Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

O Teorema do Ponto Fixo de Banach e a sua relação com alguns resultados de Análise Funcional

Eduardo da Silva Nunes

João Pessoa
2024

Eduardo da Silva Nunes

O Teorema do Ponto Fixo de Banach e a sua relação com alguns resultados de Análise Funcional

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

João Pessoa
2024

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N972t Nunes, Eduardo da Silva.
O Teorema do Ponto Fixo de Banach e a sua relação com alguns resultados de Análise Funcional / Eduardo da Silva Nunes. - João Pessoa, 2024.
52 p. : il.

Orientação: Uberlandio Batista Severo.
TCC (Curso de Bacharelado em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Ponto fixo. 2. Espaços de Banach. 3. Análise funcional. I. Severo, Uberlandio Batista. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

Eduardo da Silva Nunes

O Teorema do Ponto Fixo de Banach e a sua relação com alguns resultados de Análise Funcional

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática. Orientador: Uberlandio Batista Severo. Defendido em: 29/10/2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
UBERLANDIO BATISTA SEVERO
Data: 19/11/2024 17:06:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo
Orientador - UFPB - Campus I

Documento assinado digitalmente
BRUNO HENRIQUE CARVALHO RIBEIRO
Data: 19/11/2024 15:56:59-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro
Avaliador - UFPB - Campus I

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros
Avaliador - UFPB - Campus I

Documento assinado digitalmente
EVERALDO SOUTO DE MEDEIROS
Data: 19/11/2024 17:15:48-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Aos meus pais que sempre motivaram os meus sonhos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me guiado e me dado forças nos momentos difíceis que passei e tudo que vivi ao longo do curso. Por ter me dado forças para continuar e conseguir terminar o curso.

A Carmem e Nelson, meus pais, por sempre estarem comigo me dando forças, me apoiando ao longo destes anos e sempre do meu lado me ajudaram com todas as necessidades que precisei ao longo da vida até este momento.

Ao meu orientador Professor Dr. Uberlandio Batista Severo por ter me guiado, aos trancos e barrancos, nos caminhos da matemática, ter me apresentado a beleza intrínseca por trás da matemática e por ter me dado a oportunidade de estudar sob seus passos.

Aos professores da graduação que me marcaram bastante na minha vida acadêmica, compartilhando aprendizados e parte da sua vida que me serviram de exemplo

Eu agradeço especialmente a um amigo que fiz entre os professores do Departamento de Matemática da UFPB, o Prof. Dr. Napoleon Tuesta, vivemos vários momentos de risadas, boas conversas sobre matemática e com certeza muitas dúvidas. Nos três últimos períodos do curso, Napoleon sempre estava preparado para responder minhas perguntas e mostrar uma visão de mundo que talvez eu nem saberia se não tivesse ao lado dele nesse tempo.

Por último, aos irmãos que fiz ao longo dos últimos períodos do curso. Desde a cadeira de Matemática Aplicada, viemos caminhando juntos compartilhando bons momentos e o conhecimento que temos, sempre nos ajudando e nos apoiando um ao outro. Eu tenho muito a agradecer a João Coelho, Francisco Inácio, Maria Eduarda e Jafé Silvestre. Destes, o professor Napoleon também está presente, como um membro da família. Posso destacar especialmente João, por ser meu companheiro em todos os momentos e por fazer parte da minha vida. Devo muito a vocês todos.

Tu és pó e ao pó tornarás.

Resumo

Neste trabalho, vamos abordar o Teorema do Ponto Fixo de Banach e aplicá-lo para provar alguns resultados clássicos em Análise Funcional, como o Teorema de Stampacchia e, como consequência, o Teorema de Lax-Milgram. Além disso, vamos estudar um pouco sobre os operadores compactos entre espaços de Banach e mostrar como usamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para obter algumas propriedades do espectro de tais operadores. Aproveitamos o contexto e apresentamos também os famosos resultados sobre operadores compactos: a Alternativa de Fredholm e o Teorema Espectral em espaços de Hilbert

Palavras-chave: Ponto Fixo. Espaços de Banach. Análise Funcional.

Abstract

In this work, we will address the Banach Fixed Point Theorem and apply it to prove some classical results in Functional Analysis, such as Stampacchia's Theorem and, as a consequence, the Lax-Milgram Theorem. Additionally, we will study compact operators between Banach spaces and show how we use the Banach Fixed Point Theorem to obtain some properties of the spectrum of such operators. In this context, we also present the famous results on compact operators: Fredholm's Alternative and the Spectral Theorem in Hilbert spaces.

Keywords: Fixed point. Banach Spaces. Functional Analysis.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, apresentamos de forma abrangente o Teorema do Ponto Fixo de Banach, uma ferramenta fundamental na Análise Funcional. Este teorema não apenas fornece condições sob as quais funções em espaços métricos possuem pontos fixos, mas também estabelece um poderoso método para a solução de equações. Para facilitar a compreensão do teorema e sua aplicabilidade, incluímos os pré-requisitos teóricos essenciais que permitem uma adequada contextualização e entendimento dos conceitos envolvidos.

A estrutura deste trabalho é organizada em três capítulos. No primeiro capítulo, realizamos uma revisão dos conceitos fundamentais que servirão como base para os tópicos abordados nas seções subsequentes. Essa revisão abrange aspectos como espaços métricos, funções contínuas e operadores adjuntos, todos essenciais para a compreensão do Teorema do Ponto Fixo e das aplicações em Análise Funcional.

No segundo capítulo, dedicamos atenção especial ao Teorema do Ponto Fixo de Banach, onde apresentamos seu enunciado formalmente, acompanhada de uma análise de sua demonstração.

Por fim, no último capítulo, desenvolvemos diversos elementos da Análise Funcional e discutimos as aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach em uma variedade de resultados teóricos. Concluímos este trabalho apresentando o Teorema Espectral em dimensão infinita.

1 Resultados preliminares

Neste capítulo, iremos introduzir alguns conceitos que precisaremos para compreender o Teorema do Ponto Fixo de Banach, juntamente com algumas propriedades de espaços normados.

1.1 Espaços Métricos e Sequências de Cauchy

Intuitivamente, conseguimos pensar na noção de um espaço métrico, fazendo alusão à distância usual entre dois pontos em um espaço euclidiano, informação que provém do Teorema de Pitágoras. Apesar de simples, podemos extrair propriedades importantes com respeito a distância entre dois pontos. Primeiramente, vamos à formalidade e, logo após faremos uma breve explicação do que está acontecendo

Definição 1.1. *(Espaço Métrico). Um espaço métrico é um par* (M, d) *em que* M *é um conjunto não vazio e* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *é uma função chamada distância (ou métrica) tal que:*

d1. Para todo $x \in M$ *temos que* $d(x, x) = 0$*;*

d2. Para todo $x, y \in M$ *com* $x \neq y$ *temos* $d(x, y) > 0$*;*

d3. Para todo $x, y \in M$ *temos* $d(x, y) = d(y, x)$*;*

d4. Para todo $x, y, z \in M$ *temos* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$*.*

Vejamos que são propriedades completamente naturais de se considerar: a distância entre dois pontos deve ser algum número positivo, neste caso, um número real positivo, exceto no caso degenerado, pois a distância de um ponto a ele próprio deve ser nula. A distância entre dois pontos independe de direção, isto é, tanto faz medir a distância de x a y quanto a de y a x. E, por último, com o intuito de preservar a distância entre dois pontos, ela deve ser menor ou igual a distância entre dois pontos passando por um terceiro.

Agora, seja V um espaço vetorial sobre o corpos dos reais $\mathbb{R}$. Dizemos que a aplicação $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma norma se

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;

2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$;

3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in V$. (Desigualdade Triangular)

A noção de métrica é abstraída pela noção de norma, onde se tivermos um espaço vetorial com uma norma $(V, \|\cdot\|)$, sempre podemos extrair dessa norma uma métrica $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, sendo essa métrica dada por $d(x, y) = \|x - y\|$.

Dito isto, dado um espaço vetorial E queremos saber quando que este espaço é um espaço métrico. A noção de métrica pode ser atribuída ou "equipada"a um espaço vetorial, mas o mesmo pode ter várias métricas.

Proposição 1.1. *Todo espaço vetorial com uma norma $(E, \|\cdot\|)$ se torna um espaço métrico quando equipado com a métrica*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \, \forall x, y \in E.$$

É fácil verificar que a aplicação d satisfaz os axiomas de ser uma métrica. Essa métrica que acabamos de definir vai ser chamada de métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$.

Exemplo 1.1. *No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$, os pares $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ onde*

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad e \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

são espaços vetoriais normados. Para mais detalhes consulte [4] páginas 2 e 3

Tendo a noção generalizada de distância em um espaço M em mãos, podemos obter a noção de limite, vista nos cursos de análise. Dada uma sequência (a_n) em M e um ponto a de M dizemos que a sequência converge para o ponto a ou que a é limite da sequência (a_n). Formalmente, temos

Definição 1.2. *Uma sequência (a_n) em um espaço métrico (M, d) dizemos que (a_n) converge em M se existir um elemento $x \in M$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(a_n, x) = 0$. Isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > N$, tem-se que $d(a_n, x) < \varepsilon$.*

Além disso, a medida que a quantidade de índices da sequência vai ficando maior, a distância entre os termos da sequência fica menor, ou seja, converge. Porém, claro que nem toda sequência satisfaz essa propriedade. As que satisfazem, tal propriedade são chamadas de sequências de Cauchy. Toda sequência convergente é de Cauchy, tal fato, não é difícil de ser mostrado, utilizando apenas a desigualdade triangular. Outra propriedade relevante sobre sequências de Cauchy se refere ao controle da sequência, ou seja, toda sequência de Cauchy é limitada e toda sequência de Cauchy que possui uma subsequência que converge pare um ponto x, então a sequência converge para este ponto. No entanto, vale ressaltar que sequências de Cauchy não são sempre convergentes em todos os espaços. Se considerarmos o conjunto aberto $M = (0, 1)$ com a métrica $d(x, y) = |x - y|$, notemos que a sequência dada por $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, mas não converge para um ponto pertencente a M.

Por último, vamos ver uma propriedade sobre a distância entre duas sequências, sendo apenas uma manipulação da desigualdade triangular. Vejamos que se duas sequências convergem para dois pontos distintos, então a distância entre essas duas sequências converge para a distância desses dois pontos.

Proposição 1.2. *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$, então $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y)$*

Demonstração. Pela desigualdade triangular, temos

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n),$$

isso implica que

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n). \tag{1}$$

Por outro lado,

$$d(x, y) \leq d(x_n, y_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y),$$

o que implica em

$$-(d(x, x_n) - d(y_n, y)) \leq d(x_n, y_n) + d(y, y_n). \tag{2}$$

Por (1) e (2), segue que

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y, y_n).$$

Tomando $n \longrightarrow \infty$ e usando que $d(x_n, x) \longrightarrow 0$ e $d(y_n, y) \longrightarrow 0$, concluímos que $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y)$. □

Um dos tópicos mais importantes para falar sobre espaços métricos, é a noção de completude de um espaço métrico.

Definição 1.3. *Um espaço métrico (M, d) diz-se completo, quando toda sequência de Cauchy em M, é convergente em M. Um espaço vetorial normado completo é chamado de Espaço de Banach.*

Exemplo 1.2. *O espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *com elementos denotados por* $x = (x_1, \ldots, x_n$ *é um espaço de Banach ao ser munido com a norma* $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, *(definida no Exemplo 1.1)*

1.2 Aplicações Lineares

Nos cursos de Álgebra Linear, estudamos os conceitos de aplicações (ou transformações) lineares entre espaços vetoriais. Agora, estudaremos aplicações lineares entre espaços vetoriais normados, e um critério para a continuidade destas aplicações.

Definição 1.4. *Sejam* E *e* F *dois espaços vetoriais normados. Diz-se que uma transformação linear* $T : E \longrightarrow F$ *é limitada se existe* $M > 0$ *tal que*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in E.$$

Denotaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ *o espaço de todas as transformações lineares limitadas de* E *em* F

Note que esta definição é diferente do conceito usual de uma aplicação limitada: "existe um $C > 0$, tal que $\|Tx\|_F \leq C$ para todo x em E". É fácil ver que a única aplicação que satisfaz essa condição é a aplicação nula, e a conta é feita apenas utilizando uma desigualdade para o valor que limita a função, quocientado pelo valor absoluto de uma constante qualquer no corpo. Quando a constante vai para o infinito, obtemos o que desejamos. O critério para uma transformação ser contínua, envolve a noção de ser limitada. Vejamos

Proposição 1.3. *Sejam* E, F *dois espaços vetoriais normados e* $T : E \longrightarrow F$ *uma aplicação linear. As seguintes afirmações são equivalentes*

(i) T *é contínua;*

(ii) T *é contínua na origem;*

(iii) T *é limitada.*

Demonstração. A demonstração de que $(i) \Rightarrow (ii)$ é óbvia. Vamos mostrar então que $(ii) \Rightarrow (iii)$. Tomando o valor $\varepsilon = 1$ na definição de continuidade na origem, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\| \leq \delta$ então $\|Tx\| \leq 1$. Portanto, dado $y \in E$ um vetor não nulo qualquer, teremos

$$\left\|T(\frac{\delta y}{\|y\|})\right\| \leq 1.$$

Como a aplicação é linear, segue que

$$\|Ty\| \leq \frac{1}{\delta}\|y\|, \forall y \in E.$$

Para mostrar que $(iii) \Rightarrow (i)$, seja $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$, então

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq M\|x-y\|,$$

consequentemente, T é uma aplicação lipschitziana com constante de Lipschitz M, em particular é contínua. □

A seguir, veremos o comportamento da norma de uma transformação linear aplicada em um ponto.

Definição 1.5. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Definimos a norma de uma aplicação linear limitada $T : E \longrightarrow F$ por*

$$\|T\| = \inf\{M > 0; \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in E\}.$$

Não é difícil ver que, de fato, isto define uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$.

Apesar de definirmos a norma de uma transformação linear como o ínfimo das constantes que satisfazem a propriedade acima, também podemos caracteriza-la como o supremo do quociente entre a norma da transformação aplicada em um elemento e a norma deste elemento, isto é,

$$\|T\| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Dessa maneira, não é difícil mostrar que $\|T\|$ também define uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$. Em particular, podemos tomar a norma de $\|x\| = 1$, obtemos apenas o supremo de $\|Tx\|$ para $x \in E$. Vejamos a demonstração da desigualdade triangular para a norma definida acima. Sejam E e F espaços vetoriais normados e S e T em $\mathcal{L}(E, F)$. Então, para todo $x \in E$

$$\begin{aligned} \|(T+S)x\| &= \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \\ &\leq \|T\|\|x\| + \|S\|x\| \\ &= (\|T\| + \|S\|)\|x\|, \end{aligned}$$

o que mostra que $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$.

Definiremos a seguir um funcional linear em um espaço vetorial E sobre o corpo dos reais

Definição 1.6. *Um funcional linear sobre um espaço vetorial real E é uma aplicação linear de E em $\mathbb{R}$*

Um funcional linear f, com domínio em um espaço normado será contínuo se, e somente se f for limitado. Vejamos agora alguns exemplos de funcionais.

Exemplo 1.3. *Considere o espaço da funções contínuas do intervalo $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ denotado por $\mathcal{C}([a, b])$. Se fixarmos um elemento $t_0 \in [a, b]$ e definirmos $f_1 : \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$f_1(x) = x(t_0),\ x \in \mathcal{C}([a, b]),$$

temos que f_1 é linear, limitado e sua norma é $\|f_1\|_\infty = 1$, em que $\|x\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$. De fato,

$$|f_1(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\|_\infty,\ \forall x \in \mathcal{C}([a, b]),$$

o que implica que $\|f_1\|_\infty \leq 1$ satisfazendo a definição da norma de uma aplicação linear. Por outro lado, para $x_0 \equiv 1$, temos que $\|x_0\| = 1$. Assim teremos

$$\|f_1\|_\infty \geq |f_1(x_0)| = 1.$$

Para finalizar esta seção, definiremos o espaço dos funcionais lineares limitados sobre espaço vetorial E

Definição 1.7. *Se E é um espaço vetorial normado, denotamos o espaço vetorial dos funcionais lineares limitados por $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Esse espaço é chamado espaço dual Topológico de E, ou simplesmente espaço dual de E. O espaço vetorial dos funcionais lineares não necessariamente limitados é denotado por $L(E, \mathbb{K})$, e chamado espaço dual algébrico de E.*

1.3 O Lema de Riesz

A seguir mostraremos um lema técnico, que utilizaremos mais a frente para mostrar que num espaço vetorial normado E em que a bola unitária $B = \{x \in E\ \|x\| \leq 1\}$ é um conjunto compacto (isto é, toda sequência de B possui uma subsequência convergente), então E possui dimensão finita. Este fato é consequência de um resultado conhecido como Lema de Riesz

Lema 1.1. *(Riesz). Seja $(E\|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $F \subset E$ um subespaço fechado próprio de E. Então, para todo $0 < \varepsilon < 1$, existe $y \in E$ tal que $\|y\| = 1$ e $dist(y, F) \geq \varepsilon$.*

Demonstração. Como F é subespaço próprio de E, existe algum $z \in E \setminus F$. Seja $d = dist(z, F)$. Como F é fechado, temos que $d \neq 0$ e pela definição de distância, existe $z_0 \in F$ tal que $d \leq \|z - z_0\| < \frac{d}{\varepsilon}$, pois $d = \inf\limits_{f \in F} \|z - F\|$ e $\frac{d}{\varepsilon} > d$. Tome $y = \frac{z - z_0}{\|z - z_0\|}$ de modo que $\|y\| = 1$. Além disso, para todo $x \in F$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|y - x\| &= \left\| \frac{z - z_0}{\|z - z_0\|} - x \right\| = \left\| \frac{z - z_0 - x\|z - z_0\|}{\|z - z_0\|} \right\| = \frac{\|z - x_1\|}{\|z - z_0\|} \\
&\geq \frac{d}{\|z - z_0\|} > \frac{\varepsilon}{d} \cdot d = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

em que $x_1 = z_0 + x\|z - z_0\| \in F$. Portanto, existe $y \in F$ tal que $\|y\| =$ e $dist(y, F) \geq \varepsilon$. □

1.4 Operadoes Adjuntos

Dando continuidade aos elementos necessários para desenvolver nosso estudo, veremos uma algumas aplicações lineares específicas chamadas de operadores lineares adjuntos.

Definição 1.8. *Sejam E, F espaços vetoriais normados e $A : E \longrightarrow F$ um operador linear limitado. O operador adjunto de A, denotado por $A^* : F^* \longrightarrow E^*$ é o operador linear limitado definido por*

$$
\begin{aligned}
A^*f :\ & E \longrightarrow \mathbb{R} \\
& x \longmapsto A^*f(x) = f(Ax),\ \forall x \in E \ e \ f \in F^*
\end{aligned}
$$

Primeiramente, vamos mostrar que o operador adjunto definido dessa forma está bem definido. Além disso, mostraremos uma propriedade sobre a norma desses operadores.

Proposição 1.4. *O operador adjunto está bem definido. Além disso, vale $\|A^*\| = \|A\|$*

Demonstração. Se $A : E \longrightarrow F$ um operador linear limitado e $g \in F^*$, então o funcional $f = g \circ A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear limitado, pois

$$|f(x)| = |g(Ax)| \leq \|f\|\|Ax\| \leq \|g\|\|A\|\|x\|. \tag{3}$$

Logo, podemos definir o adjunto $A^* : F^* \longrightarrow E^*$ por

$$A^* g = f.$$

A desigualdade (3) implica que $\|A^* g\| = \|f\| \leq \|A\| \|g\|$. Portanto

$$\|A^*\| \leq \|A\|.$$

Por outro lado,

$$\|A^*\| = \sup_{g \in F^* \setminus \{0\}} \frac{\|A^* g\|}{\|g\|}.$$

Logo, se para algum $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| = 1$ e $Ax_0 \neq 0$, então existe $g \in F^*$ tal que

$$\|g\| = 1 \textbf{ e } g(Ax_0) = \|Ax_0\|.$$

Logo:

$$\frac{\|A^* g\|}{\|g\|} = \|A^* g\| \geq \frac{A^* g(x_0)}{\|x_0\|} = |A^* g(Ax_0)| = \|g(Ax_0)\| = |\|Ax_0\|| = \|Ax_0\|,$$

e consequentemente,

$$\|A^*\| \geq \|Ax_0\|,$$

para todo $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| = 1$. Tomando o supremo, obtemos

$$\|A^*\| \leq \sup_{\|x_0\|=1} \|Ax_0\| \Rightarrow \|A^*\| \leq \|A\| \Rightarrow \|A^*\| = \|A\|.$$

□

Observação 1.1. *A existência do funcional g, é uma aplicação do Teorema de Hahnn-Banach ao subespaço gerado por x_0 e ao funcional linear $f_0 : F \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f_0(tx_0) = t\|x_0\|$, (veja o apêndice A).*

Mas, afinal, por que consideramos os operados adjuntos de aplicações lineares? A resposta vem de suas aplicações, tanto em matemática pura quanto em matemática aplicada. Alguns problemas podem ser formulados da seguinte forma: dados dois espaços vetoriais normados E, F e um operador linear $A : E \longrightarrow F$, queremos encontrar uma solução para a equação

$$Ax = y.$$

Sendo $y \in F$, suponhamos que exista um $x \in F$ tal que $Ax = y$. Então, para cada

$g \in F^*$, temos

$$g(Ax) = g(y)$$

ao tomarmos o seu adjunto, segue que

$$(A^*g)(x) = g(y).$$

Se $g \in N(A^*)$(onde $N(A^*)$ é o núcleo da aplicação A^*), isto nos dá

$$g(y) = 0.$$

Portanto, uma condição necessária para que $y \in R(A)$ (onde $R(A)$ é a imagem de A) é que a imagem de y seja zero para todo $g \in N(A^*)$. O que nos resta a pensar é: será que essa condição é suficiente? Para alguns operadores, a resposta é positiva. Em dimensão finita, essa condição é verdadeira; mas, para dimensão infinita, serão necessárias algumas hipóteses adicionais para que essa condição seja suficiente. Esse resultado é conhecido como Alternativa de Fredholm[1]

Finalizado os resultados que precisamos saber inicialmente, trataremos de compreender o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

[1]Erik Ivar Fredholm (1866 - 1927), matemático sueco.

2 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Dividiremos este capítulo em duas partes. Na primeira seção será apresentar os requisitos para compreender o teorema principal. Na segunda seção, enunciaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, faremos sua demonstração e concluiremos a com uma aplicação do resultado.

2.1 Pontos Fixos e Contrações

Primeiramente, vamos mostrar uma motivação de forma intuitiva, antes de mostrar a definição de ponto fixo. Desejamos obter a solução para uma equação da forma $f(x) = b$. Vamos supor, por exemplo, que f é uma aplicação contínua definida em um subconjunto fechado do espaço $\mathbb{R}^n$ com valores também em $\mathbb{R}^n$. Agora, podemos introduzir $\varphi(x) := f(x) + x - b$. Neste caso, φ será contínua, e o problema se reduz a encontrar um ponto x tal que $\varphi(x) = x$. A partir disso, vamos considerar uma sequência de pontos $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, $\ldots, x_{n+1} = \varphi(x_n), \ldots$, esses pontos são chamados de aproximações sucessivas ou iteração da solução que procuramos. Essa sequência será chamada de sequência iterada a partir de x_0 e, em geral, o n-ésimo termo será da seguinte forma:

$$x_n = \varphi^n(x_0).$$

Quando essa sequência convergir no domínio da φ, ou seja $a = \lim x_n$ teremos que $a = \lim x_{n+1} = \lim \varphi(x_n) = \varphi(\lim x_n) = \varphi(a)$. Assim, a é uma raiz da equação $\varphi(x) = x$. Logo a equação original é satisfeita com $f(x) = b$.

Definição 2.1. *(Ponto Fixo). Sejam X um conjunto não-vazio e uma aplicação $T : X \longrightarrow X$. Diemos que $x_0 \in X$ é um ponto fixo de T se*

$$T(x_0) = x_0.$$

Exemplo 2.1. *A aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ tem apenas dois pontos fixos, que são $f(0) = 0^2 = 0$ e $f(1) = 1^2 = 1$. Em geral, para determinar os pontos fixos de uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é suficiente encontrar as interseções de f com a bissetriz $y = x$.*

Nem sempre um ponto fixo será único, como vimos no exemplo anterior. Isso é algo que estaremos interessados em analisar posteriormente. Existe um método iterativo para obter pontos fixos. Note que se tomarmos uma função $\varphi(x)$ e um ponto x_0, podemos construir o método da seguinte maneira: primeiramente, tomemos $x_1 = \varphi(x_0)$ e assim, podemos construir uma sequência iterada da forma

$$x_1 = \varphi(x_0) \longrightarrow x_2 = \varphi(x_1) \longrightarrow \ldots x_n = \varphi(x_{n-1}) \longrightarrow x_{n+1} = \varphi(x_n) \longrightarrow \ldots.$$

O interesse é saber se essa sequência converge para algum ponto. Esse método tem aplicações no contexto computacional, e, para analisarmos a convergência a um ponto fixo, existem alguns teoremas que garantem sua existência.

Exemplo 2.2. *Existe um resultado clássico no estudo de topologia, que se chama o Teorema do ponto fixo de Brouwer, que afirma que, em um conjunto convexo e compacto, como por exemplo, a bola* $B = [0,1]$ *unitária e fechada de* $\mathbb{R}^n$*, toda aplicação contínua* $f : B \longrightarrow B$ *possui pelo menos um ponto fixo em* B*. Por ser um resultado clássico, existem diversas demonstrações dele. Aqui apenas faremos apenas a menção de sua existência e deixaremos a curiosidade a cargo do leitor. No entanto, o caso da reta é fácil de ser demonstrado. Queremos, por exemplo, que toda função* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *contínua tenha um ponto fixo. Para isto, consideremos a função* $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $\varphi(x) = f(x) - x$*. Note que, como* $0 \leq f(x) \leq 1$ *para todo* $x \in [0,1]$*, temos que* $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ *e* $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$*. Utilizando o Teorema do Valor Intermediário, podemos concluir que existe* $x \in [0,1]$ *tal que* $\varphi(x) = 0$ *ou seja,* $f(x) = x$*.*

Dando continuidade definiremos agora o que vem a ser uma contração no contexto de espaços métricos.

Definição 2.2. *(Contração). Seja* $X = (X, d)$ *um espaço métrico. A aplicação* $T : X \longrightarrow X$ *é chamado de contração em* X *se existe um número* $0 < c < 1$ *tal que, para todo* $x, y \in X$*, tem-se*

$$d(Tx, Ty) \leq c \cdot d(x, y).$$

Se pensarmos nessa definição de maneira geométrica, isso significa que a distância entre as imagem de quaisquer dois pontos x e y estão mais próximas entre si do que os próprios pontos.

Exemplo 2.3. *Seja* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável no intervalo* I*. Se existir uma constante* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f'(x)| \leq c < 1$ *para todo* $x \in I$*, então* f *é uma contração. De fato, pelo Teorema do Valor Médio, existe* $x_0 \in (x, y)$*, tal que* $|f(x) - f(y)| = |f'(x_0)||x - y|$ *e, por hipótese,* $|f'(x_0)| \leq c$*. Logo,* $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$*, para todos* x, y *em* I

2.2 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

O Teorema do Ponto Fixo de Banach é um teorema que oferece condições suficientes para a existência e unicidade de pontos fixos de certas aplicações, que neste caso, serão as contrações. Além disso, sua prova mostra um procedimento construtivo de obter melhores aproximações do ponto fixo, esse processo é chamado de iteração, e é utilizado em vários os ramos da matemática aplicada, onde as estimativas de erros utilizam o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Teorema 2.1. ***(Teorema do Ponto Fixo de Banach ou Teorema de Contração):*** *Considere um espaço métrico $X = (X, d)$, onde $X \neq \emptyset$. Suponha que X seja completo e que $T : X \longrightarrow X$ seja uma contração em X. Então, T tem exatamente um ponto fixo.*

Demonstração. Para demonstrarmos esse teorema, a ideia é construir uma sequência (x_n) em X e mostrar que ela é de Cauchy. Como X é completo, essa sequência converge em X. Assim, provaremos que o seu limite x é o ponto fixo de T e, por fim, mostraremos a unicidade.

Escolhendo um ponto x_0 qualquer de X, defina a sequência iterada (x_n) por

$$x_1 = T(x_0),\ x_2 = T(x_1) = T^2(x_0),\ \ldots, x_n = T^n(x_0).$$

A sequência de imagens de x_0 pela aplicação T. Vamos mostrar que essa sequência é de Cauchy. Seja $0 < c < 1$ tal que $d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, para todo $x, y \in X$. Temos

$$\begin{aligned}
d(x_1, x_2) &= d(T(x_0)T(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1) \\
d(x_2, x_3) &= d(T(x_1)T(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2) \leq c^2 \cdot d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

Agora, indutivamente, obtemos $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(T(x_n), T(x_{n-1})) \\
&\leq c \cdot d(x_n, x_{n-1}) \\
&= c \cdot d(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) \\
&\leq c^2 \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
\ldots &\leq c^n \cdot d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade triangular, para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
&\leq [c^n + c^{n+1} + \ldots + c^{n+p-1}] \cdot d(x_0, x_1) \\
&= c^n[1 + c + \ldots + c^{p-1}] \cdot d(x_0, x_1) \\
&\leq c^n \frac{1 - c^{p-1}}{1 - c} \cdot d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

Desde que $1 - c^{n+p-1} < 1$, temos

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{c^n}{1 - c} \cdot d(x_0, x_1), \, \forall \, n, p \in \mathbb{N}.$$

Como $c < 1$, então $\lim\limits_{n \to \infty} c^n = 0$, implica que (x_n) é de Cauchy em X uma vez que X é completo, então $x_n \longrightarrow x$ para algum $x \in M$.

Uma vez (x_n) é de Cauchy e T é uma contração, portanto contínua, temos

$$x = \lim_{n \longrightarrow \infty} (x_{n+1}) = \lim_{n \longrightarrow \infty} (Tx_n) = T(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n) = T(x).$$

Assim, x é um ponto fixo de T. Agora mostraremos que x é o único ponto fixo de T. Supondo que $T(x) = x$ e $T(\tilde{x}) = (\tilde{x})$. Pela definição de contração, temos

$$d(x, \tilde{x}) = d(T(x), T(\tilde{x})) \leq c \cdot d(x, \tilde{x}),$$

ou seja, $0 \leq (1 - c) \cdot d(x, \tilde{x}) \leq 0$. Logo, $d(x, \tilde{x}) = 0$, isto é, $x = \tilde{x}$ e a unicidade está provada. □

Vejamos, como aplicar essa ferramenta.

Exemplo 2.4. *Considere o espaço métrico* $(\mathbb{R}, d)$ *em que* $d(x, y) = |x - y|$, *onde*

$$x = k \, cos(x),$$

com $0 < k < 1$ *uma constante. Vamos verificar que* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *e a equação dada por*

$f(x) = k\,cos(x)$ é uma contração. De fato, para $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= k|cos(x) - cos(y)| \\ &= k\left|\int_x^y sen(t)\,dt\right| \\ &\leq k\int_{\min\{x,\}}^{\max\{x,y\}} |sen(t)|dt \\ &\leq k\,|x-y| = k\,d(x,y), \end{aligned}$$

pois $|sen(t) \leq 1|$. Assim, f é uma contração e pelo o Teorema do Ponto Fixo de Banach, admite um único ponto fixo, ou seja, $x = k\,cos(x)$ admite solução única.

Existem outros exemplos clássicos de aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach esse teorema é utilizado para mostrar o Teorema da Função Implícita e o Teorema de Picard no estudo de equações diferenciais. No entanto, no próximo capítulo focaremos em mostrar algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach na Análise Funcional.

3 Aplicações em Análise Funcional

Neste capítulo, vamos introduzir os conceitos iniciais que serão necessários para o estudo de espaços de Hilbert, que serão necessários para compreender algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Faremos duas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach: na obtenção do Teorema de Stampacchia e em propriedades de um operador compacto

Aqui, falaremos sobre análise funcional e também abordaremos a teoria espectral de operadores compactos em espaços normados o qual é um dos temas mais relevantes da Análise Funcional moderna, juntamente com suas aplicações.

3.1 Preliminares

Nesta seção, iniciaremos uma série de resultados, que embora alguns sejam conhecidos, serão necessários para compreender os trâmites da teoria de Espaços de Hilbert. Quando definimos um espaço de Hilbert, a noção de produto interno surge naturalmente, pois trabalhamos com espaços vetoriais nos quais queremos definir o comprimento de um vetor e o ângulo entre dois vetores. Isso nos é fornecido pelo produto interno, que formalmente é definido da seguinte maneira:

Definição 3.1. *Seja H um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ (como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ é chamada de produto interno se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e para quais quer $x, y, z \in H$:

$$\langle \alpha x + \beta y, \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle;$$

(ii) Para quaisquer $x, y \in H$:

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

onde a barra representa o conjugado de um número complexo. No caso real, temos que $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(iii) Para quaisquer $x \in H, \langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se $x = 0$

Um produto interno sobre um espaço vetorial, em geral, é uma função com propriedades bastante similares ao produto usual de números reais. Podemos definir o comprimento de um vetor e ângulo entre os vetores não nulos. Assim, se H é um espaço onde temos definido um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dizemos que H é um espaço com produto interno.

Observação 3.1. *É fácil verificar que se H é um espaço com produto interno, então*

$$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \overline{\alpha}\langle z, x\rangle + \overline{\beta}\langle z, y\rangle,$$

A propriedade de ser linear em cada entrada é chamada de bilinearidade. Abordaremos formas bilineares mais adiante.

Observação 3.2. *No caso complexo, o produto interno também é chamado de produto hermitiano*[2]*.Em nosso caso, consideraremos apenas o caso real.*

Definição 3.2. *Dado um espaço com produto interno $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, definimos $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ para todo $x \in H$. $\|\cdot\|$ é uma norma em H, denominada norma induzida pelo produto interno.*

A demonstração de que $\|\cdot\|$ é uma norma em H é uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Lema 3.1. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Se $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço com produto interno com a norma induzida $\|\cdot\|$, então, para quaisquer $x, y \in H$,*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, x e y são linearmente dependentes.

Demonstração. Se $y = 0$, temos que $\langle x, 0\rangle = \langle x, 0+0\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle x, 0\rangle$ para todo $x \in H$, logo $\langle x, 0\rangle = 0$ para todo $x \in H$. Analogamente, $\langle 0, x\rangle = 0$ para todo $x \in H$. Além disso, $\|x\|\|0\| = 0$ para todo $x \in H$ (logo $|\langle x, 0\rangle| = \|x\|\|0\| \Rightarrow |\langle x, 0\rangle| \leq \|x\|\|0\|$). Suponhamos que $y \neq 0$, para quaisquer $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}0 &\leq \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda x\rangle = \langle x, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 - (\lambda\langle y, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2 = \|x\|^2 - 2Re(\lambda\langle y, x\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2.\end{aligned}$$

Em particular, ao tomarmos $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, obtemos

$$\begin{aligned}0 &\leq \|x\|^2 - 2Re\left(\frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\|y\|^2}\right) + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 = \|x\|^2 - 2Re\left(\frac{\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}\right) + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - 2Re\left(\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}\right) + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - 2\left(\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}\right) + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}.\end{aligned}$$

[2]Charles Hermite (1822-1901), matemático francês

Então,

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \Leftrightarrow \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,$$

onde vale a igualdade se, e somente se $x - \lambda y = 0 \Leftrightarrow x$ e y são linearmente dependentes □

Proposição 3.1. *A aplicação $x \longmapsto \|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ satisfaz as condições de norma em H.*

Demonstração. Temos que

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow (\langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- $\|\lambda x\| = (\langle \lambda x, \lambda x\rangle)^{\frac{1}{2}} = \lambda\overline{\lambda}(\langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}} = (|\lambda|^2\langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|x\|$
- Desigualdade triangular:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2,
\end{aligned}$$

pelo lema 3.1, sabemos que $|\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$, então da última desigualdade resulta em $(\|x\| + \|y\|)^2$. Portanto temos que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ □

Definição 3.3. *Um espaço H com produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$ que é completo com a norma induzida por este produto interno é chamado de espaço de Hilbert*[3]*.*

Proposição 3.2. *(Lei do Paralelogramo). Seja H um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$ e $\|\cdot\|$ a norma induzida. Então, para quaisquer $x, y \in H$,*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Demonstração. Para todo $x, y \in H$,

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

[3]David Hilbert (1862-1943), matemático alemão

Se somarmos as duas fórmulas, obtemos a identidade desejada. $\square$

As próximas proposições são puramente técnicas, onde utilizaremos mais adiante.

Proposição 3.3. *(Identidade Polar, em $\mathbb{R}$). Seja H um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então,*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 &= \frac{1}{4}(\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) \\ &-\frac{1}{4}(\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

$\square$

3.2 Projeções

Nesta seção, faremos a ligação com o que vimos sobre produto interno, mostraremos alguns fatos sobre projeções, pois mais à frente, quando falarmos sobre os Teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram serão necessárias algumas de suas propriedades. Vamos agora caracterizar um vetor usando projeção ortogonal em um conjunto fechado e convexo nos resultados a seguir.

Lema 3.2. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ e seja $K \subset H$ um subconjunto convexo fechado não vazio. Então, a projeção*

$$\begin{aligned} P_K : H &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto P_K(x) \end{aligned}$$

onde $P_K(x)$ é o único elemento de K tal que dist$(x, K) = \|x - P_K(x)\|$ (isto é, $P_K(x)$ é a melhor aproximação de $x \in H$ em K) é caracterizada por

$$\langle x - P_K x, v - P_K x \rangle \leq 0, \text{ para qualquer } v \in K.$$

Demonstração. Seja $f \in H$ e seja $u = P_K f$ a projeção de f em K. Então, temos

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - u\| = \text{dist}(f, K),$$

assim, para qualquer $w \in K$, segue que

$$v = (1-t)u + tw \in K, \, \forall t \in [0,1],$$

pois K é convexo. Logo,

$$\|f-u\| \leq \|f-u\| = \|f-((1-t)u+tw)\| = \|f-u-t(w-u)\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|f-u\|^2 \leq \|f-u-t(w-u)\|^2 &= \langle f-u-t(w-u), f-u-t(w-u)\rangle \\ = \|f-u\|^2 - 2t\langle f-u, w-u\rangle + t^2\|w-u\|^2 &\end{aligned}$$

Logo para qualquer $t \in (0,1)$, tem-se:

$$\begin{aligned}0 \leq -2t\langle f-u, w-u\rangle + t^2\|w-u\|^2, \; &\Rightarrow 2t\langle f-u, w-u\rangle \leq t^2\|w-u\|^2. \\ &= 2\langle f-u, w-u\rangle \leq t\|w-u\|^2\end{aligned}$$

Então, tomando o limite em $t \to 0^+$, obtemos

$$\lim_{t\to 0^+} 2\langle f-u, w-u\rangle \leq \lim_{t\to 0^+} t\|w-u\|^2 \Rightarrow 2\langle f-u, w-u\rangle \Rightarrow \langle f-u, v-u\rangle \leq 0, \, \forall w \in K$$

Reciprocamente, se u satisfaz a desigualdade $\langle f-u, v-u\rangle \leq 0$ para todo $v \in K$, então

$$\begin{aligned}\|u-f\|^2 - \|v-f\|^2 &= \langle u-f, u-f\rangle - \langle v-f, v-f\rangle \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u,f\rangle + \|f\|^2 - (\|v\|^2 - 2\langle v,f\rangle + \|f\|^2) \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u,f\rangle + \cancel{\|f\|^2} - \|v\|^2 - 2\langle v,f\rangle + \cancel{\|f\|^2} \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u,f\rangle - \|v\|^2 - 2\langle v,f\rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}2\langle f-u, v-u\rangle - \|u-v\|^2 &= 2\langle f-v\rangle - 2\langle f,u\rangle - \cancel{2\langle u,v\rangle} \\ &+ \underbrace{2\|u\|^2 - \|u\|^2}_{\|u\|^2} + \cancel{2\langle u,v\rangle} - \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u,f\rangle - \|v\|^2 + 2\langle v,f\rangle,\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\|u-f\|^2-\|v-f\|^2 &= \underbrace{2\langle f-u,v-u\rangle}_{\leq 0}-\|u-v\| \leq 0\\ &\Rightarrow \|u-f\|^2 \leq \|v-f\|^2\\ &\Rightarrow \|u-f\| \leq \|v-f\|\, \forall v \in K.\end{aligned}$$

Portanto, $u = P_K f$. □

Lema 3.3. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ e seja $K \subset H$ um convexo fechado não vazio. Então, P_K satisfaz*

$$\|P_K f - P_K g\| \leq \|f-g\|,$$

para quaisquer $f, g \in H$.

Demonstração. Sejam $u_1 = P_K f$ e $u_2 = P_k g$, pelo Lema 3.2 sabemos que para qualquer $v \in K$

$$\langle f-u_1, v-u_1\rangle \leq 0 \text{ e } \langle g-u_2, v-u_2\rangle \leq 0.$$

Tomando $v = u_2$ na primeira desigualdade e tomando $v = u_1$ na segunda desigualdade, obtemos o seguinte resultado

$$\langle g-u_2, u_1-u_2\rangle \leq 0 \Rightarrow \langle -g+u_2, u_2-u_1\rangle \leq 0.$$

Somando as duas desigualdade, segue que

$$\begin{aligned}\langle f-g, u_2-u_1\rangle + \|u_2-u_1\|^2 \leq 0 \Rightarrow \|u_2-u_1\|^2 &\leq \langle f-g, u_1-u_2\rangle\\ &\leq \|u_2-u_1\|\|f-g\|\\ &\Rightarrow \underbrace{\|u_2-u_1\|}_{=\|u_1-u_2\|} \leq \|f-g\|\\ &\Rightarrow \|P_K f - P_K g\| \leq \|f-g\|,\ \forall f, g \in K.\end{aligned}$$

Assim, o resultado está provado. □

Definição 3.4. *Seja H um espaço com produto interno. Dado um subconjunto $M \subset H$,* *definimos o conjunto ortogonal por*

$$M^{\perp} = \{x \in H; \langle x, m\rangle = 0 \textit{ para todo } m \in M\}$$

3.3 O Espaço Dual de um Espaço de Hilbert

A seguir, veremos um importante resultado na Análise Funcional, conhecido como Teorema da Representação de Riesz - Fréchet[4][5]. Tal resultado é uma caracterização de funcionais lineares contínuos em um espaço de Hilbert.

Dado um espaço de Hilbert H com produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$, seja H^* o seu espaço dual. Para cada $f \in H$, definamos o seguinte funcional:

$$\begin{aligned} \varphi_f : H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = \langle x, f\rangle \end{aligned}$$

φ é linear e pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz. temos

$$\|\varphi_f\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi_f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, f\rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\|\|f\| = \|f\|.$$

Além disso se $f \neq 0$, então $\frac{f}{\|f\|} \in H$, então

$$\varphi_f\left(\frac{f}{\|f\|}\right) = \left\langle \frac{f}{\|f\|}, f \right\rangle = \frac{\langle f, f\rangle}{\|f\|} = \frac{\|f\|^2}{\|f\|} = \|f\|.$$

Assim, concluímos que o máximo da norma é atingido. Portanto, a aplicação $f \longmapsto \varphi_f$ é uma isometria de H sobre sua imagem. A pergunta que nos resta agora é: será que os funcionais lineares contínuos, ou seja, todos os elementos de H^*, são dessa forma? Motivado por isso, a resposta dessa pergunta é dada pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet:

Teorema 3.1. *(da Representação de Riesz-Fréchet) Seja H um espaço de Hilbert com um produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$, e seja $\varphi \in H^*$. Então, existe um único $f \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle f, x\rangle, \ \forall x \in H,$$

ou seja, existe um único $f \in H$ tal que $\varphi = \varphi_f$. Além disso, $\|\varphi\| = \|f\|$.

[4] Frigyes Ries(1880-1956), matemático hungaro
[5] Maurice René Fréchet (1878-1973), matemático francês

Demonstração. Inicialmente, vamos demonstrar a unicidade. Para isto, consideremos $f, g \in H$ representações para a aplicação φ, ou seja, $\varphi(x) = \langle x, g\rangle$ e $\varphi(x) = \langle x, f\rangle$ para todo $x \in H$. Então $\langle x, g - f\rangle = \langle x, g\rangle - \langle x, f\rangle = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$ para todo $x \in H$. Em particular, se tomarmos $x = g - f$, obtemos $\langle f - g, f - g\rangle = 0$ isso implica que

$$\|f - g\|^2 = 0 \Rightarrow \|f - g\| = 0 \Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f = g.$$

Então, se existir uma representação do funcional $\varphi \in H^*$ por um funcional da forma de φ_f, essa representação será única.

Agora, vamos mostrar que essa representação existe. Considere $M = \ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$. Segue que M é um subespaço fechado de H. Se $\varphi = 0$, então basta tomarmos $f = 0$, assim a representação existe. Se $\varphi \neq 0$, então $M \neq H$, logo $M^\perp \neq \{0\}$. Tome um elemento $z \in M^\perp \backslash \{0\}$ e suponha, sem perda de generalidade, que $\|z\| = 1$. Para $x \in H$, considere $u = (\varphi x)(z) - (\varphi z)x \in H$, logo,

$$\varphi(u) = (\varphi x)(\varphi z) - (\varphi z)(\varphi x) = 0$$

Assim, $u \in M$. Daí, $u \perp z$ e

$$0 = \langle u, z\rangle = \varphi(x)\langle z, z\rangle - \varphi(z)\langle x, z\rangle = \varphi(x) - \varphi(z)\langle x, z\rangle$$

Portanto:

$$\varphi(x) = \varphi(z)\langle x, z\rangle = \langle x, \overline{\varphi(z)}z\rangle.$$

Tomando $f = \overline{\varphi(z)}z$, existe a representação $\varphi = \varphi_f$, como queríamos. $\square$

Observação 3.3. *Vale ressaltar que a aplicação* $R : H \longrightarrow H^*$ *dada por* $R(f) = \varphi_f$ *é chamada de aplicação de Riesz. Essa aplicação é linear se* H *for um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*, pois a aplicação* $R(x + \lambda y) = \varphi_{x+\lambda y} \in H^*$ *satisfaz*

$$\begin{aligned} R(x + \lambda y)(v) &= \varphi_{x+\lambda y}(v) = \langle v, x + \lambda y\rangle = \langle v, x\rangle + \lambda\langle v, y\rangle \\ &= \varphi_x(v) + \lambda\varphi_y(v) = R(x)(v) + \lambda R(y)(v) \\ &= (R(x) + \lambda R(y))(v), \forall v \in H \end{aligned}$$

Então, $R(x + \lambda y) = R(x) + \lambda R(y)$ *para quaisquer* $x, y \in H$ *e para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$*. No entanto, se* H *for um espaço vetorial sobre* $\mathbb{C}$*, teremos*

$$R(x + \lambda y) = R(x) + \overline{\lambda}R(y), \forall x, y \in H, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

3.4 Os Teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram

Nesta seção, aplicaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para provar os teoremas de Stampacchia[6] e Lax-Milgram[7]. O Teorema de Lax-Milgram é uma generalização do Teorema da Representação de Riesz-Fréchet e também é um corolário do Teorema de Stampacchia. Vale ressaltar que o Teorema de Lax-Milgram pode ser provado de maneira independente, realizando os mesmos procedimentos, para obter um resultado mais amplo.

Um fato interessante referente ao Teorema de Stampacchia é que não se faz necessário trabalhar com um subespaço ou com o espaço de Hilbert todo, basta que o subconjunto seja convexo e fechado.

Definição 3.5. *Seja H um espaço de Hilbert sobre o corpo $\mathbb{R}$. Dizemos que uma forma bilinear $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua se existir uma constante $C > 0$ tal que*

$$a(u, v) \leq C\|u\|\|v\|, \ \forall u, v \in H.$$

A forma bilinear a é coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2, \ \forall v \in H.$$

Exemplo 3.1. *O espaço $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual $\langle x, y\rangle = x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ é uma forma bilinear.*

Agora, podemos enunciar um dos principais resultados deste capítulo.

Teorema 3.2. *(Stampacchia). Seja $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear contínua e coerciva no espaço de Hilbert H sobre o corpo $\mathbb{R}$, e seja $K \subset H$ um subconjunto convexo fechado e não vazio. Então, dado qualquer funcional linear contínuo $\varphi \in H^*$, existe um único elemento $u \in K$ tal que*

$$a(u, v - u) \geq \varphi(v - u), \quad \forall v \in K.$$

Além disso, se a forma bilinear for simétrica, isto é, $a(u, v) = a(v, u)$ para quaisquer $u, v \in H$, então u pode ser caracterizado pela seguinte propriedade:

$$u \in K \ e \ \frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in K}\left\{\frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v)\right\}.$$

[6] Guido Stampacchia (1922-1978), matemático italiano

[7] Peter David Lax (nascido em 1926), matemático húngaro, e Arthur Norton Milgram (1912-1961), matemático estadunidense.

Demonstração. Dado $\varphi \in H^*$ temos pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet, que existe um único $f \in H$ tal que

$$\varphi(v) = \langle f, v \rangle, \text{ para qualqur } v \in H.$$

Por outro lado fixando $u \in H$, temos

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|, \text{ para qualquer } v \in H,$$

onde $C\|u\| > 0$ é constante em relação a v. Assim, a aplicação $v \longmapsto a(u,v)$ é um funcional linear contínuo em H, pois a é uma forma bilinear contínua. Portanto, utilizando novamente o Teorema da Representação de Riesz, existe um único elemento $Au \ \in H$ tal que

$$a(u,v) = \langle Au, v \rangle, \text{ para qualquer } v \in H.$$

Dessa forma, obtemos uma aplicação $A : H \longrightarrow H$. Como o produto interno é linear em cada entrada e, para cada $u \in H$, existe um único $Au \in H$, podemos concluir que $A : H \longrightarrow H$ é linear. Pelo Teorema da Representação de Riesz, temos que existe $\varphi_u \in H^*$ tal que

$$\varphi_u(v) = \langle Au, v \rangle = a(u,v), \forall v \in H.$$

Por isometria e, por a ser bilinear e contínua, segue que:

$$\|Au\| = \|\varphi_u\| = |a(u,v)| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} C\|u\|\|v\| \leq C\|u\|.$$

Portanto, o operador linear A é contínuo. Com a definição desse operador A, temos que $a(u, v-u) = \langle Au, v-u \rangle$. Para $\rho > 0$, defina a aplicação $S : K \longrightarrow K$ por $S(u) = P_K(\rho f - \rho Au + u)$. Lembremos que o Lema 3.3, garante que

$$\|P_K u_1 - P_K u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|, \forall u_1, u_2 \in H$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|Sw_1 - Sw_2\|^2 &= \|P_k(\rho f - Aw_1 + w_1) - P_k(\rho f - \rho Aw_2 + w_2)\|^2 \\
&\leq \|(\rho f - \rho Aw_1 + w_1) - (\rho f - \rho Aw_2 + w_2)\|^2 \\
&= \| - \rho Aw_1 + w_1 + \rho Aw_2 - w_2\|^2 \\
&= \|(w_1 - w_2) - \rho A(w_1 - w_2)\|^2 \\
&= \langle (w_1 - w_2 - \rho A(w_1 - w_2), (w_1 - w_2) - \rho A(w_1 - w_2)\rangle \\
&= \|w_1 - w_2\|^2 - 2\rho\langle A(w_1 - w_2), w_1 - w_2\rangle + \rho^2\|Aw_1 - Aw_2\|^2 \\
&= \|w_1 - w_2\|^2 - 2\rho a(w_1 - w_2), (w_1 - w_2) + \rho^2\|Aw_1 - Aw_2\|^2
\end{aligned}
$$

Como a forma bilinear a é coerciva, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $a(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \geq \alpha\|w_1 - w_2\|^2$. Visto que o operador linear A é contínuo, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|Aw_1 - Aw_2\| = \|A(w_1 - w_2)\| \leq C\|w_1 - w_2\|$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\|Sw_1 - Sw_2\|^2 &\leq \|w_1 - w_2\|^2 - 2\rho a((w_1 - w_2), (w_1 - w_2)) + \rho^2\|Aw_1 - Aw_2\|^2 \\
&\leq \|w_1 - w_2\|^2 - 2\rho\alpha\|w_1 - w_2\|^2 + \rho^2 C^2\|w_1 - w_2\| \\
&= \|w_1 - w_2\|(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2).
\end{aligned}
$$

Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2$. Para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, temos que $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2 < 1$, logo S é uma contração no convexo fechado e não vazio K. Como K é um subconjunto fechado do espaço de Hilbert H, segue que K é um espaço métrico completo. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, segue que existe um único $u \in K$ tal que $u = Su$. Então $u = P_K(\rho f + \rho Au + u)$. Logo, pelo Lema 3.2,$\langle \rho f - \rho Au + u - u, v - u\rangle \leq 0$ para qualquer $v \in K$, de onde segue que

$$
\begin{aligned}
\langle \rho f - \rho Au, v - u\rangle \leq 0 &\Rightarrow \langle f - Au, v - u\rangle \leq 0 \\
&\Rightarrow \langle f, v - u\rangle - \langle Au, v - u\rangle \leq 0 \\
&\Rightarrow \langle Au, v - u\rangle \geq \langle f, v - u\rangle \\
&\Rightarrow a(u, v - u) \geq \varphi(v - u),\ \forall v \in K
\end{aligned}
$$

Isto prova a primeira parte do resultado. Agora,vamos supor que a forma bilinear a seja simétrica. Assim, $a(\cdot, \cdot)$ define um novo produto interno em H e uma norma $\|u\|_1 = (a(u, u))^{\frac{1}{2}}$, que também é continua e coerciva, isso garante que ainda estamos nas hipóteses do teorema. Portanto, H com a norma $\|\cdot\|_1$, também é completo, e assim $(H, \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Hilbert. Novamente, pelo Teorema de Representação de Riesz, para cada $\varphi \in H^*$ existe um único $g \in H$ tal que

$$\varphi(v) = a(g, v), \forall v \in H.$$

Como $a(u, v-u) \geq \varphi(v-u)$, para todo $v \in K$ temos

$$\begin{aligned}
\varphi(v-u) &= a(g, v-u) \\
&\Rightarrow a(g, v-u) \leq a(u, v-u) \\
&\Rightarrow a(g, v-u) - a(u, v-u) \leq 0 \\
&\Rightarrow a(g-u, v-u) \leq 0.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 3.2, segue que $u = P_K g$, ou seja, u é a projeção de g sobre K relativa ao produto interno $a(\cdot, \cdot)$. Portanto, u minimiza a distância $\|g-v\|_1 = (a(g-v, g-v))^{\frac{1}{2}}$, isto é

$$\min_{v \in K} a(g-v, g-v)^{\frac{1}{2}} = a(g-u, g-u)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, u minimiza a função

$$v \longmapsto a(g-v, g-v) = a(v,v) - 2a(g,v) + a(g,g) = a(v,v) - 2\varphi(v) + a(g,g).$$

Podemos concluir que

$$\min_{v \in K}(a(v,v) - 2\varphi(v) + a(g,g)) = a(u,u) - 2\varphi(u) + a(g,g),$$

$$\Rightarrow a(u,u) - 2\varphi(u) = \min_{v \in K}(a(v,v) - 2\varphi(v),$$

o que, finalmente, implica que

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in K}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\right\}$$

Assim, fica provado o resultado e, além disso, fica também caracterizado um elemento do subconjunto K $\square$

A dúvida que fica sobre o Teorema de Stampacchia é: será que podemos utilizar o espaço inteiro ao invés de apenas um subconjunto? Esta resposta é dada por Lax-Milgram. Para provar esse teorema utilizaremos fortemente o que foi visto no teorema e apenas aplicaremos a situação conveniente.

Corolário 3.1. *(Teorema de Lax-Milgram). Suponhamos que $a(\cdot, \cdot)$ seja uma forma* *bilinear contínua e coerciva, no espaço de Hilbert H sobre $\mathbb{R}$. Para qualquer $\varphi \in H^*$, existe um único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \varphi(v), \forall v \in H.$$

Além disso, para o elemento $u \in H$, no caso de $a(\cdot, \cdot)$ for simétrica, u pode ser caracterizada pela seguinte propriedade:

$$u \in H \text{ e } \frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v) \right\}.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Stampacchia, com $K = H$, existe um único $u \in H$ tal que $a(u, v - u) \geq \varphi(v - u)$ para todo $v \in H$. Tomando $w = \lambda v + u \in H$, temos $a(u, v) \geq \varphi(w - u)$ o que implica que $a(u, \lambda v) \geq \varphi(\lambda v)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda = 1$, então $a(u, v) \geq \varphi(v)$. Se $\lambda = -1$, temos que $a(u, -v) \geq \varphi(-v)$ então $-a(u, v) \geq -\varphi(v)$, multiplicando por -1, obtemos $a(u, v) \leq \varphi(v)$. Portanto $a(u, v) = \varphi(v)$ para todo $v \in H$. Além disso, a propriedade de que $u \in H$ e

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v) \right\}$$

segue diretamente do Teorema de Stampacchia com $K = H$. □

3.5 Operadores Compactos

Nesta seção, faremos a segunda aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Inicialmente, apresentaremos uma breve introdução aos operadores compactos e veremos algumas propriedades relevantes para desenvolver a teoria espectral desses operadores. Sejam, então, X e Y espaços de dimensão finita, tais que $\dim X = \dim Y < \infty$, e seja $T : X \longrightarrow Y$ uma transformação linear. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, sabemos que

$$\dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim X.$$

Sob estas condições, acontece apenas uma das seguintes possibilidades:

i) ou T é injetora, daí pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, T é sobrejetora.

ii) ou a equação $Tx = 0$ tem solução não nula, isto é, T não é injetora e portanto também T não é sobrejetora.

Ou seja, quando $\dim y < \infty$ T é injetora se, e somente se, T é sobrejetiva. Porém, em dimensão infinita isso não necessariamente é verdade. Por exemplo, considere o espaço das sequências reais de quadrado somáveis, isto é,

$$l^2 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Agora consideremos o operador shift à direita: $S_d : l^2 \longrightarrow l^2$ onde leva os elementos $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de l^2 e leva em $(0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ também em l^2. Notemos que essa aplicação é linear e injetora, pois se $S_d(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots)$, então $(0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots)$, ou seja, $x_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Mas não é sobrejetora, porque em l^2 existem sequências que o primeiro termo não é 0, logo não podem ser um elemento da imagem de S_d.

Com isto, estamos interessados agora em estudar uma classe de operadores $T : X \longrightarrow X$, sendo X um espaço de dimensão infinita, que possui a mesma propriedade de ser injetora se, e somente se, for sobrejetora. Vejamos que os operadores da forma $I - T$, onde T é um operador compacto

Definição 3.6. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Dizemos que T é compacto se para $M \subset X$ limitado, temos $\overline{T(M)} \subset Y$ é compacto*

Definição 3.7. *Definimos o conjunto dos operadores compactos de X em Y por*

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y. T \text{ é compacto}\}$$

Proposição 3.4. *Se X e Y são espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ é linear e compacto, então T é limitado.*

Demonstração. Seja B a bola unitária em X, que por sua vez é limitada, então $\overline{T(B)}$ é um compacto em Y. Em particular $\overline{T(B)}$ é limitado, logo $T(B)$ é também limitado, assim existe um $R > 0$ tal que $\|Tx\| \leq R$ para todo $x \in B = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$. Portanto, T é limitado e $\|T\| \leq R$. $\square$

Observação 3.4. *Vale ressaltar que neste contexto, é possível obter um resultado semelhante ao caso de compacidade por subsequência, onde X é compacto se, e somente se, toda sequência limitada $(x_n) \subset X$ possui uma subsequência convergente. Em particular, teremos se dois operadores S, T são compactos, então $S + T$ é também compacto. Sabendo desse fato, a proposição anterior garante que $\mathcal{C}(X, Y)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X, Y)$*

Sabendo disso, vamos utilizar tal fato para demonstrar o teorema a seguir, para isto, utilizaremos um lema técnico que não iremos demonstrar, mas se caso o leito tenha interesse, ver [3], especificamente as páginas 412 e 414.

Definição 3.8. *Seja (X,d) um espaço métrico. Um subconjunto $S \subset X$ diz-se totalmente limitado se, para cada $\varepsilon > 0$, existem bolas $B(x_1,\varepsilon),\ldots,B(x_p,\varepsilon)$ tais que $S \subset \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j,\varepsilon)$.*

Lema 3.4. *Seja X um espaço métrico completo e $S \subset X$ totalmente limitado. Então, S é relativamente compacto ou seja, $\overline{S}$ é compacto.*

Teorema 3.3. *Sejam X, Y espaços de Banach. Então $\mathcal{C}(X,Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Como $\mathcal{C}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$, mostraremos que $\mathcal{L}(X,Y)$ é fechado. Seja $(T_n) \subset \mathcal{C}(X,Y)$ e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $T_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{L}(X,Y)$, ou seja se $n \longrightarrow \infty$, então $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n = n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_{n_\varepsilon} - T\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Desde que $T_{n_\varepsilon}(\overline{B}_X)$ seja relativamente compacto, pelo lema anterior, $T_{n_\varepsilon}(\overline{B}_X)$ é totalmente limitado. Logo, existem bolas abertas $B(x_1,\frac{\varepsilon}{2}),\ldots,B(x_p,\frac{\varepsilon}{2})$ tais que $T_{n_\varepsilon}(\overline{B}_X) \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$. Agora, se $v \in \overline{B}_X$, então

$$\|T_{n_\varepsilon}v - Tv\| \leq \sup_{\substack{u\in X \\ \|u\|\leq 1}} \|T_{n_\varepsilon}u - Tu\| = \|T_{n_\varepsilon} - T\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Desde que $T_{n_\varepsilon}v \in T_{n_\varepsilon}(\overline{B}_X)$, segue que $T_{n_\varepsilon}v \in B(x_{j_0},\frac{\varepsilon}{2})$ para algum $j_0 \in \{1,\ldots,p\}$, daí $\|T_{n_\varepsilon}v - x_{j_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$, logo

$$\|Tv - x_{j_0}\| \leq \|T_{n_\varepsilon}v - Tv\| + \|T_{n_\varepsilon}v - x_{j_0}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow Tv \in B(x_{j_0},\varepsilon).$$

Segue que $T(\overline{B}_X) \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i,\varepsilon)$. Então $T(\overline{B}_X)$ é totalmente limitado, portanto, pelo lema anterior, é relativamente compacto e assim, nós concluímos que T é compacto. $\square$

A seguir, faremos uma proposição puramente técnica que será útil mais à frente. A proposição a seguir se refere a composição de um operador linear por um operador compacto.

Proposição 3.5. *Sejam E, F, G espaços de Banach. Se $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $S \in \mathcal{C}(F,G)$, então $S \circ T \in \mathcal{C}(E,G)$. Analogamente, se $T \in \mathcal{C}(E,F)$ e $S \in \mathcal{L}(F,G)$, então $S \circ T \in \mathcal{C}(E,G)$.*

Demonstração. Vamos provar o caso em que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $S \in \mathcal{C}(F,G)$. Como $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é contínua, temos que, para qualquer conjunto limitado A contido em E, a imagem de A por T é limitada, ou seja $T(A) \subset F$ é limitado. Como $S \in \mathcal{C}(F,G)$

e $T(A)$ é limitado, temos que $\overline{S(T(A))}$ é compacto, logo $S \circ T$ também o é. No outro caso, o argumento é similar. $\square$

3.6 Teoria Espectral de Operadores Compactos

Nesta seção, veremos a última aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que fala sobre o espectro de alguns operadores. Finalizaremos o trabalho apresentando Teorema Espectral em dimensão infinita.

Inicialmente, apresentaremos apresentar um resultado clássico conhecido como Alternativa de Fredholm. No entanto, iremos omitir sua demonstração por ser bastante técnica. Caso esteja interessado na demonstração, ver [3] ou [1]

Teorema 3.4. *(Alternativa de Fredholm). Seja E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{C}(E, E) = \mathcal{C}(E)$ ou seja, o operador $T : E \longrightarrow E$ é um operador compacto. Denotemos $N(I - T) = \ker(I - T)$ e $Im(I - T) = R(I - T)$. Então valem os seguintes itens:*

(a) $N(I - T)$ *tem dimensão finita;*

(b) $R(I - T)$ *é fechada e* $R(I - T) = N(I - T^*)^{\perp}$*;*

(c) $N(I - T) = 0 \iff R(I - T) = E$*;*

(d) $\dim N(I - T) = \dim N(I - T^*)$.

A Alternativa de Fredholm será utilizada na demonstração do Teorema Espectral de Dimensão Infinita.

Definição 3.9. *Seja E um espaço de Banach sobre o corpo dos reais. Seja $T \in \mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$. O conjunto resolvente de T é definido por:*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I \text{ é bijetor de } E \text{ em } E\}.$$

Definimos o espectro de T, denotado por $\sigma(T)$

$$\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$$

Definição 3.10. *Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor (Ou valor próprio) de T, e denotamos por $\lambda \in AV(T)$, se*

$$N(T - \lambda I) \neq \{0\}.$$

Esta definição, nos garante que $T - \lambda I$ não é injetor. O autoespaço associado a λ será denotado por $N(T - \lambda)$, e os elementos não-nulos de $N(T - \lambda)$ são chamados de autofunções associadas ao autovalor λ

Observação 3.5. *Se a dimensão de E for finita, então, pelo teorema de núcleo e da imagem que $T - \lambda I$ é injetor se, e somente se, é sobrejetor. Logo, $\sigma(T) = AV(T)$. Em dimensão infinita, sabemos somente que $AV(T) \subset \sigma(T)$, onde pode existir algum $\lambda \in \mathbb{R}$ que é tal que $N(T - \lambda I) = \{0\}$ e $R(T - \lambda I)$ seja diferente do espaço E, ou seja, $AV(T)$ é um subconjunto próprio do espectro de T*

Sabemos que o espectro é o complementar do resolvente. Em particular, o espectro é um conjunto fechado, pois, o resolvente é um conjunto aberto. Para demonstrar este fato, utilizaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach

Teorema 3.5. *Seja E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E)$. O conjunto resolvente $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I$ é bijetor de E em $E\}$ é aberto.*

Demonstração. De fato, seja $\lambda_0 \in \rho(T)$. Então, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in E$, temos

$$Tu - \lambda u = f \Leftrightarrow Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u \Leftrightarrow y = (T - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)u).$$

Defina $S : E \longrightarrow E$ por $S(u) = (T - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)u)$. Temos

$$\begin{aligned} \|S(u) - S(v)\| &= \|(T - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)u) - (T - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)v)\| \\ &\leq \underbrace{\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|\|(\lambda - \lambda_0)\|}_{=C \geq 0} \|u - v\|. \end{aligned}$$

Observe que $\|(T - \lambda_0 I\|^{-1}|\lambda - \lambda_0| < 1$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|} &\Leftrightarrow \lambda_0 - \frac{1}{\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|} < \lambda \\ &< \lambda_0 + \frac{1}{\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|}, \end{aligned} \tag{4}$$

donde $\frac{1}{\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\|} = \varepsilon \Leftrightarrow \lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$. Sob estas condições, a aplicação S é uma contração. Logo, utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, a equação $Tu - \lambda u = f$ tem solução única. Portanto, $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \subset \rho(T)$ e, $\rho(T)$ é aberto. □

Teorema 3.6. *Seja E um espaço de Banach e seja $T \in \mathcal{L}(E)$. O espectro $\sigma(T)$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ com $|\lambda| > \|T\|$. Mostraremos que $\lambda \in \rho(T)$, ou seja, que

$T - \lambda I$ é bijetor, portanto, invertível. Assim, dado $f \in E$, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} S: \ & E \longrightarrow E \\ & u \longmapsto S(u) = \frac{1}{\lambda}(Tu - f). \end{aligned}$$

Afirmamos que S é uma contração. De fato, sejam $u, v \in E$. Então

$$\begin{aligned} \|S(u) - S(v)\| &= \left\| \frac{1}{\lambda}Tu - \frac{1}{\lambda}f - \frac{1}{\lambda}Tv + \frac{1}{\lambda}f \right\| \\ &= \frac{1}{|\lambda|}\|Tu - Tv\| \leq \underbrace{\frac{1}{|\lambda|}\|T\|}_{=C\in(0,1)} \|u - v\|. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $u \in E$ tal que $Su = u$ se, e somente se, $\frac{1}{\lambda}(Tu - f) = u$, ou seja, $Tu - \lambda u = f$, donde $T - \lambda I$ é uma bijeção. Logo, $\lambda \in \rho(T)$. Assim, $\rho(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$. Como, pelo teorema 3.5, $\rho(T)$ é aberto, segue que o espectro é fechado, e portanto, compacto. $\square$

Assim, finalizamos algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach. No entanto, este momento é oportuno para enunciarmos o Teorema Espectral de dimensão infinita.

Teorema 3.7. *(Comportamento de $\sigma(T)$) para T compacto. Seja $T \in \mathcal{C}(E)$ de dimensão infinita. Então,*

(a) $0 \in \sigma(T)$;

(b) $\sigma(T)\backslash\{0\} = AU\backslash\{0\}$;

(c) Uma das seguintes situações acontece:

- *ou* $\sigma(T) = \{0\}$;
- *ou* $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *é finito;*
- *ou* $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *é uma sequência que converge para zero*

A demonstração desse teorema está no capítulo 6 de [1], mais especificamente, o teorema 6.8

Inicialmente, vejamos o resultado clássico do Teorema Espectral no caso de dimensão finita, visto nos cursos de Álgebra Linear. Caso o leitor tenha interesse na demonstração desse teorema, veja [2].

Teorema 3.8. *(Teorema Espectral - Dimensão Finita.) Seja H um espaço de dimensão finita com produto interno. Dado um operador linear auto-adjunto $T : H \longrightarrow H$, existe uma base ortonormal para H formada por autovetores do operador T.*

Na versão para espaços de dimensão infinita, pedimos que o espaço seja de Hilbert e separável, isto é, admita um conjunto ortonormal completo e enumerável, e que o operador seja auto-adjunto e compacto. Provaremos que, sob estas condições, existe um sistema ortonormal completo e enumerável de H formado por autovetores de T. Vimos anteriormente que, no caso em que $T \in \mathcal{L}(E)$, onde E é de Banach, o espectro estará no intervalo fechado $[-\|T\|, \|T\|]$. Se exigirmos que o operador linear seja compacto, podemos descrever melhor o espectro, pelo Teorema do Comportamento do Espectro de $\sigma(T)$ para T compacto.

Como sabemos, um operador T é auto-adjunto se $T^* = T$, isto é,

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle, \ \forall u, v \in H.$$

Vamos definir o ínfimo e o supremo do operador auto-adjunto e analisar seu espectro

Proposição 3.6. *Seja $T \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjunto, com H um espaço de Hilbert, se*

$$m = \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle Tu, u\rangle \text{ e } M = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle Tu, u\rangle,$$

então $\sigma(T)$ está contido no fechado $[m, M]$, $m \in \sigma(T)$ e também $M \in \sigma(T)$.

Observação 3.6. *Notemos que $|\langle Tu, u\rangle| \leq \|Tu\|\|u\| \leq \|T\|\|u\|^2$, logo $\langle Tu, u\rangle| \leq \|T\|$ isso implica que $-\|T\| \leq \langle Tu, u\rangle \leq \|T\|$ para todo $u \in H$, com $\|u\| = 1$, daí concluímos que $-\|T\| \leq m \leq M \leq \|T\|$, logo σ está contido no fechado $[m, M]$ com o ínfimo e o supremo também contidos no espectro, como diz no resultado.*

Por último, veremos quando o espectro possui apenas um autovalor para $T = 0$

Corolário 3.2. *Se $T \in \mathcal{L}(H)$, com H espaço de Hilbert, e $\sigma(T) = \{0\}$, então $T = 0$*

Demonstração. Pela a proposição 3.6, se $m = M = 0$, então $\langle Tu, u\rangle = 0$, para todo $u \in H$. Como

$$2\langle Tu, v\rangle = \underbrace{\langle T(u+v), u+v\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle Tu, u\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle Tv, v\rangle}_{=0}, \ \forall u, v \in H,$$

temos que $\langle Tu, v\rangle = 0$ para todos $u, v \in H$. Tomando $v = Tu$, obtemos que $\|Tu\|^2 = 0$, ou seja, $Tu = 0$ para todo $u \in H$. Logo, $T = 0$. $\square$

Quando um operador é compacto, já sabemos como é o comportamento do espectro (pelo teorema 3.7). Se $\sigma(T) = \{0\}$, pelo corolário 3.2, temos que $T = 0$. Nesse caso, qualquer sistema ortonormal completo de H é formado por autovalores de T, pois todo vetor não nulo é um autovetor associado ao autovalor 0 para o operador $T = 0$. Supondo que $\sigma(T)\backslash\{0\}$ é finito ou uma sequência de autovalores que converge para zero. No caso finito, a demonstração é idêntica à do Teorema Espectral da Álgebra Linear.

Teorema 3.9. *(Teorema Espectral). Suponha que H seja um espaço de Hilbert separável e que $T : H \longrightarrow H$ seja auto-adjunto e compacto. Então, H admite um sistema ortonormal completo e enumerável (chamado de base hilbertiana) formado por autovalores de T*

Demonstração. Seja $\sigma(T)\backslash\{0\} = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de autovalores distintos de T. Denotemos $\lambda_0 = 0$. Sejam $E_0 = N(T)$, onde $0 \leq \dim E_0 \leq \infty$, e $E_n = N(T - \lambda_n I)$, onde $0 < \dim E_n < \infty$, (pela Alternativa de Fredholm)

(i) Cada $E_n, (n = 0, 1, 2 \ldots)$ é um subespaço fechado de H. Portanto, cada E_n é separável, pois H é separável.

(ii) $E_n \perp E_m$, caso $n \neq m$. De fato, se $u \in E_n$ e $v \in E_m$, com $n \neq m$, então ($Tu = \lambda_n u$ e $Tv = \lambda_m v$). Logo,

$$\lambda_n\langle u, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = \langle u, \lambda_m v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle,$$

ou seja, $(\lambda_n - \lambda_m)\langle u, v\rangle = 0$, e como $\lambda_n - \lambda_m \neq 0$, temos que $\langle u, v\rangle = 0$.

Afirmação: $F := \langle (E_n)_{n\geq 0}\rangle$ é denso em H. Note que, $T(F) \subset F$, pois cada elemento $u \in F$ é uma combinação linear finita de elementos de cada E_n, e cada elemento de E_n é um autovetor de T. Logo, $T(u)$ é uma combinação linear finita de elementos de E_n. Assim, $T(u) \in F$. Logo, $T(F^\perp) \subset F^{\perp,}$ pois se $u \in F^\perp$ e $v \in F$, então

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = 0 \Rightarrow Tu \in F^\perp,$$

onde $Tv \in F$. O operador $T_0 = T\mid_{F^\perp} : F^\perp \longrightarrow F^\perp$ é também compacto e auto-adjunto. Por outro lado, $\sigma(T_0) = \{0\}$. De fato, se $\lambda \in \sigma(T_0)\backslash\{0\}$, implica que $\lambda \in AV(T_0)$, onde existe $u \in F^\perp$, com $u \neq 0$, tal que $T_0 u = \lambda u$, ou seja, $Tu = \lambda u$. Logo, $\lambda = \lambda_n$, para algum $n \geq 1$. Daí, $u \in E_n \cap F^\perp = \{0\} \Rightarrow u = 0$ o que é uma contradição! Pelo corolário 3.2, temos que $T_0 = 0$. Logo, $F^\perp \subset N(T) \subset F$ que implica que $F^\perp = \{0\}$ assim concluindo que F é denso em H, pois $\overline{F} \oplus \overline{F}^\perp$ e como $F^\perp = \{0\}$, então $\overline{F} = H$.

Como cada E_n é separável, escolhemos em cada E_n um sistema ortonormal completo enumerável e como $(E_1, E_2, \ldots)$ são de dimensão finita, basta tomar uma base ortonormal. E_0 pode ser de dimensão finita e é separável, portanto possui um sistema ortonormal completo e enumerável. A união desses sistemas ortonormais é um sistema ortonormal completo para H. De fato, seja $(\beta_n)_{n\geq 0}$, onde cada β_n é um sistema ortonormal completo enumerável de E_n. É claro que $\beta_n \cap \beta_m = \emptyset$ se $n \neq m$, pois $\beta_n \subset E_n, \beta_m \subset E_m$ e $E_n \perp E_m$. Além disso, os elementos de cada β_n são unitários e ortogonais dois a dois, pois β_n é um sistema ortonormal, e os elementos em $\bigcup\limits_{n=0} \beta_n$ são ortogonais. Se tomarmos os elementos de β_n e β_m com $n \neq m$, eles serão ortogonais pois $E_n \perp E_m$.

Finalmente, veja que $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n$ é um sistema ortonormal completo e enumerável para H, pois $\left\langle \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n \right\rangle = F$, que é denso em H. Portanto, existe um sistema ortonormal completo enumerável para H, formado por autovetores de T. $\square$

Apêndice A

Neste apêndice, mostraremos alguns resultados que foram utilizados, porém não foram demonstrados ao longo do trabalho.

O próximo Lema, servirá para demonstrar o Teorema de Hahn-Banach.

Lema 1: Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $F \subset X$ um subespaço com $F \neq X$. Seja p um funcional sublinear em X e $f : X \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que

$$f(x) \leq p(x) \forall x \in F$$

Dado $x_0 \in X \backslash F$ e definamos:

$$\bar{F} := [F, x_0] = F + \mathbb{R}x_0 = \{x + \lambda x_0 \,|\, x \in F, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Então, existe um funcional linear $\bar{f} : \bar{F} \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{f}|_F = f$ e $-p(-x) \leq \bar{f} \leq p(x)$ para todo $x \in \bar{F}$.

Teorema 1: (Teorema de Hahn-Banach forma analítica) Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e um subespaço F $\subset$ X e $p : X \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Suponhamos que $f : X \to \mathbb{R}$ seja um funcional sublinear tal que

$$f(x) \leq p(x),\ \forall x \in F.$$

Então existe um funcional sublinear $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende f, isto é

$$\tilde{f}|_F = f,$$

e que satisfaz

$$-p(-x) \leq \tilde{f}(x) \leq p(x),\ \forall x \in X.$$

Demonstração. Seja S o conjunto de todos os funcionais lineares $g : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ com $D(g) \subseteq X$, onde $g|_F = f$ e $g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in D(g)$. Note que $S \neq \emptyset$, pois $f \in S$. Vamos definir uma ordem parcial em S. Diremos que $g \leq h$ para $g, h \in S$ se $D(g) \subset D(h)$ e $g(x) = h(x)$ sempre que $x \in D(g)$, ou seja, h estende g para $D(h)$ de modo que $h|_D(g) = g$. Seja $C \subseteq S$ totalmente ordenado e defina

$$D = \bigcup_{g \in C} D(g).$$

Queremos encontrar um candidato a cota superior de C. Sejam $x, y \in D$ e $x, y \in D$.

Logo, existem $D(g)$ e $D(h)$ tais que $x \in D(g)$ e $y \in D(h)$, porém como $g, h \in C$, temos que $D(g) \subset D(h)$ ou o contrário. Em ambos os casos, temos que $x + y \in D$. Além disso, se $x \in D$, então existe $D(g)$ tal que $x \in D(g)$, logo $\lambda x \in D(g) \Rightarrow \lambda x \in D$. Portanto, D é um subespaço vetorial de X. Agora, defina o funcional $g_C : D \to \mathbb{R}$ por

$$g_C(x) = g(x), x \in D(g).$$

Desde que $g, h \in C$, temos, sem perda de generalidade, que $D(g) \subseteq D(h)$, pois C é totalmente ordenado. Logo, se $x \in D(g) \cap D(h)$, então $g(x) = h(x)$. Portanto, o funcional g_C está bem definido. Como cada $g \in C$ é linear, segue que g_C é linear. Além disso, para todo $x \in D$, existe $g \in C$ tal que $g_C(x) = g(x) \leq p(x)$. Logo, $g_C(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D$, e, como $g|_F = f$ para todo $g \in C$, pois $g \in S$, temos que, para todo $x \in F$ tem-se $g(x) = f(x)$ para todo $g \in C$, então $g_C(x) = f(x) \Rightarrow g_C|_F = f$. Portanto, $g_C \in S$. Além disso, para todo $g \in C$, temos que $D(g) \subset D$ e $g(x) = g_C(x)$ sempre que $x \in D(g)$. Então, segue que $g \leq g_C$ para todo $g \in C$. Daí, temos que g_C é uma cota superior para C. Ou seja, todo conjunto totalmente ordenado de S possui uma cota superior. Portanto, pelo Lema de Zorn, S possui um elemento maximal. Seja $\bar{f} : D(\bar{f}) \longrightarrow \mathbb{R}$ o elemento maximal de S. Como $\bar{f} \in S$, temos que $\bar{f}|_F = f$ e $\bar{f}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(\bar{f})$. Supondo que $D(\bar{f}) \neq X$, ou seja, existe um elemento em seu complementar $X \backslash D(\bar{f})$, então pelo lema anterior, podemos estender $\bar{f}$ ao espaço $\bar{F} = D(\bar{f}) + \mathbb{R}x$. Assim, existe $\tilde{f} \in S$ tal que $D(\bar{f}) \subseteq D(\tilde{f}) = \bar{F}$, o que contradiz a maximalidade de $\bar{f}$. Logo, $D(\bar{f}) = X$. Então, existe um funcional linear $\bar{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende $f : F \to \mathbb{R}$ da forma $\bar{f}|_F = f$ e que satisfaz

$$-p(-x) \leq \bar{f}(x) \leq p(x), \forall x \in X.$$

$\square$

Teorema 2: (Teorema da Aplicação Aberta). Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear limitada e sobrejetora. Então existe $r > 0$ tal que

$$B_r(0) \subset T(B_1(0)).$$

Em particular, T é uma aplicação aberta. O próximo resultado será utilizado para mostrar o Teorema do gráfico fechado.

Teorema 3: Seja E um espaço de Banach. Se $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ são duas normas tais que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \text{ para todo } x \in E,$$

então elas são normas equivalentes.

Teorema 4: (Teorema do Gráfico Fechado). Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear fechada. Então T é limitada.

Demonstração. Considere duas normas em E:

$$\|x\|_1 = \|x\|_E \quad \text{e} \quad \|x\|_2 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$$

A segunda norma é denominada norma do gráfico. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $(E, \|\cdot\|_2)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon \Rightarrow \|x_n - x_m\|_E + \|T(x_n) - T(x_m)\|_F < \varepsilon \Rightarrow \|x_n - x_m\|_E < \varepsilon$ e $\|T(x_n) - T(x_m)\|_F < \varepsilon$. Logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy em $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(T(x_n))$ é uma sequência de Cauchy em $(F, \|\cdot\|_F)$. Se $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ e $y = \lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n)$ (que existem, pois $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ são de Banach), segue que $(x_n, T(x_n)) \to (x, y)$ em $E \times F$ (com a norma $\|(x, y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$). Portanto, $E \times F$ é um espaço de Banach. Como $G(T)$ é um subespaço vetorial fechado de $E \times F$, segue que $G(T)$ também é um espaço de Banach. Logo, $(x, y) = \lim(x_n, T(x_n)) \in G(T)$, daí $y = Tx$. Então, $\|x_n - x\|_2 = \|x_n - x\|_E + \|T(x_n - x)\|_F = \|x_n - x\|_E + \|Tx_n - Tx\|_F \longrightarrow 0 + 0 = 0$ com $n \longrightarrow +\infty$. Segue que $(E, \|\cdot\|_2)$ é um espaço de Banach. Pela definição de $\|\cdot\|_2$, temos que $\|x\|_E \leq \|x\|_2 \Rightarrow \|x\|_1 \leq \|x\|_2$. Pelo Teorema anterior, concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \forall x \in E.$$

Pela definição de $\|\cdot\|_2$, temos que $\|Tx\|_F \leq \|x\|_2$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_1, \forall x \in E.$$

Onde T é limitada. $\square$

Utilizaremos mais dois resultados para demonstrar o Teorema da Imagem Fechada de Banach.

Proposição 1: Se E é um espaço vetorial normado, V é um subespaço vetorial de E e W é um subespaço vetorial de E^*, então $V^\perp$ e $W^\perp$ são fechados. Além disso,

$$(V^\perp)^\perp = \overline{V}$$

e

$$\overline{W} \subset (W^{\perp})^{\perp}$$

Teorema 4: Sejam E, F espaços vetoriais normados e $A : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Então vale que:

(i) $N(A) = R(A^*) \perp$;

(ii) $N(A^*) = R(A)^{\perp}$;

(iii) $\overline{R(A)} = N(A^*) \perp$;

(iv) $\overline{R(A^*)} \subset N(A)^{\perp}$.

Teorema 6: (Teorema da Imagem Fechada de Banach.) Sejam E, F espaços de Banach e $A : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear fechada, isto é, aplica fechados em fechados. Então são equivalentes:

(i) $R(A)$ é fechado;

(ii) $R(A^*)$ é fechado;

(iii) $R(A) = N(A^*)^{\perp}$;

(iv) $R(A^*) = N(A)^{\perp}$.

Demonstração. $(i) \Leftrightarrow (iii)$ segue diretamente do Teorema anterior. Logo, é suficiente provar a cadeia de implicações $(i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (iv)$ pelo teorema anterior, temos que $R(A^*) \subset N(A)^{\perp}$. Resta apenas mostrar que $N(A)^{\perp} \subset R(A^*)$. Seja $f \in N(A)^{\perp}$, vamos obter $g \in F^*$ tal que $A^*g = f$. Defina um funcional linear $g_0 : R(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_0(Ax) = f(x),$$

para todo $x \in E$. g_0 está bem definido pois se $Ax_1 = Ax_2$, então $x_1 - x_2 \in N(A)$. Logo, $f(x_1 - x_2) = 0$. Para ver que g_0 é limitada, basta restringir o contradomínio em $A : E \longrightarrow R(A)$, como $R(A)$ é subespaço fechado de um espaço de Banach, ele também é um espaço de Banach, e podemos aplicar o Teorema da Aplicação Aberta para concluir que existe $r > 0$ tal que

$$B_r(0)_{R(A)} \subset A(B_1(0))$$

onde $B_r(0)R(A)$ denota a bola aberta de centro na origem e raio r no espaço de Banach $R(A)$. Isso implica que existe $C > 0$ tal que para todo $y \in R(A)$ existe $x \in E$ satisfazendo

$Ax = y$ e $\|x\| \leq C\|y\|$. De fato, se $y \in R(A)$, então $\frac{r}{2\|y\|}y \in B_r(0)_{R(A)}$, logo existe $z \in B_1(0)$ tal que

$$Az = \frac{r}{2\|y\|}y,$$

e podemos tomar

$$x = \frac{2\|y\|}{r}z,$$

de modo que $Ax = y$ e $\|x\| \leq \frac{r}{2}\|y\|$. Daí

$$|g_0(y)| = |g_0(Ax)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq C\|f\|\|y\|.$$

Portanto, pelo Teorema de Hahn-Banach, g_0 pode ser estendida a um funcional $g \in F^*$ com

$$A^*g(x) = g(A(x)) = g_0(A(x)) = f(x).$$

$(iv) \Rightarrow (ii)$, pelo teorema anterior

$$R(A^*) \subset \overline{R(A^*)} \subset N(A)^{\perp}.$$

Logo, se $R(A^*) = N(A)^{\perp}$, então $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $Z = \overline{R(A)}$. Como $R(A)$ é denso em Z, o anulador de $R(A)$ em Z é o funcional nulo. Defina $S : E \longrightarrow Z$ por $Sx = Ax$ (S é uma extensão do contradomínio de A). Observe que, como A é fechada, pelo Teorema do Gráfico Fechado, A é limitada e, portanto, S também é. Além disso, $R(S) = R(A)$, onde $R(S) \neq 0$. Mas, pelo teorema anterior, $N(\tilde{S}) = R(S)^{\perp}$. Portanto, concluímos que $\tilde{S}$ é injetiva.

Pelo teorema de Hahn-Banach, existe $g \in F^*$ extensão de g_0. Daí,

$$A^*g(x) = g(A(x)) = g(S(x)) = g_0(S(x)) = \tilde{S}g_0(x),$$

para todo $x \in E$. Assim, $\tilde{S}g_0 \in R(A^*)$, ou seja, $R(\tilde{S}) \subset R(A^*)$. Reciprocamente, para $g \in F^*$, considere a restrição $g_0 = g|_Z$. Analogamente temos

$$\tilde{S}g_0(x) = g_0(S(x)) = g(S(x)) = g_0(A(x)) = A^*g(x)$$

para todo $x \in E$, donde $R(A^*) \subset R(\tilde{S})$. Por hipótese, temos que $R(\tilde{S})$ é fechado, portanto é um espaço de Banach pois é subespaço fechado do espaço de Banach Z^*, e o dual de um espaço vetorial normado sempre é um espaço de Banach.

Obtemos que a restrição do contradomínio $\tilde{S} : Z^* \longrightarrow R(\tilde{S})$ é um operador linear contínuo bijetivo. E como inversa de bijeções abertas é contínua, segue que $(\tilde{S})^{-1}$ existe e é contínua. Em particular, $\tilde{S}$ é limitada inferiormente e existe $m > 0$ tal que

$$\|\tilde{S}g_0\| \geq m\|g_0\|, \, \forall g_0 \in R(A).$$

O teorema anterior implica que $R(S) = Z$, logo $R(A) = Z$ e portanto $R(A)$ é fechado. $\square$

Referências

Referências

[1] Haïm Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations.* Springer Science & Business Media, 2010.

[2] Hoffman, Kenneth, and Ray Alden Kunze *Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1971

[3] Kreyszig. Erwin. *Introduction Functional Analysis with Aplications*, John Wiley & Sons, 1989.

[4] Lima. E. Lages. *Espaços Métricos*, Editora XYZ, 2018.