.
Fonte: Autoria própria (construção no Geogebra)

Note que, para $x \neq a$, temos

$$\frac{E(x)}{(x-a)} = \frac{f(x)-T(x)}{(x-a)} = \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)} = \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} - f'(a)$$

e segue que

$$\lim_{x\to a} \frac{E(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} - \lim_{x\to a} f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Disso concluímos que quando $x \to a$ o erro $E(x)$ tende a zero mais rapidamente que a diferença $(x-a)$. Isso já é bom para uma aproximação!

Pela Propriedade Fundamental do Polinômio de Taylor de Ordem 1, a função $T(x)$ é a única função afim cujo erro $E(x)$ tendo a zero mais rapidamente que $(x-a)$ e por isso ela é a função afim que melhor se aproxima f numa vizinhança de a.

Vejamos agora como esse caso de aproximação se expressa na Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

Teorema 3.2.1 (Fórmula de Taylor, de 1ª ordem, com resto de Lagrange) *Seja f uma função definida em $[a,b]$, derivável até a ordem 2 no intervalo (a,b) e tal que f'' é contínua em $[a,b]$. Então para todo $x \in [a,b]$ existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{T(x)} + \underbrace{\frac{f''(c)}{2}(x-a)^2}_{E(x)}.$$

Importante mencionar que o teorema acima nos fornece uma expressão para o erro $E(x)$ em termos da derivada de 2ª ordem de f num ponto $c \in (a,b)$.

Como versão imediata do Corolário 3.1.11, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.2.2 *Dada uma função f definida em $[a,b]$, derivável até a ordem 2 no intervalo (a,b) e tal que f'' é contínua neste domínio. Supondo que existe $M > 0$ tal que $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, então neste intervalo tem-se*

$$|f(x) - T(x)| \leq \frac{M}{2}|x - x_0|^2$$

para todo $x_0 \in [a,b]$, com $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Vejamos uma aplicação do corolário anterior no seguinte exemplo.

Exemplo 3.2.3 Usando uma calculadora temos $\ln 2,03 = 0,708035793$, onde estaremos usando sempre 9 casas decimais em todos os cálculos. Vamos buscar uma aproximação deste número usando o polinômio de Taylor $T(x)$ da função $f(x) = \ln x$ em torno de $a = 2$.

Neste caso, temos

$$T(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = 0,693147181 + \frac{x-2}{2}$$

e portanto

$$T(2,03) = 0,708147181.$$

Com isso, nosso erro **calculado** é

$$|f(2,03) - T(2,03)| = 0,000111388, \tag{3.4}$$

um erro da ordem de 10^{-4}.

Agora analisaremos o erro **estimado** que obteríamos do Corolário 3.2.2. Como

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow |f''(x)| \leq 1; x \in [1, +\infty),$$

o Corolário 3.2.2 nos dá

$$|f(x) - T(x)| \leq \frac{|x-2|^2}{2}; x \geq 1.$$

Assim, Para $x = 2,03$ temos

$$|f(2,03) - T(2,03)| \leq \frac{|2,03 - 2|^2}{2} = 0,00045$$

e o erro **calculado** em (3.4) de fato se mostrou menor que o erro **estimado** dado acima.

Vamos agora ao caso da Fórmula de Taylor de segunda ordem.

3.3 Caso particular: fórmula de Taylor de ordem 2

A fórmula de Taylor de ordem 2 se traduz na aproximação de uma função $f : I \to \mathbb{R}$, derivável até a segunda ordem, por um polinômio de grau 2 em volta de um ponto $a \in I$. Segue da Definição 3.1.1 para $n = 2$ que

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(x)}{2}(x-a)^2$$

e portanto P_2 é uma função quadrática em x.

Note que $P''(a) = f''(a)$ e se $f''(a) \neq 0$, com f'' contínua no ponto $x = a$, segue que f e P possuem gráficos com concavidades de mesmo sentido numa vizinhança de a. Assim é de se esperar que, para x suficientemente próximo de a, o polinômio de $2^{\underline{a}}$ ordem P_2 se aproxime melhor de f do que o polinômio de grau 1 do caso anterior, representado por $T(x)$.

De fato, isso é o que exatamente acontece, como é mostrado no exemplo a seguir.

Exemplo 3.3.1 Determinaremos os polinômios de Taylor, de $1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ ordem, de $f(x) = e^x$ na vizinhança do ponto $a = 0$. Indicaremos por P_1 e P_2, respectivamente, esses polinômios.

Como $e^x = f(x) = f'(x) = f''(x)$, segue que

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + x$$

e

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)(x-0)^2}{2} = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

O gráfico na Figura 3.4 abaixo esboça as aproximações de e^x pelos polinômios P_1 e P_2 em volta do ponto $a = 0$.

Repare que bem próximo de $a = 0$ não se percebe grande diferença nas aproximações, mas olhando por exemplo o ponto $x = 1$ percebe-se claramente que $P_2(1)$ está muito mais próximo de $f(1) = e$ que o valor $P_1(1)$.

Como também ocorre na primeira ordem (caso anterior), a aproximação de f pelo polinômio de Taylor de $2^{\underline{a}}$ ordem na vizinhança do ponto a acarreta um erro que pode ser representado pela expressão $E(x) = f(x) - P_2(x)$. Assim podemos escrever $f(x)$ na forma

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(x)}{2}(x-a)^2 + E(x).$$

A Fórmula de Taylor com resto de Lagrange para esta ordem assume a forma a seguir, onde o erro $E(x)$ aparece expresso em termos da derivada de $3^{\underline{a}}$ ordem de f num ponto $c \in (a, b)$.

Teorema 3.3.2 (Fórmula de Taylor, de $2^{\underline{a}}$ ordem, com resto de Lagrange) *Seja f uma função definida em $[a, b]$, derivável até a ordem 3 no intervalo (a, b) e tal que f'''*

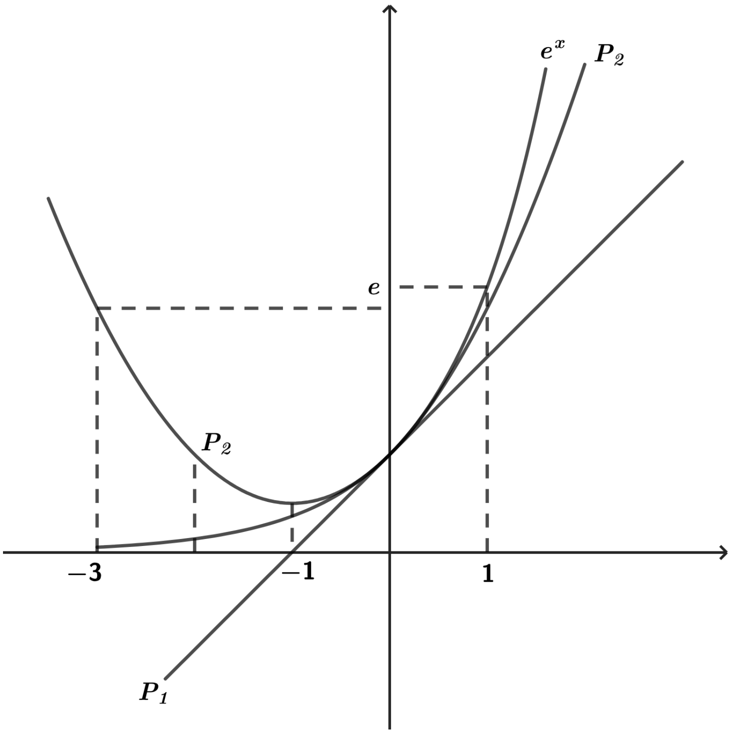

Figura 3.4: Comparação das aproximações de f por P_1 e P_2
Fonte: Autoria própria (construção no Geogebra)

é contínua neste domínio. Então para todo $x \in [a,b]$ existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{P_2(x)} + \underbrace{\frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3}_{E(x)}.$$

Como versão imediata do Corolário 3.1.11 para o caso de segunda ordem, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.3.3 *Seja f uma função definida em $[a,b]$, derivável até a ordem 3 no intervalo $[a,b]$ e tal que f''' é contínua neste domínio. Supondo que existe $M > 0$ tal que $|f'''(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, então*

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x - x_0|^3$$

para todo $x_0 \in [a,b]$, com $P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(a)}{2}(x-x_0)^2.$

Para efeito de comparação das aproximações de primeira e segunda ordens, vamos apresentar, como aplicação dos resultados acima, um exemplo contruído com a mesma função e o mesmo ponto que o do Exemplo 3.2.3 usado no caso anterior.

Exemplo 3.3.4 Já vimos que na calculadora temos $\ln 2,03 = 0,708035793$, onde estaremos usando sempre 9 casas decimais em todos os cálculos. Vamos buscar agora uma aproximação deste número usando o polinômio de Taylor $P_2(x)$ da função $f(x) = \ln x$ em torno de $a = 2$.

Aqui, sabendo que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, temos

$$P_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2$$
$$0,693147181 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{4}$$

e portanto

$$P_2(2,03) = 0,708372181.$$

Com isso, nosso erro **calculado** é

$$|f(2,03) - P_2(2,03)| = 0,000336388, \tag{3.5}$$

um erro ainda da ordem de 10^{-4}.

Observação 3.3.5 a) Chamamos a atenção do leitor para o fato de que a aproximação do exemplo acima gera um erro absoluto (ver (3.5)) superior ao erro obtido com o polinômio de Taylor de grau 1 no Exemplo 3.2.3 (ver (3.4)). Isso parece contraditório ao que afirmamos ao longo do texto sobre a aproximação de Taylor de grau 2 ser mais precisa. Entretanto o leitor deve ter em mente que as duas aproximações geram erros muito pequenos e os valores das aproximações são muito bons.
b) O comentário em a) nos diz que, na prática, as aplicações do método no "mundo real" são feitas tomando-se diversos polinômios em diversos vizinhanças e se avalia a média das aproximações obtidas. Normalmente são usados programas de computador no processo.
c) O fato apontado em a) se justifica pela diferença entre a, digamos, "geometria" mais compatível entre o polinômio de grau 1 e a função, na vizinhança do ponto dado.
d) É bom comentar, por último, que estamos usando funções simples em nossos exemplos por uma conveniência: os cálculos são fáceis e ilustram as técnicas de aproximação. No "mundo real" o método de fato mostra a sua utilidade em funções de natureza muito complexa.

Capítulo 4

Método de Newton

Neste Capítulo estudaremos o Método das Aproximações Sucessivas de Newton, também chamado apenas de Método de Newton, usado para obter aproximações de zeros de funções diferenciáveis. O capítulo é baseado nas referências [1, 6] e [8].

4.1 Preliminares

Para a apresentação do método de Newton é necessário estabelecermos alguns conceitos e resultados importantes que, em geral, não são trabalhados em um curso introdutório de Análise Real. Por esse motivo essa teoria adicional foi posta aqui em vez do Capítulo 2.

Primeiramente, definiremos quando uma função f é classificada como uma contração.

Definição 4.1.1 Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é uma contração quando satisfaz $|f(y) - f(x)| \leq k\,|y - x|$ para algum $k \in [0, 1)$ e para todos $x, y \in X$.

Claro que, por essa definição, segue que toda contração é uma função contínua (na verdade é mais que isso; é uniformemente contínua).

Um exemplo comum de contração é uma função $f : I \to \mathbb{R}$, derivável em um intervalo I, que satisfaz $|f'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in I$.

Definição 4.1.2 Chamamos de ponto fixo de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ a um ponto $x \in X$ tal que $x = f(x)$.

Agora que definimos o que é uma contração e um ponto fixo podemos apresentar o Teorema do Ponto Fixo para Contrações:

Teorema 4.1.3 (Ponto Fixo para Contrações) Supondo que $X \subset \mathbb{R}$ é fechado, então toda contração $f : X \to X$ possui um único ponto fixo. Equivalentemente, ao fixarmos qualquer $x_0 \in X$, a sequência

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$$

converge para um único ponto $a \in X$ que cumpre $f(a) = a$.

Demonstração. Vamos mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ é absolutamente convergente e o Teorema 2.2.1 garante sua convergência. De fato, de nossas hipóteses temos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}\right| = \left|\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\right| \leq k < 1$$

e segue da Proposição 2.2.2 que a série $s = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ é absolutamente convergente.

Agora repare que para todo $n \in \mathbb{N}$ a soma parcial s_n da série convergente $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ é dada por $s_n = x_n - x_0$. Assim podemos tomar

$$s = \lim s_n = \lim x_n - x_0,$$

provando que (x_n) é convergente, e então definimos

$$a := s - x_0 = \lim x_n.$$

Segue da definição de a acima que $a \in X$ pois X é fechado. Resta agora mostrar que a e é ponto fixo único de f.

Usando a igualdade $x_{n+1} = f(x_n)$ e a continuidade de f, obtemos

$$f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a$$

e portanto a é ponto fixo de f. Supondo agora que existe $b \in X$ com $f(b) = b$, temos

$$|b - a| = |f(b) - f(a)| \leq k\,|b - a|\,,$$

o que implica em $(1 - k)\,|b - a| = 0$. Como $k \in [0, 1)$, temos $1 - k > 0$ donde concluímos que $a = b$. ■

Vamos exibir um exemplo de uma contração que não tem ponto fixo. Isto mostra que ser contração apenas não implica em ter ponto fixo.

Exemplo 4.1.4 A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, é uma contração. De fato, ocorre que a derivada $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ cumpre $|f'(x)| < 1$ e, pelo Teorema 2.3.4 segue que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Entretando, f não possui ponto fixo pois $f(x) > x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Aqui o teorema não se aplica pelo fato de que o domínio de f não estar contido na imagem da função.

O exemplo nos mostra que para o uso do teorema é essencial verificar se a condição $f(X) \subset X$ é cumprida.

Agora estamos em condições de apresentar o Método de Newton, o que faremos na seção abaixo.

4.2 O método de Newton

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no intervalo I, com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

O Método das Aproximações Sucessivas de Newton consiste na obtenção de uma sequência, a partir de um valor de aproximação inicial, que converge para uma raiz da equação $f(x) = 0$, isto é, o método determina zeros de funções.

Vamos apresentar a definição formal do método e em seguida vamos interpretá-lo geometricamente com o auxílio de um gráfico ilustrativo. Aqui estaremos considerando $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Definição 4.2.1 A partir um valor inicial x_0, define-se a sequência de aproximações do Método de Newton pondo-se

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Vejamos que a definição acima, de fato, pode resolver o problema de determinar zeros de funções. Com efeito, suponha que a sequência (x_n) converge, digamos $x_n \to a$. Tomando o limite em (4.1) e usando a continuidade de f e de sua derivada, obtemos $a = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$, o que implica em $f(a) = 0$, já que por hipótese $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Infelizmente, nem sempre se consegue sequências (x_n) de aproximações de Newton convergentes. Veremos isso mais à frente.

Vamos agora deduzir o método de Newton a partir de sua ideia original. Em sua definição, Newton se vale do seguinte fato, já trabalhado no capítulo anterior: a reta tangente é uma aproximação da função. Dito isso, é de se esperar que a interseção da tangente com o eixo x aproxima o ponto de interseção da curva da função com esse eixo, ou seja, o ponto x em que $f(x) = 0$. Podemos observar isso no exemplo gráfico da Figura 4.1.

Agora deduziremos a expressão (4.1). As nossas aproximações x_{n+1} são interseções da reta tangente ao gráfico de f nos pontos $(x_n, f(x_n))$ com o eixo x, como fica bem claro na Figura 4.1. A reta tangente em $(x_n, f(x_n))$ é dada por $y_{n+1} - f(x_n) = m_T(x_{n+1} - x_n)$,

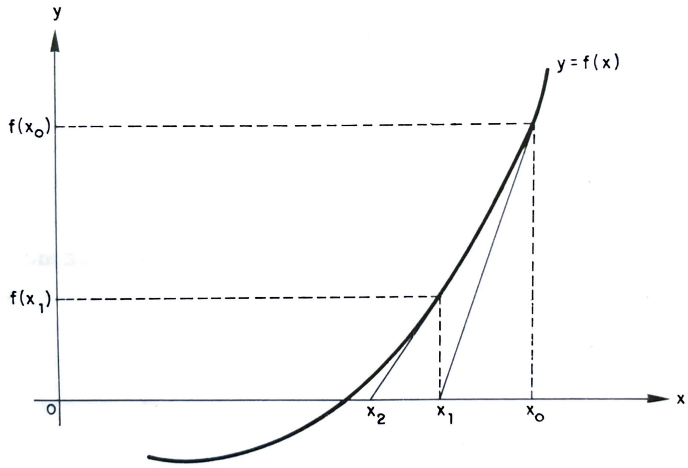

Figura 4.1: Aproximações sucessivas pelo método de Newton
Fonte: Elon [6]

onde m_T é o coeficiente angular da reta. Daí, usando nossos conhecimentos de derivada, temos

$$T(x_{n+1}) : y_{n+1} - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Para determinarmos a interseção de T com o eixo x, fazemos $y_{n+1} = 0$ e obtemos

$$-f(x_n) = f'(x_n)x_{n+1} - f'(x_n)x_n$$

$$x_{n+1} = \frac{f'(x_n)x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Percebe que aqui estamos usando a ideia geométrica para obter a definição do método.

A definição Analítica do método de Newton é resultado da observação de que as raízes da equação $f(x) = 0$ são os pontos fixos da função $N = N_f : I \to \mathbb{R}$, definida por

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

De fato, se a é ponto fixo de N, então

$$a = N(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

e teremos $f(a) = 0$, já que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Além disso, a definição analítica está atrelada à ideia de recorrência tendo em vista o Teorema do Ponto Fixo (Teorema 4.1.3).

Como já foi dito, nem sempre a sequencia (x_n) de aproximações de Newton vai convergir. Também não é possível utilizar o método em funções como $f(x) = e^x$ por exemplo, pois não possuem $f(x) = 0$ para nenhum x. Além disso, mesmo que a equação $f(x) = 0$ possua raiz real, a sequência (x_n) pode ser divergente, caso o x_0 seja tomado de forma inconveniente. Veremos isso no exemplo a seguir.

Exemplo 4.2.2 a) A função $f : \left[\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x - x^3$, tem uma raiz em $x = 0$. Neste caso, temos $f'(x) = 1 - 3x^2$ e as aproximações desta raiz pelo método de Newton, tomando $x_0 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, são

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\dfrac{\sqrt{5}}{5} - \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^3}{1 - 3\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -x_0$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{-\dfrac{\sqrt{5}}{5} - \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^3}{1 - 3\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} = x_0$$

e, como é fácil se perceber, as demais aproximações vão alternando entre x_0 e $-x_0$, o que leva a divergência da sequência. O resultado disso pode ser visto no gráfico da Figura 4.2.

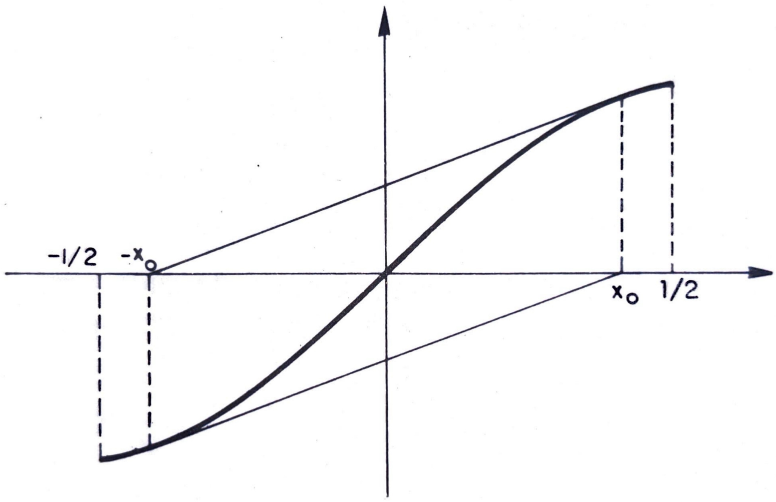

Figura 4.2: Aproximações da raiz, pelo método de Newton, da função $f(x) = x - x^3$, tomando $x_0 = \sqrt{5}/3$.

Fonte: Elon [6]

b) Neste mesmo exemplo, tomando $x_0 = \frac{1}{4}$ e fazendo os cálculos, temos

$$x_1 = -\frac{1}{26} = -0,038461538 \text{ e } x_2 = 0,0001142988,$$

ou seja, apenas duas iterações do método nos dá uma aproximação da raiz com erro da ordem de 10^{-4}. Na prática, x_0 deve pertencer ao intervalo $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ para o método convergir.

Vejamos agora mais um exemplo onde, desta vez, a sequência de aproximações converge.

Exemplo 4.2.3 A função $f : \left[0, \dfrac{5\pi}{7}\right] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{\sin(ex)}{3}$, tem uma raiz em $x = \frac{\pi}{e} = 1,15572735$, com 8 casas decimais. Neste caso, temos $f'(x) = \dfrac{e\cos(ex)}{3}$ e as aproximações desta raiz pelo método de Newton, tomando $x_0 = 3/2$, são

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sin\left(\dfrac{3e}{2}\right)/3}{e\cos\left(\dfrac{3e}{2}\right)/3} \cong 1,0006717914;$$

$$x_2 \cong 1,1656122041;\ x_3 \cong 1,1557249702;\ x_4 \cong 1,1557273498$$

e aqui já vemos que o método nos deu uma excelente aproximação da raiz. O gráfico que ilustra esse exemplo está apresentado na Figura 4.3.

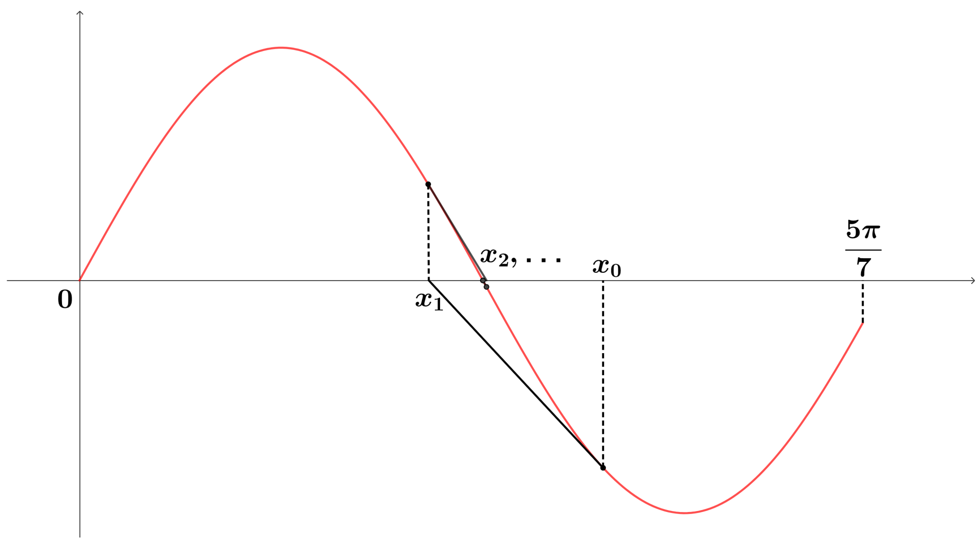

Figura 4.3: Aproximações da raiz, pelo método de Newton, da função $f(x) = \sin(ex)/3$, tomando $x_0 = 3/2$.

Fonte: Autoria própria (construção no Geogebra)

Sobre um critério de parada

O método de Newton gera uma sequência infinita que, em geral, não atinge a raiz da equação $f(x) = 0$. Sendo assim, se faz necessário determinar um ponto de parada no cálculo das aproximações. Costuma-se usar o seguinte critério: Dado um número $\varepsilon > 0$ (geralmente muito pequeno), o processo deve ser interrompido quando

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon,$$

e a aproximação x_{n+1} será tomada como a raiz aproximada.

Sobre a convergência do método

É bem verdade que a escolha da aproximação inicial x_0 é determinante para a convergência do método de Newton, como vimos no Exemplo 4.2.2, e o que se faz na prática (em geral) é obter essa aproximação por tentativas.

Entretanto sob certas condições é possível garantir a convergência do método para a solução. Para apresentarmos um dos mais importantes resultados nessa direção, vejamos antes um lema que, na verdade, generaliza um fato já usado no Exemplo 4.1.4.

Lema 4.2.4 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em I e tal que $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in I$. Então f é uma contração.*

Demonstração. De fato, como $|f'(x)| < 1$, pelo Teorema 2.3.4 segue que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todos $x, y \in I$. ■

Teorema 4.2.5 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Então para todo ponto $a \in \mathrm{Int}(I)$ com $f(a) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que aplicando-se o método de Newton a partir de um $x_0 \in J = [a - \delta, a + \delta]$ tem-se a convergência da sequência $x_{n+1} = N(x_n)$ para a.*

Demonstração. De $f(a) = 0$, temos $N'(a) = \dfrac{f(a)f''(a)}{f'(a)^2} = 0$ e por $N'(x)$ ser contínua, ao fixarmos $k \in (0, 1)$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que

$$J = [a - \delta, a + \delta] \subset I \text{ e } |N'(x)| \leq k < 1$$

para todo $x \in J$. Como f é de classe C^2, o lema anterior e o que acabamos de mostrar nos garante que N é uma contração.

Afirmamos que $N(x) \in J$ para todo $x \in J$. De fato,

$$x \in J \Rightarrow |N(x) - N(a)| \leq k\,|x - a| \leq |x - a| < \delta \Rightarrow N(x) \in J.$$

Assim, $N : J \to J$ é uma contração e pelo Teorema 4.1.3 a sequência dada por $x_{n+1} = N(x_n)$ converge para o ponto $a \in J$. ■

Vejamos um exemplo do que foi descrito acima com uma aplicação: o cálculo aproximado da n-ésima raiz de um número $c > 0$, ou seja, uma aproximação de $\sqrt[n]{c}$.

Exemplo 4.2.6 Dados $c > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tome a função $f : I = [\sqrt[n]{c}, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n - c$. Claro que isso transforma o cálculo de $\sqrt[n]{c}$ no problema equivalente de calcular o zero da função f.

Neste caso, a função $N : I \to \mathbb{R}$ assume a forma

$$N(x) = x - \frac{x^n - c}{nx^{n-1}} = \frac{(n-1)x + cx^{1-n}}{n}.$$

Perceba que, para todo $x > 0$, o valor $N(x)$ representa a média aritmética M_a dos n números $x, x, \ldots, x, cx^{1-n}$. De fato, temos

$$M_a = \frac{x + \cdots + x + cx^{1-n}}{n} = \frac{(n-1)x + cx^{1-n}}{n} = N(x).$$

Por outro lado, a média geométrica M_g desses números é

$$M_g = \sqrt[n]{x \cdot x \cdots x \cdot cx^{1-n}} = \sqrt[n]{c}$$

e como sabemos que $M_a \geq M_g$, concluímos que $x_{n+1} = N(x_n) \geq \sqrt[n]{c}$ para todo $x_n > 0$. Em particular, temos

$$x \in I \Rightarrow N(x) \in I, \text{ isto é, tem-se } N : I \to I.$$

Além disso,

$$N'(x) = \frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{c}{x^n}\right) \Rightarrow 0 \leq N'(x) \leq \frac{n-1}{n} < 1$$

para todo $x \in I$. Acabamos de mostrar que $N : I \to I$ é uma contração. Como I é fechado, o Teorema 4.1.3 nos garante que tomado arbitrariamente $x_0 \in I$, as aproximações sucessivas

$$x_{n+1} = N(x_n) = x_n - \frac{x_n^n - c}{nx_n^{n-1}}$$

convergem para o ponto fixo $\sqrt[n]{c}$ da função N.

Sobre a velocidade de convergência do método

Não é difícil imaginar que existem infinitas funções cujos pontos fixos são exatamente as raízes da equação $f(x) = 0$. A característica importante no método de Newton se apresenta no fato de que a função $N(x)$ oferece aproximações que convergem com rapidez (quando convergem) para a raiz a da equação. Isso ocorre, é claro, por conta da construção do método ser baseada na aproximação de f pela reta tangente.

Foge dos objetivos desse trabalho fazer um estudo mais aprofundado sobre a velocidade de convergência do método de Newton. Entretanto, para os leitores mais curiosos, recomendamos o Exemplo 9 em [6, Cap. 9, Seção 3] o qual mostra que, sob certas condições não tão restritivas, o método de Newton converge quadraticamente. Para clarear essa noção, no Exemplo 4.2.6 é possível provar que, para n suficientemente grande, tem-se

$$|x_{n+1} - \sqrt[n]{c}| \leq |x_n - \sqrt[n]{c}|^2,$$

ou seja, se $|x_n - \sqrt[n]{c}| < 1$ (x_n está próximo de $\sqrt[n]{c}$) então $|x_{n+1} - \sqrt[n]{c}|$ é muito menor (x_{n+1} estará quadraticamente bem mais próximo de $\sqrt[n]{c}$) e isso se repetirá em cada iteração.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. **Cálculo das funções de uma variável Vol. 2**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

[2] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história Vol. 2**. São Paulo: Livraria da Física, 2008.

[3] DIEDERICHSEN, Julieta. **Taylor, Brook (1685-1731)**. São Paulo: Unicamp, 2004. <https://www.fem.unicamp.br/ em313/paginas/person/taylor.htm>. Acesso em 19/08/2023.

[4] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2011.

[5] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo, Vol. 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[6] LIMA, Elon Lages. **Análise real Vol. 1**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[7] MACHADO, Inácio de Araujo; ALVES, Ronaldo Ribeiro. **Método de Newton**. 4.ed. p. 30-45. Revista Uniaraguaira. 2013. Disponível em: <https://sipe.uniaraguaia.edu.br/index.php/REVISTAUNIARAGUAIA/article/view/153>. Acesso em: 20/08/2023.

[8] STEWART, James. **Cálculo, Vol. 1**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

[9] VICTORAZZO, André Seixas. **Newton, Isaac (1642-1727)**. São Paulo: Unicamp, 2004. <http://www.fem.unicamp.br/ em313/paginas/person/newton.htm>. Acesso em 19/08/2023.