



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu
em Física

Tese de Doutorado

**Soluções Localizadas em Teoria Clássica
de Campos**

Matheus Alves Lião

João Pessoa
2024



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu
em Física

Tese de Doutorado

**Soluções Localizadas em Teoria Clássica
de Campos**

Tese realizada sob a orientação do Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho e coorientação do Prof. Dr. Matheus Araújo Marques, apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, em complementação aos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Física na Área de Concentração de Física de Partículas e Campos.

Matheus Alves Lião

João Pessoa
2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L693s Lião, Matheus Alves.

Soluções localizadas em teoria clássica de campos /
Matheus Alves Lião. - João Pessoa, 2024.
178 f. : il.

Orientação: Dionísio Bazeia Filho.

Coorientação: Matheus Araújo Marques.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Defeitos topológicos. 3. Teoria de
Campos. 4. Sólitons. 5. Kinks. 6. Vórtices. 7.
Monopolos magnéticos. 8. Buracos negros. I. Bazeia
Filho, Dionísio. II. Marques, Matheus Araújo. III.
Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

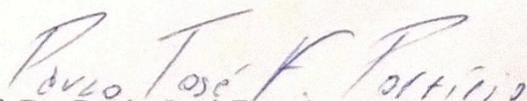
Ata da Sessão Pública da Defesa de tese de Doutorado do aluno Matheus Alves Lião, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física de Partículas Elementares e Campos.

Aos vinte e três dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e quatro, às 15h00, na sala 201, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Física de Partículas Elementares e Campos, de **Matheus Alves Lião**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Dionísio Bazeia Filho (PPGF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Matheus Araújo Marques (UFPB), coorientador, Carlos Augusto Romero Filho (PPGF/UFPB), Paulo José Ferreira Porfírio da Silva (PPGF/UFPB), Francisco de Assis Brito (UFCG) e Azadeh Mohammadi (UFPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Dionísio Bazeia Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada "*Soluções localizadas em Teoria Clássica de Campos*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **23 de fevereiro de 2024**.

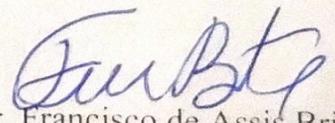

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
Orientador - PPGF/UFPB


Prof. Dr. Matheus Araújo Marques
Coorientador - UFPB


Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
PPGF/UFPB


Prof. Dr. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva
PPGF/UFPB


Prof. Dra. Azadeh Mohammadi
UFPE


Prof. Dr. Francisco de Assis Brito
UFCG

Agradecimentos

“Quero que a estrada venha sempre até
você, e que o vento esteja sempre a seu
favor, quero que haja sempre uma
cerveja em sua mão, e que esteja ao seu
lado, seu grande amor”

Matanza

Agradeço primeiramente à minha família, em especial meu pai, mãe e irmão, que me apoiaram desde o início da minha vida acadêmica e sem os quais eu jamais teria concluído este doutorado. Agradeço também a todos os membros de nosso grupo de pesquisa, cada um dos quais contribuiu para a minha formação com discussões, seminários e ensinamentos. Em particular, agradeço aos professores Dionísio Bazeia e Matheus Marques, que me orientaram durante este doutorado e que foram coautores da maior parte dos trabalhos desenvolvidos nesse período. Agradeço também a cada um dos meus amigos, que sempre me apoiaram, e à Bruna. Também agradeço particularmente a Isaiane, que ajudou a apontar correções nesta tese. Finalmente, agradeço ao CNPq (processo nº 401991/2022-9), à CAPES (processo nº 88887.485504/2020-00) e à FAPESQ-PB (projeto PRONEX 0015/2019) que ofereceram suporte financeiro fundamental à realização deste trabalho.

Resumo

Esta tese lida com estruturas localizadas em Teoria clássica de campos, com particular ênfase em defeitos topológicos e buracos negros. São estudadas soluções de equações de campo não lineares em diversos contextos, nos quais soluções localizadas em torno de uma região finita do espaço serão encontradas. Primeiramente, faremos uma discussão geral abordando diversos aspectos relevantes para o formalismo e para o entendimento apropriado das nossas soluções, incluindo uma discussão sobre a existência e natureza de invariantes topológicos, bem como uma explicação do chamado método de Bogomol'nyi, que usaremos frequentemente neste trabalho para encontrar mínimos globais da energia. Em seguida, estudaremos sistemas escalares em 2 dimensões do espaço-tempo, onde encontramos os chamados kinks, que conectam dois vácuos distintos e têm topologia não trivial como consequência de uma variedade de vácuo discreta. Vamos então generalizar essas soluções para dimensões maiores, em que estudaremos trabalhos originais baseados na introdução de impurezas, que são usadas para quebrar a invariância translacional da teoria, modelando as eventuais inomogeneidades de um sistema físico realista. A seguir, estudamos vórtices em teorias abelianas, onde abordamos, além do clássico vórtice de Maxwell-Higgs, algumas teorias originais que desenvolvemos ao longo do doutorado, envolvendo simetrias maiores. Também estudaremos os monopolos magnéticos da teoria de Yang-Mills-Higgs, e estenderemos essa teoria para simetrias maiores, seguindo a ideia que levou a um artigo publicado no doutorado. Finalmente, abordaremos buracos negros STU, que aparecem em teoria das cordas e supergravidade, com ênfase na investigação de estabilidade modal para modos com spin diferente de zero, que gerou um artigo fruto de uma cooperação internacional.

Palavras-chave: defeitos topológicos, kinks, vórtices, monopolos, buracos negros, supergravidade, STU.

Abstract

This thesis deals with localized structures in Classical Field Theory, with particular emphasis in topological defects and black holes. We study solutions of nonlinear field equations in several different contexts, in which solutions that are localized in a given region of space are found. First, we shall conduct a general discussion dealing with several subjects which shall prove important for the formalism we will be dealing with, and for the appropriate understanding of our solutions. This includes a discussion about the existence and nature of topological invariants, as well as an explanation of the so called Bogomol'nyi procedure, which we shall use frequently throughout this work to find global minima of the energy. Next, we investigate scalar systems in two spacetime dimensions, where we find kinks, which connect two distinct vacua and owe their topological nontriviality to a discrete vacuum variety. We then generalize those solutions to higher dimensions, in which we shall study the results of original works developed with the introduction of impurity functions, used to break translational symmetry in the theory, thus modeling eventual inhomogeneities which may arise in realistic physical description of a system. We then turn our attention to vortices from abelian gauge theories. We shall then encounter, besides the well-known Maxwell-Higgs system, original contributions developed during this PhD. These works deal with symmetry enhancement, which has several important applications. We shall also investigate the magnetic monopoles arising in Yang-Mills-Higgs theory, which we shall extend to higher symmetries as well, thus reporting on a paper published during the PhD program. Finally, we shall discuss the STU black holes that appear in supergravity and string theory, with emphasis in modal stability investigations for nonzero spin modes. This investigation led to a paper that resulted from an international cooperation.

Palavras-chave: topological defects, kinks, vortices, monopoles, black holes, supergravity, STU.

Lista de Publicações

Trabalhos publicados durante o período de doutorado:

- D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, Eur. Phys. J. Plus **135**, 383 (2020).
- D. Bazeia, M. A. Liao, M.A. Marques, Eur. Phys. J. C **81**, 552 (2021).*
- D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, Eur. Phys. J. C **82**, 316 (2022).*
- I. Andrade, D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, R. Menezes, Mod. Phys. Lett. A **37**, 2250225 (2022).
- D. Bazeia, M.A. Liao, M.A. Marques, Phys. Lett. B **825**, 136862 (2022).*
- D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, Phys. Lett. B **846**, 138262 (2023).*
- D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, Eur. Phys. J. C **84**, 180 (2024).*

Adicionalmente, o seguinte trabalho também foi concluído e submetido para publicação

- M. Cvetic, M. A. Liao, M. M. Stetsko, arXiv:2312.04929 (2023).*

Os artigos marcados com o símbolo * serão discutidos nesta tese.

Sumário

1	Introdução	1
2	Aspectos teóricos gerais	11
2.1	Equações de Euler-Lagrange	11
2.2	Equações de Einstein	12
2.3	Tensor de energia-momento	16
2.4	Defeitos e invariantes topológicos	19
2.5	Estabilidade linear	23
2.6	Método de Bogomol'nyi	27
3	Defeitos topológicos em campos escalares	32
3.1	Kinks em uma dimensão espacial	32
3.1.1	Modelo ϕ^4	35
3.1.2	Modelo sine-Gordon	37
3.2	Argumento de Derrick	41
3.3	Impurezas	43
3.3.1	Paredes de domínio dopadas com impurezas em espaços-tempo esfericamente simétricos	44
3.3.2	Paredes de domínio generalizadas dopadas com impureza em espaços de dimensão arbitrária	56
4	Vórtices abelianos	65
4.1	Teorias de Calibre	66
4.2	Vórtices de Maxwell-Higgs	68
4.2.1	Quantização do fluxo e carga topológica	71
4.2.2	Vórtices criticamente acoplados	74
4.2.3	Soluções com simetria rotacional	78
4.3	Vórtices generalizados em teorias com simetria aumentada	81
4.4	Analogia entre impurezas e campos neutros	94
5	Monopolos magnéticos	101
5.1	Teoria de Yang-Mills-Higgs	103
5.2	Carga magnética	106
5.3	Vínculo de Bogomol'nyi na teoria Yang-Mills-Higgs	109
5.4	Monopolo de 't Hooft Polyakov	111
5.5	Dyon de Julia e Zee	114
5.6	Monopolos multimagnéticos	117

6	Buracos negros STU	125
6.1	Sobre a estabilidade modal de buracos negros de Kerr	126
6.2	O modelo STU	131
6.3	Separabilidade das equações perturbativas	134
6.4	Análise modal de buracos negros STU com cargas iguais em pares	139
6.4.1	Singularidades das equações separadas	140
6.4.2	Equação generalizada de Teukolsky e procedimento de Whiting	143
6.4.3	Estabilidade modal de férmions de Dirac na métrica STU com cargas iguais aos pares	148
7	Conclusão e perspectivas	154
	Referências Bibliográficas	157

CAPÍTULO 1

Introdução

“intrai per lo cammino alto e silvestro.”

Dante Alighieri, Divina Commedia

Em agosto de 1834, o engenheiro e construtor naval John Scott Russell observava um barco se movendo em um canal quando percebeu a emergência de um estranho fenômeno: uma onda que se erguia em meio às águas calmas do canal, e corria ao longo dele sem diminuir ou aumentar. Essa onda que, nas palavras de Russell, se movia com a regularidade de um planeta [1], preservava sua forma enquanto deixava atrás de si um mar calmo, que não parecia ter em si qualquer vestígio da onda que passara por aquela posição segundos antes. Deixamos aqui, em tradução livre, o relato de Russell, tal qual reportado por ele à Associação Britânica para o Avanço da Ciência [1]:

"Estava observando o movimento de um barco puxado rapidamente ao longo de um estreito canal por um par de cavalos, quando o barco subitamente parou - mas não a massa de água que ele colocara em movimento - esta se acumulou ao redor da proa da embarcação em estado de violenta agitação e então, subitamente deixando-o pra trás, rolou para a frente com alta velocidade, assumindo a forma de uma grande e solitária protuberância, um monte de água arredondado, suave e bem definido, o qual manteve seu curso ao longo do canal, aparentemente sem mudança de forma ou diminuição da velocidade. Eu o segui a cavalo, e o alcancei ainda rolando com uma velocidade de oito ou nove milhas por hora, preservando sua forma original com cerca de 30 pés de extensão, e entre 1 pé e um pé e meio de altura."

Esse fenômeno, que Russell chamou de onda de translação, pode ser visto na Figura 1.1 (e, na Ref. [2], é disponibilizado um vídeo em que o movimento de uma onda desse tipo pode ser visualizado em uma situação real). Essa onda exemplifica perfeitamente a natureza das soluções que investigaremos nesta tese. Em cada dado instante, ela está localizada em uma região finita do espaço, longe da qual o efeito da onda pode ser desprezado. Ela é então uma solução *localizada*, que só é observada nessa pequena região na qual a água do canal se eleva naquele momento. Essa solução pode ser tratada dentro do formalismo de teoria de campos. O canal no qual esse fenômeno se desenrola é, nessa perspectiva, o campo em si, que apresenta, em cada instante, uma configuração que satisfaz a equação diferencial que governa a evolução desse sistema, a chamada equação de Korteweg–De Vries [3], que fora originalmente proposta em [4]. O mar calmo é, dentro da linguagem da teoria de campos, uma *solução de vácuo*, que tem a menor energia possível. Notada seja uma característica que, como veremos, será um ponto em comum entre as diversas soluções que estudaremos neste trabalho: a onda de translação

(comumente denominada onda solitária em teoria de campos [5]) está imersa no vácuo. Se nos distanciarmos do centro dessa onda, indo seja para frente ou para trás, nos deparamos com um mar que não apresenta qualquer elevação e seríamos de fato incapazes de dizer, olhando apenas para essa região, que uma onda solitária existe em alguma parte desse mar. Formalmente, dizemos que a configuração tende assintoticamente ao vácuo.

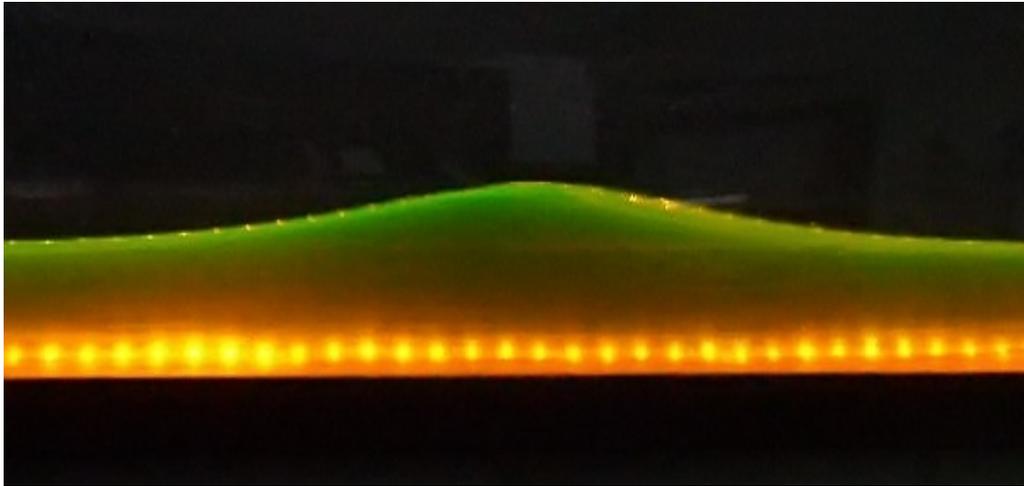


Figura 1.1 Onda de translação hidrodinâmica criada no Laboratoire Interdisciplinaire CARNOT de Bourgogne. Autoria de Christophe Finot e Kamal Hammani. Adicionada por Christophe Finot ao Wikimedia commons sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 2.5 Generic (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/>).

Que outras características interessantes podemos encontrar na onda de Russell? Seu caráter localizado permite a atribuição de propriedades como trajetória, velocidade e forças de colisão, normalmente mais associadas a partículas que a campos. Afinal, o que seria a trajetória de um campo? Ou uma colisão entre esses objetos? É justamente o fato de tais estruturas estarem localizadas em uma região finita do espaço que nos permite atribuir a essas soluções propriedades típicas de partículas e corpos finitos. Ainda que, em geral[†], essas soluções só tendam rigorosamente a zero no infinito, podemos, em aplicações práticas, considerar como parte da estrutura apenas a região em que a solução difere apreciavelmente do zero. Aqui, o significado rigoroso de “apreciavelmente” é, naturalmente, definido pelo nível de precisão exigido por cada dado problema.

As propriedades destacadas acima podem ser encontradas em uma grande variedade de sistemas físicos, e são estudadas nas mais diversas áreas das ciências naturais. Na Ref. [7], os autores detectaram a formação de estruturas localizadas em um ferrofluido (isto é, um fluido composto por nanopartículas magnéticas mantidas juntas por um surfactante[‡]). As estruturas localizadas detectadas em [7] podem ser geradas experimentalmente com o auxílio de um ímã que é aproximado de uma região do sistema, atraindo magneticamente as partículas do ferrofluido que se encontram mais próximas e, então, removendo o ímã. Embora a força magnética desapareça do sistema, um pequeno pico subsistirá em uma pequena região da superfície, como

[†]Uma exceção a esse comportamento é encontrada nos chamados compactons [6], que atingem o valor de vácuo a uma distância finita do centro da solução. Esses defeitos possuem propriedades interessantes, mas não serão explorados neste trabalho.

[‡]Surfactantes são compostos químicos capazes de reduzir significativamente a tensão superficial entre componentes de um sistema [9].

uma “memória” da perturbação finita à qual essa região foi submetida [8]. Repetindo várias vezes esse processo somos capazes de criar um padrão como o mostrado fotograficamente em [7], onde podemos ver diversas estruturas localizadas circulares distribuídas ao longo da superfície do material. Note que essas estruturas diferem da onda de translação em um ponto muito importante: elas não se movem. Em vez disso, os picos se mantêm idênticos à medida que o tempo passa, de modo que as estruturas mostradas na supracitada referência poderiam ter sido fotografadas alguns segundos depois sem que qualquer diferença pudesse ser notada. Soluções com essa propriedade são denominadas *estáticas*, e tendem a ser as mais simples em investigações de teoria de campos.

O arranjo experimental desenhado na Figura 1.2 foi originalmente introduzido em [10], e nele encontramos mais um exemplo de estrutura localizada. Agora temos um sistema de pêndulos (parafusos) acoplados entre si por uma barra superior. Cada um desses pêndulos pode ser rotacionado em até 360° em relação ao eixo definido pela barra. Devido ao acoplamento entre eles, seu movimento não é independente: a rotação de um dado parafuso induz a rotação de seus vizinhos. A configuração de vácuo desse sistema é aquela na qual todos os parafusos se encontram em repouso. Apesar da existência dessa configuração de menor energia, o *defeito* visto na Figura 1.2 não decai para ela. Conquanto configurações com movimento existam na teoria, é possível criar uma fotografia semelhante à Figura 1.2 com uma configuração estática [11]. Nesse ponto, o sistema se assemelha ao exemplo anterior, e se distingue da onda de Russell, que evidentemente não pode ser estática. Mas o que mantém os parafusos nessa posição? Ocorre que a *topologia* dessa solução é distinta do vácuo. Se mudamos o ângulo de rotação de um dado parafuso (visando mudar continuamente sua posição até que ele fique na vertical), seu movimento faz com que os parafusos em sua vizinhança sejam também rotacionados. O resultado desse procedimento é que o defeito apenas muda de posição: o parafuso inicialmente rotacionado está agora na vertical, mas outros à sua frente se levantaram na mesma medida. De modo geral, não há nenhuma transformação contínua que possa deformar suavemente essa configuração naquela em que todos os pêndulos se encontram na vertical.

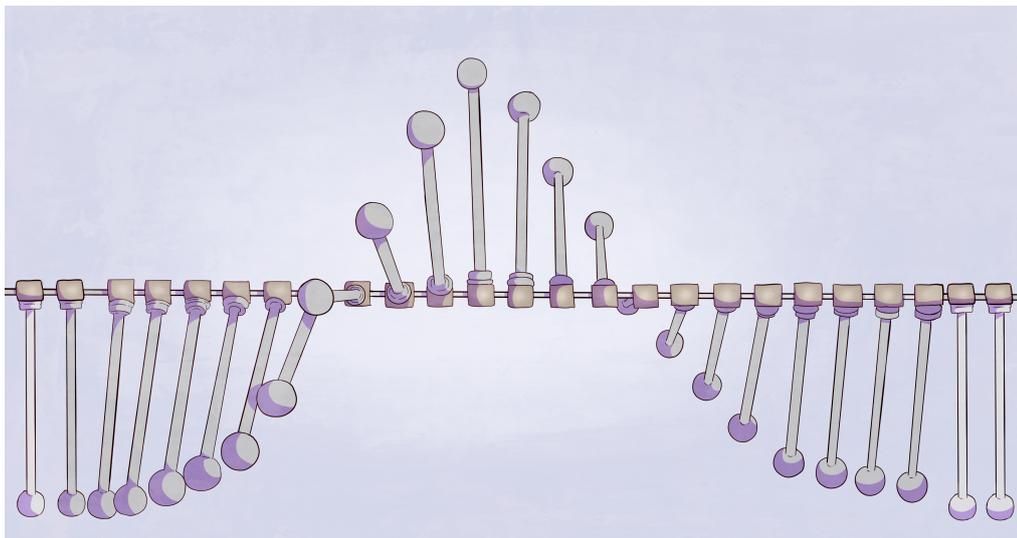


Figura 1.2 Modelo mecânico correspondente à versão discretizada da teoria sine-Gordon, introduzido inicialmente em [10]. Ilustração criada por Gustavo Francisco Cavalcante, inspirada no arranjo mostrado em [11].

Soluções localizadas como a descrita acima são topologicamente distintas do vácuo, e recebem o nome de *defeitos topológicos*. Essas soluções podem ser classificadas por certos inva-

riantes, como uma ou mais cargas topológicas, que dependem apenas da topologia da solução. Nesse exemplo, quando giramos um parafuso deformamos a configuração em outra topologicamente equivalente. De fato, uma pequena perturbação que leva o ângulo θ em $\theta + \delta\theta$ produz o efeito de uma translação que, no limite em que $\delta\theta$ tende a zero, ocorrerá sem gasto de energia. Esse é um exemplo prático do que estudaremos mais adiante como um *modo de translação* [152] que é, por sua vez, um tipo de *modo zero*. Translações via modos zero são um exemplo de uma solução sendo transformada em outra de mesma carga topológica. Deformações contínuas como essa são de fundamental relevância em física. A própria evolução temporal de um sistema físico se dá de forma contínua e suave, e é justamente por isso que essas estruturas são, por natureza, estáveis contra decaimento no vácuo. Defeitos topológicos serão o foco de grande parte deste trabalho.

Ainda que a Figura 1.2 represente uma solução estática, defeitos em movimento, similares à onda de Russell, também existem nessa teoria. Se dermos um impulso forte em um dos parafusos, o defeito se moverá rapidamente, girando os pêndulos em sequência de maneira que a “torção” (em inglês, *kink*) se mova como um pulso pelo sistema, de modo análogo à onda de translação. Nesse movimento, o defeito não perde sua forma. Ao atingir a extremidade, esse *kink* colide elasticamente e retorna no sentido oposto, como um *antikink*. Além disso, essa onda, assim como as soluções da equação KdV, preserva sua forma após colisões com outras soluções do sistema. Isso significa que se dois desses pulsos se propagarem pelo sistema e colidirem, eles irão passar um pelo outro e, ao se distanciarem, recuperar sua forma, mantendo apenas uma mudança de fase como relíquia dessa colisão. Soluções com essa propriedade são denominadas sólitons em parte da literatura [5, 13]. Entretanto, essa é uma propriedade extremamente rara. Por esse motivo, é também bastante comum que autores ignorem essa distinção, e usem o termo sóliton para defeitos topológicos em geral [14]. Apesar da semelhança entre o comportamento dessas soluções e da onda de Russell, esta última não tem o caráter topológico. Ela possui, em vez disso, uma carga de Noether que, aliada a considerações energéticas, explica sua estabilidade quanto ao decaimento [15].

O sistema discutido nos parágrafos anteriores é governado pela equação de sine-Gordon. Introduzida primeiramente em investigações sobre superfícies com curvatura negativa constante [16], essa equação seria posteriormente redescoberta e estudada no contexto da teoria de campos relativística [17]. As configurações de campo correspondentes ao *kink* e *antikink* dessa teoria podem ser vistos na Figura 1.3. Notada seja a maneira como ambas as soluções conectam vácuos distintos, que correspondem às linhas constantes para as quais o campo assintota. É na região central, na qual o campo difere apreciavelmente do vácuo, que se encontra o defeito. Essa região corresponde àquela em que os parafusos estão torcidos na Figura 1.2, e é somente nela que a densidade de energia da solução é mensurável.

A lagrangiana de sine-Gordon, que veremos posteriormente neste trabalho, gera uma teoria escalar real de um único campo. Modelos desse tipo são provavelmente os mais simples em teoria de campos, uma vez que seu estudo apenas exige a investigação de uma única equação diferencial. Apesar de sua simplicidade, campos escalares encontram aplicações em diversas áreas da física, como a Gravitação [18–21] e a cosmologia (contexto no qual podemos destacar, entre outros, os modelos de inflação [22–26, 26] e a quintessência [27–31], que é usada como uma alternativa e generalização dinâmica à constante cosmológica). No contexto de teorias escalares reais, os defeitos topológicos comumente aparecem na forma de *kinks* (em uma dimensão), ou como paredes de domínio (em inglês, *domain walls*), que correspondem à inserção de *kinks* em espaços de maior dimensão. Para aplicações de *kinks* e *domain walls* veja [36–43] e as referências por eles citadas.

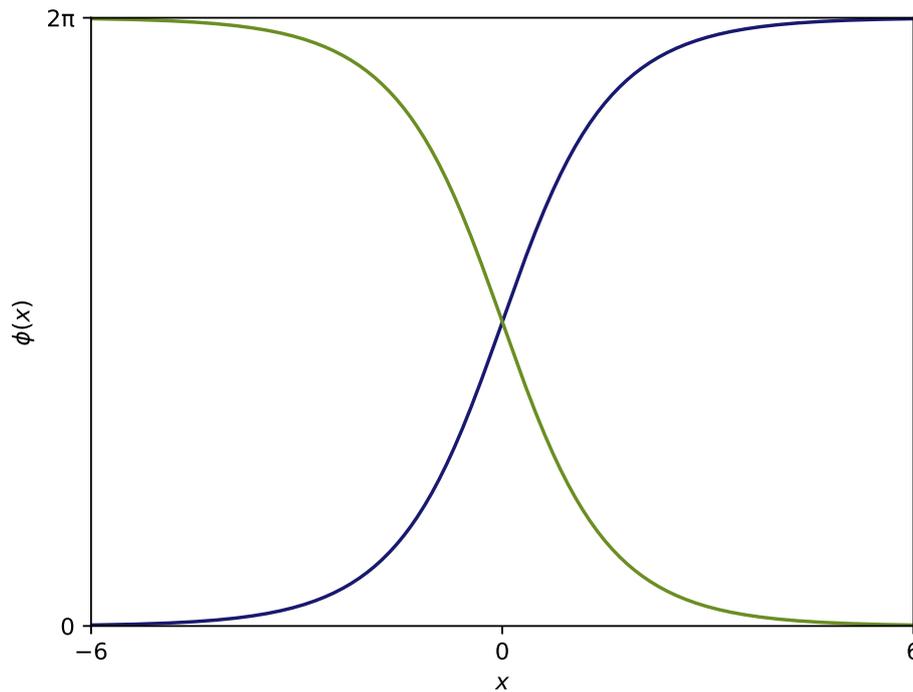


Figura 1.3 Soluções estáticas tipo kink (em azul) e antikink (em oliva) do modelo sine-Gordon, com centros localizados na origem.

Uma maneira importante de modificar soluções do tipo kink é a partir da adição de *impurezas* no sistema. Para entender o seu significado, convém observar que os dois sistemas que discutimos acima tem a importante característica de homogeneidade espacial. Isso significa que todos os pontos do sistema são equivalentes, o que se reflete no fato de que esses defeitos podem estar localizados em qualquer região do espaço: seu ponto central é completamente arbitrário. Isso acontece porque a lagrangiana de tais sistemas é completamente independente da coordenada espacial, o que significa que ela permanece inalterada depois de uma operação de translação. Mas, na natureza e em aplicações reais, a homogeneidade é frequentemente válida apenas como aproximação. Um sólido pode parecer homogêneo a longas distâncias mas, se o olharmos de perto, veremos impurezas correspondentes a traços de outros materiais os quais quebram essa homogeneidade. Os parafusos da Figura 1.2 são todos aproximadamente iguais, mas bastaria um pouco de ferrugem na parte superior de um deles para que o comportamento desse parafuso fosse notavelmente diferente do outro. Frequentemente a inhomogeneidade é uma parte central da descrição realista do sistema físico, como ocorre, por exemplo, em certos materiais heterogêneos, nos quais as propriedades de polarizabilidade variam localmente, e essa variação precisa ser levada em conta, por exemplo, em fenômenos de transporte [44]. Outros exemplos de sistemas físicos inhomogêneos podem ser encontrados em [45–47]. Referências que lidam com impurezas em sistemas de um campo escalar real incluem [48–52].

Neste trabalho serão relatadas duas novas contribuições que desenvolvemos dentro do tema de impurezas em sistemas escalares reais. Na Ref. [53], mostramos que os argumentos de reescala desenvolvidos por Derrick [54] e Hobart [55], os quais impedem a realização de defeitos estáticos estáveis em teorias com lagrangiana tipo *standard* (isto é, da forma $\mathcal{L}_s = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + U(\phi)$), se tornam muito menos restritivos quando os campos escalares são acoplados a impurezas. Isso ocorre devido à adição de novos termos nessa lagrangiana, que agora

é deformada para acomodar o acoplamento com a impureza. Graças aos novos termos decorrentes dessa transformação, fomos capazes de não apenas encontrar soluções não triviais e estáveis, como também implementar o formalismo de Bogmol'nyi [56], no qual as soluções de certas equações de primeira ordem possuem a menor energia possível para dadas condições de contorno.

Dando continuidade a essa linha de pesquisa, exploramos, na Ref. [57], defeitos escalares acoplados a impurezas em espaços esfericamente simétricos, em um artigo que foi inspirado pelas referências [58, 59], que lidaram com campos escalares acoplados a impurezas em duas dimensões do espaço-tempo. Esse trabalho generaliza para o cenário inomogêneo os sistemas encontrados na referência [60], na qual foi demonstrada a possibilidade de evasão do teorema de Derrick para soluções radialmente simétricas para uma lagrangiana com potencial $U = U(\phi, r)$. As soluções por eles encontradas minimizam a energia (ao menos dentre as configurações de simetria radial) e satisfazem equações de primeira ordem. Neste novo trabalho, conseguimos fazer essencialmente o mesmo para soluções tipo kink acopladas a impurezas. Além disso, generalizamos um pouco mais permitindo espaços arbitrários para qualquer número de dimensões espaciais, desde que a métrica seja esfericamente ou cilíndricamente simétrica. Generalizamos ainda os resultados de [59], em que foi demonstrada, para o caso de uma dimensão espacial, a existência de impurezas que mantêm a forma de soluções BPS. Isso significa que, para impurezas específicas, uma solução que resolve as equações BPS no caso homogêneo pode também ser uma solução das equações de movimento de um sistema com impureza.

Um outro tipo de solução localizada que se encaixa na definição de defeito topológico é o *vórtice*. Uma imagem semelhante à da primeira observação experimental, reportada originalmente em 1967 em [61], pode ser vista na Figura 1.4, obtida de [62]. A descrição desses defeitos requer duas dimensões espaciais e simetria de calibre dada pelo grupo $U(1)$, cuja ação corresponde à rotação de um campo escalar no espaço interno da teoria. Enquanto o caráter topológico dos kinks pode ser explicado pelo fato de essas estruturas conectarem pontos distintos de um conjunto discreto de vácuos, a carga topológica dos vórtices tem um significado mais sutil. Como detalharemos mais adiante neste trabalho, esse invariante equivale a um inteiro denominado *winding number* (que podemos traduzir como número de voltas), o qual pode ser interpretado como o número de zeros do campo escalar complexo da teoria, contado com uma noção apropriada de multiplicidade.

Vórtices topológicos são defeitos bastante versáteis e quase onipresentes na física. Contextos nos quais essas estruturas aparecem incluem, mas não se limitam à biologia [63, 64], óptica [65–69], condensados de Bose-Einstein [70–74], superfluidos [75–79] e cosmologia [80–83]. Entretanto, a aplicação provavelmente mais conhecida dessas estruturas se dá na física do estado sólido, mais especificamente no estudo de materiais supercondutores. Essa descoberta se deu originalmente no contexto da teoria de Ginzburg-Landau [84], vista como um modelo fenomenológico da supercondutividade. Foi Abrikosov [85] quem primeiro previu a existência de vórtices topológicos em supercondutores tipo-II. Sob certas condições de temperatura e pressão, esses materiais passam por uma transição de fase entre os estados normal e supercondutor, o qual é caracterizado pela ausência de resistência elétrica e pelo efeito Meissner, que consiste na expulsão das linhas de campo magnético do interior do material. Abrikosov foi capaz de demonstrar que, para um campo magnético externo cuja intensidade se encontra entre dois valores críticos, um estado intermediário aparece. Esse estado é caracterizado pela presença de pequenas estruturas localizadas, os pontos escuros da Figura 1.4. Essas estruturas “prendem” o fluxo magnético, negando parcialmente o efeito Meissner em sua vizinhança. Cada um desses pontos, em torno dos quais o campo magnético se concentra, é um *vórtice*, que pode ser entendido como um pequeno caroço de material normal imerso em um supercondutor (a região mais

clara na Figura 1.4). Como demonstrado por Abrikosov com base em argumentos topológicos, o fluxo magnético total é quantizado e proporcional a um inteiro que corresponde ao número de zeros do campo escalar, contados com multiplicidade. A confirmação experimental desse fenômeno veio sete anos depois [86], e se destaca como uma das contribuições que o levariam a receber o prêmio Nobel de física em 2003 [87]. Desde então vórtices têm sido uma peça fundamental no estudo de materiais supercondutores [88–95].

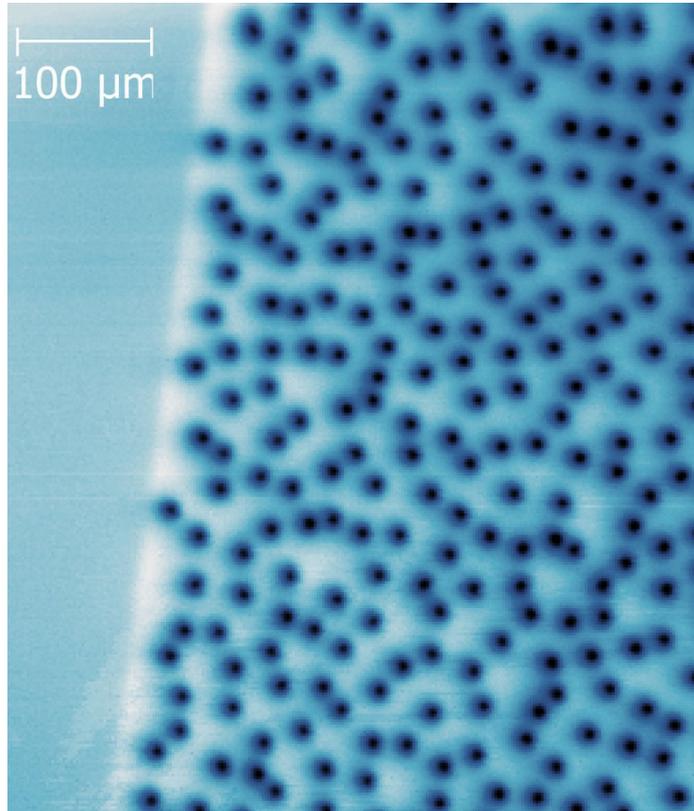


Figura 1.4 Imagem de uma rede de vórtices magnéticos, tirada com auxílio de um microscópio de varredura SQUID, em um filme fino de $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$. Corte da imagem de autoria de F. S. Wells et al., publicada em [62] e distribuída com licença Creative Commons Attribution 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

A teoria de Ginzburg-Landau e, portanto, o trabalho de Abrikosov, estão inseridos no contexto da mecânica quântica não relativística. Em 1973, Nielsen e Olesen propuseram uma generalização relativística dessa teoria [96]. Para soluções estáticas, o funcional de energia coincide com a energia livre de Helmholtz da teoria de Ginzburg-Landau. Por esse motivo, os vórtices de Abrikosov são recuperados sem modificações no caso estático, estando assim mantida a relação entre esse modelo e a supercondutividade. Entretanto, a dinâmica desses vórtices é diferente no modelo de Nielsen-Olesen, dado que sua lagrangiana é agora invariante por transformações de Lorentz, como requer a Relatividade Especial. Outros tipos de vórtices também apareceriam posteriormente, como aqueles da teoria de Chern-Simons [97, 98], caracterizada por uma eletrodinâmica que negligencia o termo de Maxwell e inclui um termo topológico caracterizado pela chamada forma diferencial de Chern-Simons, originalmente introduzida em [185]. Combinando a influência dos dois termos, encontramos as teorias de Maxwell-Chern-Simons. Exemplos de vórtices em modelos com essa eletrodinâmica podem ser encontrados, por exemplo, nas referências [101–103]. Recentemente, também fizemos um trabalho com um modelo

generalizado de eletrodinâmica Maxwell-Chern-Simons [104]. Uma outra generalização importante é o aumento de simetria, em que adicionamos um outro grupo $U(1)$ à simetria de calibre, que passa a ser da forma $U(1) \times U(1)$. Nesse contexto, temos dois setores com duas eletrodinâmicas e, portanto, dois fluxos magnéticos proporcionais às cargas topológicas da teoria. Essa generalização é importante em investigações envolvendo um setor de matéria escura, o qual interage fracamente com o setor “claro” correspondente ao eletromagnetismo usual. Essa linha de investigação foi seguida nas referências [105–108]. Na referência [109], foi conduzida uma generalização e aprofundamento das ideias que havíamos desenvolvido em [108]. Não apenas generalizamos a simetria para o caso $U(1) \times \dots \times U(1)$, como também investigamos com mais detalhes o significado físico e o comportamento das soluções que se tornam possíveis nesse cenário. Na referência [110], construímos um modelo com simetria da forma $U(1) \times Z_2$, no qual a lagrangiana de Nielsen-Olesen é acoplada a um campo escalar que gera soluções tipo Kink. Mostramos que nesse modelo a solução tipo kink pode ser usada como uma fonte de inhomogeneidade, e o vórtice se comporta como se estivesse sob a influência de uma impureza.

Mesmo não existindo na teoria de Maxwell, monopolos magnéticos têm atraído a atenção de físicos teóricos desde o final do século XIX, quando Pierre Curie primeiro expôs suas investigações acerca desse objeto teórico, concluindo que sua existência é perfeitamente consistente com o eletromagnetismo clássico, apesar da falta de observação experimental [111]. Entretanto, monopolos magnéticos se tornariam muito mais relevantes algumas décadas depois, com o trabalho de Dirac [112, 113], que estudou as propriedades de uma carga magnética pontual. Dirac foi capaz de demonstrar, impondo meramente a consistência entre a existência desse monopolo e as regras da mecânica quântica, que a carga elétrica deve ser quantizada. Essa descoberta foi um importante triunfo teórico, visto que uma explicação por primeiros princípios para a quantização da carga elétrica vinha sendo buscada, sem sucesso, desde os primórdios da mecânica quântica. Ainda hoje, explicar essa quantização em uma teoria livre de monopolos magnéticos parece ser um grande desafio.

Apesar da importância da descoberta de Dirac, a contínua dificuldade na obtenção de provas experimentais remetendo à existência de monopolos magnéticos ajudou a manter o status “exótico” desses objetos. Entretanto, eles se tornariam ainda mais importantes devido ao trabalho de 't Hooft [114] o qual demonstrou, usando argumentos derivados da topologia, que monopolos magnéticos são uma necessidade em qualquer teoria de Grande Unificação (isto é, capaz de unificar, na escala apropriada de energia, as forças forte, fraca e eletromagnética). A própria topologia dessas teorias dá origem a monopolos magnéticos, que resultam de propriedades fundamentais. Usando como base uma teoria de calibre não abeliana com grupo $SO(3)$ e assumindo simetria esférica, 't Hooft foi capaz de encontrar a configuração de campo correspondente a um monopolo magnético de carga unitária. Essa solução também foi encontrada independentemente, e no mesmo ano, pelo físico soviético Alexander Polyakov [115], que deu a essa solução o famoso nome de “ourião”, devido à forma do *ansatz* utilizado. Assim como a partícula de Dirac (que é, de fato, pontual), o monopolo de 't Hooft-Polyakov é uma estrutura localizada. Mas, enquanto sua predecessora inserida artificialmente na teoria de Maxwell, essa última solução é um defeito topológico que aparece naturalmente. Em teorias com certos grupos de calibre e um campo de Higgs, o processo de quebra espontânea de simetria da teoria leva à emergência de um invariante topológico inteiro, o qual é proporcional à carga magnética. Espera-se que monopolos magnéticos tenham sido produzidos no universo primordial [116], e a necessidade de explicar sua ausência no universo observável está entre as motivações que levaram aos modelos inflacionários [117]

Assim como ocorre com os vórtices abelianos, podemos também expandir a teoria de monopolos através do aumento de simetria, passando a considerar produtos de grupos de gauge não

abelianos. Investigações nessa linha com simetria $SU(2) \times SU(2)$ foram conduzidas, por exemplo, em [118, 119]. Na referência [120] generalizamos esses resultados para potências maiores envolvendo 3 ou 4 fatores de $SU(2)$, criando estruturas que chamamos de *multimagnéticas*.

O último tipo de estrutura localizada a ser considerada neste trabalho é o buraco negro. Apesar de seu grande tamanho, eles também são localizados quando a escala astronômica é considerada. De fato, as soluções que consideraremos são assintoticamente planas, o que significa que, a grandes distâncias do centro do buraco negro, a curvatura tende a zero e a métrica toma a forma de Minkowski. Em alguns trabalhos recentes, buracos negros têm também sido vistos como defeitos topológicos termodinâmicos [121–123], de modo que a conexão entre eles e as estruturas discutidas nos parágrafos anteriores é, na verdade, mais próxima do que se apresenta à primeira vista. Entretanto, neste trabalho não focaremos no aspecto topológico dessas soluções, visto que ele não será essencial aos nossos objetivos.

Durante o cumprimento deste doutorado, foi efetuada uma cooperação internacional com a Universidade da Pensilvânia, na Filadélfia, durante a qual estudamos buracos negros da família STU. Esses buracos negros aparecem naturalmente em teoria das cordas e supergravidade, a qual precisa ser considerada quando um sistema supersimétrico está acoplado à gravidade. A supersimetria é uma ferramenta promissora, com potencial de resolver diversos problemas importantes da física, como os bem conhecidos problemas da hierarquia [124] (que questiona o fato de a força gravitacional ser muitas ordens de grandeza mais fraca que as outras interações conhecidas) e da natureza da matéria escura [125]. Isso torna a supersimetria e, portanto, a supergravidade, bastante importantes em física teórica, e os buracos negros STU são, por extensão, soluções relevantes em investigações da fronteira da física moderna. Além disso, esses buracos negro também podem ser estudados no contexto da Relatividade Geral, que estará mais próximo do tratamento que daremos neste trabalho. Nessa perspectiva, esses buracos negros são análogos às soluções de Kerr [126] (que corresponde a um buraco negro sem carga com momento angular) e de Kerr-Newman [127] (que generaliza a solução de Kerr para acomodar uma única carga elétrica). Os buracos negros STU são ainda mais gerais, apresentando múltiplas cargas $U(1)$. As soluções nas quais estaremos interessados possuem quatro dessas cargas, duas elétricas e duas magnéticas. Eles possuem a famosa solução de Kerr como limite quando todas as cargas tendem a zero, também contém outros buracos negros importantes como limite, de modo que essas estruturas localizadas são bastante úteis para investigações das propriedades de buracos negros em cenários mais gerais. Na referência [128], que faz uso dos resultados de separabilidade previamente obtidos em [129], investigamos a estabilidade modal desses buracos negros, mostrando, sob certas hipóteses, que modos perturbativos na métrica não podem crescer exponencialmente. Especificamente, analisamos na supracitada referência perturbações bosônicas (isto é, de spin inteiro), e de spin $\pm 1/2$, que estudamos com o auxílio da equação de Dirac (apropriadamente generalizada para o espaço em questão) derivada em [129].

Neste trabalho, estudaremos as estruturas localizadas que descrevemos nos parágrafos anteriores, com ênfase nas contribuições originais que resultaram em artigos, mas sem ignorar outras soluções já estabelecidas em teoria de campos. Desta forma, poderemos contextualizar melhor as novas contribuições e fazer um trabalho auto-contido, o qual também deverá servir como revisão e guia para estudantes interessados em adentrar esta área de estudos. Esta tese está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 2, faremos uma breve revisão teórica abrangendo alguns pontos gerais importantes pertinentes ao resto do trabalho; no Capítulo 3 investigaremos defeitos topológicos em campos escalares, com soluções tipo kink e parede de domínio, sem e com impurezas. No Capítulo 4 estudaremos vórtices topológicos, incluindo as soluções de simetria aumentada que mencionamos. No Capítulo 5 investigaremos monopolos magnéticos de simetria $SU(2)$ e, posteriormente, generalizamos análise para estruturas multimagnéticas que

ocorrem na simetria $SU(2)^p$, com $p \in \mathbb{Z}$. Seguimos então para o Capítulo 6, no qual trataremos de buracos negros STU, considerando em particular o caso de cargas iguais duas a duas, e estudaremos a estabilidade modal desses buracos negros. Finalmente, encerraremos o trabalho com um capítulo de conclusão, em que sumarizamos os resultados que foram obtidos ao longo deste trabalho e apontamos perspectivas para novas investigações.

Aspectos teóricos gerais

2.1 Equações de Euler-Lagrange

Seja $n = D + 1$ o número de dimensões do nosso espaço tempo. Os sistemas físicos que iremos estudar são governados por uma densidade lagrangiana \mathcal{L} (que frequentemente será chamada apenas de lagrangiana, como é de costume em trabalhos da área), a partir da qual suas equações de movimento podem ser encontradas pelo método variacional [130]. Assim, as configurações de campo fisicamente aceitáveis devem ser aquelas que extremizam o funcional de ação da teoria mediante uma variação de primeira ordem $\delta\varphi_a$ nos campos $\{\varphi_a\} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ do modelo. A ação por sua vez é obtida a partir da densidade lagrangiana do sistema, e se escreve

$$S[\varphi_a] = \int d^n x \sqrt{|g|} \mathcal{L}(\varphi_a, \nabla_\mu \varphi_a, x^\mu), \quad (2.1)$$

em que ∇_μ é a derivada covariante, cuja forma explícita será dada na próxima seção, e g é o determinante da métrica, a qual pode ser especificada pelo elemento de linha $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, onde os índices gregos variam entre 0 e D (em contraste com os índices latinos, que só variam nas coordenadas espaciais, entre 1 e D), e a soma sobre índices repetidos é implícita. Na maior parte do trabalho, e salvo menção explícita do contrário, trabalharemos com a métrica de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. A forma explícita de $\eta_{\mu\nu}$ dependerá da assinatura métrica escolhida. Há duas escolhas possíveis. A primeira possibilidade, às vezes denominada convenção *tipo tempo*, é mais usada em física de partículas, e leva a um tensor métrico da forma

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1) \quad \text{Assinatura } (+, -, -, \dots), \quad (2.2)$$

em que a primeira componente é temporal e as outras D são espaciais. Estamos usando unidades naturais nas quais, em particular, vale $c = \hbar = 1$ para a velocidade da luz e a constante de Planck, respectivamente.

A segunda possibilidade de assinatura, chamada *tipo espaço*, é mais comumente usada em trabalhos relacionados a Relatividade Geral e Teoria da Cordas, e nela a métrica de Minkowski toma a forma

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1) \quad \text{Assinatura } (-, +, +, \dots), \quad (2.3)$$

onde as componentes temporal e espaciais estão ordenadas como antes.

Pelo princípio variacional, o funcional de ação deve ser extremizado mediante variações de primeira ordem $\delta\varphi_a$ dos campos da teoria. Isso significa que a derivada primeira da ação precisa se anular. Devido à natureza de S , a quantidade apropriada para essa análise é a *derivada funcional*, representada pela notação $\frac{\delta F}{\delta g_a}$. Para um funcional F de funções g_a , o qual possui representação integral, a derivada funcional é dada implicitamente pela equação [5]:

$$\delta F[g_1, \dots, g_N] = \int d^n x \sum_{a=1}^N \frac{\delta F}{\delta g_a} \delta g_a. \quad (2.4)$$

O princípio variacional impõe que a derivada funcional da ação com relação aos φ_a se anule, de modo que as equações de Euler-Lagrange para os campos de matéria da teoria devem ser

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi_a} = 0. \quad (2.5)$$

Assim, precisamos considerar que $\delta S = 0$ sob a variação dos campos e usar (2.4) para encontrar as equações de campo. Em termos da lagrangiana, as equações de Euler-Lagrange que encontramos por esse procedimento são

$$\nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \varphi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} = 0. \quad (2.6)$$

Essas equações diferenciais de segunda ordem, quando combinadas às condições de contorno apropriadas, ditam as configurações de campo em cada instante, bem como a maneira com a qual essas configurações evoluem com o tempo. No espaço plano, as equações de campo assumem a forma simplificada

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} = 0, \quad (2.7)$$

em que $\partial_\mu \equiv \partial / \partial x^\mu$.

2.2 Equações de Einstein

Após seu seminal trabalho sobre a Relatividade Especial, Albert Einstein voltou sua atenção a uma generalização que permitisse a incorporação da gravidade ao seu panorama. Essa generalização encontraria seu primeiro fôlego já em 1907, ano em que Einstein introduziria o importante *princípio da equivalência* [131], que serviria como um guia no processo que eventualmente o levaria à Relatividade Geral. Esse princípio postula a equivalência local entre a atração gravitacional sentida por um corpo e a força inercial (também chamada de força fictícia), que é sentida por um observador localizado em um referencial não inercial.

Para concluir seu objetivo, Einstein precisou fazer uso das ferramentas fornecidas pela geometria pseudo-Riemanniana. O espaço-tempo seria agora representado por uma variedade diferenciável com curvatura não nula. É o efeito inercial decorrente da existência dessa curvatura que é percebido fisicamente como a gravidade. Assim, dez anos após o início de sua empreitada, Einstein conseguiu chegar à famosa teoria da Relatividade Geral [132, 133]. No centro dessa teoria, está um sistema de equações de campo para o tensor métrico, o qual dita a geometria do espaço-tempo ao definir o produto interno $(V, U) \equiv g_{\mu\nu} V^\mu U^\nu$, bem como a noção de distância a ele associada. Essas equações de campo são conhecidas como *equações de Einstein*, e serão o tema desta seção.

Enquanto Einstein trabalhava na teoria da Relatividade, o célebre matemático alemão David Hilbert trabalhava paralelamente na sua própria dedução das equações de campo que modelam a gravitação [135]. De fato, os dois submeteram os seus trabalhos quase simultaneamente, e influenciaram um ao outro por meio de diversas correspondências e seminários. Assim, a contribuição de Hilbert no desenvolvimento da Relatividade Geral não deve ser menosprezada, ainda que ele próprio tenha reconhecido Einstein como o “pai” dessa teoria.

Einstein deduziu suas equações com uma análise mais heurística e menos formal, como era típico de seus trabalhos. Hilbert, por outro lado, encontrou esse resultado por meio do método

variacional, no qual as equações de campo são obtidas como as equações de Euler-Lagrange de uma ação proposta por ele. Esse método é mais próximo do formalismo de campos que usamos no resto deste trabalho, e portanto será a base dos cálculos desta seção.

Para introduzir a ação da teoria, precisamos antes definir algumas quantidades essenciais. Primeiramente, notamos que pontos distintos em uma variedade curva possuem espaços tangentes distintos, o que impede sua comparação por meio derivada parcial usual. Para medir variações ao longo de curvas nessa variedade, precisamos estabelecer uma forma de conectar esses diferentes espaços tangentes. Isso nos leva a introduzir a *derivada covariante*, cujas ações em um vetor V^μ e na componente U_μ de uma 1-forma são dadas respectivamente por [134]

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho, \quad (2.8)$$

$$\nabla_\mu U_\nu = \partial_\mu U_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho U_\rho. \quad (2.9)$$

A atuação da derivada covariante em um tensor (p, q) arbitrário $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ é uma generalização imediata das equações acima, na qual adicionamos uma contração com sinal positivo (negativo) entre o tensor e os $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$ para cada índice superior (inferior). As quantidades $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$ (que não se transformam como tensores) descrevem a conexão, e especificam o transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva. Com efeito, um vetor será transportado paralelamente se sua derivada direcional covariante ao longo da direção definida pelo vetor tangente a essa curva se anular. Note-se que não há uma única maneira de definir a conexão, e cada prescrição define, em princípio, uma teoria gravitacional distinta. Na teoria de Einstein, escolhemos essa conexão pelo requerimento de compatibilidade métrica, o qual impõe que a conexão seja tal que $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$ para o tensor métrico da variedade. É possível mostrar que, na ausência de torção, essa relação define completamente os $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$ em termos da métrica, nos levando à *conexão de Levi-Civita*, descrita pelos *símbolos de Christoffel*

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\lambda g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\rho} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}). \quad (2.10)$$

Outra quantidade importante é o tensor de curvatura de Riemann. Grosso modo, esse tensor nos informa o quanto a comutação derivadas covariantes de segunda ordem ao longo de duas direções falha. O tensor de Riemann na Relatividade Geral satisfaz, portanto, a relação

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\lambda\mu\nu} V^\lambda, \quad (2.11)$$

que é válida devido à ausência de torção na conexão (2.10) da Relatividade Geral. A forma explícita do tensor de Riemann é

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda). \quad (2.12)$$

Tomando uma contração no primeiro e terceiro índices do tensor de de Riemann, encontramos o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}, \quad (2.13)$$

que descreve a mudança na forma de um vetor ao ser transportado por uma geodésica. Finalmente, podemos tomar o traço desse tensor para obter uma grandeza escalar relacionada à curvatura:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_{\mu}, \quad (2.14)$$

que é o chamado escalar de Ricci da teoria. Com essas definições, estamos prontos para procurar as equações de Einstein. Note-se que as definições acima foram feitas com uma abordagem

prática em mente, apenas dizendo o mínimo necessário para que sejamos capazes de fazer uso dessas quantidades e interpretá-las em certa medida, mas ainda estamos longe de uma introdução apropriada à Relatividade Geral. Não teremos espaço para abordar de forma detalhada e/ou formal esses e outros conceitos importantes da teoria, mas recomendamos o leitor à referência [134] para um curso didático e completo sobre o tema.

A dedução tem como ponto de partida a Ação:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x + S_M, \quad (2.15)$$

em que visando evitar carregar o módulo em nossos cálculos, assumimos $|g| = -g$, que vale para espaços-tempo de dimensão par na assinatura escolhida. Este é o caso de todas as variedades curvas com as quais trabalharemos. Na equação acima, G é a constante gravitacional. A assinatura métrica escolhida nesta seção é $(-, +, +, \dots)$, que é a convenção mais adotada em Relatividade Geral e que será usada no Capítulo 6, no qual faremos maior uso das ferramentas dessa teoria.

A primeira integral em (2.15) é comumente chamada de *ação de Einstein-Hilbert*. Por outro lado, o termo S_M em (2.15) é interpretado como a ação correspondente à contribuição da matéria. Quando existe uma representação integral de S_M em termos de uma lagrangiana, essa ação pode ser escrita na forma

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad (2.16)$$

onde \mathcal{L} é densidade lagrangiana. Quando o sistema de matéria estudado possui uma lagrangiana já conhecida para o caso do espaço plano, é possível obter a lagrangiana do problema com uma prescrição simples. Simplesmente trocamos a métrica de Minkowski pela métrica $g_{\mu\nu}$ da variedade diferenciável estudada e substituímos das derivadas parciais por derivadas covariantes.

Impondo $\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$, encontramos

$$\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[\sqrt{-g} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) + R \delta (\sqrt{-g}) \right] = - \int d^4x \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

Pela definição da derivada funcional, vemos que devemos escrever o integrando de forma que ele seja proporcional a $\delta g^{\mu\nu}$. Primeiramente, vamos calcular $\delta R_{\mu\nu}$. Usando a definição de $R_{\mu\nu}$ e da derivada covariante, e cancelando termos iguais, encontramos

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho). \quad (2.18)$$

Ora é fácil mostrar que as variações $\delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho$ são tensores, visto que as variações das derivadas covariantes de um vetor o são. Isso garante que a derivada covariante dessas grandezas esteja bem definida. Calculando-a, encontramos

$$\nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho) = \partial_\lambda (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho) + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho. \quad (2.19)$$

Renomeando índices e usando a compatibilidade métrica, podemos escrever a segunda contribuição em (2.17) na forma

$$\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho \right). \quad (2.20)$$

Usando diretamente a definição de $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, não é difícil mostrar que

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g_{\mu\alpha} \left[g_{\nu\beta} \left(\nabla^{\rho} \delta g^{\alpha\beta} - \nabla^{\alpha} \delta g^{\rho\beta} \right) - \nabla_{\nu} \delta g^{\alpha\rho} \right]. \quad (2.21)$$

Agora note que $d^4x\sqrt{-g}$ é uma forma de volume bem definida, e o integrando em (2.20) é a divergência covariante de um vetor. Então podemos usar a versão generalizada do teorema de Stokes para trocar o domínio de integração por sua fronteira [134], que no nosso caso corresponde ao infinito espaço-temporal. Desse processo resulta um termo de superfície. Supondo nulas as variações de $g_{\mu\nu}$ e de suas derivada no infinito (visto que estamos trabalhando com um espaço sem fronteira) então, por (2.21), essa integral não contribuirá para a variação total.

Agora falta apenas o terceiro termo em (2.17), de modo que nos resta calcular $\delta(\sqrt{-g})$. Primeiramente, note que $g^{\mu\rho}g_{\mu\nu} = \delta_{\nu}^{\rho}$. Tomando a variação primeira dessa equação e notando que a regra do produto vale no cálculo de variações, encontramos $g_{\mu\nu}\delta g^{\nu\rho} = -g^{\nu\rho}\delta g_{\mu\nu}$, donde

$$\delta g^{\lambda\rho} = -g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho}\delta g_{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

A variação procurada é então da forma

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\delta[\ln(g)], \end{aligned} \quad (2.23)$$

de modo que precisamos agora encontrar a forma de uma variação do logaritmo na expressão acima. Vamos fazer isso de modo geral, para uma matriz simétrica e invertível M , tomada como função de um parâmetro contínuo ξ . Da variação $\delta\xi$, vem

$$\begin{aligned} \delta[\ln(\text{Det}M(\xi))] &= \ln\left(\frac{\text{Det}(M + \delta M)}{\text{Det}M}\right) \\ &= \ln[\text{Det}(1 + X)], \end{aligned} \quad (2.24)$$

em que $X \equiv M^{-1}\delta M$ e uso foi feito da propriedade $\text{Det}M^{-1} = \frac{1}{\text{Det}M}$. Usando a série de potências que define a exponencial de um operador e preservando apenas termos de primeira ordem, concluímos que argumento do determinante pode ser identificado com e^X . O uso da conhecida relação $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$ †, em que $\text{Tr}(A)$ denota o traço de A , permite escrever (2.24) na forma

$$\delta[\ln(\text{Det}M(\xi))] = \text{Tr}(X), \quad (2.25)$$

donde $\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\lambda\rho}\delta g_{\lambda\rho}$, ou

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

em que (2.22) foi usada. Juntando todos os resultados obtidos, somos levados a

$$\frac{1}{16\pi G} \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \frac{16\pi G}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \right) = 0. \quad (2.27)$$

†No caso de uma matriz simétrica e real, essa relação pode ser provada facilmente se diagonalizarmos A (e, portanto, sua exponencial) e usarmos o fato de que o determinante de uma matriz diagonal é o produto de seus elementos não nulos.

Definindo o *tensor de Einstein* $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, encontramos as equações de campo procuradas

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

em que

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.29)$$

é o *tensor energia-momento* da teoria. Note-se que essa definição é dependente da assinatura métrica. A troca de assinatura implica uma inversão de sinais nos outros termos dessa equação, e precisaremos multiplicar a expressão por (-1) . A forma apropriada de definir $T_{\mu\nu}$ nesse caso será $T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$.

Na equação (2.28), o lado esquerdo é puramente geométrico, enquanto o lado direito serve como fonte dessa geometria, mostrando que não apenas a massa, mas também outras quantidades como o momento, deformam o espaço-tempo. O significado do tensor de energia-momento e de suas componentes particulares será investigado a seguir.

2.3 Tensor de energia-momento

Nesta seção, estudaremos uma quantidade que será extremamente importante em nossos estudos: o tensor de energia-momento. No espaço-tempo plano, essa quantidade pode ser definida por meio do célebre teorema de Noether. Esse teorema, que é um resultado fundamental para a física moderna, foi proposto em 1918 pela matemática alemã Emmy Noether [137] e nos revela que cada simetria diferenciável de um sistema físico corresponde a uma lei de conservação. Assim, dada uma simetria contínua e suave, existirá sempre uma corrente conservada, denominada *corrente de Noether*, que satisfaz uma relação da forma $\partial_\mu J^\mu = 0$. A integral de J^0 , em particular, é chamada de *carga de Noether*, e é uma quantidade conservada durante todo o movimento.

O Tensor de Energia-momento é a corrente de Noether associada à invariância da ação de um sistema físico por uma transformação da forma

$$(x^\mu, \varphi_a) \mapsto (x^\mu + \varepsilon^\mu, \varphi_a), \quad (2.30)$$

em que o índice a rotula os campos da teoria, independentemente de sua natureza (escalar, de calibre, etc). O parâmetro ε^μ na Eq. (2.30) é arbitrariamente pequeno, caracterizando uma transformação infinitesimal. Isso não constitui perda de generalidade, pois uma translação finita pode ser construída por meio da composição de translações infinitesimais. Note que essa transformação não afeta os campos da teoria. A ação será invariante sob (2.30) se a lagrangiana não tiver dependência explícita de nenhuma das coordenadas x^μ . Então deve valer $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0$, donde

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} = \sum_a \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_a)} \partial_\mu \partial_\nu \varphi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \partial_\mu \varphi_a \right\}. \quad (2.31)$$

Inserindo em (2.31) as equações de Euler-Lagrange e usando a definição de derivada total, somos levados a

$$\frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_a)} \partial_\mu \varphi_a - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \right) = 0, \quad (2.32)$$

que pode ser escrita na forma

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0, \quad (2.33)$$

onde

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_a)} \partial^\mu \varphi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.34)$$

é o *tensor energia-momento canônico*. Devemos impor que as componentes Θ^{0j} , correspondentes à densidade de momento linear, tendam a zero no infinito. Sem essa condição, permitiríamos configurações com momento infinito (e conseqüentemente, pela relação $E^2 = P^2 + c^2$, energia infinita). Integrando a equação (2.33) com essa hipótese, somos levados à lei de conservação do quadrimomento

$$\frac{dP^\nu}{dt} = 0, \quad (2.35)$$

onde identificamos as cargas de Noether

$$P^\nu \equiv \int \Theta^{0\nu} d^3x, \quad (2.36)$$

que compõem o quadrimomento do sistema[†]. Por essa definição, vemos que as componentes $\Theta^{0\nu}$ do tensor de energia-momento podem ser identificadas com a densidade de energia ($\nu = 0$) e momento linear ($\nu = i$). Cada uma das componentes Θ_{jk} representa o fluxo de momento da direção x^j que atravessa um elemento de superfície perpendicular à direção definida por x^k em uma unidade de tempo [138]. Juntas, essas componentes compõem o negativo do tensor de estresse do sistema. Um caso importante acontece quando o estresse é isotrópico. Nesse caso, as componentes diagonais Θ_{kk} nos dão a *pressão* ao longo direção k . Essa quantidade será particularmente importante para nós em conexão com as equações de Bogomol'nyi que estudaremos na Seção 2.6, uma vez que sua nulidade representa a ausência de pressão das forças internas no sistema, condição que frequentemente leva à emergência de soluções que satisfazem essas equações.

Embora o teorema de Noether leve naturalmente a (2.34), esta não é a única escolha consistente com a conservação de P^ν . Com efeito, é possível mostrar que essa lei de conservação é preservada mediante a adição de uma quantidade da forma $\partial_\alpha \Lambda^{\alpha\mu\nu}$, desde que valha $\Lambda^{\alpha\mu\nu} = -\Lambda^{\alpha\nu\mu}$ [138]. Essa liberdade extra na definição do tensor de energia-momento se mostra importante em diversas situações. Por exemplo, argumentos físicos impõem a esse tensor propriedades como simetria nos índices de Lorentz e invariância sob transformações de calibre. A quantidade encontrada por (2.34) nem sempre satisfaz esses requerimentos, e precisará, nesses casos, ser modificado para que o tensor de energia-momento possa ser interpretado fisicamente. Uma alternativa bem conhecida e que garante a simetria nos índices é o tensor de Belinfante [139], que pode ser construído tomando (2.34) como ponto de partida.

Neste trabalho, o tensor de energia-momento será definido por (2.29). Essa definição faz sentido mesmo no espaço-plano (caso em que a variação $\delta g^{\mu\nu}$ é tomada em torno da métrica de Minkowski), e é possível mostrar que ela também leva à lei de conservação (2.33) nesse caso. Como a métrica é simétrica por definição, qualquer derivada funcional com respeito a ela também será. Além disso, o tensor de energia-momento calculado por esse método será invariante por transformações de calibre se a densidade lagrangiana o for, o que é fundamental em teorias de gauge, uma vez que apenas quantidades invariantes sob essas transformações são mensuráveis.

Note-se que as identidades de Bianchi implicam na relação $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ para o tensor de Einstein, de modo que $T^{\mu\nu}$ é *covariantemente* conservado, isto é,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.37)$$

[†]Embora o símbolo ∂_μ tenha sido usado, as equações (2.32) e (2.35) mostram que essa derivada é total. Esse é um pequeno abuso de notação, mas a expressão (2.33), escrita nessa forma, já está enraizada na literatura de física.

A expressão acima é a generalização natural de (2.33) no contexto da Relatividade Geral. É sempre possível escolher um sistema de coordenadas tal que $\nabla_\mu = \partial_\mu$ em uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto arbitrário do espaço-tempo. Entretanto, é impossível escolher um sistema de coordenadas tal que (2.33) seja válida globalmente, portanto uma equação da forma (2.35) não pode ser deduzida. Isso reflete as dificuldades encontradas na definição do tensor de energia-momento na Relatividade Geral, um problema amplamente debatido desde a época de Einstein [140]. Landau e Lifshitz conseguiram contornar esse problema introduzindo um pseudotensor $t^{\mu\nu}$ que leva em conta a energia e momento da própria gravidade. Assim, é possível mostrar que a quantidade $T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$ corresponde, de fato, a uma corrente conservada com uma equação da forma (2.33), de modo que o quadrimomento total do sistema matéria e gravidade é conservado [138].

Há, entretanto, algumas perguntas que surgem naturalmente da discussão acima: como generalizar o teorema de Noether (e a dedução de (2.34)) para o contexto da Relatividade Geral? Em que situações e em que sentido é possível dizer que a corrente definida a partir de $T^{\mu\nu}$ é conservada? Para responder essas perguntas, precisaremos entender como simetrias se manifestam em espaços curvos. Estamos particularmente interessados em uma classe importante de simetrias, as chamadas *isometrias*, que são transformações sob as quais a forma do tensor métrico é invariante. Isso significa que uma isometria possui a importante característica de preservar distâncias na variedade. Essa propriedade é importante para o estudo de leis de conservação. As transformações (2.30), por exemplo, são isometrias, uma vez que o elemento de linha $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ fica claramente inalterado.

Como é frequentemente o caso em investigações sobre simetria, o estudo de isometrias se torna mais fácil se considerarmos os geradores infinitesimais de simetria. Uma isometria infinitesimal é gerada por um *vetor de Killing* [141], que satisfaz a *equação de Killing*, da forma $L_K g_{\mu\nu} = 0$, onde L_K denota a *derivada de Lie* na direção do vetor K . Essa derivada nos dá a variação de um campo tensorial ao longo do fluxo gerado pelo vetor K , de modo que a equação de Killing está de acordo com a noção intuitiva de “preservação de distâncias” à qual nos referimos acima. Explicitamente a equação de Killing se escreve [141]

$$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0. \quad (2.38)$$

Mostrar que um vetor resolve a equação acima será suficiente para determinar que ele gera uma isometria. Nos espaços-tempo assintoticamente planos que consideraremos, haverá sempre um vetor de Killing do tipo tempo [†]. Nesse caso, podemos definir uma corrente

$$J^\mu = K^\nu T^\mu_\nu. \quad (2.39)$$

Ao tomar a divergência covariante de J^μ , somos conduzidos a

$$\nabla_\mu J^\mu = (\nabla_\mu K^\nu) T^\mu_\nu + K^\nu (\nabla_\mu T^{\mu\lambda}) g_{\lambda\nu}, \quad (2.40)$$

em que no último termo foi usada a compatibilidade métrica. A equação de Killing implica que $\nabla_\mu K^\nu$ é um tensor antissimétrico. Logo, o primeiro termo de (2.40) é nulo por ser a contração de tensor antissimétrico com um tensor simétrico. Por outro lado, o segundo termo nessa equação também é nulo devido a (2.37), donde

$$\nabla_\mu J^\mu = 0. \quad (2.41)$$

[†] Isso significa que $g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu$ é positivo caso a assinatura seja $(+, -, -, \dots)$ ou negativo caso a assinatura escolhida seja $(-, +, +, \dots)$. Reciprocamente, um vetor é dito tipo espaço se os sinais mencionados na sentença anterior forem invertidos. Finalmente, o vetor é tipo luz quando sua norma é igual a zero.

Ora seja Σ uma hipersuperfície tipo espaço, o que significa que os vetores tangentes em todos os seus pontos são tipo espaço. Podemos usar a Eq. (2.41) para definir a energia conservada sobre Σ [134]:

$$E = \int_{\Sigma} d^D x \sqrt{\gamma} J^{\mu} n_{\mu}, \quad (2.42)$$

onde n_{μ} é o vetor normal a Σ e γ é a métrica induzida na hipersuperfície pela inserção no espaço-tempo.

Embora a expressão (2.29) seja a definição geral que usaremos para o tensor de energia-momento, é conveniente encontrar uma expressão em termos da densidade lagrangiana, visto que todos os sistemas com os quais trabalharemos possuem uma representação em termos dessa densidade. Para isso, assumimos que o acoplamento entre matéria e gravidade se dá apenas por meio de expressões envolvendo a métrica, sem incluir suas derivadas. Esse será o caso das lagrangianas envolvendo apenas campos escalares ou de calibre em espaços curvos, as quais podem ser obtidas por meio da prescrição $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ $\partial_{\mu} \rightarrow \nabla_{\mu}$. Essa substituição é usada para obter uma teoria válida no espaço curvo a partir de uma já conhecida no espaço plano, e caracteriza o *acoplamento mínimo* gravitacional. Usando essa hipótese e o resultado já encontrado em (2.26) para $\delta(\sqrt{-g})$, podemos calcular facilmente a derivada funcional que define o tensor de energia-momento. Entretanto, convém notar que ao longo deste trabalho adotaremos duas convenções distintas para a assinatura métrica. Nos capítulos 3 e 4 adotaremos uma assinatura na qual as componentes espaciais da métrica de Minkowski tem sinal negativo e a componente temporal tem sinal positivo. Por outro lado, nos capítulos 5 e 6 adotaremos a convenção oposta, com sinais trocados, a mesma adotada na Seção 2.2. Como mencionamos no fim da seção passada, essa troca de assinatura causa uma mudança de sinal em (2.29), de modo que temos duas fórmulas possíveis para essa quantidade:

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (\text{Assinatura } (+, -, - \dots)), \quad (2.43)$$

$$\text{e } T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (\text{Assinatura } (-, +, + \dots)), \quad (2.44)$$

que serão as equações que usaremos toda vez que precisarmos do tensor de energia-momento em nossas investigações.

2.4 Defeitos e invariantes topológicos

Sistemas físicos tendem a “preferir” configurações que minimizam sua energia total. Essa característica é decorrente da Segunda Lei da Termodinâmica. Com efeito, para uma dada entropia, o estado termodinamicamente favorável é aquele que minimiza a energia interna do sistema [142]. Exemplos desse tipo de minimização são encontrados nas mais diversas áreas. Um arranjo molecular cuja geometria não é a energeticamente mais favorável, por exemplo, liberará a energia excedente para que os átomos se reorganizem na configuração de menor energia. Outro exemplo é constituído por um sistema termodinâmico que muda de estado a temperatura constante, o qual escolherá sempre o estado que minimiza sua energia livre de Helmholtz [142].

Há, entretanto, situações nas quais a minimização da energia está sujeita a vínculos impostos pela topologia. Nesses casos, as condições de contorno são incompatíveis com a solução que possui a menor energia possível, na qual a configuração não poderá ser continuamente deformada. Em outras palavras, o estado de vácuo do sistema não será acessível aos campos por meio

deformações contínuas, que são as únicas que podem decorrer das equações de Euler-Lagrange. As configurações estáveis ainda minimizam a energia, mas essa minimização será no sentido de encontrar a menor energia compatível com os vínculos topológicos, a qual é necessariamente superior à energia da solução de vácuo. Essas soluções estáveis topologicamente distintas do vácuo são os defeitos topológicos, já mencionados na Introdução.

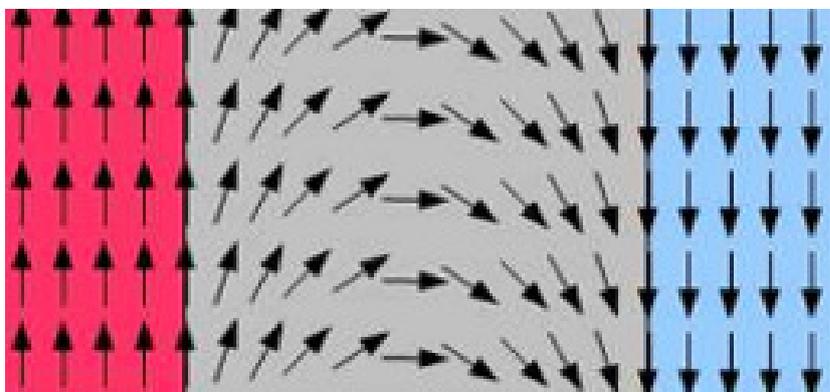


Figura 2.1 Parede de domínio magnética de Néel. As setas representam a direção da magnetização em cada ponto. Recorte da imagem de autoria de Ndtthe, compartilhada nos termos da licença CC BY 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by/3.0>), via Wikimedia Commons.

A maneira como defeitos topológicos aparecem em teorias com quebra espontânea de simetria pode ser ilustrada tomando o exemplo da parede de domínio, que pode ser vista na Figura 2.1. Esse tipo de defeito aparece quando há quebra espontânea de simetria em materiais ferromagnéticos, quantificada pelos valores da magnetização (\mathbf{M}), que atua como um parâmetro de ordem do sistema e cuja direção está representada pelas setas na Figura 2.1. No estado simétrico, a magnetização pode ter qualquer direção, e por conseguinte varia aleatoriamente ao longo do material, resultando em um valor médio $\mathbf{M} = 0$. A mudança de certos parâmetros termodinâmicos, como a temperatura, faz com que as propriedades magnéticas desses materiais mudem, e o estado de vácuo passa a ser caracterizado por uma magnetização uniforme, mas não nula. Isso significa que uma simetria foi quebrada, pois há agora uma direção espacial (aquela definida pela magnetização) que é diferente das outras. Entretanto, esse sistema possui mais de um estado de vácuo. Um sistema em que todas as setas da figura apontam para cima representa um mínimo da energia interna, e um sistema no qual todas elas apontam para baixo, também. As duas possibilidades são igualmente favoráveis do ponto de vista energético. Quando o sistema muda de fase durante a quebra de simetria, o vácuo é escolhido aleatoriamente. O estado de menor energia será obtido se essa escolha for a mesma para todo o material. Entretanto, a situação vista na Figura 2.1 é diferente. Nela, temos duas regiões, ou domínios, representados pelas cores vermelha e azul. No centro do sistema esses domínios (que consideramos infinitos) se encontram, e deve haver uma transição. Magnetizações opostas na vizinhança dessa região geram uma interação, que por sua vez afeta a direção de magnetização na interface, gerando uma estrutura localizada (a parede de domínio propriamente dita) nessa área de transição. Se essa mudança fosse súbita (esse seria o caso em que metade da figura teria apenas setas pra cima e a outra metade, apenas setas pra baixo), a tensão na região de transição seria extremamente alta. Então é energeticamente mais vantajoso que essa mudança ocorra gradualmente, o que significa que as setas na Figura 2.1 vão sendo rotacionadas à medida que nos aproximamos do centro. A parede de domínio possui energia maior do que a da configuração de vácuo, mas não pode ser eliminada. Se tentarmos ajustar a direção de magnetização na região do defeito,

deformando, por exemplo, uma seta horizontal para a direção vertical, essa mudança modificará a interação com as setas vizinhas, que também giram para tentar minimizar a energia de interação. Apenas conseguiremos mudar a posição da parede, que não desaparecerá, visto que os dois domínios que a originaram não podem ser removidos facilmente. Note como esse argumento é semelhante ao usado no capítulo anterior para argumentar a impossibilidade de remoção do defeito causado pelo torção de parafusos no sistema sine-Gordon. Com efeito, paredes de domínio podem ser vistas como kinks inseridos em espaços de dimensão superior.

Mas o que faz emergir uma estrutura topologicamente não trivial como a parede de domínio? Porque o sistema, após a quebra de simetria, vai para um estado com energia maior do que o vácuo em alguns casos? Uma resposta para essa pergunta, aplicável em muitos casos importantes, é encontrada no mecanismo de Kibble-Zurek [80, 136]. Nas situações para as quais esse mecanismo se aplica, esses defeitos podem ser atribuídos à existência de domínios não causalmente conectados durante a quebra de simetria. Como a velocidade da luz é finita, qualquer sistema terá regiões que não se comunicam entre si em um intervalo de tempo suficientemente curto. Então, se a transição ocorre mais rapidamente do que uma certa escala de tempo típica de cada sistema, haverá uma distância característica até a qual a mudança no parâmetro de ordem está correlacionada. Um sistema suficientemente grande terá mais de um domínio, com escolhas de vácuo independentes entre si. Caso o parâmetro de ordem varie de forma descontínua entre os domínios (como é o caso nos domínios vistos na Figura 2.1), uma região de transição deverá se formar entre eles, dando origem a um defeito topológico chamado de parede de domínio, ou domain wall [143]. A natureza do defeito topológico em questão dependerá da simetria do sistema. Em uma teoria de calibre abeliana, por exemplo, esse mecanismo pode gerar uma descontinuidade na fase do campo escalar complexo da teoria, o qual serve como um parâmetro de ordem, o que gera singularidades no espaço interno, que originam vórtices.

Para colocarmos os defeitos topológicos em um patamar teórico um pouco mais sólido, precisaremos introduzir alguns conceitos básicos de topologia. Essa parte da matemática estuda as características de um espaço que são preservadas mediante a deformações contínuas. Tais propriedades não são alteradas se esticarmos, encolhermos ou mudarmos a forma de um objeto, ao passo que operações como cortes, cola e transformações descontínuas são proibidas. Não podemos, por exemplo, criar ou remover um buraco ou um nó por uma deformação contínua, nem podemos transformar uma linha em um círculo fechado, ou vice-versa. Fisicamente, características preservadas pela topologia são conservadas dinamicamente, uma vez que o operador de evolução temporal gera deformações contínuas no sistema. A topologia é uma área complexa e extensa da matemática, e esta seção não tem a pretensão de servir como uma introdução adequada ao tema. Objetivamos apenas introduzir aqueles conceitos que serão essenciais aos assuntos que discutiremos ao longo do texto. Para isso, precisamos primeiramente estabelecer a definição de homotopia [144]:

Definição 2.4.1. Duas funções $f, g : X \rightarrow Y$ são homotópicas se, e somente se, existe uma família contínua de funções $f_t : X \rightarrow Y$ (denominada homotopia) com $t \in [0, 1]$, tal que $f_0 = f, f_1 = g$.

É claro que a escolha do intervalo $[0, 1]$ na definição acima é arbitrária, visto que qualquer intervalo fechado $[a, b]$ na reta real é isomórfico a $[0, 1]$. As deformações contínuas às quais nos referimos anteriormente são homotopias. Funções que estão relacionadas por homotopia pertencem a uma mesma classe de equivalência, e são ditas *topologicamente equivalentes* ou simplesmente *homotópicas*. O conjunto dessas classes de equivalência, com a operação de composição de funções, forma os grupos de homotopia [145]. Sob o prisma da topologia, duas soluções homotópicas são completamente equivalentes. Isso indica que a topologia por si só

não nos fornecerá toda a informação sobre as soluções, visto que configurações que podem ser deformadas uma na outra não são necessariamente iguais fisicamente. Por exemplo, um sistema contendo um kink e um antikink simultaneamente é topologicamente equivalente à solução de vácuo, mas sua energia e dinâmica é completamente distinta. Entretanto, a topologia nos indica, por exemplo, que um sistema envolvendo um único kink ou dois antikinks e um kink não poderia decair no vácuo (por não existir homotopia entre esses sistemas e a solução de vácuo). O sistema kink + antikink que citamos anteriormente, por outro lado, é homotopicamente equivalente à solução de vácuo, e é de fato possível que esses defeitos se aniquilem, liberando a energia excedente e deixando, em seu lugar, a configuração de vácuo. Note que a existência de uma homotopia é condição necessária, mas não suficiente, para que uma dada deformação ocorra. A aniquilação que mencionamos acima, por exemplo, dependerá do potencial que descreve o modelo, bem como dos parâmetros que descrevem o espalhamento desses defeitos.

Um ponto central em investigações de defeitos é a existência de invariantes topológicos, que frequentemente podem ser identificados com cargas. Diferentemente das cargas de Noether, cuja conservação é consequência da invariância do sistema sob transformações de simetria diferenciáveis, as cargas topológicas existem simplesmente porque as condições de contorno do sistema induzem uma topologia não trivial, e sua conservação se deve ao fato de que a evolução temporal, por ser uma deformação contínua, não pode mudar a topologia. Podemos definir a carga topológica da solução representada na Figura 2.1 pela diferença entre os valores dos campos nos dois extremos. Se associarmos a orientação da magnetização a um campo escalar, podemos atribuir os valores $\phi = \mp\pi$ para as setas que apontam para cima e para baixo, respectivamente, de modo que a carga topológica será 2π , dada pela subtração dos valores assintóticos relativos à direita e à esquerda da figura. Se todas as setas apontassem para a mesma direção, a carga topológica assim definida seria nula. É evidente que há um certo grau de arbitrariedade nessa definição. Poderíamos, por exemplo, redefinir a carga por meio de uma multiplicação por constante não nula ou uma função contínua da carga previamente definida. O importante para os nossos objetivos é que a carga topológica de duas soluções deve ser igual somente quando existir uma homotopia que as relacione.

Como foi visto anteriormente, e exemplificado para o caso das paredes de domínio, a topologia em defeitos topológicos é induzida pelas condições de contorno às quais as equações de Euler-Lagrange são submetidas. Mais precisamente, defeitos topológicos emergem quando os mapas

$$\partial\Sigma \rightarrow \mathcal{V} \quad (2.45)$$

são topologicamente não triviais. Na relação acima, $\partial\Sigma$ é uma hipersuperfície compacta[†] representando a fronteira do domínio de nosso problema, e \mathcal{V} é a *variedade de vácuo* do sistema, definida por todas as soluções de vácuo da teoria. A presença de defeitos topológicos está frequentemente associada a uma quebra espontânea da simetria representada por um grupo G para aquela dada pelo subgrupo $H \subset G$. Nesse caso, os elementos de \mathcal{V} que diferem entre si apenas pela ação de H são equivalentes. A variedade de vácuo é, então, isomórfica a G/H [36], onde o quociente identifica os elementos relacionados pela ação de H .

Quando tratamos de um espaço plano, o domínio considerado é a união entre \mathbb{R}^D e um ponto no infinito, o qual deve ser adicionado porque as condições de contorno nesses problemas são tomadas no infinito. Nesse caso, a superfície $\partial\Sigma$ é equivalente a uma esfera de raio infinito[‡], e

[†]Um espaço topológico é compacto se e somente se toda cobertura do espaço possui uma subcobertura finita [146]. Para um subespaço de um espaço euclidiano, esse requerimento é equivalente a exigir que o subespaço seja fechado e limitado.

[‡]Note que para um espaço euclidiano essa equivalência *não* vale, uma vez que esse espaço não é compacto. É apenas a adição de um ponto no infinito que permite essa identificação.

temos mapas da forma

$$S_{D-1}^{\infty} \rightarrow \mathcal{V}. \quad (2.46)$$

O raio da circunferência não é invariante por deformações contínuas, e portanto não altera os grupos de homotopia, de modo que, topologicamente, a superfície é simplesmente a n -esfera unitária S_{D-1} . Podemos extrair bastante informação a respeito de nossas soluções explorando os mapas entre n -esferas e a variedade de vácuo do sistema. Em particular, os grupos de homotopia relativos a mapas entre uma n -esfera e uma m -esfera são denotados por $\pi_n(S_m)$, e terão papel importante em nossas investigações, uma vez que a variedade de vácuo em defeitos topológicos frequentemente terá a forma de uma m -esfera ou produtos desses objetos geométricos. Há uma extensa literatura sobre esses grupos, com vários resultados importantes que podemos usar a nosso favor. Assumindo $n, m > 0$, destacamos em particular as propriedades [147]:

$$\pi_n(S_m) = 0, \quad \text{se } (n < m) \quad (2.47)$$

$$\pi_n(S_m) = \mathbb{Z}, \quad \text{se } (n = m), \quad (2.48)$$

em que “0” representa o grupo trivial, e a igualdade é no sentido de isomorfismo. Assim, quando tivermos uma variedade de vácuo topologicamente equivalente a S_{D-1}^{∞} , os mapas (2.46) terão um grupo de homotopia equivalente a \mathbb{Z} , o que nos permitirá identificar a carga topológica com um número inteiro. Para vórtices abelianos e monopolos $SU(2)$ (respectivamente $m = 2$ e $m = 3$), esse será o único grupo de homotopia não trivial, o que mostra que essas são as únicas cargas topológicas possíveis (a menos de redefinições triviais, que implicam em uma carga equivalente). Em particular, o fato de que $\pi_1(S_2) = 0$ (que significa que laços em uma esfera sempre podem ser contraídos a um ponto) é parte fundamental do raciocínio que levaria ’t Hooft a recorrer a grupos não abelianos na busca por monopolos [114]. Por outro lado, grupos maiores que $SU(2)$ levam a variedades de vácuo maiores devido à maior complexidade da quebra espontânea de simetria. Na referência [148] foi demonstrado que isso possibilita o surgimento de diversas cargas no sistema. Esses exemplos ilustram a forma como o conhecimento de topologia pode ser útil para guiar a criação de novos modelos, e auxiliar no entendimento dos que já existem.

Uma outra propriedade que será relevante para nossas investigações é [147]

$$\pi_n((S_n)^p) = \mathbb{Z}^p, \quad (2.49)$$

em que a potência representa um produto da forma $G \times \dots \times G$, com p fatores do grupo G . Portanto, se a variedade de vácuo do sistema tiver a topologia de S_m^N (como será o caso dos vórtices e monopolos de simetria aumentada que estudaremos mais adiante), será necessária a especificação de N cargas topológicas para a classificação das soluções dessa teoria.

2.5 Estabilidade linear

Ao resolvermos as equações de Lagrange (2.6), encontraremos configurações de campo que são possíveis no sistema modelado pela respectiva lagrangiana. Entretanto, embora todas essas soluções sejam estados acessíveis aos campos, o mero fato de elas satisfazerem as equações de campo não nos dá garantia de que uma dada solução permanecerá observável por um tempo considerável. Essa situação é análoga ao que acontece na mecânica, onde podemos ter, por exemplo, uma bola localizada no topo de uma montanha (máximo do potencial), a qual rolará ladeira abaixo depois de uma pequena perturbação, até parar em uma posição mais estável [149]. Se temos, por exemplo, um defeito estático como o kink da Figura 1.3, o qual sofre uma pequena

perturbação externa (à qual qualquer sistema físico realista está sujeito), podemos nos perguntar se ele se deformará de algum modo, se mudará permanentemente sua forma ou até mesmo se ele sofrerá decaimento numa solução que possui menor energia. Em outras palavras, é necessária a averiguação da *estabilidade* das soluções encontradas. Em particular, estaremos interessados na estabilidade *linear*, que consiste em submeter os campos a uma pequena perturbação de forma arbitrária e analisar o comportamento subsequente dos campos. Essa estratégia é equivalente a linearizar as equações de Lagrange do sistema, o que explica a alcunha “linear”. Deve-se notar que essa não é a forma mais geral de estabilidade, uma vez que perturbações maiores ou mesmo interferências de origem quântica (que não podem ser examinadas sob o prisma clássico ao qual esta tese se limita) também têm um papel no estudo de estabilidade.

Nossa análise consistirá em submeter os campos da teoria a uma pequena perturbação $\eta = (\eta_1(t, \mathbf{x}), \dots, \eta_N(t, \mathbf{x}))$ no nível da ação, e assim seremos capazes de derivar as equações de estabilidade dessa teoria. Esse procedimento é válido (com adaptações evidentes como a mudança de lagrangiana e nos campos envolvidos) para qualquer uma das soluções analisadas neste trabalho, mas, visando maior clareza, iremos exemplificá-lo usando o caso mais simples de um sistema de campos escalares. A lagrangiana canônica para tais sistemas é da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a - V(\phi_1, \dots, \phi_N), \quad (2.50)$$

em que está pressuposta a soma sob o índice a que enumera os campos, ainda que ele não seja um índice de Lorentz. Aplicando a esse modelo o princípio variacional, encontramos o seguinte sistema de N equações diferenciais de segunda ordem:

$$\square \phi_a + V_{\phi_a} = 0, \quad (2.51)$$

em que $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ é o chamado operador d'Alembertiano. Como dissemos acima, submetemos uma dada solução de (2.51) à transformação $\phi_a \rightarrow \phi_a + \eta_a$. Substituindo o resultado dessa operação na ação da teoria e mantendo termos até a segunda ordem em η , obtemos

$$\begin{aligned} S &= \int d^n x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta_a \partial^\mu \eta_a + \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a + 2 \partial_\mu \eta_a \partial^\mu \phi_a) - [V + V_{\phi_a} \eta_a + U_{ab} \eta_a \eta_b] \right\} \\ &= S_0 + \int d^n x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta_a \partial^\mu \eta_a + 2 \partial_\mu \eta_a \partial^\mu \phi_a) - [V_{\phi_a} \eta_a + U_{ab} \eta_a \eta_b] \right\}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

em que

$$U_{ab} \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\phi_j = \phi_j} \quad (2.53)$$

é a matriz hessiana do potencial e $S_0 \equiv \int d^n x \mathcal{L}$ é simplesmente a integral da lagrangiana não perturbada que agrupa, portanto, todos os termos independentes de η_a . Realizando uma integração por partes em (2.52), somos conduzidos à ação

$$S = S_0 + \int d^n x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \eta_a \partial^\mu \eta_a + U_{ab}(\phi_1, \dots, \phi_N) \eta_a \eta_b - (\square \phi_a + V_{\phi_a}) \eta_a \right]. \quad (2.54)$$

Para encontrar a equação que governa o estudo de estabilidade linear, precisamos extremizar o funcional acima com relação às variações $\delta \eta_a$ e $\delta \phi_a$, uma vez que essas quantidades são em princípio independentes. Ora, sabemos que os ϕ_a são soluções de (2.51) por hipótese, de modo que δS_0 é identicamente nulo, e não contribui para as equações que procuramos. Por outro

lado, a imposição da equação (2.51) faz com que o termo linear em (2.54) se anule. Efetuando a variação dos termos restantes e impondo que a ação seja estacionária encontramos, finalmente,

$$(\square + U_{ab})\eta_a = 0, \quad (2.55)$$

que são as equações de estabilidade procuradas. Note-se a quantidade entre parênteses em (2.55) é um operador linear, como deveria ser o caso na análise de estabilidade linear. Isso torna a resolução desse sistema um problema muito mais tratável do que o gerado pelas equações não lineares com as quais nos deparamos na maior parte deste trabalho. Com efeito, a análise agora se reduz à diagonalização desse operador, que nos dará os modos de perturbação acessíveis e os autovalores correspondentes. Na maior parte deste trabalho, estaremos interessados em soluções independentes do tempo. Nessas condições, a equação (2.55) toma a forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\eta_a + U_{ab}(\mathbf{x})\eta_a = 0, \quad (2.56)$$

em que U_{ab} é agora uma função apenas das coordenadas e $\nabla^2 = \partial_k \partial_k$ é o operador Laplaciano. Podemos utilizar o método de separação de variáveis para obter soluções separadas que formam uma base completa de funções. Por meio desse procedimento, podemos escrever [150]

$$\eta_a = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_a^n(\mathbf{x}) \cos(\omega_n t), \quad (2.57)$$

onde “ n ” é um índice do somatório, e não uma potência. η_a^n e ω_n satisfazem

$$H_{ab}\eta_a^n = \omega_n^2 \eta_b^n, \quad (2.58)$$

com

$$H_{ab} \equiv -\delta_{ab} \nabla^2 + U_{ab}(\mathbf{x}). \quad (2.59)$$

O operador (2.59) tem precisamente a forma de um hamiltoniano quântico para uma partícula em D dimensões espaciais. A equação (2.58) tem, portanto, exatamente a mesma forma que a bem conhecida equação de Schrödinger independente do tempo para essa partícula, com um potencial $U_{ab}(\mathbf{x})$. Soluções estáveis implicam em um problema quântico no qual o hamiltoniano é positivo, visto que essa é a única forma de garantir que todos os ω_n em (2.57) sejam constantes reais. Se essa condição for violada, então existe algum n para o qual ω_n é imaginário, o que implica $\cos(\omega_n t) = \cosh(|\omega_n|t)$, que não é uma função limitada. De fato, ela crescerá exponencialmente com o tempo. O caso em que o autovalor tem valor nulo é especial. Quando isso ocorre, o estado perturbado é energeticamente equivalente ao original: não é necessário gastar energia para passar de um estado a outro, mas não há, também vantagem energética em realizar tal transformação. Chamaremos esse estado de *metaestável* em geral.

A semelhança formal entre o problema de autovalor da Mecânica Quântica e (2.58) nos permite usar a nosso favor o amplo corpo de trabalho desenvolvido ao longo dos anos para a mecânica quântica. Em alguns casos, como o modelo ϕ^4 , por exemplo, o potencial de estabilidade que encontraremos nos levará a um problema que já foi resolvido no contexto quântico, e poderemos fazer uso de suas soluções sem precisarmos resolver novamente essas equações diferenciais. Além disso, poderemos fazer uso dos teoremas encontrados em livros de mecânica quântica para facilitar o nosso trabalho. No caso unidimensional, por exemplo, há o importante *teorema de oscilação*, que vale para estados ligados, caracterizados pela discretização das energias permitidas. Segundo esse teorema, a função de onda correspondente ao autovalor n -ésimo

autovalor possui exatamente n zeros, ou nós. Para que esse teorema faça sentido, devemos ordenar os autoestados em (2.57) de acordo com os autovalores, de modo que o estado fundamental (o de menor autovalor) seja o primeiro da soma (i.e., ω_0). Pelo teorema de oscilação, o estado fundamental não possui nenhum nó. Para provar estabilidade é suficiente mostrar que o estado fundamental (que em uma dimensão é não degenerado [151]) possui autovalor maior ou igual a zero.

De fato, ao menos um estado com autovalor nulo (isto é, um modo zero), existirá para uma lagrangiana da forma (2.50) para $N = 1$. Esse modo zero é o *modo de translação* [152], e é obtido se considerarmos a transformação infinitesimal $x \rightarrow x + \varepsilon$. Expandindo em série de Taylor na vizinhança de x , obtemos, em primeira ordem, $\phi(x + \varepsilon) = \phi(x) + \varepsilon\phi'(x)$. Essa é exatamente uma expansão da forma (2.57) com autovalor zero e com autoestado igual à derivada do campo escalar. Podemos ainda encontrar esse resultado explicitamente derivando a equação de Euler-Lagrange do sistema para encontrar a expressão

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2V}{d\phi^2}\right) \frac{d\phi}{dx} = 0, \quad (2.60)$$

que tem precisamente a forma da equação (2.58) para um autoestado $\frac{d\phi}{dx}$ de autovalor nulo. Ora, como vimos no Capítulo 1, o kink de sine-Gordon (assim como o respectivo antikink) é uma função monótona, o que ocorre de modo geral em defeitos tipo kink, ao menos na ausência de impurezas. Isso significa que a derivada dessa solução (que, como acabamos de mostrar, é um modo zero da teoria) jamais muda de sinal e, portanto, não tem zeros. Pelo teorema de oscilação, o modo zero relativo a essa solução é então o estado fundamental da teoria. Como o estado fundamental é não degenerado na mecânica quântica unidimensional, sabemos ainda que este é o único modo zero possível. Assim, podemos dizer que o kink é estável. Como dissemos antes, é possível deformar a solução por meio de um modo zero, mas, nesse caso, essa deformação contínua não implica em mudança na forma da solução: ela é um mero deslocamento da posição do defeito o que equivale a uma mera mudança de coordenadas em um sistema homogêneo e infinito. A distinção entre estabilidade e metaestabilidade se torna, portanto, irrelevante nesse caso específico.

Notado seja que, para sistemas com mais de um campo ou em maior número de dimensões, alguns dos resultados obtidos deixam de valer. Em particular, o teorema de oscilação não é válido em mais de uma dimensão espacial. Para múltiplos campos, também é notável a possibilidade de deslocar os zeros de cada campo independentemente, mudando assim a distância relativa entre eles, o que em geral altera as órbitas no espaço de campos. Assim, no caso de um sistema com dois ou mais campos escalares, teremos em geral modos zero que não correspondem a meras translações do sistema como um todo, dando assim origem a soluções metaestáveis com modos zeros fisicamente distinguíveis, mesmo em sistemas homogêneos. Para defeitos em mais de uma dimensão espacial, ainda será possível realizar a contagem dos modos zero disponíveis em muitos casos, mas isso exigirá técnicas mais avançadas, como veremos nos próximos capítulos. Em geral, para teorias homogêneas, teremos ainda modos zero associados às direções de translação e, em muitos casos (como ocorrerá, no caso de carga topológica unitária, para vórtices, monopolos e dyons), esses serão os únicos modos zero fisicamente significativos (i.e., excluindo modos correspondentes a setores de gauge), de maneira análoga ao que ocorre para os kinks. Entretanto, esses defeitos diferem significativamente dos kinks no fato de que eles podem, em geral, possuir zeros com multiplicidade maior que um. Nesse caso, uma solução de carga topológica $N > 1$ possuirá múltiplos zeros, os quais podem se mover de maneira independente um do outro pelos modos de translação. Todas as soluções conectadas por modos zero possuem a mesma energia, de modo que esses zeros podem se mover pelo espaço sem

gasto energético, dando origem a uma estrutura bastante rica que acomoda infinitas soluções possíveis de mesma energia, e a qual é fundamental em problemas de espalhamento.

2.6 Método de Bogomol'nyi

Em 1976, o físico Evgeny Bogomol'nyi publicou um trabalho seminal sobre a estabilidade de soluções clássicas. Nele, foram examinados alguns defeitos topológicos importantes (os kinks, os vórtices de Maxwell-Higgs e o monopolo de 't Hooft-Polyakov). Foi constatado que, em alguns casos, é possível estabelecer um mínimo para a energia em cada setor topológico. Esse mínimo dá origem a uma desigualdade denominada *vínculo de Bogomol'nyi*, que tem a forma

$$E \geq |F(Q_\tau)|, \quad (2.61)$$

onde $F(Q_\tau)$ é uma função da carga topológica Q_τ . Frequentemente essa relação é de simples proporcionalidade, de modo que $F = CQ_\tau$ para alguma constante C . A energia do sistema será minimizada se existir uma solução tal que o vínculo (2.61) é saturado, isto é $E = |F(Q_\tau)|$. A existência de uma tal solução não é uma propriedade geral dos sistemas que possuem esse vínculo (um exemplo notável de defeito que possui uma desigualdade de Bogomol'nyi que nunca é satisfeita de forma não trivial é o Skymion [14], que é um tipo de defeito topológico originalmente introduzido em [153]). Quando essa minimização é possível, ela é atingida por configurações que satisfazem certas equações, normalmente de primeira ordem, denominadas *equações de Bogomol'nyi*, também frequentemente chamadas de equações BPS. Esse último nome homenageia, além do próprio Bogomol'nyi, os físicos Prasad e Sommerfield, que encontraram a solução BPS de carga unitária para o monopolo de 't Hooft-Polyakov [154]. Bogomol'nyi percebeu que era possível encontrar configurações que saturam as desigualdades acima fazendo um completamento de quadrados no funcional de energia, que resultará em uma expressão da forma

$$E = \int d^D x \sum_a (\mathcal{D}_a^\pm \varphi_a)^2 + |F(Q_\tau)|, \quad (2.62)$$

onde os \mathcal{D}_a^\pm são operadores diferenciais. Esses operadores normalmente aparecem em pares, levando a dois conjuntos de equação (para kinks e antikinks, por exemplo) mas também é possível que apenas parte dos setores da teoria tenham equações de Bogomol'nyi (de fato, veremos que isso acontecerá na presença de impurezas). Para que (2.61) seja saturado, é necessário que os termos quadráticos se anulem, visto que a integral em (2.62) é não negativa. Esse requerimento dá origem a equações da forma

$$\mathcal{D}_a^\pm \varphi_a = 0, \quad (2.63)$$

que devem ser satisfeitas por todas as soluções que saturam o vínculo (2.61). Essas igualdades são denominadas *equações de Bogomol'nyi*, ou simplesmente equações BPS. O fato de elas normalmente serem de primeira ordem é consequência da forma das lagrangianas tipicamente usadas em Teoria de Campos, nas quais derivadas de ordem superiores não aparecem. Em geral, essas equações tendem a aparecer aos pares, representados pelas escolhas \pm na notação dos operadores \mathcal{D}_a^\pm . Nesse caso, os sinais opostos caracterizam defeitos topológicos de cargas opostas, como, por exemplo, o kink e antikink mencionados na Introdução, ou um monopolo e antimonopolo (caracterizados por carga magnética positiva e negativa, respectivamente). Entretanto, é possível que apenas \mathcal{D}_a^+ ou \mathcal{D}_a^- sejam não zero em uma dada teoria. Isso ocorrerá, por exemplo, em teorias com impurezas, onde somente defeitos com carga positiva (ou negativa, dependendo das convenções adotadas na lagrangiana), serão possíveis.

O fato de a desigualdade (2.61) depender explicitamente da carga topológica significa que há um vínculo dessa forma para cada setor topológico. Como Q_τ é uma carga conservada, esses vínculos são independentes entre si, e cada um representa uma condição de minimização para o dado setor. O funcional de energia do sistema atingirá seu mínimo global para as condições de contorno escolhidas se, e somente se, existir uma solução das equação BPS.

Para ilustrar com um exemplo concreto a técnica de completamento de quadrados típica do método de Bogomol'nyi, vamos considerar uma lagrangiana escalar no caso simples de um campo escalar real $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$. Uma vez que estamos considerando potenciais limitados inferiormente, podemos tomar $V = W_\phi^2/2$, onde W é uma função auxiliar inspirada nos superpotenciais encontrados em supersimetria [155]. Para um potencial dessa forma, o funcional de energia do campo escalar se escreve

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{\phi}^2 + \phi'^2 + W_\phi^2) dx, \quad (2.64)$$

em que o ponto e o ' denotam diferenciação com respeito ao tempo e à posição, respectivamente. Completando quadrados na integral acima, encontramos

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \dot{\phi}^2 + (\phi' \mp W_\phi)^2 \pm 2 \frac{dW}{d\phi} \phi' \right\}. \quad (2.65)$$

Usando a regra da cadeia, vemos que a última expressão na integral leva a um termo de superfície. Como os outros dois termos são não negativos, segue que

$$E \geq E_B = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dW}{dx} = |W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))|, \quad (2.66)$$

em que E_B é a energia de Bogomol'nyi do sistema. A igualdade é alcançada se, e somente se,

$$\dot{\phi} = 0, \quad (2.67)$$

$$\phi' = \pm W_\phi, \quad (2.68)$$

que são as equações BPS do problema. Portanto, a saturação do vínculo de Bogomol'nyi do sistema impõe que a solução seja estática. Isso faz sentido, visto que o termo $\frac{1}{2} \int dx \dot{\phi}^2$ corresponde à energia cinética do defeito, e a presença de movimento deve aumentar a energia total em relação ao caso estático. A segunda equação de primeira ordem se torna assim uma equação diferencial ordinária, que pode ser prontamente integrada. Os sinais de mais e menos em (2.67) correspondem, respectivamente, a kinks e antikinks. Por derivação direta, é fácil mostrar que soluções das equações de primeira ordem também satisfazem as de segunda. De fato, as equações de movimento de soluções estáticas podem ser obtidas diretamente da condição $\delta E = 0$ [14], que claramente é satisfeita para uma solução BPS.

Soluções BPS são mínimos globais da energia, e portanto estáveis. De fato, a propriedade BPS é até mais forte que a análise de estabilidade linear, e pode ser usada para provar esse tipo de estabilidade em muitos casos. Com efeito, para soluções estáticas, extremizar o funcional de energia implica em extremizar a ação, visto que $\rho = -\mathcal{L}$. Podemos mostrar que o BPS implica em estabilidade linear de maneira direta se mostrarmos que essa propriedade dá origem a um hamiltoniano positivo definido. Com efeito, as equações de primeira ordem permitem que o hamiltoniano de estabilidade seja escrito na forma

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + W_\phi W_{\phi\phi} + W_{\phi\phi}^2. \quad (2.69)$$

Definindo os operadores

$$S = -\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \quad (2.70)$$

$$S^\dagger = \frac{d}{dx} + W_{\phi\phi}, \quad (2.71)$$

podemos escrever $H = S^\dagger S$, que é uma forma quadrática e, portanto, não negativa. Um argumento parecido é bem conhecido no caso de vórtices, em que a linearização das equações de primeira ordem dá origem a um operador quadrático positivo semidefinido [156] que pode ser usado para provar a estabilidade desses defeitos.

Embora isso possa não parecer óbvio a princípio, e de fato não tenha sido usado por Bogomol'nyi em seu trabalho original, existe uma estreita relação entre o método de Bogomol'nyi e a supersimetria. Em particular, é possível demonstrar que esse vínculo aparece naturalmente em teorias supersimétricas. Isso ocorre porque a carga topológica é uma *carga central* [157], o que significa que ela comuta com todos os geradores da superálgebra relevante para o problema. Para exemplificar a relação entre supersimetria e BPS, vamos considerar uma teoria supersimétrica $\mathcal{N} = 2$ com cargas centrais dadas por escalares correspondentes a integrais de superfície, como ocorrerá nos casos que serão considerados nesta tese. Esse tipo de teoria foi considerado pro Witten em seu trabalho pioneiro sobre o tema [158], embora outras possibilidades, como a supersimetria $\mathcal{N} = 1$, também existam.

Suponha-se que a teoria possui cargas centrais $F_{ij} = \varepsilon_{ij}F$ e $G_{ij} = \varepsilon_{ij}G$, como é o caso, por exemplo, da teoria de Yang-Mills com $\mathcal{N} = 2$. Na presença dessas cargas, a teoria em quatro dimensões espaciais possui uma superálgebra da forma [158]

$$\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}_{\beta j}\} = \delta_{ij} \gamma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu + \varepsilon_{ij} (\delta_{\alpha\beta} F + (\gamma_5)_{\alpha\beta} G), \quad (2.72)$$

em que γ^μ e γ_5 são matrizes gamma [159], α e β são índices espinoriais, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 $i \neq j$, P_μ é o vetor quadrimomento [5] (de modo que o primeiro termo à direita em (2.72) é responsável por gerar as translações do grupo de Poincaré), ε_{ij} é o símbolo de Levi-Civita e os $Q_{\alpha i}$ são geradores de supersimetria, com $i = 1, 2$. A barra em $\bar{Q}_{\beta j}$ denota o adjunto de Dirac, tal que $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$.

Vamos, por simplicidade, considerar primeiramente o caso em que a teoria possui apenas uma carga central. Assim, podemos assumir sem perda de generalidade $G = 0$. Escolhendo um referencial de repouso, podemos escrever $P_\mu = M \delta_{0\mu}$, de modo que a única componente sobrevivente é P_0 , que corresponde à massa M . Substituindo esse resultado em (2.72), multiplicando a equação resultante por uma matriz gamma e usando a propriedade $(\gamma^0)^2 = 1$, encontramos

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} M + \varepsilon_{ij} \gamma_{\alpha\beta}^0 F. \quad (2.73)$$

Ora o operador acima é hermitiano, e portanto, seu quadrado é não negativo. Notando que $\varepsilon_{ij} \gamma_{\alpha\beta}^0$ tem autovalores ± 1 , podemos constatar que $M^2 \geq |F|^2$, ou

$$M \geq |F| \quad (2.74)$$

Uma vez que os invariantes topológicos estudados na teoria de defeitos são cargas centrais, essa inequação tem a forma de um vínculo de Bogomol'nyi. Encontraremos inequações dessa forma frequentemente ao longo deste trabalho. De fato, os modelos mais conhecidos de kinks, vórtices e monopolos possuem um vínculo de Bogomol'nyi dessa forma.

Se tomarmos $G \neq 0$ e fizermos um cálculo parecido, encontramos [158]

$$M \geq \sqrt{F^2 + G^2}. \quad (2.75)$$

Vínculos de Bogomol'nyi da forma (2.75) são esperados, por exemplo, em teorias topológicas com simetria aumentada, tal qual $U(1) \times U(1)$, $SU(2) \times SU(2)$ ou similares. Isso ocorre porque essas teorias podem ter múltiplos invariantes topológicos que precisam ser especificados simultaneamente. Mas também é possível que uma carga central não relacionada à topologia esteja presente na teoria. Isso ocorre, por exemplo, com os dyons, que são simultaneamente monopolos magnéticos e elétricos. Essas estruturas satisfazem uma relação da forma (2.75), em que uma das cargas (a magnética) é de origem topológica e a outra (a elétrica) é uma carga de Noether. Nesse caso, precisamos estabelecer a presença da carga de Noether como um vínculo no completamento de quadrados que caracteriza o procedimento de Bogomol'nyi.

Além de ajudar a explicar a existência do vínculo de Bogomol'nyi, a supersimetria também é capaz de nos fornecer as equações BPS diretamente. Demonstrações desse tipo podem ser encontradas, por exemplo, em [157], e fazem uso apenas da álgebra da supersimetria e da natureza das cargas centrais, sem recorrer ao completamento de quadrados no funcional de energia. Mais importante é o fato de que essa análise fornece uma explicação quanto-mecânica para a existência de soluções BPS: elas correspondem a estados que são aniquilados pelos geradores de supersimetria. Assim, existirá algum estado quântico para o qual a atuação de uma combinação linear dos $Q_{\alpha i}$ resultará no ket nulo [105]. Se por exemplo temos dois geradores Q_1 e Q_2 , podemos derivar uma relação da forma [157]

$$(Q_1 \pm Q_2)|\Phi\rangle = 0. \quad (2.76)$$

Se a ação de cada um desses geradores for representada por um operador diferencial, a relação acima implicará em uma equação da forma (2.74).

Para um tratamento mais completo sobre a relação entre supersimetria e desigualdades de Bogomol'nyi, incluindo demonstrações mais gerais para outros tipos de supersimetria e representações, o leitor é recomendado a [105, 157, 160] e referências nelas encontradas. Para nossos propósitos, a mensagem fundamental é a de que a própria álgebra da supersimetria, bem como o caráter da carga topológica como carga central, dá origem ao vínculo de Bogomol'nyi e às equações BPS, o que se traduz em uma motivação importante para a investigação de soluções com a propriedade BPS.

Apesar da supracitada relação entre as equações BPS e as teorias supersimétricas, não devemos pensar que o formalismo discutido nesta seção perde sua utilidade na ausência de supersimetria. Embora a saturação do vínculo de Bogomol'nyi não seja sempre uma previsão exata em teorias não supersimétricas, as equações e desigualdade de Bogomol'nyi também são importantes nesses casos. Em geral, o vínculo de Bogomol'nyi não aparecerá para escolhas arbitrárias dos parâmetros da lagrangiana, mas sim como um caso limite de relevância física que será satisfeito, com boa aproximação, em alguns casos particularmente importantes. Em vórtices de Maxwell-Higgs, por exemplo, as equações BPS emergem no *acoplamento crítico*, que denota a fronteira entre supercondutores tipo-I e tipo-II. Já em monopolos magnéticos e dyons, o BPS é possível no limite em que a massa do campo de Higgs tende a zero. Os kinks unidimensionais são especiais no sentido de que a existência de um vínculo de Bogomol'nyi não restringe as lagrangianas que permitem esse tipo de defeito. A existência de estados BPS em uma teoria é também útil como ponto de partida para investigações de soluções não BPS. Esse é o caso, por exemplo, do problema de estabilidade de vórtices mesmo fora do acoplamento crítico (isto é, em condições nas quais inexitem estados rigorosamente BPS) [156]. Já na referência [161],

foi demonstrado que a energia de Bogomol'nyi fornece uma aproximação de ordem zero para a massa de monopolos magnéticos não BPS.

Frequentemente, a emergência de equações de Bogomol'nyi estará associada à anulação de certas forças internas do sistema. Assim, dada uma solução BPS com múltiplos vórtices ou monopolos, a força de interação entre eles será nula! Isso permite a existência de soluções estáticas que descrevem configurações contendo diversos defeitos topológicos em posições arbitrárias, o que normalmente seria impossível devido à energia de interação entre defeitos próximos, que tende a gerar movimento e aumentar a energia total. Fora do limite BPS, a tendência é que os defeitos assumam posições específicas que resultem na configuração que minimiza essa energia de interação.

Essa importante propriedade das soluções BPS está diretamente relacionada à existência de um espaço de moduli gerado pelas equações de Bogomol'nyi. Em geral, um espaço de moduli é um espaço de parâmetros no qual cada ponto representa um objeto geométrico de interesse [163]. Por exemplo, o espaço de moduli relativo a todas as retas não verticais em \mathbb{R}^2 é caracterizado pelos parâmetros a e b tais que $y = ax + b$. Note que cada par (a, b) pode ser associado a uma reta em \mathbb{R}^2 [163].

Os espaços de moduli nos quais estaremos interessados advém do fato de que, em geral, a solução do problema de contorno característico do sistema BPS não especifica completamente a solução. Com efeito, resolvemos essas equações diferenciais de primeira ordem suprimindo uma condição de contorno. Essa condição especifica o comportamento dos campos no infinito espacial e, por conseguinte, a topologia do sistema. Entretanto, é possível (e, de fato, usual) que múltiplas configurações de campo distintas satisfaçam as dadas condições de contorno. Elas podem diferir entre si, por exemplo, na localização dos zeros dos campos. Se as posições desses pontos forem suficientes para especificar todas as soluções fisicamente distintas (ignorando transformações irrelevantes como escolhas de calibre), então as coordenadas dos zeros da solução coletivamente parametrizam o espaço de moduli desse sistema.

Uma vez que cada ponto do espaço de moduli supracitado pode ser identificado com uma configuração que resolve as equações de Bogomol'nyi para uma dada carga topológica, segue que todos os seus elementos devem possuir a mesma energia. Portanto, trajetórias no espaço de moduli são geradas por modos zero, e estudar sua estrutura requer que façamos a linearização das equações de Bogomol'nyi para encontrar esses modos e obter a geometria desse espaço [164].

Uma aplicação importante das equações de Bogomol'nyi e dos conceitos discutidos nos parágrafos anteriores está na chamada *aproximação de espaço de moduli*, também conhecida como *aproximação adiabática*. Essa técnica se baseia na observação, originalmente proposta por Manton [165], de que o movimento em baixas velocidades de defeitos BPS pode ser aproximado por trajetórias geodésicas no espaço de moduli. Isto é, fazemos a suposição, em problemas de espalhamento em velocidades relativamente baixas, de que, em cada instante, a solução satisfaz as equações de Bogomol'nyi da teoria. Essa aproximação tem conseguido bons resultados em diversas teorias com defeitos [166–171]. Na referência [172] foi demonstrado que a aproximação de espaço de moduli pode ser usada também para valores próximos do acoplamento mínimo no caso de vórtices, um resultado que também é válido para os monopolos magnéticos da teoria Yang-Mills-Higgs [173].

Defeitos topológicos em campos escalares

3.1 Kinks em uma dimensão espacial

Nesta seção estudaremos um tipo particularmente simples de defeito topológico: o kink. Essas estruturas localizadas aparecem em teorias com um único campo escalar real e simetria discreta. Sua carga topológica é derivada das condições de contorno do problema, as quais resultam na imposição de que, nos dois extremos (que são $\pm\infty$ no caso do domínio que está sendo considerado nesta seção) o campo tenda a valores distintos. Para que um kink apareça em um sistema como consequência do mencionado mecanismo de Kibble-Zurek, é necessário que a variedade de vácuo tenha mais de um mínimo. Geralmente, esses mínimos correspondem a soluções que são distinguíveis entre si, mas sem que alguma delas seja energeticamente favorável. Como uma solução de (2.7) deve ser contínua e a variedade de vácuo é discreta, o campo deverá tomar valores fora dessa variedade em alguma região intermediária, o que explica a energia do kink. Quando um kink é inserido em espaços de dimensão superior, ele se manifesta como uma parede de domínio [36], que já mencionamos na Seção 2.4.

Como mencionado no capítulo anterior, a lagrangiana para um sistema com um campo escalar real é da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi), \quad (3.1)$$

em que $V(\phi)$ é uma função real de ϕ com mínimos degenerados. Em investigações sobre kinks, lidaremos com lagrangianas limitadas inferiormente. Nesse caso, é possível, sem perda de generalidade, assumir $V(\phi) \geq 0$ para todo ϕ . A equação de campo dessa teoria é da forma

$$\square \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (3.2)$$

Podemos linearizar essa equação em torno do vácuo se considerarmos a perturbação $\phi = \phi_0 + \psi$, em que ϕ_0 é uma solução de vácuo e ψ é uma variação de primeira ordem. Dado que ϕ_0 é uma solução constante e homogênea, podemos escrever

$$\square \psi + \left. \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi_0} + \left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi_0} \psi = 0. \quad (3.3)$$

Mas como ϕ_0 é um mínimo por hipótese, deve valer $\left. \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi_0} = 0$, donde

$$\square \psi + \left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi_0} \psi = 0, \quad (3.4)$$

em que podemos identificar, por analogia com a equação de Klein-Gordon $(\square + m_\psi^2)\psi = 0$, a massa clássica de uma excitação em torno do vácuo

$$m_\psi^2 = \left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi_0}. \quad (3.5)$$

No caso estático, a equação (3.2) se reduz a

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = V_\phi, \quad (3.6)$$

onde $V_\phi \equiv \frac{dV}{d\phi}$. Multiplicando essa equação por ϕ' , chegamos em

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx}(\phi'^2) = \frac{dV}{dx}, \quad (3.7)$$

que pode ser integrada para que obtenhamos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(x) + C}, \quad (3.8)$$

onde C é uma constante de integração. Ora nossas condições de contorno devem garantir que o defeito tenda assintoticamente a mínimos do potencial, o que implica $V(\pm\infty) = 0$ (essa condição é também necessária para que a energia seja finita). Para que uma assíntota seja possível, deve valer $C = 0$, visto que qualquer outra escolha implicaria em uma derivada que aumenta ou diminui a uma taxa constante no infinito. Assim, somos levados às equações de primeira ordem $\phi' = \pm\sqrt{2V}$, em que o sinal positivo leva a uma solução crescente (o kink) e o sinal negativo leva a uma solução decrescente (o antikink). Note que essas duas equações estão relacionadas pela simetria de reflexão na coordenada x . Isso significa que, dada uma solução tipo kink, podemos obter um antikink pela transformação $x \rightarrow -x$. Como $\sqrt{2V(\phi)}$ é uma função contínua e não negativa, é possível definir uma função auxiliar $W(\phi)$, baseada nos superpotenciais da supersimetria, tal que

$$V = \frac{1}{2} W_\phi^2. \quad (3.9)$$

Substituindo $C = 0$ e (3.9) em (3.8), encontramos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \quad (3.10)$$

que, junto à condição $\dot{\phi} = 0$, que já é verdadeira por hipótese no caso estático, dão as equações de Bogomol'nyi (2.67) da teoria. Vemos então que, em modelos com lagrangiana (3.1), as equações de Bogomol'nyi são equivalentes às equações de Euler-Lagrange estáticas, o que não é verdade na maioria dos modelos que suportam estados BPS. Também é digno de nota o fato de que o vínculo de Bogomol'nyi não impõe qualquer restrição significativa à lagrangiana da teoria, não limitando nem mesmo a forma do potencial para além dos requisitos necessários para a obtenção de defeitos topológicos. Na referência [58], os autores mostraram que essa é uma propriedade geral de teorias escalares em $1 + 1$ dimensões, válida inclusive em modelos contendo derivadas de ordem superior.

Podemos encontrar o tensor de energia-momento usando da fórmula (2.44), que nos leva imediatamente a

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) - g_{\alpha\beta} \mathcal{L} \\ &= \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - g_{\alpha\beta} \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

que dá, para $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, o tensor de energia-momento do campo escalar. Esse é precisamente o mesmo resultado que teríamos encontrado se tivéssemos usado a equação (2.32) advinda do teorema de Noether, de modo que, no caso do campo escalar real, o tensor de energia-momento

encontrado pela variação da métrica é igual ao tensor canônico. No caso estático, há apenas duas componentes não nulas desse tensor, que são a densidade de energia ρ e a pressão p , dadas por

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} W_\phi^2 \quad (3.12)$$

e

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} W_\phi^2. \quad (3.13)$$

Note-se que a equação (3.10) implica $p = 0$ e vice-versa. Essa relação entre a pressão e as equações BPS é chamada de *vínculo de pressão nula*, e exprime o fato de que a energia é minimizada na ausência de forças dentro do sistema. Finalmente, a equação (3.10) ainda nos permite deduzir o virial

$$E_G = E_p, \quad (3.14)$$

onde

$$E_G = \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \quad (3.15)$$

e

$$E_p = \frac{1}{2} \int dx W_\phi^2. \quad (3.16)$$

Em geral, $E_G + E_p$ corresponde à energia potencial do kink, ao passo que a integral $\frac{1}{2} \int dx \dot{\phi}^2$ dá a energia cinética, cuja nulidade define o caso estático. Como nesse caso não há movimento nem, portanto, momento linear, a equação $P^\mu P_\mu = M^2$ nos diz que a energia do caso estático dá a massa invariante do defeito.

É possível relacionar a densidade de energia (3.12) a uma lagrangiana clássica partir das correspondências:

$$\phi \rightarrow \xi \quad (3.17)$$

e

$$V(\phi) \rightarrow -U(\xi), \quad (3.18)$$

onde $U(\xi)$ é o potencial mecânico ao qual está submetida uma partícula de massa unitária e $\xi(t)$ é sua posição. A ação mecânica correspondente ao sistema mecânico análogo é da forma

$$S_{mec} = \int dt \left[\frac{1}{2} (\dot{\xi})^2 - U(\xi) \right]. \quad (3.19)$$

Essa analogia mecânica pode nos auxiliar a entender algumas das propriedades das soluções estáticas desse sistema. Por exemplo, o fato de conseguirmos integrar a equação (3.6) pode ser entendido se soubermos que, na mecânica clássica, um sistema conservativo unidimensional é sempre integrável [5], uma vez que ele possui um grau de liberdade e uma integral do movimento. Também podemos usar essa analogia para mostrar que soluções desse modelo não podem conectar mais do que dois vácuos. Com efeito, a partícula mecânica análoga sai de um *máximo* do potencial (devido ao sinal de menos em (3.18)) para chegar, ao final do movimento, em outro máximo de mesmo valor. Se a partícula desce de um pico da energia potencial, essa energia é convertida em cinética, a qual pode ser gradualmente transformada em energia potencial, até chegar no outro máximo, do qual ela não pode passar se o sistema for conservativo. Exigir que ela passe desse segundo pico seria como soltar uma partícula mecânica, a partir do

repouso, de um pico de altura h e esperar que ela eventualmente atinja uma altura superior a h ! Em uma análise mais rigorosa, é possível mostrar matematicamente que todas as derivadas $\frac{d^n U}{d\xi^n}$ se anulam [13]. Note-se que esse argumento depende crucialmente do fato de o análogo clássico ser um sistema conservativo, o que só é válido quando a lagrangiana é homogênea.

Sejam $\{v_k, k = 1, 2, \dots\}$ o conjunto de todos as soluções de vácuo do sistema. Essas soluções devem ser independentes de x (para minimizar E_G) correspondendo aos mínimos de $V(\phi)$ (para minimizar também E_P). Podemos ordenar essas constantes da menor para a maior, de modo que $v_1 < v_2$ e etc. Para que a solução seja um defeito topológico devemos impor, por meio das condições de contorno, que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi = v_i \equiv v_- \quad (3.20a)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi = v_j \equiv v_+, \quad (3.20b)$$

com $i \neq j$. Apesar de simples, condições de contorno são topologicamente não triviais: nenhuma deformação contínua pode transformar v_- em v_+ por um caminho contido na variedade de vácuo, já que não existe uma curva que as conecte sem sair do conjunto dos mínimos. Como discutido acima no contexto da analogia mecânica do sistema, o defeito não pode conectar mais que dois mínimos. Segue que, para uma lagrangiana da forma (2.50), i e j podem diferir por no máximo uma unidade. Isso decorre do fato de que é impossível que uma solução contínua conecte dois números reais sem passar pelos valores a eles intermediários. Em outras palavras, o kink ou antikink deve conectar mínimos vizinhos.

A carga topológica de qualquer solução de (3.2) pode ser definida pela expressão

$$Q_\tau = \frac{1}{2}(v_+ - v_-). \quad (3.21)$$

As soluções de (3.10) são monótonas, e geralmente identificadas com um único defeito topológico. Quando $v_+ > v_-$ a carga topológica é positiva, e nesse caso diremos que a solução é um kink. Se $v_+ < v_-$ o sinal passa a ser negativo e teremos um antikink. No caso de soluções dependentes do tempo, a analogia mecânica que utilizamos anteriormente não vale mais, e nesse caso é possível que uma solução conecte mais de dois vácuos. Isso significa que, fora do caso estático, dois kinks podem existir simultaneamente no sistema. No caso de soluções que incluem múltiplos defeitos distintos, a carga topológica é aditiva. Assim, um sistema de dois kinks possui duas vezes a carga de um kink solitário, ao passo que uma configuração contendo um antikink e um kink que conectam os mesmos mínimos tem carga topológica nula.

3.1.1 Modelo ϕ^4

Vamos agora tratar alguns modelos específicos dentro do formalismo introduzido acima. O primeiro deles é o modelo ϕ^4 , bem conhecido em teoria de campos e caracterizado pelo potencial

$$V = \frac{\lambda^2}{2}(a^2 - \phi^2)^2, \quad (3.22)$$

onde λ e a são constantes reais, sendo a segunda responsável por determinar os vácuos da teoria. O valor dessas constantes é importante no nível quântico, mas não afetará qualitativamente a análise clássica que nos propomos a realizar. Podemos eliminá-las de nossos cálculos por meio da reescala $\phi \rightarrow a\phi$, $x^\mu \rightarrow \sqrt{2}x^\mu/\lambda a$, que implica $\mathcal{L} \rightarrow (\lambda^2 a^4/2)\mathcal{L}$. A dependência da lagrangiana em λ e a ficou, portanto, reduzida a um fator multiplicativo, que não afeta as

equações de Euler-Lagrange. Podemos então ignorar esse fator de reescala e nos concentrar na lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2. \quad (3.23)$$

Essa função é invariante sob a operação de reflexão $\phi \mapsto -\phi$, que caracteriza a simetria Z_2 . As soluções de vácuo do modelo são $\phi = \pm 1$, e a massa (3.5) das excitações desse vácuo vale $\sqrt{2}$. As equações de primeira ordem no caso estático são

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm (1 - \phi^2), \quad (3.24)$$

que devem ser submetidas às condições de contorno $\phi(\pm\infty) = \pm 1$ no caso do kink e $\phi(\pm\infty) = \mp 1$ para o antikink. As soluções podem ser encontradas facilmente integrando (3.24) e invertendo a equação resultante. Desse procedimento, segue

$$\phi = \pm \tanh(x - x_0), \quad (3.25)$$

onde x_0 aparece como uma constante de integração de (3.24). Essa constante determina a posição do centro do defeito, definido pela condição $\phi(x_0) = 0$, e reflete a presença de um modo zero translacional na teoria, uma vez que diferentes escolhas no valor dessa constante implicam soluções de mesma energia que estão relacionadas por uma translação da coordenada x . No caso estático, essas soluções são equivalentes entre si, uma vez que uma translação de x equivale a uma mudança de coordenadas sem significado físico, mas sua presença se torna importante em problemas dependentes do tempo, particularmente na já mencionada aproximação adiabática, na qual a posição dos zeros de ϕ pode ser usada para parametrizar o espaço de moduli [14]. Como x_0 pode ser qualquer número real, o espaço de moduli de kinks é simplesmente \mathbb{R} .

A solução com o sinal positivo em (3.25) possui carga topológica unitária, enquanto para a solução com sinal negativo vale $Q_\tau = -1$. A densidade de energia dessas soluções é, por (3.12) e (3.14),

$$\rho = \text{sech}^4(x). \quad (3.26)$$

Integrando essa densidade de energia, encontramos $E = 4/3$, que é precisamente a energia de Bogomol'nyi obtida por meio de (2.66).

A equação de estabilidade da teoria ϕ^4 é dada por

$$\left[-\frac{d^2}{dy^2} + 4 - 6 \text{sech}^2 y \right] \eta_n(y) = \omega_n^2 \eta_n(y), \quad (3.27)$$

que é uma equação de autovalor para um potencial Pöschl-Teller modificado. Esse problema é conhecido da mecânica quântica [174]. A porção discreta do conjunto de autovalores desse Hamiltoniano é $\{0, 3\}$, mostrando que, de fato, não há autovalores negativos. O único autoestado com autovalor nulo é o previamente mencionado modo zero de translação.

Na Figura 3.1, podemos ver a solução tipo kink desse modelo juntamente com a sua densidade de energia. Com os gráficos sobrepostos é possível ver claramente que a densidade de energia difere apreciavelmente de zero apenas na vizinhança do centro da solução. Longe desse ponto, a configuração é fisicamente indistinguível do vácuo, e a densidade de energia se torna negligível.

A Figura (3.1) nos ajuda a visualizar a impossibilidade de deformar defeitos topológicos na solução de vácuo. Se quisermos, por exemplo, deformar continuamente o kink do modelo ϕ^4 na solução de vácuo $\phi = 1$, precisaremos passar por configurações intermediárias nas quais

$\phi(-\infty)$ não pertence à variedade de vácuo. Mas uma configuração com essa propriedade teria energia infinita, uma vez que estaríamos integrando densidade positiva e que difere de zero em uma região de comprimento infinito dentro do domínio de integração. Assim, a transformação entre o kink e o vácuo teria gasto energético infinito. Isso garante a estabilidade topológica do defeito quanto ao decaimento no vácuo.

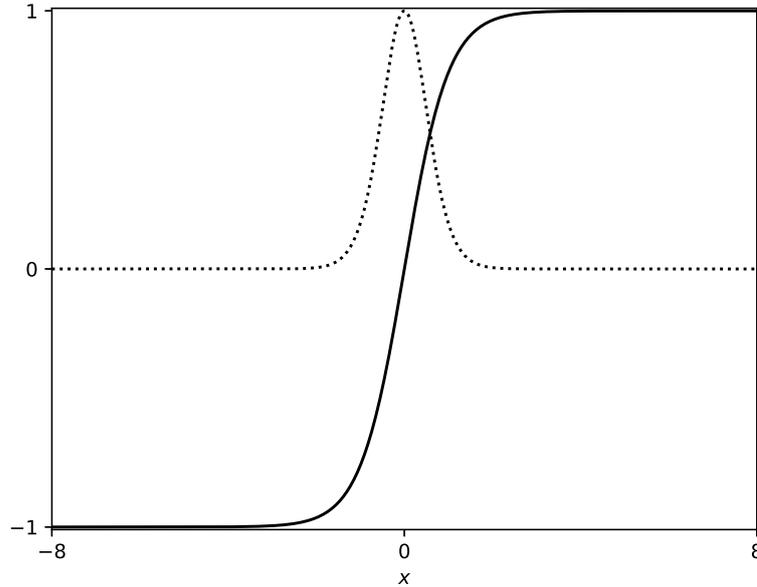


Figura 3.1 Solução tipo kink do modelo ϕ^4 (linha sólida) e sua respectiva densidade de energia (linha pontilhada).

3.1.2 Modelo sine-Gordon

Nesta seção estudaremos um modelo que, sobretudo devido à sua integrabilidade e suas interessantes propriedades de espalhamento, é um dos modelos de campo escalar mais estudados: o modelo de sine-Gordon, já mencionado no Capítulo 1. A lagrangiana desse modelo é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (1 - \cos \phi), \quad (3.28)$$

que, além de possuir simetria Z_2 como o modelo ϕ^4 , é também invariante sob a transformação $\phi \rightarrow \phi + 2k\pi$ para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. A variedade de vácuo desse modelo é $\mathcal{V} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, que continua sendo discreta, mas que, diferentemente do que foi visto no modelo anterior, possui infinitos elementos. A massa das excitações do vácuo é $m_\psi = 1$. A carga topológica das soluções desse modelo é dada por $Q = 2(k_\infty - k_{-\infty})\pi \equiv 2\pi N$, onde $k_{\pm\infty}\pi$ são os valores correspondentes aos vácuos aos quais o campo tende em mais e menos infinito, respectivamente. Quando a solução for uma função monótona crescente (decrecente) teremos apenas kinks (anti-kinks) no sistema, e nessas condições o número natural $|N|$ pode ser identificado com o número de defeitos presentes.

As equações de campo decorrentes da lagrangiana (3.28) são

$$\square \phi + \sin(\phi) = 0, \quad (3.29)$$

que, no caso estático, levam às equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm 2 \sin \frac{\phi}{2}. \quad (3.30)$$

Para resolver essa equação, precisamos escolher dois vácuos entre os infinitos disponíveis. Como deve ter ficado claro quando fizemos a analogia mecânica, esses estados devem corresponder a pontos consecutivos da variedade de vácuo. Tomemos então como condições de contorno $\phi(-\infty) = 0$ e $\phi(\infty) = 2\pi$. Com essas condições, encontramos o kink e antikink do setor topológico $(0, 2\pi)$:

$$\phi(x) = 4 \arctan(e^{\pm x}), \quad (3.31)$$

em que a solução de sinal positivo é o kink e a de sinal negativo o antikink. Assim como no modelo anterior, havia uma constante de integração x_0 que foi tomada como zero por simplicidade. As cargas topológicas do kink e antikink valem $\pm 2\pi$, respectivamente. Notado seja que a carga topológica não especifica totalmente a classe de homotopia nesse modelo. Entretanto, soluções com uma mesma carga devem ser iguais a menos de uma translação de $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ no espaço de campos. Se tomarmos ϕ como uma variável angular, essas soluções podem ser consideradas fisicamente equivalentes.

A densidade de energia das soluções acima se escreve

$$\rho(x) = 4 \operatorname{sech}^2(x), \quad (3.32)$$

e tem um comportamento qualitativo semelhante ao do kink do modelo ϕ^4 . Essa densidade de energia e o respectivo kink podem ser vistos na Figura 3.2.

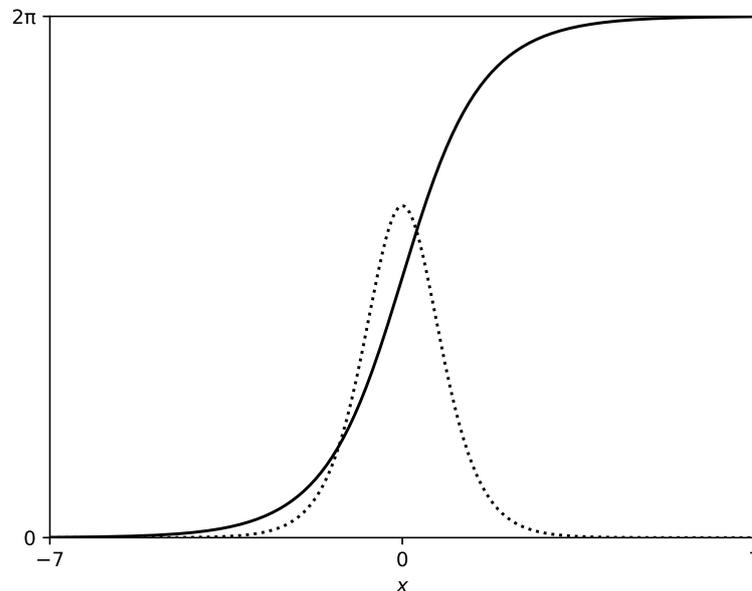


Figura 3.2 Solução estática tipo kink do modelo sine-Gordon (linha sólida) e sua respectiva densidade de energia (linha pontilhada).

Podemos relacionar esse kink ao modelo discreto representado na Figura 1.2 se considerarmos ϕ uma variável angular, de modo que a variação entre 0 e 2π corresponde a uma rotação

completa. Os pêndulos que se encontram na vertical na figura correspondem a $\phi = 0$. Na região próxima ao zero do gráfico 3.2, esses pêndulos são rotacionados gradualmente, de modo que cada parafuso varia de um ângulo $\Delta\phi$ em relação ao anterior. Se o número de pêndulos tende ao infinito, essa variação se torna contínua e corresponde perfeitamente à solução (3.31).

Podemos calcular a massa do defeito por integração direta de (3.32). Alternativamente, podemos usar o formalismo BPS pra encontrar a energia dessa solução. O potencial $V = W_\phi^2/2$ pode ser derivado a partir de uma função auxiliar $W(\phi) = -\cos \frac{\phi}{2}$. Portanto, a energia (2.66) para soluções nesse setor topológico é

$$E = \left| 4 \left[\cos \frac{\phi}{2} \right]_0^{2\pi} \right| = 8. \quad (3.33)$$

Uma vantagem significativa desse método é o fato de que poderíamos ter obtido esse resultado sem sequer conhecermos a solução explícita, visto que o vínculo de Bogomol'nyi só depende do setor topológico. Essa característica pode ser especialmente útil em situações nas quais a solução não pode ser escrita em forma fechada, nos permitindo obter a energia sem a utilização de métodos numéricos.

O modelo sine-Gordon é um dos poucos nos quais podemos encontrar sólitons verdadeiros. Sólitons são defeitos que recuperam assintoticamente sua forma após uma colisão com um número arbitrário de outros sólitons do mesmo sistema, inicialmente localizados em posições arbitrárias do espaço. O único efeito duradouro dessa colisão é uma mudança de fase nas soluções [13]. Essa propriedade é uma consequência direta do fato de esse sistema possuir um número infinito de integrais do movimento [175].

Soluções com múltiplos sólitons não existem no caso estático visto que, como mostramos com a analogia mecânica, as soluções estáticas podem conectar no máximo dois mínimos distintos, e nesse caso as equações BPS sempre levam a uma solução da forma (3.31), a menos de um fator aditivo $2k\pi$. Entretanto, existe para esse modelo um método elegante que nos permite obter soluções com múltiplos defeitos: as transformações de Bäcklund. Essa técnica foi originalmente introduzida em estudos de geometria diferencial envolvendo superfícies de curvatura negativa [176], um contexto em que, surpreendentemente, as equações de sine-Gordon também aparecem. Para utilizar essas transformações, introduzimos as coordenadas de cone de luz [14]

$$\sigma = \frac{1}{2}(x+t), \quad \rho = \frac{1}{2}(x-t), \quad (3.34)$$

a partir das quais podemos reescrever as derivadas parciais de x .

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \right), \quad (3.35)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

em que, no último passo, uso foi feito da igualdade das derivadas segundas cruzadas. Um procedimento análogo dá as derivadas temporais:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right), \quad (3.37)$$

donde

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right). \quad (3.38)$$

Essas equações permitem que a equação de sine-Gordon seja reescrita na forma

$$\frac{\partial \phi^2}{\partial \sigma \partial \rho} - \sin \phi = 0. \quad (3.39)$$

Introduzimos agora as *transformações de Bäcklund*:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\phi_1 - \phi_0) = a \sin [(\phi_1 + \phi_0)/2] \quad (3.40)$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\phi_1 + \phi_0) = \frac{1}{a} \sin [(\phi_1 - \phi_0)/2], \quad (3.41)$$

em que $a \in \mathbb{R}$. É possível mostrar que se ϕ_1 e ϕ_0 estão relacionados pelas equações (3.40) e (3.41) e ϕ_0 resolve a equação (3.39), então ϕ_1 também é solução dessa mesma equação. Com efeito, podemos derivar (3.40) com respeito a ρ para obter

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \sigma} (\phi_1 - \phi_0) = a \cos \left(\frac{\phi_1 + \phi_0}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\phi_1 + \phi_0), \quad (3.42)$$

cuja substituição em (3.41) nos dá

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\phi_1 - \phi_0)}{\partial \rho \partial \sigma} = \cos \left(\frac{\phi_1 - \phi_0}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_1 + \phi_0}{2} \right) = \frac{1}{2} (\sin \phi_1 - \sin \phi_0), \quad (3.43)$$

de modo que, se $\frac{\partial \phi_0^2}{\partial \sigma \partial \rho} - \sin \phi_0 = 0$, segue $\frac{\partial \phi_1^2}{\partial \sigma \partial \rho} - \sin \phi_1 = 0$, como queríamos demonstrar. Isso significa que é possível gerar novas soluções tipo sóliton a partir de uma solução conhecida. Por meio de um procedimento iterativo, podemos, em princípio, obter uma solução com qualquer número de sólitons. Se tomarmos, por exemplo, a solução trivial $\phi_0 = 0$ como semente, as duas transformações de Bäcklund dão equações da forma $\partial_\xi \phi = 2\lambda \sin \frac{\phi}{2}$, onde $\lambda = a$ para uma das transformações e $\lambda = 1/a$ para a outra. Integrando essas equações e exigindo que sejam válidas ao mesmo tempo, encontramos, após retornar às variáveis originais por meio de (3.34),

$$\phi_1 = 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{x(1+a^2) + t(1-a^2)}{2a} \right) \right]. \quad (3.44)$$

Fazendo a identificação

$$v = \frac{1-a^2}{1+a^2} \quad (3.45)$$

e notando que $(1 + a^2)/2a = 1/\sqrt{1 - v^2} \equiv \gamma$, vemos que essa solução pode ser escrita na forma

$$\phi_1 = 4 \arctan \left(e^{(x+vt)\gamma} \right), \quad (3.46)$$

que é a solução obtida de (3.31) por um boost de Lorentz. Uma outra solução pode ser encontrada se explorarmos uma propriedade das transformações de Bäcklund [14]. Sejam ϕ_1 e ϕ_2 obtidas *da mesma semente* ϕ_0 , mas com parâmetros a_1 e a_2 , respectivamente. Considere uma solução ϕ_{12} obtida de ϕ_1 por meio da aplicação das transformações de Bäcklund com parâmetro a_2 , e uma solução ψ_{12} obtida por meio da aplicação dessas transformações com parâmetro a_1 a partir de ϕ_2 . Então uma escolha apropriada das constantes de integração leva a ϕ_{12} . Nesse caso, podemos deduzir [14]

$$\phi_{12} = \arctan \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{a_2 - a_1} \right) \tan \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{4} \right) \right] - \phi_0. \quad (3.47)$$

A partir de $\phi_0 = 0$, podemos obter soluções da forma $\phi_j = 4 \arctan[\exp(\alpha_j \sigma + \rho/\alpha_j)]$, assim como fizemos para obter (3.44). Então, temos, por (3.47), uma solução

$$\phi = 4 \arctan \left\{ \exp \left[- \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2 - a_1} \right) \frac{\sinh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} \right] \right\}, \quad (3.48)$$

onde $\theta_j = a_j \sigma + \rho/a_j$. Tomando $a_1 = \frac{1}{a_2} = -a$, e definindo novamente $v = \frac{1-a^2}{1+a^2}$, encontramos, finalmente

$$\phi = 4 \arctan \left[\frac{v \sinh(\gamma x)}{\cosh(\gamma vt)} \right], \quad (3.49)$$

que é uma solução que tende a 2π quando $x \rightarrow \infty$ e -2π quando $x \rightarrow -\infty$. Para qualquer instante de tempo, essa é uma função monótona crescente, então não existe nenhum antikink nesse sistema. Como a solução possui carga topológica $Q = 4\pi N$, o número de kinks presentes é $N = 2$.

3.2 Argumento de Derrick

Nas seções anteriores, investigamos sistemas com um ou mais campos escalares reais. Entretanto, nos limitamos a modelos com uma dimensão espacial, e por um bom motivo. Com efeito, a investigação de campos escalares em espaços com dimensões maiores é severamente limitada pelo chamado teorema de Derrick [54], que impede a emergência de soluções estáticas estáveis diferentes do vácuo para lagrangianas da forma (2.50). Esse teorema não impede soluções dependentes do tempo, que de fato já foram encontradas em dimensões superiores. Entretanto, tais soluções não podem ter propriedades análogas a partículas, uma vez que elas têm sempre energia cinética e, portanto, jamais podem estar em repouso. Nas seções subsequentes deste trabalho, mostraremos algumas maneiras a partir das quais esse argumento pode ser circundado para encontrarmos defeitos escalares em dimensões maiores, como a introdução de impurezas e a modificação da lagrangiana da teoria. Além disso, veremos que outros tipos de defeitos, como monopolos e vórtices, não são afetados por esse teorema, devido às contribuições dos campos de calibre que são parte fundamental das teorias que contêm esses defeitos.

Nesta seção iremos nos concentrar na maneira como o argumento de Derrick se manifesta no caso canônico, e demonstraremos suas consequências.

O argumento de Derrick exige que efetuemos a reescala espacial $\phi(\mathbf{x}) \mapsto \phi(\lambda \mathbf{x})$. Se efetuarmos essa transformação e examinarmos a derivada primeira na vizinhança de $\lambda = 1$, podemos averiguar a estabilidade da solução com relação a essa transformação. Note-se que, como estamos avaliando apenas um tipo de deformação entre todas as possíveis, esse argumento leva meramente a uma condição *necessária* para a estabilidade, mas não suficiente; ele serve apenas para acusar instabilidade. Para uma solução estável, deve valer $\delta E = 0$ e $\delta^2 E \geq 0$. Em uma teoria canônica da forma (2.50) em $D + 1$ dimensões, o funcional de energia é da forma

$$E = \sum_a \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \partial_k \phi_a(\mathbf{x}) \partial_k \phi_a(\mathbf{x}) + V(\{\phi_a\}) \right\} \equiv E_g + E_p, \quad (3.50)$$

em que o conjunto $\{\phi_a\} = \{\phi_1(\mathbf{x}) \dots \phi_N(\mathbf{x})\}$ representa coletivamente os N campos escalares da teoria ao passo que E_g e E_p são dados, respectivamente, por

$$E_g = \frac{1}{2} \sum_a \int d^D x \partial_k \phi_a(\mathbf{x}) \partial_k \phi_a(\mathbf{x}) \quad (3.51)$$

e

$$E_p = \sum_a \int d^D x V(\{\phi_a\}). \quad (3.52)$$

Agora efetuamos a referida reescala e definimos $y_k \equiv \lambda x_k$ para escrever

$$E_\lambda = \sum_a \int d^D \left[\frac{y}{\lambda} \right] \left\{ \frac{\lambda^2}{2} \partial_k \phi_a(\mathbf{y}) \partial_k \phi_a(\mathbf{y}) + V(\{\phi_a\}) \right\} = \lambda^{2-D} E_g + \lambda^{-D} E_p. \quad (3.53)$$

Tomando a variação numa vizinhança de $\lambda = 1$ e exigindo $\delta E = 0$, somos conduzidos a

$$\left. \frac{dE_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 0 \implies E_p = \frac{2-D}{D} E_g, \quad (3.54)$$

que tem a forma de um teorema do virial. Em uma dimensão, (3.54) nos leva a $E_p = E_g$, mostrando a igualdade entre as duas porções da energia do defeito. Quando $D = 2$, há apenas a possibilidade $E_p = 0$, que faz com que a igualdade seja identicamente satisfeita. Esse caminho leva ao modelo $O(3)$ não linear [14], no qual também encontramos estruturas localizadas interessantes. Para $D \geq 3$, a situação se torna mais complicada. Como E_g é manifestamente positiva, somos forçados a concluir que E_p é negativa ou que $E_g = E_p = 0$, caso correspondente às soluções de vácuo. Desconsiderando essa última possibilidade (uma vez que soluções de vácuo são obviamente estáveis), seremos forçados à conclusão de que a solução é instável. Com efeito, ainda precisamos examinar a segunda variação que é da forma

$$\delta^2 E = \{(2-D)(1-D)E_g + D(1+D)E_p\} (\delta\lambda)^2 = 2DE_p (\delta\lambda)^2, \quad (3.55)$$

em que uso foi feito de (3.54) no último passo. Se $E_g = E_p = 0$, essa variação segunda é identicamente nula. Caso contrário, vale $E_p < 0$, de modo que expressão acima é negativa. Isso implica que esse ponto deve ser um máximo da energia quando $D \geq 3$, a menos que a solução seja um vácuo.

As considerações acima mostram que, se desejarmos encontrar soluções estáveis em teorias com $D \geq 2$, precisaremos nos aventurar por estratégias diferentes das que tentamos até o momento. Algumas das possibilidades de abordagem são:

1. Investigação de soluções dependentes do tempo. Esse caminho foi usado primeiramente na referência [177], na qual os autores consideraram soluções estacionárias periódicas no tempo. Embora seja válida, essa estratégia leva a soluções que não se comportam como partículas, e sim como análogos periódicos de partículas. Além disso, encontrar soluções desse tipo não é uma tarefa fácil devido à complexidade das equações dependentes do tempo e ao fato de a estabilidade exigir alguns critérios adicionais [178].
2. Busca por outros tipos de estruturas envolvendo mais tipos de campos além dos escalares. Isso é o que faremos nos próximos capítulos desta tese, em que consideraremos vórtices, monopolos e buracos negros.
3. Modificação da lagrangiana, uma vez que sua forma explícita foi usada no raciocínio que desenvolvemos nesta seção. Uma forma de evadir o teorema de Derrick mudando a forma do potencial foi desenvolvida em [60].
4. Mudar a geometria do espaço-tempo. Com efeito, utilizamos um espaço de Minkowski na demonstração acima, e não por acaso. A adição de uma métrica com determinante diferente de 1 origina novos termos em (3.53), os quais geram novas contribuições que levam a uma equação muito mais complexa do que (3.54). Diferentes geometrias já foram usadas com sucesso para a obtenção de paredes de domínio em espaços-tempo curvos de dimensão maior que dois em diversas situações [179–182], mesmo com a lagrangiana da forma canônica. Apesar de seu sucesso, essa abordagem infelizmente possui uma grave limitação: a evasão do teorema de Derrick só é possível para espaços que satisfazem algumas condições razoavelmente restritivas. Essas restrições impedem que alguns dos espaços-tempo mais importantes, como a solução de Schwarzschild, sejam utilizados, o que restringe um pouco a aplicabilidade dessa técnica.
5. Acoplar o defeito topológico a uma impureza. Utilizamos essa estratégia nas referências [53, 57], e observamos que o teorema de Derrick perde muito de seu poder de restrição quando impurezas são adicionadas.

Todas as abordagens listadas acima constituem formas válidas de evasão do teorema de Derrick. Na próxima seção, focaremos no último item, provavelmente a menos explorada, e mais recente, entre as técnicas mencionadas.

3.3 Impurezas

Todos os modelos que discutimos até o momento possuem a propriedade de invariância translacional, que pode ser deduzida do fato de a lagrangiana não possuir dependência explícita nas coordenadas o que, como vimos na seção 2.3, é a origem da conservação do momento linear pelo teorema de Noether. Essa invariância significa que, para esses sistemas, todos os pontos do espaço são equivalentes. Nos kinks, vimos que essa simetria se manifesta na presença de um modo zero translacional: o centro do defeito está localizado em um ponto arbitrário do espaço, e translações infinitesimais que mudam sua posição podem ser obtidas, sem custo energético, como consequência de perturbações de primeira ordem.

Entretanto, a invariância translacional nem sempre é uma hipótese razoável. Materiais realistas, por exemplo, dificilmente são perfeitamente homogêneos, haverá impurezas em seu interior que fazem com que suas propriedades magnéticas e termodinâmicas variem ao longo do material. O efeito dessas impurezas pode ser significativo em muitos casos, e ter impacto

real em aplicações de engenharia. A interação de um sistema canônico com um potencial externo também pode dar origem a uma lagrangiana efetiva em que há dependência da posição, visto que o potencial externo interage com os campos de forma diferente em cada ponto do espaço. Uma lagrangiana efetiva dessa forma também pode aparecer quando consideramos sistemas com múltiplos defeitos. No limite em que um dos defeitos se torna muito pesado, é possível considerá-lo “congelado” e ignorar seu movimento. Nessas condições, o acoplamento com esse defeito pode ser tomado como um *background* fixo, que causa uma dependência da posição nas equações de movimento do outro defeito [183]. Uma outra observação muito importante a respeito de impurezas foi feita na referência [184], em que os autores perceberam que é possível introduzir impurezas de maneira que metade da supersimetria do modelo original seja preservada.

Nesta seção, estudaremos os efeitos da adição de impurezas em um sistema escalar, com ênfase em nossos trabalhos recentes [53] e [57], que lidam com defeitos dopados por impureza em espaços-tempo de dimensão superior a dois. Também mencionamos para referência os trabalhos 1 + 1 dimensionais [58, 59], que serviram de inspiração para nossas investigações.

3.3.1 Paredes de domínio dopadas com impurezas em espaços-tempo esféricamente simétricos

Para quebrar a invariância translacional de uma teoria, precisamos deformá-la para incluir na lagrangiana um termo dependente das coordenadas. A forma mais fácil de realizar essa quebra é permitindo que o potencial seja uma função dependente da posição, tal como feito em [60]. Nas nossas investigações, a estratégia adotada será o acoplamento da lagrangiana da forma $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V$ a uma função $\sigma(\mathbf{x})$, denominada impureza, por meio de um termo aditivo $f\sigma$, onde f é uma função de acoplamento que pode, em princípio, depender dos campos, suas derivadas e da própria posição. A forma de σ dita o comportamento dessa inomogeneidade, nos dizendo onde ela é mais e menos significativa. Uma forma de visualizar essa modificação é pensar que o sistema descrito por \mathcal{L}_0 está sendo inserido em uma região do espaço na qual a homogeneidade é quebrada pela impureza. Fisicamente isso pode ser interpretado, por exemplo, como o resultado de acoplamento com campos físicos estáticos que interagem com a teoria \mathcal{L}_0 . Nessas condições, devemos considerar impurezas tais que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sigma(\mathbf{x}) = 0$, de modo que a lagrangiana retorne à sua forma original em regiões distantes da impureza. Impurezas que tendem a zero assintoticamente em todas as direções são ditas localizadas, e serão escolhidas em nossas investigações, embora o formalismo desenvolvido também seja válido, em princípio, para impurezas não localizadas.

Para melhor situar nossa discussão, será útil começarmos pelo caso mais simples de um espaço de Minkowski bi-dimensional. Defeitos topológicos em teorias escalares desse espaço foram investigados nas referências [58, 59], onde foi demonstrado que, para a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \left(\sqrt{2V} - \phi' \right) \sigma(x) - V(\phi) - \frac{\sigma^2(\mathbf{x})}{2}, \quad (3.56)$$

vale, no caso estático, a equação BPS

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2V} + \sigma(x), \quad (3.57)$$

que difere da equação (3.10) para o kink pelo termo aditivo contendo a impureza. Note-se que o sinal \pm não aparece nessa equação: o BPS só é válido para kinks (ou somente para antikinks, se fizermos escolhas diferentes nos sinais de (3.56)), como será visto pela dedução que faremos

em breve para o caso generalizado. Outra observação importante é que uma solução trivial correspondente a um mínimo de ϕ (como $\phi = 1$ para o modelo ϕ^4) já não satisfaz essa equação BPS, o que significa que a menor energia no setor de vácuo não é mais uma solução constante. Essa última observação mostra que a presença de impurezas modifica a estrutura de vácuo do problema.

Outra descoberta importante da referência [59], e que também iremos generalizar, é a existência de impurezas que preservam a forma de uma solução. Sabemos, por exemplo, que o modelo ϕ^4 admite o kink $\phi = \tanh(x)$. É possível escolher uma impureza tal que essa mesma configuração resolva as equações de segunda ordem geradas pela lagrangiana (3.56), ainda que, no sistema com impureza, essa solução não seja mais BPS.

Na referência [57], generalizamos esses resultados para outros espaços. Na gravitação de Einstein, que estamos utilizando neste trabalho, a curvatura de um espaço-tempo bi-dimensional não tem efeito sobre as equações de Einstein, visto que o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ nesse caso se torna identicamente nulo. Isso pode ser provado pelo teorema de *Gauss-Bonnet*, generalizado para espaços pseudo-Riemannianos em [185], o qual impõe que, em duas dimensões, valha $\int \sqrt{|g|} R d^2x = 2(1 - g)$, onde g é o *genus*, i.e., o número de buracos na variedade. Isso significa que a ação de Einstein-Hilbert não contribui para as equações de Euler-Lagrange. Por isso, somos motivados a avançar para espaços de dimensão maior ou igual a dois, onde nos deparemos com paredes de domínio, que são as soluções tipo kink nesses espaços. Para simplificar nossos cálculos e possibilitar a introdução de um vínculo BPS, nos concentraremos em espaços esféricamente simétricos, com métrica definida pelo elemento de linha

$$ds^2 = A^2(r)dt^2 - [B^2(r)(dr)^2 + \rho^2(r)d\Omega^2], \quad (3.58)$$

onde r é uma coordenada radial, $A(r)$, $B(r)$ e $\rho(r)$ são funções suaves e não negativas de r e $d\Omega$ é um diferencial angular, cuja forma dependerá da dimensão do espaço em questão. Apesar de usarmos a letra r ao longo do trabalho, notamos que o caso $D = 1$ recai no espaço de Minkowski unidimensional. Sempre que nos referirmos a $D = 1$ estaremos falando dessa métrica [†]. O elemento $\sqrt{|g|}$ derivado a partir dela é

$$\sqrt{|g|} = A(r)B(r)\rho(r)^{D-1}\omega(\theta_1, \dots, \theta_{D-2}) \equiv \gamma(r)\omega, \quad (3.59)$$

onde ω generaliza o fator $\sin \theta$ que encontramos no caso $D = 3$. O fator $\sqrt{|g|}$ pode ser intrínseco ou não. Se considerarmos espaços planos de dimensão $D \geq 2$, por exemplo, valerá $\gamma = r^{D-1}$, que é nesse caso um simples Jacobiano relacionado à mudança para coordenadas esféricas/polares. Em outros casos, como na métrica de Schwarzschild que consideramos abaixo, o fator $\sqrt{|g|}$ decorre de uma mudança de medida necessária para espaços com curvatura. Como o produto interno no espaço curvo é diferente daquele do espaço plano, a nossa forma de medir distâncias também precisa ser adaptada, o que leva à introdução de um elemento de volume $\sqrt{|g|}d^n x$. Veja as referências [134, 141] para uma explicação mais detalhada.

Em princípio, podemos também trabalhar com a simetria cilíndrica

$$ds^2 = A^2(r)dt^2 - [B^2(r)(dr)^2 + \rho^2(r)d\Omega^2] - \zeta^2(r)dz^2. \quad (3.60)$$

A introdução de $\zeta(r)$ terá o efeito de mudar γ e nos levaria a considerar a energia por unidade de comprimento na direção z , mas o formalismo seria basicamente o mesmo. Por

[†] Isso ocorre no âmbito da Relatividade de Einstein. Se considerássemos modelos generalizados, como a gravitação $f(R)$, que permite potências maiores de R na ação, então poderíamos ter equações gravitacionais não triviais mesmo em duas dimensões.

simplicidade notacional, nos concentraremos no caso esfericamente simétrico, mas notamos que a generalização para geometrias cilíndricas é imediata.

Trabalhamos com uma ação da forma [57]

$$S = \int d^n x \sqrt{|g|} \left\{ \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - f \sigma(\mathbf{x}) - V - \frac{\sigma^2(\mathbf{x})}{2} \right\}, \quad (3.61)$$

que, além do acoplamento $f\sigma$ que mencionamos anteriormente, possui uma contribuição $\sigma^2/2$. Esse termo não afeta as equações de movimento, mas contribui para a definição do vácuo. Se σ^2 é uma função quadrado-integrável, o que em particular exige que ela seja localizada, então esse termo dá uma contribuição termo $E_0 = \int (\sigma^2/2) d^D x$ para a energia. Caso contrário, ele não terá significado individualmente, mas ainda podemos interpretar $U + \sigma/2$ como uma deformação do potencial original de \mathcal{L}_0 . Note que essa ação não possui um termo de Einstein-Hilbert. Isso significa que estamos desconsiderando a influência dos campos da teoria na gravitação, o que tende a ser uma excelente aproximação se os campos não forem muito massivos. Nessa perspectiva, tratamos (3.58) como uma métrica de fundo, ou *background*. Em geral, o potencial V pode depender de ϕ e das coordenadas, e ainda deve ter mínimos degenerados e constantes. Na presença de impurezas, a variedade de vácuo, na qual nossos campos devem ser mapeados nos extremos do domínio, não é mais dada pelos mínimos do potencial, mas por um conjunto discreto de funções complicadas cuja forma varia ponto a ponto e resulta das várias contribuições para a energia. Se a impureza é uma função localizada, então a solução de vácuo ainda deve tender assintoticamente a um dos mínimos do potencial. Visando estabilidade topológica, nossas condições de contorno serão tomadas de modo que, nos extremos, ϕ tenda a esses mínimos, mesmo na hipótese da existência de uma configuração de energia finita que viole essa condição. A classificação topológica das soluções continua sendo dada em termos dos mapas entre o infinito espacial e a variedade de vácuo.

Vamos considerar configurações de campo radialmente simétricas, isto é, tais que $\phi = \phi(t, r)$ em geral. Além de simplificar consideravelmente os cálculos, essa hipótese é natural dada a geometria de fundo escolhida, e também será importante para estabelecermos o BPS nesse sistema. Nessas condições, a ação se escreve

$$S = \Omega_D \int dt \left\{ \frac{1}{2} \int_\Sigma dr \gamma \frac{\dot{\phi}^2}{A^2(r)} - \int_\Sigma dr \gamma \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r \phi}{B(r)} \right)^2 + V \right] \right\} \\ - \Omega_D \int dt \int_\Sigma dr \gamma \left(f \sigma(r) + \frac{\sigma(r)^2}{2} \right), \quad (3.62)$$

onde Σ é um domínio de integração da variável radial. Em um espaço infinito e contínuo, podemos tomar $\Sigma = (-\infty, \infty)$ se $D = 1$ e $\Sigma = [r_0, \infty)$, para algum r_0 , se $D \geq 2$. Mais geralmente, podemos considerar Σ como uma união de intervalos na reta real, o que pode ser importante para buracos negros com múltiplos horizontes. As equações de Euler-Lagrange oriundas da variação dessa ação são

$$\partial_t \partial^t \phi - \frac{1}{\gamma} \partial_r [\gamma (f_\phi \sigma - \partial^r \phi)] + f_\phi \sigma + V_\phi = 0, \quad (3.63)$$

onde $\phi' \equiv \partial_r \phi$. Como Ω_D não afeta as equações de movimento, as equações de campo no caso estático podem ser deduzidas a partir de $\varepsilon[\phi, \partial_r \phi] \equiv \frac{E[\phi, \partial_r \phi]}{\Omega_D}$. Para configurações estáticas, esse funcional tem a forma

$$\varepsilon = \int_\Sigma dr \gamma \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r \phi}{B(r)} \right)^2 + V + f \sigma(r) + \frac{\sigma(r)^2}{2} \right\}. \quad (3.64)$$

Note que, diferentemente do que vimos no modelo homogêneo, a densidade de energia associada a (3.64) pode ser negativa, uma vez que tanto a impureza quanto a função de acoplamento podem tomar valores negativos em alguns casos. As equações estáticas correspondem a pontos estacionários do funcional acima, e podem ser deduzidas de $\delta\varepsilon = 0$, ou simplesmente tomando $\partial_t\phi = 0$ em (3.63). Essas equações são da forma

$$\frac{1}{\gamma}\partial_r[\gamma(f_{\phi'}\sigma - \partial^r\phi)] - f_{\phi}\sigma - V_{\phi} = 0. \quad (3.65)$$

Como mencionado na seção 3.2, é possível evadir o teorema de Derrick em espaços curvos por meio de uma modificação no potencial ou por uma escolha apropriada da geometria, sem modificar a lagrangiana canônica. No espaço plano, isso leva a restrições muito fortes sobre as métricas aceitáveis, que levam à exclusão até mesmo de geometrias simples como a de Schwarzschild. Entretanto, a presença de impurezas introduz novos termos no funcional de energia, o que nos oferece mais liberdade para evadir o teorema de Derrick. É possível, então, que esse teorema não seja tão restritivo em um sistema com impurezas. Vamos então investigar a reescala $\phi(r) \rightarrow \phi(\lambda r) \equiv \phi_{\lambda}$, que implica $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{\lambda}$, com

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda} = & \int_{\Sigma} dy \gamma(y/\lambda) \left[\frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial_r \phi_{\lambda}}{B(y/\lambda)} \right)^2 + \frac{V(\phi_{\lambda}, y/\lambda)}{\lambda} \right] \\ & + \int_{\Sigma} dy \frac{\gamma(y/\lambda)}{\lambda} \left[f(y/\lambda) \sigma(y/\lambda) + \frac{\sigma(y/\lambda)^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Assim como fizemos na seção 3.2, devemos impor a condição $\left. \frac{d\varepsilon_{\lambda}}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 0$ para averiguar a estabilidade sob essa transformação. Com essa imposição, somos levados a

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4, \quad (3.67)$$

onde $I_1 = \varepsilon$ e as outras integrais são

$$I_2 = \int_{\Sigma} dr \frac{d\gamma}{dr} r \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r \phi}{B(r)} \right)^2 + V(\phi, r) + f\sigma + \frac{\sigma(r)^2}{2} \right\}, \quad (3.68)$$

$$I_3 = \int_{\Sigma} dr \gamma \left\{ \left(\frac{\partial_r \phi}{B(r)} \right)^2 + \frac{(\partial_r \phi)^2 r dB(r)}{B^3(r) dr} - r \frac{\partial U(\phi, r)}{\partial r} - r f \frac{d\sigma}{dr} \right\} \quad (3.69)$$

e

$$I_4 = \int_{\Sigma} dr \gamma \sigma(r) \left\{ \frac{\partial f}{\partial \phi'} \partial_r \phi - r \frac{d\sigma}{dr} - r \frac{\partial f}{\partial r} \right\}. \quad (3.70)$$

Para investigar a estabilidade, também precisaríamos mostrar que $\left. \frac{d^2\varepsilon_{\lambda}}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} > 0$. Esse cálculo dá uma expressão muito grande para ser colocada aqui, mas será suficiente dizer que (3.67) não vincula o sinal dessa derivada, visto que os múltiplos termos podem ter diferentes sinais e magnitudes.

A geometria e a impureza contribuem para fazer com que (3.67) seja muito mais complexa que a sua contraparte do espaço plano. Isso faz com que o número de maneiras de satisfazer essa equação também aumente, o que mostra que o teorema de Derrick se torna muito mais fraco nesse cenário. Para uma dada geometria, poderíamos, por exemplo, tentar encontrar uma forma apropriada para impureza que possibilite a emergência de uma parede de domínio no

espaço-tempo de geometria desejada. Essa possibilidade é interessante e está relacionada ao assunto que abordaremos na próxima subseção, mas agora não seguiremos esse caminho por dois motivos. Primeiramente, não desejamos vincular a impureza nem a geometria. Iremos escolher tanto a métrica quanto σ da forma que for mais conveniente para o modelo. Além disso, queremos verificar o efeito das impurezas na teoria, e por isso estaremos interessados em modelos que possuem uma contraparte livre de impurezas. Isso significa que desejamos que a lagrangiana \mathcal{L}_0 , obtida quando $\sigma = 0$, também suporte defeitos tipo kink ou paredes de domínio. Assim, seremos capazes de comparar as soluções para $\sigma = 0$ e $\sigma \neq 0$ e ver o que muda. Além disso, essa condição será necessária para que possamos estudar impurezas que preservam a forma, tal como feito em [59] e já mencionado acima.

Seguiremos, portanto, o caminho primeiramente trilhado em [60]. Neste trabalho, foi verificado que a introdução de um fator r^{D-1} no potencial engendra paredes de domínio esfericamente simétricas e estáveis em um espaço plano de D dimensões espaciais. Nesse caso, é possível encontrar equações de primeira ordem cujas soluções minimizam a energia entre as configurações simétricas, o que significa que a restrição simétrica dessa teoria possui um BPS. Esses resultados foram posteriormente generalizados em [186] para geometrias esfericamente simétricas como as que estamos usando.

Vamos agora tentar realizar um procedimento de Bogomol'nyi para as soluções radialmente simétricas. Como discutido acima, tomaremos um potencial dependente de r na nossa análise. A forma específica que leva a um vínculo de Bogomol'nyi é

$$V(\phi, r) = \frac{1}{2} \left(W_\phi(\phi) \frac{B(r)}{\gamma} \right)^2, \quad (3.71)$$

onde W_ϕ é, novamente, derivada a partir de uma função auxiliar $W(\phi)$. Esse modelo difere dos kinks que estudamos na seção 3.1, pois agora a forma do potencial precisa ser limitada para conseguirmos encontrar equações de primeira ordem. No caso unidimensional com impureza, isso não ocorre com o potencial, mas a lagrangiana como um todo também tem sua forma vinculada, visto que, mesmo nesse caso, o acoplamento $f\sigma$ não pode ser arbitrário para que o BPS seja possível. Na ref. [186], foi demonstrado que um potencial dessa forma pode aparecer na descrição efetiva de um modelo escalar, o que justifica fisicamente a escolha de (3.71). Tal descrição efetiva é possível, por exemplo, se ϕ se acopla de forma não mínima a uma lagrangiana de Maxwell ou a um outro campo escalar que resolve a equação $\nabla_\mu [P(\phi) \nabla^\mu \chi] = 0$ para alguma função $P(\phi)$. Note que, se $\gamma \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$, então a condição $\lim_{r \rightarrow \infty} V(\phi(\phi, r)) = 0$, necessária para a finitude da energia potencial do defeito, pode ser satisfeita mesmo que ϕ não seja um mínimo do potencial. Entretanto, uma solução desse tipo não tem a estabilidade topologicamente protegida. Além disso, sua existência não pode ser explicada pelo mecanismo de Kibble-Zurek e, portanto, suas condições de contorno requerem que outra justificativa seja introduzida. Por esse motivo, continuaremos a exigir que $\phi(\Sigma) \in \mathcal{V}$, onde \mathcal{V} é a variedade de vácuo.

Completando o quadrado em (3.64) com essa escolha de potencial, encontramos

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \int_\Sigma dr \gamma \left\{ \frac{1}{2B^2(r)} \left[\partial_r \phi - B(r) (\sigma - \sqrt{2V}) \right]^2 + f\sigma \right\} \\ & + \int_\Sigma dr \gamma \left(\frac{\partial_r \phi}{B(r)} - \sqrt{2V} \right) \sigma + \int_\Sigma dr \gamma (\partial_r \phi) \sqrt{\frac{2V}{B^2(r)}}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

o que mostra que teremos equações de primeira ordem se o acoplamento entre o campo e a

impureza for da forma $f = \sqrt{2V} - \frac{\partial_r \phi}{B(r)}$, ou

$$f(r, \phi, \phi') = \frac{B(r)W_\phi}{\gamma} - \frac{\partial_r \phi}{B(r)}, \quad (3.73)$$

em que uso foi feito da forma explícita do potencial. Essa escolha leva ao vínculo de Bogomol'nyi

$$E \geq \Omega_D \int_\Sigma dr (\partial_r \phi) W_\phi = \Omega_D \Delta W, \quad (3.74)$$

com $\Delta W \equiv W(\phi(r))|_{\partial\Sigma}$. A saturação desse vínculo ocorre se, e somente se, o campo escalar satisfaz a equação de primeira ordem:

$$\partial_r \phi = \sigma(r)B(r) + \frac{W_\phi B^2(r)}{\gamma}. \quad (3.75)$$

No espaço plano unidimensional, essa equação é da forma (3.57). Note que na presença de impureza só temos uma equação por modelo, em vez do par de equações (especificado pelos sinais \pm) que tínhamos no modelo homogêneo. Isso é comum em teorias com impureza, e está relacionado ao fato de que apenas metade da supersimetria pode ser preservada quando $\sigma(r)$ é introduzida no sistema.

É importante ressaltar que, como assumimos $\phi = \phi(t, r)$ *a priori*, só podemos garantir a minimização da energia entre as soluções que possuem essa mesma simetria. Em princípio, persiste a possibilidade de uma configuração assimétrica possuir energia inferior à dada pelo vínculo (3.74). Entretanto, como tanto o espaço-tempo quanto a função de impureza possuem simetria rotacional, é difícil imaginar motivos para que a energia aumente mediante uma pequena perturbação dependente das variáveis angulares, então é razoável esperar que nossas soluções correspondam ao menos a um mínimo local.

Note-se que a solução de vácuo também satisfaz as equações BPS, para o setor não topológico definido pela condição de que $\phi(r_0) = \phi(\infty)$, onde assumimos $\Sigma = (r_0, \infty)$. Se a impureza for localizada, então uma solução de vácuo desse modelo é um *Lump* da forma $\phi = v_j + \lambda(r)$, onde v_j é um mínimo do potencial e $\lambda(x)$ é uma função tal que $\lambda(r \rightarrow \infty) = 0$.

Como discutido na seção 2.6, a equação (3.10) dá origem a um espaço de moduli no qual cada ponto representa uma configuração com a menor energia possível para essas condições de contorno. Seja X um parâmetro que identifica univocamente a solução BPS como, por exemplo, a posição do centro do defeito [14, 59]. Usamos X para parametrizar o espaço de moduli gerado por (3.10). Para encontrar os modos zero, linearizamos essa equação introduzindo uma perturbação de primeira ordem $\psi(r)$ tal que

$$\phi(r, \tilde{X}) - \phi(r, X) = \delta X \psi(r), \quad (3.76)$$

onde assumimos que a variação $\delta X \equiv \tilde{X} - X$ é pequena, de modo que termos de ordem quadrática ou superior em δX podem ser descartados. Note que ϕ é tomado como uma função de duas variáveis: r determina o valor do campo nesse ponto do espaço físico e X nos diz em que ponto do espaço de moduli o campo é mapeado em um dado instante. Quando consideramos o movimento pela aproximação de espaço de moduli, devemos tomar $X = X(t)$. A variação temporal da configuração é oriunda da mudança em valores de $X(t)$ à medida que o tempo passa. Substituindo (3.76) em (3.75) e linearizando, encontramos

$$\frac{d\psi}{dr} = W_{\phi\phi} \frac{B^2(r)}{\gamma}, \quad (3.77)$$

que podemos integrar para deduzir

$$\psi = C e^{\int W_\phi \frac{B^2(r)}{\gamma} dr}, \quad (3.78)$$

onde C é uma constante de integração. Essa constante pode ser identificada se usarmos (3.76) em conjunto com a definição de X . Para termos um exemplo concreto, seja X a posição do zero de ϕ (ou, caso a solução tenha múltiplos zeros, considere X como uma n -tupla denotando as suas coordenadas coletivamente) e considere uma transformação $X \rightarrow X + dX$ que muda infinitesimalmente a posição dos zeros. Como X e $X + dX$ são zeros, vale $d\phi = 0$, donde

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r}(r, X) \right|_{r=X} dr + \left. \frac{\partial \phi}{\partial X'}(X, X') \right|_{X'=X} dX' = 0. \quad (3.79)$$

Como a variação infinitesimal nas coordenadas X e x é igual (pois uma variação nos zeros equivale a uma translação rígida do sistema), temos $dX = dx$, donde

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = - \frac{\partial \phi}{\partial X}. \quad (3.80)$$

Usando esse resultado e (3.76), encontramos $\psi(r = X) = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_X$, que leva a

$$C = \frac{B^2(X)}{\gamma(X)} - B(X)\sigma(X), \quad (3.81)$$

que dá a constante de integração em função da posição de um zero arbitrário do defeito. Se considerarmos $\sigma = 0$ e tomarmos o espaço plano podemos usar a regra da cadeia, a propriedade $1/(d\phi/dx) = dx/d\phi$ para funções injetivas e as equações BPS do kink para deduzir

$$\psi = e^{\int \frac{dW_\phi}{W_\phi}} = \frac{d\phi(x - x_0)}{dx}, \quad (3.82)$$

que é o modo zero do kink. Se mantivermos o mesmo espaço, mas tivermos $\sigma \neq 0$, encontramos um resultado que concorda com os de [59], a menos de convenções adotadas.

Assim como no caso do kink, as equações (3.75) geram um espaço de moduli de dimensão um. Entretanto, os modos zero dessa teoria não podem agora ser associados à simetria translacional, que não mais existe. Na ref. [59], foi demonstrada a existência de uma simetria generalizada que conecta os modos zero do modelo unidimensional. A possibilidade de generalização desse resultado para o sistema estudado nesta subseção é interessante para potenciais futuras investigações.

Vamos agora considerar dois exemplos de soluções da equação (3.75). Primeiramente, vamos escolher o potencial do modelo ϕ^4 em um espaço-tempo plano de três dimensões, o mais simples possível para dimensão maior que dois. Nesse caso, temos $W_\phi = 1 - \phi^2$, $B(r) = 1$ e $\gamma = r$, que é simplesmente o Jacobiano da transformação para coordenadas polares, uma vez que nesse caso não temos curvatura. Com essas escolhas, a equação (3.75) toma a forma

$$\partial_r \phi = \sigma(r) + \frac{1 - \phi^2}{r}. \quad (3.83)$$

Essa é uma equação de Riccati [187]. Equações dessa forma possuem a importante propriedade de serem equivalentes a uma equação linear de segunda ordem. Para mostrar essa equivalência, introduzimos a transformação

$$\phi = \gamma \frac{\xi'}{\xi}, \quad (3.84)$$

que leva a

$$\xi'' + \frac{\gamma'}{\gamma} \xi' - \left(\sigma + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\xi}{\gamma} = 0. \quad (3.85)$$

Podemos resolver essa equação para ξ e então obter ϕ algebricamente por (3.84). Embora essa técnica aumente a ordem da equação, ela é útil porque equações lineares podem ser resolvidas por meio várias técnicas conhecidas. Para certas escolhas de σ , essa identificação com a equação de Riccati pode até possibilitar uma solução em forma fechada, que normalmente não é possível para sistemas com impureza. Finalmente, destacamos que a linearidade é útil em diversas demonstrações, como é o caso, por exemplo, de provas de existência e unicidade. Aqui, nos limitamos a resolver a equação de primeira ordem numericamente após assumir sua existência.

Para completar o modelo ainda precisamos especificar a forma da impureza. Uma escolha bastante simples que dá origem a uma impureza localizada é a função gaussiana:

$$\sigma(r) = \alpha e^{-\beta r^2}, \quad (3.86)$$

onde α e $\beta > 0$ são constantes reais. Essa impureza pode ser vista na Figura 3.3, para dois valores de β , com $\alpha = 1$.

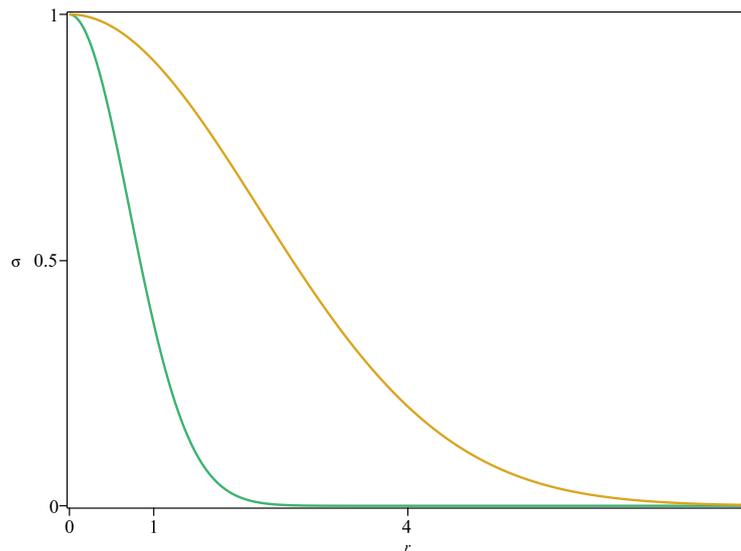


Figura 3.3 Impureza $\sigma(r) = \alpha e^{-\beta r^2}$ para $\beta = 0.1$ (dourado) e $\beta = 1$ (verde). Nos dois exemplos, $\alpha = 1$.

As soluções de (3.83) não podem ser escritas em forma fechada. Entretanto, resolvemos essa equação numericamente para $\beta = 0.1$ e $\beta = 1$ e mostramos os resultados na Figura 3.4. Assim como antes, a solução fica definida a menos de uma constante de integração, que pode ser fixada pela condição $\phi(r_0) = 0$, que determina uma superfície contendo os zeros de ϕ . Na ausência de impureza, a solução do modelo ϕ^4 escalar em duas dimensões é

$$\phi_0(r) = \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2}. \quad (3.87)$$

É possível ver que a presença de impureza altera a estrutura interna do defeito. Note-se que ϕ_0 é uma função monótona crescente, ao passo que as soluções do modelo com impureza são decrescentes inicialmente, atingem um mínimo e depois voltam a crescer. Para valores menores

de β , como $\beta = 0.1$, a solução também atinge um valor de máximo. De fato, perto de zero a função se comporta como $\phi \approx Cr^2 - \alpha r$, onde C é uma constante que pode ser determinada numericamente. Para as soluções mostradas na figura, temos $C = 2.038$ ($\beta = 0.1$) e $C = 2.982$ ($\beta = 1$). Como C depende de β , os dois parâmetros da impureza influenciam a posição do mínimo de ϕ . Por outro lado, o máximo ($\phi \approx 1.420$) aparece em $r \approx 3.530$ quando $\beta = 0.1$.

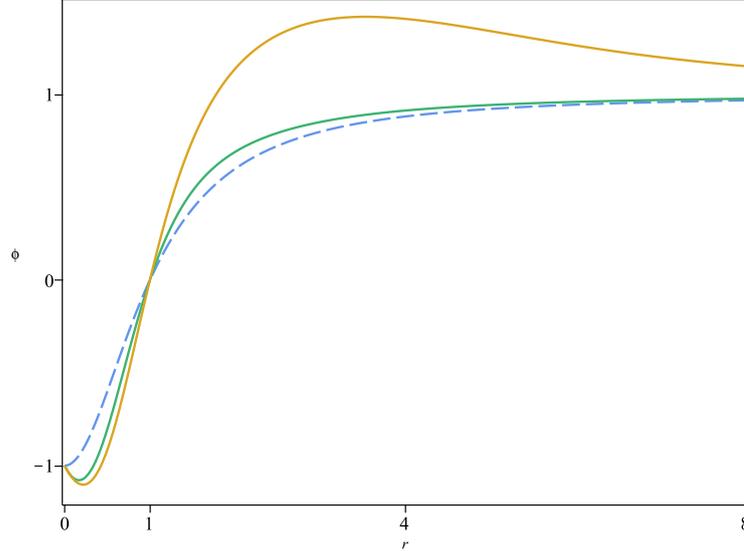


Figura 3.4 Soluções de (3.83) para $W_\phi = 1 - \phi^2$ com impureza $\sigma(r) = \alpha e^{-\beta r^2}$, sendo aqui $\alpha = 1$ nos dois gráficos sólidos e β assumindo os valores $\beta = 0.1$ (dourado), $\beta = 1$ (verde). A linha pontilhada representa a solução $\phi_0(r)$ do modelo \mathcal{L}_0 , obtida quando $\alpha = 0$.

Vamos agora considerar um espaço-tempo com curvatura. Uma vez que a influência do campo escalar no espaço-tempo é negligível por hipótese, e como não estamos considerando outros corpos em nosso sistema, devemos trabalhar com uma solução de vácuo, cuja equação de Einstein é da forma

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (3.88)$$

O conhecido teorema de Birkhoff [188] nos garante que a única solução esfericamente simétrica de (3.88) é a métrica de Schwarzschild, cujo elemento de linha é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(r) d\Omega^2, \quad (3.89)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Nesse caso, temos $A = B^{-1} = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}$ e $\gamma = r^2$. O espaço-tempo é esfericamente simétrico se pode ser folhado por esferas, então cada superfície com $r = \text{constante}$ deve corresponder a uma $(D - 1)$ -esfera, para $D > 1$, o que explica o elemento de ângulo sólido em ds^2 . Essa métrica é estática, o que significa que ela não muda com o tempo e que não há momento angular associado a esse espaço-tempo. Ela pode ser associada a um buraco negro irrotacional, e também pode modelar a atração gravitacional de um corpo esférico massivo (como uma estrela) com velocidade de rotação desprezível, desde que a métrica seja usada apenas na região externa a esse corpo. Para buracos negros, pode-se mostrar que essa é a solução irrotacional mais geral possível na ausência de cargas [134]. O parâmetro r_s define a posição do horizonte de eventos nesse sistema de coordenadas. Para $r < r_s$, a velocidade de escape é superior à da luz, impedindo que qualquer informação escape do interior do buraco

negro. Consideraremos neste trabalho apenas a região externa ($r > r_s$), de modo que o defeito está posicionado fora do buraco negro.

Neste exemplo, utilizaremos o potencial

$$V(r, \phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi \ln(\phi^2)}{r^2} \right)^2 \left(1 - \frac{r_s}{r} \right). \quad (3.90)$$

Esse potencial se anula no horizonte de eventos para qualquer valor de ϕ , e possui mínimos em $\phi = 0$ e $\phi = \pm 1$. Tomaremos condições de contorno tais que o defeito pertença ao setor topológico $(-1, 0)$. A equação de Bogomol'nyi para esse potencial toma a forma

$$\partial_r \phi = \frac{\sigma(r)}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} + \frac{\phi(r) \ln(\phi(r)^2)}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1}. \quad (3.91)$$

Quando $\sigma = 0$, podemos resolver essa equação analiticamente para encontrar a solução

$$\phi_0(r) = -e^{-\kappa \left(\frac{r}{r-r_s} \right)^{-2/r_s}}, \quad (3.92)$$

onde κ é uma constante real arbitrária. Note que essa solução, que pode ser vista na Figura 3.6, não tem o comportamento esperado de um defeito topológico, pois não é possível encontrar uma configuração tal que $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_0 = 0$. As condições de contorno que geram essa solução são, portanto, diferentes, visto que elas requerem que o campo tenda a uma constante diferente de um. Isso traz dúvidas sobre a estabilidade da solução, visto que uma deformação contínua no valor de κ é, em princípio, capaz de deformar essa configuração em outra solução das equações de movimento, a qual pode ter menos energia. Como mencionamos acima, esse comportamento também traz certa dificuldade no que diz respeito à justificativa das condições de contorno necessárias para acomodar essa solução, visto que o comportamento $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_0 = -e^{-\kappa}$ não decorre naturalmente do processo de quebra espontânea de simetria.

Vamos agora ver o que acontece quando uma impureza é adicionada ao sistema. A função escolhida é

$$\sigma(r) = (r - r_s) e^{-\left(\frac{r-r_s}{r_s} \right)^2} \quad (r \geq r_s). \quad (3.93)$$

Essa impureza, mostrada na Figura 3.5, também é localizada, e existe apenas fora do horizonte de eventos. Na região interna do buraco negro, colocamos $\sigma = 0$.

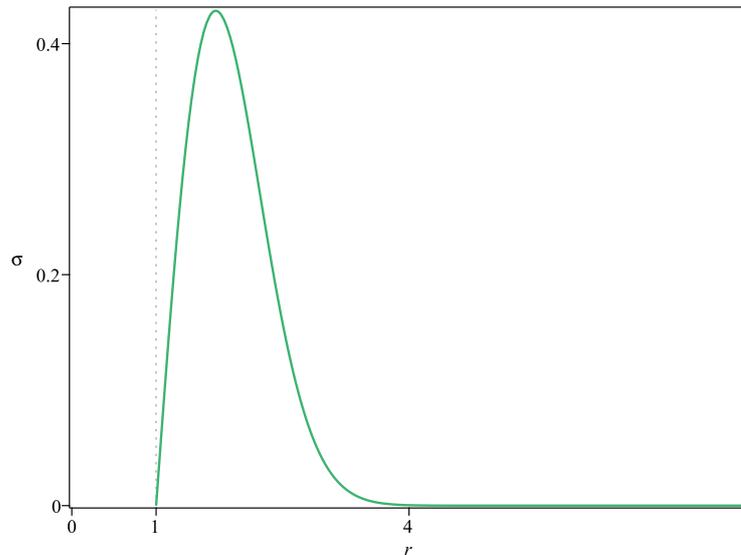


Figura 3.5 Impureza $\sigma(r) = (r - r_s) e^{-\left(\frac{r-r_s}{r_s} \right)^2}$, definida para $r > r_s$. Aqui, tomamos $r_s = 1$.

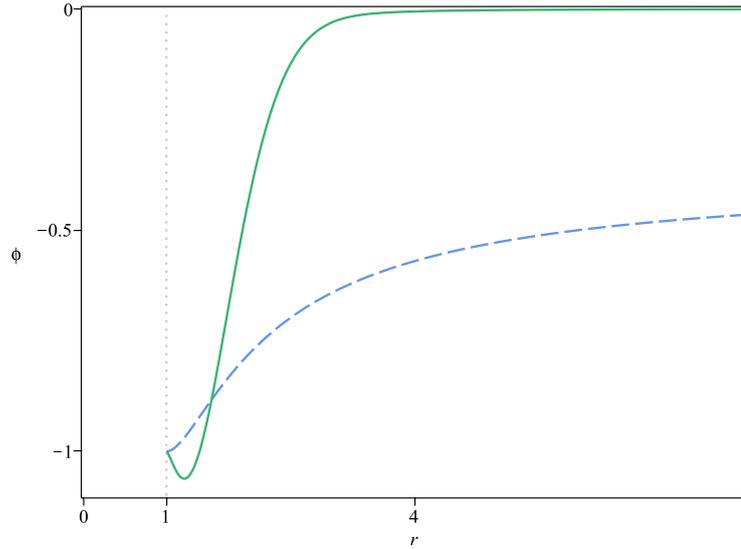


Figura 3.6 Soluções de (3.91) para $\sigma = 0$ (linha pontilhada) e para $\sigma(r) = (r - r_s)e^{-\left(\frac{r-r_s}{r_s}\right)^2}$ (linha sólida). Aqui, tomamos $r_s = \kappa = 1$.

Assim como no exemplo anterior, precisamos recorrer a métodos numéricos para resolver a equação (3.91). O resultado pode ser visto na Figura 3.6, onde a configuração encontrada pode ser comparada à solução ϕ_0 do cenário livre de impurezas. Novamente, vemos que o campo não é uma função monótona quando a impureza está presente, com um mínimo em $r \approx 1.215$. Em uma vizinhança de $r = 1$, identificada com o horizonte de eventos, vale $\phi(r) \approx -1 - 2C_1(r-1)^2 + (r-1)^{3/2}$. O último termo nessa expressão só aparece por causa da impureza, e é ele que faz com que a função seja inicialmente decrescente. A constante C_1 pode ser calculada numericamente, e o valor obtido em nossos cálculos, com quatro algarismos significativos, foi $C_1 = 3.296$. Há mais uma diferença notável entre ϕ e ϕ_0 . Enquanto este último tende a uma constante arbitrária, a solução do modelo dopado com impureza tende a um mínimo do potencial. O defeito é, portanto, topologicamente protegido contra decaimento no vácuo. Além disso, as condições de contorno desse problema passam a ser compatíveis com o mecanismo de Kibble-Zurek. Esse exemplo serve como uma boa ilustração da maneira como a impureza pode ser usada para vencer limitações impostas ao modelo pela geometria.

Como mencionado acima, existem, no caso unidimensional, escolhas especiais da impureza que preservam a forma de uma solução. Isso significa que, dada uma configuração ϕ_0 que resolve as equações de campo geradas por \mathcal{L}_0 , existe uma escolha de $\sigma \neq 0$ tal que ϕ_0 resolve as equações de campo do modelo *com* impureza. Se ϕ_0 é uma solução BPS para a teoria \mathcal{L}_0 , então ela não será, em geral, uma solução de (3.75), mas resolverá a equação de Euler-Lagrange (3.65). Além de estabelecer uma conexão interessante entre os regimes com e sem impureza, essa possibilidade pode ser útil ao nos fornecer uma ferramenta para encontrar soluções não BPS de (3.65), que tendem a ser mais difíceis de resolver.

Para que ϕ_0 resolva as equações de segunda ordem do nosso modelo, é suficiente que os termos dependentes de $\sigma(r)$ em (3.65) se anulem, o que implica que essa função deve satisfazer a condição

$$\frac{1}{\gamma} \partial_r \left[\frac{\gamma \sigma}{B(r)} \right] + \frac{W_{\phi\phi} B(r)}{\gamma} \sigma = 0, \quad (3.94)$$

que é uma equação diferencial linear em σ . Se escolhermos a solução tipo “kink”, que resolve

a equação de primeira ordem $\partial_r \phi_0 = W_\phi \frac{B^2(r)}{\gamma}$, podemos integrar (3.94) para encontrar

$$\sigma_\alpha(r) = \alpha \frac{B^2(r)}{\gamma^2 \partial_r \phi}, \quad (3.95)$$

que é uma família de impurezas parametrizada pela constante α , a qual pode assumir qualquer valor real. A solução (3.87) do modelo ϕ^4 no espaço-tempo plano tridimensional, por exemplo, é preservada por impurezas da forma

$$\sigma_\alpha(r) = \frac{\alpha (r^2 + r_0^2)^2}{r^4 r_0^2} \quad (3.96)$$

O parâmetro α altera a forma da impureza, tornando-a mais ou menos larga, e é importante em cálculos de espalhamento [59].

Também podemos preservar soluções BPS do tipo “antikink”, que resolve a equação de primeira ordem $\partial_r \phi = -W_\phi \frac{B^2(r)}{\gamma}$. As impurezas encontradas nesse caso são dadas por

$$\sigma_\beta(r) = \beta \frac{\partial_r \phi}{B(r)}, \quad (3.97)$$

em que β é, novamente, uma constante real.

A parede de domínio preservada por (3.95) não resolve as equações de primeira ordem (3.75). De fato, é impossível que a adição de uma impureza por si só preserve a propriedade BPS de uma dada configuração, visto que $\partial_r \phi_0 = W_\phi \frac{B^2(r)}{\gamma}$ implica $\sigma = 0$ em (3.75). Entretanto, a introdução de novas dimensões torna possível relacionar soluções BPS de modelos com e sem impureza em espaços distintos nesse caso, o que não era possível no modelo unidimensional. Considere, por exemplo, um espaço plano, tal que $\sqrt{|g|} = r^{D-1} \omega \equiv \tilde{\gamma} \omega$, $D \geq 2$, e um outro espaço-tempo com $B^2(r)$ e γ inicialmente arbitrários. Para preservar a propriedade BPS, precisamos que a condição

$$\frac{W_\phi(\phi_0(r))}{\tilde{\gamma}} = \frac{W_\phi(\phi_0(r))}{\gamma} B^2(r) + B(r) \sigma \quad (3.98)$$

seja satisfeita. Se $B(r)$ não possui zeros no domínio desejado, essa condição leva a uma equação algébrica para σ , a qual é resolvida se

$$\sigma = \frac{W_\phi(\phi_0(r))}{B(r)} \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}} - \frac{B^2(r)}{\gamma} \right). \quad (3.99)$$

Se a impureza satisfaz (3.99) e os dois espaços-tempo considerados são distintos, então $\phi_0(r)$ é uma parede de domínio BPS nesses dois espaços. É possível até mesmo conectar espaços de dimensão diferente, desde que o domínio das respectivas coordenadas radiais seja o mesmo (não faria sentido tentar preservar o kink unidimensional, que toma valores em $(-\infty, \infty)$ em buracos negros, afinal). Por exemplo, poderíamos tomar $B(r) = 1$ e $\tilde{\gamma} = r$ e $\gamma = r^2$. Nesse caso, a impureza

$$\sigma = W_\phi(\phi_0(r)) (r^{-1} - r^{-2}) \quad (3.100)$$

conecta os espaços planos de duas e três dimensões espaciais, desde que o resultado dessa operação seja uma função bem definida. Para que a impureza desse exemplo seja finita, a expansão em séries de potência de $W_\phi(\phi_0(r))$ deve ter termo dominante Cr^n com $n > 2$. Esse

resultado é mais forte que aquele obtido pela condição (3.94), mas, em compensação, o método é mais restritivo. Também deve ser enfatizado que o significado da variável r pode mudar de um espaço para o outro, então a “equivalência” entre os defeitos nos dois espaços existe, em geral, apenas no sentido da forma funcional da solução.

Podemos inverter o raciocínio usado acima, começando com uma impureza fixa e escolhendo uma geometria de fundo apropriada. Nesse caso, B precisa satisfazer

$$B = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \frac{[2W_\phi(\phi_0(r))]^2}{\gamma\tilde{\gamma}}}}{2W_\phi(\phi_0(r))} \gamma, \quad (3.101)$$

que tem solução nos reais se $|\sigma| \geq \frac{2|W_\phi|}{\sqrt{\gamma\tilde{\gamma}}}$, desde que a expressão acima não seja divergente. Note que a equação BPS impõe $2W_\phi(\phi_0(r)) = \partial_r \phi_0(r)$. Como uma parede de domínio ϕ_0 é sempre estritamente crescente no BPS sem impureza, $W_\phi(\phi_0(r)) \neq 0$ para todo r finito.

Note-se que todo o argumento construído acima depende da hipótese de que os dois espaços são distintos. Com efeito, se tomarmos $\tilde{\gamma}$ arbitrário, a equação (3.99) precisa ser generalizada para

$$\sigma = \frac{W_\phi(\phi_0(r))}{B(r)} \left(\frac{\tilde{B}^2(r)}{\tilde{\gamma}} - \frac{B^2(r)}{\gamma} \right), \quad (3.102)$$

onde novamente assumimos que $B(r) \neq 0$. Vemos que, se $\tilde{B}^2(r)/\tilde{\gamma} = B^2/\gamma$, a única solução para essa equação é $\sigma = 0$.

Esse resultado de preservação “formal” das soluções BPS é bastante interessante, mas nos obriga a restringir a escolha de σ . Uma perspectiva futura interessante seria analisar a possibilidade de preservar as soluções em um modelo no qual o acoplamento dos campos com a gravidade seja considerado, de modo que teríamos que resolver as equações de Einstein. Nesse caso, a impureza estaria naturalmente vinculada à geometria, e seria interessante averiguar se existe algum cenário no qual equações como (3.94) e (3.102) podem aparecer naturalmente.

3.3.2 Paredes de domínio generalizadas dopadas com impureza em espaços de dimensão arbitrária

Nesta subseção, prosseguiremos com nossas investigações sobre paredes de domínio dopadas com impurezas em espaços com mais de uma dimensão espacial. Entretanto, o trabalho que agora relataremos, publicado em [53], conta com três diferenças significativas em relação ao que foi abordado na subseção anterior. Primeiramente, trabalharemos exclusivamente com espaços planos, por motivos que serão explicados em breve. Segundamente, não assumiremos simetria alguma para as soluções. Isso significa que a hipótese $\phi = \phi(t, r)$, que leva a uma teoria efetivamente unidimensional no caso estático, não será mais usada, de modo que trabalharemos com sistemas de duas ou mais equações diferenciais. Como veremos, esse ponto tem implicações profundas para a estabilidade da solução. Finalmente, trabalharemos com um potencial canônico $U = U(\phi)$, de modo que a lagrangiana \mathcal{L}_0 pode ser identificada com um sistema homogêneo, tal como os kinks estudados no início deste capítulo. Os modelos mais conhecidos em teoria de campos, incluindo o modelo padrão, são homogêneos, e a conservação do momento que decorre dessa homogeneidade é fundamental no paradigma da física de altas energia. Portanto, o valor teórico de incluir modelos homogêneos em nossa análise não pode ser desprezado.

Como sabemos, a lagrangiana escalar da forma (2.50) não é compatível com soluções localizadas análogas a partículas. Embora paredes de domínio possam ser encontradas para uma

lagrangiana canônica em dimensão maior que um, a energia dessa configuração é necessariamente infinita [36]. A estratégia tipicamente usada para evadir o teorema de Derrick em dimensões maiores que dois é o acoplamento com outros tipos de campo, como o de calibre, que introduz novos termos ao funcional de energia e diminui significativamente o poder do teorema de Derrick. Embora isso seja plenamente justificado em teorias homogêneas, não a razão *a priori* para descartar a possibilidade de soluções tipo kink em modelos que não possuem simetria translacional. Com efeito, o método usado em [60] para evitar a instabilidade por reescala faz uso da quebra de homogeneidade, visto que o potencial escolhido nessa referência possui dependência explícita em r . Essas considerações nos motivam a investigar o teorema de Derrick no qual a lagrangiana $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$ é deformada por meio do acoplamento com uma impureza. Consideremos então uma lagrangiana da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^{(k)}(\phi, \partial_a \phi, \mathbf{x}) \equiv \mathcal{L}_0 - \sum_{k=0}^{\infty} c_k^a(\phi, \mathbf{x}) (\partial_a \phi)^k(\mathbf{x}), \quad (3.103)$$

que representa uma situação no qual o acoplamento entre o campo escalar e a impureza envolve apenas o campo ϕ e potências de sua derivada. Essa escolha permite que a lagrangiana do sistema continue sendo uma função apenas do campo escalar, suas derivadas primeiras e das coordenadas. Em princípio, poderíamos generalizar essa teoria para incluir acoplamentos envolvendo derivadas de ordem superior, embora esse tipo de lagrangiana seja menos usual em teoria de campos. A energia do caso estático pode ser derivada de (3.103) a partir da fórmula $E = - \int d^D x \mathcal{L}$. Submetendo esse funcional à reescala $\phi(\mathbf{x}) \rightarrow \phi(\lambda \mathbf{x})$, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{dE_\lambda}{d\lambda} = & (2-D)\lambda^{D-1} E_G - \sum_k \int d^D x \lambda^{k-D-1} \left\{ \left[(\partial_a \phi_\lambda)^k (\nabla c_k^a(\phi_\lambda, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{x} \right] \right. \\ & \left. - (k-D) \mathcal{L}^{(k)}(\phi_\lambda, \partial_a \phi_\lambda, \mathbf{x}) - D \lambda^{D-1} E_P \right\}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

em que E_G , E_P e ϕ_λ têm o mesmo significado que tinham na seção 3.2. Impondo a condição $\left. \frac{dE_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 0$, encontramos

$$DE_P = (2-D)E_G + \sum_k [(k-D)I_k - J_k], \quad (3.105)$$

onde

$$I_k = \int d^D x \mathcal{L}^{(k)}(\phi, \partial_a \phi, \mathbf{x}) \quad (3.106)$$

e

$$J_k = \int d^D x \left[(\partial_a \phi)^k (\nabla c_k^a(\phi, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{x} \right]. \quad (3.107)$$

A variação segunda nos leva à condição

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 E_\lambda}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} = & (2-D)(1-D)E_G + D(D+1)E_P \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} [(k-D)(k-D-1)I_k - (2k-2D-1)J_k] > 0. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Ao contrário do que acontecia no caso homogêneo, a condição (3.105) não é forte o suficiente para restringir o sinal de nenhum dos termos da equação, visto que os sinais de I_k e J_k dependem não apenas das funções c_k^a escolhidas, mas também das propriedades da própria

solução, já que na presença de impurezas tanto o campo ϕ quanto suas derivadas podem mudar de sinal. Em particular, a energia potencial não precisa mais ser menor ou igual a zero. Vemos que as condições acima não causam grandes problemas para o sistema dopado com impurezas, e temos agora bastante liberdade para escolher modelos capazes de evadir o teorema de Derrick. A condição acima ficaria ainda mais fraca se considerássemos um espaço curvo, já que essa possibilidade introduziria novas contribuições para $\frac{dE_\lambda}{d\lambda}$. Entretanto, maneiras de evadir o argumento de Derrick por meio de uma escolha apropriada (embora frequentemente restrita) de geometria já são conhecidas, então nos limitaremos a teorias \mathcal{L}_0 da forma canônica em espaços planos, para as quais paredes de domínio de energia finita não seriam possíveis sem impurezas.

As condições (3.105) e (3.108) são tão fracas que é possível encontrar soluções estáticas estáveis até mesmo com a escolha mais simples possível: $c_0 \neq 0$, $c_k = 0 \forall k > 0$. Essa possibilidade corresponde a um modelo no qual o acoplamento entre campo e impureza se dá apenas por meio de uma função de ϕ e das coordenadas. Por exemplo, podemos considerar a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \left(\frac{e^{2\phi} - 1}{2} - \phi \right) - \phi \sigma(x, y) \quad (3.109)$$

em $D = 2$. Essa lagrangiana gera as equações de movimento

$$\nabla^2 \phi = e^{2\phi} - 1 + \sigma(x, y). \quad (3.110)$$

Essa equação aparece em sistemas de Maxwell-Higgs com impurezas, e pode ser usada para modelar supercondutores BPS dopados com impurezas magnéticas. Com efeito, ela tem exatamente a mesma forma que a equação de Taubes generalizada para um sistema com impureza [183], no setor de vácuo. Essa equação e sua versão sem impureza são muito importantes na teoria de Maxwell-Higgs, e retornaremos a elas no próximo capítulo. Para nossos objetivos presentes, basta notar que as soluções dessas equações existem e já foram encontradas para vários tipos de impureza [190, 191], e que elas são estáveis.

Embora as equações de segunda ordem do sistema sejam suscetíveis a cálculos numéricos, vamos agora buscar um formalismo BPS, que nos permitirá encontrar soluções que minimizam a energia do sistema. O vínculo de Bogomol'nyi pode ser obtido com uma única impureza, mas vamos tratar do caso mais geral em que a inhomogeneidade é modelada por um conjunto de até D funções de impureza representadas por $\sigma_k(\mathbf{x})$. Isso nos permite ajustar o modelo de modo a adaptá-lo à situação física que queremos modelar. Se, por exemplo, $\sigma_3 = 1$, e $\sigma_k = 0$, para $k \neq 3$, então a homogeneidade é quebrada apenas na direção \hat{z} . Esse poderia ser o caso de uma inhomogeneidade que é causada por um campo externo que aponta nessa direção. Se, por outro lado, os $\sigma_k(\mathbf{x})$ refletem a presença de um grande número de impurezas dispostas aleatoriamente ao longo de um material, então eles devem contribuir igualmente. Se a inhomogeneidade decorre de uma fonte com alguma simetria, podemos também escolher os σ_k de modo que eles reflitam essa simetria.

O procedimento de Bogomol'nyi é possível se o acoplamento com as impurezas for tal que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \sum_{k=1}^D \left[\sigma_k(\mathbf{x}) \partial_k \phi - \sqrt{2V} \alpha_k \sigma_k(\mathbf{x}) - \frac{(\sigma_k)^2}{2} \right], \quad (3.111)$$

onde \mathcal{L} é a lagrangiana canônica do caso homogêneo e introduzimos, para cada σ_k não nulo, um parâmetro real α_k tal que $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_D^2 = 1$. No caso particular em que $\sigma_k = \sigma_k(x_k)$ para todo k , cada um dos termos do somatório acima tem a forma vista em (3.56). Os parâmetros α_k são fisicamente relevantes, pois eles determinam a contribuição relativa de cada acoplamento

derivativo na energia. Se, por exemplo, tivermos $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_k = 0$ para $k > 1$, então apenas o termo proporcional à derivada $\partial_1 \phi$ contribuirá para a energia. Cada combinação possível dos α_k origina um modelo fisicamente distinto, embora não seja necessariamente verdade que soluções que saturam o vínculo de Bogomol'nyi existam para qualquer escolha dos α_k . Note que, assim como na subseção anterior, adicionamos um termo quadrático em σ , o qual não afeta as equações de movimento e por isso não é importante para as discussões de estabilidade feitas acima. Esse termo é, entretanto, útil para fixar o valor do vácuo, que é por ele modificado.

As equações de movimento para o caso estático dessa teoria se escrevem

$$\partial_k \partial_k \phi = \partial_k \sigma_k + \left(1 + \frac{\alpha_k \sigma_k}{\sqrt{2V}}\right) V_\phi, \quad (3.112)$$

em que deixamos implícita a soma sobre índices repetidos.

Calculando o funcional de energia pelo procedimento usual e completando quadrados, encontramos

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^D \int d^D x \left(\partial_k \phi - \sigma_k - \alpha_k \sqrt{2U} \right)^2 + \int d^D x \sqrt{2U} \left(\sum_{k=1}^D \alpha_k \partial_k \phi \right). \quad (3.113)$$

Escrevemos o potencial na forma $V = W_\phi^2$ (note que optamos por não colocar o fator 1/2 nesse caso) e supomos que ele possui mínimos degenerados. Se a última integral em (3.113) tiver seu valor completamente especificado pelas condições de contorno do problema, então esse número corresponde à energia de Bogomol'nyi do sistema. Embora os σ_k não sejam componentes de um vetor, a forma do integrando desse termo é similar a uma divergência. O vínculo de Bogomol'nyi é saturado quando existem soluções para o seguinte sistema de D equações diferenciais:

$$\partial_k \phi = \sigma_k + \alpha_k \sqrt{2} W_\phi, \quad k = 1, 2, \dots, D. \quad (3.114)$$

Em uma dimensão espacial, a equação resultante e o respectivo vínculo de Bogomol'nyi concordam com os resultados encontrados em [58, 59]. Note que o BPS que acabamos de desenvolver difere do que fizemos na subseção anterior pelo fato de que não assumimos nenhum tipo de simetria para a solução. Isso não apenas garante a estabilidade contra qualquer tipo de perturbação como também implica que esse é um mínimo *global*, a menor energia possível para dadas condições de contorno. Esse resultado é muito mais forte do que a minimização apenas da restrição simétrica da teoria. Até onde sabemos, esse é o primeiro resultado envolvendo paredes de domínio de energia finita com um BPS “verdadeiro” isto é, global. Além disso, a ausência da hipótese de simetria aumenta a aplicabilidade da teoria, que é agora capaz de modelar uma gama muito maior de cenários físicos. É importante notar que nem toda escolha de σ_k resultará em uma equação que tem solução para condições de contorno fixas. Entretanto, o vínculo de Bogomol'nyi, que é tão ou mais importante que a solução em si, continua existindo.

As soluções mais simples de (3.114) são dadas por $V \approx 0$ e impurezas localizadas. Essa última condição é necessária para que as derivadas $\partial_k \phi$ tendam a zero assintoticamente. Nesse caso, o defeito fica completamente especificado pela impureza, e as equações de primeira ordem se tornam $\partial_k \phi = \sigma_k(\mathbf{x})$. Equações desse tipo precisam ser vistas como uma aproximação válida para um potencial cuja contribuição para a energia é pequena, mas diferente de zero. Esse cenário é análogo à condição que leva ao BPS em teorias de Yang-Mills-Higgs no caso em que a massa do campo de Higgs tende a zero [56]. Entretanto, esse caminho restringe significativamente as escolhas possíveis de impureza, então não iremos trilhá-lo.

Vamos considerar alguns exemplos concretos. O formalismo desenvolvido vale em qualquer dimensão, mas vamos fazer nossos exemplos para $D = 2$, em que as soluções podem ser visualizadas em um gráfico tridimensional. Temos então dois parâmetros livres α_1 e α_2 , sujeitos à condição $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$. Vamos escolher $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/\sqrt{2}$, em que as duas direções contribuem igualmente para a energia. As equações de Bogomol'nyi nesse caso são

$$\partial_1 \phi = W_\phi + \sigma_1, \quad \partial_2 \phi = W_\phi + \sigma_2. \quad (3.115)$$

No nosso primeiro exemplo, vamos considerar uma classe particularmente simples de soluções, na qual $\sigma_2 \neq 0$ e $\sigma_1 = 0$. Note que isso não torna a primeira equação em (3.115) trivial, já que o termo W_ϕ persiste. Então, temos $\partial_x \phi = 1 - \phi^2$, que implica $\phi = \tanh(\xi)$, com

$$\xi \equiv x + G(y). \quad (3.116)$$

A equação restante dá, então,

$$\frac{dG}{dy} \operatorname{sech}^2(\xi) = \operatorname{sech}^2 \xi + \sigma_2(x, y), \quad (3.117)$$

que pode ser resolvida analiticamente se

$$\sigma_2 = \operatorname{sech}^2(\xi) f(y), \quad (3.118)$$

em que $f(y)$ é alguma função contínua de y . Nesse caso, temos

$$\xi = x + \int dy f(y), \quad (3.119)$$

o que especifica x . Se tivermos, por exemplo,

$$\sigma_2 = -2 \operatorname{sech}^2(x - y), \quad (3.120)$$

então a configuração

$$\phi = \tanh(x - y) \quad (3.121)$$

resolve as equações de primeira ordem do problema. Não é difícil ver que esse raciocínio pode ser generalizado. Em geral, podemos usar uma impureza $\frac{dF(\xi)}{d\xi} (f(y) - 1)$, onde F é a função obtida após integração e inversão da equação $\partial_1 \phi = W_\phi$, e ξ é definido como antes. Dessa escolha, resulta a parede de domínio BPS

$$\phi = F(x + G(y)). \quad (3.122)$$

com

$$G(y) = \int dy f(y). \quad (3.123)$$

É claro que impurezas dessa forma constituem apenas uma subclasse relativamente restritiva dos modelos possíveis, mas elas foram escolhidas por simplicidade para encontrarmos soluções em forma fechada. Em geral, poderíamos usar métodos numéricos, assim como fizemos na subseção passada.

A solução $\phi = \tanh(x - y)$ pode ser vista na Figura 3.7. Ela se comporta como um kink na direção x , indo de -1 a 1 , e como um antikink na direção y , conectando 1 a -1 .

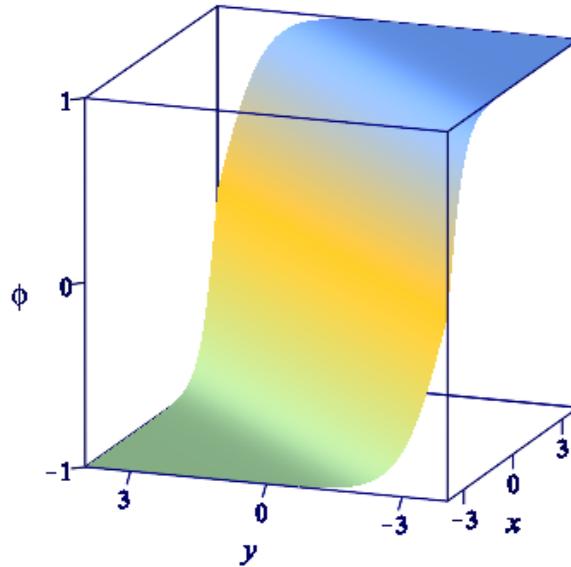


Figura 3.7 Solução tipo parede de domínio $\phi = \tanh(x - y)$ obtida de (3.115) com impurezas $\sigma_1 = 0$ e $\sigma_2 = -2 \operatorname{sech}^2(x - y)$

Vamos agora considerar um sistema com duas impurezas. Esse exemplo será usado para ilustrar a maneira como a simetria pode ser induzida em uma solução por meio da impureza. Consideremos as funções

$$\sigma_1 = (2ax - 1) \operatorname{sech}^2(ax^2 + by^2), \quad (3.124)$$

$$\sigma_2 = (2by - 1) \operatorname{sech}^2(ax^2 + by^2). \quad (3.125)$$

Para essa escolha, as equações BPS possuem a solução

$$\phi = \tanh(ax^2 + by^2), \quad (3.126)$$

em que a e b são parâmetros reais. Quando $a = b = 1$, a solução se torna

$$\phi = \tanh(r^2), \quad (3.127)$$

que está representada na Figura 3.8. Essa solução possui simetria radial. Note que em momento algum assumimos que a solução é simétrica. A simetria apareceu como consequência da forma das impurezas e das equações de primeira ordem. Ela é então induzida no sistema, ao passo que na subseção passada essa simetria era uma hipótese. Também poderíamos enxergar essa parede de domínio como uma solução com simetria cilíndrica em três dimensões espaciais (nesse caso, não podemos representar a solução por um gráfico simples). Essa situação corresponde às escolhas $\alpha_3 = \sigma_3 = 0$ nas equações BPS com $D = 3$.

Se calcularmos a energia das duas soluções apresentadas acima, encontraremos $E = E_B = 0$ em ambos os casos. Em um sistema homogêneo, essa energia de Bogomol'nyi só é compatível com uma solução trivial. Aqui, entretanto, a presença da impureza faz com que a densidade de energia não seja mais não negativa, de modo que valores negativos são possíveis nesse sistema. Utilizando a condição de Derrick e as equações BPS, podemos derivar o seguinte virial

$$E_v + E_\sigma^{(0)} + E_P = \frac{1}{2} E_\sigma^{(1)}, \quad (3.128)$$

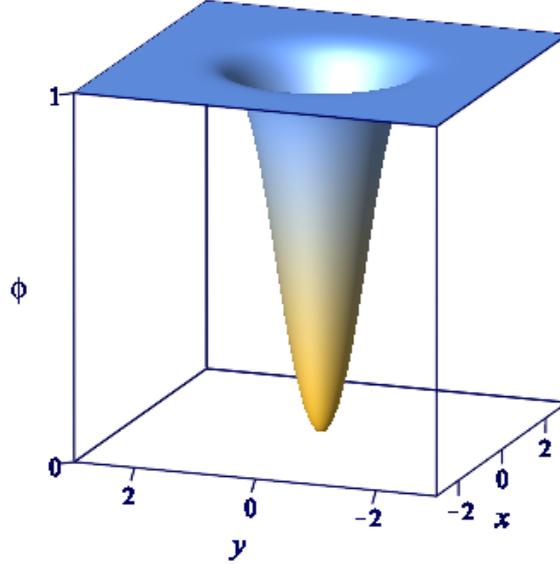


Figura 3.8 Solução $\phi = \tanh(x^2 + y^2)$ de (3.115), obtida com impurezas $\sigma_1 = (2x - 1) \operatorname{sech}^2(x^2 + y^2)$ e $\sigma_2 = (2y - 1) \operatorname{sech}^2(x^2 + y^2)$.

em que

$$E_v = \frac{1}{2} \int d^2x (\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \quad (3.129)$$

enquanto $E_\sigma^{(0)}$ e $E_\sigma^{(1)}$ reúnem, respectivamente os termos contendo o acoplamento das impurezas com o campo e suas derivadas. Vemos que o termo negativo $\frac{1}{2}E_\sigma^{(1)}$ contrabalança as outras contribuições na energia. Também cabe notar que a adição dos $\frac{1}{2}(\sigma_k)^2$ na lagrangiana é o que dá origem à contribuição E_v , sem a qual as soluções acima teriam energia negativa igual a $-E_v$.

Vamos agora mostrar que as soluções BPS encontradas são de fato linearmente estáveis, o que servirá como uma maneira de verificar a consistência de nossos resultados. Utilizando o método que apresentamos na seção 2.5, encontramos, no caso estático, a equação de estabilidade

$$-\partial_k \partial_k \eta_i + \left[V_{\phi\phi} + \alpha_k \sigma_k \left(\frac{V_{\phi\phi}}{\sqrt{2V}} - \frac{V_\phi^2}{(2V)^{3/2}} \right) \right] \eta_i = \omega_i^2 \eta_i, \quad (3.130)$$

em que está implícita soma sobre quaisquer índices repetidos. Essa é uma equação de autovalor tipo Schrödinger, com potencial de estabilidade dado por

$$U_s = V_{\phi\phi} + \alpha_k \sigma_k \left(\frac{V_{\phi\phi}}{\sqrt{2V}} - \frac{V_\phi^2}{(2V)^{3/2}} \right). \quad (3.131)$$

Substituindo a forma escolhida para o potencial e as equações BPS, vemos que o hamiltoniano de estabilidade pode ser escrito na forma quadrática

$$H = S_k^\dagger S_k, \quad (3.132)$$

em que

$$S_k = -\partial_k + \alpha_k \sqrt{2W_{\phi\phi}} \quad \text{e} \quad S_k^\dagger = \partial_k + \alpha_k \sqrt{2W_{\phi\phi}}. \quad (3.133)$$

Por ser uma forma quadrática, esse operador não pode ter autovalores negativos, então a solução é no mínimo metaestável. Em princípio, ainda seria possível a existência de autovalores negativos, os modos zero, conferindo metaestabilidade a essas soluções. Encerraremos esta seção investigando essa possibilidade.

Para investigar os modos zero do sistema, devemos linearizar as equações de primeira ordem. Essa linearização leva a

$$\partial_k \psi = \alpha_k \sqrt{2} W_{\phi\phi}|_{\phi_0} \psi, \quad (3.134)$$

onde ϕ_0 é uma solução das equações de primeira ordem. Afirmamos que essa equação não pode ser resolvida em geral, o que significa que modos zero nem sempre existem para as soluções BPS (de fato, veremos que eles inexistem na maioria dos casos). Mostraremos isso explicitamente para o nosso primeiro exemplo. Nesse caso, a equação (3.134) nos leva a

$$\partial_k \psi = -2 \tanh(x-y) \psi. \quad (3.135)$$

A equação relativa a $k = 1$ nos leva a $\psi = e^{A(y)} \operatorname{sech}^2(x-y)$, onde $A(y)$ é uma função indeterminada de y . Derivando ψ com respeito a y e impondo a equação restante de (3.134), encontramos a condição

$$\frac{dA(y)}{dy} = -4 \tanh(x-y). \quad (3.136)$$

Essa equação não pode ser satisfeita, pois o lado esquerdo é independente de x e o direito não é. Vamos agora examinar de modo geral as condições que permitem ou proíbem modos zero. As equações com $\alpha_k = 0$ não contribuem para a nossa discussão, então assumimos $\alpha_k \neq 0$ e definimos as variáveis

$$\mu^k \equiv \sqrt{2} \alpha_k x^k, \quad (3.137)$$

que nos permitem escrever (3.134) na forma

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mu^k} = W_{\phi\phi}|_{\phi_0} \psi(\mu^k). \quad (3.138)$$

Assim, fica claro que, quando ψ é escrita em termos das variáveis μ^k , suas derivadas parciais são iguais, o que significa que essa função resolve a equação diferencial parcial

$$\partial_1 \psi = \dots = \partial_N \psi \quad (3.139)$$

em que N é o número de equações em (3.138). Essa equação é resolvida por soluções da forma $\psi = \psi(\xi)$, com

$$\xi = \mu_1 + \dots + \mu_N. \quad (3.140)$$

Podemos agora somar as equações em (3.138) e usar a regra da cadeia para encontrar

$$\partial_\xi \psi(\xi) = N W_{\phi\phi}|_{\phi_0} \psi(\xi), \quad (3.141)$$

que pode ser vista como uma condição de consistência. Se $\psi = 0$, então não existem modos zero e não há nada a mostrar. Se $\psi \neq 0$ em algum aberto de \mathbb{R}^D , podemos dividir a equação acima por ψ nesse aberto para encontrar, nesse aberto,

$$\frac{1}{\psi} \partial_\xi \psi(\xi) = N W_{\phi\phi}|_{\phi_0}. \quad (3.142)$$

Como $W_{\phi\phi}|_{\phi_0}$ só depende de ϕ_0 , essa condição forçaria $\phi_0 = \phi_0(\xi)$, o que não é verdade em geral. Portanto, modos zero *não existem* para soluções arbitrárias das equações consideradas

nesta seção. Isso significa que, a menos que impurezas sejam especificamente escolhidas de modo que as Eqs. (3.138) sejam satisfeitas simultaneamente, a solução será a única possível para as condições de contorno do problema. Como a restrição imposta por (3.142) é bastante forte, segue que modos zero são impossíveis para a maioria das soluções não triviais de (3.115), e sua eventual existência pode ser verificada imediatamente pela forma funcional de uma dada solução.

Esses resultados são interessantes pela novidade que apresentam, mas há ainda bastante espaço para futuras investigações. Em particular, uma demonstração rigorosa das condições que precisam ser satisfeitas por impurezas que levam à saturação das equações BPS seria interessante. A investigação de outras geometrias, como feito na seção anterior, também poderia ser uma generalização interessante, bem como a de sistemas com múltiplos campos escalares reais. Finalmente, podemos destacar a investigação das propriedades de espalhamento, que têm recebido bastante atenção na literatura que trata de impurezas.

Vórtices abelianos

Neste capítulo, investigaremos teorias que possuem simetria e topologia mais complexas do que as estudadas até agora. Em vez da simetria discreta que dava origem aos kinks, vamos agora lidar com teorias de calibre, que são de imensa importância na física teórica. Ainda teremos um campo escalar real, mas ele agora estará acoplado a um campo eletromagnético. Os defeitos topológicos que encontraremos nesse contexto são os vórtices. Essas estruturas localizadas são caracterizadas por singularidades, que correspondem a zeros de um campo escalar (formalmente, zeros de uma seção de um fibrado complexo). Como mencionamos na Introdução, esses defeitos possuem aplicações em diversas áreas da física, incluindo superfluidos, condensados de Bose-Einstein e na teoria de Ginzburg-Landau (GL) para supercondutores. Nesse último contexto, cada vórtice é responsável por um quantum de fluxo magnético [85], e o fluxo total calculado sobre todo o espaço é proporcional à carga topológica da solução. Em condensados de Bose-Einstein e superfluidos, a quantidade quantizada é a circulação [75, 192], que leva a um momento angular quantizado. A existência de vórtices já possui comprovação experimental para os três exemplos que mencionamos neste parágrafo [61, 193, 194].

Conquanto isso possa soar contraintuitivo em um primeiro momento, ocorre que a maneira mais simples de obter uma formulação relativística de teorias envolvendo campos eletromagnéticos é introduzindo redundâncias em nossa descrição. Embora tenhamos essencialmente em nosso modelo apenas um grau de liberdade escalar, vamos considerar um campo escalar φ , que toma valores nos complexos. Uma função com imagem em \mathbb{C} tem, em princípio, dois graus de liberdade reais: Seu módulo $|\varphi|$ e sua fase, representada por um ângulo no plano complexo. Para que a descrição seja consistente, um desses graus de liberdade deve ser redundante. Essas redundâncias são matematicamente expressas pela introdução do grupo de calibre, ou de *gauge*, $U(1)$, sobre a ação do qual a lagrangiana da teoria deve ser invariante. O campo escalar estará acoplado a um campo de calibre A_μ , cuja presença na teoria se relaciona a essa simetria de gauge. Como estamos lidando com redundâncias, uma descrição consistente passa pelo requerimento de que todas as quantidades mensuráveis do modelo sejam invariantes sob as operações do grupo de calibre que, para o grupo $U(1)$, são

$$\varphi \rightarrow e^{-ie\Lambda(t,\mathbf{x})} \varphi, \quad (4.1a)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda(t, \mathbf{x}), \quad (4.1b)$$

onde e é uma constante de acoplamento e $\Lambda(t, \mathbf{x})$ é uma função das coordenadas e do tempo, que deve ser bem definida e derivável em uma vizinhança de cada ponto (t, \mathbf{x}) . Escolher a função $\Lambda(t, \mathbf{x})$ significa fixar o calibre nessa vizinhança. Note que essas transformações são *locais*: a ação do grupo de calibre $U(1)$, que atua na fase do campo escalar, varia ponto a ponto. A transformação (4.1a) corresponde a uma rotação no espaço interno da teoria. De fato, o grupo $U(1)$ é isomórfico ao grupo $SO(2)$ das rotações no plano, e poderíamos alternativamente combinar as partes real e imaginária do campo em um vetor para formular a teoria em termos dessa simetria.

Como estamos eliminando de nossas quantidades observáveis o grau de liberdade que cor-

responde à fase de φ , a teoria possui um grau de liberdade escalar real. Se esse fosse o único campo da teoria, o teorema de Derrick discutido na seção 3.2 impediria a estabilidade de vórtices de energia finita. O acoplamento com o campo de gauge, entretanto, modifica o funcional de energia da teoria, e faz com que argumento de Derrick já não seja um problema nessa teoria. Quando o campo de gauge é retirado do modelo, a teoria resultante é denominada *global*. Pode ser mostrado que vórtices globais têm energia infinita, o que é consistente com o teorema de Derrick.

4.1 Teorias de Calibre

A invariância por transformações de calibre significa que, diferentemente do capítulo anterior, os objetos centrais da teoria não serão os campos em si, mas sim classes de equivalência que identificam todas as soluções relacionadas pela ação do grupo de calibre. Geometricamente, os objetos fundamentais da teoria são um *fibrado* complexo, cujas seções são identificadas com o campo escalar e uma *conexão* A_μ . Intuitivamente, isso significa que não estamos simplesmente considerando mapas entre o espaço físico X e o corpo dos complexos. Estamos mapeando um espaço E abstrato, com topologia e geometria próprias, em X . O campo escalar é obtido quando E é mapeado, por meio de homeomorfismos locais, em um espaço vetorial V , a fibra vetorial, que neste capítulo será identificada com o corpo dos complexos. O grupo de calibre atua na fibra por meio de uma representação $\rho : G \mapsto \text{GL}(V)$ em que $\text{GL}(V)$ é o grupo formado pelas matrizes $n \times n$ invertíveis [195]. Nessa perspectiva, as transformações de calibre realizam uma mudança de base numa vizinhança [196], o que muda a forma funcional da seção φ , mas não pode afetar a física do problema. Fibrados constituem o paradigma mais apropriado para investigações envolvendo teorias de calibre, e constituem ferramentas poderosas, muito úteis para a obtenção de um entendimento mais profundo da geometria que permeia essas teorias. Infelizmente, o aprofundamento desses conceitos para além das noções simplificadas que demos neste parágrafo envolveria uma digressão que nos custaria algumas páginas, devido à grande quantidade de definições e resultados básicos que precisariam ser incluídos. Por esse motivo, e visando uma exposição mais simples do conteúdo, uma seção sobre fibrados não será incluída neste trabalho. Isso nos privará do uso de algumas ferramentas que obteríamos como fruto desse aprofundamento, mas ainda seremos capazes de expressar satisfatoriamente os resultados mais importantes para o nosso trabalho usando o arcabouço teórico que desenvolvemos até aqui. Ao leitor interessado no formalismo de fibrados, são fortemente recomendadas as referências [196, 197].

O caráter local das transformações de calibre significa que a atuação do grupo de Lie no campo escalar é diferente em cada ponto. Isso pode ser exemplificado se considerarmos, na teoria de gauge $U(1)$, uma seção definida de modo que, em um ponto p arbitrário do espaço-tempo, tenhamos $\varphi(p) = e^{\alpha_p} |\varphi(p)|$ e um outro ponto q com fase $\alpha_q \neq \alpha_p$. Se executarmos, em uma vizinhança (não necessariamente pequena) de p que inclui q , uma transformação de calibre $e^{-i\alpha_p} \varphi$, a fase de φ desaparece em p . Por outro lado, no ponto q teremos $\varphi = e^{i(\alpha_q - \alpha_p)}$, de modo que a seção em q está rotacionada em relação ao seu valor em p . A única forma de impedir essa rotação seria impondo *a priori*, a possibilidade de eliminar a fase do campo escalar em todo o espaço, e depois limitando nossa liberdade de gauge a transformações $e^{-i\kappa}$ com parâmetro constante. Mas essa construção resultaria na teoria global e, portanto, não é adequada aos nossos objetivos. Uma consequência desse caráter local está no fato de que a derivada parcial ∂_μ já não é adequada para a lagrangiana da teoria, visto que a rotação relativa que descrevemos acima impede uma comparação direta entre os respectivos espaços tangentes.

Fundamentalmente, o problema com a derivada parcial comum é que ela não se transforma da mesma forma que o campo sob uma transformação de calibre (isto é, sob uma mudança na base usada para descrever a seção). Esse problema é similar ao que nos deparamos em investigações sobre espaços-tempo com curvatura, e a solução é também a mesma: precisamos introduzir uma derivada covariante de gauge. Daremos essa definição, e a das outras quantidades fundamentais de teorias de calibre, de maneira geral, válida para qualquer teoria de calibre. Em particular, esses resultados serão aplicáveis também às teorias de Yang-Mills-Higgs que investigaremos no próximo capítulo, bem como teorias de gauge de simetria aumentada e, com algumas adaptações, até mesmo para a derivada covariante da teoria de Dirac em espaços curvos, a ser estudada no Capítulo 6.

Para definir a derivada covariante, precisamos considerar transformações infinitesimais de G , que são efetuadas pela álgebra de Lie \mathfrak{g} desse grupo [195]. A álgebra de Lie é simplesmente o espaço tangente em torno da identidade de G , e podemos usá-la para definir uma conexão. \mathfrak{g} atua por meio de um homomorfismo $d\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ [195]. Uma vez especificada a representação de \mathfrak{g} , podemos definir um operador da forma

$$D_\mu := \partial_\mu + d\rho(A_\mu), \quad (4.2)$$

que é a derivada covariante de gauge, com conexão A_μ . Mediante uma transformação de calibre γ , a conexão deve se transformar na forma

$$A_\mu \rightarrow \gamma A_\mu \gamma^{-1} - \partial_\mu \gamma \gamma^{-1}. \quad (4.3)$$

A equação cima garante que a derivada covariante se transforme exatamente da mesma forma que a seção na qual ela atua. Ou seja, se, em uma dada representação, o efeito da transformação de calibre em φ é $\varphi \rightarrow \rho(\varphi)$, então $D_\mu \varphi \rightarrow \rho(D_\mu \varphi)$.

A álgebra de Lie $\mathfrak{u}(1)$ de $U(1)$ só tem uma dimensão. Podemos obter uma representação dessa álgebra considerando a ação infinitesimal do grupo em torno da identidade. Como $e^{-ie\Lambda(t, \mathbf{x})} \simeq 1 - ie\Lambda(t, \mathbf{x})$, podemos “corrigir” a rotação infinitesimal causada pela transformação de gauge efetuando uma rotação no sentido oposto, o que nos leva a definir a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (\text{Grupo de calibre } U(1)) \quad (4.4)$$

Note que essa escolha implica $D_\mu \varphi \rightarrow e^{-ie\alpha} D_\mu \varphi$ sob uma transformação de calibre. Em particular, isso significa que funções de $|D_\mu \varphi|$ são reais, e podem ser incluídas na lagrangiana.

A introdução da conexão induz uma forma de curvatura, representada por um operador linear que atua na fibra. Assumindo uma conexão sem torção, a ação desse operador numa seção φ de um dado fibrado é

$$F_{\mu\nu} \varphi = [D_\mu, D_\nu] \varphi, \quad (4.5)$$

que, pelas propriedades de comutadores, é claramente antissimétrico em μ e ν . Note a semelhança entre essa forma e (2.11), que descreve a atuação do tensor de Riemann em vetores, que são seções do fibrado tangente. É a partir de $F_{\mu\nu}$ que os campos físicos da teoria são definidos: um campo escalar carregado sente o efeito do campo de gauge como uma curvatura no espaço interno. Se $F_{\mu\nu} = 0$, então o comutador acima é o mesmo que teria sido obtido na ausência do campo de calibre. Essa comutação só é possível se a teoria for global, caso em que o campo de gauge não precisa ser incluído.

A equação (4.5) pode ser usada para derivar as importantíssimas *identidades de Bianchi*. Com efeito, podemos usar essa equação para escrever

$$[D_\nu, [D_\mu, D_\lambda]] \varphi = (D_\nu F_{\mu\lambda}) \varphi. \quad (4.6)$$

Usando a bem conhecida identidade de Jacobi para comutadores, encontramos a identidade procurada:

$$D_\nu F_{\mu\lambda} + D_\mu F_{\lambda\nu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0. \quad (4.7)$$

Para deduzir a forma de curvatura do caso abeliano, substituímos (4.4) em (4.5) para encontrar

$$\tilde{F}_{\mu\nu}\varphi = \{[\partial_\mu, \partial_\nu] - e^2[A_\mu, A_\nu] + ie[\partial_\mu, A_\nu] + ie[A_\mu, \partial_\nu]\}\varphi. \quad (4.8)$$

Como derivadas parciais comutam, bem como o campos de gauge abelianos, apenas os dois últimos termos sobrevivem, e ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{1}{ie}\tilde{F}_{\mu\nu}\varphi &= \partial_\mu(A_\nu\varphi) - A_\nu\partial_\mu\varphi + \partial_\nu(A_\mu\varphi) - A_\mu\partial_\nu\varphi \\ &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\varphi \equiv F_{\mu\nu}\varphi, \end{aligned} \quad (\text{Grupo de calibre } U(1)) \quad (4.9)$$

em que $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético, ou *tensor de Maxwell*. O fator $1/ie$ serve para tornar esse tensor real, e sua necessidade decorre do fato de termos escolhido tomar ieA_μ como a conexão em vez de A_μ . Diferentemente dos A_μ , $F_{\mu\nu}$ é invariante por transformação de calibre. Por esse motivo, seremos capazes de associar suas componentes a campos físicos, como veremos na próxima seção.

4.2 Vórtices de Maxwell-Higgs

Com as ferramentas introduzidas na seção anterior, podemos definir a lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D^\mu\varphi\overline{D_\mu\varphi} - V(|\varphi|), \quad (4.10)$$

em que a barra denota conjugação complexa e V é um potencial escolhido de modo que a topologia dos mapas entre o infinito e a variedade de vácuo seja não trivial. Para isso, V deve ter mínimos em $|\varphi| = v$, para algum $v \neq 0$. Essa condição gera uma circunferência no plano complexo, então a classificação topológica das soluções dependerá dos grupos de homotopia $\pi_l(S_1)$. Mas, pelas propriedades (2.47) e (2.48), sabemos que esse grupo só será não trivial quando $l = 1$. A fronteira do espaço físico poderá ser identificada com uma circunferência de raio infinito se trabalharmos em um espaço assintoticamente plano de duas dimensões espaciais, com condições de contorno tomadas no infinito. Neste capítulo, tomamos o tensor métrico $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$, que corresponde ao espaço de Minkowski de três dimensões. O único grupo de homotopia relevante para nossa análise é $\pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$, então podemos classificar topologicamente as soluções de nosso problema por meio de uma única carga topológica $Q = n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Novamente, o sinal de n se relaciona à presença de vórtices e antivórtices.

Variando a ação dessa teoria com respeito $\overline{\varphi}$, e mantendo os outros campos fixos, encontramos equação de Euler-Lagrange relativa a esse campo

$$D_\mu D^\mu\varphi + V_{\overline{\varphi}} = 0. \quad (4.11)$$

A equação que resulta da variação de φ pode ser obtida por conjugação complexa dessa equação. As equações obtidas pela variação dos campos de gauge da teoria são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (4.12)$$

que dá as equações de Maxwell não homogêneas, com corrente

$$J^\mu \equiv (\rho_c, \mathbf{J}) = ie(\overline{\varphi} D^\mu \varphi - \varphi \overline{D^\mu \varphi}), \quad (4.13)$$

em que ρ_c é a densidade de carga e \mathbf{J} a corrente elétrica. Isso mostra que o campo escalar carregado origina uma corrente eletromagnética no sistema. A constante e , que introduzimos como um parâmetro real na derivada covariante, é a *constante de acoplamento*. Ela determina o quão fortemente acoplados os campos escalar e de calibre estão, e vemos que a magnitude da corrente aumenta com e . No limite $e \rightarrow 0$, que nos leva à teoria global, a corrente desaparece do sistema, desacoplando as equações (4.11) e (4.12).

Analisando a componente $\nu = 0$ em (4.12), encontramos a equação

$$\partial_k F^{k0} \equiv \partial_k E^k = -J^0, \quad (4.14)$$

que identificamos como a lei de Gauss, a partir da qual reconhecemos o campo elétrico $E^k \equiv F^{k0}$. As duas equações restantes podem ser combinadas em

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{E}, \quad (4.15)$$

com a identificação $\varepsilon^{ij} B \equiv -F_{ij}$, ou, simplesmente $B = F_{21}$, que é a única componente do campo magnético em duas dimensões espaciais. Quando escolhemos o potencial quártico

$$V(|\varphi|) = \frac{\lambda}{2}(v^2 - |\varphi|^2)^2, \quad (4.16)$$

a lagrangiana (4.10) tem a forma de Nielsen e Olesen [96], introduzida como uma extensão relativística da teoria de GL [84]. Nos referimos ao parâmetro λ como constante de GL.

Note que as componentes de (4.12) nos dão apenas duas das quatro equações de Maxwell. As outras duas não são equações de Euler-Lagrange, mas sim propriedades que seguem da definição de curvatura, e são, portanto, independentes da forma da lagrangiana. Com efeito, elas seguem diretamente da identidade de Bianchi. Como $F_{\mu\nu}$ é invariante por transformações de calibre, sua derivada covariante coincide com a derivada parcial usual, o que podemos verificar diretamente usando a definição de $F_{\mu\nu}$ e a regra de Leibniz para derivadas. A substituição desse resultado em (4.7) nos leva a

$$\partial_\nu F_{\mu\lambda} + \partial_\mu F_{\lambda\nu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \quad (4.17)$$

que nos dá as duas equações de Maxwell homogêneas $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$. Como essas equações seguem diretamente da forma de $F_{\mu\nu}$, qualquer solução das equações de campo dessa teoria será consistente com elas.

Podemos usar (2.29) para calcular o tensor de energia-momento do sistema, que é da forma

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\eta} F_\nu^\eta + \overline{D_\mu \varphi} D_\nu \varphi + \overline{D_\nu \varphi} D_\mu \varphi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4.18)$$

O tensor obtido por esse método já é simétrico e invariante por transformações de calibre. Nesse modelo, é possível verificar que o tensor canônico é diferente de (2.29). A energia obtida da componente 00 pode ser escrita na forma $E = T + U$, onde

$$T = \int d^2x \left[|D_0 \phi|^2 + \frac{1}{2} E^2 \right] \quad (4.19)$$

e

$$U = \int d^2x \left[|D_k \phi|^2 + \frac{1}{2} B^2 + V(|\phi|) \right]. \quad (4.20)$$

Essas duas integrais são invariantes sob transformações de calibre. Pode-se mostrar que a integral (4.19) é o quadrado da velocidade quando projetamos uma órbita $\{(\varphi, A_\mu)\}$ no espaço de configuração. Essa energia será diferente de zero quando o vórtice possuir momento angular ou linear. As configurações estáticas ficam definidas pelo requerimento $T = 0$, e correspondem, portanto, a pontos estacionários do funcional de energia potencial U do sistema. Pela forma de (4.19), fica claro que, em configurações estáticas, o campo elétrico é nulo. Note que em geral a condição $T = 0$ não implica soluções independentes do tempo. De fato, qualquer solução independente do tempo pode adquirir dependência temporal com uma transformação de calibre. Entretanto, é sempre possível fixar a liberdade temporal de calibre pelo requerimento $A_0 = 0$ [198]. Nessas condições, $T = 0$ implica $\partial_t \varphi = 0$.

O funcional U é o mesmo da teoria de Ginzburg-Landau, em que ele é interpretado como a energia livre de Helmholtz. Portanto, os vórtices estáticos dessas duas teorias são exatamente os mesmos. É no movimento que existe a distinção, visto que o operador de evolução temporal da teoria é consistente com uma teoria relativística, ao passo que o trabalho de Ginzburg e Landau foi desenvolvido no panorama da mecânica quântica não relativística. Essa equivalência no caso estático cria uma conexão entre as duas teorias, e nos permite interpretar nossos resultados em termos da teoria de supercondutores. Por esse motivo, iremos frequentemente nos referir a esses materiais na análise de nossos resultados, o que auxiliará na sua visualização.

A teoria de GL surgiu como um modelo fenomenológico que visa explicar a supercondutividade em termos de uma transição de fase de segunda espécie. A teoria usa como base a fenomenologia de Landau [199], em que a transição de fase ocorre quando o sistema sai de um estado simétrico para um assimétrico. Alguns materiais possuem uma temperatura crítica T_c , abaixo da qual correntes elétricas, chamadas supercorrentes, passam a fluir sem dissipação, caracterizando um estado supercondutor. Na teoria GL, a transição entre esses estados é modelada pela evolução contínua de um parâmetro de ordem, que vale zero no estado simétrico, no qual o material está em seu estado normal, e v no estado assimétrico, em que ele apresenta supercondutividade. Essa teoria fenomenológica possui boa concordância com resultados experimentais, e ainda é bastante usada na física da matéria condensada. Atualmente a supercondutividade pode ser explicada em nível microscópico através da teoria BCS [200], que é mais fundamental. Essa teoria mostra que a supercondutividade emerge devido à presença de um estado composto de dois elétrons acoplados de uma maneira específica, os pares de Cooper. As previsões da teoria de Ginzburg-Landau são consistentes com as da teoria BCS, a partir da qual ela pode ser deduzida no limite macroscópico em uma vizinhança da temperatura crítica do supercondutor [201].

As soluções de vácuo dessa teoria devem pertencer ao conjunto

$$\mathcal{V} = \{(\varphi, A_\mu) : \varphi = v e^{i\alpha(t, \mathbf{x})}, eA_\mu = \partial_\mu \alpha\}, \quad (4.21)$$

de modo que o campo escalar define uma circunferência no plano complexo e o campo de calibre pertence à mesma classe de gauge que $A_\mu = 0$, o que significa que o campo eletromagnético de vácuo é nulo nessa teoria. Para obter soluções de energia finita, precisamos impor que os campos tendam assintoticamente a \mathcal{V} , o que define as condições de contorno

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\varphi| = v, \quad (4.22a) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} A_\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha. \quad (4.22b)$$

A massa das perturbações em torno do vácuo pode ser encontrada a partir da linearização de (4.11) numa vizinhança de $(\varphi, A_\mu) \in \mathcal{V}$. Um cálculo muito semelhante ao que fizemos para kinks nos leva a

$$m_\psi = \sqrt{2\lambda} v, \quad (4.23)$$

em que m_ψ é a massa das perturbações escalares. Por outro lado, a linearização de (4.1a) dá

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -2e^2 v^2 A^\nu, \quad (4.24)$$

que podemos derivar em relação a x^ν para encontrar, após renomear índices mudos, a equação $\partial_\mu A^\mu = 0$. Da combinação desse resultado com (4.24), vem

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + 2(ev)^2 A^\nu = 0, \quad (4.25)$$

que corresponde à equação de onda de uma partícula com massa

$$M_f = \sqrt{2}ev. \quad (4.26)$$

Como sabemos da teoria quântica de campos, a partícula obtida do campo de gauge após quantização é o fóton. Isso significa que nessa teoria fótons são massivos! Essa massa existe na teoria porque a presença de um campo escalar cujo valor esperado no vácuo é não nulo (já que o vácuo clássico tem $|\varphi| = v$) induz a quebra espontânea da simetria $U(1)$. É essa simetria que faz com que fótons não tenham massa, e a aparição de fótons massivos nessa teoria é um exemplo do mecanismo de Higgs. Como sabemos da física de altas energias, fótons na natureza não possuem massa, mas isso não é um problema, pois a teoria GL é fenomenológica e, portanto, (4.26) pode ser vista como uma massa efetiva. Em outras palavras, a interação com o supercondutor faz com que, dentro desse material, o fóton se comporte como se tivesse uma massa.

A teoria discutida nesta seção pode também ser encarada sob um outro ponto de vista, obtido quando inserimos esse sistema bidimensional num espaço de três dimensões espaciais. Nesse caso, os campos são constantes na direção ortogonal ao plano, e as condições de contorno continuam sendo tomadas exatamente da mesma maneira. Isso pode ser entendido como um supercondutor que possui simetria ao longo dessa dimensão, de modo que o plano que estamos considerando é uma seção transversal do material estudado. Nesse caso, o campo magnético está na direção \hat{z} , ao longo do qual ele é constante, e os vórtices se tornam cordas. Como essas cordas são infinitas, sua energia também o é, mas a energia por unidade de comprimento continua limitada, e os resultados desenvolvidos nesta seção continuam válidos com algumas adaptações imediatas.

4.2.1 Quantização do fluxo e carga topológica

Uma das características mais importantes de supercondutores é o efeito Meissner, que consiste na expulsão de linhas magnéticas do interior do material pela corrente não dissipativa que caracteriza o estado supercondutor [202]. Entretanto, mostraremos agora que, quando as condições de contorno do problema induzem vórtices, esse efeito é parcialmente negado pela aparição de um fluxo magnético quantizado. Para demonstrar esse resultado, vamos calcular o fluxo magnético diretamente pela sua definição [203], dada por

$$\Phi = \int_S B da = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.27)$$

em que foi usado o teorema de Stokes. No exemplo considerado nesta seção, o domínio é o plano com um ponto no infinito, i.e., $S = \mathbb{R}^2 \cup (\infty)$. Nesse caso podemos tomar a fronteira como uma circunferência de raio infinito, que topologicamente é simplesmente $\partial S = S_1^\infty$. É natural parametrizar S_1^∞ por meio de coordenadas polares, em termos das quais $\mathbf{A} = A_r \hat{r} +$

$A_\theta \hat{\theta}$. Entretanto, sabemos que o vetor tangente à circunferência é paralelo a $\hat{\theta}$, de modo que a direção ortogonal \hat{r} não contribui para o cálculo. Usando esse resultado e as condições de contorno (4.22b), encontramos o fluxo

$$\int_S B da = \frac{1}{e} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} d\theta = \frac{2\pi n}{e}; n \in \mathbb{Z}, \quad (4.28)$$

em que n corresponde ao número de voltas que o campo escalar φ completa no espaço interno quando S_1^∞ é circulada uma vez. A necessidade de que n seja um inteiro vem do requerimento de que φ seja uma função univalorada, visto que $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ correspondem ao mesmo ponto do espaço, e devem, portanto, ser mapeados no mesmo número complexo. Embora essa demonstração tenha sido dada no espaço plano, esse é um resultado muito mais geral da teoria de fibrados, e vale para qualquer superfície compacta S [14] em duas dimensões. A equação acima pode ser usada para definir a carga topológica das soluções, dada por

$$Q_t \equiv n = \frac{e}{2\pi} \int_S B da. \quad (4.29)$$

Esse inteiro é denominado *winding number*, ou número de voltas, e é um invariante topológico que caracteriza mapas entre S_1 e o espaço interno da teoria. O fluxo encontrado acima é quantizado com quantum $2\pi/e$, inversamente proporcional à constante de acoplamento. Note a semelhança entre equação (4.28) e o teorema de Gauss-Bonnet que mencionamos anteriormente [185]: ela relaciona a integral da forma de curvatura $F_{ij} dx^i \wedge dx^j$ a um invariante topológico multiplicado pelo fator 2π .

Há ainda uma outra perspectiva a partir da qual a regra de quantização (4.28) pode ser interpretada, e que melhor ilumina a associação entre essa regra de quantização e os vórtices. Iremos agora desenvolver o argumento que conduz a essa associação. Seja $\varphi = |\varphi| e^{i\alpha(\mathbf{x})}$ a forma funcional de φ em alguma vizinhança no plano. Como a dependência temporal não afeta em nada o argumento, estamos considerando fixa essa coordenada, de modo que só analisamos a dependência espacial de α . Poderíamos tentar remover a fase de φ se considerarmos a transformação de calibre $\gamma = e^{-i\alpha}$, que torna φ real. Se realizarmos transformações desse tipo ao longo do plano de modo que as transições entre as vizinhanças permaneçam contínuas, então a fase do campo será nula em toda a circunferência S_1 . Mas a demonstração que demos em (4.28) deixa claro que, se $\alpha = 0$ nessa curva, então $\Phi = N = 0$. O que aconteceu? Essa aparente contradição é na verdade explicada pelo fato de que podem existir pontos no plano que levam o argumento acima à falha: os zeros da seção. Com efeito, quando $\varphi = 0$ a fase, como qualquer outro ângulo do plano complexo, não pode ser definida. Por conseguinte, a atuação do grupo de calibre na seção se torna singular nesse ponto, devido à indefinição da ação de $U(1)$. É possível mostrar em termos gerais [14] que é *impossível* manter a fase constante ao longo de um contorno que contenha zeros da seção em seu interior. Se isso fosse possível, poderíamos deformar a solução de modo a tornar a fase constante em uma circunferência arbitrariamente pequena centrada no zero. Mas essa possibilidade não existe para uma função suave, visto que a fase precisaria ser indefinida no zero e ter um valor finito constante em uma vizinhança arbitrariamente pequena desse ponto. O fluxo total pode ser completamente atribuído a essas singularidades, que são pontos muito especiais da teoria (em particular, são os únicos cujo valor não pode ser alterado por uma transformação de calibre). Vamos assumir que os zeros da solução sejam isolados e escolher, para cada zero \mathbf{x}_k , um disco U_k arbitrariamente pequeno com centro nesse zero. Na fronteira da região $S - \bigcup U_k$, cujo contorno não contém zeros, a fase pode ser mantida constante e, portanto, a integral $\oint_{S_1^k} \mathbf{A} d\mathbf{l}$ deve ser nula nesse contorno. Combinando a construção acima

com (4.28), encontramos

$$n = \frac{e}{2\pi} \sum_k \oint_{S_1^k} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \sum_k n_k, \quad (4.30)$$

em que S_1^k é uma circunferência arbitrariamente pequena que corresponde à fronteira de U_k . Os números n_k são inteiros que satisfazem $n_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \theta} d\theta$, em que α_k é a fase de φ ao longo de S_1^k . Esses inteiros correspondem ao winding number de cada zero, e definem sua multiplicidade [204], que é o número de zeros naquele ponto. Se, por exemplo, vale $n_k = 2$ para um dado k , então temos dois zeros coincidentes em \mathbf{x}_k . Quando $n_k = 1$, a solução contém um vórtice em \mathbf{x}_k , e quando $n_k = -1$, existe um antivórtice nesse ponto. O sinal negativo significa que a contribuição do antivórtice para o fluxo magnético possui um sinal invertido. Por (4.30), vemos que apenas esses pontos contribuem para o fluxo total! Isso significa que o fluxo magnético é preso nos vórtices da superfície. Se considerarmos que o plano está inserido em um espaço tridimensional, podemos dizer que vórtices contém linhas de fluxo magnético na direção \hat{k} , enquanto nos antivórtices essas linhas têm sentido contrário, com vetor $-\hat{k}$. Se um vórtice e um antivórtice estão presentes na configuração, as duas contribuições se cancelam, ao passo que as contribuições de múltiplos vórtices se somam. Cada um desses zeros possui identidade própria e pode se movimentar pelo plano de forma independente. Podemos por exemplo, começar com uma configuração na qual todos os vórtices estão localizadas no mesmo ponto e obter, após alguns instantes, uma situação em que esses vórtices estão espalhados pelo plano. Esses zeros interagem entre si, e a posição dos defeitos em uma configuração estável dependerá fundamentalmente das forças entre eles.

Na teoria de Ginzburg-Landau, o parâmetro λ em (4.16) divide os materiais em duas classes: os supercondutores tipo-I, para os quais $\lambda < e^2$, e os tipo-II, caracterizados por $\lambda > e^2$. Esses dois tipos são diferenciados pela forma como o material, quando em uma temperatura $T < T_c$ reage à influência de um campo magnético externo. Esse campo induz correntes no supercondutor, que circulam para cancelar o campo magnético dentro do material [191]. Esse cancelamento requer que as correntes criem, no interior do material, um campo magnético, com o custo de aumentar energia livre de Helmholtz (4.16). Se o campo externo for suficientemente grande, passa a ser energeticamente mais vantajoso que o material retorne ao estado normal, em que as correntes que impediam o campo de penetrar o seu interior desaparecem. Em materiais tipo-I, essa transição ocorre abruptamente quando o campo magnético atinge um valor crítico B_c , que depende da temperatura. Por outro lado, os materiais tipo-II possuem dois campos críticos B_{c1} e B_{c2} . Quando o campo é maior que B_{c2} , a supercondutividade é destruída, mas para valores intermediários entre esses dois campos críticos, aparece um estado misto caracterizado pela presença de vórtices. Nesse caso, surgem no supercondutor regiões finitas em que existe um caroço de material no estado normal, caracterizado por um ponto (\mathbf{x}_0) tal que $\varphi(\mathbf{x}_0) = 0$, que identificamos com o vórtice. O fluxo magnético fica preso na vizinhança desses pontos, o que explica fisicamente a relação entre o número de zeros de φ e o fluxo total. À medida que nos distanciamos desse zero, o campo escalar aumenta em magnitude, e a grandes distâncias o material se comporta como um supercondutor, o que é compatível com a condição de contorno $|\varphi(\infty)| = v$.

Como a posição dos vórtices caracteriza um ponto em que o material está no estado normal, o campo magnético deve ter máximos nesses pontos, e deve decrescer à medida que nos afastamos dos zeros. Do mesmo modo, a densidade de energia também terá picos na vizinhança dos vórtices, de modo que o mero conhecimento da localização desses pontos já nos fornece informações importantes sobre a física da solução, incluindo sua dinâmica. Quando estudarmos, na próxima subseção, o acoplamento crítico, veremos que esses pontos se tornarão ainda

mais importantes, visto que a posição e número dos zeros de φ é suficiente para especificar completamente qualquer solução estática nesse regime.

A equação (4.28) provê um raro exemplo de uma lei de quantização mensurável na escala macroscópica. Pode causar estranheza o fato de que essa relação foi deduzida no nível clássico. Na verdade, esse efeito é fundamentalmente quanto-mecânico, e só somos capazes de derivar essa relação classicamente devido ao caráter fenomenológico da teoria. Apenas uma análise quântica pode nos fornecer a relação $e = Q_c/\hbar$, que relaciona o parâmetro e , que aqui é apenas uma constante de acoplamento, à carga elétrica de um par de Cooper. Da teoria BCS, sabemos que Q_c vale o dobro da carga do elétron [200].

Em um domínio finito, existem ainda duas possibilidades que não existem no plano infinito que estamos considerando, mas que merecem ser mencionadas dada a sua aplicabilidade em uma situação realista em que o supercondutor é finito. Uma dessas possibilidades é dada pelos vórtices anelares [205], nos quais os zeros de φ não são um conjunto discretos de pontos, e sim linhas contínuas no formato de anéis. Outra diferença é que, no caso de um domínio finito, a condição $n_k \in \mathbb{Z}$ pode ser relaxada, sendo de fato possível mostrar a existência de minimizadores da energia com carga topológica semi-inteira [206].

4.2.2 Vórtices criticamente acoplados

Assim como os modelos estudados no capítulo anterior, o funcional de energia da teoria de Maxwell-Higgs permite a realização de um procedimento de Bogomol'nyi. Entretanto, o vínculo de Bogomol'nyi não pode ser encontrado para qualquer escolha dos parâmetros da teoria, mas sim para um caso muito especial conhecido como acoplamento crítico, caracterizado pela condição $\lambda = e^2$. Essa relação entre as constantes não é de modo algum um vínculo arbitrário: ela representa a situação em que as massas (4.23) e (4.26) se tornam iguais. Na teoria quântica, essas quantidades dão as massas das partículas responsáveis pela intermediação da força escalar (que, como acontecia nas soluções tipo kink, causa repulsão entre dois defeitos com carga topológica de mesmo sinal) e eletromagnética, e é possível mostrar que quando suas massas são iguais a força entre vórtices da configuração se anula [207]. Na teoria de Ginzburg-Landau, a fração $\frac{\lambda}{e^2}$ representa uma tensão superficial entre os estados normal e supercondutor. Quando essa fração é menor que um, o supercondutor é tipo-I, e a tensão é positiva, e quando ela é maior que um (tipo-II) ela é negativa [207]. A condição $\lambda = e^2$ representa, portanto, o ponto em que essa tensão se anula.

A energia da configuração é $E = T + U$, onde as integrais tem a forma (4.19) e (4.20). A energia cinética já é uma soma de termos quadráticos, então basta completar quadrados em U para encontrar

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_S d^2x (B^2 + 2D_k \varphi \overline{D_k \varphi} + e^2(v^2 - |\varphi|^2)^2) \\ &= \int_S d^2x \left\{ \frac{1}{2} [B \mp (v^2 - |\varphi|^2)]^2 \pm eB(v^2 - |\varphi|^2) + |D_1 \varphi \pm iD_2 \varphi|^2 \right. \\ &\quad \left. \mp i(\overline{D_1 \varphi} D_2 \varphi - \overline{D_2 \varphi} D_1 \varphi) \right\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para encontrar o termo entre parênteses, note que

$$\begin{aligned} \overline{D_1 \varphi} D_2 \varphi &= \partial_1 (\overline{\varphi} D_2 \varphi) - \overline{\varphi} (\partial_1 \partial_2 \varphi + ieA_2 \partial_1 \varphi + ie\varphi \partial_1 A_2) \\ &\quad - ieA_1 \overline{\varphi} \partial_2 \varphi + e^2 A_1 A_2 |\varphi|^2, \end{aligned} \quad (4.32)$$

enquanto $\overline{D_2\varphi}D_2\varphi$ pode ser obtido de (4.32) pela transformação $1 \leftrightarrow 2$. Da subtração dessas expressões vem

$$(\overline{D_1\varphi}D_2\varphi - \overline{D_2\varphi}D_1\varphi) = [\partial_1(\overline{\varphi}D_2\varphi) - \partial_2(\overline{\varphi}D_1\varphi)] + ieB|\varphi|^2. \quad (4.33)$$

Mas o termo entre parênteses é simplesmente o rotacional de um vetor que tende a zero devido às condições de contorno do problema. Pelo teorema de Stokes, vemos então que sua integral não contribuirá para a energia. Combinando esses resultados, podemos escrever a energia total na forma

$$E = \frac{1}{2} \int_S d^2x \left\{ [B \mp e(v^2 - |\varphi|^2)]^2 + |D_1\varphi \pm iD_2\varphi|^2 \right\} + \frac{1}{2} \int_S d^2x \{E^2 + |D_0\varphi|^2\} \pm ev^2 \int_S d^2xB. \quad (4.34)$$

Utilizando a quantização de fluxo (4.28), encontramos

$$E \geq 2\pi v^2 |n|, \quad (4.35)$$

de modo que a energia é limitada em cada setor por um termo proporcional à carga topológica. Para que esse vínculo seja saturado, todos os termos quadráticos em (4.34) precisam se anular. Impondo que a energia cinética seja nula, obtemos $D_0\varphi = 0$ e $\mathbf{E} = 0$, mostrando que as soluções BPS são necessariamente estáticas e, em particular, não possuem carga elétrica. Como mencionamos anteriormente, é sempre possível nessa teoria tomar $A_0 = 0$ por fixação do gauge temporal. Com essa escolha de calibre, a equação $D_0\varphi = 0$ implica que φ é independente do tempo.

Para que (4.35) seja saturado, é necessário também que a primeira integral em (4.34) se anule, o que leva às equações BPS

$$B = \pm e(v^2 - |\varphi|^2), \quad (4.36a) \quad \text{e} \quad (D_1 \pm iD_2)\varphi = 0, \quad (4.36b)$$

em que os sinais superiores correspondem a soluções tipo vórtice, e os sinais inferiores a anti-vórtices. Essas soluções estão relacionadas pela transformação $(\varphi, A_\mu) \rightarrow (\bar{\varphi}, -A_\mu)$, de modo que será suficiente para nossa discussão considerar as equações de sinal positivo. Além disso, as constantes e^2 e v^2 não terão mais nenhum papel importante em nossa discussão, então vamos, a partir de agora, tomar $e = v = 1$.

A própria forma das equações (4.36) nos fornece informações valiosas sobre o sistema, que podem ser obtidas antes mesmo de encontrarmos uma solução explícita. Por (4.36a), vemos que o campo magnético sempre possui picos nas posições dos vórtices, e sua magnitude diminui à medida que $|\varphi|$ tende a 1, o que já havíamos intuído na seção passada com base na interpretação física de φ como um parâmetro de ordem da teoria GL. Além disso, é possível demonstrar, usando apenas as equações (4.36), que $|\varphi| \leq 1$ em todo o plano [189], o que mostra a impossibilidade de inversão de fluxo nessa teoria.

Para analisar a equação (4.36b), é conveniente introduzir a variável complexa $z = x + iy$. Podemos então escrever essa equação na forma $D\varphi(z) = 0$, onde $D \equiv \partial_1 + i\partial_2 + i(A_1 + iA_2)$, que é uma equação de transporte paralelo no plano complexo. Usando essa equação e o chamado lema $\bar{\partial}$ de Poincaré, o físico matemático Clifford Taubes foi capaz de provar o importante resultado [189]

Proposição 1. Seja (φ, \tilde{A}) uma solução de $D\varphi(z) = 0$, onde $D = (\partial_1 + i\partial_2) + i\tilde{A}$. Então o conjunto de zeros de $\varphi(z)$ é discreto e finito. Para cada zero z_k de φ , existe uma vizinhança na qual

$$\varphi(z) = (z - z_k)^{n_k} \phi(z), \quad (4.37)$$

onde n_k é a multiplicidade do zero e $\phi(z)$ é uma função não nula nessa vizinhança.

Essa proposição não apenas nos dá informação sobre a forma de φ próximo a um vórtice, como também comprova que, no BPS, os zeros de φ são necessariamente isolados, e φ é uma função analítica em cada um deles. Uma observação muito importante é que a proposição acima é demonstrada usando apenas a equação (4.36b). Essa equação ocorre em muitos dos modelos mais conhecidos envolvendo vórtices BPS locais, incluindo todos que consideraremos neste trabalho. O resultado acima deve, portanto, continuar válido nesses casos, mesmo que as outras equações do modelo sejam diferentes. Se tivéssemos considerado antivórtices em vez de vórtices, teríamos um resultado similar, mas com um polo de multiplicidade n_k .

As equações (4.36) podem ser combinadas em uma única igualdade. Para isso, definimos a variável $\xi \equiv \ln|\varphi|$, válida quando $|\varphi| \neq 0$. As partes real e imaginária de (4.36b) nos dão, respectivamente,

$$\partial_1 \xi - \partial_2 \alpha = -A_2 \quad (4.38)$$

e

$$\partial_2 \xi + \partial_1 \alpha = A_1. \quad (4.39)$$

Derivando (4.38) com respeito a x_1 e (4.39) com respeito a x_2 e somando as expressões resultantes, encontramos o campo magnético:

$$B = -\nabla^2 \xi, \quad (4.40)$$

de modo que $\nabla^2 \xi + [1 - \exp(2\xi)] = 0$. Essa equação é válida fora dos zeros de φ . Como sabemos da seção anterior, o fluxo magnético pode ser completamente atribuído a discos infinitesimais contendo os zeros de φ . Como a contribuição de cada zero é finita mesmo que o disco seja infinitamente pequeno, precisamos adicionar a essa equação “fontes” proporcionais às deltas de Dirac $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$, cuja integração leva aos quanta de fluxo magnético. Exigindo consistência com (4.28), encontramos a Equação de Taubes:

$$\nabla^2 \xi + [1 - \exp(2\xi)] = 2\pi \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad (4.41)$$

em que os \mathbf{x}_j são zeros não necessariamente distintos. Cada zero de multiplicidade n_k é contado n_k vezes em (4.41). Essa equação tende a simplificar o problema, e é uma ferramenta bastante poderosa de análise. Essa forma é normalmente usada em demonstrações formais envolvendo vórtices BPS, como a provas de existência e unicidade.

Derivando as equações de Bogomol’nyi, é possível verificar que essas soluções resolvem as equações de Euler-Lagrange do sistema. Além disso, (4.41) pode ser usada para provar um resultado muito mais forte: a *equivalência* entre (4.41) e as equações de segunda ordem do sistema no caso estático [189]. Em outras palavras, todos os pontos estacionários do funcional de energia de GL no acoplamento crítico são soluções BPS.

Um outro resultado importante da teoria foi obtido por Erick Weinberg [208], que introduziu uma maneira de contar os modos zero obtidos pela linearização das equações BPS mediante

uma perturbação $\eta = (\delta\phi_1 \ \delta\phi_2 \ \delta A_1, \delta A_2)$, em que ϕ_1 e ϕ_2 são, respectivamente, as partes real e imaginárias de φ . Isso nos leva a uma equação da forma $\mathcal{D}\eta = 0$, onde

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} (\partial_1 - A_2) & -(\partial_2 + A_1) & -\phi_2 & -\phi_1 \\ (\partial_2 + A_1) & (\partial_1 - A_2) & \phi_1 & -\phi_2 \\ \phi_1 & \phi_2 & -\partial_2 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

A última linha da matriz acima vem do gauge de Coulomb $\partial_k A_k = 0$. Essa condição, juntamente com o gauge temporal $A_0 = 0$, serve para fixar nossa liberdade de calibre e impedir que flutuações correspondendo a transformações de gauge sejam incluídas em nossa contagem. O argumento usado por Weinberg não chega a ser inacessivelmente complicado, mas é um pouco extenso por se basear em operações envolvendo matrizes 4×4 , e também envolve algumas sutilidades matemáticas. Por esse motivo, a demonstração completa não será incluída aqui, mas será útil ao menos elencar os pontos chave da demonstração, visto que essa técnica pode ser utilizada para uma grande variedade de modelos (incluindo vórtices de simetria maior, monopolos e instantons). Portanto, será útil ter em mente ao menos a ideia por trás desse argumento, ao qual nos referiremos novamente ao longo deste trabalho. As sutilezas supracitadas (como a possibilidade de um espectro contínuo para os operadores diferenciais) são abordadas em [209], onde também são incluídos maiores detalhes sobre os cálculos.

A demonstração usa um invariante topológico denominado índice que, para um operador diferencial elíptico, é dado por $I(\mathcal{D}) = \text{Dim}(\ker(\mathcal{D})) - \text{Dim}(\ker(\mathcal{D}^\dagger))$, em que $\ker(\mathcal{O})$ representa o núcleo de uma transformação linear, definido como o conjunto de todas as soluções de $\mathcal{O}\Psi = 0$. Esse índice é especialmente útil quando o núcleo de \mathcal{D}^\dagger não tem nenhum elemento não trivial. Isso acontece com frequência em soluções BPS, e nesse caso pode ser demonstrado se introduzirmos uma matriz conveniente M [208] e notarmos que $M\mathcal{D}^\dagger\eta = 0 \implies \mathcal{D}^\dagger\eta = 0$, que deve levar a um sistema mais simples. Nesse caso, o número de flutuações linearmente independentes da equação BPS é simplesmente igual ao índice. Em espaços compactos, é possível mostrar que o índice satisfaz a fórmula

$$I(\mathcal{D}) = \text{Tr} \left(\frac{\beta^2}{\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger + \beta^2} - \frac{\beta^2}{\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} + \beta^2} \right) \quad (4.43)$$

para *qualquer* escolha do parâmetro real β [209]. Então podemos escolher β da maneira que for mais conveniente para nossos cálculos. Para vórtices, convém tomar o limite $\beta \rightarrow \infty$. Por multiplicação direta, podemos verificar que $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} = -\nabla^2 + L_1$ e $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger = -\nabla^2 + L_2$, em que L_1 e L_2 só dependem das derivadas primeiras e dos campos. Expandindo as quantidades dentro do traço em (4.43), encontramos

$$(\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} + \beta^2)^{-1} = (-\nabla^2 + \beta^2)^{-1} + (-\nabla^2 + \beta^2)^{-1}L_1(-\nabla^2 + \beta^2)^{-1} + \dots \quad (4.44)$$

e

$$(\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger + \beta^2)^{-1} = (-\nabla^2 + \beta^2)^{-1} + (-\nabla^2 + \beta^2)^{-1}L_2(-\nabla^2 + \beta^2)^{-1} + \dots \quad (4.45)$$

que substituímos em (4.43) até a ordem dominante. Fazendo isso, eliminando termos semelhantes e usando a propriedade cíclica do traço ($\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$), podemos escrever

$$I(\mathcal{D}) = \text{Tr} \left(\frac{\beta^2(L_1 - L_2)}{(-\nabla^2 + \beta^2)^2} \right) = \beta^2 \int d^2x \langle x | (-\nabla^2 + \beta^2)^{-1} | x \rangle \text{Tr}(L_1 - L_2), \quad (4.46)$$

válida quando $\beta \rightarrow \infty$. Agora precisamos dos elementos diagonais de L_1 e L_2 para calcular o traço. Por multiplicação direta das matrizes \mathcal{D} e \mathcal{D}^\dagger , encontramos $(L_1)_{11} = |\mathbf{A}|^2 + B + \phi_1^2$;

$(L_1)_{22} = |\mathbf{A}|^2 + B + \phi_2^2$; $(L_1)_{33} = (L_1)_{44} = |\varphi|^2$; $(L_2)_{11} = (L_2)_{22} = |\mathbf{A}|^2 - B + |\varphi|^2$; $(L_2)_{33} = |\varphi|^2$ e $(L_2)_{44} = 0$, em que B é o campo magnético. Calculando o traço, encontramos

$$\text{Tr}(L_1 - L_2) = 4B. \quad (4.47)$$

Substituindo esses resultados em (4.46) e calculando o elemento de matriz $\langle x | (-\nabla^2 + \beta^2)^{-1} | x \rangle$ na base em que ∇^2 é diagonal, obtemos

$$I(\mathcal{D}) = 4\beta^2 \int d^2x B \int \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^2k}{\beta^2 + k^2} = (4\beta^2)(2\pi n) \left(\frac{1}{4\pi\beta^2} \right) = 2n. \quad (4.48)$$

O resultado acima mostra que, para cada solução BPS, existem $2n$ perturbações infinitesimais que mudam a solução sem alterar sua energia. Em outras palavras, o espaço de moduli gerado pelas equações de primeira ordem do modelo possui dimensão $2n$, de modo que uma solução BPS (que, pela equivalência mencionada acima, é o caso de todas as soluções estáticas no acoplamento crítico) é especificada por $2n$ parâmetros independentes. Esses parâmetros podem ser identificados com a posição dos n zeros de φ , que especificam completamente a solução estática com fluxo $2\pi n$. À luz desse resultado, vemos que, no acoplamento crítico, os defeitos podem estar posicionados em qualquer ponto do plano, sem destruir a propriedade BPS. Isso só é possível porque os vórtices não interagem nesse regime: se houvesse força entre eles, então a posição dos defeitos seria tal a minimizar essa energia de interação.

4.2.3 Soluções com simetria rotacional

Encerraremos esta seção encontrando uma solução explícita para as equações de Ginzburg-Landau. Mesmo no BPS, o problema geral ainda é bastante difícil, mas é possível simplificá-lo consideravelmente se supusermos que as soluções satisfazem uma condição de simetria. Seguiremos, portanto, o caminho proposto por Abrikosov [85], que primeiro foi capaz de encontrar soluções tipo vórtice para as equações de Ginzburg-Landau. O método consiste em tomar um ansatz, em que se assume que a solução é simétrica sobre rotações no plano em torno da origem. Para que esse método funcione, precisamos garantir que estamos tomando a solução mais geral possível consistente com essa simetria, a menos de transformações de calibre. A forma precisa desse ansatz pode ser obtida diretamente pela ação combinada da simetria rotacional e de calibre, o que dá origem a uma ação rotacionalmente invariante, correspondente à restrição simétrica do modelo [14]. Aqui, iremos apenas sugerir a forma da solução e mostrar que ela, de fato, é invariante por rotações. Tomaremos $e = v^2 = 1$, assim como na seção anterior.

Podemos simplificar bastante nossos cálculos se usarmos a liberdade de gauge a nosso favor. Primeiramente, podemos tomar o gauge temporal para fazer $A_0 = 0$, de modo que os campos no caso estático devem ser independentes do tempo. Para que a solução seja rotacionalmente simétrica as quantidades observáveis do modelo não podem depender da variável angular. Em particular, deve ser $\varphi = g(r)e^{i\alpha(r,\theta)}$ para alguma função $g(r)$. Se essa solução tem carga topológica n , sabemos que φ deve ter n zeros. Em uma configuração simétrica, todos esses zeros devem ter a *mesma* posição[†]. Esse ponto deve ser aquele pelo qual o eixo de rotação passa: se queremos uma solução simétrica sob rotações em torno da origem, então os zeros devem ser localizados nesse ponto, visto que qualquer outro tem sua posição alterada por rotações rígidas em volta da origem. Como a teoria possui invariância translacional, a escolha desse ponto é arbitrária, e tomaremos a posição dos zeros na origem por simplicidade.

[†]Neste ponto foi tacitamente suposto que os zeros de φ são isolados.

O campo magnético deve ser independente da coordenada θ , o que sugere $\mathbf{A} = \mathbf{A}(r)$. Por outro lado, o cálculo de (4.28) nos revela que $\partial_\theta \alpha(r, \theta) \rightarrow n\theta$ assintoticamente, então podemos tomar, com uma escolha do calibre angular, $\alpha(r, \theta) = n\theta + \beta(r, \theta)$, para alguma função β que tenda assintoticamente a zero. Mas como todos os zeros estão na origem, podemos deformar S_1^∞ em uma circunferência S_1^r de raio arbitrário. O campo escalar precisa permanecer univocamente definido em todo o plano, de modo que $\partial_\theta \beta(S_1^r) = 0$ para qualquer r . Então $\beta = \beta(r)$, e o fator $e^{i\beta}$ pode ser eliminado por uma redefinição de $g(r)$. Adicionalmente, podemos usar nossa liberdade de calibre radial para fazer $A_r = 0$, o que pode ser feito com o uso da transformação de calibre $\gamma = \exp(i \int dr f(r))$, que resulta na multiplicação de φ por uma função unitária, que absorvemos em $g(r)$. Sobra apenas A_θ , que deve depender somente da coordenada radial. A discussão desse parágrafo sugere uma solução da forma

$$\varphi = g(r)e^{in\theta}, \quad (4.49a) \quad \mathbf{A} = \frac{n-a(r)}{r} \hat{\theta}, \quad (4.49b)$$

que define o vórtice de Abrikosov. Note que uma rotação $\theta \rightarrow \theta + \theta_0$ não tem efeito observável na teoria. As funções $g(r)$ e $a(r)$ devem estar sujeitas às condições de contorno :

$$g(0) = 0, \quad (4.50a) \quad a(0) = n, \quad (4.50c)$$

$$g(r \rightarrow \infty) = 1, \quad (4.50b) \quad a(r \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.50d)$$

A hipótese de simetria rotacional reduz o problema, que originalmente envolvia três equações diferenciais parciais acopladas para o mesmo número de funções, a um sistema envolvendo duas equações diferenciais para $a(r)$ e $g(r)$. A simetria de reflexão $\varphi(r, \theta) \rightarrow \bar{\varphi}(r, -\theta)$ da teoria pode ser usada para mostrar que $g(r)$ é uma função real, que pode ser identificada com o módulo de φ . O próximo passo é encontrar as quantidades mensuráveis em termos de $a(r)$ e $g(r)$, bem como as equações de segunda e primeira ordem do caso simétrico.

O funcional de energia para soluções rotacionalmente simétricas é dado por

$$E[g, a] = 2\pi \int dr r \left[\frac{B^2(r)}{2} + |D_r \varphi|^2 + \frac{1}{r^2} |D_\theta \varphi|^2 + V(g) \right]. \quad (4.51)$$

O campo magnético em coordenadas polares é dado pelo rotacional de \mathbf{A} , que é simplesmente

$$B(r) = -\frac{1}{r} \partial_r A_\theta = -\frac{a'(r)}{r}, \quad (4.52)$$

em que o símbolo ' no último termo denota derivada radial. Como $A_r = 0$, a derivada covariante é simplesmente ∂_r , então $|D_r \varphi|^2$ é g'^2 . Como $A_\theta = a(r) - n$, a derivada covariante na direção angular vale $D_\theta \varphi = i(n + (a(r) - n))\varphi = ia\varphi$. Substituindo esses resultados e o potencial em (4.51), encontramos

$$E[g, a] = 2\pi \int dr \left[\frac{a'^2}{2r} + rg'^2 + \frac{a^2 g^2}{r} + \frac{\lambda}{2} (1 - g(r)^2)^2 \right]. \quad (4.53)$$

As equações de campo podem ser encontradas se escrevermos (4.11) e (4.12) em coordenadas polares. Mas é muito mais fácil notar que essas equações devem ser pontos estacionários do funcional (4.53), o que requer apenas derivar a densidade de energia em relação a a , g e suas derivadas primeiras. As equações de Euler-Lagrange para essas soluções são, então $\frac{\delta E}{\delta a} = 0$ e $\frac{\delta E}{\delta g} = 0$, ou

$$\frac{1}{r} (rg')' = \frac{ga^2}{r^2} + \lambda(1 - g^2)g, \quad (4.54)$$

$$\left(\frac{a'}{r} \right)' = \frac{2ag^2}{r}. \quad (4.55)$$

Suponha que $a(r)$ e $g(r)$ possuem o número suficiente de derivadas para garantir uma expansão finita em série de potências. Usando essa expansão, podemos mostrar que, perto da origem, $g(r) \propto r^n$ em ordem dominante, ao passo que $a(r) - n \propto r^2$. Por outro lado, a expansão dessas funções em um ponto no infinito revela que ambas decaem assintoticamente com um fator de $r^{-1/2}e^{-Cr}$, em que a constante C vale m_ψ para $g(r)$ e M_f para $a(r)$, que correspondem às massas calculadas para flutuações em torno do vácuo.

Um problema muito importante aparece quando as equações (4.54) são consideradas fora do BPS. Embora a solução (4.49) esteja topologicamente protegida contra decaimento no vácuo, nada impede que ela seja deformada em outra solução de mesma carga topológica, caracterizada pelo mesmo número de zeros. Assim como no acoplamento crítico, os vórtices ainda podem, em princípio, se movimentar livremente pelo plano. Diferentemente do que ocorre no acoplamento crítico, entretanto, soluções correspondentes a diferentes posições dos vórtices não estão relacionadas por modos zero e, portanto, não têm a mesma energia em geral. A consequência é que uma configuração que inicialmente satisfaz (4.49) e (4.54), pode ter sua forma mudada com o passar do tempo, e passar a uma configuração sem simetria. A estabilidade de (4.49) (e de qualquer outra solução das equações de movimento) dependerá fundamentalmente das forças entre os vórtices. Um vórtice ou antivórtice fundamental, com $n = \pm 1$, é estável e apresenta simetria rotacional. Quando $n > 1$, existem outros vórtices na configuração, que interagem por meio de forças repulsivas, se $\lambda > 1$, ou atrativas, se $\lambda < 1$. Segue que, para supercondutores tipo-II, a solução (4.49) é *instável* fora do acoplamento crítico, a menos que seja $n = 1$. Com efeito, a força repulsiva entre os zeros é maximizada quando eles estão no mesmo ponto, o que naturalmente faz com que eles sejam repelidos. Nesse caso, uma configuração de n vórtices tende a formar uma rede triangular, conhecida como rede de Abrikosov. Essa rede foi fotografada na Figura (1.4), mostrada na Introdução. Quando $\lambda < 1$, os zeros se atraem, e a solução de menor energia é da forma (4.49). Vórtices não são tipicamente encontrados em supercondutores tipo-I, mas a lagrangiana (4.10) também pode ser usada em outros contextos de física de altas energias, de modo que o caso $\lambda < 1$ também pode ser importante. Esses resultados já haviam sido conjecturados com base em argumentos qualitativos e simulações numéricas [56, 189, 210], e foram rigorosamente demonstrados em [156], mais de quatro décadas depois do trabalho de Abrikosov. Ainda que a solução estável não seja da forma (4.49), o campo tende a ser simétrico em uma vizinhança de cada vórtice, de modo que as equações (4.54) para $n = 1$ aproximam localmente uma solução real.

Examinemos agora as equações de primeira ordem que aparecem quando $\lambda = 1$. Elas podem ser obtidas por completamento de quadrados em (4.53) ou mudança de coordenadas em (4.36). Qualquer que seja o método, as equações obtidas são

$$g' = \mp \frac{ag}{r}, \quad (4.56a)$$

e

$$-\frac{a'}{r} = \pm(1 - g^2), \quad (4.56b)$$

em que os sinais superiores correspondem a soluções tipo vórtice e os inferiores a antivórtices. Essa é a forma mais simples possível para as equações de movimento, que agora foram reduzidas a duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Mesmo nesse caso, ainda é necessário recorrer a métodos numéricos para obter $g(r)$ e $a(r)$ explicitamente, pois uma solução em forma fechada não é conhecida. A solução $(g(r), a(r))$ para $n = 1$, bem como sua densidade de energia, que vale $\rho(r) = B^2(r) + 2g'^2$ no BPS, podem ser vistas na Figura 4.1.

Vemos que essa solução é caracterizada por campos que se aproximam monotonamente do vácuo. À medida que nos afastamos da origem, o material adquire gradualmente as proprieda-

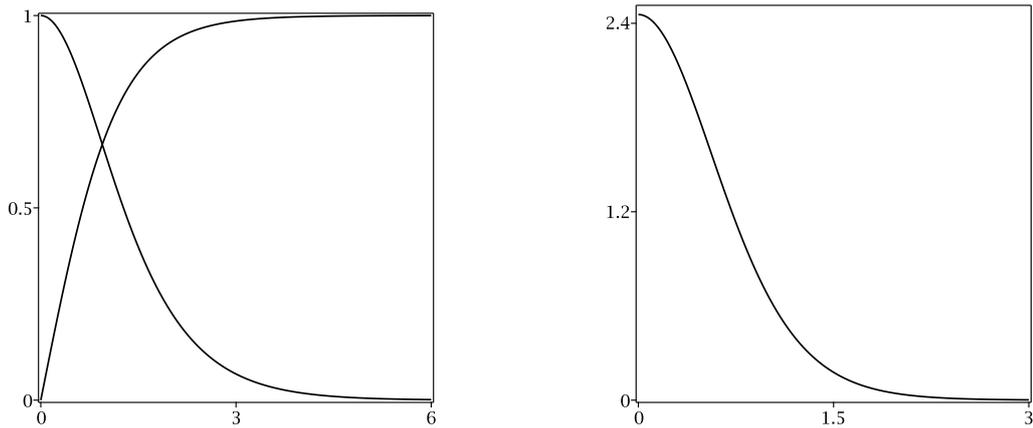


Figura 4.1 Solução $g(r)$ (esquerda, linha ascendente), $a(r)$ (esquerda, linha descendente) de (4.56) com carga topológica $n = 1$. Na direita, mostramos a densidade de energia correspondente a esse defeito.

des de um supercondutor e, por esse motivo, o campo magnético vai diminuindo gradualmente, como uma função estritamente decrescente que se anula no infinito, onde vale o efeito Meissner. Soluções com outros valores de n possuem o mesmo comportamento qualitativo, mas evidentemente resultam em um fluxo magnético maior.

4.3 Vórtices generalizados em teorias com simetria aumentada

Uma importante generalização do modelo de Maxwell-Higgs pode ser obtida por meio do aumento do grupo de simetria. Em particular, podemos considerar grupos da forma $U(1) \times U(1) \times \dots$, que continuam sendo abelianos. Os outros fatores de $U(1)$ induzem novos campos “eletromagnéticos”, também invariantes sob uma simetria $U(1)$. Essas interações são análogas, mas não equivalentes: cada uma possui seu próprio fóton e é medida com um aparelho diferente. O caso $U(1) \times U(1)$ é particularmente importante, por ser muito usado em investigações envolvendo matéria escura [211–213]. Nesse contexto, o segundo setor $U(1)$ representa uma interação completamente análoga ao eletromagnetismo, mas que interage apenas com matéria escura. Os campos do setor escuro não interagem diretamente com a luz, portanto não são carregados com relação ao eletromagnetismo.

Em um trabalho passado [108], utilizamos uma permeabilidade magnética generalizada para induzir estrutura interna em vórtices de Maxwell-Higgs. Essa “permeabilidade” é uma função dos campos do setor escuro, que multiplica o termo do Maxwell na lagrangiana, funcionando como permeabilidade magnética generalizada. Essa função altera as propriedades magnéticas do material, fazendo com que o campo magnético (ou, mais propriamente, a indução) passe a ter um comportamento diferente daquele encontrado no modelo de Maxwell-Higgs usual. É possível, por exemplo, que o campo magnético deixe de ser uma função monótona, podendo crescer ou decrescer em uma região do plano. Em soluções rotacionalmente simétricas, isso resulta em uma indução magnética com vários anéis.

O trabalho [109], que servirá como base para esta seção, tem o objetivo de aprofundar a investigação feita em [108]. O grupo considerado será $G_N \equiv U(1)^N$. Entretanto, cabe enfatizar que o objetivo desse trabalho não é simplesmente generalizar os resultados obtidos em [108] fazendo apenas $N > 2$, e sim explorar aspectos que não haviam sido analisados naquele trabalho. Esses aspectos incluem a derivação rigorosa do BPS, o caso sem simetria rotacional, motivações

físicas para o potencial e análise das hipóteses da teoria. Em particular, estudamos agora o papel das cargas topológicas na estrutura interna induzida pela permeabilidade generalizada, visto que [108] só apresenta soluções com $n_1 = n_2 = 1$. Como veremos, a introdução de um número maior de vórtices em cada setor aumenta as possibilidades da teoria em relação ao modelo gerado pela lagrangiana (4.10), o que é importante inclusive no caso $N = 2$. A simetria $U(1)^N$ também tem um papel importante em teorias de aljava (*quiver*), que têm sido bastante estudadas em supersimetria [215, 216].

Seja $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ um campo com imagem em \mathbb{C}^N , que agrega N campos complexos similares aos da teoria $U(1)$. A representação $d\rho$ mapeia a álgebra de G_N em um espaço de matrizes $N \times N$, em que os elementos pertencem à álgebra de Lie de cada $U(1)$. A derivada covariante mais geral possível é da forma $D_\mu = \partial_\mu + \sum_a i e_a A_\mu^{\{a\}}$, que representaria o caso em que o campo escalar é carregado com respeito a todos as componentes de G_N . Entretanto, em aplicações envolvendo um setor escuro e um claro, cada campo de matéria está acoplado a apenas um campo de calibre. A matéria escura recebe esse nome justamente porque não interage com a luz, e supomos reciprocamente que os campos de matéria do setor visível não interagem com os “fótons escuros” daquele setor, visto que do contrário seria mais difícil explicar as dificuldades de detecção do setor escuro. Faremos então a suposição de que cada φ_a é carregado apenas com relação a um grupo de calibre, que chamaremos de $U(1)_a$. Com essa hipótese, a atuação da derivada resulta na N -tupla

$$D_\mu \Phi = (D_\mu \varphi_1, \dots, D_\mu \varphi_N), \quad (4.57a)$$

cujos componentes são da forma

$$D_\mu \varphi_a = \partial_\mu \varphi_a + i A_\mu^{\{a\}} \varphi_a, \quad (4.57b)$$

em que as constantes de acoplamento e_a foram absorvidas pela redefinição $e_a A_\mu^{\{a\}} \rightarrow A_\mu^{\{a\}}$. O índice a está sendo usado meramente como uma forma de rotular os setores. Eles não são índices de Lorentz, e não há soma implícita quando eles se repetem. Colocaremos esses índices entre chaves $\{\}$ quando houver a possibilidade de ambiguidade. Se a derivada covariante satisfaz (4.57), temos o eletromagnetismo usual em um setor (escolheremos o ordenamento dos campos de modo que ele corresponda ao enésimo setor) e $N - 1$ setores “escuros”, nos quais cargas elétricas não existem. Cada um desses setores pode ser interpretado como uma forma de matéria escura ou, mais geralmente, como uma outra simetria $U(1)$ independente do eletromagnetismo. Como mencionamos em outros pontos deste trabalho, vórtices têm aplicações em diversas áreas da física, muitas das quais não têm qualquer relação com eletromagnetismo. De modo geral, a simetria $U(1)$ é frequentemente utilizada em teorias efetivas como uma ferramenta simples que permite a inclusão de graus de liberdade redundantes que de algum modo simplificam o problema [63, 217, 218]. Na referência [63], por exemplo, uma teoria Chern-Simons-Higgs é usada para modelar estruturas proteicas, e a simetria $U(1)$ tem ali um significado puramente geométrico. Em nenhum desses casos existe uma razão *a priori* para que o campo “de Higgs” do modelo seja carregado com relação ao eletromagnetismo, e poderíamos tentar modelar um possível acoplamento entre esses campos e os da teoria de Maxwell-Higgs por meio de uma lagrangiana cuja derivada covariante tem a forma (4.57).

Calculando o comutador das derivadas covariantes, encontramos o tensor $F_{\mu\nu}$ definido por $F_{\mu\nu} \Phi = (F_{\mu\nu}^{\{1\}} \varphi_1, \dots, F_{\mu\nu}^N \varphi_N)$, em que

$$F_{\mu\nu}^{\{a\}} = \partial_\mu A_\nu^{\{a\}} - \partial_\nu A_\mu^{\{a\}}. \quad (4.58)$$

O tensor $F_{\mu\nu}$ pode ser usado para definir os campos físicos $E_k^{\{a\}} = F_{0k}^{\{a\}}$ e as induções $B_a = F_{21}^{\{a\}}$, em completa analogia com o eletromagnetismo usual. Finalmente, introduzimos um potencial $V(\{|\varphi|\})$, onde $\{|\varphi|\}$ é uma simples notação para o conjunto $\{|\varphi_1|, \dots, |\varphi_N|\}$. Para possibilitar quebra espontânea de simetria em cada $U(1)$, o potencial será escolhido de modo que seus mínimos ocorram em $\{|\varphi|\} = \{v_1, \dots, v_N\}$, para constantes positivas v_a . Topologicamente, a variedade de vácuo desse sistema consiste em um produto de N esferas definidas pelas condições $|\varphi_a| = v_a$. Da nossa discussão na seção 2.4, sabemos que o grupo de homotopia relevante para essa discussão é o grupo fundamental

$$\pi_1((S_1)^N) = \mathbb{Z}^N, \quad (4.59)$$

o que mostra que precisamos atribuir N cargas diferentes a cada solução para classificá-las topologicamente. O fluxo em cada setor pode ser calculado independentemente, e o mesmo argumento usado para derivar (4.28) leva às condições de quantização

$$\int d^2x B_a = 2\pi n_a, \quad (4.60)$$

em que a ausência do fator e_a se deve à nossa escolha de absorver essas constantes de acoplamento nos campos de gauge, o que apenas muda a unidade de fluxo “magnético”, mas não causa perda de generalidade. A unidade de energia continuará a mesma se dividirmos cada fator de $F_{\mu\nu}^{\{a\}}$ na lagrangiana por e_a .

Definindo adequadamente uma multiplicação entre as N -tuplas que estamos usando, podemos escrever a lagrangiana na forma concisa

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \Phi \overline{D^\mu \Phi} - V(\{|\varphi|\}), \quad (4.61)$$

em que

$$\frac{1}{4\mu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv \sum_{a=1}^N \frac{F_{\mu\nu}^{\{a\}} F^{\mu\nu\{a\}}}{4\mu_a(\{|\varphi|\})} \quad (4.62)$$

e

$$D_\mu \Phi \overline{D^\mu \Phi} = \sum_{a=1}^N D^\mu \varphi_a \overline{D_\mu \varphi_a}. \quad (4.63)$$

As funções μ_a são interpretadas como permeabilidades generalizadas. Elas alteram as propriedades magnéticas de um material ou meio, aparecendo nas equações de Maxwell de forma similar às permeabilidades magnéticas do eletromagnetismo clássico [203]. Aqui, estamos tomando-as como funções dos campos de matéria, de modo que o acoplamento entre os diferentes setores é dado, em geral, pelo potencial e pelo efeito dos campos de matéria na magnetização de cada setor. Como mencionado, cada $F_{\mu\nu}$ deve ser dividido por um fator de e_a para que não haja perda de generalidade. Esses fatores podem, entretanto, ser absorvidos nas funções μ_a , e não irão trazer efeitos qualitativos no nível clássico, tendo um papel bastante similar ao que a constante de acoplamento tinha na teoria de Maxwell-Higgs. Vamos então tomar todos os e_a como um, por simplicidade. Podemos recuperá-los explicitamente fazendo $F_{\mu\nu}^{\{a\}} \rightarrow \frac{1}{e_a} F_{\mu\nu}^{\{a\}}$ em qualquer ponto de nossas investigações.

As equações de Euler-Lagrange da teoria são

$$D^\mu D_\mu \varphi_a - \frac{1}{4} \sum_{b=1}^N \frac{\partial \mu_b}{\partial \varphi_a} \frac{F_{\mu\nu}^{\{b\}} F^{\mu\nu\{b\}}}{\mu_b^2} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_a} = 0, \quad (4.64a)$$

$$\partial^\mu \left(\frac{F_{\mu\nu}^{\{a\}}}{\mu_a} \right) = J_\nu^{\{a\}}, \quad (4.64b)$$

onde $J_\nu^{\{a\}} \equiv i(\overline{\varphi_a} D_\nu \varphi_a - \varphi_a \overline{D_\nu \varphi_a})$. As igualdades (4.64b) têm a forma das equações de Maxwell em um meio linear isotrópico, com permeabilidade magnética μ_a . Uma solução dessas equações é composta por N pares $(\varphi_a, A_\mu^{\{a\}})$, cada um dos quais possui tantos (anti)vórtices quanto forem os zeros de φ_a .

O grande sucesso das teorias de Maxwell-Higgs e Ginzburg-Landau nos motiva a tentar relacionar a lagrangiana (4.61) a esses modelos, ao menos em algum limite. Claro está que, para obter consistência com essas teorias, é necessário que (4.61) se reduza a (4.10) quando estivermos fazendo medições em uma região na qual existem apenas os campos de Maxwell-Higgs. Como a condição de energia finita exige que as configurações tendam ao vácuo assintoticamente, isso significa que $\mu_N \rightarrow 1$ quando $|\varphi_a| = |v_a|$ para todo $a \neq N$, e V deve tender ao potencial de GL no mesmo limite. Devemos então ter um potencial da forma $V = V_N + \tilde{V}$, onde \tilde{V} é deixado arbitrário no momento e

$$V_N = f_\lambda \frac{1}{2} [(v_N^2 - |\varphi_N|^2)]^2, \quad (4.65)$$

em que f_λ é uma função satisfazendo

$$\lim_{\Phi \rightarrow \mathcal{V}_N} f_\lambda(|\varphi_1|, \dots, |\varphi_{N-1}|) = \lambda, \quad (4.66)$$

onde introduzimos, por conveniência, a notação $\mathcal{V}_a \equiv (v_1 e^{i\Lambda_1}, \dots, \varphi_a, \dots, v_N e^{i\Lambda_N})$, que nada mais é do que uma maneira rápida de nos referirmos à situação em que todos os campos escalares, com possível exceção de φ_a , atingiram seu valor de vácuo. A função f_λ efetua uma deformação no potencial de GL, modificando-a para modelar o acoplamento entre o supercondutor e os campos escalares dos outros setores. Ela faz o mesmo papel da constante λ na teoria original, determinando a resposta do material à presença de um campo magnético. Como a permeabilidade magnética muda de ponto a ponto, faz sentido que essa resposta também seja modelada por uma função. Assim, os materiais não são mais divididos apenas em dois tipos de supercondutores, mesmo quando há simetria cilíndrica. Dependendo da forma de f_λ , o sistema pode se comportar como um material tipo-I em uma determinada região (isto é, $f_\lambda \approx f_\lambda(\mathbf{x}_0) < 1$ em uma vizinhança de um ponto \mathbf{x}_0 qualquer), e como um supercondutor tipo-II $f_\lambda(\mathbf{x}_0) > 1$ em outra região. A deformação induzida por f_λ ocorre quando os campos dos quais ela depende (que não precisam necessariamente incluir todos os outros setores) estão fora do vácuo. Para soluções estáveis, isso só será possível na presença de vórtices ou antivórtices dos *outros* setores $U(1)$, visto que qualquer defeito com carga topológica nula decairá rapidamente na configuração trivial. Assim, a mudança nas propriedades magnéticas do material pode, nesse modelo, ser associada à presença de zeros dos campos escalares.

As hipóteses acima nos permitem estabelecer uma conexão com a teoria de Maxwell-Higgs. Ficamos com uma classe grande de modelos que podem ser definidos por diferentes escolhas de \tilde{V} , μ_a e da forma específica de f_λ . Cada um desses modelos faz sentido, e leva a equações de

campo (4.64) que podem em princípio ser resolvidas. Para avançar em nossa análise, precisaremos evidentemente fazer escolhas específicas. Uma escolha natural é tratar todos os setores da mesma forma que tratamos o setor eletromagnético. Definimos, portanto, o potencial

$$V = \sum_{a=1}^N V_a \equiv \sum_{a=1}^N f_a \frac{(e_a)^2}{2} [(v_a^2 - |\varphi_a|^2)]^2, \quad (4.67)$$

em que cada $f_{\lambda_a}(|\varphi_1|, \dots, |\varphi_{N-1}|)$ é definida em analogia com $f_{\lambda} \equiv f_{\lambda_N}$, que identificamos com o N -ésimo setor por convenção. Uma generalização direta de (4.66) vale para cada setor, assim como a condição $\mu_a \rightarrow 1$ quando $\Phi \rightarrow \mathcal{V}_a$. Um potencial dessa forma implica uma lagrangiana $\mathcal{L} = \sum_a \mathcal{L}_a$, em que cada fator aditivo corresponde a um modelo similar ao de Maxwell-Higgs se

$$\frac{\partial \mu_a}{\partial \varphi_a} = 0. \quad (4.68)$$

Nesse caso, se deformamos uma solução de maneira que os zeros de φ_a sejam afastados para longe dos outros, então \mathcal{L}_a é continuamente deformada na lagrangiana de Maxwell-Higgs nessa região. A equação (4.68) é importante, pois modelos em que μ_a depende explicitamente de φ_a não podem reproduzir os resultados da teoria Maxwell-Higgs, visto que μ_a só seria constante para a solução de vácuo! Exigiremos que, ao menos no setor $a = N$, a relação (4.68) seja satisfeita, para que possamos associar as soluções do setor visível a supercondutores. Nos outros setores essa condição pode ser relaxada em alguns casos. Com efeito, em um dos exemplos que desenvolvemos para a referência [109], foi usada uma permeabilidade $\mu_a = |\varphi_a|^2$ para engendrar equações BPS idênticas às satisfeitas para B e φ no modelo de Chern-Simmons-Higgs [97, 98] (exceto pela ausência de carga elétrica), o que gera uma ponte interessante entre os dois modelos.

Vamos agora examinar a possibilidade de um vínculo de Bogomol'nyi nessa teoria. Consideraremos $v_a = 1$. Fisicamente, tomar todas essas constantes com o mesmo valor constitui uma hipótese não trivial, mas a generalização dos nossos resultados para outras escolhas dos campos de vácuo é bastante direta, então tomaremos o valor fixo por simplicidade notacional.

Sabemos que, quando $\Phi \in \mathcal{V}_a$, o vínculo de Bogomol'nyi deve acontecer em $\lambda_a = 1$. Além disso, será necessário vincular o comportamento das funções f_{λ_a} e μ_a , que não poderão mais ser independentes uma da outra. Completando quadrados na energia com um procedimento análogo ao que havíamos feito na subseção 4.2.2, encontramos

$$E = \sum_{a=1}^N \int_S d^2x \left\{ |D_0 \varphi_a|^2 + |D_1 \varphi_a \pm i D_2 \varphi_a|^2 \pm \sqrt{\frac{f_{\lambda_a}}{\mu_a}} B_a (1 - |\varphi_a|^2) + B_a |\varphi_a|^2 + \frac{1}{2\mu_a} [B_a \mp \sqrt{f_{\lambda_a} \mu_a} (1 - |\varphi_a|^2)]^2 \right\}, \quad (4.69)$$

onde observamos que, se μ_a possuir zeros, é necessário assumir a existência de ao menos uma configuração não trivial tal que o limite $F_{\mu\nu}^{\{a\}} F^{\mu\nu\{a\}} / \mu_a$ exista em todos os pontos do plano, já que caso contrário o funcional acima não pode ser definido. Teoricamente isso poderia fazer com que soluções não pudessem ser encontradas para uma dada escolha de μ_a , mas em nossas investigações não encontramos nenhum modelo em que esse empecilho tenha aparecido. Pela expressão (4.69), vemos que, se o potencial for da forma

$$f_{\lambda_a} = \lambda_a \mu_a, \quad (4.70)$$

então, no caso em que $\lambda_a = 1$ para todo a , encontraremos um vínculo de Bogomol'nyi. É claro que poderíamos simplesmente ter assumido $f_{\lambda_a} = \mu_a$, sem qualquer referência a λ_a , como havia sido feito em [108]. No entanto, queremos também que o modelo faça sentido fora do BPS, e nesse caso não existe razão para que as funções sejam iguais. A escolha (4.70) nos dá equações e vínculo BPS e garante que, à medida que λ se aproxima do acoplamento crítico, a teoria vai sendo suavemente deformada para o cenário em que as forças se anulam. Ela também garante que o limite (4.66) seja sempre satisfeito, o que significa que a teoria tende a Maxwell-Higgs quando os campos que modificam μ_a tendem ao vácuo (desde que (4.68) seja satisfeita, é claro). Com efeito, a relação (4.70) nos permite introduzir, para cada a , uma constante ε_a tal que $\lambda_a = 1 + \varepsilon_a$. Essas constantes nos dão uma medida do quão próximo o sistema está do acoplamento crítico, que ocorre quando ela é zero. Em termos dessas constantes, podemos escrever

$$E = \sum_{a=1}^N \int_S d^2x \left\{ \left(|D_0 \varphi_a|^2 + \frac{1}{2\mu_a} E_k^{\{a\}} E_k^{\{a\}} \right) + |D_1 \varphi_a \pm iD_2 \varphi_a|^2 + \frac{1}{2\mu_a} [B_a \mp \mu_a(1 - |\varphi_a|^2)]^2 \pm B_a + \frac{\varepsilon_a}{2} \mu_a(1 - |\varphi_a|^2) \right\}, \quad (4.71)$$

em que o último termo nos dá o desvio em relação ao acoplamento mínimo. No limite $\varepsilon_a \rightarrow 0$ temos o vínculo

$$E \geq 2\pi \sum_{a=1}^N |n_a|, \quad (4.72)$$

que é precisamente uma soma de desigualdades da forma (4.35). Vemos que cada vórtice corresponde ao aumento de um fator de 2π na energia de Bogomol'nyi. No BPS, cada um desses fatores pode ser identificado com a massa de um vórtice desse setor. Convém notar que essas contribuições só são iguais porque colocamos $v_a = 1$ para todos os vórtices, em geral teríamos contribuições $2\pi(v_a)^2$ diferentes em cada setor. Podemos generalizar a contagem de modos zero feita na subseção 4.2.2 para o presente caso, o que leva a um argumento similar, mas com matrizes bloco $4N \times 4N$. Esse processo leva a um espaço de moduli de dimensão $2 \sum_{a=1}^N n_a$, mas essa demonstração só é válida se for possível mostrar que equação $\mathcal{D}^\dagger \eta = 0$ não possui solução nesse caso, o que dependerá da forma escolhida para as funções μ_a , e de seu sinal. O vínculo é saturado para soluções estáticas ($D_0 \varphi_a = E_k^{\{a\}} = 0$) que satisfazem:

$$B_a = \pm \mu_a(1 - |\varphi_a|^2), \quad (4.73a) \quad \text{e} \quad (D_1 \pm iD_2) \varphi_a = 0, \quad (4.73b)$$

em que, novamente, os sinais superiores e inferiores correspondem a vórtices e antivórtices respectivamente. Integrando a equação de continuidade $\partial_0 T_{0j} + \partial_i T_{ij} = 0$, é possível mostrar que não há forças entre os vórtices BPS dessa teoria, sejam eles do mesmo setor ou não. Da equação (4.73a), vemos que os zeros de μ_a geram zeros em B_a , o que significa que essa indução “magnética” se anulará uma vez para cada zero distinto de μ_a em $[0, 1)$. No caso rotacionalmente simétrico, isso pode ser usado para gerar a estrutura de anéis encontrada em [108].

Quando todos os μ_a são independentes de φ_N (ou do campo escalar de algum outro setor, naturalmente), é possível atribuir um significado geométrico às equações BPS. Nesse caso, as primeiras $N - 1$ equações podem ser resolvidas de forma independente. Isso nos permite obter μ_a como uma função das coordenadas, que podemos substituir em (4.73a) para obter as equações $B_N = F(\mathbf{x})(1 - |\varphi_N|^2)$; $(D_1 \pm iD_2) \varphi_N = 0$. Essas equações aparecem naturalmente em investigações de vórtices em superfícies riemannianas com curvatura [219, 220]. Com efeito, poderíamos ter obtido equações dessa forma se tivéssemos considerado, no cálculo da subseção 4.2.2, uma métrica definida pelo elemento de linha $ds^2 = dt^2 - F(\mathbf{x})((dx)^2 + dy^2)$. Não é

difícil generalizar o argumento dado no espaço plano para acomodar essa métrica: ela resulta em um fator de $-F(\mathbf{x})$ para cada índice contravariante e um fator multiplicativo $F(\mathbf{x})$ no elemento de volume. Essa geometria pode ser usada para acoplar os vórtices à gravitação, mas é mais comum que ela seja vista como uma métrica induzida que reflete simplesmente a geometria de um supercondutor de baixa espessura. Isso nos permite estudar situações mais gerais do que o supercondutor plano que havíamos considerado antes.

No caso BPS, os campos escalares satisfazem uma equação da forma

$$D_k D_k \varphi_a = \mu_a (1 - |\varphi_a|^2) \varphi_a, \quad (4.74)$$

que deve ser acoplada às equações de Maxwell para um campo magnético modificado pela permeabilidade generalizada. Então, se μ_a é aproximadamente constante em uma vizinhança de um ponto \mathbf{x}_0 qualquer, o sistema satisfaz localmente as equações de Ginzburg-Landau, com $\mu_a(\mathbf{x}_0)$ fazendo o papel de λ . Se $\mu_a(\mathbf{x}_0) < 1$, o sistema se comporta como um supercondutor tipo-I nessa vizinhança, ao passo que, se $\mu_a(\mathbf{x}_0) > 1$, ele é tipo-II.

Como as equações (4.36b) têm a mesma forma que as do modelo de Maxwell-Higgs, continua sendo possível escrever, na vizinhança de cada zero do campo escalar

$$\varphi_a = \phi_a(z)(z - z_l)^{m_l}, \quad (4.75)$$

onde m_l é a multiplicidade desse zero. Estaremos particularmente interessados nos casos em que as funções μ_a possuem mínimos ou máximos nos zeros de algum φ_b . Quanto maior a multiplicidade de um zero de φ_b , maior o disco em que a aproximação $\varphi_b \approx 0$ vale. Como as permeabilidades são funções contínuas, ocorre que μ_a será aproximadamente constante quando restrita a esse disco. Por exemplo, suponha que μ_N se anula em $\varphi_a = 0$, para alguma escolha de a . Se essa permeabilidade for uma função suave, podemos expandi-la em série de Taylor e escrever, na ordem dominante de aproximação, $\mu_N = |\varphi_a|^p \zeta(|\varphi|)$, em que $\zeta(|\varphi|)$ é uma função diferente de zero e p é um número natural. Então, por (4.75), μ_a pode ser representada por uma função complexa que tende a zero com um fator de $(z - z_l)^{(m_l)p}$. Quanto maior m_l (ou seja, quanto maior for o número de vórtices em z_l), maior será a ordem de aproximação em que essa função vale zero. Em toda a vizinhança na qual aproximação $\mu_a \approx 0$ vale, a indução magnética B_N será também nula, por (4.73a). Temos nesse caso uma mudança no comportamento observado na teoria de GL, pois o campo magnético será zero nessa região mesmo que ela contenha zeros de φ_N , que normalmente corresponde ao material no estado normal. Reciprocamente, μ_N pode também ter um máximo nos zeros de φ , o que significa que o fluxo que penetrará no material será concentrado em torno desse ponto, resultando em um pico maior. O fluxo total é, entretanto, completamente definido pela carga topológica n_N , então a integral de B_N sobre todo o plano continua tendo o mesmo valor.

Quando as equações (4.73) são resolvidas, o mínimo global da energia corresponde à minimização simultânea de todos os funcionais

$$E_a \equiv \int d^2x \rho_a, \quad (4.76)$$

em que $\rho_a = -\mathcal{L}_a$ no caso estático. Nessa situação, cada funcional pode ser integrado para dar a energia $2\pi n_a$ relativa ao setor a . Como esperado, o conjunto n_1, \dots, n_N especifica completamente a energia de Bogomol'nyi da solução. Essa observação pode ser usada para prever o fluxo dos setores escondidos por meio de uma medição da energia total. Por exemplo, considere o caso em que há um setor claro, com um supercondutor de Ginzburg-Landau generalizado pela permeabilidade, e um setor escuro. Em princípio, seria difícil medir experimentalmente

o campo magnético do setor escuro, bem como detectar as partículas ou vórtices escuros. Por outro lado, não temos dificuldade de medir as quantidades análogas para o setor claro, então somos capazes de detectar o fluxo magnético e, portanto, a carga topológica n_2 associada a esse fluxo. Sabendo que a soma das massas dos vórtices claros é $2\pi n_2$, podemos medir a energia total (que tem as mesmas unidades e é medida da mesma forma em qualquer setor) para deduzir que a massa total dos vórtices escuros é $E - 2\pi n_2$ (ou, mais geralmente, $E - 2\pi n_2(v_2)^2$). Sendo assim, basta uma estimativa razoável da energia para que a contribuição E_1 do setor escuro e de v_1 para que o número de vórtices escuros, n_1 , seja descoberto. Essa carga topológica sozinha já é suficiente para determinar o fluxo “magnético” produzido por B_1 , além do número de vórtices escuros presentes no sistema e a massa de cada defeito, que é igual a E_1/n_1 no caso estático. Note que não é nem necessário que as medições sejam perfeitas: como o intervalo entre as energias BPS possíveis é de 2π , as estimativas da energia total só precisam ser suficientemente boas para determinar de qual ponto desse conjunto discretizado E_1 mais se aproxima. Isso ilustra a maneira como a permeabilidade generalizada pode ser usada para obter informações de outros setores, o que seria uma tarefa significativamente mais difícil para uma teoria da forma padrão, na qual o acoplamento entre os diferentes setores seria dado apenas no potencial.

Para mínimos da energia, o raciocínio acima pode funcionar até mesmo quando (4.72) não é saturado exatamente. Como podemos ver em (4.71), um pequeno desvio do acoplamento crítico, dado por $0 < \varepsilon_a \ll 1$, produz uma variação pequena no funcional de energia. Nesse caso, é razoável supor que as equações para $\lambda_a = 1$ constituem uma boa aproximação para os resultados da teoria não criticamente acoplada. Assim, poderemos usar as equações (4.73) e estimar a massa total desses setores pela aproximação $E_1 \approx 2\pi n_1$, que podemos usar para estudar esses vórtices mesmo fora do limite de Bogomol’nyi. Na teoria de Maxwell-Higgs, uma análise detalhada da dinâmica e das propriedades de vórtices próximos ao acoplamento crítico foi conduzida em [172]. Nessa referência, foi mostrado que o desvio do acoplamento crítico quando $\lambda = 1 + \varepsilon$ resulta em um potencial de interação que é pequeno quando ε o é. Os resultados do caso geral podem ser entendidos em termos de séries de potências em ε , para as quais o BPS exato representa a aproximação de ordem zero. Não iremos tentar generalizar essa demonstração, que é bastante complicada, para o caso que estamos estudando, mas é bastante razoável conjecturar que os argumentos usados nessa referência, que não são fortemente dependentes da forma da lagrangiana, possam também ser generalizados para essa teoria. Com efeito, esses resultados foram pouco depois expandidos para incluir até mesmo os monopolos magnéticos da teoria Yang-Mills-Higgs [173] que, como veremos no próximo capítulo, aparecem em uma teoria matematicamente muito diferente. É claro que, com a introdução de novos setores, novas forças devem também aparecer no sistema mas, assim como acontece na teoria Maxwell-Higgs, é esperado que as forças sejam pequenas quando $\varepsilon_a \ll 1$, visto que elas são nulas no limite de Bogomol’nyi.

Investigaremos agora soluções rotacionalmente simétricas. Uma extensão imediata dos argumentos da subseção 4.2.3 produz, em um calibre tal que $A_0 = 0$,

$$\varphi_b = g_b e^{in_b \theta}, \quad (4.77a) \quad \mathbf{A}^{\{b\}} = \frac{n_b - a_b(r)}{r} \hat{\theta}, \quad (4.77b)$$

com as condições de contorno $g_b(0) = 0$, $g_b(\infty) = 1$, $a_b(0) = n_b$ e $a_b(\infty) = 0$, que são generalizações imediatas de (4.50). Esse é o caso mais simétrico possível, em que todos os vórtices, de qualquer setor, estão localizados no mesmo ponto. As equações de segunda ordem são

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (rg'_b)' &= \frac{g_b a_b^2}{r^2} + \mu_b \lambda_b (1 - g_b^2) g_b \\ &- \frac{1}{4} \sum_{c=1}^N \frac{\partial \mu_c}{\partial g_b} \left[\left(\frac{a'_c}{\mu_c r} \right)^2 - \lambda_c (1 - g_c^2)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.78a)$$

$$\left(\frac{a'_b}{\mu_b r} \right)' = \frac{2a_b g_b^2}{r}, \quad (4.78b)$$

em que assumimos um potencial da forma (4.67) no qual cada f_{λ_b} satisfaz (4.70) para uma constante λ_b que, neste ponto do trabalho, é arbitrária. A estabilidade dessas soluções leva a um problema muito mais complexo do que o das equações de Ginzburg-Landau. Agora teremos interações entre vórtices de diversos tipos, e o sinal da força que atua em cada zero dependerá da resultante de todas essas interações. Agora é possível, em princípio, que um supercondutor tipo-II ($\lambda > 1$) permita uma solução estável da forma (4.77), com $n_b > 1$. Com efeito, se, em alguma vizinhança, $\mu_b \lambda_b < 1$ e esse produto for aproximadamente constante (isto é, tal que as derivadas de μ_b sejam desprezíveis em alguma ordem de aproximação), então o material se comportará como um supercondutor tipo-I. Em geral, o problema de estabilidade será altamente dependente das permeabilidades magnéticas generalizadas quando estivermos fora do BPS.

A densidade de energia dessas soluções é da forma $\rho = \sum_{b=1}^N \rho_b$, onde

$$\rho_b = \frac{(B_b)^2}{2\mu_b} + \mu_b \frac{\lambda_b}{2} (1 - g_b^2)^2 + g_b'^2 + \left(\frac{g_b a_b}{r} \right)^2, \quad (4.79)$$

com $B_b = -a'_b/r$. Se μ_b for independente de g_b , então ρ_b tem a forma da densidade de energia de Ginzburg-Landau, com as modificações $B_b \rightarrow B_b/\sqrt{\mu_b}$, $\lambda_b \rightarrow \mu_b \lambda_b$ fisicamente interpretada em termos da mudança nas propriedades magnéticas do material, induzidas pelos vórtices de outros setores. É possível extrair mais informação sobre o comportamento das soluções perto da origem fazendo algumas hipóteses adicionais sobre as permeabilidades e usando ferramentas de análise real, veja nossa discussão em [109] para mais detalhes. Em particular, é muitas vezes possível encontrar o comportamento

$$g_b \propto r^{n_b} \quad (4.80)$$

em uma vizinhança da origem. Essa relação será bastante importante para a nossa análise e, na referência [109], analisamos condições suficientes para que (4.80) seja satisfeita *fora* do acoplamento crítico. Aqui, vamos entretanto nos concentrar no BPS, em que a dedução de (4.80), assim como a resolução das equações de movimento, é muito mais simples. O vínculo de Bogomol'nyi é saturado quando $\lambda_b = 1$, e conduz às equações de primeira ordem

$$g'_b = \frac{a_b g_b}{r}, \quad (4.81a) \quad -\frac{a'_b}{r} = \mu_b (1 - g_b^2). \quad (4.81b)$$

As equações acima implicam que a propriedade $g_b \propto r^{n_b}$ vale, no BPS, para qualquer escolha dos μ_b . O valor de μ_b em uma vizinhança da origem pode ser aproximado pelo valor de $\mu_b(0)$ em uma ordem de aproximação que depende dos n_b . Se μ_b é contínuo em um domínio com fronteira fechada $\{0\}$, é possível aproximar μ_b por um polinômio multivariável g_1, \dots, g_N [221]. Como todos os g_b são proporcionais a r^{n_b} perto da origem, vale $(\mu_b - \mu_b(\{0\})) \propto r^m$, onde m aumenta com as cargas topológicas. Por exemplo, se uma expansão polinomial dá $\mu_2 \approx C(g_1)^p$ perto da origem, então $\mu_2 \propto r^{(n_1)p}$. Quanto maior for n_1 , maior a região em que $\mu_2 \approx 0$ vale, e maior, portanto, é o disco em que B_2 é desprezível. Isso vai de encontro ao comportamento usual da teoria de GL, na qual as posições dos vórtices representavam picos de B .

Vamos ilustrar as ideias discutidas acima com alguns dos exemplos desenvolvidos para a referência [109]. Primeiramente, considere o modelo especificado por

$$\mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (1, |\varphi_1|^2, |\varphi_2|^2). \quad (4.82)$$

A equação para $b = 1$ é exatamente a mesma da teoria GL no caso simétrico, cuja solução para $n = 1$ foi examinada. Note que esses sistemas só são equivalentes no limite de Bogomol'nyi: são as equações de primeira ordem que fazem com que os termos entre colchetes em (4.78) se anulem. Isso significa que, fora do acoplamento crítico, as soluções do primeiro setor seriam em geral diferentes da teoria original, mesmo com $\mu_1 = 1$. As equações para os outros dois setores foram resolvidas numericamente, e a solução pode ser vista na Figura 4.2, juntamente com as densidades ρ_b . As induções magnéticas obtidas de a_b são mostradas na Figura 4.3. Para essa escolha de μ , as funções a_b e g_b continuam sendo funções monótonas de r . Entretanto, a_2 e a_3 possuem platôs retos perto da origem, mostrando que essas funções demoram mais para sair do seu valor inicial, em contraste com a teoria GL, na qual $(a - n) \propto r^2$ para qualquer carga topológica. Essa mudança se reflete nas induções magnéticas, que deixam de ter um máximo na origem para apresentar um disco de raio considerável no qual $B_b = 0$.

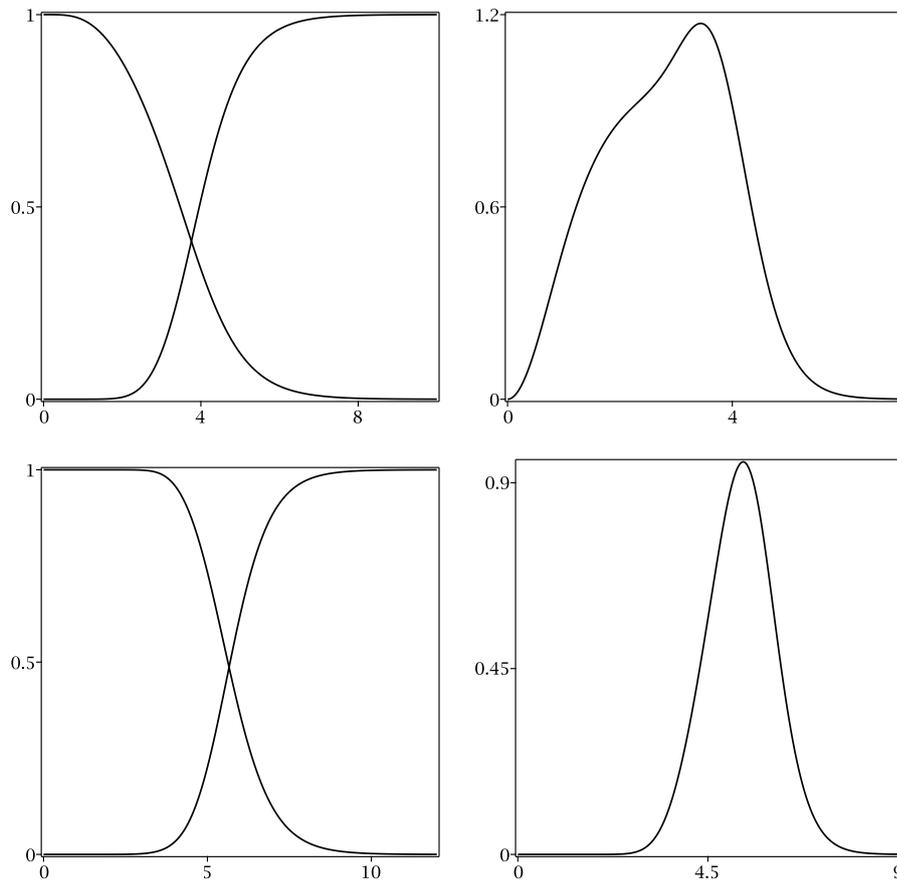


Figura 4.2 Solução de (4.81) com permeabilidades (4.82). À esquerda, estão as configurações BPS para os setores $b = 2$ (acima) e $b = 3$ (abaixo). Linhas crescentes representam g_b , e as decrescentes $a_b(r)/n_b$, com $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 10$. À direita representamos as respectivas densidades de energia.

As permeabilidades μ_2 e μ_3 se anulam nos zeros de g_1 e g_2 , respectivamente. Perto da origem, valem $\mu_2 \propto r^{2n_1}$ e $\mu_3 \propto r^{2n_2}$. Pela equação BPS para B_b , vemos que isso implica

que a indução magnética no setor $N = 3$ só difere de zero quando termos de ordem $2n_2$ são considerados. Para $n_2 = 10$, que é o exemplo mostrado nas figuras, isso significa $B_3 = 0 + \mathcal{O}(20)$, o que explica o porquê de a indução demorar tanto para sair de zero.

Para que ρ_b seja zero na origem, é necessário que $n_b > 1$, pois caso contrário $g'_b \propto n_b r^{n_b-1}$ não se anula. O tamanho do disco no qual $\rho_b \approx 0$ depende da quantidade de zeros do próprio setor e também das outras multiplicidades, que por sua vez afetam o termo B_b^2/μ_b . Na Figura 4.4, mostramos simultaneamente as três densidades de energia, que podem ser colocadas uma “dentro” da outra.

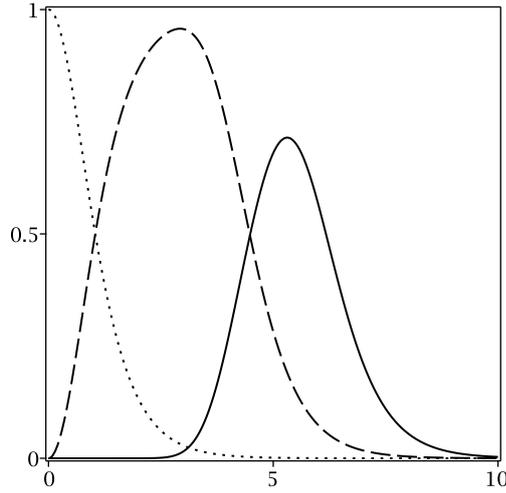


Figura 4.3 Induções magnéticas dos setores 1 (linha pontilhada), 2 (linha tracejada) e 3 (linha sólida), para o modelo definido por (4.82) com $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 10$.

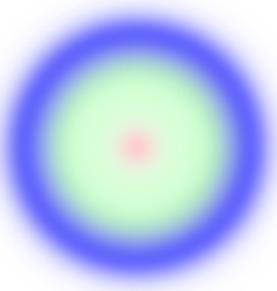


Figura 4.4 Contribuições ρ_1 (vermelho), ρ_2 (verde) e ρ_3 (azul) para a densidade de energia das soluções de (4.81) com permeabilidades dadas por (4.82). Aqui $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 10$.

Também poderíamos usar a permeabilidade para aumentar o fluxo magnético em um disco do plano. Considere, por exemplo,

$$\mu_3 = 2 - |\varphi_2|^2, \quad (4.83)$$

que satisfaz $\mu_3 = 2 - C_2 r^{2n_2} + \mathcal{O}(2n_2 + 1)$ em uma vizinhança da origem. Segue que φ_2 satisfaz $D_k D_k \varphi_3 = 2(1 - |\varphi_3|^2)\varphi_3$ nessa região, na qual o material se comporta como um supercondutor tipo-II com constante de GL $\tilde{\lambda} = 2$, duas vezes maior que o valor $\lambda_3 = 1$ que caracteriza o

material isolado. A indução magnética que resulta dessa construção pode ser visto na Figura 4.5, para dois valores de n_3 .

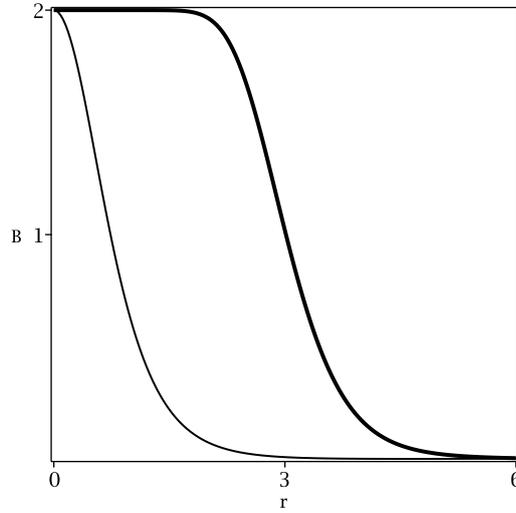


Figura 4.5 Indução magnética do setor 3 para o modelo especificado por (4.83). Aqui, valem $n_1 = 1$ e $n_2 = 10$. A espessura da linha aumenta com n_3 , que toma os valores $n_3 = 1$ e $n_3 = 10$.

Um exemplo um pouco mais complicado é encontrado quando tomamos

$$\mu = \left(1, |\varphi_1|^2, 1 + \cos(\pi\xi) e^{-|\varphi_2|\xi} \right), \quad (4.84)$$

em que $\xi \equiv (1 - |\varphi_1|^2)^{-1}$ para $|\varphi_1| \neq 1$ e $\xi = 1/2$ para $|\varphi_1| = 1$. Essa função tem a forma de um oscilador amortecido, do qual $|\varphi_2|$ é o coeficiente de amortecimento, responsável por controlar o quão rápido a amplitude de oscilação tende a zero. Na Figura 4.6, $\mu_3(r)$ está representado para $n_2 = 5$ e $n_2 = 10$, juntamente com a permeabilidade $\mu_3 = |\varphi_2|^2$ do primeiro exemplo, representada para o mesmo n_2 . Podemos ver que o efeito das multiplicidades na permeabilidade (4.84) é muito mais drástico que nos exemplos anteriores

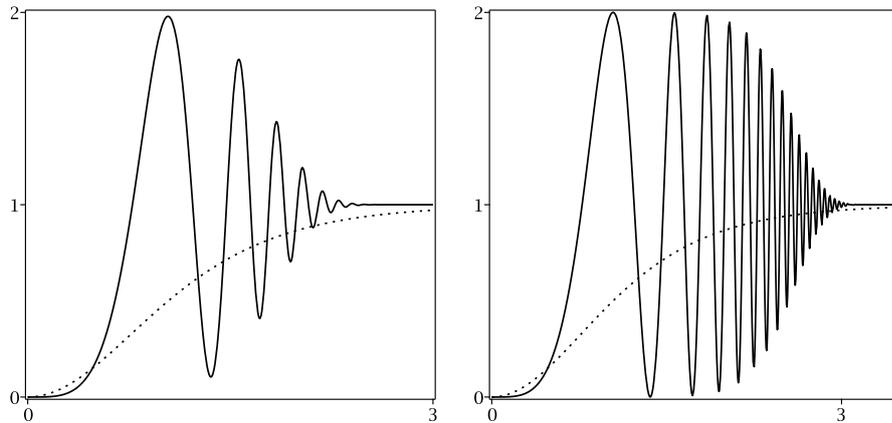


Figura 4.6 Permeabilidade $\mu_3(r)$ para $n_1 = 1$ e n_2 igual a 5 (esquerda) e 10 (direita). Para comparação, a escolha $\mu_3 = |\varphi_2|^2$ do primeiro exemplo foi incluída como uma linha pontilhada.

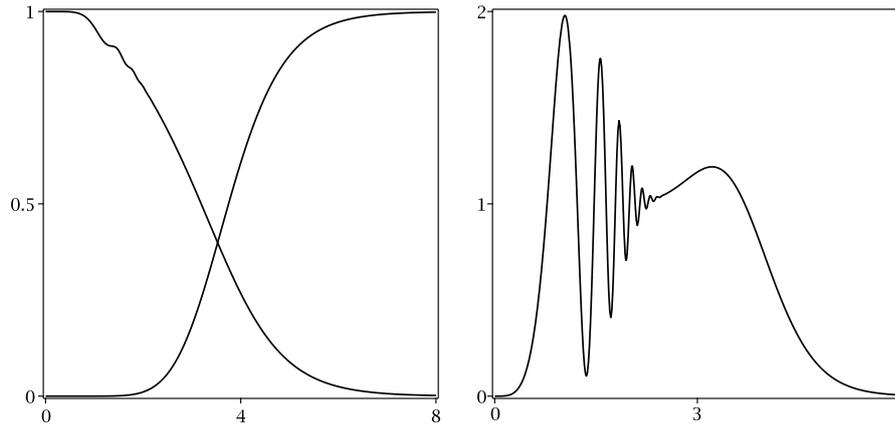


Figura 4.7 Solução de (4.81) com permeabilidade (4.84). Na esquerda mostramos $g_3(r)$ (linha ascendente) e $a_3(r)/n_3$ (linha descendente) para $n_1 = 1, n_2 = 5, n_3 = 10$. Na direita mostramos $\rho_3(r)$.

Na Figura 4.7, representamos os campos do terceiro setor da teoria, identificado com o eletromagnetismo. Os campos nesse caso possuem uma estrutura interna mais complicada, principalmente $a_3(r)$, que passa a apresentar alguns pequenos “degraus” de comprimento progressivamente menor. A densidade de energia, em particular, mostra um comportamento completamente diferente do que havíamos visto anteriormente, apresentando picos e vales alternados em uma região, com oscilações de amplitude progressivamente menor. O comportamento da indução magnética é parecido: ela possui um zero na origem assim como em nosso primeiro exemplo, mas então cresce progressivamente até um valor próximo de dois e começa a oscilar. Eventualmente, ela passa a decair à medida que o campo se afasta dos zeros, e o material volta a se comportar como um supercondutor usual.

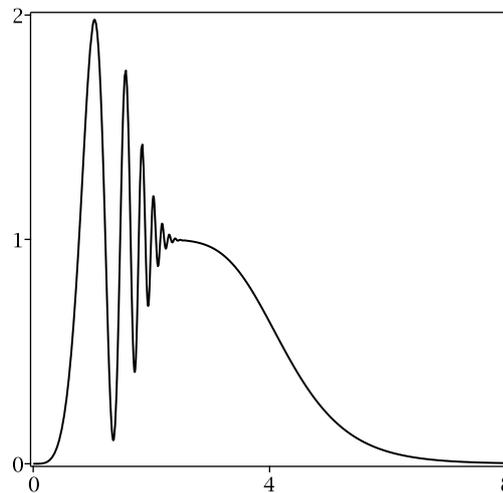


Figura 4.8 Indução magnética $B_3(r)$, para a solução BPS do modelo (4.84). As cargas topológicas são $n_1 = 1, n_2 = 5, n_3 = 10$.

4.4 Analogia entre impurezas e campos neutros

Assim como os sistemas escalares, modelos de simetria $U(1)$ local também podem ser modificados pela adição de impurezas. No caso de um sistema de Maxwell-Higgs na presença de impureza, as soluções resultantes podem ser associadas a supercondutores dopados com impurezas, que fisicamente representam o fato de um material real não formar uma superfície homogênea, mas uma mistura que inclui fragmentos de outros minerais ou metais. Com efeito, o estudo de materiais não homogêneos é de suma importância em física do estado sólido, e o dopamento com impurezas pode ser importante para possibilitar um melhor controle das propriedades dos materiais, o que é particularmente importante para possíveis aplicações em engenharia.

Sistemas desse tipo foram estudados em [183, 184]. Na ref. [184] foi demonstrado que é possível manter metade da supersimetria após a introdução de impurezas. Esse requerimento pode ser usado para guiar a busca por sistemas BPS, de modo análogo ao que mostramos para o caso homogêneo, em que, como discutimos na seção 2.6, um vínculo de Bogomol'nyi aparece devido à supersimetria. Em sistemas Maxwell-Higgs, temos dois tipos de impurezas: as elétricas e as magnéticas. As primeiras resultam da adição de um termo da forma $A_0\rho_g(\mathbf{x})$, em que ρ_g é uma densidade de carga elétrica associada à impureza, que entra como uma fonte adicional na Lei de Gauss. Essas impurezas não alteram as equações BPS (4.36), que continuam sendo satisfeitas no acoplamento crítico. O resultado dessas equações é então substituído na Lei de Gauss, alimentando o campo elétrico, que nesse caso deixa de ser nulo. Esses modelos são particularmente interessantes para análise da dinâmica, pois a impureza elétrica muda a geometria do espaço de moduli, produzindo efeitos fisicamente observáveis no espalhamento dos vórtices da teoria [183]. As impurezas magnéticas, por outro lado, vêm da inclusão de um termo $\sigma(\mathbf{x})B$ na lagrangiana, que modifica a equação de Euler-Lagrange que envolve o campo magnético. Como o sistema deixa de ser homogêneo, as propriedades magnéticas do supercondutor passam a mudar de ponto a ponto, e agora o vácuo da teoria não mais terá o campo constante $|\varphi| = 1$. O potencial também precisa ser deformado de forma apropriada, para refletir o efeito da não homogeneidade do sistema, expressando fisicamente o fato de que a impureza muda de ponto a ponto a maneira como o material responde a um campo magnético. Uma maneira natural de fazer essa modificação é por um potencial da forma $V = \frac{\lambda}{2} (1 + \sigma(\mathbf{x}) - |\varphi|^2)^2$, que corresponde à deformação $1 \rightarrow 1 + \sigma(\mathbf{x})$ no valor dos campos de vácuo.

Nesta seção, baseada no trabalho publicado em [110], vamos desenvolver uma analogia entre certos modelos com campos escalares e impurezas magnéticas. Veremos que, em alguns casos, um sistema de Maxwell-Higgs acoplado a um campo escalar se comporta como se estivesse na presença das impurezas magnéticas estudadas em [183]. O significado de algumas propriedades das impurezas pode então ser compreendido em termos de parâmetros fisicamente relevantes do campo escalar, como a posição de seu centro.

Consideraremos um sistema no espaço de Minkowski tridimensional, com lagrangiana dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D^\mu\varphi\overline{D_\mu\varphi} - \frac{1}{2}(1 + \sigma(\chi) - |\varphi|^2)^2 \\ & + B\sigma(\chi) + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \tilde{V}(\chi, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.85)$$

que representa um sistema de Maxwell-Higgs com $\lambda = e = 1$ acoplado a um campo escalar neutro χ . Vamos supor que $\sigma(\chi)$ se anula quando χ está em um dos mínimos de \tilde{V} , que ocorre para certas constantes v_χ . Isso significa que, se χ está no seu valor de vácuo, a teoria se

reduz a Maxwell-Higgs, que está sempre contida como um limite bem definido de (4.85) se χ tende continuamente ao mínimo de \tilde{V} . A variedade de vácuo é dada pelo produto entre (4.21) e o conjunto dos mínimos de \tilde{V} . Se esse potencial possuir mais de um mínimo (o que não precisa ser o caso neste modelo), χ pode também ser um defeito topológico, como uma parede de domínio. Nesse caso, a classificação das soluções quanto a homotopia requer duas cargas topológicas. Note-se que o vácuo dessa teoria ainda é definido por funções constantes, ao contrário do modelo estudado em [183], no qual o vácuo é composto por funções não triviais, assim como acontecia com as paredes de domínio dopadas que estudamos no capítulo passado. O fluxo magnético continua quantizado nessa teoria, pois a demonstração que levou a (4.28) ainda vale.

No caso estático, a lagrangiana (4.85) leva às equações de Euler-Lagrange

$$D_k D_k \varphi = (1 + \sigma(\chi) - |\varphi|^2) \varphi, \quad (4.86)$$

$$\varepsilon_{jk} \partial_j (B - \sigma(\chi)) = i(\bar{\varphi} D_k \varphi - \varphi \overline{D_k \varphi}) \quad (4.87)$$

e

$$\nabla^2 \chi = -\sigma_\chi [B - (1 + \sigma(\chi) - |\varphi|^2)] + \tilde{V}_\chi, \quad (4.88)$$

Nessa forma, $\sigma(\chi)$ não pode ser interpretada como uma função de impureza. O campo escalar não fornece uma fonte fixa para as equações de Maxwell, pois o acoplamento do sistema impede que essa função seja determinada de forma independente do campo magnético. Gostaríamos de resolver a equação (4.88) independentemente, para então obter $\chi = \chi(\mathbf{x})$. Se isso for possível, podemos substituir $\sigma(\chi) = \sigma(\mathbf{x})$ para obter precisamente as equações de um sistema Maxwell-Higgs acoplado a uma impureza σ . Essa possibilidade não existe para uma solução arbitrária, mas note que, quando o campo resolve a equação $B = (1 + \sigma - |\varphi|^2)$, é possível desacoplar as equações. Com efeito, essa igualdade faz com que o segundo termo em (4.88) desapareça, sobrando apenas $\nabla^2 \chi = \tilde{V}_\chi$, que é resolvida por um sistema escalar comum. Essas equações aparecem naturalmente na teoria se notarmos que o funcional de energia do sistema pode ser escrito na forma $E = E_1 + E_2$, em que

$$E_1 = \int d^2x \left[\frac{B^2}{2} - \sigma(\chi)B + |D_1 \varphi|^2 + |D_2 \varphi|^2 + \frac{1}{2}(1 + \sigma(\chi) - |\varphi|^2)^2 \right] \quad (4.89)$$

e

$$E_2 = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \nabla \chi \cdot \nabla \chi + \tilde{V}(\chi, \mathbf{x}) \right). \quad (4.90)$$

O funcional de energia do sistema é extremizado se E_1 e E_2 o forem. Segue que soluções das equações de Euler-Lagrange obtidas da condição $\delta E_1 = \delta E_2 = 0$ também são pontos estacionários da energia. Se minimizarmos E_1 por meio de um procedimento de Bogomol'nyi, obtemos imediatamente

$$E_1 \geq 2\pi n, \quad (4.91)$$

que é saturado por soluções de

$$B = (1 + \sigma - |\varphi|^2), \quad (4.92a) \quad (D_1 + iD_2)\varphi = 0. \quad (4.92b)$$

Dado *qualquer* ponto estacionário de E_2 , teremos um campo neutro que satisfaz

$$\nabla^2 \chi = \tilde{V}_\chi. \quad (4.93)$$

Essa equação pode ser resolvida independentemente de (4.92). O resultado obtido será substituído nessas equações para gerar (4.92a) com $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$. Essa equação é idêntica à encontrada nas referências [183, 184], que investigam vórtices BPS na presença de impurezas.

Em geral, \tilde{V} pode depender de χ e \mathbf{x} , mas a dependência nas coordenadas é opcional. Qualquer configuração estável que satisfaça (4.93) é aceitável. A estabilidade é importante, pois χ precisa se manter com a mesma forma ao longo do tempo para que (4.92) possa ser equiparado a um sistema vórtice-impureza. Como discutido no capítulo anterior, existem diversas maneiras de evadir o teorema de Derrick, tais quais a escolha de potenciais dependentes das coordenadas, modelo Σ não linear ou mudanças de geometria (que também mudariam (4.92) mas, como mencionamos na seção anterior, essas equações podem ser generalizadas para outras geometrias, com pequenas modificações). A maneira mais simples é usar novamente o método introduzido em [60], que consiste em assumir alguma simetria para χ (normalmente rotacional) e tomar $\tilde{V} = \frac{1}{2r^2} W_\chi^2$ para encontrar $E_2 \geq 2\pi |W(r \rightarrow \infty) - W(r = 0)|$, como fizemos na subseção 3.3.1. Nessas condições, E_2 é minimizada quando χ resolve uma das equações

$$\chi'(r) = \pm \frac{W_\chi}{r}, \quad (4.94)$$

o que significa que, se χ for um modelo com mais de um vácuo, existem duas ou mais impurezas que podem ser geradas pela equação acima. Em particular, soluções tipo “kink” ou “antikink” que conectam os mesmos mínimos devem em geral resultar em impurezas distintas.

Enfatizamos que a hipótese de simetria radial em χ foi tomada por simplicidade, e não é a única opção possível. Poderíamos, por exemplo, considerar uma parede de domínio comum, que possui energia infinita e portanto não é excluída pelo teorema de Derrick. Essas soluções são bastante estudadas na teoria de defeitos, e métodos para regularizar sua energia podem ser empregados. Nesse caso, exigiríamos apenas a finitude da energia E_1 . Se χ não for estático, então uma solução estável de energia finita não é proibida pelo teorema de Derrick, e não precisa ter qualquer simetria. O funcional ainda poderá ser extremizado nesse caso, e o resultado ainda pode ser substituído em (4.92). Como essas equações correspondem a vórtices *estáticos*, essa deformação é possível apenas como aproximação, válida na medida em que o efeito da mudança temporal de χ pode ser ignorada. Ou seja, a dependência temporal deve ser tal que $\sigma(t, \mathbf{x}) \simeq \sigma(\mathbf{x})$ em algum intervalo de tempo pertinente à nossa análise.

Soluções de (4.94) possuem um modo zero. Deve então existir um contínuo de soluções, parametrizadas por uma constante real, que são energeticamente equivalentes. A cada ponto desse espaço de moduli corresponde uma deformação de $\sigma(r)$, que altera suavemente as equações (4.92). O movimento de χ em baixas velocidades pode ser aproximado pelo movimento nesse espaço de moduli. Do mesmo modo, a dinâmica de vórtices em baixas velocidades também pode ser entendida em termos do seu próprio espaço de moduli, de dimensão $2n$ (note que a introdução de uma função das coordenadas não altera a linearização das equações auto-duais, então o argumento de contagem mencionado na subseção 4.2.2 permanece inalterado). Nessa aproximação, os vórtices satisfazem (4.92) em cada instante. Se χ varia lentamente com o t , a estrutura desse espaço de moduli também muda ao longo do tempo. Isso significa que o movimento de χ , mesmo que efetuado através de modos zero, possui um efeito altamente não trivial na dinâmica de vórtices criticamente acoplados.

Assim como no modelo de Maxwell-Higgs, podemos definir $\xi \equiv \ln |\varphi|$ para escrever

$$\nabla^2 \xi + 1 - \exp(2\xi) = 2\pi \sum_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) - \sigma(\chi(\mathbf{x})), \quad (4.95)$$

onde \mathbf{x}_j são os zeros φ , contados sem multiplicidade. Um caso interessante ocorre quando $\sigma(\chi)$ é uma delta de Dirac. Esse caso tecnicamente não pertence à mesma classe que os outros

modelos que estamos estudando, pois não existe uma lagrangiana que leve a uma delta de Dirac na equação (4.92a). Ainda assim, ele pode ser visto como uma extensão interessante do modelo definido pela lagrangiana (4.85) e um sistema no qual vórtices de Maxwell-Higgs foram acoplados a impurezas tipo delta pode ser encontrado em [190]. No nosso caso, consideramos

$$\sigma(\chi) = -2\pi m\delta(\chi), \quad (4.96)$$

onde m é um inteiro positivo. Nesse caso, (4.95) fica

$$\nabla^2 \xi + 1 - \exp(2\xi) = 2\pi \left[\sum_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) + m\delta(\chi) \right], \quad (4.97)$$

o que significa que cada zero de χ corresponde a m novas fontes de fluxo magnético na equação de Taubes. Se, por exemplo $\chi(0) = 0$, a equação acima possui exatamente a mesma forma da equação de Taubes do modelo de GL de um sistema com $N + m$ vórtices, ao menos m dos quais estão localizados na origem. Uma solução de N vórtices da equação acima pode ser obtida a partir de soluções do modelo de GL com carga topológica $N + m$. Nos modelos estudados em [190], as fontes adicionais pressupostas em (4.97) estão em pontos arbitrários do espaço, ao passo que em nosso modelo elas estão relacionadas às posições dos zeros de χ . Esses zeros têm frequentemente um significado fisicamente relevante, podendo representar um ponto em que χ atinge um de seus valores de vácuo, ou mesmo o centro de uma parede de domínio. Por exemplo, considere uma solução que tem um zero na origem, e apenas lá. A impureza (4.96) é, então, da forma $\sigma = -2\pi m\delta(\mathbf{x})$, de modo que uma solução de (4.97) se comporta como um sistema com m vórtices de GL adicionais, localizados na origem. Dada uma perturbação, a posição desse zero pode mudar, e nesse caso os m vórtices se movimentam. Essa possibilidade evidentemente não existia no modelo [183], já que a impureza é fixa naquele caso. Em particular, quando $m = 1$ a solução é completamente indistinguível de um sistema de $N + 1$ vórtices de GL, mesmo na aproximação de espaço de moduli, visto que o zero de σ se move exatamente da mesma forma que os vórtices do problema nesse caso. O modelo χ^6 , cuja solução será dada em (4.103), é um exemplo no qual o zero de χ (e, portanto, a posição da fonte em (4.97)) é o ponto em que χ coincide exatamente com um dos seus vácuos.

Note que até o momento não assumimos simetria rotacional para os vórtices da teoria que, em toda a análise acima, podem ter seus zeros arbitrariamente distribuídos pelo plano, qualquer que seja a forma escolhida para χ . Entretanto, a simetria mais uma vez será útil para simplificar nossos cálculos e nos ajudar a encontrar soluções numéricas, de modo que assumimos novamente (4.49), com as mesmas condições de contorno. Sob essas hipóteses, as equações de primeira ordem se escrevem:

$$g' = \frac{ag}{r}, \quad (4.98a) \quad -\frac{a'}{r} = 1 + \sigma(r) - g^2. \quad (4.98b)$$

A densidade de energia fica na forma $\rho = \rho_1 + \rho_2$, com

$$\rho_1 = B^2 + 2g'^2 - B\sigma(r) \quad (4.99)$$

e

$$\rho_2 = \chi'^2. \quad (4.100)$$

Note que $\rho_1(r)$ tem precisamente a mesma forma da densidade de energia de um sistema simétrico com n vórtices acoplados a uma impureza $\sigma(\chi(r))$. Assim como no modelo estudado em [183], essa densidade de energia não é não negativa definida em geral. Entretanto, há também no nosso modelo a contribuição ρ_2 , de modo que a densidade de energia *total* do modelo

ainda pode ser não negativa mesmo que ρ_1 seja menor que zero em alguma região. Nesse ponto de vista, o sinal negativo encontrado na densidade de energia em teorias com impureza pode ser visto como simples consequência da falta de parte da energia total, que seria atribuída ao campo escalar em um sistema fechado.

Vamos exemplificar os resultados com uma classe de modelos específica, definida pelo potencial χ^4 . Nesse caso, temos a solução

$$\chi = \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2}, \quad (4.101)$$

que já foi usada na subseção 3.3.1. Essa solução possui um zero em algum r_0 , que pode estar localizado em qualquer ponto diferente da origem. Introduzimos também a função

$$\sigma(\chi) = \alpha e^{-\frac{\chi^2}{1-\chi^2}}. \quad (4.102)$$

com $\sigma(\pm 1) = 0$. Essa é uma função localizada, que, quando χ satisfaz (4.101), possui zeros na origem e no infinito (que são os pontos em que χ atinge seu vácuo). O máximo dessa função está localizado em $r = r_0$, de modo que o zero de χ define o ponto no qual a “impureza” é mais significativa. A solução $n = 1$ das equações de primeira ordem, juntamente com o campo magnético dela deduzido, pode ser vista na Figura 4.9. Os campos possuem uma estrutura interna que não existia na teoria de GL, podendo apresentar máximos e mínimos (em particular, vemos que a magnitude $|\varphi|$ pode passar de 1, o que não é possível pra nenhuma solução BPS das equações de Ginzburg-Landau).

Quando α é negativo, o comportamento da impureza muda bastante, gerando configurações com outras características. Nesse caso, a solução também possui estrutura interna, com $a(r)$ apresentando comportamento não monótono, mas as duas funções são limitadas. O comportamento da solução para $\alpha = -1$, bem como o seu campo magnético, pode ser visto na Figura 4.10.

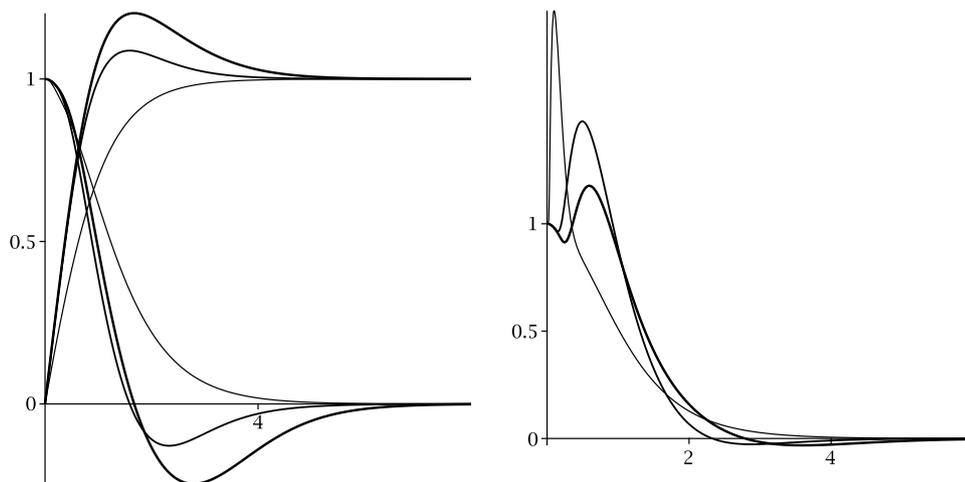


Figura 4.9 Solução $(g(r), a(r))$ da equação (4.98) com $\sigma(\chi)$ satisfazendo (4.102) com $\alpha = 1$, e campo neutro dado por (4.101) (figura da esquerda). Na direita, mostramos o campo magnético para a mesma solução. A espessura das linhas aumenta com r_0^2 , que toma os valores 0.01, 0.5 e 1.

A mesma função σ dá origem a um comportamento bem diferente se o campo neutro tiver outra forma. Por exemplo, considere $W_\chi = \chi(1 - \chi^2)$, que leva a um potencial χ^6 . Nesse

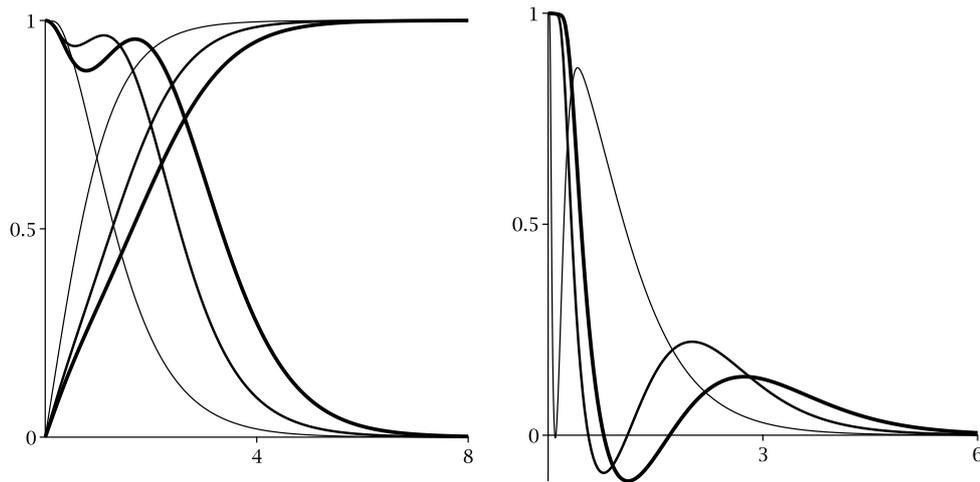


Figura 4.10 Solução $(g(r), a(r))$ da equação (4.98) com $\sigma(\chi)$ satisfazendo (4.102) com $\alpha = -1$, e campo neutro (4.101). Na direita, mostramos o campo magnético para a mesma solução. A espessura das linhas aumenta com r_0^2 , que toma os valores 0.01, 0.5 e 1.

caso, (4.94) tem a solução

$$\chi = \frac{r}{\sqrt{r_0^2 + r^2}}, \quad (4.103)$$

em que r_0 é novamente uma constante que parametriza uma família infinita de soluções, mas esse parâmetro agora não tem relação com a posição do zero de χ , que está sempre na origem. Agora a impureza não tem mais o formato de “sino” que apresentava antes, sendo em vez disso uma função monotonamente decrescente, que decai com uma taxa que aumenta com o valor de r_0 . As impurezas geradas por esse campo neutro, bem como aquelas produzidas por (4.101), estão representadas graficamente na figura (4.11), em que mostramos dois valores de α e três possibilidades para r_0 .

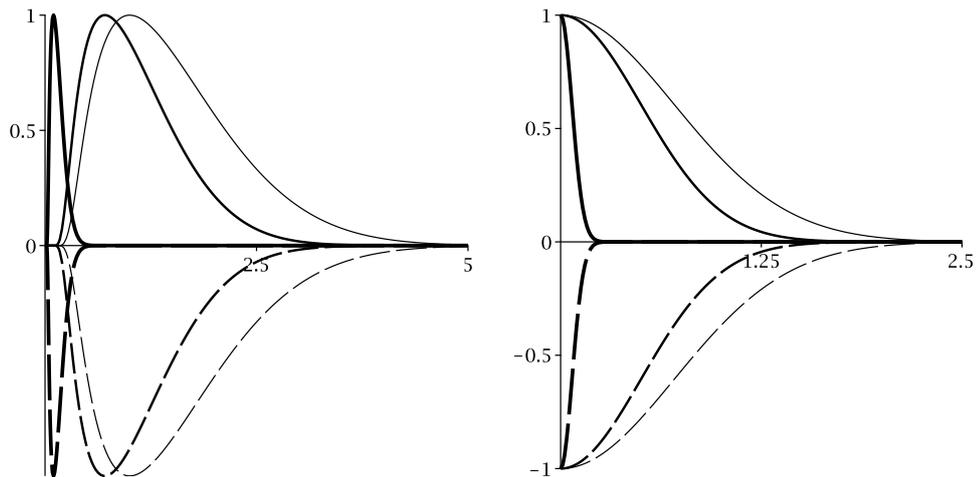


Figura 4.11 Impureza (3.86) para $\alpha = 1$ (linhas sólidas) e $\alpha = -1$ (linhas tracejadas), com campo neutro dado por (4.101) (esquerda) e por (4.103) (direita). A espessura das linhas aumenta com r_0^2 , que toma os valores 0.01, 0.5 e 1.

Os resultados analisados nesta seção são interessantes principalmente no sentido de interpretação, já que fornecem um sistema simples que nos permite enxergar vórtices acoplados

a impurezas sob uma perspectiva diferente. A forma e propriedades da impureza resultante derivam de constantes que podem ser interpretadas em termos de parâmetros mensuráveis, e fisicamente significativos, do campo escalar.

Uma perspectiva particularmente interessante é a análise de espalhamento dos defeitos estudados nesta subseção. Com efeito, muitos dos estudos mais importantes envolvendo impurezas são focados em propriedades de espalhamento [59, 183, 190, 191]. A introdução de impurezas pode ser uma ferramenta importante para estudar fenômenos como as paredes espectrais [222], que foram encontradas em colisões entre defeitos escalares de modelos com impureza. Esse resultado também influenciou a descoberta de paredes espectrais em outros modelos, o que ilustra a importância desse tipo de investigação. Se deixarmos que o campo escalar também varie no tempo, as equações deixam de ser, ao menos para intervalos de tempo longos, rigorosamente equivalentes às da teoria com impureza. Isso significa que, caso essa possibilidade seja considerada, nos depararemos com um problema de espalhamento mais rico. Em particular, essa situação envolve mais uma constante de integração, oriunda da linearização da equação de movimento de $\chi(t, r)$. Finalmente, convém destacar que o formalismo introduzido em [110] também pode ser estendido a outros modelos de vórtices. Na própria referência [110] mostramos que isso também é possível para o modelo de Chern-Simons-Higgs, embora, devido a limitações de espaço, não tenhamos dado exemplos específicos. Outros modelos que suportam vórtices, como a teoria de Born-Infeld com campo de Higgs [223], podem também ser considerados.

Monopolos magnéticos

Outro tipo importante de estrutura localizada é o monopolo magnético, o qual é caracterizado presença de carga magnética. Como sabemos, uma das equações de Maxwell é $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, que pode ser interpretada fisicamente como a afirmação de não existência de monopolos magnéticos. Isso pode ser visto se integrarmos essa equação para analisar o fluxo magnético em uma superfície. O resultado é que o fluxo calculado é sempre nulo, mostrando que todas as linhas magnéticas que entram na superfície devem também sair, o que não aconteceria para um monopolo. O análogo elétrico dessa equação é a lei de Gauss, para a qual esse requerimento não existe, o que é consistente com a existência, há muito experimentalmente comprovada, de monopolos elétricos. Existe então uma espécie de assimetria nas equações de Maxwell, que seria resolvida se monopolos magnéticos existissem.

É possível adaptar as equações de Maxwell para incluir monopolos sem causar inconsistências [203]. Com efeito, a existência desses objeto já havia sido investigada por Pierre Curie [111], que notou que a inclusão dessas partículas não gera inconsistências na teoria de Maxwell. Monopolos ganharam um papel de relativo destaque na física teórica em 1931, quando Dirac considerou as implicações da combinação dos axiomas da mecânica quântica à hipótese existência dessas partículas para uma teoria em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ [112].

Para qualquer campo vetorial \mathbf{A} , vale $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$, de modo que, se existe \mathbf{A} definido *globalmente* e tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, então o fluxo em uma esfera envolvendo o monopolo será nulo. Em seu trabalho, Dirac considerou uma simetria $U(1)$ *local*. O potencial vetor não precisa, portanto, estar definido globalmente. O argumento de Dirac se baseia no fato de que a atuação das transformações de calibre $U(1)$ em uma função de onda carregada ψ é bem definida em todos os pontos, exceto naqueles em que ψ se anula. Como funções de onda são complexas, a equação $\psi(\mathbf{x}_0) = 0$ leva a duas condições, que definem uma linha de singularidades que começa \mathbf{x}_0 e se estende até o infinito, e cuja posição exata depende do calibre. Essa linha é denominada *corda de Dirac*. Ela divide a superfície de integração em duas regiões, em cada uma das quais \mathbf{A} é bem definido. Devemos garantir que, ao realizar a transição entre essas regiões, a função de onda permanece consistentemente definida, a menos de transformações de calibre. A fase de ψ não existe ao longo da corda de Dirac [†] mas, ao cruzá-la, ela deve variar por um múltiplo inteiro de 2π para que ψ seja unívoca. Essa mudança de fase é efetuada por uma transformação de gauge [‡], que realiza a transição entre as duas regiões nas quais \mathbf{A} é definido. Integrando \mathbf{B} numa esfera e usando Stokes, encontramos uma carga magnética quantizada em unidades de $2\pi/e$. A mecânica quântica leva à condição $q_e = e\hbar$, de modo que

$$q_e q_m = 2\pi\hbar N. \quad (5.1)$$

Assim, a existência de ao menos um monopolo magnético no universo seria suficiente para

[†]Notada seja a analogia entre o argumento de Dirac e o raciocínio que nos levou à quantização do fluxo magnético em vórtices. Também naquele exemplo, a existência de zeros no interior do domínio nos impede de manter a fase de φ constante ao longo do contorno.

[‡]Essa transformação é singular. Isso entretanto não gera inconsistências, pois a singularidade está inteiramente contida no setor de calibre, que consiste em graus de liberdade não físicos.

demonstrar, por primeiros princípios, a quantização da carga elétrica. Esse é um resultado muito importante, pois é bastante difícil explicar essa lei fundamental sem recorrer a monopolos. Certas teorias supersimétricas preveem essa regra de quantização e, por algum tempo, pensou-se que essa seria uma forma de contornar a necessidade de monopolos. Entretanto, logo seria descoberto que monopolos magnéticos também existem nessas teorias.

Malgrado o inegável valor teórico de (5.1), a dificuldade na detecção experimental de monopolos magnéticos logo faria com que essas estruturas fossem descartadas pela maior parte das comunidades de física e matemática. Entretanto, uma certa mudança de paradigma decorreria dos trabalhos de 't Hooft e Polyakov [114, 115], que encontraram monopolos em teorias não abelianas. Essa descoberta teria pouco impacto por si só, mas ela ganha uma dimensão diferente devido ao fato de que a presença de monopolos não é consequência da forma específica da teoria: ela decorre de propriedades bastante gerais dos grupos não abelianos usados em teorias de Grande Unificação [114, 224]. A quebra espontânea da simetria abeliana para um grupo $U(1)$ compacto, que identificamos com o eletromagnetismo, gera condições de contorno que *sempre* resultam em monopolos magnéticos. Tais partículas são, portanto, uma necessidade em teorias de Grande Unificação. Essas teorias correspondem à ideia de que, em energias suficientemente altas (como era o caso em instantes mais próximos do Big Bang), as três forças quânticas conhecidas (forte, fraca e eletromagnética), seriam unificadas em uma única interação, representada por um grupo de simetria maior. A diminuição eventual na escala de energia do universo geraria uma quebra espontânea de simetria. As simetrias preservadas após essa quebra levariam às forças forte e eletrofraca. Essa última força corresponde à unificação do eletromagnetismo com a força fraca em altas energias, que já é um resultado conhecido em física de partículas. Neste capítulo, veremos como as condições de contorno topologicamente não triviais implicam a existência de monopolos magnéticos na teoria. Para isso, usaremos o exemplo prototípico da simetria $SU(2)$, mais simples que os grupos de Grande Unificação realistas, mas suficiente para nossos objetivos.

Uma explicação para a ausência de monopolos observáveis é dada pelos modelos inflacionários [22, 23]. Neles, a inflação do universo é responsável por espalhar os monopolos de tal forma que a densidade dessas partículas no universo experimentalmente observável seja suficientemente baixa para explicar a ausência experimental de monopolos. Esse espalhamento depende de parâmetros físicos dos monopolos, como a massa e as forças entre essas partículas, o que motiva o estudo de teorias com esses defeitos. A taxa de aniquilação entre monopolos e antimonopolos também deve ser considerada em uma teoria que deseje ser consistente com a Grande Unificação e as observações experimentais. Motivações para investigações sobre monopolos também existem em um nível mais prático: esses modelos fornecem um excelente campo de estudo para teorias de Yang-Mills Higgs, e sua investigação nos permitirá reconhecer algumas propriedades importantes de defeitos topológicos em teorias não abelianas. Também há uma relação com instantons auto-duais: as equações BPS para monopolos constituem a versão estática das equações auto-duais de um modelo de Yang-Mills [225] puro (isto é, sem campo de Higgs). Isso significa que, ao estudar monopolos magnéticos no regime BPS, estamos também estudando as soluções multi-instantons. Instantons são importantes efeitos não perturbativos que devem ser incluídos nas integrais de caminho que aparecem na teoria quântica de campos, e podem produzir efeitos observáveis [226].

Neste capítulo, estudaremos os monopolos magnéticos da teoria Yang-Mills-Higgs com grupo de calibre $SU(2)$, bem como na sua extensão para grupos $SU(2) \times \dots \times SU(2)$. Mostraremos a forma com que a carga magnética aparece como consequência da quebra espontânea de simetria induzida pelo campo de Higgs, e veremos que ela se relaciona à carga topológica do defeito. Também encontraremos, no limite em que a massa do campo de Higgs tende a zero, um

vínculo de Bogomol'nyi, e seremos capazes de encontrar uma solução exata em forma fechada, que representa um monopolo esfericamente simétrico. Também investigaremos os *dyons*, que são soluções com carga magnética e elétrica, presentes na mesma teoria.

5.1 Teoria de Yang-Mills-Higgs

Vamos agora investigar uma teoria de calibre não abeliana. Grupos de Lie desse tipo são proeminentes em física de altas energias, onde eles estão relacionados a interações mais complexas que o eletromagnetismo, como as forças fraca e forte. Em teorias de Grande Unificação, esse grupo deve ser simples ou semi-simples [227], ter uma cobertura compacta e possuir subgrupos que, após quebra espontânea de simetria deixem um grupo residual $U(1)$ não quebrado, capaz de gerar o eletromagnetismo. Uma escolha simples capaz de satisfazer todos esses requisitos técnicos é o grupo $SU(2)$. Essa escolha é diferente da feita por 't Hooft, que trabalhou com $SO(3)$, mas essas diferenças são majoritariamente numéricas.

Trabalhamos em quatro dimensões espaço-temporais, com métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Note que invertemos a assinatura com relação às seções anteriores. Essa mudança será particularmente útil no caso estático, pois na teoria abeliana encontraremos uma mistura entre índices espaciais de Lorentz e índices internos do grupo de Lie, ambos representados por letras latinas. Na assinatura $(+, -)$, temos que tomar cuidado na hora de descer e subir índices, pois apenas os de Lorentz implicam uma mudança de sinal. A convenção adotada simplifica um pouco os cálculos, já que não haverá, no caso estático, mudanças de sinais relacionadas a levantamento ou abaixamento de índices.

Como já mencionamos, a ação do grupo de Lie é descrita pela representação. Escolhas distintas de representação levam a teorias diferentes, com derivada covariante e interações distintas. Neste capítulo, usaremos a representação adjunta, na qual os elementos do grupo são representados por vetores da sua álgebra de Lie, que é o espaço tangente em torno da identidade. A ação de um elemento X do grupo em um vetor da álgebra é dada por

$$\text{ad}_X(\psi) \equiv [X, \psi]. \quad (5.2)$$

O campo escalar da teoria toma valores na álgebra de Lie e, portanto, pode ser escrito na forma

$$\phi = \phi^a T^a, \quad (5.3)$$

em que T^a são os geradores da álgebra de Lie. No caso de $SU(2)$, a álgebra é $su(2)$, cujos geradores podem ser tomados como $T^a = -i\sigma^a/2$ [198], em que σ^a são as matrizes de Pauli, bem conhecidas da mecânica quântica. Essas matrizes satisfazem as relações de comutação $[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma^c$ e anticomutação $\{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta^{ab}$. Pela convenção que adotamos para os geradores, a propriedade de anticomutação das matrizes de Pauli implica $[T^a, T^b] = T^c$. A ação do grupo de calibre é representada por uma matriz unitária da forma $\gamma = e^{i\alpha^a T^a}$. Embora os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$ sejam diferentes, suas álgebras de Lie são isomórficas. Isso significa que a ação infinitesimal desses dois grupos é equivalente e, por esse motivo, as equações que encontrarmos neste capítulo terão a mesma forma tanto para $SU(2)$ quanto para $SO(3)$. Entretanto, a relação entre esses grupos é dois pra um (rotações em $SU(2)$ têm período de 4π , enquanto a ação de $SO(3)$, que representa rotações no espaço físico, têm período 2π). Isso tem consequências fisicamente observáveis, como uma diferença no quantum de carga magnética e na massa dos monopolos.

Na representação adjunta, a conexão pode ser tomada como gA_μ , onde g é a constante de acoplamento. Podemos absorver g em A_μ por meio da redefinição $gA_\mu \rightarrow A_\mu$, que pode ser

compensada com um fator de g^{-2} que adicionaremos na lagrangiana. Usando (4.2) e (5.2), podemos escrever a derivada covariante na forma

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + [A_\mu, \phi]. \quad (5.4)$$

O campo de calibre é também representado em termos dos geradores de $su(2)$, o que faz com que a multiplicação entre A_μ e ϕ e, portanto, o comutador em (5.4), fiquem bem definidos. Sob uma transformação de calibre, os campos se transformam como

$$\phi \rightarrow \gamma \phi \gamma^{-1} \quad (5.5a) \quad A_\mu \rightarrow \gamma A_\mu \gamma^{-1} - \partial_\mu \gamma \gamma^{-1}. \quad (5.5b)$$

O comutador das derivadas covariantes dá o tensor intensidade de campo. Usando (5.4), encontramos

$$D_\mu D_\nu \phi = \partial_\mu \partial_\nu \phi + [A_\nu, \partial_\mu \phi] + [A_\mu, \partial_\nu \phi] + [\partial_\mu A_\nu, \phi] + [A_\mu, [A_\nu, \phi]]. \quad (5.6)$$

A atuação de $D_\nu D_\mu$ é obtida invertendo os índices gregos na expressão acima. Uma rápida reflexão nos revela que os três primeiros termos desaparecem na comutação. O comutador fica, então,

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \phi = [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \phi] + [A_\mu, [A_\nu, \phi]] + [A_\nu, [\phi, A_\mu]]. \quad (5.7)$$

Podemos usar a identidade de Jacobi ($[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$) nos dois últimos termos para escrever

$$[D_\mu, D_\nu] \phi = [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \phi], \quad (5.8)$$

que dá a ação de $F_{\mu\nu}$ em ϕ na representação adjunta, onde reconhecemos o operador

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (5.9)$$

Ao contrário do que acontecia na teoria abeliana, esse tensor é apenas covariante sob transformações de calibre, obedecendo a lei de transformação $F_{\mu\nu} \rightarrow \gamma F_{\mu\nu} \gamma^{-1}$.

A identidade

$$\text{Tr} \left(T^a T^b \right) = -\frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (5.10)$$

pode ser usada para definir o produto interno

$$\langle V, U \rangle = V^a U^a \langle T^a, T^b \rangle = -2 \text{Tr} (VU), \quad (5.11)$$

entre elementos de $su(2)$. Com os elementos que definimos até agora, somos capazes de definir a lagrangiana dessa teoria, que é tomada na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \eta^{\mu\nu} \text{Tr} (D_\mu \phi D_\nu \phi) - V(|\phi|), \quad (5.12)$$

onde $|\phi|^2 = -2 \text{Tr} (\phi, \phi)$. Em termos das componentes, essa lagrangiana se escreve

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2} D^\mu \phi^a D_\mu \phi^a - V(|\phi|), \quad (5.13)$$

em que estamos supondo soma entre índices repetidos, mesmo que eles sejam internos. Daqui em diante, tomaremos g igual a um. Para recuperar a constante de acoplamento em qualquer resultado mensurável, basta dividir consistentemente $F_{\mu\nu}$ por g . Quando necessário, faremos

eventualmente essa transformação para “devolver” g em algum resultado importante, sem que seja necessário carregar essa constante em todos os nossos cálculos.

O potencial deve ter um mínimo quando $|\phi|^2$ tem o valor de alguma constante, que tomaremos como um. Essa condição define uma esfera unitária no espaço interno da teoria. O único grupo de homotopia não trivial nesse caso é $\pi_2(S_2) = \mathbb{Z}$, de modo que a classificação topológica pode ser novamente associada a cargas inteiras. Em particular, o grupo $\pi_1(S_2) = 0$ é trivial. Isso significa que laços em uma esfera sempre podem ser contraídos a um ponto. Como consequência, o grupo $U(1)$ não pode ser usado na busca por monopolos, o que já havia sido notado por 't Hooft [114]. Dadas as considerações acima, podemos tomar o potencial na forma

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda}{4}(1 - |\phi|^2)^2, \quad (5.14)$$

em que λ é um parâmetro que, como veremos, será importante para determinar a massa do campo de Higgs. As equações de movimento para essa lagrangiana e potencial são

$$D_\mu D^\mu \phi = \lambda \phi (|\phi|^2 - 1), \quad (5.15a)$$

$$D_\mu F^{\mu\nu} = [\phi, D^\nu \phi]. \quad (5.15b)$$

Podemos usar $F_{\mu\nu}$ para definir $E_k = F_{0k}$ e $B_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{ij}$, que são os análogos não abelianos dos campos elétrico e magnético. Entretanto, note-se que, ao contrário do caso abeliano, $F_{\mu\nu}$ não é invariante por transformações de calibre, e portanto as quantidades assim definidas não correspondem a campos mensuráveis. Para que campos físicos sejam definidos nessa teoria, será necessária uma forma de quebra de simetria que nos permita restringir a liberdade de calibre. Veremos em breve o mecanismo a partir do qual essa possibilidade aparece.

O tensor de energia-momento pode ser calculado da maneira usual, e leva a

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} = \langle D_\mu \phi, D_\nu \phi \rangle - \eta^{\alpha\beta} \langle F_{\mu\alpha}, F_{\beta\nu} \rangle + \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (5.16)$$

onde usamos o produto interno que havíamos definido acima. Em particular, a componente T_{00} leva à energia

$$E = T + U, \quad (5.17)$$

com [14, 198]

$$T = \frac{1}{2} \int d^3x \{ |E_k|^2 + |D_0 \phi|^2 \}, \quad (5.18)$$

$$U = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} |D_k \phi|^2 + \frac{1}{2} |B|^2 + V(|\phi|) \right\}, \quad (5.19)$$

em que introduzimos a notação $|E_k|^2 = E_k^a E_k^a$ e etc. A variedade de vácuo desse modelo pode ser vista a partir da condição $T = U = 0$, e corresponde ao conjunto

$$\mathcal{V} = \{ |\phi|^2 = 1, A_\mu = -\partial_\mu \gamma \gamma^{-1} \}. \quad (5.20)$$

Note que a quebra de simetria não é completa: a liberdade de calibre que sobrevive quando as soluções atingem o vácuo ainda permite órbitas não triviais, de modo que ainda existe uma simetria residual. No vácuo, podemos usar a liberdade de gauge para rotacionar o campo escalar e fazer $\phi = T^3$ globalmente. Uma tal transformação é possível em qualquer ponto do espaço, mas em geral não podemos criar um atlas que cubra todo o espaço com regiões nas quais

$\phi = T^3$. Essa possibilidade, entretanto, existe para soluções de vácuo [114], visto que um campo vetorial constante pode ser globalmente rotacionado em qualquer direção. Essa solução permanece invariante sob transformações da forma $e^{i\alpha^3 T^3}$, visto que $e^{i\alpha^3 T^3} (T^3) e^{-i\alpha^3 T^3} = T^3$. Sobrevive, portanto, a simetria local gerada por um grupo abeliano compacto de um parâmetro, identificado com o grupo $U(1)$ do eletromagnetismo. Linearizando a equação do campo escalar em torno do vácuo (isto é, fazendo $\phi = (1 + \psi)T^3$ em primeira ordem), podemos mostrar que o bóson de Higgs da teoria tem massa $\sqrt{2\lambda}$. Linearizando em torno do vácuo as equações de movimento para o campo de gauge, encontramos uma partícula em cada uma das três direções independentes do espaço interno. A direção paralela à do campo escalar dá uma partícula de massa nula, que pode ser identificado com o fóton do eletromagnetismo, gerado pela simetria sobrevivente $U(1)$ que mencionamos acima. Nas direções ortogonais encontramos, pelo mesmo procedimento, duas partículas W^\pm de massa unitária [228].

5.2 Carga magnética

Vamos agora investigar a maneira como o eletromagnetismo propriamente dito se manifesta nessa teoria. Como dissemos acima, podemos usar o tensor de Yang-Mills para definir os campos E_k e B_k , mas sabemos que essas matrizes não podem representar campos físicos, visto que não são invariantes sob transformações de calibre. Uma proposta natural seria selecionar uma das componentes, correspondente a alguma direção do espaço interno, para representar o campo eletromagnético. Entretanto, essas componentes se misturam sob transformações de calibre, então não há uma maneira consistente de selecionar uma direção privilegiada enquanto a simetria $SU(2)$ estiver presente. A solução para esse problema é encontrada quando fornecemos algum mecanismo de quebra espontânea de simetria, que leve a um grupo de calibre menor, o qual possa ser associado ao eletromagnetismo. Uma maneira de conseguir isso é por meio do acoplamento com o campo de Higgs. Como vimos na seção anterior, é possível, *no vácuo*, rotacionar o campo escalar de modo que ele aponte em uma direção específica do espaço interno. A liberdade de calibre sobrevivente atuará apenas ao longo dessa direção, que pode ser consistentemente associada ao grupo $U(1)$ do eletromagnetismo. Examinaremos a forma como isso acontece, e veremos que a carga magnética decorre naturalmente desse processo. Usaremos o método introduzido em [229].

Note que, se $|\phi| \neq 0$ numa região, podemos escrever $\phi = |\phi|\hat{\phi}$, onde $\hat{\phi} \equiv \phi/|\phi|$ é um vetor unitário em $su(2)$. Consideremos uma região em que $|\phi| \neq 0$ e na qual vale [229]

$$D_\mu \hat{\phi} = 0. \quad (5.21)$$

Soluções de energia finita sempre satisfazem assintoticamente essa condição, mas ela é de fato mais fraca do que a exigência de que o campo esteja no vácuo, o que implicaria $D_\mu \phi = 0$. Isso é importante, pois seremos capazes de definir o eletromagnetismo mesmo em uma região na qual os campos ainda não estejam todos no vácuo. Dessa condição, vem

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu |\phi|)\hat{\phi} + |\phi|D_\mu \hat{\phi} = (\partial_\mu |\phi|)\hat{\phi}. \quad (5.22)$$

Queremos encontrar a forma de $F_{\mu\nu}$ quando (5.22) vale. Usando essa equação e tomando o comutador entre $D_\mu \hat{\phi}$ e $\hat{\phi}$ encontramos

$$[\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}] = - [[A_\mu, \hat{\phi}], \hat{\phi}] = -2 \{A_\mu \text{Tr}(\hat{\phi}^2) - \hat{\phi} \text{Tr}(A_\mu \hat{\phi})\}, \quad (5.23)$$

em que foi usada a propriedade

$$[[A, B], C] = 2(A \text{Tr}(BC) - B \text{Tr}(AB)), \quad (5.24)$$

que pode ser demonstrada, para elementos de $su(2)$, usando as propriedades de comutação das matrizes de Pauli. Definindo $\Lambda_\mu \equiv \langle A_\mu, \hat{\phi} \rangle$, ficamos com

$$A_\mu = \Lambda_\mu \hat{\phi} + [\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}]. \quad (5.25)$$

Os termos que aparecem em $F_{\mu\nu}$ são

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = (\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu) \hat{\phi} + 2[\partial_\nu \hat{\phi}, \partial_\mu \hat{\phi}] + \Lambda_\nu \partial_\mu \hat{\phi} - \Lambda_\mu \partial_\nu \hat{\phi}, \quad (5.26)$$

$$[A_\mu, A_\nu] = [[\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}], [\partial_\nu \hat{\phi}, \hat{\phi}]] + \Lambda_\nu [[\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}], \hat{\phi}] - \Lambda_\mu [[\partial_\nu \hat{\phi}, \hat{\phi}], \hat{\phi}]. \quad (5.27)$$

Podemos agora derivar $|\hat{\phi}|^2$ para deduzir $\text{Tr}(\hat{\phi} \partial_\mu \hat{\phi}) = 0$. Usando essa condição junto a (5.24), deduzimos

$$[[\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}], \hat{\phi}] = 2\text{Tr}(\hat{\phi} \hat{\phi}) \partial_\mu \hat{\phi} - \hat{\phi} \text{Tr}(\hat{\phi} \partial_\mu \hat{\phi}) = -\partial_\mu \hat{\phi}. \quad (5.28)$$

Aplicando (5.24) ao primeiro termo de (5.27) e usando a relação $\text{Tr}(A[B, C]) = \text{Tr}(B[C, A])$, somos levados a

$$[[\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}], [\partial_\nu \hat{\phi}, \hat{\phi}]] = -2\hat{\phi} \text{Tr}([\partial_\mu \hat{\phi}, \partial_\nu \hat{\phi}] \hat{\phi}). \quad (5.29)$$

Mas podemos usar (5.24) e o fato de que $\text{Tr}(\hat{\phi} \partial_\mu \hat{\phi}) = 0$ para deduzir

$$[[\partial_\mu \hat{\phi}, \partial_\nu \hat{\phi}], \hat{\phi}] = 0. \quad (5.30)$$

Note que, para duas matrizes de Pauli, o comutador $[\sigma_i, \sigma_j]$ é zero se, e somente se, $i = j$. Isso significa que dois vetores U e V de $su(2)$ que comutam têm a mesma direção nesse espaço. Então a equação (5.30) implica a existência de uma constante C tal que

$$[\partial_\mu \hat{\phi}, \partial_\nu \hat{\phi}] = C \hat{\phi}. \quad (5.31)$$

Vamos multiplicar essa relação por $-2\hat{\phi}$ e tirar o traço:

$$-2\text{Tr}(\hat{\phi} [\partial_\mu \hat{\phi}, \partial_\nu \hat{\phi}]) = -2\text{Tr}(\hat{\phi}^2) C, \quad (5.32)$$

o que nos permite deduzir que

$$C = -2\text{Tr}([\partial_\mu \hat{\phi}, \partial_\nu \hat{\phi}] \hat{\phi}). \quad (5.33)$$

Combinando todos esses resultados na expressão que define $F_{\mu\nu}$ encontramos, finalmente

$$F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} \hat{\phi}, \quad (5.34)$$

em que [229]

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu + 2\text{Tr}([\partial_\mu \hat{\phi}, \partial_\nu \hat{\phi}] \hat{\phi}). \quad (5.35)$$

Vemos então que o tensor de Maxwell pode ser definido a partir da projeção de $F_{\mu\nu}$ ao longo da direção do campo escalar, ao menos enquanto vale a condição (5.21). Alguns autores, como o próprio 't Hooft [114], utilizam (5.35) como uma definição válida em *todo* o espaço. Isso equivale a identificar a projeção $\langle F_{\mu\nu}, \hat{\phi} \rangle$ com o eletromagnetismo em todo o espaço. Evidentemente, a direção $\hat{\phi}$ não tem qualquer significado nos zeros de $\hat{\phi}$, então $f_{\mu\nu}$ precisa ser definido como um limite nesse caso. Embora a definição de 't Hooft seja válida, ela não é única. Quando a simetria $SU(2)$ existe no sistema, essa é apenas uma dentre infinitas formas de definir $f_{\mu\nu}$. Cada uma delas corresponde a uma maneira diferente (e arbitrária) de medir o

campo eletromagnético [198]. É apenas quando, e na medida que, a condição (5.21) é satisfeita que essa ambiguidade desaparece, visto que, dada a equação (5.34), $f_{\mu\nu}$ contém a mesma informação que $F_{\mu\nu}$. Para uma solução fora do vácuo, (5.21) deve em, geral, ser vista como uma aproximação. O eletromagnetismo fica bem definido quando $D_\mu \hat{\phi} \approx 0$ é uma aproximação válida na escala de energia do problema. Note que, quando essa condição é satisfeita, vale $\square|\phi| - \lambda|\phi|(1 - |\phi|^2)$, mostrando que $|\phi|$ não precisa ser trivial para que (5.21) se concretize. A consequência é que a região para a qual (5.34) é maior do que aquela na qual $|\phi| \approx 1$. Essas considerações são importantes para determinarmos a distância do zero do monopolo a partir da qual podemos falar, sem ambiguidade, em campos eletromagnéticos.

Ainda falta mostrar que $f_{\mu\nu}$ de fato satisfaz as equações de Maxwell. Primeiramente, note que

$$D_\alpha F^{\beta\gamma} = (\partial_\alpha f^{\beta\gamma}) \hat{\phi} + f^{\beta\gamma} D_\alpha \hat{\phi} = (\partial_\alpha f^{\beta\gamma}) \hat{\phi}. \quad (5.36)$$

De (5.22), vem

$$[D^\nu \phi, |\phi| \hat{\phi}] = \partial^\nu |\phi| [\hat{\phi}, \hat{\phi}] = 0. \quad (5.37)$$

Substituindo esses resultados em (5.15b), chegamos a

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0, \quad (5.38)$$

que podemos identificar com as equações de Maxwell. Não há fontes nessas equações, o que significa eventuais cargas (sejam elas elétricas ou magnéticas) precisam estar localizadas no núcleo do monopolo, isto é, na região em que (5.21) não vale. Se adotarmos a definição (5.35) ao longo de todo o espaço, será necessário identificar a posição das cargas com os zeros de ϕ , nos quais $f_{\mu\nu}$ se torna singular. Para demonstrar as duas últimas equações podemos simplesmente usar a identidade de Bianchi (4.7). Quando $F_{\mu\nu}$ se escreve na forma (5.34), a equação (5.36) pode ser usada para demonstrar a relação (4.17) da teoria abeliana, que dá as equações restantes. Temos, portanto, campos abelianos $e_k = f_{0k}$ e $b_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} f^{ij}$ bem definidos após a quebra de simetria.

Agora que temos uma definição adequada para o campo magnético, podemos, finalmente, investigar a carga magnética das soluções. Para isso, analisamos o fluxo sobre uma esfera de raio infinito por meio do análogo magnético da lei de Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{b} = \rho_m$. Podemos usar a definição dada para o campo magnético nessa equação e integrar em todo o espaço o que nos dá, após uma aplicação do teorema de Gauss,

$$q_m = -\frac{1}{2} \oint_{S_2^\infty} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \partial_j \hat{\phi}^b \partial_k \hat{\phi}^c \hat{\phi}^a dS^i + \oint_{S_2^\infty} \varepsilon_{ijk} \partial_j \Lambda_k dS^i. \quad (5.39)$$

A última integral é zero pelo teorema de Stokes. Na integral restante, é possível reconhecer a expressão $dS_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ilm} dS_{lm}^*$, em que dS_{lm}^* é o elemento dual a dS_i [138]. Para esse elemento, vale a identidade

$$\varepsilon_{ijk} dS^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ilm} dS_{lm}^* = dS_{jk}^*, \quad (5.40)$$

que podemos usar para escrever

$$q_m = -\frac{1}{2} \oint_{S_2^\infty} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^a \frac{\partial \hat{\phi}^b}{\partial x^j} \frac{\partial \hat{\phi}^c}{\partial x^k} dS_{jk}^*. \quad (5.41)$$

Essas derivadas nos dão o determinante Jacobiano da transformação entre os espaços físico e interno. Ele pode então, ser usado para mudar o espaço de integração para a superfície de uma

esfera em $su(2)$. Esse raciocínio nos leva a

$$q_m = -\frac{1}{2} \oint_{S_2} \hat{\phi}^a \varepsilon_{abc} ds_{bc}^*, \quad (5.42)$$

em que S_2 representa esfera unitária em $su(2)$. Reconhecemos na integral acima o elemento dual $\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} ds_{bc}^*$, que podemos usar para escrever essa equação

$$q_m = - \oint_{S_2} \hat{\phi}^a ds_a = -4\pi N \quad (5.43)$$

em que N é um inteiro que dá o número de vezes que $su(2)$ é coberta quando transcorremos a superfície de S_2^∞ . Note que esse inteiro foi introduzido pelo Jacobiano usado na passagem entre (5.41) e (5.42): ele é uma consequência da topologia dos mapas entre o infinito espacial e a variedade de vácuo, e decorre da necessidade de que o campo ϕ permaneça univocamente definido. Esse inteiro é um invariante topológico das soluções, análogo ao número de voltas da teoria abeliana. Com efeito, iremos identificá-lo com a carga topológica das soluções, o que sugere a definição

$$Q_\tau \equiv N = \frac{-1}{8\pi} \oint_{S_2^\infty} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^a \frac{\partial \hat{\phi}^b}{\partial x^j} \frac{\partial \hat{\phi}^c}{\partial x^k} dS_{jk}^*. \quad (5.44)$$

A equação (5.43) é possivelmente o resultado mais importante deste capítulo: ela mostra que *todas* as soluções topologicamente não triviais da teoria possuem carga magnética. Essa carga aparece como consequência da maneira como a simetria é espontaneamente quebrada para gerar $U(1)$, e sempre estará presente em teorias de Grande Unificação. As únicas soluções dessa teoria que não possuem carga magnética são aquelas topologicamente equivalentes à solução de vácuo, na qual elas devem decair. Como a quebra de simetria acontece aleatoriamente, não há nenhum mecanismo que impeça que mapas topologicamente não triviais entre o infinito e S_2 apareçam, de modo que os monopolos magnéticos não podem ser ignorados na teoria de Yang-Mills-Higgs. Se fizermos a transformação $F_{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{g} F_{\mu\nu}$ para devolver a constante de acoplamento aos nossos resultados, encontraremos a carga magnética $q_m = -\frac{4\pi N}{g}$, de modo que a constante de acoplamento é inversamente proporcional à carga. Essa constante dependerá do grupo de calibre específico. Em uma teoria $SO(3)$, por exemplo, o quantum de fluxo magnético será duas vezes maior que na teoria $SU(2)$ [114].

Quando o inteiro N for positivo, diremos que temos um ou mais monopolos no sistema, ao passo que o sinal negativo dá antimonopolos. Defeitos com sinais opostos tendem a se aniquilar, e a taxa de aniquilação entre monopolos e antimonopolos é importante para determinar a densidade desses defeitos em uma região do espaço-tempo. Note que não fizemos qualquer hipótese sobre a carga elétrica dos defeitos, que pode ter qualquer valor. Em particular, soluções que possuem tanto carga magnética quanto elétrica, denominadas dyons, podem ser encontradas nessa teoria [230].

5.3 Vínculo de Bogomol'nyi na teoria Yang-Mills-Higgs

É novamente possível estabelecer um vínculo de Bogomol'nyi, bem como as soluções BPS que o saturam. Na verdade esse exemplo possui também importância histórica, pois os monopolos da teoria Yang-Mills-Higgs foram um dos primeiros sistemas para o qual um vínculo de BPS foi encontrado. Com efeito, as duas últimas letras dessa sigla fazem referência a Prasad e Sommerfield, que descobriram uma solução exata, e em forma fechada, para as equações

BPS do monopolo. O método a partir do qual eles encontraram essa solução envolveu certa dose de tentativa e erro, e não parece ter passado pela dedução do vínculo e equações BPS. Em vez disso, eles tentaram encontrar uma solução aproximada e perceberam que ela resolvia exatamente as equações de Euler-Lagrange do sistema. Posteriormente, Bogomol'nyi incluiria essa solução como um dos exemplos de seu trabalho, e nele derivaria o vínculo e equações de Bogomol'nyi e que deduziremos a seguir.

As equações BPS aparecem no limite em que a massa do campo de Higgs tende a zero. Dadas as convenções que adotamos para o potencial, isso ocorre quando $\lambda \rightarrow 0$. Essa condição também tem uma explicação física: ela corresponde ao limite em que a força sobre monopolos é nula. Com efeito, é possível mostrar [229] que duas forças atuam em um monopolo desse sistema: uma força eletromagnética que decai com r^{-2} e uma força escalar. A primeira é intermediada pelo fóton relativo à simetria $U(1)$. Como a massa do fóton é nula, a interação resultante é de longo alcance, e só pode ser cancelada por outra interação de longo alcance, o que culmina no requerimento de que a massa $m_\psi = \sqrt{2\lambda}$ do bóson de Higgs da teoria tenda a zero. É claro que a condição de contorno $|\phi| \rightarrow 1$ faz pouco sentido quando λ é exatamente zero, já que $\lambda = 0 \implies V = 0$. Seria então necessário fornecer alguma outra justificativa para essa condição de contorno no caso em que o vínculo de Bogomol'nyi é saturado exatamente. Em geral, pode ser conveniente tratar as equações BPS como uma aproximação, válida no caso limite em que $\lambda \rightarrow 0$, e que pode ser usada para aproximar as soluções de uma teoria com $0 < \lambda \ll 1$.

No limite discutido acima, a energia (5.17) se escreve

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (|D_0\phi|^2 + |E_k|^2) + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (|D_k\phi|^2 + |B_k|^2), \quad (5.45)$$

onde $\Sigma = \mathbb{R}^2 \cup (\infty)$. Novamente, vemos que a energia cinética só tem termos quadráticos, que só podem aumentar a energia. Portanto, uma solução estática que minimize a energia potencial também minimizará a energia total. Então vemos que é suficiente tomar

$$D_0\phi = 0, \quad (5.46a)$$

$$E_k = 0, \quad (5.46b)$$

que corresponde ao requerimento de que as soluções sejam estáticas. Nesse caso, a lei de Gauss ($D_k E_k = -[\phi, D_0\phi]$) é satisfeita trivialmente. Novamente, é possível mostrar, por construção, que uma escolha de Gauge tal que $A_0 = 0$ sempre existe [198]. Então podemos tomar soluções que satisfazem (5.46a) como independentes do tempo. Completando quadrados nos termos restantes da energia, encontramos

$$E = - \int_{\Sigma} d^3x \{ \text{Tr}(B_k B_k \pm B_k D_k \phi \pm D_k \phi B_k + D_k \phi D_k \phi) \mp 2 \text{Tr}(B_k D_k \phi) \}, \quad (5.47)$$

em que usamos a propriedade cíclica do traço no último termo. A identidade $D_k B_k = 0$ pode ser usada para mostrar que $\text{Tr}(D_k B_k) = 0$, de modo que

$$\text{Tr}(B_k D_k \phi) = \text{Tr}(D_k (B_k \phi)) = \text{Tr}(\partial_k (B_k \phi)), \quad (5.48)$$

em que foi usado o fato de que o traço de qualquer comutador é zero. A substituição desse resultado em (5.47) nos leva a

$$E = - \int_{\Sigma} d^3x \text{Tr} \{ (B_k \pm D_k \phi)^2 \} \pm 2 \int_{S_2^\infty} dS^k \text{Tr}(B_k \phi). \quad (5.49)$$

Mas as condições de contorno impõem $|\phi| = \hat{\phi}$ em uma esfera de raio infinito. Então $-2\text{Tr}(B_k\phi) = \langle B_k, \hat{\phi} \rangle = b_k$. Da discussão da seção passada, sabemos que a última integral em (5.49) dá o fluxo magnético em S_2^∞ , de modo que

$$E \geq 4\pi|N|. \quad (5.50)$$

Novamente, podemos devolver a constante de acoplamento dividindo $F_{\mu\nu}$ por g , o que mostra que a massa do monopolo BPS também depende dessa constante, e portanto muda com o grupo de Lie escolhido. O vínculo (5.50) é saturado se, e somente se,

$$B_k \pm D_k\phi = 0. \quad (5.51)$$

Associamos monopolos à equação de sinal superior antimonopolos para a de sinal inferior. Quando $N = \pm 1$, podemos resolver essas equações para encontrar o (anti)monopolo esfericamente simétrico. Quando $N > 1$, a determinação de uma solução exata é bastante desafiadora, mas é possível mostrar a existência dessas soluções [189], que correspondem a um sistema com N monopolos. Um argumento parecido com o que foi mencionado na subseção 4.2.2 pode ser usado para mostrar que o espaço de moduli desse sistema tem dimensão $4N$ [231]. Cada monopolo de uma tal solução tem seu próprio núcleo, que contém um zero de ϕ em seu interior. Ao contrário do que acontecia com vórtices, dois monopolos perdem sua identidade quando estão muito próximos, pois os núcleos se sobrepõem, fazendo com que seja impossível diferenciá-los.

5.4 Monopolo de 't Hooft Polyakov

Assim como acontecia com vórtices, a busca por soluções das equações de movimento é grandemente simplificada quando submetemos o funcional de energia da teoria a uma simetria e então buscamos por pontos estacionários desse funcional simétrico. Nesse caso, vamos buscar campos que sejam invariantes sob quaisquer rotações rígidas no espaço físico, o que corresponde à exigência de simetria esférica. Soluções estáticas com essa propriedade têm a forma adotada por tem a forma proposta por 't Hooft e Polyakov [114, 115]:

$$\phi^a = \frac{h(r)}{r}x^a, \quad (5.52a)$$

$$A_i^a = \frac{k(r) - 1}{r^2}\epsilon_{abi}x^b, \quad (5.52b)$$

em que estamos usando coordenadas esféricas. Esse defeito é esfericamente simétrico, no sentido de que uma rotação independente das coordenadas em \mathbb{R}^3 é equivalente a uma transformação de calibre global. O ansatz acima foi denominado *hedgehog*, que significa “ouriço”, por Polyakov [115]. Esse nome se deve à forma da solução, já que os vetores apontam sempre na direção radial. Essa é uma solução estática, válida quando escolhemos um calibre tal que $A_0 = 0$. O ansatz deve ser submetido às condições de contorno:

$$\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = 0, \quad (5.53a) \qquad \lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = 1, \quad (5.53b)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} k(r) = 1, \quad (5.53c) \qquad \lim_{r \rightarrow \infty} k(r) = 0. \quad (5.53d)$$

A solução (5.52) é simétrica sob rotações em torno da origem, que é o ponto no qual $h(r)$ possui um zero. Esse ponto poderia ter sido escolhido em qualquer lugar do espaço, e dada

a invariância translacional da teoria, resultaria em uma solução fisicamente equivalente. Os mapas entre uma esfera de raio R e as componentes de ϕ são da forma

$$\phi_R : R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \mapsto \tilde{h}(R) \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5.54)$$

em que a esfera foi parametrizada pelos ângulos θ e φ . Quando $R \rightarrow \infty$ essas aplicações se tornam os mapas $\phi_\infty : S_2^\infty \mapsto S_2$ que definem a carga topológica. Vemos que a carga topológica de uma solução simétrica vale $N = 1$, já que esse mapa é a identidade para (θ, φ) . Temos, portanto, um monopolo de carga magnética -4π . Usando a definição do tensor de Maxwell, vemos que o campo magnético é assintoticamente definido na forma $b_k = -x^k/r$, ou

$$\mathbf{b} = -\frac{\hat{r}}{r^2}, \quad (5.55)$$

que pode ser encontrado escolhendo um calibre tal que $\phi \rightarrow \phi^3 T^3$ e substituindo o resultado em (5.35), que se comporta como se toda a carga magnética estivesse concentrada na origem. Será conveniente encontrar primeiramente a densidade de energia para depois procurar as equações de segunda ordem. Precisamos das identidades

$$\partial_k f(r) = \frac{x_k}{r} \frac{df}{dr}, \quad (5.56)$$

$$\varepsilon^{irs} \varepsilon_{ijk} = \delta_j^r \delta_k^s - \delta_k^r \delta_j^s. \quad (5.57)$$

Sejam $\zeta = h/r$ e $\xi = (k-1)/r^2$. Temos

$$\partial_k \phi^a = \frac{x_k x^a}{r} \zeta' + \zeta \delta_k^a, \quad (5.58)$$

em que estamos usando a notação $g(r)' = dg(r)/dr$ para qualquer função de r . O termo restante na derivada covariante é

$$\varepsilon^{abc} A_k^b \phi^c = \xi \zeta (x_k x^a - r^2 \delta_k^a), \quad (5.59)$$

então

$$D_k \phi^a = \frac{x_k x^a}{r} \zeta' + \zeta [\delta_k^a + \xi (x_k x^a - r^2 \delta_k^a)], \quad (5.60)$$

donde

$$\frac{1}{2} (D_k \phi^a)^2 = \frac{k^2 h^2}{r^2} + \frac{h^2}{2}. \quad (5.61)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} F_{jk}^a &= \partial_j (\varepsilon_{aik} x_i \xi) - \partial_k (\varepsilon_{aij} x_i \xi) + \xi^2 (\delta_{cd} \delta_{aj} - \delta_{cj} \delta_{ad}) \varepsilon_{cfk} x_d x_f, \\ &= 2\varepsilon_{ajk} \xi + \frac{x_i (x_j \varepsilon_{aik} - x_k \varepsilon_{aij})}{r} \xi' + \xi^2 (x_c x_a \varepsilon_{cfk} - x_a x_f \varepsilon_{jfk}). \end{aligned} \quad (5.62)$$

A definição $B_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{ij}$ dá

$$B_l^a = 2\delta_l^a \xi + \xi' \left(r \delta_l^a - \frac{x^a x_l}{r} \right) + \xi^2 x_l x^a, \quad (5.63)$$

donde

$$\frac{1}{2}B^{ak}B_k^a = \left[\left(\frac{k'}{r} \right)^2 + \frac{(k^2 - 1)^2}{2} \right]. \quad (5.64)$$

Com isso, podemos escrever a energia, que tem a forma

$$E[h, k] = 4\pi \int dr r^2 \left\{ \left[\left(\frac{k'}{r} \right)^2 + \frac{(k^2 - 1)^2}{2} \right] + \frac{k^2 h^2}{r^2} + \frac{h'^2}{2} + \frac{\lambda}{4} (h^2 - 1)^2 \right\}. \quad (5.65)$$

As soluções são pontos estacionários desse funcional, então as equações de movimento podem ser encontradas fazendo $\delta E = 0$. Assim, chegamos às equações de movimento

$$\frac{1}{r^2} (r^2 h')' - \frac{2hk^2}{r^2} = \lambda h (h^2 - 1), \quad (5.66)$$

$$k'' = kh^2 - \frac{k(1 - k^2)}{r^2}. \quad (5.67)$$

Quando $\lambda \rightarrow 0$, podemos substituir o ansatz em (5.51) para deduzir as equações BPS do caso simétrico, que ficam

$$h' = \pm \frac{1 - k^2}{r^2}, \quad (5.68a)$$

$$k' = \mp hk. \quad (5.68b)$$

As soluções de sinal superior e inferior se relacionam pela troca $\phi \rightarrow -\phi$, então consideremos as de sinal superior, com carga magnética positiva. Para essas equações, são conhecidas as soluções de forma fechada [154]

$$h(r) = \coth(r) - \frac{1}{r} \quad (5.69)$$

$$k(r) = r \operatorname{csch}(r), \quad (5.70)$$

que possuem energia $E = 4\pi$, já que pertencem ao setor topológico $N = 1$. Esses campos, e a densidade de energia a eles associada, estão representados na figura 5.1. A solução é composta por duas funções monótonas de r , que tendem ao vácuo gradualmente. A densidade de energia é concentrada em uma bola com centro no zero do campo escalar, e diminui à medida que se afasta dele.

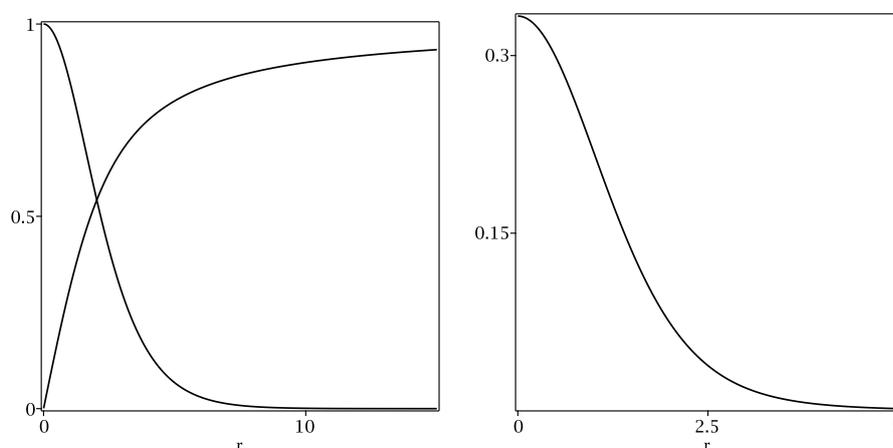


Figura 5.1 À esquerda, são mostrados os perfis da solução $h(r)$ (linha crescente), $k(r)$ (linha decrescente) de (5.68). À direita, vemos a densidade de energia desse monopolo.

5.5 Dyon de Julia e Zee

As equações de movimento da teoria Yang-Mills-Higgs também permitem soluções do tipo dyon. Esses defeitos topológicos são ao mesmo tempo monopolos elétricos e magnéticos, pois possuem os dois tipos de carga. Partículas com essa propriedade foram primeiramente investigadas por Schwinger [232] e, na teoria Yang-Mills, foram originalmente encontradas por Julia e Zee [230], que resolveram numericamente as equações de segunda ordem esfericamente simétricas.

Dyons podem ser usados para ilustrar uma possibilidade que já havíamos mencionado na seção 2.6: um vínculo Bogomol'nyi dependente de duas cargas, sendo uma topológica e outra decorrente do teorema de Noether (a carga elétrica). Esse fato e a técnica engenhosa utilizada para buscar soluções BPS nos motivam a investigar esses defeitos no limite de Bogomol'nyi. As equações BPS novamente aparecem quando $\lambda \rightarrow 0$, pelo mesmo motivo. As equações e vínculo de Bogomol'nyi relacionadas a essa solução foram primeiramente deduzidas por Bogomol'nyi [56], e encontradas independentemente por Coleman, Park, Neveu e Sommerfield no trabalho [233]. Nessa última referência, os autores introduziram dois fatores constantes, que chamaremos de α e β , sujeitos ao vínculo $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Podemos usar essas constantes para escrever, no limite $\lambda \rightarrow 0$,

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x |D_0\phi|^2 - \int_{\Sigma} d^3x \text{Tr} (\alpha^2 D_k\phi D_k\phi + B_k B_k) - \int_{\Sigma} d^3x \text{Tr} (\beta^2 D_k\phi D_k\phi + E_k E_k). \quad (5.71)$$

Note que a introdução de α e β não causou perda de generalidade, já que nós apenas usamos essas constantes para escrever $D_k\phi D_k\phi$ de outra maneira. A última integral nessa expressão pode ser escrita na forma

$$- \int_{\Sigma} d^3x \{ \text{Tr} [(E_k \pm \beta D_k\phi)^2] \mp 2\beta \text{Tr} (E_k D_k\phi) \}. \quad (5.72)$$

Mas, por um argumento similar ao usado para calcular o traço de $B_k D_k$ no monopolo BPS, podemos mostrar que

$$\text{Tr} (E_k D_k\phi) = \partial_k \text{Tr} (E_k\phi) - \text{Tr} ([D_0\phi, \phi]\phi), \quad (5.73)$$

em que, no último passo, foi usado o análogo da lei de Gauss para a teoria Yang-Mills, que é a equação $D_k E_k = [\phi, D^0\phi]$, deduzida de (5.15b). Mas

$$\text{Tr} ([D_0\phi, \phi]\phi) = \text{Tr} ((D_0\phi)\phi^2) - \text{Tr} (\phi(D_0\phi)\phi) = 0, \quad (5.74)$$

em que usamos a propriedade cíclica do traço para deduzir que os dois termos nessa expressão são iguais. Vemos portanto que essa integral é completamente análoga à que encontramos quando minimizamos a energia potencial do monopolo na seção 5.3, com a diferença de que o termo de superfície vem agora do fluxo *elétrico*, dado por $\int_{S_2^\infty} f_{0k} dS^k$. Então

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x |D_0\phi|^2 - \int_{\Sigma} d^3x \text{Tr} [(E_k \pm \beta D_k\phi)^2] - \int_{\Sigma} d^3x \text{Tr} [(B_k \pm \alpha D_k\phi)^2] \pm 2 \int_{S_2^\infty} dS^k \text{Tr} (\alpha B_k\phi + \beta E_k\phi) \geq 4\pi |N| \alpha + |q_e| \beta, \quad (5.75)$$

que agora é uma expressão da forma (2.75). Esse vínculo é saturado por soluções de

$$D_0\phi = 0, \quad (5.76)$$

$$E_k = \mp D_k(\beta\phi), \quad (5.77)$$

$$B_k = \mp D_k(\alpha\phi). \quad (5.78)$$

As constantes α e β podem ser interpretadas em termos de um parâmetro angular ξ , tal que $\tan \xi = \beta/\alpha = q_e/q_m$, fornecendo uma representação geométrica da razão entre as duas cargas.

Mesmo na presença de campo elétrico, ϕ ainda é covariantemente constante no BPS. Expandindo (5.76), encontramos

$$\partial_0\phi = [\phi, A_0]. \quad (5.79)$$

Continua sendo possível escolher um calibre no qual $A_0 = 0$, o que implica $\partial_0\phi = 0$ pela equação acima. Entretanto, esse caminho logo se revela uma péssima ideia: a Lei de Gauss $D_k E_k = 0$ ainda precisa ser satisfeita, e segue que os A_k devem resolver as equações $\partial_k A_k = E_k$ e a Lei de Gauss, o que resulta em uma dependência temporal complicada para esses campos. Entretanto, existe uma maneira de buscar soluções independentes do tempo sem esbarrar nesse problema. Note que a substituição $\partial_0\phi = 0$ em (5.79) não implica $A_0 = 0$. Com efeito, esse requerimento só impõe a nulidade do comutador. Isso significa que qualquer escolha de A_0 que seja paralela a ϕ será suficiente. Isso nos motiva a buscar soluções tais que

$$[\phi, A_0] = 0, \quad (5.80)$$

que é a *correspondência Julia e Zee*. Foi com essa relação que os autores de [230] encontraram uma solução tipo dyon, e também foi ela que permitiu que Prasad e Sommerfield encontrassem a solução em forma fechada também para o dyon esférico, que mostraremos em breve.

Podemos usar (5.80) para generalizar o ansatz esfericamente simétrico que usamos na Seção 5.4. Mantemos a forma dos outros campos e supomos que A_0 também é uma função esfericamente simétrica, com a mesma direção que ϕ em $su(2)$. Então deve ser

$$A_0^a = \frac{f(r)}{r} x^a, \quad (5.81)$$

em que a função $f(r)$ precisa satisfazer as condições de contorno adicionais

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = a + \frac{C}{r} \quad (5.82) \quad \lim_{r \rightarrow 0} f(r) = 0, \quad (5.83)$$

onde a é um parâmetro real e C é uma constante que pode ser determinada a partir do cálculo do fluxo elétrico no infinito. A lei de Gauss nesse sistema fica

$$D_k E_k = 0, \quad (5.84)$$

que após a substituição do ansatz toma a forma

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = 2fk^2. \quad (5.85)$$

Fora do núcleo do dyon, podemos definir o campo elétrico $e_k = \langle E_k, \hat{\phi} \rangle$, que dá

$$e_k = -\frac{x_k}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{C}{r} \right). \quad (5.86)$$

Aplicando a Lei de Gauss do eletromagnetismo $\nabla \cdot \mathbf{e} = \rho_m$ a uma esfera de raio infinito e integrando, encontramos a equação $4\pi C = q_e$, ou

$$C = \frac{q_e}{4\pi}. \quad (5.87)$$

A configuração possui um campo elétrico gerado por uma distribuição de carga esfericamente simétrica contida no núcleo do dyon, com carga elétrica total q_e , que entra na solução por meio das condições de contorno.

Como a derivada covariante temporal de ϕ é zero, a equação para $h(r)$ não muda. A última equação de segunda ordem desse problema pode ser deduzida facilmente se observarmos que (5.80) permite que as componentes espaciais de (5.15b) sejam escritas na forma

$$D_j F^{jk} = [\phi, D^k \phi] - [A_0, D^k A_0]. \quad (5.88)$$

Como $D_j F^{jk}$ não depende nem de ϕ nem de A_0 , as contribuições dos comutadores em (5.88) são análogas, e de fato só diferem por um sinal negativo. A contribuição de $h(r)$ é a mesma encontrada para o monopolo, já que esse campo está acoplado a $k(r)$ da mesma forma. Então ele ainda contribui com um fator hk^2 na equação de movimento de $k(r)$. Por (5.88), podemos ver que o efeito da inclusão de $f(r)$ se resume a uma contribuição adicional análoga, que só difere por um sinal e portanto vale $-f^2(r)k(r)$. Esse raciocínio leva à equação

$$k'' = k(h^2 - f^2) - \frac{k(1 - k^2)}{r^2}, \quad (5.89)$$

que é precisamente o resultado que teríamos encontrado efetuando a transformação de coordenadas em (5.15b).

O funcional de energia do dyon se escreve, para λ arbitrário,

$$E = 4\pi \int dr r^2 \left\{ \left[\left(\frac{k'}{r} \right)^2 + \frac{(k^2 - 1)^2}{2} \right] + \frac{k^2(h^2 + f^2)}{r^2} + \frac{h'^2 + f'^2}{2} + \frac{\lambda}{4}(h^2 - 1)^2 \right\}. \quad (5.90)$$

Quando $\lambda \rightarrow 0$, encontramos o vínculo de Bogomol'nyi $E \geq 4\pi\alpha + \beta|q_e|$. Podemos substituir o ansatz nas equações BPS do dyon para encontrar soluções que saturam esse vínculo, mas isso não será necessário. A própria forma das equações nos mostra que $\alpha\phi$ satisfaz a equação BPS do monopolo, para a qual conhecemos uma solução analítica: $\alpha\phi = \coth(r) - 1/r$. A correspondência de Julia e Zee nos permite escrever

$$D_k A_0 = \frac{\beta}{\alpha} D_k(\alpha\phi). \quad (5.91)$$

que usamos para deduzir a solução analítica

$$h(r) = \frac{1}{\alpha} \left[\coth(r) - \frac{1}{r} \right], \quad (5.92)$$

$$k(r) = r \operatorname{csch}(r), \quad (5.93)$$

$$f(r) = \frac{\beta}{\alpha} \left[\coth(r) - \frac{1}{r} \right]. \quad (5.94)$$

5.6 Monopulos multimagnéticos

Vamos agora explorar uma extensão da teoria analisada nas seções anteriores deste capítulo. Na referência [120], na qual a presente seção é baseada, investigamos um modelo Yang-Mills-Higgs generalizado com simetria de calibre $SU(2) \times \dots \times SU(2) \equiv SU(2)^p$, $p \in \mathbb{N}$, de modo similar ao que fizemos para vórtices na referência [109], discutida no capítulo passado. A relação entre as soluções que discutiremos agora e o monopolo de 't Hooft Polyakov é completamente análoga à relação entre os vórtices da teoria $U(1)^N$ generalizada e os de Maxwell-Higgs. Não é necessário repetir observações que já fizemos na seção 4.3, então daremos agora um tratamento comparativamente mais resumido.

Como já discutimos, o aumento de simetria pode ser usado para introduzir setores de energia escura. Assim como o setor claro, eles devem ter grupos não abelianos com uma eventual quebra espontânea de simetria, que deve originar outros monopulos magnéticos se a simetria $U(1)$ sobreviver. Na referência [237], foi mostrado que monopulos escuros podem aparecer naturalmente em teorias não abelianas, mesmo sem a introdução explícita de um setor escuro. Esses monopulos possuem uma carga “magnética”, que entretanto não é a mesma do eletromagnetismo. Essa possibilidade decorre do fato de o grupo de Lie ser suficientemente grande para permitir simetrias residuais maiores que $U(1)$ (os autores de [237] usaram o exemplo $SU(N)$), cada uma das quais pode ser associada a um tipo de monopolo. Em investigações envolvendo supersimetria e/ou teoria das cordas, não é incomum o aparecimento de grupos de simetria relativamente grandes. Nas condições certas, eles podem acabar sofrendo quebras de simetria sucessivas, que podem resultar em produtos de grupos não abelianos que, por sua vez, têm sua simetria quebrada para $U(1)$, originando monopulos. De modo geral, o modelo considerado nesta seção pode ser visto como um protótipo o qual pode ser útil para estudar monopulos em teorias não abelianas mais complexas. Encontraremos um BPS e conseguiremos analisar a influência de outros setores por meio do acoplamento mediado pela permeabilidade generalizada, o que simplificará bastante uma análise que normalmente seria matematicamente muito desafiadora.

O aumento de simetria, acompanhado de uma generalização apropriada que podemos identificar com uma permeabilidade generalizada, dá ao sistema uma topologia muito mais rica, e permite soluções com estrutura interna complexa que não é encontrada na teoria original. Os trabalhos [234–236] exploraram esse caminho para encontrar monopulos com estrutura interna em teorias $SU(2)^2$. Em particular, na referência [236] a permeabilidade magnética foi usada para introduzir “buracos” na densidade de energia, que permitem soluções com duas camadas magnéticas existindo uma dentro da outra. Agora vamos generalizar esses resultados para o caso $SU(2)^p$.

O modelo é descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = - \sum_{n=1}^p \left\{ \frac{P^{(n)}(\{|\phi|\})}{4(g^{(k)})^2} F_{\mu\nu}^{(n)a} F^{(n)a\mu\nu} - \frac{M^{(n)}(\{|\phi|\})}{2} D_{\mu}^{(n)} \phi^{(n)a} D^{(n)\mu} \phi^{(n)a} \right\} - V(\{|\phi|\}), \quad (5.95)$$

onde $(\{|\phi|\})$ representa o conjunto $(|\phi^{(1)}|, |\phi^{(2)}|, \dots, |\phi^{(p)}|)$, $g^{(k)}$ é uma constante de acoplamento, $D_{\mu}^{(k)} \phi^{(k)a} = \partial_{\mu} \phi^{(k)a} + \varepsilon^{abc} A_{\mu}^{(k)b} \phi^{(k)c}$ é a ação da derivada covariante no setor k e $F_{\mu\nu}^{(k)a} = \partial_{\mu} A_{\nu}^{(k)a} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{(k)a} + \varepsilon^{abc} A_{\mu}^{(k)b} A_{\nu}^{(k)c}$. As funções $P^{(n)}$ e $M^{(n)}$ são não negativas e podem depender de todos os campos em $\{|\phi|\}$. Vamos supor que elas tendem assintoticamente a um, de modo que as soluções de energia finita estão sujeitas a uma classificação topológica análoga à do modelo original. A variedade de vácuo é o produto de p esferas, e cada solução é topologicamente

classificada por meio de p cargas, cada uma das quais gera uma carga magnética que satisfaz

$$q_m^{(n)} = -\frac{4\pi N^{(n)}}{g^{(n)}}. \quad (5.96)$$

Vamos novamente tomar $g^{(n)} = 1$, já que podemos, como antes, devolver essas constantes dividindo $F_{\mu\nu}^{(n)b}$ por $g^{(n)}$.

As equações de Euler-Lagrange para a densidade lagrangiana (5.95) são

$$\begin{aligned} D_\mu^{(k)} \left(M^{(k)} D^{(k)\mu} \phi^{(k)a} \right) &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^p \frac{\partial P^{(n)}}{\partial \phi^{(k)a}} F_{\mu\nu}^{(n)b} F^{(n)b\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^p \frac{\partial M^{(n)}}{\partial \phi^{(k)a}} D_\mu^{(n)} \phi^{(n)b} D^{(n)\mu} \phi^{(n)b} + \frac{\partial V}{\partial \phi^{(k)a}}, \end{aligned} \quad (5.97a)$$

$$D_\mu^{(k)} \left(P^{(k)} F^{(k)a\mu\nu} \right) = M^{(k)} \varepsilon^{abc} \phi^{(k)b} D^{(k)\nu} \phi^{(k)c}, \quad (5.97b)$$

em que $D_\mu^{(n)} F^{(n)a\mu\nu} = \partial_\mu F^{(n)a\mu\nu} + g^{(n)} \varepsilon^{abc} A_\mu^{(n)b} F^{(n)c\mu\nu}$.

As soluções de menor energia são estáticas. Completando quadrados pelo mesmo procedimento que utilizamos para o monopolo comum, obtemos

$$E = \sum_{n=1}^p \int d^3x \left[\frac{1}{2} M^{(n)} |D_k^{(n)} \phi^{(n)}|^2 + \frac{1}{2} P^{(n)} |B_k^{(n)}|^2 + V(\{|\phi|\}) \right] \quad (5.98)$$

e vemos que, no limite em que $V(\{|\phi|\}) \rightarrow 0$, podemos escrever

$$E = \sum_{n=1}^p \int d^3x \left| B_k^{(n)} \pm \frac{D_k^{(n)} \phi^{(n)}}{P^{(n)}} \right|^2 + 4\pi \sum_{n=1}^p v^{(n)} |N^{(n)}|, \quad (5.99)$$

em que os $v^{(n)}$ são tais que $\phi^{(n)}(\infty) = v^{(n)}$, impostos como condições de contorno. Eles podem ser associados aos mínimos do potencial $V(\{|\phi|\})$, e essa condição de contorno traduz o requerimento de energia finita em uma situação na qual $V(\{|\phi|\}) \neq 0$, que pode ser aproximada pelo BPS se V for suficientemente pequeno. Reconhecemos acima o vínculo de Bogomol'nyi

$$E \geq 4\pi \sum_{n=1}^p \frac{v^{(n)}}{g^{(n)}} |Q_t^{(n)}|. \quad (5.100)$$

Note que a energia não depende de nenhum dos $P^{(n)}$, apenas da topologia e condições de contorno. A saturação ocorre se, e somente se,

$$B_k^{(n)} = \mp \frac{D_k^{(n)} \phi^{(n)}}{P^{(n)}} \quad (5.101)$$

para cada n .

Buscamos soluções esfericamente simétricas com relação à origem, o que sugere o ansatz

$$\phi^{(n)a} = \frac{x_a}{r} H^{(n)}(r), \quad (5.102a)$$

$$A_i^{(n)a} = \varepsilon_{aib} \frac{x_b}{g^{(n)} r^2} (1 - K^{(n)}(r)), \quad (5.102b)$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} H^{(n)}(0) &= 0, & K^{(n)}(0) &= 1, \\ H^{(n)}(\infty) &\rightarrow \pm v^{(n)}, & K^{(n)}(\infty) &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Essa solução corresponde a um sistema de p monopolos esfericamente simétricos, cada um com uma carga -4π do seu próprio setor. As equações de segunda ordem ficam

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \left(r^2 M^{(n)} H^{(n)'} \right)' - \frac{2M^{(n)} H^{(n)} K^{(n)2}}{r^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial P^{(k)}}{\partial H^{(n)}} \left(\frac{2K^{(k)'}2}{g^{(k)2} r^2} - \frac{(1-K^{(k)2})2}{g^{(k)2} r^4} \right) \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial M^{(k)}}{\partial H^{(n)}} \left(H^{(k)'}2 + \frac{2H^{(k)2} K^{(k)2}}{r^2} \right) - \frac{\partial V}{\partial H^{(n)}} = 0, \end{aligned} \quad (5.104a)$$

e

$$r^2 \left(P^{(n)} K^{(n)'} \right)' - K^{(n)} \left\{ \left(M^{(n)} g^{(n)2} r^2 H^{(n)2} \right) + \left(P^{(n)} (1 - K^{(n)2}) \right) \right\} = 0, \quad (5.104b)$$

que constituem um sistema de $2p$ equações diferenciais ordinárias acopladas. Dada a complexidade desse sistema, vamos investigar configurações BPS que, no caso esfericamente simétrico, satisfazem,

$$H^{(n)'} = \pm P^{(n)} \frac{1 - K^{(n)2}}{g^{(n)} r^2}, \quad (5.105a)$$

e

$$K^{(n)'} = \mp g^{(n)} \frac{H^{(n)} K^{(n)}}{P^{(n)}}. \quad (5.105b)$$

Quando essas equações de primeira ordem são satisfeitas, a densidade de energia total pode ser escrita na forma

$$\rho(r) = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)}(r), \quad (5.106)$$

em que

$$\rho^{(n)}(r) = \frac{2P^{(n)} K^{(n)'}2}{(g^{(n)} r)^2} + \frac{H^{(n)'}2}{P^{(n)}}, \quad (5.107)$$

que corresponde à soma das densidades de energia de cada setor, cada uma das quais contribui com um fator de 4π para a energia total.

Vamos ilustrar os nossos resultados com dois dos seis exemplos publicados em [120]. Primeiramente, consideraremos um modelo de simetria $SU(2)^3$ com $P^{(1)} = |\phi^{(1)}|^{-\alpha}$, que significa há uma auto-interação na permeabilidade generalizada do primeiro setor, $P^{(2)} = |\phi^{(1)}|^{-\beta}$ e $P^{(3)} = |\phi^{(2)}|^{-\gamma}$, em que α , β e γ são constantes inteiras. Essa combinação resultará em uma estrutura de tripla camada, na qual as três densidades de energia se anulam em bolas de tamanhos diferentes, cujo raio depende da constante em cada $P^{(n)}$.

As equações de primeira ordem desse exemplo são

$$H^{(1)'} = \left(\frac{1}{H^{(1)}} \right)^\alpha \frac{1 - K^{(1)2}}{r^2}, \quad (5.108a)$$

$$K^{(1)'} = -H^{(1)} K^{(1)} \left(H^{(1)} \right)^\alpha, \quad (5.108b)$$

$$H^{(2)'} = \left(\frac{1}{H^{(1)}} \right)^\beta \frac{1 - K^{(2)2}}{r^2}, \quad (5.108c)$$

$$K^{(2)'} = -H^{(2)} K^{(2)} \left(H^{(1)} \right)^\beta, \quad (5.108d)$$

e

$$H^{(3)'} = \left(\frac{1}{H^{(2)}} \right)^\gamma \frac{1 - K^{(3)2}}{r^2}, \quad (5.108e)$$

$$K^{(3)'} = -H^{(3)} K^{(3)} \left(H^{(2)} \right)^\gamma. \quad (5.108f)$$

Soluções em forma fechada dessas equações não foram encontradas, mas podemos resolver esse sistema por meio de métodos numéricos. Isso foi feito para a escolha de parâmetros $\alpha = 1, \beta = 10$ e $\gamma = 30$, que pode ser vista nas figuras abaixo, juntamente com as respectivas contribuições para a densidade de energia.

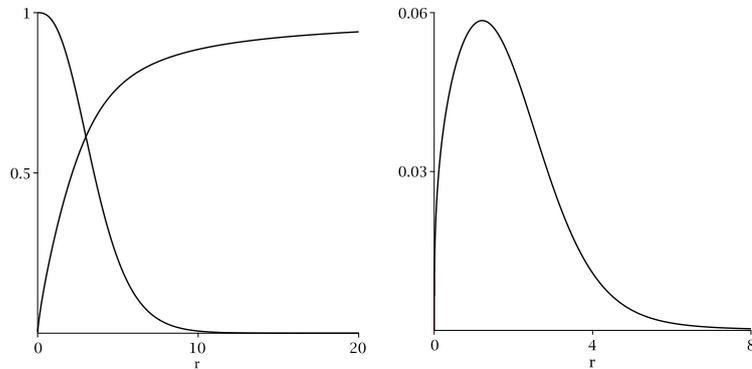


Figura 5.2 À esquerda, mostramos a solução $H^{(1)}(r)$ (Linha crescente) e $K^{(1)}(r)$ (linha decrescente) de (5.108) para $\alpha = 1, \beta = 10$ e $\gamma = 30$. À direita, está a contribuição ρ_1 desse setor para a densidade de energia.

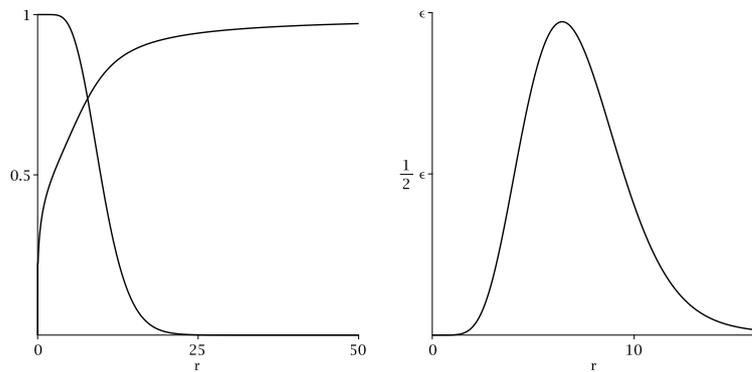


Figura 5.3 Na figura da esquerda, mostramos a solução $H^{(2)}(r)$ do segundo setor (linha ascendente) e $K^{(2)}(r)$ (linha decrescente). Essas funções fazem parte da solução de (5.108) com as escolhas $\alpha = 1, \beta = 10$ e $\gamma = 30$. À direita, mostramos a contribuição ρ_3 desse setor, que também apresenta um formato de sino, mas está centrada em um valor de r maior, próximo de $r = 20$. O máximo dessa densidade de energia ocorre próximo a esse valor de r , e vale $\varepsilon = 0.00022$ no presente exemplo.

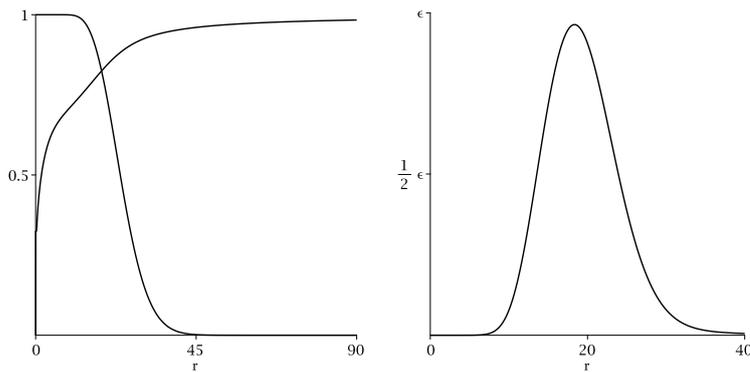


Figura 5.4 Na figura da esquerda, mostramos a solução $H^{(3)}(r)$ do terceiro setor (linha ascendente) e $K^{(3)}(r)$ (linha decrescente). Essas funções fazem parte da solução de (5.108) com as escolhas $\alpha = 1$, $\beta = 10$ e $\gamma = 30$. À direita, mostramos a contribuição ρ_3 desse setor, que também apresenta um formato de sino, mas está centrada em um valor de r maior, próximo de $r = 20$. O máximo dessa densidade de energia ocorre próximo a esse valor de r , e vale $\varepsilon = 0.00022$ no presente exemplo.

É possível notar que a densidade de energia possui um zero na origem em todos os exemplos, tendo a forma de um *lump* assimétrico. À medida que os parâmetros do modelo aumentam, a densidade de energia se demora mais a sair do zero, deixando um buraco oco no meio dessa estrutura esfericamente simétrica. Isso é bastante análogo ao que vimos em vórtices com simetria aumentada, com a diferença que, naquele modelo, existia a possibilidade de aumentar a multiplicidade dos zeros de uma solução radialmente simétrica, o que não pode ser feito para monopolos, que só admitem soluções com essa simetria quando $N = 1$.

Na Figura 5.5, mostramos uma seção planar que representa as densidades de energia. Os buracos progressivamente maiores nessas estruturas localizadas nos permitem colocar um monopolo dentro do outro, formando uma estrutura com três camadas ocas. Esse comportamento não seria possível para um monopolo de 't Hooft Polyakov, que sempre possui um pico no seu centro. Mediante uma pequena perturbação é possível que os monopolos se movam separadamente, e essa estrutura tenderá a desenvolver uma assimetria que representa esse movimento. Nesse modelo seria possível estudar as propriedades de soluções de setores escuros apenas observando seu efeito na permeabilidade, além de detectar um possível movimento dessas partículas, a partir da própria densidade de energia do setor visível. Essas quantidades mensuráveis em algum setor visível poderiam, em princípio, ser usadas para inferir propriedades de partículas que não somos capazes de observar diretamente, o que é facilitado pela maneira como o acoplamento acontece apenas através das permeabilidades magnéticas do sistema.

Note que a altura do máximo na densidade de energia de cada setor diminui progressivamente à medida que os parâmetros em $P^{(k)}$ aumentam. Isso acontece porque a região na qual essas funções diferem apreciavelmente de zero aumenta com esses parâmetros. Isso se reflete no fato de que as camadas da Figura (5.5) se tornam progressivamente maiores. À medida que o defeito se torna mais “largo”, a altura do pico precisa diminuir, para que essa densidade seja consistente com a contribuição $E^{(k)} = 4\pi$ para a energia total. O monopolo nesse caso possui a mesma massa, mas ela está espalhada por uma região maior do espaço. É claro que o fato de essas massas serem iguais é uma consequência da escolha $g^{(k)} = 1$ para todo k . No caso geral, a massa é inversamente proporcional à respectiva constante de acoplamento.

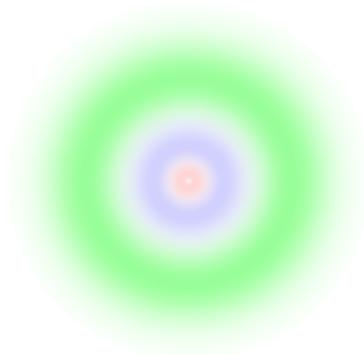


Figura 5.5 Seção planar das densidades de energia, passando pelo centro. São mostradas as contribuições ρ_1 (vermelho), ρ_2 (azul) e ρ_3 (verde) correspondentes a soluções de (5.108). Juntas, elas dão origem a uma estrutura multimagnética com três camadas ocas. Aqui, valem $\alpha = 1$, $\beta = 10$, $\gamma = 30$.

Como um segundo exemplo, considere $P^{(1)} = 1$, $P^{(2)} = |\phi^{(1)}|^{-\alpha}$, $P^{(3)} = |\phi^{(2)}|^{-\beta}$ e $P^{(4)} = |\phi^{(3)}|^{-\gamma}$. A equação para $n = 1$ dá, então, o monopolo de 't Hooft-Polyakov BPS, cuja solução (5.69) já foi calculada e representada graficamente. Esse monopolo possui densidade de energia com pico na origem, de modo que a estrutura magnética resultante não será mais oca, possuindo em vez disso esse monopolo em seu centro. Ele será usado para modificar a permeabilidade magnética do setor dois, criando um buraco no monopolo seguinte, e assim sucessivamente. Os campos dos outros setores foram também calculados numericamente para as escolhas $\alpha = 3$, $\beta = 10$ e $\gamma = 20$, e são mostrados nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9, juntamente com suas respectivas densidades de energia.

Assim como antes, podemos colocar as seções planares da densidade de energia em uma mesma imagem, que mostramos na Figura 5.6. Agora a estrutura tem um centro duro composto pelo monopolo de 't Hooft Polyakov, que aparece em vermelho na figura e é bem menor que as camadas que o circulam.



Figura 5.6 Seção planar das densidades de energia, passando pelo centro. São mostradas as contribuições ρ_1 (vermelho), ρ_2 (azul) e ρ_3 (verde) e ρ_4 (preto) relativas às soluções de (5.105), com $P^{(1)} = 1$, $P^{(2)} = |\phi^{(1)}|^{-\alpha}$, $P^{(3)} = |\phi^{(2)}|^{-\beta}$ e $P^{(4)} = |\phi^{(3)}|^{-\gamma}$. Aqui $\alpha = 3$, $\beta = 10$, $\gamma = 20$. A estrutura agora é composta por um núcleo duro cercado por camadas ocas.

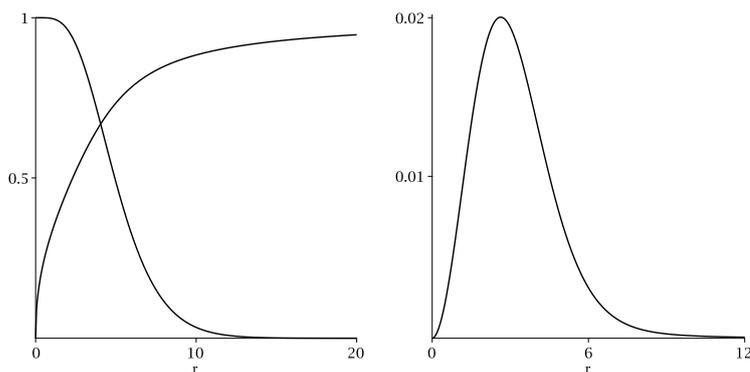


Figura 5.7 Na figura da esquerda, mostramos $H^{(2)}(r)$ (linha ascendente) e $K^{(2)}(r)$ (linha decrescente) que resolvem as equações BPS esfericamente simétricas desse sistema, com $P^{(1)} = 1$, $P^{(2)} = |\phi^{(1)}|^{-\alpha}$, $P^{(3)} = |\phi^{(2)}|^{-\beta}$ e $P^{(4)} = |\phi^{(3)}|^{-\gamma}$. Aqui, os parâmetros escolhidos foram $\alpha = 3$, $\beta = 10$ e $\gamma = 20$. À direita, mostramos a contribuição ρ_2 relativa a esse setor.

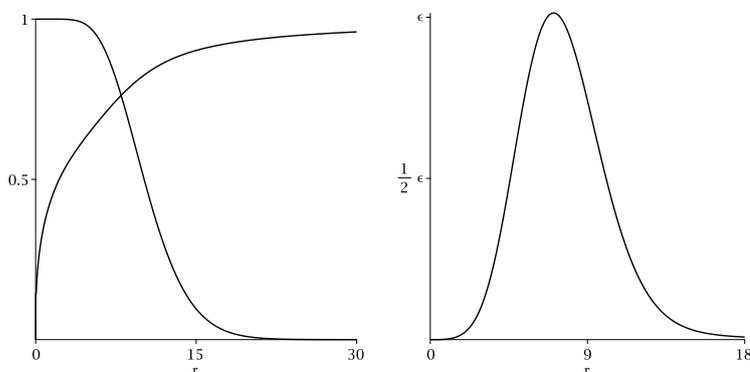


Figura 5.8 À esquerda, mostramos o gráfico de $H^{(3)}(r)$ (linha ascendente) e de $K^{(3)}(r)$ (linha decrescente) que resolvem as equações (5.105), com $P^{(1)} = 1$, $P^{(2)} = |\phi^{(1)}|^{-\alpha}$, $P^{(3)} = |\phi^{(2)}|^{-\beta}$ e $P^{(4)} = |\phi^{(3)}|^{-\gamma}$. Aqui, os parâmetros escolhidos foram $\alpha = 3$, $\beta = 10$ e $\gamma = 20$. À direita, mostramos a contribuição ρ_3 desse setor. Nessa figura, temos $\varepsilon = 0.0024$.

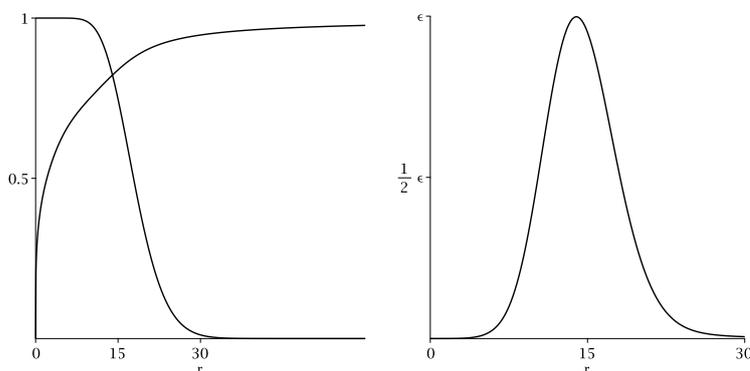


Figura 5.9 À esquerda, mostramos o gráfico de $H^{(4)}(r)$ (linha ascendente) e de $K^{(4)}(r)$ (linha decrescente) que resolvem as equações BPS esfericamente simétricas desse sistema, com $P^{(1)} = 1$, $P^{(2)} = |\phi^{(1)}|^{-\alpha}$, $P^{(3)} = |\phi^{(2)}|^{-\beta}$ e $P^{(4)} = |\phi^{(3)}|^{-\gamma}$. Aqui, os parâmetros escolhidos foram $\alpha = 3$, $\beta = 10$ e $\gamma = 20$. À direita, mostramos a contribuição ρ_4 desse setor. Nessa figura, temos $\varepsilon = 0.0005$.

É interessante considerar a relação entre as estruturas magnéticas possíveis nesse modelo. Se, por exemplo, tivéssemos, no lugar do monopolo do primeiro setor, uma solução com $|\phi^{(1)}| = 1$ (ou seja, o “vácuo” do modelo original), então todos os monopolos da Figura 5.6 seriam afetados. Nessa situação, passaria a valer $|P^{(2)}| = 1$, já que a solução trivial não afeta a permeabilidade. A camada azul da figura se tornaria então um núcleo duro, dado agora pela solução (5.69), e fazendo exatamente o mesmo papel que o monopolo do primeiro setor exercia anteriormente. As outras duas camadas continuariam existindo, mas diminuiriam de tamanho visto que ϕ_2 tenderia a zero com uma potência menor de r (pois o monopolo de 't Hooft Polyakov deixa o seu zero muito mais rápido), e o monopolo preto também se tornaria mais localizado. Um modelo com um dado p é fisicamente indistinguível de uma teoria com $p - 1$ setores no qual um desses setores tem seus campos no vácuo. Em uma situação realista, monopolos e antimonopolos seriam produzidos em grande quantidade, e poderiam eventualmente interagir e se aniquilar (resultando em $|\phi^{(k)}| = 1$), de modo que as estruturas estudadas na referência [120] devem se transformar ao longo do tempo, com novas camadas aparecendo e desaparecendo e assimetrias surgindo quando a dinâmica é considerada e os zeros deixam gradualmente de estar no mesmo ponto.

Perspectivas para extensões do trabalho investigado nesta seção incluem a busca por dyons, que também devem ser possíveis por meio de uma generalização imediata da correspondência Julia e Zee. Também podemos considerar grupos mais complexos do que $SU(2)$, ou mesmo acoplamentos que misturem diferentes setores. Essa última possibilidade corresponde a um cenário no qual o campo escalar de um dado setor é carregado com relação a mais de uma simetria $SU(2)$. Nesse caso, a derivada covariante deve ter múltiplos comutadores, o que evidentemente aumenta a complexidade do problema, mas a relação entre os defeitos de setores diferentes se tornaria particularmente interessante. Finalmente, podemos considerar o cenário em que defeitos de natureza diferente são acomodados por uma simetria aumentada. Poderíamos ter, por exemplo, uma teoria com monopolos e skyrmions interagindo no mesmo sistema, e talvez acoplados por uma permeabilidade generalizada.

Buracos negros STU

A estabilidade de buracos negros é um problema central em teorias de gravitação, tanto na Relatividade Geral quanto em suas extensões, como teorias modificadas de gravidade e supergravidade. Os buracos negros observados na física são estáveis: não temos evidência do decaimento dessas soluções. Todos os buracos negros conhecidos possuem rotação e, portanto, famílias de soluções com momento angular diferente de zero são especialmente importantes. A estabilidade dessas soluções fornece uma importante maneira de confrontar previsões teóricas não triviais das teorias de gravitação com as observações experimentais e, por esse motivo, fornecem um teste importante para essas teorias.

Neste capítulo, objetivamos estudar a estabilidade modal de certos buracos negros da família STU. Nossa discussão terá como ponto focal o trabalho [128]. Nele, foram consideradas equações de perturbação para sistemas bosônicos e fermiônicos, sobretudo os de spin $\pm 1/2$, que devem resolver a equação de Dirac apropriadamente adaptada para o contexto de supergravidade. O buraco negro analisado possui quatro cargas $U(1)$, duas magnéticas e duas elétricas. Na referência [129], foi demonstrada a separabilidade da equação de Dirac modificada no caso em que essas cargas são iguais duas a duas. Trabalhos prévios também já haviam mostrado a separabilidade da equação de Klein-Gordon nessa geometria. Isso significa que podemos estudar as equações perturbativas por meio da análise de funções de onda da forma

$$\Psi_s(t, r, \theta, \varphi) = e^{i(\omega t + k\varphi)} \mathcal{R}_s(r) \mathcal{S}_s(\theta), \quad (6.1)$$

em que s representa o spin, $\omega \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$ é análogo ao número quântico magnético encontrado na mecânica quântica. Notado seja que como ω pode, em princípio, tomar qualquer valor nos complexos esse termo não é, em geral, oscilatório. Com efeito, uma função da forma (6.1) só pode permanecer limitada quando $t \rightarrow \infty$ se $\Im(\omega) \geq 0$.

A análise de estabilidade modal consiste em decompor as perturbações lineares de uma dada métrica em modos dependentes da frequência, para então mostrar que cada, dadas condições de contorno adequadas em um instante $t = 0$, essas perturbações permanecerão limitadas no tempo. Quando a métrica possui um número suficiente de simetrias, é possível analisar esses modos em termos de funções da forma (6.1), que resolvem as equações diferenciais ordinárias obtidas após a separação de variáveis, que leva a um sistema de duas equações diferenciais ordinárias nas variáveis r e θ . Devemos usar essas equações para demonstrar que nenhum desses modos pode crescer exponencialmente [238]. Isso significa que todos os modos dessa expansão são oscilatórios e, portanto, funções limitadas para todo t o que, dado o que foi dito no parágrafo anterior, significa que frequências cuja parte imaginária seja negativa não podem existir.

A estabilidade modal é evidentemente necessária para a estabilidade, já que bastará a presença de único modo exponencialmente crescente para que uma perturbação geral, que é dada pela superposição de modos da forma (6.1), cresça indefinidamente. Entretanto, ela não é suficiente para demonstrar formas mais fortes de estabilidade, mesmo em espaços esfericamente simétricos. Por que, então, não tentamos estudar a estabilidade de buracos negros em termos mais gerais? A verdade é que essa é uma tarefa extremamente complicada, que demanda um

esforço hercúleo mesmo nos casos mais simples. Provas de estabilidade não linear, a forma mais geral, são raras. De fato, mesmo para o espaço de Minkowski essa propriedade só foi demonstrada em 1993 [239]. Resultados desse tipo também existem para o espaço-tempo de DeSitter [240, 241] e, desde 2021, para o buraco negro de Schwarzschild [242]. A estabilidade foi finalmente demonstrada para os buracos negros de Kerr, os mais simples com momento angular, em uma série de artigos finalizada em 2022 [243–247], cujo principal resultado é apresentado em [247]. Essa prova, que soma milhares de páginas, é válida apenas para momento angular pequeno (isto é, muito menor que a massa do buraco negro). Mesmo a estabilidade linear, mais geral que a modal mas insuficiente para a estabilidade geral, representa um grande desafio. Com efeito, essa forma de estabilidade foi demonstrada para a métrica de Kerr apenas em alguns casos limitados [248].

A análise de estabilidade modal nos permite lidar com um problema muito mais tratável que as demonstrações colossais da estabilidade geral. Embora essa seja uma demonstração mais fraca, ela é ainda assim um importante primeiro passo para provas de estabilidade linear e não linear. Além disso, uma solução cujos modos crescem exponencialmente é certamente instável, então a análise modal é suficiente para demonstrar instabilidade, o que faz com que ela forneça um importante teste de consistência para teorias que preveem buracos negros, podendo inclusive limitar parâmetros do modelo, ou mesmo excluí-lo completamente. Para além das aplicações em estabilidade, a análise modal das equações perturbativas também tem importantes aplicações, por exemplo, no contextos de espalhamento pelo buraco negro, investigação de modos quasinormais e estimativas de decaimento.

6.1 Sobre a estabilidade modal de buracos negros de Kerr

Para buracos negros de Kerr, a estabilidade modal foi primeiramente demonstrada por Whiting [249] que, em sua demonstração, fez uso de alguns resultados previamente estabelecidos para a métrica de Schwarzschild, dentre os quais podemos destacar as referências [250–252]. A análise realizada em [250], em particular, é uma das pioneiras da área, e estabeleceu a fundação sobre a qual investigações posteriores sobre estabilidade linear foram construídas.

Nas coordenadas de Boyer-Lindquist, introduzidas em [253], a métrica de Kerr (que contém a solução de Schwarzschild como o limite $a \rightarrow 0$) se escreve

$$ds^2 = -\frac{X}{\Delta^{1/2}} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \Delta^{1/2} \left(\frac{dr^2}{X} + d\theta^2 \right) + \frac{\sin^2 \theta}{\Delta^{1/2}} (adt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2, \quad (6.2)$$

em que

$$\Delta = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2, \quad (6.3)$$

$$X = r^2 - 2mr + a^2, \quad (6.4)$$

m é um parâmetro proporcional à massa e a dá o momento angular por unidade de massa. Para $a \neq 0$, a solução não possui simetria esférica, mas ainda é possível encontrar dois vetores de Killing. Com efeito, a independência de (6.2) nas coordenadas t e φ garante que $K_1 = \partial_t$ e $K_2 = \partial_\varphi$ resolvam a equação de Killing. Portanto, a métrica é axialmente simétrica e, como ∂_t é assintoticamente tipo tempo, é também estacionária [134]. Resolvendo a equação $g^{00} = 0$, encontramos os horizontes de eventos dessa geometria. Quando $a = 0$, a métrica possui um

único horizonte, definido pelo raio de Schwarzschild. Para momento angular diferente de zero, existem dois horizontes de eventos

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}, \quad (6.5)$$

denominados horizonte interno e externo. O horizonte externo (doravante denominado apenas “horizonte” por simplicidade) é análogo ao do buraco negro de Schwarzschild, e é extremamente importante para nossa análise, pois ele determina a fronteira da região do espaço-tempo que é acessível ao mundo exterior. Isso ocorre porque um observador localizado fora do buraco negro não pode obter informação de eventos localizados na região $r < r_+$.

A análise de estabilidade linear requer a introdução de uma perturbação de primeira ordem na métrica. De modo análogo ao que fizemos na seção 2.5, definimos uma pequena perturbação $h_{\mu\nu}$ e escrevemos

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (6.6)$$

Devemos então substituir essa forma perturbada na definição do tensor de Ricci (2.13) e na conexão (2.10) para encontrar as variações de primeira ordem $\delta R_{\mu\nu}$ e $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$. Esse processo é completamente análogo ao que foi feito para calcular (2.18) e (2.21) durante a nossa demonstração das equações de Einstein, com a substituição $\delta g_{\mu\nu} \leftrightarrow h_{\mu\nu}$. Ficamos com

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho}(\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho}), \quad (6.7)$$

em que

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} [\nabla_{\alpha} h_{\mu\nu} - \nabla_{\mu} h_{\alpha\nu} - \nabla_{\nu} h_{\alpha\mu}]. \quad (6.8)$$

As três equações acima nos fornecem ferramentas suficientes para escrever de forma linearizada das equações de Einstein, em um processo semelhante ao que havíamos feito na seção 2.5. Em particular, se estivermos considerando soluções de vácuo (como é o caso do buraco negro de Kerr), as equações de Einstein são $R_{\mu\nu} = 0$. Então é claro que o problema de estabilidade linear (modal ou não) requer a análise do sistema de equações $\delta R_{\mu\nu} = 0$, com $\delta R_{\mu\nu}$ dado por (6.7), sujeito a (6.8). Resolver esse sistema é, entretanto, difícil até com métodos numéricos, e precisaremos recorrer a estratégias um pouco menos diretas. No total, teremos dez equações independentes. Algumas delas podem se transformar como escalares ou partes de vetores ou outros tipos de tensores [250]. Encontraremos ainda uma dificuldade adicional: a fonte da perturbação também importa, e pode gerar equações de um tipo diferente. O resultado é um panorama com equações de diversos tipos, incluindo perturbações escalares, fermiônicas e gravitacionais.

Um grande salto com relação ao problema descrito acima foi dado por Teukolsky [254], que foi capaz de unificar todas essas perturbações em termos de uma única equação mestra. O trabalho de Teukolsky foi feito com o uso do formalismo de Newman-Penrose [255], no qual é usada uma *tétrade*, ou *vierbein*, que é uma base localmente definida por quatro campos vetoriais linearmente independentes [197]. Nesse formalismo, a *tétrade* é dada por quatro campos vetoriais de norma nula, dois reais e dois complexos, conjugados um ao outro. O formalismo de Newman-Penrose é bastante interessante e fornece uma ferramenta poderosa ao tratar as equações da gravitação dentro da notação espinorial, mas seus detalhes matemáticos não serão necessários para nossos objetivos, e recomendamos ao leitor interessado o trabalho original desses autores [255].

Em nossa notação, a equação mestra deduzida por Teukolsky fica na forma

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{X} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t^2} + \frac{4amr}{X} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t \partial \varphi} + \left(\frac{a^2}{X} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial \varphi^2} \\ & - X^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(X^{s+1} \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} \right) + 2s \left(\frac{a(r-m)}{X} - i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varphi} \\ & - 2s \left(\frac{(m-r)(r^2 + a^2)}{X} + 2r + ia \cos \theta \right) \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \Psi_s = 0, \end{aligned} \quad (6.9)$$

em que s é um parâmetro de spin. Para cada escolha desse parâmetro, temos uma equação diferencial parcial que pode ser usada para investigar os modos perturbativos que possuem esse spin. Se $s = 0$, as perturbações são escalares, enquanto s semi-inteiro nos dá férmions e s inteiro dá outros bósons. Em particular, as perturbações gravitacionais possuem spin dois [249, 254]. Aqui, estamos primariamente interessados em perturbações em torno das soluções de vácuo das equações de Einstein, o que faz com que (6.9) seja homogênea. Na presença de fontes (i.e., $T_{\mu\nu} \neq 0$), devemos adicionar ao lado direito dessa equação o termo $4\pi XT$ [254], em que $T \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ é o traço do tensor de energia-momento. Nesse caso, a equação homogênea (6.9) deve ser primeiramente resolvida para obter uma base completa na qual T pode ser expandida [254].

A equação acima é separável para qualquer valor do parâmetro de spin. Como a métrica é estacionária e axialmente simétrica, o problema de autovalor para os operadores relacionados a essas variáveis é trivial, e dá simplesmente prefatores da forma $e^{ik\varphi}$ e $e^{i\omega t}$, respectivamente. Portanto, podemos usar o ansatz (6.1) em (6.9) para escrever o par de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \mathcal{S}_s}{\partial \theta} \right) + (a^2 \omega^2 \cos^2 \theta + 2sa\omega \cos \theta \\ & - \frac{k^2 + s^2 + 2ks \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \lambda_{k,s} - a^2 \omega^2 - 2a\omega k + s(s+1)) \mathcal{S}_s = 0 \end{aligned} \quad (6.10a)$$

e

$$X^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(X^{s+1} \frac{\partial \mathcal{R}_s}{\partial r} \right) + \left(\frac{\tilde{K}^2(r) - 2is(r-m)\tilde{K}(r)}{X} + 4is\omega r - \lambda_{k,s} \right) \mathcal{R}_s = 0, \quad (6.10b)$$

em que

$$\tilde{K}(r) = \omega(r^2 + a^2) + ka \quad (6.11)$$

e $\lambda_{k,s}$ é a constante de separação do problema.

Para investigar as perturbações modais da métrica de Schwarzschild, devemos considerar o limite $a \rightarrow 0$ na equação acima, e efetuar a separação de variáveis por meio de um ansatz da forma (6.1). Nesse caso, é possível mostrar [252] que existe um funcional de energia associado à equação acima. Para obtê-lo, usamos uma lagrangiana que gera uma equação de movimento da forma (6.9). Como essa métrica possui um vetor de Killing cuja norma não muda de sinal, podemos usar a equação (2.42) para calcular o tensor de energia-momento apropriado para esse campo. A demonstração de estabilidade modal para a métrica de Schwarzschild pode ser feita a partir desse funcional. Essa energia dá uma integral conservada (e, portanto, limitada por uma constante real), que depende da função de onda e de suas derivadas. Analisando essa integral, que possui um integrando não negativo, é possível verificar que, se os modos perturbativos não fossem limitados, então a integral seria divergente, o que causaria uma contradição. Matematicamente, esse argumento revela que toda solução separável obtida da equação (6.9) (com $a = 0$), submetida a condições iniciais suficientemente bem comportadas, permanece limitada para todo o tempo [252].

Quando tentamos generalizar o argumento descrito acima para os buracos negros com rotação, esbarramos em uma dificuldade: diferentemente de Schwarzschild, a métrica de Kerr não possui um vetor de Killing tipo tempo em todo o espaço. Isso está relacionado à presença de uma *ergoregião* em buracos negros com momento angular, localizada fora do horizonte de eventos externo do buraco negro e limitada pela *ergoesfera*. Essa região é caracterizada pela possibilidade de extração de energia do buraco negro [256], que existe devido à deformação da métrica causado pelo arrasto do espaço-tempo próximo a um corpo massivo com rotação. Com efeito, a raiz -ergo na palavra ergoesfera é derivada da palavra grega para trabalho.

Dentro da ergoesfera, o vetor de Killing $K = \partial_t$, assintoticamente associado à translação temporal, é tipo espaço. Se tentarmos definir um tensor de energia-momento para funções de onda que satisfazem (6.9), essa definição levará a uma densidade de energia que pode ser negativa na ergoregião e positiva fora. Uma tal quantidade não pode ser usada para limitar os modos perturbativos, pois contribuições com sinais opostos podem se cancelar, qualquer que seja sua magnitude. Em muitos casos, principalmente relacionados a modos bosônicos, essa mudança de sinais está relacionada à *superradiância*, caracterizada pela amplificação da frequência de ondas espalhadas por buracos negros, dos quais elas extraem energia [257]. Esse fenômeno exerce um papel importante na estabilidade de buracos negros: o confinamento desses modos de radiação com energia amplificada pode levar a instabilidades [258]. Na referência [259], os autores concebem um modelo no qual um buraco negro de Kerr localizado é cercado por um espelho esférico, que reflete a radiação eletromagnética com boa eficiência. Por causa do espelho, esses modos eletromagnéticos ficam confinados no buraco negro e, devido à amplificação de frequência que define a superradiância, a energia desses modos aumenta com o tempo. A pressão eletromagnética aumenta com essa energia, e eventualmente se torna suficientemente alta para destruir o espelho. Isso ocorre depois de um intervalo de tempo cuja magnitude é da ordem do raio do espelho [259]. Após a explosão do espelho, toda a radiação eletromagnética, cuja energia total foi amplificada por causa da superradiância, é liberada subitamente. Essa construção foi denominada pelos autores bomba de buraco negro (*black hole bomb* em inglês). Alternativamente, seria possível abrir o espelho periodicamente, o que permitiria usar a energia liberada após cada abertura para realizar trabalho. Teoricamente, é possível que condições de contorno em certos cenários astrofísicos originem um confinamento de radiação similar ao descrito acima [258]. Nesse cenário, o buraco negro seria instável. Naturalmente, uma bomba de buraco negro não decorre de qualquer solução de (6.9), visto que as condições de contorno usadas para confinar a radiação eletromagnética são bastante específicas. Mas esse exemplo ilustra bem o fato de que a presença da ergoregião em buracos negros com rotação dificulta a implementação de um argumento baseado na conservação de energia, além de poder, em princípio, dar origem a modos instáveis.

A discussão feita acima ilustra a maneira como a superradiância e a ausência de um vetor de Killing tipo tempo constituem empecilhos significativos na análise de estabilidade modal de buracos negros com momento angular diferente de zero. Entretanto, um grande avanço na análise modal (e de estabilidade linear em geral) foi dado, em 1989, por Bernard F. Whiting. O argumento se baseia em uma saída bastante engenhosa para os problemas acima: a construção de transformações que mapeiem as funções de onda em um espaço auxiliar fictício. Nesse espaço, será possível definir um funcional de energia cujo integrando é não negativo em toda a região de interesse. As transformações de Whiting atuam nas funções de onda radial e angular, e as mapeiam em $\tilde{\mathcal{R}}_s$ e $\tilde{\mathcal{S}}_s$, respectivamente, definidas de tal forma que o sistema transformado permanece separável. Não iremos construir essas transformações e nem dar o argumento completo neste momento, visto que generalizaremos, na seção 6.4, o argumento de Whiting para buracos negros STU de cargas iguais aos pares, que já incluem a métrica (6.2) como caso limite. En-

tretanto, é conveniente elencar algumas das propriedades das funções transformadas, que serão úteis para nos guiar na construção dessas transformações. Alguns requerimentos importantes são:

- I As transformações devem possuir uma constante de separação $\tilde{\lambda}_{k,s}$, herdando a separabilidade do sistema original. Em outras palavras, as funções de onda transformadas $\tilde{\mathcal{R}}_s$ e $\tilde{\mathcal{S}}_s$ satisfazem equações diferenciais ordinárias com a mesma constante de separação.
- II As transformações devem mapear modos instáveis em modos instáveis.
- III A equação de onda resolvida pela função de onda transformada deve ser compatível com uma métrica que possui um vetor de Killing tipo luz ou tempo em toda a região externa ao buraco negro.
- IV As funções $\tilde{\mathcal{R}}_s$ e $\tilde{\mathcal{S}}_s$ devem resolver equações que têm a forma que (6.10). Em particular, elas possuem o mesmo número de singularidades que \mathcal{R}_s e \mathcal{S}_s , e essas singularidades devem ser do mesmo tipo. Devido à mencionada semelhança na forma das equações, o comportamento das funções em torno das singularidades, que podemos estudar por expansão em série de potências, também é da mesma forma.

Com relação ao último item, convém esclarecer que equações diferenciais podem possuir dois tipos de singularidade: regulares ou irregulares (também denominadas essenciais). Damos a baixo a definição desses dois tipos de singularidade para uma equação diferencial de segunda ordem.

Definição 6.1.1. Considere a equação diferencial

$$\frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2} = P_1(\xi) \frac{dy}{d\xi} + P_0(\xi)y(\xi), \quad (6.12)$$

em que $P_1(\xi)$ e $P_0(\xi)$ são funções das variáveis ξ , com no máximo singularidades isoladas. Seja ξ_0 um ponto no qual alguma dessas funções é divergente. Se os limites

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} (\xi - \xi_0)P_1(\xi) \quad (6.13)$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} (\xi - \xi_0)^2 P_0(\xi) \quad (6.14)$$

existem, então ξ_0 é uma singularidade *regular*. Caso contrário, esse ponto é uma singularidade *irregular*. [260].

Se a singularidade é devida apenas à presença de polos, atribuímos a ela um *rank*. A singularidade é dita de rank k , em que k é o menor inteiro tal que

$$(\xi - \xi_0)^{k+1} P_1(\xi) \quad (6.15)$$

e

$$(\xi - \xi_0)^{2(k+1)} P_0(\xi) \quad (6.16)$$

são funções analíticas em alguma vizinhança de ξ_0 [307].

Caso as quatro condições enumeradas acima sejam satisfeitas, conseguiremos (graças à primeira condição), definir uma função de onda $\tilde{\Psi}_s = e^{i(k\phi + \omega t)} \tilde{\mathcal{R}}_s \tilde{\mathcal{S}}_s$, que satisfaz uma equação de onda análoga à equação de Teukolsky, mas em um espaço no qual, graças à condição III, poderemos definir um funcional de energia não negativo, que usaremos para limitar os modos transformados. Se formos bem sucedidos em mostrar que modos instáveis $\tilde{\Psi}_s$ não existem, então os modos que seriam neles mapeados (os quais, pela condição II, incluem todos os modos instáveis de Ψ_s), também não podem existir. Essas considerações nos transmitem a ideia básica por trás do procedimento de Whiting, que usaremos para a prova de estabilidade de modos bosônicos, examinada na subseção 6.4.2.

6.2 O modelo STU

A supersimetria é um panorama teórico que foi primeiramente proposto no fim dos anos sessenta [262]. Suas principais propriedades foram, entretanto, descobertas um pouco depois, no início dos anos setenta [263–266]. O princípio básico da supersimetria é a correspondência entre bósons e férmions: ela postula que para cada partícula bosônica da natureza, existe um parceiro supersimétrico fermiônico, e vice-versa [267]. A supersimetria acumulou diversos sucessos teóricos nas suas primeiras décadas, e se tornou um ingrediente importante em muitas das extensões do modelo padrão. Um dos maiores entre esses triunfos é a resolução do problema da hierarquia (que diz respeito à discrepância entre as magnitudes da interação gravitacional e das outras três forças conhecidas). Esse problema pode ser resolvido até mesmo em sua versão mínima [268, 269], que inclui o menor número de novas partículas consistente com o modelo padrão. Outro importante sucesso é a explicação da natureza da matéria escura fria que, de acordo com o modelo Λ -CDM, que atualmente representa o “modelo padrão” cosmológico, corresponde a cerca de 26.5% da densidade do universo [270]. A supersimetria também é uma componente importante em teoria das cordas, que é frequentemente vista como uma das principais candidatas à quantização da gravitação e teoria de tudo [271]. Com efeito, a supersimetria deve sempre estar presente, em alguma medida, no espectro de cordas, ao menos para evitar táquions físicos (partículas mais rápidas que a luz) [272].

A verificação experimental da supersimetria tem sido um desafio, e resultados experimentais fornecem a ela certos vínculos, de rigidez crescente, que precisam ser respeitados por teorias supersimétricas [273, 274]. Mesmo assim, muitos físicos teóricos consideram que a evidência experimental disponível ainda não é suficiente para excluir essas teorias em escalas um pouco mais altas de energia. Devido aos triunfos mencionados e à relativa falta de opções que sejam independentes desse panorama, a supersimetria segue sendo um campo bastante ativo de investigação em física de altas energias, cuja relevância teórica não pode atualmente ser negligenciada. Além disso, a supersimetria também possui aplicações fora da física de altas energias, como a célebre correspondência AdS/CFT [275–277], que relaciona teorias de gravidade quântica oriundas de teorias de corda supersimétricas a teorias de campo invariantes sob transformações conformes.

Quando a supersimetria é suposta em um sistema acoplado à gravitação, obtemos, necessariamente [208], uma teoria com *supergravidade*, que unifica os princípios da Relatividade Geral à supersimetria. A supergravidade é uma ferramenta teórica bastante poderosa, que encontra importantes aplicações no estudo da física de buracos negros [279–281]. Teorias de corda supersimétricas contêm a supergravidade como limite de baixas energias [282]. No contexto da teoria de cordas, os buracos negros de supergravidade podem ser identificados com as D-branas [283]. Podemos, portanto, usar o arcabouço teórico de teoria das cordas para estudar

buracos negros. Isso tem sido feito com bastante sucesso em análises de espalhamento e decaimento dessas soluções [284–286] e até mesmo no cálculo da entropia de buracos negros [287], para a qual a teoria da cordas fornece uma explicação microscópica.

Os buracos negros STU constituem uma família de soluções importantes em supergravidade, e aparecem naturalmente em teorias de cordas com supersimetria $\mathcal{N} = 2$. Especificamente, eles podem ser encontrados em um modelo com variedade de *Kähler* (que corresponde a um espaço de simetria interna da teoria) dada pelo grupo $\left(\frac{\text{SU}(1,1)}{\text{U}(1)}\right)^3$ [288]. Essa variedade pode ser parametrizada com o uso de três moduli, identificados com campos escalares complexos. Esses moduli são comumente representados na teoria pelas letras S, T e U, que dão nome ao modelo [288]. Os buracos negros STU podem ser derivados a partir de uma lagrangiana efetiva em quatro dimensões, obtida a partir da compactificação de uma corda deca-dimensional em um toro de seis dimensões [289, 291, 292]. Na referência [289], é mostrado um procedimento que pode ser usado para gerar buracos negros STU em uma teoria com essa lagrangiana efetiva. Esse procedimento consiste na aplicação de simetrias $\text{SO}(1, 1) \subset \text{O}(8, 24)$, que fisicamente são interpretadas como *boosts*, a um buraco negro de Kerr. Cada um desses boosts introduz uma nova carga U(1), sendo que a solução mais geral possível possui vinte e oito cargas elétricas e vinte e oito magnéticas [289].

Um tratamento, mesmo que superficial, do procedimento relatado acima para obtenção de buracos negros STU não será factível no presente trabalho. Esse tipo de demonstração envolve conceitos avançados de teoria das cordas e supergravidade, que demandariam a introdução de diversos conceitos e ferramentas matemáticas e ocupariam grande parte deste trabalho. Por isso, seguiremos com uma abordagem mais pragmática: tomaremos a métrica do buraco negro STU como um ponto de partida. Sob esse ponto de vista, os buracos negros que estudaremos são tratados simplesmente como soluções, conhecidas *a priori*, das equações de Einstein, ou de outra teoria de gravitação. Além disso, as soluções STU podem também ser vistas como *Kerr foils*: generalizações multiparamétricas da solução de Kerr, à qual se reduzem quando esses parâmetros tendem a zero [290]. A função do foil é fornecer uma alternativa simples cujas previsões possam ser comparadas com as da solução de Kerr, fornecendo um teste observacional para as previsões da Relatividade Geral [290]. Para mais informações sobre a obtenção de buracos negros STU, além de propriedades importantes como a entropia dessas soluções e potenciais aplicações, o leitor é indicado às referências [289–294].

O buraco negro STU com quatro cargas U(1) pode ser escrito, em coordenadas Boyer-Lindquist [253], na forma [129, 292]:

$$ds^2 = -\frac{X}{\Delta_0^{1/2}} \left(dt + \frac{1}{Y} \left(\bar{A} - a\Delta_0^{1/2} \sin^2 \theta \right) d\varphi \right)^2 + \Delta_0^{1/2} \left(\frac{dr^2}{X} + d\theta^2 \right) + \frac{\sin^2 \theta}{\Delta_0^{1/2}} \left(a dt - \frac{1}{Y} \left(\Delta_0^{1/2} X - a\bar{A} \right) d\varphi \right)^2, \quad (6.17)$$

em que

$$X = r^2 - 2mr + a^2, \quad (6.18)$$

$$Y = r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta, \quad (6.19)$$

$$\bar{A} = 2ma \left((\Pi_c - \Pi_s)r + 2m\Pi_s \right) \sin^2 \theta, \quad (6.20)$$

ao passo o fator $\Delta^{1/2}$ da métrica de Kerr (6.2) é generalizado para

$$\Delta_0 = \prod_{i=0}^3 (r + 2m \sinh^2 \delta_i) + 2a^2 \cos^2 \theta \left(r^2 + mr \sum_{i=0}^3 \sinh^2 \delta_i + 4m^2 (\Pi_c - \Pi_s) \Pi_s - 2m^2 \sum_{i<j<k} \sinh^2 \delta_i \sinh^2 \delta_j \sinh^2 \delta_k \right) + a^4 \cos^4 \theta. \quad (6.21)$$

Nas definições de \bar{A} e Δ_0 , usamos as abreviações $\Pi_c \equiv \prod_{i=0}^3 \cosh \delta_i$ e $\Pi_s = \prod_{i=0}^3 \sinh \delta_i$, em que as constantes δ_i , com $i \in (0, 1, 2, 3)$ parametrizam os quatro boosts usados para gerar a solução [292]. Esses boosts induzem quatro cargas $U(1)$, dadas por [129, 292]

$$Q_i = \frac{m}{4G} \sinh 2\delta_i, \quad (6.22)$$

em que G é a constante gravitacional. A massa do buraco negro (definida rigorosamente em termos do formalismo ADM [295]) e momento angular também podem ser escritos em termos de m , a e os δ_i . Definindo essas quantidades segundo as convenções de [296], ficamos com [292]

$$M = \frac{1}{4G} m \sum_{i=0}^3 \cosh 2\delta_i \quad (6.23)$$

e

$$J = \frac{ma}{G} (\Pi_c - \Pi_s). \quad (6.24)$$

Quando $\delta_i = 0$ para todo i , essas quantidades, bem como a métrica (6.17), se reduzem às suas contrapartes de Kerr, o que é um bom teste de consistência para a teoria.

Apesar da complexidade de (6.17), alguns resultados importantes já foram obtidos para esse buraco negro. Na referência [297], por exemplo, os autores conseguiram estender o argumento de Whiting para perturbações escalares da métrica (6.17). Outras aplicações importantes, como a investigação de efeitos de maré, também foram estudadas recentemente [298].

A análise de estabilidade modal que pretendemos fazer requer separabilidade da equação de Dirac. Essa separação não é, até o momento, conhecida para a forma geral da métrica (6.17). Entretanto, ela foi obtida em um caso particular importante, no qual a geometria toma uma forma significativamente mais simples: o buraco negro STU de cargas iguais em pares. Quando as igualdades

$$\delta_0 = \delta_2, \quad (6.25)$$

$$\delta_1 = \delta_3 \quad (6.26)$$

são satisfeitas, a métrica toma a forma

$$ds^2 = -\frac{X}{\Delta_0^{1/2}} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\Delta_0^{1/2}}{X} dr^2 + \Delta_0^{1/2} d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Delta_0^{1/2}} (adt - (r_1 r_2 + a^2) d\varphi)^2, \quad (6.27)$$

em que

$$\Delta_0 = (r_1 r_2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 \quad (6.28)$$

e

$$r_i = r + 2m \sinh^2 \delta_i. \quad (6.29)$$

Nesse caso, o efeito das cargas U(1) na métrica se resume a “translações” de $2m \sinh^2 \delta_i$ na coordenada radial, e podemos ver facilmente que, quando $\delta_0 = \delta_1 = 0$, (6.27) se reduz à métrica de Kerr (6.2).

Por inspeção de (6.27), podemos extrair a *tétrade* [†]

$$\begin{aligned} e^0 &= \frac{\sqrt{X}}{\Delta_0^{1/4}} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi), & e^1 &= \frac{\Delta_0^{1/4}}{\sqrt{X}} dr, \\ e^2 &= \Delta_0^{1/4} d\theta, & e^3 &= \frac{\sin \theta}{\Delta_0^{1/4}} (adt - F(r)d\varphi), \end{aligned} \quad (6.32)$$

em que

$$F(r) = (r + 2ms_1^2)(r + 2ms_2^2) + a^2 \quad (6.33)$$

e definimos as constantes $s_i \equiv \sinh \delta_i$.

A métrica (6.17), bem como os seus casos particulares (6.27) e (6.2) tendem assintoticamente ao espaço de Minkowski. No caso de (6.27) é particularmente simples ver que as cargas U(1) não contribuem para o comportamento assintótico da solução, que tende à métrica de Minkowski tão rápido quanto (6.2). Isso significa que os buracos negros que estamos estudando neste capítulo são estruturas localizadas, que só existem em uma região finita em torno da singularidade em seu centro. Nesse sentido, elas são análogas às soluções que investigamos nos capítulos anteriores, embora não tenham sido tratadas como defeitos topológicos [‡]. Sob o ponto de vista da Relatividade Geral, um buraco negro STU resultaria do colapso de um objeto massivo esférico com momento angular e que possui duas cargas elétricas e mais duas magnéticas. Nesse sentido, as investigações deste capítulo se encaixam particularmente bem com nossas discussões sobre monopolos magnéticos e dyons, incluindo o caso de simetria aumentada no qual várias dessas cargas são possíveis.

6.3 Separabilidade das equações perturbativas

Na referência [129], foi obtida a separação de variáveis para uma equação de Dirac modificada com torção. O resultado final desse processo, particularmente o caso não massivo, é fundamental para a análise da próxima seção. Por isso, vamos destacar alguns pontos importantes dessa demonstração. Em um espaço curvo sem torção, a equação de Dirac se escreve

[†]Uma tétrade é uma base local definida por quatro campos vetoriais independentes. Em termos de uma base de coordenadas, esses campos vetoriais se escrevem [197]

$$e_A = e_A^\mu \partial_\mu. \quad (6.30)$$

Cada coeficiente e_A^μ é chamado de *vierbein*. Elas satisfazem a relação de ortogonalidade $e_A^\mu e_B^\nu = \delta_{AB}$. Podemos também definir a base dual, dada por

$$e^A = e^A_\mu dx^\mu, \quad (6.31)$$

tal que $e^A e_B = \delta^A_B$. Para um estudo mais completo, incluindo a investigação de diversas propriedades importantes de tétrades, é recomendada a referência [197].

[‡]Convém lembrar que, como mencionado na Introdução, é possível enxergar buracos negros como defeitos topológicos em um espaço de parâmetros termodinâmicos. Nessa abordagem, é possível definir uma carga topológica, associada aos winding numbers dos zeros da solução [121].

$[\hat{\gamma}^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) + \mu_e] \Psi = 0$, em que $\hat{\gamma}^\mu$ são matrizes gamma generalizadas para esse espaço e Γ_μ é uma conexão de espinor. Essa generalização da equação de Dirac corresponde à introdução de uma derivada covariante da forma (4.2). Γ_μ atua nos espinores de Dirac, e é obtida a partir da álgebra de Lorentz e das propriedades das tétrades [197]. Ela não deve ser confundida com a conexão de Levi-Civita, que atua no fibrado tangente [134].

A tétrade (6.32) nos permite escrever $\hat{\gamma}^\mu$ em termos das matrizes $\hat{\gamma}^A$, que têm a mesma forma das matrizes gamma de Dirac usuais (veja [159], por exemplo). Com efeito, podemos escrever $\hat{\gamma}^\mu = e^\mu_A \hat{\gamma}^A$, e escrever $\hat{\gamma}^A$ na forma

$$\hat{\gamma}^0 = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^1 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^2 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^3 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.34)$$

em que σ_i são as matrizes de Pauli. Uma propriedade bem conhecida dos $\hat{\gamma}^A$, e que pode ser verificada facilmente por multiplicação matricial, é a relação de anticomutação $\{\hat{\gamma}^A, \hat{\gamma}^B\} = 2\eta_{AB}$, em que $\eta_{AB} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Essas matrizes, juntamente com a tétrade (6.32), podem ser usadas para escrever a conexão de espinor

$$\Gamma = \frac{1}{4} \hat{\gamma}^A \hat{\gamma}^B \omega_{AB}, \quad (6.35)$$

em que a forma ω_{AB} satisfaz a equação de Cartan

$$de^A + \omega^A_B \wedge e^B = 0, \quad (6.36)$$

em que \wedge denota o produto exterior, que é simplesmente um produto tensorial antissimetrizado, i.e. [134],

$$(V \wedge U)_{A_1 \dots A_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} V_{[A_1 \dots A_p} U_{A_{p+1} \dots A_{p+q}]}, \quad (6.37)$$

em que os colchetes denotam antissimetriação. Note que esse produto é tomado entre uma p -forma e uma q -forma, e tem como resultado uma $(p+q)$ -forma. Com esses elementos, já é possível, após a resolução de (6.36), escrever a equação de Dirac sem torção. Entretanto, será necessário modificar essa equação para encontrar soluções separáveis. Para entender isso, precisamos examinar as condições que levam um sistema a ser separável.

A separabilidade das equações de onda em espaços curvos está relacionada à presença de simetrias no sistema. Assim como o espaço-tempo de Kerr, a métrica STU possui dois vetores de Killing, que levam aos prefatores $e^{i\omega t}$ e $e^{ik\varphi}$ em (6.1). Porém, nem toda simetria se manifesta por meio de um vetor de Killing. Com efeito, esses vetores correspondem apenas a isometrias, isto é, simetrias que preservam a métrica, as quais são às vezes denominadas simetrias *explícitas* [299]. Mas há também outras classes de transformações sob as quais um sistema pode ser invariante. Essas simetrias *escondidas* não estão relacionadas à invariância da métrica sob difeomorfismos [299], mas representam simetrias do espaço de fase da teoria. Uma análise completa delas é mais conveniente em uma formulação Hamiltoniana, como a conduzida em [300]. Assim como na mecânica clássica [5], a separabilidade da equação de Hamilton-Jacobi depende da existência de um número suficientemente grande de integrais do movimento, cuja existência está condicionada a simetrias da ação. Nesse formalismo, é possível mostrar que os vetores de Killing implicam a conservação de quantidades $K^\mu \pi_\mu$ lineares nos momentos conjugados, ao passo que integrais do movimento mais gerais, definidas como polinômios nos momentos conjugados, são representadas por campos tensoriais, entre os quais estão os tensores de Killing, que resolvem a equação

$$\nabla_{(v} K_{\mu_1 \dots \mu_p)} = 0, \quad (6.38)$$

em que os parênteses denotam simetrização. A métrica é um tensor de Killing, cuja integral do movimento é a Hamiltoniana. Para garantir separabilidade de uma equação de onda, devemos encontrar tensores de Killing-Yano e seus correspondentes conformes [299–301]. Os tensores de Killing-Yano satisfazem a equação

$$\nabla_{\mu} f_{\nu\alpha_1\dots\alpha_q} + \nabla_{\nu} f_{\mu\alpha_1\dots\alpha_q} = 0, \quad (6.39)$$

em que, diferente da equação que define os tensores de Killing, apenas os dois primeiros índices são trocados entre um termo e outro da equação. O produto simetrizado de dois tensores de Killing-Yano dá um tensor de Killing [300].

Os tensores de Killing-Yano conformes também são importantes. Eles satisfazem a equação [300]

$$\nabla_{\mu} Y_{\nu\rho} = \nabla_{[\mu} Y_{\nu\rho]} + \frac{2}{3} g_{\mu[\nu} \nabla_{|\sigma|} Y^{\sigma}{}_{\rho]}, \quad (6.40)$$

Em teorias de supergravidade, a equação acima precisa ser adaptada para incluir uma torção na conexão de spin [302]. Essa generalização é motivada pela maneira com que a 3-forma de campo $G^{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{|g|}}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\eta} F_{\gamma\eta}$, se acopla às partículas da teoria. Matematicamente, esse acoplamento se manifesta como uma torção na derivada covariante [302, 303]. Nesse caso, a equação de Killing-Yano conforme é generalizada para

$$\nabla_{(T)\mu} Y_{\nu\rho} = \nabla_{(T)[\mu} Y_{\nu\rho]} + \frac{2}{3} g_{\mu[\nu} \nabla_{(T)|\sigma|} Y^{\sigma}{}_{\rho]}, \quad (6.41)$$

em que a derivada covariante atua na forma [129]

$$\nabla_{(T)\mu} Z_{\nu\rho} = \nabla_{\mu} Z_{\nu\rho} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu}{}^{\sigma} Z_{\sigma\rho} - \frac{1}{2} T_{\mu\rho}{}^{\sigma} W_{\nu\sigma}. \quad (6.42)$$

Na referência [129] foi demonstrado que a equação (6.41) pode ser resolvida se a torção for da forma

$$T_{\pm} = \frac{a}{\Delta_0^{3/4}} (r_1 + r_2 \pm 2\sqrt{r_1 r_2}) \left(\sin\theta e^0 \wedge e^1 \wedge e^3 \mp \frac{\sqrt{X} \cos\theta}{\sqrt{r_1 r_2}} e^0 \wedge e^2 \wedge e^3 \right), \quad (6.43)$$

em que os sinais superiores e inferiores correspondem a duas escolhas possíveis de torção. Enfatizamos que essa torção se deve ao acoplamento entre os campos da teoria, e não implica uma mudança nas equações de Einstein. Note que, se $\delta_0 = \delta_1 = 0$, então $r_1 = r_2 = r$. Segue que, no limite em que as cargas tendem a zero, $r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \rightarrow 0$, de modo que a torção T_- vai a zero. Por conseguinte, a equação (6.41) se torna idêntica a (6.40), que é satisfeita pelos tensores de Killing-Yano conformes da métrica de Kerr. Isso significa que a simetria representada por esse tensor se reduz a uma simetria do buraco negro de Kerr quando as cargas tendem a zero, e o mesmo deve acontecer com a equação de Dirac quando $T = T_-$. A escolha T_+ , entretanto, leva a simetrias que não têm equivalentes em Kerr, já que ela não se anula no limite apropriado.

Se a derivada covariante for tomada na forma (6.42) com torção dada por (6.43), é possível resolver a equação (6.41) para encontrar as 2-formas

$$\omega_{\pm} = \sqrt{(r + 2ms_1^2)(r + 2ms_2^2)} e^0 \wedge e^1 \pm a \cos\theta e^2 \wedge e^3. \quad (6.44)$$

O dual de Hodge

$$*\omega_{\pm} = \frac{\sqrt{|g|}}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\eta} \omega_{\pm\gamma\eta} = -\sqrt{(r + 2ms_1^2)(r + 2ms_2^2)} e^2 \wedge e^3 \pm a \cos\theta e^0 \wedge e^1 \quad (6.45)$$

dá um tensor de Killing-Yano generalizado [302, 303]. A existência desses tensores permite a separação da equação de Dirac, que precisa ser generalizada para levar em conta a torção, o que nos leva a uma equação de primeira ordem da forma

$$\hat{\mathcal{D}}\Psi + \mu_e\Psi = 0, \quad (6.46)$$

em que

$$\hat{\mathcal{D}} = \hat{\gamma}^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) - \frac{1}{24} T_{ABC} \hat{\gamma}^A \hat{\gamma}^B \hat{\gamma}^C \quad (6.47)$$

é a generalização do operador de Dirac $\gamma^\mu \partial_\mu$ apropriada para o nosso problema [129]. Como esperado, apenas a escolha $T = T_-$ leva a um operador (6.47) que se reduz à forma usual $\hat{\gamma}^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu)$ no limite em que $\delta_i \rightarrow 0$. A escolha $T = T_+$ tem um limite distinto, que corresponde a um sistema fermiônico completamente diferente.

Com esses elementos é possível, após alguma álgebra, escrever a equação (6.46) de forma explícita. O resultado obtido em [129] é que, para um espinor

$$\Psi = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}, \quad (6.48)$$

a equação de Dirac generalizada se escreve

$$\frac{i\sqrt{X}}{\Delta_0^{1/4}} (\hat{\mathcal{D}}_- + g_\pm(r, \theta)) G_1 + \frac{i}{\Delta_0^{1/4}} (\hat{\mathcal{L}}_- + f_\pm(r, \theta)) G_2 + \mu_e F_1 = 0, \quad (6.49)$$

$$\frac{i}{\Delta_0^{1/4}} (\hat{\mathcal{L}}_+ + f_\pm(r, \theta)) G_1 - \frac{i\sqrt{X}}{\Delta_0^{1/4}} (\hat{\mathcal{D}}_+ + g_\pm(r, \theta)) G_2 + \mu_e F_2 = 0, \quad (6.50)$$

$$-\frac{i\sqrt{X}}{\Delta_0^{1/4}} (\hat{\mathcal{D}}_+ + g_\pm^*(r, \theta)) F_1 - \frac{i}{\Delta_0^{1/4}} (\hat{\mathcal{L}}_- + f_\pm^*(r, \theta)) F_2 + \mu_e G_1 = 0, \quad (6.51)$$

$$-\frac{i}{\Delta_0^{1/4}} (\hat{\mathcal{L}}_+ + f_\pm^*(r, \theta)) F_1 + \frac{i\sqrt{X}}{\Delta_0^{1/4}} (\hat{\mathcal{D}}_- + g_\pm^*(r, \theta)) F_2 + \mu_e G_2 = 0, \quad (6.52)$$

em que

$$\hat{\mathcal{D}}_\pm = \partial_r \mp \frac{1}{X} (F(r) \partial_t + a \partial_\phi), \quad (6.53)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_\pm = \partial_\theta \mp i \left[a \sin \theta \partial_t + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \right], \quad (6.54)$$

$$g_\pm(r, \theta) = \frac{r-m}{2X} + \frac{r_1+r_2}{4\sqrt{r_1 r_2} \rho_\pm^*}, \quad (6.55)$$

$$f_\pm(r, \theta) = \frac{\cot \theta}{2} \pm \frac{ia \sin \theta}{2\rho_\pm^*}, \quad (6.56)$$

$$\rho_\pm = \sqrt{r_1 r_2} \pm ia \cos \theta \quad (6.57)$$

e o asterisco denota conjugação complexa. Como esperado, as equações com sinais inferiores, que correspondem à torção T_- , concordam com os resultados encontrados por Chandrasekhar para o buraco negro de Kerr [304].

Prosseguimos agora para a separação de variáveis, que sabemos ser possível dada a presença dos tensores de Killing-Yano. As equações separadas ficam um pouco mais simples se o ansatz for tomado na forma

$$\Psi = \frac{e^{i(\omega t + k\varphi)}}{\sqrt[4]{X}\sqrt{\sin\theta}} \begin{pmatrix} \rho_{\pm}^{-1/2} \bar{\mathcal{R}}_{-\frac{1}{2}}(r) \bar{\mathcal{S}}_{\frac{1}{2}}(\theta) \\ \rho_{\pm}^{-1/2} \bar{\mathcal{R}}_{\frac{1}{2}}(r) \bar{\mathcal{S}}_{-\frac{1}{2}}(\theta) \\ (\rho_{\pm}^*)^{-1/2} \bar{\mathcal{R}}_{\frac{1}{2}}(r) \bar{\mathcal{S}}_{\frac{1}{2}}(\theta) \\ (\rho_{\pm}^*)^{-1/2} \bar{\mathcal{R}}_{-\frac{1}{2}}(r) \bar{\mathcal{S}}_{-\frac{1}{2}}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (6.58)$$

Com esse ansatz, a equação de Dirac pode ser separada em um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias nas funções $\bar{\mathcal{R}}_{\pm\frac{1}{2}}(r)$ e $\bar{\mathcal{S}}_{\pm\frac{1}{2}}(\theta)$. Essa separação vale também para o caso massivo, isto é, $\mu_e \neq 0$. Algumas das propriedades da equação resultante são discutidos em [129]. Como só trabalharemos com modos não massivos na demonstração de estabilidade modal, vamos, a partir de agora, assumir $\mu_e = 0$. Nesse caso, o ansatz (6.58) nos permite escrever as equações (6.49) na forma

$$\sqrt{X} \hat{\mathcal{D}}_- \bar{\mathcal{R}}_{\frac{1}{2}}(r) = \lambda_k \bar{\mathcal{R}}_{-\frac{1}{2}}(r), \quad (6.59a)$$

$$\sqrt{X} \hat{\mathcal{D}}_+ \bar{\mathcal{R}}_{-\frac{1}{2}}(r) = \lambda_k \bar{\mathcal{R}}_{\frac{1}{2}}(r), \quad (6.59b)$$

e

$$\hat{\mathcal{L}}_+ \bar{\mathcal{S}}_{\frac{1}{2}}(\theta) = \lambda_k \bar{\mathcal{S}}_{-\frac{1}{2}}(\theta), \quad (6.60a)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_- \bar{\mathcal{S}}_{-\frac{1}{2}}(\theta) = -\lambda_k \bar{\mathcal{S}}_{\frac{1}{2}}(\theta), \quad (6.60b)$$

em que λ_k é a constante de separação do problema e temos os operadores diferenciais de primeira ordem

$$\hat{\mathcal{D}}_{\pm} = \partial_r \mp \frac{i}{X(r)} (\omega F(r) + ka), \quad (6.61)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{\pm} = \partial_{\theta} \pm \left(a\omega \sin\theta + \frac{k}{\sin\theta} \right). \quad (6.62)$$

Uma consequência importante da escolha $\mu_e = 0$ é que, nesse caso, os termos com sinais \pm que encontramos na equação (6.49) já não estão presentes. Isso significa que as duas escolhas possíveis para a torção, da qual esses sinais haviam sido herdados em (6.49), levam à mesma equação[†] no caso não massivo. Se tomarmos $\mu_e \neq 0$, nos depararemos com equações parecidas, com a diferença de que o lado direito das equações (6.59) e (6.60) ganha termos aditivos proporcionais a μ_e . Esses termos adicionais apresentam o sinal \pm herdado de (6.43).

As equações em (6.59) e (6.60) podem ser desacopladas sem grandes dificuldades. Com efeito, se atuarmos, pela esquerda, o operador $\sqrt{X} \hat{\mathcal{D}}_+$ em (6.59a) e usarmos (6.59b) no lado direito, obtemos imediatamente uma equação diferencial de segunda ordem dependente apenas de $\bar{\mathcal{R}}_{\frac{1}{2}}(r)$. Do mesmo modo, a ação de $\sqrt{X} \hat{\mathcal{D}}_-$ em (6.59b) pode ser usada para eliminar $\bar{\mathcal{R}}_{-\frac{1}{2}}(r)$

[†]Convém enfatizar que os sinais \pm que usamos nas definições (6.61) e (6.62) constituem apenas um artifício notacional usado para representar esses quatro operadores por meio de duas equações. Não há relação entre esses sinais e aqueles em (6.43).

da equação restante. Expandindo esses operadores com o auxílio de (6.61) e usando a regra do produto, somos levados às equações

$$\bar{\mathcal{R}}''_{\frac{1}{2}} + \frac{X'}{2X} \bar{\mathcal{R}}'_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{X} \left(i\omega F' + \frac{(\omega F + ka)}{X} \left(\omega F + ka - \frac{i}{2} X' \right) - \lambda_k^2 \right) \bar{\mathcal{R}}_{\frac{1}{2}} = 0, \quad (6.63a)$$

$$\bar{\mathcal{R}}''_{-\frac{1}{2}} + \frac{X'}{2X} \bar{\mathcal{R}}'_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{X} \left(-i\omega F' + \frac{(\omega F + ka)}{X} \left(\omega F + ka + \frac{i}{2} X' \right) - \lambda_k^2 \right) \bar{\mathcal{R}}_{-\frac{1}{2}} = 0. \quad (6.63b)$$

Por outro lado, podemos, por meio de um processo análogo, desacoplar as equações angulares, que ficam

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{S}}_{\frac{1}{2}}}{\partial \theta^2} - \left(\left(a\omega \sin \theta + \frac{k}{\sin \theta} \right)^2 - \left(a\omega - \frac{k}{\sin^2 \theta} \right) \cos \theta - \lambda_k^2 \right) \bar{\mathcal{S}}_{\frac{1}{2}} = 0, \quad (6.64a)$$

e, finalmente,

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{S}}_{-\frac{1}{2}}}{\partial \theta^2} - \left(\left(a\omega \sin \theta + \frac{k}{\sin \theta} \right)^2 + \left(a\omega - \frac{k}{\sin^2 \theta} \right) \cos \theta - \lambda_k^2 \right) \bar{\mathcal{S}}_{-\frac{1}{2}} = 0. \quad (6.64b)$$

Fomos, então, capazes de desacoplar as equações do sistema (6.49), que agora se reduzem a dois pares de equações diferenciais, cada um dos quais possui equações bastante parecidas entre si. O “preço” que pagamos por esse desacoplamento é que o sistema, que antes apresentava apenas equações de primeira ordem, agora passa a envolver operadores diferenciais de segunda ordem.

6.4 Análise modal de buracos negros STU com cargas iguais em pares

Analisaremos agora a estabilidade modal de buracos negros STU com cargas iguais aos pares. Focaremos em modos não massivos, que são aqueles normalmente considerados quando o objetivo é estudar a estabilidade modal, como no trabalho de Whiting [249]. Em particular, buscamos demonstrar esse resultado para perturbações de spin maior que zero, incluindo férmions que resolvem a equação de Dirac modificada analisada na seção passada. Em um trabalho recente [281], a estabilidade modal para perturbações oriundas de campos sem spin (i.e., $s = 0$) foi demonstrada por meio de um argumento de Whiting para buracos negros STU com quatro cargas. Essa demonstração usou a métrica (6.17), mais geral que o caso que estamos considerando. Posteriormente, esse resultado foi generalizado para o buraco negro STU em cinco dimensões [308]. Entretanto, perturbações mais gerais ainda não haviam sido consideradas em nenhum trabalho anterior a [128] e [129].

Valores de spin com magnitude mais alta que $1/2$ ainda não foram estudados em termos rigorosos, e a equação perturbativa para esses modos ainda não foi encontrada nem mesmo para o buraco negro STU de cargas iguais aos pares. Entretanto, como a diferença entre a métrica de Kerr e (6.27) se resume às translações $r \rightarrow r + 2ms_i^2$, e dada a relativa semelhança entre as equações perturbativas obtidas para essas duas métricas, podemos conjecturar uma equação do tipo Teulkolsky. Usaremos os resultados da seção anterior e de [281] para escrever uma equação que vale para $s = 0$ e $s = \pm 1/2$, se reduzindo, nesses casos, às equações que já foram obtidas para esses valores de spin. Suporemos que essa equação permanecerá válida para outras escolhas de spin, como acontece na métrica de Kerr. A rigor, seria necessário um estudo aprofundado das equações perturbativas envolvendo outros valores de spin, mas nossa conjectura é razoável

dada a forma da equação. Ao realizar esse procedimento, veremos que o argumento encontra problemas quando s é semi-inteiro, devido à forma da transformação de Whiting para a variável angular. Discutiremos meios de generalizar essa demonstração para incluir esses valores semi-inteiros. Finalmente, vamos seguir, na subseção 6.4.3, um método alternativo para demonstrar a estabilidade de modos de Dirac. Essa técnica foi originalmente desenvolvida em [309] para o buraco negro de Kerr, e consiste em estabelecer relações de conexão, derivadas das componentes da equação de Dirac, que podem ser usadas para mostrar que modos instáveis são incompatíveis com o comportamento assintótico dos modos angulares e radiais. Como mostramos nas seções anteriores, todas as equações da teoria investigada recuperam o caso de Kerr no limite em que $\delta_0 = \delta_1 = 0$. Portanto, a prova da estabilidade modal para buracos negros de Kerr, que foi mencionada na seção 6.1, será obtida como um subproduto dos nossos cálculos. Evidentemente, esse resultado não é novo, mas tem valor enquanto revisão, assim como os modelos de Ginzburg-Landau, Yang-Mills, etc., que revisamos ao longo deste trabalho.

6.4.1 Singularidades das equações separadas

O primeiro passo da análise modal é encontrar as singularidades das equações separadas, e estudar o comportamento das funções na vizinhança desses pontos. Vamos agora fazer isso para as equações radiais (6.63a). Para isso, usamos a relação

$$X(r) = (r - r_+)(r - r_-), \quad (6.65)$$

em que

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2} \quad (6.66)$$

são os horizontes interno e externo, que nessa teoria possuem a mesma forma dos horizontes de Kerr, e são deduzidos pelo mesmo método, a partir da equação $g^{tt} = 0$. O horizonte externo é particularmente importante para a análise modal, pois ele denota a fronteira inferior da região que estamos considerando em nossos cálculos. Com essas definições, podemos reescrever as equações radiais na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j'' + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r - r_+} + \frac{1}{r - r_-} \right) \mathcal{R}_j' + \\ \left(\frac{A_j}{r - r_+} + \frac{B_j}{r - r_-} + \frac{C_j}{(r - r_+)^2} + \frac{D_j}{(r - r_-)^2} + \omega^2 \right) \mathcal{R}_j = 0, \end{aligned} \quad (6.67)$$

em que $j = \pm 1/2$ e os coeficientes A_j, B_j, C_j e D_j são [129]

$$A_j = \sigma(j)i\omega \left(B_+ - \frac{1}{2} \right) + 2\omega A_+ + \frac{2A_+A_- - \sigma(j)i(A_+ + A_-)/2 - \lambda^2}{r_+ - r_-}, \quad (6.68)$$

$$B_j = \sigma(j)i\omega \left(B_- - \frac{1}{2} \right) + 2\omega A_- - \frac{2A_+A_- - \sigma(j)i(A_+ + A_-)/2 - \lambda^2}{r_+ - r_-}, \quad (6.69)$$

$$C_j = A_+ \left(A_+ - \sigma(j) \frac{i}{2} \right), \quad (6.70)$$

$$D_j = A_- \left(A_- - \sigma(j) \frac{i}{2} \right), \quad (6.71)$$

em que $\sigma(j) = \text{sgn}(\pm 1/2) = \pm 1$ e definimos as constantes

$$A_{\pm} = \pm \frac{2m(1 + s_1^2 + s_2^2)\omega r_{\pm} + 4\omega m^2 s_1^2 s_2^2 + ka}{r_+ - r_-} \quad (6.72)$$

e

$$B_{\pm} = \pm \frac{2(r_{\pm} + m(s_1^2 + s_2^2))}{r_+ - r_-}.$$

A equação (6.67) possui singularidades regulares em r_{\pm} e uma singularidade irregular no infinito. Em princípio, a última singularidade precisa ser investigada por meio de uma expansão em ponto no infinito, que usa a substituição $z = 1/r$. A análise fica mais fácil se notarmos que a forma de (6.67) sugere a transformação para a coordenada

$$x = \frac{r - r_-}{r_+ - r_-}, \quad (6.73)$$

em termos da qual os horizontes interno e externo se escrevem $x = 0$ e $x = 1$, respectivamente. O infinito espacial corresponde a $x = \infty$. Usando o nosso conhecimento sobre a posição das singularidades, vamos submeter as funções radiais às transformações

$$\tilde{\mathcal{R}}_j(x) = e^{\kappa x} x^{\alpha_j} (x-1)^{\beta_j} \tilde{\mathcal{R}}_j(x), \quad (6.74)$$

que nos permitem escrever as equações radiais na forma

$$\tilde{\mathcal{R}}_j''(x) + \left(2\kappa + \frac{2\alpha_j + 1/2}{x} + \frac{2\beta_j + 1/2}{x-1} \right) \tilde{\mathcal{R}}_j'(x) + \left(\frac{\mu_j}{x} + \frac{\nu_j}{x-1} \right) \tilde{\mathcal{R}}_j(x) = 0, \quad (6.75)$$

em que

$$\mu_j = 2\alpha_j(\kappa - \beta_j) + \frac{1}{2}(\kappa - \alpha_j - \beta_j) + (r_+ - r_-)B_j \quad (6.76)$$

e

$$\nu_j = 2\beta_j(\kappa + \alpha_j) + \frac{1}{2}(\kappa + \alpha_j + \beta_j) + (r_+ - r_-)A_j. \quad (6.77)$$

Substituindo (6.74) em (6.67), vemos que as constantes que parametrizam as transformações devem satisfazer

$$\kappa = \pm i(r_+ - r_-)\omega, \quad \alpha_j \left(\alpha_j - \frac{1}{2} \right) + D_j = 0 \quad \text{e} \quad \beta_j \left(\beta_j - \frac{1}{2} \right) + C_j = 0. \quad (6.78)$$

Resolvendo as equações quadráticas para α_j e β_j com um dado j , encontramos dois valores possíveis para cada uma dessas constantes, que são

$$\alpha_{1/2} = \frac{1}{2} \mp iA_- \quad (6.79a) \quad \text{e} \quad \alpha_{-1/2} = \pm iA_-, \quad (6.79b)$$

$$\beta_{1/2} = \frac{1}{2} \mp iA_+ \quad (6.80a) \quad \text{e} \quad \beta_{-1/2} = \pm iA_+. \quad (6.80b)$$

Agora, podemos estudar as singularidades de (6.75) por meio do bem conhecido método de Frobenius [260], que consiste em supor uma expansão em série de potências em torno de cada singularidade, calcular a equação indicial e encontrar relações de recorrência entre os coeficientes. Entretanto, igualdades da forma (6.75) são na verdade bem conhecidas: elas podem ser

deduzidas da equação Heun [310]. Com efeito, a equação confluyente de Heun se escreve, na forma canônica [311],

$$\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} + \left(\frac{\gamma}{\xi} + \frac{\delta}{\xi-1} + \varepsilon \right) \frac{df(\xi)}{d\xi} + \frac{\tau\xi - \zeta}{\xi(\xi-1)}, \quad (6.81)$$

em que γ , δ , ε , τ e ζ são constantes. Basta notar que

$$\frac{\mu_j}{x} + \frac{\nu_j}{x-1} = \frac{(\mu_j + \nu_j)x - \nu_j}{x(x-1)} \quad (6.82)$$

para concluir que a equação (6.75) é uma equação confluyente de Heun, cujos parâmetros podem ser identificados diretamente por inspeção. Podemos, portanto, transpor os resultados conhecidos dessa equação para o nosso sistema.

A equação confluyente de Heun possui três singularidades, duas regulares (localizadas em $x = 0$ e $x = 1$) e uma irregular de rank 1, em $x = \infty$ [311], o que pode ser demonstrado sem grandes dificuldades se usarmos os conceitos apresentados na Definição 6.1.1. Portanto, as singularidades regulares estão nos horizontes e a irregular no infinito espacial, como já havia sido prometido. Essas singularidades são de extrema importância na análise modal, pois elas precisam ser levados em conta para entender o comportamento dos modos perturbativos na fronteira do domínio. Em particular, precisamos conhecer a posição, tipo e rank das singularidades para estabelecer as transformações de Whiting, e garantir que elas sejam bem definidas em todo o espaço. Além disso, o método de Frobenius pode ser usado para fornecer duas soluções independentes, definidas em termos de séries de potência, na vizinhança de qualquer uma das singularidades regulares do problema. Essas soluções são conhecidas como funções confluentes de Heun [312, 313], e suas propriedades têm sido bastante estudadas recentemente. Provavelmente, parte desse interesse se deve ao fato de que as perturbações modais da métrica de Kerr também satisfazem equações dessa forma.

As equações angulares (6.64a) e (6.64b) são idênticas às encontradas para o buraco negro de Kerr, e por isso suas propriedades fundamentais já são bem conhecidas. Podemos novamente fazer uma transformação de coordenadas, agora definindo

$$y = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta), \quad (6.83)$$

para escrever

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{S}}_j}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) \frac{\partial \bar{\mathcal{S}}_j}{\partial y} + \left(\frac{\bar{A}_j}{y} + \frac{\bar{B}_j}{y-1} + \frac{\bar{C}_j}{y^2} + \frac{\bar{D}_j}{(y-1)^2} - 4a^2 \omega^2 \right) \bar{\mathcal{S}}_j = 0, \quad (6.84)$$

em que

$$\bar{A}_j = -\frac{k^2}{2} - a\omega(2k - \sigma(j)1) - \lambda^2, \quad (6.85)$$

$$\bar{B}_j = \frac{k^2}{2} + a\omega(2k + \sigma(j)1) + \lambda^2, \quad (6.86)$$

$$\bar{C}_j = -\frac{k(k + \sigma(j)1)}{4}, \quad (6.87)$$

$$\bar{D}_j = -\frac{k(k - \sigma(j)1)}{4}. \quad (6.88)$$

A equação (6.84) possui precisamente a mesma forma que (6.67), de modo que a equação é, novamente, confluyente de Heun. Ela pode ser colocada na forma canônica por um processo praticamente idêntico ao que levou a (6.75), exceto por uma mudança nos parâmetros, que não serão importantes para os nossos objetivos. Como a variável θ toma valores entre 0 e π , a singularidade irregular que estaria no infinito não faz parte do domínio. As únicas singularidades que existem na equação acima estão em $y = 0$ e $y = 1$, que são regulares e correspondem, respectivamente, a $\theta = \pi$ e $\theta = 0$, os pontos limite do domínio angular.

6.4.2 Equação generalizada de Teukolsky e procedimento de Whiting

Vamos agora tentar generalizar o argumento de Dirac para o buraco negro STU com cargas iguais aos pares. A primeira, e principal, dificuldade encontrada é a falta de um análogo da equação de Teukolsky (6.9) para esse buraco negro. Iremos usar as equações que conhecemos para $s = 1/2$, $s = -1/2$ e $s = 0$ (obtida da referência [297]) para estabelecer uma equação com a mesma forma que a Teukolsky, da qual difere apenas pelas translações $r \rightarrow r + 2m \sinh^2 \delta_i$. O resultado obtido compreenderá os três casos conhecidos, e conjecturamos sua validade para modos perturbativos com outros valores de spin.

As equações separáveis da expansão modal do buraco negro STU com quatro cargas foram estudadas, no caso $s = 0$, em [297]. Quando as cargas são iguais por pares, as equações obtidas nessa referência podem ser escritas na forma [†]

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \right) + (a^2 \omega^2 \cos^2 \theta + 2sa\omega \cos \theta - k^2 \sec^2 \theta + \lambda_0 - a^2 \omega^2 - 2a\omega k) \mathcal{S} = 0 \quad (6.89a)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(X \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r} \right) + \left(\frac{K^2(r)}{X} - \lambda_0 \right) \mathcal{R} = 0, \quad (6.89b)$$

em que

$$K(r) = \omega F(r) + ka \quad (6.90)$$

e $F(r)$ continua dada por $F(r) = r_1 r_2 + a^2$, com $r_i = r + 2ms_i^2$. As equações acima também podem ser colocadas na forma confluyente de Heun, e apresentam singularidades nos mesmos pontos que as funções radiais e angulares derivadas da equação de Dirac analisada na subseção passada [297]. É possível condensar os três pares de equações separáveis que estamos considerando em um único par [‡], que se escreve

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \mathcal{S}_s}{\partial \theta} \right) + (a^2 \omega^2 \cos^2 \theta + 2sa\omega \cos \theta - \frac{k^2 + s^2 + 2ks \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \lambda_{k,s} - a^2 \omega^2 - 2a\omega k + s(s+1)) \mathcal{S}_s = 0 \quad (6.91a)$$

e

$$X^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(X^{s+1} \frac{\partial \mathcal{R}_s}{\partial r} \right) + \left(\frac{K^2(r) - 2is(r-m)K(r)}{X} + 4is\omega r - \lambda_{k,s} \right) \mathcal{R}_s = 0. \quad (6.91b)$$

[†]Ao comparar nossos resultados com os da referência [297], devemos nos atentar ao fato de que a separação de variáveis feita pelos autores usa o ansatz $e^{i(k\varphi - \omega t)} \mathcal{R} \mathcal{S}$, que tem um sinal trocado antes da frequência ω . A mesma observação vale para outras referências citadas, como Teukolsky [254] e Whiting [249].

[‡]Para obter as equações separadas na forma que foi mostrada neste trabalho, algumas das funções precisam ser multiplicadas por prefatores multiplicativos (por exemplo, $\mathcal{R}_{-\frac{1}{2}} = X^{-1/2} \bar{\mathcal{R}}_{-\frac{1}{2}}$ para uma das funções radiais de Dirac), mas isso não é importante para nossos objetivos.

O sistema acima tem a mesma estrutura das equações separáveis de Kerr, incluindo su as singularidades, exceto pelas translações nas coordenadas radiais, de modo que nossa conjectura faz sentido. Podemos obter a equação tipo Teukolsky pelo ansatz

$$\Psi_s(t, r, \theta, \varphi) = e^{i(\omega t + k\varphi)} \mathcal{R}_s(r) \mathcal{S}_s(\theta), \quad (6.92)$$

que, substituído nas equações (6.91) nos leva à equação tipo Teukolsky:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{F^2}{X} - a^2 \sin^2 \theta \right) \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t^2} - \frac{2a(X-F)}{X} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t \partial \varphi} + \left(\frac{a^2}{X} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial \varphi^2} - \\ & X^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(X^{s+1} \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} \right) + 2s \left(\frac{a(r-m)}{X} - i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varphi} \\ & + 2s \left(\frac{(r-m)F}{X} - r_1 - r_2 - ia \cos \theta \right) \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \Psi_s = 0, \end{aligned} \quad (6.93)$$

em que Ψ_s é a função de onda de Teukolsky. No limite em que os δ_i tendem a zero, essa equação concorda com (6.9). Ela pode ser escrita em uma forma mais compacta se realizarmos a transformação

$$\Psi_s \rightarrow \hat{\Psi}_s = X^{\frac{s}{2}} \Psi_s, \quad (6.94)$$

que, em particular, implica

$$\mathcal{R}_s(r) \rightarrow \hat{\mathcal{R}}_s(r) = X^{\frac{s}{2}} \mathcal{R}_s(r). \quad (6.95)$$

Em termos de $\hat{\Psi}_s$ podemos escrever a equação (6.93) na forma

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial r} \left(X \frac{\partial \hat{\Psi}_s}{\partial r} \right) + \frac{1}{X} \left(F \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial \varphi} + s(r-m) \right)^2 \hat{\Psi}_s - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \hat{\Psi}_s}{\partial \theta} \right) \\ & - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(a \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} + ias \cos \theta \right)^2 \hat{\Psi}_s - 2s(r_1 + r_2 + 2ia \cos \theta) \frac{\partial \hat{\Psi}_s}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (6.96)$$

que é mais útil para aplicações, devido à sua relativa simplicidade quando comparada a (6.93). Vamos novamente introduzir as transformações de variáveis

$$x = \frac{r-r_-}{r_+ - r_-}, \quad (6.97a)$$

$$y = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta), \quad (6.97b)$$

que já havíamos usado na análise das singularidades das equações modais de Dirac. Em termos dessas variáveis, introduzimos também as transformações

$$\mathcal{X}_s = \sqrt{x(x-1)} \hat{\mathcal{R}}_s \quad (6.98)$$

e

$$\mathcal{Y}_s = \sqrt{y(1-y)} \mathcal{S}_s. \quad (6.99)$$

Substituindo (6.95) na equação tipo Teukolsky e depois submetendo o resultado a (6.98) e (6.97), encontramos

$$\mathcal{X}_s'' + \left(-\tilde{\alpha}^2 + \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\kappa} + \tilde{\lambda} + \frac{1}{2} \tilde{\kappa}^2}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \tilde{\beta}^2}{x^2} + \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\kappa} - \tilde{\lambda} - \frac{1}{2} \tilde{\kappa}^2}{x-1} + \frac{\frac{1}{4} - \tilde{\gamma}^2}{(x-1)^2} \right) \mathcal{X}_s = 0, \quad (6.100)$$

em que

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= i\omega\kappa, & \tilde{\beta} &= \frac{s}{2} - \frac{i}{\kappa}(\eta r_- + \xi) & \tilde{\gamma} &= \frac{s}{2} + \frac{i}{\kappa}(\eta r_+ + \xi), \\ \tilde{\kappa} &= s - i\eta, & \tilde{\lambda} &= \frac{1}{2} + \tilde{\alpha}(\tilde{\gamma} - \tilde{\beta}) - \frac{1}{2}(\tilde{\gamma} - \tilde{\beta})^2 + \lambda_{k,s} + s\end{aligned}\quad (6.101)$$

e definimos $\eta = 2m\omega(1 + s_1^2 + s_2^2)$, $\xi = 4\omega m^2 s_1^2 s_2^2 + ka$, $\kappa = r_+ - r_-$, usadas nas expressões acima.

Do mesmo modo, podemos usar (6.97) e (6.99) para escrever

$$\mathcal{Y}_s'' + \left(-2a\omega^2 + \frac{\alpha\kappa + \lambda + \frac{1}{2}\kappa^2}{y} + \frac{\frac{1}{4} - \beta^2}{y^2} + \frac{\alpha\kappa - \lambda - \frac{1}{2}\kappa^2}{y-1} + \frac{\frac{1}{4} - \gamma^2}{(y-1)^2} \right) \mathcal{Y}_s = 0, \quad (6.102)$$

em que

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{s+k}{2}, & \gamma &= \frac{s-k}{2}, \\ \kappa &= s, & \lambda &= \frac{1}{2} + \alpha(\gamma - \beta) - \frac{1}{2}(\gamma - \beta)^2 + \lambda_{k,s} + s.\end{aligned}\quad (6.103)$$

Usaremos as equações (6.100) e (6.102) para aplicar as transformações de Whiting. Esse procedimento requer a introdução de um par de transformações: uma integral para a função radial e uma transformação diferencial para a angular. A primeira delas leva a uma função $\bar{h}(x)$ da forma

$$\bar{h}_s(x) = \int_1^{+\infty} \mathcal{K}(x,z) \mathcal{X}_s(z) dz, \quad (6.104)$$

em que $\mathcal{K}(x,z)$ é o *kernel* da transformação integral. Note que os extremos do domínio de integração correspondem ao horizonte e ao infinito espacial, que compreendem toda a região fora do buraco negro. Visando preservar as singularidades e garantir que modos instáveis \mathcal{X}_s sejam mapeados em modos \bar{h}_s também instáveis, escolhemos um kernel que nos leva a uma função que resolve uma equação da mesma forma que a satisfeita por \mathcal{X}_s , mas com parâmetros diferentes. Conseguimos alcançar esses objetivos se escolhermos

$$\mathcal{K}(x,z) = e^{\hat{\alpha}x} x^{\hat{\beta}} (x-1)^{\hat{\gamma}} H(x,z) e^{-\tilde{\alpha}z} z^{-(\frac{1}{2} + \tilde{\beta})} (z-1)^{-(\frac{1}{2} + \tilde{\gamma})}, \quad (6.105)$$

em que

$$\hat{\alpha} = -2\tilde{\alpha}, \quad \hat{\beta} = -\frac{1}{2}(\tilde{\beta} + \tilde{\gamma} + \tilde{\kappa}), \quad \hat{\gamma} = -\frac{1}{2}(\tilde{\beta} + \tilde{\gamma} - \tilde{\kappa}) \quad (6.106)$$

e o centro $H(x,z)$ é uma função não singular no interior do domínio. Essa função especifica a transformação, e pode ser escolhida de diversas maneiras diferentes, desde que a transformação seja não degenerada. Uma escolha possível que cumpre todos os nossos requisitos é a função $H(z,x) = e^{2\tilde{\alpha}xz}$, que tem a forma de Laplace. Com esse centro e as constantes (6.106), a transformação integral fica

$$\bar{h}_s(x) = e^{\hat{\alpha}x} x^{\hat{\beta}} (x-1)^{\hat{\gamma}} \int_1^{+\infty} e^{2\tilde{\alpha}xz} e^{-\tilde{\alpha}z} z^{-\frac{1}{2} - \tilde{\beta}} (z-1)^{-\frac{1}{2} - \tilde{\gamma}} \mathcal{X}_s(z) dz. \quad (6.107)$$

Essa transformação é não degenerada cada um dos modos \mathcal{X}_s é mapeados em um único modo \bar{h}_s . Utilizando a forma explícita dessa transformação e o fato de que \mathcal{X}_s resolve (6.100),

é possível mostrar, após algumas manipulações algébricas, que a função transformada resolve a equação

$$x(x-1)\bar{h}_s'' + (2x-1)\bar{h}_s' + [4\omega(\eta m + \xi)x - \lambda_{k,s} - s + \omega^2 \kappa^2 x(x-1) - s^2 \frac{x-1}{x} - \frac{\eta^2 x}{x-1}] \bar{h}_s = 0. \quad (6.108)$$

Para a equação angular, introduzimos uma transformação diferencial. Whiting foi capaz de demonstrar que, se existe uma combinação de $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, em que $(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' = \pm 1)$, tal que a constante n , dada por

$$n = \varepsilon''\gamma + \varepsilon'\beta + \varepsilon\kappa, \quad (6.109)$$

seja um número inteiro, então

$$v_s(y) = e^{\bar{\alpha}y} y^{\bar{\beta}} (1-y)^{\bar{\gamma}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^n e^{\varepsilon\alpha y} y^{\varepsilon'\beta} (1-y)^{\varepsilon''\gamma} \mathcal{Y}_s(y) \quad (6.110)$$

resolve uma equação da forma (6.102), desde que façamos as escolhas

$$\bar{\alpha} = -\varepsilon\alpha, \quad \bar{\beta} = \frac{1}{2}(1+n) - \varepsilon'\beta, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{2}(1+n) - \varepsilon''\gamma. \quad (6.111)$$

Duas opções possíveis para n são $n = |s-k|$ e $n = |s+k|$. Note que n é um número inteiro se, e somente se, s o for, visto que o número magnético k sempre pertence a \mathbb{Z} . Escolhendo a opção $n = |s+k|$, encontramos

$$v_s''(y) + \left(-4a^2\omega^2 + \frac{\lambda_{k,s} + s + \frac{1}{2} - 4a\omega k}{y} + \frac{1/4}{y^2} - \frac{\lambda_{k,s} + s + \frac{1}{2}}{y-1} + \frac{1/4 - s^2}{(y-1)^2} \right) v_s(y) = 0. \quad (6.112)$$

Introduzindo a função $\bar{v}_s(y) = \sqrt{y(1-y)}v_s(y)$, podemos ainda escrever

$$\left[y(y-1)\partial_y^2 + (2y-1)\partial_y + 4a^2\omega^2 y(1-y) - 4a\omega k(y-1) - s(s+1) + \frac{s^2}{1-y} - \lambda_{k,s} \right] \bar{v}_s(y) = 0. \quad (6.113)$$

Note que essas duas equações possuem a mesma constante $\lambda_{k,s}$, que foi herdada da equação de Teukolsky e preservada pelas transformações de Whiting. A presença dessa constante de separação nas duas equações torna possível o processo “inverso” à separação de variáveis: podemos juntar as duas equações diferenciais ordinárias (6.108) e (6.113) em uma única equação diferencial parcial para uma função de onda Φ_s análoga à que aparece em (6.93). Para isso, tomamos

$$\Phi_s(t, r, \theta, \varphi) = e^{i(\omega t + k\varphi)} \bar{h}_s(r) \bar{v}_s(\theta). \quad (6.114)$$

Usando essa expressão e as equações (6.108) e (6.113), encontramos

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(X \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) - (P(r) + a^2 \cos^2\theta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2a \left(\frac{r-m}{\varepsilon_0 m} - \cos\theta \right) \frac{\partial^2}{\partial t \partial\varphi} - s^2 \left(\frac{r-r_+}{r-r_-} + \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \right) \right\} \Phi_s(t, r, \theta, \varphi) = 0, \quad (6.115)$$

em que

$$\epsilon_0 = \frac{r_+ - r_-}{r_+ + r_-} \quad (6.116)$$

e

$$P(r) = 4m^2(1 + s_1^2 + s_2^2)^2 \frac{(r - r_-)}{(r - r_+)} + \frac{8m^2}{\varkappa} (1 + s_1^2 + s_2^2 + 2s_1^2 s_2^2)(r - r_-) + r^2 - 2mr. \quad (6.117)$$

A equação (6.115) concorda com o resultado encontrado por Whiting para o buraco negro de Kerr [249], e com os resultados de [297] para $s = 0$, o que serve como uma boa forma de checar os nossos cálculos. Note-se também que a dependência de (6.115) nas cargas $U(1)$ está inteiramente contida em $P(r)$. Além disso, veja que $P(r) > 0$ em toda a região $r > r_+$, o que será necessário para encontrarmos uma energia positiva. A equação (6.115) pode ser escrita como a equação de onda

$$\hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \Phi - \mathcal{U}_{\Phi_s} = 0, \quad (6.118)$$

em que \mathcal{U}_{Φ_s} é o último termo em (6.115), que pode ser derivado a partir do potencial não-negativo

$$\mathcal{U}(\Phi_s, r, \theta) = \frac{s^2}{2} \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} + \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) |\Phi_s|^2 \quad (6.119)$$

e $\hat{g}_{\mu\nu}$ é a métrica de um espaço fictício no qual as funções foram mapeadas pelas transformações de Whiting. A forma dessa métrica pode ser extraída diretamente da comparação entre (6.115) e (6.118). A partir desse procedimento, deduzimos que a métrica inversa é da forma

$$\begin{aligned} \hat{g}^{tt} &= -\frac{1}{\Omega^2} (P(r) + a^2 \cos^2 \theta), & \hat{g}^{rr} &= \frac{X}{\Omega^2}, \\ \hat{g}^{\theta\theta} &= \frac{1}{\Omega^2}, & \hat{g}^{t\varphi} &= -\frac{a}{\Omega^2} \left(\frac{r - m}{\epsilon_0 m} - \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (6.120)$$

para um fator conforme Ω^2 , que pode ser tomado na forma

$$\Omega^2 = a\sqrt{X} \left(\frac{r - m}{\epsilon_0 m} - \cos \theta \right) \sin \theta. \quad (6.121)$$

Com a métrica assim definida, podemos escrever a lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \Phi_s^* \hat{\nabla}_\nu \Phi_s - \mathcal{U}(\Phi_s, r, \theta). \quad (6.122)$$

Note que a métrica agora possui um vetor de Killing $K = \partial_t$, que é tipo luz em toda a região externa do buraco negro. Podemos então definir uma corrente $J^\mu = K^\nu \hat{T}^\mu_\nu$, em que

$$\hat{T}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left(\hat{\nabla}_\mu \Phi_s^* \hat{\nabla}_\nu \Phi_s + \hat{\nabla}_\mu \Phi_s \hat{\nabla}_\nu \Phi_s^* - \hat{g}_{\mu\nu} \left(\hat{\nabla}_\lambda \Phi_s^* \hat{\nabla}^\lambda \Phi_s + 2\mathcal{U}(\Phi_s, r, \theta) \right) \right), \quad (6.123)$$

é o tensor de energia-momento, calculado a partir da derivada funcional $\frac{\delta S}{\delta \hat{g}^{\mu\nu}}$. Diferentemente da corrente definida no espaço físico, J^μ dá uma densidade de energia não negativa para todo $r > r_+$, o que ocorre porque a métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ não tem ergoregião. A energia definida a partir dessa quadricorrente é

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int d^3x \left[(P(r) + a^2 \cos^2 \theta) \left| \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} \right|^2 + X \left| \frac{\partial \Phi_s}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + s^2 \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} + \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) |\Phi_s|^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.124)$$

Como todos os termos em (6.124) são positivos em todo o espaço, eles não podem se cancelar entre si, então a integral (6.124) só pode convergir se cada uma das integrais aditivas que a compõem for convergente. Mas isso significa que nem $|\Phi_s|^2$ nem os termos quadráticos nas derivadas podem crescer exponencialmente, já que esse comportamento seria incompatível com a conservação de energia $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$. Concluímos, portanto, que os modos Φ_s são limitados para todo o tempo. Isso implica que não existem modos instáveis que resolvem a equação (6.115). Mas lembre-se que as transformações foram especificamente desenvolvidas para garantir que todos os modos instáveis do espaço original fossem mapeados em modos instáveis Φ_s . Como esses últimos não existem, somos levados à conclusão de que todos os modos da equação (6.96) são estáveis. Em outras palavras, não há modos correspondentes a frequências cuja parte imaginária é negativa.

Um ponto importante sobre essa demonstração é o fato de que as escolhas $n = |s + k|$ e $n = |s - k|$ só podem corresponder a números inteiros se s for inteiro. Isso significa que as transformações diferenciais que resultam dessas escolhas não valem para férmions. Uma possibilidade que pode funcionar nesse caso é a escolha $n = |2s|$, que corresponde às relações de Teukolsky-Starobinsky [314, 315]. Poderíamos tentar usar essas relações para definir a equação de onda do espaço fictício. Já se sabe na literatura que a demonstração de Whiting (que é o processo feito acima no limite $\delta_I \rightarrow 0$) vale para todo $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, então esse argumento deve funcionar também para férmions. De fato, é possível demonstrar a estabilidade modal utilizando apenas a transformação integral de Whiting e a equação angular original (6.93), como demonstrado em [316–318]. Com efeito, o método introduzido em [316], que faz uso apenas da transformação integral de Whiting, é poderoso o suficiente para demonstrar estabilidade modal e ainda provar resultados mais fortes, como a exclusão de modos não triviais também em $\mathbb{R} - \{0\}$, o que é importante para estimativas de decaimento [316–318]. Como a equação angular do buraco negro STU é idêntica ao caso de Kerr, e a função $P(r)$ (que, repita-se, contém toda a dependência da integral de energia nas cargas $U(1)$) é positiva, não parece haver nenhum obstáculo para generalização desses resultados. Em princípio, as considerações acima significam que a transformação integral que desenvolvemos já deve ser suficiente para mostrar estabilidade modal de férmions. Devido à alta complexidade do argumento dado em [316] vamos, entretanto, recorrer a um método diferente para mostrar a estabilidade de modos de Dirac.

6.4.3 Estabilidade modal de férmions de Dirac na métrica STU com cargas iguais aos pares

Nesta subseção, investigaremos a estabilidade modal de férmions com spin $s = \pm 1/2$ usando diretamente a equação de Dirac (ou, equivalentemente, a equação (6.93) para $s = 1/2$). A possibilidade de usar diretamente as equações de Teukolsky nesse caso, evadindo assim a necessidade das transformações de Whiting, decorre do fato de que partículas com esses valores de spin não possuem modos superradiantes. A demonstração que daremos nesta seção se baseia na técnica introduzida em [309] para o buraco negro de Kerr. Esse método faz uso apenas da estrutura das equações de movimento, além de algumas hipóteses fundamentais de analiticidade.

A demonstração consiste em provar que as equações de Dirac, quando combinadas à hipótese $\omega \in \mathbb{R}$, são incompatíveis com modos instáveis. O leitor atento talvez questione essa última hipótese, já que afirmamos que ω é uma função complexa. Com efeito, a forma de (6.92) nos mostra que, se ω é uma função real, então os modos são oscilatórios e, portanto, limitados para condições de contorno adequadas. O intuito, entretanto, não é demonstrar estabilidade apenas para essa subclasse de frequências, e sim mostrar que a incompatibilidade do comportamento de modos instáveis com o caso $\omega \in \mathbb{R}$ implica a inexistência de modos com $\Im(\omega) < 0$. Para

explicar essa afirmação, recorreremos ao buraco negro de Kerr.

A demonstração dada em [309] para a estabilidade modal de neutrinos se baseia no fato, já bem estabelecido, de que os modos equivalentes no buraco negro de Schwarzschild são limitados. Como essa solução está conectada à de Kerr pelo limite bem definido $a \rightarrow 0$, é possível estabelecer uma relação entre os modos das duas teorias. O comportamento de modos (estáveis ou não) nos limites do espaço é governado pelas amplitudes $Y_s^{(in)}$, $Y_s^{(out)}$, $Z_s^{(in)}$ e $Z_s^{(out)}$ que denotam, respectivamente os modos que entram e saem do infinito espacial e do horizonte. Uma instabilidade deve ter $Y_s^{(in)} = 0$ para algum ω com parte imaginária negativa [314]. O raciocínio é alicerçado no fato de que, como as equações de Dirac para o buraco negro de Kerr podem ser suavemente deformadas nas de Schwarzschild, o coeficiente $Y_s^{(in)}(a, \omega)$, visto como uma função de a e ω , deve ser continuamente deformado no coeficiente equivalente da teoria Schwarzschild à medida que $a \rightarrow 0$. Ocorre que a estabilidade modal em Schwarzschild implica que todos os modos não triviais (incluindo aqueles para os quais $Y_s^{(in)} = 0$) dessa teoria possuem frequência ω na parte superior do plano complexo, isto é, tal que $\Im(\omega) > 0$. Por continuidade, esse também deve ser o caso quando a pertence a alguma vizinhança suficientemente pequena do zero. Para que um modo instável apareça na teoria de Kerr, é necessário que um zero originalmente relacionado a uma frequência localizada no semiplano complexo superior migre para o semiplano inferior à medida que a aumenta [309]. Em outras palavras, a rotação deve fazer com que um zero originalmente associado a um modo estável seja continuamente deformado em uma solução das equações (6.96) com $\Im(\omega) < 0$. Se $Y_s^{(in)}(a, \omega)$ for suficientemente bem comportada, então só existe um caminho para essa migração: o zero precisa descer continuamente para o semiplano inferior. Por continuidade, o zero deve necessariamente cruzar o eixo real se a função for analítica.

O raciocínio descrito no parágrafo anterior depende de um fato intuitivo, mas difícil de provar rigorosamente: à medida que variamos a mantendo $Y_s^{(in)}(a, \omega)$ fixo, ω deve mudar continuamente o seu valor sem sair do plano complexo ao qual pertence. Esse raciocínio pode falhar se existirem *pontos de ramificação*. Quando esses pontos existem, a função é propriamente definida em uma superfície de Riemann [260], e é, em princípio, possível que, ao encontrar um ponto de ramificação, ω passe para uma folha de Riemann diferente da original. Nesse caso, a frequência poderia eventualmente migrar para o semiplano inferior sem precisar cruzar o eixo real. O fato de que isso não pode acontecer no buraco negro de Kerr foi rigorosamente demonstrado por Hartle e Wilkins na referência [319]. Uma demonstração com esse nível de rigor ainda não existe para a métrica STU, mas é possível justificar que o argumento de Hartle e Wilkins continua válido visto que: (i) já sabemos que o buraco negro de Kerr é modalmente estável; (ii) todos os nossos resultados possuem limites bem definidos para Kerr e Schwarzschild; (iii) a dependência de (6.93) em ω e a é similar ao caso de Kerr, com a deformação sendo dada pela função $K(r)$, que agora possui translações $r \rightarrow r_i$ na coordenada radial, as quais podem ser vistas como deformações suaves, análogas às que relacionam Schwarzschild a Kerr; (iv) a diferença citada no item anterior não altera a estrutura das equações que, como vimos na subseção 6.4.1, ainda podem ser colocadas na forma confluyente de Heun para qualquer escolha dos δ_i . As mudanças se dão apenas nos parâmetros da equação, os quais não desempenham um papel fundamental no argumento dado em [319]. Elas possuem, em particular, as mesmas singularidades (incluindo tipo e localização) que o buraco negro de Kerr, e as expansões em série de potência em torno das singularidades são da mesma forma. Essas expansões são parte integral do argumento de Hartle e Wilkins. Portanto, não enxergamos nenhum impedimento na implementação da demonstração dada em [319] para o nosso caso. Esses argumentos nos permitem concluir que as propriedades de analiticidade relevantes devem ser mantidas em nossa

teoria. A consequência dessa última observação é que, se modos com $Y_s^{(in)} = 0$ não existirem para $\omega \in \mathbb{R}$, então eles também não existem para nenhum $\omega \in \mathbb{C}$. Demonstraremos agora que esse é o caso.

Vamos usar as funções radiais correspondentes a $\mathcal{R}_{\pm\frac{1}{2}}$ em (6.91b). A função que aparece no caso $s = -1/2$ dessa equação é a mesma que usamos na seção 6.3, isto é, $\bar{\mathcal{R}}_{-\frac{1}{2}}(r) = \mathcal{R}_{-\frac{1}{2}}(r)$. Para $s = 1/2$ utilizamos a redefinição $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}(r) = X^{-\frac{1}{2}}\bar{\mathcal{R}}_{\frac{1}{2}}(r)$, que coloca a equação radial na forma (6.91b) Em termos dessas funções, o sistema composto por (6.59a) e (6.59b) fica

$$X \left(\hat{\mathcal{D}}_- + \frac{X'}{2X} \right) \mathcal{R}_{\frac{1}{2}}(r) = \lambda \mathcal{R}_{-\frac{1}{2}}(r), \quad (6.125a)$$

e

$$\hat{\mathcal{D}}_+ \mathcal{R}_{-\frac{1}{2}}(r) = \lambda \mathcal{R}_{\frac{1}{2}}(r). \quad (6.125b)$$

Para as equações angulares, continuamos com

$$\hat{\mathcal{L}}_+ \mathcal{S}_{\frac{1}{2}}(\theta) = \lambda \mathcal{S}_{-\frac{1}{2}}(\theta), \quad (6.126a)$$

e

$$\hat{\mathcal{L}}_- \mathcal{S}_{-\frac{1}{2}}(\theta) = -\lambda \mathcal{S}_{\frac{1}{2}}(\theta), \quad (6.126b)$$

em que

$$\hat{\mathcal{L}}_{\pm} = \partial_{\theta} \pm \left(a\omega \sin \theta + \frac{k}{\sin \theta} \right) \quad (6.127)$$

e removemos, por simplicidade notacional, a barra de $\bar{\mathcal{S}}_{\pm\frac{1}{2}}(\theta)$. Vemos que, se ω é real, então $\hat{\mathcal{L}}_{\pm}$ também são operadores reais. Por conseguinte, $\mathcal{S}_{\pm\frac{1}{2}}(\theta)$ e λ também são reais, o que é importante para a prova de estabilidade.

Precisamos agora analisar o comportamento assintótico das funções radiais $\mathcal{R}_{\pm\frac{1}{2}}(r)$ próximo ao horizonte de eventos e no infinito. Para simplificar nossa análise, introduzimos a coordenada r_* , definida por [†]

$$dr_* = \frac{F(r)}{X} dr, \quad (6.128)$$

e tal $r_* \rightarrow +\infty$ quando $r \rightarrow \infty$. No infinito, as equações radiais (6.91b) ficam

$$\frac{\partial^2 \mathcal{R}_s}{\partial r_*^2} + \left(\omega^2 + \frac{2is\omega}{r} \right) \mathcal{R}_s \approx 0, \quad (6.129)$$

que valem em ordem de aproximação $\mathcal{O}(1/r^2)$ (ou seja, elas correspondem à primeira ordem na expansão em ponto no infinito). Resolvendo essa equação diferencial, encontramos

$$\mathcal{R}_s \simeq Y_s^{(in)} \frac{e^{-i\omega r_*}}{r} + Y_s^{(out)} \frac{e^{i\omega r_*}}{r^{2s+1}}, \quad (6.130)$$

em que $Y_s^{(out)}$ e $Y_s^{(in)}$ são as amplitudes correspondentes a ondas que se movem para “fora” (isto é, para mais longe do buraco negro) e para “dentro” (isto é, para pontos mais próximos do horizonte de eventos), respectivamente.

[†]Note que essa definição só é válida quando $r < r_+$. Isso é comum em espaços curvos, em que geralmente só exigimos que as coordenadas sejam definidas localmente por cartas [134], cuja união deve cobrir a variedade. Como só estamos interessados na região externa ao buraco negro, isso não causará problemas.

Em termos da variável (6.128), o horizonte de eventos $r = r_+$ corresponde ao limite $r_* \rightarrow -\infty$. Nesse horizonte, as equações de Dirac para a coordenada radial podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial^2 \mathcal{R}_s}{\partial r_*^2} + \left(\tilde{\omega} - is \frac{r_+ - m}{F(r_+)} \right)^2 \mathcal{R}_s \approx 0, \quad (6.131)$$

em que

$$\tilde{\omega} = \omega + \frac{ka}{F(r_+)}. \quad (6.132)$$

Por definição, qualquer partícula que cruze o horizonte de eventos deve necessariamente cair em direção ao interior do buraco negro. Segue que nenhuma solução física (estável ou não) pode ter modos que saiam do horizonte. Resolvendo (6.131) e mantendo esse fato em mente, encontramos,

$$\mathcal{R}_s(r) \simeq Z_s^{(in)} e^{-i\left(\tilde{\omega} - is \frac{r_+ - m}{F(r_+)}\right)r_*} \simeq Z_s^{(in)} X^{-\frac{s}{2}} e^{-i\tilde{\omega}r_*}, \quad (6.133)$$

em que $Z_s^{(in)}$ é a amplitude de um modo que sai do horizonte, e as soluções com $Z_s^{(out)} \neq 0$ foram descartadas pelo argumento físico dado acima.

Usando (6.130) e (6.133), bem como as equações (6.125a) e (6.125b), podemos deduzir relações entre as amplitudes $Y_s^{(in)}$, $Y_s^{(out)}$ e $Z_s^{(in)}$ correspondentes a valores diferentes de spin. Com efeito, substituindo o comportamento assintótico (6.130) nas equações (6.125a) e (6.125b) encontramos as relações

$$2i\omega Y_{\frac{1}{2}}^{(out)} = \lambda Y_{-\frac{1}{2}}^{(out)}, \quad (6.134a)$$

e

$$-2i\omega Y_{-\frac{1}{2}}^{(in)} = \lambda Y_{\frac{1}{2}}^{(in)}. \quad (6.134b)$$

Por um raciocínio análogo, podemos usar (6.133) e as equações radiais para deduzir, no horizonte de eventos, as relações

$$Z_{-\frac{1}{2}}^{(in)} (r_+ - m - 2i\tilde{\omega}F(r_+)) = \lambda Z_{\frac{1}{2}}^{(in)}. \quad (6.135)$$

As equações que deduzimos acima relacionam $Y_s^{(in)}$, $Y_s^{(out)}$ e $Z_s^{(in)}$ para valores diferentes de spin. Podemos também usar as equações de movimento para deduzir identidades que relacionam as amplitudes assintóticas de modos com mesmo valor de spin. Essas equações “conectam” o comportamento assintótico de uma solução nos extremos. Qualquer solução fisicamente aceitável das equações de Dirac deve relacionar esses dois limites de forma suave e consistente com essas relações de conexão. Para obtê-las, vamos usar a coordenada (6.128) para escrever as equações radiais conjuntamente na forma

$$\frac{d^2 \mathcal{X}_s}{dr_*^2} + U(r_*, s) \mathcal{X}_s(r_*) = 0, \quad (6.136)$$

em que, agora,

$$\mathcal{X}_s \equiv X^{\frac{s}{2}} F^{\frac{1}{2}} \mathcal{R}_s(r_*). \quad (6.137)$$

O “potencial” $U(r_*, s)$ nessa equação pode ser calculado explicitamente, mas sua forma específica não será importante para nossos objetivos. A notação $U(r_*, s)$ representa o fato de que estamos tomando os outros parâmetros dessa equação (como a e ω) fixos, mas mantemos s variável para poder levar em conta as duas equações radiais em uma única expressão.

Um resultado conhecido da teoria de equações diferenciais [†] nos diz que o Wronskiano de quaisquer duas soluções $\mathcal{X}_s^{(1)}$ e $\mathcal{X}_s^{(2)}$ de (6.136) satisfaz

$$W\left(\mathcal{X}_s^{(1)}, \mathcal{X}_s^{(2)}\right) = \frac{d\mathcal{X}_s^{(1)}}{dr_*} \mathcal{X}_s^{(2)} - \mathcal{X}_s^{(1)} \frac{d\mathcal{X}_s^{(2)}}{dr_*} = C, \quad (6.138)$$

em que C é uma constante em relação a r_* .

Ora note que $U(r_*, s)$ satisfaz a relação

$$U^*(r_*, s) = U(r_*, -s). \quad (6.139)$$

Essa equação pode ser usada para mostrar que $\mathcal{X}_{\frac{1}{2}}$ e $\mathcal{X}_{-\frac{1}{2}}^*$ satisfazem a mesma equação diferencial. Com efeito, basta tomar o conjugado complexo de (6.136), fazer a mudança $s \leftrightarrow -s$ e usar (6.139) para obter equações diferenciais idênticas nessas duas funções. Quando combinado a (6.138), esse fato implica, em particular,

$$W\left(\mathcal{X}_{\frac{1}{2}}, \mathcal{X}_{-\frac{1}{2}}^*\right)\Big|_{r_*} = W\left(\mathcal{X}_{\frac{1}{2}}, \mathcal{X}_{-\frac{1}{2}}^*\right)\Big|_{\infty}, \quad (6.140)$$

para qualquer r_* . Usando o comportamento que deduzimos para funções na vizinhança do horizonte de eventos, podemos escrever, nessa região,

$$W\left(\mathcal{X}_{\frac{1}{2}}, \mathcal{X}_{-\frac{1}{2}}^*\right)\Big|_{-\infty} = Z_{\frac{1}{2}}^{(in)} Z_{-\frac{1}{2}}^{(in)*} [(m - r_+) - 2i\tilde{\omega}F(r_+)], \quad (6.141)$$

ao passo que o comportamento assintótico dá, no infinito,

$$W\left(\mathcal{X}_{\frac{1}{2}}, \mathcal{X}_{-\frac{1}{2}}^*\right)\Big|_{\infty} = 2i\omega \left(Y_{\frac{1}{2}}^{(out)} Y_{-\frac{1}{2}}^{(out)*} - Y_{\frac{1}{2}}^{(in)} Y_{-\frac{1}{2}}^{(in)*} \right). \quad (6.142)$$

Por (6.140), deve valer

$$Z_{\frac{1}{2}}^{(in)} Z_{-\frac{1}{2}}^{(in)*} [(m - r_+) - 2i\tilde{\omega}F(r_+)] = 2i\omega \left(Y_{\frac{1}{2}}^{(out)} Y_{-\frac{1}{2}}^{(out)*} - Y_{\frac{1}{2}}^{(in)} Y_{-\frac{1}{2}}^{(in)*} \right). \quad (6.143)$$

Substituindo (6.135) e (6.134) nessa equação, encontramos, finalmente,

$$|Z_{\frac{1}{2}}^{(in)}|^2 = |Y_{\frac{1}{2}}^{(in)}|^2 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2} |Y_{\frac{1}{2}}^{(out)}|^2. \quad (6.144)$$

Claro está que, se ω e λ pertencem aos reais, então a relação acima não é consistente com $|Y_{\frac{1}{2}}^{(in)}|^2 = 0$, o que significa que um modo com essa amplitude não é possível quando a frequência é real, para nenhum a . Dada a discussão feita no início desta subseção e os resultados de [319], devemos então concluir que modos instáveis não são possíveis se $s = \frac{1}{2}$. Com um

[†]O resultado mencionado é um corolário do teorema de Abel, que garante que, dada qualquer equação da forma

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = 0$$

e duas soluções y_1 e y_2 em um intervalo, o Wronskiano satisfaz

$$W = Ce^{-\int p(t)dt},$$

com C constante [321].

raciocínio análogo, podemos obter relações similares para $s = -\frac{1}{2}$ que, pelo mesmo argumento, nos permitem concluir a estabilidade de modos com esse valor de spin. Somos conduzidos, portanto, à conclusão de que modos instáveis não existem para soluções da equação de Dirac modificada.

Note-se que as expressões assintóticas obtidas, bem como as relações de conexão que acabamos de deduzir, concordam com os resultados conhecidos para o buraco negro de Kerr, como esperado [309, 320]. Isso significa que, assim como todos os outros resultados deste capítulo (com a exceção das equações de Dirac modificada com torção T_+), os cálculos desenvolvidos implicam resultados análogos para a métrica (6.2). Assim, a estabilidade modal desse buraco negro sem cargas foi demonstrada como subproduto das nossas investigações.

Como argumentamos acima, a generalização das conclusões de [319] para o buraco negro STU com cargas iguais aos pares pareça imediata em um primeiro momento. Com o intuito de imbuir nossos resultados de um maior rigor matemático, seria interessante, ainda assim, tentar transpor cuidadosamente esses argumentos para o nosso buraco negro. Para além de puro rigor, essas investigações fornecem informações valiosas sobre o comportamento das amplitudes assintóticas, que podem ser importantes, por exemplo, em problemas de espalhamento nessa geometria. Outro ponto muito importante diz respeito ao procedimento de Whiting que conduzimos. Usando outra escolha de n na equação angular, pode ser possível provar a estabilidade modal de férmions sem recorrer a relações de conexão, o que constitui uma possibilidade interessante, que deve ser investigada. Além disso, os resultados obtidos em [316–318] sugerem que deve ser possível excluir modos instáveis usando apenas a transformação integral (6.107) e a equação angular original. Isso deve possibilitar, em princípio, a dedução de estabilidade modal para todos os valores de s . Ademais, a técnica usada nesses trabalhos, e no mais recente [322], é suficiente para deduzir resultados mais fortes que os da referência [249], como a estabilidade no eixo real. Finalmente, e talvez mais importante, uma perspectiva imediata de grande interesse para possíveis trabalhos está no estudo das equações modais para outros valores de spin, como $s = \pm 1$, $s \pm 2$ ou mesmo férmions com spin $3/2$, que devem satisfazer uma versão generalizada da equação de Rarita-Schwinger [278, 323]. Além de potencialmente confirmar nossa conjectura sobre a validade da equação (6.93) para outros valores de spin, a obtenção das equações modais tem diversas aplicações além da estabilidade, como a determinação de efeitos de maré em buracos negros ou problemas de espalhamento. Veja, por exemplo, as referências [324–327]. Os problemas mencionados neste parágrafo estão atualmente sendo considerados para trabalhos futuros.

Conclusão e perspectivas

“E quindi uscimmo a riveder le stelle.”

Dante Alighieri, Divina Commedia

Neste trabalho, investigamos algumas estruturas localizadas que são encontradas em modelos de Teoria Clássica de Campos, com ênfase em defeitos topológicos e, no último capítulo, em buracos negros. Foi conduzida uma investigação sistemática em alguns dos diversos cenários nos quais essas estruturas se manifestam, e buscamos destacar as semelhanças e diferenças entre as soluções que examinamos ao longo do trabalho, sejam elas modelos clássicos bem conhecidos da literatura ou contribuições originais. Em particular, as soluções estudadas entre os capítulos 3 e 5 possuem uma estrutura topológica que os assemelha em certos aspectos. Como exemplos dessas semelhanças, podemos citar a obtenção de uma carga topológica associada a cada uma dessas soluções, a presença e significado da multiplicidade dos zeros em vórtices e monopolos, e o fato de que esses dois defeitos apresentam um invariante topológico relacionado a uma integral da forma de curvatura, o qual é identificado com o fluxo magnético em uma superfície de duas dimensões.

Após uma breve introdução, seguimos para o segundo capítulo desta tese. Nele, introduzimos e, em alguns casos, aprofundamos, alguns conceitos gerais importantes, que juntos compõem a base teórica sobre a qual construímos o resto do trabalho. Esse capítulo foi voltado a resultados que se provam importantes para mais de um dos capítulos subsequentes. Em muitos casos, esses resultados se traduzem em ferramentas teóricas poderosas usadas ao longo do trabalho, como o método de Bogomol'nyi e a linearização que caracteriza os cálculos de estabilidade linear. Em outros casos, as seções do segundo capítulo foram dedicadas a conceitos formais de aplicabilidade diversa, como os invariantes topológicos que encontramos com frequência, ou mesmo o tensor de energia-momento e as equações de Euler-Lagrange, usados em todos os capítulos.

No Capítulo 3, estudamos primeiramente modelos escalares em duas dimensões, com um único campo escalar real. Esses sistemas constituem talvez o cenário mais simples em que defeitos topológicos podem ser encontrados em sistemas contínuos. Nesse contexto, nos deparamos com o kink e o antikink do conhecido modelo ϕ^4 , que apresenta simetria Z_2 e tem uma variedade de vácuo discreta, que contém apenas dois elementos: as configurações triviais $\phi = \pm 1$. Estudamos também o célebre modelo sine-Gordon, um dos exemplos mais famosos de teoria escalar. A fama desse modelo vem por um bom motivo: eles possuem sólitons, no sentido mais estrito da palavra, o que significa que essas estruturas mantêm sua forma após colidirem com outros defeitos da teoria, além de nunca se dissiparem. Partimos então para modelos com impureza, e nesse contexto investigamos as contribuições originais [53] e [57]. Nesses trabalhos, nós investigamos como a introdução de impurezas pode mudar a estrutura interna da solução. Essa modificação também pode engendrar cenários previamente impossíveis, como a evasão do teorema de Derrick para um modelo com potencial da forma canônica em mais de

duas dimensões do espaço-tempo.

No Capítulo 4, voltamos nossa atenção a teorias de gauge abelianas, para as quais escolhemos, como representante paradigmática, a teoria Maxwell-Higgs, que se relaciona intimamente com a fenomenologia de Ginzburg-Landau para supercondutores. Nessa teoria, o campo escalar é tratado como uma função complexa acoplada aos campos de calibre do eletromagnetismo. Impomos que a teoria seja invariante sob transformações de calibre, que representam redundâncias. No sistema que resulta dessa construção, encontramos os vórtices. Essas estruturas localizadas são defeitos topológicos identificados com os zeros do campo escalar. Como o grupo de calibre, que atua na fase do campo, não tem sua ação definida nesses pontos, eles representam singularidades na descrição de gauge. Cada um desses zeros é responsável por prender um quantum de fluxo magnético na superfície do supercondutor, o que resulta em um fluxo quantizado proporcional à carga topológica. Mostramos ainda que, quando a massa do campo de Higgs é igual à do fóton da teoria, existe um vínculo de Bogomol'nyi, e equações de primeira ordem cujas soluções o saturam. Nesse capítulo, também apresentamos contribuições originalmente desenvolvidas no doutorado ora defendido: estudamos defeitos em teorias de simetria aumentada [109], em que nos deparamos com vórtices análogos aos de Maxwell-Higgs, mas que pertencem aos diversos setores de uma teoria de calibre $U(1) \times \dots \times U(1)$. Além disso, investigamos, na referência [110], um modelo em que vórtices de Maxwell-Higgs são acoplados a um campo escalar real, cujas soluções se parecem com os kinks do capítulo anterior. Nesse modelo, vimos que, quando os vórtices são auto-duais, é possível resolver a equação de movimento do campo escalar independentemente, e substituir o resultado nas equações dos vórtices. Assim, a influência do campo escalar fica análoga a uma função fixa de fundo, que formalmente se parece com uma impureza. Os parâmetros que definem as propriedades da impureza são, nesse modelo, descritos em termos de parâmetros internos da solução tipo kink, e possuem uma interpretação física.

No Capítulo 5, estudamos soluções que possuem carga magnética na teoria de Yang-Mills-Higgs em quatro dimensões. Nesse modelo, um campo escalar é acoplado a campos de calibre correspondentes a uma simetria de gauge não abeliana. No nosso caso, escolhemos o grupo $SU(2)$, embora muitas das conclusões apresentadas possam ser generalizadas para outros grupos não abelianos. Vimos que a quebra espontânea de simetria, induzida por um campo escalar cujo valor de expectativa no vácuo é diferente de zero, faz com que a simetria seja reduzida para o grupo $U(1)$. Isso permite a identificação, sem ambiguidade, do campo eletromagnético nesse regime. Esse mesmo processo causa a possibilidade de soluções com carga magnética na teoria. Essa carga será diferente de zero sempre que as condições de contorno induzirem uma solução topologicamente não trivial. Esse resultado é bastante geral e, de fato, sabemos que monopolos magnéticos, e eventualmente dyons (que possuem simultaneamente carga magnética e elétrica) podem aparecer em qualquer teoria de Grande Unificação [224]. No limite em que a massa do campo de Higgs tende a zero, encontramos vínculos de Bogomol'nyi para esses dois tipos de solução. Mostramos que, surpreendentemente, existem soluções em forma fechada para esses dois defeitos no limite de Bogomol'nyi. Assim como havíamos feito para vórtices, também introduzimos, em outra contribuição original [120], modelos com simetria aumentada, nos quais vários vórtices, de diferentes setores não abelianos, são encontrados no mesmo sistema.

No Capítulo 6, estudamos buracos negros, com ênfase nas soluções da família STU. A métrica investigada possui quatro cargas $U(1)$, além de massa e momento angular. Ela generaliza a solução de Kerr, na qual se reduz quando as cargas tendem a zero. Nos dedicamos especialmente a uma classe mais simples dessas soluções, dada pela condição de que as cargas sejam iguais duas a duas. Nesse caso, fomos capazes de separar a equação de Dirac modificada com torção, que é a forma mais apropriada de estudar modos de Dirac (como elétrons ou

neutrinos) nessa teoria. Seguindo a contribuição original recente [128], usamos essa equação, e os resultados de [297], para conjecturar uma generalização da importante equação de Teukolsky. Usamos esse resultado para realizar um procedimento de Whiting, válido para modos bosônicos. Finalmente, estabelecemos, na subseção seguinte, relações de conexão análogas às encontradas por [309] para o buraco negro de Kerr. Com essas relações, e algumas hipóteses de analiticidade, mostramos que os modos com spin $\pm\frac{1}{2}$ são limitados para todo t , o que prova a estabilidade modal dessas soluções.

Todos os trabalhos originais mencionados ao longo desta tese, bem como outros que não foram incluídos, possuem amplo campo de expansão e generalização. Defeitos topológicos, por exemplo, compõem uma área vasta e versátil de estudo, que encontra aplicações nas mais diversas áreas das ciências naturais. Este trabalho lidou com defeitos topológicos do tipo kink, vórtices, monopolos e dyons, mas há outras classes interessantes de defeitos topológicos, como instantons [328, 329], skyrmions [153, 330] e skyrmions magnéticos [331–333].

No que tange a buracos negros, há também diversas perspectivas para investigações futuras. Primeiramente, notamos que as técnicas utilizadas no Capítulo 6 não são exclusivas da supergravidade. De fato, durante todo esse capítulo a solução foi tratada como um buraco negro comum de uma teoria de gravitação, oriundo de uma concentração de massa com quatro cargas e momento angular. Portanto, podemos usar as ferramentas obtidas durante a investigação de buracos negros STU para analisar soluções em outras teorias gravitacionais, como a Relatividade Geral. Uma vez que os buracos negros mais importantes da teoria de Einstein já foram bem estudados por outros autores, pode ser mais vantajoso buscar aplicações em outras teorias de gravitação. Buracos negros já foram encontrados e estudados em alguma medida em várias teorias alternativas de gravitação, que incluem as teorias $f(R)$ [334–337], de Gauss-Bonnet [338–342], Brans-Dicke [343–347] e gravitação de Palatini [348–352]. Além disso, outras aplicações interessantes existem para o buraco negro STU. Na referência recente [308], a estabilidade de modos escalares para uma solução dessa família foi examinada. Modos com spin diferente de zero ainda não foram estudados nesse contexto, então poderíamos, em princípio, tentar generalizar a separabilidade encontrada em [129] para esse cenário. Também há outras aplicações interessantes para buracos negros STU, que incluem a investigação de modos normais [327, 353] e de monodromia, a qual tem, como uma de suas possíveis aplicações, a análise de espalhamento [355–357].

Referências Bibliográficas

- [1] J. S. Russell, *Report on Waves*, 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 311 (1844).
- [2] Nick Pizzo, Shallow water wave generation (quasi solitary wave with breaking) [Video]. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=w-oDnVbV8mY>, acesso em 12/01/2024.
- [3] D. J. Korteweg, G. de Vries, *Phil. Mag.* **39**, 422 (1895).
- [4] J. Boussinesq, *Memoires presentes par divers savants' l'Acad. des Sci. Inst. Nat. France* **23**, 1 (1877).
- [5] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, Livraria da Física (2008).
- [6] P. Rosenau, J.M. Hyman, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 564 (1993);
- [7] R. Richter IV. Barashenkov *Phys. Rev. Lett.* **94**, 184503 (2005).
- [8] E. Knobloch, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6**, 325 (2015).
- [9] M. J. Rosen, J. T. Kunjappu, *Surfactants, Interfacial Phenomena*, John Wiley & Sons (2012).
- [10] A. C. Scott, *Am. J. Phys.* **37**, 52 (1969).
- [11] M. Faber, *J. Phys. Conf. Ser.* **504**, 012010 (2014).
- [12] R. Jackiw, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 681 (1977).
- [13] R. Rajaraman, *Solitons and instantons: an introduction to solitons and instantons in quantum field theory*, North-Holland (1984).
- [14] N. Manton, P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge University Press (2007).
- [15] Y. Yousefi, K. Kh. Muminov, arXiv:1206.1294 (2012).
- [16] E. Bour, *J. Ec. polytech. Math.* **19**, 1 (1862).
- [17] J. Rubinstein, *J. Math. Phys.* **11**, 258 (1970).
- [18] T. Kaluza, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.)*, 966 (1921).
- [19] C. H. Brans, R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124**, 925 (1961).
- [20] M. Campanelli, C. O. Lousto, *Int. J. Mod. Phys. D* **02**, 451 (1993).

- [21] H. Goenner, arXiv:1204.3455 (2012).
- [22] A. D. Linde, Phys. Lett. **389**, 1088 (1982).
- [23] A. Albrecht, P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).
- [24] A. Albrecht, P. J. Steinhardt, M. S. Turner, Frank Wilczek, Phys. Rev. Lett. **48**, 1437 (1982).
- [25] A. H. Guth, S. -Y. Pi, Phys. Rev. D **32**, 1899 (1985).
- [26] F. Bezrukov, M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **659**, 703 (2008)
- [27] Y. Fujii, Phys. Rev. D **26**, 2580 (1982).
- [28] B. Ratra, P. J. E. Peebles Phys. Rev. D **37**, 3406 (1988).
- [29] S. Tsujikawa, Quant. Grav. **30**, 214003 (2013).
- [30] R. R. Caldwell, E. V. Linder, Phys. Rev. Lett. **95**, 141301 (2005).
- [31] F. Perrotta, C. Baccigalupi, S. Matarrese, Phys. Rev. D **61**, 023507 (1999).
- [32] R. Brunetti, K. Fredenhagen, P. L. Ribeiro, Commun. Math. Phys. **368**, 519 (2019).
- [33] M.C Huang P. Sikivie, Phys. Rev. D **32**, 1560 (1985).
- [34] P. Friedrich, T. Prokopec, Phys. Rev. D **98**, 025010 (2018).
- [35] G. Rose, Phys. Rev. **160**, 1278 (1967).
- [36] Tanmay Vachaspati, *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons*, Cambridge University Press (2007).
- [37] S. Dutta, D.A. Steer, T. Vachaspati, Phys. Rev. Lett. **101**, 121601 (2008).
- [38] R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, Phys. Rev. D **10**, 4130 (1974);
- [39] R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, Phys. Rev. D **11**, 3424 (1975);
- [40] Z. Wang, S. Cheng, X. Liu, H. Jiang, Nanotechnology **32**, 402001, (2021).
- [41] L. Pogosian, T. Vachaspati Phys. Rev. D **62**, 123506 (2000).
- [42] N. B. Caballero et al., Phys. Rev. E **97**, 062122 (2018).
- [43] H.A. Chamblin, H.S. Reall, Nucl. Phys. B **562**, 133 (1999).
- [44] J. M. Martin, W. Li, K. T. Delaney, G. H. Fredrickson, J. Chem. Phys. **145**, 154104 (2016).
- [45] P. Benincasa, A. V. Ramallo, J. High Energy Phys. **2012**, 076 (2012).
- [46] S. M. Tschopp, H. D. Vuijk, A. Sharma, J. M. Brader, Phys. Rev. E **102**, 042140 (2020).
- [47] P. W. Anderson, Phys. Rev. **124**, 41 (1961).
- [48] Y. S. Kivshar, B. A. Malomed, Rev. Mod. Phys. **61**, 763 (1989).

- [49] O-K. Kwon, C. Kim, Y. Kim, J. High Energ. Phys. **2022**, 140 (2022).
- [50] B. A. Malomed, J. Phys. A Math. Gen. **25**, 755 (1992).
- [51] N. S. Manton, K. Oles, A. Wereszczynski, J. High Energy Phys. **2019**, 086 (2019).
- [52] A. A. Izquierdo et al., arXiv:2308.14420 (2023).
- [53] D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, Phys. Lett. B **846**, 138262 (2023).
- [54] G.H. Derrick, J. Math. Phys. **5**, 1252 (1964).
- [55] R. H. Hobart, Proc. Phys. Soc. **82**, 201 (1963).
- [56] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).
- [57] D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, Eur. Phys. J. C **84**, 180 (2024).
- [58] C. Adam, A. Wereszczynski, Phys. Rev. D **98**, 116001 (2018).
- [59] C. Adam, T. Romanczukiewicz, A. Wereszczynski, J. High Energy Phys. **2019**, 131 (2019).
- [60] D. Bazeia, J. Menezes, R. Menezes Phys. Rev. Lett. **91**, 241601 (2003).
- [61] U. Essmann, H. Träuble, Phys. Lett. A **24**, 526 (1967).
- [62] F. S. Wells et al. Sci. Rep. **5**, 8677 (2015).
- [63] D. Melnikov, A. B. F. Neves, J. Appl. Phys. **126**, 244701 (2019).
- [64] K. Tainaka, Phys. Rev. Lett. **63**, 2688 (1989).
- [65] B. Zhen et al., Phys. Rev. Lett. **113**, 257401 (2014)
- [66] J. Tong, A. Mercedes, G. Chen, S. V. Boriskina, arXiv:1502.03348 (2015).
- [67] I. V. Basistiy et al., J. Opt. A: Pure Appl. Opt. **6**, S166 (2004).
- [68] R. Pugatch et al., Phys. Rev. Lett. **98**, 203601 (2007).
- [69] M. S. Soskin et al., Phys. Rev. A **56**, 4064 (1997).
- [70] Y. Kawaguchi, M. Ueda, Phys Rep. **520**, 253 (2012).
- [71] T-L. Ho Phys. Rev. Lett. **87**, 060403 (2001).
- [72] S. Donadello et al., Phys. Rev. Lett. **113**, 065302 (2014).
- [73] MR. Matthews, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498 (1999).
- [74] J.R. Abo-Shaeer, C. Raman, J.M. Vogels, W. Ketterle, Science **292**, 476 (2001).
- [75] R. P. Feynman, Phys. Rev. **94**, 262 (1954).
- [76] A. L. Fetter, Phys. Rev. **162**, 143 (1967).

- [77] M. M. Salomaa, G. E. Volovik *Rev. Mod. Phys.* **59**, 533 (1987).
- [78] M. Leadbeater et al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1410 (2001).
- [79] A. L. Fetter, P. C. Hohenberg, P. Pincus, *Phys. Rev.* **147**, 140 (1966).
- [80] T. W. B. Kibble, *J. Phys. A* **9**, 1387 (1976).
- [81] A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **24**, 2082 (1981).
- [82] N. Kim, K. Yoonbai, K. Kimm, *Phys. Rev. D* **56**, 8029 (1997).
- [83] R. R. Caldwell, B. Allen, *Phys. Rev. D* **45**, 3447 (1992).
- [84] V. L. Ginzburg, L. D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 1064 (1950).
- [85] A. A. Abrikosov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **32**, 1442 (1957); *Sov. Phys. JETP* **5**, 1174 (1957).
- [86] D. Cribier, B. Jacrot, L.M Rao, B. Farnoux, *Phys. Lett.* **9**, 106 (1964).
- [87] A. A. Abrikosov *Rev. Mod. Phys.* **76**, 975 (2004).
- [88] G. Blatter et al., *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125 (1994).
- [89] John Bardeen, M. J. Stephen, *Phys. Rev.* **140**, A1197 (1965).
- [90] W-K. Kwok et al., *Rep. Prog. Phys.* **79**, 116501 (2016).
- [91] M. Stone, S-B. Chung, *Phys. Rev. B* **73**, 014505 (2006).
- [92] B. Chen et al., *Nat. Phys.* **3**, 239 (2007) .
- [93] J. Garaud, M. N. Chernodub, D. E. Kharzeev, *Phys. Rev. B* **102**, 184516 (2020).
- [94] M. Kheirikhah, Z. Yan, F. Marsiglio *Phys. Rev. B* **103**, L140502 (2021).
- [95] L-H. Hu, X. Wu, C-X. Liu, R-X. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 277001 (2022)
- [96] H. B. Nielsen, P. Olesen, *Nucl. Phys. B* **61**, 45 (1973).
- [97] R. Jackiw, E. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2234 (1990).
- [98] R. Wang, *Commun. Math. Phys.* **137**, 587 (1991).
- [99] S-S. Chern, J. Simons, *Ann. Math.* **99**, 48 (1974).
- [100] C. Lee, K. Lee, H. Min, *Phys. Lett. B* **252**, 79 (1990).
- [101] P. K. Ghosh, *Phys. Rev. D* **49**, 5458 (1994)
- [102] J. Han, N. Kim, *J. Funct. Anal.* **221**, 167 (2005).
- [103] G. Tallarita, S. Thomas, *J. High Energ. Phys.* **2010**, 90 (2010).
- [104] I. Andrade et al., *Mod. Phys. Lett. A* **37**, 2250225 (2022).
- [105] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **249**, 557 (1985).

- [106] P. Arias, E. Ireson, C. Núñez, F. Schaposnik, J. High Energy Phys. **2015**, 156 (2015).
- [107] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques, R. Menezes, Adv. High Energy Phys. **2019**, 3187289 (2019).
- [108] D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, R. Menezes, Phys. Rev. Research **1**, 033053 (2019).
- [109] D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, Eur. Phys. J. C **82** 316 (2022).
- [110] D. Bazeia, M.A. Liao, M.A. Marques, Phys. Lett. B **825**, 136862 (2022).
- [111] P. Curie, Séances de la Société Française de Physique, 76 (1894).
- [112] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **133**, 60 (1931).
- [113] P. A. M. Dirac, Phys. Rev. **74**, 817 (1948).
- [114] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **79**, 276 (1974).
- [115] A. M. Polyakov, JETP Lett. **20**, 194 (1974).
- [116] B. M. Einhorn, D. L. Stein, Phys. Rev. D **21**, 3295 (1980).
- [117] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [118] D. Bazeia, M. A. Marques, Gonzalo J. Olmo, Phys. Rev. D **98**, 025017 (2018).
- [119] D. Bazeia, M. A. Marques, R. Menezes, Phys. Rev. D **97**, 105024 (2018).
- [120] D. Bazeia, M. A. Liao, M.A. Marques, Eur. Phys. J. C **81**, 552 (2021).
- [121] S-W. Wei, Y-X. Liu, R. B. Mann, Phys. Rev. Lett. **129**, 191101 (2022).
- [122] D. Wu, Phys. Rev. D **107**, 024024 (2023).
- [123] C. Fang, J. Jiang, M. Zhang, J. High Energ. Phys. **2023**, 102 (2023).
- [124] R. Barbieri, G.F. Giudice, Nucl. Phys. B **306**, 63 (1988).
- [125] G. Jungman, M. Kamionkowski, K. Griest, Phys. Rep. **267**, 195 (1996).
- [126] R. P. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963).
- [127] E. T. Newman, A. I. Janis, J. Math. Phys. **6**, 915 (1965).
- [128] M. Cvetič, M. A. Liao, M. M. Stetsko, arXiv:2312.04929 (2023).
- [129] M. Cvetič, M. M. Stetsko, Phys. Rev. D **108**, 085020 (2023).
- [130] H. Goldstein, C. P. Poole, J.L Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley (2001).
- [131] A. Einstein, Jahrb. Radioakt. Elektron. **4**, 411 (1907).
- [132] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin **1915**, 844 (1915).
- [133] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin **1915**, 778 (1915),

- [134] S. Carroll, *An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*, Addison Wesley (2004).
- [135] D. Hilbert, Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl. **3**, 395 (1915).
- [136] W. H. Zurek, Nature **317**, 505 (1985).
- [137] E. Noether, D. Hilbert, Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl. **1918**, 235 (1918).
- [138] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press (1975).
- [139] F. J. Belinfante, Physica. **7**, 449 (1940).
- [140] D. Lehmkuhl, arXiv:1803.09872 (2018).
- [141] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Clarendon Press (1992).
- [142] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, John Wiley & Sons (1985).
- [143] O. Boulle, G. Malinowski, M. Kläui, Mater. Sci. Eng. R Rep. **72**, 9 (2011).
- [144] G.W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Springer, (1978).
- [145] J. Mcleary, *A First Course in Topology: Continuity and Dimension*, American Mathematical Society (2006).
- [146] J. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall (1974).
- [147] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press (2005).
- [148] k. Lee, e. J. Weinberg, P. Yi Phys. Rev. D **54**, 6351 (1996).
- [149] L.D Landau, E. M. Lifshitz E. M. *Mechanics*. Elsevier/Butterworth-Heinemann (2010).
- [150] R. Menezes, *Defeitos Globais em Teoria de Campos e Aplicações*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Paraíba (2007).
- [151] L. D Landau, E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Pergamon Press (1991).
- [152] R. Jackiw, Rev. Mod. Phys. **49**, 681 (1977).
- [153] T. Skyrme, *A unified field theory of mesons and baryons*. Nucl. Phys. **31**, 555 (1962).
- [154] M. K. Prasad, C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).
- [155] Stephen P. Martin, arXiv:hep-ph/9709356 (1997).
- [156] S. Gustafson, I.M Sigal, Commun. Math. Phys. **212**, 257 (2000)
- [157] Z. Hlousek, D. Spector, Nucl. Phys. B **397**, 173 (1993).
- [158] E. Witten, D. I. Olive, Phys. Lett. B **78**, 97 (1978).
- [159] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, Springer (2000).

- [160] L. Mezincescu¹, A. J. Routh, P. K. Townsend, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47**, 175401 (2014).
- [161] T. W. Kirkman, C. K. Zachos, *Phys. Rev. D* **24**, 999 (1981).
- [162] A. Strominger, C. Vafa, *Phys. Lett. B* **379**, 99 (1996).
- [163] M. Chan, *Not. Am. Math. Soc.* **68**, 1700 (2021).
- [164] D. Tong, arXiv:hep-th/0509216 (2005).
- [165] N. S. Manton, *Phys. Lett.* **110**, 54 (1982).
- [166] N. S. Manton. *Ann. Phys.* **256**, 114 (1997).
- [167] N. S. Manton, *Phys. Lett. B* **154**, 397 (1985)
- [168] K. Peeters, M. Zamaklar, *J. High Energ. Phys.* **2001**, 32 (2001).
- [169] P. J. Ruback, *Nucl. Phys. B* **296**, 669 (1988).
- [170] J. M. Speight, *J. Geom. Phys.* **47**, 343 (2003).
- [171] G. A. Palma, A-C. Davis, *Phys. Rev. D* **70**, 106003 (2004).
- [172] D. Stuart, *Commun. Math. Phys.* **159**, 51 (1994).
- [173] D. Stuart, *Commun. Math. Phys* **166**, 149 (1994).
- [174] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer-Verlag (1974).
- [175] L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, *Theor. Math. Phys.* **21**, 1046 (1974).
- [176] A. V. Bäcklund, *Math. Ann.* **17**, 285 (1880).
- [177] N. G. Vakhitov, A. A. Kolokolov, *Radiophys. Quantum Electron.* **16** 783 (1973).
- [178] V. E. Zakharov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **53**, 1735 (1967)
- [179] J. A. Gonzalez, D. Sudarsky, *Rev. Mex. Fis.* **47**, 231 (2001).
- [180] B. Hartmann, G. Luchini, Clithenis P. Constantinidis, C. F. S. Pereira, *Phys. Rev. D* **101**, 076004 (2020).
- [181] L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **97**, 124035 (2018).
- [182] G. Alestas, L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **99**, 064026 (2019).
- [183] D. Tong, K. Wong, *J. High Energ. Phys.* **2014**, 90 (2014).
- [184] A. Hook, S. Kachru, G. Torroba, *J. High Energ. Phys.* **2013**, 4 (2013).
- [185] S.S. Chern, Pseudo-Riemannian geometry and the Gauss-Bonnet formula, *Ann. Acad. Brasil. Ci.* **35**, 17 (1963).
- [186] J.R Morris, *Phys. Rev. D* **104**, 016013 (2021).

- [187] W. T. Reid, *Riccati Differential Equations*, Academic Press (1972).
- [188] G. D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*, Harvard University Press (1923).
- [189] A. Jaffe, C. Taubes, *Vortices and Monopoles: The Structure of Static Gauge Theories*, Birkhäuser (1980).
- [190] A. Cockburn, S. Krusch, A. A. Muhamed, *J. Math. Phys.* **58**, 063509 (2017).
- [191] J. Ashcroft, S. Krush *Phys. Rev. D* **101**, 025004 (2020).
- [192] N. G. Parker, B. Jackson, A. M. Martin, C. S. Adams, arXiv:0704.0146 (2007).
- [193] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, W. Ketterle, *Science* **292**, 476 (2001).
- [194] E. J. Yarmchuk, M. J. V. Gordon, R. E. Packard, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 214 (1979).
- [195] B. C. Hall, *Lie groups, Lie algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Springer (2015).
- [196] A. Marsh, arXiv:hep-th/160703089 (2019).
- [197] M. Nakahara, *Geometry, topology and Physics*, Institute of Physics Publishing (2003).
- [198] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press (1985).
- [199] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Pergamon Press (1970).
- [200] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957).
- [201] C. C. Tsuei, J. R. Kirtley, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 969 (2000).
- [202] N. W. Ashcroft, N.D. Mermin, *Solid state physics*, Harcourt Inc. (1976).
- [203] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons (1999).
- [204] R. Bott, L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology* (Springer, 2011).
- [205] J. Govaerts, G. Stenuit, D. Bertrand, O. van der Aa, *Phys. Lett.* **A267**, 56 (2000).
- [206] J. Govaerts, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 8955 (2001).
- [207] S. Gustafson, I. M. Sigal, T. Tzanetasl, *J Math Phys.* **51**, 015217 (2010).
- [208] E. J. Weinberg, *Phys. Rev. D* **19**, 3008 (1979).
- [209] E. J. Weinberg, *Classical Solutions in Quantum Field Theory : Solitons and Instantons in High Energy Physics*, Cambridge University Press (2012).
- [210] L. Jacobs, C. Rebbi, *Phys. Rev. B* **19**, 4486 (1979).
- [211] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **249**, 557 (1985).
- [212] A. J. Long, J. M. Hyde, T. Vachaspati, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **09**, 030 (2014).
- [213] A. J. Long, T. Vachaspati, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **12**, 040 (2014).

- [214] N. Arkani-Hamed, D. P. Finkbeiner, T. R. Slatyer, N. Weiner, *Phys. Rev. D* **79**, 015014 (2009).
- [215] S. Crew, N. Dorey, D. Zhang, *J. High Energy Phys.* **2003**, 037 (2003).
- [216] K. Otah, N. Sakai, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2021**, 033 (2021).
- [217] A. J. Niemi, *Theor. Math. Phys.* **181**, 1235 (2014).
- [218] A. M. Mukhamedov, *Chaos Solitons Fractals* **29**, 253 (2006).
- [219] S. B. Bradlow, *Commun. Math. Phys.* **135**, 1 (1990).
- [220] N. M. Romão, J. M. Speight, *Commun. Math. Phys.* **379**, 723 (2020).
- [221] M. H. Stone, *Math. Mag.* **21**, 167 (1948).
- [222] C. Adam, K. Oles, T. Romanczukiewicz, A. Wereszczynski., *Phys. Rev. Lett.* **122**, 241601 (2019).
- [223] A. N. Atmaja, *Phys. Lett. B* **768**, 351 (2017).
- [224] E. J. Weinberg, *Monopoles and Grand Unification*, em James L. Stone (Eds.), *NATO ASI Series, vol. 111: Monopole '83*, Plenum Press (1984).
- [225] M.A. Lohe, *Phys. Lett. B* **70**, 355 (1977).
- [226] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol.2: Modern Applications*, Cambridge University Press (1996).
- [227] P. Goddard, D. I. Olive, *Rep. Prog. Phys.* **41**, 1357 (1978).
- [228] M. Holmberg, *Calculating the Mass of Magnetic Monopoles in Non-Abelian Gauge Theories*, Tese de Bacharelado, Uppsala University (2016).
- [229] N. S. Manton, *Nucl. Phys. B* **126**, 525 (1977).
- [230] B. Julia, A. Zee, *Phys. Rev. D* **11**, 2227 (1975).
- [231] E. J. Weinberg, *Phys. Rev. D* **20**, 936 (1979).
- [232] J. Schwinger, *Science* **165**, 757 (1969).
- [233] S. Coleman, S. Parke, A. Neveu, C.M. Sommerfield, *Phys. Rev. D* **15**, 544 (1977).
- [234] D. Bazeia, M. A. Marques, R. Menezes, *Phys. Rev. D* **97**, 105024 (2018).
- [235] D. Bazeia, M. A. Marques, Gonzalo J. Olmo, *Phys. Rev. D* **98**, 025017 (2018).
- [236] D. Bazeia, M. A. Marques, R. Menezes, *Phys. Rev. D* **98**, 065003 (2018).
- [237] M.d.L.Z.P. Deglmann, M.A.C. Kneipp, *J. High Energ. Phys.* **2019**, 13 (2019).
- [238] G. Dotti, *Universe* **8**, 38 (2022).

- [239] D. Christodoulou, S. Klainerman, *The global nonlinear stability of the Minkowski space*, Princeton University Press, (1993).
- [240] H. Friedrich, *J. Geom. Phys.* **3**, 101 (1986).
- [241] H. Friedrich, *Comm. Math. Phys.* **107**, 587 (1986).
- [242] M. Dafermos, G. Holzegel, I. Rodnianski, M. Taylor, arXiv:2104.08222 (2021).
- [243] S. Klainerman, J. Szeftel, *Ann. PDE* **8**, 17 (2022) .
- [244] S. Klainerman, J. Szeftel, *Ann. PDE* **8**, 18 (2022).
- [245] E. Giorgi, S. Klainerman, J. Szeftel, arXiv:1906.00860 (2022).
- [246] D. Shen, arXiv:2205.12336 (2022).
- [247] S. Klainerman, J. Szeftel, arXiv:2104.11857 (2021).
- [248] S. Ma, *Comm. Math. Phys.* **377**, 2489 (2020).
- [249] B. Whiting, *J. Math. Phys.* **30**, 1301 (1989).
- [250] T. Regge. I.A. Wheeler, *Phys. Rev.* **108**,1063 (1957).
- [251] C. V. Vishveshwara, *Phys. Rev. D* **10**, 2870 (1970).
- [252] R. M. Wald, *J. Math. Phys.* **20**, 1056 (1979);
- [253] R. H. Boyer, R. W. Lindquist, *J. Math. Phys.* **8**, 265 (1967).
- [254] S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1114 (1972).
- [255] E. T. Newman, R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3**, 566 (1962).
- [256] R. Penrose, R. M. Floyd, *Nat. Phys. Sci.* **229**, 177 (1971).
- [257] C. W. Misner, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 994 (1972).
- [258] R. Brito, V. Cardoso, P. Pani, arXiv:1501.06570 (2021).
- [259] W. H. Press, S. A. Teukolsky, *Nature* **238**, 211 (1972).
- [260] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (1985).
- [261] F. W. J. Olver, R. Wong, *Asymptotic Approximations*, em F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark (Eds.), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press (2010).
- [262] H. Miyazawa, *Prog. Theor. Phys.* **36**, 1266 (1966).
- [263] J.-L. Gervais, B. Sakita, *Nucl. Phys. B* **34**, 632 (1971).
- [264] D. V. Volkov, V.P. Akulov, *Phys. Lett. B* **46**, 109 (1973).
- [265] P. Ramond, *Phys. Rev. D.* **3**, 2415 (1971).

- [266] J. Wess, B. Zumino, Nucl. Phys. B **70**, 39 (1974).
- [267] H. Murayama, arXiv:hep-ph/0002232 (2000).
- [268] S. Dimopoulos, H. Georgi, Nucl. Phys. B **193**, 150 (1981).
- [269] S. Dimopoulos, S. Raby, Frank Wilczek Phys. Rev. D **24**, 1681 (1981).
- [270] M. Tanabashi et al., Phys. Rev. D **98**, 030001 (2018).
- [271] J. Polchinski, *String Theory, Vol. I*, Cambridge University Press (1998).
- [272] K. R. Dienes, Nucl.Phys. B **429**, 533 (1994).
- [273] ATLAS Collaboration, J. High Energ. Phys. **2015**, 134 (2015).
- [274] G. W. Bennett, et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 161802 (2004).
- [275] J. M. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999).
- [276] I. R. Klebanov, J. M. Maldacena, Phys. Today **62**, 28(2009).
- [277] V. E. Hubeny, Class. Quantum Grav. **32**, 124010 (2015).
- [278] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. III (Cambridge Univ. Press, 2011).
- [279] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope, Phys. Rev. D **98**, 106015 (2018).
- [280] M. Cvetič, C. N. Pope, A. Saha, J. High Energy Phys. **2021**, 188 (2021).
- [281] M. Cvetič, G. W. Gibbons, C. N. Pope, B. F. Whiting, Phys. Rev. Lett. **124**, 231102 (2020).
- [282] W. Taylor, arXiv:1104.2051 (2011).
- [283] J. Polchinski, arXiv:hep-th/9611050 (1997).
- [284] A. Strominger, Nucl. Phys. B **451**, 96 (1995).
- [285] J.M. Maldacena, A. Strominger, Phys. Rev. D **55**, 861 (1997).
- [286] A. Strominger, C. Vafa, Phys. Lett. B **379** (1996).
- [287] G. Horowitz, A. Strominger, Phys. Rev. Lett. **77**, 2368 (1996).
- [288] S. Bellucci, S. Ferrara, A. Marrani, A. Yeranyan, arXiv:0807.3503 (2008).
- [289] M. Cvetič, D. Youm, Nucl. Phys. B **472**, 249 (1996).
- [290] M. Cvetič, G. W. Gibbons, C. N. Pope, J. Cosmol. Astropart. Phys. **08**, 016 (2017).
- [291] M. Cvetič, D. Youm, Nucl. Phys. B **476**, 118 (1996).
- [292] M. Cvetič, D. Youm, Phys. Rev. D **54**, 2612 (1996).
- [293] Z.-W. Chong, M. Cvetič, H. Lu, C. N. Pope, Nucl. Phys. B **717**, 246 (2005).

- [294] E. G. Gimon, F. Larsen, J. Simón, JHEP **0801**, 040 (2008).
- [295] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, Phys. Rev. **116**, 1322 (1959).
- [296] R.C. Myers, M. Perry, Ann. Phys. **172**, 304 (1986).
- [297] M. Cvetič, G. W. Gibbons, C. N. Pope, B. F. Whiting, Phys. Rev. Lett. **124**, 231102 (2020).
- [298] M. Cvetič, G. W. Gibbons, C. N. Pope, B. F. Whiting, Phys. Rev. D **105**, 084035 (2022).
- [299] V. P. Frolov, P. Krtouš, P. Kubizňák, Class. Quant. Grav. **25**, 154005 (2008).
- [300] V. P. Frolov, P. Krtouš, P. Kubizňák, Liv. Rev. Rel. **20**, 6 (2017).
- [301] K. Yano, Ann. Math. **55**, 328 (1952).
- [302] D. Kubizňák, H. K. Kunduri, Y. Yasui, Phys. Lett. B **678**, 240 (2009).
- [303] T. Houri, D. Kubizňák, C. M. Warnick, Y. Yasui, JHEP **1007**, 055, (2010).
- [304] S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A **349**, 571 (1976).
- [305] M. Cvetič, C. N. Pope, B. F. Whiting, and H. Zhang, Phys. Rev. D **106**, 104026 (2022).
- [306] K. Duztaş, Phys. Rev D **94**, 044025 (2016).
- [307] F. W. J. Olver, R. Wong, *Asymptotic Approximations*, em F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark (Eds.), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press (2010).
- [308] M. Cvetič, C. N. Pope, B. F. Whiting, and H. Zhang, Phys. Rev. D **106**, 104026 (2022).
- [309] K. Duztaş, Phys. Rev D **94**, 044025 (2016).
- [310] K. Heun, Math. Ann. **33**, 161 (1889).
- [311] B. D. Sleeman, V. B. Kuznetsov, *Heun Functions*, em F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark (Eds.), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press (2010).
- [312] M. Hortaçsu, Adv. High Energy Phys. **2018**, 8621573 (2018).
- [313] E. S. Cheb-Terrab, Phys. A: Math. Gen. **37**, 9923 (2004).
- [314] W. H. Press, S. A. Teukolsky, Astrophys. J. **185**, 649 (1973).
- [315] A. A. Starobinsky, S.M. Churilov, J. Exp. Theor. Phys. **38**, 3 (1974).
- [316] Y. Shlapentokh-Rothman, Ann. Henri Poincare **16**, 289 (2015).
- [317] R. T. da Costa, Commun. Math. Phys. **378**, 705 (2020).
- [318] Y. Shlapentokh-Rothman, R. T. da Costa, arXiv:2007.07211 (2020).
- [319] J. B. Hartle, D. C. Wilkins, Commun. Math. Phys. **38**, 47 (1974).

- [320] S. Teukolsky, *Astrophys. J.* **185**, 635 (1973).
- [321] S. Ambrosetti, A. Ambrosetti, *A textbook on Ordinary Differential Equations*, Springer (2014).
- [322] L. Andersson, S. Ma, C. Paganini, B. F. Whiting, *J. Math. Phys.* **58**, 072501 (2017).
- [323] W. Rarita, *J. Schwinger Phys. Rev.* **60**, 61 (1941)
- [324] E. Berti, K. D. Kokkotas, *Phys. Rev. D* **71**, (2005) 124008 (2005).
- [325] N. Heidari, H. Hassanabadi, A. A. Araújo Filho, J. Kuriuz, arXiv:2308.03284 (2023).
- [326] P. Charalambous, S. Dubovsky, M. M. Ivanov, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 101101 (2021).
- [327] B. Carneiro, F. Novaes, *Phys. Rev. D* **93**, 024045 (2016).
- [328] M. Del Zotto, G. Lockhart, arXiv:2311.08462 (2023).
- [329] F. Bruckmann, S. Lochner, *Phys. Rev. D* **98**, 065005 (2018).
- [330] S-w. Li, Y-p. Zhang, H-q. Li, arXiv:2401.04421 (2024).
- [331] H. Hu et al., arXiv:2401.05719 (2024).
- [332] Q. Zhang, *Phys. Rev. Research* **3**, 023109 (2021).
- [333] A. O. Leonov, C. Pappas, I. Kézmárki, *Phys. Rev. Research* **2**, 043386 (2020)
- [334] A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado, A. L. Maroto, *Phys. Rev. D* **80**, 124011 (2009).
- [335] Y. S. Myung, T. Moon, E. J. Son, *Phys. Rev. D* **83**, 124009 (2011).
- [336] A. Sheykhi *Phys. Rev. D* **86**, 024013 (2012).
- [337] T. Karakasis, E. Papantonopoulos, Z-Y. Tang, B. Wang, *Phys. Rev. D* **103**, 064063 (2021).
- [338] S. Barton, B. Hartmann, B. Kleihaus, J. Kunz, *Phys. Lett. B*, **817**, 136336 (2021).
- [339] D. D. Doneva, K. V. Staykov, S. S. Yazadjiev, *Phys. Rev. D* **99**, 104045 (2019).
- [340] E. Abdalla, R. A. Konoplya C. Molina, *Phys. Rev. D* **72**, 084006 (2005).
- [341] D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 131103 (2018).
- [342] G. Antoniou, A. Bakopoulos, P. Kanti, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 131102 (2018).
- [343] M. A. Scheel, S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. D* **51**, 4208 (1995).
- [344] M. A. Scheel, S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. D* **51**, 4236 (1995).
- [345] T. Tamaki, K-i. Maeda, T. Torii, *Phys. Rev. D* **57**, 4870 (1998).
- [346] G. Kang, *Phys. Rev. D* **54**, 7483 (1996).
- [347] S. Bhattacharya, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 181104 (2015).

- [348] J. L. Rosa, J. P.S. Lemos, F. S. N. Lobo, *Phys. Rev. D* **101**, 044055 (2020).
- [349] G. J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, *Eur. Phys. J. C* **72**, 2098 (2012).
- [350] D. Psaltis, D. Perrodin, K. R. Dienes, I. Mocioiu, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 091110 (2008).
- [351] D. Bazeia, L. Losano, Gonzalo J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, *Phys. Rev. D* **90**, 044011 (2014).
- [352] C-Y. Chen, Y-H. Kung, P. Chen, *Phys. Rev. D* **102**, 124033 (2020).
- [353] G. Bonelli , C. Iossa ,D. P. Lichtig, A. Tanzini, *Phys. Rev. D* **105**, 044047 (2022).
- [354] B. C. da Cunha, J. P. Cavalcante, *Phys. Rev. D* **102**, 105013 (2020).
- [355] B. C. da Cunha, F. Novaes, *J. High Energy Phys.* **2015**, 144 (2015).
- [356] A. Castro, J. M. Lapan, A. Maloney, M. J. Rodriguez, *Class. Quantum Grav.* **30**, 165005 (2013).
- [357] A. Castro, J. M. Lapan, A. Maloney, M. J. Rodriguez, *Phys. Rev. D* **88**, 044003 (2013).