



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Pós-graduação em Física

Tópicos de Defeitos em Teoria Clássica de Campos

Isaiane Rocha Bezerra

Dissertação de Mestrado

João Pessoa-PB

2023

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Isaiane Rocha Bezerra

Tópicos de Defeitos em Teoria Clássica de Campos

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho*

João Pessoa-PB
2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B574t Bezerra, Isaiane Rocha.
Tópicos de defeitos em teoria clássica de campos /
Isaiane Rocha Bezerra. - João Pessoa, 2023.
88 f. : il.

Orientação: Dionísio Bazeia Filho.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Teoria clássica de campos. 3. Kinks.
4. Lumps. 5. Método da deformação. I. Bazeia Filho,
Dionísio. II. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** da aluna **Isaiane Rocha Bezerra**, candidata ao Título de Mestra em Física na Área de Concentração Física de Partículas Elementares e Campos.

Aos vinte e um dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e três, às 14:00, nas dependências do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Física de Partículas Elementares e Campos, de **Isaiane Rocha Bezerra**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Dionísio Bazeia Filho (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Paulo José Ferreira Porfírio da Silva (UFPB), Roberto Menezes da Silva (UFPB) e João Rafael Lucio dos Santos (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Dionísio Bazeia Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para a candidata para que a mesma fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada “*Tópicos de Defeitos em Teoria Clássica de Campos*”. Concluída a exposição, a candidata foi arguida pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovada**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestra em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **21 de julho de 2023**.


Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
Orientador

Documento assinado digitalmente



PAULO JOSE FERREIRA PORFIRIO DA SILVA
Data: 21/07/2023 16:41:05-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva
PPGF/UFPB



Prof. Dr. Roberto Menezes da Silva
UFPB



Prof. Dr. João Rafael Lucio dos Santos
UFCG

*Dedico este trabalho à memória do meu pai,
Francisco das Chagas Bezerra.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por fortalecer a minha fé, por cuidar tão bem de mim e por guiar minhas escolhas. Agradeço à minha família pelo apoio incondicional, que foi essencial para meu crescimento acadêmico e pessoal. Especialmente agradeço à minha mãe, Maria do Socorro, aos meus irmãos e meu cunhado, Isauda,IVALDO e Gustavo.

À Universidade Federal da Paraíba (UFPB) - Campus I, em termos de estrutura e corpo docente. Em especial, agradeço ao prof. Dr. Dionísio Bazeia, que me acolheu desde o primeiro dia nesta instituição de ensino e exerceu seu papel de orientador da mais perfeita forma. Agradeço ao grupo de Teoria de Campos da UFPB, especialmente ao prof. Dr. Roberto Menezes por todas as contribuições na construção deste trabalho.

Ao prof. Dr. João Rafael dos Santos, que me apresentou a área de teoria de campos, além de incentivar a minha vinda para João Pessoa.

Aos amigos Maura, Inaiara e Jardel, que seguem ao meu lado desde a graduação. Aos novos amigos que encontrei no mestrado: Rosa das Neves, Janylle Marques, Matheus Lião, Matheus Bongestab, Matheus Paganelly, Felipe Moreira, Antonio Lucas, Samuel Lucas, Hugo Mascena e Lukas Montenegro. Amizades que alternam entre momentos de discussões sobre a Física e momentos de distrações.

Ao amigo de longa data, José Júnior Martírios, pelas orações diárias e por ser tão presente na minha vida.

Ao CNPq pelo suporte financeiro, que possibilitou a realização desta pesquisa.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram para que eu conseguisse concluir esse mestrado, seja por qualquer meio motivador.

That one body act upon another at a distance through a vacuum, without the mediation of any thing else, by and through which their action and force may be conveyed from one to the other, is to me so great an absurdity, that I believe no man who has is philosophical matters a competent faculty of thinking, can ever fall into it.

—ISAAC NEWTON

Resumo

Nesta dissertação, trabalhamos com defeitos topológicos e não topológicos em teoria clássica de campos. Estudamos as estruturas topológicas, denominadas kinks, e não topológicas, denominadas lumps, que surgem em modelos de um e dois campos escalares reais em $(1,1)$ dimensões do espaço-tempo. Também investigamos estruturas localizadas deformadas. Caracterizamos os modelos de potenciais em termos de equações de movimento, energias e estabilidades das soluções estáticas. Além disso, construímos, estudamos e apresentamos soluções explícitas para alguns modelos de defeitos que surgem do acoplamento de dois campos que suportam tipos de defeitos distintos.

Palavras-chave: Kinks, lumps, método da deformação.

Abstract

In this work, we deal with topological and non-topological defects in classical field theory. We study the topological structures, referred to as kinks, and the non-topological structures, referred to as lumps, that arise in models of one and two real scalar fields in $(1,1)$ spacetime dimensions. We also deal with deformed localized structures. We investigate and characterize the potential models in terms of equations of motion, energies, and stabilities of static solutions. Finally, we construct, investigate and present explicit defect solutions that arise from the coupling of two fields that support distinct types of defects.

Keywords: Kinks, lumps, deformation method.

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelos de um campo escalar real	5
2.1	Generalidades	5
2.1.1	Teoria clássica de campos	5
2.1.2	Equação de movimento	7
2.1.3	Tensor energia-momento	8
2.1.4	Energia BPS	10
2.1.5	Estabilidade linear	12
2.2	Defeitos topológicos	14
2.2.1	O modelo ϕ^4	15
2.2.2	O modelo ϕ^6	18
2.2.3	O modelo seno-Gordon	21
2.3	Defeitos não topológicos	23
2.3.1	O modelo ϕ^3	24
2.3.2	O modelo ϕ^4 invertido	26
2.4	Defeitos deformados	29
2.4.1	Potencial $\phi^4 \rightarrow$ seno-Gordon	30
2.4.2	Potencial $\phi^4 \rightarrow \chi^6 \rightarrow \tilde{\chi}^{10}$	31
2.4.3	Potencial $\phi^4 \rightarrow$ seno-Gordon duplo	35
3	Modelos de dois campos escalares	39
3.1	Energia BPS	40
3.2	Estabilidade Linear	42
3.3	O modelo BNRT	43
3.4	Método das órbitas tentativas	45
4	Configurações tipo lump geometricamente modificadas	51
4.1	Formalismo de primeira ordem	53

4.2	Formalismo de primeira ordem na presença de lumps	54
4.3	Modelos específicos	56
4.3.1	Modelo Tipo-I	56
4.3.2	Modelo Tipo-II	61
4.3.3	Modelo Tipo-III	65
5	Comentários, Conclusões e Perspectivas	69
	Referências Bibliográficas	71

CAPÍTULO 1

Introdução

Em teoria clássica de campos, defeitos topológicos referem-se a configurações espaciais estáveis que surgem como soluções de equações de campo com simetrias específicas. Essas configurações podem ser caracterizadas por propriedades topológicas globais. Esses defeitos ocorrem em diversos contextos. Em geral, são de grande interesse em diversas áreas da física, como em física de altas energias [1, 2, 3, 4, 5, 6], física da matéria condensada [7], óptica [8, 9], entre outras. Mas também possuem aplicação em outras áreas, como biologia [10, 11] e cosmologia [12, 13, 14, 15]. Na cosmologia, os defeitos topológicos podem ter um papel importante na evolução do universo. Teorias cosmológicas sugerem que defeitos topológicos podem ter se formado durante transições de fase no início do universo e sendo responsáveis por várias estruturas observadas atualmente, como galáxias [1].

Um tipo de defeito topológico é o sóliton (onda solitária). Sólitons são estruturas localizadas que se propagam no sistema sem se dispersar. Um exemplo famoso é o sóliton de onda em águas rasas, que é um defeito unidimensional, descrito por John Scott Russell em 1844. Esse tipo de defeito é formado pela interação entre a não linearidade do meio e a dispersão das ondas [2].

O exemplo mais simplificado de defeitos topológicos é chamado de kink, que surge em configurações unidimensionais [16]. Esses defeitos são estruturas localizadas facilmente observadas na natureza, como na transição de cores em pétalas de uma rosa. Outro defeito de natureza topológica é chamado de vórtice, esses aparecem em duas dimensões espaciais. Esse tipo de defeitos foi investigado na referência [17]. Também aparece em superfluidos [18, 19]. Outro exemplo importante são os monopolos magnéticos, que são defeitos topológicos tridimensionais que surgem em teorias de campo magnético. Os monopolos magnéticos foram propostos por Dirac em 1931 [20, 21]. Mais informações sobre defeitos topológicos podem ser encontradas nas referências [22, 23].

Além dos defeitos topológicos, também existem os defeitos não topológicos. Sob diferentes condições de contorno, podemos identificar duas categorias de soluções: soluções topológicas e soluções não topológicas [24]. Os defeitos não topológicos são estruturas físicas que surgem em sistemas onde não há conservação de uma quantidade topológica específica. Em configurações descritas por campos escalares reais podem surgir outras estruturas de características não topológicas. Os defeitos não topológicos têm aplicações

práticas em diversas áreas, como na física da matéria condensada e na física de altas energias [25, 26, 27, 28, 29].

As soluções não topológicas apresentam uma estrutura em forma de sino e são caracterizadas pela falta de conexão entre mínimos do potencial. Esses defeitos são conhecidos como lumps e têm sido estudados para descrever dissipações tanto no contexto da gravidade quântica [30] quanto na mecânica clássica [31]. Um exemplo específico de defeito não topológico é o Q-ball, que foi estudado por Coleman em 1985 [32]. Esses tipos de defeitos não surgem de campos reais, mas sim de campos escalares complexos. Investigações foram realizadas nas referências [33, 34, 35, 36, 37].

Nesta dissertação, trabalhamos com modelos de campos escalares reais que suportam defeitos do tipo topológicos e não topológicos que surgem em $(1,1)$ dimensões do espaço-tempo de Minkowski. Iniciamos o capítulo 2 apresentando o formalismo matemático de uma teoria de campos considerando a métrica de Minkowski, obtemos as equações de movimento conhecidas por Equações de Euler-Lagrange para a densidade lagrangiana que descreve um campo escalar real. Essas equações são conhecidas como equações de campo. Elas descrevem como os campos se comportam no espaço. Além disso, a teoria clássica de campos permite a formulação de princípios variacionais, como o princípio da ação mínima. Esse princípio estabelece que a natureza segue caminhos de ação mínima, onde a ação é uma grandeza definida em termos do campo e de suas derivadas no espaço e no tempo. As equações de campo podem ser obtidas a partir da variação da ação em relação ao campo.

Posteriormente, mostramos que o tensor energia-momento é uma consequência da invariância translacional e independência temporal da teoria que conserva a simetria do sistema físico. Na busca por soluções independentes do tempo, utilizamos o método BPS para reduzir a ordem das equações de movimento estáticas e encontramos soluções que minimizam a energia da configuração de campo. Mostramos também que essas configurações são estáveis sob pequenas perturbações. Aplicamos esses conceitos na investigação de modelos de campos que suportam defeitos topológicos conhecidos na literatura como ϕ^4 , ϕ^6 e seno-Gordon.

Em sequência, abordamos dois casos de modelos que suportam defeitos não topológicos, os modelos ϕ^3 e ϕ^4 invertido. Em princípio, as soluções são encontradas resolvendo a equação de movimento estática, elas não minimizam a energia do sistema, além de serem instáveis sob pequenas perturbações. Essas soluções possuem estados de energia negativos.

Ainda no capítulo 2, abordamos o método da deformação em teoria de campos, que consiste em mapear modelos novos a partir de modelos originais. Demonstramos que é possível aplicar esse método a modelos que suportam soluções com estruturas tanto topológicas quanto não topológicas, e que a aplicação repetida do método é válida para o

modelo deformado. Analisamos um caso especial de um modelo que envolve duas funções de deformação, resultando no mesmo modelo quando consideramos o modelo ϕ^4 como ponto de partida. O modelo deformado é conhecido como seno-Gordon duplo.

No capítulo 3, trabalhamos com sistemas compostos por dois campos escalares reais. Derivamos as duas equações de movimento que descrevem a dinâmica desses modelos acoplados. Utilizamos o método BPS para deduzir as equações diferenciais de primeira ordem e resolvê-las de modo a minimizar a energia do sistema. Além disso, demonstramos a possibilidade de investigar a estabilidade linear das soluções estáticas. Aplicamos esses conceitos ao conhecido modelo de dois campos, denominado na literatura como BNRT. Encontramos os mínimos do potencial dos dois campos acoplados e empregamos o método das órbitas tentativas para obter as soluções que conectam esses mínimos.

No capítulo 4, apresentamos resultados originais de estudos sobre modelos de dois campos que seguem da combinação de um campo que suporta defeitos topológicos e de outro com defeitos não topológicos. Mostramos que a interferência de um campo na geometria espacial do segundo campo faz surgir efeitos interessantes na estrutura do defeito. Além de abordamos o formalismo de primeira ordem modificado para investigar os defeitos não topológicos dos novos modelos. No último capítulo, apresentamos as principais conclusões e resultados da pesquisa. Além disso, discutimos as perspectivas de continuação da pesquisa, enfatizando a importância de explorar novas variantes do modelo.

Modelos de um campo escalar real

O modelo de um campo escalar real é o mais simples de uma teoria de campos. Efeitos importantes surgem do fenômeno de quebra espontânea de simetria, que acontece de maneira natural com a presença de um campo com potencial de auto-interação polinomial de quarta ordem.

Iniciamos este capítulo com a apresentação dos aspectos gerais em teoria de campos, que serão necessários no decorrer do estudo produzido neste trabalho. Nas seções seguintes aplicamos esses conceitos na investigação de defeitos topológicos e defeitos não topológicos, nas quais abordamos exemplos bem conhecidos na literatura. No fim do capítulo apresentamos um método capaz de mapear novos modelos de campos a partir de modelos conhecidos, este método é chamado de método de deformação.

2.1 Generalidades

Nesta seção desenvolveremos a teoria necessária para a investigação pretendida nesta dissertação. Apresentamos como uma teoria de campos pode ser construída no espaço-tempo de Minkowski, também descrevemos um sistema a partir da densidade lagrangiana, obtemos as equações de campo e mostramos que a conservação do tensor energia-momento deriva da simetria do sistema.

Posteriormente, apresentamos um método para simplificar a resolução das equações de movimento, chamado de método BPS e analisamos a estabilidade das soluções obtidas por este método.

2.1.1 Teoria clássica de campos

Um campo escalar real descreve uma função dependente das coordenadas e do tempo que associa um escalar a cada ponto do espaço [38]. Isto é, podemos descrever um sistema contínuo por uma coordenada $\varphi_x(t)$ associada a cada ponto x do espaço, em que x é um índice contínuo. Então, podemos usar uma teoria de campos escalares para descrever um sistema que possui um número infinito de graus de liberdade [39].

Teorias de campo de interesse físico podem ser descritas pelo formalismo de La-

grange. Esse formalismo se mostra conveniente para desenvolver a dinâmica de um campo. A dinâmica lagrangiana permite escrever as equações de movimento a partir de uma função escalar expressa em termos de coordenadas independentes arbitrárias [39].

Assim, podemos descrever a dinâmica do campo pelo formalismo lagrangiano. Uma vantagem de escolher o formalismo de Lagrange é a possibilidade de escrever a teoria de campos na forma covariante [40]. A densidade lagrangiana que descreve um campo escalar real deve ser real e invariante sob transformação de Lorentz, isto é,

$$\phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu). \quad (2.1)$$

Em que $\phi(x_\mu)$ é um campo escalar real. Vamos trabalhar com um campo de natureza relativística e utilizar espaço quadridimensional de Minkowski¹ [41]. Em contraste com a geometria euclidiana comum, o espaço de Minkowski utiliza uma métrica especial conhecida como métrica de Minkowski, que incorpora a natureza relativística do tempo.

A métrica de Minkowski

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2)$$

define a distância entre dois pontos no espaço-tempo e leva em consideração o fato que a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores inerciais. Os vetores do espaço de Minkowski podem ser escritos de duas formas, do tipo covariante e do tipo contravariante, respectivamente,

$$\begin{aligned} x_\mu &= (x_0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z), \\ x^\mu &= (x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z), \end{aligned} \quad (2.3)$$

de forma que se tratam de quadri-vetores com uma componente temporal e três componentes espaciais. Ainda podemos reescrever $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ para “subir” o índice ν , sendo $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico, que no caso particular do espaço de Minkowski temos $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$.

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ pode ser escrito como uma matriz diagonal

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Neste espaço, escrevemos as derivadas covariantes e contravariantes, respectivamente,

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

¹O espaço de Minkowski, também conhecido como espaço-tempo de Minkowski, é uma estrutura matemática utilizada na teoria da relatividade restrita para descrever o espaço e o tempo de forma unificada. Foi desenvolvido pelo físico alemão Hermann Minkowski no início do século XX.

Em teoria de campos, escrevemos a densidade lagrangiana dependente do campo e das suas derivadas, logo, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, onde $\phi = \phi(x_\mu)$. De forma geral, para modelos de um campo escalar real, escrevemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (2.6)$$

Aqui o primeiro termo do lado direito descreve uma densidade de energia cinética padrão para qualquer campo escalar real. O segundo termo corresponde à densidade de energia potencial, o modelo do campo é definido tal qual a forma de seu potencial.

Neste trabalho, vamos considerar as coordenadas espaciais e temporal adimensionais, também utilizamos o sistema de unidades naturais, em que $c = \hbar = 1$, onde c é a velocidade da luz e \hbar é a constante de Planck reduzida. Também, vamos admitir o espaço-tempo de Minkowski em apenas duas dimensões, em que $x_\mu = (x_0 = t, x_1 = -x)$ com a representação $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ para um campo em uma dimensão espacial e uma dimensão temporal, $\phi(x, t)$. Importante mencionar que usamos a notação de Einstein, em que a soma é subentendida sobre índices repetidos.

Na subseção seguinte vamos abordar o método da mínima ação a fim de obter uma equação de movimento que descreva um campo escalar real regido pela densidade lagrangiana (2.6).

2.1.2 Equação de movimento

A ação é um funcional ou uma função real cujo domínio é um espaço de funções, que dependem da interação infinitesimal da sequência de mudanças ao longo de uma trajetória [39].

Podemos definir a ação para um campo escalar real $\phi(x, t)$ como

$$S = \int d^2x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.7)$$

em que $d^2x = dt dx$ e a densidade lagrangiana é dada na equação (2.6). Sendo a ação um escalar adimensional.

O princípio da mínima ação pode ser usado para obter a equação de movimento equivalente à segunda lei de Newton na mecânica newtoniana. Também é chamado de princípio de Hamilton ou princípio da ação constante, tal que a mínima ação implica em $\delta S = 0$ [39]. Aplicando o princípio variacional para a ação (2.7), temos

$$\delta S = \delta \int d^2x \mathcal{L} = \int d^2x \delta \mathcal{L} = 0. \quad (2.8)$$

A variação da ação depende da variação da densidade lagrangiana. Agora, usando a propriedade do cálculo variacional para (2.6), obtemos

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi). \quad (2.9)$$

Substituindo a variação da densidade lagrangiana em (2.8) e fazendo uma integração por partes, ficamos com

$$\delta S = \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi + \int d^2x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = 0. \quad (2.10)$$

A variação das coordenadas generalizadas se anulam nos pontos extremos, logo, a segunda integral é identicamente nula. Observe também que $\delta \phi$ é arbitrário, assim, obtemos

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.11)$$

A equação de movimento (2.11) é chamada de Equação de Euler-Lagrange. Também pode ser escrita realizando as derivadas da densidade de Lagrange da equação (2.6), de onde temos

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.12)$$

Ou ainda, explicitando as derivadas parciais em relação ao tempo e ao espaço, ficamos com a equação de movimento da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.13)$$

que é uma equação diferencial parcial de segunda ordem.

Considerando um regime de campo estático, $\phi = \phi(x)$, a equação anterior se torna uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, com derivada total em relação à coordenada x , isto é,

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.14)$$

As soluções para essa última equação são obtidas de forma mais simplificada do que para a equação (2.13).

2.1.3 Tensor energia-momento

De acordo com o Teorema de Noether² [42], para cada simetria contínua em um sistema físico deriva um princípio de conservação. Em teorias que admitem uma formulação lagrangiana, esse teorema conecta a simetria do sistema a uma quantidade conservada.

A quantidade conservada é o tensor energia-momento, uma consequência da simetria do sistema. A independência temporal sugere uma conservação da energia do sistema e a independência de translação implica na conservação do momento linear.

²O teorema de Noether estabelece uma conexão entre simetrias contínuas em uma teoria física e leis de conservação associadas. O teorema foi formulado pela matemática e física alemã Amalie Emmy Noether em 1918.

Podemos obter o tensor energia-momento considerando uma variação infinitesimal nas coordenadas [43]. Fazemos

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \quad (2.15)$$

podemos reescrever como $x'_\mu - x_\mu = \delta x_\mu$. A variação da densidade lagrangiana com respeito a essas coordenadas é tal que

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \delta x_\mu. \quad (2.16)$$

Vamos considerar que a densidade de Lagrange é invariante por translação, logo, a densidade lagrangiana é independente das coordenadas, isto é, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ e $\phi = \phi(x_\mu)$. Agora, variando a densidade lagrangiana, temos

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial^\nu \phi \delta x_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu (\partial_\mu \phi) \delta x_\nu. \quad (2.17)$$

Usando a equação de Euler-Lagrange (2.11) e comparando as equações (2.16) e (2.17), obtemos

$$\partial_\mu \left\{ g^{\mu\nu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi \right\} \delta x_\nu = 0. \quad (2.18)$$

As translações δx_ν são arbitrárias, então

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.19)$$

Decorrentes da invariância translacional da teoria clássica de campos, em duas dimensões espaço-temporais temos em (2.19) duas equações de continuidade ($\nu = 0, 1$). Portanto, temos aqui duas leis de conservação, em que a quantidade conservada é o tensor energia-momento dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.20)$$

Esse é um tensor simétrico, isto é, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Também pode ser escrito da forma covariante $T_{\mu\nu}$.

Considerando a densidade lagrangiana usual que descreve uma dinâmica padrão dada na equação (2.6), obtemos o tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.21)$$

Somente duas componentes do tensor energia-momento não são nulas, dadas por T_{00} e T_{11} , as quais correspondem à densidade de energia e à pressão, respectivamente,

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi), \quad (2.22)$$

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V(\phi). \quad (2.23)$$

A pressão no sistema é constante, compatível com a conservação do tensor energia-momento.

Na subseção seguinte discutiremos mais a respeito das considerações sobre a pressão dos modelos apresentados aqui.

2.1.4 Energia BPS

Utilizamos dois métodos para determinar soluções da equação de movimento. O primeiro deles é usando o formalismo de redução de ordem. Note que as equações de movimento obtidas a partir do método da minimização da ação são equações diferenciais de segunda ordem. Esse tipo de equação possui difícil resolução. O formalismo de primeira ordem reduz a ordem da equação de movimento facilitando a determinação de uma solução. Outro método utilizado é o chamado método BPS (Bogomol'nyi, 1976; Prasad e Sommerfield, 1975), que possibilita determinar soluções analíticas sem a necessidade de resolver as equações de segunda ordem. O método BPS envolve a energia do sistema [44, 45].

Para reduzir a ordem da equação de movimento (2.14) e, conseqüentemente, facilitar sua resolução, vamos multiplicar os dois lados por $(d\phi/dx)$. Desse modo,

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx}, \quad (2.24)$$

reescrevendo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{dV}{dx}, \quad (2.25)$$

e integrando os dois lados da equação em relação à coordenada x , obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V(\phi) + c, \quad (2.26)$$

em que c é uma constante de integração, impomos essa constante igual a zero a fim de gerar sistemas que possuam energia finita [46]. Note que ao comparar essa última equação com (2.23), percebemos que a constante de integração c se trata da pressão do sistema. Portanto, estamos impondo sistemas com pressão nula. A imposição da constante nula nos leva a uma equação diferencial de primeira ordem para o campo $\phi(x)$ da forma

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.27)$$

Os mínimos do potencial v_i , $i = 1, 2, \dots$, ou estados de vácuo, obedecem às condições de contorno

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) \rightarrow v_i, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) \rightarrow v_j, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{d\phi}{dx} \rightarrow 0, \quad (2.28)$$

onde $V(\phi \rightarrow v_i) = V(\phi \rightarrow v_j) = 0$. Essas condições de contorno são necessárias para definir soluções com energia finita, para que o sistema possua sentido físico [47].

Uma maneira de encontrar as soluções das equações (2.27) é pelo chamado método BPS. Para obter soluções analíticas de defeitos utiliza-se o método BPS, o que resulta em defeitos com energia mínima não-trivial.

O método BPS foi apresentado para soluções clássicas do tipo parede de domínio. Esse método nos permite investigar soluções do tipo defeitos para teorias de campos escalares a partir da minimização de energia do sistema.

A partir da densidade de energia dada na equação (2.22) podemos integrar e determinar a energia, assim,

$$\begin{aligned} E &= \int dx \rho(x) \\ &= \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

Podemos introduzir uma função suave $W(\phi)$ e reescrever como

$$E = \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 + \int dx \left[V(\phi) - \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 \right] \pm \int dx \frac{dW}{dx}, \quad (2.30)$$

onde usamos um método matemático que consiste em completar o quadrado perfeito, utilizando a densidade de energia e uma função W que depende do campo ϕ . Para modelos que possuem soluções estáveis que minimizam a energia do sistema, o potencial segue a definição:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (2.31)$$

onde $W_\phi = dW/d\phi$, de forma que o segundo termo da equação (2.30) se anula. Neste caso, temos que a energia é mínima quando

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi. \quad (2.32)$$

Com isso, passamos a nos referir à energia do sistema como energia BPS quando esta é mínima. Assim,

$$E = E_{BPS} = \left| \int dx \frac{dW}{dx} \right|. \quad (2.33)$$

Notamos que se trata de uma derivada de função composta: $dW/dx = W_\phi(d\phi/dx)$. Então, levando em conta o teorema fundamental do cálculo e aplicando os limites de integração, obtemos

$$E_{BPS} = |\Delta W(\phi)| = |W(\phi(x \rightarrow +\infty)) - W(\phi(x \rightarrow -\infty))|. \quad (2.34)$$

Esse método nos permite obter a energia analisando apenas o potencial, sem ser necessário resolver as equações de segunda ordem. O método é bastante eficiente quando

tratamos de um defeito topológico com solução do tipo kink. Mais adiante veremos que podemos modificar o formalismo de primeira ordem para estudar soluções do tipo lump, de forma que a energia do sistema pode ser obtida de maneira análoga.

A função $W = W(\phi)$ é uma função suave que depende do campo ϕ chamada de superpotencial [48]. Assumimos a existência de w_i , $i = 1, \dots, n$ tal que $W_\phi(w_i) = 0$. Esses pontos de $W(\phi)$ são mínimos absolutos do potencial.

Em geral, modelos que permitem a definição do potencial via função W são potenciais positivos definidos, que possuem quebra espontânea de simetria que geram defeitos topológicos. Soluções topológicas são estáveis. Nesse contexto seguiremos com o estudo da estabilidade linear das soluções estáticas para os modelos de campos escalares reais.

2.1.5 Estabilidade linear

Nesta subseção vamos analisar como uma solução estática se comporta ao sofrer pequenas perturbações, isto é, avaliar a estabilidade da solução estática. Se essa solução mantiver suas características após uma pequena perturbação, dizemos que se trata de uma solução estável. Por outro lado, se a perturbação evoluir, interferindo nas características do sistema, dizemos que é uma solução instável.

Usando a densidade lagrangiana (2.6) para descrever a dinâmica do sistema composto por um campo escalar real e fazendo uma pequena perturbação em torno da sua solução estática, podemos escrever

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t), \quad (2.35)$$

onde $\phi(x)$ e $\eta(x, t)$ são a solução estática e a sua perturbação, respectivamente. A perturbação é muito pequena, por definição:

$$\eta(x, t) \ll \phi(x). \quad (2.36)$$

Substituindo a equação (2.35) na equação de movimento (2.13), obtemos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi(x)+\eta(x,t)} = 0. \quad (2.37)$$

Fazendo uma expansão em séries de Taylor em torno da solução estática para a derivada do potencial

$$\frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi(x)+\eta(x,t)} = \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi(x)} + \frac{d^2 V}{d\phi^2} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t). \quad (2.38)$$

Os termos de ordem superiores podem ser desprezados. Note que fizemos $(\phi(x, t) - \phi(x)) = \eta(x, t)$. Agora, substituindo esse resultado na equação (2.37), ficamos com

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi(x)} + \frac{d^2 V}{d\phi^2} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t) = 0. \quad (2.39)$$

Note que

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi}\Big|_{\phi(x)} = 0 \quad (2.40)$$

satisfaz a equação de movimento estática (2.14). Logo, ficamos com a equação de perturbação escrita em (1,1) dimensões, dada por

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + U(x)\eta(x,t) = 0, \quad (2.41)$$

onde

$$U(x) = \frac{d^2V}{d\phi^2}\Big|_{\phi(x)} \quad (2.42)$$

é chamado de potencial efetivo ou potencial de estabilidade. Com o potencial de estabilidade podemos compreender quantos e quais são os estados ligados ou não ligados do modelo em estudo.

Vamos supor que uma solução para a equação (2.41) seja do tipo

$$\eta(x,t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t). \quad (2.43)$$

A ideia de usar uma função cosseno é para que a solução seja parecida com outras soluções conhecidas, como as soluções harmônicas. Substituindo na equação (2.41) notamos que podemos reescrever a equação da perturbação como

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right)\eta_n(x) = \omega_n^2\eta_n(x). \quad (2.44)$$

de forma que a igualdade seja satisfeita.

A equação (2.44) é uma equação do tipo Schroedinger. Embora estejamos trabalhando no regime clássico, podemos mostrar que é possível encontrar solução para a equação do tipo (2.44) mesmo que não seja no escopo da mecânica quântica. Os autovalores ω_n^2 devem ser positivos para soluções estáveis. Em outras palavras, a condição necessária para que a solução seja estável é que todas as frequências de perturbação sejam números reais, tal que $\omega_n^2 \geq 0$. Se $\omega_n^2 < 0$, a solução estática do sistema é instável, pois haverá algum autovalor de energia imaginário.

Para um modelo de potencial em estudo da estabilidade de suas soluções é conveniente supor a existência de um "modo zero", tal qual $\omega_0^2 = 0$ com $n = 0$. Desse modo, a equação (2.44) toma a forma

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right)\eta_0(x) = 0. \quad (2.45)$$

Lembrando da definição para um potencial positivo na equação (2.31), podemos relacionar o potencial de estabilidade com a função superpotencial W , encontrando

$$U(x) = W_{\phi\phi}^2 + W_{\phi}W_{\phi\phi\phi}, \quad (2.46)$$

de maneira que podemos fatorar a equação (2.45) e escrevê-la como

$$\left(-\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi}\right)\left(\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi}\right)\eta_0(x) = 0. \quad (2.47)$$

Veja que essa igualdade é satisfeita fazendo

$$\left(-\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi}\right)\eta_0(x) = 0, \quad (2.48)$$

que se trata de uma equação diferencial de primeira ordem, que possui uma solução genérica da forma

$$\eta_0(x) = Ae^{\int(W_{\phi\phi})dx}, \quad (2.49)$$

onde A é uma constante de normalização, que podemos considerar como unidade. Observando que

$$\frac{d}{dx}\log(W_{\phi}) = W_{\phi\phi}, \quad (2.50)$$

constatamos que o modo zero pode ser determinado via equação

$$\eta_0(x) = W_{\phi}. \quad (2.51)$$

Note ainda que a partir da equação (2.14), podemos obter o modo zero por $\eta_0(x) = d\phi/dx$.

A presença do modo zero decorre da invariância translacional da teoria clássica de campos. Sistemas com soluções estáveis possuem ao menos um estado ligado, sendo o "modo zero" o estado de menor energia. Se existe um estado de energia abaixo do modo zero significa que as soluções do sistema são instáveis. O ponto em que o modo zero cruza o zero no eixo x é chamado de nó.

Essa é uma forma de caracterizar soluções topológicas. Soluções topológicas são estáveis e seus modos zeros não cruzam o eixo x , ou seja, não possuem nós. A identificação de nós no modo zero implica a instabilidade da solução, logo se tratando de uma solução não topológica.

Nas próximas seções estudaremos soluções para modelos de diferentes potenciais. A primeira seção seguinte trata de defeitos topológicos, onde buscamos evidenciar suas principais características relacionadas ao exposto até aqui. Na seção 2.3 lidamos com outros tipos de defeitos, de características não topológicas. Na seção 2.4 apresentamos um método de mapeamento entre campos escalares que possuem soluções do tipo defeitos, esse método é chamado de método da deformação.

2.2 Defeitos topológicos

Os defeitos topológicos são estruturas localizadas que conectam dois mínimos do potencial. Essas estruturas são chamadas de kink em uma dimensão espacial. Defeitos

topológicos podem ser descritos por soluções que obedecem as condições de contorno (2.28).

A seguir abordamos três modelos de campos escalares reais que suportam soluções do tipo defeitos topológicos.

2.2.1 O modelo ϕ^4

Um modelo que suporta soluções topológicas é o chamado modelo ϕ^4 , que é caracterizado pelo potencial de quarta ordem em ϕ dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2, \quad (2.52)$$

mostrado na figura 2.1. Este modelo possui simetria de reflexão em ϕ , também chamada de simetria Z_2 . Essa simetria surge devido ao termo ϕ^4 ser par em ϕ , o que implica que a teoria permanece inalterada quando ϕ é substituído por $-\phi$.

Analisando o potencial (2.52), nota-se que existem três pontos críticos. Os pontos de mínimos estão localizados em $\phi_{\pm} = \pm 1$, e o ponto de máximo é atingido quando $V(\phi) = 1/2$ em $\phi_0 = 0$. Os pontos de estado de vácuo (ou mínimos do potencial) estão conectados por um setor topológico. As soluções que ligam esses estados de vácuo são chamadas de soluções topológicas.

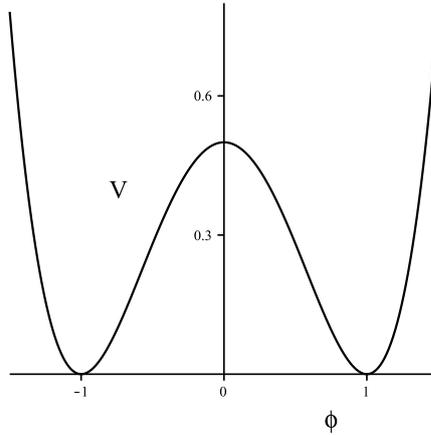


Figura 2.1: Potencial do modelo ϕ^4 , escrito na equação (2.52).

A equação de movimento (2.14) para o campo estático modelado pelo potencial (2.52) é escrita como

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\phi(\phi^2 - 1). \quad (2.53)$$

É possível escrever o potencial desse modelo em função de $W(\phi)$. Neste caso, a partir da equação (2.31) obtemos que $W_\phi = 1 - \phi^2$, de onde deduzimos que o superpotencial desse modelo é

$$W(\phi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3. \quad (2.54)$$

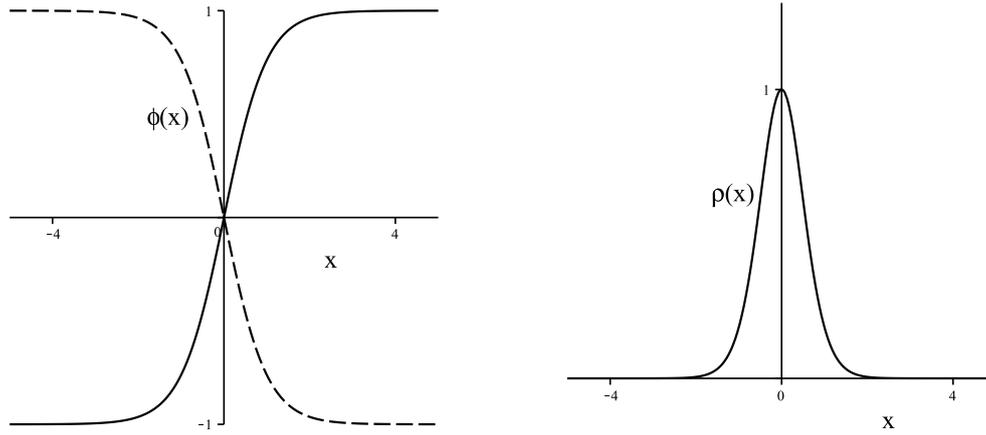


Figura 2.2: O modelo ϕ^4 : Soluções (2.59) tipo kink $\phi^+(x)$ (linha sólida) e antikink $\phi^-(x)$ (linha tracejada) à esquerda e sua densidade de energia (2.60) à direita.

Assim, da equação (2.32), escrevemos as equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2). \quad (2.55)$$

As soluções do modelo são encontradas por uma integração das equações de primeira ordem acima. Veja que as equações

$$\int \frac{d\phi}{1 - \phi^2} = \pm x \quad (2.56)$$

estão relacionadas pela reflexão de x . Logo, resolvendo a equação positiva obtemos

$$\phi(x) = \tanh(x), \quad (2.57)$$

em que consideramos a constante de integração nula. Pela troca de $x \rightarrow -x$, obtemos

$$\phi(-x) = \tanh(-x) = -\tanh(x). \quad (2.58)$$

As soluções

$$\phi^\pm(x) = \pm \tanh(x) \quad (2.59)$$

são chamadas de kinks e devem satisfazer a equação de movimento (2.53). De agora em diante fazemos a seguinte consideração sobre as soluções do tipo kink: As funções crescentes denominaremos por kink, enquanto as funções decrescentes chamaremos de antikink. As soluções estão ilustradas na figura 2.2.

A densidade de energia dessas soluções é

$$\rho(x) = \text{sech}^4(x), \quad (2.60)$$

calculada via equação (2.22). A energia total pode ser obtida pela energia BPS (2.34), dada por

$$E_{BPS} = |\Delta W(\phi)| = \frac{4}{3}. \quad (2.61)$$

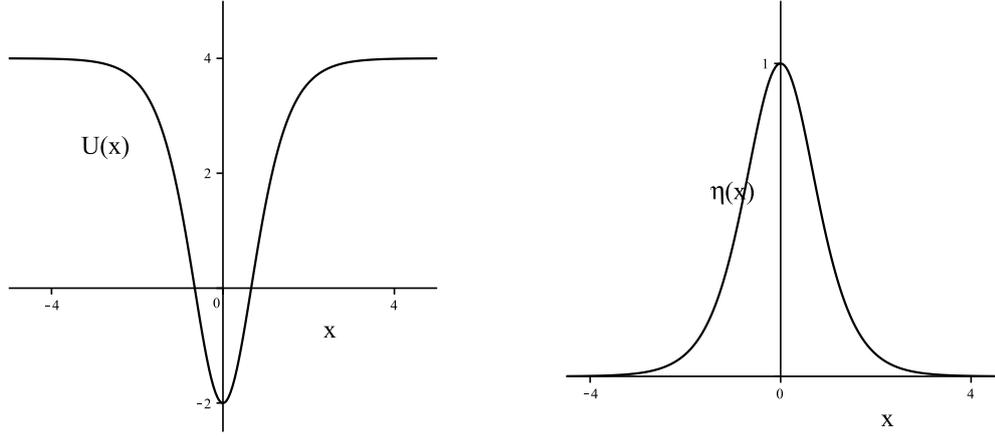


Figura 2.3: O modelo ϕ^4 : Potencial de estabilidade (2.62) à esquerda e modo zero (2.67) à direita.

As soluções (2.59) são estáveis sob pequenas perturbações. Obtemos o potencial de estabilidade do modelo ϕ^4 pela equação (2.42), que fornece a função

$$U(x) = 4 - 6 \operatorname{sech}^2(x). \quad (2.62)$$

Esse é um potencial do tipo Poesch-Teller modificado. O potencial mecânico-quântico (2.62) é investigado em [49, 50].

De forma geral, o potencial do tipo Poesch-Teller modificado pode ser escrito como

$$U(x) = a + b \tanh(x) - c \operatorname{sech}^2(x), \quad (2.63)$$

onde a, b e c são parâmetros reais positivos chamados de parâmetros de Poesch-Teller modificado. Se $a > b$ e $c > a$, o potencial de estabilidade possui estados ligados. Em geral, os autovalores são dados por

$$\omega_n^2 = a - A_n^2 - \frac{b^2}{4A_n^2}, \quad (2.64)$$

$$A_n = \sqrt{c + \frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2}, \quad (2.65)$$

$$n < \sqrt{c + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{b}{2}}, \quad (2.66)$$

onde n é um número natural.

Para o potencial do modelo ϕ^4 em investigação, temos os parâmetros de Poesch-Teller modificado $a = 4$, $b = 0$ e $c = 6$. Fazendo uso das equações acima verificamos que existem dois estados ligados, $n = 0, 1$, com autovalores de energia $\omega_0^2 = 0$ e $\omega_1^2 = 3$, ambos positivos, o que implica na estabilidade das soluções.

O modo zero desse modelo é obtido via equação (2.51), dado por

$$\eta_0(x) = \operatorname{sech}^2(x). \quad (2.67)$$

O potencial de estabilidade (2.62) e o modo zero (2.67) estão ilustrados na figura 2.3. Note que o gráfico dos modos zeros estão livres da existência de nós cortando o eixo x .

O modelo de potencial ϕ^4 é ideal para descrever sistemas que apresentam transição de fase de segunda ordem. Um exemplo é a transição ferromagnética-paramagnética. Nesse caso, à medida que a temperatura aumenta, o sistema passa por uma transição em que a magnetização diminui gradualmente até atingir zero [51] [52].

2.2.2 O modelo ϕ^6

Outro importante modelo é o caracterizado pelo potencial polinomial de sexta ordem em ϕ chamado de modelo ϕ^6 [53], dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2)^2, \quad (2.68)$$

mostrado na figura 2.4. Analisando o potencial do modelo ϕ^6 notamos que ele possui cinco pontos críticos. Três desses são pontos de mínimo, para $\phi_0 = 0$ e $\phi_{\pm 1} = \pm 1$, em que $V = 0$. Os outros dois são pontos de máximos, localizados em $\phi_{max\pm} = \pm\sqrt{3}/3$, onde $V = 2/27$. Assim como o potencial do modelo ϕ^4 , o potencial (2.68) possui simetria Z_2 em ϕ .

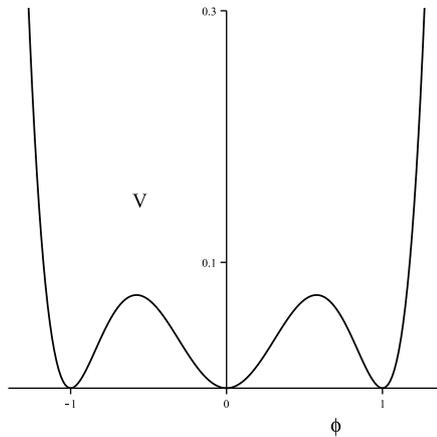


Figura 2.4: Potencial do modelo ϕ^6 , dado pela equação (2.68).

A equação de movimento desse modelo é

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi - 4\phi^3 + 3\phi^5. \quad (2.69)$$

O potencial (2.68) pode ser escrito de acordo com a equação (2.31), de forma que $W_\phi = \phi(1 - \phi^2)$, assim, a função superpotencial é

$$W(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{4}\phi^4. \quad (2.70)$$

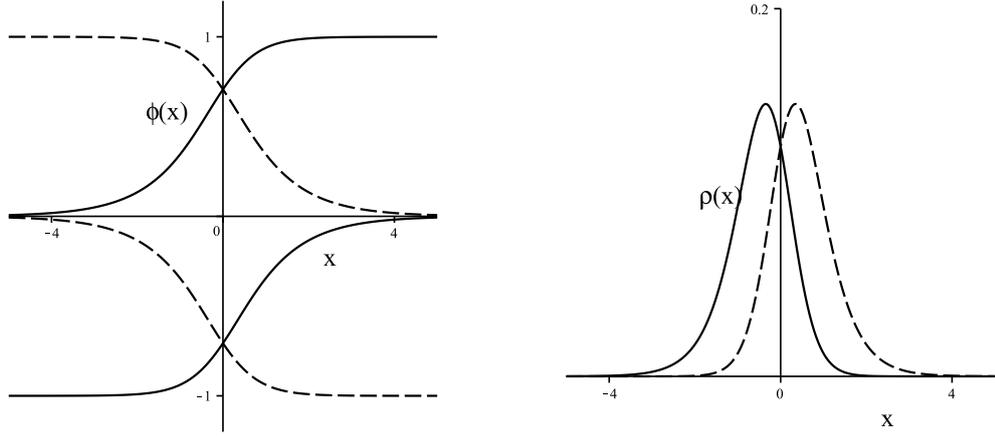


Figura 2.5: O modelo ϕ^6 : Soluções (2.72) e (2.73) tipo kink $\phi^+(x)$ (linha sólida) e antikink $\phi^-(x)$ (linha tracejada) à esquerda e sua densidade de energia (2.74) à direita.

As equações de primeira ordem são escritas pela equação (2.32), de modo que obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\phi(1 - \phi^2). \quad (2.71)$$

Neste modelo há dois setores topológicos simétricos. As soluções são obtidas resolvendo as equações de primeira ordem (2.71) por integração. O primeiro setor conecta os mínimos $\phi_{-1} = -1$ e $\phi_0 = 0$. Para ele, obtemos as soluções

$$\phi_1^\pm(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 \mp \tanh(x))}. \quad (2.72)$$

O segundo setor topológico conecta os mínimos $\phi_0 = 0$ e $\phi_{+1} = 1$. As soluções que ligam esses dois pontos são

$$\phi_2^\pm(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 \pm \tanh(x))}. \quad (2.73)$$

Levando em conta que $\phi^+(x)$ identificam kinks e $\phi^-(x)$ identificam antikinks. As soluções são mostradas na figura 2.5. Essas quatro soluções devem resolver a equação de movimento estática (2.69).

A densidade de energia associada as soluções (2.72) e (2.73) pode ser calculada através da equação (2.22), que fornece

$$\rho_1^\pm(x) = \frac{1}{8} \frac{\text{sech}^4(x)}{(1 \pm \tanh(x))}, \quad (2.74)$$

$$\rho_2^\pm(x) = \frac{1}{8} \frac{\text{sech}^4(x)}{(1 \mp \tanh(x))}. \quad (2.75)$$

Os dois setores topológicos possuem energia BPS equivalentes. Da equação (2.34) obtemos a energia

$$E_{BPS} = |\Delta W(\phi)| = \frac{1}{4}. \quad (2.76)$$

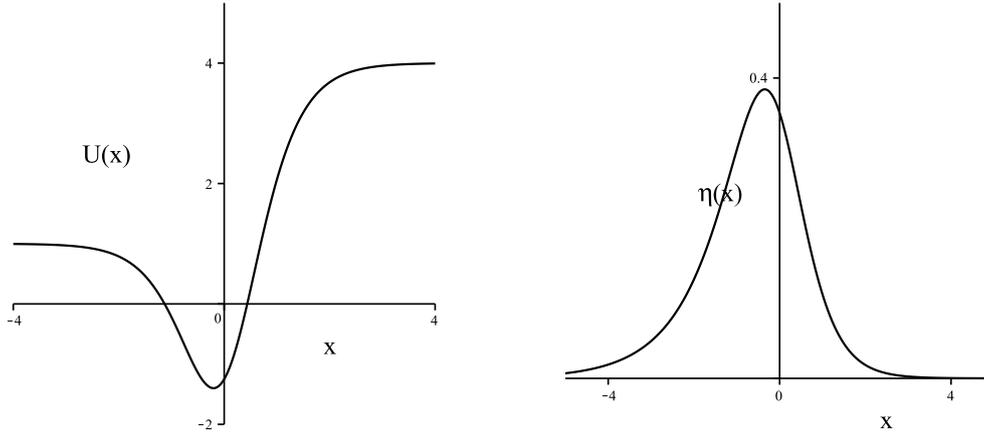


Figura 2.6: O modelo ϕ^6 : Potencial de estabilidade (2.77) à esquerda e modo zero (2.78) à direita.

Agora, estudando a estabilidade das soluções via potencial (2.42), para o modelo ϕ^6 temos

$$U(x) = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \tanh(x) - \frac{15}{4} \operatorname{sech}^2(x), \quad (2.77)$$

onde os sinais \pm correspondem as soluções kink $\phi^+(x)$ e antikink $\phi^-(x)$, mostrado na figura 2.6 para a solução ϕ_2^+ .

Notamos que se trata de um potencial do tipo Poesch-Teller modificado, equação (2.63). Os parâmetros de Poesch-Teller modificado são $a = 5/2$, $b = 3/2$ e $c = 15/4$. Os estados ligados podem ser obtidos pelas equações (2.64), (2.65) e (2.66). Verifica-se que esse potencial possui apenas um estado ligado, o modo zero. Modelos com ao menos um estado ligado são ditos estáveis.

O modo zero é obtido pela equação (2.51), a partir da qual temos

$$\eta_0(x) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sech}^2(x)}{\sqrt{2(1 + \tanh(x))}}, \quad (2.78)$$

para as soluções (2.72) e (2.73), respectivamente. As funções $\eta_0(x)$ são mostradas na figura 2.6.

Outras investigações podem ser encontradas na referência [54]. Outros exemplos de potenciais polinomiais incluem o modelo ϕ^8 [55]. Além disso, existem outros trabalhos relevantes, como as referências [56, 57].

O modelo de potencial ϕ^6 é ideal para descrever sistemas que apresentam transição de fase de primeira ordem. Um exemplo é a transição líquido-vapor. À medida que a temperatura aumenta, o sistema passa por uma transição de fase em que ocorre a coexistência de líquido e vapor em equilíbrio [51, 52].

2.2.3 O modelo seno-Gordon

Outro modelo de um campo escalar que possui soluções do tipo kink é chamado modelo seno-Gordon, apresentado teoricamente na referência [58]. O potencial do modelo é escrito como

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \sin^2(\phi), \quad (2.79)$$

mostrado na figura 2.7. Este potencial com função periódica possui infinitos mínimos e máximos. Os pontos de mínimo estão localizados em ϕ para múltiplos inteiros de π , isto é, $\phi_{min} = k\pi$, e os pontos de máximo são encontrados para os valores de $\phi_{max} = (2n-1)\pi/2$, onde k e n são números inteiros.

Os vários setores topológicos do modelo são equivalentes. Dessa forma, vamos considerar dois setores topológicos simétricos. O primeiro setor $S^{(1)}$, que conecta os mínimos localizados em $\phi_{-1} = -\pi$ e $\phi_0 = 0$ e o outro que conecta os mínimos localizados em $\phi_0 = 0$ e $\phi_{+1} = \pi$, o setor topológico $S^{(2)}$.

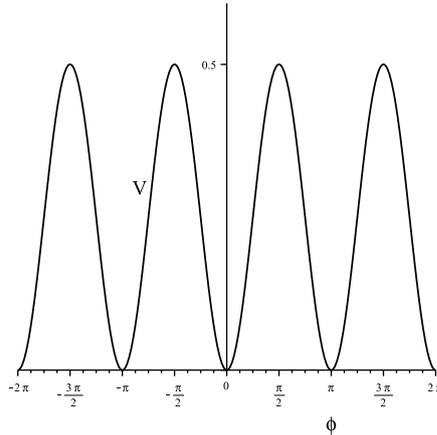


Figura 2.7: Potencial do modelo seno-Gordon, dado pela equação (2.79).

A equação de movimento estática (2.14) para o modelo seno-Gordon é

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \sin(\phi) \cos(\phi). \quad (2.80)$$

Podemos escrever a função superpotencial com a definição feita em (2.31), de onde temos $W_\phi = \sin(\phi)$, assim,

$$W(\phi) = -\cos(\phi), \quad (2.81)$$

de forma que as equações de primeira ordem são dadas pela equação (2.32), logo, obtemos as equações:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sin(\phi). \quad (2.82)$$

As soluções topológicas são obtidas resolvendo (2.82) por integração. Para o setor topológico que conecta os mínimos ϕ_{-1} e ϕ_0 , as soluções são

$$\phi_1^\pm(x) = -2 \arctan(e^{\mp x}). \quad (2.83)$$

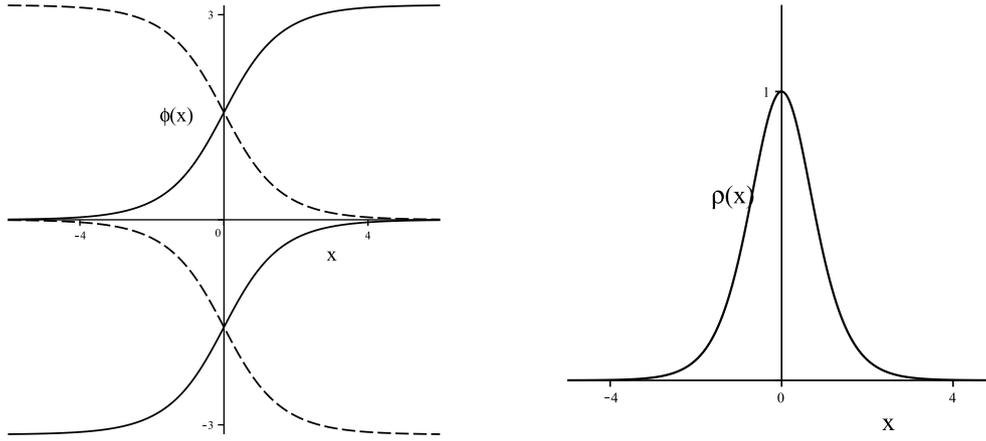


Figura 2.8: O modelo seno-Gordon: Soluções (2.83) e (2.84) tipo kink $\phi^+(x)$ (linha sólida) e antikink $\phi^-(x)$ (linha tracejada) à esquerda; Densidade de energia (2.85) à direita.

Para o segundo setor topológico, que conecta os mínimos ϕ_0 e ϕ_1 , as soluções são

$$\phi_2^\pm(x) = 2 \arctan(e^{\pm x}). \quad (2.84)$$

Essas soluções resolvem a equação de movimento estática (2.80). As quatro soluções que conectam esses mínimos identificam kinks e antikinks. Outras soluções de outros setores do modelo podem ser vistas em [59]. O modelo seno-Gordon foi estudado nas referências [60, 61]. Mais aplicações desse modelo foram investigadas nas referências [62, 63, 64, 65, 66], multi-seno-Gordon [67, 68, 69], seno-Gordon no espaço-tempo plano e curvo [70] e aprisionamento de partículas em rede [71].

A densidade de energia é dada pela equação (2.22), e resulta em

$$\rho(x) = \operatorname{sech}^2(x). \quad (2.85)$$

As soluções (2.83) e (2.84) e a densidade de energia (2.85) podem ser observadas na figura 2.8.

Essas soluções são estáveis. Podemos calcular sua energia via energia BPS (2.34), que fornece

$$E_{BPS} = |\Delta W(\phi)| = 2. \quad (2.86)$$

Ainda podemos verificar a estabilidade linear via potencial (2.42). Para o modelo em estudo temos

$$U(x) = 1 - 2 \operatorname{sech}^2(x). \quad (2.87)$$

Assim como o modelo ϕ^6 , o modelo seno-Gordon possui apenas um estado ligado, que é o modo zero.

Veja que o potencial de estabilidade do modelo seno-Gordon é do tipo Poesch-Teller modificado, equação (2.63). Os parâmetros de Poesch-Teller modificado são $a = 1$, $b = 0$

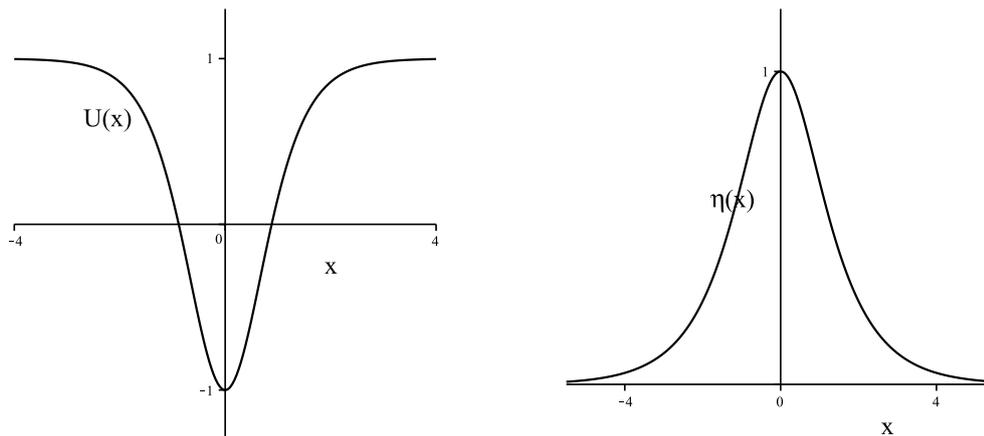


Figura 2.9: O modelo seno-Gordon: Potencial de estabilidade (2.87) à esquerda e modo zero (2.88) à direita.

e $c = 2$. Verifica-se pelas equações (2.63), (2.64), (2.65) e (2.66), a existência de apenas um estado ligado.

O modo zero, para o modelo seno-Gordon é

$$\eta_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \operatorname{sech}(x), \quad (2.88)$$

obtido pela equação (2.51) e mostrado na figura 2.9 ao lado do potencial de estabilidade (2.87).

Mais adiante vamos estudar mais um modelo que faz parte da classe de modelos do tipo seno-Gordon, obtido pelo método da deformação. Antes de chegar em defeitos deformados, abordamos na seção seguinte dois modelos de campos que suportam defeitos não topológicos.

2.3 Defeitos não topológicos

Os defeitos não topológicos são soluções que minimizam o potencial em um mínimo local. Esse tipo de solução é caracterizada por não conectar dois mínimos do potencial. Esses defeitos, também chamados de lumps, têm a forma de sino e são instáveis sob pequenas perturbações.

Assim como os defeitos topológicos, os não topológicos aparecem em $(1, 1)$ dimensões do espaço-tempo. No entanto, os valores assintóticos das suas soluções estáticas tendem ao mesmo ponto, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \rightarrow 0. \quad (2.89)$$

A condição de contorno (2.28), implica neste caso que $v_i = v_j$. O mínimo local do potencial também é chamado de falso vácuo, observado quando $V(v_i) = 0$.

A princípio, a não topologia das soluções nos impede de trabalhar com a definição do potencial (2.31) e com o formalismo de primeira ordem, bem como calcular a energia das soluções via método BPS, pois o modelo não possui nenhum setor com energia BPS diferente de zero. No entanto, no capítulo 4 vamos abordar um método para modificar o formalismo de primeira ordem para que também seja possível investigar soluções do tipo lumps.

A seguir expomos dois exemplos de modelos que suportam soluções do tipo defeitos não topológicos e acharemos suas soluções diretamente das equações de segunda ordem.

2.3.1 O modelo ϕ^3

Como primeiro exemplo de modelos de campos escalares que suportam defeitos não topológicos, vamos considerar o modelo conhecido como ϕ^3 . O potencial que caracteriza este modelo é escrito como

$$V(\phi) = 2\phi^2(1 - \phi), \quad (2.90)$$

observado na figura 2.10. A terceira ordem em ϕ dá sentido ao nome do modelo. Veja que se fizermos a reflexão $\phi \rightarrow -\phi$, notamos que não existe simetria Z_2 em ϕ e o potencial se torna $V(\phi) = 2\phi^2(1 + \phi)$. Observe que não se trata do mesmo potencial, mas sim de um potencial parceiro, similar ao apresentado em (2.90).

Observando o potencial (2.90), vemos que possui dois pontos críticos. Há um ponto de mínimo, localizado em $\phi_{min} = 0$ com $V = 0$. Além de um ponto de máximo, localizado em $\phi_{max} = 2/3$ com $V = 8/27 \approx 0,3$. Sendo assim, não apresenta nenhum setor topológico e a solução encontrada para este modelo é não topológica.

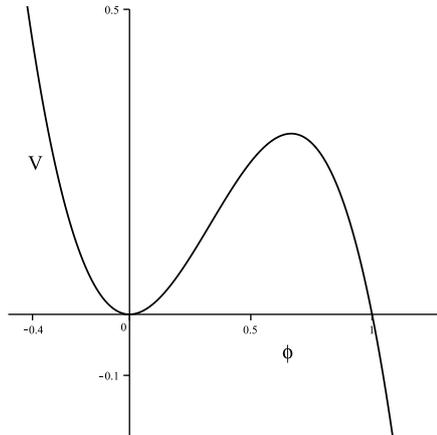


Figura 2.10: Potencial do modelo ϕ^3 , dado pela equação (2.90).

Para o modelo ϕ^3 , a equação de movimento estática (2.14) é dada por

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\phi - 6\phi^3. \quad (2.91)$$

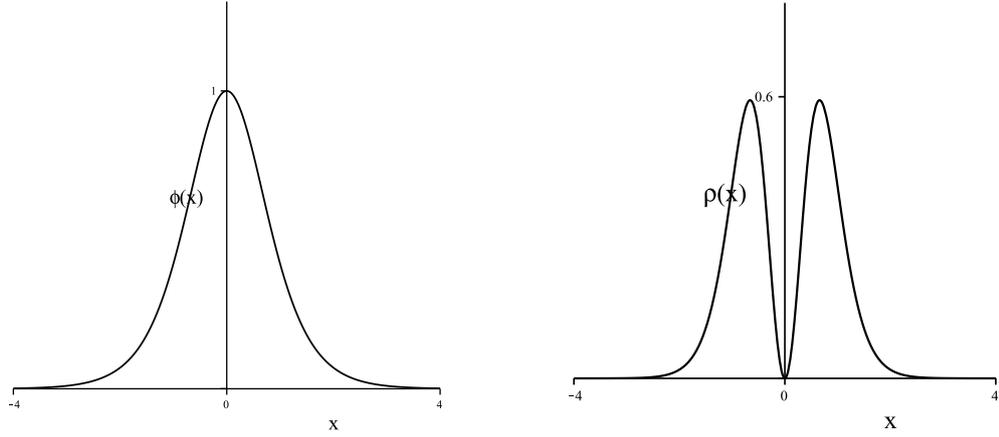


Figura 2.11: O modelo ϕ^3 : Solução (2.92) tipo lump à esquerda e densidade de energia (2.93) à direita.

de onde obtemos a solução

$$\phi(x) = \text{sech}^2(x), \quad (2.92)$$

esta é uma solução do tipo lump. Veja que ela se anula para os valores assintóticos $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = 0$. O comportamento da solução (2.92) pode ser observado na figura 2.11 à esquerda.

A densidade de energia dessa solução estática é dada pela equação (2.22), que fornece

$$\rho(x) = 4 \text{sech}^4(x) \tanh^2(x), \quad (2.93)$$

ilustrada na figura 2.11 à direita. A energia total da solução é obtida realizando a integral de $\rho(x)$ em todo espaço, que nos dá

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho(x) = \frac{16}{15}. \quad (2.94)$$

A solução do modelo é não topológica e instável. Vamos estudar sua estabilidade via potencial (2.42), que no caso do modelo ϕ^3 obtemos

$$U(x) = 4 - 12 \text{sech}^2(x), \quad (2.95)$$

mostrado na figura 2.12. Veja que esse é um potencial do tipo Poesch-Teller modificado (2.63), com os parâmetros $a = 4$, $b = 0$ e $c = 12$. Pelas equações (2.64), (2.65) e (2.66), verificamos a existência de três estados ligados com os autovalores de energia $\omega_n^2 = -5, 0, 3$, para $n = 0, 1, 2$. O autovalor de energia negativo identifica um estado ligado de energia abaixo do modo zero $\omega_0^2 = 0$.

O estado de energia negativo implica na instabilidade da solução do modelo. Veja que o modo zero, dado pela equação

$$\eta_0(x) = \frac{d\phi}{dx} = -2 \text{sech}^2(x) \tanh(x), \quad (2.96)$$

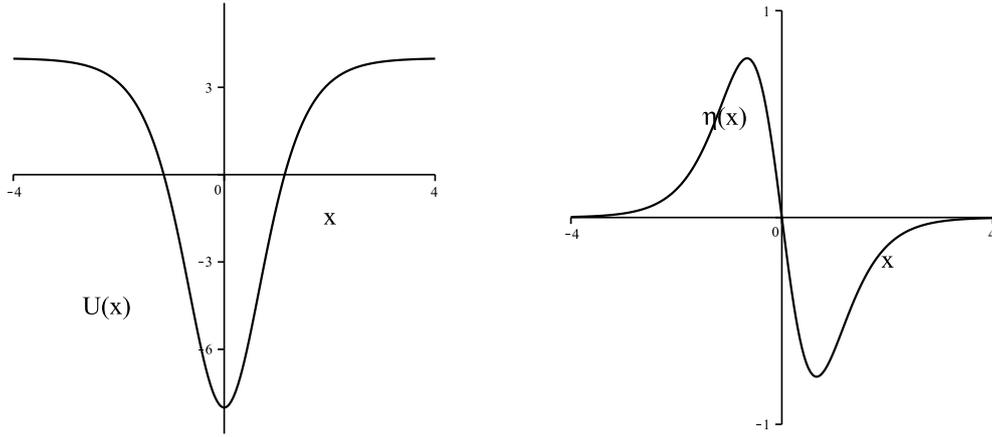


Figura 2.12: O modelo ϕ^3 : Potencial de estabilidade (2.95) à esquerda e modo zero (2.96) à direita.

cruza o eixo horizontal do gráfico quando $x = 0$ formando um nó. A presença de nós no modo zero é característica de defeitos não topológicos [72]. O comportamento do potencial de estabilidade (2.95) e do modo zero (2.96) pode ser observado na figura 2.11.

2.3.2 O modelo ϕ^4 invertido

O modelo ϕ^4 invertido é uma teoria de campo escalar real que possui uma interação não linear dominada pelo termo ϕ^4 . O “invertido” refere-se ao sinal negativo no termo de interação ϕ^4 , que o diferencia do modelo ϕ^4 convencional estudado na subseção 2.2.1.

Este modelo possui potencial escrito como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2), \quad (2.97)$$

ilustrado na figura 2.13. Assim como o potencial do modelo ϕ^4 , o potencial (2.97) possui simetria de reflexão em ϕ , isto é, simetria Z_2 .

O potencial (2.97) possui três pontos críticos. Dois deles são pontos de máximos localizados em $\phi_{max\pm} = \pm 1/\sqrt{2}$, onde $V = 1/8$. E um ponto de mínimo para $\phi_{min} = 0$, onde $V = 0$. Há apenas um estado de vácuo nesse potencial, que é ligado aos outros zeros do potencial em $\phi = \pm 1$ por um setor não topológico, caracterizando um defeito do tipo não topológico.

A equação de movimento estática (2.14) para este modelo é escrita como

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi - 2\phi^3, \quad (2.98)$$

com soluções

$$\phi^\pm(x) = \pm \operatorname{sech}(x). \quad (2.99)$$

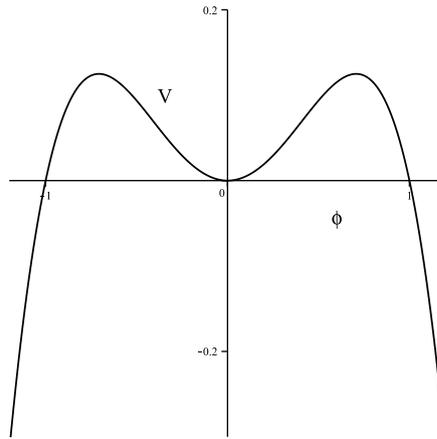


Figura 2.13: Potencial do modelo ϕ^4 invertido, dado pela equação (2.97).

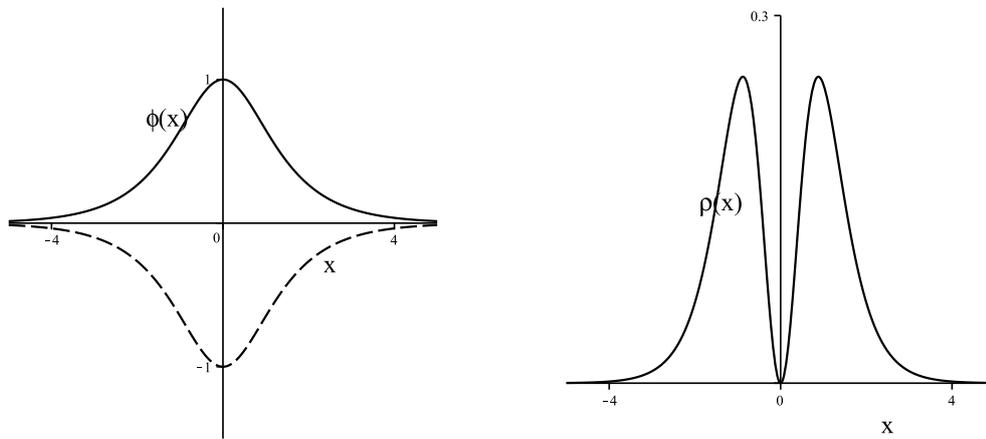


Figura 2.14: O modelo ϕ^4 invertido: Soluções (2.99) tipo lump ϕ^+ (linha sólida) e ϕ^- (linha tracejada) à esquerda e densidade de energia (2.100) à direita.

Soluções desse tipo são chamadas de lump. Ao contrário de kinks, a solução do tipo lump é invariante por reflexão $x \rightarrow -x$, portanto, as soluções do tipo lump com sinal positivo e com sinal negativo não são relacionadas pela simetria de reflexão, $\phi(-x) = \text{sech}(-x) = \text{sech}(x)$.

Para a densidade de energia das soluções (2.99), usamos a equação (2.22) para obter

$$\rho(x) = \text{sech}^2(x) \tanh^2(x). \quad (2.100)$$

As soluções (2.99) estão ilustradas ao lado da sua densidade de energia (2.100) na figura 2.14. Note que a estrutura das soluções e da densidade de energia são semelhantes as obtidas no modelo ϕ^3 , figura 2.11.

A energia total da configuração estática é obtida pela equação (2.29), de onde temos que

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho(x) = \frac{2}{3}. \quad (2.101)$$

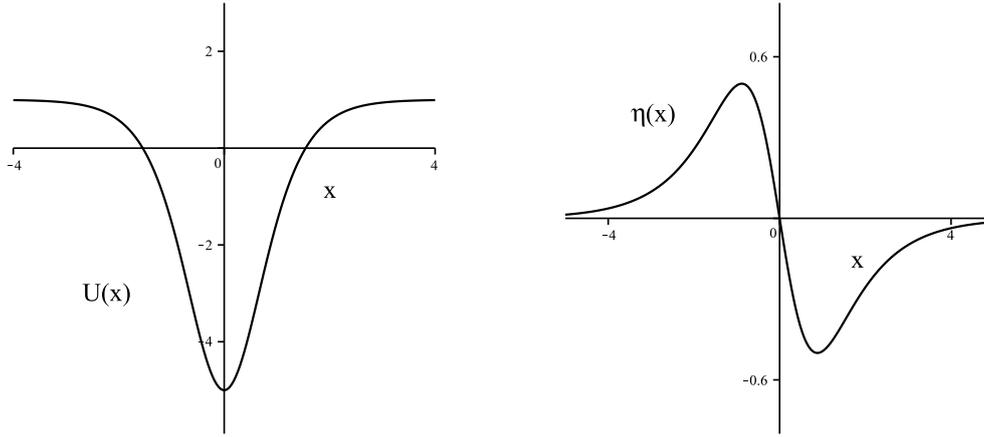


Figura 2.15: O modelo ϕ^4 invertido: Potencial de estabilidade (2.102) à esquerda e modo zero (2.103) à direita.

Podemos analisar a estabilidade das soluções não topológicas do modelo ϕ^4 invertido pelo potencial de estabilidade (2.42), de onde obtemos

$$U(x) = 1 - 6 \operatorname{sech}^2(x). \quad (2.102)$$

Esse potencial de estabilidade é da forma (2.63), com os parâmetros de Poeschl-Teller modificado $a = 1$, $b = 0$ e $c = 6$. Pelas equações (2.64), (2.65) e (2.66), obtemos que $n = 0, 1$, logo, existem dois estados ligados com autovalores de energia $\omega_0^2 = -3$ e $\omega_1^2 = 0$. O estado de menor energia possui autovalor negativo, o que comprova a instabilidade das soluções não topológicas do modelo.

O modo zero é

$$\eta_0(x) = \frac{d\phi}{dx} = -\operatorname{sech}(x) \tanh(x), \quad (2.103)$$

mostrado na figura 2.15. Observe que o modo zero corta o eixo x na origem, caracterizando a instabilidade da solução do modelo.

Note que o perfil do potencial de estabilidade do modelo ϕ^4 invertido é semelhante ao do modelo ϕ^4 . Porém, veja que o poço com estados ligados do modelo ϕ^4 invertido é mais profundo e que há estados ligados com energia menor do que zero, como mostra a figura 2.16.

Existem diversos modelos de campos que geram outros tipos de defeitos, como vórtices em (2,1) dimensões do espaço-tempo [73]. Dentro de algumas possíveis classes de modelos, vórtices podem ser investigados em modelos gêmeos [74], vórtices compactos [75], vórtices em sistemas sem vácuos [76] e uma maneira de desacoplar as equações de primeira ordem [77], e monopolos em (3,1) dimensões [1, 2, 78, 46]. De característica não topológicas citamos os defeitos conhecidos como Q-balls [79, 80]. No entanto, vamos nos ater a investigação de kinks e lumps.

Uma classe de modelos que suportam defeitos topológicos ou não topológicos pode

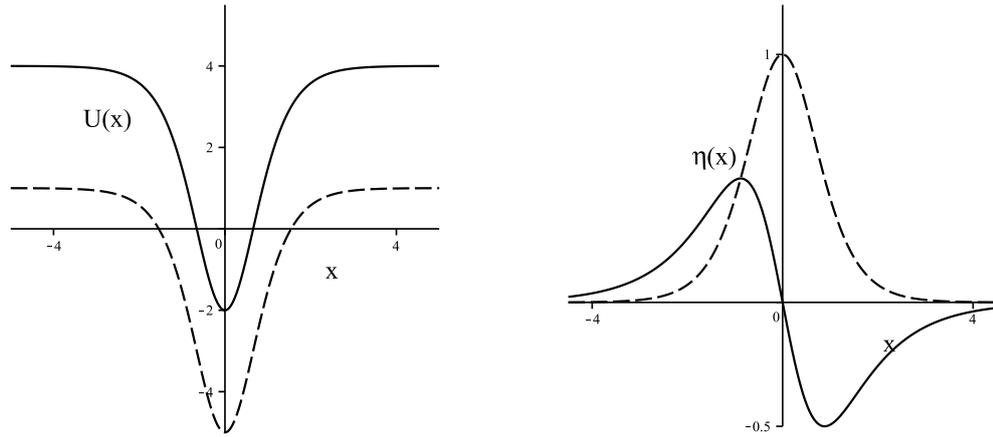


Figura 2.16: Potenciais de estabilidade (2.62) e (2.102) (à esquerda) e modos zeros (2.67) e (2.103) (à direita), dos modelos ϕ^4 (linha sólida) e ϕ^4 invertido (linha tracejada).

ser formada a partir de modelos conhecidos. Na próxima seção vamos estudar como usar esse método que mapeia novos modelos.

2.4 Defeitos deformados

O método de deformação é utilizado para obtenção de novas teorias de campos a partir de uma conhecida que possui solução do tipo defeito. A proposta desse método foi apresentada na referência [81] e, posteriormente, o procedimento foi estendido em [82].

Consideramos um modelo de campo escalar ϕ descrito pela densidade lagrangiana (2.6) com um potencial específico $V(\phi)$ conhecido. A partir desse modelo, podemos obter um novo modelo de campo, que chamaremos de χ . Os dois modelos são relacionados pela expressão

$$U(\chi) = \frac{V(\phi \rightarrow f(\chi))}{f_\chi^2}, \quad (2.104)$$

em que $f(\chi)$ é uma função bem definida que depende do campo do modelo novo, chamada de função de deformação ou função deformadora, e $f_\chi = df/d\chi$. O potencial definido em (2.104) é chamado de potencial deformado, que modela uma nova teoria de campos governada pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_d = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - U(\chi). \quad (2.105)$$

Verificamos que, se aplicarmos o formalismo de primeira ordem para a equação de movimento em um regime de campo estático, $\chi = \chi(x)$, podemos escrever as equações de primeira ordem

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi \quad (2.106)$$

para modelos com potenciais que nos permita definir

$$U(\chi) = \frac{1}{2}W_\chi^2, \quad (2.107)$$

com $W_\chi = dW/d\chi$, onde $W = W(\chi)$ é o superpotencial do novo modelo, que se associa ao superpotencial do primeiro modelo de campo ϕ na forma

$$W_\chi = \frac{W_\phi(\phi \rightarrow f(\chi))}{f_\chi}. \quad (2.108)$$

As soluções para o novo modelo são obtidas pela inversão da função de deformação $f(\chi)$, de forma que

$$\chi(x) = f^{-1}(\phi(x)). \quad (2.109)$$

A densidade de energia associada as soluções deformadas é determinada de forma semelhante à densidade de energia das soluções dos modelos originais. Temos que

$$\rho_d = \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + U(\chi). \quad (2.110)$$

Já a energia total do novo modelo é calculada pela relação

$$E = |W(\chi(x \rightarrow \infty)) - W(\chi(x \rightarrow -\infty))|, \quad (2.111)$$

para o potencial deformado definido em termos do superpotencial $W(\chi)$, como visto na equação (2.107).

Mais a respeito de defeitos deformados e o método da deformação, ver as referências [48, 72, 83]. Dedicamos as subseções seguintes para a demonstração da aplicação do método descrito.

2.4.1 Potencial $\phi^4 \rightarrow$ seno-Gordon

Na primeira aplicação do método da deformação vamos considerar o modelo ϕ^4 como modelo original, abordado na subseção 2.2.1. O potencial é dado em (2.52), implicando na densidade lagrangiana (2.6). O modelo ϕ^4 é gerado pelo superpotencial da equação (2.54), de forma que escrevemos as equações de (2.55). De onde obtemos as soluções (2.59), que satisfazem a equação de movimento estática (2.53).

Agora, vamos definir a função de deformação

$$f(\chi) = \sin(\chi) \quad (2.112)$$

para gerar o novo modelo. Usamos a equação (2.104) para escrever o potencial deformado

$$U(\chi) = \frac{1}{2} \cos^2(\chi), \quad (2.113)$$

mostrado na figura 2.7. Veja que é um potencial seno-Gordon, estudado na subseção 2.2.3. O potencial do modelo possui infinitos mínimos conectados por setores topológicos. Os mínimos do potencial (2.113) estão localizados para os valores $\chi_{min} = (k + 1/2)\pi$, em que k é um número inteiro.

Da equação (2.108), temos que $W_\chi = 1 - \sin^2(\chi) = \cos^2(\chi)$, de onde escrevemos a função superpotencial para o modelo deformado

$$W(\chi) = \frac{1}{2} \left(\chi + \frac{1}{2} \sin(2\chi) \right). \quad (2.114)$$

As soluções do modelo deformado são obtidas pela inversão da função de deformação (2.112), que nos fornece de forma direta

$$\chi^\pm(x) = \pm \arcsin(\tanh(x)), \quad (2.115)$$

mostradas na figura 2.8. As soluções identificam kink $\chi^+(x)$ e antikink $\chi^-(x)$.

Veja que essas soluções conectam os mínimos do potencial para $k = 0$, isto é, para os valores de $\chi_{-1} = -\pi/2$ e $\chi_{+1} = \pi/2$. As soluções para os demais setores topológicos podem ser obtidas incluindo uma fase na equação (2.115). Neste caso, ficamos com $\chi^\pm(x) = \pm \arcsin(\tanh(x)) + k\pi$.

A energia total de cada solução pode ser calculada pela equação (2.111), que resulta em $E = 2$.

2.4.2 Potencial $\phi^4 \rightarrow \chi^6 \rightarrow \tilde{\chi}^{10}$

Para uma segunda aplicação, vamos considerar a função de deformação da forma

$$f(\chi) = 2\chi^2 - 1. \quad (2.116)$$

O modelo de partida é o ϕ^4 , com potencial (2.52) e soluções topológicas (2.59).

Usando a equação (2.104) e a função de deformação (2.116), obtemos para o novo modelo o potencial deformado

$$U(\chi) = \frac{1}{2} \chi^2 (1 - \chi^2)^2, \quad (2.117)$$

mostrado na 2.4. Note que esse potencial caracteriza o modelo ϕ^6 , apresentado na seção (2.2.2).

As soluções estáticas para esse modelo obtidas pela inversão da função de deformação (2.109)

$$\chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2} [1 \pm \tanh(x)]}, \quad (2.118)$$

Essas quatro soluções conectam os dois setores topológicos do potencial (2.117). O primeiro setor topológico $S^{(1)}$ conecta os mínimo $\chi_{-1} = -1$ e $\chi_0 = 0$, e o segundo setor

topológico $S^{(2)}$ conecta os mínimos $\chi_0 = 0$ e $\chi_{+1} = 1$. As soluções podem ser observadas na figura 2.5. As funções $\chi^+(x)$ identificam kinks e $\chi^-(x)$ identificam antikinks. As soluções foram estudadas na subseção 2.2.2.

Podemos repetir o processo com a mesma função de deformação (2.116) aplicando no modelo do potencial deformado dado na equação (2.117), o que nos leva a um novo modelo de campo [82]. Realizando o procedimento, obtemos

$$\tilde{U}(\chi) = \frac{1}{2}\chi^2(1-\chi^2)^2(1-2\chi^2)^2, \quad (2.119)$$

mostrado na figura 2.17. Observe que esse potencial é de ordem 10 em χ . A nova teoria é chamada de $\tilde{\chi}^{10}$.

O potencial do novo modelo apresenta nove pontos críticos. Cinco desses são pontos de mínimo, localizados em $\chi_0 = 0$, $\chi_{\pm 1} = \pm 1$ e $\chi_{\pm 2} = \pm\sqrt{2}/2$, onde o potencial é nulo. Os outros quatro pontos são de máximo, para $\chi_{max} = \pm(1/10)\sqrt{45-5\sqrt{41}}$, $\pm(1/10)\sqrt{45+5\sqrt{41}}$.

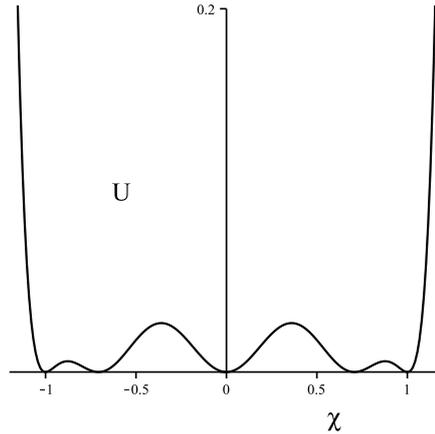


Figura 2.17: Potencial deformado do modelo $\tilde{\chi}^{10}$, dado pela equação (2.119).

A equação de movimento estática (2.14) para este modelo é

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = 20\chi^9 - 48\chi^7 + 39\chi^5 - 12\chi^3 + \chi. \quad (2.120)$$

Da equação (2.108), temos que $\tilde{W}_\chi = -(1+\chi)(2\chi+1)$. Portanto, o superpotencial que gera o modelo $\tilde{\chi}^{10}$ é

$$\tilde{W}(\chi) = -\frac{2}{3}\chi^3 - \frac{3}{2}\chi^2 - \chi. \quad (2.121)$$

Já a equação de primeira ordem, obtida por (2.106), é

$$\frac{d\chi}{dx} = -(1+\chi)(2\chi+1). \quad (2.122)$$

As soluções deste modelo são encontradas por uma integração da equação de primeira ordem ou, de forma direta, pela inversão da função de deformação

$$\tilde{\chi}(x) = f^{-1}(\chi(x)), \quad (2.123)$$

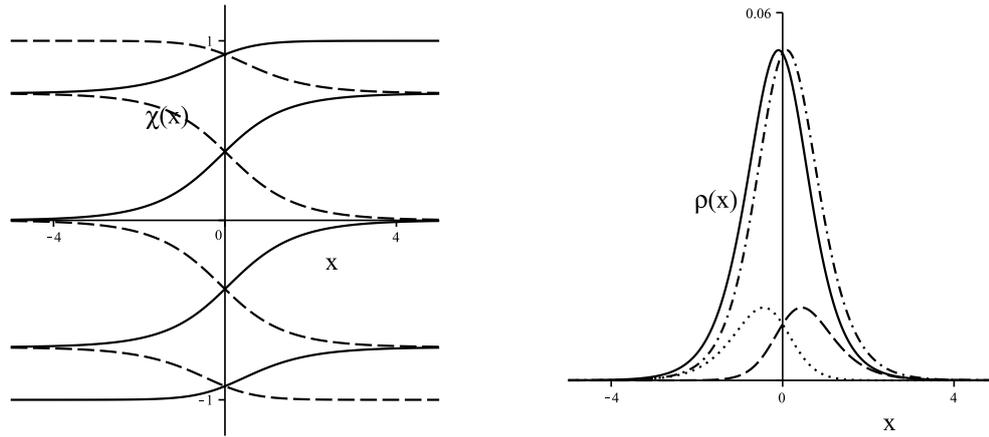


Figura 2.18: O modelo χ^{10} : Soluções (2.124) do tipo kink χ^+ (linha sólida) e antikink χ^- (linha tracejada) à esquerda, e densidade de energia (2.129) à direita.

de onde obtemos

$$\tilde{\chi}(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}} [1 \pm \tanh(x)]}. \quad (2.124)$$

Essas oito soluções conectam os quatro setores topológicos do potencial (2.119). O primeiro setor topológico $S^{(1)}$ conecta os mínimos χ_{-1} e χ_{-2} , o setor $S^{(2)}$ conecta os mínimos χ_{-2} e χ_0 , o setor $S^{(3)}$ conecta os mínimos χ_0 e χ_{+1} e o setor $S^{(4)}$ conecta os mínimos χ_{+1} e χ_{+2} . As soluções são

$$\chi_1^\pm(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2}} [1 \mp \tanh(x)]}, \quad (2.125)$$

$$\chi_2^\pm(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}} [1 \pm \tanh(x)]}, \quad (2.126)$$

$$\chi_3^\pm(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}} [1 \mp \tanh(x)]}, \quad (2.127)$$

$$\chi_4^\pm(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2}} [1 \pm \tanh(x)]}, \quad (2.128)$$

mostradas na figura 2.18. As soluções $\chi^+(x)$ identificam kinks e as soluções $\chi^-(x)$ identificam antikinks.

A densidade de energia das soluções deformadas é obtida pela equação (2.110), de

onde encontramos

$$\tilde{\rho}_1^\pm(x) = \mp \frac{1}{32} \frac{(\tanh^2(x) \pm 1)(\tanh^2(x) - 1)}{2 + \sqrt{2(1 \pm \tanh(x))}}, \quad (2.129)$$

$$\tilde{\rho}_2^\pm(x) = \mp \frac{1}{32} \frac{(\tanh^2(x) \mp 1)(\tanh^2(x) - 1)}{\sqrt{2(1 \pm \tanh(x))} - 2}, \quad (2.130)$$

$$\tilde{\rho}_3^\pm(x) = \pm \frac{1}{32} \frac{(\tanh^2(x) \pm 1)(\tanh^2(x) - 1)}{\sqrt{2(1 \mp \tanh(x))} - 2}, \quad (2.131)$$

$$\tilde{\rho}_4^\pm(x) = \pm \frac{1}{32} \frac{(\tanh^2(x) \mp 1)(\tanh^2(x) - 1)}{2 + \sqrt{2(1 \pm \tanh(x))}}. \quad (2.132)$$

A energia total dos setores topológicos desse potencial é calculada pela equação (2.111), que nos fornece

$$E^{(1)} = E^{(4)} = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{3}{4}, \quad (2.133)$$

$$E^{(2)} = E^{(3)} = \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{29}{12}, \quad (2.134)$$

como as energias associadas aos setores topológicos $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ e $S^{(4)}$, respectivamente. Percebe-se que há dois tipos de setores topológicos equivalentes, que conectam os mínimos do potencial (2.119). Na figura 2.19 são mostrados os potenciais do modelo original ϕ^4 , do primeiro modelo deformado χ^6 e do modelo $\tilde{\chi}^{10}$.

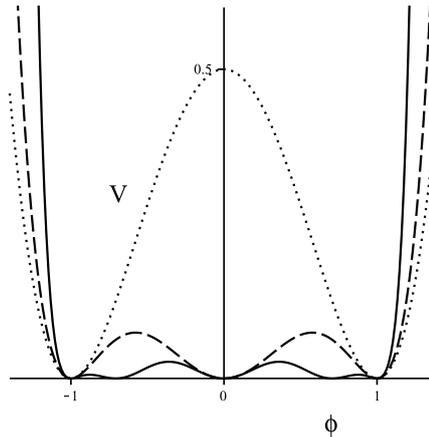


Figura 2.19: O potencial ϕ^4 (linha pontilhada), o potencial deformado χ^6 (linha tracejada) e o potencial deformado $\tilde{\chi}^{10}$ (linha sólida).

Outros tipos de funções deformadoras podem ser consideradas para gerar novos modelos, como uma função elíptica explorada na referência [84]. O método de deformação é válido para deformar potenciais que suportam soluções do tipo defeitos topológicos e não topológicos. Nas referências [81] e [85] são desenvolvidos exemplos de modelos com soluções não topológicas aplicando o método de deformação.

2.4.3 Potencial $\phi^4 \rightarrow$ seno-Gordon duplo

Uma família de modelos do tipo seno-Gordon pode ser gerada a partir da aplicação do método de deformação [86]. Vimos na subseção 2.4.1 que podemos obter o modelo seno-Gordon a partir da deformação do potencial do modelo ϕ^4 . Analisando esse modelo de partida, podemos fazer uma consideração importante sobre a função deformadora: A função pode ser aplicada sucessivamente e pode-se definir família de potenciais relacionados entre si por repetidas aplicações da função de deformação e da sua função inversa.

Isto é, vamos considerar um par de funções de deformação

$$f(\chi) \quad \text{e} \quad \frac{1}{f(\chi)}, \quad (2.135)$$

que conduzem ao mesmo modelo deformado. O novo modelo tem soluções que podem ser obtidas pelo inverso dessas funções. O procedimento de deformação depende da função deformadora escolhida.

O diagrama abaixo representa a sequência de geração de novos modelos [82]:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & & \hat{V} & \xleftarrow{f^{-1}} & \hat{V} & \xleftarrow{f^{-1}} & V & \xrightarrow{f} & \tilde{V} & \xrightarrow{f} & \tilde{V} & \dots \\
 & & \downarrow & \\
 \dots & & \hat{\phi}_d & \xleftarrow{f} & \hat{\phi}_d & \xleftarrow{f} & \phi_d & \xrightarrow{f^{-1}} & \tilde{\phi}_d & \xrightarrow{f^{-1}} & \tilde{\phi}_d & \dots
 \end{array}$$

Agora, vamos aplicar o método de deformação considerando, da mesma forma, o modelo ϕ^4 como o modelo de partida. O potencial do ϕ^4 é dado da equação (2.52) e as soluções do modelo são (2.59). Para esta aplicação, vamos usar as funções de deformação definidas como

$$f_1 = f_r(\chi) = r \tan(\chi), \quad (2.136)$$

$$f_2 = \frac{1}{f_r(\chi)} = \frac{1}{r} \cot(\chi), \quad (2.137)$$

em que r é uma constante real e positiva de forma que $r \in (0, \infty)$. O novo modelo tem soluções que podem ser obtidas pelo inverso dessas funções. O procedimento nos leva ao potencial deformado

$$U_r(\chi) = \frac{1}{2r^2} \left((1+r^2) \cos^2(\chi) - r^2 \right)^2, \quad (2.138)$$

chamado de seno-Gordon duplo, figura 2.20.

Este modelo pertence a uma classe de modelos que possuem infinitos mínimos, assim como o modelo seno-Gordon. No entanto, os infinitos setores topológicos não são todos equivalentes e dependem do parâmetro r . Os pontos de mínimo e de máximo estão

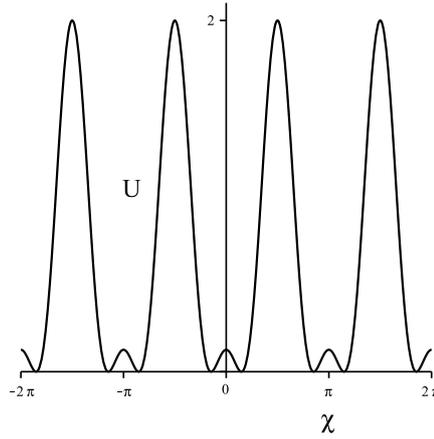


Figura 2.20: Potencial seno-Gordon duplo, dado na equação (2.138) para $r = 2$.

localizados em

$$\chi_{min}^m = \pm \arctan(1/r) \pm m\pi, \quad (2.139)$$

$$\chi_{max}^n = \pm \frac{n}{2}\pi, \quad (2.140)$$

m e n são números naturais.

Existem dois tipos de setores topológicos. Observe o potencial do modelo, mostrado na figura 2.20, que a distância entre os mínimos de um setor topológico é maior do que a distância entre os mínimos do outro. A altura dos máximos maiores e menores são dados pela relação

$$h_1(r) = \frac{1}{2r^2}, \quad h_2(x) = \frac{r^2}{2}. \quad (2.141)$$

Quando $r = 1$ retornamos ao modelo seno-Gordon da subseção 2.2.3. No caso do modelo seno-Gordon duplo, a função superpotencial é

$$W(\chi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right) \chi + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r} + r \right) \sin(2\chi). \quad (2.142)$$

Tomando o inverso das funções de deformação (2.136) e (2.137), obtemos as soluções do modelo:

$$\chi_1^\pm(x) = \pm \arctan \left(\frac{1}{r} \tanh(x) \right) \pm m\pi, \quad (2.143)$$

$$\chi_2^\pm(x) = \mp \operatorname{arccot}(r \tanh(x)) \pm n\pi. \quad (2.144)$$

Note que uma fase é adicionada às soluções, onde m e n são números naturais, para mapear os setores topológicos desse modelo. A solução $\chi_1(x)$ identifica uma família de setor topológico com altura h_1 , enquanto $\chi_2(x)$ mapeia o segundo tipo de setores topológicos com altura h_2 do modelo em questão.

As densidades de energia das soluções estáticas desse modelo são obtidas pela

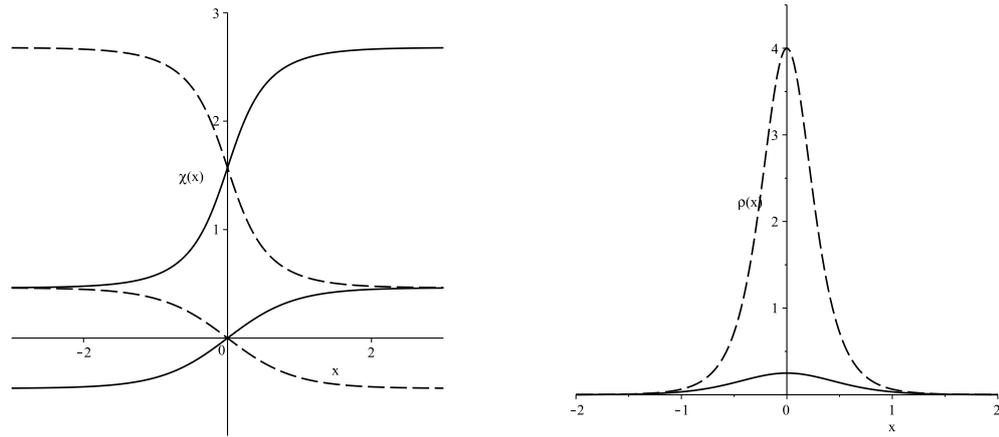


Figura 2.21: O modelo seno-Gordon duplo: Soluções (2.143) e (2.144) tipo kink $\chi^+(x)$ (linha sólida) e antikink $\chi^-(x)$ (linha tracejada) à esquerda; densidade de energia (2.145) (linha sólida) e (2.146) (linha tracejada) à direita, com $r = 2$ e $m = n = 0$.

equação (2.110), de onde temos

$$\rho_1(x) = \frac{r^2 \operatorname{sech}^4(x)}{(r^2 + \tanh^2(x))^2}, \quad (2.145)$$

$$\rho_2(x) = \frac{r^2 \operatorname{sech}^4(x)}{(1 + r^2 \tanh^2(x))^2}. \quad (2.146)$$

Note também que se $r = 1$ a densidade de energia se torna igual à do modelo seno-Gordon.

Na figura 2.21 mostramos as densidades de energia das soluções para o valor de $r = 2$. A linha sólida representa a densidade de energia das soluções dos setores topológicos menores $\rho_1(x)$, enquanto o gráfico da linha tracejada representa a densidade de energia das soluções dos setores maiores $\rho_2(x)$.

A energia total das soluções (2.143) e (2.144) são

$$E_1 = \left(\frac{1}{r} - r\right) \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + r\right) \sin\left(2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right), \quad (2.147)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r\right) \operatorname{arccot}(r) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r\right) (\operatorname{arccot}(r) + \pi). \quad (2.148)$$

Vemos que a energia depende do parâmetro r .

O modelo seno-Gordon duplo pode ser usado na área de magnetismo, o modelo é de interesse físico para descrever as fases distintas de materiais magnéticos específicos. Por exemplo, a investigação feita sobre as fases dos materiais na referência [87]. Outros modelos da família seno-Gordon duplo foram investigados nas referências [88, 89, 90, 91, 92].

No capítulo a seguir estudamos modelos compostos por dois campos escalares reais em (1,1) dimensões do espaço-tempo, acoplados por um potencial de interação $V(\phi, \chi)$.

Modelos de dois campos escalares

Neste capítulo vamos investigar modelos compostos de dois campos escalares reais. De modo geral, a análise segue semelhante à realizada para modelos de um campo, abordados no capítulo anterior. No caso de dois campos, a ação é dada por

$$S = \int d^2x \mathcal{L}(\phi, \chi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \chi). \quad (3.1)$$

As equações de movimento são obtidas usando o princípio da minimização da ação. Para os campos escalares reais ϕ e χ temos, respectivamente,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \chi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} = 0. \quad (3.2)$$

Assim, obtemos duas equações de movimento para modelos compostos por dois campos. Essas equações são chamadas de Equações de Euler-Lagrange.

Uma teoria de campos composta por dois campos escalares reais acoplados é descrita pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi), \quad (3.3)$$

com $V(\phi, \chi)$ sendo o potencial que depende dos campos ϕ e χ . Os campos estão acoplados via este potencial.

Substituindo a densidade lagrangiana (3.3) nas equações de movimento (3.2), podemos reescrevê-las como

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu \partial^\mu \chi + \frac{\partial V}{\partial \chi} = 0. \quad (3.4)$$

Em (1,1) dimensões, escrevemos explicitamente as equações diferenciais parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \chi} = 0. \quad (3.5)$$

Para as configurações estáticas, $\phi = \phi(x)$ e $\chi = \chi(x)$, chegamos nas equações de movimento estáticas

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \quad \text{e} \quad \frac{d^2 \chi}{dx^2} = -\frac{\partial V}{\partial \chi}. \quad (3.6)$$

Note que os campos continuam acoplados via potencial $V = V(\phi, \chi)$. Em geral, as equações de movimento dos modelos de um campo estudados no capítulo 2 possuem resoluções

difíceis de serem obtidas por se tratarem de equação diferenciais de segunda ordem. Em particular, as equações (3.6) são ainda mais complicadas por formarem um sistema de equações.

Para sistemas compostos por dois campos, temos o tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\chi\partial_\nu\chi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (3.7)$$

com \mathcal{L} dada pela equação (3.3). A componente T_{00} corresponde à densidade de energia, logo,

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi), \quad (3.8)$$

e a componente T_{11} corresponde à pressão

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 - V(\phi, \chi). \quad (3.9)$$

Nesse sistema é possível desenvolver o formalismo de primeira ordem para reduzir a ordem das equações de movimento (3.6) e introduzir o método BPS para obter as energias das soluções estáticas. Para iniciar o procedimento do formalismo, vamos considerar as equações (3.6) e multiplicar os lados da equação referente ao campo ϕ por $d\phi/dx$ e multiplicar a equação do campo χ por $d\chi/dx$. Somando os resultados, chegamos na seguinte relação

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 \right) = \frac{d}{dx} (V(\phi, \chi)), \quad (3.10)$$

integrando em relação a x , obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 \right) = V(\phi, \chi) + c, \quad (3.11)$$

c é uma constante de integração, que impomos seu valor nulo como já discutimos para sistemas de um campo na subseção 2.1.4.

Reduzida a ordem das equações de movimento, tornando-as uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, em que o vínculo continua preservado, podemos introduzir o método BPS que segue na próxima seção.

3.1 Energia BPS

A energia das soluções estáticas pode ser calculada pela integração da densidade de energia da equação (3.8). Nesse caso,

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right]. \quad (3.12)$$

Reescrevemos a relação de energia acima adicionando uma função suave $W(\phi, \chi)$, reescrevemos a energia como

$$E = \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{d\chi}{dx} \mp \frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2 + \int dx \left[V(\phi, \chi) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2 \right] \pm \int dx \frac{dW}{dx}. \quad (3.13)$$

Note que completamos o quadrado perfeito.

Seguindo as referências [93] e [94], o potencial $V(\phi, \chi)$ é definido em termos de uma função auxiliar $W(\phi, \chi)$, tal que

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 + \frac{1}{2} W_\chi^2, \quad (3.14)$$

em que $W_\phi = \partial W / \partial \phi$ e $W_\chi = \partial W / \partial \chi$, o terceiro termo do lado esquerdo da equação (3.13) se anula. Desse modo, a energia é mínima quando as equações

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi \quad \text{e} \quad \frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi \quad (3.15)$$

são satisfeitas. Essas são as equações de primeira ordem para o caso de sistemas com dois campos acoplados. Suas respectivas soluções minimizam a energia do sistema e também resolvem as equações de movimento estáticas de segunda ordem (3.6).

Então, a equação (3.13) se torna

$$E = E_{BPS} = \int dx \frac{dW}{dx}, \quad (3.16)$$

e passamos a nos referir a energia total como energia BPS, logo,

$$E_{BPS} = |\Delta W(\phi, \chi)| = |W(\phi(x \rightarrow \infty), \chi(x \rightarrow \infty)) - W(\phi(x \rightarrow -\infty), \chi(x \rightarrow -\infty))|. \quad (3.17)$$

Note que se tomarmos a definição do potencial (3.14) para a relação da pressão (3.9), temos que $p = 0$, para soluções que minimizam a energia do sistema. Isto é,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} W_\phi^2 + \frac{1}{2} W_\chi^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} + W_\phi \right) \left(\frac{d\phi}{dx} - W_\phi \right) + \left(\frac{d\chi}{dx} + W_\chi \right) \left(\frac{d\chi}{dx} - W_\chi \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A pressão é nula para sistemas de energia finita.

3.2 Estabilidade Linear

Para investigar a estabilidade linear das soluções estáticas de sistemas que envolvem dois campos escalares reais descritos pela densidade lagrangiana (3.3), precisamos escrever os campos da seguinte forma

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t) \quad \text{e} \quad \chi(x, t) = \chi(x) + \xi(x, t), \quad (3.19)$$

$\eta(x, t)$ e $\xi(x, t)$ são pequenas perturbações em torno das soluções estáticas $\phi(x)$ e $\chi(x)$. De forma que vale a definição: $\eta(x, t) \ll \phi(x)$ e $\xi(x, t) \ll \chi(x)$. Como foi feito na referência [95].

Substituindo as perturbações (3.19) nas equações de movimento para os campos ϕ e χ dadas em (3.2), obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \eta(x, t) \\ \xi(x, t) \end{pmatrix} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} \eta(x, t) \\ \xi(x, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{\phi\phi} & V_{\phi\chi} \\ V_{\chi\phi} & V_{\chi\chi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(x, t) \\ \xi(x, t) \end{pmatrix} = 0, \quad (3.20)$$

onde escrevemos as equações na forma matricial.

Supondo uma solução do tipo

$$\begin{pmatrix} \eta(x, t) \\ \xi(x, t) \end{pmatrix} = \sum_n \begin{pmatrix} \eta_n(x, t) \\ \xi_n(x, t) \end{pmatrix} \cos(\omega_n t), \quad (3.21)$$

para o caso dos campos estáticos, a equação de perturbação é

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} V_{\phi\phi} & V_{\phi\chi} \\ V_{\chi\phi} & V_{\chi\chi} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \eta(x) \\ \xi(x) \end{pmatrix} = \omega_n^2 \begin{pmatrix} \eta(x) \\ \xi(x) \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

com autovalores ω_n . Assim, temos um sistema de equações do tipo Schroedinger, tal que podemos escrever como

$$H\Psi_n(x) = \omega_n^2\Psi_n(x), \quad (3.23)$$

em que H é o operador hamiltoniano hermitiano

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} V_{\phi\phi} & V_{\phi\chi} \\ V_{\chi\phi} & V_{\chi\chi} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

e a função de onda é

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \eta(x) \\ \xi(x) \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Da definição do potencial (3.14), temos que

$$V_{\phi\phi} = W_{\phi\phi}^2 + W_{\phi} W_{\phi\phi\phi} + W_{\chi\phi}^2 + W_{\chi} W_{\chi\phi\phi}, \quad (3.26)$$

$$V_{\chi\chi} = W_{\phi\chi}^2 + W_{\phi} W_{\phi\chi\chi} + W_{\chi\chi}^2 + W_{\chi} W_{\chi\chi\chi}, \quad (3.27)$$

$$V_{\phi\chi} = V_{\chi\phi} = W_{\phi\chi} W_{\phi\phi} + W_{\phi} W_{\phi\phi\chi} + W_{\chi\chi}^2 W_{\chi\phi} + W_{\chi} W_{\chi\phi\chi}. \quad (3.28)$$

Para modelos de dois campos que é possível escrever o potencial da forma dada na equação (3.14), também é possível introduzir operadores de primeira ordem fatorando o hamiltoniano (3.24) como $H_{\pm} = S_{\pm}^{\dagger} S_{\pm}$. Obtemos

$$S_{\pm} = \frac{d}{dx} \pm \begin{pmatrix} W_{\phi\phi} & W_{\phi\chi} \\ W_{\chi\phi} & W_{\chi\chi} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

implicando que não é permitido autovalores negativos para as soluções BPS das equações de primeira ordem.

Da mesma forma, existe um modo zero

$$\left(\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} W_{\phi\phi} & W_{\phi\chi} \\ W_{\chi\phi} & W_{\chi\chi} \end{pmatrix} \right) \Psi_0 = 0, \quad (3.30)$$

em que $\omega_0^2 = 0$ é o estado de menor energia. Caso contrário, as soluções são instáveis quando submetidas a pequenas perturbações.

Na seção seguinte abordamos um caso de modelo de potencial de dois campos. Investigaremos métodos de resolver suas equações de campo que são acopladas pelo potencial de interação.

3.3 O modelo BNRT

Um modelo de dois campos a ser estudado é descrito pela função superpotencial

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2, \quad (3.31)$$

comumente chamado na literatura de BNRT (Bazeia, Nascimento, Ribeiro e Toledo) [96]. Ver também os trabalhos [93, 94, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103]. Aqui r é uma constante real que controla o termo de acoplamento entre os campos ϕ e χ .

O potencial que caracteriza o modelo BNRT possui a forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 - r\chi^2 + r(1 + 2r)\phi^2\chi^2 + \frac{1}{2}r^2\chi^4, \quad (3.32)$$

construído a partir da definição (3.14), de modo que as soluções encontradas minimizam a energia do sistema. O potencial BNRT (3.32), mostrado na figura 3.1 visto de baixo para cima, possui simetria $Z_2 \times Z_2$, ou seja, possui simetria de reflexão para cada um dos campos,

$$V(\phi, \chi) = V(-\phi, \chi) \quad \text{e} \quad V(\phi, \chi) = V(\phi, -\chi). \quad (3.33)$$

Os mínimos do potencial, ou estados de vácuo, são pontos críticos de W apresentados em pares, de forma que $V(\phi, \chi) = 0$ quando $W_{\phi} = 0$ e $W_{\chi} = 0$. Os pontos de mínimo

dependem dos valores possíveis que r pode assumir. Há quatro mínimos para $r > 0$ e apenas dois se $r < 0$. Se $r = 0$ percebemos a ausência do campo χ e, assim, temos um modelo de apenas um campo. Neste caso, vamos considerar a constante de acoplamento r positiva. Desse modo, os mínimos são identificados como os pares $v_i = (\phi_i, \chi_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. No presente caso, os quatro pontos de mínimo são

$$v_1 = (1, 0), v_2 = (-1, 0), v_3 = (0, 1/\sqrt{r}) \text{ e } v_4 = (0, 1/\sqrt{r}). \quad (3.34)$$

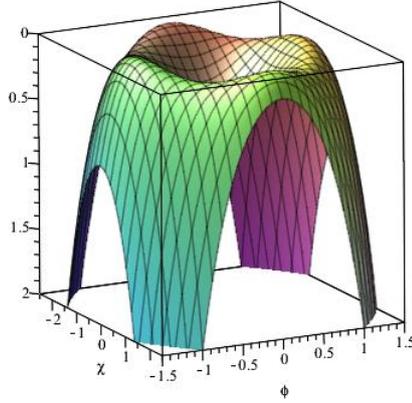


Figura 3.1: Potencial do modelo BNRT, dado pela equação (3.32) com $r = 1/4$.

Para o modelo BNRT temos que as equações de movimento estáticas (3.6) são

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2\phi + 2r(1+2r)\phi\chi^2 + 2\phi^3, \quad (3.35a)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = -2r\chi + 2r(1+2r)\phi^2\chi + 2r^2\chi^3, \quad (3.35b)$$

e as equações de primeira ordem (3.15) são

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm (1 - \phi^2 - r\chi^2) \quad \text{e} \quad \frac{d\chi}{dx} = \mp 2r\phi\chi. \quad (3.36)$$

Neste modelo, observamos que há seis setores topológicos conectando os mínimos (3.34) do potencial (3.32). Cinco deles possuem soluções BPS. Reconhecemos os setores topológicos: $S^{(1)}$, que conecta os mínimos v_1 e v_2 ; $S^{(2)}$, que conecta os mínimos v_3 e v_4 ; $S^{(3)}$, que conecta v_1 e v_3 ; $S^{(4)}$, que conecta v_1 e v_4 ; $S^{(5)}$, que conecta v_2 e v_3 e $S^{(6)}$, que conecta v_2 e v_4 .

Para cada mínimo do modelo BNRT (3.34), temos os seguintes valores da função $W(\phi, \chi)$: $W_1(v_1) = 2/3$, $W_2(v_2) = -2/3$, $W_3(v_3) = 0$ e $W_4(v_4) = 0$. Identificamos quatro setores BPS degenerados com energia $E_{BPS}^{(3)} = E_{BPS}^{(4)} = E_{BPS}^{(5)} = E_{BPS}^{(6)} = 2/3$ e um setor BPS com energia $E_{BPS}^{(1)} = 4/3$. O setor topológico e não BPS ($E_{BPS}^{(2)} = 0$) requer que sua

solução seja obtida pelas equações de movimento de segunda ordem para que sua energia seja conhecida.

As soluções que conectam os mínimos dos setores topológicos são obtidas resolvendo as equações de primeira ordem (3.36). Para o setor $S^{(1)}$, uma possível órbita é uma reta. Neste caso, impomos $\chi = 0$, obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2), \quad (3.37)$$

tornando-se uma equação de primeira ordem desacoplada. Logo, o par de soluções para esse primeiro setor é

$$\phi(x) = \pm \tanh(x) \quad \text{e} \quad \chi(x) = 0. \quad (3.38)$$

No caso de $\chi = 0$, o modelo retorna ao modelo ϕ^4 estudado na subseção 2.2.1. Para esse modelo, vemos que a solução $\phi(x)$ possui energia BPS igual a $4/3$.

Por outro lado, se impusermos que $\phi = 0$, $\chi(x)$ não pode ser obtido via equação de primeira ordem, sendo necessário resolver a equação de movimento (3.6) explicitamente. Neste caso,

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = -2r^2\chi \left(\frac{1}{r - \chi^2} \right), \quad (3.39)$$

com soluções não BPS

$$\phi(x) = 0 \quad \text{e} \quad \chi(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{r}} \tanh(\sqrt{r}x). \quad (3.40)$$

A energia das soluções é dada pela integração da densidade de energia (3.8). Portanto, $E^{(2)} = 4/(3\sqrt{r})$, com $r \in (0, 1)$.

Note que os pares de soluções (3.38) e (3.40) descrevem retas no plano (ϕ, χ) , que conectam os mínimos v_1 e v_2 . Note também a ausência de um dos campos nessas configurações. A condição de um campo nulo foi imposta no intuito de encontrar as órbitas que conectam os estados de mínimos do potencial.

O potencial desse modelo é acoplado, logo, a resolução das equações de movimento para cada setor topológico é não trivial. Quando há termos de acoplamento entre dois campos escalares, usamos um método para mapear os setores que conectam os mínimos do potencial, chamado de método das órbitas tentativas. Na próxima seção comentamos a respeito desse método proposto por Rajaraman em 1979 [104, 105].

3.4 Método das órbitas tentativas

O método das órbitas tentativas é bastante eficiente para investigar defeitos topológicos nos setores BPS que derivam das equações de ordem reduzida.

O potencial de sistemas de dois campos é acoplado, logo, as resoluções das equações de movimento seguem de forma não trivial. O método apresentado nesta seção é usado para determinar as soluções que conectam os mínimos do potencial acoplado, como no caso do modelo BNRT. Para usar esse método, faz-se necessário seguir os passos [106]:

Primeiro passo: Identificar um setor BPS do modelo. Neste caso, escolhemos dois pares de mínimos distintos e verificamos esses mínimos são conectados por um setor topológico com energia BPS não nula.

Vamos supor que o modelo de potencial em estudo tenha um conjunto discreto de n mínimos, com $n = 1, 2, \dots$, e que cada par de mínimo seja conectado por um setor topológico, com energia calculada via método de Bogoml'nyi, então

$$E_{ij} = |\Delta W_{ij}| = |W(\phi_i, \chi_i) - W(\phi_j, \chi_j)|. \quad (3.41)$$

Nesse caso, um setor BPS é obtido se, e somente se,

$$W(\phi_i, \chi_i) \neq W(\phi_j, \chi_j). \quad (3.42)$$

Segundo passo: Escolher uma órbita que envolva os campos ϕ e χ . Nesse passo, escolhemos uma função $F_{ij}(\phi, \chi) = 0$ que estabeleça uma órbita compatível com os pontos mínimos do potencial que especificam o setor BPS escolhido no passo anterior, de forma que, necessariamente,

$$F_{ij}(\phi_i, \chi_i) = 0 \quad \text{e} \quad F_{ij}(\phi_j, \chi_j) = 0. \quad (3.43)$$

Terceiro passo: Verificar se essa órbita satisfaz as equações de primeira ordem. Para isso, é necessário diferenciar a órbita escolhida, temos

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dx} = 0, \quad (3.44)$$

e comparar com as equações de primeira ordem (3.15), logo,

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial \phi} W_\phi + \frac{\partial F_{ij}}{\partial \chi} W_\chi = 0. \quad (3.45)$$

Dizemos que é uma boa órbita se for verificada a compatibilidade entre a órbita escolhida e as equações de primeira ordem. Neste caso, veja também que as soluções obtidas que resolvem as equações de primeira ordem devem resolver a equação de órbita. Realizada a construção e verificação da órbita que conecta dois pares de mínimo, usamos a órbita escolhida para desacoplar as equações de primeira ordem, a fim de simplificar a integração e obtenção das soluções de campo.

Agora, vamos fazer a aplicação do método das órbitas tentativas para obter as soluções que conectam os mínimos do potencial BNRT. Para obter um possível par de soluções que conectam o setor topológico $S^{(1)}$, que liga os mínimos v_1 e v_2 , com energia

$E_{BPS}^{(1)} = 4/3$, vamos supor uma órbita elíptica do tipo $a\phi^2 + b\chi^2 = c$, em que a , b e c são parâmetros reais e positivos que identificam a órbita. O próximo passo é verificar se essa órbita, de fato, passa pelos mínimos do setor topológico escolhido.

Note que para $(\pm 1, 0)$, obtemos a informação de que $a = c$. Eliminamos esse parâmetro da equação escolhida para a órbita e ficamos com $\phi^2 + b\chi^2 = 1$. Derivando essa última equação e usando as equações de primeira ordem (3.36) temos que $\phi^2 + r(1 + 2b)\chi^2 = 1$, de onde percebemos que a condição é satisfeita se $b = r/(1 - 2r)$, com $r \in (0, 1/2)$.

Logo, essa órbita escolhida é adequada para o nosso propósito. Assim,

$$\phi^2 + \frac{r\chi^2}{1 - 2r} = 1. \quad (3.46)$$

No limite $r \rightarrow 1/2$ a órbita elíptica se torna um segmento de reta conectando os mínimos desse primeiro setor em investigação.

Agora, vamos usar a órbita (3.46) para desacoplar as equações de primeira ordem (3.36). Para o setor $S^{(1)}$ obtemos o par de soluções

$$\phi^\pm(x) = \pm \tanh(2rx) \quad \text{e} \quad \chi^\pm(x) = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{r} - 2} \right) \text{sech}(2rx). \quad (3.47)$$

Essas soluções são mais interessantes de serem investigadas pois elas possibilitam a existência de paredes de domínio com estruturas internas. As soluções estão ilustradas na figura 3.2.

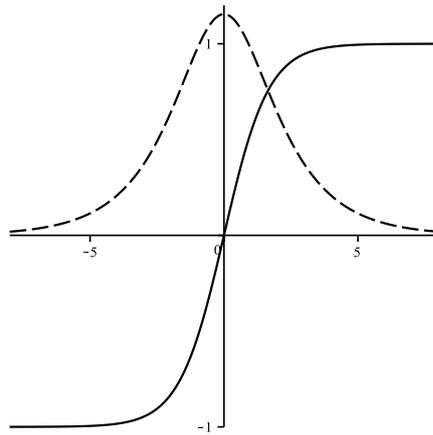


Figura 3.2: Soluções BNRT da equação (3.47), a solução $\phi^+(x)$ representada pela linha sólida e $\chi^+(x)$ representada pela linha tracejada.

Nos demais setores BPS podemos considerar as órbitas como: $r\chi^2 = 1 \pm \phi$, o que requer $r = 1/4$. Primeiramente, vamos escolher os setores topológicos $S^{(3)}$ e $S^{(4)}$, definidos pelos pares de mínimos v_1 e v_3 , v_1 e v_4 , que possuem energia $E_{BPS}^{(3)} = E_{BPS}^{(4)} = 2/3$.

Verificamos que a órbita que passa por esses mínimos tem o sinal positivo. Diferenciando essa equação e usando as equações de primeira ordem (3.36), obtemos a equação

$$\phi + r\chi^2 = 1. \quad (3.48)$$

Logo, é uma boa órbita que conecta os referidos mínimos. Usando essa órbita para desacoplar as equações de primeira ordem (3.36), obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi(1 - \phi), \quad (3.49)$$

integramos e encontramos o par de soluções

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right) \quad \text{e} \quad \chi^\pm(x) = \mp \sqrt{2 \left(1 - \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right)}. \quad (3.50)$$

Essas soluções identificam dois kinks $\phi(x)$ e $\chi^+(x)$ ou um kink $\phi(x)$ e um antikink $\chi^-(x)$, mostradas na figura 3.3. As soluções (3.50) resolvem as equações de movimento estáticas (3.35a) e (3.35b).

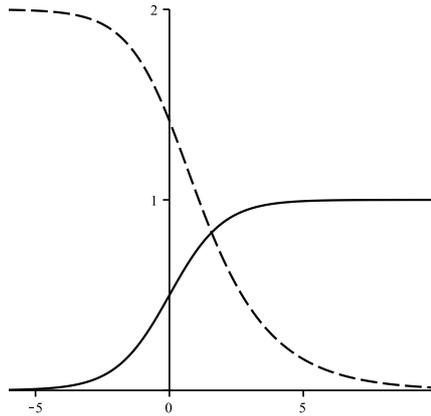


Figura 3.3: Soluções BNRT da equação (3.50), a solução $\phi(x)$ representada pela linha sólida e $\chi^-(x)$ representada pela linha tracejada.

Agora, vamos desenvolver esse procedimento para o órbita que conecta os mínimos v_2 e v_3 , v_2 e v_4 , que identificam os setores $S^{(5)}$ e $S^{(6)}$ com energia BPS $E_{BPS}^{(5)} = E_{BPS}^{(6)} = 2/3$. Nesse caso, obtemos a órbita

$$-\phi + r\chi^2 = 1, \quad (3.51)$$

que é uma boa órbita para $r = 1/4$. Essa órbita nos leva às soluções

$$\phi(x) = -\frac{1}{2} \left(1 - \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right) \quad \text{e} \quad \chi^\pm(x) = \pm \sqrt{2 \left(1 + \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right)}. \quad (3.52)$$

As soluções obtidas identificam um kink $\chi^+(x)$ e antikink $\phi(x)$, mostradas na figura 3.4, também resolvem as equações de movimento estáticas (3.35a) e (3.35b).

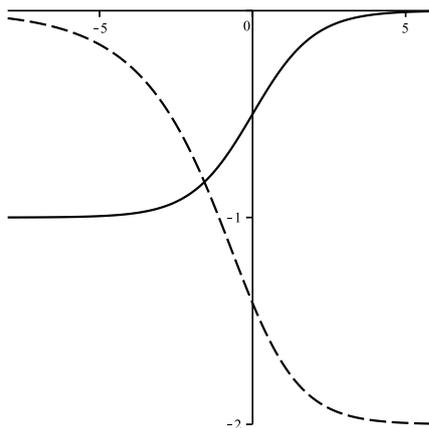


Figura 3.4: Soluções BNRT da equação (3.52), a solução $\phi(x)$ representada pela linha tracejada e $\chi^-(x)$ representada pela linha sólida.

Modelos de dois campos podem ser usados para descrever polímeros (Sólitons poliméricos) [107]. Há também outros tipos de defeitos topológicos chamados de twistons no polietileno cristalino [108] que aparecem em teoria de campos escalares.

Sistemas mais complexos são estudados quando há presença de mais de dois campos. Nas referências [109, 110, 111] são investigadas interações entre três campos escalares reais.

No capítulo seguinte, abordamos uma construção diferente do que vimos até aqui para modelos de dois campos escalares reais e acoplados. Os campos ϕ e χ são acoplados por uma função que depende apenas de um dos campos e interfere na cinemática do outro campo, além do potencial de interação $V(\phi, \chi)$ também ser escrito em termos dessa nova função. Nessa proposta, apresentamos alguns modelos originais de soluções do tipo lump que possuem sua geometria espacial modificadas por kinks.

Configurações tipo lump geometricamente modificadas

Neste capítulo vamos tratar de modelos originais compostos por dois campos escalares reais, onde a configuração de acoplamento é feito por uma função que depende de um dos campos e que interfere na cinemática do outro campo. Inspirados pela investigação apresentada no trabalho [112], usaremos a densidade de Lagrange modificada para descrever o sistema proposto:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}f(\chi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(\phi,\chi). \quad (4.1)$$

A modificação da densidade lagrangiana consiste na inclusão de uma função de um dos campos. Os campos ϕ e χ estão acoplados através do potencial de interação $V(\phi,\chi)$ e da função não negativa que depende de χ e que modifica a cinemática de ϕ .

Na referência [112] foram estudadas configurações tipo kink com estrutura interna, como modificações geométricas que possam aparecer na escala nanométrica. Vimos que é possível gerar uma nova estrutura de defeitos a partir da deformação de um kink por outro kink, o que os autores chamaram de multikinks. Na referência [113] foi feito um estudo com três campos. Nesse processo, vimos que o método de Bogomol'nyi é eficiente para calcular a energia das soluções e que não há contribuição da função $f(\chi)$, visto que a energia depende apenas da função $W(\phi,\chi)$ e dos valores assintóticos das configurações de campo. A introdução da função $f(\chi)$ no termo dinâmico do campo ϕ causa uma modificação geométrica no campo ϕ . Nessa perspectiva, escrevemos a densidade lagrangiana na forma da equação (4.1).

Nossa proposta é usar um defeito do tipo kink para deformar um outro defeito do tipo lump. Neste caso, o primeiro campo que configura o sistema está na classe de modelos que suportam defeitos não topológicos, vamos fixar que este campo seja denominado por ϕ . O segundo campo deve possuir um modelo que suporte defeitos topológicos, denominaremos de χ . Neste caso há a necessidade de modificar o procedimento usual do formalismo de primeira ordem para estudar as soluções não topológicas, um método proposto em [85] que apresentaremos mais adiante.

Note que a função f também pode ser escrita com uma dependência dos dois campos, $f = f(\phi,\chi)$. Mas se $f = f(\phi)$ é uma função não negativa, então, podemos reescrevê-la como $f(\phi) = g_\phi^2$, sem perda de generalidade. Introduzindo essa função na contribuição

dinâmica de ϕ da densidade lagrangiana, temos $g_\phi^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$, onde podemos usar a regra da cadeia para derivar e obter $(\partial_\mu g(\phi))(\partial^\mu g(\phi))$. Neste caso, a função $g(\phi)$ redefine o campo, de modo que $\Phi = g(\phi)$. O potencial de acoplamento é escrito tal que $V = V(\Phi, \chi)$, de forma que obtemos uma densidade lagrangiana equivalente à descrição de um modelo padrão com dois campos.

Uma vez que consideramos a densidade lagrangiana escrita na equação (4.1), a ação segue da definição usual

$$S = \int d^2x \mathcal{L}(\phi, \chi, f(\chi), \partial_\mu \phi, \partial_\mu \chi). \quad (4.2)$$

A partir do método de minimização da ação, escrevemos as equações de movimento para ϕ e χ , respectivamente,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \chi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f(\chi)} \frac{df(\chi)}{d\chi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} = 0. \quad (4.3)$$

Substituindo a densidade lagrangiana modificada (4.1), podemos reescrever as equações acima da forma

$$\partial_\mu (f(\chi) \partial^\mu \phi) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \frac{df(\chi)}{d\chi} + \frac{\partial V}{\partial \chi} = 0. \quad (4.4)$$

Buscamos por soluções estáticas para o modelo, então temos que as equações de movimentos são dados por

$$\frac{d}{dx} \left(f(\chi) \frac{d\phi}{dx} \right) = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad \text{e} \quad \frac{d^2 \chi}{dx^2} - \frac{1}{2} \frac{df(\chi)}{d\chi} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{\partial V}{\partial \chi}. \quad (4.5)$$

Como vimos anteriormente, a invariância da ação sob translação no espaço-tempo leva ao tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, que para os modelos que pretendemos estudar é escrito da forma

$$T_{\mu\nu} = f(\chi) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4.6)$$

As componentes não nulas desse tensor são T_{00} e T_{11} , temos que a densidade de energia corresponde à componente T_{00} . Assim,

$$\rho = \frac{1}{2} f(\chi) \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi), \quad (4.7)$$

e a componente T_{11} corresponde à pressão

$$p = \frac{1}{2} f(\chi) \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 - V(\phi, \chi). \quad (4.8)$$

De acordo com a conservação do tensor energia-momento, temos que a pressão deve ser constante a fim de sistemas com energia finita. Outros estudos sobre defeitos deformados podem ser encontrados nas referências [114] e [115].

4.1 Formalismo de primeira ordem

A energia das soluções estáticas é calculada pela integral da densidade de energia (4.7) em todo o espaço. No caso em estudo, temos

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} f(\chi) \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right]. \quad (4.9)$$

Vamos introduzir uma função $W(\phi, \chi)$ na expressão da energia, de onde temos

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2} \int dx \left[f(\chi) \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{1}{f(\chi)} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \mp \frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2 \right] \\ & + \int dx \left[V(\phi, \chi) - \frac{1}{2} \frac{1}{f(\chi)} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2 \right] \pm \int dx \frac{dW}{dx}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que usamos o método de completar o quadrado perfeito.

Definimos que o potencial $V(\phi, \chi)$ tenha a forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \frac{W_\phi^2}{f(\chi)} + \frac{1}{2} W_\chi^2, \quad (4.11)$$

com $W_\phi = \partial W / \partial \phi$ e $W_\chi = \partial W / \partial \chi$. Substituindo a $V(\phi, \chi)$ na relação de energia (4.10), a segunda integral se torna nula. Assim, a energia total

$$E = \frac{1}{2} \int dx \left[f(\chi) \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{1}{f(\chi)} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \mp \frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2 \right] \pm \int dx \frac{dW}{dx} \quad (4.12)$$

é limitada $E \geq E_{BPS}$. Dessa forma, a energia mínima é alcançada quando as equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{W_\phi}{f(\chi)} \quad \text{e} \quad \frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi \quad (4.13)$$

são satisfeitas. As equações com sinal superior e inferior são relacionadas pela mudança $x \rightarrow -x$. A energia se torna

$$E = E_{BPS} = \left| \int dx \frac{dW}{dx} \right|. \quad (4.14)$$

Veja que

$$\frac{dW}{dx} = W_\phi \frac{d\phi}{dx} + W_\chi \frac{d\chi}{dx}, \quad (4.15)$$

levando em conta o teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$\begin{aligned} E_{BPS} = & |\Delta W(\phi, \chi)| \\ = & |W(\phi(x \rightarrow \infty), \chi(x \rightarrow \infty)) - W(\phi(x \rightarrow -\infty), \chi(x \rightarrow -\infty))|. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Observe que a função $f(\chi)$ não contribui para a energia do sistema, sendo que esta depende apenas da função $W(\phi, \chi)$ e dos valores assintóticos das configurações de campo estático.

As soluções das equações de primeira ordem (4.13) minimizam a energia do sistema e devem resolver as equações de movimento estáticas (4.5). As funções $W(\phi, \chi)$ e $f(\chi)$ acoplam as equações de primeira ordem, fazendo necessário resolvê-las como um sistema. No caso dessa construção de modelo é interessante escolher a função superpotencial escrito como

$$W(\phi, \chi) = W_1(\phi) + W_2(\chi). \quad (4.17)$$

Essa escolha facilita a resolução das equações de primeira ordem (4.13). A equação de primeira ordem para χ não depende do campo ϕ e pode ser resolvida independentemente.

Os campos ϕ e χ contribuem com as densidade de energia $\rho(x) = \rho_1(\phi(x), \chi(x)) + \rho_2(\chi(x))$. Então,

$$\rho_1(x) = f(\chi) \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2, \quad (4.18)$$

$$\rho_2(x) = \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2. \quad (4.19)$$

Desse modo, vamos escrever a energia total como uma soma das contribuições dos dois campos: $E = E_1 + E_2$. O método BPS é uma forma eficaz para calcular a energia de soluções topológicas, como vimos nos capítulos anteriores. Então, para soluções que resolvem as equações de primeira ordem do modelo χ escrevemos a contribuição de energia

$$E_2 = |W_2(\chi(\infty)) - W_2(\chi(-\infty))|. \quad (4.20)$$

Note que esse formalismo é válido para modelos que suportam defeitos topológicos. Na seção seguinte, vamos estendê-lo para o caso de defeitos não topológicos.

4.2 Formalismo de primeira ordem na presença de lumps

Na referência [85] foi desenvolvida uma alternativa para estudar defeitos do tipo lump pela modificação do formalismo de primeira ordem, apresentado anteriormente como bastante eficiente no estudo dos defeitos do tipo kink.

Note que a solução do tipo kink/antikink do modelo ϕ^4 , por exemplo, é uma função monotônica crescente/decrescente (figura 2.2). Diferentemente, a solução do tipo lump do modelo ϕ^3 cresce para valores negativos de x e decresce para valores positivos de x (figura 2.92). De fato, a primeira derivada dessa solução muda de sinal ao cruzar o centro da solução $x_0 = 0$.

No entanto, se olharmos para a estrutura do lump para x negativo e para x positivo separadamente, notamos que a função se comporta de forma monotonicamente crescente e monotonicamente decrescente, respectivamente. Dessa forma, a proposta de modificar o procedimento usual do formalismo de primeira ordem para apresentar um método para estudar soluções não topológicas é inspirada da referência [85].

Para soluções topológicas podemos escrever duas equações diferenciais de primeira ordem com soluções, que também resolvem a equação de movimento estática. Essas soluções são relacionadas por uma reflexão em x . No caso de soluções não topológicas, escrevemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{W_\phi}{f(\chi)} \quad \text{para } x < 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{dx} = -\frac{W_\phi}{f(\chi)} \quad \text{para } x > 0 \quad (4.21)$$

e/ou

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{W_\phi}{f(\chi)} \quad \text{para } x < 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{W_\phi}{f(\chi)} \quad \text{para } x > 0, \quad (4.22)$$

considerando a modificação do formalismo de primeira ordem para estudar soluções não topológicas para um modelo de campo ϕ .

A presença dos dois pares de equações acima é correlacionada à simetria de reflexão do modelo. Quando o modelo não possui simetria de reflexão, precisamos apenas de um único par de equações [85]. Esse método se mostra eficiente no nosso propósito de investigar soluções não topológicas no que confere a praticidade de determinar a energia das soluções.

Vamos analisar a estrutura do defeito tipo lump supondo que é uma função monotônica para x positivo e para x negativo separadamente, assim temos uma estrutura semelhante a um kink e um antikink. Podemos escrever

$$\begin{aligned} E_1 &= |W_1(\phi(\infty)) - W_1(\phi(0))| + |W_1(\phi(0)) - W_1(\phi(-\infty))| \\ &= 2|W_1(\phi(\infty)) - W_1(\phi(0))| \\ &= 2|W_1(\phi(0)) - W_1(\phi(-\infty))|. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Note que impomos o centro da solução em $x = 0$, sem perda de generalidade.

Com isso, a energia total da configuração estática do modelo proposto pode ser obtida pela soma da contribuição dos dois campos. Das equações (4.20) e (4.23), obtemos

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= 2|W(\phi(0)) - W(\phi(-\infty))| + |W(\chi(\infty)) - W(\chi(-\infty))|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

A seguir, desenvolvemos modelos construídos por potenciais conhecidos e três diferentes funções $f(\chi)$.

4.3 Modelos específicos

Vamos considerar que o primeiro campo seja modelado pelo potencial ϕ^4 invertido, equação (2.97). Este campo terá sua dinâmica modificada pelo campo do modelo χ^4 , com potencial (2.52). A função superpotencial W é escrita como

$$W(\phi, \chi) = -\frac{1}{3}(1 - \phi^2)^{\frac{3}{2}} + \alpha\chi - \frac{1}{3}\alpha\chi^3, \quad (4.25)$$

onde α é um parâmetro real e não negativo que controla os perfis das soluções.

A função $f(\chi)$ tem o papel de modificar a estrutura dos defeitos. Vamos analisar os efeitos que três funções escolhidas causam nos novos modelos, são elas:

$$f_I(\chi) = \frac{1}{\chi^2(1 - a\chi)}, \quad (4.26)$$

$$f_{II}(\chi) = \frac{1}{\cos^2(n\pi\chi)}, \quad (4.27)$$

$$f_{III}(\chi) = \frac{1}{\sin^2\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\chi\right)}, \quad (4.28)$$

com $-1 < a < 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Chamaremos as funções de tipo-I, tipo-II e tipo-III, respectivamente. Os modelos específicos gerados com essas funções seguem nas próximas subseções.

4.3.1 Modelo Tipo-I

O primeiro modelo é construído usando a função do tipo-I (4.26). Inicialmente, consideramos $a = 0$. Assim, o potencial (4.11) ganha a forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\chi^2\phi^2(1 - \phi^2) + \frac{1}{2}\alpha^2(1 - \chi^2)^2. \quad (4.29)$$

Este potencial possui simetria $Z_2 \times Z_2$. Veja que o potencial χ^4 possui simetria Z_2 em χ e o modelo ϕ^4 invertido possui simetria Z_2 em ϕ . Observe que se $\chi = \pm 1$, o modelo em estudo é reduzido a um modelo de um campo escalar real da forma ϕ^4 invertido, estudado na subseção 2.3.2. Note também que se fizermos $\phi = 0$ retornamos ao modelo χ^4 , investigado na subseção 2.2.1.

As equações de movimento estáticas (4.5) para o modelo tipo-I com potencial (4.29) são

$$\frac{1}{\chi^2} \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{2}{\chi^3} \frac{d\chi}{dx} \frac{d\phi}{dx} = \chi^2\phi(1 - \phi^2) - \chi^2\phi^3, \quad (4.30a)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{1}{\chi^3} \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = \chi\phi^2(1 - \phi^2) - 2\alpha^2(1 - \chi^2)\chi. \quad (4.30b)$$

As equações de primeira ordem (4.13) para os campos são

$$\frac{d\phi}{dx} = \chi^2\phi(1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \frac{d\chi}{dx} = \pm\alpha(1 - \chi^2). \quad (4.31)$$

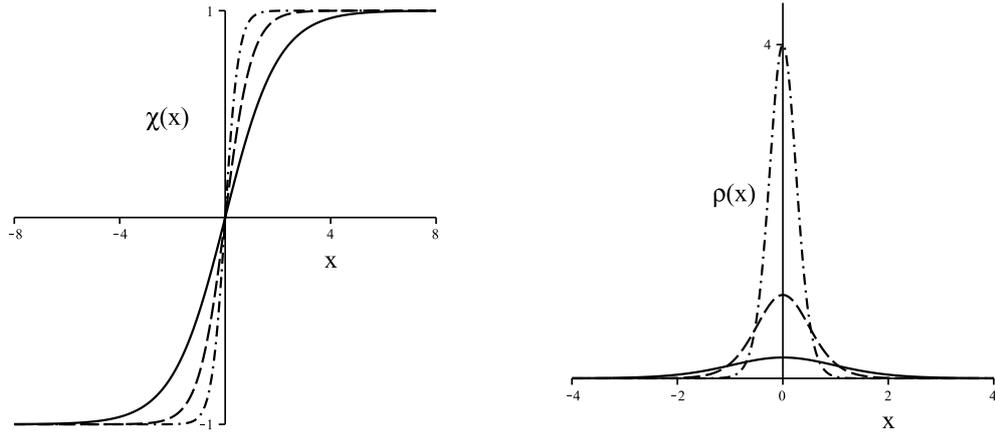


Figura 4.1: Solução $\chi(x)$ (4.32) à esquerda e densidade de energia $\rho_2(x)$ (4.33) à direita, para $\alpha = 0,5$ (linha sólida), $\alpha = 1,0$ (linha tracejada) e $\alpha = 2,0$ (linha traço e ponto).

A equação de primeira ordem para o campo χ é desacoplada de ϕ . Resolvendo essa equação, obtemos como soluções

$$\chi(x) = \pm \tanh(\alpha x), \quad (4.32)$$

que é uma solução tipo kink com estrutura interna. A função com sinal positivo identifica um kink e a solução com sinal negativo identifica um antikink, devido a simetria de reflexão em x , vamos trabalhar com a solução kink, mostrada na figura 4.32. O parâmetro α é inversamente proporcional à largura da solução ($l \sim 1/\alpha$). Logo, α controla o perfil da solução tipo kink. Quanto maior o valor de α , a solução é mais localizada na origem.

A densidade de energia associada ao campo χ é dada pela equação (4.19), de onde obtemos

$$\rho_2 = \alpha^2 \operatorname{sech}^4(\alpha x), \quad (4.33)$$

e energia correspondente $E_2 = 4\alpha/3$, que depende diretamente dos valores de α . A energia pode ser obtida pela equação (4.20).

Substituindo a solução (4.32) na equação de primeira ordem para o campo ϕ (4.31), temos

$$\frac{d\phi}{dx} = \tanh^2(\alpha x) \phi (1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.34)$$

resolvendo, obtemos a solução para o campo ϕ

$$\phi(x) = \operatorname{sech}(\xi(x)), \quad (4.35)$$

$$\xi(x) = x - \frac{\tanh(\alpha x)}{\alpha} + c, \quad (4.36)$$

onde consideramos a constante de integração c nula, em princípio.

Notamos que a presença do campo χ faz surgir um platô no topo da solução ϕ . O parâmetro α determina a largura desse platô. Veja que para maiores valores de α , a

largura do platô se torna menor ao longo da coordenada x . Esse parâmetro contribui para modificar o comportamento da solução próximo ao seu centro localizado na origem. Na figura (4.2) usamos três valores distintos para α para plotar a solução (4.35).

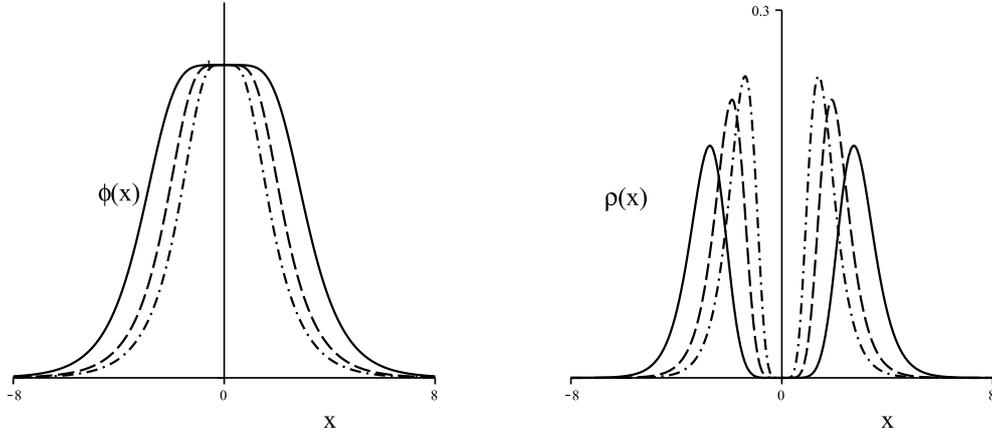


Figura 4.2: Solução $\phi(x)$ (4.35) à esquerda e densidade de energia $\rho_1(x)$ (4.37) à direita, para $\alpha = 0,5$ (linha sólida), $\alpha = 1,0$ (linha tracejada) e $\alpha = 2,0$ (linha traço e ponto).

A contribuição $\rho_1(x)$ do campo ϕ para a densidade de energia $\rho(x)$ é dada pela equação (4.18), de onde temos

$$\rho_1(x) = \tanh^2(\alpha x) \tanh^2(\xi(x)) \operatorname{sech}^2(\xi(x)). \quad (4.37)$$

Essa expressão está plotada na figura 4.2. Observe que ela apresenta duas suaves concentrações de energia separadas por um largo vácuo próximo à origem, com largura determinado pelo parâmetro α . Note que para maiores valores de α , menor é o espaço que separa as concentrações de energia. A energia correspondente é $E_1 = 2/3$, que pode ser calculada pela equação (4.23).

A energia total é a soma das contribuições dos dois campos, dada pela equação (4.24), portanto,

$$E = \frac{2}{3}(1 + 2\alpha), \quad (4.38)$$

que depende do parâmetro α . Esse resultado coincide com o valor encontrado para a energia calculada por uma integração da densidade de energia $\rho(x)$, que é a soma das contribuições das densidades (4.18) e (4.19).

Uma nova solução é encontrada se considerarmos a constante de integração não nula na equação (4.35). Neste caso, surge uma deformação não simétrica no topo da estrutura localizada e um deslocamento no centro da solução, como pode ser observado na figura 4.3. A contribuição de densidade de energia $\rho_1(x)$ também é plotada para diferentes valores da constante de integração c .

O próximo modelo a ser construído ainda consideramos a função tipo-I (4.26), agora com o parâmetro a não nulo. A presença de $a \neq 0$ quebra a simetria do potencial

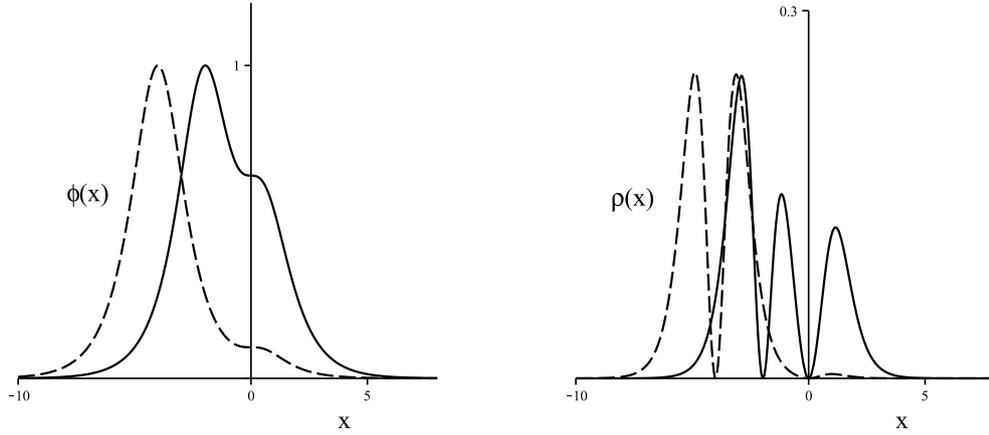


Figura 4.3: Solução (4.35) à esquerda e densidade de energia (4.37) à direita, escolhemos $c = 1$ (linha sólida) e $c = 3$ (linha tracejada), com $a = 0$ e $\alpha = 1$.

do modelo, o que torna interessante a investigação das soluções do modelo. Neste caso, o potencial que caracteriza o modelo descrito a partir de (4.11) tem a forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\chi^2(1 - a\chi)\phi^2(1 - \phi^2) + \frac{1}{2}\alpha^2(1 - \chi^2)^2. \quad (4.39)$$

Veja também que se $a = \pm 1$, quando $\chi = \pm 1$ o potencial se anula. Assim, temos que o parâmetro a deve estar localizado no intervalo $-1 < a < 1$.

As soluções desse modelo são obtidas resolvendo as equações de primeira ordem (4.13), de onde temos

$$\frac{d\phi}{dx} = \chi^2(1 - a\chi)\phi(1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \frac{d\chi}{dx} = \alpha(1 - \chi^2), \quad (4.40)$$

as soluções são

$$\phi(x) = \text{sech}(\xi(x)) \quad \text{e} \quad \chi(x) = \tanh(\alpha x), \quad (4.41)$$

onde

$$\xi(x) = x + \frac{a \ln(\text{sech}(\alpha x))}{\alpha} + \frac{\tanh(\alpha x)(a \tanh(\alpha x) - 2)}{2\alpha} + c, \quad (4.42)$$

consideramos α , a e x reais e a constante de integração c igual a zero.

O parâmetro a não contribui para a densidade de energia do campo χ . Então, no presente caso ainda temos a contribuição de campo χ para a densidade de energia para a configuração dada em (4.33). No entanto, o parâmetro a provoca um platô no topo da estrutura do tipo lump do campo ϕ não simétrico, veja o gráfico da solução na figura 4.4.

Expandindo a solução (4.41) em séries para $x = 0$, obtemos

$$\phi(x) = 1 - \frac{1}{18}\alpha^4 x^6 + O(x^7). \quad (4.43)$$

Notamos que em torno da origem, a solução $\phi(x) \propto 1$.

A densidade de energia associada ao campo ϕ é obtida pela equação (4.18), que fornece

$$\rho_1(x) = \operatorname{sech}^2(\xi(x)) \tanh^2(\xi(x)) \tanh^2(\alpha x) (1 - a \tanh(\alpha x)). \quad (4.44)$$

A contribuição da energia é igual a $2/3$, calculada pela equação (4.23). Verificamos que a energia total associada a essa configuração é igual a $(2/3)(1 + 4\alpha)$.

A solução e sua densidade de energia estão plotadas para diferentes valores de α na figura 4.4.

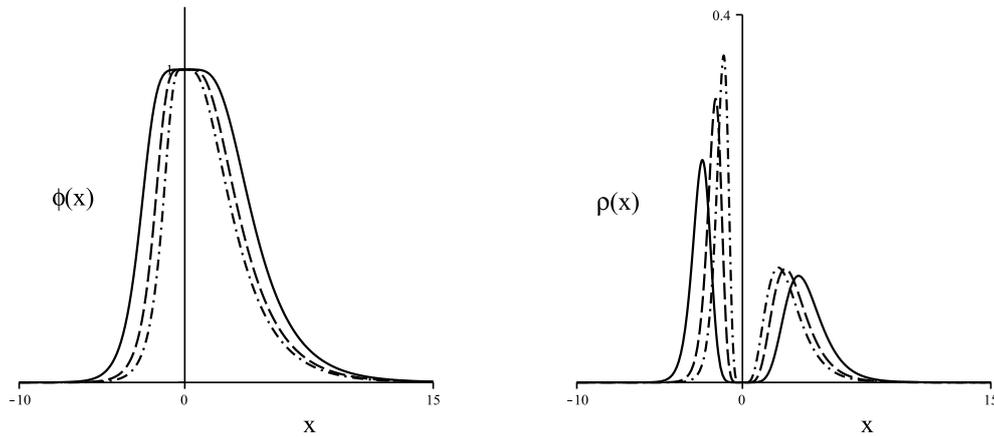


Figura 4.4: Solução (4.41) à esquerda e densidade de energia (4.44) à direita, escolhemos $\alpha = 0,5$ (linha sólida), $\alpha = 1$ (linha tracejada) e $\alpha = 2$ (linha traço e ponto), para $a = 0,5$.

A caráter de comparação, a figura 4.5 mostra a solução (4.41) para diferentes valores de a mantendo α fixo. Note que a e α geram efeitos semelhantes na formação da solução.

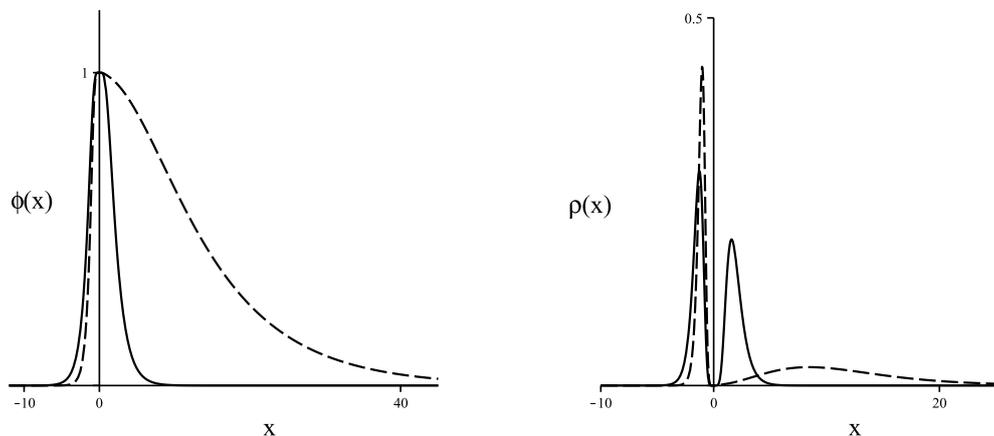


Figura 4.5: Solução (4.41) à esquerda e densidade de energia (4.44) à direita, escolhemos $\alpha = 1$, $a = 0,2$ (linha sólida) e $a = 0,9$ (linha tracejada).

Agora se considerarmos a constante de integração de (4.41) diferente de zero, observamos a formação de um platô não simétrico na estrutura do tipo lump. A densidade

de energia $\rho_1(x)$ correspondente é dada pela equação (4.18). Para comparar com a escolha de uma constante não nula, plotamos um lump considerando a constante de integração nula, os gráficos são mostrados na figura 4.6.

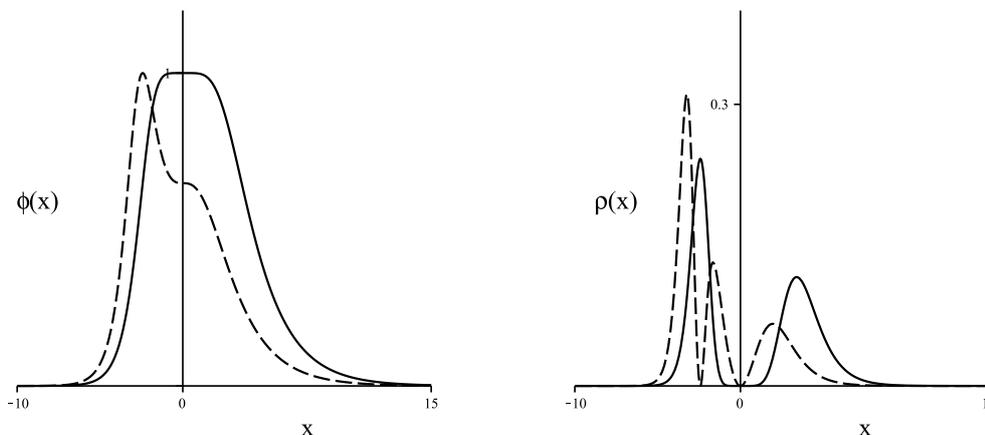


Figura 4.6: Solução (4.41) à esquerda e densidade de energia (4.44) à direita, escolhemos $c = 0$, (linha sólida) e $c = 1$ (linha tracejada), com $a = \alpha = 0,5$.

Notamos que a presença dos novos parâmetros a e constante de integração c provoca um deslocamento no centro da solução. Sendo que c controla o centro da solução e o parâmetro a controla a assimetria da solução do tipo lump.

4.3.2 Modelo Tipo-II

Um segundo modelo pode ser gerado escolhendo outra função do campo χ . Nesse novo caso, vamos definir a função f como uma função periódica do tipo-II (4.27), e considerando a função superpotencial (4.25). Neste modelo o potencial (4.11) ganha a forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \cos^2(n\pi\chi) \phi^2(1 - \phi^2) + \frac{1}{2} \alpha^2(1 - \chi^2)^2. \quad (4.45)$$

As equações de primeira ordem são

$$\frac{d\phi}{dx} = \cos^2(n\pi\chi) \phi(1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \frac{d\chi}{dx} = \pm\alpha(1 - \chi^2), \quad (4.46)$$

obtidas pela equação (4.13). Sendo assim, a solução $\chi(x)$ é dada em (4.32) e densidade de energia $\rho_2(x)$ na equação (4.33). Para o campo ϕ , a equação de primeira ordem é

$$\frac{d\phi}{dx} = \cos^2(n\pi \tanh(\alpha x)) \phi(1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.47)$$

com solução

$$\phi(x) = \operatorname{sech}(\eta(x)), \quad (4.48)$$

onde

$$\eta(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4\alpha}(\text{Ci}(\xi_n^+(x)) - \text{Ci}(\xi_n^-(x))), \quad (4.49)$$

$$\xi_n^\pm(x) = 1 \pm \tanh(\alpha x). \quad (4.50)$$

Na expressão acima, $\text{Ci}(z)$ é a função cosseno integral, definida como

$$\begin{aligned} \text{Ci}(z) &= - \int_z^\infty dt \frac{\cos(t)}{t} \\ &= \gamma + \ln(z) + \int_0^z dt \frac{\cos(t) - 1}{t}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

com $\gamma = 0,577$ sendo a constante de Euler-Mascheroni. Para o argumento z muito pequeno, a expansão em série de Taylor é

$$\text{Ci}(z) = \gamma + \ln(z) - \frac{z^2}{4} + O(z^4), \quad (4.52)$$

e para z grande, a expansão fica

$$\text{Ci}(z) = \frac{\sin(z)}{z} - \frac{\cos(z)}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right). \quad (4.53)$$

Mas veja que o argumento da coordenada espacial (4.49) é uma função de x . Fazendo uma expansão em série de Taylor, obtemos que $\phi(x)$ para $x = 0$ tem a forma

$$\phi(x) = 1 - \frac{1}{8}x^2(1 + \cos(2n\pi))^2 + O(x^4). \quad (4.54)$$

A nova definição feita em (4.27) faz surgir um efeito interessante em uma estrutura de defeito tipo lump. Veja que aparece um platô ou vários platôs pelo meio da estrutura, observe as figuras 4.7. Essa mudança geométrica acontece devido à coordenada espacial $\eta(x)$. A contribuição do campo para a densidade de energia nessa configuração é dada pela equação (4.18), que fornece

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &= \cos^2(n\pi \tanh(\alpha x)) \text{sech}^2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4\alpha}(\text{Ci}(\xi_n^+(x)) - \text{Ci}(\xi_n^-(x)))\right) \\ &\quad \tanh^2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4\alpha}(\text{Ci}(\xi_n^+(x)) - \text{Ci}(\xi_n^-(x)))\right). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Nas figuras 4.7 são mostradas as soluções (4.48) e suas respectivas densidades de energia (4.55) para diferentes valores de α e para $n = 1$. Verifica-se por meio da relação de energia (4.23) que a solução do tipo lump possui energia igual a $2/3$.

As soluções desse modelo são controladas por dois parâmetros, n e α . Observamos que mais de um par de platôs surge para $n > 1$ e a largura do platô é inversamente proporcional ao valor de α . Veja nos gráficos da figura 4.8 as soluções (4.48) e suas respectivas densidades de energia (4.55) para diferentes valores de α e $n = 2$.

Notamos que o número de platôs que surgem no defeito tipo lump é controlado pelo parâmetro n . Neste caso, o número de platôs é $2n$. Notamos também que cada par de platô é simétrico na estrutura do lump.

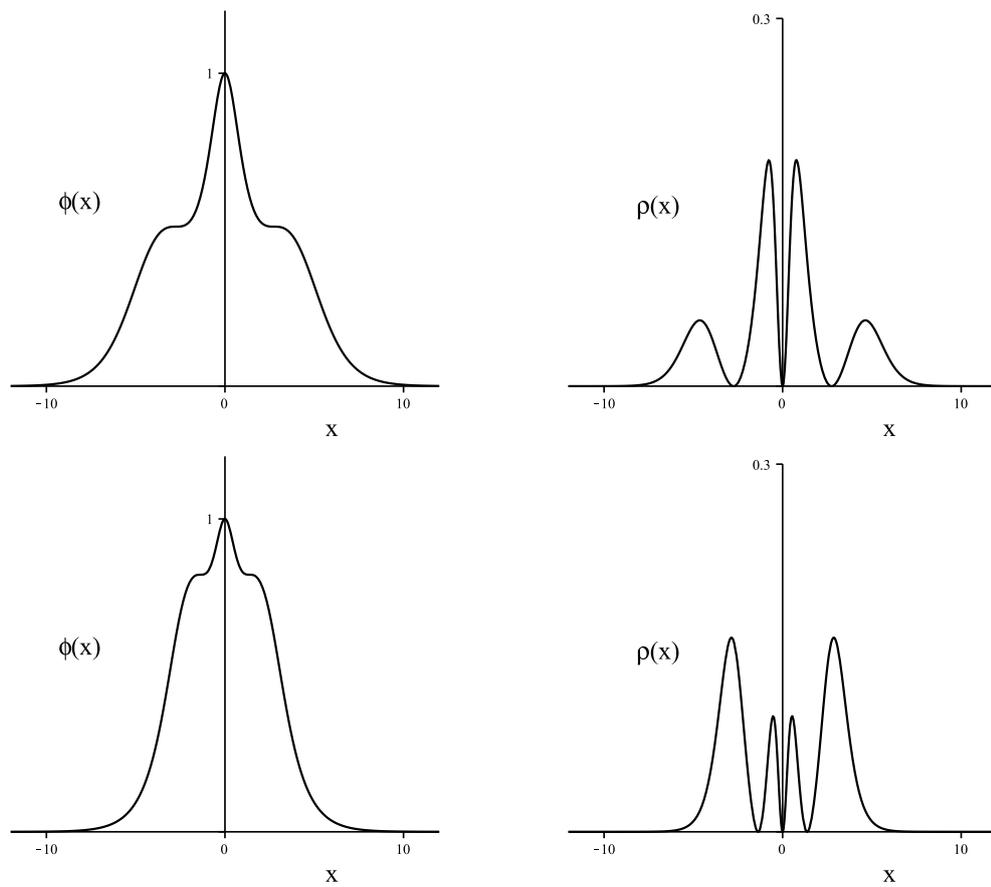


Figura 4.7: Solução (4.48) à direita e densidade de energia (4.55) à esquerda, para $\alpha = 0,2$ (figuras superiores), e $\alpha = 0,4$ (figuras inferiores), com $n = 1$.

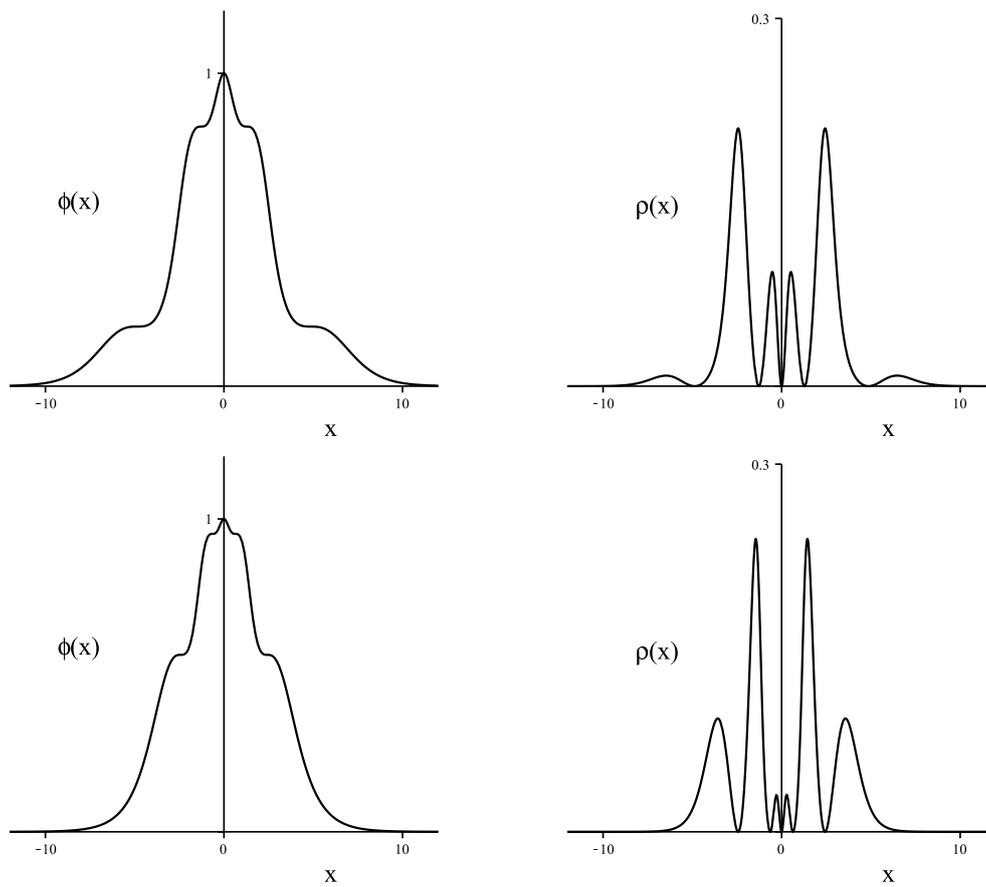


Figura 4.8: Solução (4.48) à direita e densidade de energia (4.55) à esquerda, para $\alpha = 0,2$ (figuras superiores) e $\alpha = 0,4$ (figuras inferiores), com $n = 2$.

4.3.3 Modelo Tipo-III

Neste terceiro modelo continuamos a considerar a função superpotencial (4.25), mas agora usando a função tipo-III definida na equação (4.28). Neste caso, o potencial da equação (4.11) é escrito como

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \chi \right) \phi^2 (1 - \phi^2) + \frac{1}{2} \alpha^2 (1 - \chi^2)^2. \quad (4.56)$$

Veja que, se $\chi = 0$, o potencial se torna um valor constante igual a $9/8$. Por outro lado, se ϕ for nulo, retornamos diretamente para um modelo de um campo do tipo χ^4 . Nessa análise, escolhemos $\alpha = 3/2$. Considerando o potencial (4.56), que caracteriza este novo modelo, temos as equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \sin^2 \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \chi \right) \phi (1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \frac{d\chi}{dx} = \pm \alpha (1 - \chi^2), \quad (4.57)$$

obtidas pela equação (4.13). A solução estática do campo χ é dada em (4.32), com densidade de energia (4.33). Agora, investigaremos a solução estática para o campo ϕ , que tem sua dinâmica modificada pela função (4.28).

Neste caso, a equação de primeira ordem para o campo ϕ é

$$\frac{d\phi}{dx} = \sin^2 \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \tanh(\alpha x) \right) \phi (1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.58)$$

A solução estática do campo ϕ para este modelo é obtida realizando uma integral dessa equação diferencial, logo,

$$\phi(x) = \operatorname{sech}(\eta(x)), \quad (4.59)$$

onde,

$$\eta(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4\alpha} (\operatorname{Ci}(\xi_n^+(x)) - \operatorname{Ci}(\xi_n^-(x))), \quad (4.60)$$

é a coordenada espacial, com

$$\xi_n^\pm(x) = (2n+1)\pi(1 \pm \tanh(\alpha x)). \quad (4.61)$$

Notamos que a solução $\phi(x)$ é semelhante à estrutura do caso anterior. No entanto, o número de platôs que surge no defeito tipo lump é sempre ímpar, $2n+1$. Observamos também que o único platô que não possui um par simétrico fica localizado no topo da estrutura na forma de sino. Expandindo a solução (4.59) em série, temos

$$\phi(x) = 1 - \frac{1}{8}x^2(1 + \cos(2n+1)\pi)^2 + O(x^4). \quad (4.62)$$

Notamos que próximo à origem, para $x = 0$, a solução $\phi(x) \propto 1$.

Para essa solução, a contribuição para a densidade de energia é calculada pela equação (4.18), dada por

$$\rho_1(x) = \sin^2 \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \tanh(\alpha x) \right) \operatorname{sech}^2(\eta(x)) \tanh^2(\eta(x)), \quad (4.63)$$

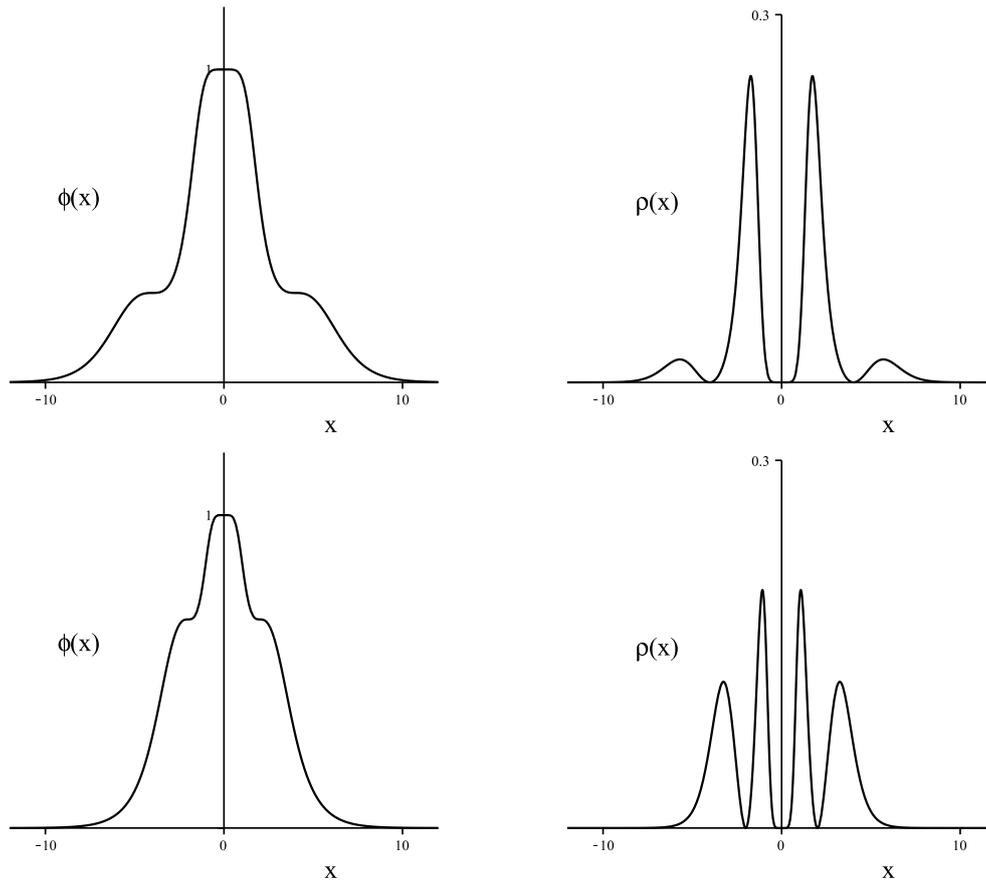


Figura 4.9: Solução (4.59) à direita e densidade de energia (4.63) à esquerda, para $\alpha = 0,2$ (figuras superiores) e para $\alpha = 0,4$ (figuras inferiores), com $n = 1$.

com energia igual a $2/3$. Verifica-se que a integral da densidade de energia em todo espaço é equivalente à energia calculada pela equação de energia (4.23) obtida pela modificação do formalismo de primeira ordem. Assim, a energia total dessa configuração é igual a $(2/3)(1 + 2\alpha)$, dada por (4.24).

Nas figuras 4.9 e 4.10 são mostradas as soluções $\phi(x)$ e suas densidades de energia $\rho_2(x)$, para $n = 1$ e $n = 2$, com valores de $\alpha = 0,2$ e $\alpha = 0,4$.

Concluimos que estruturas não topológicas podem ser deformadas, ou modificadas, pela presença de estruturas topológicas. A escolha da função de deformação $f(\chi)$ é tal que as deformações aconteçam próximo à origem, fazendo com que as soluções não sejam deformadas assintoticamente. No capítulo seguinte discorreremos mais a respeito dos resultados obtidos na pesquisa.

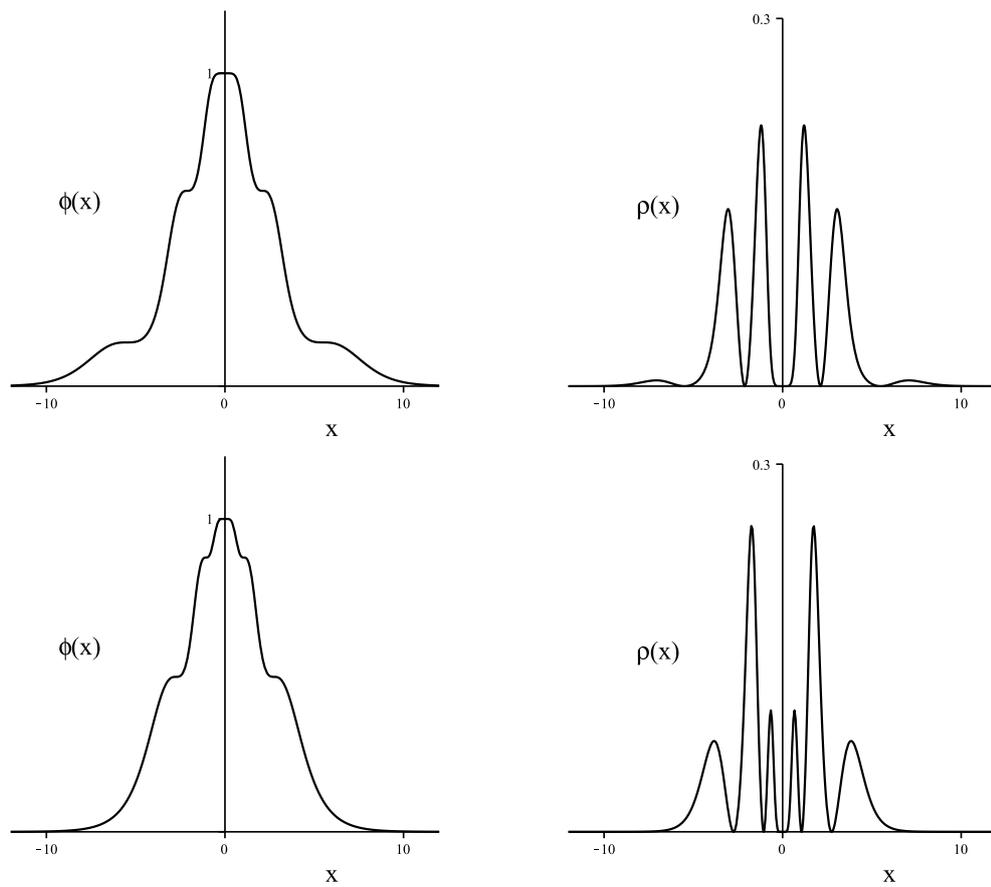


Figura 4.10: Solução (4.59) à direita e densidade de energia (4.63) à esquerda, para $\alpha = 0,2$ (figuras superiores) e $\alpha = 0,4$ (figuras inferiores), com $n = 2$.

Comentários, Conclusões e Perspectivas

Iniciamos este trabalho com uma revisão bibliográfica de teoria clássica de campos, contextualizando o conceito de defeitos topológicos e não topológicos em uma teoria de campos escalares reais. No segundo capítulo desta dissertação nos ocupamos em investigar esses defeitos e suas principais características topológicas ou não topológicas. Obtemos as soluções estáticas que resolvem as equações de movimento dos campos e examinamos seu comportamento sob pequenas flutuações. Mostramos que soluções topológicas se mostram estáveis e que soluções não topológicas são destruídas pela perturbação. Calculamos a energia das soluções pelo chamado de método BPS.

Nesse contexto investigamos as características dos modelos de um campo escalar real que suportam defeitos topológicos (kink): ϕ^4 , ϕ^6 e seno-Gordon. Tais como mínimos do potencial, soluções que conectam seus mínimos, energia e estabilidade das soluções. Dedicamos os tópicos seguintes para o estudo de modelos que suportam defeitos não topológicos (lump): ϕ^3 e ϕ^4 invertido. Também resolvemos as equações de movimento e obtemos as soluções estáticas, calculamos a energia da solução e comentamos sobre suas respectivas estabilidades.

Ainda no capítulo 2, discutimos sobre um procedimento para mapear novos modelos de campos a partir de modelos conhecidos, chamado de método da deformação. Aplicamos esse método no modelo original do tipo ϕ^4 usando diferentes funções de deformação, com isso, obtemos os modelos seno-Gordon e outros modelos com potenciais polinomiais. Também obtemos um modelo do tipo seno-Gordon duplo. Mostramos que é necessário usar um par de funções de deformação em vez de apenas uma função, desde que ambas as funções levem ao mesmo modelo deformado. As funções escolhidas são trigonométricas, que nos levaram a um potencial interessante com dois ciclos periódicos. Logo, temos dois tipos de infinitos setores topológicos. As soluções que conecta seus mínimos são do tipo kink, cuja características topológicas foram investigadas nessa seção.

No capítulo 3, abordamos sistemas compostos de dois campos escalares reais acoplados. Essas configurações podem nos levar a defeitos topológicos que possuem estruturas internas. Mostramos que é possível aplicar o método de Bogoml'nyi para estudar as energias das soluções do modelo. Como também, falamos sobre a estabilidade linear das soluções, mostramos que seu estudo segue de forma semelhante ao caso de modelos de apenas um campo. Nesse capítulo, também falamos do modelo BNRT, mostramos que as

soluções que conectam os setores topológicos são do tipo órbita. No caso desse modelo de potencial que acopla dois campos, vimos que o método das órbitas tentativas é eficiente, embora limitado, para obter suas soluções.

No capítulo 4, apresentamos modelos originais. Abordamos sistemas de dois campos acoplados, o primeiro possui soluções não topológicas e o segundo suporta soluções topológicas. Vimos que é possível inserir uma modificação geométrica numa estrutura de defeito do tipo lump causada por outro defeito, mas do tipo kink. Na construção desses modelos, uma função que depende do segundo campo é inserida para modificar a dinâmica do primeiro campo. Vimos que esse acoplamento causa um efeito interessante nas soluções não topológicas. A presença do kink do segundo campo faz surgir platôs na estrutura do lump, solução do primeiro campo.

No estudo desses novos modelos, fez-se necessário utilizar o formalismo de primeira ordem modificado, proposto em [85], para estudar as soluções não topológicas. Vimos que o formalismo de primeira ordem é bastante eficiente para tratar de modelos topológicos, no que diz respeito a redução de ordem das equações de movimento e o uso do método BPS para calcular a energia das soluções. No entanto, para aplicar esse método para modelos não topológico é necessário modificar a forma de analisar a estrutura das soluções. Escolhemos diferentes funções $f(\chi)$ para construir modelos da forma proposta e discutimos os efeitos que a escolha da função causa na estrutura do lump. Observamos que a presença da função $f(\chi)$ gera um ou mais platôs próximo à origem na estrutura do defeito não topológico, e que essa função não contribui para a energia da configuração estática.

Nossas perspectivas incluem explorar as características dos modelos apresentados aqui, tais como analisar a estabilidade das soluções estáticas, mapear as órbitas dos defeitos nos potenciais acoplados e analisar os efeitos causados pelos parâmetros para diferentes valores. Também esperamos construir outros modelos escolhendo funções que deformem a cauda da estrutura do tipo lump.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press, 1994.
- [2] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*. Cambridge University Press, 2004.
- [3] S. Dutta, D. Steer, and T. Vachaspati, “Creating kinks from particles,” *Physical Review Letters*, vol. 101, no. 12, p. 121601, 2008.
- [4] M. Toharia and M. Trodden, “Metastable kinks in the orbifold,” *Physical review letters*, vol. 100, no. 4, p. 041602, 2008.
- [5] G. Başar and G. V. Dunne, “Self-consistent crystalline condensate in chiral gross-neveu and bogoliubov–de gennes systems,” *Physical review letters*, vol. 100, no. 20, p. 200404, 2008.
- [6] A. Alonso-Izquierdo, M. G. Leon, and J. M. Guilarte, “Kinks in a nonlinear massive sigma model,” *Physical Review Letters*, vol. 101, no. 13, p. 131602, 2008.
- [7] D. Walgraef, *Spatio-temporal pattern formation: with examples from physics, chemistry, and materials science*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] A. Hasegawa, *Optical solitons in fibers*. Springer, Berlin, 1990.
- [9] G. P. Agrawal, “Nonlinear fiber optics,” in *Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century*, pp. 195–211, Springer, 2000.
- [10] A. S. Davydov *et al.*, *Solitons in molecular systems*. Springer, 1985.
- [11] T. Heimburg and A. D. Jackson, “On soliton propagation in biomembranes and nerves,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 102, no. 28, pp. 9790–9795, 2005.
- [12] V. Rubakov and M. Shaposhnikov, “Do we live inside a domain wall?,” *Physics Letters B*, vol. 125, no. 2-3, pp. 136–138, 1983.
- [13] G. W. Gibbons and D. L. Wiltshire, “Spacetime as a membrane in higher dimensions,” *Nuclear Physics B*, vol. 287, pp. 717–742, 1987.

- [14] D. Bazeia, C. Gomes, L. Losano, and R. Menezes, “First-order formalism and dark energy,” *Physics Letters B*, vol. 633, no. 4-5, pp. 415–419, 2006.
- [15] J. J. R. d. Santos, *Tópicos em cosmologia com campos escalares*. PhD thesis, Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2011.
- [16] T. Vachaspati, *Kinks and domain walls: An introduction to classical and quantum solitons*. Cambridge University Press, 2007.
- [17] A. A. Abrikosov, “The magnetic properties of superconducting alloys,” *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, vol. 2, no. 3, pp. 199–208, 1957.
- [18] R. P. Feynman, “Chapter ii application of quantum mechanics to liquid helium,” in *Progress in low temperature physics*, vol. 1, pp. 17–53, Elsevier, 1955.
- [19] D. Bazeia, M. Marques, and R. Menezes, “Quasi-compact vortices,” *Europhysics Letters*, vol. 129, no. 3, p. 31001, 2020.
- [20] P. A. M. Dirac, “Quantised singularities in the electromagnetic field,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 133, no. 821, pp. 60–72, 1931.
- [21] G. t Hooft, “Magnetic monopoles in unified theories,” *Nucl. Phys. B*, vol. 79, no. CERN-TH-1876, pp. 276–284, 1974.
- [22] R. K. Dodd, H. C. Morris, J. C. Eilbeck, and J. D. Gibbon, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. New York: Academic Press, 1982.
- [23] M. Remoissenet, *Waves called solitons: concepts and experiments*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [24] I. A. Souza, *Soluções topológicas e não-topológicas em teoria clássica de campos*. PhD thesis, Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2022.
- [25] G. Whitham, “Linear and nonlinear waves john wiley & sons,” *Inc., New York*, 1974.
- [26] J. A. Frieman, G. B. Gelmini, M. Gleiser, and E. W. Kolb, “Primordial origin of nontopological solitons,” *Physical Review Letters*, vol. 60, no. 21, p. 2101, 1988.
- [27] A. L. Macpherson and B. A. Campbell, “Biased discrete symmetry breaking and fermi balls,” *Physics Letters B*, vol. 347, no. 3-4, pp. 205–210, 1995.

- [28] J. Morris and D. Bazeia, “Supersymmetry breaking and fermi balls,” *Physical Review D*, vol. 54, no. 8, p. 5217, 1996.
- [29] D. Coulson, Z. Lalak, and B. Ovrut, “Biased domain walls,” *Physical Review D*, vol. 53, no. 8, p. 4237, 1996.
- [30] G. Hooft, “Quantum gravity as a dissipative deterministic system,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 16, no. 10, p. 3263, 1999.
- [31] C. R. Galley, “Classical mechanics of nonconservative systems,” *Physical review letters*, vol. 110, no. 17, p. 174301, 2013.
- [32] S. Coleman, “Q-balls,” *Nuclear Physics B*, vol. 262, no. 2, pp. 263–283, 1985.
- [33] A. Kusenko, “Small q balls,” *Physics Letters B*, vol. 404, no. 3-4, pp. 285–290, 1997.
- [34] H. Arodz and J. Lis, “Compact q-balls and q-shells in a scalar electrodynamics,” *Physical Review D*, vol. 79, no. 4, p. 045002, 2009.
- [35] D. Bazeia, M. Marques, and R. Menezes, “Exact solutions, energy, and charge of stable q-balls,” *The European Physical Journal C*, vol. 76, pp. 1–13, 2016.
- [36] D. Bazeia, L. Losano, M. Marques, R. Menezes, and R. da Rocha, “Compact q-balls,” *Physics Letters B*, vol. 758, pp. 146–151, 2016.
- [37] D. Bazeia, M. Marques, and R. Menezes, “Quasi-compact q-balls,” *Europhysics Letters*, vol. 127, no. 2, p. 21001, 2019.
- [38] L. D. Landau and E. M. Lifshits, *The Classical Theory of Fields*. 3^a ed., Pergamon Press, New York, 1971.
- [39] N. A. Lemos, *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [40] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific, Singapore, 2008.
- [41] H. W. H. EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, *The Principles of Relativity: a collection of original memoirs on the Special and General Theory of Relativity*. New York: Dover Publications, 1952.
- [42] E. Noether, “Invariant variation problems,” *Transport theory and statistical physics*, vol. 1, no. 3, pp. 186–207, 1971.
- [43] W. Greiner *et al.*, *Relativistic quantum mechanics*, vol. 2. Springer, 2000.
- [44] M. Prasad and C. M. Sommerfield, “Exact classical solution for the ’t hooft monopole and the julia-zee dyon,” *Physical Review Letters*, vol. 35, no. 12, p. 760, 1975.

- [45] E. Bogomol’Nyi, “The stability of classical solutions,” *Sov. J. Nucl. Phys.(Engl. Transl.);(United States)*, vol. 24, no. 4, 1976.
- [46] M. A. Marques, *Estruturas Localizadas em Teoria de Campos*. PhD thesis, Tese de Doutorado-UFPB, João Pessoa, Brasil, 2019.
- [47] M. Souza, D. Bazeia, L. Losano, and R. Menezes, “Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos,” *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol*, vol. 6, no. 1, p. 47, 2012.
- [48] D. Bazeia, *Campos escalares em ação*. PhD thesis, Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2004.
- [49] P. M. Morse and H. Feshbach, “Methods of theoretical physics,” *American Journal of Physics*, vol. 22, no. 6, pp. 410–413, 1954.
- [50] S. FL *et al.*, *Practical quantum mechanics*, vol. 177. Springer Science & Business Media, 1999.
- [51] S. Sachdev, “Quantum phase transitions,” 2006.
- [52] N. Goldenfeld, *Lectures on phase transitions and the renormalization group*. CRC Press, 2018.
- [53] M. Lohe, “Soliton structures in $p(\varphi) 2$,” *Physical Review D*, vol. 20, no. 12, p. 3120, 1979.
- [54] A. Moradi Marjaneh, V. A. Gani, D. Saadatmand, S. V. Dmitriev, and K. Javidan, “Multi-kink collisions in the ϕ^6 model,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2017, no. 7, pp. 1–22, 2017.
- [55] D. Bazeia, J. G. Campos, and A. Mohammadi, “Kink-antikink collisions in the ϕ^8 model: short-range to long-range journey,” *arXiv preprint arXiv:2303.12482*, 2023.
- [56] D. Bazeia, M. G. Leon, L. Losano, and J. M. Guilarte, “Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions,” *Physical Review D*, vol. 73, no. 10, p. 105008, 2006.
- [57] D. Bazeia, M. G. Leon, L. Losano, and J. M. Guilarte, “New scalar field models and their defect solutions,” *Europhysics Letters*, vol. 93, no. 4, p. 41001, 2011.
- [58] J. Rubinstein, “Sine-gordon equation,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 11, no. 1, pp. 258–266, 1970.
- [59] R. Rajaraman, “Solitons and instantons,” 1982.

- [60] H. Dvey-Aharon, T. Sluckin, P. Taylor, and A. Hopfinger, “Kink propagation as a model for poling in poly (vinylidene fluoride),” *Physical Review B*, vol. 21, no. 8, p. 3700, 1980.
- [61] C. Condat, R. Guyer, and M. Miller, “Double sine-gordon chain,” *Physical Review B*, vol. 27, no. 1, p. 474, 1983.
- [62] R. Jackiw, “Quantum meaning of classical field theory,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 49, no. 3, p. 681, 1977.
- [63] P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Solitons: an introduction*, vol. 2. Cambridge university press, 1989.
- [64] C. Santangelo and R. D. Kamien, “Bogomol’nyi, prasad, and sommerfield configurations in smectics,” *Physical Review Letters*, vol. 91, no. 4, p. 045506, 2003.
- [65] M. Faux and D. Spector, “A bps interpretation of shape invariance,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 37, no. 43, p. 10397, 2004.
- [66] W. Cruz, R. Maluf, L. Sousa, and C. Almeida, “Gravity localization in sine-gordon braneworlds,” *Annals of Physics*, vol. 364, pp. 25–34, 2016.
- [67] D. Bazeia, L. Losano, J. Malbouisson, and J. Santos, “Multi-sine-gordon models,” *The European Physical Journal C*, vol. 71, pp. 1–9, 2011.
- [68] M. Peyrard and D. K. Campbell, “Kink-antikink interactions in a modified sine-gordon model,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 9, no. 1-2, pp. 33–51, 1983.
- [69] D. Bazeia, L. Losano, and R. Menezes, “Defect structures in sine-gordon like models,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 208, no. 3-4, pp. 236–256, 2005.
- [70] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, and R. Da Rocha, “Study of models of the sine-gordon type in flat and curved spacetime,” *The European Physical Journal C*, vol. 73, pp. 1–8, 2013.
- [71] A. A. Izquierdo, J. M. Guilarte, and N. de Almeida, “Solitons and entanglement in the double sine-gordon model,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 48, no. 1, p. 015501, 2014.
- [72] J. R. L. dos Santos, *Tópicos em Defeitos Deformados e o Movimento Browniano*. PhD thesis, Tese de Doutorado-UFPB, João Pessoa, Brasil, 2013.
- [73] Y. Nambu, “Axial vector current conservation in weak interactions,” *Physical Review Letters*, vol. 4, no. 7, p. 380, 1960.

- [74] D. Bazeia, M. Marques, and R. Menezes, “Twinlike models for kinks, vortices, and monopoles,” *Physical Review D*, vol. 96, no. 2, p. 025010, 2017.
- [75] D. Bazeia, L. Losano, M. Marques, R. Menezes, and I. Zafalan, “Compact vortices,” *The European Physical Journal C*, vol. 77, pp. 1–9, 2017.
- [76] M. Marques, “Vortices in vacuumless systems,” *Advances in High Energy Physics*, vol. 2019, 2019.
- [77] D. Bazeia, L. Losano, M. Marques, and R. Menezes, “Analytic vortex solutions in generalized models of the maxwell–higgs type,” *Physics Letters B*, vol. 778, pp. 22–29, 2018.
- [78] M. O. C. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos Vol. 39*. Edusp, 2002.
- [79] L. Wilets, *Nontopological solitons*, vol. 24. World Scientific, 1989.
- [80] T.-D. Lee and Y. Pang, “Nontopological solitons,” *Physics Reports*, vol. 221, no. 5-6, pp. 251–350, 1992.
- [81] D. Bazeia, L. Losano, and J. Malbouisson, “Deformed defects,” *Physical Review D*, vol. 66, no. 10, p. 101701, 2002.
- [82] C. Almeida, D. Bazeia, L. Losano, and J. Malbouisson, “New results for deformed defects,” *Physical Review D*, vol. 69, no. 6, p. 067702, 2004.
- [83] D. Bazeia, M. G. Leon, L. Losano, and J. M. Guilarte, “Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions,” *Physical Review D*, vol. 73, no. 10, p. 105008, 2006.
- [84] D. Bazeia and D. Moreira, “How to build a compact brane,” *Physics Letters B*, vol. 748, pp. 79–85, 2015.
- [85] A. Avelar, D. Bazeia, L. Losano, and R. Menezes, “New lump-like structures in scalar-field models,” *The European Physical Journal C*, vol. 55, no. 1, pp. 133–143, 2008.
- [86] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, and M. Souza, “New family of sine-gordon models,” *Europhysics Letters*, vol. 87, no. 2, p. 21001, 2009.
- [87] A. Bogdanov, U. K. Roessler, M. Wolf, and K.-H. Müller, “Magnetic structures and reorientation transitions in noncentrosymmetric uniaxial antiferromagnets,” *Physical Review B*, vol. 66, no. 21, p. 214410, 2002.

- [88] D. K. Campbell, M. Peyrard, and P. Sodano, “Kink-antikink interactions in the double sine-gordon equation,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 19, no. 2, pp. 165–205, 1986.
- [89] E. Belendryasova, V. A. Gani, A. M. Marjaneh, D. Saadatmand, and A. Askari, “A new look at the double sine-gordon kink-antikink scattering,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1205, p. 012007, IOP Publishing, 2019.
- [90] E. W. d. O. Costa, “Campos escalares e método da deformação,” 2020.
- [91] F. C. Simas, F. C. Lima, K. Nobrega, and A. R. Gomes, “Solitary oscillations and multiple antikink-kink pairs in the double sine-gordon model,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2020, no. 12, pp. 1–22, 2020.
- [92] J. G. Campos and A. Mohammadi, “Wobbling double sine-gordon kinks,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2021, no. 9, pp. 1–20, 2021.
- [93] D. Bazeia, M. Dos Santos, and R. Ribeiro, “Solitons in systems of coupled scalar fields,” *Physics Letters A*, vol. 208, no. 1-2, pp. 84–88, 1995.
- [94] D. Bazeia and F. Brito, “Bags, junctions, and networks of bps and non-bps defects,” *Physical Review D*, vol. 61, no. 10, p. 105019, 2000.
- [95] D. Bazeia, “Defect structures in field theory,” *arXiv preprint hep-th/0507188*, 2005.
- [96] D. Bazeia, J. Nascimento, R. Ribeiro, and D. Toledo, “Soliton stability in systems of two real scalar fields,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 30, no. 23, p. 8157, 1997.
- [97] J. D. Edelstein, M. L. Trobo, F. A. Brito, and D. Bazeia, “Kinks inside supersymmetric domain ribbons,” *Physical Review D*, vol. 57, no. 12, p. 7561, 1998.
- [98] B. Chibisov and M. Shifman, “Bps-saturated walls in supersymmetric theories,” *Physical Review D*, vol. 56, no. 12, p. 7990, 1997.
- [99] M. A. Shifman and M. Voloshin, “Degenerate domain wall solutions in supersymmetric theories,” *Physical Review D*, vol. 57, no. 4, p. 2590, 1998.
- [100] A. A. Izquierdo, M. G. Leon, and J. M. Guilarte, “Kink variety in systems of two coupled scalar fields in two space-time dimensions,” *Physical Review D*, vol. 65, no. 8, p. 085012, 2002.
- [101] A. A. Izquierdo, M. G. Leon, J. M. Guilarte, and M. de la Torre Mayado, “Adiabatic motion of two-component bps kinks,” *Physical Review D*, vol. 66, no. 10, p. 105022, 2002.

- [102] D. Bazeia and F. Brito, “Tiling the plane without supersymmetry,” *Physical Review Letters*, vol. 84, no. 6, p. 1094, 2000.
- [103] D. Bazeia, H. Boschi-Filho, and F. A. Brito, “Domain defects in systems of two real scalar fields,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 1999, no. 04, p. 028, 1999.
- [104] R. Rajaraman, “Solitons of coupled scalar field theories in two dimensions,” *Physical Review Letters*, vol. 42, no. 4, p. 200, 1979.
- [105] J. Morris, “Domain defects in strings and walls,” *Physical Review D*, vol. 51, no. 2, p. 697, 1995.
- [106] D. Bazeia, W. Freire, L. Losano, and R. Ribeiro, “Topological defects and the trial orbit method,” *Modern Physics Letters A*, vol. 17, no. 29, pp. 1945–1953, 2002.
- [107] D. Bazeia, R. Ribeiro, E. Ventura, and M. Thomaz, “Solitons in polymeric chains with periodic interactions,” *arXiv preprint cond-mat/9705164*, 1996.
- [108] D. Bazeia and E. Ventura, “Topological twistons in crystalline polyethylene,” *Chemical Physics Letters*, vol. 303, no. 3-4, pp. 341–346, 1999.
- [109] D. Bazeia and F. Brito, “Entrapment of a network of domain walls,” *Physical Review D*, vol. 62, no. 10, p. 101701, 2000.
- [110] D. Bazeia, L. Losano, and C. Wotzasek, “Domain walls in three-field models,” *Physical Review D*, vol. 66, no. 10, p. 105025, 2002.
- [111] D. Bazeia, J. Menezes, and M. Santos, “Complete factorization of equations of motion in supersymmetric field theories,” *Nuclear Physics B*, vol. 636, no. 1-2, pp. 132–140, 2002.
- [112] D. Bazeia, M. Liao, and M. Marques, “Geometrically constrained kinklike configurations,” *The European Physical Journal Plus*, vol. 135, no. 4, pp. 1–9, 2020.
- [113] D. Bazeia, M. Marques, and M. Paganelly, “Manipulating the internal structure of bloch walls,” *The European Physical Journal Plus*, vol. 137, no. 10, pp. 1–13, 2022.
- [114] D. Bazeia, J. Menezes, and R. Menezes, “New global defect structures,” *Physical Review Letters*, vol. 91, no. 24, p. 241601, 2003.
- [115] P.-O. Jubert, R. Allenspach, and A. Bischof, “Magnetic domain walls in constrained geometries,” *Physical Review B*, vol. 69, no. 22, p. 220410, 2004.