



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA  
COORDENAÇÃO GERAL DE PROGRAMAS  
ACADÊMICOS E DE INICIAÇÃO  
CIENTÍFICA

TESTES ESPECTROSCÓPICOS DE MODIFICAÇÕES DA  
GRAVITAÇÃO EM ÁTOMOS MUÔNICOS

João Elias Juvito Matias  
Dissertação de Mestrado

JOÃO PESSOA

-2024-



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA  
COORDENAÇÃO GERAL DE PROGRAMAS  
ACADÊMICOS E DE INICIAÇÃO  
CIENTÍFICA

TESTES ESPECTROSCÓPICOS DE MODIFICAÇÕES DA  
GRAVITAÇÃO EM ÁTOMOS MUÔNICOS

**João Elias Juvito Matias**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Fábio Leal de Melo Dahia

JOÃO PESSOA

-2024-

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

M433t Matias, João Elias Juvito.

Testes espectroscópicos de modificações da gravitação em átomos muônicos / João Elias Juvito Matias. - João Pessoa, 2024.

103 f. : il.

Orientação: Fábio Leal de Melo Dahia.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Teorias da gravitação modificada. 2. Testes espectroscópicos. 3. Átomos muônicos. I. Dahia, Fábio Leal de Melo. II. Título.

UFPB/BC

CDU 531.5(043)



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
**Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física**

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** do aluno **João Elias Juvito Matias**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos vinte e sete dias do mês de setembro do ano de dois mil e vinte e quatro, às 10h00, na sala virtual <https://meet.google.com/kqw-ihyw-gyv>, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Gravitação e Cosmologia, de **João Elias Juvito Matias**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Fábio Leal de Melo Dahia (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Carlos Augusto Romero Filho (UFPB) e Marcos Antônio Anacleto (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Fábio Leal de Melo Dahia comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada “*Testes Espectroscópicos de Modificações da Gravitação em Átomos Muônicos*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Widelene Menezes Tavares Santos, Assistente em Administração, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **27 de setembro de 2024**.

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia  
Orientador - PPGF/UFPB



Documento assinado digitalmente  
CARLOS AUGUSTO ROMERO FILHO  
Data: 29/09/2024 18:21:09-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho  
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto  
UFCG

Dedico esta dissertação a Deus, pois sem ele nada teria sido possível.

# *Agradecimentos*

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, por me proporcionar todo amor e resiliência para que eu pudesse concluir mais uma etapa no meu processo de formação acadêmica.

Ao meu pai Josias, que sempre fez o melhor para que eu pudesse ter educação de qualidade, proporcionando todo cuidado e atenção necessários para que eu pudesse prosseguir na minha trajetória acadêmica.

À minha mãe, Eunice, pelos conselhos, pelas conversas ricas de motivação, de amor e de empatia, por nunca desistir de cuidar de mim e de me apoiar sempre que precisei.

À minha noiva Jaqueline, por estar comigo à 4 anos dividindo todas as experiências da vida, alegria, tristeza, saúde e doença, agradeço por permanecer me mantendo forte e perseverante para enfrentar este desafio, pois sem você, tenho certeza de que seria incapaz de concluí-lo.

Ao meu amigo, Gabriel, que está comigo desde o ensino médio, passamos juntos pela graduação e agora pela pós-graduação. Sempre extremamente atencioso comigo, sanando minhas dúvidas e dificuldades, compartilhando seu conhecimento para que eu pudesse enriquecer o meu.

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Dr. Fábio Dahia por me instruir cuidadosamente neste caminho, sendo um grande responsável por aumentar meu amor pela ciência, através das reuniões e aulas extremamente didáticas e esclarecedoras, com toda sua paciência e empenho foi muito eficaz ao me ensinar coisas que nunca achei que conseguisse aprender, para mim foi um exemplo não só de professor e pesquisador, mas uma referência como pessoa.

Ainda neste sentido, gostaria de agradecer aos professores Valdir e Romero, por proporcionarem discussões incríveis sobre física, por serem sempre prestativos, atenciosos e inclusivos, e principalmente por me motivaram a desenvolver minha pesquisa com muito amor e dedicação.

Aos amigos que fizeram/fazem parte do Departamento de Física: Fabiano, Mauro, Jesriel, Rodrigo, Marcos, Bruno, Samuel, Lameque, Vinícius, Felipe e Rosa pelas

conversas sobre física, pelas questões discutidas, as dúvidas compartilhadas e também pelos momentos divertidos, que me ajudaram a superar com um pouco mais de leveza este processo.

Aos amigos, Kevin, Sávio, Andrey, Paulo Henrique e Paulo Méndez, pelas conversas convergentes e divergentes sobre todos os assuntos, por me ensinarem a sempre buscar novos conhecimentos, por permanecerem ao meu lado por tanto tempo me fazendo crescer como ser humano e como profissional.

Aos companheiros de vida, Murilo, Matheus, Jonas, Dhiego, Mariana, Juliany, Rita, Micaela, Nariane, Karoll, Dayanne e Camille, por sempre torcerem pelo meu sucesso, por se fazerem sempre presentes na minha vida, independente de estarem perto ou longe.

Aos meus ex-alunos e ex-colegas de trabalho, Eduardo, Ryan, Maria Eduarda, Isabelle, Jonata, Thiago, Amanda, Tacyana, Lenilson e Evandro por me propiciarem o incentivo necessário de crescer profissionalmente e por fornecerem todo apoio que precisei pra concluir esta dissertação, vocês foram e são muito mais do que colegas para mim.

Por fim, finalizo agradecendo o apoio financeiro fornecido através do Termo n<sup>o</sup> 16/2022 à Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (FAPESQ).

# *Resumo*

Há diversos modelos atuais da Física que pressupõe a existência de dimensões extras a fim de resolver determinados desafios teóricos enfrentados pelo Modelo Padrão, como o problema da hierarquia (a descomunal diferença de intensidade da interação gravitacional comparada com a magnitude das demais forças) e a busca por uma teoria de unificação que inclua a gravitação. Em geral, uma característica importante dos modelos de dimensões extras é a previsão de amplificação da intensidade da força gravitacional em curtas distâncias. Essa peculiaridade tem grande interesse do ponto de vista fenomenológico porque, em princípio, permite examinar experimentalmente a existência de dimensões adicionais por meio de testes em laboratório da lei do inverso do quadrado para a força gravitacional. Neste trabalho, com o propósito de estabelecer vínculos experimentais para o desvio da interação gravitacional em domínios subatômicos, analisaremos dados espectroscópicos de alguns átomos muônicos obtidos recentemente. Mais especificamente, consideraremos os dados sobre a transição  $2P - 2S$  do hélio-4 muônico, do hélio-3, do deutério e hidrogênio muônicos. Esses átomos são produzidos em laboratórios, substituindo-se o elétron pelo múon. Como a massa do múon é mais de duzentas vezes maior do que a do elétron, os átomos muônicos constituem sistemas apropriados para testes de modificações da gravitação no domínio atômico. Compararemos os nossos vínculos com os limites experimentais determinados previamente a partir de dados espectroscópicos de outros átomos, como hidrogênio eletrônico e hélio anti-protônico. Como veremos, os nossos limites são mais fortes na escala de distância abaixo do picômetro. Analisaremos ainda a transição  $2P_{3/2} - 2P_{1/2}$  do hélio-4 muônico, que depende da estrutura fina do átomo. Através do estudo da influência do acoplamento spin-órbita gravitacional nessa transição, determinaremos limites para desvios do potencial pós-Newtoniano associado ao parâmetro  $\gamma$  do formalismo PPN (Parameterized post-Newtonian formalism).

**Palavras-Chave:** Teorias de gravitação modificada, dimensões extras, testes espectroscópicos, átomos muônicos.

# *Abstract*

Several current models in Physics assume the existence of extra dimensions in order to solve certain theoretical challenges faced by the Standard Model, such as the hierarchy problem (the enormous difference in the intensity of the gravitational interaction compared to the magnitude of the other forces) and the search for a unification theory that includes gravity. In general, an important characteristic of extra-dimensional models is the prediction of amplification of the strength of the gravitational force at short distances. This peculiarity is of great interest from a phenomenological point of view because, in principle, it allows experimental examination of the existence of extra dimensions through laboratory tests of the inverse square law for the gravitational force. In this work, with the purpose of establishing experimental constraints for deviations of the gravitational interaction in subatomic domains, we will analyze recent spectroscopic data of muonic atoms. More specifically, we consider data on the  $2P - 2S$  transition of muonic helium-4, muonic helium-3, muonic deuterium and muonic hydrogen. These atoms are produced in laboratories by replacing the electron with the muon. Since the mass of the muon is more than two hundred times greater than that of the electron, muonic atoms are suitable for probing modifications of gravitation in the atomic domain. We will compare our constraints with experimental limits previously determined from spectroscopic data of other atoms, such as electron hydrogen and antiproton helium. As we will see, our limits are the most stringent on the sub-picometer distance scale. We will also analyze the  $2P_{3/2} - 2P_{1/2}$  transition of muonic helium-4, which depends on the fine structure of the atom. By studying the influence of the gravitational spin-orbit coupling on this transition, we will determine limits for deviations of the post-Newtonian potential associated with the gamma parameter of the Parameterized post-Newtonian formalism (PPN formalism).

**Keywords:** Theories of Modified Gravity, extra dimensions, spectroscopic tests, muonic atoms.

## Lista de Figuras

1	Gráfico do potencial $V(\phi)$ . Figura retirada da referência [5]. . . . .	25
2	Solução para o campo escalar $\phi_0$ do tipo parede de domínio. Figura retirada da referência [5]. . . . .	27
3	Densidade de Energia da parede de domínio em torno do centro $z = 0$ . Figura retirada da referência [5]. . . . .	28
4	Espectro de massa dos férmions preso a brana. Figura retirada da referência [82]. . . . .	32
5	Na figura mais a esquerda temos a representação de uma dimensão extra compacta, enquanto na figura a direita, há um “corte” realizado no cilindro, logo sua representação é dada por um espaço “aberto” identificando ainda as massas topológicas. Figura retirada da referência [83]. . . . .	36
6	Superfície Gaussiana em torno da linha de imagens topológicas. Figura retirada da referência [6]. . . . .	37
7	Simplificação de um potencial gerado por uma massa $M$ em um espaço extra-dimensional. Figura retirada da referência [6]. . . . .	40
8	Representação da influência de uma imagem topológica sobre um ponto no espaço extra-dimensional. Figura retirada da referência [6]. . . . .	41
9	Desenho esquemático da balança de Torção criada pelo grupo Eöt-Wash composta por um pêndulo de torção e uma base atrativa giratória. Figura retirada da referência [43]. . . . .	50
10	Desenho esquemático da balança de Torção utilizada pelo grupo Eöt Wash em 2006. Foram utilizados quatro espelhos planos retangulares são utilizados para o monitoramento da torção. Figura retirada da referência [45]. . . . .	52

11	Limites para as violações de Yukawa para a Lei do Inverso do Quadrado. As linhas rotuladas por Eöt-Wash 2004, Eöt-Wash 2006, Irvine, Colorado e Stanford mostram os limites experimentais obtidos por estes grupos. A região acima das linhas sólidas apresenta limites sobre violações do tipo Yukawa para o potencial gravitacional e descarta qualquer desvio na Lei do Inverso do Quadrado. Figura retirada da referência [45]. . . . .	53
12	Vínculos utilizando a parametrização de Yukawa para testes na Lei do Inverso do Quadrado. As linhas descrevem experimentos do Grupo Eöt-Wash, além de descrever outros resultados como o de IUPUI (2016), HUST (2012, 2016 e 2020), entre outros. Figura retirada da referência [84]. . . . .	54
13	Vínculos utilizando interações do tipo Yukawa. A figura mostra: Casimir 1, 2 e 3 obtidos medindo as forças de Casimir laterais e normais entre superfícies corrugadas sinusoidalmente, pressão efetiva de Casimir e Casimir-less (experimentos que ocorrem a minimização do efeito Casimir). Figura baseada na imagem da referência [85]. . . . .	57
14	Vínculos impostos utilizando o $HD^+$ vibracional e rotacional, além do hélio antiprotônico destacando a melhora entre medições antigas. Para obter esses vínculos, foi usada a parametrização de Yukawa. Aqui foi usada a constante de estrutura fina $\alpha_{EM}$ . Lembrando que, para realizarmos comparações com os vínculos obtidos no nosso trabalho, usaremos a relação $\alpha = \alpha_5 \frac{hc}{Gm_p^2}$ [81]. . . . .	60
15	Vínculos estabelecidos para o hidrogênio eletrônico na transição $1S - 3S$ para os níveis de confiança $1\sigma$ (68%), $2\sigma$ (95%) e $3\sigma$ (99%). Figura baseada nos resultados obtidos na referência [5]. . . . .	64
16	relação entre a massa de Planck $M_D$ do espaço de dimensões extras em função do parâmetro $\sigma$ . Figura retida da referência [22]. . . . .	67

17	90% CL - Gráfico relacionado a alguns testes espectroscópicos, são eles:	
	$p^4He^+(n, l) : (33, 32) \rightarrow (31, 30)$ (curva marrom), $HD^+(\nu, l) : (0, 3) \rightarrow$	
	$(9, 3)$ (curva azul claro), $HD^+(\nu, l) : (0, 0) \rightarrow (0, 1)$ (curva laranja),	
	$H_{(1S-3S)}$ (curva rosa), $r_d^2 - r_p^2 _{(muonic:2S-2P)}$ (curva verde pontilhada) e	
	$\mu^4He^+_{(2S-2P)}$ . [5, 81]. . . . .	76
18	Comparação dos resultados obtidos nesse trabalho (íon hélio-4, hidrogênio	
	e deutério muônicos - linhas pontilhadas) com alguns outros testes	
	espectroscópicos. 90% CL - $p^4He^+(n, L) : (33, 32) \rightarrow (31, 30)$ ,	
	$HD^+(v, L) : (0, 3) \rightarrow (9, 3)$ , $HD^+(v, L) : (0, 0) \rightarrow (0, 1)$ , $r_d^2 - r_p^2$ , $H_{(1S-3S)}$	
	e $\mu^4He^+_{(2S-2P)}$ . 95% CL - demais experimentos [5, 81, 84, 85]. . . . .	77
19	Representação de um interferômetro de Nêutrons e detectores de $^3He$ .	
	Figura retirada da referência [54]. . . . .	79
20	Representação geométrica do interferômetro de Nêutrons inclinado na	
	direção do feixe incidente. Figura retirada da referência [6]. . . . .	79
21	Representação esquemática geral do interferômetro. Figura retirada da	
	referência [62]. . . . .	80
22	Representação da precessão do spin do elétron, após este interagir com o	
	núcleo. Figura retirada da referência [88]. . . . .	83
23	68% CL - Vínculos impostos por diferentes testes de desvios de potenciais	
	pós-newtonianos. [5, 6]. . . . .	89

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>8</b>
<b>Sumário</b>	<b>11</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2 Revisão Teórica</b>	<b>17</b>
2.1 A Teoria de Kaluza-Klein	17
2.2 Compactação de Klein	20
2.3 Modelo ADD	23
2.3.1 Parede de Domínio e Branas	24
2.3.2 Localização da Matéria	28
2.3.3 Potencial Gravitacional em Dimensões Extras	32
2.3.4 Potencial Gravitacional com uma dimensão extra compacta	35
2.3.5 Potencial Gravitacional em várias dimensões extras compactas	38
2.3.6 Compactação Toroidal	40
2.3.7 Cálculo das Correções de Potencial devido às Dimensões Extras	43
2.3.8 Gravitação e Comprimento de Planck	45
<b>3 Testes Experimentais:</b>	
<b>Gravitação em Curtas Distâncias</b>	<b>48</b>
3.1 A Parametrização de Yukawa e a Parametrização da Lei das Potências	48
3.2 Balança de Torção: Teste da Lei do Inverso do Quadrado	49
3.2.1 O Experimento de Eöt-Wash 2004	50
3.2.2 O Experimento de Eöt-Wash 2006	51
3.2.3 O Experimento de Eöt-Wash 2020	53
3.3 Vínculos do Efeito Casimir	54
3.4 Hélio Antiprotônico	57
3.5 Vínculos Espectroscópicos usando Hidrogênio Eletrônico na Transição $1S-3S$	60

3.6	O Problema do Raio do Próton	64
3.6.1	Contribuição para o desvio de Lamb	66
<b>4</b>	<b>Novos Limites Experimentais Extraídos da Espectroscopia de Átomos</b>	
	<b>Muônicos</b>	<b>68</b>
4.1	Vínculos Espectroscópicos para o Potencial Newtoniano	68
4.1.1	Calculando Vínculos usando a Transição $2S - 2P$ no Hélio-4	
	Muônico	68
4.1.2	Calculando Vínculos usando Deutério e Hidrogênio Muônicos	72
<b>5</b>	<b>Vínculos Espectroscópicos para os Potenciais Pós-Newtonianos</b>	<b>78</b>
5.1	Interferometria de Nêutrons	78
5.1.1	O Experimento COW	78
5.1.2	Vínculos Extraídos da Interferometria de Nêutrons	81
5.2	O Experimento MTV-G	82
5.3	Calculando Vínculos para o Hidrogênio Eletrônico na Transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$	83
5.4	Calculando Vínculos para o íon Hélio-4 Muônico na transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$	87
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>90</b>
<b>7</b>	<b>Apêndices</b>	<b>93</b>
7.1	Apêndice A	93
7.2	Apêndice B	94
	<b>Referências</b>	<b>97</b>

# 1 Introdução

Na física existem quatro forças fundamentais: a força gravitacional, a força eletromagnética, a força nuclear fraca e a força nuclear forte. As teorias de dimensões extras surgem para apresentar alternativas para diversos desafios da física, entre eles a unificação da força gravitacional com as demais interações. Uma das dificuldades na busca pela unificação é que em curtas distâncias a intensidade da gravidade difere enormemente das outras três forças, sendo a mais fraca entre as quatro, várias ordens de magnitude. Essa característica, conhecida como o problema da hierarquia, pode ser explicada pela existência das dimensões extras.

Em 1905 uma teoria abalava o mundo física, trata-se da Teoria da Relatividade Restrita publicada por Albert Einstein. A partir desta teoria Einstein introduziu o conceito de que o espaço e o tempo estão interligados, descrevendo ainda o comportamento da matéria na ausência de campos gravitacionais em referenciais puramente inerciais. Uma nova física começava então a engatinhar para o que seria uma grande revolução, a Teoria da Relatividade Geral. Publicada em 1915, por Einstein, a Relatividade Geral visava generalizar os conceitos propostos pela Relatividade Restrita, explicando a gravidade como uma propriedade geométrica, ou seja, a curvatura do espaço-tempo provocada pela matéria e a radiação presente.

Considerando a teoria do eletromagnetismo, formulada por Maxwell, Einstein tentou unificar a gravitação ao eletromagnetismo. Em paralelo, durante esse mesmo período Kaluza propôs o que seria o “milagre de Kaluza”, demonstrando que ao adicionar uma dimensão espacial extra ao cenário quadridimensional era possível então unificar a Relatividade Geral e o Eletromagnetismo [7].

Alguns anos depois Klein contribuiu para refinar a teoria de Kaluza [8], adicionando a ideia da compactação da dimensão extras. Depois da Teoria de Kaluza-Klein, diversas outras teorias de dimensões extras emergiram, como, por exemplo, a Teoria das Cordas, a Teoria de Mundos Branas, entre outras.

Existem diversas teorias de branas. Aqui daremos especial atenção ao modelo ADD (Arkani, Dimopoulos, Dvali), que é um modelo pioneiro e paradigmático das chamadas

teorias de branas de grande escala [87]. O nosso interesse em estudá-las vem do fato de que nessas teorias existe a possibilidade de amplificar a interação gravitacional em distâncias muito curtas comparadas com o raio de compactação das dimensões extras, que, por sua vez, pode ser muito maior do que o comprimento de Planck. De acordo com essas teorias, vivemos em um espaço tridimensional chamado 3-brana que está imerso em um espaço de mais dimensões. Toda a matéria e campos existentes estão confinados na 3-brana exceto o campo gravitacional.

Portanto, considerando esse contexto, é possível conjecturar que a gravitação seria diretamente afetada pela existência de dimensões extras e dessa forma geraria desvios na lei do inverso do quadrado na escala de comprimento dessas dimensões.

Motivados por encontrar experimentos que pudessem examinar esses desvios, cientistas desenvolveram diversos testes de laboratório, entre eles destacamos os testes espectroscópicos. Neste trabalho usaremos esses experimentos em átomos exóticos, mais precisamente em átomos muônicos. Nosso interesse especial pelos átomos muônicos se justifica pelo fato de que o múon é 200 vezes mais pesado que o elétron amplificando ainda mais a interação gravitacional com o núcleo.

Nosso principal objetivo neste trabalho é obter vínculos para desvios da interação gravitacional a partir de dados espectroscópicos do hélio-4 muônico. Mais especificamente, utilizaremos medidas da transição  $2S_{1/2} - 2P_{3/2}$  obtidas recentemente [63]. Consideraremos também medidas dessa mesma transição no deutério e hidrogênio muônicos. A partir dessas medidas é possível determinar o raio de carga do deuteron ( $r_d$ ) e do próton ( $r_p$ ) com grande precisão. Aliás, devemos ressaltar que essa possibilidade foi uma das grandes motivações para se estudar os átomos muônicos recentemente. Essas medidas tiveram grande repercussão porque se mostram em conflito com os resultados inferidos pela espectroscopia dos átomos tradicionais. Esse conflito ficou conhecido como o problema do raio do próton. Apesar de raios  $r_d$  e  $r_p$  extraídos a partir dos átomos muônicos estarem em conflito com os valores inferidos a partir dos átomos eletrônicos, a diferença dos quadrados ( $r_d^2 - r_p^2$ ) concorda com alta precisão. Como os resultados são compatíveis, isso impõe restrições para interações anômalas. Exploraremos esses resultados para

impor vínculos para modificações da gravitação nesse domínio. Para isso consideramos o formalismo de teoria da perturbação em primeira ordem, corrigindo o potencial gravitacional Newtoniano por meio do potencial de Yukawa, comparando os resultados obtidos neste trabalho com os limites estabelecidos pelo hélio antiprotônico, hidrogênio eletrônico e o  $HD^+$ , que são os vínculos espectroscópicos mais fortes atualmente, todavia verificamos que na faixa de  $\lambda < 10^{-12} m$  os nossos vínculos são um pouco mais fortes.

Além disso, visamos também investigar possíveis modificações no Potencial Pós-Newtoniano associado à curvatura das seções espaciais do espaço-tempo. Isso é importante, porque teorias de gravitação distintas (como a teoria de Brans-Dicke) preveem diferentes medidas para este potencial. Em longas distâncias esse potencial está associado ao parâmetro  $\gamma$  do formalismo PPN. Uma maneira de investigar o comportamento desse potencial na escala atômica é através da análise de medidas recentes da transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  do íon hélio-4 muônico [63]. Isso acontece, pois essa transição é influenciada pelo potencial que descreve o acoplamento spin-órbita gravitacional. Esse potencial, como veremos, depende do potencial pós-Newtoniano mencionado acima.

Como já mencionamos, a escolha de átomos muônicos é bem simples de ser compreendida, sabemos que o múon é mais pesado do que o elétron, e como a interação gravitacional é diretamente proporcional a massa, esta interação é mais forte em átomos muônicos. Todavia, é importante destacar que medidas realizadas em átomos eletrônicos têm uma precisão muito maior, ou seja, a taxa de erro entre os dados obtidos nestes átomos é bem menor. Apesar disso, quando consideramos  $\lambda < 10^{-10} m$ , os resultados obtidos neste trabalho são mais fortes.

Para realizar nosso objetivo dividimos este trabalho em quatro capítulos principais. Na primeira parte faremos uma breve revisão teórica sobre a teoria de Kaluza-Klein e o modelo ADD, pois ambas utilizam as dimensões extras em seu formalismo, focando no modelo ADD para apresentar alguns conceitos que motivam a realização desse estudo. No segundo capítulo, apresentamos alguns testes experimentais visando analisar a gravitação em curtas distâncias, buscando explicar como funcionam os modelos experimentais que possuem o objetivo de estudar desvios no comportamento padrão da gravitação. Por fim,

no terceiro e no quarto capítulos, apresentamos os novos vínculos obtidos nesse trabalho para modificações do potencial gravitacional Newtoniano e do potencial Pós-Newtoniano usando os dados dos átomos muônicos leves. Essa análise é complementada por comparações dos nossos vínculos com limites experimentais determinados mediante outros experimentos prévios. Como veremos, nossos resultados, entre os testes espectroscópicos, estabelecem os vínculos mais restritivos na escala de distância inferior ao picômetro.

## 2 Revisão Teórica

Neste capítulo, nosso objetivo é contextualizar nosso trabalho discutindo as origens de sua motivação. Para isso, examinaremos o início do estudo sobre teorias de dimensões extras e abordaremos mais detalhadamente um modelo particular das chamadas teorias de branas.

Dessa forma é natural dividir esta revisão teórica basicamente em duas partes, na primeira, nosso ponto de partida para o início desta investigação é a Teoria de Kaluza-Klein, em que pela primeira vez foi possível realizar a unificação entre eletromagnetismo e gravitação. Veremos como Kaluza tornou isso possível, e mais tarde, como Klein complementou seu trabalho, tornando a teoria um pouco mais sólida.

Na segunda parte, abordaremos de maneira mais detalhada outra teoria de dimensões extras: o Modelo ADD, na qual calcularemos explicitamente a influência das dimensões extras sobre o potencial gravitacional.

### 2.1 A Teoria de Kaluza-Klein

Na Física, existem duas forças fundamentais de grande alcance que regem as interações entre corpos, a Gravitação - que domina o comportamento dos planetas, estrelas e galáxias - e o Eletromagnetismo que domina o comportamento das partículas no interior da matéria. Einstein acreditava que as duas teorias deveriam ser unificadas em uma única teoria geral. Entretanto, falhou em demonstrar isso. Com o mesmo objetivo de Einstein, Theodor Kaluza foi o responsável por elaborar uma teoria que tentava unificar essas duas áreas do conhecimento, publicada em 1921 em seu artigo “Zum Unitätsproblem der Physik”, ou em língua inglesa “On the Unification Problem in Physics”.

Kaluza observou que existia uma semelhança formal entre o Símbolo de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  e o tensor eletromagnético  $F_{\mu\nu}$ . As duas grandezas contêm termos que envolvem diferenças de derivadas parciais de 'potenciais' métricos, num caso, e eletromagnéticos, no outro. Como podemos verificar na expressão a seguir [7, 9]:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}), \quad (2.1)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \quad (2.2)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico e  $A_{\mu}$  é o quadrivetor potencial. Kaluza então teve a ideia de adicionar uma dimensão extra, dessa forma, construiria um espaço com as quatro dimensões usuais  $x^{\mu}$  mais uma quinta dimensão  $z$  de caráter espacial. A métrica foi organizada da seguinte forma:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + k^2\phi^2 A_{\mu}A_{\nu} & k\phi^2 A_{\mu} \\ k\phi^2 A_{\nu} & \phi^2 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Kaluza considerava a condição cilíndrica dada por:

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial z} = 0, \quad (2.4)$$

pelo fato de que a existência da dimensão extra não poderia ser observada diretamente. A Teoria de Kaluza era bem definida. Entretanto, precisamos destacar que a métrica definida por ele não era covariante sob transformação geral de coordenadas. Motivado por este problema, o físico sueco Oscar Klein sugeriu algumas correções para estes resultados mantendo a condição cilíndrica proposta por Kaluza. Em seu artigo “Quantum Theory and Five-Dimensional Relativity”, em 1926, Klein fez algumas alterações na Teoria de Kaluza sugerindo que a quinta dimensão deveria ser compacta, procurando uma maneira de justificar a condição cilíndrica proposta por Kaluza [10, 11].

Além disso, Kaluza considerou que em dimensões superiores o Universo era vazio. Portanto, sua ideia era baseada em descrever o universo  $4D$  como uma manifestação do Universo em  $5D$ . Considerando esta afirmação, as equações de Einstein no vácuo em 5 dimensões devem ser escritas como:

$$G_{AB} = 0, \quad (2.5)$$

ou,

$$R_{AB} = 0. \quad (2.6)$$

Considerando a [eq. 2.3](#) temos que o símbolo de Christoffel e o tensor de Ricci são escritos de maneira análoga ao sistema 4D. Dessa forma, temos:

$$R_{AB} = \partial_C \Gamma_{AB}^C - \partial_B \Gamma_{AC}^C + \Gamma_{CD}^C \Gamma_{AB}^D - \Gamma_{BD}^C \Gamma_{AC}^D, \quad (2.7)$$

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{1}{2} g^{CD} (\partial_A g_{DB} + \partial_B g_{DA} - \partial_D g_{AB}). \quad (2.8)$$

As equações de Einstein em cinco dimensões são análogas às equações em 4D, se considerarmos  $A = 0, 1, 2, 3, 4$  podemos escrevê-las da seguinte maneira:

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2} R g_{AB}. \quad (2.9)$$

O próximo passo é resolver estas equações utilizando a condição cilíndrica prevista na [eq. 2.4](#). Dessa forma, considerando a métrica dada pela [eq. 2.3](#) obtemos equações para  $G_{\mu\nu}$  e  $F_{\mu\nu}$ , que possuem dependência do campo escalar  $\phi$ . Portanto, se considerarmos que o campo  $\phi$  é uma constante no espaço-tempo podemos finalmente obter que:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \phi^2 T_{\mu\nu}^{EM}, \quad (2.10)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad (2.11)$$

tal que  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu}/2$  é o tensor de Einstein em 4D e  $T_{\mu\nu}^{EM} \equiv g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/4 - F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha}$  é o tensor de energia-momento eletromagnético. Portanto, podemos concluir que a Teoria de Kaluza-Klein contém a equação da gravitação quadridimensional acoplada às equações de Maxwell no vácuo.

## 2.2 Compactação de Klein

Como já citado anteriormente, Oskar Klein fez algumas modificações na Teoria de Kaluza. É importante destacar que essas mudanças não eliminam a condição cilíndrica. Para poder escrever matematicamente uma relação de periodicidade, Klein considerou que a quinta dimensão teria a topologia de um círculo, dessa forma, os pontos devem ser identificados se suas coordenadas são dadas por:

$$z \rightarrow z + 2\pi R. \quad (2.12)$$

Conseqüentemente se um campo escalar  $\phi(x^\mu, z)$  está definido nesse espaço de 5 dimensões, ele deve satisfazer a seguinte condição:

$$\phi(x^\mu, z) = \phi(x^\mu, z + 2\pi R), \quad (2.13)$$

onde  $R$  é o raio da dimensão extra.

É possível generalizar essa condição para qualquer campo, considerando que todos são periódicos em relação à quinta coordenada. Dessa forma, expandimos todos os campos usando uma série de Fourier da seguinte maneira [12]:

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{\mu\nu}^n(x^\mu) e^{inz/R}, \quad (2.14)$$

$$\phi(x^\mu, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi^n(x^\mu) e^{inz/R}, \quad (2.15)$$

$$A_\mu(x^\mu, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_\mu^n(x^\mu) e^{inz/R}, \quad (2.16)$$

onde  $n$  é o  $n$ -ésimo modo de Fourier e cada função  $\phi^n(x^\mu)$  é denominada modo de Kaluza-Klein. Note que cada campo completo só será independente da dimensão extra somente no caso particular em que o modo zero ( $n = 0$ ) é o único modo "excitado".

Agora, precisamos estudar os efeitos dessa compactação. Para simplificar os cálculos consideraremos um campo escalar  $\phi^n(x^\mu, z)$  sem massa em um espaço com métrica plana.

Podemos dizer então que este campo satisfaz a equação de Klein-Gordon em  $5D$  dada por:

$$\square_{(5)}\phi(x^\mu, z) = 0, \quad (2.17)$$

onde  $\square_{(5)} = \square + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  se refere ao operador d'Allambertiano em cinco dimensões.

Para resolver a eq. **2.17** podemos utilizar o método de separação de variáveis. Para isso escrevemos:

$$\phi(x^\mu, z) = \chi(x^\mu)\varphi(z). \quad (2.18)$$

Assim, seguindo a aplicação do método, substituímos a eq. **2.18** na eq. **2.17**, obtemos:

$$\frac{1}{\chi(x^\mu)}\square\chi(x^\mu) + \frac{1}{\varphi(z)}\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2} = 0. \quad (2.19)$$

Note que a única maneira dessa equação ser satisfeita é considerar que cada termo seja uma constante e a soma dessas constantes, seja nula. Aqui destacamos que a assinatura adotada é  $(-, +, +, +, +)$ . Assim, podemos escrever que:

$$\frac{1}{\chi(x^\mu)}\square\chi(x^\mu) = C, \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{\varphi(z)}\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2} = -C. \quad (2.21)$$

Observe também que a partir da eq. **2.20** é possível obter que:

$$\square\chi(x^\mu) = C\chi(x^\mu). \quad (2.22)$$

Como estamos adotando uma assinatura  $(-, +, +, +, +)$ , sabemos que a equação de Klein-Gordon que considera a massa será dada por:

$$(\square - m^2)\phi = 0. \quad (2.23)$$

Realizando a comparação com eq. 2.22, podemos perceber que a constante  $C$  está relacionada à massa do campo.

O próximo passo é resolver a eq. 2.21, cuja solução será dada por:

$$\phi(z) = A \sin(\sqrt{C}z) + B \cos(\sqrt{C}z). \quad (2.24)$$

Portanto, considerando as condições de contorno apropriadas para a eq. 2.13, ou seja, a condição periódica dada por:

$$\phi(0) = \phi(2\pi R). \quad (2.25)$$

Devemos ter:

$$\cos(2\pi R\sqrt{C}) = 1. \quad (2.26)$$

A equação acima então é satisfeita se escrevermos:

$$C = \frac{n^2}{R^2}, \quad (2.27)$$

onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  é um número inteiro.

Assim, concluímos que  $C$  é uma constante não negativa e que devido a este fato podemos escrever  $C = m^2$ , reforçando ainda mais a ideia de que a constante desempenha realmente o papel da massa para o campo quadridimensional. De fato, a eq. 2.23 pode ser reescrita como:

$$\square \chi^{(n)}(\chi^\mu) = m_n^2 \chi^{(n)}(x^\mu), \quad (2.28)$$

sendo assim, substituindo  $C = m^2$  na eq. 2.27 podemos finalmente obter que:

$$m_n = \frac{n}{R}. \quad (2.29)$$

Nesse sentido, temos um campo escalar  $4D$  sem massa apenas para o modo zero, ou

---

<sup>1</sup>isto também pode ser visto na comparação entre a equação de Klein-Gordon com massa e a eq. 2.22

seja, em  $n = 0$ . Para qualquer outro valor de  $n$  temos o que chamamos de **modos de Kaluza-Klein** ou **modos KK com massa**.

É importante destacar que cada modo possui uma energia de repouso de ordem  $n/R$ , por isso, não podem ser excitados com uma energia inferior a este valor. Observe que se o raio da dimensão extra for suficientemente pequeno, a energia para excitar um modo  $n \neq 0$  será tão grande que não poder ser observado experimentalmente. Devido a este fato, apenas o modo normal  $n = 0$  seria observado, como proposto pela Teoria de Kaluza. Podemos então nos questionar sobre o quão grande pode ser o tamanho da escala de uma quarta dimensão. Para justificar que até os dias atuais não se pode observar as dimensões extras, teóricos supõem que a escala de compactação seja da ordem do comprimento de Planck [13], ou seja:

$$R_p \equiv \left( \frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}. \quad (2.30)$$

Consequentemente, admitindo tal escala a massa dos estados excitados seria da ordem da massa de Planck, ou seja,  $M_p \approx 10^{19} \text{ GeV}$ . Portanto, considerando o nível de energia alcançado pelos aceleradores de partículas da ordem de  $1 \text{ TeV}$ , a não detecção da quinta dimensão estaria explicada.

Desse modo, a partir do uso do seu mecanismo de compactação, Klein justificou fisicamente a hipótese puramente matemática de Kaluza.

## 2.3 Modelo ADD

O modelo ADD é mais um modelo visando solucionar algum problema físico por meio das dimensões extras. Foi batizado dessa forma devido aos nomes dos cientistas Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Gia Dvali. No caso da Teoria de Kaluza-Klein vimos que a ideia principal era unificar a gravitação e o eletromagnetismo, já o modelo ADD visa resolver o chamado problema da hierarquia [14].

Em síntese, o problema da hierarquia trata-se da grande diferença entre a escala eletrofraca e a escala gravitacional, cuja ordem de separação é de  $10^{16}$ . O modelo ADD então tem o objetivo de explicar o porquê a gravidade ser bem mais fraca em comparação com

a força eletro-fracas.

Nesse sentido, o modelo ADD considera que a escala eletro-fracas é considerada a única escala fundamental de curta distância na Natureza. A aparente fraqueza da gravidade é explicada então pela existência de duas ou mais dimensões extras. Diferentemente do modelo de Kaluza-Klein, este novo modelo afirma que a escala da dimensão extra poderia atingir comprimentos submilimétricos e por esse motivo, também é conhecido como **modelo de dimensões extras de grande escala**. Além disso, apenas o campo gravitacional se propaga livremente nas dimensões extras, enquanto todos os outros campos estão confinados num espaço quadridimensional também conhecido como brana. O confinamento é uma ideia bastante conhecida na literatura e localizar os campos do modelo padrão não é uma tarefa trivial, entretanto, realizaremos uma ilustração considerando o modelo de localização dos férmions no defeito topológico conhecido por parede de domínio, proposto por Rubanov e Shaposhnikov [15, 16, 17], no qual o modo zero dos férmions está preso à parede e não se propaga nas dimensões extras.

### 2.3.1 Parede de Domínio e Branas

No modelo ADD, supõe-se que o Universo observado, ou seja, aquele com  $(3 + 1)$ -dimensões é uma hipersuperfície imersa em um espaço de dimensões extras, onde toda matéria está confinada, portanto, nesta seção devemos estudar de que maneira ocorre este confinamento. A hipersuperfície citada anteriormente é conhecida como **3-brana**, onde o 3 refere-se ao número de dimensões espaciais da hipersuperfície. Dessa forma, podemos então afirmar que uma brana é uma subvariedade em um espaço ambiente maior [14].

Partindo do conhecimento de Teoria de Campos, o confinamento da matéria se relaciona com o aprisionamento da matéria em uma parede de domínio, ou seja, tentaremos separar duas regiões do espaço em que um certo campo escalar admite diferentes estados de vácuo, ou seja, estados de mais baixa energia [16, 17]. Para verificarmos este conceito, consideremos então um campo escalar  $\phi = \phi(x^\mu, z)$  que descreve a parede em um espaço que contém dimensão extra. Dessa forma, podemos escrever a ação como:

$$S = \int d^4x dz \left[ \frac{1}{2} (\partial_A \phi - V(\phi)) \right], \quad (2.31)$$

onde  $A = 0, 1, 2, 3, 4$  e  $V(\phi)$  é o potencial escalar. Sabemos ainda, por meio da Teoria de Campos, que o potencial deve ser construído de tal modo que pode ter dois ou mais mínimos, uma maneira de realizar esta construção é considerando:

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - \nu^2)^2. \quad (2.32)$$

O leitor observará que este potencial acima possui dois mínimos de energia em  $\phi = \pm \nu$ , estes mínimos também conhecidos como estados de vácuo. Tal comportamento pode ser descrito na **Fig. 1**.

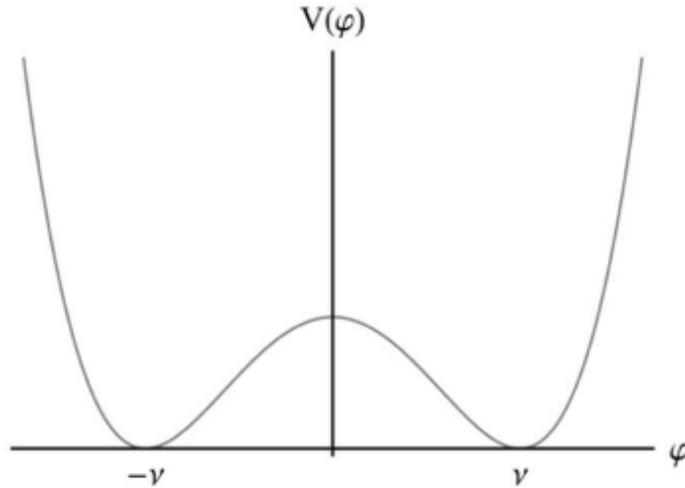


Figura 1: Gráfico do potencial  $V(\phi)$ . Figura retirada da referência [5].

Para construirmos a dinâmica de campos, usaremos então a equação de Euler-Lagrange dada por [18]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_A \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_A \phi)} \right] = 0, \quad (2.33)$$

onde o termo à esquerda representa justamente  $\delta \mathcal{L}$ . Note que considerando a ação do tipo parede de domínio que escrevemos acima temos que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_A \phi - V(\phi)). \quad (2.34)$$

Sabemos que ao aplicarmos o princípio da mínima ação, obtemos as equações de Euler-Lagrange descritas acima. Dessa forma, obtemos a seguinte equação de movimento:

$$\square^{(5)}\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.35)$$

onde  $\square^{(5)} = \eta^{AB}\partial_A\partial_B$ .

Por outro lado, procuramos obter uma solução do tipo parede de domínio. Para realizar este feito de uma forma relativamente simples, tomamos a iniciativa de a princípio considerá-la estacionária, além disso, consideramos que o campo é uma função apenas da coordenada de dimensão extra ( $z$ ), fazemos isso porque queremos verificar que a matéria está confinada na brana, ou seja, a matéria não terá “liberdade” para se propagar pelas dimensões extras. Podemos reescrever a **eq. 2.35** da seguinte maneira:

$$-\frac{d^2\phi_0(z)}{dz^2} + \frac{\lambda^2}{2}\phi_0(\phi_0^2 - \nu^2) = 0, \quad (2.36)$$

onde podemos verificar que uma solução possível pode ser dada por meio da expressão:

$$\phi_0(z) = \nu \tanh\left(\frac{\lambda z \nu}{2}\right). \quad (2.37)$$

Agora precisamos analisar o resultado que obtivemos, sendo assim, note que podemos observar o comportamento da função quando  $z \rightarrow \pm\infty$ . Observe então que quando  $z \rightarrow +\infty$ ,  $\phi_0 = +\nu$ , por outro lado, se  $z \rightarrow -\infty$ , temos então que  $\phi_0 = -\nu$ , portanto, é possível verificar uma conexão entre os estados fundamentais, visto que, a função separa os dois menores estados de energia do campo  $\phi$ .

Podemos ainda destacar uma importante discussão relacionada com a densidade de energia da parede de domínio. Utilizando os conceitos da Mecânica Hamiltoniana, temos que a densidade Hamiltoniana  $H_0$  tem unidade de energia por 4-volume sendo dada por  $\hat{H}_0 = \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L}$ , onde  $\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$  é chamado de momento canônico conjugado à  $\phi$ , lembrando

que  $\dot{\phi} = \partial_A \phi$ . Dessa forma, é possível calcular a densidade Hamiltoniana para o campo escalar  $\phi$  utilizando as expressões escritas anteriormente. Assim, teremos que:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\partial_A \phi)^2 + \frac{\lambda}{8}(\phi^2 - \nu^2)^2. \quad (2.38)$$

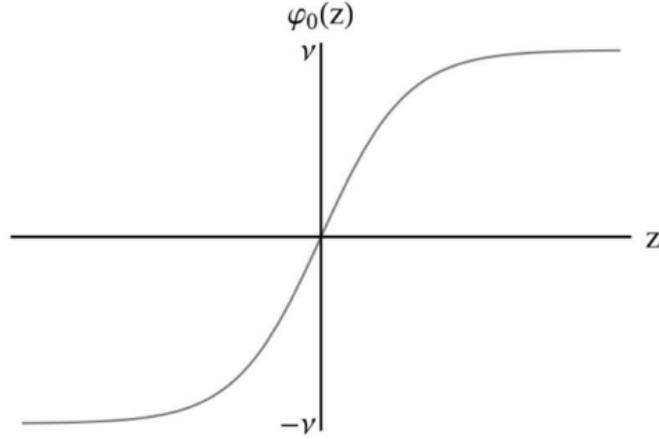


Figura 2: Solução para o campo escalar  $\phi_0$  do tipo parede de domínio. Figura retirada da referência [5].

Podemos perceber então que em  $\phi = \pm\nu$  a energia é zero analisando o termo  $(\phi^2 - \nu^2)$  da expressão anterior. Por outro lado, ao considerarmos a solução de  $\phi_0$  na eq. 2.37 obtemos que:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda\nu^2}{2\cosh^2(u)} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{8} (\nu^2(\tanh^2(u) - 1))^2, \quad (2.39)$$

aqui,  $u = \lambda\nu z/2$ . Portanto, simplificando a expressão anterior, lembrando de utilizar  $\tanh^2(u) - 1 = -\text{sech}^2 u$  e  $\text{sech}^2(u) = 1/\cosh^2 u$  obtemos finalmente que:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \nu^4}{\cosh^4(\frac{\lambda\nu z}{2})}. \quad (2.40)$$

A distribuição de energia da densidade Hamiltoniana pode ser vista na Fig. 4

Podemos ainda mostrar que  $\lambda$  está relacionado à largura de concentração. Além disso, é possível interpretar  $\lambda\nu$  como uma grandeza que tem unidade de inverso de comprimento.

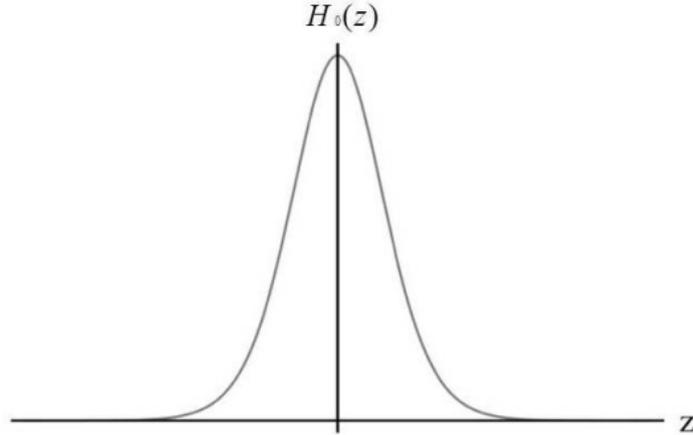


Figura 3: Densidade de Energia da parede de domínio em torno do centro  $z = 0$ . Figura retirada da referência [5].

Portanto, podemos então concluir que é inversamente proporcional à espessura da parede de domínio.

Para concluirmos a análise podemos então integrar a densidade Hamiltoniana com respeito à dimensão extra  $z$  utilizando substituição de variáveis e então encontramos a energia da parede por unidade de 3-volume

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \nu^4}{\cosh^4\left(\frac{\lambda \nu z}{2}\right)} dz = \frac{2\lambda \nu^3}{3}. \quad (2.41)$$

No limite onde  $\lambda \rightarrow \infty$  a espessura da parede tende a zero. Além disso, mantendo  $\sigma$  constante neste mesmo limite, podemos dizer que a parede de domínio dará origem a uma 3-brana ideal.

### 2.3.2 Localização da Matéria

Nosso interesse é estudar o modelo ADD, que visa explicar a diferença entre a força eletro-fraca e a força gravitacional, teorizando que apenas a gravidade pode transitar em dimensões superiores e todos os outros campos estão confinados na 3-brana. A partir de agora, introduziremos os férmions neste modelo.

Os férmions são partículas cujo spin é semi-inteiro, além disso, obedecem ao Princípio de Exclusão de Pauli e são escritos com espinores ( $\psi$ ), como, por exemplo, o elétron. É

possível descrever o movimento destas partículas. Para isto utilizamos a famosa Equação de Dirac [19].

Análogo ao Universo quadridimensional, no cenário de dimensões extras a equação de Dirac é dada por:

$$i\Gamma^A\partial_A\Psi - m\Psi = 0, \quad (2.42)$$

onde  $A = (\mu, z)$ , com  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e  $z$  representa a coordenada da dimensão extra. Além disso,  $\Gamma^A$  representa as matrizes de Dirac, que satisfazem a álgebra de Clifford assim como ocorre nas matrizes  $\gamma^\mu$  em quatro dimensões, ou seja,

$$\Gamma^A\Gamma^B + \Gamma^B\Gamma^A = 2g^{AB}1. \quad (2.43)$$

Se lembrarmos que o índice  $\mu$  varia de zero a três, então podemos definir  $\Gamma^A$  em função de  $\gamma^\mu$  da seguinte maneira:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu, \quad (2.44)$$

$$\Gamma^z = -i\gamma^{(5)}, \quad (2.45)$$

onde  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4\gamma^5$ , ou ainda,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2\times 2} \\ 1_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

A ação que gera a equação de Dirac na eq. 2.42 é dada por:

$$S_{1/2} = \int d^4x dz (i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - m\bar{\Psi}\Psi), \quad (2.47)$$

onde podemos ver que a Lagrangiana possui a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \quad (2.48)$$

Note então que ao aplicarmos o princípio da mínima ação iremos justamente obter a equação de Dirac. Dito isto, tentaremos entender como os férmions se comportam em uma parede de domínio [15, 16, 17] considerando que a interação entre eles é do tipo Yukawa. Lembra que os férmions são descritos pelo campo de Dirac  $\Psi$  e a parede de domínio, por um campo escalar  $\phi$ . Portanto, a ação será dada por:

$$S_{int} = -h \int d^4x dz \phi \bar{\Psi} \Psi, \quad (2.49)$$

onde  $h$  é uma constante de acoplamento. Dessa forma, podemos então concluir que a ação total será a soma entre a ação que descreve o campo de Dirac e a ação de interação, portanto:

$$S = \int d^4x dz (i \bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - h \phi_0 \bar{\Psi} \Psi), \quad (2.50)$$

lembramos que  $\phi_0$  é a solução de  $\phi$  na parede de domínio. Considerando então o férmion sem massa, ou seja,  $m = 0$  temos que a ação total pode ser reescrita como:

$$S = \int d^4x dz (i \bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi - h \phi_0 \bar{\Psi} \Psi), \quad (2.51)$$

Com isso, aplicando as equações de Euler-Lagrange mais uma vez, obtemos a seguinte equação de movimento:

$$i \Gamma^z \partial_z \Psi + i \Gamma^\mu \partial_\mu \Psi - h \phi_0 \Psi = 0, \quad (2.52)$$

que pode ser resolvida considerando o método de separação de variáveis. Como  $\psi$  é uma função das coordenadas do espaço quadridimensional e da dimensão extra,  $\psi(x, z)$ , podemos então realizar uma separação de variáveis escrevendo  $\Psi_5(x, z) = \psi(x) f(z)$ , onde  $\psi(x)$  é um espinor em  $4D$  e  $f(z)$  é uma função escalar. Substituindo isto na eq. 2.52 e dividindo toda a expressão por  $f(z)$ , obtemos:

$$i \Gamma^z \psi(x) \frac{\partial_z f(z)}{f(z)} + i \Gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - h \phi_0 \psi(x) = 0. \quad (2.53)$$

Vamos agora tentar identificar certas condições que sejam suficientes para resolvermos a eq. [2.53](#). Primeiro observe que com base na equação de Dirac quadridimensional, gostaríamos de ter:

$$i\Gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = m\psi(x). \quad (2.54)$$

Além disso, considerando que  $i\Gamma^z$  é obtido da eq. [2.45](#) e admitindo que o espinor quadridimensional é quiral, ou seja,  $\gamma^{(5)}\psi(x) = -\psi(x)$ , podemos finalmente escrever:

$$\frac{df(z)}{dz} = (m - h\phi_0)f(z). \quad (2.55)$$

Sendo assim, podemos interpretar a constante de separação  $m$  a massa do espinor em 4 dimensões. Dessa forma, para o modo zero (uma partícula sem massa) podemos reescrever a eq. [2.55](#) como:

$$\frac{df(z)}{dz} = -h\phi_0 f(z). \quad (2.56)$$

Agora devemos considerar a condição de contorno na qual  $f(z) \rightarrow 0$  no infinito, assim podemos solucionar esta equação diferencial da seguinte maneira:

$$f(z) = \exp\left(-h \int_0^z \phi_0(z) dz\right), \quad (2.57)$$

portanto, nossa solução geral pode ser escrita como [\[16\]](#):

$$\Psi_0 = \exp\left(-h \int \phi_0(z) dz\right) \psi_0, \quad (2.58)$$

onde  $\psi_0$  significa justamente a solução de  $m = 0$ , ou seja, representa a função de onda para o modo zero fermiônico. A partir desta solução, observamos que o modo zero dos férmions está localizado na parede de domínio, ou seja, em  $z = 0$ , pois se considerarmos um  $z$  muito grande,  $f(z)$  cai exponencialmente ao longo da dimensão extra.

Objetivando então determinar os possíveis valores de  $m$  usamos a eq. [2.55](#), neste sentido, cada solução pode ser interpretada como uma espécie de massa dos modos KK,

representados na **Fig. 4**

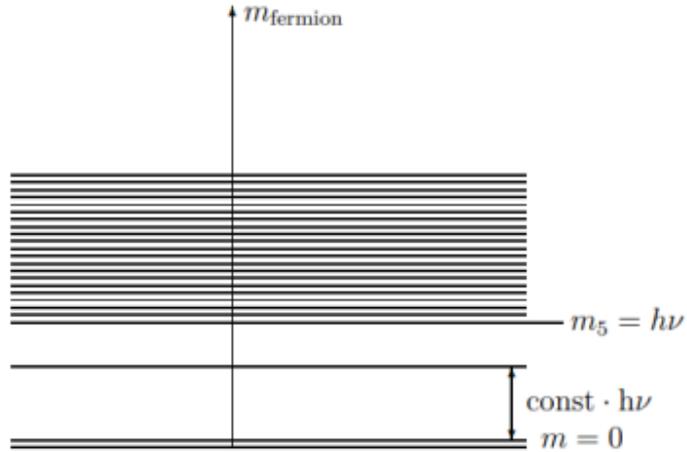


Figura 4: Espectro de massa dos férmions preso a brana. Figura retirada da referência [82]

Note que a principal característica do espectro apresentado é que ele possui uma distância entre o modo zero e os demais modos, proporcional a  $m_{(5)} = h\nu$ , pois lembre que  $\phi_0(z) = \nu \tanh(\lambda\nu z/2)$ . Portanto, observe que quando  $\nu$  tiver um valor muito grande, os modos massivos se tornariam inacessíveis no contexto experimental, pois a energia para acessá-los seria muito grande [15, 16], e por consequência, temos então uma teoria compatível com as observações solidificando ainda mais o argumento do confinamento da matéria.

### 2.3.3 Potencial Gravitacional em Dimensões Extras

Considerando um modelo quadridimensional, temos o comportamento do campo gravitacional muito bem definido, então nosso objetivo agora é entender que efeitos as dimensões extras causam a este campo, visto que ele é o único que não está preso na brana. Para iniciarmos a discussão consideremos o campo gravitacional Newtoniano. No contexto clássico o campo  $\vec{g}$  satisfaz a equação:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \quad (2.59)$$

onde  $\rho$  representa a densidade de matéria e  $G$  é a constante gravitacional universal

considerando  $(3 + 1)$  dimensões. Se observamos bem, esta equação nada mais é do que o equivalente gravitacional para as equações de Maxwell.

Consideramos então uma 3-bola  $B^3(r)$  cujo contorno é uma 2-esfera. Podemos integrar a eq. **2.59** na região correspondente a  $B^3(r)$ . Dessa forma, obtemos:

$$\int_{B^3(r)} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} dV = -4\pi G \int_{B^3(r)} \rho dV. \quad (2.60)$$

Mas, note que:

$$\int_{B^3(r)} \rho dV = m. \quad (2.61)$$

Por outro lado, podemos ainda usar o Teorema da divergência no lado esquerdo da eq. **2.60** e então obter o seguinte resultado:

$$\int_{S^2(r)} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi Gm. \quad (2.62)$$

Suponha agora que estamos considerando um corpo massivo esférico. Podemos dizer que  $\vec{g}$  depende apenas da direção radial logo,  $\vec{g}(r) = g(r)\hat{e}_r$  onde  $g(r)$  representa a componente radial e  $\hat{e}_r$  é o versor na direção radial. Além disso, perceba que quando realizamos o produto interno reescreveremos a eq. **2.62** da seguinte maneira:

$$g(R) \int_{S^2(r)} dA = -4\pi Gm. \quad (2.63)$$

Substituindo a integral de superfície pela área da esfera  $S^2(r)$  obtemos:

$$g(R)4\pi r^2 = -4\pi Gm. \quad (2.64)$$

Por fim, obtemos a equação para o campo gravitacional dada por:

$$g(r) = -\frac{Gm}{r^2} \quad \text{ou} \quad \vec{g}(r) = -\frac{Gm}{r^2}\hat{e}_r. \quad (2.65)$$

É bem conhecido que este é o campo gravitacional usual com três dimensões espaciais, descrito por Isaac Newton. Para encontrarmos o potencial relacionado a este campo basta

fazer:

$$\vec{g}(r) = -\nabla\phi, \quad (2.66)$$

dessa maneira, temos:

$$\phi = -\frac{Gm}{r}. \quad (2.67)$$

Nosso objetivo agora é generalizar este cálculo considerando agora  $n$  dimensões espaciais. Para isso, considere agora um corpo de massa  $m$  e uma bola  $B^n(r)$  cujo contorno é uma esfera  $S^{n-1}(r)$ . Seguindo o mesmo procedimento anterior obteremos:

$$\int_{B^n} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} dV = -4\pi G^{(n)} \int_{B^n} \rho dV, \quad (2.68)$$

$$\oint_{S^{n-1}} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G^{(n)} m. \quad (2.69)$$

Além disso, temos que o fluxo do campo gravitacional através da superfície será:  $\oint_{S^{n-1}} \vec{g} \cdot d\vec{A} = \Phi_m$ . Observe que, como antes,  $\vec{g}$  depende apenas da direção radial. Portanto, podemos dizer que:

$$\Phi_m = g(r)A(S^{n-1}(r)), \quad (2.70)$$

onde  $A(S^{n-1}(r))$  é a hiper-área da hipersuperfície  $S^{n-1}(r)$ . Formalmente, a **eq. 2.70** é uma generalização do caso tridimensional analisado anteriormente. Além disso, pode-se mostrar que  $A(S^{n-1}(r)) = r^{n-1} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ .

Dessa forma, podemos escrever a seguinte expressão:

$$-4\pi G^{(n)} m = g(r) r^{n-1} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad (2.71)$$

isolando  $g(r)$ , obtemos que:

$$g(r) = -\frac{2G^{(n)}m\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}-1}r^{n-1}}. \quad (2.72)$$

Assim, podemos dizer que:

$$\vec{g}(r) = -\frac{2G^{(n)}m\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}-1}r^{n-1}}\hat{e}_r. \quad (2.73)$$

Note que, podemos reobter o resultado clássico fazendo  $n = 3$  (número de dimensões espaciais). Sabemos que  $\vec{g}$  pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar da seguinte maneira:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi, \quad (2.74)$$

tal que  $\nabla\Phi = \frac{d\Phi}{dr}\hat{e}_r = -\vec{g}(r)$ , portanto:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{2\Gamma(\frac{n}{2})G^{(n)}m}{\pi^{\frac{n}{2}-1}r^{n-1}}. \quad (2.75)$$

Integrando em relação a  $r$ , obtemos finalmente que:

$$\Phi = \frac{2\Gamma(\frac{n}{2})G^{(n)}m}{\pi^{\frac{n}{2}-1}(n-2)r^{n-2}}. \quad (2.76)$$

Perceba então que este resultado nos fornece o potencial gravitacional gerado por uma massa  $m$  em um espaço com  $n$  dimensões espaciais não compactas. Note ainda que se fizermos  $n = 3$  é possível recuperar o potencial Newtoniano.

### 2.3.4 Potencial Gravitacional com uma dimensão extra compacta

Nesta seção, nosso objetivo é investigar o potencial gerado por uma massa  $m$  em um Universo multidimensional considerando uma dimensão extra compacta. Considere um observador  $O$  que observa uma massa localizada em um ponto do Universo. Como a nossa hipótese inicial é de que a dimensão extra é compacta, esta possui a topologia de um círculo, portanto as linhas de força/campo com origem em  $m$  darão voltas em torno do espaço até chegar ao observador.

Imagine então que cortamos o cilindro de tal modo que obtemos um plano onde a massa  $m$  encontra-se no centro. Note agora que, do ponto de vista do observador, ele não está sofrendo a ação de uma única massa, mas sim de várias imagens da mesma massa ( $m_1, m_2, m_3, \dots$ ) espalhadas por uma linha que passa pelo centro de massa. A este conjunto de massas “observadas” por  $O$  daremos o nome de **Imagens Topológicas**. Como a topologia da dimensão extra é um círculo, teremos então que a distância entre cada imagem topológica é o comprimento do círculo, ou seja,  $2\pi R$ . Usando essa representação do espaço compacto, podemos agora calcular o campo gravitacional produzido pela massa  $m$ . Primeiro, verificaremos que para longas distâncias a lei do inverso quadrado é recuperada. Suponha que o ponto de observação está bem afastado de  $m$ , isto é,  $r \gg R$ . Neste caso, o conjunto das imagens topológicas podem ser idealizadas como uma linha contínua que se estende na direção extra, como indica a **Fig. 5**.

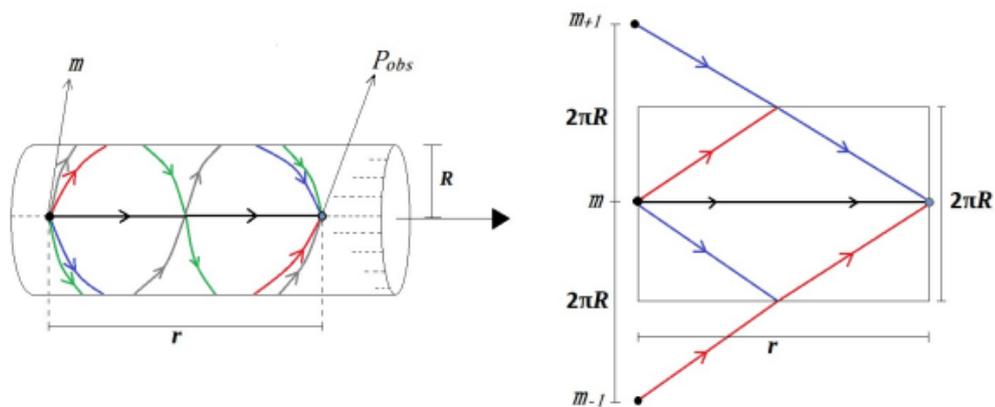


Figura 5: Na figura mais a esquerda temos a representação de uma dimensão extra compacta, enquanto na figura a direita, há um “corte” realizado no cilindro, logo sua representação é dada por um espaço “aberto” identificando ainda as massas topológicas. Figura retirada da referência [83].

Para determinarmos o campo, vamos mais uma vez usar a Lei de Gauss. Com esta finalidade escolhemos uma hipersuperfície Gaussiana adaptada à simetria cilíndrica da fonte. Portanto, a nossa hipersuperfície Gaussiana será um hipercilindro de altura  $h$  ao longo da linha contínua de imagens topológicas como mostra a **Figura 6**. Entretanto, note que como estamos em um espaço de quatro dimensões, a base do cilindro é uma

2-esfera (esfera em 3 dimensões) ao invés de um círculo.

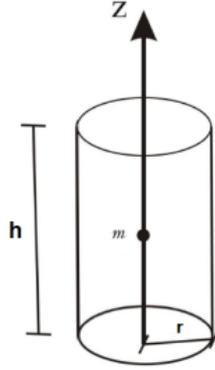


Figura 6: Superfície Gaussiana em torno da linha de imagens topológicas. Figura retirada da referência [6].

Dessa forma, considerando apenas uma dimensão extra e aplicando a Lei de Gauss teremos:

$$\oint_{S_L} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G_5 M_T, \quad (2.77)$$

onde  $M_T$  representa a soma das massas das imagens repetidas de  $m$  contidas no interior do hipercilindro e  $S_L$  representa a superfície lateral do hipercilindro. Note que a distância de separação das massas topológicas é  $2\pi R$ , portanto, o número de massas topológicas no interior da superfície Gaussiana será igual a  $h/2\pi R$ . Assim, podemos concluir que:

$$M_T = \frac{h}{2\pi R} m. \quad (2.78)$$

A partir da distribuição da matéria, é possível ver que  $\vec{g}$  terá uma simetria cilíndrica, ou seja, a direção do campo resultante será perpendicular à dimensão extra, então não haverá fluxo gravitacional nas bases do hipercilindro apenas em sua superfície lateral. Além disso,  $\vec{g}$  depende apenas da direção radial  $r$  da hipersuperfície Gaussiana. Dessa forma, obteremos que:

$$g(r) \int_{S_L} dA = -4\pi G_5 \left( \frac{h}{2\pi R} m \right). \quad (2.79)$$

Para resolvermos este problema, basta então lembrar que a base do hipercilindro é

uma 2-esfera, que por sua vez, tem área  $4\pi R^2$ . Assim segue que:

$$g(r)4\pi r^2 h = -4\pi G_5 \left( \frac{h}{2\pi R} m \right). \quad (2.80)$$

Assim, podemos concluir que:

$$\vec{g}(r) = -\frac{G_5 m}{2\pi R} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r. \quad (2.81)$$

Integrando em relação a  $r$  podemos obter o potencial gravitacional. Dessa forma, obtemos:

$$V(r) = -\left( \frac{G_5 m}{2\pi R} \right) \frac{1}{r}. \quad (2.82)$$

Portanto, podemos comparar esta equação ao potencial gravitacional em quatro dimensões se admitirmos que:

$$G_4 = \frac{G_5}{2\pi R}, \quad (2.83)$$

o potencial gravitacional é recuperado:

$$V(r) = -\frac{G_4 m}{r}. \quad (2.84)$$

Concluimos então que para grandes distâncias, ou seja, para  $r \gg R$  é possível recuperar a Lei do inverso do quadrado de Newton.

### 2.3.5 Potencial Gravitacional em várias dimensões extras compactas

Generalizando a Lei de Gauss para  $\delta$ -dimensões, considerando ainda o hipercilindro  $C$  como superfície Gaussiana, podemos escrever:

$$\oint_{S_L} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G_{(4+\delta)} M_T, \quad (2.85)$$

Note ainda que agora a superfície Gaussiana se estende em todas as direções extras por um comprimento  $h$ . Assim, a hiperárea da parte lateral dessa hipersuperfície Gaussiana

será proporcional a  $h^\delta$  multiplicada pela área da superfície esférica, presente na base desse hipercilindro. Com base nesses argumentos, podemos finalmente escrever:

$$g \cdot (4\pi r^2) \cdot h^\delta = -4\pi G_{4+\delta} \frac{h^\delta}{(2\pi R)^\delta} m. \quad (2.86)$$

Portanto, para longas distâncias, isto é, para  $r \gg R$ , o campo gravitacional, nesse espaço compacto, se comporta conforme a lei do inverso do quadrado:

$$g = -\frac{G_{(4+\delta)}m}{V_\delta r^2}, \quad (2.87)$$

onde,

$$V_\delta = (2\pi R)^\delta, \quad (2.88)$$

representa o volume do espaço suplementar.

Note que para recuperar, em termos quantitativos, o comportamento observado do campo gravitacional é necessário identificarmos a constante gravitacional do espaço maior com a constante Newtoniana conforme a expressão:

$$G_{(4)} = \frac{G_{(4+\delta)}}{V_\delta}. \quad (2.89)$$

Concluimos então que em regiões distantes da fonte a Lei do Inverso do Quadrado é recuperada. Em regiões próximas à fonte podemos usar a simetria esférica ao invés da cilíndrica, dessa forma é possível escrever o potencial gerado pela fonte de maneira aproximada da seguinte forma:

$$V = -G_{(4)} \frac{m}{r}, \quad (r \gg R) \quad (2.90)$$

$$V = -\frac{4\pi G_{(4+\delta)} \Gamma(\frac{\delta+3}{2})}{2\pi^{\frac{\delta+3}{2}} (\delta+1)} \frac{m}{r^{(\delta+1)}}, \quad (r \ll R), \quad (2.91)$$

onde  $S^{(d)} = \pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ . Note que a **eq. 2.91** representa um desvio na lei do inverso do quadrado, uma vez que o potencial produzido pela massa  $m$  sofre uma amplificação

no modelo de branas ADD. Portanto, nesse cenário de dimensões extras, dependendo do valor da constante gravitacional do espaço maior, é possível especular sobre detecção de efeitos mensuráveis das dimensões extras sobre os experimentos que buscam desvios na força gravitacional.

### 2.3.6 Compactação Toroidal

Tentaremos agora determinar o potencial gravitacional produzido por uma massa em ponto qualquer desse espaço compacto. Para sermos mais específicos, vamos considerar um espaço-tempo  $(\delta + 4)$ -dimensional, onde as dimensões extras  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \delta$ , estão compactadas em círculos, cada círculo com raio  $R$ . Assim, considerando que o potencial gravitacional produzido satisfaz a equação de Poisson, podemos então escrever o potencial gravitacional gerado por uma massa  $M$  a uma distância  $\mathcal{R} = (r^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_\delta^2)^{1/2}$ , onde  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  (Fig. 7)

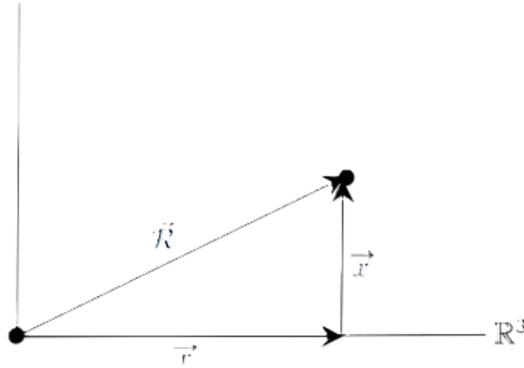


Figura 7: Simplificação de um potencial gerado por uma massa  $M$  em um espaço extra-dimensional. Figura retirada da referência [6].

Assim, em um espaço com topologia do  $\mathbb{R}^{\delta+3}$ , temos:

$$V_M = -\frac{G_{(\delta+4)}M}{|\mathcal{R}|^{\delta+1}} = -\frac{G_{(\delta+4)}M}{(r^2 + \sum_{i=1}^{\delta} x_i^2)^{\frac{\delta+1}{2}}}. \quad (2.92)$$

Como vimos anteriormente, os efeitos do espaço compacto podem ser implementados por meio das chamadas imagens topológicas. Para simplificar a nossa descrição identificaremos cada imagem topológica como uma sequência de  $\delta$  números inteiros

$(m_1, m_2, \dots, m_\delta)$ , que nos fornece a localização de cada massa no espaço suplementar. Considerando então um vetor  $\vec{T}_1$  que localiza a imagem topológica  $m_1$  (**Fig. 8**).

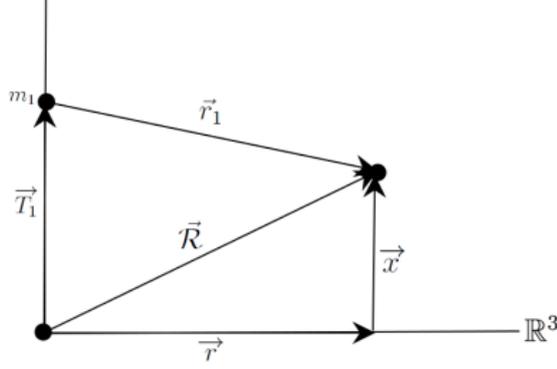


Figura 8: Representação da influência de uma imagem topológica sobre um ponto no espaço extra-dimensional. Figura retirada da referência [6].

Podemos escrever  $\vec{T}_1$  em termos de suas componentes da seguinte maneira:

$$\vec{T}_1 = (0, 0, 0, x_1 = 2\pi R, 0, \dots, 0). \quad (2.93)$$

Generalizando a forma escrita anteriormente para um  $\vec{T}_m$  (imagem topológica qualquer):

$$\vec{T}_m = l(0, m_1, m_2, \dots, m_\delta) = l(0, m), \quad m \in \mathbb{Z} \text{ e } l = 2\pi R. \quad (2.94)$$

Além disso, generalizando também a forma do potencial obtemos a seguinte expressão:

$$V_M = -\frac{G_{4+\delta}M}{|r_m^\rightarrow|^{\delta+1}} = -\frac{G_{4+\delta}M}{|\vec{R} - \vec{T}_m|^{\delta+1}} = -\frac{G_{4+\delta}M}{(r^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - 2\pi R m_i)^2)^{\frac{\delta+1}{2}}}. \quad (2.95)$$

O potencial para todas as imagens topológicas então pode ser escrito com um somatório, dessa forma teremos:

$$V_{4+\delta} = -\sum_{\vec{m}} \frac{G_{4+\delta}M}{\left(r^2 + \sum_{i=1}^{\delta} (x_i - 2\pi R m_i)^2\right)^{\frac{\delta+1}{2}}}. \quad (2.96)$$

Observe que para distâncias curtas, ou seja,  $r \ll R$  o termo correspondente à  $m = 0$  irá dominar a soma, pois os outros termos irão fornecer um valor maior para os seus respectivos denominadores [3]. Portanto:

$$V_{4+\delta} = -\frac{G_{4+\delta}M}{(r^2 + x^2)^{\frac{\delta+1}{2}}}, \quad (2.97)$$

Dessa forma, é possível então recuperar o comportamento em  $(\delta + 1)$ -dimensões que obtemos anteriormente, ou seja, próximo da massa-fonte os efeitos da compactação não são dominantes.

Considerando agora  $r \gg R$ , as massas topológicas estariam relativamente muito próximas, formando então aproximadamente uma linha de distribuição contínua de imagens topológicas. Nessa idealização, podemos calcular o potencial gerado substituindo a soma das expressões acima por uma integral. Para simplificar nossa análise, considere que  $\vec{x}_m = \vec{x} - 2\pi\vec{R}_m$ , onde  $\vec{R}_m = R(m_1, m_2, \dots, m_\delta)$  na eq. 2.96. Note que o vetor  $\vec{x}_m$  localiza pontos de uma rede, cujo volume de cada célula é  $\xi = (2\pi R)^\delta$ , que é justamente o volume do toro  $n$ -dimensional. Portanto, a fração de imagens topológicas no interior de um elemento de volume do espaço suplementar seria dada por:

$$dN = \frac{d^\delta x}{\xi_\delta}. \quad (2.98)$$

O potencial gerado por esse grupo de imagens seria, então, infinitesimal e seria dado por:

$$dV_{4+\delta} = -\frac{G_{4+\delta}M}{\xi_\delta} \frac{1}{(r^2 + x^2)^{\frac{\delta+1}{2}}} d^\delta x. \quad (2.99)$$

Dessa forma, considerando todas as imagens topológicas, o potencial gerado será:

$$V_{4+\delta} \simeq -\frac{G_{4+\delta}M}{\xi_\delta} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(r^2 + x^2)^{\frac{\delta+1}{2}}} d^\delta x. \quad (2.100)$$

Aqui é possível calcular a integral no espaço suplementar fazendo uma mudança de coordenadas para coordenadas esféricas, uma vez que a função integrada depende

de  $x^2$ . Usando a superfície de uma esfera unitária  $(\delta - 1)$ -dimensional,  $A(S^{\delta-1}(1)) = 2\pi^{\delta/2} (\Gamma(\frac{\delta}{2}))^{-1}$ . Assim:

$$V_{4+\delta} \simeq \frac{-G_{4+\delta}M}{\xi_\delta} \int_0^\infty \frac{A(S^{\delta-1}(1))x^{\delta-1}}{(r^2 + x^2)^{\frac{\delta+1}{2}}} dx \quad (2.101)$$

$$= \frac{-G_{4+\delta}MA(S^{\delta-1}(1))}{\xi_\delta} \int_0^\infty \frac{x^{\delta-1}}{(r^2 + x^2)^{\frac{\delta+1}{2}}} dx \quad (2.102)$$

$$= \frac{-G_{4+\delta}MA(S^{\delta-1}(1))}{\xi_\delta} \left( \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\delta}{2})}{2\Gamma(\frac{\delta+1}{2})} \frac{1}{r} \right) = \frac{-G_{4+\delta}A(S^\delta(1))M}{2\xi_\delta r}. \quad (2.103)$$

Como esperado, o comportamento ordinário do potencial em três dimensões é recuperado. Esse resultado havia sido deduzido na seção anterior usando a Lei de Gauss. Aqui, obtivemos diretamente a partir da expressão **eq. 2.96**, que corresponde ao valor exato do potencial gravitacional produzido por uma massa nesse espaço com topologia  $R^3 \times T^\delta$ .

### 2.3.7 Cálculo das Correções de Potencial devido às Dimensões Extras

Para melhorarmos a aproximação do nosso resultado para longas distâncias, vamos mais uma vez utilizar o potencial produzido por todas as massas topológicas, dado na **eq. 2.96**. A nossa ideia é tentar simplificar aquela expressão ao máximo, e aplicar aproximações apenas no estágio final do procedimento.

Podemos reescrever a **eq. 2.96** da seguinte maneira:

$$V_{4+\delta} = -G_{4+\delta}M \sum_{\vec{m}} \frac{1}{\left( r^2 + \sum_{i=1}^\delta (x_i - 2\pi Rm_i)^2 \right)^{\frac{\delta+1}{2}}}. \quad (2.104)$$

Da expressão acima, podemos verificar que o potencial resultante é periódico nas dimensões extras, devido a sua topologia toroidal. O período será igual ao comprimento  $2\pi R$ , em cada direção. Como sabemos, as funções periódicas podem ser expandidas em série de Fourier. Podemos mostrar (ver detalhes no **Apêndice A**), que a série de Fourier

do potencial escrito na eq. **2.104** pode ser escrita como:

$$V_{4+\delta} = -\frac{G_{4+\delta}M}{(2\pi R)^\delta} \sum_{\vec{m}} e^{i\vec{m}\cdot\mathbf{x}/R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\vec{m}\cdot\mathbf{x}'/R}}{(r^2 + \mathbf{x}'^2)^{\frac{\delta+1}{2}}} d\mathbf{x}'. \quad (2.105)$$

A integral acima é conhecida e pode ser calculada explicitamente (ver **Apêndice B**). Após algumas manipulações encontramos:

$$V_{4+\delta} = -\frac{G_4M}{r} \sum_{\vec{m}} e^{-r|\vec{m}/R|} e^{-i\vec{m}\cdot\mathbf{x}/R}. \quad (2.106)$$

Considerando que a matéria e os campos (exceto o gravitacional) estão presos a brana tomamos  $x = 0$ , pois o observador também está confinado na brana. Assim, teremos que a uma distância  $r$  da massa  $m$ , o potencial produzido será dado por:

$$V_{4+\delta} = -\frac{G_4M}{r} \sum_{\vec{m}} e^{-r|\vec{m}/R|}. \quad (2.107)$$

Esse resultado acima é exato, porém pouco prático porque é dado em termos de uma série. No entanto, se  $r \gg R$ , os termos da série são exponenciais que decrescem rapidamente. Assim, sob tais condições, podemos truncar a série. Uma primeira aproximação tomando apenas os maiores termos **[3, 4]**, ou seja,  $|m| = 0$  e  $|m| = 1$ , encontramos:

$$V_{4+\delta} \simeq \frac{G_4M}{r} (1 + \alpha e^{-r/R}), \quad (2.108)$$

onde  $\alpha$  será igual a duas vezes o número de dimensões compactas com o mesmo raio de compactação  $R$ . Essa relação entre  $\alpha$  e o número de dimensões extras segue do seguinte resultado. O vetor  $\vec{m}$  pode ter módulo unitário de diferentes maneiras. A componente  $m_1$  pode valer  $+1$  ou  $-1$ , e as demais nulas, por exemplo. Ou, apenas a componente  $m_2$  valeria  $+1$  ou  $-1$ . Portanto, como há  $\delta$  componentes, concluímos que  $\alpha = 2\delta$ .

A eq. **2.108** mostra que para longas distâncias o comportamento do potencial gravitacional tridimensional é recuperado, mas há correções devido às dimensões extras. Essa correção que tem a forma  $\alpha e^{-r/R}$  é conhecida como correção do tipo Yukawa. Esse

tipo de correção é muito importante porque ela pode ter diferentes origens teóricas. Há teorias do tipo  $F(R)$  que também preveem correções desse tipo. No capítulo 4, utilizaremos essa parametrização de Yukawa para impor vínculos para as modificações do potencial gravitacional.

### 2.3.8 Gravitação e Comprimento de Planck

Em algumas situações é um pouco mais simples trabalharmos a gravitação utilizando o sistema de unidades de Planck, onde fazemos a substituição das três unidades básicas: segundo, grama e centímetro, por outras unidades de tempo, massa e comprimento de tal forma que as constantes fundamentais ( $G$ ,  $\hbar$ ,  $c$ ) sejam unitárias. Podemos escrever essas novas unidades em termos das constantes fundamentais da seguinte maneira:

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,61 \cdot 10^{-33} \text{ cm}, \quad (2.109)$$

$$t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,4 \cdot 10^{-44} \text{ s} \quad (2.110)$$

$$m_p = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} = 2,12 \cdot 10^{-5} \text{ g}, \quad (2.111)$$

onde  $l_p$ ,  $t_p$  e  $m_p$  são respectivamente o comprimento de Planck, o tempo de Planck e a massa de Planck. Teoricamente espera-se que esses valores sejam a representação do cenário (escala) em que os efeitos causados pela gravidade quântica desempenham um papel relevante [21].

Como estamos trabalhando com a hipótese da existência de dimensões extras, devemos generalizar estas unidades para  $\eta$  dimensões. Para isso nos baseamos na eq. 2.109 e na análise dimensional do comprimento Planck [21]. Supondo que  $G^\eta$  seja a constante gravitacional fundamental do espaço-tempo com  $\eta$  dimensões, podemos, baseado na definição acima, escrever:

$$(l_p^{(\eta)})^{\eta-2} = \frac{G^{(\eta)}\hbar}{c^3}. \quad (2.112)$$

Portanto, multiplicando e dividindo a equação **eq. 2.112** por  $G$  e usando a **eq. 2.109** obtemos a seguinte relação entre o comprimento de Planck do espaço maior e comprimento de Planck no espaço-tempo quadridimensional.

$$(l_p^{(\eta)})^{\eta-2} = l_p^2 \frac{G^{(\eta)}}{G}, \quad (2.113)$$

Além disso, observe que a **eq. 2.113** estabelece uma relação entre uma constante gravitacional  $G^{(\eta)}$  em dimensões extras, utilizando algum valor do comprimento de Planck  $l_p^{(\eta)}$  neste universo. Isto nos leva a concluir que o valor efetivo do comprimento de Planck no espaço quadridimensional é dado por  $l_p = 10^{-33} \text{ cm}$  e o valor fundamental  $l_p^{(\eta)}$  deve ser medido no espaço ambiente.

Sabendo que o comprimento da dimensão extra compacta é dado por  $2\pi R$ , vimos que a **eq. 2.83** estabelece uma relação entre  $G^{(4)}$  e  $G^{(5)}$ . Podemos fazer uma generalização desta equação escrevendo:

$$\frac{G^{(\eta)}}{G^{(4)}} = l_c^{\eta-4}. \quad (2.114)$$

Neste caso, consideramos que  $l_c = 2\pi R$  se trata do comprimento da dimensão extra com a topologia associada a uma pequena circunferência.

Prosseguindo nosso estudo, devemos agora tentar entender como o comprimento fundamental de Planck em uma teoria de dimensões extras com compactação se relaciona com o comprimento de Planck efetivo da teoria quadridimensional. Para isto, observe que já encontramos uma relação entre  $l_p$  e  $G^{(\eta)}$  por meio da **eq. 2.113**, além disso, usando a **eq. 2.114** determinamos como as constantes gravitacionais se relacionam. Dessa forma, aplicando a **eq. 2.114** na **eq. 2.113** e usando que  $\eta - 2 = \eta - 4 + 2$  teremos a seguinte relação:

$$l_c = l_p^{(\eta)} \frac{l_p^{(\eta)}}{l_p}. \quad (2.115)$$

Se considerarmos que o comprimento de Planck no espaço de  $\eta$  dimensões é da mesma ordem da escala eletro-fracas ( $10^{-18} \text{ cm}$ ) e como já visto, temos que no espaço

quadrimensional  $l_p = 10^{-33}cm$ , podemos substituir estes valores na equação anterior obtendo:

$$l_c = 10^{-18}(10^{15})^{\frac{2}{n-4}}. \quad (2.116)$$

Considerando ainda um espaço com uma única dimensão extra, ou seja, com cinco dimensões totais, temos que o tamanho desta dimensão seria da ordem de  $10^{12} cm$  ou  $10^7 km$ , o que não faz sentido do ponto de vista físico visto que, se houvesse uma dimensão extra desse tamanho ela já teria sido detectada. Por outro lado, considerando duas dimensões extras, ou seja, seis dimensões totais, obtemos que [21]:

$$l_c \approx 0,01 mm. \quad (2.117)$$

Este cenário é extremamente motivador do ponto de vista fenomenológico, uma vez que nesta escala possíveis desvios da gravitação começariam a aparecer. A partir dessa hipótese vários cientistas experimentais partiram em uma jornada para tentar identificar estas supostas modificações.

# 3 Testes Experimentais: Gravitação em Curtas Distâncias

Neste capítulo, como o próprio título sugere, o objetivo é abordar alguns testes experimentais no domínio de curtas distâncias, visto que abaixo de uma certa escala de comprimento os efeitos da gravitação, segundo algumas teorias da gravitação modificada a exemplo das teorias de dimensões extras de grande escala, seriam amplificados. Como veremos, a ausência de traços experimentais desses supostos desvios, nos permite identificar alguns vínculos empíricos para parâmetros de Yukawa  $\alpha$  e  $\lambda$ . No caso do modelo ADD, como vimos no capítulo anterior, esses vínculos podem ser traduzidos em termos de limites experimentais sobre o raio da dimensão extra e do número de dimensões escondidas.

De maneira geral, na ciência é muito importante que tenhamos experimentos que comprovem a teoria apresentada. Como vimos anteriormente, o modelo ADD prevê uma correção na Lei do Inverso do Quadrado, portanto, fica claro que nosso objetivo principal é investigar experimentos que possam evidenciar esse desvio, para que assim, tenhamos uma teoria mais sólida.

## 3.1 A Parametrização de Yukawa e a Parametrização da Lei das Potências

Antes de abordarmos alguns experimentos é extremamente importante que possamos procurar comprovações experimentais de desvios na lei do inverso do quadrado, ou de maneira equivalente, uma correção do potencial gravitacional. Os desvios são descritos por meio de parametrizações e as mais conhecidas são: a parametrização de Yukawa e a parametrização da lei das potências.

Iniciamos então com a parametrização de Yukawa, dada pela soma entre o potencial gravitacional usual e o potencial de Yukawa. Portanto, considere duas partículas com massa  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente, utilizando esta parametrização teremos que:

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}(1 + \alpha e^{-\frac{r}{\lambda}}). \quad (3.1)$$

Lembre-se que, quando realizamos cálculos considerando as correções devido à existência de dimensões extras, podemos perceber que  $\alpha$  está relacionado ao número de dimensões extras com o mesmo raio de compactação, enquanto o parâmetro  $\lambda$  está relacionado ao próprio raio de compactação da dimensão extra. Agora, considerando a parametrização da Lei das Potências, e considerando as mesmas duas partículas que analisamos anteriormente, podemos escrever o potencial da seguinte maneira [14, 37]:

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left( 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^\delta \right), \quad (3.2)$$

onde  $r_0$  tem dimensão de comprimento e  $\delta$  é o número de dimensões extras.

Deste ponto em diante, estudaremos diversos testes experimentais da lei do inverso do quadrado, e analisaremos os diversos vínculos determinados por eles com base na parametrização de Yukawa.

### 3.2 Balança de Torção: Teste da Lei do Inverso do Quadrado

A Teoria da Relatividade Geral é um dos pilares que regem a física contemporânea e trata-se de uma teoria muito bem estabelecida cientificamente. Apesar disso, certos problemas, como o da matéria e da energia escura, motivaram o surgimento de diversas teorias de gravitação e com isto, novas especulações acerca da lei do inverso do quadrado, o que motivou cientistas do mundo inteiro a procurarem desvios no comportamento da gravitação. Além disso, como já estudamos anteriormente, estes desvios revelam a possibilidade da existência de dimensões extras. Por outro lado, é importante deixar claro que esta é apenas uma das motivações para a realização destes experimentos. Também é importante dizer que existem extensões do modelo padrão da física de partículas que preveem a existência de bósons adicionais que poderiam interferir indiretamente na lei do inverso do quadrado em determinados domínios [39, 40] e algumas teorias de  $F(R)$  também fazem previsões semelhantes [40].

A balança de torção é uma máquina capaz de realizar medições de torques extremamente fracos, por isso, historicamente, podemos dizer que, na maioria dos experimentos sensíveis à gravidade, foi usado este aparelho. Portanto, é natural que se tente encontrar desvios na lei do inverso do quadrado utilizando este instrumento. Um dos grupos que obtiveram bastante destaque na realização destes experimentos foi o de Eöt-Wash da Universidade de Washington [42].

### 3.2.1 O Experimento de Eöt-Wash 2004

O grupo de Eöt-Wash utilizou um pêndulo de torção de baixas frequências para medir a gravidade em curtas distâncias conforme mostra a figura abaixo.

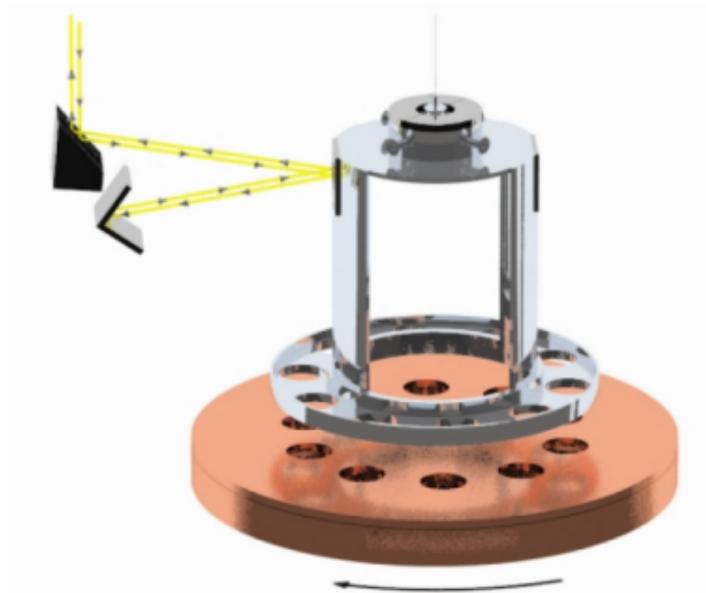


Figura 9: Desenho esquemático da balança de Torção criada pelo grupo Eöt-Wash composta por um pêndulo de torção e uma base atrativa giratória. Figura retirada da referência [43].

O dispositivo utilizado pelo grupo consiste em um anel de alumínio (chamado de detector) com dez orifícios, igualmente espaçados, suspensos por uma fina camada de Tungstênio e logo abaixo, temos dois discos coaxiais giratórios de cobre, com dez orifícios semelhantes que atuam como a massa atratora do dispositivo e por este motivo são chamados de atratores. Os discos então atraem o pêndulo gravitacionalmente. Se os orifícios do anel e dos discos estivessem perfeitamente alinhados, a força gravitacional

sobre o anel exercida pelos discos seria para baixo, e, portanto, não provocaria nenhum torque. Mas, como os discos giram, os seus orifícios ora estarão mais à direita, ora deslocados mais à esquerda em relação à posição dos furos do anel. Esse movimento relativo, provoca um torque no anel, que faz o pêndulo girar num sentido e no outro. A frequência de oscilação do pêndulo será proporcional à frequência de giro do disco. Para melhorar a precisão do instrumento, o disco inferior não está alinhado com o disco superior, mas deslocado azimutalmente por um ângulo de 18 graus. Esta geometria foi utilizada para que o sinal da gravidade newtoniana fosse reduzido, enquanto possui pouco efeito sobre um sinal de curto alcance. O espelho montado acima do anel funcionava como um autocolimador e media o torque do pêndulo através do laser emitido [42].

Portanto, caso não haja nenhum desvio na lei do inverso do quadrado, os orifícios inferiores (massas faltantes) irão produzir um torque no anel do pêndulo que diminui a torção induzida pelo disco superior em uma certa magnitude. Por outro lado, se a força gravitacional for alterada para curtas distâncias, então será possível observar um sinal de torção, pois torque induzido pelo disco não cancelará a torção do disco superior.

Para realização deste experimento o potencial utilizado foi parametrizado por meio da parametrização de Yukawa. A melhor sensibilidade atingida por este teste foi para  $\lambda = 1,5mm$ , onde se restringi  $|\alpha| < 0.0079$  com 95% de confiança. Além disso, também foi possível restringir o raio da dimensão extra como sendo  $R < 160\mu m$ . Para o caso particular em que temos duas dimensões extras, houve a imposição de um limite inferior para a massa de unificação:  $M \geq 1.7TeV/c^2$ . Como vimos, os parâmetros de Yukawa e o raio da dimensão extra se relacionam por meio da equação [44]:

$$V_{4+\delta} \simeq \frac{G_4 M}{r} (1 + 2\delta e^{-r/R}). \quad (3.3)$$

### 3.2.2 O Experimento de Eöt-Wash 2006

Da mesma forma que foi realizado o experimento de 2004, o grupo Eöt-Wash utilizou a balança de torção para realizar o experimento de 2006. Esta também possuía baixa frequência, entretanto a maquinaria utilizada anteriormente sofreu uma evolução

considerável permitindo aos cientistas realizar o teste gravitacional em uma escala ainda menor. Neste novo experimento, os corpos testes apresentavam 42 orifícios (ao invés de 10) feitos no detector e na fonte (como mostrado detalhadamente na **Fig. 10**). Além do maior número de orifícios que a balança de torção utilizada em 2004, o aparelho deste experimento também teve ajustes no tamanho relativo dos orifícios permitindo o aumento do torque de interação de curto alcance e a diminuição do torque Newtoniano. Da mesma maneira que em 2004, a medição deste torque era feita por um autocolimador. É válido destacar que o autocolimador também foi melhorado [38, 42, 45].

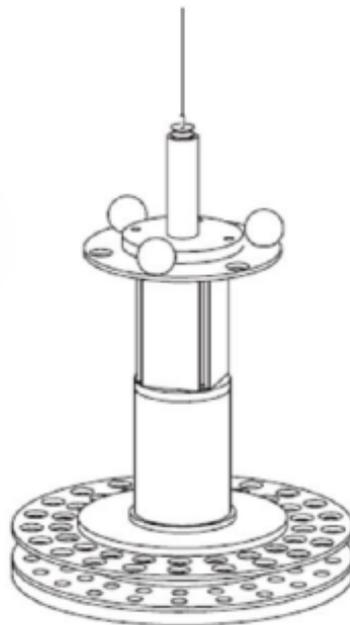


Figura 10: Desenho esquemático da balança de Torção utilizada pelo grupo Eöt Wash em 2006. Foram utilizados quatro espelhos planos retangulares para o monitoramento da torção. Figura retirada da referência [45].

Utilizando o mesmo método que o utilizado em 2004, colocou-se um disco abaixo do primeiro disco da balança para cancelar a interação gravitacional Newtoniana. A ideia é que o disco inferior cancelaria aproximadamente o torque se a Lei do Inverso do Quadrado fosse mantida. Considerando então o número bastante superior de orifícios utilizados, o cancelamento do efeito gravitacional Newtoniano foi feito com um grau de precisão maior.

Foram realizados três experimentos explorando variações na espessura do disco compensador, no ângulo de suspensão e na frequência de rotação. Dessa forma, o melhor resultado obtido foi para  $\lambda \approx 600\mu m$ , fazendo uma restrição para  $\alpha$  tal que  $|\alpha| < 0.0037$

para um nível de confiança de 95%. É possível concluir então que houve uma restrição ainda maior do vínculo sobre a escala da dimensão extra como mostra a **Fig. 11**.

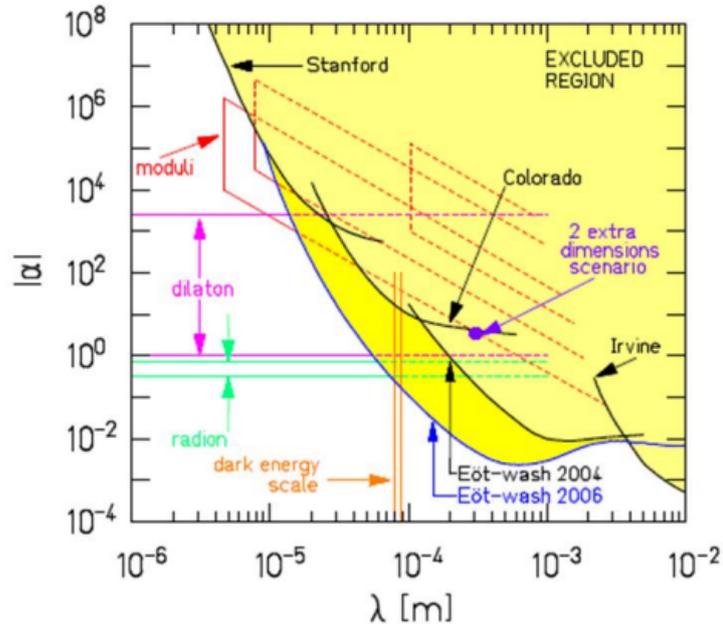


Figura 11: Limites para as violações de Yukawa para a Lei do Inverso do Quadrado. As linhas rotuladas por Eöt-Wash 2004, Eöt-Wash 2006, Irvine, Colorado e Stanford mostram os limites experimentais obtidos por estes grupos. A região acima das linhas sólidas apresenta limites sobre violações do tipo Yukawa para o potencial gravitacional e descarta qualquer desvio na Lei do Inverso do Quadrado. Figura retirada da referência [45].

### 3.2.3 O Experimento de Eöt-Wash 2020

A procura por desvios na lei do inverso do quadrado é extremamente relevante no estudo sobre gravitação modificada. Por outro lado, experimentos em pequenas escalas (abaixo de  $100 \mu m$ ) são extremamente difíceis de ser realizados.

Nos testes realizados utilizando a balança de torção, os torques harmônicos exercidos por um atrator rotativo em um pêndulo detector são estudados como funções de separação entre as superfícies de revestimento do detector e dos corpos de teste do atrator. A diferença para as gerações de experimentos anteriores é justamente o dispositivo utilizado

para a realização do experimento. O novo dispositivo possui uma série de melhoramentos que permitiram o aumento da precisão do experimento. Na figura 12, temos um gráfico que compara os vínculos obtidos mais recentemente (2020) com os vínculos passados [84].

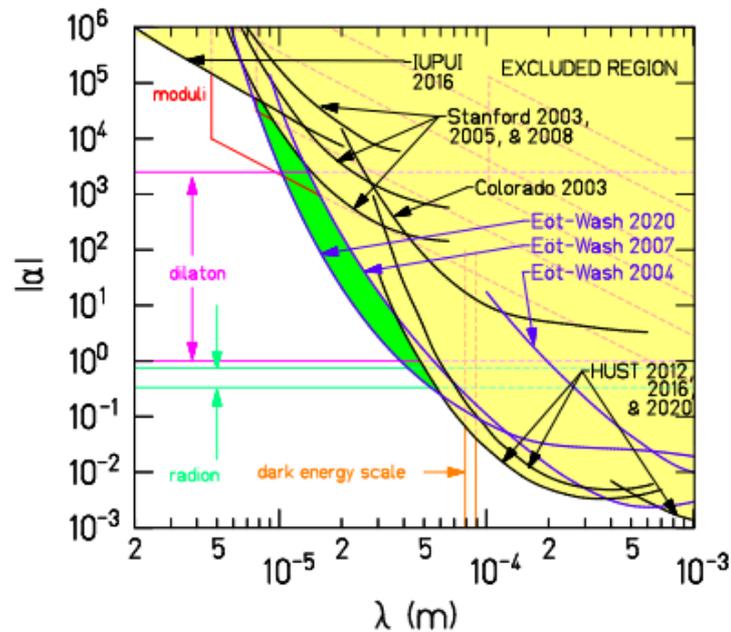


Figura 12: Vínculos utilizando a parametrização de Yukawa para testes na Lei do Inverso do Quadrado. As linhas descrevem experimentos do Grupo Eöt-Wash, além de descrever outros resultados como o de IUPUI (2016), HUST (2012, 2016 e 2020), entre outros. Figura retirada da referência [84].

### 3.3 Vínculos do Efeito Casimir

Nesta seção veremos outro fenômeno utilizado com bastante frequência em testes de gravitação de curta distância, o Efeito Casimir [46, 47]. É possível realizar a observação do Efeito Casimir colocando duas placas metálicas condutoras, porém eletricamente neutras, paralelas entre si e separadas por uma distância da ordem de micrômetros no interior de uma câmara selada com vácuo no seu interior. Classicamente, espera-se que não haja nenhuma força de natureza elétrica entre as placas visto que estão eletricamente neutras, mas as medidas indicam a existência de uma força atrativa entre as placas, este fenômeno é conhecido como Efeito Casimir que recebe este nome em homenagem ao físico holandês

Hendrik Brugt Gerhard Casimir [46, 47, 48].

Casimir foi o responsável por mostrar que a força de atração das placas deveria ser inversamente proporcional à quarta potência da distância  $a$  de separação entre elas:

$$F = -A \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}, \quad (3.4)$$

onde  $A$  representa a área de cada placa. Portanto, temos que nos perguntar o que justifica este efeito. Do ponto de vista clássico, a palavra vácuo remete a ausência completa de matéria. Por outro lado, no domínio quântico temos um novo conceito denominado energia do ponto zero, que se refere a uma energia ocasionada por flutuações quânticas que não podem ser eliminadas por nenhum processo físico. Em um certo sentido, podemos realizar uma associação entre essa energia e a energia mínima do oscilador harmônico quântico que não é nula, mas  $E = h\nu/2$ . Assim, através desse novo conceito, é possível justificar o Efeito Casimir, considerando-o como uma consequência da energia do ponto zero.

Consideremos agora um campo eletromagnético em uma região extensa, ou seja, temos a presença do vácuo, além disso, as oscilações deste campo se apresentam com todas as frequências possíveis (de zero a infinito). Ao realizar o confinamento deste campo eletromagnético em uma região espacial limitada, o espectro de frequência torna-se discreto devido às condições de contorno impostas. É possível ver isso no exemplo do poço quadrado infinito da mecânica quântica. Portanto, podemos entender o Efeito Casimir como uma alteração do espectro da frequência de vibração do campo eletromagnético devido ao confinamento gerado por placas metálicas, por exemplo.

A energia do vácuo, excluindo as placas, tem um valor infinito. Por outro lado, o mesmo ocorre quando calculamos a energia considerando as placas. Entretanto, ao calcularmos a diferença entre esses valores nas duas situações mencionadas, o resultado obtido é um valor finito e possui um significado físico (é válido destacar que para obtermos este resultado é necessário realizar um procedimento de renormalização). Podemos interpretar a diferença finita de energia como a energia necessária para introduzir as placas no vácuo. Portanto, por meio de toda essa análise é possível concluir que o Efeito Casimir é uma manifestação macroscópica das propriedades microscópicas do vácuo quântico.

Podemos descrever o Efeito Casimir como um efeito puramente quântico resultante das oscilações do campo eletromagnético, devido à presença de fronteiras materiais, ou seja, as placas, quando comparadas em um espaço sem fronteiras [46, 47].

Além da força de Casimir, as placas sofrem uma atração gravitacional. Considerando que esta interação está conforme a Lei do Inverso do Quadrado de Newton, então a força gravitacional entre elas será bem pequena. Por outro lado, pensando em um cenário que considera a existência de dimensões extras, o esperado haja a amplificação da força gravitacional entre as placas. Como do ponto de vista experimental, esta hipotética força anômala não foi detectada, é possível impor vínculos para o parâmetro de Yukawa. Portanto, os testes realizados com o Efeito Casimir podem ser utilizados com esta finalidade também.

Lembre que, ao levarmos em consideração a parametrização de Yukawa, o parâmetro  $\lambda$  mede a escala onde ocorreria a modificação da gravitação. Além disso, temos ainda que para cada valor de  $\lambda$  teremos um vínculo diferente para  $\alpha$  e, quanto menor  $\lambda$  for, menor será o vínculo imposto por  $\alpha$ . Esta é a explicação do porquê existe uma diferença enorme entre os vínculos impostos pelos experimentos utilizando a balança de torção e os vínculos impostos pelo Efeito Casimir, pois eles vinculam o parâmetro  $\alpha$  em escalas de comprimento diferentes. Na **Fig. 13**, mostramos os vínculos mais recentes obtidos por meio de experimentos que exploram o efeito de Casimir em laboratórios.

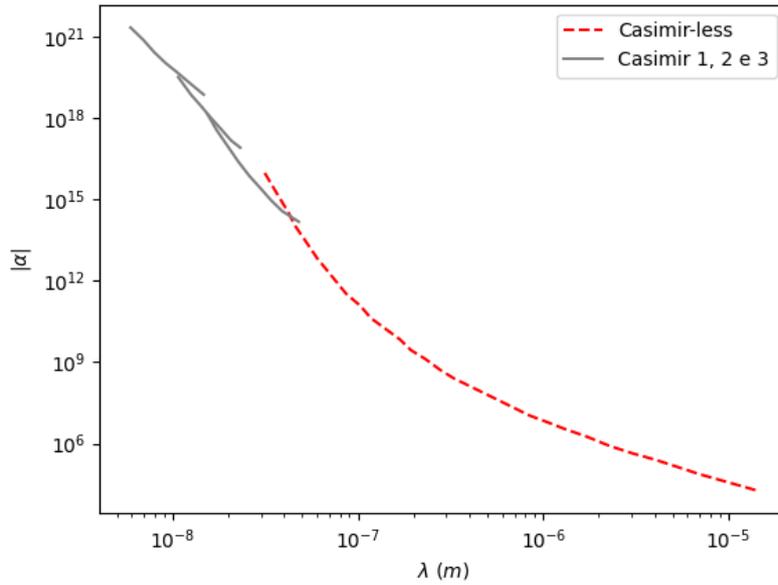


Figura 13: Vínculos utilizando interações do tipo Yukawa. A figura mostra: Casimir 1, 2 e 3 obtidos medindo as forças de Casimir laterais e normais entre superfícies corrugadas sinusoidalmente, pressão efetiva de Casimir e Casimir-less (experimentos que ocorrem a minimização do efeito Casimir). Figura baseada na imagem da referência [85].

### 3.4 Hélio Antiprotônico

O hélio antiprotônico é um átomo exótico composto por 3 corpos, um antipróton e um elétron que orbitam o núcleo de hélio. Pode ser produzido em laboratório a partir da mistura entre antipróton e o hélio comum. Este átomo é formado quando um anti-próton remove um dos dois elétrons que orbitam o átomo de hélio, portanto ocorre a substituição de um elétron por um antipróton. Este átomo, foi descoberto nas instalações do acelerador KEK, no Japão, bombardeando antiprótons em um alvo de hélio líquido [49]. Torna-se extremamente interessante estudar o caso do hélio antiprotônico, porque ao substituímos um elétron por um antipróton, a interação gravitacional entre núcleo e antipróton é cerca de 2000 vezes mais forte que a interação gravitacional elétron-núcleo, uma vez que o antipróton tem uma massa por volta de 1836 maior que a massa do elétron. Portanto, estudar o hélio antiprotônico se torna uma alternativa extremamente interessante para investigarmos possíveis desvios na gravitação.

Apesar dessa vantagem, precisamos destacar que existem grandes dificuldades técnicas

para se investigar esse átomo exótico em laboratório. Uma delas é que o período de vida deste tipo de átomo é de picossegundos, porque são destruídos por meio da aniquilação matéria-antimatéria dos antiprótons com o núcleo, quando estes estão muito próximos.

Por isso, apenas os átomos de hélio antiprotônico sintetizados em laboratório nos estados de Rydberg<sup>2</sup> podem ser investigados experimentalmente, considerando o estágio atual da nossa tecnologia [50]. Nesses estados de Rydberg observados, a distância média entre antipróton e núcleo é aproximadamente o raio de Bohr  $a_0$ . Nesse caso, os antiprótons quase não irão sobrepor-se ao núcleo e conseqüentemente seu período de vida é aumentado para microssegundos, possibilitando estudar os estados de Rydberg do hélio antiprotônico por meio da espectroscopia a laser.

Dessa forma, ao utilizar uma frequência óptica de femtossegundos em conjunto com um laser amplificado por pulso de uma onda contínua pelo Desacelerador Antiprotônico do CERN<sup>3</sup>. Seguindo a eletrodinâmica quântica é possível comparar os resultados experimentais obtidos com alguns cálculos teóricos e obter uma relação bem precisa entre os dois [52, 53].

A referência [81] aborda um estudo realizado no hélio antiprotônico, utilizando a parametrização de Yukawa para vincular a ação de uma quinta força adicional semelhante ao que fazemos, a diferença é que não consideramos outra força, e sim, uma modificação na força gravitacional.

De maneira resumida, para obtermos os vínculos, descreveremos a ação de uma quinta força utilizando o método perturbativo em primeira ordem. Usando a parametrização de Yukawa, o potencial associado à força anômala será:

$$V_5 = \hbar c \alpha_5 A_1 A_2 \frac{e^{-r/\lambda}}{r}, \quad (3.5)$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são considerados as “cargas” da interação anômala. Assim, considerando dois estados do hélio antiprotônico  $\Psi_{n_1, l_1}$  e  $\Psi_{n_2, l_2}$  é possível obter vínculos utilizando dados da transição entre os dois estados. Explicitamente temos que:

---

<sup>2</sup>o estado de Rydberg é caracterizado por uma distância entre o antipróton e o núcleo é muito grande, de tal forma que caberia outro átomo entre eles

<sup>3</sup>O CERN é a Organização Europeia para Pesquisa Nuclear

$$\langle \Delta f \rangle = \frac{\langle \Psi_{n_1, l_1} | V_5 | \Psi_{n_1, l_1} \rangle - \langle \Psi_{n_2, l_2} | V_5 | \Psi_{n_2, l_2} \rangle}{2\pi\hbar}. \quad (3.6)$$

Por outro lado, veremos na próxima seção que a correção do potencial gravitacional utilizando a parametrização de Yukawa é dada por  $|V_G| = GM_1M_2\alpha e^{-r/\lambda}/r$ , e nosso interesse é comparar os limites estabelecidos por estas correções. Para isto, observe que se a força anômala for devido à interação gravitacional  $A_1$  e  $A_2$  serão os números de massa atômica dos núcleos 1 e 2 respectivamente. Dessa forma:

$$M_1 = m_p A_1, \quad (3.7)$$

$$M_2 = m_p A_2. \quad (3.8)$$

Portanto, o potencial associado poderá ser reescrito da seguinte maneira:

$$V_5 = \alpha_5 \hbar c \frac{M_1 M_2 e^{-r/\lambda}}{m_p^2 r}. \quad (3.9)$$

Dessa forma, fazendo  $|V_5| = |V_G|$  podemos obter a seguinte relação:

$$\alpha = \alpha_5 \frac{\hbar c}{G m_p^2} \quad (3.10)$$

É importante dizer ainda que a energia de cada estado do átomo antiprotônico é calculada com grande grau de precisão, usando-se a QED. Os dados experimentais concordam com essas previsões dentro da incerteza das medidas da frequência de transição. Essa concordância, portanto, impõe vínculos para forças anômalas, uma vez que seus efeitos não podem exceder o erro experimental. Usando a [eq. 3.6](#) podemos calcular os efeitos da força anômala sobre a transição dos níveis. A magnitude desses efeitos será uma função de  $\alpha$  e  $\lambda$ . Impondo a condição de que o efeito não pode ser maior do que o erro, encontramos restrições para  $\alpha$  em função de  $\lambda$ . Os vínculos obtidos estão na [Fig. 14](#)<sup>4</sup>. Por fim podemos finalmente descrever os vínculos obtidos de forma gráfica

<sup>4</sup>Este cálculo é descrito com uma maior riqueza de detalhes em [81](#)

como mostra a **Fig. 14**. É importante destacar ainda que a referência [81] traz vínculos obtidos para o  $HD^+$  vibracional e rotacional além dos íons hélio-3 antiprotônico e hélio-4 antiprotônico.

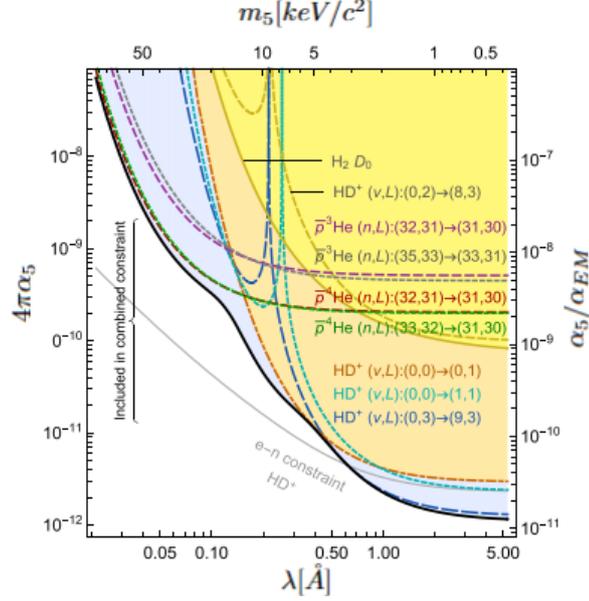


Figura 14: Vínculos impostos utilizando o  $HD^+$  vibracional e rotacional, além do hélio antiprotônico destacando a melhora entre medições antigas. Para obter esses vínculos, foi usada a parametrização de Yukawa. Aqui foi usada a constante de estrutura fina  $\alpha_{EM}$ . Lembrando que, para realizarmos comparações com os vínculos obtidos no nosso trabalho, usaremos a relação  $\alpha = \alpha_5 \frac{hc}{Gm_p^2}$  [81].

### 3.5 Vínculos Espectroscópicos usando Hidrogênio Eletrônico na Transição $1S - 3S$

Ao considerarmos o átomo de hidrogênio, por exemplo, a maior precisão para testes que procuram por desvios na gravitação em curtas distâncias está na frequência de transição  $1S - 3S$ . Isto ocorre porque o valor experimental obtido por meio da transição  $1S - 2S$  é utilizado para calcular algumas constantes espectroscópicas fundamentais, como a constante de Rydberg, por exemplo, portanto apesar de teoricamente a transição  $1S - 2S$  tenha uma medida mais precisa ela não pode ser utilizada para testar uma nova teoria.

Como o objetivo aqui é realizar uma comparação com os vínculos obtidos por meio

do hélio antiprotônico, estabeleceremos os vínculos fazendo a utilização dos parâmetros de Yukawa. Apesar da interação elétron-próton ser bem mais fraca que a interação antipróton-núcleo do hélio [\[9\]](#), os dados espectroscópicos do hidrogênio eletrônico que estão disponíveis são muito mais precisos que os dados do hélio antiprotônico. Para a transição  $1S - 3S$  temos os seguintes dados teóricos e experimentais [\[57, 58\]](#):

$$f_{1S-3S}^{th} = 2922743278671.6(1.4)kHz, \quad (3.11)$$

$$f_{1S-3S}^{exp} = 2922743278671.5(2.6)kHz. \quad (3.12)$$

É importante deixar claro que o valor entre parênteses nesses dados representam a incerteza. Considerando que as incertezas teórica e experimental são independentes entre si podemos calcular a incerteza total utilizando a seguinte expressão:

$$\delta f = \sqrt{\delta_{th}^2 + \delta_{exp}^2}. \quad (3.13)$$

Fazendo a substituição dos valores apresentados na [eq. 3.11](#) e na [eq. 3.12](#) obteremos então que:

$$\delta f = \sqrt{(1.6)^2 + (2.4)^2} \approx 3.0kHz. \quad (3.14)$$

Portanto, dentro do erro total combinado, as frequências teóricas e experimentais concordam entre si. Dessa forma, podemos concluir que qualquer nova interação que for considerada, como a gravitacional, por exemplo, não deve produzir novas correções para a frequência de transição em uma quantidade  $\Delta f$  maior que o erro total calculado, ou seja,  $\Delta f < \delta$ . Essa condição, estabelece assim alguns limites experimentais para os parâmetros de Yukawa.

Para calcular a nova correção  $\Delta f$  utilizaremos o método perturbativo. A interação próton-elétron pode ser descrita por meio da Hamiltoniana  $H_G^{(0)} = m\varphi$ , de tal forma que  $\varphi$  representa o potencial gravitacional modificado, descrito pela parametrização de Yukawa dada na [eq. 3.1](#)

---

<sup>5</sup> $\bar{\rho}He^+$

Seguindo então o método de perturbação em primeira ordem, temos que ao considerarmos esta nova interação, a energia de cada estado  $\psi$  será diminuída por uma quantidade  $\langle H_G^0 \rangle$ , que é justamente o valor médio da Hamiltoniana  $H_G^0$  no estado  $\psi$ , note ainda, que como queremos encontrar o efeito da gravitação modificada na energia consideramos apenas o termo de correção do potencial gravitacional. Portanto, perceba que a alteração provocada pela ação gravitacional nos estados  $1S$  e  $3S$  será diferente, ocasionando então em um aumento da diferença de energia entre eles. Isto nos possibilita escrever a correção nesta frequência de transição como:

$$\Delta f = \frac{\langle H_G^0 \rangle_{3S} - \langle H_G^0 \rangle_{1S}}{h}, \quad (3.15)$$

onde  $h = 6.62607015 \times 10^{-34} J/Hz$  é a constante de Planck. Sendo assim, para calcular as quantidades requisitadas pela equação **eq. 3.15** temos que considerar a função de onda  $\psi$  em cada um destes estados. Note que funções dependem de uma parte radial e uma parte angular. Como estamos considerando os estados  $3S$  (onde  $n = 1; l = 0$ ) e  $1S$  (onde  $n = 3; l = 0$ ) temos as seguintes expressões radiais já normalizadas:

$$R_{30} = \frac{2}{3\sqrt{3a_0^3}} \left( 1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2} \right), \quad (3.16)$$

$$R_{10} = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}. \quad (3.17)$$

Fazendo o uso destas expressões podemos estabelecer os nossos vínculos considerando a condição  $\Delta f < \delta f$ . Considerando estas funções radiais e o fato de a parte angular da função de onda para os estados  $1S$  e  $3S$  será dada pelo harmônico  $Y_0^0 = 1/(\sqrt{4\pi})$ . Dessa forma, podemos escrever as seguintes expressões integrais para os valores médios das Hamiltonianas nos estados  $1S$  e  $3S$ , dados por:

$$\langle H_G^0 \rangle_{1S} = \int \left( \frac{2}{\sqrt{3a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \right)^2 H_G^0 d^3r, \quad (3.18)$$

$$\langle H_G^0 \rangle_{3S} = - \int \left[ \frac{2}{3\sqrt{3a_0^3}} \left( 1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2} \right) e^{-\frac{r}{3a_0}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \right]^2 \frac{Gm_e m_p \alpha}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}} d^3r. \quad (3.19)$$

Dessa forma, ao realizarmos uma mudança de coordenadas para coordenadas esféricas para resolver as equações integrais acima teremos que:

$$\langle H_G^0 \rangle_{1S} = - \frac{4Gm_e m_p \alpha}{a_0} \frac{\lambda^2}{(2\lambda + a_0)^2}, \quad (3.20)$$

$$\langle H_G^0 \rangle_{3S} = - \frac{4Gm_e m_p \alpha}{a_0} \left( \frac{\lambda^2}{3(2\lambda + 3a_0)^2} - \frac{8\lambda^3}{3(2\lambda + 3a_0)^3} + \frac{32\lambda^4}{3(2\lambda + 3a_0)^4} - \frac{64\lambda^5}{3(2\lambda + 3a_0)^5} + \frac{160\lambda^6}{9(2\lambda + 3a_0)^6} \right). \quad (3.21)$$

Substituindo os resultados obtidos para  $\langle H_G^0 \rangle_{1S}$  e  $\langle H_G^0 \rangle_{3S}$  na **eq. 3.15** encontramos vínculos para o parâmetro  $\alpha$  (que mede o fator de amplificação do força gravitacional) em função do comprimento  $\lambda$ :

$$\alpha < \frac{\delta f h a_0}{4Gm_e m_p} \left( - \frac{\lambda^2}{3(2\lambda + 3a_0)^2} + \frac{8\lambda^3}{3(2\lambda + 3a_0)^3} - \frac{32\lambda^4}{3(2\lambda + 3a_0)^4} + \frac{64\lambda^5}{3(2\lambda + 3a_0)^5} - \frac{160\lambda^6}{9(2\lambda + 3a_0)^6} + \frac{\lambda^2}{(2\lambda + a_0)^2} \right)^{-1}. \quad (3.22)$$

A partir da expressão obtida então, podemos plotar o seguinte gráfico:

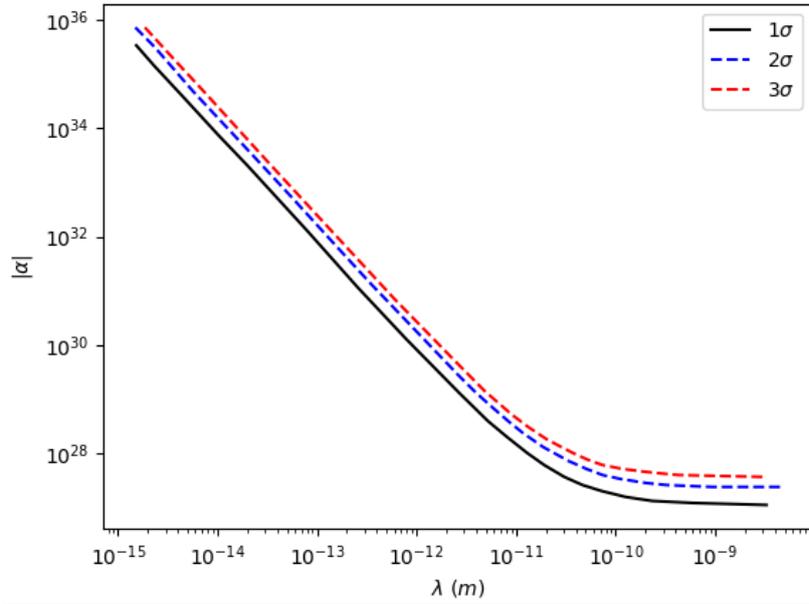


Figura 15: Vínculos estabelecidos para o hidrogênio eletrônico na transição  $1S - 3S$  para os níveis de confiança  $1\sigma$  (68%),  $2\sigma$  (95%) e  $3\sigma$  (99%). Figura baseada nos resultados obtidos na referência [5].

### 3.6 O Problema do Raio do Próton

Para concluir toda nossa revisão teórica, abordaremos um problema que veremos que poderia ser explicado em um cenário com dimensões extras, o problema do raio do próton. Este problema, na verdade, trata-se da discrepância entre as medidas do raio obtidas por meio da interação elétron-próton no átomo de hidrogênio (CODATA-2010) e medidas do raio feitas com base na interação múon-próton no hidrogênio muônico. Estudando o deslocamento de Lamb na transição  $2S - 2P$  do hidrogênio muônico, verificou-se um excesso de energia de aproximadamente  $0.3 \text{ meV}$  em relação ao valor esperado, baseado no raio próton estimado com os átomos eletrônicos. Este excesso inesperado implica um novo valor para o raio do próton. Essa incompatibilidade na medida do raio próton, poderia ser sanada se pudéssemos atribuir o excesso de energia a alguma interação (não prevista pelo Modelo Padrão) entre o múon e o próton. Para analisar esta questão, precisamos estar atentos a principal diferença entre múon e elétron que é justamente o valor da massa, pois a massa do múon é cerca de 207 vezes maior que a massa do elétron. Com base nessa

observação, poderíamos pensar que a interação gravitacional entre múon e próton é mais forte, portanto uma boa candidata para solucionar este problema é a teoria de dimensões extras, pois, nesse cenário, a força gravitacional é amplificada em curtas distâncias [22].

A expressão para o raio de carga do próton é dada por:

$$\langle r_p^2 \rangle = \int r^2 \rho_E d^3r. \quad (3.23)$$

É possível prever os efeitos da estrutura interna dos prótons no espectro de energia atômica usando o modelo padrão da teoria dos estados ligados da eletrodinâmica quântica (QED). Por exemplo, para o hidrogênio muônico analisado na transição  $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$  é esperado um deslocamento de Lamb dado por [24, 36],

$$\Delta E_L^{th} = \left[ 206.0668(25) - 5.2775(10) \frac{r_p^2}{fm^2} \right] meV. \quad (3.24)$$

A partir desta equação podemos obter que  $\Delta E_L^{th} (r_p^{CD}) = 202.0416(469) meV$ , quando usamos o raio de próton recomendado pelo CODATA-2010. Por outro lado, o valor experimental do desvio de Lamb é obtido a partir das medidas das transições  $(2P_{3/2}^{F=1} - 2S_{1/2}^{F=0})$  e  $(2P_{3/2}^{F=2} - 2S_{1/2}^{F=1})$ . O valor experimental encontrado para o deslocamento de Lamb é  $\Delta E_L^{exp} = 202.3706(23) meV$ . Observe então que há uma diferença de  $0.3290(469) meV$  entre o desvio de Lamb teórico e o experimental, o que pode indicar justamente que a eq. 3.24 possui um termo ausente devido à interação próton-múon. Poderíamos especular que esse termo ausente seria a interação gravitacional entre o próton e múon no cenário de dimensões extras.

Para calcular a influência do potencial gravitacional no espectro de energia do hidrogênio muônico, podemos desprezar as imagens topológicas, pois suas contribuições são menores que o erro experimental nessa análise. Podemos então calcular o potencial  $\phi$  usando a expressão  $-GM/R^{n+1}$ . Considerando então que a massa do próton é distribuída na extensão espacial do núcleo podemos então escrever que [22],

$$\phi(R) = -G_n \int \frac{\rho_M(R')}{|R - R'|^2} d^{3+n}R', \quad (3.25)$$

onde  $\rho_M = |\Psi_P|^2 m_p$  é a densidade de massa e  $\Psi_p = \chi(p)\psi_p(r)$  é a função de onda próton no espaço com dimensões extras.

O desvio no nível de energia do átomo muônico provocado pela interação gravitacional entre o próton e o múon pode ser calculado utilizando o desvio de energia utilizando a Hamiltoniana  $H_G = m_\mu \phi$  através do método perturbativo. Em primeira ordem, teremos que este desvio será dado por  $\langle m_\mu \phi \rangle_\psi$ . Dessa forma, usando a **eq. 3.25** teremos que:

$$\delta E_\psi^g = -G_n m_p m_\mu \int \frac{|\Psi_p|^2 |\Psi_\mu|^2}{|R - R'|^{n+1}} d^{3+n} R d^{3+n} R', \quad (3.26)$$

É possível mostrar então que resolvendo a integral na **eq. 3.26** obtemos **[22]**:

$$\delta E_{nS}^g = -\gamma_n \frac{G_n m_p m_\mu}{\sigma^{n-2}} |\Psi_S(0)|^2 \left[ 1 - \frac{3 r_p}{2 a_0} \right], \quad (3.27)$$

onde  $r_p$  é o raio do próton,  $\Psi_S$  é a função de onda do múon em um estado  $S$  calculado na origem,  $\gamma_n$  é um valor numérico que depende do número de dimensões extras e  $a_0$  representa o raio de Bohr do hidrogênio muônico, e  $\sigma$  é um parâmetro relacionado a espessura da brana. A **eq. 3.27** é válida apenas quando o número de dimensões extras  $\delta$  é maior que 2.

### 3.6.1 Contribuição para o desvio de Lamb

Analisamos anteriormente uma diferença de  $0.3290(469) \text{ meV}$  entre o valor teórico  $\Delta E_L^{th}$  e o valor experimental  $\Delta E_L^{exp}$ . Dessa forma, ao considerarmos o estado  $2S$  na **eq. 3.27**, temos que a diferença no nível de energia decresce por meio da expressão:

$$\delta E_{2S}^g = -\gamma_\delta \frac{G_{4+\delta} m_p m_\mu}{8\pi a_0^3 \sigma^{\delta-2}} \left( 1 - \frac{3 r_p}{2 a_0} \right). \quad (3.28)$$

Como o efeito gravitacional sobre o estado  $P$  é suprimido, a interação gravitacional é responsável por determinar uma separação adicional entre os níveis  $2S - 2P$  **[22]**. Isto nos permite resolver o problema do raio do próton caso  $|\delta E_{2S}^g| = 0.3290(469)$ . Essa condição estabelece uma relação entre  $G_{4+\delta}$  e  $\sigma$  que podemos escrever em termos de  $M_D$  da seguinte maneira:

$$\left[ \frac{(\hbar/c)^\delta \hbar c}{\delta + 2} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+3}{2}\right)}{2\pi^{(\delta+3)/2}} \frac{(2\pi)^\delta}{M_D^{\delta+2}} \right] \frac{\gamma_\delta m_p m_\mu}{8\pi a_0^3 \sigma^{\delta-2}} \left(1 - \frac{3r_p}{2a_0}\right) = 0.3290(469) \text{ meV}, \quad (3.29)$$

onde  $G_{4+\delta}$  corresponde ao termo entre colchetes. É possível realizar uma análise numérica da eq. [3.29](#) considerando que o parâmetro de confinamento satisfaz  $10^{-35}m \leq \sigma \leq 10^{-20}m$ , dessa forma, é possível estabelecer vínculos sobre  $M_D$  que solucionam o problema do raio do próton mostrados na figura abaixo [\[22\]](#).

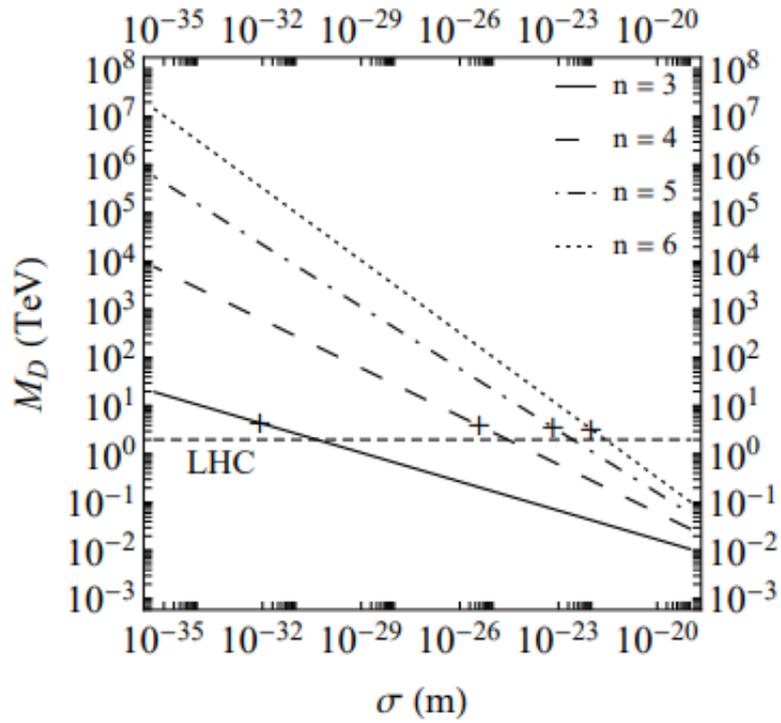


Figura 16: relação entre a massa de Planck  $M_D$  do espaço de dimensões extras em função do parâmetro  $\sigma$ . Figura retida da referência [\[22\]](#).

# 4 Novos Limites Experimentais Extraídos da Espectroscopia de Átomos Muônicos

Como vimos anteriormente, num cenário de dimensões extras ocorre a amplificação da gravitação em curtas distâncias, ou mais especificamente, para  $r \ll R$ , onde  $R$  representa o raio de compactação da dimensão extra. Nesta seção, analisando dados espectroscópicos recentes do Hélio muônico, determinaremos novos limites experimentais do desvio da gravidade padrão.

Nossa intenção neste capítulo é utilizar os dados experimentais fornecidos pela medida da espectroscopia do íon hélio-4 muônico na transição  $2S - 2P$  [63]. Além disso, iremos também estudar a influência da gravitação modificada na diferença entre o quadrado dos raios de carga do próton e do deuteron. A razão do nosso interesse por esta medida está relacionada ao fato de que o valor dessa grandeza inferido com base nos átomos eletrônicos coincide com valor determinado a partir do hidrogênio e deutério muônicos. Sendo assim, essa concordância estabelece um novo e independente limite experimental para desvios da gravitação nessa escala subatômica, que encontraremos nesse capítulo.

Posteriormente visamos abordar os limites experimentais estabelecidos a partir da transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  do hélio muônico. Nessa análise temos que considerar o formalismo pós-newtoniano, visto que a influência da gravitação nessa transição se dá através do acoplamento spin-órbita gravitacional, que depende do potencial pós-newtoniano associado à curvatura das seções espaciais do espaço-tempo.

## 4.1 Vínculos Espectroscópicos para o Potencial Newtoniano

### 4.1.1 Calculando Vínculos usando a Transição $2S - 2P$ no Hélio-4 Muônico

O sistema do íon hélio muônico é composto pelo núcleo do hélio e um múon que substitui um dos elétrons do átomo enquanto o outro é retirado. Desta forma, observe que nesta análise, o hélio muônico terá um sistema similar ao hidrogênio eletrônico, entretanto a interação gravitacional será bem mais forte, visto que o múon é bem mais pesado que o

elétron. Por outro lado, sabemos que a precisão das medidas de transição entre níveis de energia do hélio muônico são menores do que no hidrogênio eletrônico. Nesta seção, nosso objetivo é estudar os vínculos estabelecidos pela espectroscopia do íon hélio muônico para desvios do potencial utilizando também a parametrização de Yukawa, de maneira quase análoga ao que foi feito anteriormente para o hidrogênio eletrônico.

Neste íon muônico leve, um único múon orbita o núcleo. Sabemos que a massa do múon é 200 vezes a massa do elétron, além disso, a expressão do raio de Bohr para átomos do tipo hidrogênio considerando dois corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$  é dada em termos da massa reduzida  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , da massa do elétron  $m_e$ , do número  $Z$  de prótons do núcleo e do raio de Bohr do átomo de hidrogênio  $a_0$  da seguinte maneira:

$$a_0^* = \frac{m_e}{Z\mu} a_0. \quad (4.1)$$

Portanto, o raio de Bohr de um átomo muônico será bem menor que o raio de Bohr da versão eletrônica do mesmo átomo. Este fato resultará em aproximadamente  $200^3 \approx 8$  milhões de vezes maior sobreposição da função de onda do múon com o núcleo do átomo, e um aumento correspondente de sensibilidade das propriedades nucleares do átomo muônico em relação às características nucleares. Um exemplo disso, é o efeito mais forte da extensão finita do núcleo no desvio Lamb em átomos muônicos comparado aos átomos tradicionais. Por esse motivo, medidas do desvio Lamb (a diferença de energia entre os níveis  $2S$  e  $2P$ ) nesses átomos exóticos tem sido usadas com o propósito de medir os raios de carga do núcleo com maior precisão.

Com base na QED e no modelo padrão da física, é possível calcular a diferença de energia  $2P_{1/2} - 2S$ . Para o íon do hélio muônico, conforme a referência [63], o valor teórico para o desvio Lamb é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} \Delta E_{2P_{1/2}-2S}^{theo} = & 1,668.489(14) \text{ meV} \\ & - 106.220(8) \text{ meV fm}^{-2} \times r_\alpha^2 + 0.0112 \text{ meV} \\ & + 9.340(250) \text{ meV} - 0.150(150) \text{ meV}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

o primeiro termo é o valor calculado pela QED modelando o núcleo como uma carga

puntiforme. Os outros termos podem ser vistos como correções. O segundo termo representa o efeito do tamanho do núcleo, e por esse motivo ele é proporcional ao raio de carga do núcleo de Hélio, denotado aqui por  $r_\alpha$  - uma vez que o núcleo de hélio-4 é uma partícula  $\alpha$ . Os demais termos são correções determinadas por características internas do núcleo. Considerando então que os erros presentes em cada termo desta equação são independentes entre si, a incerteza teórica total será [63]:

$$\delta E_{the} = \pm 0.292 \text{ meV}. \quad (4.3)$$

Recentemente, o desvio Lamb do  $\mu He^+$  foi medido [63]. O valor experimental encontrado foi:

$$E_L^{exp} = 1,378.521 \pm 0.048 \text{ meV}. \quad (4.4)$$

Portanto, podemos considerar que os erros são independentes entre si e calcular a incerteza total, dessa forma obteremos:

$$\delta E = \sqrt{0.292^2 + 0.048^2} = 0.296 \text{ meV}. \quad (4.5)$$

A partir da expressão teórica para o desvio Lamb e do seu valor experimental, podemos inferir que o valor do raio da partícula alfa é  $r_\alpha = 1.67824(13)_{exp}(82)_{theo}$ . Essa estimativa é compatível com medidas do raio da partícula alfa obtidas por outros métodos. De fato, em experimentos de espalhamento de elétrons por núcleos de hélio, encontra-se que  $r_\alpha = 1.681(4)$  [63]. Os valores coincidem na margem de erro. Portanto, interações anômalas não podem produzir efeitos que sejam superiores ao erro. Em outras palavras, essa concordância entre as medidas do raio da partícula alfa por meio do hélio muônico e do hélio eletrônico impõe vínculos experimentais para qualquer nova interação fora do modelo padrão. Em particular, estes limites se aplicam a versões modificadas da interação gravitacional, previstas por algumas teorias, como a teoria de dimensões extras de grande escala, discutida no Capítulo 2. Para extrairmos novos vínculos sobre desvios gravitacionais, vamos mais uma vez utilizar a parametrização de Yukawa. Assim, a

Hamiltoniana da interação gravitacional entre o múon e o núcleo de hélio-4 será,  $H = m_\mu\varphi$  onde o potencial gravitacional modificado é  $\varphi = -GM_\alpha/r(1+\alpha e^{-r/\lambda})$ , onde  $m_\mu$  representa a massa do múon e  $M_\alpha$  é a massa do núcleo de Hélio-4. Essa interação gravitacional produz correções nas energias dos estados do átomo. O efeito sobre a energia de transição  $2S-2P$  será dado por:

$$\Delta E_G = \langle H_G^0 \rangle_{2P} - \langle H_G^0 \rangle_{2S}. \quad (4.6)$$

É importante ressaltar que, apesar de **eq. 4.6** ser uma equação bastante parecida com o que foi visto anteriormente, existem algumas nuances. Devemos estar atentos de que o múon é cerca de 200 vezes mais pesado que o elétron, assim, a distância entre o núcleo e o múon será menor, caracterizando justamente um raio de Bohr também menor. Dessa forma, em relação aos átomos eletrônicos, a intensificação da força gravitacional ocorre não só devido às massas das partículas interagentes, mas, indiretamente, através do raio de Bohr dos átomos muônicos, que é menor. Como sabemos, o raio de Bohr do íon de hélio muônico depende da massa reduzida desse átomo dada por  $\mu = M_\alpha m_\mu / (M_\alpha + m_\mu)$ , onde  $M_\alpha$  representa a massa do núcleo do hélio e  $m_\mu$  é a massa do múon. Dessa forma, o raio de Bohr para o hélio muônico é igual a  $a_0^* = 1.3039422757 \times 10^{-13} m$ .

O cálculo para obtermos os vínculos para o íon hélio muônico será análogo ao que fizemos para o átomo de hidrogênio, primeiramente calculamos os valores esperados utilizando as seguintes funções radiais:

$$R_{20} = \left(2 - \frac{r}{a_0^*}\right) \left(\frac{e^{-r/2a_0^*}}{(2a_0^*)^{3/2}}\right), \quad (4.7)$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{24}(a_0^*)^3} \frac{r}{a_0^*} e^{-r/2a_0^*}. \quad (4.8)$$

Dessa forma, obtemos:

$$\langle H_G^0 \rangle_{2S} = -\frac{GM_\alpha m_\mu \alpha}{4a_0^*} \left[ \frac{2\lambda^2}{(\lambda + a_0^*)^2} - \frac{4\lambda^3}{(\lambda + a_0^*)^3} + \frac{3\lambda^4}{(\lambda + a_0^*)^4} \right], \quad (4.9)$$

$$\langle H_G^0 \rangle_{2P} = -\frac{GM_\alpha m_\mu \alpha}{4a_0^*} \frac{\lambda^4}{(a_0^* + \lambda)^4}. \quad (4.10)$$

Como o efeito da interação anômala sobre a diferença de energia da transição  $2S - 2P$  não pode ser maior do que o erro total na medida do desvio Lamb, então, o termo de Yukawa não pode ser arbitrário, mas deve respeitar a condição  $\Delta E_G < \delta E$ . Segue dessa condição, a seguinte restrição para o fator de amplificação da gravitação:

$$\alpha < \frac{4a_0^* \delta E}{GM_\alpha m_\mu} \left[ \frac{2\lambda^2}{(\lambda + a_0^*)^2} - \frac{4\lambda^3}{(\lambda + a_0^*)^3} + \frac{2\lambda^4}{(\lambda + a_0^*)^4} \right]^{-1}. \quad (4.11)$$

Para cada valor de  $\lambda$ , o parâmetro não pode ser superior ao valor dado do lado direito da eq. [4.11](#), sem incorrer em contradições com a medida do desvio Lamb do hélio muônico. Na [Fig. 17](#) esse vínculo é representado pela linha azul pontilhada<sup>6</sup>.

#### 4.1.2 Calculando Vínculos usando Deutério e Hidrogênio Muônicos

A medição do raio de carga do próton  $r_p$  já foi alvo de diversas discussões, visto que sua medida usando o hidrogênio muônico não correspondia ao valor teórico recomendado pelo CODATA-2010 que estava baseado em dados espectroscópicos de átomos eletrônicos. Esta diferença gerou uma grande discussão entre os físicos de todas as partes do mundo, e ficou conhecida como “problema do raio do próton”. Entretanto, medições recentes reduziram a tensão entre essas medidas, levando muitos a acreditarem que o problema deve estar relacionado a equívocos em atribuições de erros experimentais [\[75\]](#).

Sabemos, como já discutimos na seção anterior, que o deslocamento de Lamb está presente em todos os átomos, ou seja, que as alterações nos níveis de energia geradas por flutuações quânticas existem independentemente do átomo analisado. É fato que ao considerarmos modificações no modelo gravitacional, estas modificam a diferença de energia medida pelo deslocamento Lamb. Desta maneira precisamos entender de que maneira ocorre a previsão teórica para a medição da energia do  $E_L$  do deslocamento de Lamb. Considerando a transição  $2S - 2P$  e utilizando o modelo padrão temos a seguinte

<sup>6</sup>É válido destacar ainda que  $\alpha$  é um parâmetro adimensional, portanto as constantes devem ser substituídas visando satisfazer esta condição.

equação [75]:

$$E_{LS} = E_{QED} + Cr^2 + E_{NS}. \quad (4.12)$$

onde o termo  $E_{QED}$  representa a correção considerando o núcleo atômico como um ponto, o termo  $Cr^2$  representa a contribuição devido ao tamanho finito do núcleo e o último termo  $E_{NS}$  refere-se a contribuição da estrutura nuclear do átomo. Essas são as três contribuições previstas pelo modelo padrão para o deslocamento Lamb. Entretanto, em cenários com teorias modificadas da gravitação, como a teoria de dimensões extras de larga escala, que preveem a intensificação da interação gravitacional em curtas distâncias, devemos considerar o efeito gravitacional no desvio Lamb. Portanto, devemos adicionar mais termos à eq. 4.12 relativo à contribuição dessa nova interação. Como o efeito da gravitação no nível atômico  $2P$  é menor do que o efeito sobre o estado  $2S$  é modificado, a diferença de energia entre os níveis atômicos aumentará. Portanto, o termo  $E_G$  relacionado a contribuição da energia devido à gravitação modificada entrará na eq. 4.12 de forma positiva. Portanto, poderemos obter uma nova equação dada por:

$$E_{LS}^{theo} = E_{QED} + Cr^2 + E_{NS} + E_G. \quad (4.13)$$

A referência [75] nos fornece medições precisas da diferença  $r_d^2 - r_p^2$ , onde  $r_d$  representa o raio de carga do deuteron e  $r_p$  o raio de carga do próton. É válido destacar que estas medidas podem ser obtidas a partir da eq. 4.12 e igualando  $E_{LS}^{theo} = E_{LS}^{exp}$ , desta maneira, utilizando o modelo padrão conseguimos obter [75]:

$$(r_d^2 - r_p^2)|_{muonic} = 3.8200(7)_{theo}(30)_{exp} \text{ fm}^2. \quad (4.14)$$

Considerando que o erro teórico e o erro experimental são independentes entre si, podemos escrever uma expressão para o erro total dado por:

$$\delta_{total} = \sqrt{0.0007^2 + 0.003^2} \approx 0.003 \text{ fm}^2. \quad (4.15)$$

Observe que, interações gravitacionais anômalas entre o múon e núcleo do átomo muônico afetarão o deslocamento de Lamb nos níveis de energia nos átomos muônicos, e conseqüentemente, influenciarão a estimativa sobre o raio de cargas dos núcleos. Podemos verificar isso explicitamente, isolando  $r^2$  na expressão **eq. 4.13**. Isto pode ser feito para todos os átomos. Considerando as medidas do deslocamento de Lamb do átomo muônico pode-se inferir qual o raio de carga do próton. De fato, temos:

$$r_p^2|_{muonic} = \frac{E_{LS}^{exp}|_{\mu H}}{C_{\mu H}} - \frac{E_{NS}|_{\mu H}}{C_{\mu H}} - \frac{E_{QED}|_{\mu H}}{C_{\mu H}} - \frac{E_G|_{\mu H}}{C_{\mu H}}. \quad (4.16)$$

Note aqui, que os três primeiros termos nesta equação referem-se ao modelo padrão e apenas o último representa a correção dos níveis de energia devido a desvios na interação gravitacional, portanto podemos reescrever a **eq. 4.16** como:

$$r_p^2|_{muonic} = r_p^2|_{standard} - \frac{E_G|_{\mu H}}{C_{\mu H}}. \quad (4.17)$$

De maneira análoga, podemos obter uma expressão similar para o raio de carga do deuteron  $r_d$  e dessa forma escrever a seguinte expressão geral:

$$(r_d^2 - r_p^2)|_{muonic} = (r_d^2 - r_p^2)|_{standard} - \left( \frac{E_G|_{\mu D}}{C_{\mu D}} - \frac{E_G|_{\mu H}}{C_{\mu H}} \right). \quad (4.18)$$

A contribuição da interação gravitacional no desvio Lamb pode ser calculado para cada átomo muônico a partir da expressão:

$$E_G = \langle \Psi_{2P} | H_\mu | \Psi_{2P} \rangle - \langle \Psi_{2S} | H_\mu | \Psi_{2S} \rangle, \quad (4.19)$$

onde a Hamiltoniana é dada pela expressão:

$$H_\mu = M\varphi = -\frac{GMm_\mu\alpha e^{-r/\lambda}}{r}, \quad (4.20)$$

onde  $M$  é a massa do núcleo do átomo muônico. Aqui é importante fazer uma observação, é nítido que a parametrização utilizada para modificar o potencial gravitacional foi a de Yukawa dada pela expressão  $\varphi = -GM/r(1+e^{r/\lambda})$ , entretanto como queremos o potencial

modificado, consideramos apenas a parte responsável pela alteração.

Os raios de carga do próton e do deuteron podem ser extraídos a partir dos dados espectroscópicos dos átomos convencionais. Os valores inferidos através dos átomos muônicos e eletrônicos não coincidem individualmente. No entanto, a diferença entre o quadrado dos raios concordam com grande precisão. De fato, de acordo com [75], temos:

$$(r_d^2 - r_p^2)|_{eletronic} = 3.8207(3) \text{ fm}^2, \quad (4.21)$$

portanto, comparando com o valor dado pela eq. 4.14, temos uma concordância entre os resultados no limite estabelecido pelo erro.

Considerando que os desvios da interação gravitacional podem ser parametrizado pelo termo de Yukawa, podemos determinar os novos vínculos demandando que seus efeitos sobre a diferença do quadrado do raio não pode ser maior do que o erro da medida dessa quantidade. Matematicamente, essa exigência experimental se traduz na seguinte condição:

$$\left| \frac{E_G|_{\mu D}}{C_{\mu D}} - \frac{E_G|_{\mu H}}{C_{\mu H}} \right| < \delta_{total}. \quad (4.22)$$

Utilizando esta expressão podemos finalmente escrever o vínculo pretendido, como:

$$\alpha < \frac{2\delta_{total}}{Gm_\mu} \xi(\lambda)^{-1}, \quad (4.23)$$

onde  $C_{\mu D} = -6.1074 \text{ meV/fm}^2$ ,  $C_{\mu H} = -5.2259 \text{ meV/fm}^2$ ,  $\delta_{total} = 0.003 \text{ fm}^2$ . É necessário, ainda, destacar que:

$$\xi(\lambda) = \left( -\frac{m_d \cdot a_0^{\mu D}}{C_{\mu D}} \left( \frac{\lambda^2}{(\lambda + a_0^{\mu D})^4} \right) + \frac{m_p \cdot a_0^{\mu H}}{C_{\mu H}} \left( \frac{\lambda^2}{(\lambda + a_0^{\mu H})^4} \right) \right), \quad (4.24)$$

onde  $a_0^{\mu D}$  e  $a_0^{\mu H}$  representam os raios de Bohr do deutério e hidrogênio muônicos respectivamente. Destacamos o vínculo para a diferença  $r_d^2 - r_p^2|_{muonic}$  na Fig. 17 por meio da linha verde pontilhada. Além disso, comparamos os resultados obtidos neste trabalho com os vínculos espectroscópicos que usam dados do hidrogênio eletrônico, além

do hélio antiprotônico e do  $HD^+$  vibracional.

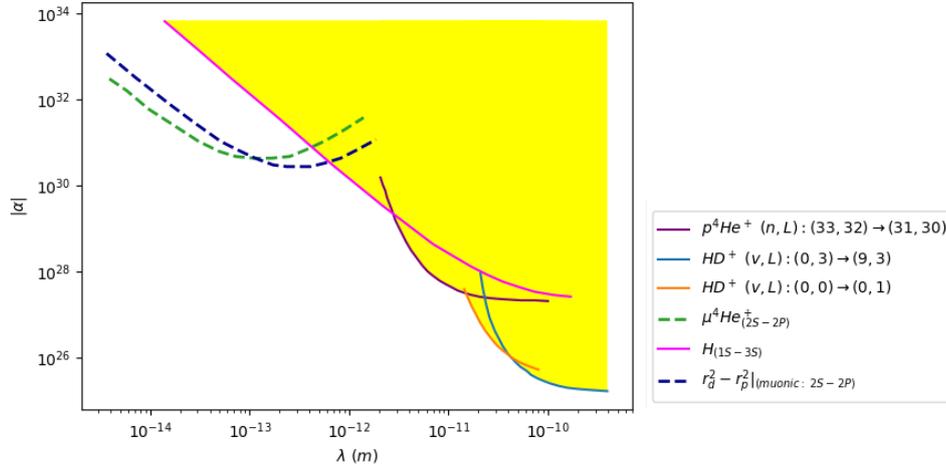


Figura 17: 90% CL - Gráfico relacionado a alguns testes espectroscópicos, são eles:  $p^4He^+(n, l) : (33, 32) \rightarrow (31, 30)$  (curva marrom),  $HD^+(\nu, l) : (0, 3) \rightarrow (9, 3)$  (curva azul claro),  $HD^+(\nu, l) : (0, 0) \rightarrow (0, 1)$  (curva laranja),  $H_{(1S-3S)}$  (curva rosa),  $r_d^2 - r_p^2 |_{(muonic:2S-2P)}$  (curva verde pontilhada) e  $\mu^4He^+_{(2S-2P)}$ . [5, 81].

Note ainda que a **Fig. 17** mostra que para  $\lambda < 10^{-12} m$  os vínculos que obtemos utilizando o íon hélio-4, hidrogênio e deutério muônicos são mais fortes que os limites estabelecidos pelo hidrogênio eletrônico. Na **Fig. 18** comparamos os resultados obtidos por meio de testes espectroscópicos, com outros limites de diferentes naturezas como o Efeito Casimir, a Balança de Torção, Interferometria de Nêutrons, entre outros [5, 81, 84, 85].

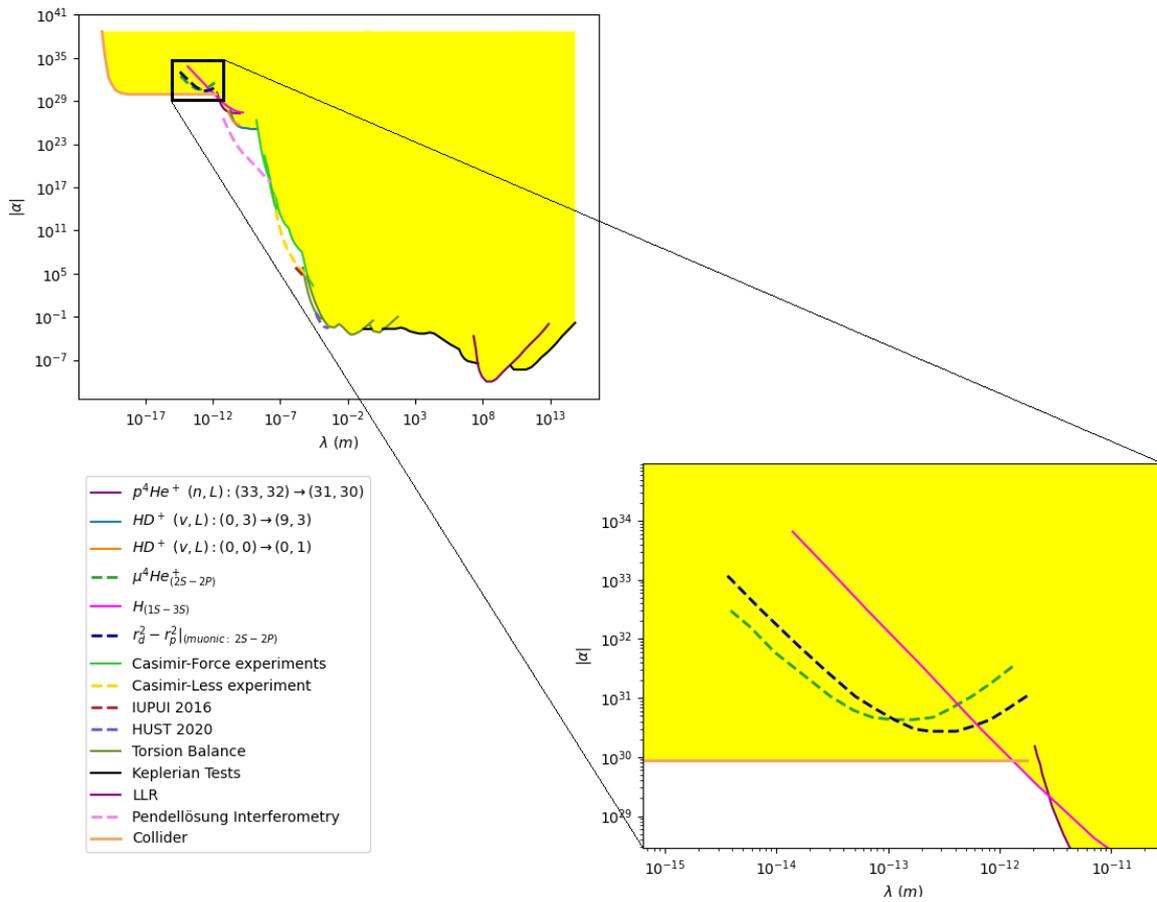


Figura 18: Comparação dos resultados obtidos nesse trabalho (íon hélio-4, hidrogênio e deutério muônicos - linhas pontilhadas) com alguns outros testes espectroscópicos. 90% CL -  $p^4He^+ (n, L) : (33, 32) \rightarrow (31, 30)$ ,  $HD^+ (v, L) : (0, 3) \rightarrow (9, 3)$ ,  $HD^+ (v, L) : (0, 0) \rightarrow (0, 1)$ ,  $r_d^2 - r_p^2$ ,  $H_{(1S-3S)}$  e  $\mu^4He_{(2S-2P)}^+$ . 95% CL - demais experimentos [5, 81, 84, 85].

# 5 Vínculos Espectroscópicos para os Potenciais Pós-Newtonianos

Ao considerarmos o regime de campo fraco, as teorias métricas alternativas podem ser distinguidas a partir dos valores de parâmetros definidos no chamado formalismo PPN (parametrized Post-Newtonian). Entre estes parâmetros podemos destacar o fator  $\gamma$  associado a curvatura da seção espacial do espaço-tempo. Conforme a Teoria da Relatividade Geral  $\gamma = 1$ , mas outras teorias da gravitação, como a teoria de Brans-Dicke, preveem um valor diferente para esse parâmetro  $\gamma$ . Além deste parâmetro, existem outros parâmetros PPN responsáveis por medir diversos efeitos, como a diferença entre o potencial gravitacional gerado por várias espécies de fontes (energias internas de natureza diversa) ou pela pressão em relação ao potencial produzido pela massa bariônica.

Neste capítulo, primeiramente analisamos alguns resultados conhecidos que estabelecem vínculos para potenciais pós-newtonianos em curtas distâncias. Esses vínculos são extraídos da interferometria de nêutrons, da análise do acoplamento spin-órbita no experimento MTV-G e da espectroscopia do hidrogênio para a transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$ . Em seguida, estabelecemos vínculos derivados da transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  do hélio muônico [63]. Para finalizar comparamos graficamente todos os limites obtidos e verificamos que no limite  $\lambda < 10^{-10}m$  os nossos resultados são um pouco mais fortes.

## 5.1 Interferometria de Nêutrons

### 5.1.1 O Experimento COW

A busca por um desvio no potencial gravitacional Newtoniano, utiliza-se de diversos fenômenos físicos, um deles é a interferometria de nêutrons. Aqui, discutiremos o experimento COW [54, 55]. Este experimento revolucionou a área de estudo da interferometria de nêutrons, visto que a partir dele foi possível mostrar que a fase quântica do nêutron é afetada pelo potencial gravitacional da Terra.

O experimento COW recebe este nome devido aos seus idealizadores Collela, Overhauser e Werner. Nele, utiliza-se um interferômetro de Nêutrons visando avaliar

a influência gravitacional da Terra sobre a fase da função de onda do nêutron [54, 55]. Este experimento divide coerentemente as ondas dos nêutrons e as separa no potencial gravitacional, estas amplitudes são divididas por meio da difração de Bragg<sup>7</sup> a partir de cristais de silício perfeitos.

A ideia é fazer um feixe de nêutrons monocromáticos com comprimento de onda  $\lambda$  entrar em um interferômetro de placa tripla ao longo de uma linha horizontal com um certo momento inicial conhecido.

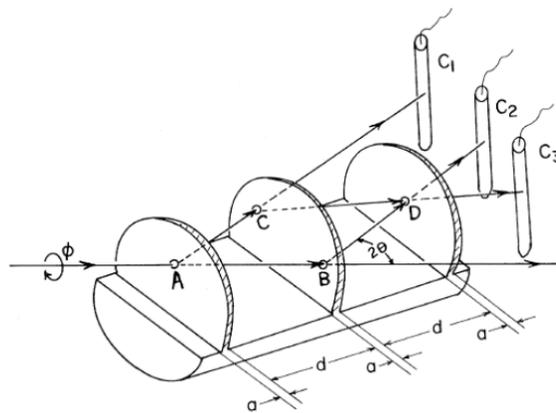


Figura 19: Representação de um interferômetro de Nêutrons e detectores de  $^3\text{He}$ . Figura retirada da referência [54].

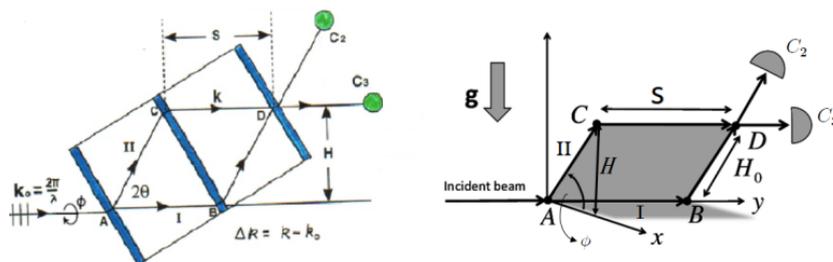


Figura 20: Representação geométrica do interferômetro de Nêutrons inclinado na direção do feixe incidente. Figura retirada da referência [6].

O nêutron que incide no interferômetro é dividido em dois pacotes de onda no ponto A criando dois caminhos de sub-feixes ABD e ACD. Após esse processo, os dois pacotes de

<sup>7</sup>ocorre quando a radiação eletromagnética ou ondas de matéria de comprimento de onda comparável à distância entre dois planos de átomos é refletida specularmente por planos consecutivos

onda se unem novamente na terceira placa de cristal no ponto  $D$ . Quando o interferômetro está inclinado, o ponto  $D$  fica a uma altura  $H$  em relação à base. Portanto, em  $D$ , a energia potencial do nêutron será maior do que em  $A$  (**Fig. 19**, **Fig. 20**). Por causa desse diferença de potencial, o feixe percorre o trecho  $S$  (ver **Fig. 20**) mais lentamente do que o trecho  $I$ . Isso provoca uma diferença de fase entre os feixes, que pode ser medida pelos detectores  $C_2$  e  $C_3$ .

Esquematicamente, o interferômetro de nêutrons utilizado no experimento COW é equivalente a um anel, como mostrado na **Fig. 21**. Considerando o ponto  $A$  no anel, temos que uma onda incidente entra sendo dividida coerentemente em duas partes: uma propagando-se no caminho  $I$  e a outra que se propaga no caminho  $II$  do anel. Ao percorrerem seus respectivos caminhos, as duas ondas se recombinaem no ponto  $B$  podendo ser então detectadas por um instrumento. A contagem de nêutrons no detector dependerá da interferência entre os feixes. Por sua vez, a interferência será determinada pelo desvio de fase provocado pela interação a qual apenas o feixe  $II$  é submetido. Obviamente só existe um padrão quando vários nêutrons são detectados, visto que o observador detecta um nêutron por vez.

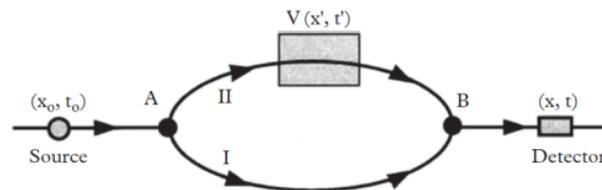


Figura 21: Representação esquemática geral do interferômetro. Figura retirada da referência [62].

A diferença de fase acumulada depende da velocidade com que os nêutrons percorrem os dois caminhos e pode ser calculada através da integral de caminho:

$$\Delta\Phi = \oint \vec{p} \cdot d\vec{s}. \quad (5.1)$$

### 5.1.2 Vínculos Extraídos da Interferometria de Nêutrons

Existe um Experimento [86] inicialmente utilizado para medir o efeito Aharonov-Casher [74] cujo funcionamento baseia-se em feixes de nêutrons atravessando o interior de um capacitor, causando acúmulos de desvios de fase devido à interação entre o campo elétrico e o momento magnético do nêutron. Essa interação acontece por meio do acoplamento spin-órbita do nêutron mediado pelo campo elétrico, descrita pela Hamiltoniana:

$$\frac{\mu_n}{mc} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}), \quad (5.2)$$

onde  $\sigma$  representa as matrizes de Pauli,  $\vec{\mu}_n$  representa o momento magnético do nêutron e  $\vec{E}$  representa o campo elétrico. Considere que apenas um dos feixes parciais interage com o campo elétrico. Isso provoca, como discutimos na seção anterior, um desvio de fase entre os feixes, que pode ser medido. Esse experimento foi realizado e os resultados se mostram compatíveis com as previsões teóricas.

Com base nos resultados desse experimento, posteriormente investigou-se [6] hipotéticos desvios do comportamento de um potencial pós-Newtoniano. Conforme a Teoria da Relatividade Geral, toda forma de energia pode curvar o espaço-tempo. Assim, a energia do campo elétrico também provoca um campo gravitacional. Desse modo, nesse experimento haverá uma interação gravitacional entre o campo elétrico com os nêutrons do feixe que atravessa a câmara eletrostática. Essa interação será descrita por um potencial pós-newtoniano, pois a teoria newtoniana não prevê esse tipo de interação. Outro ponto a destacar é que, devido à equação de estado da radiação, a pressão e a densidade de energia do campo elétrico produzem efeitos gravitacionais de mesma magnitude. Portanto, esse potencial pós-newtoniano também mede a capacidade da pressão produzir gravitação.

Descrevendo os desvios desse potencial pós-newtoniano por meio da parametrização de Yukawa e admitindo que  $\lambda$  é muito pequeno comparado com o comprimento  $L$  do capacitor, pode-se mostrar [6] que a diferença de fase entre os feixes será dada por:

$$\Delta\phi = \frac{G\alpha\lambda^2 m^2 \epsilon_0 E^2 \lambda_n L}{h^2 c^2} \quad (5.3)$$

onde a intensidade do campo é dada por  $E = 30kV/mm$ ,  $L = 2,53cm$ , o comprimento de onda do nêutron incidente é  $\lambda_n = 1.477\text{\AA}$  [86] e  $\epsilon_0$  representa a permissividade elétrica no vácuo. No experimento, como já mencionamos, a diferença de fase medida está consoante as previsões teóricas do modelo padrão, na precisão dos instrumentos, que é da ordem  $10^{-3}$ . Assim, interações anômalas não podem produzir efeitos superiores ao erro da medida. Sendo assim, segue dessa condição que o fator  $\alpha$  de ampliação da interação gravitacional deve obedecer à seguinte restrição:

$$\alpha\lambda^2 < 0,26 \times 10^{20} m^2 \quad (5.4)$$

Este vínculo pode ser visto mais detalhadamente na **Fig. 23**.

## 5.2 O Experimento MTV-G

O experimento MTV-G foi realizado em TRIUMF no ano de 2011, visando investigar a possibilidade da existência de um campo gravitacional muito forte ao redor do núcleo atômico. Esse experimento estava baseado na ideia de medir a precessão do spin de elétrons que atravessam um meio material utilizando a abordagem de dimensões extras. Usando a parametrização de Yukawa para descrever os desvios gravitacionais é possível encontrar um novo vínculo para o parâmetro  $\alpha$  como mostraremos posteriormente. O nome deste experimento vem da sigla em inglês “Mott Polarimetry for **T-V**iolation-Gravity”<sup>8</sup> [64].

O polarímetro Mott utiliza a mesma ideia que o espalhamento de Rutherford, a mudança é que, em vez de partículas alfa, usamos elétrons. Esse aparelho consegue medir a precessão do spin do elétron após um processo de espalhamento, baseando-se na assimetria esquerda-direita provocada pelo efeito do acoplamento spin-órbita. Sabemos que o acoplamento spin-órbita é proporcional ao produto interno entre o spin ( $\vec{S}$ ) e o

<sup>8</sup>O Polarímetro Mott é um dispositivo utilizado para realizar medições na polarização do elétron e a “T-Violação” trata-se da inversão da simetria temporal

momento angular orbital ( $\vec{L}$ ). Portanto, a Hamiltoniana que descreve o espalhamento do elétron será proporcional a  $\vec{S} \cdot \vec{L}$ . Se considerarmos um elétron em um estado no qual seu spin está para cima, por exemplo, então o resultado do espalhamento dependerá do lado pelo qual o elétron incide no núcleo, alterando então o sinal de  $H_{S0}$ .

No experimento MTV-G o aparato experimental utilizado consiste em uma fonte de radiação  $Sr^{90}$ , uma folha de espalhamento primário, uma folha de espalhamento secundário, um polarímetro Mott e uma câmara de rastreamento de elétrons [64]. A ideia principal é que o spin do elétron sofre uma precessão que ocorre devido à precessão geodésica gravitacional e da precessão eletromagnética dominante, esta precessão do spin ocorre na folha primária. O experimento MTV-G então verifica a assimetria na folha de espalhamento secundária examinando a precessão que ocorre no espalhamento primário. Os vínculos obtidos estão representados na Fig. 23.

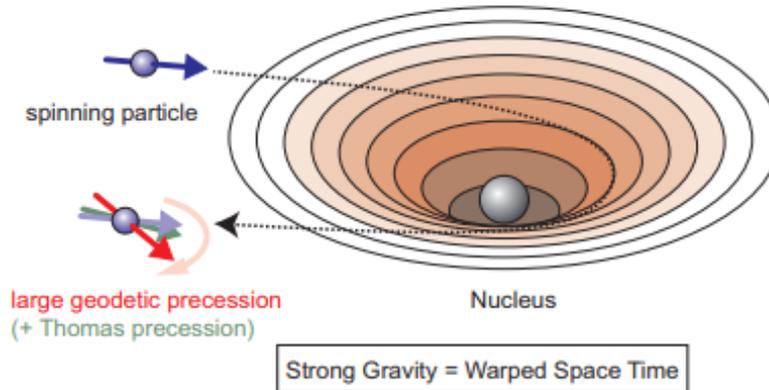


Figura 22: Representação da precessão do spin do elétron, após este interagir com o núcleo. Figura retirada da referência [88].

### 5.3 Calculando Vínculos para o Hidrogênio Eletrônico na Transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$

Segundo a Teoria da Relatividade Geral, ao considerarmos uma partícula elementar em movimento sob a influência de um campo gravitacional, seu spin sofrerá uma precessão. Esse efeito foi investigado pelo experimento MTV-G, por exemplo, como citamos anteriormente.

Assim como no experimento MTV-G, nesta seção investigaremos os efeitos gravitacionais na precessão do spin de partículas elementares. Para conseguirmos alcançar este objetivo, consideraremos a influência do acoplamento spin-órbita gravitacional na separação fina entre os estados  $2P_{1/2}$  e  $2P_{3/2}$  do hidrogênio eletrônico.

Para estudarmos a precessão do spin causada pela interação gravitacional, precisamos adotar o formalismo da mecânica quântica. Para isto precisamos usar a equação de Dirac no espaço curvo. Considerando então uma primeira aproximação, podemos assumir que o próton produz um campo gravitacional estático e esfericamente simétrico. Neste contexto, podemos escrever a métrica deste espaço-tempo da seguinte maneira:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\tilde{\varphi}}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.5)$$

onde  $\varphi$  e  $\tilde{\varphi}$  são potenciais produzidos pelo próton. A Teoria da Relatividade Geral prevê que  $\varphi = \tilde{\varphi}$ , entretanto, como estamos estudando desvios no campo gravitacional no domínio atômico, consideramos a possibilidade de termos  $\varphi \neq \tilde{\varphi}$ .

Ao observar a [eq. 5.5](#), é possível verificar que o potencial  $\tilde{\varphi}$  está associado a curvatura da seção puramente espacial do espaço-tempo. A possibilidade deste potencial diferir do potencial Newtoniano é contemplada pelo formalismo de parametrização Pós-Newtoniano (PPN) utilizando o parâmetro  $\gamma$ .

Dessa forma, considerando a parametrização de Yukawa podemos escrever  $\tilde{\varphi} = (1 + \tilde{\alpha}e^{-r/\lambda})GM/r$ . No limite em que  $\lambda \gg r$ , vemos que o potencial  $\tilde{\varphi}$  ficaria igual a  $(1 + \tilde{\alpha})GM/r$ . Portanto,  $(1 + \tilde{\alpha})$  está associado ao parâmetro  $\gamma$  do formalismo PPN. Limites empíricos para este parâmetro  $\gamma$  podem ser extraídos, por exemplo, no domínio astrofísico por meio de experimentos de deflexão da luz e de atraso temporal [\[66\]](#).

Aqui, pretendemos examinar desvios desse potencial em curtas distâncias, considerando a transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  do hélio muônico, medida recentemente. O potencial  $\tilde{\varphi}$  influencia essa transição através do acoplamento spin-órbita gravitacional.

O acoplamento spin-órbita provocará uma separação adicional entre os estados  $2P_{1/2}$  e  $2P_{3/2}$ , que pode ser calculada tomando-se o valor médio da Hamiltonian  $H_{GS0}$ , que descreve esse acoplamento, nos dois estados, conforme a expressão abaixo:

$$\Delta f_{SO} = \frac{\Delta E_{GSO}}{h} = \frac{\langle H_{GSO} \rangle_{2P_{3/2}} - \langle H_{GSO} \rangle_{2P_{1/2}}}{h}, \quad (5.6)$$

onde  $H_{GSO}$  é a Hamiltoniana que descreve o acoplamento spin-órbita gravitacional. Essa Hamiltoniana pode ser deduzida a partir da equação de Dirac escrita no espaço-tempo curvo. Sabemos que o espinor na equação de Dirac possui quatro componentes, duas delas relacionadas com a partícula considerando spin up e spin down e as outras duas referentes à antipartícula também considerando spin up e spin down. Note que, se tivermos uma energia muito grande, partículas e antipartículas podem ser criadas e sofrerem processo de aniquilação, tornando inviável a separação dos termos associados a elas na equação de Dirac. Por outro lado, ao considerarmos uma energia pequena, podemos utilizar o formalismo de Foldy-Wouthuysen para separar esses termos e então conseguiremos encontrar correções quânticas e relativísticas para a Hamiltoniana. Dessa forma, é possível mostrar que [9](#):

$$H = \hat{\beta} \left\{ mc^2 + m\varphi + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{mc^2} \left( \frac{\varphi}{2} + \tilde{\varphi} \right) \vec{p}^2 - \frac{i\hbar}{mc^2} \left( \vec{\nabla} \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi \right) \cdot \vec{p} + \frac{\hbar}{2mc^2} \left[ \hat{\Sigma} \cdot \left( \vec{\nabla} \tilde{\varphi} \times \vec{p} \right) + \frac{1}{2} \hat{\Sigma} \cdot \left( \vec{\nabla} \varphi \times \vec{p} \right) \right] \right\}. \quad (5.7)$$

É possível perceber que o primeiro termo corresponde a energia de repouso do lépton, o segundo termo representa a energia potencial usual da interação próton-lépton e os demais termos são responsáveis por correções quânticas e relativísticas. Podemos reescrever o último termo da [eq. 5.7](#) considerando  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$  e  $\vec{\Sigma} = 1\vec{\sigma}$ . Esse termo depende do spin da partícula e o acopla, por meio do campo gravitacional, ao movimento de translação dessa partícula. Admitindo que os potenciais  $\varphi$  e  $\tilde{\varphi}$  são radiais e possuem simetria esférica, podemos mostrar que a Hamiltonian do acoplamento pode ser escrita em termos do produto do spin e do momento angular por meio da expressão:

$$\langle H_{GSO} \rangle_{n,l} = \frac{1}{mc^2} \left\langle \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{\varphi}{2} + \tilde{\varphi} \right) \right\rangle \langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle. \quad (5.8)$$

---

<sup>9</sup>Uma demonstração um pouco mais detalhada pode ser encontrada em [5](#)

É válido destacar ainda que o valor esperado  $\langle \rangle_{n,l}$  está relacionado com a função de onda  $\psi_{n,l}$ , onde  $n$  é o número quântico principal e  $l$  especifica o momento angular do estado. Além disso, sabemos que por propriedades de ortonormalidade de  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  só precisaremos nos preocupar com a integral radial  $R_{n,l}$ . Dessa forma, trabalhando na transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$ , para qual temos  $n = 2$  e  $l = 1$ , a função radial será:

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{24a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}. \quad (5.9)$$

Observe que temos as seguintes expressões para  $\varphi$  e  $\tilde{\varphi}$ :

$$\varphi = -\frac{GM}{r}(1 + \alpha e^{-r/\lambda}), \quad (5.10)$$

$$\tilde{\varphi} = -\frac{GM}{r}(1 + \tilde{\alpha} e^{-r/\lambda}). \quad (5.11)$$

Portanto, utilizando estas expressões podemos escrever que:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\varphi}{2} + \tilde{\varphi} \right) = GM \left( \frac{\alpha}{2} + \tilde{\alpha} \right) e^{-r/\lambda} \left( \frac{r/\lambda + 1}{r^2} \right). \quad (5.12)$$

Nos resta agora calcular o primeiro valor esperado da **eq. 5.8** utilizando a função radial descrita na **eq. 5.9**. Dessa forma, escrevemos então que:

$$\left\langle \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{\varphi}{2} + \tilde{\varphi} \right) \right\rangle_{21} = \frac{GM}{24a_0^5} \left( \frac{\alpha}{2} + \tilde{\alpha} \right) \int_0^\infty r e^{-\frac{r}{\lambda}} e^{-\frac{r}{a_0}} \left( 1 + \frac{r}{\lambda} \right) dr, \quad (5.13)$$

aqui já transferimos para coordenadas esféricas e usamos a ortonormalidade dos harmônicos esféricos. Para resolvermos esta integral usamos a expressão:

$$I(k, p) = \int_0^{+\infty} r^k e^{\frac{pr}{a_0}} dr = k! \left( \frac{a_0}{p} \right)^{k+1}. \quad (5.14)$$

Sabemos que o momento angular total  $J$  é dado pela expressão  $J = L + S$ , onde  $L$  é o momento angular orbital e  $S$  é o momento angular de spin. Portanto, utilizando a expressão de  $J$  dada anteriormente podemos calcular  $\langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle$  para obtermos:

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = J^2 - L^2 - S^2. \quad (5.15)$$

Dessa forma podemos concluir que:

$$\langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle = \frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s-1)]\hbar^2. \quad (5.16)$$

Substituindo então os valores  $j = 1/2$ ,  $l = 1$  e  $s = 1/2$  para o estado  $2P_{1/2}$  e  $j = 3/2$ ,  $l = 1$  e  $s = 1/2$  para o estado  $2P_{3/2}$  na expressão de  $\langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle$  obtemos que:

$$\langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle_{2P_{3/2}-2P_{1/2}} = \frac{3}{2}\hbar^2. \quad (5.17)$$

Por fim, unindo os resultados dos dois valores esperados obtemos que:

$$\Delta f_{SO} = \frac{GM}{hmc^2} \left( \frac{\alpha}{2} + \tilde{\alpha} \right) \left[ \frac{1}{24a_0^3} \frac{\lambda^2}{(a_0 + \lambda)^2} + \frac{1}{12a_0^2} \frac{\lambda^2}{(a_0 + \lambda)^3} \right] \frac{3}{2}\hbar^2. \quad (5.18)$$

Para obtermos o vínculo para a transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  do hidrogênio eletrônico, precisamos aplicar a condição  $\Delta f_{SO} < \delta f$ , onde  $\delta f = 15 \text{ kHz}$ . Além disso, é necessário isolar o parâmetro misto  $(\frac{\alpha}{2} + \tilde{\alpha})$  como podemos ver detalhadamente na referência [5]. Os limites estabelecidos podem ser vistos na Fig. 23.

## 5.4 Calculando Vínculos para o íon Hélio-4 Muônico na transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$

Nesta seção, visamos analisar o parâmetro misto na transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  para o hélio muônico. Apesar de nesta transição o hidrogênio eletrônico possuir dados espectroscópicos bem mais precisos, a interação gravitacional entre o múon e o núcleo do hélio é bem mais forte que a interação próton-elétron, então tentaremos verificar se em alguma região conseguimos encontrar um vínculo mais forte.

Por meio da referência [63] é possível obter o erro experimental e o erro teórico associado da energia de transição. Sendo assim, temos:

$$\delta E_{exp} = \pm 0.096 \text{ meV}, \quad (5.19)$$

$$\delta E_{the} = \pm 0.0003 \text{ meV}. \quad (5.20)$$

Considerando que os erros são independentes entre si podemos calcular  $\delta E$  da seguinte maneira:

$$\delta E = \sqrt{\delta_{th}^2 + \delta_{exp}^2} \approx 0.096 \text{ meV}. \quad (5.21)$$

Note que a eq. [5.18](#) é semelhante à expressão eq. [5.22](#) válida para o hidrogênio eletrônico. No entanto, há algumas diferenças que devemos destacar: o raio de Bohr na eq. [5.22](#) se refere ao raio de Bohr do hélio muônico, além disso, a massa do núcleo é a massa do núcleo do hélio e a massa do elétron é substituída pela massa do múon, por fim, é importante destacar que como neste caso estamos analisando uma variação de energia e não de frequência, substituímos  $\Delta f_{S0}$  por  $\Delta E_{S0}$  e retiramos o  $h$  na eq. [5.6](#). Para destacar esses aspectos, vamos reescrever a eq. [5.18](#) da seguinte forma:

$$\Delta E_{SO} = \frac{GM_\alpha}{m_\mu c^2} \left( \frac{\alpha}{2} + \tilde{\alpha} \right) \left[ \frac{1}{24(a_0^*)^3} \frac{\lambda^2}{(a_0^* + \lambda)^2} + \frac{1}{12(a_0^*)^2} \frac{\lambda^2}{(a_0^* + \lambda)^3} \right] \frac{3}{2} \hbar^2, \quad (5.22)$$

onde  $a_0^*$  representa o raio de Bohr para o hélio muônico cujo valor é  $a_0^* = 1.303942757 \times 10^{-13} \text{ m}$ . O vínculo sobre o parâmetro  $\alpha/2 + \tilde{\alpha}$  é determinado impondo que a influência do acoplamento spin-orbita gravitacional na transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  não pode ser maior do que o erro da transição, ou seja,  $\Delta E < \delta E$ . Na [Fig. 23](#), mostramos as novas restrições obtidas com base no hélio muônico em comparação com outros vínculos sobre desvios dos potenciais pós-newtonianos.

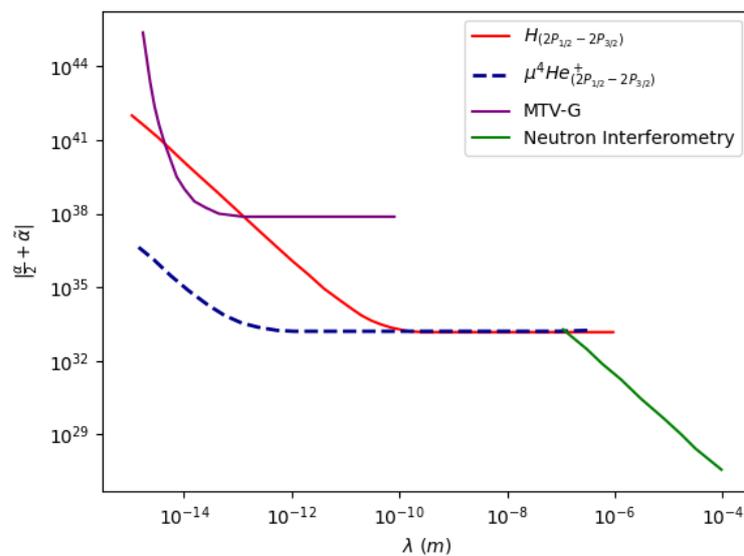


Figura 23: 68% CL - Vínculos impostos por diferentes testes de desvios de potenciais pós-newtonianos. [5, 6].

A partir da **Fig. 23** podemos perceber que para  $\lambda < 10^{-10} \text{ m}$ , os vínculos obtidos neste trabalho a partir do íon hélio-4 muônico sobre o parâmetro misto  $(\frac{\alpha}{2} + \tilde{\alpha})$ , que se relaciona com o parâmetro  $\gamma$  do formalismo PPN (pós-newtoniano), são mais fortes em comparação com o hidrogênio eletrônico e o experimento MTV-G.

## 6 Conclusões

O estudo de dimensões extras é motivado pela busca de soluções para problemas que, até o momento, não podem ser totalmente respondidos apenas com a utilização da física padrão. Questionamentos sobre a unificação da gravitação e das demais forças fundamentais, por exemplo, motivam a elaboração de novas teorias físicas, como a teoria de cordas, a teoria de branas, entre outras. Além da unificação entre as forças fundamentais, vimos que a hipótese da existência de dimensões extras pode solucionar outras indagações da física contemporânea, como o problema da hierarquia, explicando a diferença entre a escala da energia da gravidade e das outras forças fundamentais.

Vimos alguns modelos de teorias que supõem a presença de dimensões extras, como o modelo de Kaluza-Klein e o Modelo ADD, ao qual demos especial atenção nesse trabalho devido às suas instigantes implicações fenomenológicas. De acordo com o modelo ADD, todos os campos do modelo padrão estão confinados em uma 3-Brana, que, por sua vez, está imersa em um espaço de dimensão superior, que só pode ser acessado pela gravidade. Assim, esperamos efeitos de uma “física nova” em uma escala de distância definida pelo raio de compactação das dimensões extras, enquanto, a “física padrão” é recuperada para distâncias maiores. Como a gravitação pode se propagar em todas as direções, o comportamento dessa interação será modificado em curtas distâncias, ou seja, haverá uma alteração no potencial gravitacional. Para descrever os desvios do potencial, usamos a parametrização de Yukawa, pois assim, poderíamos comparar os vínculos obtidos com limites estabelecidos em outros trabalhos que utilizam a mesma parametrização.

Neste trabalho, procuramos estabelecer restrições para o comportamento anômalo da gravitação em curtas distâncias usando dados espectroscópicos de átomos exóticos, mais precisamente de átomos muônicos. Nossa escolha por esses átomos se justifica pelo fato de que, em relação à força gravitacional, a interação múon-núcleo, é bem mais forte que a interação elétron-núcleo, devido ao fato do múon possuir uma massa de aproximadamente 200 vezes a massa do elétron. Desta forma, buscamos primeiramente por correções que a interação gravitacional, na sua versão modificada, poderia provocar na transição  $2S - 2P$  para o íon hélio-4 muônico. Para garantir que a nova teoria não esteja em conflito com

as observações experimentais, essas hipotéticas correções não podem ser maiores do que o erro da medida. A partir dessa condição, conseguimos obter vínculos mais restritivos do que os extraídos do hidrogênio eletrônico e dos dados do hélio anti-protônico, numa escala de distância menor do que o picômetro.

Além de estudar o íon hélio-4 muônico, consideramos também dados experimentais do raio de carga do deuteron e do próton, inferidos a partir de medidas da espectroscopia do deutério e do hidrogênio muônicos. Observamos que um empecilho inicial para estudar a interação entre múon-próton era justamente o problema do raio do próton, pois medições realizadas com base no hidrogênio muônico não batiam com o valor estabelecido pelo CODATA-2010, utilizando o hidrogênio eletrônico. Entretanto, a diferença entre o quadrado dos raios do deutério e do próton medido por meio dos átomos muônicos coincide com o valor dessa grandeza inferido a partir dos átomos eletrônicos. Usamos essa concordância para impor novas restrições para os desvios do potencial gravitacional na escala abaixo do angstrom.

Ainda seguindo esta linha de investigação, consideramos a transição entre os estado  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$ . Esta transição depende da estrutura fina do átomo. A interação gravitacional pode influenciar essa transição através do acoplamento spin-órbita gravitacional. Como vimos, esse acoplamento depende de um potencial pós-newtoniano, associado ao parâmetro  $\gamma$  do formalismo PPN. Como os dados experimentais dessa transição concordam com as previsões teóricas, feitas pelo modelo padrão, usamos os dados dessa transição no hélio muônico para determinar novos limites para desvios no comportamento daquele potencial pós-newtoniano.

Além disso, para o potencial pós-newtoniano foram realizadas comparações com o experimento MTV-G, interferometria de nêutrons e dados espectroscópicos da transição  $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$  do hidrogênio eletrônico. Dessa forma, conseguimos estabelecer vínculos teóricos e compará-los com diversos outros resultados e verificamos que para  $\lambda < 10^{-10} m$  os nossos resultados são mais fortes.

Para trabalhos futuros, esperamos por dados experimentais um pouco mais precisos, pois assim, podemos tornar os vínculos mais fortes. Em especial, medidas para a transição

$1S - 2S$  no  $\mu^4H^+$  seriam muito apropriadas para o nosso objetivo, pois nessa transição a interação gravitacional seria mais forte, e, portanto, poderíamos determinar vínculos ainda mais restritivos para desvios da gravitação. É interessante destacar que neste momento essa transição está sendo examinada por dois grupos [77, 78].

# 7 Apêndices

## 7.1 Apêndice A

Sabemos que a Fórmula do Somatório de Poisson pode ser escrita como:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{k}{T}\right) e^{\frac{2\pi ikt}{T}}, \quad (7.1)$$

onde,

$$g\left(\frac{k}{T}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-2\pi ikt}{T}} f(\tau) d\tau. \quad (7.2)$$

Dessa forma, usando identificando  $t = x_i$  e  $T = 2\pi R$  podemos escrever que:

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i - 2\pi R m_i\right) = \frac{1}{(r^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - 2\pi R m_i)^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (7.3)$$

Assim, utilizando a Fórmula de Poisson na **eq. 2.104** obteremos a expressão desejada, dada por:

$$V_{4+\delta} = -\frac{G_{4+\delta} M}{(2\pi R)^\delta} \sum_{\vec{m}} e^{i\vec{m}\cdot\mathbf{x}/R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\vec{m}\cdot\mathbf{x}'/R}}{(r^2 + \mathbf{x}'^2)^{\frac{\delta+1}{2}}} d\mathbf{x}'. \quad (7.4)$$

## 7.2 Apêndice B

Para simplificarmos a integração, escolheremos uma direção preferencial fixando nosso  $\frac{m}{R} = \tilde{m}$  em uma direção  $\hat{i}_1$ , assim o produto interno da integral será dado pela expressão  $\tilde{m} \cdot \mathbf{x} = \tilde{m}x_1$ . Assim,

$$V_{n+4} = -\frac{G_{n+4}M}{(2\pi R)^n} \sum_m e^{i\tilde{m}x_1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\tilde{m}x_1}}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} d^n x. \quad (7.5)$$

Como escolhemos uma direção preferencial, realizaremos a nossa integração em todas as outras direções exceto em  $dx_1$ , então, o nosso elemento de "volume"<sup>[10]</sup> poderá ser escrito como:

$$d^n x = Vol(S^{n-2}(\rho)) d\rho dx_1, \quad (7.6)$$

portanto, podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira:

$$d^n x = Vol(S^{n-2}) \rho^{n-2} d\rho dx_1, \quad (7.7)$$

mas <sup>[11]</sup>,

$$Vol(S^{n-2}) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \quad (7.8)$$

Portanto,

$$V_{n+4} = -\frac{G_{n+4}M}{(2\pi R)^n} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_m e^{-i\tilde{m}x_1} \int \int \frac{\rho^{n-2}}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} e^{i\tilde{m}x_1} dx_1 d\rho. \quad (7.9)$$

Mudando então para coordenadas esféricas, em que

$$x_1 = x \cos \theta, \quad (7.10)$$

$$\rho = x \sin \theta, \quad (7.11)$$

<sup>10</sup>entre aspas porque temos  $n$  dimensões

<sup>11</sup>A eq. <sup>[7.8]</sup> é bastante conhecida e denota o hipervolume de uma esfera com  $n - 2$  dimensões

Podemos então calcular o Jacobiano dessa transformação e encontrar que ele será  $x$  portanto, a mudança de coordenada será dada por  $x dx d\theta$ . Substituindo este resultado na equação [7.9](#) obtemos:

$$V_{n+4} = -\frac{G_{n+4}M}{(2\pi R)^n} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_m e^{-i\tilde{m}x \cos \theta} \int \int \frac{(x \sin \theta)^{n-2}}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} e^{i\tilde{m}x \cos \theta} x dx d\theta, \quad (7.12)$$

podemos ainda reorganizar a expressão acima da seguinte maneira:

$$V_{n+4} = -\frac{G_{n+4}M}{(2\pi R)^n} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_m e^{-i\tilde{m}x \cos \theta} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx \int_0^\pi e^{i\tilde{m}x \cos \theta} (\sin \theta)^{n-2} d\theta. \quad (7.13)$$

Usando a expressão [12](#) dada por:

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{\pm iz \cos \varphi} \sin^{2\nu} \varphi d\varphi, \quad (7.14)$$

podemos resolver a segunda integral ao lado direito para obter que:

$$\int_0^\pi e^{i|\tilde{m}|x \cos \theta} (\sin \theta)^{n-2} d\theta = \frac{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n-1}{2}} |\tilde{m}|^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(x|\tilde{m}|) x^{1-\frac{n}{2}}. \quad (7.15)$$

Dessa forma, temos,

$$V_{n+4} = -\frac{G_{n+4}M \pi^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}}}{\chi_n} \sum_m \frac{e^{-i\tilde{m}x \cos \theta}}{|\tilde{m}|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(x|\tilde{m}|)}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx. \quad (7.16)$$

Podemos resolver a integral restante usando a fórmula [13](#) dada pela expressão:

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} (x^2 + a^2)^{-\nu-\frac{3}{2}} J_\nu(bx) dx = \frac{\sqrt{\pi} b^\nu}{2^{\nu+1} a e^{ab} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}. \quad (7.17)$$

Assim,

<sup>12</sup>esta fórmula pode ser encontrada na referência [2](#) na fórmula 8.411(7)

<sup>13</sup>expressão descrita na referência [2](#) na fórmula 6.565(3)

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(x|\tilde{m}|)}{(r^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{|\tilde{m}|^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{\pi} e^{-r|\tilde{m}|}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})} \frac{1}{r}. \quad (7.18)$$

Dessa forma temos finalmente que:

$$V_{4+\delta} = -\frac{G_4 M}{r} \sum_{\vec{m}} e^{-r|\vec{m}/R|}. \quad (7.19)$$

# Referências

- [1] D’Inverno, R. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press. 1992.
- [2] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products, corrected and enlarged edition*, 1980 Academic Press.
- [3] A. Kehagias, K. Sfetsos. Deviations from the  $1/r^2$  Newton law due to extra dimensions. *Phys.Lett. B472* (2000) 39-44, arXiv:hep-ph/9905417.
- [4] Buhlmann, M. *Gravitational Law in Extra Dimensions*. KTH Stockholm, 2013.
- [5] Luna, G. C. *Testes de Modificações da Gravitação na Escala Atômica*. Tese (Obtenção do título de doutora em física) - Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, 2020.
- [6] Rocha, M. J. *Testes de Modificações da Gravitação em Curtas Distâncias e a Interferometria de Nêutrons*. Dissertação (Obtenção do título de mestre em física) - Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, 2021.
- [7] Kaluza, T., *On the Unification Problem in Physics*. Disponível em <https://arxiv.org/pdf/1803.08616.pdf>
- [8] Klein, O. *Quantum Theory and Five-Dimensional Relativity Theory*, 1991. The Oskar Klein Memorial Lectures, 67–80. DOI:10.1142/9789814368728\_0006
- [9] Cunha, D. C. N. *Unificação geométrica das interações fundamentais*. Dissertação (Mestrado em Física). Instituto de física da Universidade de Brasília, 2013.
- [10] Klein, O. *Quantum Theory and Five-Dimensional Relativity*. *Zeit. f. Physik* 37 (1926)895.
- [11] O. B. Klein. *Quantentheorie und fiftdimensionale Relativisticstheorie* , *Zeit. fur Phys*, 37, (1926) 895-906.
- [12] Boas, M. L., *Mathematical Methods in physical Sciences*. Wiley, New York, 1966.

- [13] Overduin, J.M.; WESSON, P.S. Kaluza-Klein gravity. *Physics Reports*, Volume 283, Issues 56, 1997, Pages 303-378.
- [14] Hamed, N. A.; Dimopoulos, S.; Dvali, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter, *Physics Letters B*, Volume 429, Issues 3-4, 1998, Pages 263-272
- [15] Rubakov, V.A.; Shaposhnikov, M.E. Extra space-time dimensions: Towards a solution to the cosmological constant problem. *Physics Letters B*, Volume 125, Issues 2-3, 1983, Pages 139-143.
- [16] Rubakov, V.A.; Shaposhnikov, M.E. Do we live inside a domain wall?. *Physics Letters B*, Volume 125, Issues 2-3, 1983, Pages 136-138
- [17] Rubakov, V. A. Large and infinite extra dimensions: An Introduction. *Phys. Usp.* 44 (2001) 871
- [18] Neto, J. B., *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*. Editora livraria da física, 2<sup>a</sup> ed. 2013.
- [19] ZEE, A. *Quantum field theory in a Nutshell*. Princeton University Press, 2010.
- [20] Dahia, F.; Lemos, A. S. Constraints on extra dimensions from atomic spectroscopy. *Phys. Rev. D* 94 (2016) no.8, 084033
- [21] Zwiebach, B. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [22] Dahia, F.; Lemos, A. S. Is the proton radius puzzle an evidence of extra dimensions?. *Eur. Phys. J. C.* 76 (2016) n 8, 435.
- [23] R. Pohl et al., *Nature* 466, 213 (2010).
- [24] A. Antognini et al., *Science* 339, 417 (2013).
- [25] C.G. Parthey et al., *Phys. Rev. Lett.* 107, 203001 (2011).
- [26] B. de Beauvoir, C. Schwob, O. Acef, L. Jozefowski, L. Hilico, F. Nez, L. Julien, A. Clairon, F. Biraben, *Eur. Phys. J. D* 12, 61(2000).

- [27] S.R. Lundeen, F.M. Pipkin, Phys. Rev. Lett. 46, 232 (1981).
- [28] E.W. Hagley, F.M. Pipkin, Phys. Rev. Lett. 72, 1172 (1994).
- [29] C. Schwob et al., Phys. Rev. Lett. 82, 4960 (1999).
- [30] M. Fischer et al., Phys. Rev. Lett. 92 (2004) 230802
- [31] C.G. Parthey, A. Matveev, J. Alnis, R. Pohl, T. Udem, U.D. Jentschura, N. Kolachevsky, T.W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. 104, 233001 (2010)
- [32] O. Arnoult, F. Nez, L. Julien, F. Biraben, Eur. Phys. J. D 60, 243 (2010)
- [33] I. Sick, Phys. Lett. B 576, 62 (2003)
- [34] P.G. Blunden, I. Sick, Phys. Rev. C 72, 057601 (2005).
- [35] J.C. Bernauer et al., Phys.Rev. Lett. 105, 24200 (2010).
- [36] I. Sick, Phys. Lett. B 576, 62 (2003).
- [37] Hammad, Fayçal & Landry, Alexandre & Mathieu, Kaleb. Prospects for testing the inverse-square law and gravitomagnetism using quantum interference. International Journal of Modern Physics D. 30. 2150004. 10.1142/S0218271821500048. (2020)
- [38] PRIETO, V. A. Submillimeter Test of the Gravitational Inverse-Square Law Using a Superconducting Differential Accelerometer. Dissertation (requirements for the degree of Doctor of Philosophy), Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, 2007
- [39] Adelberger, E. G.; Gundlach, J. H.; Heckel, B. R.; et. al. Torsion balance experiments: A low-energy frontier of particle physics. Prog. Part. Nucl. Phys. 62 (2009) 102.
- [40] Yao, W. M.; et al. Review of Particle Physics. J. Phys. G 33, 1 (2006).
- [41] Stelle, K. S. Classical Gravity with Higher Derivatives. Gen. Rel. Grav. 9 (1978) 353
- [42] The Eot-Wash Group: Laboratory Tests of Gravitational and sub-Gravitational Physics. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0405262.pdf>.

- [43] <https://www.npl.washington.edu/eotwash/inverse-square-law>.
- [44] Rocha, J. M.; Dahia, F. L. M. Um estudo da lei do inverso do quadrado de Newton e sua correção provocada por dimensões extras.
- [45] Kapner, D. J.; Cook, T. S.; Adelberger, E. G.; et. al. Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale. *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 021101
- [46] H. Casimir, On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates, *Indag. Math.* 10 (1948), 261-263.
- [47] Pinto, M. V. C.; Farina, C.; Tort, A. O Efeito Casimir. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 22, no. 1, Março, 2000.
- [48] Cruz, M. B. ; De Mello, E.R. Bezerra ; Petrov, A.YU. Fermionic Casimir effect in a field theory model with Lorentz symmetry violation. *PHYSICAL REVIEW D*, v. 99, p. 1-8, 2019
- [49] Iwasaki, M. Nakamura, S. N.; Shigaki, K. Discovery os Antiproton Trapping by Long-Lived Metastable States in Liquid Helium. *Physical Review Letters*, vol. 67, 10, 1991.
- [50] Hori, M., Soter, A., Barna, D. et al. Two-photon laser spectroscopy of antiprotonic helium and the antiproton-to-electron mass ratio. *Nature* 475, 484–488 (2011). <https://doi.org/10.1038/nature10260>
- [51] Hori, M.; Dax, A.; Eades, J. Determination of the Antiproton-to Electron Mass Ratio by Precision Laser Spectroscopy of  $\bar{p}He^+$ . *Physical Review Letters*, 96, 243401 (2006)
- [52] Korobov, V. I. Metastable states in the antiprotonic helium atom decaying via Auger transitions. *Physical Review A* 67, 062501, 2003.
- [53] Nexvizhevsky, V.V.; Protasov, K. V. Constraints on non-Newtonian gravity from the experiment on neutron quantum states in the Earth's gravitational field. *Class.Quant.Grav.* 21 (2004) 4557-4566

- [54] A. W. Overhauser and B. Colella, *Phys. Rev. Lett.* 33, 1237 (1974).
- [55] R. Colella, A. W. Overhauser, and S. A. Werner, *Phys. Rev. Lett.* 34, 1472 (1975).
- [56] Parthey, C. G.; Matveev, A.; Alnis, J. et al. Improved Measurement of the Hydrogen 1S-2S Transition Frequency. *Physical Review Letters*, 107, 203001 (2011).
- [57] Jentschura, U. D.; Kotochikova, S.; LE BIGOT, E. O.; et al. Precise Calculation of Transition Frequencies of Hydrogen and Deuterium Based on a Least-Squares Analysis. *Physical Review Letters*, 95, 163003 (2005)
- [58] Fleurbaey, H.; Galtier, S.; Thomas, S.; et al. New Measurement of the 1S-3S Transition Frequency of Hydrogen: Contribution to the Proton Charge Radius Puzzle. *Physical Review Letters*, 120, 183001 (2018).
- [59] Helmut Rauch and Samuel A. Werner, *Neutron Interferometry: Lessons in Experimental Quantum Mechanics, Wave-Particle Duality, and Entanglement*, Second Edition, 2015.
- [60] E.G. Beltrametti and J. M. Levy-Leblond. *Advances in Quantum Phenomena*. Plenum Press. New York, 1995
- [61] H. Goldstein *Classical Mechanics* (2nd Edit. Addison-Wesley) (1980).
- [62] S. A. Werner. *Class. Quantum Grav.* 11 (1994) A207-A226
- [63] Krauth, J.J., Schuhmann, K., Ahmed, M.A. et al. Measuring the  $\mu$ -particle charge radius with muonic helium-4 ions. *Nature* 589, 527–531 (2021). <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03183-1>
- [64] Tanaka, S.; Nakayaa, Y.; Ninomiya, K. MTV-G Experiment: Probing Non-Standard Strong Gravitational Field at Nuclear Scale Using Geodetic Precession. *Physics of Particles and Nuclei*, 2014, Vol. 45, No. 1, pp. 237-240.
- [65] Gay, T.; Dunning, F., Mott electron polarimetry. *Review of Scientific Instruments*. (1992) 63. 1635 - 1651. 10.1063/1.1143371.

- [66] Will, C. M. Theory and experiemnt in gravitational physics. Cambridge University Press, 1993.
- [67] Weinberg, S. Gravitational and Cosmology: Principles and Applications of General Theory of Relativity. wiley, 1ed. 2001
- [68] Fischbach, E.; Freeman, B. S.; CHENG, W.-K. General-relativistic effects in hydrogenic systems. Phys. Rev. D 23, 2157, Phys. Rev. D 24, 1702 (1981)
- [69] Jentschura, U. D.; Noble, J. H. Nonrelativistic limit of the Dirac-Schwarzschild Hamiltonian: Gravitational Zitterbewegung and gravitational spin-orbit coupling. Phys. Rev. A 88, 022121 Published 23 August 2013
- [70] Silenko, A.J.;Teryaev, O.V. Semiclassical limit for Dirac particles interacting with a gravitational field. Phys.Rev. D 71 (2005) 064016
- [71] Mohr, P.J.; Taylor, B.N.; NEWELL, D.B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010. Rev. Modern Phys. 84, 1527 (2012).
- [72] Hagley, E.W.; Pipkin, F.M., Separated oscillatory field measurement of hydrogen  $2S_{1/2}2P_{3/2}$  fine structure interval Phys. Rev. Lett. 72, 1172 (1994).
- [73] Cimmino A., Opat G. I., Klein A.G., Kaiser H., Werner S.A., Arif M., Clothier R. Phys. Rev. Lett. 68, 380 (1989).
- [74] Aharonov Y., Casher A. Phys. Rev. Lett. 53, 319 (1984).
- [75] Pachucki, K., Lensky, V., Hagelstein, F., Li Muli, S., Bacca, S., Pohl, R., Comprehensive theory of the lamb shift in light muonic atoms. Reviews of Modern Physics, 96(1). <https://doi.org/10.1103/revmodphys.96.015001>. (2024).
- [76] Heacock, B., Fujiie, T., Haun, R., Henins, A., Hirota, K., Hosobata, T., . . . , Young, A., Pendellösung interferometry probes the neutron charge radius, lattice dynamics, and fifth forces. Science, 373(6560), 1239-1243. <https://doi.org/10.1126/science.abc2794>. (2021).

- [77] Krauth JJ, et al. Proc. Sci. FFK2019:049 (2020)
- [78] Herrmann M, et al. Phys. Rev. A 79(5):052505 (2009)
- [79] Antognini, A., Hagelstein, F., Pascalutsa, V., Annual Review of Nuclear and Particle Science, 72(1), 389-418. <https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-101920-024709> (2022)
- [80] Salumbides, E., Ubachs, W., Korobov, V., Bounds on fifth forces at the sub-Å length scale. Journal of Molecular Spectroscopy, 300, 65-69. <https://doi.org/10.1016/j.jms.2014.04.003> (2014)
- [81] Germann, M., Patra, S., Karr, J., Hilico, L., Korobov, V., Salumbides, E., ... Koelemeij, J., Three-body QED test and fifth-force constraint from vibrations and rotations of  $\text{hd}^+$ . Physical Review Research, 3(2) <https://doi.org/10.1103/physrevresearch.3.l022028> (2021)
- [82] Dahia, F.; Lemos, A. S. Constraints on extra dimensions from atomic spectroscopy. Phys. Rev. D 94 (2016) no.8, 084033
- [83] Gonçalves, Victor Rodrigues. O Problema na Medida da Massa do Próton. Dissertação (Obtenção do título de mestre em física) - Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, 2018.
- [84] Lee, J. G., Adelberger, E. G., Cook, T. S., Fleischer, S. M. and Heckel, B. R., New test of the gravitational  $1/r^2$  law at separations down to 52 m., <https://doi.org/10.48550/arxiv.2002.11761> (2020)
- [85] Klimchitskaya, G. L. and Mostepanenko, V. M., Testing gravity and predictions beyond the standard model at short distances: the casimir effect. Modified and Quantum Gravity, 403-445, (2023). [https://doi.org/10.1007/978-3-031-31520-6\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-031-31520-6_13)
- [86] Cimmino A., Opat G. I., Klein A.G., Kaiser H., Werner S.A., Arif M., Clothier R. Phys. Rev. Lett. 68, 380 (1989).
- [87] Arkani-Hamed, N et al. "The universe's unseen dimensions." Scientific American vol. 283,2 (2000): 62-9. doi:10.1038/scientificamerican0800-62

- [88] Tanaka, S., Nakaya, Y., Ninomiya, K. et al. MTV-G experiment: Probing non-standard strong gravitational field at nuclear scale using geodetic precession. *Phys. Part. Nuclei* 45, 237–240 (2014). <https://doi.org/10.1134/S1063779614011024>