



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**COSMOLOGIA DILATÔNICA NO REGIME DE  
ACOPLAMENTO FRACO EM TEORIA DE  
GRAVIDADE MODIFICADA  $F(R, T)$**

CARLOS HENRIQUE ARAÚJO BONFIM BORGES

JOÃO PESSOA - PB

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**COSMOLOGIA DILATÔNICA NO REGIME DE  
ACOPLAMENTO FRACO EM TEORIA DE  
GRAVIDADE MODIFICADA  $F(R, T)$**

CARLOS HENRIQUE ARAÚJO BONFIM BORGES

Tese de Doutorado apresentada ao Programa  
de Pós-Graduação em Física da Universidade  
Federal da Paraíba como requisito parcial à  
obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

JOÃO PESSOA - PB

2024

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

B732c Borges, Carlos Henrique Araújo Bonfim.  
Cosmologia dilatônica no regime de acoplamento fraco  
em teoria de gravidade modificada  $F(R,T)$  / Carlos  
Henrique Araújo Bonfim Borges. - João Pessoa, 2024.  
118 f. : il.

Orientação: Francisco de Assis de Brito.  
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Gravidade  $F(R,T)$ . 2. Campo dilatônico. 3.  
Acoplamento fraco. 4. Ação efetiva. I. Brito, Francisco  
de Assis de. II. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
**Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física**

Ata da Sessão Pública da Defesa de tese de Doutorado do aluno Carlos Henrique Araújo Bonfim Borges, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos trinta e um dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e quatro, às 14h00, na sala virtual <https://meet.google.com/zju-avdz-edt.>, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Gravitação e Cosmologia, de **Carlos Henrique Araújo Bonfim Borges**. A Banca Examinadora foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Francisco de Assis de Brito (PPGF/UFPB), orientador e presidente da Banca Examinadora, Valdir Barbosa Bezerra (PPGF/UFPB), Dionísio Bazeia Filho (PPGF/UFPB), João Rafael Lucio dos Santos (UFCEG) e Tiago Homero Mariz do Nascimento (UFAL). Dando início aos trabalhos, o Prof. Francisco de Assis de Brito comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada “*Cosmologia Dilatônica no Regime de Acoplamento Fraco em Teoria de Gravidade Modificada  $F(R,T)$* ”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Widelene Menezes Tavares Santos, Assistente em Administração, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba.

Documento assinado digitalmente



FRANCISCO DE ASSIS DE BRITO  
Data: 02/08/2024 00:37:10-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Orientador - PPGF/UFPB

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra  
PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente



TIAGO HOMERO MARIZ DO NASCIMENTO  
Data: 01/08/2024 16:41:39-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento  
UFAL

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho  
PPGF/UFPB

Prof. Dr. João Rafael Lucio dos Santos  
UFCEG

*À toda minha família, amigos e, em especial,  
à minha esposa Evania Borges e nossa filha Isabela Maria.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por esta conquista, ao Prof. Francisco de Assis de Brito pela atenção, paciência e por compartilhar seus conhecimentos durante as orientações, ao Prof. Francisco Geraldo da Costa Filho pelas inúmeras horas de dedicação e colaboração na pesquisa, ao José André Vieira Campos pela enorme contribuição na construção dos gráficos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba pelas aulas ministradas.

Aos professores e alunos do Curso de Licenciatura Plena em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba pelo apoio.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba pela ajuda financeira disposta no Programa de Incentivo à Qualificação do Servidor.

Aos meus pais Clementino Gomes Bonfim (*in memoriam*) e Maria do Socorro Araújo Bonfim e toda minha família e, em especial, a minha esposa Evania Borges de Souza Araújo e nossa filha Isabela Maria Borges Araújo, meus mais preciosos presentes de Deus.

## Publicação

Brito, F.A.; Borges, C.H.A.B.; Campos, J.A.V.; Costa, F.G. **Weak Coupling Regime in Dilatonic  $f(R, T)$  Cosmology**. Universe (2024), 10, 134.

<https://doi.org/10.3390/universe10030134>.

## Resumo

A Relatividade Geral sempre se apresentou como uma teoria consistente com os dados observacionais. No entanto, para uma descrição unificada da inflação cósmica e energia escura, faz-se necessário admitir uma ação mais geral em detrimento à ação de Einstein-Hilbert. Nesta pesquisa, abordaremos uma proposta em teoria de gravidade modificada  $F(R, T)$  utilizando o dÍlaton como campo escalar e admitindo cenários cosmológicos relacionados à ação efetiva. Assim, faremos ajustes em parâmetros apropriados com o propósito de reproduzir cenários para o universo dominado pela energia escura, cujo modelo aborda a tensão  $H_0$  e o redshift de equipartição  $z_{eq}$  matéria-radiação. Tal proposta consiste na utilização de métodos numéricos para descrever os resultados e compará-los com dados observacionais recentes.

**Palavras-chave:** gravidade  $F(R, T)$ , campo dilatônico, acoplamento fraco, ação efetiva.

## Abstract

General Relativity has always been presented as a theory consistent with observational data. However, for a unified description of cosmic inflation and dark energy, it is necessary to admit a more general action to the detriment of the Einstein-Hilbert action. In this research, we will address a proposal in modified gravity theory  $F(R, T)$  using the dilaton as a scalar field and admitting cosmological scenarios related to the effective action. Thus, we will make adjustments in appropriate parameters in order to reproduce scenarios for the universe dominated by dark energy, whose model addresses the tension  $H_0$  and the matter-radiation equipartition redshift  $z_{eq}$ . This proposal consists of using numerical methods to describe the results and compare them with recent observational data.

**Keywords:** gravity  $F(R, T)$ , dilatonic field, weak coupling, effective action.

# Lista de Figuras

1.1	Comportamento do potencial em função de $\phi$ , $\tilde{V}(\phi)$ , dado pela equação (1.25) para $k_1 = k_2 = \beta = \gamma = 1$ , $\epsilon = 0, 1$ , $\phi_1 = -3$ , $m_V = 0, 1$ e $\phi_0 = -3, 112$ , correspondente a $g_s^2 = \exp(\phi_0) \simeq 0, 045$ . Fonte: M. Gasperini: arXiv:hep-th/0702166v2 (2007). . . . .	13
1.2	Comportamento do potencial em função de $\phi$ , $\tilde{V}(\phi)$ , dado pela equação (1.29) para $b_1 = 1$ , $c_1 = 10$ , $\beta_1 = 0, 1$ , $\beta_2 = 0, 2$ e $m_V = 1$ . Fonte: M. Gasperini: arXiv:hep-th/0702166v2 (2007). . . . .	16
1.3	Comportamento das curvas $\Omega_\phi$ (constante) pelas linhas em negrito e $\omega$ (constante) pelas linhas tracejadas referentes às equações (1.58)-(1.62). O parâmetro de densidade da energia escura $\Omega_\phi$ está compreendido entre os intervalos de 0, 4 a 1 e a equação de estado $\omega$ assume valores compreendidos de $-0, 4$ a $-0, 99$ . Fonte: M. Gasperini: Elements of string cosmology (Cambridge University Press, Cambridge 2007), in press. . . . .	23
1.4	Evolução tardia da densidade de energia cósmica para as componentes dilatônica $\rho_\phi$ , de radiação $\rho_r$ e matérias escura $\rho_d$ e bariônica $\rho_b$ , em escala logarítmica, como resultado empregando métodos numéricos às equações (1.36)-(1.43). Notemos que as curvas referentes a radiação e matéria bariônica, considerando tempos suficientemente tardios, demonstram seus respectivos desacoplamentos ao dÍlaton, preservando assim, a escala padrão comportamental $\rho_r \sim a^{-4}$ e $\rho_b \sim a^{-3}$ , ao contrário da matéria escura a qual está intimamente acoplada à evolução dilatônica. Fontes: M. Gasperini: arXiv:hep-th/0702166v2 (2007) e M. Gasperini: Elements of string cosmology (Cambridge University Press, Cambridge 2007), in press. . . . .	25

1.5	Redshift $z_{acc}$ no início da fase acelerada em função da equação de estado $\omega$ considerando modelos desacoplados (esquerda) de energia escura e acoplados (direita) de matéria escura para dados observacionais de supernovas tipo IA e estruturas de larga escala. Denotamos o Parâmetro de densidade para matéria escura como $\Omega_m$ . Fonte: M. Gasperini: arXiv:hep-th/0702166v2 (2007). . . . .	34
1.6	Evolução do parâmetros de densidade para matérias bariônica, multiplicada por dez, e escura (dílton) considerando acoplamentos local (curvas tracejadas) e não local (curvas sólidas). Fonte: L. Amendola, M. Gasperini, C. Ungarelli: arXiv:0711.5022 [gr-qc](2007). . . . .	37
1.7	Evolução da equação de estado efetiva total para acoplamentos local (curva tracejada) e não local (curva sólida). O regime acelerado é demarcado pela fronteira representada pela linha pontilhada horizontal a qual corresponde a $\omega_{eff} = -1/3$ . Fonte: L. Amendola, M. Gasperini, C. Ungarelli: arXiv:0711.5022 [gr-qc](2007). . . . .	38
2.1	Evolução de $F(R)/R^2$ em função de $R$ . Fonte: S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rept. 505:59-144,(2011), arXiv:1011.0544 [gr-qc]. . . . .	54
4.1	Comportamento do parâmetro de densidade $\Omega$ em função de $\chi$ com $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ fixo e assumindo $Q_0 = 2$ e $Q_0 = 20$ . . . . .	82
4.2	Comportamento do parâmetro de densidade $\Omega$ em função de $\chi$ assumindo $\alpha = 0$ e $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ com (a) $Q_0 = 2$ e (b) $Q_0 = 20$ fixos. . . . .	82
4.3	Comportamento do parâmetro de Hubble $H$ em função do redshift $z$ para diversos valores de $\alpha$ e mantendo $Q_0 = 2$ fixo. Neste caso, para um aumento de $\alpha$ temos um decrescimento do redshift $z$ do ponto mínimo de cada curva e um aumento dos valores do parâmetro de Hubble. . . . .	85
4.4	Comportamento do parâmetro de Hubble $H$ em função do redshift $z$ para diversos valores de $Q_0$ e mantendo (a) $\alpha = 0$ e (b) $\alpha = 5 \times 10^{-3} m_p^{-2}$ fixos. A variação de $H$ referente aos pontos mínimos permanece a mesma em ambos os gráficos. Portanto, $H$ se eleva com o aumento de $\alpha$ , e conseqüentemente, seus pontos mínimos assumem valores maiores, entretanto, diminuem os devidos valores de redshift $z$ . . . . .	85

4.5	Evolução de $\phi(\chi)$ em relação a $\chi$ fixando $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ e assumindo diversos valores para $Q_0$ . Notemos que o crescimento de $Q_0$ reflete num decaimento mais lento para $\phi(\chi)$ . . . . .	87
4.6	Evolução de $\phi(\chi)$ em relação a $\chi$ assumindo diversos valores para $\alpha$ e mantendo (a) $Q_0 = 2$ e (b) $Q_0 = 20$ fixos. Em (a) notemos que a variação de $\alpha$ apresenta uma mudança bastante pequena no comportamento de $\phi(\chi)$ o qual decai de forma degenerada. Em (b) o decaimento de $\phi(\chi)$ torna-se mais lento com o aumento de $Q_0$ . . . . .	87
4.7	Evolução de $Q(\phi)$ em relação a $\chi$ fixando $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ e assumindo diversos valores para $Q_0$ . Notemos que para $Q_0 = 2$ temos um decaimento bastante lento. Para as demais curvas o aumento de $Q_0$ resulta num decaimento mais acentuado. . . . .	88
4.8	Evolução de $Q(\phi)$ em relação a $\chi$ assumindo diversos valores para $\alpha$ e mantendo (a) $Q_0 = 2$ e (b) $Q_0 = 20$ fixos. Em (a) e (b) notemos que $Q(\phi)$ decai de forma degenerada independente do valor de $\alpha$ , no entanto, torna-se mais lento com o aumento de $Q_0$ . . . . .	88
4.9	Evolução das densidades de energia para diferentes componentes explorando cenários com $\alpha = 0$ e $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ e assumindo (a) $q_0 = 2$ e (b) $q_0 = 20$ fixos. Notemos que para $\rho_\phi$ temos um decaimento degenerado, isso considerando ambos os cenários para $\alpha$ , e não linear. Em relação aos decaimentos de $\rho_r$ , $\rho_b$ e $\rho_d$ , temos curvas lineares e degeneradas em $\alpha$ . . . . .	90

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Acoplamento dilatônico</b>	<b>5</b>
1.1 Acoplamento efetivo à matéria macroscópica . . . . .	6
1.2 DÍlaton e energia escura . . . . .	12
1.2.1 DÍlaton congelado no regime de acoplamento moderado . . . . .	13
1.2.2 Saturação das correções de laços e congelamento assintótico . . . . .	15
1.2.3 Interação matéria escura-dÍlaton não local . . . . .	26
1.2.4 Reação reversa de pressão . . . . .	29
1.2.5 Diferenças fenomenológicas entre o modelo dilatônico localmente acoplado com outros de energia escura . . . . .	32
1.2.6 Exemplo numérico da evolução do fundo para interações locais e não locais . . . . .	36
1.2.7 Comparação entre os diferentes cenários dilatônicos em relação ao problema da coincidência cósmica . . . . .	39
<b>2 Teoria de gravidade modificada</b>	<b>41</b>
2.1 Gravidade $F(R)$ . . . . .	42
2.1.1 Descrição do tensor escalar . . . . .	43
2.1.2 Instabilidade na matéria . . . . .	47
2.1.3 Gravidades modificadas viáveis . . . . .	49

2.1.4	Modelo $\frac{F(R)}{R^2} \rightarrow \frac{1}{R}$ . . . . .	52
2.1.5	Acoplamento não mínimo em gravidade $F(R)$ . . . . .	56
2.2	Gravidade $F(T)$ . . . . .	59
2.3	Gravidade $F(R, T)$ . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Regime de acoplamento dilatônico fraco em teoria de gravidade modificada <math>F(R, T)</math></b> . . . . .	<b>67</b>
3.1	Cosmologia em teoria de cordas . . . . .	69
3.2	Cosmologia dilatônica em gravidade modificada $F(R, T)$ . . . . .	70
3.3	Modelo $F(R, T) = R + \alpha T$ . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Método numérico</b> . . . . .	<b>80</b>
4.1	Resultados para os parâmetros de densidade $\Omega_r, \Omega_b, \Omega_d$ e $\Omega_\phi$ . . . . .	81
4.2	Resultados para o parâmetro de Hubble $H(z)$ . . . . .	84
4.3	Resultados para o campo dilatônico $\phi$ . . . . .	86
4.4	Resultados para $Q(\phi)$ . . . . .	88
4.5	Resultados para as densidades de energia $\rho_r, \rho_b, \rho_d$ e $\rho_\phi$ . . . . .	89
4.6	Análise dos resultados . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b> . . . . .	<b>95</b>
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>98</b>

# Introdução

Segundo dados observacionais o universo está se expandindo aceleradamente. Tal afirmação se deve aos estudos cosmológicos baseados em Supernovas Tipo IA [1, 2], Estrutura em Grande Escala [3, 4], Radiação Cósmica de Fundo [5, 6], Oscilações Acústicas de Bárions [7, 8], dentre outros. Vale salientar que estes estudos também demonstram que grande parte da matéria e energia presentes no universo assumem um caráter ainda não conhecido que compreende matéria e energia escuras, de modo que este último apresenta uma pressão efetiva negativa. Para um cenário cosmológico mais simples, a energia escura admite uma configuração de uma constante cosmológica  $\Lambda$ , por outro lado, surgem alguns problemas, como por exemplo, o ajuste fino para  $\Lambda$  [9, 10, 11] e a coincidência cósmica [12]. Um cenário consistente para solucionar tais problemas seria a introdução de um campo escalar cujo potencial decai assintoticamente para zero, chamado quintessência [13]. Neste caso, como uma restrição para um modelo de campo escalar referente a quintessência, este precisa ter um acoplamento mínimo ou não mínimo à gravidade [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25].

Além de representar um candidato à energia escura, o campo dilatônico trata-se de um componente essencial de todos os modelos de supercordas, logo, de cenários cosmológicos baseados na ação efetiva das cordas. Assim, o campo dilatônico pode controlar a dinâmica inflacionária tornando-se fundamental na geração dos espectros primordiais de flutuações quânticas amplificadas pela inflação. Vale frisar que o campo dilatônico também controla a intensidade das diversas forças de acoplamento e pode direcionar o

universo a uma fase de forte acoplamento. Portanto, o dÍlaton corresponde a base entre a distinção dos modelos de cordas inflacionários. O dÍlaton também controla a força efetiva de todos os acoplamentos de medição em modelos unificados contendo todas as interações fundamentais [26].

Em relação a um período após a inflação, o campo dilatônico tende a assumir um caráter estabilizado devido à presença de um potencial. Uma vez que o dÍlaton não está acoplado universalmente a distintos campos de matéria, então seu acoplamento à matéria comum pode ser assintoticamente reduzido [27, 28] ou forte [29].

A Relatividade Geral sempre apresentou resultados satisfatórios em relação aos dados observacionais, como por exemplo, a descoberta das ondas gravitacionais [30]. Contudo, para unificação da inflação cósmica e a energia escura uma possibilidade seria considerar uma ação mais geral em detrimento à ação de Einstein-Hilbert. Diante disto, uma alternativa seria a utilização de uma função  $F(R)$ , ou seja, uma função arbitrária do escalar de curvatura de Ricci [31]. Sendo assim, diversos trabalhos foram realizados baseados em gravidade modificada  $F(R)$  [32, 33, 34].

Por outro lado, uma possibilidade de extensão da Relatividade Geral seria a utilização da gravidade modificada  $F(R, T)$  onde este corresponde a uma função arbitrária do escalar de curvatura de Ricci  $R$  e do traço  $T$  (referente a uma componente temporal e três componentes espaciais) do tensor energia momento. Como um de seus estudos, podemos citar a fase inflacionária na qual dispomos de cenários abordados sob o ponto de vista da gravidade modificada  $F(R, T)$  [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41].

No primeiro capítulo, vamos abordar a carga dilatônica, detalhando sobre seu acoplamento efetivo à matéria macroscópica. Abordaremos também os tipos de interações entre o dÍlaton e a matéria escura, de modo que para  $q \geq 1$  temos fortes acoplamentos que estão associados a uma valor suficientemente grande de sua massa. Trataremos sobre o caso de corpos de teste macroscópicos, num contexto de teoria de cordas, apresentarem propriedades dependentes da composição das cargas dilatônicas, portanto, não devendo

ser descritos por um modelo de gravidade puramente Brans-Dicke. Ainda neste capítulo, detalharemos sobre a possibilidade do campo dilatônico corresponder a uma fonte de energia escura responsável pela aceleração cósmica. Com a finalidade da obtenção de um cenário realista, admitiremos uma expansão assintótica de Taylor em potências inversas da constante de acoplamento  $g_s^2 = \exp(\phi)$ . Também vamos confrontar os diferentes cenários dilatônicos em relação ao problema da coincidência cósmica.

No segundo capítulo, introduziremos alguns modelos de gravidade modificada, como por exemplo,  $F(R)$ . Faremos uma descrição do tensor escalar e abordaremos sobre a instabilidade da matéria. Também apresentaremos o caso de uma interação não mínima em gravidade  $F(R)$ , cujo contexto apresenta consistência com o modelo  $\Lambda$ CDM. Ainda neste capítulo, também trataremos da gravidade  $F(T)$  ressaltando que esta não apresenta uma simetria local de Lorentz. Outro exemplo de gravidade modificada que iremos exibir trata-se de  $F(R, T)$  demonstrando as várias formas que o tensor  $\Theta_{\mu\nu}$  assume para os diversos casos, como por exemplo, para o campo eletromagnético, ao campo escalar sem massa ou ao fluido perfeito.

No terceiro capítulo, introduziremos uma proposta em teoria de gravidade modificada  $F(R, T)$  num regime de acoplamento dilatônico fraco [42], ou seja, abordaremos um contexto de cordas no limite de baixas energias numa interação fraca entre o dÍlaton e a matéria escura no limite  $\phi \rightarrow -\infty$ . Assim, também assumiremos que a corda está minimamente acoplada a fontes de fluido perfeito. Admitiremos uma transformação conforme de forma a utilizar coordenadas no referencial de Einstein. No respectivo modelo proposto obteremos as equações de campo de Einstein referentes a cada componente do fluido perfeito e do dÍlaton.

No quarto capítulo, faremos uso do método numérico para demonstrar as diversas evoluções de cada componente do fluido perfeito e do dÍlaton em relação à  $\chi = \ln(a/a_i)$ , ou seja, uma parametrização do tempo em termos do logarÍtimo do fator de escala. Também exibiremos o comportamento de outras grandezas cosmológicas, algumas em  $\chi$  e outras em

redshift  $z$ . Para analisar cada cenário cosmológico identificaremos dois parâmetros livres, a saber  $\alpha$  e  $Q_0$  para investigar vários cenários cosmológicos. Por fim, confrontaremos tais modelos com dados observacionais recentes.

Adotaremos o sistema de unidades naturais  $16\pi G = c = 1$ .

# Capítulo 1

## Acoplamento dilatônico

A detecção dos vários tipos de ondas sempre foi alvo de estudo pela comunidade científica, podemos citar como exemplos, os casos que apresentam forças de acoplamento à matéria de ordem gravitacional cujas técnicas vão dos detectores de ondas gravitacionais massivas [43, 44, 45] aos interferômetros [46, 47]. Também podemos mencionar uma situação de colapso esfericamente simétrico de uma estrela de modo que neste processo astrofísico temos possíveis emissões de ondas escalares [44, 48]. Considerando acoplamentos fracos, temos técnicas nas quais utilizam antenas gravitacionais [49]. Ao assumir um acoplamento geodésico das massas de teste ao componente escalar das flutuações métricas, teremos uma interação escalar-tensorial gravitacional descrita por um modelo de gravidade Brans-Dicke [43, 44, 45, 46, 47]. Desta maneira, deparamos com a ausência de um acoplamento do campo escalar ao termo de matéria na ação.

Portanto, admitiremos massas macroscópicas na qual possui uma carga dilatônica escalar [50], assim, precisaremos de um acoplamento direto da carga do dítalon de modo que tenhamos uma contribuição adicional para equação de desvio da geodésica [51]. Neste contexto (de cordas), assumindo uma ação gravidade-dítalon na qual sua forma corresponde a uma ação efetiva Brans-Dicke, temos o que chamamos de referencial da corda.

## 1.1 Acoplamento efetivo à matéria macroscópica

Inicialmente, assumiremos o movimento de um corpo de teste descrito pelo Lagrangeano  $L_m$  acoplado ao termo caracterizado pelo parâmetro Brans-Dicke  $\omega$  [51]. Assim, a ação assume a forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} [-R + \omega(\nabla\phi)^2] + \int d^4x \sqrt{-g} L_m, \quad (1.1)$$

em que  $R$  é o escalar de curvatura de Ricci e  $\phi$  corresponde ao campo dilatônico.

Variando a equação acima em relação à métrica e ao campo dilatônico, teremos, respectivamente,

$$G_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - (\omega + 1) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \nabla^2 \phi + \left(\frac{\omega}{2} + 1\right) g_{\mu\nu} (\nabla\phi)^2 = \frac{1}{2} e^\phi T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

e

$$R + \omega(\nabla\phi)^2 - 2\omega\nabla^2\phi + e^\phi\sigma = 0, \quad (1.3)$$

sendo  $G_{\mu\nu}$  o tensor de Einstein,  $\nabla_\mu$  é a derivada covariante,  $T_{\mu\nu}$  representa o tensor energia momento e  $\sigma$  é a densidade de carga dilatônica, de modo que utilizaremos unidades naturais  $16\pi G = 1$ . Em relação ao tensor energia momento e a densidade de carga dilatônica, temos, respectivamente,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta\phi}. \quad (1.4)$$

Para  $\sigma \equiv 0$ , combinando as equações em (1.4) e fazendo uso das identidades de Bianchi e Riemann dadas por [51]

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0, \quad [\nabla^\alpha \nabla_\mu \phi, \nabla_\mu \nabla^\alpha \phi] \nabla_\alpha \phi = R_\mu{}^\nu \nabla_\nu \phi, \quad (1.5)$$

logo obtemos, independentemente de  $\omega$ , uma conservação covariante do tensor energia

momento, ou seja,  $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ . Portanto, trata-se de um movimento geodésico do corpo de teste [52].

Por outro lado, caso tenhamos  $\sigma \neq 0$  e considerando a ação efetiva gravidade dÍlaton de menor ordem no contexto de teoria das cordas, ou seja, com  $\omega = -1$ , conseqüentemente ao aplicar a derivada covariante para as equações (1.4), obtemos,

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} + \sigma \nabla_\mu \phi = 0. \quad (1.6)$$

Desta maneira, tendo em vista que tratando-se de modelo de teoria das cordas, o termo de matéria na ação possui uma carga dilatônica não nula.

Também podemos reescrever a equação (1.6) como

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}) + \sqrt{-g}\Gamma_{\alpha\nu}{}^\mu T^{\alpha\nu} + \sqrt{-g}\sigma\nabla^\mu\phi = 0, \quad (1.7)$$

e considerando que as cargas gravitacional e dilatônica não são nulas de modo que o movimento não é geodésico, podemos aplicar uma expansão de multipolos para os campos externos  $\Gamma$  e  $\nabla\phi$  a uma hipersuperfície [53], ou seja,

$$\Gamma_{\alpha\nu}{}^\mu(x') = \Gamma_{\alpha\nu}{}^\mu(x) + (x' - x)^\beta \partial_\beta \Gamma_{\alpha\nu}{}^\mu(x) + \dots, \quad (1.8)$$

$$\nabla^\mu\phi(x') = \nabla^\mu\phi(x) + (x' - x)^\beta \partial_\beta \nabla^\mu\phi(x) + \dots \quad (1.9)$$

Para a partícula pontual, desprezando os momentos internos do corpo de prova, limitando-os à ordem zero e integrando na hipersuperfície espacial a equação (1.7), obtemos

$$\frac{d}{dx^0} \int d^3x' \sqrt{-g}T^{\mu 0}(x') + \Gamma_{\alpha\nu}{}^\mu(x) \int d^3x' \sqrt{-g}T^{\alpha\nu}(x') + \nabla^\mu\phi(x) \int d^3(x')\sqrt{-g}\sigma(x') = 0, \quad (1.10)$$

onde as coordenadas  $x'$  variam no interior da seção tridimensional da hipersuperfície

espacial.

Admitindo um contexto de cordas, podemos representar o tensor energia momento para uma partícula de massa  $m$ , parametrizado em  $x^\mu(\tau)$ , e a densidade de carga do dÍlaton, respectivamente, por [54]

$$T^{\mu\nu}(x') = \frac{p^\mu p^\nu}{\sqrt{-g}p^0} \delta^{(3)} [x' - x(\tau)], \quad (1.11)$$

$$\sigma(x') = q \frac{m^2}{\sqrt{-g}p^0} \delta^{(3)} [x' - x(\tau)], \quad (1.12)$$

sendo  $p^\mu = mu^\mu = mdx^\mu/d\tau$  e  $q$  corresponde a carga do dÍlaton por unidade de massa gravitacional. Em outras palavras, trata-se da intensidade relativa das forças escalares em relação ao tensor cujo caráter é adimensional.

Integrando a equação (1.10) e multiplicando por  $p^0/m^2 = m^{-1}(dt/d\tau)$ , obtemos a equação de movimento generalizada

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\nu}{}^\mu u^\alpha u^\nu + q \nabla^\mu \phi = 0. \quad (1.13)$$

Cargas escalares  $q \geq 1$  remetem a fortes acoplamentos do dÍlaton os quais devem estar associados a um valor suficientemente grande de sua massa. Isso considerando a combinação da equação (1.13) com a equação de movimento do dÍlaton obtida da ação efetiva da corda. Entretanto, o alcance efetivo das forças na escala macroscópica deve ser bastante pequeno a fim de evitar divergências na fenomenologia gravitacional [50, 55]. Por outro lado, para  $q \ll 1$ , ou seja, para acoplamentos reduzidos temos um valor bastante pequeno associado a massa dilatônica.

Neste momento, com o propósito de se obter as correções do dÍlaton, induzidas pela carga  $q$ , assumiremos  $x'^\mu(\tau) = x^\mu(\tau) + \eta^\mu(\tau)$ , onde  $\eta^\mu(\tau)$  é um vetor de separação espacial. Em resumo, o acoplamento do dÍlaton a campos fundamentais construindo matéria macroscópica é descrito por uma ação efetiva a qual deve ter suas devidas correções de laos, isso mais precisamente no regime de acoplamento moderadamente forte, ou seja,  $g_s \sim 1$

[52]. Portanto, o acoplamento efetivo pode depender do nível de aproximação adotado, logo tem-se a necessidade do vetor de separação espacial  $\eta^\mu(\tau)$  corresponder a um valor bastante pequeno.

Neste caso, podemos definir um referencial da carga escalar, assim, expressando a interação efetiva da Lagrangeana em termos dos campos canônicos que diagonalizam a parte cinética da ação.

Campos fundamentais que constituem a matéria macroscópica, incluindo todos os laços na ação efetiva da corda, são em geral acoplados não minimamente e não universalmente ao dÍlaton [51]. Considerando o limite de acoplamento fraco do dÍlaton no referencial de Einstein, temos um reescalonamento canônico de campos e massas [50, 56] no qual o limite de acoplamento fraco depende de dois valores computáveis. Dessa maneira, podemos ter  $q \gtrsim 1$  para matéria hadrônica, enquanto  $q \sim 1$  para léptons [50, 57].

Portanto, num contexto de teoria das cordas, corpos de teste macroscópicos podem ter propriedades dependentes da composição das cargas dilatônicas e, dessa forma, não devem ser descritas por um modelo de gravidade puramente de Brans-Dicke. Em outras palavras, seja no referencial das cordas ou de Einstein as cargas efetivas não desaparecem.

Adotando um modelo de campo escalar  $\psi_i$ , cujas interações gravidade-dÍlaton, incluindo todas as possíveis correções de laços, descritas pela ação efetiva, em  $d + 1$  dimensões, temos [51, 52]

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[ -Z_R(\phi)R - Z_\phi(\phi)(\nabla\phi)^2 - V(\phi) + \frac{1}{2}Z_k^i(\phi)(\nabla\psi_i)^2 + Z_m^i(\phi)\psi_i^2 \right]. \quad (1.14)$$

Neste caso, chamamos  $Z$  de fator de forma do dÍlaton devido às correções de laços, ou seja,  $Z^i$  corresponde a função de acoplamento do dÍlaton ao campo  $\psi_i$ , isso no referencial da corda, sendo  $g_{\mu\nu}$  a métrica do modelo sigma conforme.

Também podemos recuperar a forma dos termos cinéticos da equação (1.14) através de campos redimensionados dados em termos de campos antigos e das funções de acoplamento  $Z(\phi)$  [49].

Desta forma, podemos reescrever a equação (1.14) como

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ -\tilde{R} + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}\tilde{\phi}_i)^2 - \tilde{V}(\tilde{\phi}) + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}\tilde{\psi}_i)^2 + L(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}_i) \right], \quad (1.15)$$

sendo  $\tilde{\nabla}$  a derivada covariante para a métrica de Einstein  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  e

$$L(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}_i) \equiv \frac{1}{2} Z_m^i [Z_k^i]^{-1} [Z_R]^{2/(1-d)} \tilde{\psi}_i^2 \quad (1.16)$$

é a Lagrangeana de interação canônica matéria-dílaton. Para respectiva expansão de baixa energia em torno de  $\tilde{\phi}$  que extrema o potencial do dílaton, ficamos com

$$L(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}_i) = \frac{1}{2} m_i^2 \tilde{\psi}_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{g}_i \tilde{\phi} \tilde{\psi}_i^2 + \dots \quad (1.17)$$

e para as massas efetivas e acoplamentos dilatônicos, temos, respectivamente,

$$m_i^2 = [\tilde{\mu}_i^2(\tilde{\phi})]_{\tilde{\phi}=0} = \left[ Z_m^i [Z_k^i]^{-1} [Z_R]^{2/(1-d)} \right]_{\tilde{\phi}=0}, \quad (1.18)$$

$$\tilde{g}_i = \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} \tilde{\mu}_i^2(\tilde{\phi}) \right]_{\tilde{\phi}=0} = m_i^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} \ln \tilde{\mu}_i^2(\tilde{\phi}) \right]_{\tilde{\phi}=0}. \quad (1.19)$$

Como no limite de acoplamento fraco temos  $Z_R = Z_\phi = e^{-\phi}$  [51], então, podemos escrever a carga dilatônica, em unidades de carga gravitacional  $\sqrt{16\pi G} m_i$ , logo,

$$\tilde{q}_i = \frac{\tilde{g}_i}{m_i^2} = 1 + \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \ln \left( \frac{Z_m^i}{Z_k^i} \right) \right]_{\phi=0}. \quad (1.20)$$

Para o referencial da corda, o campo de matéria canônico, dado por  $\hat{\psi}_i = [Z_k^i]^{1/2} \psi_i$  é expresso em relação à  $g_{\mu\nu}$ , ou seja, com respeito à métrica não reescalada, assim, podemos escrever

$$L(\phi, \hat{\psi}_i) = \frac{1}{2} \mu_i^2(\phi) \hat{\phi}_i^2, \quad \mu_i^2 = Z_m^i [Z_k^i]^{-1}. \quad (1.21)$$

Desta maneira, para o caso do acoplamento fraco, a carga dilatônica é dada por

$$q_i = \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \ln \left( \frac{Z_m^i}{Z_k^i} \right) \right]_{\phi=0} = \tilde{q}_i - 1. \quad (1.22)$$

Para um modelo puramente Brans-Dicke, ficaremos com  $\tilde{q}_i = 1$ . Por outro lado, para um contexto de teoria de cordas, teremos  $\tilde{q}_i \neq 1$  de modo que este dependerá dos fatores de forma  $Z_i$ , o qual é próprio para cada campo diferente [52].

Portanto, como os campos fundamentais que constituem a matéria macroscópica são acoplados não minimamente e não universalmente ao dÍlaton, temos  $\tilde{q}_i \sim 40$  para o confinamento gerado pelos componentes de massas hadrônicas [50, 55], enquanto,  $\tilde{q}_i \sim 1$  para massas leptônicas [57].

Admitindo um corpo de massa total  $M$ , composto por  $B$  bárions de massa  $m_b$  e carga dilatônica  $q_b$  e  $Z$  elétrons de massa  $m_e$  e carga dilatônica  $q_e$ , fazendo  $Z \sim B$  e assumindo que  $m_b \gg m_e$  e  $q_b \gg q_e$ , logo podemos escrever a carga total por unidade de massa como

$$q = \frac{\sum_i m_i q_i}{\sum_i m_i} \simeq \frac{B}{M} m_b q_b = \left( \frac{B}{\mu} \right) q_b, \quad (1.23)$$

sendo  $\mu = M/m_b$  a massa do corpo em termos da massa bariônica. Para  $B/\mu \sim 1$ , então,  $\tilde{q} \sim \tilde{q}_b \gg 1$ , ou seja, o acoplamento dos bárions controla a carga dilatônica total do corpo macroscópico em unidades gravitacionais. Notemos que a carga dilatônica dos corpos macroscópicos apresenta a mesma ordem de magnitude tanto no referencial de Einstein quanto da corda. Se  $B/\mu$  depende da estrutura interna do corpo, conseqüentemente, para o acoplamento efetivo teremos uma variação de  $q$  da ordem [52]

$$\frac{\Delta q}{q} = \Delta \left( \frac{B}{\mu} \right) \sim 10^{-3}, \quad (1.24)$$

isso para diferentes tipos de matéria comum. Tendo em vista que o componente dependente da composição da força gravitacional apresenta testes experimentais até a escala milimétrica [58, 59], logo, a força dilatônica deve ser menor que tal escala de distância,

ou seja, devemos ter a massa satisfazendo  $m \gtrsim 10^{-4}eV$ .

Por outro lado, adotando um segundo cenário no qual o acoplamento dilatônico aos campos de matéria é o mesmo para todos os campos, isso admitindo ordens superiores na expansão do laço de modo que se tenha um ajuste resultando em ( $q \ll 1$ ) [60, 61], logo, a massa dilatônica pode ser pequena, ou ainda, nula.

Sendo assim, podemos abordar a fenomenologia do campo dilatônico considerando massas dilatônicas fortemente acopladas à matéria macroscópica [49, 56, 62] ou ainda, fracamente e universalmente acopladas à matéria.

## 1.2 DÍLATON E ENERGIA ESCURA

Nesta seção, abordaremos a possibilidade do campo dilatônico corresponder a uma fonte de energia escura, responsável pela aceleração cósmica e confirmados de acordo com os dados observacionais de supernovas [1, 63].

Consideremos que o início da inflação seja descrito pelo crescimento do dÍlaton e do acoplamento  $g_s$  da corda, de modo que a época subsequente começa no regime de acoplamento forte, cuja ação deve conter todas as correções de laço [64]. Dessa maneira, podemos admitir a ação dada na equação (1.14).

Neste caso, podemos analisar dois cenários, sendo um no qual as correções de laço induzem uma constante de renormalização dos acoplamentos dilatônicos efetivos e o dÍlaton é estabilizado pelo potencial em um valor constante  $\phi = \phi_0$  que extrema  $V(\phi)$ , conseqüentemente, o universo seria caracterizado por uma configuração tardia sob o controle de um potencial  $H^2 \sim V(\phi_0)$ , onde  $H$  é o parâmetro de Hubble representado por  $H = \dot{a}/a$ . Quanto ao outro cenário, temos uma evolução cosmológica em virtude do comportamento assintótico dos fatores  $Z(\phi)$  uma vez que o dÍlaton não permanece preso no mínimo do potencial.

Ambos os cenários constituem uma época atual na qual prevalece uma mesma ordem de matéria e energia escuras, denominando problema da coincidência.

### 1.2.1 DÍLATON CONGELADO NO REGIME DE ACOPLAMENTO MODERADO

Analisaremos inicialmente o primeiro cenário no qual podemos implementar um potencial não perturbativo dado por  $V \sim \exp(-1/g_s^2)$  de forma que  $g_s^2 \rightarrow 0$  no limite de acoplamento fraco [64]. Neste caso, temos uma configuração em que  $g_s^2 \sim \alpha_{GUT} \sim (M_s/M_P)^2 \sim 0,1 - 0,01$  para um regime de acoplamento moderado de cordas. Assim, considerando o potencial dado em [65], no referencial de Einstein, logo

$$\tilde{V}(\phi) = m_V^2 \left[ e^{k_1(\phi-\phi_1)} + \beta e^{-k_2(\phi-\phi_1)} \right] e^{-\epsilon \exp[-\gamma(\phi-\phi_1)]}, \quad (1.25)$$

sendo,  $k_1, k_2, \beta, \epsilon$  e  $\gamma$  parâmetros adimensionais de ordem um. Durante a fase dominada pela radiação podemos ter soluções com  $\phi$  constante uma vez que ficamos com um valor mínimo em  $\phi_0 \simeq \phi_1$ , conforme a Figura(1.1).

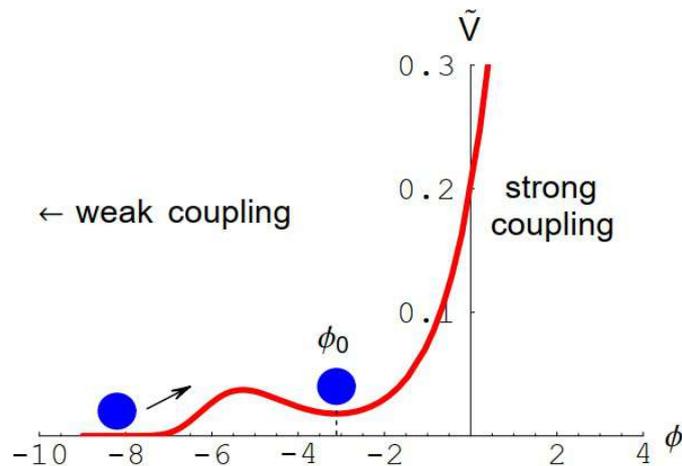


Figura 1.1: Comportamento do potencial em função de  $\phi$ ,  $\tilde{V}(\phi)$ , dado pela equação (1.25) para  $k_1 = k_2 = \beta = \gamma = 1$ ,  $\epsilon = 0,1$ ,  $\phi_1 = -3$ ,  $m_V = 0,1$  e  $\phi_0 = -3,112$ , correspondente a  $g_s^2 = \exp(\phi_0) \simeq 0,045$ . Fonte: M. Gasperini: arXiv:hep-th/0702166v2 (2007).

Considerando também valores adequados para  $m_V$  a energia potencial  $V(\phi_0)$  pode favorecer uma fase tardia de expansão acelerada, isso admitindo que a transição da época dominada pela matéria não desvie o dÍlaton do valor mínimo de  $\phi_0$  [66].

Assumiremos a equação de movimento de um campo dilatônico homogêneo  $\phi_t$  no referencial de Einstein, ou seja, com a métrica  $\tilde{g}$ , de modo que tenhamos uma configu-

ração de fluido perfeito com densidade de energia, pressão e carga dilatônica descritas, respectivamente, por  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{p}$  e  $\tilde{\sigma}$ , isso ao redimensionar as fontes de matéria. Dessa forma, para uma ação dada em (1.14), admitindo uma equação do dÍlaton generalizada, para um contexto cosmológico, temos [66]

$$A(\phi) \left( \ddot{\phi} + 3\tilde{H}\dot{\phi} \right) + B(\phi)\dot{\phi}^2 + \frac{\partial\tilde{V}}{\partial\phi} + \lambda_P^2 [C(\phi)(\tilde{\rho} - 3\tilde{p}) + \tilde{\sigma}] = 0, \quad (1.26)$$

sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  funções correspondentes ao referencial de Einstein, ou seja, às correções de laços redimensionadas. Adotando-se um campo minimamente acoplado, podemos considerar como exemplo,  $A = 1$  e  $B = C = \tilde{\sigma} = 0$ , logo ficaremos com

$$\ddot{\phi} + 3\tilde{H}\dot{\phi} + \frac{\partial\tilde{V}}{\partial\phi} = 0. \quad (1.27)$$

Para o dÍlaton num contexto de acoplamento de cordas, admitimos  $A = C = 1$  e  $B = 0$ , portanto,

$$\ddot{\phi} + 3\tilde{H}\dot{\phi} + \frac{\partial\tilde{V}}{\partial\phi} + \lambda_P^2 [(\tilde{\rho} - 3\tilde{p}) + \tilde{\sigma}] = 0. \quad (1.28)$$

Entretanto, para um caso mais estável, façamos  $\ddot{\phi} = \dot{\phi} = \tilde{\sigma} = \partial\tilde{V}/\partial\phi = 0$ , em outras palavras, na era da radiação teremos  $\tilde{\rho} = 3\tilde{p}$ .

Assumindo  $\tilde{p} = 0$  o qual remete a um período dominado pela matéria, o dÍlaton é removido da sua posição de equilíbrio devido à aceleração  $\ddot{\phi} = -A^{-1}\lambda_P^2 C\tilde{\rho}$  [66]. Por outro lado, a força  $\lambda_P^2 C(\phi_0)$  corrigida pelo laço correspondente ao acoplamento dilatônico à matéria escura e a inclinação do potencial dado em (1.25) que é controlada por  $m_V$ , ou seja,  $V(\phi_0) \sim m_V^2$ , restauram a configuração estável mínima  $\phi = \phi_0$  guiando o universo para uma fase final de aceleração.

Utilizando métodos numéricos, podemos demonstrar que a atual fenomenologia gravitacional permite força de acoplamento cujos valores estão consistentes com uma fase tardia dominada pelo potencial apenas para um período finito na faixa de valores de  $V(\phi_0)$ , isso dependendo do valor do acoplamento dilatônico para a época de igualdade

[64]. Fazendo  $|C_{eq}| \simeq 0, 1$ , considerando um pequeno deslocamento em  $t = t_{eq}$ , o dila-ton retorna para o mínimo fornecido  $10^{-7}H_{eq} \lesssim m_V \lesssim H_{eq}$  (que inclui o caso realista  $m_V \sim H_0 \sim 10^{-6}H_{eq}$ ) [64]. Como valores menores que o limite superior fenomenológico  $|C_{eq}|$  tendem a um maior intervalo de massa, então ainda temos  $V(\phi_0) \sim H_0^2$ , entretanto, neste caso, apenas um intervalo restrito de valores é permitido para  $V(\phi_0)$  em virtude da correlação dinâmica entre a amplitude deste e o acoplamento dilatônico à matéria.

### 1.2.2 Saturação das correções de laços e congelamento assintótico

Neste cenário, o dila-ton não é estabilizado pelo potencial, mas sim apresenta um de-caimento para  $+\infty$ , portanto, trata-se de um potencial não perturbativo no qual podemos citar um exemplo, no referencial de Einstein, disponível em [67] dado por

$$\tilde{V} = c_1^4 m_V^2 \left( \frac{e^\phi}{b_1 + c_1^2 e^\phi} \right)^2 \left[ e^{-\beta_1 \exp(-\phi)} - e^{-\beta_2 \exp(-\phi)} \right], \quad (1.29)$$

onde  $b_1, c_1, \beta_1$  e  $\beta_2$  são parâmetros adimensionais de modo que  $0 < \beta_1 < \beta_2$ . Para o limite de acoplamento fraco,  $\phi \rightarrow -\infty$ , tal potencial apresenta um decaimento representado por

$$\tilde{V} = m_V^2 (\beta_2 - \beta_1) e^{-\phi} + \mathcal{O}(e^{-2\phi}), \quad (1.30)$$

como no limite de acoplamento forte,  $\phi \rightarrow \infty$ , conforme representado na Figura(1.2).

O cenário acima pode ser considerado como um caso de quintessência acoplada [68, 69, 70] em que o universo tardio consiste de densidades de energia cinética e potencial.

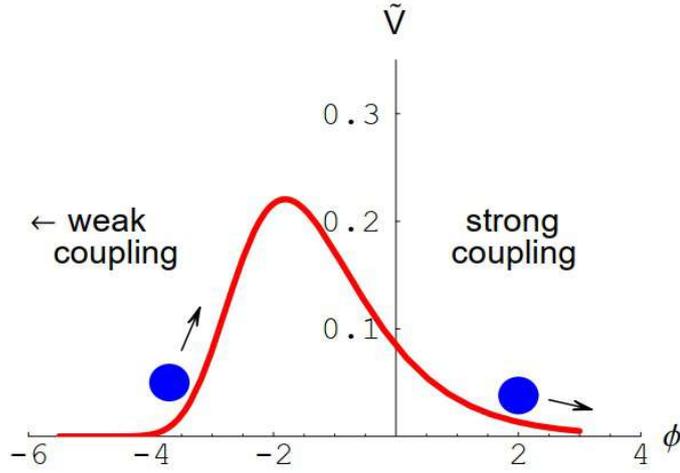


Figura 1.2: Comportamento do potencial em função de  $\phi$ ,  $\tilde{V}(\phi)$ , dado pela equação (1.29) para  $b_1 = 1$ ,  $c_1 = 10$ ,  $\beta_1 = 0, 1$ ,  $\beta_2 = 0, 2$  e  $m_V = 1$ . Fonte: M. Gasperini: arXiv:hep-th/0702166v2 (2007).

Entretanto, com o propósito de se obter um cenário realista, necessitamos preservar os valores efetivos atuais dos acoplamentos gravitacionais como constantes e suficientemente pequenos, mesmo para  $\phi \rightarrow +\infty$ . Dessa forma, admitiremos uma expansão assintótica de Taylor em potências inversas da constante de acoplamento  $g_s^2 = \exp(\phi)$ , pois tal saturação pode ser obtida em virtude do enorme número de bósons de calibre entrando nas correções de laços, assim, semelhante aos cenários de gravidade induzida cujos fatores de forma da equação (1.14) possuem um limite finito para  $\phi \rightarrow +\infty$  [67, 71]. Portanto, realizando esta expansão aos fatores de forma do laço, ao potencial e aos parâmetros adimensionais  $q_i$  que controlam a proporção da densidade de carga para a densidade de energia de uma fonte gravitacional homogênea, e considerando  $\phi \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_R(\phi) = c_1^2 + b_1 e^{-\phi} + \mathcal{O}(e^{-2\phi}), \\ Z_\phi(\phi) = -c_2^2 + b_2 e^{-\phi} + \mathcal{O}(e^{-2\phi}), \\ V(\phi) = V_0 e^{-\phi} + \mathcal{O}(e^{-2\phi}), \\ q_i(\phi) = q_{0i} + \mathcal{O}(e^{-2\phi}). \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Em virtude da origem no laço quântico e ao grande número de bósons de calibre

em grupos de GUT, os termos adimensionais  $c_1^2$  e  $c_2^2$  na expansão acima são da ordem  $N \sim 10^2$  de modo que  $c_1^2$  controla o valor assintótico da razão entre a corda e a escala de comprimento de Planck, ou seja,  $c_1^2 = (\lambda_s/\lambda_P)^2$ . Entretanto, os coeficientes  $b_1, b_2, \dots$  são de ordem 1. Em relação à escala de massa, cuja origem é não perturbativa, relaciona-se com a escala de cordas por

$$V_0 = M_s^4 e^{-4/\beta \alpha_{GUT}}, \quad (1.32)$$

onde  $\alpha_{GUT} \simeq 1/25$  corresponde ao valor assintótico no acoplamento GUT enquanto  $\beta$  representa algum coeficiente de laço dependente do modelo.

Por sua vez, para as cargas dilatônicas  $q_{0i}$ , seus respectivos valores assintóticos dependem do tipo de matéria admitida, ou seja, para uma pequena massa dilatônica, de forma que  $q_0 \simeq 0$ , devemos considerar uma radiação eletromagnética ou ainda matéria macroscópica comum, matéria bariônica por exemplo, isso com o propósito de evitar grandes desvios da fenomenologia gravitacional padrão. No entanto, para o caso da matéria escura, não temos nenhum limite fenomenológico que imponha um valor aproximadamente nulo para a carga assintótica  $q_{0i}$  [52, 66, 67].

Em outras palavras, a não observação de variações cosmológicas das constantes de acoplamento [72], assim como a precisão de testes de gravidade newtoniana [58], considerando um contexto de interações dilatônicas, nos remetem a admitir que a matéria bariônica e a radiação apresentam acoplamentos métricos para  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , logo para um limite  $\phi \rightarrow \infty$  teremos  $\sigma_b, \sigma_r \simeq 0$ .

Considerando o referencial de Einstein, adotaremos o redimensionamento

$$g_{\mu\nu} = c_1^2 Z_R^{-1} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (1.33)$$

assim, podemos reescrever a equação (1.14) como

$$S = \frac{1}{2\lambda_P^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\tilde{R} + \frac{1}{2} k^2(\phi) (\tilde{\nabla}\phi)^2 - \tilde{V}(\phi) \right] + S_m(\tilde{g}, \phi, \textit{matéria}), \quad (1.34)$$

onde definiremos

$$k^2(\phi) = 3 \left( \frac{\partial \ln Z_R}{\partial \phi} \right)^2 - 2 \frac{Z_\phi}{Z_R}, \quad \tilde{V}(\phi) = c_1^4 Z_R^{-2} V. \quad (1.35)$$

Assumiremos que o termo de matéria  $S_m$  dada na ação em (1.34) corresponde a um fluido perfeito com componentes de radiação  $\tilde{\rho}_r = 3\tilde{p}_r$  e matérias bariônica  $\tilde{\rho}_b$  e escura  $\tilde{\rho}_d$ . Faremos também  $2\lambda_P^2 = 1$ , assim, podemos escrever as equações de campo como

$$6H^2 = \rho_r + \rho_b + \rho_d + \rho_\phi, \quad (1.36)$$

$$4\dot{H} + 6H^2 = -\frac{\rho_r}{3} - p_\phi, \quad (1.37)$$

de modo que

$$\rho_\phi = \frac{k^2(\phi)}{2} \dot{\phi}^2 + V, \quad p_\phi = \frac{k^2(\phi)}{2} \dot{\phi}^2 - V. \quad (1.38)$$

Como  $\sigma_r = \sigma_b \simeq 0$ , logo podemos desprezar as densidades de energia das componentes de radiação e matéria bariônica, portanto, para equação de movimento do dÍlaton podemos escrever [67]

$$k^2 (\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) + kk'\dot{\phi}^2 + V' + \frac{1}{2} [\psi'(\rho_b + \rho_d) + \sigma_d] = 0, \quad (1.39)$$

sendo  $\psi = -\ln Z_R$ , cuja derivada em relação à  $\phi$  denotamos por  $\psi'$ . Para as equações de conservação de energia-momento combinaremos as equações (1.36),(1.37), (1.38) e (1.39) e podemos escrever a evolução temporal para cada componente, ou seja,

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \quad (1.40)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b - \frac{\psi'}{2} \dot{\phi} \rho_b = 0, \quad (1.41)$$

$$\dot{\rho}_d + 3H\rho_d - \frac{\psi'}{2} \dot{\phi} \rho_d - \frac{\sigma_d}{2} \dot{\phi} = 0, \quad (1.42)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) + \frac{1}{2} \dot{\phi} [\psi'(\rho_b + \rho_d) + \sigma_d] = 0. \quad (1.43)$$

Notemos que há dois tipos de interações entre as fontes de energia escura e dilatônica sendo uma gerada pela carga dilatônica  $\sigma_d$  e outra pelo acoplamento dilatônico padrão ao traço do tensor energia momento e associado aos termos  $\psi'$  das equações acima. Entretanto, a carga dilatônica tende a crescer quando  $\phi \rightarrow \infty$ , enquanto o parâmetro  $\psi'$  tende a ser negligenciado por

$$\psi' = -(\ln Z_R)' \rightarrow \frac{b_1 e^{-\phi}}{c_1^2}, \quad (1.44)$$

de forma que ambos os tipos de acoplamentos são renormalizados pelas correções de laço. Em resumo, no primeiro tipo temos um acoplamento induzido pela carga dilatônica que está ativo somente para a componente de matéria escura, assim, este acoplamento se eleva aproximando-se do valor assintótico constante  $q_0$ . E no segundo tipo, o acoplamento apresenta um decaimento exponencial de forma que seu controle ocorre pelo fator de forma do laço.

Uma análise das equações (1.40), (1.41), (1.42) e (1.43) sugere que os efeitos de carga dilatônica pode se tornar importante somente em cenários controlados pela matéria escura, assim, teremos uma cosmologia realista [67]. Em outras palavras, admitindo um cenário de quintessência acoplada, dispomos de duas fases sendo uma na qual temos uma evolução da componente de matéria escura de um regime inicial de fraco e crescente acoplamento dilatônico e a outra correspondendo a um regime final de forma que o acoplamento seja forte e assintoticamente constante.

Vale salientar que após a inflação, ou seja, na fase dominada pela radiação, não há expectativa de modificações da evolução cosmológica padrão, como consequência,  $\rho_r$  não está acoplado ao dÍlaton como podemos ver na equação (1.40) e tendo em vista que  $\rho_d$ ,  $\rho_b$  e  $V$  são inicialmente desprezíveis no modelo padrão, então, de acordo com a equação (1.43), temos  $\rho_\phi \sim a^{-6}$ , de maneira que mesmo inicialmente sendo  $\rho_\phi \sim \rho_r$ , a componente dilatônica também se torna desprezível [52]. Quando  $\rho_\phi$  atinge valores menores que  $\rho_d$  o acoplamento dilatônico  $\rho_d \dot{\phi} \psi'$  tende a amortecer a evolução de  $\phi$ , logo, a densidade de energia evolui com  $\rho_\phi \sim a^{-2}$  tendendo a aproximar de valores mais altos de  $\rho_r$  e  $\rho_d$  [52, 67].

Tal cenário é cessado na fase de igualdade, sendo que no início do período dominado pela componente de matéria escura, podemos admitir que, assim como  $\rho_b$ ,  $\rho_\phi$  é subdominante em relação a  $\rho_d$ , de modo que  $q(\phi)$  e  $V(\phi)$  são desprezíveis. Por outro lado, considerando um acoplamento fraco entre  $\rho_\phi$  e  $\rho_d$  devido à  $\psi'$ , temos um efeito de arrasto, cujo resultado corresponde a uma mesma evolução no tempo entre as densidades de matéria e energia escuras, ou seja,  $\rho_\phi \sim \rho_d$ , de maneira que  $\rho_d \sim a^{-3}$  [52].

Em relação ao fator de laço  $k(\phi)$ , descrito em (1.35), assumindo o limite  $\phi \rightarrow +\infty$ , ficamos com

$$k(\phi) \rightarrow k_0 = \sqrt{2} \frac{c_1}{c_2}, \quad (1.45)$$

e fazendo  $\hat{\phi} = k_0\phi$ , podemos reescrever as equações (1.39) e (1.42) como

$$\ddot{\hat{\phi}} + 3H\dot{\hat{\phi}} + \frac{\epsilon}{2}\rho_d = 0, \quad (1.46)$$

$$\dot{\rho}_d + 3H\rho_d - \frac{\epsilon}{2}\rho_d\dot{\hat{\phi}} = 0, \quad (1.47)$$

sendo  $\epsilon = \psi'/k_0 \simeq e^{-\phi}/(\sqrt{2}c_1c_2) \ll 1$  representando o parâmetro de acoplamento efetivo. Desprezando a dependência temporal de  $\epsilon$  em relação a  $H$  e  $\dot{\hat{\phi}}$ , para intervalos de tempo suficientemente pequenos, logo, das equações (1.36), (1.37) e (1.46), obtemos

$$\dot{\hat{\phi}} \simeq -2\epsilon H. \quad (1.48)$$

E da equação (1.47), temos

$$\rho_d \sim a^{-(3+\epsilon^2)} \sim H^2 \sim \dot{\hat{\phi}}^2 \sim \rho_\phi, \quad a \sim t^{2/(3+\epsilon^2)}. \quad (1.49)$$

Portanto, as densidades de matéria e energia(cinética) escuras do dÍlaton possuem a mesma evolução temporal, desviando-se do modelo padrão do universo dominado pela poeira, ou seja,  $\rho \sim a^{-3}$  e  $a \sim t^{2/3}$ , entretanto a expansão cosmológica permanece desacelerada de modo que  $\epsilon \ll 1$  [66].

Assumindo que no decorrer do tempo, a carga dilatônica aumenta atingindo a estabilidade em  $q_0$  e, por outro lado, o parâmetro de acoplamento  $\epsilon$  tende a zero, logo, temos um universo dominado pela energia escura no qual qualquer componente de matéria macroscópica são desacoplados do dílaton, salvo a matéria escura (admitindo um único componente exótico) que se acopla fortemente a uma carga  $q_0$ . Neste caso, dispomos de uma fase assintótica de congelamento em virtude do potencial dado em (1.31), assim, a razão  $\rho_d/\rho_\phi$  se mantém constante em um valor final controlada pela carga dilatônica  $q_0$  e pelos coeficientes de laço  $c_1$  e  $c_2$ . Com isso, obtemos uma configuração acelerada, em que  $q_0 > 1$  [52].

Considerando um fluido homogêneo, admitiremos  $\sigma_d = q(\phi)\rho_d$ , sendo  $q(\phi) \rightarrow q_0$  e  $V = V_0 \exp(-\phi)$  que representa o potencial em (1.31), logo, podemos reescrever as equações (1.42) e (1.43), respectivamente, como

$$\dot{\rho}_d + 3H\rho_d - \frac{q_0}{2k_0}\rho_d\dot{\hat{\phi}} = 0, \quad (1.50)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 6H\rho_\phi + \frac{q_0}{2k_0}\rho_d\dot{\hat{\phi}} = 0, \quad (1.51)$$

onde denotamos as densidades de energia cinética e potencial por

$$\rho_k = \frac{\dot{\hat{\phi}}^2}{2}, \quad \rho_V = V(\hat{\phi}) = V_0 e^{-\hat{\phi}/k_0}, \quad (1.52)$$

sendo  $\rho_\phi = \rho_k + \rho_V$ .

Para o caso em que  $\rho_d$ ,  $\rho_\phi$ ,  $V$  e  $H^2$  escalem no tempo de formas semelhantes, cujas frações críticas das densidades de matéria escura, energia cinética dilatônica e energia potencial, dadas respectivamente, por  $\Omega_d = \rho_d/6H^2$ ,  $\Omega_k = \rho_k/6H^2$  e  $\Omega_V = V/6H^2$ , são congeladas separadamente em valores constantes determinados somente por  $k_0$  e  $q_0$ , em outras palavras, são determinados pelos parâmetros  $c_1$ ,  $c_2$  e  $q_0$  da expansão assintótica (1.31). Dessa maneira, usando  $\rho_r = \rho_b = 0$  podemos resolver as equações (1.36), (1.37), (1.50) e (151). Utilizando soluções com matéria escura congelada em detrimento da energia

escura, podemos escrever as condições

$$\frac{\dot{\rho}_d}{\rho_d} = \frac{\dot{\rho}_\phi}{\rho_\phi}, \quad \frac{\dot{\rho}_d}{\rho_d} = \frac{\dot{\rho}_V}{\rho_V}, \quad (1.53)$$

de forma que das equações de campo de Einstein, temos

$$1 = \Omega_d + \Omega_\phi = \Omega_d + \Omega_k + \Omega_V, \quad (1.54)$$

assim da primeira e segunda condição, ficamos, respectivamente, com

$$\frac{\dot{\phi}}{H} = \frac{6k}{q_0}(\Omega_V - \Omega_k), \quad \frac{\dot{\phi}}{H} = \frac{6k}{q_0 + 2}, \quad (1.55)$$

cuja combinação resulta em

$$\Omega_V = \Omega_k + \frac{q_0}{q_0 + 2}. \quad (1.56)$$

E por sua vez, podemos expressar  $\dot{\phi}$  através de  $\Omega_k$ , assim, reescrevemos a primeira equação em (1.55) como

$$\Omega_k^{1/2} = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{12} H} = \frac{\sqrt{3} k}{q_0 + 2}. \quad (1.57)$$

Portanto, obtemos [52, 66, 67]

$$\Omega_k = \frac{3k_0^2}{(q_0 + 2)^2}, \quad (1.58)$$

$$\Omega_V = \frac{3k_0^2 + q_0(q_0 + 2)}{(q_0 + 2)^2}, \quad (1.59)$$

$$\Omega_\phi = \Omega_k + \Omega_V, \quad (1.60)$$

$$\Omega_d = 1 - \Omega_\phi. \quad (1.61)$$

Neste caso, temos um estado assintótico no qual o universo é dominado por uma composição de densidade de matéria escura e dÍlton (cinética e potencial). Com isso,

podemos expressar a equação de estado referente a energia escura, ou seja,

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\Omega_k - \Omega_V}{\Omega_k + \Omega_V} = -\frac{q_0(q_0 + 2)}{6k^2 + q_0(q_0 + 2)}, \quad (1.62)$$

portanto, assumindo  $q_0 > 1$ , podemos afirmar que o dÍlaton representa tal fluido de energia escura responsável pela aceleração cósmica.

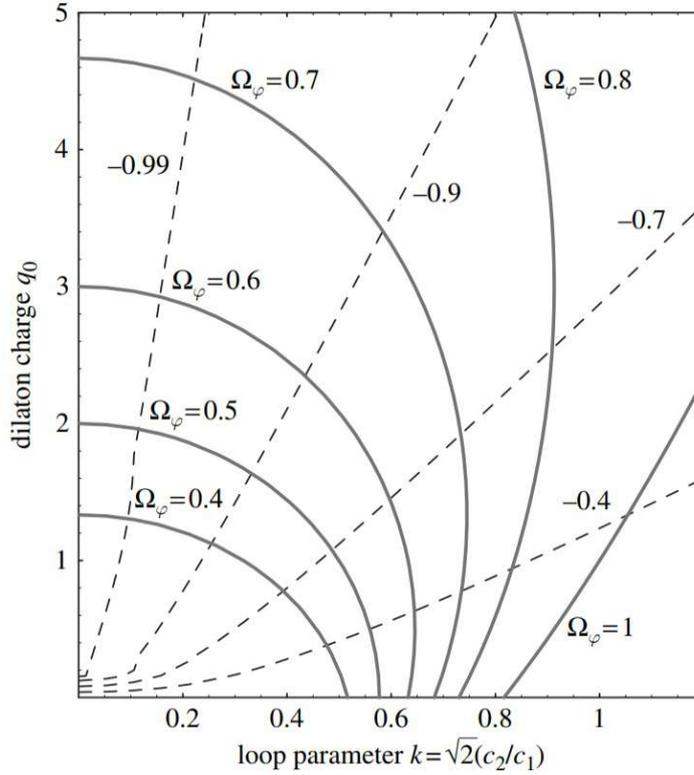


Figura 1.3: Comportamento das curvas  $\Omega_\phi$ (constante) pelas linhas em negrito e  $\omega$ (constante) pelas linhas tracejadas referentes às equações (1.58)-(1.62). O parâmetro de densidade da energia escura  $\Omega_\phi$  está compreendido entre os intervalos de 0,4 a 1 e a equação de estado  $\omega$  assume valores compreendidos de -0,4 a -0,99. Fonte: M. Gasperini: Elements of string cosmology (Cambridge University Press, Cambridge 2007), in press.

Admitindo uma faixa de parâmetros de valores realistas da densidade de energia escura e sua equação de estado, temos o comportamento de  $\Omega_\phi$  e  $\omega_\phi$  em função da carga dilatônica  $q_0$  e do parâmetro de laço  $k = \sqrt{2}c_2/c_1$ , conforme a Figura(1.3). Para um ajuste dos resultados obtidos de  $\Omega_\phi$  e  $\omega_\phi$ , precisaríamos considerar que o universo atual está dentro do regime de congelamento assintótico, somente assim poderíamos ter detalhes

diretos sobre os devidos parâmetros assintóticos da ação efetiva da corda.

Da equação de campo de Einstein (1.37) podemos determinar explicitamente a dependência temporal da solução assintótica, assim, reescrevendo como

$$1 + \frac{2\dot{H}}{3H^2} = \Omega_V - \Omega_k, \quad (1.63)$$

sendo

$$\frac{\ddot{a}}{aH^2} = 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2}(\Omega_V - \Omega_k) - \frac{1}{2} = \frac{q_0 - 1}{q_0 + 2}. \quad (1.64)$$

Com isso, temos uma expansão cósmica acelerada tanto com  $\ddot{a} > 0$  para  $q_0 > 1$  quanto com  $\dot{H} > 0$  para  $q_0 < -2$  no qual corresponde a uma aceleração positiva tipo superinflacionária descrevendo um fundo evoluindo para uma singularidade [73]. Por outro lado, devemos desconsiderar tal caso uma vez que teríamos  $\Omega_d < 0$ . Portanto, uma aceleração somente seria possível para o caso  $q_0 > 1$ , assim, integrando a equação (1.64), obtemos

$$a \sim t^{(q_0+2)/3}, \quad H \sim a^{-3/(q_0+2)} \quad (1.65)$$

sendo

$$\rho_d \sim \frac{\dot{\hat{\phi}}^2}{2} \sim \hat{V}_0 e^{-\hat{\phi}/k} \sim H^2 \sim a^{-6/(q_0+2)}. \quad (1.66)$$

Calculando a integral de  $\hat{\phi}$  para segunda equação em (1.55), então,

$$\phi = \phi_0 + 2k \ln t. \quad (1.67)$$

Assumindo  $Z_R$  e  $Z_\phi$  dados pela expansão assintótica em (1.31) truncado para primeira ordem em  $\exp(-\phi)$  de modo que  $b_1 = b_2 = 1$ ,  $c_1^2 = 100$  e  $c_2^2 = 30$  podemos demonstrar a evolução do fundo desde a era da radiação até o regime final de congelamento através de um cálculo numérico exato [66], isso utilizando as equações (1.36), (1.37), (1.38), (1.39), (1.40), (1.41), (1.42) e (1.43). Para isso, vamos utilizar o modelo de acoplamento dilatônico parametrizado pela carga dependente do tempo disponível em

[67], dado por

$$q(\phi) = q_0 \frac{e^{q_0 \phi}}{c^2 + e^{q_0 \phi}}, \quad (1.68)$$

sendo  $c^2 = 150$  e  $q_0 = 2,5$ . Tendo em vista que o potencial dilatônico possui caráter não perturbativo de modo que tenhamos uma supressão exponencial assintótica para o caso  $\phi \rightarrow \infty$ , logo para o referencial de Einstein, podemos utilizar a equação (1.29) com  $\beta_1 = 0,1$ ,  $\beta_2 = 0,2$  e  $c_1^2 m_V = 10^{-3} H_{eq}$ .

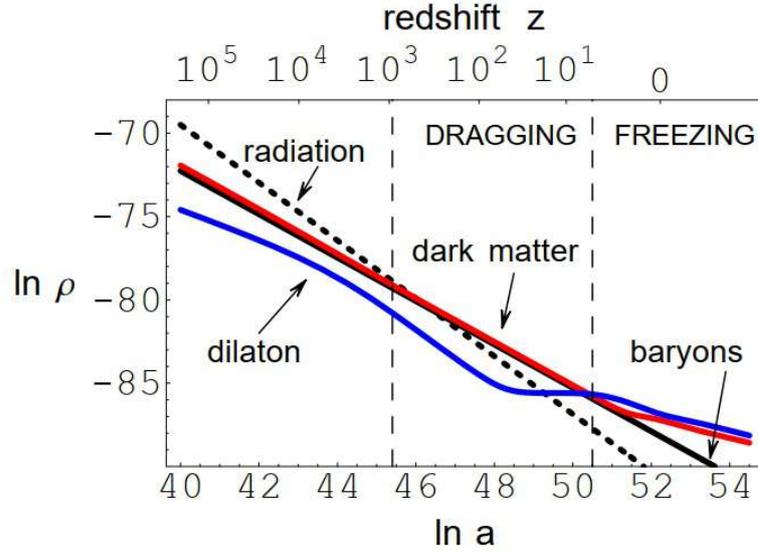


Figura 1.4: Evolução tardia da densidade de energia cósmica para as componentes dilatônica  $\rho_\phi$ , de radiação  $\rho_r$  e matérias escura  $\rho_d$  e bariônica  $\rho_b$ , em escala logarítmica, como resultado empregando métodos numéricos às equações (1.36)-(1.43). Notemos que as curvas referentes a radiação e matéria bariônica, considerando tempos suficientemente tardios, demonstram seus respectivos desacoplamentos ao dilaon, preservando assim, a escala padrão comportamental  $\rho_r \sim a^{-4}$  e  $\rho_b \sim a^{-3}$ , ao contrário da matéria escura a qual está intimamente acoplada à evolução dilatônica. Fontes: M. Gasperini: arXiv:hep-th/0702166v2 (2007) e M. Gasperini: Elements of string cosmology (Cambridge University Press, Cambridge 2007), in press.

Vale frisar que entre a amplitude do potencial e a escala fundamental da corda dada pela equação (1.32), um valor  $\beta$  menor que a função  $\beta$  da QCD é suficiente para mover  $m_V$  da escala QCD até a escala de Hubble [67]. Portanto,  $m_V \sim H_0$ , assim, podemos obter um cenário realista de maneira que o regime acelerado assintótico inicia em uma época fenomenologicamente aceitável [52, 67], isso considerando uma escala de massa do

potencial dilatônico não perturbativo no qual temos o ajuste fino admitindo uma cosmologia realista. Para as condições iniciais, adotaremos  $\rho_\phi(t_i) = \rho_r(t_i)$ ,  $\rho_d(t_i) = 10^{-20}\rho_r(t_i)$ ,  $\rho_b(t_i) = 7 \times 10^{-21}\rho_r(t_i)$ ,  $\phi(t_i) = -2$ , na escala inicial  $H(t_i) = 10^{40}H_{eq}$ .

Desta maneira, obtemos a evolução da escala  $\rho = \rho(a)$  para várias componentes, conforme a Figura (1.4). Portanto, podemos verificar que para tempos suficientemente tardios as densidades de energia de radiação e matéria bariônica encontram-se totalmente desacopladas ao dÍlaton, mantendo assim, um comportamento padrão de escala  $\rho_r \sim a^{-4}$  e  $\rho_b \sim a^{-3}$ . Por outro lado, a densidade de energia de matéria escura está bastante acoplada ao dÍlaton cuja proporção torna-se assintoticamente congelada em uma constante.

Para tal configuração assintótica, com auxílio dos resultados numéricos, podemos obter os parâmetros de densidade  $\Omega_\phi \simeq 0,73$  e  $\Omega_d \simeq 0,27$ , cuja equação de estado para o dÍlaton é dada por  $\omega_\phi \simeq -0,76$ .

### 1.2.3 Interação matéria escura-dÍlaton não local

Neste contexto, faremos uso de um modelo cuja interação entre matéria escura e dÍlaton ocorre de maneira não local nos termos de matéria na ação, ou seja, somente a contribuição cinética e o potencial possuem uma configuração de interação local. Portanto, adotaremos uma ação no referencial de Einstein para um campo escalar canonicamente normalizado, minimamente acoplado à gravidade e interagindo de forma não local com as fontes de matéria, assim,  $\Omega_d$  e  $\Omega_\phi$  podem permanecer congelados em valores assintóticos constantes, no entanto, teríamos uma evolução de fundo desacelerada independente do valor da carga dilatônica  $q_0$  e uma pressão contrabalança a ação aceleradora do potencial dilatônico conforme a matéria escura é reproduzida [66].

Introduziremos uma variável  $\xi(x)$  não local dada por [74]

$$\xi(x) \equiv \xi[\phi(x)] = -\ln \int \frac{d^{d+1}y}{\lambda_s^d} \left( \sqrt{-g} e^{-\phi} \sqrt{\epsilon(\nabla\phi)^2} \right)_y \delta(\phi_x - \phi_y), \quad (1.69)$$

de modo que

$$\epsilon = \begin{cases} +1, & (\nabla\phi)^2 > 0, \\ -1, & (\nabla\phi)^2 < 0. \end{cases} \quad (1.70)$$

Iniciemos admitindo que no termo de matéria na ação (1.14), o acoplamento dilatônico ocorre de forma não local através  $\xi(\phi)$ , entretanto, consideremos que o potencial dilatônico é local, ou seja,  $V = V(\phi)$ , portanto, a ação assume a forma

$$S = -\frac{1}{2\lambda_s^2} \int d^4x \sqrt{-g} [Z_R(\phi)R + Z_\phi(\phi)(\nabla\phi)^2 + V(\phi)] + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(e^\xi), \quad (1.71)$$

cuja variação com respeito a  $g$  e a  $\phi$ , podemos obter as equações de campo com uma configuração homogênea, isotrópica e com fundo espacialmente plano. Variando a ação (1.71) em relação a  $g$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)} &= \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\lambda_P^{d-1}} G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla\phi^2 \right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V \right] \\ &+ \int d^{d+1}y (\sqrt{-g} \mathcal{L}'_m)_y \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)} e^{-\xi(y)}, \end{aligned} \quad (1.72)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia momento definido como

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} = \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.73)$$

Denotaremos  $\mathcal{L}'_m$  e  $\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)} e^{-\xi(y)}$ , respectivamente, por [75]

$$\mathcal{L}'_m \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(e^{-\xi})} = -e^\xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}, \quad (1.74)$$

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)} e^{-\xi(y)} = -\frac{1}{2} \lambda_P^{-d} \left[ \left( g_{\mu\nu} - \frac{\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi}{(\nabla\phi)^2} \right) \sqrt{-g} e^{-\phi} \sqrt{\epsilon(\nabla\phi)^2} \right]_x \delta(\phi_y - \phi_x). \quad (1.75)$$

Utilizando  $\delta S/\delta g^{\mu\nu} = 0$ , ficamos com

$$G_{\mu\nu} = \lambda_P^{d-1} \left\{ T_{\mu\nu} + \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 + g_{\mu\nu} V \right. \\ \left. - \left[ g_{\mu\nu} - \frac{\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi}{(\nabla \phi)^2} \right] e^{-\phi} \sqrt{\epsilon (\nabla \phi)^2} \left[ \lambda_P^{-d} \int d^{d+1} y (\sqrt{-g} \mathcal{L}'_m)_y \delta(\phi_y - \phi_x) \right] \right\}. \quad (1.76)$$

De maneira análoga, variando a ação (1.71) em relação a  $\phi$ , obtemos

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = -\sqrt{-g} \left( \frac{\partial V}{\partial \phi} + \nabla^2 \phi \right)_x + \int d^{d+1} y (\sqrt{-g} \mathcal{L}'_m)_y \frac{\delta}{\delta \phi(x)} e^{-\xi(y)}. \quad (1.77)$$

Assim, fazendo  $\delta S/\delta \phi = 0$ , logo,

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} + \epsilon \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{\epsilon (\nabla \phi)^2}} \left( g_{\mu\nu} - \frac{\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi}{(\nabla \phi)^2} \right) \nabla^\mu \nabla^\nu \phi \left[ \lambda_P^{-d} \int d^{d+1} y (\sqrt{-g} \mathcal{L}'_m)_y \delta(\phi_y - \phi_x) \right] \\ + \mathcal{L}'_m \left[ e^{-\xi} - e^{-\phi} \lambda_P^{-d} \int d^{d+1} y \left( \sqrt{-g} \sqrt{\epsilon (\nabla \phi)^2} \right)_y \delta'(\phi_x - \phi_y) \right] = 0, \quad (1.78)$$

onde  $\delta'$  denota a derivada da função delta em relação ao seu argumento.

Desprezando novamente  $\rho_r$  e  $\rho_b$ , admitiremos uma representação no referencial de Einstein de forma que o acoplamento dilatônico à matéria escura ocorre em virtude da carga dilatônica  $q_0$ . Fazendo  $2\lambda_P^2 = 1$ , podemos expressar as equações de campo e as evoluções temporais das densidades energia de matéria escura e dilatônica, respectivamente, como [66]

$$6H^2 = \rho_d + \rho_\phi, \quad (1.79)$$

$$4\dot{H} + 6H^2 = -p_\phi - \frac{\sigma_d}{2}, \quad (1.80)$$

$$\dot{\rho}_d + 3H \left( \rho_d + \frac{\sigma_d}{2} \right) - \frac{\sigma_d}{2} \dot{\phi} = 0, \quad (1.81)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) + \frac{\sigma_d}{2}\dot{\phi} = 0, \quad (1.82)$$

tendo em vista que  $\rho_\phi$  e  $p_\phi$  permanecem com a forma expressa em (1.38). Notemos que para interações não locais temos a presença do termo de pressão efetivo  $\sigma_d/2$ . A dependência da lagrangeana de matéria em relação à  $\xi$  também induz correções adicionais para as equações de campo de Einstein, assim, introduzem o acoplamento direto entre a matéria escura e o dÍlaton expresso pelos termos  $\pm\sigma\dot{\phi}/2$ . Por outro lado, tal modificação na equação de movimento do dÍlaton também se aplica aos casos de acoplamento local à matéria, ou seja,  $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(\phi)$ , assim, tais termos não contribuem para uma diferença em relação aos modelos de quintessência acoplada [68, 76, 77, 78, 79, 80]. No entanto, a pressão efetiva está inserida apenas num contexto de acoplamento não local.

#### 1.2.4 Reação reversa de pressão

Nesta seção, utilizaremos as equações cosmológicas da seção anterior num contexto da teoria de cordas [67] centrado no dÍlaton e no princípio assintótico de correções de laço considerando um acoplamento com limite  $\phi \rightarrow +\infty$  [71]. Desta maneira, após a fase inflacionária, o universo evolui de modo que o campo de energia escura apresenta um rolamento ao longo de um potencial exponencial podendo-se acoplar às fontes de matéria escura. Podemos utilizar as equações (1.79), (1.80), (1.81) e (1.82) para descrever tal cenário, assim, caracterizando a fonte de fluido com a proporção da componente acoplada à matéria escura e adotando uma parametrização assintótica para  $V$  e  $\sigma$ .

Similarmente à seção anterior, adotaremos  $\sigma_d \rightarrow q_0\rho_d$  e  $V = V_0 \exp(-\phi)$ . Tendo em vista que  $q_0$  e  $V_0$  são parâmetros usuais para cenários de saturação assintótica. Escrevendo a densidade de energia dilatônica, novamente, como a soma das densidades de energia cinética e potencial, então,

$$\rho_\phi = \rho_k + \rho_V, \quad (1.83)$$

onde  $\rho_k = \dot{\phi}^2/2$  e  $\rho_V = V$ . Dessa forma, podemos escrever os parâmetros de densidade

como

$$\Omega_k = \frac{\rho_k}{3H^2}, \quad \Omega_V = \frac{\rho_V}{3H^2}, \quad \Omega_d = \frac{\rho_d}{3H^2}. \quad (1.84)$$

Neste caso, vamos representar as equações (1.79), (1.80), (1.81) e (1.82), respectivamente, por

$$1 = \Omega_d + \Omega_k + \Omega_V, \quad (1.85)$$

$$1 + \frac{2\dot{H}}{3H^2} = \Omega_V - \Omega_k - \frac{q_0}{2}\Omega_d, \quad (1.86)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 6H\rho_k = -\frac{q_0}{2}\rho_d\dot{\phi}, \quad (1.87)$$

$$\dot{\rho}_d + 3H\rho_d \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) = \frac{q_0}{2}\rho_d\dot{\phi} \quad (1.88)$$

Nosso propósito é encontrar soluções das equações (1.85), (1.86), (1.87) e (1.88), para isso adotaremos uma representação de congelamento com  $\rho_d$ ,  $\rho_k$ ,  $\rho_V$  e  $H^2$  escalando no tempo da mesma forma, isso mantendo fixa a razão  $\rho_d/\rho_\phi$  [67, 76]. Para isso vamos admitir novamente as condições (1.53)[66].

Utilizando a primeira condição em (1.53) e combinando as equações (1.85), (1.86), (1.87) e (1.88), obtemos

$$\frac{\dot{\phi}}{H} = \frac{6k}{q_0} \left[ \bar{\Omega}_V \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) - \bar{\Omega}_k \left(1 - \frac{q_0}{2}\right) \right], \quad (1.89)$$

onde os parâmetros de densidade com barra remetem a uma configuração não local, distinguindo-a do caso de congelamento.

Para a segunda condição em (1.53) e utilizando a definição de  $\rho_V$  em (1.52) juntamente com (1.81), ficamos com

$$\frac{\dot{\phi}}{H} = 3k_0, \quad (1.90)$$

que comparando com (1.83), temos

$$\bar{\Omega}_V = \bar{\Omega}_k \frac{2 - q_0}{2 + q_0} + \frac{q_0}{q_0 + 2}, \quad (1.91)$$

mas de  $\bar{\Omega}_k$  e de (1.84), podemos escrever

$$\bar{\Omega}_k = \frac{\dot{\phi}}{12H^2} = \frac{3}{4}k_0^2. \quad (1.92)$$

Substituindo (1.92) em (1.91), ficamos com

$$\bar{\Omega}_V = \frac{3k_0^2(2 - q_0) + 4q_0}{4(2 + q_0)}. \quad (1.93)$$

Assim, como na seção anterior, podemos obter os parâmetros de densidade,  $\bar{\Omega}_\phi$  e  $\bar{\Omega}_d$  referentes às interações não locais utilizando as equações (1.60) e (1.61) e, através de (1.62), a correspondente equação de estado  $\bar{\omega}$ .

Dividindo o parâmetro de aceleração  $\ddot{a}/aH^2$  por  $6H^2$ , de (1.86), temos

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2}(\bar{\Omega}_V - \bar{\Omega}_k) - \frac{3}{4}q_0\bar{\Omega}_d - \frac{3}{2}, \quad (1.94)$$

sendo

$$\frac{\ddot{a}}{aH^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{2}. \quad (1.95)$$

Para integração de  $\dot{H}$ , obtemos  $a \sim t^{2/3}$  e  $H^2 \sim \rho \sim a^{-3}$  representando o modelo padrão da cosmologia na era dominada pela matéria escura. Do cenário de uma interação não local com uma configuração de congelamento assintótica desacelerada temos  $\rho_\phi \sim \rho_d \sim a^{-3}$ , em outras palavras, a densidade de energia dilatônica apresenta comportamento semelhante ao de um fluido de poeira, embora não tenha uma pressão nula. Sendo assim, a equação de estado assume a forma [66]

$$\bar{\omega} = \frac{q_q}{2} \frac{3k_0^2 - 2}{3k_0^2 + q_0}, \quad (1.96)$$

que das equações (1.94) e (1.95), logo,

$$\bar{\Omega}_k - \bar{\Omega}_V + \frac{q_0}{2} \bar{\Omega}_d \equiv \frac{1}{6H^2} \left( p_\phi + \frac{\sigma_d}{2} \right) = 0, \quad (1.97)$$

portanto, comparando o resultado acima com (1.80), temos uma pressão total nula para a interação entre dÍlaton e matéria escura. Em resumo, para acoplamento não local, a devida pressão da matéria escura induz uma reação inversa que contrabalança a pressão dilatônica, restaurando assim, de forma assintótica, um aspecto padrão de matéria de poeira.

### 1.2.5 Diferenças fenomenológicas entre o modelo dilatônico localmente acoplado com outros de energia escura

Comparando as densidades de energias dilatônica e escura responsável pela aceleração cósmica, temos um modelo dilatônico de energia escura que se distingue aos modelos de quintessência [81, 82, 83, 84, 85, 86] no qual temos um campo escalar rolante desacoplado à matéria escura.

Podemos citar como pontos semelhantes aos modelos de quintessência acoplada [68] o problema da coincidência, assim, com as densidades de energia dilatônica e matéria escura apresentando uma mesma ordem, ou seja, caso tal problema não seja solucionado, no entanto é minimizado.

Também podemos mencionar a diluição dos bárions em relação a matéria escura em virtude ao acoplamento dilatônico deste, conforme a Figura (1.4). Tal cenário torna-se mais evidente em tempos tardios de modo que para fase acelerada temos uma diminuição da razão entre bárions e matéria escura dada por

$$\frac{\rho_b}{\rho_d} \sim a^{-3q_0/(2+q_0)}. \quad (1.98)$$

Isso poderia explicar o motivo da fração de bárions corresponder a valores bastante peque-

nos, ( $\sim 10^{-2}$ ) em unidades críticas.

Outra diferença consiste ao início da aceleração cósmica que por sua vez pode começar em épocas anteriores ao contrário dos modelos de quintessência desacoplada [87] em que a equação de estado assume um valor fixo.

Podemos representar tal cenário considerando um modelo acelerado no qual a fonte contém uma componente desacoplada  $\rho_u$  e pressão  $p_u = 0$  de modo que o comportamento de escala seja  $\rho_u \sim a^{-3}$ , assim, sendo a matéria bariônica e uma proporção de matéria escura não acoplada ao dÍlton. Para uma segunda fonte, assumiremos uma componente acoplada  $\rho_c$  com pressão  $p_c = \omega\rho_c$  e comportamento de escala dado por  $\rho_c \sim a^{-3(1+\omega)}$ , portanto, correspondendo ao dÍlton e uma proporção à matéria escura acoplada ao dÍlton. Dessa forma, podemos expressar as equações de campo de Einstein como

$$6H^2 = \rho_u + \rho_c, \quad (1.99)$$

$$4\dot{H} + 6H^2 = -p_c = -\omega\rho_c. \quad (1.100)$$

Mesmo que hoje tenhamos uma expansão cósmica acelerada, caso tivéssemos, em períodos remotos, um universo desacelerado dominado por  $\rho_u$ , então, a aceleração cessa na escala  $a_{acc}$  de forma que

$$\left(\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right)_{acc} = 1 + \left(\frac{\dot{H}}{H^2}\right)_{acc} = -\frac{1}{2}[\Omega_u - (1 + 3\omega)(\Omega_u - 1)]_{acc} = 0, \quad (1.101)$$

sendo  $\Omega_u = \rho_u/6H^2$  e  $\Omega_c = 1 - \Omega_u$ . Para um tempo presente, podemos adotar  $\Omega_u^0$  e  $\Omega_c^0$ , ou seja,

$$\Omega_u^0 \left(\frac{a_{acc}}{a_0}\right)^{-3} = (1 + 3\omega)(\Omega_u^0 - 1) \left(\frac{a_{acc}}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)}, \quad (1.102)$$

cujos início da aceleração corresponde a um redshift  $z_{acc}$  denotado por

$$z_{acc} \equiv \frac{a_0}{a_{acc}} - 1 = \left[ (1 + 3\omega) \left( \frac{\Omega_u^0 - 1}{\Omega_u^0} \right) \right]^{-1/3\omega} - 1. \quad (1.103)$$

Para um modelo de quintessência desacoplada com uma componente referindo-se a um fluido de matéria escura, assim,  $\Omega_u^0 = \Omega_d^0$ , podemos utilizar os dados observacionais de supernovas tipo IA e estruturas de larga escala [63], onde temos  $0,2 \leq \Omega_d^0 \leq 0,4$  e  $-1,2 \leq \omega \leq 0,8$ . Considerando a equação (1.90), temos  $0,4 \lesssim z_{acc} \lesssim 1$ , conforme a Figura (1.5)(esquerda).

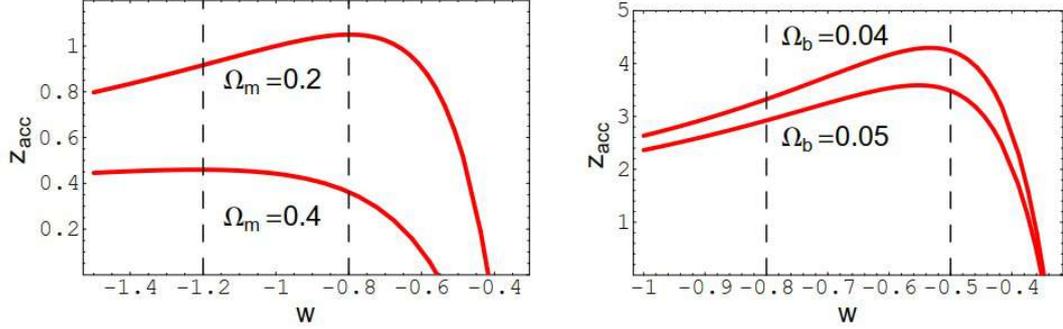


Figura 1.5: Redshift  $z_{acc}$  no início da fase acelerada em função da equação de estado  $\omega$  considerando modelos desacoplados (esquerda) de energia escura e acoplados (direita) de matéria escura para dados observacionais de supernovas tipo IA e estruturas de larga escala. Denotamos o Parâmetro de densidade para matéria escura como  $\Omega_m$ . Fonte: M. Gasperini: arXiv:hep-th/0702166v2 (2007).

Por outro lado, adotando um modelo de energia escura dilatônica, então, a componente de desacoplamento pode assumir uma componente bariônica  $\Omega_b$  a uma proporção da componente de matéria escura  $\Omega_d$ . Sendo  $\Omega_u^0 = \Omega_b^0$ , assim, para os resultados de supernovas tipo IA e estruturas de larga escala, ficamos com  $\Omega_b^0 \simeq 0,04 - 0,05$  de maneira que  $\omega \simeq -0,65 \pm 0,15$ , desta forma, para o redshift no início da aceleração podemos escrever  $z_{acc} \simeq 3 - 4$  [89], conforme a Figura (1.5)(direita). Portanto, o início da fase de aceleração é caracterizada pelo parâmetro de densidade bariônica  $\Omega_b$  que aumenta em relação a  $\Omega_d$  e  $\Omega_\phi$  conforme consideramos tempos mais remotos.

Os modelos de energia escura que são representados pelo campo dilatônico apresentam o início da aceleração cósmica em tempos muito anteriores em relação a outros modelos como demonstra os dados mais recentes de supernovas.

Também podemos comparar os resultados recentes em relação ao chamado contraste de densidade  $\sigma_8$ , o qual detalha o nível de flutuação da matéria escura em uma escala de

distância de  $8Mpc$ , com os dados observacionais de supernovas tipo IA. Como resultado para um tempo suficientemente pequeno numa fase dominada pelo dÍlaton temos  $z_{acc} = 3,5$  à  $z_{acc} \lesssim 5$  [87, 88]. Para valores  $z_{acc} > 1$  ainda temos uma compatibilidade com o recente alto redshift de supernovas [1] e com um cenário de congelamento assintótico cuja configuração cosmológica atual pode apresentar uma proporção de matéria escura desacoplada ao dÍlaton [87]. Também podemos citar as supernovas do tipo IA em SNLS [63] como exemplo de consistência de maneira que no início da aceleração tenhamos  $z_{acc} \simeq 3$  e superior [89].

Vale ressaltar, em relação ao potencial dilatônico não perturbativo, que para um cenário realista tal potencial deve ter uma amplitude que corresponda a uma massa dilatônica efetiva aproximadamente da mesma ordem da atual escala de Hubble, ou seja,  $m \sim m_V \sim 10^{-5} H_{eq} \sim H_0$ . Desta maneira, o acoplamento dilatônico através da carga  $q_0$  à matéria bariônica gera um termo de massa dado por [52]

$$m \sim q_0 10^{-6} eV \left( \frac{\Lambda}{1 TeV} \right) \left( \frac{M_f}{1 GeV} \right), \quad (1.104)$$

deste modo, para  $m \lesssim H_0$  precisamos de um ajuste fino do acoplamento dilatônico aos bárions, desta forma,

$$q_0 \lesssim 10^{-27} \left( \frac{1 TeV}{\Lambda} \right) \left( \frac{1 GeV}{M_f} \right). \quad (1.105)$$

Portanto, para o caso  $q_0 \sim 1$ , o acoplamento a uma componente de matéria escura não bariônica, mas sim fermiônica, de acordo com os cenários apresentados por acoplamentos de quintessência, indica um ajuste fino para valores suficientemente pequenos da massa fermiônica,  $M_f$ . Por outro lado, para um acoplamento dilatônico exponencial aos férmions [90] de modo que  $q_0 = 1/k$ , ou seja, para uma carga dilatônica associada ao potencial, temos uma configuração possível do ponto de vista fenomenológico [91].

## 1.2.6 Exemplo numérico da evolução do fundo para interações locais e não locais

Admitiremos uma evolução do fundo em direção aos regimes finais de congelamento, tanto para interações locais quanto não locais, ou seja, para as equações (1.58), (1.59), (1.60), (1.61), (1.92) e (1.93). Assim como em [67, 87, 89], utilizaremos uma carga dilatônica cuja parametrização é dada pela equação (1.68). Em razão da saturação assintótica das correções de laço, consideremos  $\sigma = q_0\rho_d$  uma vez que  $q \rightarrow q_0$  para o limite  $\phi \rightarrow +\infty$  de modo que o parâmetro adimensional  $c^2$  assuma um valor da ordem de 100 semelhante a ordem do número de bósons de calibre disponível em [71]. Também adotaremos  $\rho_b = p_b = 0$  para uma parcela de matéria desacoplada ao dÍlaton e juntamente com  $\rho = \rho_d + \rho_b$  e  $p = 0$ , logo as equações (1.79), (1.80), (1.81) e (1.82) assumem as formas [75]

$$6H^2 = 2\lambda_P^2(\rho_d + \rho_b + \rho_\phi), \quad (1.106)$$

$$4\dot{H} + 6H^2 = -2\lambda_P^2 \left( p_\phi + \frac{q}{2}\rho_d \right), \quad (1.107)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = -\frac{q}{2\mu}\rho_d\dot{\phi}, \quad (1.108)$$

$$\dot{\rho}_d + 3H\rho_d \left( 1 + \frac{q}{2} \right) = \frac{q}{2\mu}\rho_d\dot{\phi}, \quad (1.109)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0. \quad (1.110)$$

Assumiremos o potencial dado por  $V = V_0e^{-\phi}$  e um cenário realista no qual a parcela de  $\rho_b$  é desprezível mediante as equações (1.92) e (1.93).

Para as condições iniciais utilizaremos [75], assim,  $q_0 = 2$ ,  $c^2 = 150$ ,  $\mu = 0,55$  e  $V_0 = 3 \times 10^{-6}$ . Também adotaremos unidades de Planck  $2\lambda_P^2 = 1$ , em outras palavras,  $\lambda_P = (8\pi G)^{1/(d-1)}$  é o comprimento de Planck e  $\mu$  é um fator com as mesmas dimensões canônicas que o campo escalar  $\phi$ , ou seja,  $\mu = \left[ (d-1)\lambda_P^{d-1} \right]^{-1/2}$  [75], dessa maneira, a razão adimensional  $\phi/\mu$  corresponde ao  $\phi$  da teoria das cordas considerando o referencial

de Einstein. Como resultado da integração numérica, temos a evolução do parâmetro de densidade para as componentes de matérias bariônica e escura em relação a  $\log a$ , tanto para interação local quanto não local, conforme a Figura (1.6).

Os gráficos são obtidos a partir das equações (1.106),(1.107), (1.108), (1.109) e (1.100). Para o acoplamento não local temos a curva sólida fina representando o parâmetro de densidade para matéria bariônica  $\Omega_b = \lambda_p^2 \rho_b / 3H^2$ , multiplicado por dez para melhor visualização, enquanto a curva sólida de maior largura representa a evolução do parâmetro de densidade dilatônica  $\Omega_\phi = \Omega_k + \Omega_V$ , neste caso, está presente a pressão induzida  $q\rho_d/2$  nas equações cosmológicas. Por sua vez, para o acoplamento local temos as curvas tracejadas que representam as mesmas quantidades em relação ao acoplamento não local, neste caso, desprezando a pressão induzida.

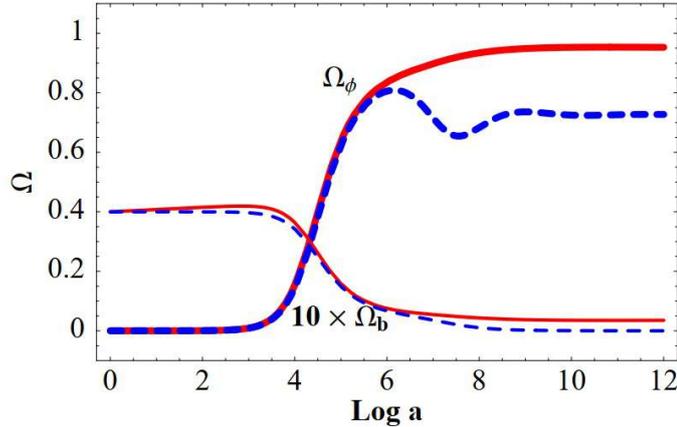


Figura 1.6: Evolução dos parâmetros de densidade para matérias bariônica, multiplicada por dez, e escura (dilatão) considerando acoplamentos local (curvas tracejadas) e não local (curvas sólidas). Fonte: L. Amendola, M. Gasperini, C. Ungarelli: arXiv:0711.5022 [gr-qc](2007).

Notemos que a matéria bariônica segue o modelo de escala padrão  $\rho_b \sim a^{-3}$  uma vez que está desacoplada ao dilatão.

Vale frisar que a interação local entre as componentes de campo dilatônico e matéria escura resulta num cenário em que  $\rho_d/\rho_\phi$  é congelada, ou seja, trata-se de um regime de estado assintótico no qual para determinados valores de  $q_0$  temos uma fase de expansão acelerada. Entretanto, ao considerar interações não locais, ainda teremos um regime de

congelamento assintoticamente, porém nos deparamos com um cenário desacelerado pela poeira [75]. Em outras palavras, assumindo um acoplamento não local, temos um aumento da respectiva pressão (não local) que compensa a ação aceleradora do potencial dilatônico de modo a anular a pressão cósmica efetiva total, como podemos ver na Figura (1.7) na qual temos a evolução da equação de estado efetiva para cenários com interações locais (curva tracejada) e não locais (curva sólida), assim, podemos escrever

$$\omega_{eff} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} = \frac{p_\phi + \frac{q\rho_d}{2}}{\rho_d + \rho_b + \rho_\phi}. \quad (1.111)$$

Desta forma, na Figura (1.7), as curvas tracejada e sólida correspondem aos acoplamentos local e não local, respectivamente, de modo que no primeiro não temos o termo  $q\rho_d/2$ , enquanto no segundo, todos os termos são inclusos. Vale lembrar que em ambos os cenários, a evolução cosmológica ocorre em razão da condição inicial  $\omega_{eff} = 0$ , correspondente a um estado cuja dominação seja feita pela componente de matéria escura com uma sub-dominância do dílaton [75].

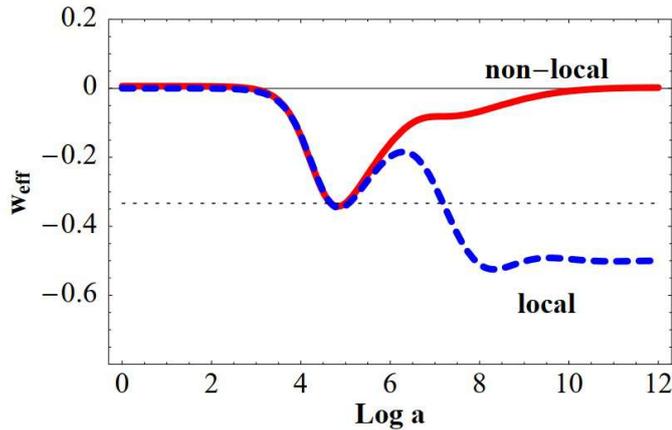


Figura 1.7: Evolução da equação de estado efetiva total para acoplamentos local (curva tracejada) e não local (curva sólida). O regime acelerado é demarcado pela fronteira representada pela linha pontilhada horizontal a qual corresponde a  $\omega_{eff} = -1/3$ . Fonte: L. Amendola, M. Gasperini, C. Ungarelli: arXiv:0711.5022 [gr-qc](2007).

Para o instante em que a componente dilatônica torna-se a principal dominante,

temos uma fase acelerada de modo que a pressão efetiva total tende a se tornar negativa, assim,  $\omega_{eff} < -1/3$ . Considerando o acoplamento local, o universo assume um regime de congelamento assintótico com  $\omega_{eff} = -q_0/(2+q_0)$ . Por outro lado, para o acoplamento não local, o universo assume um limite acelerado por um período bastante curto retrocedendo a um estado assintótico de evolução dominada pela poeira, assim,  $\omega_{eff} = 0$ . Portanto, o período e a fase para o regime de aceleração dependem dos parâmetros do tipo de interação com a componente dilatônica.

### 1.2.7 Comparação entre os diferentes cenários dilatônicos em relação ao problema da coincidência cósmica

Vimos que os cenários dilatônicos podem assumir caráter desacoplado e acoplado localmente e não localmente. Em relação ao problema da coincidência cósmica, podemos realizar algumas comparações entre os diferentes cenários [92].

Para o caso no qual o campo dilatônico está assintoticamente desacoplado da matéria escura [81], temos uma dominação da energia potencial de um campo escalar de modo que o regime final seja acelerado. Neste cenário, a densidade de matéria escura  $\rho_d$  assume um caráter subdominante uma vez que é diluída mais depressa que a densidade de energia dilatônica  $\rho_\phi$ . Portanto, a igualdade aproximada  $\rho_d \sim \rho_\phi$  torna-se uma coincidência da época atual [75].

Num cenário onde a energia dilatônica e a matéria escura estão, não apenas localmente, mas também fortemente acopladas [67, 68, 76], temos um valor congelado  $\rho_d/\rho_\phi$  que caracteriza um regime assintótico acelerado. Neste caso, a aproximação  $\rho_d \sim \rho_\phi$  juntamente com a aceleração positiva correspondem a um aumento infinito do tempo, dessa forma, não sendo uma coincidência da época atual.

No entanto, para um cenário em que a energia dilatônica e a matéria escura estão fortemente acopladas, porém, não localmente [75], também temos um valor congelado  $\rho_d/\rho_\phi$ , entretanto, o regime assintótico é desacelerado. Em outras palavras, a aproximação

$\rho_d \sim \rho_\phi$  não trata-se de uma coincidência da época atual, assim, a aceleração está centrada em uma pequena parcela de tempo finito de forma que a coincidência cósmica se mantenha.

Vale frisar que os cenários mencionados acima se distinguem em suas respectivas dinâmicas cosmológicas, tanto considerando o regime assintótico final quanto a era anterior ao início do regime acelerado.

## Capítulo 2

# Teoria de gravidade modificada

Segundo dados observacionais, o universo está se expandindo de forma acelerada [1], assim, o chamado universo tardio é conhecido também como a época da energia escura [93]. No entanto, para representar tal modelo a literatura apresenta propostas relacionadas a um campo escalar, conhecidas como modelos de quintessência [94, 95]. Por outro lado, também nos deparamos com modelos de gravidade modificada [96, 97]. Vale frisar que o universo também passou por uma época conhecida como inflação cósmica [98, 99, 100], na qual aumentou seu tamanho a uma taxa exponencial, cuja expansão ocorreu num intervalo de tempo relativamente pequeno. Portanto, são diversas as teorias que possuem o objetivo de descrever a dinâmica acelerada do universo.

Entretanto, para que um modelo seja considerado satisfatório, deve-se confrontá-lo com os dados observacionais, como por exemplo, do satélite Planck, caso contrário, o modelo inflacionário torna-se bastante limitado [101]. A gravidade modificada, por sua vez, busca um embasamento no qual o contexto de aceleração inicial e tardia esteja descrito por uma mesma teoria.

A teoria de gravidade modificada pode se apresentar numa unificação da inflação cósmica com energia escura [96] ou ainda, numa descrição unificada de ambas em um contexto de teoria de cordas [102]. Também podemos citar a teoria inserida num contexto de um componente dinâmico relacionando energia escura [103], mencionando também tal

abordagem para uma teoria de gravidade  $F(R)$  Horava-Lifshitz modificada [104].

Para uma descrição modificada da gravidade faz-se necessário uma versão que relacione a devida teoria com os dados observacionais mais recentes. Portanto, como alternativas para o estudo de teoria de gravidade modificada, temos as gravidades  $F(R)$  e  $F(T)$ . Adotaremos a geometria do espaço-tempo plano de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

## 2.1 Gravidade $F(R)$

A gravidade  $F(R)$  [105] consiste na substituição do escalar de curvatura de Ricci  $R$  por uma função  $F(R)$  na ação de Einstein-Hilbert, ou seja,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{F(R)}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m \right), \quad (2.1)$$

onde  $\mathcal{L}_m$  é a densidade lagrangeana de matéria. Desta forma, as equações de campo de Einstein para um fluido perfeito são dadas por

$$\rho_m = \frac{3H^2}{\kappa^2}, \quad p_m = -\frac{1}{\kappa^2} (3H^2 + 2\dot{H}), \quad (2.2)$$

sendo  $\rho_m$  e  $p_m$  a densidade de energia e pressão, respectivamente, relacionadas ao termo de matéria na ação, e  $\kappa^2 = 8\pi G$ , de modo que a equação de estado assume a forma

$$\omega = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}. \quad (2.3)$$

Variando a ação em (2.1) com respeito a  $g^{\mu\nu}$ , obtemos

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F(R) - R_{\mu\nu}F'(R) - g_{\mu\nu}\square F'(R) + \nabla_\mu \nabla_\nu F'(R) = -\frac{\kappa^2}{2}T_{\mu\nu}^{matéria}. \quad (2.4)$$

Admitindo um universo plano de FLRW, utilizaremos a assinatura  $(-, +, +, +)$ ,

assim, podemos expressar as equações de campo de Einstein como

$$0 = -\frac{F(R)}{2} + 3(H^2 + \dot{H})F'(R) - 18(4H^2\dot{H} + H\ddot{H})F''(R) + \kappa^2\rho_{matéria}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{F(R)}{2} - (\dot{H} + 3H^2)F'(R) + 6(8H^2\dot{H} + 4\dot{H}^2 + 6H\ddot{H} + \ddot{H})F''(R) \\ & + 36(4H\dot{H} + \ddot{H})^2F'''(R) + \kappa^2 p_{matéria}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde  $H = \dot{a}/a$  corresponde ao parâmetro de Hubble e  $R = 12H^2 + 6\dot{H}$ .

### 2.1.1 Descrição do tensor escalar

Admitindo um campo auxiliar  $A$  podemos reescrever a gravidade  $F(R)$  como um tensor escalar, assim, a ação (2.1) assume a forma [97]

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [F'(A)(R - A) + F(A)]. \quad (2.7)$$

Variando a ação acima em relação a  $A$ , obtemos  $A = R$  de maneira que podemos recuperar a equação (2.1) substituindo tal valor em (2.7).

Redimensionando a métrica através da transformação conforme

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^\sigma g_{\mu\nu}, \quad \sigma = -\ln F'(A), \quad (2.8)$$

logo, podemos obter a ação no referencial de Einstein dada por

$$S_E = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{3}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \sigma \partial_\sigma \sigma - V(\sigma) \right], \quad (2.9)$$

de modo que [97]

$$V(\sigma) = e^\sigma g(e^{-\sigma}) - e^{2\sigma} f[g(e^{-\sigma})] = \frac{A}{F'(A)} - \frac{F(A)}{F'(A)^2}. \quad (2.10)$$

Considerando a transformação conforme dada em (2.8), temos um acoplamento do campo escalar  $\sigma$  com a matéria. Para a massa de  $\sigma$ , ficamos com

$$m_\sigma^2 \equiv \frac{3}{2} \frac{d^2 V(\sigma)}{d\sigma^2} = \frac{3}{2} \left[ \frac{A}{F'(A)} - \frac{4F(A)}{(F'(A))^2} + \frac{1}{F''(A)} \right]. \quad (2.11)$$

Para uma massa de  $\sigma$  da mesma ordem que o parâmetro de Hubble, ou seja,  $m_\sigma \sim H \sim 10^{-33} eV$ , poderíamos ter uma grande correção na lei de Newton [97]. Para evitar tal problema consideremos um modelo  $F(R)$  realista disponível em [106] no qual o parâmetro  $m$  se comporta como uma constante cosmológica efetiva. Admitindo uma curvatura  $R$  de modo que  $R \gg m^2$ ,  $F(R)$  assume a forma [106]

$$F(R) = R - c_1 m^2 + \frac{c_2 m^{2n+2}}{R^n} + \mathcal{O}(R^{-2n}), \quad (2.12)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes adimensionais positivas. Desta maneira, podemos reescrever o potencial dado em (2.10) como

$$V(\sigma) \sim \frac{c_1 m^2}{A^2}, \quad (2.13)$$

em outras palavras, para uma curvatura suficientemente grande ( $R = A \rightarrow \infty$ ) temos um pequeno valor para o potencial. Supondo que

$$F(R) \sim F_0 R^\epsilon, \quad (2.14)$$

de forma que  $F_0$  e  $\epsilon$  são constantes positivas e assumindo  $\epsilon > 1$ , podemos reescrever o potencial como [97]

$$V(\sigma) \sim \frac{\epsilon - 1}{\epsilon^2 F_0 R^{\epsilon-2}}. \quad (2.15)$$

Para o intervalo  $1 < \epsilon < 2$ ,  $V(\sigma)$  diverge no limite  $R \rightarrow \infty$ . Se  $\epsilon = 2$ , temos  $V(\sigma) \rightarrow 1/F_0$  para  $R \rightarrow \infty$ . Assim, para um regime antigravitacional, devemos ter  $F'(R)$

negativo [96], portanto, precisamos assumir  $F'(R) > 0$ .

Fazendo

$$\frac{dV(\sigma)}{dA} = \frac{F''(A)}{F'(A)^3} (-AF'(A) + 2F(A)), \quad (2.16)$$

então, se

$$0 = -AF'(A) + 2F(A), \quad (2.17)$$

logo, o campo escalar  $\sigma$  pode ser uma constante uma vez que está no máximo ou mínimo local do potencial. Neste caso, podemos reescrever a equação (2.11) como

$$m_\sigma^2 = \frac{3}{2F'(A)} \left[ -A + \frac{F'(A)}{F''(A)} \right]. \quad (2.18)$$

Para a inexistência da antigravidade devemos ter  $m_\sigma^2 > 0$ , ou seja, o campo escalar se encontra no mínimo local se

$$-A + \frac{F'(A)}{F''(A)} > 0. \quad (2.19)$$

Caso contrário, para

$$-A + \frac{F'(A)}{F''(A)} < 0, \quad (2.20)$$

então, teríamos um valor negativo para a massa ao quadrado, portanto, o campo escalar está no máximo local do potencial. Reescrevendo a ação dada em (2.1) na forma de tensor escalar (2.9), temos

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \tilde{V}(\varphi) \right\}. \quad (2.21)$$

Por outro lado, também podemos expressar a ação (2.21) como uma ação da gravidade  $F(R)$  [107]. Comparando as equações (2.9) e (2.21), obtemos

$$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{\kappa} \sigma, \quad \tilde{V}(\varphi) = V \left( \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \varphi \right), \quad (2.22)$$

de modo que utilizando a transformação conforme  $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{\pm\kappa\varphi\sqrt{2/3}}g_{\mu\nu}$ , e suprimindo o termo cinético  $\varphi$ , ficamos com

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{e^{\pm\kappa\varphi\sqrt{2/3}}}{2\kappa^2} R - e^{\pm 2\kappa\varphi\sqrt{2/3}} \tilde{V}(\varphi) \right\}. \quad (2.23)$$

Desta forma, as equações (2.21) e (2.23) representam as ações nos referenciais de Einstein e Jordan, respectivamente.

Tendo em vista que  $\varphi$  corresponde a um campo auxiliar e não possui termo cinético, logo, podemos escrever

$$R = e^{\pm\kappa\varphi\sqrt{2/3}} \left[ 4\kappa^2 \tilde{V}(\varphi) \pm 2\kappa \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{V}'(\varphi) \right], \quad (2.24)$$

assim, suprimimos  $\varphi$  [97]. Com isso, podemos expressar a ação dada em (2.23) na forma de gravidade  $F(R)$ , ou seja,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{e^{\pm\kappa\varphi(R)\sqrt{2/3}}}{2\kappa^2} R - e^{\pm\kappa\varphi(R)\sqrt{2/3}} \tilde{V}(\varphi(R)) \right], \quad (2.25)$$

onde o termo entre colchetes corresponde à  $F(R)$ . Contudo, para a teoria do campo escalar, precisamos que o termo cinético na equação (2.21) seja negativo, ou seja, caso no qual o campo escalar é canônico. Entretanto, para um termo cinético sendo positivo na ação, então teríamos um escalar fantasma [108].

Vale ressaltar que mesmo considerando uma métrica reescalada, podemos ter um universo no referencial de Einstein que não corresponda a uma fase fantasma com uma equação de estado superior a  $-1$ , por outro lado, para o caso do universo no referencial de Jordan, este pode representar um cenário fantasma. Portanto, mesmo que tenhamos uma equivalência matemática em ambos os casos, também dispomos de algo não equivalente [109]. Em outras palavras, se um caso descreve um universo acelerado, para o outro temos uma desaceleração.

## 2.1.2 Instabilidade na matéria

Nesta seção, vamos abordar a instabilidade na matéria em gravidade modificada [110]. Essa instabilidade pode ocorrer quando a densidade de energia ou a curvatura são suficientemente grandes quando confrontados com os mesmos parâmetros médios do universo. Multiplicando  $g_{\mu\nu}$  pela equação (2.4), obtemos [97]

$$\square R + \frac{F^{(3)}(R)}{F^{(2)}(R)} \nabla_\rho R \nabla^\rho R + \frac{F'(R)R}{3F^{(2)}(R)} - \frac{2F(R)}{3F^{(2)}(R)} = \frac{\kappa^2}{6F^{(2)}(R)} T_{matéria}, \quad (2.26)$$

onde  $T_{matéria}$  representa o traço do tensor energia momento da matéria e  $d^n F(R)/dR^n \equiv F^{(n)}(R)$ . Admitiremos o caso da relatividade geral, assim, para o escalar de curvatura denotaremos  $R_b \sim (\kappa^2/2)\rho_{matéria} > 0$ . Fazendo  $R = R_b + R_p$  de modo que  $R_p \ll R_b$  sendo  $R_p$  correspondendo ao termo perturbado. Desta forma, da equação (2.26), ficamos com

$$\begin{aligned} 0 = & \square R_b + \frac{F^{(3)}(R_b)}{F^{(2)}(R_b)} \nabla_\rho R_b \nabla^\rho R_b + \frac{F'(R_b)R_b}{3F^{(2)}(R_b)} - \frac{2F(R_b)}{3F^{(2)}(R_b)} - \frac{R_b}{3F^{(2)}(R_b)} \\ & + \square R_p + 2\frac{F^{(3)}(R_b)}{F^{(2)}(R_b)} \nabla_\rho R_b \nabla^\rho R_p + U(R_b)R_p, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde denotamos [97]

$$\begin{aligned} U(R_b) \equiv & \left[ \frac{F^{(4)}(R_b)}{F^{(2)}(R_b)} - \frac{F^{(3)}(R_b)^2}{F^{(2)}(R_b)^2} \right] \nabla_\rho R_b \nabla^\rho R_b + \frac{R_b}{3} - \frac{F^{(1)}(R_b)F^{(3)}(R_b)R_b}{3F^{(2)}(R_b)^2} \\ & - \frac{F^{(1)}(R_b)}{3F^{(2)}(R_b)} + \frac{2F(R_b)F^{(3)}(R_b)}{3F^{(2)}(R_b)^2} - \frac{F^{(3)}(R_b)R_b}{3F^{(2)}(R_b)^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Podemos fazer  $\square R_p \rightarrow -\partial_t^2 R_p$ , pois as curvaturas não dependem das coordenadas espaciais. Desta maneira, a equação (2.27) assume a forma

$$0 = -\partial_t^2 R_p + U(R_b)R_p + constante. \quad (2.29)$$

Introduzindo o parâmetro  $\mu$  com ordem da idade inversa do universo [93], temos

$$\mu^{-1} \sim 10^{18} \text{seg} \sim (10^{-33} \text{eV})^{-1}, \quad (2.30)$$

então,

$$U(R_b) = -R_b + \frac{R_b^3}{6\mu^4} \sim \frac{R_0^3}{\mu^4} \sim (10^{-26} \text{seg})^{-2} \left( \frac{\rho_{\text{matéria}}}{g \text{cm}^{-3}} \right)^3, \quad (2.31)$$

$$R_b \sim (10^3 \text{seg})^{-2} \left( \frac{\rho_{\text{matéria}}}{g \text{cm}^{-3}} \right). \quad (2.32)$$

Portanto, temos um modelo instável que decai em  $10^{-26}$  segundos supondo um objeto do tamanho do planeta. Neste caso, o termo  $R_b^3/6\mu^4$  torna-se dominante, gerando assim uma forte instabilidade [110]. O intervalo de tempo característico da instabilidade é  $10^{-26}$  segundos. Também temos uma instabilidade ao assumir perturbação com comprimento de onda superior a um décimo do comprimento de onda de Compton. Em outras palavras, a curvatura no interior da esfera de matéria deve aumentar rapidamente (forte gravidade) de modo que alguns efeitos não perturbativos ocasionariam o término de tal aumento.

Considerando um caso particular de termos  $1/R$  de forma que um lagrangeano mais geral com potências arbitrárias (positivas e negativas) de  $R$  está disponível em [111]. Como resultado, todas as modificações de gravidade em pequena curvatura descrita por equações diferenciais de ordem superior podem sofrer instabilidade [110].

Por outro lado, admitindo o modelo  $1/R + R^2$  [96], temos

$$U(R_0) \sim \frac{R_0}{3} > 0. \quad (2.33)$$

Podemos nos deparar novamente com outra instabilidade, porém, o tempo de decaimento é 1000 segundos, isto é, macroscópico. Para  $U(R_b) < 0$ , temos [106]

$$U(R_0) \sim -\frac{(n+2)m^2c_2^2}{c_1n(n+1)} < 0, \quad (2.34)$$

Neste caso, não há instabilidade da matéria.

### 2.1.3 Gravidades modificadas viáveis

Neste momento, vamos explorar alguns dos modelos de gravidade que possuam consistência na unificação da expansão acelerada do universo atual com a inflação do universo primitivo.

Algumas propostas de modelos viáveis de gravidade  $F(R)$  [112, 113, 114] que unificam a aceleração tardia com a inflação exigem diversas condições. Desta forma, para que tenhamos inflação, precisamos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) = -\Lambda_i, \quad (2.35)$$

onde  $\Lambda_i$  é uma constante cosmológica efetiva para uma fase inflacionária de modo que  $\Lambda_i \sim 10^{20 \sim 38} (eV)^2$ .

Como condição para uma aceleração cósmica atual, devemos ter  $f(R)$  sendo uma constante, assim,

$$f(R_0) = -2\tilde{R}_0, \quad f'(R_0) \sim 0, \quad (2.36)$$

onde  $R_0 \sim (10^{-33} eV)^2$ . Em virtude do termo de matéria, logo,  $R_0 > \tilde{R}_0$ . Ao considerar  $f(R)$  como uma constante cosmológica efetiva, então podemos representar a equação de Einstein por  $R_0 = \tilde{R}_0 - \kappa^2 T_{matéria}$  sendo  $T_{matéria}$  o traço do tensor energia momento de matéria.

Adotando um modelo, em detrimento da equação (2.35), que satisfaça

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) = \alpha R^m, \quad (2.37)$$

com  $m$  e  $\alpha$  sendo um inteiro positivo e uma constante, respectivamente. Entretanto, a equação (2.36) demonstra que  $f(R) < 0$  para um universo atual, em outras palavras  $f(R)$  deve cruzar zero no passado.

Por sua vez, a condição

$$\lim_{R \rightarrow 0} f(R) = 0 \quad (2.38)$$

indica que temos um espaço temporal plano. Assim, para um modelo que satisfaça tal condição, obtemos [112]

$$f(R) = \frac{\alpha R^{2n} - \beta R^n}{1 + \gamma R^n}, \quad R_0 = \left\{ \left( \frac{1}{\gamma} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}} \right) \right\}^{1/n} \quad (2.39)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes positivas e  $n$  corresponde a um número inteiro positivo.

Logo,

$$f(R_0) \sim -2\tilde{R}_0 = \frac{\alpha}{\gamma^2} \left( 1 + \frac{\left( 1 - \frac{\beta\gamma}{\alpha} \right) \sqrt{1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}}}{2 + \sqrt{1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}}} \right), \quad (2.40)$$

com

$$\alpha \sim 2\tilde{R}_0 R_0^{-2n}, \quad \beta \sim 4\tilde{R}_0^2 R_0^{-2n} R_I^{n-1}, \quad \gamma \sim 2\tilde{R}_0 R_0^{-2n} R_I^{n-1}. \quad (2.41)$$

Neste modelo, a correção na lei de Newton é pequena uma vez que a massa  $m_\sigma$ , dada por (2.11), é suficientemente grande. Assim,  $m_\sigma^2 \sim 10^{-160+109n} eV^2$  para o sistema solar e  $m_\sigma^2 \sim 10^{-144+98n} eV^2$  para o ar da Terra [112]. Portanto, para  $n \geq 2$  temos um valor consideravelmente grande para massa.

Também podemos citar outro modelo disponível em [114] relacionado à equação (2.35), ou seja,

$$\begin{aligned} f(R) = & - \alpha_0 \left[ \tanh \left( \frac{b_0(R - R_0)}{2} \right) + \tanh \left( \frac{b_0 R_0}{2} \right) \right] \\ & - \alpha_I \left[ \tanh \left( \frac{b_I(R - R_I)}{2} \right) + \tanh \left( \frac{b_I R_I}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Assumindo  $R_I \gg R_0$ ,  $\alpha_I \gg \alpha_0$ ,  $b_I \ll b_0$  e  $b_I R_I \gg 1$ , então, para  $R \rightarrow 0$  ou

$R \ll (R_0, R_I)$ , portanto, podemos expressar  $f(R)$  como

$$f(R) \rightarrow - \left[ \frac{\alpha_0 b_0}{2 \cosh^2 \left( \frac{b_0 R_0}{2} \right)} + \frac{\alpha_I b_I}{2 \cosh^2 \left( \frac{b_I R_I}{2} \right)} \right] R. \quad (2.43)$$

E também  $f(0) = 0$ . Por outro lado, para  $R \gg R_I$ , ficamos com

$$\begin{aligned} f(R) &\rightarrow -2\Lambda_I \equiv -\alpha_0 \left[ 1 + \tanh \left( \frac{b_0 R_0}{2} \right) \right] - \alpha_I \left[ 1 + \tanh \left( \frac{b_I R_I}{2} \right) \right] \\ &\sim -\alpha_I \left[ 1 + \tanh \left( \frac{b_I R_I}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Dessa vez, admitindo o caso  $R_0 \ll R \ll R_I$ ,  $f(R)$  tende para

$$f(R) \rightarrow -\alpha_0 \left[ 1 + \tanh \left( \frac{b_0 R_0}{2} \right) \right] - \frac{\alpha_I b_I R}{2 \cosh^2 \left( \frac{b_I R_I}{2} \right)} \sim -2\Lambda_0 \equiv -\alpha_0 \left[ 1 + \tanh \left( \frac{b_0 R_0}{2} \right) \right], \quad (2.45)$$

de forma que também temos

$$f'(R) = - \frac{\alpha_0 b_0}{2 \cosh^2 \left( \frac{b_0 (R - R_0)}{2} \right)} - \frac{\alpha_I b_I}{2 \cosh^2 \left( \frac{b_I (R - R_I)}{2} \right)}. \quad (2.46)$$

Portanto, podemos representar  $f'(R_0)$  e  $f'(R_I)$ , respectivamente, por

$$f'(R_0) = -\alpha_0 b_0 - \frac{\alpha_I b_I}{2 \cosh^2 \left( \frac{b_I (R_0 - R_I)}{2} \right)} > -\alpha_I b_I - \alpha_0 b_0, \quad (2.47)$$

$$f'(R_I) = -\alpha_I b_I - \frac{\alpha_0 b_0}{2 \cosh^2 \left( \frac{b_0 (R_0 - R_I)}{2} \right)} > -\alpha_I b_I - \alpha_0 b_0. \quad (2.48)$$

Com o propósito de evitar um cenário antigravitacional, façamos

$$\alpha_I b_I + \alpha_0 b_0 < 2. \quad (2.49)$$

Para  $R \gg R_0$  e  $R_0 \ll R \ll R_I$ , neste último com  $b_I R_I \gg 1$ ,  $f(R)$  assume, respectivamente, as formas

$$f(R) \sim -2\Lambda_{eff} + 2\alpha e^{-b(R-R_0)}, \quad (2.50)$$

$$f(R) \sim -2\Lambda_0 + 2\alpha e^{-b_0(R-R_0)}, \quad (2.51)$$

de modo que para massa efetiva, ficamos com

$$m_\sigma^2 \sim \frac{e^{b(R-R_0)}}{4\alpha b^2}, \quad (2.52)$$

cuja correção na lei de Newton pode ser insignificante uma vez que  $m_\sigma^2$  assume valores consideravelmente grandes [97].

#### 2.1.4 Modelo $\frac{F(R)}{R^2} \rightarrow \frac{1}{R}$

Abordaremos um modelo gravitacional de modo que para o limite  $R \rightarrow 0$ , recuperemos a gravidade de Einstein. Desta forma, fazendo  $F(R) \rightarrow R$ , então,

$$\frac{F(R)}{R^2} \rightarrow \frac{1}{R}, \quad (2.53)$$

cuja solução também pode ser descrita por um espaço plano [112], caso tal condição seja satisfeita.

Para a aceleração do tempo tardio, temos a solução de Sitter estável de forma que a curvatura seja pequena  $R \sim R_L \sim (10^{-33} \text{ eV})^2$ , neste caso, precisamos que [97]

$$\frac{F(R)}{R^2} = f_{0L} - f_{1L} (R - R_L)^{2n+2} + o[(R - R_L)^{2n+2}], \quad (2.54)$$

sendo,  $f_{0L}$  e  $f_{1L}$  constantes positivas e  $n$  um número inteiro positivo.

Por outro lado, para a fase inflacionária no universo primordial, a curvatura assume  $R \sim R_I \sim (10^{16 \sim 19} \text{ GeV})^2$ . Assim, a solução de Sitter é quase estável, de modo que a curvatura diminua de forma suficientemente lenta. Para isso, precisamos da condição [97]

$$\frac{F(R)}{R^2} = f_{0I} - f_{1I} (R - R_I)^{2m+1} + o \left[ (R - R_I)^{2m+1} \right], \quad (2.55)$$

onde  $f_{0I}$  e  $f_{1I}$  são constantes positivas e  $m$  um número inteiro positivo.

Com a finalidade de evitar uma singularidade da curvatura para o caso  $R \rightarrow \infty$ , assumiremos  $F(R) \rightarrow f_\infty R^2$ , ou seja,

$$\frac{F(R)}{R^2} \rightarrow f_\infty, \quad (2.56)$$

onde  $f_\infty$  é uma constante positiva e suficientemente pequena. Em detrimento da equação (2.56), podemos adotar  $F(R) \rightarrow f_\infty R^{2-\epsilon}$ , assim,

$$\frac{F(R)}{R^2} \rightarrow \frac{f_\infty}{R^\epsilon}, \quad (2.57)$$

sendo  $f_\infty$  uma constante positiva e o parâmetro  $\epsilon$  satisfazendo  $0 < \epsilon < 1$ . Portanto, com as equações (2.56) e (2.57) podemos eliminar uma possível singularidade.

Como precisamos evitar um regime antigravitacional, sabemos que

$$F'(R) > 0, \quad (2.58)$$

cuja condição pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dR} \left[ \ln \left( \frac{F(R)}{R^2} \right) \right] > -\frac{2}{R}. \quad (2.59)$$

Combinando as equações (2.53) e (2.58), temos

$$F(R) > 0. \quad (2.60)$$

Tendo em vista a solução de Sitter ser estável, logo o universo cessará sua evolução em  $R = R_L$ , ou seja, a solução extra de Sitter não foi realizada, dessa forma, a curvatura não será menor que  $R_L$  [115]. Para  $F(R)/R^2$  que satisfaça as condições dadas em (2.53), (2.54), (2.55), (2.56) e (2.60), podemos verificar seu comportamento na Figura (1.8).

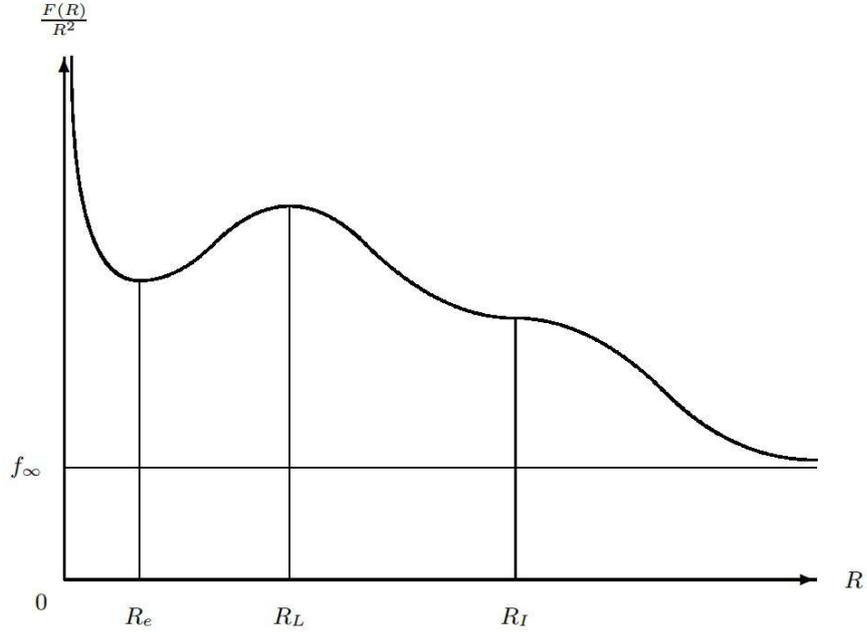


Figura 2.1: Evolução de  $F(R)/R^2$  em função de  $R$ . Fonte: S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rept. 505:59-144,(2011), arXiv:1011.0544 [gr-qc].

Assumindo o acoplamento não mínimo não padrão da gravidade modificada com a lagrangeana de matéria, a ação será dada por [116, 117]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2\kappa^2} + f(R)L_d \right\}, \quad (2.61)$$

sendo  $L_d$  a densidade lagrangeana correspondente a um fluido de matéria. Reescrevendo

a equação (2.61) para o caso de uma gravidade  $F(R)$ , obtemos

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{F(R)}{2\kappa^2} + f(R)L_d \right\}. \quad (2.62)$$

Variando a equação (2.62) em relação à  $g^{\mu\nu}$ , ficamos com

$$0 = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F(R) - R_{\mu\nu}\frac{\partial F(R)}{\partial R} - g_{\mu\nu}\square\frac{\partial F(R)}{\partial R} + \nabla_\mu\nabla_\nu\frac{\partial F(R)}{\partial R} + \frac{\kappa^2}{2}\tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (2.63)$$

onde  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  é o tensor energia momento efetivo, cuja forma é dada por

$$\tilde{T}^{\mu\nu} \equiv -f'(R)R^{\mu\nu}L_d + (\nabla^\mu\nabla^\nu - g^{\mu\nu}\nabla^2)[f'(R)L_d] + f'(R)T^{\mu\nu}, \quad (2.64)$$

de modo que para a definição de  $T_{\mu\nu}$ , temos

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \left( \int d^4x \sqrt{-g}L_d \right). \quad (2.65)$$

Vale frisar que o tensor energia momento efetivo é conservado, assim,  $\nabla_\mu\tilde{T}^{\mu\nu} = 0$ , enquanto  $T^{\mu\nu}$  não é conservado em geral [118]. Para a densidade lagrangeana  $L_d$  adotaremos um modelo como a de um escalar sem massa livre dada por

$$L_d = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi. \quad (2.66)$$

Portanto, considerando um universo de FLRW no qual a assinatura da métrica é descrita por  $(-, +, +, +)$ , então, para as equações de campo de Einstein, obtemos

$$0 = -\frac{F(R)}{2} + 3(H^2 + \dot{H})F'(R) - 18(4H^2\dot{H} + H\ddot{H})F''(R) + \kappa^2\tilde{\rho}, \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{F(R)}{2} & - (\dot{H} + 3H^2)F'(R) + 6(8H^2\dot{H} + 4\dot{H}^2 + 6H\ddot{H} + \ddot{H})F''(R) \\ & + 36(4H\dot{H} + \ddot{H})^2F'''(R) + \kappa^2\tilde{p}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

de maneira que denotamos  $\tilde{\rho}$  e  $\tilde{p}$ , respectivamente, por

$$\tilde{\rho} \equiv 3 \left( H^2 + \dot{H} \right) f'(R) L_d - 3H \frac{d(f'(R)L_d)}{dt} + f(R)\rho, \quad (2.69)$$

$$\tilde{p} \equiv - \left( \dot{H} + 3H^2 \right) f'(R) L_d + \frac{d^2(f'(R)L_d)}{dt^2} + 4H \frac{d(f'(R)L_d)}{dt} + f(R)p, \quad (2.70)$$

onde  $\rho$  e  $p$  são a densidade de energia e a pressão, respectivamente, dadas por  $T_{\mu\nu}$ .

### 2.1.5 Acoplamento não mínimo em gravidade $F(R)$

Na presente seção abordaremos o acoplamento gravitacional não mínimo à lagrangeana de matéria em teoria de gravidade modificada  $F(R)$ . Vale ressaltar que tal contexto apresenta consistência com o modelo  $\Lambda$ CDM [119]. Iniciaremos considerando a ação com acoplamento não mínimo dada por [119]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{\kappa^2} - f_1(A)L_d - f_2(A) \right], \quad (2.71)$$

onde  $A$  corresponde à uma função de invariantes geométricos, neste caso, sendo igual a  $R$  ou simplesmente invariante  $G$  de Gauss-Bonnet. Adotaremos a lagrangeana de matéria como uma função escalar  $L_d = \frac{1}{2}n^{-2}\dot{\phi}^2$  e um universo plano de FLRW, então,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left[ -n(t)^2, a(t)^2, a(t)^2, a(t)^2 \right]. \quad (2.72)$$

Variando a ação (2.71) com respeito a  $\phi$ , obtemos

$$\dot{\phi} = f_1(A)^{-1} a^{-3} n q, \quad (2.73)$$

com isso, podemos reescrever (2.71) como

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{\kappa^2} R n a^3 - \frac{n q^2}{2 f_1(A) a^3} - f_2(A) n a^3 \right] = S_R + S_1 + S_2. \quad (2.74)$$

Calculando a variação de  $S_R$  em (2.74) com respeito a  $n$ , ficamos com

$$\delta S_R = \frac{6}{\kappa^2} \int d^4x a \dot{a}^2 \delta n. \quad (2.75)$$

De forma análoga, variando  $S_1$  e  $S_2$  em relação a  $n$  e, em seguida, fazendo  $n = 1$ , teremos

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= \int d^4x \left[ -\frac{q^2}{2f_1(A)a^3} \delta n + \frac{q^2}{2a^3} \frac{1}{f_1(A)^2} \frac{\partial f_1}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial n} \delta n + \frac{q^2}{2a^3} \frac{1}{f_1(A)^2} \frac{\partial f_1}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial \dot{n}} \delta \dot{n} \right] \\ &= \int d^4x \left[ -\frac{q^2}{2f_1 a^3} + \frac{q^2}{2a^3} \frac{f'_1}{f_1^2} A_n + \frac{3q^2}{2a^3} H \frac{f'_1}{f_1^2} A_{\dot{n}} + \frac{q^2}{a^3} \frac{(f'_1)^2}{f_1^3} A_{\dot{n}} \dot{A} \right. \\ &\quad \left. - \frac{q^2}{2a^3} \frac{f''_1}{f_1^2} A_{\dot{n}} \dot{A} - \frac{q^2}{2a^3} \frac{f'_1}{f_1^2} \frac{dA_{\dot{n}}}{dt} \right] \delta n, \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\delta S_2 = - \int d^4x \left[ a^3 f_2 + f'_2 a^3 A_n - 3a^3 H f'_2 A_{\dot{n}} - a^3 f'_2 \frac{dA_{\dot{n}}}{dt} - a^3 f''_2 A_{\dot{n}} \dot{A} \right] \delta n. \quad (2.77)$$

Desta maneira, podemos reescrever a equação de campo como

$$\frac{6}{\kappa^2} H^2 = \rho_1 + \rho_2, \quad (2.78)$$

sendo

$$\rho_1 = \frac{q^2}{f_1 a^6} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{f'_1}{f_1} A_n - \frac{3}{2} H \frac{f'_1}{f_1} A_{\dot{n}} - \frac{(f'_1)^2}{f_1^2} A_{\dot{n}} \dot{A} + \frac{1}{2} \frac{f''_1}{f_1} A_{\dot{n}} \dot{A} + \frac{1}{2} \frac{f'_1}{f_1} \frac{dA_{\dot{n}}}{dt} \right], \quad (2.79)$$

$$\rho_2 = f_2 + f'_2 A_n - 3H f'_2 A_{\dot{n}} - f'_2 \frac{dA_{\dot{n}}}{dt} - f''_2 A_{\dot{n}} \dot{A}. \quad (2.80)$$

Portanto, notemos que nas equações (2.79) e (2.80) temos o produto de uma função

por um termo derivado superior. Assim, para uma singularidade de tempo finito precisamos que tal função seja aproximadamente nula. Tendo em vista que derivadas superiores estão presentes apenas em termos que contém  $\dot{A}$ , logo podemos representar tal função como

$$HD = \dot{A}A_{,i} \left[ \frac{q^2}{f_1^2 a^6} \left( \frac{1}{2} f_1'' - \frac{(f_1')^2}{f_1} \right) - f_2'' \right]. \quad (2.81)$$

Fazendo  $A = R = \frac{6}{n^2} \left[ \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{a n} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right]$ , então,  $R_n = -2R = -12(\dot{H} + 2H^2)$  e  $R_{,i} = -6H$ . Desta forma, para  $n = 1$ , podemos reescrever a densidade de energia efetiva como

$$\rho_1 = \frac{q^2}{f_1 a^6} \left[ \frac{1}{2} + 3 \frac{f_1'}{f_1} (\dot{H} + 7H^2) + 6H \frac{(f_1')^2}{f_1^2} \dot{R} - 3H \frac{f_1''}{f_1} \dot{R} \right], \quad (2.82)$$

$$\rho_2 = f_2 - 6f_2' (\dot{H} + H^2) + 6H f_2'' \dot{R}. \quad (2.83)$$

Considerando a gravidade de Einstein não minimamente acoplada com a matéria lagrangeana, temos a ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{\kappa^2} R - f_1(A) L_d \right], \quad (2.84)$$

onde denotamos  $f_2 \equiv 0$ .

Assumindo a função  $f_1$  como [106, 120]

$$f_1 = \frac{c_1 R^k}{c_2 R^k + 1}, \quad (2.85)$$

sendo  $c_1$  e  $c_2$  constantes arbitrárias. Com isso, considerando a equação (2.78) com  $\rho_2 \equiv 0$

e assumindo um limite para o universo atual por  $R \rightarrow 0$ , temos [119]

$$\begin{aligned} \frac{6}{\kappa^2} H^2 &= \frac{18q^2}{a^6 c_1 (6\dot{H} + 12H^2)^{k+2}} \left[ \dot{H}^2(k+1) + H^4(k+14k) + \dot{H}H^2(4+13k+4k^2) \right. \\ &\quad \left. + k(k+1)H\ddot{H} \right]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Admitindo soluções como  $a = a_0 t^x$ ,  $H = \frac{x}{t}$ ,  $\dot{H} = -\frac{x}{t^2}$ ,  $\ddot{H} = 2\frac{x}{t^3}$  e combinando com (2.86), obtemos  $x = \frac{k+1}{3}$ . Entretanto,  $a \propto t^{2/3(\omega+1)}$ , onde  $\omega = p/\rho$  é a equação de estado, portanto,  $\omega = \frac{1-k}{1+k}$ , de modo que para a aceleração tardia do universo temos  $k > 2$ , pois nesse caso devemos ter  $-1 < \omega < -1/3$ .

## 2.2 Gravidade $F(T)$

Com o propósito de detalhar sobre a fase inflacionária e a aceleração da expansão do universo atual, vamos adotar um modelo no qual a densidade lagrangeana possui um termo adicional sendo representado por uma função do traço  $T$  do tensor energia momento, ou seja,  $F(T)$  [121, 122].

Diferentemente da teoria de gravidade modificada  $F(R)$ , a teoria da gravidade  $F(T)$  não apresenta simetria local de Lorentz, ou seja, não trata-se de uma invariante sob a transformação local de Lorentz, isso uma vez que um conjunto de campos é definido por quatro ortonormais [123]. Em outras palavras, a teoria aborda campos definidos globalmente. Para o caso da ação de Einstein Hilbert, quando temos campos globais definidos, utilizamos uma derivada total, dessa forma, a ação torna-se invariante sob a transformação local de Lorentz. Entretanto, para uma ação linear ao traço  $T$ , mesmo que não tenhamos uma invariância sob a transformação local de Lorentz, ainda temos uma invariante sob a simetria global de Lorentz, ou seja, simetria do espaço tangente do espaço-tempo. Desta maneira, se dispomos de campos diagonais, o espaço tempo possui a simetria global de Lorentz. No entanto, nos deparamos com algumas dificuldades, por exemplo, não podemos

ter modelos realista ao acoplar campos espinores com gravidade  $F(T)$  [118].

Por se tratar de um campo formado por uma base ortonormal para o espaço tangente em cada ponto  $x^\mu$  da variedade, então,  $e_A \cdot e_B = \eta_{AB}$ , onde  $\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  é a métrica de Minkowski para o espaço tangente. Considerando o campo com seu componente na forma  $e_A = e_A^\mu \partial_\mu$ , logo podemos escrever o tensor métrico como

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{AB} e_\mu^A(x) e_\nu^B(x), \quad (2.87)$$

de modo que  $e_A^\mu e_\nu^A = \delta_\nu^\mu$  e  $e_A^\mu e_\mu^B = \delta_A^B$ .

Neste contexto, faremos uso da conexão Weitzenböck dada por [124]

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \equiv e_A^\lambda \partial_\nu e_\mu^A = -e_\mu^A \partial_\nu e_A^\lambda. \quad (2.88)$$

Desta maneira, podemos denotar o tensor energia momento como

$$T_{\mu\nu}^\lambda \equiv \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda = e_A^\lambda \left( \partial_\mu e_\nu^A - \partial_\nu e_\mu^A \right), \quad (2.89)$$

e para conexão de Weitzenböck temos o tensor [125]

$$K_{\rho}^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \left( T^{\mu\nu}_{\rho} - T^{\nu\mu}_{\rho} - T_{\rho}^{\mu\nu} \right). \quad (2.90)$$

Sendo o tensor escalar  $T$  e o superpotencial  $S_{\rho}^{\mu\nu}$  definidos, respectivamente, como [123, 126]

$$T \equiv S_{\rho}^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{\rho}, \quad S_{\rho}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left( K_{\rho}^{\mu\nu} + \delta_{\rho}^{\mu} T_{\alpha}^{\alpha\nu} - \delta_{\rho}^{\nu} T_{\alpha}^{\alpha\mu} \right). \quad (2.91)$$

Portanto, podemos escrever a ação da gravidade modificada  $F(T)$  por

$$S = \int d^4x |e| \left[ \frac{F(T)}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_{\text{matéria}} \right], \quad (2.92)$$

onde  $|e| = \det(e_\mu^A) = \sqrt{-g}$  e  $\mathcal{L}_{\text{matéria}}$  corresponde à densidade lagrangeana de matéria.

Variando a ação (2.92) com respeito à  $e_A^\mu$ , obtemos [122]

$$\frac{1}{e} \partial_\mu (e S_A^{\mu\nu}) F_T(T) - e_A^\lambda T_{\mu\lambda}^\rho S_\rho^{\nu\mu} F_T(T) + S_A^{\mu\nu} \partial_\mu T F_{TT}(T) + \frac{1}{4} e_A^\nu f = \frac{\kappa^2}{2} e_A^\rho T_{m\rho}^\nu, \quad (2.93)$$

onde  $F_T(T)$  e  $F_{TT}(T)$  denotam as derivadas de primeira e segunda ordem de  $F(T)$  em relação à  $T$ , respectivamente, e  $T_{m\rho}^\nu$  representa o tensor energia momento correspondente à lagrangeana de matéria.

Adotando um universo plano de FLRW, temos

$$e_\mu^A = \text{diag}(1, a, a, a), \quad (2.94)$$

de forma que podemos escrever  $e_A^\mu = \text{diag}(1, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1})$ , cujo determinante assume a forma  $e = a^3$  dado que  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a^2, -a^2, -a^2)$ .

Considerando o caso de um fluido perfeito para a matéria, logo o tensor energia momento é escrito como

$$T_{\mu\nu} = -p_m g_{\mu\nu} - (\rho_m + p_m) u_\mu u_\nu, \quad (2.95)$$

sendo  $p_m$ ,  $\rho_m$  e  $u^\mu$  a pressão, a densidade de energia e a quadrivelocidade do fluido perfeito, respectivamente. Utilizando (2.93) obtemos as equações de Friedmann, ou seja,

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho_m - \frac{F(T)}{6} - 2F_T(T)H^2, \quad (2.96)$$

$$\dot{H} = -\frac{\frac{\kappa^2}{2} (\rho_m + p_m)}{1 + F_T(T) - 12H^2 F_{TT}(T)}. \quad (2.97)$$

Neste caso, podemos expressar o traço do tensor energia momento por

$$T = -6H^2. \quad (2.98)$$

Por sua vez, sabendo que a equação de estado é dada por  $\omega_m = p_m/\rho_m$ , logo, podemos representar a dinâmica do fluido de matéria utilizando a equação de continuidade, assim,

$$\dot{\rho}_m + 3H(1 + \omega_m)\rho_m = 0. \quad (2.99)$$

Com isso, é possível explorar a dinâmica cosmológica através de qualquer modelo gravitacional  $F(T)$  [127, 128].

## 2.3 Gravidade $F(R, T)$

Outra alternativa em teorias de gravidade modificada seria a utilização de uma ação onde o Lagrangeano fosse dado por uma função arbitrária  $F(R, T)$ , sendo  $R$  o escalar de curvatura de Ricci e  $T$  o traço do tensor energia momento. Como tal modelo necessita de uma fonte na qual é representada pela variação do tensor energia momento em relação à métrica, então podemos considerar o termo  $L_m$  o qual corresponde a Lagrangeana de matéria. Em outras palavras, para cada  $L_m$  teremos uma respectiva equação de campo [129].

Consideremos a ação em teoria de gravidade modificada dada por [129]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int F(R, T)\sqrt{-g}d^4x + \int L_m\sqrt{-g}d^4x, \quad (2.100)$$

onde  $1/16\pi G = 1/2\kappa^2$  com  $\kappa^2 = 8\pi G$ ,  $F(R, T)$  representa uma função arbitrária do escalar de Ricci  $R$  e do traço  $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$  do tensor energia momento  $T_{\mu\nu}$ ,  $L_m$  é a densidade lagrangeana de matéria e  $\sqrt{-g}d^4x$  corresponde ao elemento invariante de volume.

Assumindo que a densidade lagrangeana de matéria  $L_m$  depende somente das com-

ponentes do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , então podemos escrever o tensor energia momento como

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} L_m + \sqrt{-g} \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \\
&= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}L_m + \sqrt{-g} \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \\
&= g_{\mu\nu}L_m - 2\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{2.101}
\end{aligned}$$

sendo  $\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}$ .

Agora, utilizando a equação (2.101), podemos obter a variação da ação do campo gravitacional dada em (2.100), assim,

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{16\pi G} \int \left[ F_R(R, T)\delta R + F_T(R, T)\frac{\delta T}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F(R, T)\delta g^{\mu\nu} + 16\pi G \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \sqrt{-g} d^4x, \tag{2.102}
\end{aligned}$$

ou seja, para variação da lagrangeana utilizamos o tensor energia momento e fizemos

$$\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L_m + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{2.103}$$

Na equação (2.102), vamos denotar  $F_R(R, T) = \partial F(R, T)/\partial R$  e  $F_T(R, T) = \partial F(R, T)/\partial T$ .

Variando o escalar de Ricci, temos

$$\begin{aligned}
\delta R &= \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) \\
&= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\nabla_\lambda \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda), \tag{2.104}
\end{aligned}$$

sabendo que os símbolos de Christoffel são dados por  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu})$ ,

então, para sua variação, podemos escrever

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\nabla_\mu \delta g_{\nu\alpha} + \nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}), \tag{2.105}$$

com isso, da equação (2.104), obtemos

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \left[ \nabla_\lambda \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\alpha} + \nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}) \right. \quad (2.106)$$

$$\left. - \nabla_\nu \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\nabla_\mu \delta g_{\lambda\alpha} + \nabla_\lambda \delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\lambda}) \right], \quad (2.107)$$

resultando em

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.108)$$

Dessa forma, podemos reescrever a variação da ação dada em (2.102) como

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{16\pi G} \int [F_R(R, T)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + F_R(R, T)g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} \\ &- F_R(R, T)\nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + F_T(R, T)\frac{\delta(g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta})}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} \\ &- \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F(R, T)\delta g^{\mu\nu} + 16\pi G\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}] \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Em relação à variação do traço com respeito ao tensor métrico, vamos definir

$$\frac{\delta(g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta})}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}, \quad (2.110)$$

com  $\Theta_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}$  [129].

E para o último termo dentro dos colchetes na equação (2.109), temos

$$\begin{aligned} 16\pi G\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{16\pi G}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} L_m + \sqrt{-g} \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \\ &= \frac{16\pi G}{\sqrt{-g}} \left[ \left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{-g}g_{\mu\nu}L_m + \sqrt{-g} \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \\ &= -8\pi Gg_{\mu\nu}L_m + 16\pi G\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= 8\pi G \left( -g_{\mu\nu}L_m + 2\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \\ &= -8\pi GT_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Utilizando a equação acima e assumindo  $\delta S = 0$ , obtemos [129]

$$\begin{aligned} F_R(R, T)R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square F_R(R, T) - \nabla_\mu\nabla_\nu F_R(R, T) \\ + F_T(R, T)(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}F(R, T)g_{\mu\nu} - 8\pi GT_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Contraindo os índices na equação anterior, ficaremos com

$$F_R(R, T)R + 3\square F_R(R, T) + F_T(R, T)(T + \Theta) - 2F(R, T) - 8\pi GT = 0. \quad (2.113)$$

Pela conservação do tensor energia momento em gravidade modificada [130], temos

$$\nabla^\mu \left[ F_R(R, T)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F(R, T)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)F_R(R, T) \right] \equiv 0. \quad (2.114)$$

Calculando a divergência covariante do tensor energia momento, obtemos [129]

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{F_T(R, T)}{8\pi G - F_T(R, T)} [(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu})\nabla^\mu \ln F_T(R, T) + \nabla^\mu \Theta_{\mu\nu}]. \quad (2.115)$$

Em relação ao tensor  $\Theta_{\mu\nu}$ , utilizaremos a equação (2.101) e fazamos

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta \left( g_{\alpha\beta}L_m - 2\frac{\partial L_m}{\partial g^{\alpha\beta}} \right)}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}L_m + g_{\alpha\beta}\frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} - 2\frac{\partial^2 L_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}, \end{aligned} \quad (2.116)$$

de modo que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}L_m - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}L_m - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta} \left( g_{\mu\nu}L_m - 2\frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \\ &= \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}L_m - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}L_m + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta} \cdot 2\frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} \\ &= g_{\alpha\beta}\frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}}. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Portanto, substituindo a equação (2.117) em (2.116), logo,

$$\frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} L_m + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} L_m - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial^2 L_m}{\partial g^{\mu\nu} \partial g^{\alpha\beta}}. \quad (2.118)$$

Por definição, sabendo que  $\Theta_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}$ , então,

$$\Theta_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} L_m + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} L_m - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} T_{\mu\nu} - 2 g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 L_m}{\partial g^{\mu\nu} \partial g^{\alpha\beta}}, \quad (2.119)$$

sendo que para o primeiro termo do lado direito da equação acima, podemos escrever

$$g^{\alpha\beta} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} L_m = -g^{\alpha\beta} g_{\alpha\sigma} g_{\beta\gamma} \delta_{\mu\nu}^{\sigma\gamma} L_m = -g^{\alpha\beta} g_{\alpha\sigma} g_{\beta\gamma} \frac{\delta g^{\sigma\gamma}}{\delta g^{\mu\nu}} L_m = -g_{\mu\nu} L_m, \quad (2.120)$$

desta forma, podemos reescrever a equação (2.119) como

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} L_m - 2g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 L_m}{\partial g^{\mu\nu} \partial g^{\alpha\beta}}. \quad (2.121)$$

Portanto,  $\Theta_{\mu\nu}$  pode corresponder ao caso do campo eletromagnético com  $\Theta_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}$ , ao campo escalar sem massa com  $\Theta_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} + (1/2)Tg_{\mu\nu}$ , ao fluido perfeito com  $\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} - pg_{\mu\nu}$ , etc, uma vez que depende da Lagrangeana da matéria.

## Capítulo 3

# Regime de acoplamento dilatônico fraco em teoria de gravidade modificada $F(R, T)$

A Teoria da Inflação Cósmica foi formulada em 1981 pelo físico Alan Guth com o propósito de solucionar os problemas apresentados pelo Modelo Cosmológico Padrão relacionados às condições iniciais do universo primordial [98]. Assim, Guth ressaltou que o universo passou por uma fase de expansão acelerada na qual a densidade de energia predominante correspondia a de um campo escalar  $\phi$ , denominado ínflaton. Dessa maneira, ao final do período de inflação, o universo passaria por uma fase de reaquecimento no qual o campo atinge um valor mínimo, e em seguida, haveria um aumento da entropia dando início a criação de partículas e originando um novo universo cujas condições podem ser esclarecidas pela teoria do Big Bang quente [131].

Com o intuito de resolver o problema dos monopolos magnéticos que consistia em sua abundância não se apresentar relativamente igual ao de um monopolo por bárion, ele faz referência as propriedades das teorias de grande unificação das forças, notando que esta previa a criação de uma grande quantidade de tais monopolos magnéticos. Contudo, Guth notou que para resolver esse problema deveria haver uma quebra de simetria associada a

um campo escalar, fazendo com que o universo passasse por uma rápida expansão sendo a responsável pelo desaparecimento dos monopolos magnéticos [132]. Assim, podemos afirmar que a inflação compreende duas fases, sendo uma dominada pelo campo escalar  $\phi$  e a outra se remetendo ao reaquecimento, ou seja, com o decaimento de  $\phi$ .

Assumindo que a dinâmica do universo é governada pelas equações de Friedmann, considerando uma fase de expansão acelerada, ou seja,  $\ddot{a} > 0$ , então, a equação da aceleração  $\ddot{a}/a = -(\rho + 3p)/3$  mostra que para um regime inflacionário temos para equação de estado  $\omega < -1/3$ . Supondo a inflação como uma fase dominada pela constante cosmológica, teremos para as equações de Friedmann

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} > 0, \quad (3.1)$$

de modo que o fator de escala evolui exponencialmente com o tempo físico, ou seja,  $a \propto \exp(Ht)$ .

A ideia de um campo escalar submetido a um potencial se apresenta como uma proposta de modelo. Contudo, é frequente a busca de uma forma de potencial que inicie com o regime inflacionário e solucione os problemas do modelo padrão.

Considerando cenários cosmológicos relacionados à ação efetiva da corda, o campo dilatônico controla a dinâmica inflacionária e torna-se importante na produção dos espectros primordiais das flutuações [52].

Assumindo um período após a inflação, dependendo da massa do dÍlaton nesse instante, através do fundo cósmico é possível que a mesma seja detectada por antenas gravitacionais de sensibilidade apropriada [51].

### 3.1 Cosmologia em teoria de cordas

Iniciaremos com o caso de uma corda de baixa energia, sendo  $V(\phi)$  o potencial efetivo do dÍlaton e a ação dada por [67]

$$S = -\frac{M_s^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ e^{-\psi(\phi)} \tilde{R} + Z(\phi) (\tilde{\nabla}\phi)^2 + \frac{2}{M_s^2} \tilde{V}(\phi) \right] + \tilde{S}_m[\phi, \tilde{g}, \textit{matéria}], \quad (3.2)$$

de modo que utilizaremos a assinatura  $(+, -, -, -)$  e  $M_s^{-1} = \lambda_s$  é um parâmetro de comprimento da corda fundamental,  $\tilde{g}$  é a métrica do modelo sigma minimamente acoplado à cordas fundamentais,  $\tilde{R}$  e  $\tilde{\nabla}$  representam a curvatura e a derivada covariante, respectivamente. Enquanto a  $\psi(\phi)$  e  $Z(\phi)$ , estes são aproximações finitas.

Considerando o dÍlaton massivo, o qual está gravitacionalmente acoplado mais fortemente à matéria macroscópica teremos uma expansão assintótica de Taylor em potências inversas da constante de acoplamento  $g_s^2 = \exp(\phi)$ , ou seja, isso para o limite de acoplamento forte  $\phi \rightarrow \infty$ . Dessa forma, podemos escrever

$$\exp(-\psi(\phi)) = c_1^2 + b_1 \exp(-\phi) + \mathcal{O}(\exp(-2\phi)) \quad (3.3)$$

sendo  $c_1^2$  e  $b_1$  adimensionais. Enquanto aos fatores de forma, ficamos com as expansões dadas em (1.31). Para que haja consistência com a escala de Planck, assumiremos a relação  $\lambda_P/\lambda_S = M_S/M_P = \exp(\phi/2)$  para  $d = 3$  de modo que  $M_P \simeq 10M_S$  conforme exigido por uma unificação de cordas no contexto de interações gravitacionais e de calibre [71] e  $c_1^2 \sim c_2^2 \sim 10^2$ .

Entretanto, assumindo o dÍlaton bastante leve, ou ainda com massa nula, logo teremos um acoplamento fraco à matéria. Dessa forma, admitiremos  $\phi \rightarrow -\infty$ , portanto,

$$\psi = \phi, \quad Z(\phi) = e^{-\phi}. \quad (3.4)$$

Com isso, teremos uma evolução dinâmica do universo com uma métrica minima-

mente acoplada ao dÍlaton. Neste caso, tambÍm assumiremos que a ação efetiva da corda está minimamente acoplada a fontes de fluido perfeito, ou seja,

$$S = -\frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} e^{-\phi} \left[ \tilde{R} + (\tilde{\nabla}\phi)^2 + \frac{2}{M_P^2} \tilde{V}(\phi) \right] + \tilde{S}_m[\phi, \tilde{g}, \textit{matéria}]. \quad (3.5)$$

Admitindo uma transformação conforme dada por  $\tilde{g}_{\mu\nu} = e^\phi g_{\mu\nu}$ , podemos reescrever a equação acima através de outro sistema de coordenadas, denominado referencial de Einstein cuja ação assume a forma [42]

$$S = -\frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{2}{M_P^2} \hat{V}(\phi) \right] + S_m[\phi, e^\phi g_{\mu\nu}, \textit{matéria}], \quad (3.6)$$

sendo  $\hat{V} = e^\phi \tilde{V}$ .

Em decorrência das correções de lação, geralmente os campos presentes na ação  $S_m$  são não mÍnimos e não universais acoplados ao dÍlaton [50]. Para as densidades de carga gravitacional e dilatônica,  $T_{\mu\nu}$  e  $\sigma$ , respectivamente, temos

$$\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu}, \quad \frac{\delta S_m}{\delta \phi} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \sigma. \quad (3.7)$$

Vale frisar que para o caso  $\sigma \neq 0$ , tal modelo se distingue da configuração de uma gravidade tensorial do tipo Jordan-Brans-Dicke.

## 3.2 Cosmologia dilatônica em gravidade modificada

$$F(R, T)$$

Nesta seo, assumiremos que a ação na equação (3.6) depende não somente de  $R$ , mas sim de uma funo  $F(R, T)$ , de maneira que  $R$   o escalar de curvatura de Ricci e  $T$

é o traço do tensor energia momento, com isso, podemos reescrever tal equação como

$$S = -\frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [F(R, T) - L^\phi] + S_m[\phi, e^\phi g_{\mu\nu}, \textit{matéria}]. \quad (3.8)$$

Adotaremos um universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica de FLRW, cujo elemento de linha é dado por  $ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\vec{x}^2$ . Também definiremos  $M_P^2 \equiv 1/(8\pi G) = 2$ , salvo indicação contrária.

Para a lagrangeana, tensor energia momento e potencial dilatônicos, podemos representá-los, respectivamente, como

$$L^\phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \hat{V}(\phi), \quad (3.9)$$

$$T_{\mu\nu}^\phi = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi - \hat{V}(\phi) \right], \quad (3.10)$$

$$\hat{V}(\phi) = e^\phi \tilde{V}(\phi). \quad (3.11)$$

Como o campo dilatônico independe das componentes espaciais e considerando as componentes do tensor energia momento na diagonal principal, teremos

$$L^\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \hat{V}(\phi), \quad (3.12)$$

$$T_{00}^\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \hat{V}(\phi), \quad (3.13)$$

$$T_{ii}^\phi = \frac{a^2}{2}\dot{\phi}^2 - a^2\hat{V}(\phi), \quad (3.14)$$

com isso, podemos escrever o traço do tensor energia momento como

$$\begin{aligned} T^\phi &= g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}^\phi \\ &= g^{\mu\nu} \left\{ \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi - \hat{V}(\phi) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \hat{V}(\phi) + 3(-a^{-2}) \left[ \frac{a^2}{2}\dot{\phi}^2 - a^2\hat{V}(\phi) \right] \\ &= -\dot{\phi}^2 + 4\hat{V}(\phi). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Desse modo, utilizando a equação (2.121), temos

$$\Theta_{00}^{\phi} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - 3\hat{V}(\phi), \quad (3.16)$$

$$\Theta_{ii}^{\phi} = -\frac{3}{2}a^2\dot{\phi}^2 + 3a^2\hat{V}(\phi). \quad (3.17)$$

Da equação de movimento do campo dilatônico, obtemos

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{d\hat{V}}{d\phi} + \frac{1}{2}\sigma = 0, \quad (3.18)$$

de forma que para tal modelo a densidade de energia e pressão do campo dilatônico são dadas, respectivamente, por

$$\rho_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \hat{V}(\phi), \quad (3.19)$$

$$p_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \hat{V}(\phi). \quad (3.20)$$

De forma similar, considerando o fluido perfeito que preenche o universo, ou seja, admitindo radiação e matérias bariônica e escura, teremos a Lagrangeana  $L^f$  e o tensor energia momento  $T_{\mu\nu}^f$  dados como

$$L^f = -p_f, \quad (3.21)$$

$$T_{\mu\nu}^f = (\rho_f + p_f)u_{\mu}u_{\nu} - p_f g_{\mu\nu}. \quad (3.22)$$

Portanto, para as componentes do tensor energia momento da diagonal principal para o fluido perfeito, obtemos

$$T_{00}^f = \rho_f, \quad (3.23)$$

$$T_{ii}^f = a^2 p_f, \quad (3.24)$$

assim, podemos representar o traço do tensor energia momento para o fluido perfeito por

$$T^f = \rho_f - 3p_f. \quad (3.25)$$

Agora, utilizando novamente a equação (2.121), para o caso do fluido perfeito, logo,

$$\Theta_{00}^f = -2\rho_f - p_f, \quad (3.26)$$

$$\Theta_{ii}^f = -a^2 p_f. \quad (3.27)$$

Dessa forma, admitindo o campo dilatônico e o fluido perfeito, então, a Lagrangeana  $L$ , o tensor energia momento  $T_{\mu\nu}$ , o traço  $T$  do tensor energia momento e  $\Theta_{\mu\nu}$ , serão dados, respectivamente, por

$$L = L^\phi + L^f, \quad (3.28)$$

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^f, \quad (3.29)$$

$$T = T^\phi + T^f, \quad (3.30)$$

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}^\phi + \Theta_{\mu\nu}^f. \quad (3.31)$$

### 3.3 Modelo $F(R, T) = R + \alpha T$

Considerando uma teoria  $F(R, T)$  com acoplamento do dÍlaton e variando a equação (3.8) em relação a  $g_{\mu\nu}$ , temos,

$$\begin{aligned} F_R(R, T)R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)F_R(R, T) \\ + F_T(R, T)(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}F(R, T)g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Assumiremos  $F(R, T) = R + \alpha T$  e ficamos com

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) T_{\mu\nu} - \alpha\Theta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\alpha T. \quad (3.33)$$

Portanto, utilizando as equações (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), (3.21) e (3.31), podemos obter as componentes (0, 0) e (1, 1) das equações de campo, ou seja,

$$3H^2 = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \left(\frac{1}{2} + 4\alpha\right) \hat{V}(\phi) + \frac{1}{2}(1 + 3\alpha)\rho_f - \frac{1}{2}\alpha p_f, \quad (3.34)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\left(\frac{1}{2} + 3\alpha\right) \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \left(\frac{1}{2} + 4\alpha\right) \hat{V}(\phi) - \frac{1}{2}(1 + 3\alpha)p_f + \frac{1}{2}\alpha\rho_f, \quad (3.35)$$

sendo  $\rho_f = \rho_r + \rho_b + \rho_d$  e  $p_f = p_r + p_b + p_d = \frac{1}{3}\rho_r$ , pois  $p_b = p_d = 0$ .

Multiplicando as equações (3.34) e (3.35) por 2, admitiremos que, em ambas, o primeiro e segundo termos do lado direito sejam contribuições do campo dilatônico que denotaremos por  $\rho_{\phi_{(R+\alpha T)}}$  e  $p_{\phi_{(R+\alpha T)}}$  para densidade de energia e pressão, respectivamente. Enquanto para o terceiro e quarto termos teremos contribuições do fluido perfeito denotadas por  $\rho_{f_{(R+\alpha T)}}$  e  $p_{f_{(R+\alpha T)}}$  para densidade de energia e pressão, respectivamente. Desta forma, podemos expressar as equações de campo como

$$6H^2 = \rho_{\phi_{(R+\alpha T)}} + \rho_{f_{(R+\alpha T)}}, \quad (3.36)$$

$$4\dot{H} + 6H^2 = -p_{\phi_{(R+\alpha T)}} - p_{f_{(R+\alpha T)}}, \quad (3.37)$$

onde a densidade de energia do fluido perfeito corresponde à soma das densidades de energia das componentes de radiação  $\rho_{r_{(R+\alpha T)}}$  e matérias bariônica  $\rho_{b_{(R+\alpha T)}}$  e escura  $\rho_{d_{(R+\alpha T)}}$ , enquanto  $p_{r_{(R+\alpha T)}} = (1/3)\rho_{r_{(R+\alpha T)}}$  e  $p_{b_{(R+\alpha T)}} = p_{d_{(R+\alpha T)}} = 0$  correspondem as componentes

de pressão, ou seja,

$$\rho_{f_{(R+\alpha T)}} = \rho_{r_{(R+\alpha T)}} + \rho_{b_{(R+\alpha T)}} + \rho_{d_{(R+\alpha T)}}, \quad (3.38)$$

$$p_{f_{(R+\alpha T)}} = p_{r_{(R+\alpha T)}} + p_{b_{(R+\alpha T)}} + p_{d_{(R+\alpha T)}} = \frac{1}{3}\rho_{r_{(R+\alpha T)}}. \quad (3.39)$$

Combinando as equações (3.34), (3.35), (3.36), (3.37), (3.38) e (3.39), obtemos

$$6H^2 = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \dot{\phi}^2 + (1 + 8\alpha) \hat{V}(\phi) + (1 + 3\alpha)(\rho_b + \rho_d) + \left(1 + \frac{8}{3}\alpha\right) \rho_r, \quad (3.40)$$

$$4\dot{H} + 6H^2 = -\left(\frac{1}{2} + 3\alpha\right) \dot{\phi}^2 + (1 + 8\alpha) \hat{V}(\phi) - \frac{1}{3}\rho_r + \alpha(\rho_b + \rho_d), \quad (3.41)$$

de modo que para as densidades de energia, temos

$$\rho_{\phi_{(R+\alpha T)}} = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \dot{\phi}^2 + (1 + 8\alpha) \hat{V}(\phi), \quad (3.42)$$

$$\rho_{f_{(R+\alpha T)}} = (1 + 3\alpha)(\rho_b + \rho_d) + \left(1 + \frac{8}{3}\alpha\right) \rho_r. \quad (3.43)$$

Enquanto para as pressões, ficamos com

$$p_{\phi_{(R+\alpha T)}} = \left(\frac{1}{2} + 3\alpha\right) \dot{\phi}^2 - (1 + 8\alpha) \hat{V}(\phi), \quad (3.44)$$

$$p_{f_{(R+\alpha T)}} = \frac{1}{3}\rho_r - \alpha(\rho_b + \rho_d). \quad (3.45)$$

Derivando (3.36) em relação ao tempo, obtemos

$$12H\dot{H} = \dot{\rho}_{\phi_{(R+\alpha T)}} + \dot{\rho}_{f_{(R+\alpha T)}}, \quad (3.46)$$

sendo

$$\dot{\rho}_{\phi_{(R+\alpha T)}} = (1 - 2\alpha)\dot{\phi}\ddot{\phi} + (1 + 8\alpha)\hat{V}'\dot{\phi}, \quad (3.47)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{4}\left(\rho_{\phi_{(R+\alpha T)}} + \rho_{f_{(R+\alpha T)}} + p_{\phi_{(R+\alpha T)}} + p_{f_{(R+\alpha T)}}\right). \quad (3.48)$$

Combinando as equações (3.18) e (3.42), (3.43), (3.44), (3.45), (3.46), (3.47) e (3.48), teremos

$$\begin{aligned} (1 + 3\alpha)(\dot{\rho}_b + \dot{\rho}_d) + \left(1 + \frac{8}{3}\alpha\right)\dot{\rho}_r + H[4\rho_r + 3(\rho_b + \rho_d)](1 + 2\alpha) \\ + \alpha(12H\dot{\phi}^2 + 10\hat{V}'\dot{\phi}) - \frac{1}{2}(1 - 2\alpha)\sigma\dot{\phi} = 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

A equação acima representa, de forma simultânea, a evolução das componentes de densidade de energia referentes a radiação e matérias bariônica e escura. Considerando a evolução, de forma independente, de cada componente, temos

$$\left(1 + \frac{8}{3}\alpha\right)\dot{\rho}_r + 4H(1 + 2\alpha)\rho_r + \alpha\left(12H\dot{\phi}^2 + 10\frac{d\hat{V}}{d\phi}\dot{\phi}\right) = 0, \quad (3.50)$$

onde consideramos somente a componente de radiação e desprezamos as componentes de matérias bariônica e escura na equação (3.49). Para a evolução referente à matéria bariônica, desprezaremos as componentes de radiação e matéria escura, assim, obtemos

$$(1 + 3\alpha)\dot{\rho}_b + 3H(1 + 2\alpha)\rho_b + \alpha\left(12H\dot{\phi}^2 + 10\frac{d\hat{V}}{d\phi}\dot{\phi}\right) = 0. \quad (3.51)$$

Em relação a evolução correspondente a componente de matéria escura, desprezamos as componentes de radiação e matéria bariônica, portanto,

$$(1 + 3\alpha)\dot{\rho}_d + \left[3H(1 + 2\alpha) - \frac{1}{2}(1 - 2\alpha)Q\dot{\phi}\right]\rho_d + \alpha\left(12H\dot{\phi}^2 + 10\frac{d\hat{V}}{d\phi}\dot{\phi}\right) = 0. \quad (3.52)$$

Para evolução da densidade de energia do campo dilatônico, combinamos a equação

em (3.47) com (3.18), assim,

$$\dot{\rho}_\phi + 6H[\rho_\phi - (1 + 8\alpha)\hat{V}] - 10\alpha\frac{d\hat{V}}{d\phi}\dot{\phi} + \frac{1}{2}(1 - 2\alpha)\sigma\dot{\phi} = 0. \quad (3.53)$$

Para a ação  $S_m[\phi, e^\phi g_{\mu\nu}, \text{matéria}]$ , vimos que esta é composta das componentes de radiação e matérias bariônica e escura. Admitindo que a matéria comum e a radiação possuem acoplamentos quase métricos para  $g_{\mu\nu}$ , assim,  $\sigma_b, \sigma_r \approx 0$  quando  $\phi \rightarrow -\infty$  e para relação entre  $\sigma_d$  e  $\rho_d$ , façamos [67]

$$\frac{\sigma_d}{\rho_d} \equiv Q(\phi) = Q_0 \frac{e^{Q_0\phi}}{c^2 + e^{Q_0\phi}}, \quad (3.54)$$

então,

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_b + \sigma_d = \sigma_d. \quad (3.55)$$

Assumindo um regime de acoplamento fraco, ou seja, com  $\phi \rightarrow -\infty$  e considerando valores suficientemente grandes para  $c^2$ , conseqüentemente  $Q(\phi)$  tende a valores finitos não nulos. Desta maneira, teremos o potencial dilatônico efetivo adotando-se o potencial do quadro da corda como  $\tilde{V}(\phi) = V_0$ , portanto,

$$\hat{V} = V_0 e^\phi. \quad (3.56)$$

Com o propósito de utilizarmos soluções numéricas é conveniente parametrizar a evolução temporal de todas as variáveis em termos do logaritmo do fator de escala, ou seja,  $\chi = \ln(a/a_i)$ , onde  $a_i$  representa o fator de escala inicial. Podemos expressar a relação entre  $\chi$  e o redshift  $z$  como  $\chi = -\ln(1+z) + \ln(a_0/a_i)$ , de modo que  $a_0$  corresponde ao fator de escala para o tempo presente.

Portanto, reescrevendo a equação de campo dada em (3.34) e a equação de movi-

mento em (3.18), teremos, respectivamente,

$$H^2 = \frac{(1 + 3\alpha)(\rho_b + \rho_d) + (1 + \frac{8}{3}\alpha)\rho_r + (1 + 8\alpha)\hat{V}}{6 - (\frac{1}{2} - \alpha) \left(\frac{d\phi}{d\chi}\right)^2}, \quad (3.57)$$

$$2H^2 \frac{d^2\phi}{d\chi^2} + \left[ (1 + 4\alpha) \left( \frac{1}{2}\rho_b + \frac{1}{2}\rho_d + \frac{1}{3}\rho_r \right) + (1 + 8\alpha)\hat{V} - 2\alpha H^2 \left( \frac{d\phi}{d\chi} \right)^2 \right] \frac{d\phi}{d\chi} + 2 \frac{d\hat{V}}{d\phi} + Q\rho_d = 0. \quad (3.58)$$

Considerando as evoluções das componentes de radiação e matérias bariônica e escura da densidade de energia, podemos reescrever as equações (3.50), (3.51) e (3.52), respectivamente, como

$$\left(1 + \frac{8}{3}\alpha\right) \frac{d\rho_r}{d\chi} + 4(1 + 2\alpha)\rho_r + \alpha \left[ 12H^2 \left( \frac{d\phi}{d\chi} \right)^2 + 10 \frac{d\hat{V}}{d\phi} \frac{d\phi}{d\chi} \right] = 0, \quad (3.59)$$

$$(1 + 3\alpha) \frac{d\rho_b}{d\chi} + 3(1 + 2\alpha)\rho_b + \alpha \left[ 12H^2 \left( \frac{d\phi}{d\chi} \right)^2 + 10 \frac{d\hat{V}}{d\phi} \frac{d\phi}{d\chi} \right] = 0, \quad (3.60)$$

$$(1 + 3\alpha) \frac{d\rho_d}{d\chi} + 3(1 + 2\alpha)\rho_d - \frac{1}{2}(1 - 2\alpha)Q\rho_d \frac{d\phi}{d\chi} + \alpha \left[ 12H^2 \left( \frac{d\phi}{d\chi} \right)^2 + 10 \frac{d\hat{V}}{d\phi} \frac{d\phi}{d\chi} \right] = 0. \quad (3.61)$$

E para a evolução do campo dilatônico, podemos reescrever a equação (3.53) como

$$\frac{d\rho_\phi}{d\chi} + 6[\rho_\phi - (1 + 8\alpha)\hat{V}] - 10\alpha \frac{d\hat{V}}{d\phi} \frac{d\phi}{d\chi} + \frac{1}{2}(1 - 2\alpha)\sigma \frac{d\phi}{d\chi} = 0, \quad (3.62)$$

que é equivalente a (3.58).

Definindo a razão entre a densidade de energia do universo e a densidade crítica como o parâmetro de densidade( $\Omega$ ), ou seja,  $\Omega = \rho/\rho_c$ , logo, da equação (3.57), podemos escrever

$$1 = \Omega_r + \Omega_b + \Omega_d + \Omega_\phi, \quad (3.63)$$

sendo

$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{6H^2}, \quad \Omega_b = \frac{\rho_b}{6H^2}, \quad \Omega_d = \frac{\rho_d}{6H^2}, \quad \Omega_\phi = \frac{\rho_\phi}{6H^2}, \quad (3.64)$$

os parâmetros de densidade referentes a radiação, matérias bariônica e escura e campo dilatônico, respectivamente.

# Capítulo 4

## Método numérico

Vamos solucionar as equações que representam as evoluções das densidades de energia de cada componente, ou seja, as equações (3.59), (3.60), (3.61) e (3.62). Faremos uso de métodos numéricos com auxílio da equação (3.57), considerando o fator  $8\pi G$  em termos da massa de Plank  $M_P \equiv 1/\sqrt{G} = 1,22 \times 10^{19} GeV$ .

Vale ressaltar que corpos de testes macroscópicos, em um contexto de teoria das cordas, podem ter propriedades dependentes da composição da carga dilatônica e, portanto, não são adequadamente descritas por um modelo de gravidade tipo Brans-Dicke. Em outras palavras, campos fundamentais que constituem a matéria macroscópica, incluindo todos os laços na ação efetiva da corda, são em geral acoplados não minimamente e não universalmente ao dÍlaton. A carga  $Q$ , para o limite de acoplamento fraco do dilaton é apresentada no referencial de Einstein através de um reescalonamento canônico de campos e massas. Argumentos gerais então sugerem  $Q \gtrsim 1$  para matéria hadrônica (normalmente,  $Q \approx 44$  para núcleons), enquanto  $Q \approx 1$  para léptons. Dessa forma, no referencial das cordas as cargas efetivas também não desaparecem [52].

Utilizaremos o potencial dado em (3.56) assumindo  $V_0 = 2,65 \times 10^{-123} M_P^4$ , assim como  $Q(\phi)$  na equação (3.54) de modo que  $c^2 = 10$  para diferentes valores de  $Q_0$ . Para analisar os cenários cosmológicos utilizaremos  $\alpha$  e  $Q_0$  como parâmetros. Com o propósito de utilizar valores das densidades de energia que estejam consistentes com os dados obser-

vacionais em  $\chi = 0$ , ajustamos os valores iniciais das densidades de energia de radiação, de matérias bariônica e escura e do campo dilatônico respectivamente, como [42]

$$\rho_{ri}(\chi_i) = 8,58 \times 10^{-93} M_p^4, \quad (4.1)$$

$$\rho_{bi}(\chi_i) = 9,30 \times 10^{-99} M_p^4, \quad (4.2)$$

$$\rho_{di}(\chi_i) = 5,28 \times 10^{-98} M_p^4, \quad (4.3)$$

$$\rho_{\phi i}(\chi_i) = 1,67 \times 10^{-105} M_p^4, \quad (4.4)$$

cujo início da integração seja  $\chi_i = -20$ , tal valor corresponde a  $z_{BBN} \approx 10^9$  da nucleossíntese do Big Bang (BBN). E para o valor inicial do campo dilatônico, teremos  $\phi_i = 7 \times 10^{-8} M_P$ .

## 4.1 Resultados para os parâmetros de densidade $\Omega_r$ ,

### $\Omega_b$ , $\Omega_d$ e $\Omega_\phi$

A Figura(4.1) expressa o comportamento do parâmetro de densidade  $\Omega$  de cada componente em função de  $\chi$ , isso fixando  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$  e ajustando cenários com  $Q_0 = 2$  e  $Q_0 = 20$ . Considerando a componente de radiação  $\Omega_r$ , notemos que a mesma apresenta uma evolução degenerada que inicia-se de forma constante entre os intervalos  $\chi \approx [-20; -13]$ , decai rapidamente entre  $\chi \approx [-15; -4]$  e torna-se nula fora de ambos intervalos. Em outras palavras,  $Q_0$  não interfere na evolução de  $\Omega_r$ .

Em relação a componente de matéria escura  $\Omega_d$ , temos um comportamento degenerado no intervalo  $\chi = [-20; -2]$  e uma influência mínima de  $Q_0$  em  $\chi = [-2; 1]$ , de modo a apresentar um decaimento suavemente mais acentuado com a diminuição de  $Q_0$ . Nesta curva, a evolução inicia-se com  $\Omega_d = 0$  nos intervalos  $\chi \approx [-20; -13]$  e um aumento acentuado em  $\chi \approx [-13; -2]$  que precedem o decaimento, há também um ponto máximo degenerado com  $\Omega_d(\chi = -2) \approx 0,85$ .

Para a componente de matéria bariônica  $\Omega_b$ , temos uma evolução com uma degerescência no intervalo  $\chi \approx [-20; -1]$  e uma influência suficientemente pequena de  $Q_0$  fora deste intervalo. O comportamento de  $\Omega_b$  inicia-se com valor nulo em  $\chi \approx [-20; -11]$  seguido de um suave crescimento, mantendo-se constante em seu ponto máximo com  $\Omega_b \approx 0,15$  em  $\chi \approx [-5; -2]$  e finaliza com um decaimento fora destes intervalos.

Em relação a componente do dítaton  $\Omega_\phi$ , temos um início com  $\Omega_\phi = 0$  que independe de  $Q_0$  no intervalo  $\chi \approx [-20; -2]$  e uma elevação expressiva que cresce suavemente com o aumento de  $Q_0$ .

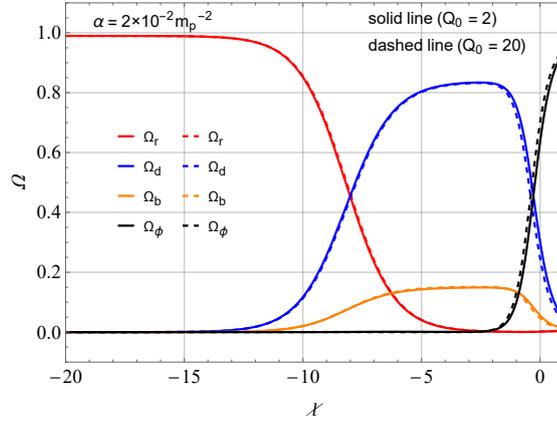


Figura 4.1: Comportamento do parâmetro de densidade  $\Omega$  em função de  $\chi$  com  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$  fixo e assumindo  $Q_0 = 2$  e  $Q_0 = 20$ .

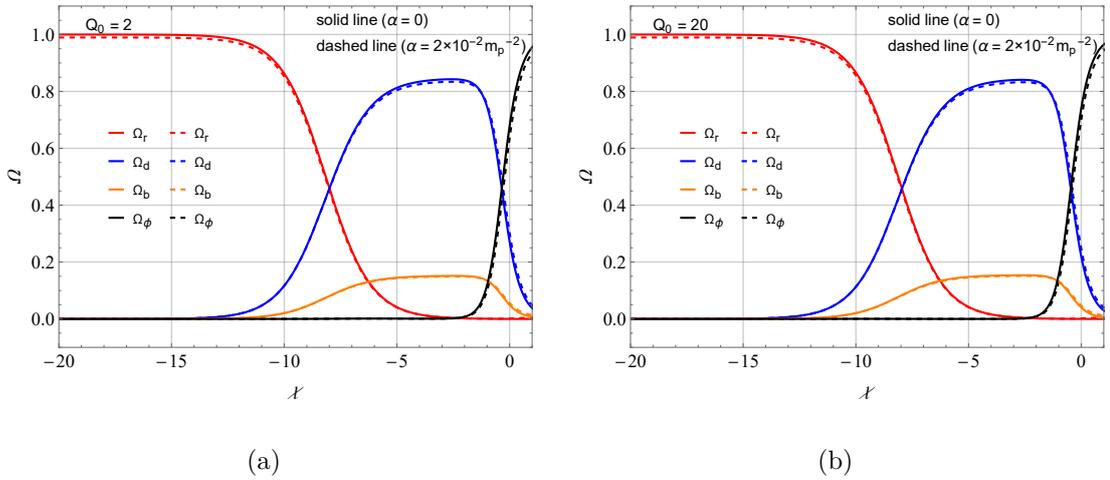


Figura 4.2: Comportamento do parâmetro de densidade  $\Omega$  em função de  $\chi$  assumindo  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$  com (a)  $Q_0 = 2$  e (b)  $Q_0 = 20$  fixos.

Relacionando as componentes  $\Omega_r$ ,  $\Omega_d$  e  $\Omega_b$ , notemos que em  $\chi \approx -13$ , a primeira decai enquanto a segunda e terceira aumentam. Por outro lado, em  $\chi \approx -2$ ,  $\Omega_r$  se mantém nula e  $\Omega_d$  e  $\Omega_b$  decaem enquanto  $\Omega_\phi$  cresce expressivamente, assim, esta apresentando uma interseção com  $\Omega_d$  em  $\chi \approx -0,28$  e  $\chi \approx -0,41$  para  $Q_0 = 2$  e  $Q_0 = 20$ , respectivamente. Também temos outro ponto de interseção relacionando as componentes  $\Omega_d$  e  $\Omega_r$  dado em  $\chi \approx -8,01$  e  $\chi \approx -7,97$  para  $Q_0 = 2$  e  $Q_0 = 20$ , respectivamente.

A Figura(4.2)(a) é similar a anterior, entretanto, fixamos  $Q_0 = 2$  e utilizamos dois cenários sendo um com  $\alpha = 0$  e outro com  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ . Comparando este gráfico com o anterior, notemos que  $\alpha$  apresenta uma influência mínima no comportamento da componente de radiação  $\Omega_r$  no intervalo  $\chi \approx [-20; -10]$ .

Enquanto para a componente de matéria escura  $\Omega_d$  também temos uma influência suficientemente pequena no intervalo  $\chi \approx [-6; 1]$ . Considerando a componente de matéria bariônica  $\Omega_b$  não há alteração no comportamento da respectiva curva com a mudança de  $\alpha$ . Contudo, para a componente do dítaton  $\Omega_\phi$ , assim como temos uma influência mínima ao fixar  $\alpha$  e explorar  $Q_0$ , também temos uma influência mínima fixando  $Q_0$  e ajustando  $\alpha$ , mas ambos aumentos das devidas curvas iniciam-se em  $\chi = -2$ .

Em relação aos pontos de interseção, temos  $\Omega_r$  e  $\Omega_d$  em  $\chi \approx -7,98$  e  $\chi \approx -8,01$  para  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 2 \times 10^{-3} m_p^{-2}$ , respectivamente. Também temos outro ponto de interseção entre as componentes  $\Omega_d$  e  $\Omega_\phi$  em  $\chi \approx -0,38$  e  $\chi \approx -0,28$  para  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 2 \times 10^{-3} m_p^{-2}$ , respectivamente.

Na Figura(4.2)(b) fixamos  $Q_0 = 20$  e ajustamos  $\alpha$  para dois valores, como anteriormente. Comparando este gráfico com os dois gráficos anteriores, podemos observar que o aumento de  $Q_0$  apresenta influência mínima para as componentes de radiação  $\Omega_r$  e matérias escura  $\Omega_d$  e bariônica  $\Omega_b$ . Entretanto, para a componente do dítaton  $\Omega_\phi$ , notemos que há uma elevação mais acentuada da respectiva curva de evolução.

Portanto, as mudanças nos pontos de interseção são suficientemente pequenas, assim, considerando os pontos de interseção entre as componentes de radiação  $\Omega_r$  e matéria escura

$\Omega_d$  temos  $\chi \approx -8,03$  e  $\chi \approx -7,97$  para  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 2 \times 10^{-3}m_p^{-2}$ , respectivamente. E para as componentes de matéria escura  $\Omega_d$  e dílaton  $\Omega_\phi$  temos  $\chi \approx -0,51$  e  $\chi \approx -0,38$  correspondendo a  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 2 \times 10^{-3}m_p^{-2}$ , respectivamente.

## 4.2 Resultados para o parâmetro de Hubble $H(z)$

A Figura(4.3) expressa o comportamento do parâmetro de Hubble  $H$  em função do redshift  $z$  no qual fixamos  $Q_0 = 2$  e exploramos diversos valores para  $\alpha$ . Neste caso, podemos observar que em todos os valores admitidos para  $\alpha$  temos um decaimento seguido de um aumento. Notemos que o ponto mínimo de cada curva apresenta um redshift  $z$  que decresce com o aumento de  $\alpha$ , ou seja, para  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 5 \times 10^{-3}m_p^{-2}$ ,  $\alpha = 1 \times 10^{-2}m_p^{-2}$  e  $\alpha = 2 \times 10^{-2}m_p^{-2}$  temos  $z \approx 0,64$ ,  $z \approx 0,61$ ,  $z \approx 0,59$  e  $z \approx 0,54$ , respectivamente.

Por outro lado, os valores do parâmetro de Hubble  $H$  referentes aos pontos mínimos aumentam com o crescimento de  $\alpha$ , dessa forma assumindo valores entre  $H = 0,61 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  e  $H = 0,67 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . E admitindo  $z = 0$ , teremos valores entre  $H_0 \approx 67 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  e  $H_0 \approx 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

Notemos também, que após redshift  $z \approx 1,6$ , todas as curvas apresentam um aumento linear independente do valor de  $\alpha$ .

A Figura(4.4)(a) demonstra o comportamento do parâmetro de Hubble  $H$  em função do redshift  $z$  para diversos valores de  $Q_0$ , de modo que  $\alpha = 0$  seja fixo. Observemos que em todas as curvas, temos um decaimento de  $H$  seguido de uma elevação na qual há uma degenerescência iniciada em  $z \approx 2,6$ . Para  $Q_0 = 2$ ,  $Q_0 = 6$ ,  $Q_0 = 10$  e  $Q_0 = 20$  temos um ponto mínimo em  $z \approx 0,64$ ,  $z \approx 0,69$ ,  $z \approx 0,76$  e  $z \approx 0,85$ , respectivamente.

Notemos que os valores de  $z$ , referentes a cada ponto mínimo, aumentam com o aumento de  $Q_0$ . Neste caso,  $H$  assume valores mínimos aproximados entre  $0,62 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  e  $0,65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Também vale frisar que o decaimento de  $H$  até o ponto mínimo torna-se mais acentuado com o aumento de  $Q_0$ , assim como para valores menores de  $Q_0$  temos decaimentos mais lentos.

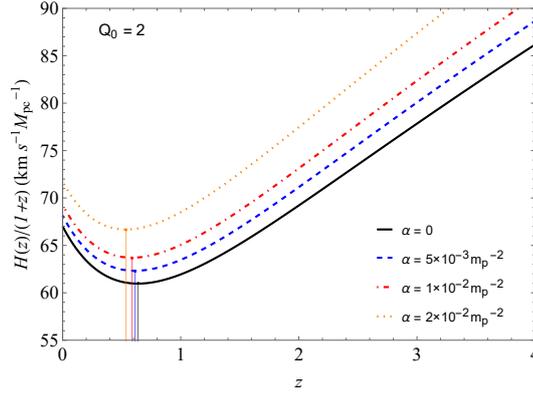


Figura 4.3: Comportamento do parâmetro de Hubble  $H$  em função do redshift  $z$  para diversos valores de  $\alpha$  e mantendo  $Q_0 = 2$  fixo. Neste caso, para um aumento de  $\alpha$  temos um decrescimento do redshift  $z$  do ponto mínimo de cada curva e um aumento dos valores do parâmetro de Hubble.

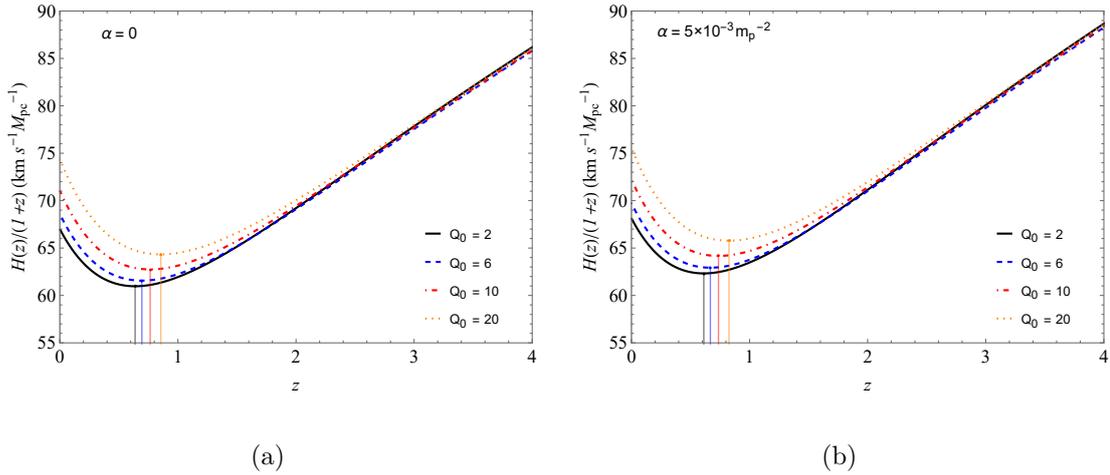


Figura 4.4: Comportamento do parâmetro de Hubble  $H$  em função do redshift  $z$  para diversos valores de  $Q_0$  e mantendo (a)  $\alpha = 0$  e (b)  $\alpha = 5 \times 10^{-3} m_p^{-2}$  fixos. A variação de  $H$  referente aos pontos mínimos permanece a mesma em ambos os gráficos. Portanto,  $H$  se eleva com o aumento de  $\alpha$ , e conseqüentemente, seus pontos mínimos assumem valores maiores, entretanto, diminuem os devidos valores de redshift  $z$ .

A Figura(4.4)(b) é similar a (a), entretanto  $\alpha = 5 \times 10^{-3} m_p^{-2}$  é mantido fixo. Neste caso, temos novamente um decaimento seguido de um aumento que torna-se degenerado em  $z \approx 2, 4$ . As curvas assumem pontos mínimos cujos valores do redshift são  $z \approx 0, 61$ ,  $z \approx 0, 67$ ,  $z \approx 0, 74$  e  $z \approx 0, 82$  correspondendo a  $Q_0 = 2$ ,  $Q_0 = 6$ ,  $Q_0 = 10$  e  $Q_0 = 20$ , respectivamente.

Neste gráfico, a variação de  $H$  referente aos pontos mínimos permanece a mesma

em relação ao gráfico em (a), ou seja, entre  $Q_0 = 2$  e  $Q_0 = 20$  os pontos mínimos estão compreendidos nos intervalos entre  $H \approx 0,62 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  e  $H \approx 0,65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , respectivamente. Dessa forma, podemos afirmar que  $H$  se eleva com o aumento de  $\alpha$ , e conseqüentemente, seus pontos mínimos assumem valores maiores, entretanto, diminuem os devidos valores de redshift  $z$ . Vale frisar que o decaimento de  $H$  para o ponto mínimo torna-se mais acentuado com o aumento de  $Q_0$ , ou seja, teremos decaimentos mais lentos considerando  $Q_0$  menores. Desta forma, o parâmetro de Hubble para  $z = 0$  assume valores entre  $H_0 \approx 67 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  e  $H_0 \approx 74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  para  $\alpha = 0$  e  $H_0 \approx 68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  e  $H_0 \approx 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  para  $\alpha = 5 \times 10^{-3} m_p^{-2}$ .

### 4.3 Resultados para o campo dilatônico $\phi$

A Figura(4.5) detalha o comportamento de  $\phi$  em função de  $\chi$  assumindo  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$  sendo fixo e explorando diversos valores para  $Q_0$ . Neste caso, há uma convergência de  $\phi(\chi) = 0$  para cada  $Q_0$  no intervalo  $\chi \approx [-20; -12]$ , seguido de um decaimento que finaliza em  $\phi(\chi \approx 1) = -10$ .

Notemos que, no intervalo  $\chi \approx [-10; -1]$ ,  $\phi(\chi)$  apresenta um decaimento que torna-se mais acentuado com a diminuição de  $Q_0$ , ou seja, o crescimento de  $Q_0$  reflete num decaimento mais lento para  $\phi(\chi)$ . Isso pode ser observado de forma mais clara analisando o decaimento no qual  $Q_0 = 20$  onde  $\phi(\chi \approx -7,5) \approx -1,5$  e  $\phi(\chi \approx -2) \approx -2$ , enquanto para  $Q_0 = 6$  temos  $\phi(\chi \approx -8) \approx -1,5$  e  $\phi(\chi \approx -7,3) \approx -2$ .

Observemos também, que a partir de  $\chi \approx -1$ , temos um decaimento expressivo que independe de  $Q_0$ .

A Figura(4.6)(a) é semelhante a anterior, porém, neste caso fixamos  $Q_0 = 2$  e exploramos três valores para  $\alpha$ . Como podemos observar, a variação de  $\alpha$  apresenta uma mudança suficientemente pequena no comportamento de  $\phi(\chi)$  que decai de forma degenerada no intervalo  $\chi \approx [-20; -1]$ , enquanto para o intervalo  $\chi \approx [-1; 1]$  temos um decaimento que torna-se suavemente mais lento com o aumento de  $\alpha$ .

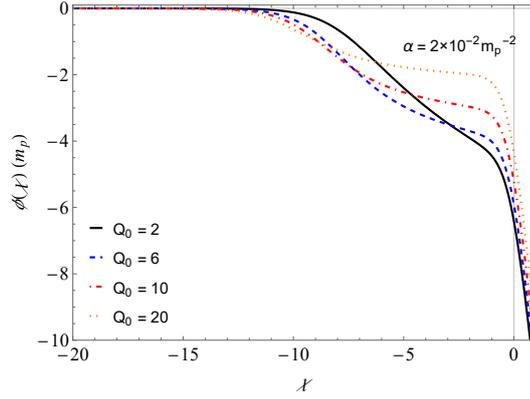


Figura 4.5: Evolução de  $\phi(\chi)$  em relação a  $\chi$  fixando  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$  e assumindo diversos valores para  $Q_0$ . Notemos que o crescimento de  $Q_0$  reflete num decaimento mais lento para  $\phi(\chi)$ .

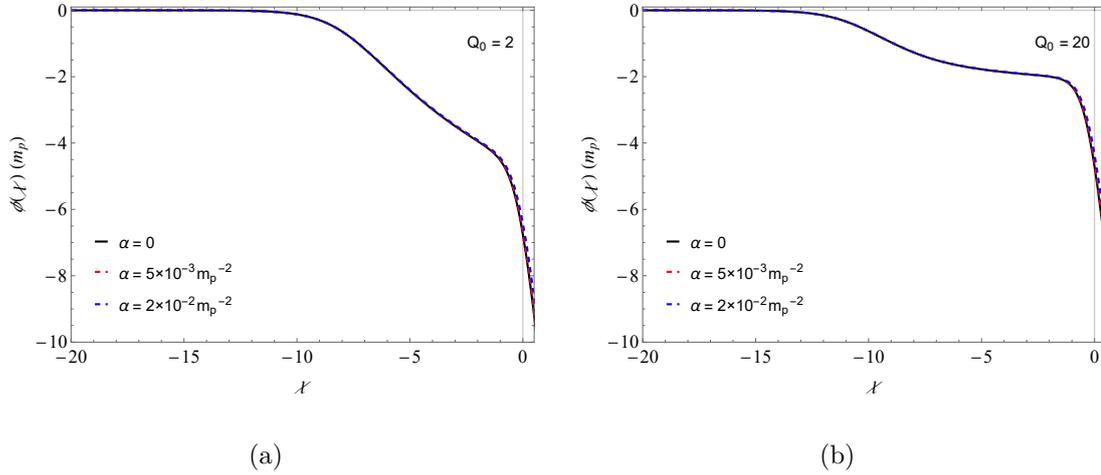


Figura 4.6: Evolução de  $\phi(\chi)$  em relação a  $\chi$  assumindo diversos valores para  $\alpha$  e mantendo (a)  $Q_0 = 2$  e (b)  $Q_0 = 20$  fixos. Em (a) notemos que a variação de  $\alpha$  apresenta uma mudança bastante pequena no comportamento de  $\phi(\chi)$  o qual decai de forma degenerada. Em (b) o decaimento de  $\phi(\chi)$  torna-se mais lento com o aumento de  $Q_0$ .

A Figura(4.6)(b), também representa o comportamento de  $\phi(\chi)$ , desta vez com  $Q_0 = 20$  e explorando três valores para  $\alpha$ . Notemos que o aumento de  $Q_0$  contribui para um decaimento mais lento no intervalo  $\chi \approx [-20; -1]$  o qual ocorre de forma degenerada, entretanto, para  $\chi \approx [-1; 1]$  também temos um decaimento que torna-se mais lento com o aumento de  $\alpha$ .

## 4.4 Resultados para $Q(\phi)$

A Figura(4.7) representa o comportamento de  $Q(\phi)$  (no gráfico, denotamos por  $q(\phi)$ ) em relação a  $\chi$  considerando diversos valores para  $Q_0$  de modo que  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$  seja fixo. Notemos que para  $Q_0 = 2$  temos um decaimento bastante lento no intervalo  $\chi \approx [-20; 0]$ , porém, mais acentuado fora deste intervalo. Em relação às demais curvas, temos um decaimento que torna-se mais acentuado com o aumento de  $Q_0$  admitindo  $\chi \approx [-20; -1]$ . Fora deste intervalo, temos um decaimento ainda mais expressivo.

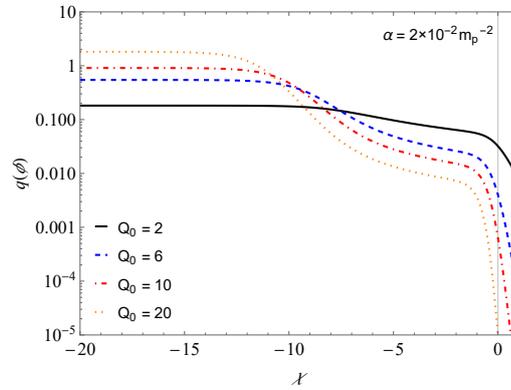


Figura 4.7: Evolução de  $Q(\phi)$  em relação a  $\chi$  fixando  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$  e assumindo diversos valores para  $Q_0$ . Notemos que para  $Q_0 = 2$  temos um decaimento bastante lento. Para as demais curvas o aumento de  $Q_0$  resulta num decaimento mais acentuado.

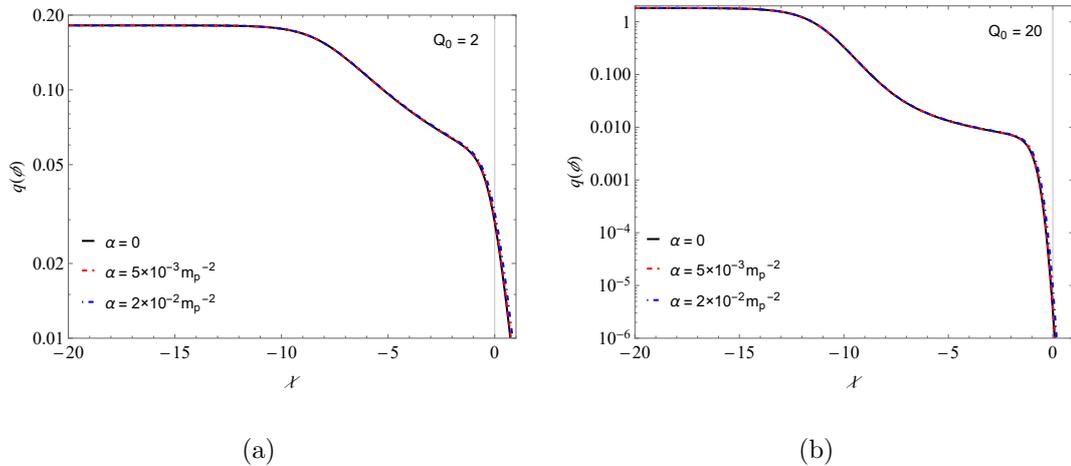


Figura 4.8: Evolução de  $Q(\phi)$  em relação a  $\chi$  assumindo diversos valores para  $\alpha$  e mantendo (a)  $Q_0 = 2$  e (b)  $Q_0 = 20$  fixos. Em (a) e (b) notemos que  $Q(\phi)$  decai de forma degenerada independente do valor de  $\alpha$ , no entanto, torna-se mais lento com o aumento de  $Q_0$ .

A Figura(4.8)(a) é similar a anterior, ou seja, expressa o comportamento de  $Q(\phi)$  em relação a  $\chi$ , isso mantendo  $Q_0 = 2$  fixo e explorando alguns valores para  $\alpha$ . Notemos que  $Q(\phi)$  decai de forma degenerada no intervalo  $\chi \approx [-20; -1]$ , ou seja, sem qualquer influência de  $\alpha$ . Fora deste intervalo,  $Q(\phi)$  decai mais lentamente com o aumento de  $\alpha$ .

A Figura(4.8)(b) é análoga a (a), contudo, fixamos  $Q_0 = 20$  para verificar o comportamento de  $Q(\phi)$  em relação a  $\chi$  mediante diversos valores para  $\alpha$ . Comparando com o gráfico anterior, temos um decaimento degenerado que torna-se mais lento com o aumento de  $Q_0$  e sem influência de  $\alpha$ , isso no intervalo  $\chi \approx [-20; -1]$ , entretanto, fora deste intervalo, temos um decaimento acentuado que aumenta suavemente com a diminuição de  $\alpha$ .

## 4.5 Resultados para as densidades de energia $\rho_r$ , $\rho_b$ ,

### $\rho_d$ e $\rho_\phi$

A Figura(4.9)(a) demonstra a evolução da densidade de energia em função de  $\chi$  para cada componente, isso fixando  $Q_0 = 2$  e considerando  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ .

Notemos que para  $\alpha = 0$ , as componentes de radiação  $\rho_r$  e matérias escura  $\rho_d$  e bariônica  $\rho_b$  apresentam um decaimento linear, de modo que para  $\rho_r$  temos um caso mais acentuado em relação a  $\rho_d$  e  $\rho_b$ .

Por outro lado, assumindo  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ , teremos modelos degenerados a  $\alpha = 0$  nos intervalos  $\chi \approx [-20; -1]$ ,  $\chi \approx [-20; 1]$  e  $\chi \approx [-20; 0, 5]$ , para  $\rho_r$ ,  $\rho_d$  e  $\rho_b$ , respectivamente. Fora destes intervalos, cada componente decai mais lentamente, de forma a  $\rho_r$ ,  $\rho_d$  e  $\rho_b$  convergirem suas energias após  $\chi \approx 3$ .

Para componente do dÍlaton,  $\rho_\phi$ , temos um decaimento degenerado, considerando ambos os cenários de  $\alpha$ , e não linear. Tal decaimento torna-se mais lento após  $\chi \approx -3$ , assim, apresentando pontos de interseção com cada uma das demais componentes, ou seja, em  $\chi \approx -2, 5$ ,  $\chi \approx -1$  e  $\chi \approx -0, 5$  temos pontos de interseção entre os decaimentos de

$\rho_\phi$  com  $\rho_r$ ,  $\rho_b$  e  $\rho_d$ , respectivamente.

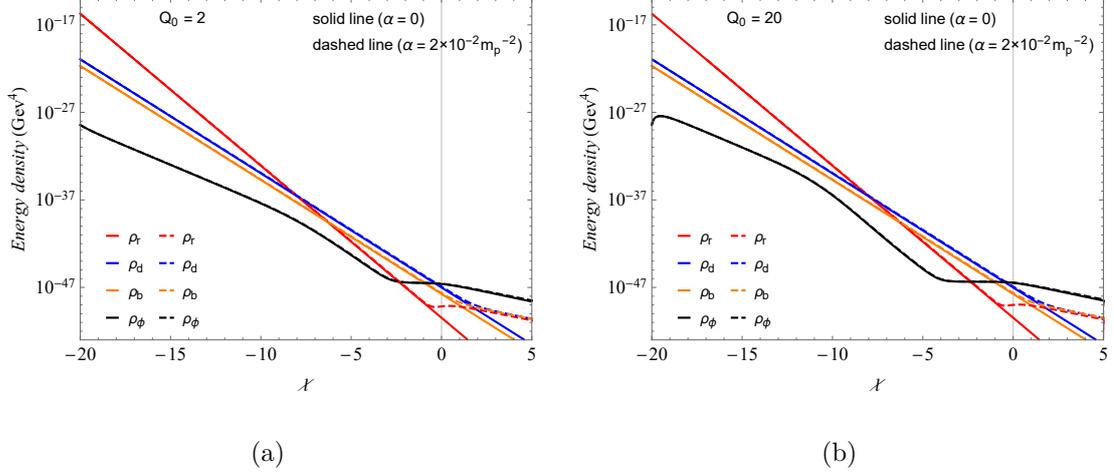


Figura 4.9: Evolução das densidades de energia para diferentes componentes explorando cenários com  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$  e assumindo (a)  $q_0 = 2$  e (b)  $q_0 = 20$  fixos. Notemos que para  $\rho_\phi$  temos um decaimento degenerado, isso considerando ambos os cenários para  $\alpha$ , e não linear. Em relação aos decaimentos de  $\rho_r$ ,  $\rho_b$  e  $\rho_d$ , temos curvas lineares e degeneradas em  $\alpha$ .

A Figura(4.9)(b) é análoga a (a), ou seja, demonstra o comportamento das densidades de energia  $\rho_\phi$ ,  $\rho_r$ ,  $\rho_d$  e  $\rho_b$  em relação a  $\chi$ , contudo fixamos  $Q_0 = 20$  e exploramos os mesmos valores para  $\alpha$ .

Comparando (a) e (b), notemos que os decaimentos de  $\rho_r$ ,  $\rho_b$  e  $\rho_d$  permanecem lineares e degenerados em  $\alpha$ , isso assumindo os intervalos  $\chi \approx [-20; -0, 7]$ ,  $\chi \approx [-20; 0, 2]$  e  $\chi \approx [-20; 0, 7]$ , respectivamente, considerando  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ .

Assim, como em (a), em (b) também temos as densidades de energia convergindo para um mesmo decaimento, isso após  $\chi \approx 2$ . Portanto, podemos afirmar que  $\chi$ , correspondente ao ponto de convergência das respectivas componentes quando  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ , decresce com o aumento de  $Q_0$ .

Em relação a componente do dítaton  $\rho_\phi$ , (b) apresenta um decaimento mais acentuado quando comparado a (a), ou seja,  $\rho_\phi$  possui um decaimento mais expressivo com o aumento  $Q_0$ . Para os pontos de interseção entre  $\rho_\phi$  e as demais componentes, teremos os mesmos valores correspondentes a  $\chi$ , porém, tais pontos ocorrem numa densidade de energia menor quando comparado a (a).

## 4.6 Análise dos resultados

Tendo em vista as divergências nas medições da constante de Hubble  $H_0$  em relação às diferentes técnicas utilizadas, ou seja, os dados observacionais do Telescópio Espacial Hubble e SHOES referentes à variáveis Cefeidas em [133, 134] apresentam resultados diferentes nas medições de  $H_0$  em relação aos obtidos pela sonda Planck 2018 [135], tal problema é conhecido como tensão de Hubble.

Em relação ao Telescópio Espacial Hubble, realizaram-se observações em 42 SNe IA em  $z < 0,01$  com o propósito de se calibrar a constante de Hubble  $H_0$  e apresentou-se testes de determinações de fundo demonstrando que as medições são precisas na presença da aglomeração e como resultado da amostra Cefeida-SN obteve-se  $H_0 = 73,04 \pm 1,04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [134].

Por outro lado, a sonda Planck 2018 realizou medições de parâmetros cosmológicos das anisotropias do CMB combinando informações dos mapas de temperatura, polarização e reconstrução de lentes obtendo-se como resultado  $H_0 = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [135].

Vale frisar que a diferença entre ambas as técnicas consiste em observações cujo processamento está sob o modelo  $\Lambda\text{CDM}$ , isso considerando os dados de Planck CMB. Conseqüentemente, foram apresentados diversos modelos à literatura com o propósito de solucionar tal problema, entretanto, de forma insatisfatória [135].

Admitiremos uma alternativa para solucionar este caso, assumindo cenários ajustados por  $\alpha$  e  $Q_0$ , conforme a Tabela (4.1), na qual utilizamos os resultados numéricos obtidos nas Figuras (4.3) e (4.4).

O cenário I está consistente com os dados observacionais de Planck 2018, pois sua faixa de valores para  $H_0$  está compreendida parcialmente nos intervalos dos resultados da respectiva técnica. Em relação ao cenário II, este está consistente com Riess et al. 2019 e Planck 2018, uma vez que apresenta uma faixa de valores para  $H_0$  que compreende parcialmente os resultados obtidos por ambas as técnicas. Para o cenário III, este apresenta uma faixa de valores para  $H_0$  que engloba quase todo o intervalo dos resultados de Riess

et al. 2019 e parcialmente Planck 2018. Um comportamento semelhante sobre a constante de Hubble também está presente no contexto das álgebras  $W_3$  [136].

Técnicas	$H_0$	$\alpha$	$Q_0$
Riess <i>et al.</i> 2019	$74,03 \pm 1,42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	–	–
Planck 2018	$67,3 \pm 1,20 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	–	–
Cenário I	$67 - 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	$0 - 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$	2
Cenário II	$67 - 74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	0	2 – 20
Cenário III	$68 - 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	$5 \times 10^{-3} m_p^{-2}$	2 – 20

Tabela 4.1: Comparação das faixas de valores de  $H_0$  obtidos por Riess et al. 2019 e Planck 2018 com os Cenários I, II e III obtidos por métodos numéricos através dos parâmetros cosmológicos  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ ,  $\alpha = 5 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ ,  $Q_0 = 2$  e  $Q_0 = 20$ . Quase todo o intervalo dos valores de  $H_0$  em Riess et al. 2019 está compreendido na faixa de valores dispostos no Cenário III e parcialmente compreendido na faixa de valores do Cenário II. Enquanto ao intervalo dos valores de  $H_0$  para Planck 2018, este compreende parcialmente os Cenários I, II e III.

Nos cenários apresentados, o campo dilatônico tende atingir o limite  $\phi \rightarrow -\infty$  conforme representado nas Figuras (4.5) e (4.6), ou seja, trata-se de um regime de acoplamento fraco. Portanto, teremos cenários de quintessência uma vez que o potencial dado por (3.13) tende a zero.

Também podemos comparar os resultados numéricos referentes às Figuras (4.1) e (4.2) que expressam o parâmetro de densidade  $\Omega$  para radiação, matérias bariônica e escura e campo dilatônico, isso mediante ajuste dos parâmetros cosmológicos  $\alpha$  e  $Q_0$ , conforme a Tabela (4.2).

Os valores apresentados na Tabela (4.2) correspondem a  $\chi = 0$ . Notemos que para um mesmo  $\alpha$ ,  $\Omega_\phi$  aumenta, enquanto  $\Omega_b$  e  $\Omega_d$  diminuem com o aumento de  $Q_0$ . Entretanto,  $\Omega_r$  diminui e aumenta, assumindo  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$ , respectivamente, com o aumento de  $Q_0$ .

$\Omega_r$	$\Omega_d$	$\Omega_b$	$\Omega_\phi$	$\alpha$	$Q_0$
$9,4 \times 10^{-5}$	0,271	0,049	0,679	0	2
$7,7 \times 10^{-5}$	0,219	0,040	0,740	0	20
$16,2 \times 10^{-5}$	0,302	0,056	0,636	$2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$	2
$19,7 \times 10^{-5}$	0,266	0,047	0,701	$2 \times 10^{-2} m_p^{-2}$	20

Tabela 4.2: Demonstração dos parâmetros de densidade para radiação, matérias bariônica e escura e campo dilatônico em  $\chi = 0$  assumindo diferentes valores para  $\alpha$  e  $Q_0$ .

Em relação às densidades  $\Omega_r$ ,  $\Omega_d$ ,  $\Omega_b$  e  $\Omega_\phi$  nas Figuras (4.1) e (4.2), e Tabela (4.2), notemos que para os regimes de parâmetros considerados nos cenários I, II e III, não há alterações significativas em relação à base de Planck  $\Lambda$ CDM.

$z_{eq}$	$H_0$	$a_{eq}$	$\alpha$	$Q_0$
3391	67,0	$2,9 \times 10^{-4}$	0	2
3346,6	74,4	$3,0 \times 10^{-4}$	0	20
604,1	68,1	$16,5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-3}$	2
425,6	75,5	$23,4 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-3}$	20

Tabela 4.3: Demonstração dos valores de redshift para igualdade matéria-radiação  $z_{eq} \sim 3000$ , respectivos  $a_{eq}$  e constante de Hubble  $H_0$  para diferentes valores de  $\alpha$  e  $Q_0$ . Para  $\alpha \neq 0$  temos valores inaceitáveis de  $z_{eq} \ll 3000$ , portanto, uma tratamento estatístico pode informar que  $\alpha$  deve assumir um valor bastante pequeno ou nulo.

A Tabela (4.3) compara os valores de redshift para igualdade matéria-radiação  $z_{eq} \sim 3000$ , correspondente  $a_{eq}$  e constante de Hubble  $H_0$  para diferentes valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $Q_0$ . Notemos que para  $\alpha \neq 0$ , temos valores inaceitáveis para  $z_{eq} \ll 3000$ . Dessa forma, podemos afirmar que uma análise estatística pode assumir valores bastante pequenos ou nulos para  $\alpha$ . Vale frisar que para  $\alpha = 0$  temos  $Q_0 = 2$  e  $Q_0 = 20$ , ou seja, comparando esses dados com a Tabela (4.1), conseqüentemente nos deparamos com o Cenário II.

Portanto, as condições iniciais para as densidades de energia remetem a valores atuais aceitáveis [42], por exemplo, considerando  $\alpha = 0$  e  $Q_0 = 2$  em  $\chi = 0$ , logo teremos  $\rho_r = 3,44 \times 10^{-51} GeV^4$ ,  $\rho_d = 9,87 \times 10^{-48} GeV^4$ ,  $\rho_b = 1,79 \times 10^{-48} GeV^4$  e  $\rho_\phi = 2,47 \times 10^{-47} GeV^4$ .

Ainda na Tabela (4.3), podemos notar que para um valor fixo de  $\alpha$ , o aumento de  $Q_0$  resulta num crescimento do fator de escala  $a_{eq}$  e do parâmetro de Hubble  $H_0$ , mantendo consistência com a Figura (4.4), e uma diminuição do valor do redshift de equipartição radiação-matéria  $z_{eq}$ , cujo decrescimento torna-se mais expressivo conforme uma escolha de um valor superior para fixar  $\alpha$ .

# Capítulo 5

## Considerações Finais

A teoria de gravidade modificada surge como uma proposta de generalizar um modelo gravitacional que seja consistente com as observações, de modo que tenhamos uma ação mais geral para o campo gravitacional em relação a ação de Einstein-Hilbert. Dessa forma, consideramos uma função  $F(R, T)$  que modifica as teorias de gravidade, cujo Lagrangeano gravitacional é dado por uma função arbitrária do escalar de curvatura  $R$  de Ricci e do traço  $T$  do tensor energia momento. Tal modelo depende de um termo fonte que corresponde à variação do tensor energia momento em relação à métrica, ou seja, também podemos representar esta variação em termos da lagrangeana de matéria. Em outras palavras, dependendo da lagrangeana de matéria temos uma correspondente equação de campo.

Nesse respectivo modelo de gravidade modificada por  $F(R, T)$  a derivada covariante do tensor energia momento não é nula, portanto, o movimento de massa não representa uma geodésica, dessa forma, temos uma aceleração extra em virtude do acoplamento entre a energia e a matéria escuras.

Por controlar a dinâmica inflacionária, o campo de dÍlaton satisfaz os modelos de supercordas, sobretudo os cenários cosmológicos nos quais possuem uma ação efetiva da corda. Desta maneira, para descrever um cenário de energia escura podemos considerar a ação efetiva no referencial da corda, entretanto, adicionando as correções quânti-

cas dependentes do dilatón. Portanto, para o limite de acoplamento  $\phi \rightarrow -\infty$ , como  $\exp(-\psi) = \exp(-\phi) = Z$ , podemos recuperar a ação efetiva da corda de menor ordem com a adição de um potencial na ação.

Exploramos um modelo de gravidade modificada por  $F(R, T)$  sob a perspectiva da teoria das cordas num cenário dominado por um campo dilatônico, isso assumindo uma métrica reescalada através de uma transformação conforme cujo novo sistema de coordenadas é representado pelo referencial de Einstein. O modelo  $F(R, T)$  apresenta contribuições lineares do traço do tensor energia momento. Utilizamos métodos numéricos com ajustes de parâmetros cosmológicos, obtendo dessa forma, resultados cujo intervalo compreende uma faixa de valores relacionada às técnicas desenvolvidas por Riess et al. 2019 e Planck 2018. Caso os resultados obtidos por Riess et al. 2019 e Planck 2018 sejam confrontados com o modelo  $\Lambda$ CDM, conseqüentemente, também poderemos estimar a consistência do modelo  $F(R, T)$  aos dados observacionais. Em outras palavras, ajustando o espaço de parâmetros  $\alpha$  e  $Q_0$  adequadamente podemos obter extensões do modelo  $\Lambda$ CDM. Tal estudo também permite obter valores para a constante de Hubble  $H_0$  num intervalo que compreende os resultados de Planck e SHOES. Em relação ao redshift de igualdade matéria-radiação  $z_{eq}$  temos resultados satisfatórios considerando  $\alpha$  bastante pequeno ou nulo, como podemos ver na Tabela (5.3). Novos estudos com modelos diferentes devem ser abordados, como por exemplo, podemos aplicar diversas investigações sobre o regime inflacionário, como restringir os parâmetros através do gráfico de contorno no plano feito de índices espectrais escalares e razão tensor-escalar.

O presente modelo proposto de gravidade modificada  $F(R, T)$  apresentou contribuições do traço do tensor energia momento de modo que este pode ser ajustado através de  $\alpha$  ao assumir um valor para  $Q_0$  com o propósito de se obter grandezas cosmológicas consistentes com os dados observacionais, como por exemplo, o redshift de equipartição radiação-matéria  $z_{eq}$  ou ainda o parâmetro de Hubble  $H_0$ .

Como perspectiva, numa próxima publicação abordando esta e outras questões,

analisaremos a probabilidade de espaço de parâmetro nos cenários I, II e III utilizando o código COSMOMC como naqueles considerados em [137]. Vale frisar que também abordaremos modelos inflacionários sob a perspectiva de cenários com acoplamentos dilatônicos intermediários em gravidade modificada  $F(R, T)$ .

# Bibliografia

- [1] A. G. Riess et al., *Astron. J.* 116, 1009, 1998.
- [2] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* 517, 565, 1999.
- [3] Koivisto, T.; Mota, D.F. Dark energy anisotropic stress and large scale structure formation. *Phys. Rev. D*, 73, 083502, 2006.
- [4] Daniel, S.F.; Caldwell, R.R.; Cooray, A.; Melchiorri, A. Large scale structure as a probe of gravitational slip. *Phys. Rev. D*, 77, 103513, 2008.
- [5] Caldwell, R.R.; Doran, M. Cosmic microwave background and supernova constraints on quintessence: Concordance regions and target models. *Phys. Rev. D*, 69, 103517, 2004.
- [6] Huang, Z.Y.; Wang, B.; Abdalla, E.; Su, R.K. Holographic explanation of wide-angle power correlation suppression in the cosmic microwave background radiation. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 0605, 013, 2006.
- [7] Eisenstein, D.J.; Zehavi, I.; Hogg, D.W.; Scoccamarro, R.; Blanton, M.R.; Nichol, R.C.; Scranton, R.; Seo, H.J.; Tegmark, M.; Zheng, Z.; et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *Astrophys. J.* 633, 560, 2005.
- [8] Percival, W.J.; Reid, B.A.; Eisenstein, D.J.; Bahcall, N.A.; Budavari, T.; Frieman, J.A.; Fukugita, M.; Gunn, J.E.; Ivezić, Ž.; Knapp, G.R.; et al. Baryon acoustic

- oscillations in the Sloan Digital Sky Survey data release 7 galaxy sample. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 401, 2148, 2010.
- [9] Peebles, P.J.E.; Ratra, B. The Cosmological Constant and Dark Energy. *Rev. Mod. Phys.* 75, 559–606, 2003.
- [10] Padmanabhan, T. Cosmological constant: The Weight of the vacuum. *Phys. Rep.* 380, 235–320, 2003.
- [11] Sahni, V. The Cosmological constant problem and quintessence. *Class. Quant. Grav.* 19, 3435–3448, 2002.
- [12] Velten, H.E.; Vom Marttens, R.F.; Zimdahl, W. Aspects of the cosmological “coincidence problem”. *Eur. Phys. J. C*, 74, 3160, 2014.
- [13] Tsujikawa, S. Quintessence: A Review. *Class. Quant. Grav.* 30, 214003, 2013.
- [14] J.P. Uzan, *Phys. Rev. D* 59, 123510, 1999.
- [15] T. Chiba, *ibid.* 60, 083508, 1999.
- [16] L. Amendola, *ibid.* 60, 043501, 1999.
- [17] F. Perrotta; C. Baccigalupi and S. Matarrese, *ibid.* 61, 023507, 2000.
- [18] D.J. Holden and D. Wands, *ibid.* 61, 043506, 2000.
- [19] N. Bartolo and M. Pietroni, *ibid.* 61, 023518, 2000.
- [20] O. Bertolami and P.J. Martins, *ibid.* 61, 064007, 2000.
- [21] R. De Ritis, A.A. Marino, C. Rubano, and P. Scudellaro, *ibid.* 62, 043506, 2000.
- [22] R. Bean and J. Magueijo, *Phys. Lett. B* 517, 177, 2001.
- [23] S. Sen and T.R. Seshadri, *gr-qc/0007079*, 2001.
- [24] N. Banerjee and D. Pavon, *Phys. Rev. D* 63, 043504, 2001.

- [25] E. Gunzig, *ibid.* 63, 067301, 2001.
- [26] E. Witten, *Phys. Lett.* B149, 351, 1984.
- [27] T. Damour and K. Nordtvedt, *Phys. Rev. D* 48, 3436, 1993.
- [28] T. Damour and K. Nordtvedt, *Phys. Rev. Lett.* 70, 2217, 1993.
- [29] T. Damour, G.W. Gibbons, and C. Gundlach, *Phys. Rev. Lett.* 64, 123, 1990.
- [30] Abbott, B.P.; et al. [LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration]. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102, 2016.
- [31] Buchdahl, H.A. Non-linear Lagrangians and cosmological theory. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 150, 1–8, 1970.
- [32] Dzhunushaliev, V.; Folomeev, V.; Kleihaus, B.; Kunz, J. Modified gravity from the quantum part of the metric. *Eur. Phys. J. C* 74, 2743, 2014.
- [33] Yang, R. Effects of quantum fluctuations of metric on the universe. *Phys. Dark Universe*, 13, 87, 2016.
- [34] Liu, X.; Harko, T.; Liang, S.D. Cosmological implications of modified gravity induced by quantum metric fluctuations. *Eur. Phys. J. C* 76, 420, 2016.
- [35] Xu, M.X.; Harko, T.; Liang, S.D. Quantum Cosmology of  $f(R, T)$  gravity. *Eur. Phys. J. C* 76, 449, 2016.
- [36] Moraes, P.H.R.S.; Sahoo, P.K. The simplest non-minimal matter-geometry coupling in the  $f(R, T)$  cosmology. *Eur. Phys. J. C* 77, 480, 2017.
- [37] Shabani, H.; Ziaie, A.H. Bouncing cosmological solutions from  $f(R, T)$  gravity. *Eur. Phys. J. C* 78, 397, 2018.

- [38] Debnath, P.S. Bulk viscous cosmological model in  $f(R, T)$  theory of gravity. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 16, 1950005, 2019.
- [39] Bhattacharjee, S.; Sahoo, P. Comprehensive analysis of a non-singular bounce in  $f(R, T)$  gravitation. *Phys. Dark Universe* 28, 100537, 2020.
- [40] Bhattacharjee, S.; Santos, J.R.L.; Moraes, P.H.R.S.; Sahoo, P.K. Inflation in  $f(R, T)$  gravity. *Eur. Phys. J. Plus* 135, 576, 2020.
- [41] Gamonal, M. Slow-roll inflation in  $f(R, T)$  gravity and a modified Starobinsky-like inflationary model. *Phys. Dark Universe* 31, 100768, 2021.
- [42] Brito, F.A.; Borges, C.H.A.B.; Campos, J.A.V.; Costa, F.G. Weak Coupling Regime in Dilatonic  $f(R, T)$  Cosmology. *Universe* 10, 134. <https://doi.org/10.3390/universe10030134>, 2024.
- [43] M. Bianchi, E. Coccia, C. Colacino, V. Fafone and F. Fucito, *Class. Quantum Grav.* 13, 2865, 1996.
- [44] M. Bianchi, M. Brunetti, E. Coccia, F. Fucito and J. A. Lobo, *Phys. Rev. D* 57, 4525, 1998.
- [45] M. Brunetti E. Coccia, V. Fafone and F. Fucito, *Phys. Rev. D* 59, 044027, 1999.
- [46] M. Shibata; K. Nakao and T. Nakamura, *Phys. Rev. D* 50, 7304, 1994.
- [47] M. Maggiore and A. Nicolis, Detection strategies for scalar gravitational waves with interferometers and resonant spheres, *gr-qc/9907055*, 1999.
- [48] T. Harada; T. Chiba; K. Nakao and T. Nakamura, *Phys. Rev. D* 55, 2024, 1997.
- [49] M. Gasperini, Relic dilatons in string cosmology, in *Proc. of the 12th It. Conference on "General Relativity and Gravitational Physics"* (Rome, September 1996), edited by M. Bassan et al. (World Scientific, Singapore), p. 181, 1997.

- [50] T. Taylor and G. Veneziano, *Phys. Lett. B* 213, 450, 1988.
- [51] M. Gasperini, *Phys. Lett. B* 470 67, 1999.
- [52] M. Gasperini: *Elements of string cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge), in press, 2007.
- [53] A. Papapetrou, *Proc. Roy. Soc. A* 209, 248, 1951.
- [54] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology* (Wiley, New York), 1972.
- [55] J. Ellis, S. Kalara, K. A. Olive and C. Wetterich, *Phys. Lett. B* 228, 264, 1989.
- [56] M. Gasperini and G. Veneziano, *Phys. Rev. D* 50, 2519, 1994.
- [57] I. Antoniadis, On possible modifications of gravitation in the (sub)millimetre range, in *Proc. of the XXXIV Rencontres de Moriond on “Gravitational Waves and Experimental Gravity”* (Les Arcs, January), 1999.
- [58] E. Fischbach and C. Talmadge, *Nature* 356, 207, 1992.
- [59] C. D. Hoyle, et al., *Phys. Rev. D* 70, 042004, 2004.
- [60] T. Damour and A. M. Polyakov, *Nucl. Phys. B* 423, 352, 1994.
- [61] T. Damour and A. M. Polyakov, *Gen. Rel. Grav.* 26, 1171, 1994.
- [62] M. Gasperini and G. Veneziano, *Phys. Rep.* 373, 1, 2003.
- [63] P. Astier et al: *Astron. Astrophys.* 447, 31, 2006.
- [64] M. Gasperini: *Phys. Rev. D* 64, 043510 (2001).
- [65] N. Kaloper, K. A. Olive: *Astropart. Phys.* 1, 185, 1993.
- [66] M. Gasperini: [arXiv:hep-th/0702166v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/0702166v2) 2007.
- [67] M. Gasperini, F. Piazza, G. Veneziano: *Phys. Rev. D* 65, 023508, 2002.

- [68] L. Amendola: Phys. Rev. D 62, 043511, 2000.
- [69] L. Amendola, D. Tocchini-Valentini: Phys. Rev. D 64, 04359, 2001.
- [70] L. Amendola, D. Tocchini-Valentini: Phys. Rev. D 66 043528, 2002.
- [71] G. Veneziano, JHEP 0206, 051, 2002.
- [72] R.W. Hellings, in Gravitational measurements, Fundamental Metrology and Constants, Erice, June, 1987, edited by V.N. Melnikov, Vol. 230 of NATO Advanced Study Institute Series C (Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, The Netherlands), p. 181, 1988.
- [73] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 91, 07130, 2003.
- [74] M. Gasperini, M. Giovannini, G. Veneziano: Phys. Lett. B 569, 113 (2003); Nucl. Phys. B 694, 206, 2004.
- [75] L. Amendola, M. Gasperini, C. Ungarelli: arXiv:0711.5022 [gr-qc], 2007.
- [76] L. P. Chimento; A. S. Jakubi and D. Pavon, Phys. Rev. D 62, 063508, 2000.
- [77] W. Zimdahl; D. J. Schwarz; A. B. Balakin and D. Pavon, Phys. Rev. D 64, 063501, 2001.
- [78] S. Sen and A. A. Sen, Phys. Rev. D 63,124006, 2001.
- [79] A. A. Sen and S.Sen, Mod. Phys. Lett. A 16, 1303, 2001.
- [80] W. Zimdahl and D. Pavon, Phys. Lett. B 521, 133, 2001.
- [81] B. Ratra; P. J. E. Peebles: Phys. Rev. D 37 3406, 1988.
- [82] C. Wetterich: Nucl. Phys. B 302, 668, 1988.
- [83] M. S. Turner and C. White: Phys. Rev. D 56, 4439, 1997.
- [84] R. R. Caldwell; R. Dave and P. J. Steinhardt: Phys. Rev. Lett. 80, 1582, 1998.

- [85] Zlatev, L. Wang, P. J. Steinhardt: Phys. Rev. Lett. 82, 896, 1999.
- [86] Zlatev, L. Wang, P. J. Steinhardt: Phys. Rev. D 59, 123504, 1999.
- [87] L. Amendola; M. Gasperini; D. Tocchini-Valentini and C. Ungarelli: Phys. Rev. D 67, 043512, 2003.
- [88] L. Amendola; M. Gasperini and F. Piazza: JCAP 09 , 014, 2004.
- [89] L. Amendola, M. Gasperini and F. Piazza: Phys. Rev. D 74, 127302, 2006.
- [90] M. Doran and J. Jaeckel, Phys. Rev. D66, 043519, 2002.
- [91] S. S. Gubser and P. J. E. Peebles, Phys. Rev. D70, 123511, 2004.
- [92] P. Steinhardt, in Critical problems in physics, ed. by V. L. Fitch and D. R. Marlow (Princeton University press, Princeton NJ), 1997.
- [93] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner, Phys. Rev. D 70, 043528 [astro-ph/0306438], 2004.
- [94] S. M. Carroll, Phys. Rev. Lett. 81, 3067 [astro-ph/9806099], 1998.
- [95] T. Barreiro; E. J. Copeland and N. J. Nunes, Phys. Rev. D 61, 127301 [astro-ph/9910214], 2000.
- [96] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D 68, 123512 [hep-th/0307288], 2003.
- [97] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rept. 505:59-144, arXiv:1011.0544 [gr-qc], 2011.
- [98] A. H. Guth, Phys. Rev. D 23, 347, 1981.
- [99] A. D. Linde, Phys. Lett. 129B, 177, 1983.
- [100] A. D. Linde, Phys. Lett. 162B, 281, 1985.
- [101] P. A. R. Ade et al. [Planck Collaboration], Astron. Astrophys. 594, A20 [arXiv:1502.02114 [astro-ph.CO]], 2016.

- [102] A. R. Liddle and L. A. Urena-Lopez, Phys. Rev. Lett. 97, 161301 [astro-ph/0605205], 2006.
- [103] J. Q. Xia and X. Zhang, Phys. Lett. B 660, 287 [arXiv:0712.2570 [astro-ph]], 2008.
- [104] E. Elizalde; S. Nojiri; S. D. Odintsov and D. Saez-Gomez, Eur. Phys. J. C 70, 351 [arXiv:1006.3387 [hep-th]], 2010.
- [105] S. Nojiri and S. D. Odintsov, e Conf C 0602061 (2006) 06 [Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 4, 115] [hep-th/0601213], 2007.
- [106] W. Hu and I. Sawicki, Phys. Rev. D 76, 064004, [arXiv:0705.1158 [astro-ph]], 2007.
- [107] S. Capozziello, S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B 634, 93, [arXiv:hep-th/0512118], 2006.
- [108] R. R. Caldwell, Phys. Lett. B 545, 23, [arXiv:astro-ph/9908168], 2002.
- [109] S. Capozziello, S. Nojiri, S. D. Odintsov and A. Troisi, Phys. Lett. B 639, 135, [arXiv:astro-ph/0604431], 2006.
- [110] A. D. Dolgov and M. Kawasaki, Phys. Lett. B 573, 1, [arXiv:astro-ph/0307285], 2003.
- [111] S. Capozziello; V. F. Cardone; S. Carloni and A. Troisi, astro-ph/0307018, 2003.
- [112] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B 657, 238, [arXiv:0707.1941 [hep-th]], 2007.
- [113] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D 77, 026007, [arXiv:0710.1738 [hep-th]], 2008.
- [114] G. Cognola; E. Elizalde; S. Nojiri; S. D. Odintsov; L. Sebastiani and S. Zerbini, Phys. Rev. D 77, 046009, [arXiv:0712.4017 [hep-th]], 2008.

- [115] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 190, 155 [arXiv:1008.4275 [hep-th]], 2011.
- [116] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* 599, 137 [astro-ph/0403622], 2004.
- [117] G. Allemandi; A. Borowiec; M. Francaviglia and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* 72, 063505 [gr-qc/0504057], 2005.
- [118] S. Nojiri, S. D. Odintsov and V.K. Oikonomou, arXiv:1705.11098v3 [gr-qc], 2021.
- [119] S. Nojiri; S. D. Odintsov, and P. V. Treyakov, arXiv:0710.5232[hep-th], 2007.
- [120] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* 652, 343, [arXiv:0706.1378], 2007.
- [121] C. Q. Geng; C. C. Lee; E. N. Saridakis and Y. P. Wu, *Phys. Lett. B* 704, 384 [arXiv:1109.1092 [hep-th]], 2011.
- [122] G. R. Bengochea and R. Ferraro, *Phys. Rev. D* 79, 124019 [arXiv:0812.1205 [astro-ph]], 2009.
- [123] J. W. Maluf, *Annalen Phys.* 525, 339 [arXiv:1303.3897 [gr-qc]], 2013.
- [124] R. Weitzenböck, *Invariantentheorie*, Noordhoff, Gronningen, 1923.
- [125] Y. F. Cai; S. Capozziello; M. De Laurentis and E. N. Saridakis, *Rept. Prog. Phys.* 79, no.10, 106901 [arXiv:1511.07586 [gr-qc]], 2016.
- [126] K. Hayashi and T. Shirafuji, *Phys. Rev. D* 19 (1979) 3524 Addendum: [*Phys. Rev. D* 24, 3312], 1982.
- [127] A. Paliathanasis; S. Basilakos; E. N. Saridakis; S. Capozziello; K. Atazadeh; F. Darabi and M. Tsamparlis, *Phys. Rev. D* 89, 104042 [arXiv:1402.5935 [gr-qc]], 2014.
- [128] L. Iorio and E. N. Saridakis, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 427, 1555 [arXiv:1203.5781 [gr-qc]], 2012.

- [129] T. Harko; F. S. N. Lobo; S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D 84, 024020 [arXiv:1104.2669 [gr-qc]], 2011.
- [130] T. Koivisto, Classical Quantum Gravity 23, 4289, 2006.
- [131] A. Guth and D. Kaiser, arXiv:astro-ph/0502328, 2005.
- [132] A. Guth, arXiv:astro-ph/0404546, 2004.
- [133] Riess, A.G.; Casertano, S.; Yuan, W.; Macri, L.M.; Scolnic, D. Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond  $\Lambda$ CDM. *Astrophys. J.*, 876, 85, 2019.
- [134] Riess, A.G.; Yuan, W.; Macri, L.M.; Scolnic, D.; Brout, D.; Casertano, S.; Jones, D.O.; Murakami, Y.; Anand, G.S.; Breuval, L.; et al. A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with  $1\text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team. *Astrophys. J. Lett.* , 934, L7, 2022.
- [135] Aghanim, N.; et al. [Planck]. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.* 2020, 641, A6; Erratum in *Astron. Astrophys.*, 652, C4, 2021.
- [136] Ambjorn, J.; Watabiki, Y. Easing the Hubble constant tension. *Mod. Phys. Lett. A*, 37, 2250041, 2022.
- [137] Santos, J.R.L.; da Costa, S.S.; Santos, R.S. Cosmological models for  $f(R, T) - \Lambda(\phi)$  gravity. *Phys. Dark Univ.*, 42, 101356, 2023.