



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO CURSO DE
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

YAN LEVI MARTINS MEIRA

**SELEÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS DE INVESTIMENTOS: UMA
ABORDAGEM HÍBRIDA COM DEA E MARKOWITZ**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

JOÃO PESSOA, PB

2025

Yan Levi Martins Meira

**SELEÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS DE INVESTIMENTOS: UMA
ABORDAGEM HÍBRIDA COM DEA E MARKOWITZ**

Trabalho de Conclusão de Curso desenvolvido e apresentado ao curso de Engenharia de Produção da Universidade Federal da Paraíba como um dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rotella Junior

JOÃO PESSOA, PB

2025

Catlogação na publicação Seção de

M514s Meira, Yan Levi Martins.

Seleção e otimização de portfólios de investimentos: uma abordagem híbrida
com DEA e MARKOWITZ / Yan Levi Martins Meira. - João Pessoa, 2025.
38 f. : il.

Orientação: Paulo Rotella Junior. TCC
(Graduação) - UFPB/CT.

1. Gestão de portfólio. 2. Análise Envoltória de Dados. 3. Otimização. 4.
Teoria de Markowitz. 5. Mercados emergentes. I. Junior, Paulo Rotella. II. Título.

UFPB/BSCT

CDU 658.5(043.2)

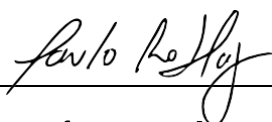
Catlogação e Classificação

FOLHA DE APROVAÇÃO

Aluno: Yan Levi Martins Meira

Título do trabalho: Seleção e otimização de portfólios de investimentos: Uma abordagem híbrida com DEA e Markowitz

Trabalho de Conclusão do Curso defendido e aprovado em 06/05/2025 pela banca examinadora:



Orientadora - Profa. Dr. Paulo Rotella Junior



Documento assinado digitalmente

AGLAUCIBELLY MACIEL BARBOSA

Data: 12/05/2025 16:34:12-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Examinador interno - Profa. Dra. Aglaucibelly Maciel Barbosa



Documento assinado digitalmente

LUCAS GUEDES DE OLIVEIRA

Data: 12/05/2025 16:02:00-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Examinador interno - Profa. Dr. Lucas Guedes de Oliveira

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família pelo suporte constante ao longo da graduação e por terem sido fundamentais para que este projeto se concretizasse.

À minha noiva, Marília, agradeço pela parceria e compreensão durante todo o processo, contribuindo para que os momentos desafiadores se tornassem mais leves.

Aos amigos construídos durante a graduação, em especial aos colegas da Otimize Consultoria Júnior, registro minha gratidão pelas experiências compartilhadas, pelo aprendizado conjunto e pelo ambiente de colaboração que tanto contribuiu para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Aos docentes do curso, agradeço pela dedicação e pelo conhecimento transmitido. Em especial, ao professor Paulo Rotella, agradeço pela orientação precisa, pela disponibilidade e pela forma objetiva e amistosa com que conduziu este trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste projeto, deixo meu sincero agradecimento.

RESUMO

Este artigo propõe uma estratégia integrada para a construção de portfólios de investimentos, combinando a Análise Envoltória de Dados (DEA) e a Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz, com o objetivo de superar as limitações dos métodos tradicionais de seleção de ativos, especialmente em mercados emergentes. A metodologia divide-se em duas etapas principais: (i) pré-seleção de ativos por meio do modelo DEA-BCC, que avalia eficiência relativa com base em indicadores fundamentais (LPA, ROE, P/L) e de risco (Beta); e (ii) otimização via modelo de Markowitz, utilizando simulação de Monte Carlo e programação quadrática sequencial (SLSQP) para definir a fronteira eficiente. Os resultados, aplicados a 84 ativos do Ibovespa, demonstraram a seleção de 19 unidades decisórias (DMUs) com eficiência superior a 90%, culminando em um portfólio com beta médio de 0,715 – indicando menor risco sistemático que o mercado. Conclui-se que a abordagem híbrida proposta reduz vieses subjetivos, melhora a diversificação e é operacionalmente viável, oferecendo um framework robusto para gestores de recursos.

Palavras-chave: Gestão de portfólio, Análise Envoltória de Dados, Teoria de Markowitz, Otimização, Mercados emergentes.

ABSTRACT

This paper proposes an integrated strategy for investment portfolio construction by combining Data Envelopment Analysis (DEA) and Markowitz's Modern Portfolio Theory, aiming to overcome the limitations of traditional asset selection methods, especially in emerging markets. The methodology is divided into two main stages: (i) asset pre-selection through the DEA-BCC model, which evaluates relative efficiency based on fundamental indicators (EPS, ROE, P/E) and risk (Beta); and (ii) optimization via Markowitz's model, using Monte Carlo simulation and sequential quadratic programming (SLSQP) to define the efficient frontier. The results, applied to 84 assets from the Ibovespa, demonstrated the selection of 19 decision-making units (DMUs) with efficiency above 90%, resulting in a portfolio with an average beta of 0.715 – indicating lower systematic risk than the market. It is concluded that the proposed hybrid approach reduces subjective biases, improves diversification, and is operationally feasible, offering a robust framework for asset managers.

Keywords: *Portfolio management. Data Envelopment Analysis. Markowitz Theory. Optimization. Emerging markets.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação gráfica do modelo CCR. As DMUs A e B estão na fronteira eficiente, enquanto a DMU C é ineficiente e projetada verticalmente até a fronteira.	17
Figura 2 – Fronteira eficiente do modelo BCC. As DMUs A, B e D são eficientes sob retornos variáveis de escala. C e E são ineficientes e projetadas até a fronteira.	19
Figura 3 - Software MaxDEA definição dos dados	30
Figura 4 - Seleção da distancia do modelo.....	30
Figura 5 - Bibliotecas Python.....	31
Figura 6 - Calculo de retornos e covariancia.....	31
Figura 7-Criação das tabelas	32
Figura 8 - Simulação de Monte Carlo	32
Figura 9 - Definição de pesos.....	32
Figura 10 - Funções auxiliares	33
Figura 11 – Otimização	34
Figura 12 - Estruturação do gráfico	Erro! Indicador não definido.
Figura 13 - Gráfico Carteiras	36

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Diferenças Modelos DEA	19
Tabela 2 - Interpretação do Beta	22
Tabela 3 - Seleção dos dados para o modelo.....	29

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - DMUs selecionadas	35
------------------------------------	----

Sumário

1. INTRODUÇÃO	12
1.1. PROBLEMA DE PESQUISA	12
1.2. OBJETIVOS DE ESTUDO	13
1.2.1. OBJETIVO GERAL	13
1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	13
1.3. JUSTIFICATIVA DE ESCOLHA DO TEMA.....	14
1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2. REFÊRENCIAL TEÓRICO	15
2.1. ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS.....	15
2.1.1. CONCEITOS E FUNDAMENTOS.....	16
2.1.2. MODELOS DEA	16
2.2. TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO E FRONTEIRA EFICIENTE	20
2.3. RISCO NO MERCADO FINANCEIRO	22
2.4. INDICADORES FINANCEIROS	23
2.4.1 PREÇO/LUCRO (<i>P/L</i>).....	24
2.4.2 <i>RETURN ON EQUITY</i> (ROE)	24
2.4.3 LUCRO POR AÇÃO (LPA).....	25
3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	25
3.1. DEFINIÇÃO DA PESQUISA	25
3.2. FONTES DE DADOS UTILIZADOS.....	26
3.2.1. CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DOS ATIVOS/INVESTIMENTOS	27
3.3. CONTEXTO DA PESQUISA	28
3.4. PROCEDIMENTO SELEÇÃO DEA.....	28
3.5. PROCEDIMENTO OTIMIZAÇÃO DA CARTEIRA	31
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	34
5. CONCLUSÃO	36
REFERÊNCIAS	38

1. INTRODUÇÃO

1.1. PROBLEMA DE PESQUISA

A busca pela seleção de ativos financeiros que gerem retornos eficientes ao longo de um determinado período, ao mesmo tempo em que minimizam ao máximo o risco enfrentado pelo investidor, é um dos principais objetivos da gestão de portfólio moderna. Iniciada na década de 1950 por Harry Markowitz, essa abordagem valoriza uma alocação ótima de ativos diversificados, buscando sempre equilibrar o *trade-off* entre risco e retorno. Toda aplicação financeira envolve riscos, mas algumas opções, como o Tesouro Nacional, apresentam uma proporção de retorno e risco maior do que em comparação a outras, como o mercado de ações, por exemplo (Andrino; Leal, 2018).

Markowitz postula que o processo de escolha de um portfólio ocorre em dois estágios: o primeiro consiste na observação de ativos, com o objetivo de formar um conjunto de crenças sobre seus retornos futuros; o segundo começa com essas crenças e culmina na escolha do portfólio. Contudo, essas crenças podem apresentar dificuldades, especialmente em mercados que não apresentam regularidade nos retornos dos ativos. Nesse contexto, Bekaert e Harvey (1997) afirmam que os mercados emergentes possuem características únicas que os tornam mais voláteis do que os mercados desenvolvidos, tornando-os, assim, mais arriscados.

Nesse contexto ainda há desafios para modelos tradicionais na escolha de tais ativos durante o processo de diversificação da carteira, principalmente devido ao grande volume de dados necessários para serem analisados, com o advento do *Big Data* dados se transformaram na principal fonte de informação para tomada de decisão, sendo eles dados estruturados ou não (Demchenko et al., 2013). Portanto modelos quantitativos podem utilizar-se desta robusta gama de dados para fazer tais análises e auxiliar no processo de geração das crenças, e finalmente nas escolhas dos ativos financeiros para a carteira. Esta pesquisa busca verificar se Análise Envoltória de Dados (DEA), pode ser um dos modelos quantitativos a auxiliar no processo decisório.

Proposta inicialmente por Charnes et al. (1978), a Análise Envoltória de Dados (DEA) seleciona os dados necessários e os organiza de forma a maximizar ou minimizar os inputs e outputs — que representam, respectivamente, os recursos utilizados e os resultados obtidos por uma unidade avaliada — com o objetivo de identificar as unidades decisórias mais eficientes. Posteriormente, Banker, Charnes e Cooper (1984) incorporaram ao DEA os conceitos de retornos de escala, que propõem que as unidades

decisórias não precisam apresentar a mesma proporcionalidade entre seus inputs e outputs para serem consideradas eficientes.

Dado a sua capacidade de processamento e análise de dados, o DEA se propõe como um modelo quantitativo atrativo para realizar os primeiros passos da escolha do portfólio, auxiliando na escolha dos ativos mais eficientes.

A literatura ainda é limitada quanto à aplicação da Análise Envoltória de Dados (DEA) na seleção de ativos para construção de portfólios de ações eficientes, especialmente quando essa abordagem é combinada com um processo de otimização, como o modelo proposto por Markowitz (AMIN; HAJJAMI, 2021). Essa lacuna evidencia um problema relevante: embora o DEA seja amplamente utilizado em avaliações de eficiência em diversos contextos, seu potencial para apoiar a tomada de decisão na etapa inicial da seleção de ativos financeiros ainda é pouco explorado. Além disso, a integração entre técnicas de análise de eficiência e modelos tradicionais de otimização de portfólio permanece incipiente, tanto do ponto de vista teórico quanto prático. Considerando o crescente volume de dados disponíveis e a complexidade dos mercados financeiros, torna-se essencial investigar de que forma a aplicação conjunta dessas abordagens pode contribuir para a construção de carteiras mais eficientes, equilibrando risco e retorno de maneira mais eficaz.

1.2. OBJETIVOS DE ESTUDO

1.2.1. OBJETIVO GERAL

Propor um modelo quantitativo de investimento baseado em uma seleção prévia de ativos financeiros, seguida de sua posterior otimização, com o objetivo de reduzir os riscos e maximizar os retornos esperados de um portfólio.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) Estruturar a seleção inicial de ativos utilizando a Análise Envoltória de Dados (DEA);
- b) Otimizar a alocação de cada ativo no portfólio com base na otimização proposta por Markowitz;
- c) Avaliar a eficácia do modelo por meio da análise de retornos históricos e da mensuração do risco do portfólio gerado;
- d) Discutir, avaliar e ponderar os resultados da estratégia, refletindo sobre os benefícios e limitações encontrados.

1.3. JUSTIFICATIVA DE ESCOLHA DO TEMA

A busca por métodos mais eficientes de alocação de recursos tem sido impulsionada pelo aumento da disponibilidade de dados, que oferecem novas oportunidades para aprimorar a seleção de portfólios. No entanto, como destacado por Färe et al. (2004), a ineficiência na alocação de ativos continua sendo uma das principais causas de perda monetária.

Dessa forma, é fundamental adotar abordagens que busquem aprimorar a eficiência na alocação de capital. Considerando que a capacidade de processamento de dados vem aumentando ano após ano (Fu; Guo, 2024), e que os métodos quantitativos de alocação e previsão têm se desenvolvido continuamente (Zhen et al., 2025), este trabalho propõe investigar de que maneira a combinação entre uma alocação eficiente de recursos — por meio de um método quantitativo como a DEA — e processos de otimização pode contribuir para a maximização dos retornos financeiros.⁴⁻

A pesquisa propõe uma abordagem híbrida que utiliza dois processos de otimização. Como proposto por Chen (2008), a Análise Envoltória de Dados (DEA) será empregada para realizar a seleção quantitativa dos ativos, e, posteriormente, a otimização de Markowitz será aplicada para determinar a distribuição ideal dos pesos dos ativos na carteira.

Ao buscar preencher a lacuna existente na literatura sobre os processos decisórios quantitativos para a pré-seleção de ativos e os modelos de otimização, este trabalho visa aprimorar a eficiência na alocação de ativos, reduzir o risco associado e otimizar o retorno esperado. Com isso, espera-se contribuir para a melhoria da gestão de portfólio, oferecendo uma abordagem integrada e mais eficaz (Amin; Hajjami, 2021)

1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO

O Capítulo 1 introduz o tema, contextualizando os desafios enfrentados na gestão moderna de portfólios e evidenciando a crescente necessidade de modelos quantitativos no mercado financeiro, especialmente em contextos de elevada complexidade e incerteza.

O Capítulo 2 apresenta o referencial teórico, no qual são explorados os principais conceitos que fundamentam o estudo, com base na literatura especializada. O objetivo deste capítulo é fornecer o embasamento teórico necessário para a compreensão e aplicação das metodologias utilizadas.

O Capítulo 3 descreve a metodologia da pesquisa, detalhando os procedimentos adotados, as técnicas utilizadas e os critérios de seleção e análise dos dados, bem como a

aplicação dos modelos DEA e de otimização de Markowitz.

O Capítulo 4 traz a análise e discussão dos resultados obtidos com a aplicação prática da estratégia proposta. Os dados são apresentados e interpretados à luz dos conceitos abordados nos capítulos anteriores, permitindo avaliar a eficácia da abordagem.

Por fim, o Capítulo 5 apresenta as considerações finais do estudo, sintetizando os principais achados, destacando as contribuições teóricas e práticas da pesquisa, além de sugerir possíveis caminhos para trabalhos futuros.

2. REFÊRENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo serão abordados os principais conceitos da gestão moderna de portfólio, da análise envoltória de dados e da aplicação da pesquisa operacional no contexto de investimentos, com foco na otimização. O objetivo é apresentar os fundamentos teóricos que sustentam a construção da estratégia proposta, explicando de que forma essas ferramentas se complementam na prática.

Será apresentada a base da teoria moderna de portfólios, com ênfase no modelo de otimização desenvolvido por Markowitz, abordando os conceitos de risco, retorno e fronteira eficiente. Em seguida, será detalhada a metodologia DEA, explicando como essa ferramenta pode ser utilizada para avaliar a eficiência de ativos com base em múltiplos critérios. Também será discutido como a pesquisa operacional contribui com técnicas de modelagem matemática voltadas para problemas de decisão no mercado financeiro.

Dessa forma, este capítulo busca construir o embasamento necessário para a aplicação prática dos modelos propostos, mostrando como a integração entre DEA e otimização de carteiras pode oferecer uma abordagem quantitativa mais robusta para a seleção e alocação de ativos.

2.1. ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

A análise envoltória de dados é uma técnica não paramétrica, desenvolvida por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) para mensurar a eficiência relativa de *unidades tomadoras de decisão* (*Decision Making Units* – DMUs). Inicialmente aplicada a unidades de negócio, a metodologia expandiu-se para outros contextos, como em finanças, onde DMUs podem representar ativos financeiros (Cooper et al., 2007). Similarmente à fronteira eficiente de Markowitz (1952), que equilibra risco e retorno, o DEA constrói uma fronteira eficiente baseada em eficiência técnica, utilizando *inputs* (e.g., volatilidade, beta) e *outputs* (e.g., lucro por ação, retorno esperado) por meio de

programação linear (Banker et al., 1984).

2.1.1. CONCEITOS E FUNDAMENTOS

O modelo DEA trabalha com dois elementos centrais, que foram citados anteriormente, os inputs e os outputs. Os inputs podem ser vistos como os fatores de entrada os recursos de entrada, e quanto as outputs seriam os produtos, ou resultados da operação. A eficiência de uma DMU é calculada pela razão entre a soma ponderada de seus outputs e a soma ponderada de seus inputs, maximizada sob restrições que garantem a comparação relativa entre as DMUs. Matematicamente é definida como:

$$\theta_k = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} \quad (1)$$

Onde y_{rk} e x_{ik} representam, respectivamente o r -ésimo output e o i -ésimo input da DMU k , e u_r e v_i são os pesos ótimos determinados pelo modelo (Charnes et al., 1978). Uma DMU é considerada eficiente quando $\theta_k = 1$, posicionando-a sobre a fronteira eficiente.

2.1.2. MODELOS DEA

O DEA possui dois modelos fundamentais. O primeiro, proposto por Charnes, Cooper e Rhodes em 19778 e conhecido como modelo CCR, assume retornos constantes de escala (CRS). Este modelo é particularmente adequado para situações em que existe proporcionalidade entre inputs e outputs, incorporando assim o efeito de escala na avaliação de eficiência. Para uma DMU k sob avaliação, o modelo CCR orientado a output pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \text{Max } \theta &= \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} \\ \text{Sujeito a } \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} &= 1, \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad \forall j, \end{aligned} \quad (2)$$

Onde y_{rj} e x_{ij} são os outputs e inputs da DMU j , e u_r e v_i , são os pesos a serem determinados (Cooper et al. 2007). O objetivo do problema acima é maximizar a

eficiência dos outputs da DMU k , sujeito a duas restrições fundamentais a primeira é a que a razão de eficiência da DMU k é normalizada, ou seja denominador igual a 1 e que a eficiência relativa de todas as outras DMUs j , quando avaliadas com os mesmos pesos ótimos da DMU k , não exceder o valor máximo de 1. Graficamente (Figura 1) as DMUs A e B situam-se sobre a fronteira eficiente ($\theta < 1$) por não pertencer a essa fronteira. Concretamente, para o nível de output observado em C (Retorno financeiro) o input ideal deveria ser aproximadamente 1.5, não 3, evidenciando sua ineficiência técnica.

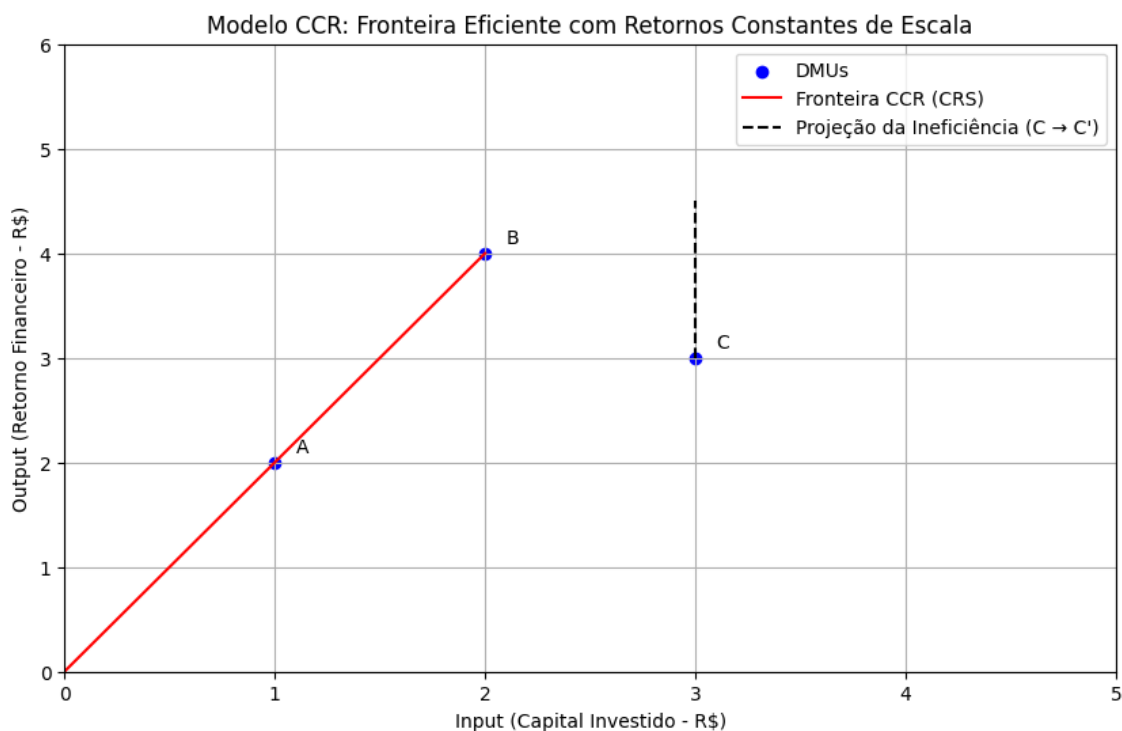


Figura 1: Representação gráfica do modelo CCR. As DMUs A e B estão na fronteira eficiente, enquanto a DMU C é ineficiente e projetada verticalmente até a fronteira.

O segundo modelo DEA é conhecido como BCC (Banker; Charnes; Cooper, 1984). A proposta do BCC assume os retornos variáveis de escala e se baseia em três pilares, o primeiro busca evidenciar que é irreal uma proporcionalidade perfeita entre os inputs e outputs, para diversas situações no ambiente empresarial. Uma pequena empresa por exemplo pode não conseguir dobrar seu output, após dobrar seus inputs, por conta de uma limitação operacional. Para contornar isso, foi adicionada uma nova restrição que permite o envelopamento das DMUs na fronteira eficiente, buscando acomodar retornos crescentes, decrescentes ou constantes. A restrição pode ser resumida da seguinte maneira:

$$\sum \lambda_j = 1 \quad (3)$$

Essa restrição é o gatilho para o segundo pilar, que inclui a produção em um espaço convexo, ou seja, a combinação linear das DMUs. Podemos falar que para duas DMUs A e B a seguinte combinação deve ser possível, desde que $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda A + (1 - \lambda)B \quad (4)$$

E por último, o terceiro pilar decompõe a eficiência em eficiência pura, e eficiência de escala. Pois no CCR a ineficiência técnica é confundida com a ineficiência de escala, isso implica dizer que uma DMU pode ser tecnicamente eficiente $\theta_{BCC} = 1$, porém ineficiente na escala $\theta_{CCR} < \theta_{BCC}$. O problema de otimização pode ser então formulado da seguinte maneira:

$$Max \theta_k \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} + u_0 \quad (5)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u_0 \leq 0 \quad \forall j,$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad \forall r, i,$$

$$u_0 \text{ livre de sinal.}$$

A função objetivo busca, assim como o CCR, maximizar os valores dos outputs ponderados, porém com a adição do termo u_0 que captura os retornos variáveis de escala. Esse termo, quando assume valores positivos, indica retornos crescentes, já quando negativo indica retornos decrescentes. O resultado desse problema geralmente cai em dois espectros:

- Se $\theta_k = 1$ e $u_0 = 0$, a DMU é eficiente e opera com retornos constantes de escala.
- Se $\theta_k = 1$ mas $u_0 \neq 0$, a DMU é eficiente apenas sob retornos variáveis.

A representação gráfica desse problema pode ser vista abaixo (figura 2):

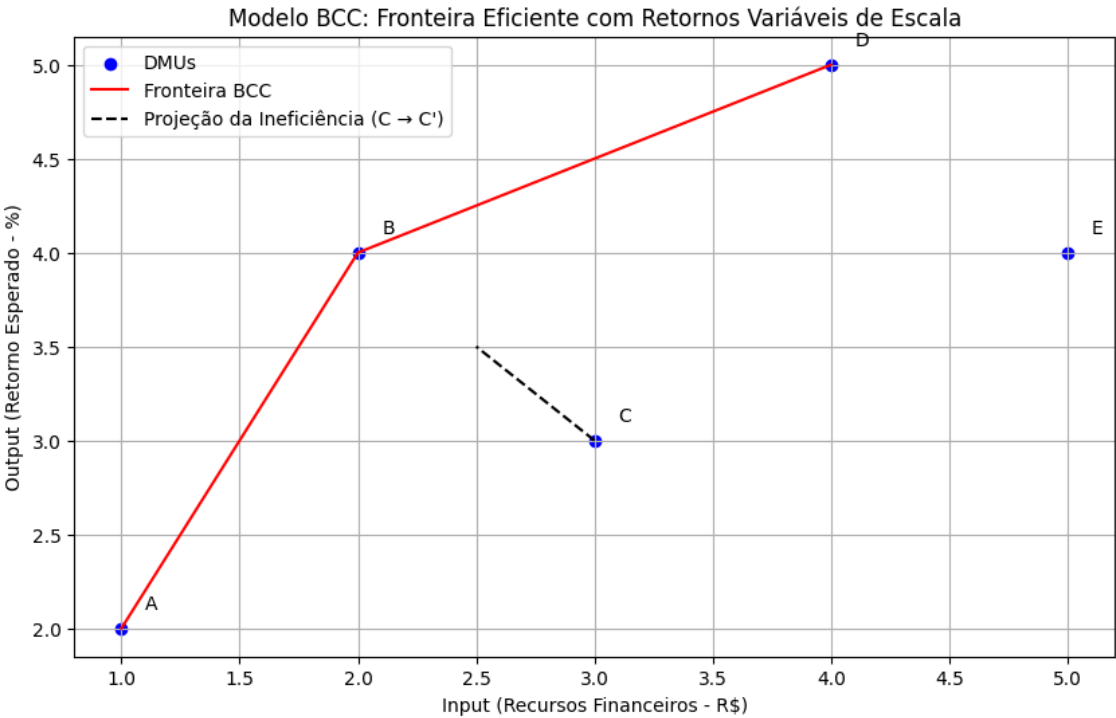


Figura 2 – Fronteira eficiente do modelo BCC. As DMUs A, B e D são eficientes sob retornos variáveis de escala. C e E são ineficientes e projetadas até a fronteira.

A tabela abaixo busca sumarizar as principais diferenças entre os dois modelos e quais as relações que possuem.

Tabela 1 - Diferenças Modelos DEA

Diferencial do BCC e CCR		
Característica	CCR (Charnes et al., 1978)	BCC (Banker et al., 1984)
Pressuposto de escala	Retornos constantes (CRS)	Retornos Variáveis (VRS)
Restrição	$\sum \lambda_j \geq 0$	$\sum \lambda_j = 1$
Fronteira Eficiente	Linear pela origem	Poligonal

Eficiência Medida	Eficiência Global	Eficiência técnica pura
Formulação Matemática	$Max \theta = \sum u_r y_{rk}$	$Max \theta = \sum u_r y_{rk} + u_0$
Interpretação de u_0	-	$u_0 > 0$ retornos crescentes; $u_0 < 0$ retornos decrescentes;
Aplicação típica	DMUs homogêneas	DMUs heterogêneas
Sensibilidade a outliers	Mais Sensível	Menos Sensível

2.2. TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO E FRONTEIRA EFICIENTE

Em 1952, Markowitz iniciou a teoria moderna de portfólio por meio de seu artigo seminal intitulado *Portfolio Selection* (Seleção de portfólio), no qual estabelece que o risco do portfólio é uma função da covariância entre os ativos que o compõem. A diversificação, segundo ele, ocorre quando ativos com baixa correlação — geralmente provenientes de setores distintos — são combinados, o que, portanto, reduz o risco da carteira. Para que o modelo proposto inicialmente por Markowitz funcione, ele assume que:

- Os investidores são racionais e aversos aos riscos;
- Os retornos tem uma distribuição normal
- Os mercados são eficientes.

A formulação para minimização da variância do portfólio pode ser dado pela seguinte função, onde ω_i é o peso do ativo i no portfólio, σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j , e $E(R_i)$ é o retorno esperado para o ativo i , conforme:

$$Min \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \quad (6)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \sum_{i=1}^n \omega_i E(R_i) = E(R_p)$$

Tal formulação permite a criação de uma fronteira eficiente de investimentos, que é dada pelo conjunto de todos os portfólios ótimos que contenham menor nível de risco, e um maior retorno esperado. Mais tarde Michaud (1989), estabelece uma crítica ao

modelo de pré-seleção de ativos, pois o mesmo apresenta dificuldade operacional quando se lida com um grande universo de ativos, pois o modelo requer a estimação de N retornos esperados, através de:

$$N \times \frac{(N + 1)}{2} \quad (7)$$

Ou seja, para apenas 100 ativos seriam necessárias 5.050 estimativas, e com a presente situação do mercado financeiro, a variedade de ativos é imensa, e, portanto, a capacidade para gerar tantas estimativas poderia ser falha.

2.3. ÍNDICE SHARPE

O Índice de Sharpe, desenvolvido por William F. Sharpe em 1966, é uma das métricas mais amplamente utilizadas para a avaliação do desempenho de investimentos, permitindo uma análise da rentabilidade ajustada ao risco de um portfólio. O principal objetivo desse índice é comparar o retorno excessivo de um portfólio, ou seja, o retorno acima da taxa livre de risco, em relação à volatilidade (ou risco) do portfólio. A fórmula que define o Índice de Sharpe é expressa da seguinte forma:

$$S = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \quad (8)$$

Onde S representa o Índice de Sharpe, R_p é o retorno do portfólio, ou seja, a rentabilidade gerada pelo portfólio durante um determinado período; R_f é a taxa livre de risco, que geralmente é representada pela rentabilidade de ativos considerados sem risco, como os títulos do Tesouro Nacional; e σ_p é o desvio padrão dos retornos do portfólio, que representa o risco ou a volatilidade do portfólio, ou seja, a dispersão dos retornos em relação à média.

Este índice fornece uma medida de quanto retorno adicional um investidor pode esperar, dado o risco que ele está disposto a assumir. Em termos mais concretos, um Índice de Sharpe elevado indica que o portfólio está oferecendo uma compensação adequada pelo risco assumido, ou seja, o retorno gerado justifica o risco envolvido. Por outro lado, um valor de Sharpe inferior a 1 sugere que o portfólio não está sendo eficiente em termos de retorno ajustado ao risco. Quando aplicado no contexto de portfólios

otimizados, como o modelo de Markowitz, o Índice de Sharpe ajuda a identificar a alocação de ativos que proporciona o melhor retorno possível para o risco assumido.

2.4. RISCO NO MERCADO FINANCEIRO

Embora modelos como o de Markowitz busquem reduzir o risco, é necessário entender que ele é uma variável inerente ao mercado financeiro e em suas operações. Tal risco pode ser metrificado de algumas maneiras, e geralmente representa a incerteza sobre os retornos futuro (Fabozzi, Markowitz, 2002). Algumas representações para o risco são:

- **Volatilidade:** Calculada pelo desvio padrão, ela mede a dispersão dos retornos em torno da média.
- **Value at Risk (VaR):** Busca estimar qual a perda máxima em um horizonte de tempo com um determinado nível de confiança.
- **Beta (β):** Indica a sensibilidade de um ativo em relação ao mercado.

O Beta apresenta algumas vantagens, como por exemplo o foco no risco não diversificável, como observado por Sharpe (1964), embora não lide bem com eventos extremos o beta pode ser um aliado na metrificação de risco para ativos. Seus valores podem variar de maiores que 1 a menores que 1 e cada range de valores tem uma explicação, que pode ser vista no quadro abaixo:

Tabela 2 - Interpretação do Beta

Interpretação do Beta	
$\beta > 1$	Ativo mais arriscado que o investimento no mercado
$\beta = 1$	Risco equivalente ao mercado
$\beta < 1$	Ativo menos arriscado
$\beta < 0$	Comportamento de risco inverso ao mercado analisado

Ao diversificar um portfólio, o risco representado ao beta pode ser utilizado para a ponderação na seleção dos ativos apresentados, pois faz-se necessário ponderar entre ativos com um beta mais elevado e outros com o beta reduzido, para assim não acabar comprometendo o retorno da carteira selecionada. Sua formulação matemática pode ser dada por:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)} \quad (9)$$

Essa relação utiliza a covariância do retorno dos ativos, atrelado ao retorno do mercado, onde R_i é o retorno do ativo i e R_m é o retorno geral do mercado. É notório, portanto, ao avaliar a formulação matemática do beta, que risco e retorno andam lado a lado no mercado financeiro e saber realizar as melhores decisões em suas ponderações acaba por trazer os melhores resultados na carteira (Sharpe, 1964)

2.5. INDICADORES FINANCEIROS

Como já apresentado no presente trabalho, a análise das expectativas dos rendimentos dos ativos financeiros é fundamental para o processo decisório de investimento. Para auxiliar nesse processo, investidores e estudiosos desenvolveram indicadores fundamentalistas que se tornaram essenciais na avaliação de ativos. Entre os pioneiros destacam-se:

- **Benjamin Graham** (criador do conceito de *Value Investing* e popularizador do índice **P/L**) (GRAHAM; DODD, 1934);
- **Warren Buffett**, que refinou o uso do **ROE** (*Return on Equity*) como métrica de qualidade gerencial (BUFFETT, 1984);
- **Philip Fisher**, defensor da análise do **LPA** (*Lucro por Ação*) como indicador de crescimento sustentável (FISHER, 1958).

Conforme proposto por Assaf Neto (2025), em seu livro Mercado financeiro, os indicadores auxiliam a tomada de decisão, pois cada um traz um contexto distinto sobre o ativo analisado e trazem um reflexo do desempenho de mercado das suas respectivas ações, sendo possível estabelecer, inclusive, tendências para os ativos em análise. Neste trabalho, foram selecionados três indicadores comprovadamente eficazes para análise de rentabilidade futura, conforme sustentado por Damodaran (2012):

- **Preço/Lucro (P/L):** Relação entre preço de mercado e lucro por ação, indicando expectativas de crescimento.
- **Return on Equity (ROE):** Mede a eficiência na geração de lucros com o capital próprio.
- **Lucro por Ação (LPA):** Reflete a parcela do lucro líquido atribuível a cada ação em circulação.

2.4.1 PREÇO/LUCRO (P/L)

O preço lucro, como brevemente introduzido acima, é o quociente do valor a se investir para adquirir o título, pelo lucro unitário da empresa, no período em análise, sua fórmula é a seguinte:

$$\frac{P}{L} = \frac{\text{Preço da ação}}{\text{Lucro por ação}} \quad (10)$$

O indicador busca evidenciar o número de anos em que o investidor recuperaria o capital investido, Damodaran (2012) verificou que empresas com o múltiplo P/L em valores baixos performam melhor que seus pares que apresentam valores mais elevados, isso pode ser visto por dois fatores, o primeiro refere-se à subvalorização de mercado, que ocorre quando o potencial de lucros futuros ainda não foi plenamente precificado e a expectativa geral sobre os ativos é pessimista — o que faz com que surpresas positivas resultem frequentemente em retornos anormais. O segundo ponto é especialmente relevante atualmente, considerando o papel dos veículos de mídia, que permitem a rápida disseminação dessas 'surpresas' mencionadas pelo autor.

O indicador possui algumas limitações, como citado acima, o indicador pode ser distorcido por lucros não recorrentes, e como o indicador possui uma natureza estática sua avaliação apenas auxilia na tomada de decisão futura.

2.4.2 RETURN ON EQUITY (ROE)

O *Return on Equity* (ROE) é um importante indicador financeiro que mede a rentabilidade do capital próprio investido em uma empresa, refletindo a eficiência com que a administração utiliza os recursos dos acionistas para gerar lucros. Calculado pela divisão do lucro líquido pelo patrimônio líquido, esse múltiplo oferece insights valiosos sobre a performance do negócio (Buffett, 1984).

$$ROE = \frac{\text{Lucro Líquido}}{\text{Patrimônio Líquido (PL)}} \quad (11)$$

Quando apresenta valores elevados de forma consistente, o ROE pode indicar que a empresa possui vantagens competitivas sustentáveis, como eficiência operacional, boa gestão de custos ou mesmo posicionamento privilegiado no mercado. Contudo, é crucial

analisar esse indicador com cautela, pois ele pode ser distorcido pelo uso excessivo de alavancagem financeira.

Para Assaf Neto (2025) a alavancagem impacta o ROE de duas maneiras principais: primeiro, ao reduzir artificialmente o denominador (patrimônio líquido) através do aumento do endividamento; segundo, ao potencialmente inflar o numerador (lucro líquido) caso os investimentos financiados por dívidas gerem retornos superiores aos seus custos. Esse efeito pode mascarar o verdadeiro desempenho operacional da empresa e aumentar seu risco financeiro.

2.4.3 LUCRO POR AÇÃO (LPA)

O lucro por ação é um múltiplo simples, que busca evidenciar a parcela de lucro líquido a cada ação. Independentemente da simplicidade de seu cálculo, o indicador denota uma indicação de saúde financeira da empresa, embora também seja um indicador estático como o P/L, o LPA acaba por contar uma narrativa da saúde financeira daquela empresa, pois aumentos consistentes no múltiplo, denotam uma saúde financeira para a empresa, como proposto por Fisher (1958). Seu Cálculo pode ser feito como:

$$LPA = \frac{\text{Lucro Líquido}}{\text{Número de Ações Circulantes}} \quad (12)$$

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos metodológicos utilizados para alcançar os objetivos desta pesquisa são detalhados nesta seção, incluindo a classificação do estudo, o ambiente de sua realização e as etapas desenvolvidas.

3.1. DEFINIÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa científica pode ser classificada quanto à sua natureza, sendo uma distinção fundamental entre a pesquisa básica e a aplicada (Azevedo; Ensslin, 2020). Enquanto a pesquisa básica busca expandir o conhecimento teórico sobre fenômenos sem foco imediato na aplicação prática, o presente estudo direciona-se à pesquisa aplicada. Isso se evidencia no objetivo de explorar a influência de um método de pré-seleção de ativos na otimização de portfólios e, principalmente, em verificar seu potencial para gerar resultados superiores na gestão de carteiras. Essa busca por soluções concretas e melhorias em um contexto específico como o da gestão de investimentos define a natureza

aplicada desta investigação.

Quanto à abordagem, esta pesquisa adota o método quantitativo, conforme a classificação de Gil (2019). Justifica-se essa escolha pela necessidade de medir variáveis específicas e investigar as relações entre elas por meio de instrumentos de coleta e análise bem definidos. Em consonância, o estudo emprega uma fonte de dados controlada e delimitada em um horizonte temporal de longo prazo, utilizando métodos numéricos para avaliar a eficiência do método de pré-seleção de ativos proposto. Essa quantificação e análise estatística permitirão uma avaliação objetiva e estruturada do impacto do método na otimização de portfólios.

No que concerne aos objetivos, a pesquisa se caracteriza como exploratória (Azevedo; Ensslin, 2020), dada a sua natureza de investigação inicial sobre a aplicação combinada da Análise por Envoltória de Dados (DEA) e da teoria de Markowitz na seleção e otimização de carteiras de investimentos. Essa abordagem exploratória é pertinente para testar a eficácia dessa integração em contextos de mercado específicos, onde a otimização tradicional enfrenta desafios metodológicos. O estudo visa estabelecer as bases para futuras pesquisas mais aprofundadas sobre a união dessas técnicas, contribuindo para o desenvolvimento de estratégias quantitativas mais robustas na gestão de investimentos, com foco na capacidade do DEA em refinar a seleção de ativos antes da otimização por Markowitz.

Em relação aos procedimentos metodológicos, adotou-se o estudo de caso como estratégia de pesquisa, conforme a definição de Gil (2019). Essa escolha se justifica pela necessidade de examinar de forma aprofundada e contextualizada a aplicação prática da proposta em um ambiente real de investimentos, considerando as especificidades do mercado de capitais nacional. O estudo de caso, como destaca o autor, é particularmente adequado para compreender como fenômenos específicos se manifestam em situações complexas e concretas, permitindo uma análise detalhada das particularidades da aplicação da metodologia proposta.

3.2. FONTES DE DADOS UTILIZADOS

Segundo a clássica distinção de Lakatos e Marconi (2017), a pesquisa científica pode se valer de dois tipos principais de dados: os primários, que são aqueles coletados diretamente pelo pesquisador por meio de instrumentos específicos para responder à questão de pesquisa original, e os secundários, que consistem em informações já existentes, compiladas e organizadas por outras fontes. Para a presente pesquisa, optou-

se pela utilização exclusiva de dados secundários, dada a natureza retrospectiva e quantitativa da investigação. As principais fontes desses dados foram a robusta base de dados financeira do Economatica.

A coleta de dados específicos para a aplicação do modelo de Análise por Envoltória de Dados (DEA) concentrou-se na plataforma Economatica. Dessa base de dados, foram extraídos os valores dos indicadores financeiros que serviram como inputs (entradas) e outputs (saídas) no modelo de avaliação de eficiência dos ativos. Esses indicadores foram selecionados com base na sua relevância teórica para a análise de desempenho financeiro e sua capacidade de capturar diferentes dimensões da eficiência dos ativos sob investigação.

Paralelamente, a obtenção das séries históricas dos preços de fechamento dos ativos que compuseram a amostra para a análise de otimização de portfólios, utilizando a teoria de Markowitz, foi realizada através da biblioteca *Yahoo Finance*. Essa fonte se mostrou adequada pela sua abrangência de dados de mercado e pela facilidade de acesso a informações históricas de preços de diversos ativos financeiros. O período temporal abrangido por essas séries históricas foi de 2005 à 2024, visando uma maior temporalidade e atenuação de efeitos específicos no mercado, como por exemplo a crise de 2008 e a pandemia COVID-19.

Para a obtenção dos últimos dados faltantes, os retornos de cada ativo, foram utilizadas duas bibliotecas do *Python*, o *Pandas* e o *NumPy*, os dados foram extraídos a partir do cálculo da variação diário do valor de fechamento do ativo, em relação ao do período anterior, e a transformação da série em seu logaritmo natural, para assim obter-se o retorno logarítimo.

3.2.1. CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DOS ATIVOS/INVESTIMENTOS

Para compor o universo de análise, foram selecionados os ativos que fazem parte do índice Ibovespa. Esse índice costuma incluir cerca de 84 ações e já funciona como uma espécie de filtro inicial dentro do conjunto de empresas listadas na B3 (B3, 2023). A preferência por esses ativos está ligada principalmente à alta liquidez, um aspecto essencial para reduzir o risco de liquidez. Isso porque, para fazer parte do Ibovespa, os papéis precisam representar, em média, 85% do volume total negociado no mercado à vista. Além disso, o índice tem uma boa representatividade do mercado acionário brasileiro, já que cobre cerca de 80% do valor de mercado da B3 e inclui empresas de diversos setores da economia.

Para manter a qualidade e a comparabilidade das séries históricas de preços, foram utilizados dados já ajustados por proventos, retirados diretamente da base. Esse processo envolveu a correção dos preços antigos para refletir o pagamento de dividendos e juros sobre capital próprio. Também foram consideradas alterações como grupamentos e desdobramentos de ações, o que evitou distorções nas séries ao longo do tempo. Com isso, os dados permanecem consistentes e adequados para as análises de desempenho e otimização subsequentes.

3.3. CONTEXTO DA PESQUISA

Este estudo foi desenvolvido no mercado acionário brasileiro, utilizando dados do Ibovespa, com o objetivo de testar uma estratégia híbrida para seleção e otimização de portfólios. A pesquisa combina a Análise Envoltória de Dados (DEA) para pré-selecionar ativos eficientes com a Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz para otimizar a alocação final.

O intuito da análise foi superar duas limitações práticas: (1) a subjetividade na seleção inicial de ativos e (2) a sobrecarga computacional em grandes universos de investimento. O objetivo principal foi desenvolver um método sistemático que, mantendo a diversificação, reduzisse o risco do portfólio sem comprometer retornos esperados.

A abordagem proposta se justifica pela necessidade de ferramentas quantitativas adaptáveis às particularidades de mercados menos eficientes, onde indicadores tradicionais frequentemente falham em capturar relações risco-retorno não lineares. Os resultados visam contribuir tanto para a gestão prática de investimentos quanto para a literatura acadêmica sobre otimização de portfólios em economias em desenvolvimento.

3.4 PROCEDIMENTO SELEÇÃO DEA

Para aplicação do modelo DEA, optou-se pela abordagem proposta por Banker, Charnes e Cooper, pois se adequa melhor ao comportamento não linear dos retornos presentes no mercado financeiro.

O modelo escolhido foi orientado aos outputs, alinhando-se ao objetivo do estudo de selecionar ativos financeiros eficientes com base em critérios pré-definidos. A Tabela 3 detalha as variáveis selecionadas, categorizadas conforme sua natureza (*inputs* ou *outputs*) e comportamento esperado (maximização ou minimização)

Tabela 3 - Seleção dos dados para o modelo

Tabela de inputs e Outputs		
Variável	Caracterização	Comportamento
Lucro por ação (LPA)	Output	Maximizar
Retorno sobre patrimônio (ROE)	Output	Maximizar
Preço/Lucro	Input	Minimizar
Beta	Input	Minimizar

Após a seleção das variáveis, empregou-se o *software* MaxDEA para a aplicação do modelo. Desenvolvido especificamente para análises de envoltória de dados, o MaxDEA exige, como etapa preliminar, a configuração do modelo e a importação dos dados. Contudo, o software apresenta uma restrição operacional: a incompatibilidade com valores negativos em inputs ou outputs. Como as variáveis selecionadas neste estudo admitem valores negativos, foi necessária a normalização dos dados por meio de deslocamento aditivo, técnica consolidada na literatura. Esse procedimento consistiu na adição da menor constante da série a cada observação, assegurando a não negatividade dos valores — método utilizado no capítulo de pré-processamento de dados da obra *Pattern Recognition and Machine Learning* (Bishop, 2006).

Após a normalização dos dados, realizou-se a configuração final no software, que consistiu na classificação das variáveis como inputs e outputs e a nomeação das DMUs. A classificação e nomeação são necessárias, pois sem uma seleção do seu tipo, a variável não é utilizada no modelo. A figura 3 ilustra a configuração no ambiente do software.

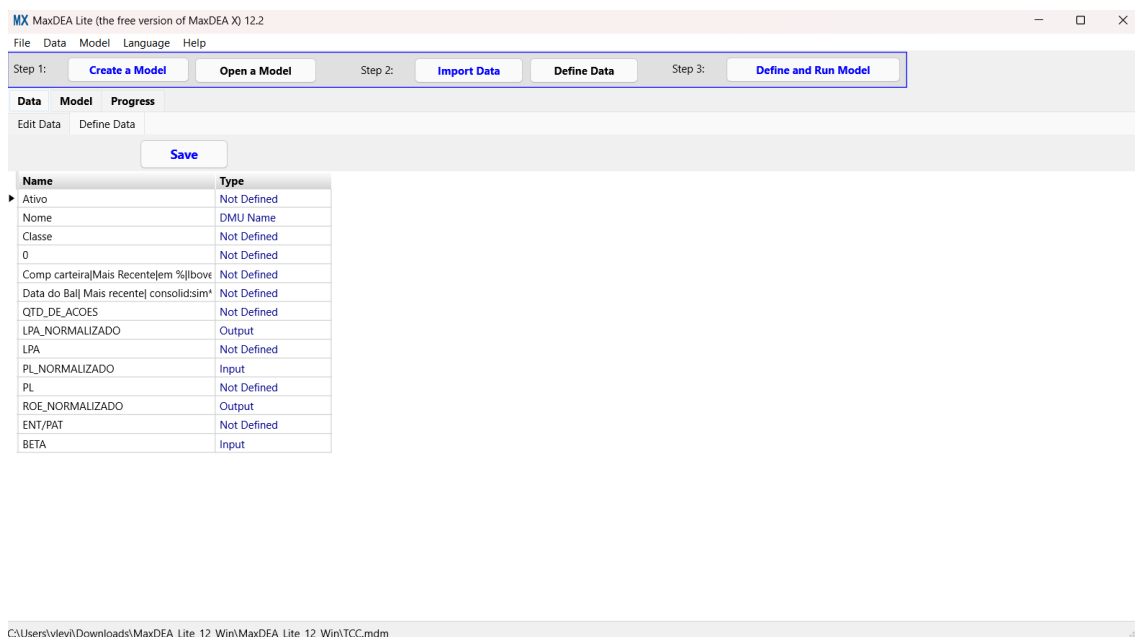


Figura 3 - Software MaxDEA definição dos dados

Na aba de definição do modelo, selecionou-se o *Radial* (CCR 1978; BCC 1984). A opção por essa métrica mantém a proporcionalidade dos ajustes entre as variáveis durante a otimização, conforme estabelecido na literatura.

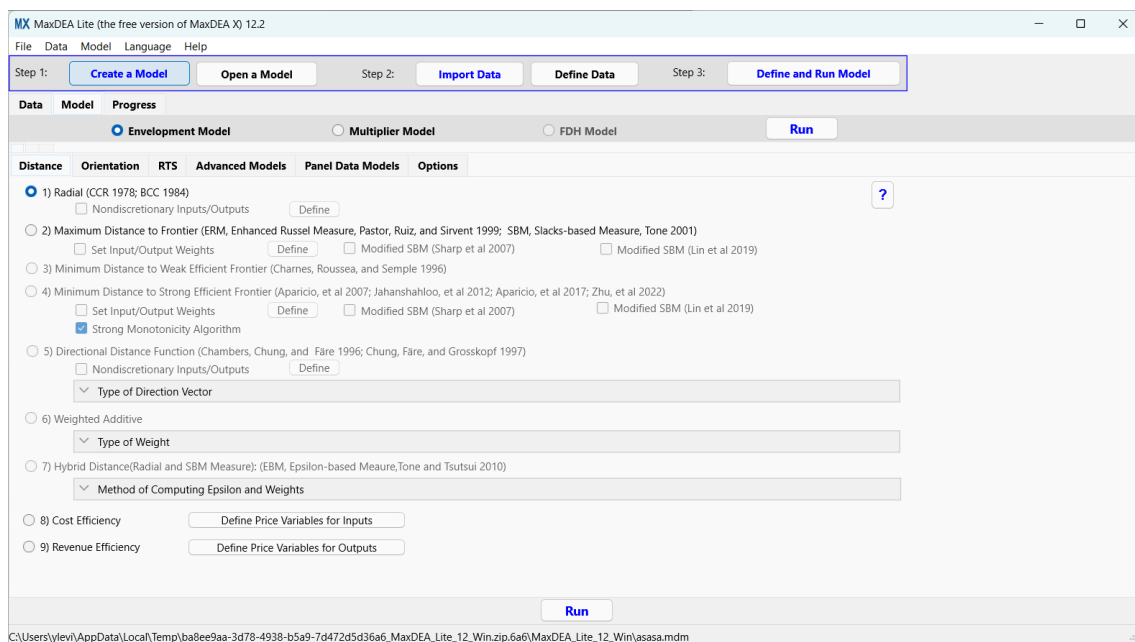


Figura 4 - Seleção da distancia do modelo

Com todas as configurações devidamente estabelecidas - orientação para outputs selecionada e retornos variáveis de escala (VRS) definidos - procedeu-se à execução do modelo no software. O processamento realizado gerou os scores de eficiência que serviram de base para as análises subsequentes deste estudo.

3.5 PROCEDIMENTO OTIMIZAÇÃO DA CARTEIRA

A construção do modelo de Markowitz foi realizada integralmente em *Python*, aproveitando a flexibilidade e o poder computacional da linguagem para personalizar todas as etapas do processo. Inicialmente, foram importadas bibliotecas essenciais (Figura 5), como *Yahoo Finance* para coleta de dados históricos, *NumPy* para operações matemáticas avançadas e *Pandas* para manipulação eficiente dos dados.

```
[24] import pandas as pd
import numpy as np
import datetime as dt
import pandas_datareader.data as pdr
import yfinance as yf
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import minimize
import matplotlib.ticker as mtick

from tqdm import tqdm

import plotly
import plotly.graph_objects as go
from plotly.subplots import make_subplots
import plotly.express as px
import plotly.figure_factory as ff
```

Figura 5 - Bibliotecas Python

Com as ações pré-selecionadas pela análise DEA, utilizou-se a biblioteca *Yahoo Finance* para obter os preços diários dos ativos. Em seguida, calcularam-se os retornos percentuais diários por meio do método *.pct_change* e aplicou-se a transformação logarítmica (*np.log*) para garantir propriedades estatísticas adequadas. Esses retornos logarítmicos foram então utilizados para gerar duas matrizes fundamentais: a de retornos médios e a de covariância entre os ativos, que são a base para a otimização do portfólio.

```
▶ retornos = precos_finais.pct_change().apply(lambda x: np.log(1+x)).dropna()
mediaRetornos = retornos.mean()
covarianciaRetornos = retornos.cov()
```

Figura 6 - Cálculo de retornos e covariância

Com os dados preparados, realizou-se uma ampla simulação de 100.000 carteiras com composições aleatórias de ativos. Essa abordagem permite explorar diversas

combinações possíveis no universo de investimentos analisado.

```
[ ] carteiras = 100000
    tabela_retornos = np.zeros(carteiras)
    tabelas_volatilidades = np.zeros(carteiras)
    tabela_sharpe = np.zeros(carteiras)
    tabela_pesos = np.zeros((carteiras, len(ativos)))
```

Figura 7 - Criação das tabelas

O processo inicia com a geração aleatória de pesos para cada ativo, garantindo que a soma total seja igual a 1 (100% do capital). Esses pesos são então aplicados às fórmulas para definição do retorno médio, volatilidade e Índice Sharpe. Esta simulação extensiva serve como base para identificar padrões e relações entre risco e retorno no conjunto de ativos estudado.

```
for k in range (carteiras):
    pesos = np.random.random(len(ativos))
    pesos = pesos/np.sum(pesos)
    tabela_pesos[k, :] = pesos

    tabela_retornos[k] = np.sum(mediaRetornos * pesos * 252)
    tabelas_volatilidades[k] = np.sqrt(np.dot(pesos.T, np.dot(covarianciaRetornos*252, pesos)))

    tabela_sharpe[k] = tabela_retornos[k]/tabelas_volatilidades[k]
```

Figura 8 - Simulação de Monte Carlo

Por fim, são selecionados os pesos com o portfólio de maior índice Sharpe. Dessa forma foram encontrados o quanto cada ativo será alocado na carteira.

```
indice_sharpe_max = tabela_sharpe.argmax()
tabela_pesos[indice_sharpe_max]
```

Figura 9 - Definição de pesos

Com os pesos das carteiras já definidos e os retornos logarítmicos convertidos em retornos aritméticos utilizando a função exponencial do NumPy, o modelo está devidamente preparado para a etapa de otimização. A construção da fronteira eficiente inicia-se com a definição dos retornos-alvo, que servem como referência para a otimização buscar as combinações com menor volatilidade possível. Em seguida, implementa-se uma função para assegurar que a soma dos pesos das ações seja igual a 1, garantindo que a alocação respeite a restrição orçamentária. Paralelamente, outra função é utilizada para calcular a volatilidade anualizada dos portfólios com base na matriz de covariância previamente estimada. Essas funções auxiliares são essenciais para que a

otimização ocorra sem inconsistências, permitindo que o modelo identifique as combinações ótimas de ativos que formarão a fronteira eficiente. Com essa estrutura finalizada, o próximo passo consiste em executar o algoritmo de otimização propriamente dito, que irá determinar as proporções ideais de cada ativo para diferentes níveis de retorno e risco.

```
eixo_y = np.linspace(retornos_aritmeticos.min(),
                    retornos_aritmeticos.max(), 50)

def pegandoRetorno(peso_teste):
    peso_teste = np.array(peso_teste)
    retorno = np.sum(mediaRetornos * peso_teste) * 252
    retorno = np.exp(retorno) - 1
    return retorno

def checando_soma_pesos(peso_teste):

    return np.sum(peso_teste) - 1

def pegandoVolume(peso_teste):
    peso_teste = np.array(peso_teste)
    volatilidade = np.sqrt(np.dot(peso_teste.T, np.dot(covarianciaRetornos*252, peso_teste)))
```

Figura 10 - Funções auxiliares

De posse de todos os dados necessários a otimização pode ser realizada, através de um loop for onde cada retorno-alvo no eixo y vai de encontro com o portfólio com a menor volatilidade possível. E a saída é o armazenamento das volatilidades no eixo x, tendo assim um ponto gráfico onde y é o retorno esperado daquele portfólio e x a sua volatilidade. Para o cálculo é utilizado a função minimize do numpy, utilizando o método SLSQP (*Sequential Least Squares Quadratic Programming*), que é um algoritmo de otimização numérica usado para resolver problemas com restrições não lineares, tanto de igualdade quanto de desigualdade. Esse algoritmo primeiramente aproxima a função objetivo e as restrições por modelos quadráticos/lineares em torno do ponto atual e resolve o problema de programação quadrática (QP) para encontrar uma direção de busca na direção encontrada, através de busca linear, garantindo redução na função objetivo e viabilidade das restrições.

```

eixo_x_frenteira_eficiente = []

for retornoPossivel in eixo_y:

    restricoes = ({'type': 'eq', 'fun': checando_soma_pesos},
                  {'type': 'eq', 'fun': lambda w: pegandoRetorno(w) - retornoPossivel})

    resultado = minimize(pegandoVolume,
                          peso_inicial,
                          method='SLSQP',
                          bounds=limites,
                          constraints=restricoes)

    eixo_x_frenteira_eficiente.append(resultado['fun'])

```

Figura 11 – Otimização

Após os passos anteriores o modelo já está de posse das carteiras simuladas e da única carteira eficiente definida, para melhor visualização, as carteiras foram plotadas em um gráfico utilizando a biblioteca python chamada de plotly. A biblioteca é específica para desenho de grafos e possui uma alta versatilidade de diagramação e personalização, abaixo pode-se ver o código que montou a ilustração gráfica.

```

template = 'plotly_white'
colorscale = 'Blues'

fig = go.Figure()

fig.add_trace(go.Scatter(
    x=tabelas_volatilidades,
    y=retornos_aritmeticos,
    mode='markers',
    marker=dict(
        size=8,
        color=tabela_sharpe,
        colorscale=colorscale,
        colorbar=dict(
            title='Índice de Sharpe',
            titleside='right',
            thickness=20,
            len=0.75,
            outlinewidth=1
        ),
        showscale=True,
        opacity=0.8
    ),
    name='Portfólios Simulados',
    hovertemplate='<b>Volatilidade:</b> %(x:.2f)<br><b>Retorno:</b> %(y:.2f)<br><b>Sharpe:</b> %(marker.color:.4f)<extra></extra>'
))

fig.add_trace(go.Scatter(
    x=[tabelas_volatilidades[indice_sharpe_max]],
    y=[retornos_aritmeticos[indice_sharpe_max]],
    mode='markers',
    marker=dict(
        color='red',
        size=15,
        symbol='star',
        line=dict(color='black', width=2)
    ),
    name='Portfólio Ótimo (Máx. Sharpe)',
    hovertemplate='<b>Portfólio Ótimo</b><br><b>Volatilidade:</b> %(x:.2f)<br><b>Retorno:</b> %(y:.2f)<br><b>Sharpe:</b> ' + f'{tabela_sharpe[indice_sharpe_max]:.4f}<extra></extra>'
))

```

Figura 12 - Estruturação do gráfico

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção do trabalho serão discutidos os resultados encontrados na pré seleção dos ativos através do DEA e também da otimização de Markowitz das empresas escolhidas.

Dos 84 ativos que foram combinados para a filtragem inicial retornou-se 19

DMUs. Em primeira visão 9 DMUs foram atribuídas o target score 1, mas a título de diversificação foram incluídas todas as DMUs com score acima de 90%

Quadro 1 - DMUs selecionadas

Tabela seleção de ativos DEA

DMU	SCORE	LPA	PL	ROE	BETA
DMU 1	1	-0,11856	-	-0,61112	1,00556
DMU 2	1	-5,56910	-	-21,91221	0,33347
DMU 3	1	12,31447	3,21410	39,73742	1,15916
DMU 4	1	3,07337	6,10405	98,98224	0,80653
DMU 5	1	1,63901	6,88016	24,40974	0,34685
DMU 6	1	5,24476	7,27773	37,98227	0,54287
DMU 7	1	14,01525	7,29277	25,94115	0,86352
DMU 8	1	4,44810	9,09827	89,76766	0,69889
DMU 9	1	0,85910	15,46961	112,18809	0,97087
DMU 10	0,949112	1,06177	5,85814	29,80222	0,44639
DMU 11	0,947911	4,12243	9,96256	18,82346	0,52038
DMU 12	0,9478896	-0,09482	-	-2,57305	1,29541
DMU 13	0,92881	4,73650	8,07347	26,32507	0,60980
DMU 14	0,920718	5,30961	4,18298	17,74532	0,66253
DMU 15	0,920669	0,91736	14,90139	14,63597	0,41473
DMU 16	0,915885	0,30146	12,50595	27,52633	0,44135
DMU 17	0,915628	7,38149	7,71253	15,27866	0,71626
DMU 18	0,909425	9,84496	5,30221	16,35669	1,01510
DMU 19	0,902217	6,17749	4,58924	19,4385	0,74277

A análise se mostrou satisfatória na pré filtragem e estabeleceu um beta médio ao portfólio de 0,7154, bem abaixo que o risco basal de 1 do Ibovespa. Os dados retornados não continham outliers que poderiam vir a comprometer a otimização e portanto atribuiu-se as 19 DMUs encontradas para o processo de otimização de Markowitz.

Após a otimização com os ativos escolhidos pelo DEA, foi obtida a carteira ótima, com retorno esperado de 19,98%, volatilidade de 17,93% e índice Sharpe de 1,016. Esses valores indicam que a carteira projeta um ganho elevado ao longo do período Analisado, com um nível de risco relativamente controlado. Além disso o índice Sharpe acima de 1 sugere que a relação entre risco e retorno é bastante favorável, indicando que a carteira compensa bem o risco assumido. Os resultados estão ilustrados no gráfico de dispersão a seguir.

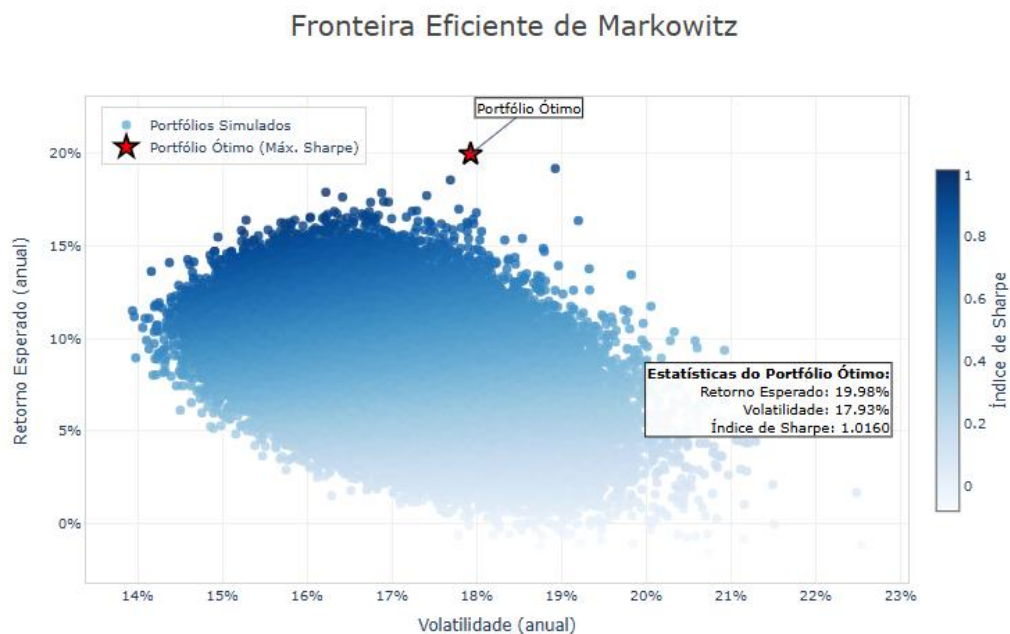


Figura 13 - Gráfico Carteiras

5. CONCLUSÃO

Este trabalho tem como objetivo propor uma estratégia integrada para a construção de portfólios de investimentos, combinando a Análise Envoltória de Dados (DEA) e a Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz. Para isso foram realizadas duas etapas, a pré-filtragem dos ativos do Índice Ibovespa utilizando-se do DEA, para identificação dos ativos eficientes, seguida de sua otimização através do modelo de Markowitz e definição da carteira com melhor Índice Sharpe.

O trabalho contou com uma base teórica, principalmente em relação aos clássicos da teoria moderna de portfólio, essa base forneceu o cerne possível para o entendimento dos conceitos fundamentais do universo das finanças quantitativas bem como os modelos de eficiência em análise envoltória de dados, propostos pelos patriarcas do modelo. A combinação mostrou-se ágil para a pré filtragem dos ativos e sua simulação no modelo, os resultados incluíram a seleção do portfólio que trazia o melhor retorno em comparação com o risco envolvido, e no caso de análise foi o portfólio com o melhor retorno possível.

Com a inclusão de novos indicadores financeiros poderá se demonstrar a pré filtragem ainda mais eficiente pois o universo de indicadores financeiros foi nichado aos baseados em um crescimento eficiente e sustentável das empresas escolhidas. Com futuros estudos incluindo correlações entre indicadores o DEA pode se mostrar um aliado para avaliar os dados na pré seleção de ativos.

Quanto a aplicação no modelo de Markowitz o modelo se mostrou bastante preciso em retornar os portfólios, e a inclusão de novos modelos pode auxiliar ainda mais a otimização. Sugere-se estudos que busquem utilizar redes neurais e aprendizagem de máquina para entender os padrões de risco associado aos ativos financeiros correlacionados nos indicadores selecionados e verificar se é possível desenvolver uma estratégia que reduza ainda mais os riscos na seleção de um portfólio eficiente.

REFERÊNCIAS

- AMIN, Gholam R.; HAJJAMI, Mohaddeseh.** Improving DEA cross-efficiency optimization in portfolio selection. *Expert Systems with Applications*, v. 168, 2021, 114280.
- ANDRINO, Daniel D.; LEAL, Ricardo P. C.** Equally weighted strategic allocation and balanced funds in Brazil. *Latin American Business Review*, v. 19, n. 1, p. 23–53, 2018. DOI: 10.1080/10978526.2018.1450150.
- ASSAF NETO, Alexandre.** *Mercado financeiro*. 16. ed. São Paulo: Atlas, 2025.
- AZEVEDO, R. C.; ENSSLIN, L.** *Metodologia da pesquisa para engenharias*. 1. ed. Belo Horizonte: PPGEC/CEFET-MG, 2020. 196 p.
- B3.** *Metodologia do Índice Ibovespa*. São Paulo: B3, 2023.
- BANKER, R. D.; CHARNES, A.; COOPER, W. W.** Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, v. 30, n. 9, p. 1078–1092, 1984.
- BEKAERT, Geert; HARVEY, Campbell R.** Emerging equity market volatility. *Journal of Financial Economics*, [S.l.], v. 43, n. 1, p. 29–77, 1997. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0304-405X\(96\)00889-6](https://doi.org/10.1016/S0304-405X(96)00889-6). Acesso em: 28 abr. 2025.
- BISHOP, C. M.** *Pattern recognition and machine learning*. New York: Springer, 2006.
- BUFFETT, W.** *The Superinvestors of Graham-and-Doddsville*. New York: Columbia Business School, 1984.
- CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E.** Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, v. 2, n. 6, p. 429–444, 1978.
- CHEN, Hsin-Hung.** Stock selection using data envelopment analysis. *Industrial Management & Data Systems*, v. 108, n. 9, p. 1255–1268, 2008.
- COOPER, W. W.; SEIFORD, L. M.; TONE, K.** *Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software*. 2nd ed. New York: Springer, 2007.
- DAMODARAN, A.** *Investment valuation: tools and techniques for determining the value of any asset*. 3rd ed. New York: Wiley, 2012.
- DEMCHENKO, Y.; GROSSO, P.; DE LAAT, C.; MEMBREY, P.** Addressing Big Data issues in scientific data infrastructure. In: *International Conference on Collaboration Technologies and Systems (CTS)*, 2013. Anais [...]. [S.l.]: IEEE, 2013.
- FABOZZI, Frank J.; FRANCIS, Jack Clark.** Beta as a random coefficient. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 13, n. 1, p. 101–116, mar. 1978. Publicado por: Cambridge University Press.
- FABOZZI, F. J.; MARKOWITZ, H. M. (Ed.).** *The theory and practice of investment management*. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- FÄRE, R.; GROSSKOPF, S.; LOVELL, C. A. K.** *Production frontiers*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- FISHER, P.** *Common stocks and uncommon profits*. New York: Harper & Brothers, 1958.
- FU, Yumei; GUO, Chun.** Booster or trapper? Corporate digital transformation and capital allocation efficiency. *Research in International Business and Finance*, v. 73, p. 102650, 2024.
- GIL, A. C.** *Como elaborar projetos de pesquisa*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2019.
- GRAHAM, B.; DODD, D.** *Security analysis*. New York: McGraw-Hill, 1934.
- LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A.** *Metodologia científica*. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2017.
- LIM, S.; OH, K. W.; ZHU, J.** Use of DEA cross-efficiency evaluation in portfolio selection: an application to Korean stock market. *European Journal of Operational Research*, v. 236, n. 1, 2014.
- MARKOWITZ, H.** Portfolio selection. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- MICHAUD, R. O.** The Markowitz optimization enigma. *Financial Analysts Journal*, v. 45, n. 1, p. 31–42, 1989.

SHARPE, W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, v. 19, n. 3, p. 425- 442, 1964.

ZHEN, Kehan; XIE, Dan; HU, Xiaochun. A multi-feature selection fused with investor sentiment for stock price prediction. *Expert Systems with Applications*, v. 278, 2025.