UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

Jéssica Fernandes Sousa Costa

Um Estudo sobre a Possibilidade do Ensino de Conceitos Fundamentais do Cálculo no Ensino Médio

João Pessoa - PB
2024

Jéssica Fernandes Sousa Costa

Um Estudo sobre a Possibilidade do Ensino de Conceitos Fundamentais do Cálculo no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo

João Pessoa - PB

2024

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C838e Costa, Jéssica Fernandes Sousa.
Um estudo sobre a possibilidade do estudo de conceitos fundamentais do cálculo no ensino médio / Jéssica Fernandes Sousa Costa. - João Pessoa, 2024.
36 p. : il.

Orientação: Ricardo Burity Croccia Macedo.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - Educação a Distância, Polo João Pessoa-PB - UFPB/CCEN.

1. Cálculo diferencial e integral. 2. Ensino médio. 3. Ensino superior. 4. Educação básica. I. Macedo, Ricardo Burity Croccia. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

Um Estudo sobre a Possibilidade do Ensino de Conceitos Fundamentais do Cálculo no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo

Aprovado em: 29 de novembro de 2024.

COMISSÃO EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
RICARDO BURITY CROCCIA MACEDO
Data: 03/12/2024 12:45:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo (Orientador)
(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

gov.br Documento assinado digitalmente
RENATO BURITY CROCCIA MACEDO
Data: 03/12/2024 19:22:33-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Renato Burity Croccia Macedo
(Universidade Estadual da Paraíba - UEPB)

gov.br Documento assinado digitalmente
GEIVISON DOS SANTOS RIBEIRO
Data: 03/12/2024 14:18:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Geivison dos Santos Ribeiro
(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza [...].”

Bertrand Russell

RESUMO

O presente trabalho consiste em um estudo sobre o ensino de conceitos fundamentais de Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio, considerando sua grande importância e inúmeras aplicações. A introdução desses conceitos nessa etapa da educação básica tem como objetivo o desenvolvimento de um conhecimento prévio sobre o assunto, facilitando o aprendizado do conteúdo nos cursos superiores, além de proporcionar grande aplicabilidade na resolução de diversos problemas. Para isso, foi realizada uma pesquisa bibliográfica com o objetivo de apresentar dados sobre o insucesso da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior, além de argumentos que corroboram o tema da pesquisa e, por fim, propor estratégias didáticas para sua inclusão de maneira acessível e contextualizada no ensino médio.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral, ensino médio, ensino superior, educação básica.

ABSTRACT

This work presents a study on the teaching of fundamental concepts of Differential and Integral Calculus in high school, considering its great importance and numerous applications. The introduction of these concepts at this stage of basic education aims to develop prior knowledge of the subject, facilitating learning in higher education courses, as well as providing great applicability in solving various problems. To this end, a bibliographical research was conducted with the objective of presenting data on the failure of the Differential and Integral Calculus course in higher education, along with arguments that support the theme of the research, and lastly, suggest didactic strategies for its inclusion in an accessible and contextualized manner in high school.".

Keywords: Differential and Integral Calculus, high school, higher education, basic education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 MEMORIAL ACADÊMICO

Nasci em Campina Grande em 1992, meus pais se separaram pouco tempo depois que nasci, desde então morei durante toda a minha infância e adolescência com minha mãe e meu irmão mais velho.

Comecei a estudar aos 3 anos de idade em uma escola particular bem pequena no bairro em que eu morava, na cidade de Campina Grande. Lembro que desde pequena sempre gostei de estudar, amava ler, escrever, fazer as atividades escolares, assim que chegava da escola já queria fazer minhas atividades de casa, algo incomum entre a maioria das crianças.

Enquanto eu cursava o que chamávamos de alfabetização, minha mãe teve problemas financeiros e eu precisei sair da escola que estudava e mudar para a Escola Estadual de Ensino Fundamental Antônio Vicente, tive que avançar uma série pois as crianças da escola ainda estavam aprendendo a ler e eu já lia muito bem, foi um período difícil da minha infância. No ano seguinte minha mãe conseguiu me colocar em uma outra escola particular pequena, na qual estudei até a 4ª série, gostava bastante de estudar nessa escola, apesar de possuir um método de disciplina bem rígido, lembro que sempre que a diretora entrava na sala todas as crianças deviam se levantar e ficar em pé até que a diretora liberasse para sentar, a escola também possuía uma metodologia de ensino bem tradicional, também não tinha salas diferentes nem parquinho, na hora do recreio ficávamos brincando no pátio da escola.

Então comecei a estudar na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Dr. Hortêncio de Sousa Ribeiro, era considerada uma boa escola pública, não tinha uma estrutura muito boa, mas lembro de ter tido bons professores enquanto estudava lá. Sempre gostei de matemática e recordo que sempre estava ajudando meus amigos com essa e outras disciplinas, comecei então a perceber que uma ótima maneira de aprender um conteúdo é ensinando-o para alguém. Fiquei nessa escola até o 1º ano do ensino médio, quando fiz a prova para entrar no que se chamava Centro Federal de Educação Tecnológica da Paraíba, para fazer um curso técnico integrado de Manutenção de Computadores. Consegui ser aprovada e depois de ter concluído um ano de curso o nome da escola mudou para Instituto Federal da Paraíba (IFPB).

Tenho ótimas lembranças do IFPB, tínhamos uma boa estrutura de estudo, salas confortáveis, laboratórios, uma boa biblioteca. A maioria dos meus colegas estavam interessados em tirar boas notas, é muito bom estudar em um ambiente assim. Estudar no IFPB também trouxe um pouco mais de maturidade, pois a escola funcionava de modo parecido com a universidade.

Após concluir o meu curso no IFPB, escolhi não seguir na mesma área de atuação, então fiz ENEM e passei para estudar Pedagogia na Universidade Federal de Campina Grande, nesse momento eu já estava casada, e depois de muito debater sobre o assunto eu e meu marido decidimos ter um filho. Não consegui conciliar o curso com os cuidados de um bebê, então tive que abandonar o curso.

Passei muitos anos cuidando do meu filho e da minha casa, sempre soube que voltaria a estudar algum dia, foi quando há alguns anos, quando já estava morando em João Pessoa, decidi fazer ENEM novamente para ingressar em um curso a distância na Universidade Federal da Paraíba, naquele momento não sabia qual curso eu iria fazer. Tirei uma boa nota no ENEM, e após dois anos de desencontros consegui me inscrever no processo seletivo para o curso Ead da UFPB, nunca tinha pensado em fazer o curso de Matemática, mesmo tendo sido minha matéria predileta durante toda a vida. Quando fui fazer a inscrição, Licenciatura em Matemática foi o curso no qual eu tinha mais interesse entre as opções disponíveis.

Após começar a estudar no curso de Matemática senti que eu havia me encontrado, estudar matemática para mim é quase um hobby, quanto mais eu estudava mais me apaixonava pela área, além de gostar muito de ensinar e aprender sobre todo o processo de ensino e aprendizagem.

No momento que iniciei o curso, meu segundo filho tinha um ano de idade, foi difícil estudar tendo a responsabilidade de cuidar de duas crianças, sendo uma delas tão pequena, demandando muitos cuidados e atenção, além das atribuições relacionadas à administração de uma casa. Lembro de muitas vezes começar a estudar já tarde da noite, indo até a madrugada, pois era o horário que conseguia fazer isso, mas continuei estudando e dando o meu melhor, sempre fui uma pessoa comprometida, e com muita dedicação consegui ter um bom desempenho nas disciplinas que cursei.

Não tive nenhuma experiência profissional como professora de matemática, mas as experiências que tive nas disciplinas de estágio fizeram com que eu tivesse uma noção das dificuldades que professores e alunos enfrentam na educação pública.

Ao começar este curso, estabeleci o compromisso de que, desta vez, iria concluir o curso não importando o que acontecesse, hoje me sinto muito feliz e realizada por estar tão perto de alcançar este objetivo.

2 INTRODUÇÃO

O presente trabalho consiste no estudo da possibilidade do ensino dos conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio. A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral está presente principalmente nos cursos das Ciências Exatas, é um dos conteúdos mais importantes dentro dessas ciências tendo em vista a sua grande aplicabilidade nas diversas áreas do conhecimento.

Os primeiros registros a respeito de ideias relacionadas ao Cálculo foram encontrados nas antigas civilizações que viveram muitos séculos antes de Cristo, ao longo da história o Cálculo foi se desenvolvendo até se tornar o que estudamos hoje nos cursos superiores, sendo muito usado na matemática, física, química, economia, nas engenharias, medicina, entre muitos outros ramos do conhecimento onde esse conteúdo é aplicado.

Apesar de sua grande importância o Cálculo Diferencial e Integral vem sendo por muito tempo um grande temor entre os estudantes universitários, possuindo altos índices de reprovação e abandono. Segundo Pinto e Moreira (2019), a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I está entre as 15 disciplinas que mais reprovam no curso de Licenciatura em Matemática a distância da Universidade Federal da Paraíba, com uma taxa de 43,9% de reprovação, índice verificado entre os períodos de 2007.2 e 2012.2. Esses índices se repetem em diversas Universidades do país, a diretora da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Cláudia Morgado, afirmou em 2023, que o índice de reprovação na disciplina de Cálculo chegou até 70% na Universidade.

O motivo para esse insucesso, segundo muitos professores da disciplina, se dá por uma “falta de base” por parte dos alunos. No entanto, Rezende (2003) afirma que

> Ao contrário do que se pensa em geral, pode-se afirmar que parte significativa dos problemas de aprendizagem “do atual" ensino de Cálculo está “fora" dele e é “anterior" inclusive ao seu tempo de execução. Não se trata apenas da tão propalada “falta de base" dos estudantes, como afirma a grande maioria dos nossos colegas professores. [...] Assim, ao invés de se fazer menção a uma “falta de base"dos estudantes, o que se precisa fazer, de fato, é estabelecer os conceitos básicos e necessários para aprender as ideias básicas do Cálculo. (REZENDE, 2003, p.31)

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo mostrar que é possível ensinar os conceitos fundamentais da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio, seja como parte do currículo dos estudantes, através de conteúdos que já existem na grade curricular do ensino médio, de forma contextualizada, ou através da oferta dessa disciplina no currículo dos itinerários formativos, de acordo com o novo modelo do ensino médio.

De forma específica, pretende-se expor brevemente a história do Cálculo e sua definição de forma intuitiva, assim como a de seus conceitos fundamentais; apresentar dados a respeito do insucesso da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior; e por fim explicar como o conteúdo de Cálculo pode ser ensinado no ensino médio.

2.1 JUSTIFICATIVA

O Cálculo Diferencial e Integral já fez parte da educação básica brasileira. Em 1890, no início da República, o ministro Benjamim Constant, promoveu uma reforma na educação com o objetivo de dar mais atenção ao ensino científico, como parte desta reforma o Cálculo Diferencial e Integral passou a fazer parte dos conteúdos ensinados. Com o passar dos anos os conteúdos dessa disciplina foram sendo reduzidos, quando então, a partir de 1960, com o movimento da Matemática Moderna, foram incluídos novos conteúdos no currículo escolar, considerados mais importantes e consequentemente foram retirados outros, dentre eles o Cálculo. (Rocha, 2018, p.23-24)

O motivo para o insucesso do ensino do Cálculo no ensino médio, segundo Machado (2015), se dá pelo fato de que

> (...) essas tentativas não passaram de uma antecipação do modo como o cálculo é ensinado na universidade, e o problema é que nem na universidade o curso de introdução ao cálculo funciona bem. Como poderia funcionar bem no ensino médio? (Machado, 2015)

Para ele, a melhor forma de corrigir esse problema é ensinar ao estudante do ensino médio as ideias mais importantes do Cálculo por meio de funções simples, principalmente as funções polinomiais.

Então, se os alunos já tiverem contato com os conceitos fundamentais dessa disciplina desde o ensino médio, eles poderão compreender com mais facilidade o conteúdo quando chegarem no ensino superior, pelo fato de já estarem familiarizados com o assunto, além disso, esse conteúdo pode tornar o estudo de temas como funções, cinemática, etc. mais fáceis de serem compreendidos no ensino médio, além de dar ao estudante ferramentas com as quais ele pode simplificar a resolução de diversos problemas das diversas áreas do conhecimento.

Tendo em vista a grande importância do Cálculo Diferencial e Integral para o estudo de diversas áreas do conhecimento, sua grande aplicabilidade, e o benefício que pode trazer para os estudantes, pretendemos estudar a possibilidade de se ensinar conceitos fundamentais do Cálculo ainda no ensino médio.

3 MÉTODO DE PESQUISA

Este trabalho consiste em uma pesquisa bibliográfica, realizada com o objetivo de investigar e analisar a literatura existente a respeito da viabilidade e métodos para o ensino de conceitos fundamentais de Cálculo no ensino médio. A pesquisa busca identificar abordagens pedagógicas e benefícios associados a essa prática.

Alves (2007) explica que uma pesquisa bibliográfica

> É aquela desenvolvida exclusivamente a partir de fontes já elaboradas – livros, artigos científicos, publicações periódicas, as chamadas fontes de "papel". Tem como vantagem cobrir uma ampla gama de fenômenos que o pesquisador não poderia contemplar diretamente. (Alves, 2007, p. 55)

Foram coletadas e analisadas, informações a partir de artigos científicos, monografias, dissertações, teses, livros, etc. relacionados ao tema proposto neste trabalho, através de uma busca em bases de dados acadêmicas e bibliográficas da internet, como o Google Acadêmico, sendo utilizadas palavras-chave como: ensino médio, ensino, cálculo, integral, derivada.

Não foi realizado nenhum filtro por período, os trabalhos que atenderam ao tema proposto do presente trabalho foram aproveitados. A questão que orientou a busca pelas fontes foi: É possível ensinar os conceitos fundamentais da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio?

As referências foram selecionadas de acordo com a relevância e relação com o tema estudado, assim como sua contribuição para o entendimento da viabilidade do ensino de Cálculo no ensino médio.

A análise das informações foi realizada por meio de uma leitura exploratória do material selecionado, em uma abordagem qualitativa.

4 BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO

Muitos atribuem a Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) o título de criadores do Cálculo, mas os primeiros indícios de problemas relacionados ao Cálculo datam de séculos antes de Cristo, encontrados em papiros egípcios e tábuas cuneiformes babilônicas, tratando de problemas de mensuração retilínea e curvilínia.

Pode-se dizer que Arquimedes de Siracusa (287a.C - 212 a.C), foi um grande precursor do Cálculo ao utilizar o método da exaustão para calcular área de figuras planas, aproximando a área de uma forma irregular ao dividi-la em figuras e formas mais simples e somando suas áreas, um conceito que se aproxima da integração, além de outras inúmeras contribuições que Arquimedes deu para o Cálculo e para a matemática em geral. Para Boyer (1992)

> Ninguém no mundo antigo iguala-se a Arquimedes, quanto à invenção e à demonstração, ao lidar com problemas relacionados ao cálculo. No entanto, o teorema geral mais antigo em Cálculo não se deve a Arquimedes, mas a matemáticos gregos que viveram, provavelmente, meia dúzia de séculos mais tarde. (Boyer, 1992, p. 7)

Ao longo dos séculos muitos outros matemáticos contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo, como Kepler (1571-1630), Cavalieri (1598-1647), Wallis (1616-1703), Barrow (1630-1677), entre outros. Dois nomes importantes do século XVII foram Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), que simultaneamente fizeram a junção de Álgebra e Geometria, e produziram uma grande inovação, a Geometria Analítica.

Isaac Newton e Gottfried Leibniz são considerados os “pais” do cálculo. Eles trabalharam de forma individual e uma de suas maiores contribuições foi criar “um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais [...], ou seja, à criação de um cálculo manipulável e proveitoso” (Eves, 2011, p. 435).

Para Maor (2008), a invenção do Cálculo foi o evento mais importante da Matemática desde que Euclides reuniu a estrutura da geometria clássica em seu livro Os Elementos, 2000 anos antes. O conhecimento do Cálculo mudou para sempre o modo como os matemáticos pensam e trabalham, e seus métodos afetariam todos os ramos da ciência, pura e aplicada.

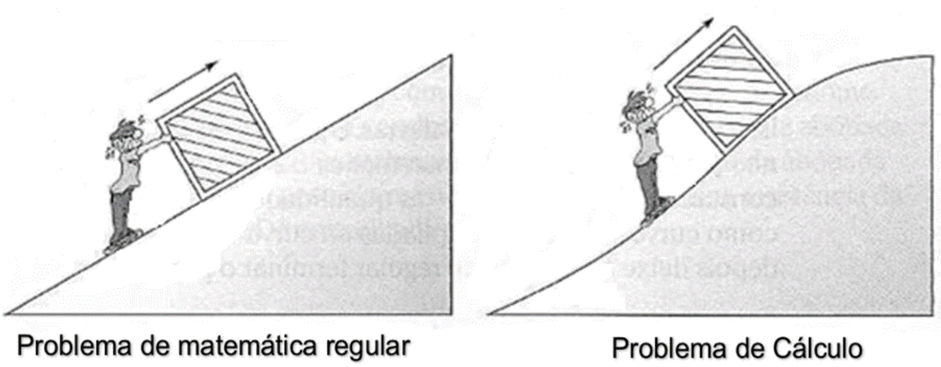
No século XIX, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), trouxe aos fundamentos do Cálculo um tratamento consistente e rigoroso. Deve-se a Cauchy grande parte da forma como o Cálculo é tratado até os dias atuais nos livros e textos universitários.

5 O QUE É CÁLCULO?

A palavra Cálculo tem origem do latim *calculu*s, que significa “pedra pequena”, esse termo era usado para se referir a pequenas pedras ou contas usadas para contagem e cálculos. Com o tempo esse termo passou a ser associado não apenas às pequenas pedras utilizadas pelos povos antigos, mas também ao ato de contar e calcular em geral, e hoje em dia normalmente é usado para se referir à área da matemática que lida com as operações de contagem, medição e a análise de variações e mudanças.

Segundo Ryan (2016) “Cálculo é basicamente toda a Álgebra e Geometria avançadas. Em certo sentido, não é nenhuma matéria nova - ele pega as regras corriqueiras da Álgebra e da Geometria, e ajusta-as para que possam ser usadas em problemas mais complicados.”

Figura 1 - Diferença entre matemática básica e Cálculo



Fonte: Ryan, 2016

Ryan (2016) dá um exemplo de como isso acontece na prática. Na primeira imagem da figura 1, pode-se ver um homem empurrando uma caixa em uma rampa que tem uma inclinação em linha reta. Para determinar a quantidade de energia necessária com a qual o homem consiga empurrar a caixa até o topo da rampa pode-se utilizar apenas matemática básica, pois nesta situação o homem está empurrando a caixa com uma força e velocidade constantes.

Para calcular a quantidade de energia utilizada pelo homem ao empurrar a caixa, a partir da situação da segunda imagem da figura 1, não é possível apenas com a matemática básica, pois a rampa tem uma inclinação curva, nesta situação todos os fatores estão mudando constantemente, a inclinação da rampa, a força com que o homem empurra a caixa e a quantidade de energia gasta, portanto será necessário utilizar o Cálculo. De forma simples, pode-se dizer que o Cálculo amplia infinitamente as curvas do gráfico, nesse caso da rampa, até que elas fiquem retas e seja possível usar a matemática básica para resolver o problema.

No “mundo real” o Cálculo é bastante utilizado e tem muitas aplicações, por exemplo, para um engenheiro construir um edifício com o teto em formato de abóbada ele precisa saber a área do teto, para assim poder calcular a quantidade de materiais necessários e o peso da estrutura, então ele precisará do Cálculo para isso.

Em 1975, a NASA enviou um satélite até Marte, para isso ela precisou do Cálculo para determinar a "trajetória" que o satélite deveria percorrer, pois tanto a Terra como Marte giram em órbitas elípticas, de diferentes tamanhos, e a velocidade dos dois planetas está sempre mudando, além da influência que o satélite sofrerá, durante o caminho, da força gravitacional da Terra, da Lua, de Marte e do Sol. (Ryan, 2016, p. 11)

A lista de aplicações continua, na economia o cálculo é usado para modelar e analisar comportamentos econômicos, como maximização de lucros e minimização de custos. Na área de finanças ele é usado para calcular taxas de crescimento, otimizar portfólios e avaliar riscos. Na medicina e biologia é usado para modelar o crescimento de populações, a propagação de doenças e a dinâmica de sistemas biológicos. Também é fundamental em imagens médicas, como na reconstrução de imagens por tomografia. Na química o cálculo é usado para modelar reações químicas e a cinética das reações, além de prever a distribuição de substâncias em diferentes condições. Essas são apenas algumas das muitas áreas em que o cálculo é fundamental, ele fornece as ferramentas necessárias para analisar e compreender uma vasta gama de problemas complexos em diversas disciplinas.

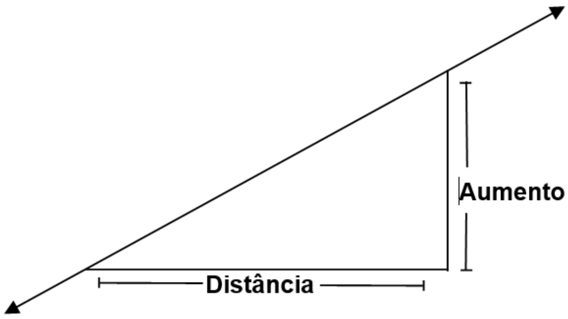
6 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO

Segundo Machado (2015) uma ideia fundamental possui três características: primeira, pode-se explicar uma idéia fundamental utilizando apenas linguagem cotidiana; segunda, uma idéia fundamental está sempre ligada a muitas outras ideias da mesma disciplina; e terceira, nenhuma idéia fundamental está restrita a apenas uma disciplina. Para ele o cálculo se baseia em uma única ideia fundamental: "usar uma linha reta para servir de aproximação a uma linha que não necessariamente é reta" (Machado, 2015), ou seja, utilizar um valor constante como aproximação de valores não constantes. A partir dessa ideia principal surgem os conceitos de diferenciação e de integração.

6.1 DIFERENCIAÇÃO

A diferenciação é o processo de achar a derivada em cada ponto de uma curva. De forma simples pode-se dizer que a derivada é a inclinação de uma curva, isto é equivalente a uma razão. Na educação básica, aprende-se que a inclinação da reta é igual a razão entre o aumento e a distância.

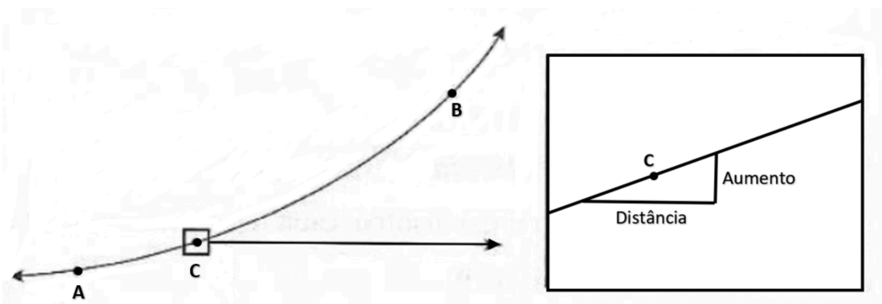
Figura 2 - A inclinação de uma reta é igual ao aumento sobre a distância



Fonte: Ryan, 2016

Em uma curva, a inclinação da reta está mudando constantemente, por isso é necessário o uso do Cálculo para obter essa inclinação. Quando se amplia bastante uma pequena parte da curva, de maneira infinita, ela se torna reta, isso é diferenciação.

Figura 3 - Ampliando a curva

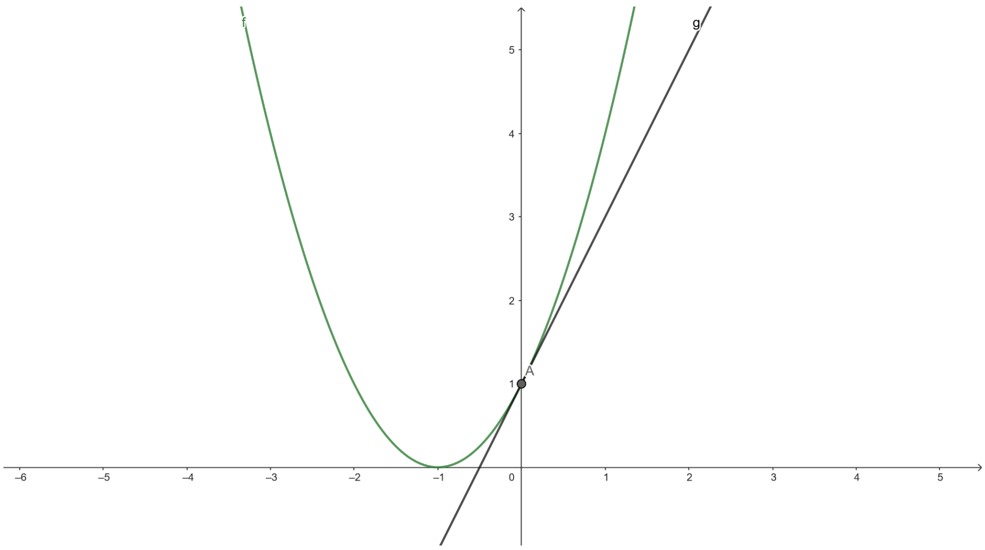


Fonte: Ryan, 2016

Na matemática as curvas podem ser representadas através de funções, e encontrar a derivada de uma função significa justamente encontrar a inclinação da reta tangente a uma função. Quando se aplica a derivada, é possível estudar todo o comportamento de uma função, onde a função é crescente ou decrescente, para quais valores a função atinge seu valor máximo ou mínimo, identificar pontos de inflexão (pontos onde ocorre uma mudança de concavidade), etc.

Na figura 4, pode-se observar, em verde, o gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$. A reta cinza representa a derivada da função $f(x)$ no ponto $A = (0, 1)$. A derivada da função $f(x)$ é igual a $f'(x) = 2x + 2$. Para $x = 0$, tem-se $f'(0) = 2$, que é um valor positivo, portanto, a função é crescente neste ponto, como é possível observar na figura 4.

Figura 4 - Reta Tangente ao Ponto A



Fonte: Elaborada pela autora

A derivada também pode ser interpretada como a taxa de variação instantânea. Para encontrar a taxa de variação média de uma função f em um intervalo $[a, b]$ é necessário calcular a inclinação da reta que liga os pontos extremos desse intervalo no gráfico da função, através da seguinte fórmula: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Mas quando se quer entender melhor o comportamento de uma função a taxa de variação média não irá fornecer muitas informações, melhor seria conhecer a taxa de variação em intervalos muito pequenos, muito próximos de zero, ou melhor ainda, conhecer a taxa de variação em cada ponto da função, isso é a taxa de variação instantânea ou também chamada de derivada da função. Uma taxa de variação média estudada na Física é a velocidade média, que corresponde a variação do deslocamento dividido pela variação do tempo. Uma taxa de variação instantânea, ainda com relação a velocidade, é a velocidade instantânea, que corresponde à variação do deslocamento dividido pela variação do tempo, mas quando a variação do tempo é muito pequena, tendendo a zero.

Para abordar o conceito de derivada de forma mais rigorosa será necessário utilizar o conceito de infinito e o cálculo de limites, estes conceitos não serão abordados neste trabalho tendo em vista que são conceitos muito abstratos, Ávila afirma que “criou-se o hábito de preceder o ensino de derivadas de um pesado capítulo sobre limites, o que é completamente desnecessário”(Ávila, 2006.), portanto, este trabalho apresentará apenas a noção intuitiva do conceito de derivada. Felizmente, para calcular a derivada de funções, existem algumas regras gerais que fazem com que não seja necessário utilizar o cálculo de limites para encontrar a derivada de funções.

As principais regras utilizadas para calcular derivadas de funções são:

1. **Regra da constante.**

$\frac{d}{dx}k = 0$, onde k é uma constante.

Exemplo: Se $f(x) = 2$, então $\frac{d}{dx}2 = 0$.

2. **Regra da potência.**

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, onde n é um número inteiro positivo.

Exemplo: Se $f(x) = x^5$, então $\frac{d}{dx}x^5 = 5x^{5-1} = 5x^4$.

$\frac{d}{dx}x = 1$, pois quando $f(x) = x = x^1$, então $\frac{d}{dx}x^1 = x^{1-1} = x^0 = 1$.

3. **Regra do produto por uma constante.**

Seja $k.g(x)$, então $f'(x) = k.g'(x)$.

Exemplos: Se $f(x) = 5x$, então $\frac{d}{dx}5x = 5$.

Se $f(x) = 4x^3$, então $\frac{d}{dx}4x^3 = 4 \cdot (3x^2) = 12x^2$.

4. Regra da soma e da diferença.

Se $f(x) = g(x) \pm h(x)$, então $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

Exemplos: Se $f(x) = x^2 + x + 10$, então $f'(x) = 2x + 1$.

Se $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 5x$, então $f'(x) = 6x^2 - 12x - 5$.

5. Derivada de funções trigonométricas.

$\frac{d}{dx} sen(x) = cos(x)$,

$\frac{d}{dx} cos(x) = - sen(x)$,

$\frac{d}{dx} tg(x) = sec^2(x)$,

$\frac{d}{dx} cotg(x) = - cossec^2(x)$,

$\frac{d}{dx} sec(x) = sec(x) \cdot tg(x)$,

$\frac{d}{dx} cossec(x) = - cossec(x) \cdot cotg(x)$.

6. Derivada de funções exponenciais e logarítmicas.

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

$\frac{d}{dx}a^x = a^x ln(a)$.

Exemplo: Se $f(x) = 10^x$, então $\frac{d}{dx}10^x = 10^x ln(10)$.

$\frac{d}{dx} ln(x) = \frac{1}{x}$.

$\frac{d}{dx}log_a(x) = \frac{1}{x.ln(a)}$.

Exemplo: $f(x) = log_2(x)$, então $\frac{d}{dx}log_2(x) = \frac{1}{x.ln(2)}$.

7. **Regra do produto.**

Seja $f(x) = (g(x) \cdot h(x))$, então $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$.

Exemplo: $f(x) = x^3 \cdot sen(x)$, então $f'(x) = (x^3)' \cdot sen(x) + (x^3) \cdot (sen(x))'$

$$= 3x^2 sen(x) + x^3 cos(x).$$

8. **Regra do quociente.**

Seja $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, então $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$.

Exemplo: Se $f(x) = \frac{sen(x)}{x^4}$, então $f'(x) = \frac{(sen(x))' \cdot x^4 - sen(x) \cdot (x^4)'}{(x^4)^2} = \frac{cos(x) \cdot x^4 - sen(x) \cdot 4x^3}{x^8}$

$$= \frac{x^3(x \cdot cos(x) - 4sen(x)}{x^8} = \frac{x \cdot cos(x) - 4sen(x)}{x^5}.$$

9. **Regra da Cadeia**

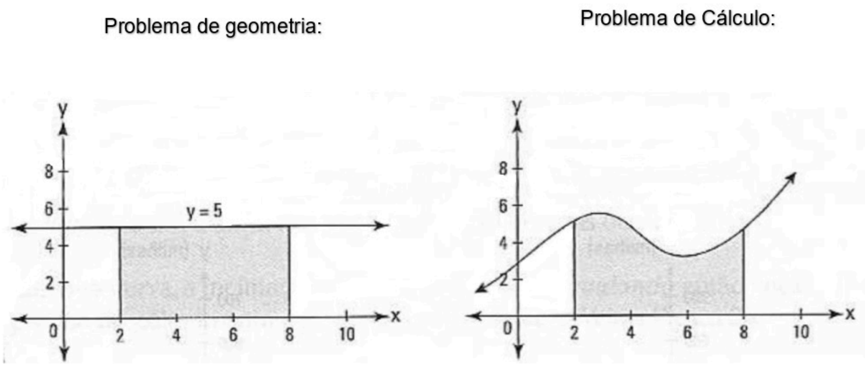
Se $f(x) = g(h(x))$, então $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h(x)$.

Exemplo: Se $f(x) = sen(x^2)$, $f'(x) = cos(x^2) \cdot 2x = 2x.cos(x^2)$.

6.2 INTEGRAÇÃO

A integração pode ser explicada, de forma simples, como o processo de dividir uma área em pequenas partes e depois calcular e somar a área dessas pequenas partes a fim de obter a área total. Para calcular a área da imagem à esquerda na figura 4 basta utilizar geometria básica, a imagem consiste em um retângulo, sua área é determinada pela multiplicação da base pela altura. Na imagem à direita na figura 4, não é possível utilizar apenas geometria básica para calcular a área da figura, será necessário utilizar o Cálculo.

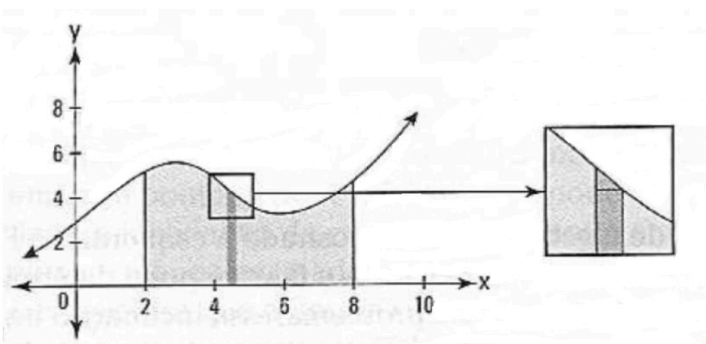
Figura 5 - Problema de geometria versus problema de Cálculo



Fonte: Ryan, 2016

Como já foi mencionado, ao se ampliar bastante uma linha curva ela fica reta, portanto ao dividir a área da imagem a direita em pequenas partes e ampliá-las (figura 5), pode-se agora utilizar cálculos básicos para obter a área dessas pequenas partes e depois somá-las a fim de obter a área total, isso é integração.

Figura 6 - Ampliando a curva novamente



Fonte: Ryan, 2016

Felizmente, não será necessário realizar todo esse processo para obter o resultado em problemas envolvendo a integral. Na verdade, o processo de integração consiste no processo inverso da diferenciação. A seguir são apresentadas as principais regras utilizadas em resoluções de exercícios envolvendo integrais:

1. **Regra da constante**

$\int kdx = kx + C$, onde k é uma constante e C é uma constante indeterminada.

Exemplos: $\int 5dx = 5x + C$.

$\int dx = x + C$.

2. **Regra da potência.**

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, onde $n \neq -1$ e C é uma constante indeterminada.

Exemplo: $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$

3. **Regra do produto por uma constante.**

$\int k.g(x)dx = k\int g(x)dx + C$, onde k é uma constante e C é uma constante indeterminada.

Exemplo: $\int 2x\, dx = 2\int x\, dx + C = 2\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = x^2 + 2C = x^2 + C$.

4. **Regra da soma e da diferença.**

$\int (g(x) \pm h(x))\, dx = \int g(x)dx \pm \int h(x)\, dx$.

Exemplo: $\int (2x^2 + 3x - 1)dx = \int 2x^2 dx + \int 3xdx - \int 1dx$

$$= 2\int x^2 dx + 3\int x dx - \int dx$$

$$= 2.\frac{x^3}{3} + 3.\frac{x^2}{2} - x + C$$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + C.$$

5. Integral de funções trigonométricas.

$\int sen(x)dx =- cos(x),$

$\int sec^2(x)dx = tg(x) + C,$

$\int cos(x)dx = sen(x),$

$\int sec(x)dx = ln|sec(x) + tg(x)| + C,$

$\int tg(x)dx =- ln|cos(x)| + C,$

$\int cossec^2(x)dx =- cotg(x) + C,$

$\int cotg(x)dx =- ln|sen(x)| + C,$

$\int cossec(x)dx =- ln|cossec(x) + cotg| + C,$

$\int sec(x) \cdot tg(x)dx = sec(x) + C.$

6. Integral de funções exponenciais e logarítmicas.

$\int e^x dx = e^x + C.$

$\int a^x dx = \frac{1}{ln(a)} \cdot a^x + C.$

Exemplo: $\int 2^x dx = \frac{1}{ln(2)} \cdot 2 + C = \frac{2}{ln(2)} + C.$

$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C.$

$\int ln(x)dx = x(ln(x) - 1) + C.$

7. Integração por partes.

$\int g(x)h'(x)dx = g(x)h(x) - \int h(x)g'(x)$.

Exemplo: $\int xsen(x)dx = g(x)h(x) - \int h(x)g'(x)$

$= x(-\cos(x)) - \int(-\cos(x))dx$

$=- x\cos(x) + \int \cos(x)dx$

$=- x\cos(x) + sen(x) + C$.

8. Método da substituição.

$\int g(h(x))h'(x)dx = \int g(u)du$.

$u = h(x)$.

$\frac{du}{dx} = h'(x) \Rightarrow du = h'(x)dx$.

Exemplo: $\int e^{5x}dx$.

Seja $u = 5x$, então $du = 5dx \Rightarrow dx = \frac{du}{5}$.

$\int e^{u}\frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int e^{u}du = \frac{1}{5}\int e^{u} + C = \frac{e^{5x}}{5} + C$.

Neste tópico foram apresentados os conceitos de derivada e de integral de forma sucinta e intuitiva, para definições mais formais desse conteúdo recomenda-se a leitura de Stewart (2013).

7 INSUCESSO DA DISCIPLINA DE CÁLCULO NO ENSINO SUPERIOR

Como já foi dito, a disciplina de Cálculo integral e Diferencial é uma das disciplinas mais importantes da matemática e está presente em praticamente todos os cursos da área das ciências exatas. Sua importância se dá devido a grande aplicabilidade de seu conteúdo nas diversas áreas do conhecimento, sendo muito utilizado por engenheiros, cientistas, economistas, físicos, químicos, entre muitas outras áreas do conhecimento em que os conteúdos de Cálculo têm aplicações.

Apesar de toda a sua importância, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral vem apresentando altos índices de reprovação e abandono. É vista como uma disciplina que possui um grau elevado de dificuldade, encarada pelos alunos como um desafio significativo.

Rafael e Escher (2015) realizaram um estudo de caso referente aos índices de aprovação/reprovação/evasão nos anos 2013, 2014 e 2015 (1º semestre) na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em uma instituição privada da região serrana do Rio de Janeiro. Com base nos dados coletados, eles observaram que o índice de alunos não aprovados em cada semestre varia entre 30% e 50%. Os autores também destacam que os índices de não-aprovação na mesma disciplina no ano de 2005 na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) estão entre 42% e 58%.

Rezende (2003) mostra que os índices de não-aprovação na Universidade Federal Fluminense, universidade a qual é professor, são ainda piores. Um levantamento realizado entre os anos de 1996 a 2000 mostrou que os índices de não-aprovação nas disciplinas de Cálculo oferecidas pela universidade estão entre 45% a 95%, no curso de Matemática este índice não é inferior a 65%.

Segundo Lopes (1999) a razão pela qual os estudantes de cursos universitários estão tendo um mal desempenho nas disciplinas de cálculo não se dá pelo fato de estarem sendo mal ensinados pelos diversos professores nas universidades, mas sim porque

> [...] o estudante, ao ingressar na universidade, não tem amadurecimento matemático necessário para obter a aprovação num curso de cálculo com o atual nível de exigência que é utilizado no curso. [...] Ele traz consigo deficiências de formação matemática do ensino médio e que não consegue suprir na universidade (LOPES, 1999, p. 135).

Rezende (2003) afirma que a origem da maior parte das dificuldades de aprendizagem do Cálculo no ensino superior se encontra no ensino básico, para ele o cálculo é a “espinha dorsal” do conhecimento matemático, é um conhecimento extremamente importante para a construção e evolução da matemática, por isso deveria fazer parte do ensino de matemática na educação básica, portanto ensinar Cálculo no ensino médio seria o primeiro grande passo para resolver os problemas de aprendizagem relacionados a disciplina no ensino superior.

8 CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

A primeira vista, pensar em adicionar mais um conteúdo na disciplina de matemática no ensino médio pode parecer inviável devido a enorme quantidade de conteúdos que os alunos precisam estudar nesse segmento da educação básica, muitos professores inclusive não conseguem cumprir com todos esses conteúdos propostos, mas segundo Ávila (1991) isso é uma questão que se resolve com uma melhor estruturação do currículo, para ele

> A ideia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do Cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados. A reforma dos anos 60 introduziu nos programas um pesado e excessivo formalismo. Não obstante as modificações que têm sido feitas nos últimos dez ou quinze anos, num esforço de melhoria do ensino, muito desse formalismo persiste em muitos livros e é responsável pelo inchaço desnecessário dos programas. (Ávila, 1991)

Mesmo com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (2000) enfatizando que o conteúdo de matemática deve ser ensinado "de forma contextualizada, aplicando aqueles princípios científicos a situações reais ou simuladas", o conteúdo de funções atualmente, ainda é abordado de forma isolada nas escolas, separado dos outros conteúdos.

Gasta-se muito tempo ensinando nomenclaturas e definições que não têm significado para o aluno, nomenclaturas como domínio, imagem e contradomínio de uma função, assim como as definições de injetividade, sobrejetividade e bijetividade. Ensinar esses conceitos demanda tempo, não que devam ser excluídos, mas pode-se enfatizar outras propriedades, como o comportamento de uma função, que pode ser analisado através de seu gráfico, observando os pontos críticos da função e seus intervalos de crescimento e decrescimento.

Outra questão que pode surgir é se os estudantes de ensino médio têm capacidade de entender os conceitos de Cálculo que geralmente são estudados em cursos de nível superior, é claro que se esse conteúdo for ensinado com toda a linguagem formal, simbólica, teoremas e demonstrações, definições, com todo o seu rigor, os estudantes do ensino médio não conseguirão compreender o conteúdo, pois eles ainda não têm conhecimentos específicos necessários nessa etapa da educação básica.

O professor Robert Duclos foi professor comissionado pela UNICAMP e ministrou aulas de Matemática nos três anos dos cursos técnicos na modalidade integrada ao ensino técnico de Eletrotécnica, Mecânica e Tecnologia de Alimentos durante os anos de 1967 a 1979. Ele conta que elaborou um programa para os três anos dos cursos técnicos e o Cálculo foi inserido no segundo semestre do segundo ano, os alunos estudavam limites e derivadas, derivadas de funções algébricas, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, derivadas das funções implícitas, máximos e mínimos, e integração. Tudo isso foi ensinado de forma intuitiva, baseado nas aplicações dos conteúdos, deixando a formalidade para o último ano do curso. O professor conta que não encontrou dificuldade maior de assimilação da matéria entre os alunos durante os treze anos em que deu aula nos cursos técnicos da UNICAMP. (Duclos, 1992).

Portanto, a ideia é que o conteúdo de Cálculo seja abordado de forma contextualizada, enfatizando as suas aplicações, com exemplos simples e de maneira interdisciplinar, um estudo mais prático, livre de formalizações, de forma que estimule o raciocínio crítico do discente e o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas. Machado (2015) afirma que

> [...] na escola, tratamos os polinômios no nível da técnica —fatoração de polinômios, divisão de polinômios, etc. Tudo técnica. Ninguém entende bem o que está fazendo, ou por que aquilo é importante. Contudo, as funções polinomiais são as mais fáceis de estudar com as ideias do cálculo, e um curso de cálculo simples, focado em polinômios, daria ao aluno a justificativa para estudar muitas outras ideias e técnicas de um jeito mais natural. (Machado, 2015)

Ávila (1991) defende que o Cálculo seja ensinado no ensino médio, pois esse conteúdo traz ideias novas, diferentes do que o aluno está acostumado a estudar, ideias que são muito importantes e têm uma imensa variedade de aplicações no mundo moderno. Para ele o objetivo principal do ensino básico é preparar o jovem para se integrar da melhor forma à sociedade, e com relação ao ensino da matemática, Ávila afirma que essa disciplina faz parte da experiência humana ao longo do séculos, e continua sendo até hoje um instrumento importante e indispensável para o estudo dos diversos ramos do conhecimento.

Por causa das suas inúmeras aplicações o Cálculo poderia ser ensinado no ensino médio, também com o propósito de que os alunos pudessem aproveitar esse conhecimento para tornar alguns conteúdos mais fáceis de serem estudados. Machado (2015) afirma que com o conhecimento da derivada o aluno não precisa mais decorar as fórmulas das coordenadas do vértice de uma parábola e na física, as fórmulas de movimento retilíneo e movimento retilíneo uniformemente variado teriam mais sentido.

Um exercício muito comum no ensino básico é o de calcular as coordenadas do vértice da função. Por exemplo, para calcular os valores de x e y do vértice da função $f(x) = -x^2 + 2x - 4$, o aluno precisará ter conhecimento das fórmulas $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ onde $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$, considerando a equação geral de uma função quadrática dada por $g(x) = ax^2 + bx + c$. Se o aluno tiver conhecimento do conceito de derivada ele vai saber que no vértice da função, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico é zero, pois esta reta estará na horizontal, dessa forma basta calcular a derivada da função e encontrar para qual valor de x a função é igual a zero. Utilizando as regras de derivação apresentadas anteriormente, conclui-se, a respeito do exemplo mencionado acima, que

$$f'(x) = -2x + 2$$
$$-2x + 2 = 0$$
$$x = 1$$

Então, basta substituir o valor de x na função para encontrar o valor de y.

$$f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 - 4$$
$$f(1) = -3$$

Portanto, os valores das coordenadas do vértice desta função são (1,-3).

Na Física, a fórmula da velocidade é justamente a derivada da fórmula da posição, no movimento uniformemente variado. Isso acontece porque a velocidade é a taxa de variação da posição com relação ao tempo. A derivada mostra como a posição muda à medida que o tempo passa, e isso é exatamente o que é a velocidade, ou seja, para entender como a posição está mudando em cada instante de tempo, usa-se a derivada da função da posição. Dessa forma, tendo a função que descreve a posição de um objeto no tempo, a derivada dessa função será a velocidade desse objeto naquele instante.

$$S(t) = So + Vot + \frac{1}{2}at^2,$$

$$V(t) = Vo + at.$$

Na geometria, a fórmula da área da superfície de uma esfera é exatamente a derivada da fórmula do volume da esfera. Isso é verdade pois, a derivada do volume fornece a taxa de variação do volume quando o raio é alterado. Essa taxa de variação está diretamente relacionada à área da superfície da esfera, porque o aumento no volume representa também um aumento da área da superfície da esfera.

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$A(r) = 4\pi r^2.$$

Dessa forma, se o aluno tiver o conhecimento de integrais e derivadas, ele entenderá melhor de onde surgem diversas fórmulas que são bastante utilizadas na educação básica, e também não precisará decorar tantas fórmulas, pois ele poderá obter algumas delas a partir de outras, utilizando as regras de derivação e integração.

8.1 NOVO ENSINO MÉDIO: ITINERÁRIOS FORMATIVOS

Em 2017, o Governo Federal determinou uma reforma educacional para o ensino médio através da alteração da Lei de Diretrizes e Bases da Educação. Essa mudança foi aprovada e publicada através da Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017, que estabelece as diretrizes para o novo ensino médio. Com a reforma, a organização curricular se torna mais flexível, oferecendo diferentes possibilidades de escolhas para os estudantes através dos itinerários formativos, que têm como foco as áreas de conhecimento e a formação técnica e profissional.

Segundo o Ministério da Educação, no novo ensino médio, a carga horária mínima será ampliada de 2400 horas anuais para 3000 horas, desse total, 1200 horas serão destinadas à oferta dos Itinerários Formativos, que são um conjunto de de disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo, etc., que os estudantes poderão escolher no ensino médio. Os Itinerários formativos podem se aprofundar nos conhecimentos de uma área do conhecimento (Matemáticas e suas Tecnologias, Linguagens e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e da formação técnica e profissional. Dessa forma, o jovem poderá escolher os itinerários formativos que estejam relacionados com a área profissional que o jovem deseja seguir.

Dessa forma, além da opção do conteúdo de Cálculo ser inserido na grade curricular geral básica, sendo trabalhado junto com os conteúdos que já existem no ensino médio, o conteúdo de Cálculo poderia ser inserido no itinerário formativo da área de Matemática e suas Tecnologias e seria muito bem aproveitado pelos alunos que têm interesse em se aprofundar no estudo de matemática.

8.2 EXERCÍCIOS DE CÁLCULO PARA O ENSINO MÉDIO

Neste tópico serão apresentados alguns exemplos de exercícios que podem ser utilizados para ensinar Cálculo no ensino médio.

Problema 1: Seja a função $h(x) =- 4x^2 + 5$ que determina a trajetória de um projétil lançado para o alto. Qual a altura máxima, em metros, que este projétil pode alcançar?

Solução: O coeficiente do termo de maior expoente da função é negativo, portanto o gráfico dessa parábola tem sua concavidade voltada para baixo, então a altura máxima do projétil será o valor de $h(x)$ no vértice da função, para encontrar esse valor basta derivar a função e igualá-la a zero, pois no vértice da função o coeficiente linear da reta tangente ao gráfico é zero, pois essa reta está na horizontal:

$$h'(x) =- 8x$$
$$- 8x = 0$$
$$x = 0.$$

Agora, substituindo o valor de x na função, encontra-se o seu valor máximo.

$$h(0) =- 4.0^2 + 5$$
$$h(0) = 5.$$

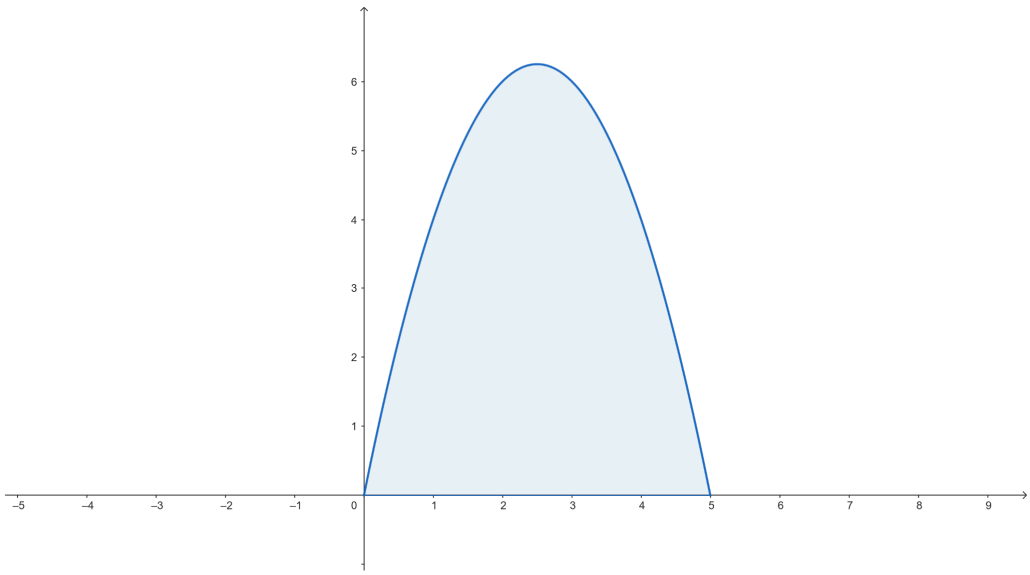
Portanto, a altura máxima que o projétil pode alcançar é de 5 metros.

Problema 2: Imagine que você precisa construir um muro e nele deixar uma abertura com formato de arco. Será necessário calcular a área dessa abertura para fazer o desconto na compra do material. Se o formato desse arco é determinado pela curva $-x^2 + 5x$, qual a área da região determinada por essa curva?

Solução: Considerando que a linha do solo será determinada pelo eixo x, para determinar as extremidades do arco, que serão o limite de integração basta fazer

$$-x^2 + 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ e \ x = 5.$$

Figura 7 - Área da abertura com formato de arco



Fonte: Elaborada pela autora

Agora, aplica-se esses limites na integral definida

$$\int_0^5 (-x^2 + 5x)dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right]_0^5 = \left(\frac{-5^3}{3} + \frac{5.5^2}{2}\right) - \left(\frac{-0^3}{3} + \frac{5.0^2}{2}\right) = \frac{5^3}{6} \simeq 20,83.$$

Problema 3 (ENEM 2015): Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior da estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A Tabela 6.1 associa intervalos de temperatura, em graus Celsius com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Tabela 6.1: Intervalos de temperatura, em graus Celsius e classificações.

Intervalos de temperatura (°C)	**Classificação**
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está:

A) muito baixa.
B) baixa.
C) média.
D) alta.
E) muito alta.

Solução: É necessário encontrar o ponto máximo da função, ou seja, qual a temperatura máxima que a estufa pode atingir durante o dia. Dessa forma, deve-se encontrar a derivada da função e igualar a 0, obtendo o valor de h para o ponto máximo da função.

$$T'(h) = -2h + 22$$
$$-2h + 22 = 0$$
$$h = 11.$$

Agora, substituindo o valor de h na função, encontra-se o seu valor máximo.

$$T(11) = -11^2 + 22 \cdot 11 - 85$$
$$T(11) = 36.$$

Este resultado se encaixa na classificação de Alta.

Problema 4 (Stewart, 2013, p. 366): A densidade linear de uma barra de comprimento $4m$ é dada por $p(x) = 9 + 2\sqrt{x}$, medida em quilogramas por metro, em que x é medido em metros a partir de uma extremidade da barra. Encontre a massa total da barra.

Solução: A densidade linear indica quanto a barra tem de quilogramas por metro, ou seja, quanto existe de massa em um determinado espaço. A massa e a densidade estão associadas por uma relação de taxa de variação, quando se faz a taxa de variação da massa em função da posição se obtêm justamente a densidade linear $\left(\frac{dm}{dx} = p(x)\right)$. Portanto a densidade linear é igual a derivada da massa, assim, para encontrar a massa deve-se integrar a densidade e usar os limites de integração de 0 a 4, que é o comprimento da barra.

$$m = \int_0^4 (9 + 2\sqrt{x})dx = \left[9x + 4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^4$$

$$m = \left(9 \cdot 4 + 4\frac{4^{\frac{3}{2}}}{3}\right) - \left(9 \cdot 0 + 4\frac{0^{\frac{3}{2}}}{3}\right)$$

$$m = 36 + \frac{32}{3}$$

$$m = \frac{140}{3} \simeq 46,67\ Kg.$$

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, foi defendida a importância do estudo dos conceitos fundamentais de Cálculo Diferencial e Integral na educação básica, em especial no ensino médio. O domínio desses conceitos não só irá preparar os estudantes para compreender melhor as disciplinas relacionadas ao cálculo na graduação, mas também irá contribuir para o desenvolvimento de habilidades cognitivas essenciais, como o raciocínio lógico e resolução de problemas, assim como para um entendimento mais profundo da matemática aplicada a diversas áreas do conhecimento, como a física, a economia, a engenharia, a informática, entre outras.

O Cálculo é um dos pilares da matemática moderna e está presente em uma ampla gama de cursos de graduação, especialmente nas áreas das ciências exatas. Mas as disciplinas de Cálculo são responsáveis por um grande número de reprovações e desistências nos cursos de graduação, muitas vezes os estudantes se deparam com atividades aprofundadas e sem contextualização, sem conhecimento prévio, ou seja, sem o entendimento das ideias fundamentais para a compreensão da disciplina. A inclusão do Cálculo no currículo do ensino médio, ao contrário de ser uma carga adicional, se torna um passo importante para o futuro dos alunos. A familiarização precoce com temas como, derivadas e integrais e suas aplicações práticas pode fortalecer a base matemática dos alunos e facilitar o entendimento de temas avançados nas diversas áreas do conhecimento.

No decorrer do trabalho foram apresentadas opiniões de diversos autores que acreditam que a inserção do Cálculo no ensino médio pode contribuir com a melhoria dos resultados dos alunos nas disciplinas de Cálculo no ensino superior e também facilitar o entendimento de vários conteúdos já presentes no currículo do ensino médio.

Todavia, a adoção de conceitos fundamentais de cálculo no currículo do ensino médio deve ser vista não como uma imposição, mas como uma oportunidade de ampliar horizontes, aprimorar o raciocínio lógico e preparar os alunos para os desafios acadêmicos e profissionais que encontrarão no futuro. É necessário, ainda, que a implementação dessa proposta seja acompanhada de metodologias de ensino inovadoras, que tornem o aprendizado do cálculo acessível e relevante para todos os estudantes.

Em síntese, não só é possível incorporar o estudo do cálculo diferencial e integral no ensino médio, como também, através dessa prática, o sistema educacional irá enriquecer a formação dos alunos, e também os capacitar para enfrentar um mundo cada vez mais exigente e repleto de desafios complexos que demandam habilidades matemáticas avançadas.

REFERÊNCIAS

ALVES, Magda. **Como escrever teses e monografia: um roteiro passo a passo.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

ÁVILA, Geraldo. **Limites e Derivadas no Ensino Médio?** In: Revista do Professor de Matemática, n.60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006.

ÁVILA, Geraldo. **O Ensino do Cálculo no Segundo Grau**. In: Revista do Professor de Matemática, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991.

BOYER, Carl B. **Tópicos de História da Matemática Para Uso em Sala de Aula - Cálculo.** São Paulo: Atual, 1992.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. 2000.

DUCLOS, Robert Costallat. **Cálculo no Segundo Grau**. In: Revista do Professor de Matemática, n.20. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 5a ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

LOPES , A. **Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS.** Matemática Universitária nº26/27- junho/dezembro 1999 – p.123-146

MACHADO, Nilson José. **Cálculo no ensino médio: já passou da hora.** São Paulo: Blog Imaginário Puro, 2015. Disponível em: <https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-ja-passou-da-hora/>. Acesso em: 23 ago, 2024.

MAOR, Eli. ***e*: A história de um número.** Tradução de Jorge Calife. 4ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Novo Ensino Médio.** Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/novo-ensino-medio-descontinuado>. Acesso em: 01 out, 2024.

PINTO, Renata Patrícia Lima Jeronymo Moreira; MOREIRA, Antonio Marcos Moreira. Análise da Reprovação em Disciplinas do Curso de Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba. In: CAMPONES, Kelly Cristina. (Org.). **Ensino e aprendizagem como unidade dialética 2.** Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019.

RAFAEL, Rosana Cordeiro; ESCHER, Marco Antonio. **Evasão, baixo rendimento e reprovações em Cálculo Diferencial e Integral: uma questão a ser discutida.** In: Encontro Mineiro de Educação Matemática, 7., 2015. Juiz de Fora. Anais [...]. Juiz de Fora: SBEM, 2015.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. São Paulo. 2003.

ROCHA, Joice Stella de Melo. **O Ensino de Cálculo no Ensino Médio**. 62 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São João Del Rei, Departamento de Matemática e Estatística. 2018.

RYAN, Mark. **Cálculo para Leigos**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Alta books, 2016.

SINDICATO DOS ENGENHEIROS NO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. **Escola Politécnica da UFRJ vai mexer no curso de Cálculo para reduzir taxas de reprovação.** 2023. Disponível em: <https://sengerj.org.br/escola-politecnica-da-ufrj-vai-mexer-no-curso-de-calculo-para-reduzir-taxas-de-reprovacao/>. Acesso em: 21 ago, 2024.

STEWART, James. **Cálculo: volume 1**. 7ª ed. São Paulo: Cengage, 2013.