Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

ANÁLISE ESTÁTICA DE ESTRUTURAS DE BARRAS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Raquel Priscila Ibiapino

João Pessoa
Julho de 2022

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

ANÁLISE ESTÁTICA DE ESTRUTURAS DE BARRAS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Raquel Priscila Ibiapino

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientadores: DSc. Antônio J. Boness Santos
DSc.Ana Paula Pintado Wyse

João Pessoa
Julho de 2022

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

I12a Ibiapino, Raquel Priscila.
Análise estática de estruturas de barras usando o método dos elementos finitos / Raquel Priscila Ibiapino. - João Pessoa, 2022.
53 f. : il.

Orientação: Antônio J Boness Santos.
Coorientação: Ana Paula Pintado Wyse.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI.

1. Estruturas flexíveis. 2. Elementos finitos. 3. Timoshenko. I. Santos, Antônio J Boness. II. Wyse, Ana Paula Pintado. III. Título.

UFPB/BC CDU 624.01(043)

Elaborado por RUSTON SAMMEVILLE ALEXANDRE MARQUES DA SILVA - CRB-15/0386

Ata da Sessão Pública de Defesa de Dissertação de Mestrado de RAQUEL PRISCILA IBIAPINO, candidata ao título de Mestre em Matemática Computacional, na Área de Modelagem Matemática e Computacional, realizada no dia 30 de julho de 2022.

Aos trinta dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e dois, às 8h, via videoconferência, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para julgar o Trabalho Final da discente **RAQUEL PRISCILA IBIAPINO**, vinculada a Universidade Federal da Paraíba sob a matrícula nº 20201001556, candidata ao grau de Mestre em "*Modelagem Matemática e Computacional*", na linha de pesquisa "*Modelagem e Simulação de Sistemas*", do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional. A comissão examinadora foi composta pelos professores Antônio José Boness dos Santos, Orientador e Presidente da Banca; Ana Paula Pintado Wyse, Examinadora Interna ao Programa; Juarez dos Santos Azevedo, Examinador Externo à Instituição; e Luiz Carlos Radtke, Examinador Externo à Instituição. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca cumprimentou os presentes, comunicou a eles a finalidade da reunião e passou a palavra à candidata para que fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado ***"Análise estática de estruturas de barras usando o método dos elementos finitos"***. Concluída a exposição, a candidata foi arguida pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: "***aprovada***". Do ocorrido, eu, Gean Paulo P. M. de Barros, secretário do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC), lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 30 de julho de 2022.

Gean Paulo Pereira Maurício de Barros
Secretário do PPGMMC
SIAPE 2326476

Prof. Dr. Antônio José Boness dos Santos
Orientador (PPGMMC)

Antonio Boness

Profª. Drª. Ana Paula Pintado Wyse
Examinadora Interna ao Programa (PPGMMC)

Ana Paula Wyse

Prof. Dr. Juarez dos Santos Azevedo
Examinador Externo à Instituição (UFBA)

Juarez dos Santos Azevedo

Prof. Dr. Luiz Carlos Radtke
Examinador Externo à Instituição (UFRN)

Dedico este trabalho a Deus e aos meus avôs Adalberto e Sebastião (in memoriam), maiores exemplos de seres humanos íntegros e éticos."

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por me presentear com capacidade física e mental para desenvolver esta dissertação.

Agradeço a minha mãe Mírian, a minha inspiração, a pessoa que é o alicerce de minha vida por tudo que faz por mim e também agradeço ao meu amor (Maelby) pelo apoio e incentivo e por está sempre me impulsionando a vencer os desafios.

Também agradeço imensamente aos professores que participaram do meu percurso de formação, pela dedicação, empenho e disponibilidade em me atender, em especial, ao meu orientador, Antônio Boness.

Agradeço aos participantes da banca de defesa pela disponibilidade e contribuições a pesquisa.

Também minha Eterna gratidão a todos os amigos e amigas pelo incentivo e pela crença na minha capacidade de superar todos os desafios que a vida me apresenta.

Agradeço, em especial, ao meu amigo Anderson Kerlly, pois grandes foram os desafios e dificuldades que enfrentamos, mas conseguimos vencê-los.

Por fim, acreditem, "A matemática é um instrumento poderoso nas mãos daqueles que a sabem usar".

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE ESTÁTICA DE ESTRUTURAS DE BARRAS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Raquel Priscila Ibiapino

Julho/2022

Orientadores: DSc. Antônio J. Boness Santos
DSc.Ana Paula Pintado Wyse

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

O desenvolvimento tecnológico das vigas e arcos, estruturas convencionalmente utilizadas em construções de pontes, templos e edifícios, ampliaram as suas aplicações. Atualmente são empregadas em estudos de dutos enterrados, cabos oceânicos e até mesmo em pesquisas sobre os vasos sanguíneos, cabos umbilicais de trajes espaciais, dentre outros. Neste trabalho, apresentamos um modelo matemático para estruturas flexíveis no espaço tridimensional baseado na teoria de vigas de Timoshenko, introduzindo alguns resultados da geometria diferencial de curvas no espaço. O problema é formulado variacionalmente na forma cinemática e mista e aproximado utilizando o Métodos dos Elementos Finitos. Experimentos numéricos para vigas e hélices são apresentados para demonstrar o comportamento da formulação proposta. As soluções numéricas e analíticas dos campos dos deslocamentos e esforços generalizados são comparados e apresentados graficamente, bem como suas taxas de convergência nas normas L_2 e H_1. Estes experimentos demonstram que a formulação é livre de trancamentos numéricos (*"locking"*).

Palavras-chave: Timoshenko. Estruturas Flexíveis. Elementos Finitos.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

STATIC ANALYSIS OF BAR STRUCTURES USING THE FINITE ELEMENT METHOD

Raquel Priscila Ibiapino

July/2022

Advisors: DSc. Antônio J. Boness Santos
DSc.Ana Paula Pintado Wyse

Program: Computational Mathematical Modelling

The technological development of beams and arches, structures conventionally used in the construction of bridges, temples, and buildings, has broadened their applications. They are now employed in studies of buried pipelines, ocean cables, and even in research on blood vessels, umbilical cables for space suits, among others. In this work, we present a mathematical model for flexible structures in three-dimensional space based on the Timoshenko beam theory, incorporating some results from the differential geometry of spatial curves. The problem is formulated variationally in kinematic and mixed forms and approximated using Finite Element Method. Numerical experiments for beams and helices are presented to demonstrate the behavior of the proposed formulation. The numerical and analytical solutions of the displacement and generalized force fields are compared and graphically presented, along with their convergence rates in the L_2 and H_1 norms. These experiments show that the formulation is free from numerical locking.

Keywords: Timoshenko. Flexible Structures. Finite Elements.

Sumário

Lista de Figuras **x**

Lista de Símbolos **xii**

1 Introdução **1**

2 Teoria de Vigas **5**

2.1 Teoria de Viga de Euler 5

2.2 Teoria de Viga de Timoshenko 9

3 Modelo de Timoshenko para estruturas flexíveis de geometria arbitrária no espaço **15**

3.1 Equações diferenciais modeladoras 15

3.2 Formulação Variacional Cinemática e Mista 20

3.2.1 Formulação Variacional Cinemática 21

3.2.2 Formulação variacional Mista 22

3.3 Métodos de Elementos Finitos 23

4 Resultados e Discussões **26**

4.1 Experimento 1 26

4.2 Experimento 2 28

5 Considerações finais **33**

Referências Bibliográficas **35**

A Alguns resultados **37**

A.1 Lemas 37

A.2 Equações que representam o modelo em função de suas componentes . . . 37

Lista de Figuras

2.1 (a) Representação de uma Viga prismática, bi-engastada e submetida a cargas distribuídas e axial. (b) Seção transversal da viga de largura e altura b e h, respectivamente. 6

2.2 Representação da configuração deformada da viga, inicialmente coincidente com o eixo e_1, em um ponto x da posição inicial. 6

2.3 (a) Representação de uma Viga prismática bi-engastada, com destaque para a seção transversal cuja deformação está sendo analisada. (b) Representação da deformação da viga, devido ao efeito do cisalhamento associado à flexão. 10

2.4 Deformação por cisalhamento em uma viga. 11

3.1 (a) Modelo geométrico para estruturas flexíveis no espaço.(b) Representação de um corte na barra em uma posição s. 16

4.1 Solução numérica e analítica do campo de deslocamentos w_3 (direção normal) da viga reta, engastada e livre, e com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 4 elementos, (b) 8 elementos. 27

4.2 Solução numérica e analítica do campo de rotações ϕ_2 (em relação ao eixo binormal) da viga reta, engastada e livre, e com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 4 elementos, (b) 8 elementos. 27

4.3 Solução numérica e analítica do campo de esforços cisalhantes τ_3 (direção normal) da viga reta, engastada e livre, e com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 4 elementos, (b) 8 elementos. 27

4.4 Gráficos de convergência das componentes w_3 e ϕ_2 nas normas L_2 e H_1 de uma viga reta, engastada e livre e com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Foram utilizadas malhas com 4, 8, 16, 32, 64, 128 e 256 elementos. 28

4.5 Solução numérica e analítica do campo de deslocamentos w_1 (direção tangencial) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos. 29
4.6 Solução numérica e analítica do campo de deslocamentos w_2 (direção binormal) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos. 29
4.7 Solução numérica e analítica do campo de deslocamentos w_3 (direção normal) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos. 29
4.8 Solução numérica e analítica do campo de rotações ϕ_1 (em relação ao eixo tangencial) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos. 30
4.9 Solução numérica e analítica do campo de rotações ϕ_2 (em relação ao eixo binormal) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos. 30
4.10 Solução numérica e analítica do campo de rotações ϕ_3 (em relação ao eixo normal) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos. 30
4.11 Solução numérica e analítica do campo de esforços cisalhantes τ_1 (direção tangencial) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos. 31
4.12 Solução numérica e analítica do campo de esforços cisalhantes τ_2 (direção binormal) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos. 31
4.13 Gráficos de convergência das componentes w_1, w_2 e w_3 nas normas L_2 e H_1 de uma hélice, engastada e livre, e com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Foram utilizadas malhas com 8, 16, 32, 64, 128, 256 e 512 elementos. 32
4.14 Gráficos de convergência das componentes ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 nas normas L_2 e H_1 de uma hélice, engastada e livre, e com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Foram utilizadas malhas com 8, 16, 32, 64, 128, 256 e 512 elementos. . . . 32

Lista de Símbolos

I	Intervalo $[0, L]$, p. 6
L	Comprimento da barra, p. 6
b	Largura da barra, p. 6
h	Altura da barra, p. 6
ϖ	Parâmetro de esbeltez, p. 6
e_i	Base ortonormal associada ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, com i = 1, 2, 3., p. 6
$\boldsymbol{u}$	Vetor dos deslocamentos com suas componentes u_1, u_2 e u_3 em relação aos eixos e_1, e_2 e e_3, respectivamente, p. 8
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Deformações associadas aos efeitos cisalhantes e axial, p. 8
E	Módulo de Elasticidade ou de Young, p. 8
A	Área da seção transversal, p. 9
I_1, I_2	Momentos de inércia, p. 9
U	Energia de deformação, p. 9
$\boldsymbol{\theta}$	Vetor das rotações com suas componentes θ_1, θ_2 e θ_3 em relação aos eixos e_1, e_2 e e_3, respectivamente, p. 11
G	Módulo de cisalhamento, p. 13
J	Momento polar de inércia, p. 13
k	Coeficiente de correção de cisalhamento, p. 13
W_i	Trabalho interno, p. 14
W_e	Trabalho externo, p. 14

μ Curva regular, p. 16

s Comprimento de arco, p. 16

$\mathbf{n}$ Vetor normal, p. 16

$\mathbf{b}$ Vetor binormal, p. 16

$\mathbf{t}$ Vetor tangencial, p. 16

κ Função geométrica curvatura, p. 16

ρ Função geométrica torção, p. 17

$\boldsymbol{m}$ Vetor de momento fletor com suas componentes m_1, m_2 e m_3 em relação aos eixos e_1, e_2 e e_3, respectivamente, p. 17

$\mathbf{n}$ Vetor de esforços cisalhantes com suas componentes n_1, n_2 e n_3 em relação aos eixos e_1, e_2 e e_3, respectivamente, p. 17

$\boldsymbol{f}$ Vetor de forças com suas componentes f_1, f_2 e f_3 em relação aos eixos e_1, e_2 e e_3, respectivamente, p. 17

$\mathbf{0}$ Vetor nulo, p. 18

k_1, k_2 Coeficientes de correção de cisalhamento nas direções binormal e tangencial, p. 19

$\boldsymbol{\lambda}$ Deformações associadas aos efeitos de flexão e torção, p. 19

Γ Intervalo aberto $(0, 1)$, p. 20

$\boldsymbol{w}$ Função vetorial cujas componentes w_1, w_2 e w_3 representam os deslocamentos em relação aos eixos tangencial, normal e binormal, p. 20

$\boldsymbol{\phi}$ Função vetorial cujas componentes ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 representam as rotações em relação aos eixos tangencial, normal e binormal, p. 20

$\boldsymbol{\sigma}$ Função vetorial cujas componentes σ_1, σ_2 e σ_3 representam os esforços de flexão e torção da barra, p. 20

$\boldsymbol{\tau}$ Função vetorial cujas componentes τ_1, τ_2 e τ_3 representam os esforços cisalhantes e normais, p. 20

$\boldsymbol{q}$ Função vetorial cujas componentes q_1, q_2 e q_3 representam as forças tangencial, normal e binormal., p. 20

$L^2(\Gamma)$	Espaço de funções quadrado integráveis, p. 21
$H(\Gamma)$	Espaço de Hilbert, p. 21
$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi})$	Funções arbitrárias, p. 22
Γ_e	Domínio de cada elemento da partição de elementos finitos, p. 25

Capítulo 1

Introdução

Com o avanço tecnológico as vigas e arcos, os quais são estruturas tradicionalmente empregadas em construções de pontes, templos e edifícios, tiveram suas aplicações diversificadas. Hoje em dia podemos encontrar aplicações em estudos de dutos enterrados, cabos oceânicos, muito utilizados na indústria petrolífera e até mesmo nas pesquisas sobre a circulação do sangue em veias e artérias, umbilicais de trajes espaciais, dentre outros. A característica principal destas estruturas é possuírem uma de suas dimensões muito maior que as outras duas.

Segundo Timoshenko (1953) a teoria de vigas foi desenvolvida ao longo de quase 400 anos, com a primeira teoria sobre a resistência de vigas à flexão publicada por Galileu Galilei em 1933, mas apenas em 1967 com o trabalho de Leonardo da Vinci foi possível identificar de forma correta a distribuição de tensões e deformações em uma seção de viga submetida à flexão. Em 1686, na França, Mariotte melhorou à teoria de flexão de vigas estendendo o entendimento de Galileu sobre como as vigas resistem a cargas transversais e usando experimentos para verificação de suas hipóteses. Já em 1750, Euler escreveu as equações que descrevem a deformação em vigas sob ação de cargas axiais e de flexão, porém só começaram a ser amplamente utilizadas após o século XIX, quando o uso de ferro e aço se tornou mais comum e o surgimento do concreto armado favoreceu o desenvolvimento de sistemas construtivos cada vez mais resistentes, permitindo a execução de grandes estruturas esbeltas, como por exemplo, pontes e edifícios.

Para caracterização dessas estruturas flexíveis, a teoria de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko são as mais clássicas. O modelo de Euler-Bernoulli foi desenvolvido em meados do século XVIII, o qual admite um campo de deslocamento e tensões, baseado nas hipóteses de que uma seção plana e normal à superfície neutra, permanecerá plana e normal após a deformação, desprezando assim os efeitos cisalhantes na estrutura.

Já o modelo de viga de Timoshenko foi desenvolvido em 1921 e refinado em 1922, este admite um campo de deslocamentos e um campo de tensões, os quais se baseiam nas hipóteses de que as seções planas antes da deformação, permanecem planas após a deformação, porém às seções ortogonais ao eixo da viga não permanecem ortogonais após

a deformação. Quando consideramos os efeitos cisalhantes na estrutura, as deformações e tensões são variáveis ao longo da seção transversal, sendo necessário para as tensões de cisalhamento introduzir um fator de correção, visando compensar a variação mencionada, visto que conforme a razão entre a base e a altura da seção variam, ocorrem discrepâncias nos valores obtidos para as formulações.

Do ponto de vista físico, este modelo caracteriza de forma mais legítima o comportamento de uma estrutura real, pois para uma estrutura com altura significativa, curta e submetida simultaneamente à flexão e cisalhamento as seções não permanecem ortogonais, sendo essa a principal diferença quando comparado com o modelo de Euler (BALAN, 2000).

No espaço tridimensional, a modelagem de estruturas vem crescendo continuamente, pois identifica-se o potencial das aplicações nas áreas das ciências. Na Engenharia Naval, Mecânica e Oceânica, por exemplo, Malta (2016) estuda o comportamento estrutural de dutos flexíveis, bem como o modelo mecânico que descreve as instabilidades das armaduras destes, já Rizzo (2010) presume a resposta mecânica do riser sob tração, compressão e torção, além de estimar a carga crítica de flambagem, realizando uma análise de elementos finitos cujo modelo é uma combinação complexa de elementos de vigas e molas.

Os dutos flexíveis são bastante utilizados na extração e transporte de petróleo bruto, óleo e gás natural. Estas estruturas possuem uma geometria cilíndrica, composta por diversas camadas concêntricas, atuam em ambientes agressivos e sujeitos a diversas solicitações. Isso faz com que a estrutura trabalhe sob os efeitos de tração, compressão, flexão e torção. As ações às quais a estrutura está submetida são um grande problema, pois podem causar falhas por instabilidade radial das armaduras de tração, além de instabilidade lateral (MALTA, 2016). Como afirma Rizzo (2010) quando essas estruturas são submetidas a esforços de compressão, surge um mecanismo de instabilidade, conhecido como "gaiola de passarinho"ou *"birdcaging"*, o qual ocorre quando a compressão axial na linha flexível provoca uma torção no sentido contrário ao assentamento dos arames das armaduras, cujas armaduras se deformam de forma excessiva na sua direção radial.

Já no estudo da relação existente entre as estruturas do corpo humano e os tecidos, objeto de estudo da biomecânica, destacamos os trabalhos de Feijó (2007) e Souza (2010), os quais estudam as artérias humanas, sendo que Feijó (2007) trabalha com um modelo numérico tridimensional que analisa no interior da artéria aorta abdominal humana o escoamento sanguíneo, visando obter uma solução numérica para os campos de velocidade do fluído, pressão e deslocamento da artéria, usando o Método dos Elementos Finitos (MEF) e considerando a condição quase-estática, para modelagem das paredes da aorta a partir da lei de Hooke, enquanto Souza (2010) descreve o comportamento de um segmento arterial quando submetido ao entupimento do fluxo sanguíneo devido ao rompimento de um aneurisma, através de grampos apropriados, sendo que os resultados numéricos analisam o deslocamento real de uma artéria para situações de aneurisma.

Segundo Steffens (2019) a análise de estruturas pelo método dos Elementos Finitos permite identificar a melhor geometria e design do quadro de uma motocicleta, pois permite simular testes do modelo antes de sua fabricação com execução de testes em campo, padronizando o ciclo produtivo, reduzindo os custos do projeto e aumentando a eficiência do mesmo.

Como destaca Silva (2018) a análise do comportamento de um chassi de uma motocicleta por meio de simulação, através de análise estática estrutural e modal, tomando como resultados a deformações e tensões, permite obter as características mecânicas do quadro sem necessidade de ensaios destrutivos, reduzindo assim custos e possibilitando identificar o comportamento do chassi no seu modo de vibrar e a viabilidade de uma estrutura real.

Os trabalhos de Sá (2019) e Antolin (2021), por exemplo, modelam e analisam a estrutura de um chassi, sendo que Sá (2019) estuda um chassi tubular, de estrutura treliçada, de uma motocicleta de competição categoria moto 3 (250cc), calculando os esforços atuantes e realizando simulações estáticas buscando atender as necessidades de uma motocicleta de competição, enquanto Antolin (2021) realiza a análise estrutural e a otimização do projeto de um veículo mini Baja, através de simulações computacionais, buscando entender o comportamento do chassi quando submetido a tensão de flexão.

Para compreender essas geometrias complexas, como por exemplo, os dutos supracitados que, por apresentarem uma grande extensão, acarretariam maiores custos, bem como uma maior disponibilidade de tempo, pois exigem aumento na mão de obra e insumos, dificultando assim a execução de determinados experimentos e a construção do modelo físico; assim sendo, concordamos que o modelo de Timoshenko seja o mais completo.

Para resolver numericamente este tipo de estrutura pelo MEF, a forma clássica e mais simples é aquela que utiliza a formulação primal de Galerkin. Entretanto, é bem conhecido que a solução para este tipo de formulação, quando utilizamos a mesma ordem de interpolação para os campos de deslocamento e rotação, apresentam um *"locking"*, isto é, um trancamento da solução numérica. Neste caso, existem algumas estratégias conhecidas, como por exemplo, utilizar formulações mistas, reduzidas, estabilizadas, descontínuas, entre outras. Assim sendo, alguns autores realizaram estudos visando sanar o problema de *"locking"* na análise de vigas e arcos planos. Arnold (1981) explorou o problema de viga de Timoshenko no plano, sendo o primeiro a demonstrar o porque da integração reduzida funcionar e a desenvolver uma formulação mista, com deslocamentos e rotações no campo primal e esforços cisalhantes, independente do parâmetro de esbeltez, e que fornece aproximações com taxas quase ótimas.

Loula (1987a) analisou o mesmo problema para o caso do arco circular no plano, introduzindo uma formulação variacional seguindo o princípio de Hellinger-Reissner, onde os esforços generalizados (momentos e esforço cortante) são as variáveis independentes e os deslocamentos generalizados (deslocamentos e rotações), enquanto Loula (1987b) introduziu uma formulação mista de Petrov-Galerkin, com construção de aproximações por

elementos finitos, constatando que este tipo de formulação apresenta melhor estabilidade em comparação com a formulação de Galerkin.

Similarmente, Arunakirinathar (1993) resolveu o mesmo problema, estendendo o modelo para o caso tridimensional, trabalhando com a formulação mista, sendo o campo dos deslocamentos interpolado com uma ordem a mais do que o campo dos esforços, enquanto Santos (2007) resolveu o problema descrito no espaço tridimensional usando uma formulação estabilizada fundamentada nos trabalhos de Loula (1987a) e (1987b). Também apresentou uma formulação mista, baseada no princípio de Hellinger-Reissner, demonstrando as condições para existência e unicidade de solução do modelo contínuo, e da forma discreta utilizando um método de elementos finitos estabilizado.

Assim, neste trabalho, apresentamos um modelo matemático para estruturas flexíveis no espaço tridimensional, baseado na teoria de vigas de Timoshenko e uma formulação variacional cinemática e mista para o problema. Uma aproximação pelo Método dos Elementos Finitos foi construída para as formulações e testada através de diversos experimentos numéricos, variando os tipos de geometria, vinculações e carregamentos.

Dessa forma, organizamos o trabalho do seguinte modo: No segundo capítulo expomos a Teoria clássica de Vigas, com apresentação dos modelos que descrevem as equações de equilíbrio e constitutivas dos modelos de vigas de Euler e de Timoshenko. No terceiro capítulo, descrevemos aspectos gerais da geometria diferencial de curvas em três dimensões, com posterior caracterização das equações diferenciais modeladoras de Timoshenko no sistema de Serret-Frenet e construção da formulação cinemática e mista discretizada pelo método de elementos finitos. No quarto capítulo, apresentamos alguns experimentos numéricos visando avaliar o comportamento da formulação mista apresentada e comprovar os resultados obtidos. Por fim, no último capítulo, sintetizamos os resultados obtidos e propomos algumas sugestões de novos trabalhos.

Capítulo 2

Teoria de Vigas

A Teoria de Vigas é uma parte fundamental da mecânica estrutural, que analisa o comportamento de estruturas de barras. Os estudos que envolvem estas estruturas flexíveis permitem à obtenção de sistemas estruturais capazes de suportar cargas transversais aplicadas em seu comprimento. Para caracterizar este tipo de estrutura, a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko são clássicas, sendo que o modelo de viga de Euler-Bernoulli considera apenas os efeitos de flexão, enquanto o modelo de Timoshenko considera também os efeitos de cisalhamento. Então, neste capítulo modelamos as equações de equilíbrio e constitutivas dos dois modelos citados anteriormente.

2.1 Teoria de Viga de Euler

A Teoria de Viga de Euler é um dos modelos estruturais clássicos em mecânica dos sólidos, desenvolvida em meados do século XVIII. Adota um campo de deslocamentos, que permite analisar as deformações sofridas por uma viga quando submetida a uma solicitação, considerando apenas os efeitos de flexão durante o movimento de translação.

Para descrever nosso modelo de viga, vamos considerar um corpo $B \in \mathbb{R}^3$, com domínio $I = [0, L]$, aberto e limitado, onde $\bar{I}$ é o seu fecho e ∂I a fronteira. Assumimos que o corpo seja retilíneo e coincidente com o eixo e_1, apresentando simetria nos planos e_1e_2 e e_1e_3 no sistema de coordenadas cartesianas, largura (b) e altura (h) bem menores do que o seu comprimento (L), como representado na figura 2.1.

Sem perda de generalidade, analisaremos aqui uma viga bi-engastada, submetida as forças distribuídas $f_1(x)$ e $f_3(x)$, nas direções dos eixos e_1 e e_3, respectivamente, com deslocamento da linha de centroides dado por $\boldsymbol{u}(x, y, z) = u_1(x, y, z)e_1 + u_2(x, y, z)e_2 + u_3(x, y, z)e_3$, com $u_1(x, y, z)$, $u_2(x, y, z)$ e $u_3(x, y, z)$ representando os deslocamentos nas direções tangencial, binormal e normal, e x, y e z as coordenadas sobre os eixos e_1, e_2 e e_3, respectivamente.

Além disso, a teoria de viga de Euler admite as seguintes hipóteses:

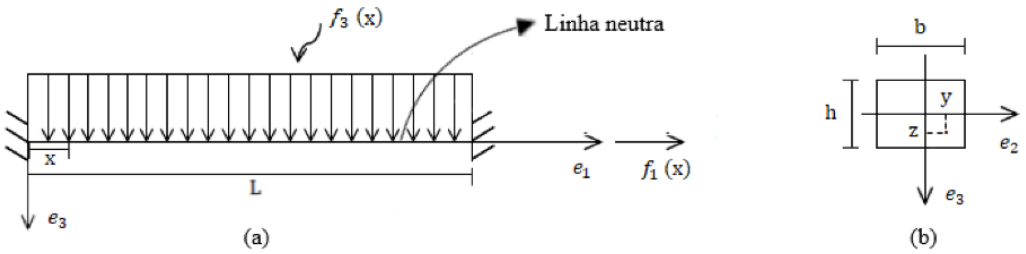

Figura 2.1: (a) Representação de uma Viga prismática, bi-engastada e submetida a cargas distribuídas e axial. (b) Seção transversal da viga de largura e altura b e h, respectivamente.

1. O modelo será limitado ao caso de pequenos deslocamentos e deformações;

2. As seções transversais da viga que estão inicialmente planas antes da deformação, permanecerão planas após a deformação;

3. As seções inicialmente ortogonais à linha de centroide continuarão ortogonais após a deformação.

Admitindo a linha de centroide coincidente com o eixo e_1 na configuração indeformada, após a deformação, observamos que sua nova configuração apresentada encontra-se deslocada em relação a cada posição x da configuração de referência por uma quantidade $u_3(x)$, conforme Figura 2.2.

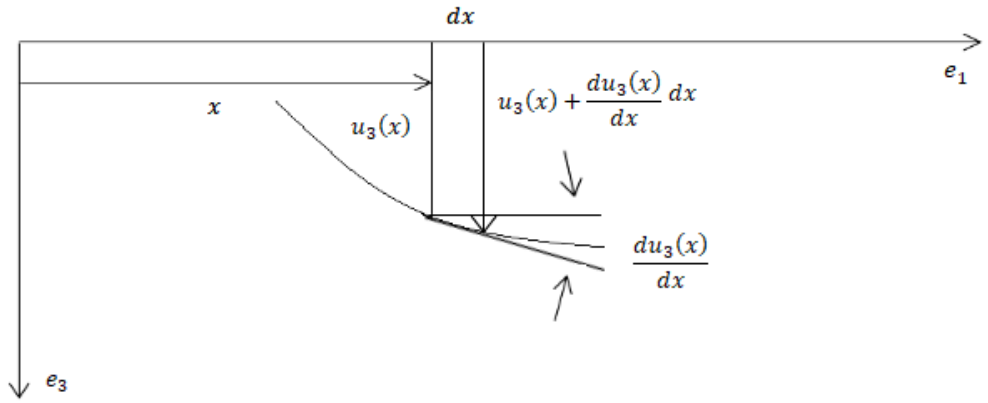

Figura 2.2: Representação da configuração deformada da viga, inicialmente coincidente com o eixo e_1, em um ponto x da posição inicial.

Seja um elemento de linha dx que permanece na coordenada x na configuração indeformada, mas que se desloca na direção e_3 uma quantidade $u_3(x)$ e sofre uma rotação $\dfrac{du_3(x)}{dx}$ no plano e_1e_3. Também consideremos a ação de deslocamento devido a força axial distribuída na direção e_1, denotada por $(u_1)_1(x)$ e baseado no fato de que as seções planas e ortogonais à linha de centroide permanecem planas e ortogonais na configura-

ção deformada, podemos descrever o campo de deslocamento da viga de Euler com suas componentes nas direções tangencial, binormal e normal.

Com isso, o campo de deslocamento da viga de Euler é dado por:

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = \left((u_1)_1(x) - z\left(\frac{du_3(x)}{dx}\right)\right)e_1 + u_3(x)e_3, \tag{2.1}$$

a qual mostra a existência de deslocamentos nas direções e_1 e e_3, enquanto na direção e_2 o deslocamento é nulo.

Denotando a deformação devido a força axial por $\dfrac{d(u_1)_1(x)}{dx}$ e o gradiente do deslocamento, $\nabla\boldsymbol{u}$, dado por

$$\nabla\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - z\frac{d^2u_3(x)}{dx^2} & 0 & -\frac{du_3(x)}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{du_3(x)}{dx} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Como o gradiente do deslocamento $\boldsymbol{u}(x,y,z)$ é simétrico, para o caso de pequenos deslocamentos, escrevemos o tensor deformação $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ como

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \nabla\boldsymbol{u}^{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} \frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - z\frac{d^2u_3(x)}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Em função das hipóteses estabelecidas anteriormente, as componentes da deformação não nulas são as seguintes:

$$\varepsilon_{11} = \frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - z\frac{d^2u_3(x)}{dx^2} \tag{2.4}$$

Considerando que o material é elástico, linear e isotrópico, utilizando a lei de Hooke, podemos associar as componentes da deformação ε_{11} com a tensão σ_{11} através do módulo de elasticidade E, sendo as tensões não nulas expressas em função do deslocamento do seguinte modo:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = E(\frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - z\frac{d^2u_3(x)}{dx^2}), \tag{2.5}$$

onde E é uma constante que designa o módulo de elasticidade longitudinal.

As relações constitutivas que caracterizam a tensão resultante axial $(n_1(x))$, o momento fletor $(m_2(x))$ e o esforço cisalhante $(n_3(x))$, são obtidas integrando a distribuição das tensões normais (σ_{11}), (2.5), ao longo da área da seção transversal, donde segue que:

$$n_1(x) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} b dz = EA \frac{d(u_1)_1(x)}{dx} \tag{2.6}$$

$$m_2(x) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} z b dz = -EI_1 \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2} \tag{2.7}$$

$$n_3(x) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} b dz = \frac{dm_2(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}(EI_1 \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2}), \tag{2.8}$$

onde E, A e I_1 são constantes que representam o módulo de elasticidade, a área da seção transversal e o momento de Inércia, respectivamente.

A Energia de deformação U, pode ser descrita como o trabalho interno realizado por todas as forças atuantes na viga, sendo obtida através do cálculo da energia interna e da análise da energia externa nas extremidades da viga, que atuam no eixo centroide da viga.

A energia interna é dada pelo produto entre a tensão e a deformação associados ao elemento, que pode ser representada da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \int_I \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dI = \frac{1}{2} b \int_0^L \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} \varepsilon_{11} dz dx. \tag{2.9}$$

Já a energia externa, associada as forças $f_1(x)$ e $f_3(x)$ nas extremidades da viga é negativa, pois as forças aplicadas na viga produzem trabalho negativo quando retornam da extremidade final para a inicial, o que pode ser expresso pelo somatório do produto entre as forças aplicadas e o deslocamento do seguinte modo:

$$\begin{aligned} &- f_1(x)[(u_1)_1(L)] - f_1(x)[(u_1)_1(0)] = -f_1(x) \int_I \frac{d(u_1)_1(x)}{dx} \\ &- \int_I f_3(x) u_3(x) dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

Então, a Energia de deformação da viga com comportamento elástico linear, expressa pela diferença entre a energia interna e a externa, é dada por

$$\begin{aligned} &U = \frac{1}{2} \int_I \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} bE[\frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - z\frac{d^2 u_3(x)}{dx^2}]^2 dz dx - f_1(x) \int_I \frac{d(u_1)_1(x)}{dx} dx - \\ &- \int_I f_3(x) u_3(x) dx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Resolvendo a integral acima e introduzindo as propriedades geométricas dependentes da forma da seção transversal, como por exemplo, a área (A) e o momento de inércia (I_1),

as quais para o caso em estudo são escritas como $A = b.h$ e $I_1 = \frac{bh^3}{12}$. Logo, segue que:

$$U = \int_I [\frac{EA}{2}[\frac{d(u_1)_1(x)}{dx}]^2 + \frac{EI_1}{2}[\frac{d^2u_3(x)}{dx^2}]^2 - f_1\frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - f_3(x)u_3(x)]dx, \tag{2.12}$$

onde $\frac{d(u_1)_1(x)}{dx}$ e $\frac{d^2u_3(x)}{dx^2}$ representam, respectivamente, a deformação devido a ação de forças axiais e de flexão, definindo assim um funcional na variável independente x.

Como trabalhamos com uma viga bi-engastada, com momento nulo, as condições de contorno para este caso são:

$$u_1(0) = \frac{du_1(0)}{dx} = 0, \tag{2.13}$$

$$u_3(0) = \frac{du_3(0)}{dx} = 0, \tag{2.14}$$

$$u_1(L) = \frac{du_1(L)}{dx} = 0, \tag{2.15}$$

$$u_3(L) = \frac{du_3(L)}{dx} = 0. \tag{2.16}$$

Assim, para garantir o equilíbrio da estrutura, obedecendo as condições de contorno, como temos um funcional com derivadas de primeira e segunda ordem, aplicamos a equação de Euler-Lagrange, donde segue que:

$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{d(u_1)_1(x)}{dx}\right) - f_1(x) = 0, \tag{2.17}$$

$$-\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_1\frac{d^2u_3(x)}{dx^2}\right) + f_3(x) = 0. \tag{2.18}$$

2.2 Teoria de Viga de Timoshenko

A Teoria de Viga de Timoshenko é um dos modelos estruturais mais importantes na Engenharia Estrutural, desenvolvida em 1921 e refinada em 1922 por Timoshenko, a qual vem generalizar a Teoria de Viga de Euler, pois considera os efeitos de cisalhamento que provocam o empenamento na seção transversal do sistema estrutural.

Do ponto de vista físico, podemos afirmar que o modelo de Timoshenko melhor caracteriza o comportamento das estruturas, principalmente em vigas curtas, pois como admite o efeito de cisalhamento fornece uma aproximação mais precisa do comportamento real das estruturas, o qual é desprezado no modelo de Euler.

A formulação do modelo de Timoshenko admite a existência de duas variáveis independentes, $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\theta}$, as quais representam o deslocamento e a rotação da seção transversal,

respectivamente. De forma análoga ao modelo de Viga de Euler, consideramos pequenos deslocamentos e deformações, além de que as seções do corpo planas antes da deformação, permanecerão planas após a deformação, porém as seções inicialmente ortogonais à linha neutra não continuarão ortogonais após a deformação, surgindo a necessidade de definirmos o vetor de rotação $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, onde os subíndices 1, 2 e 3 representam suas componentes nas direções dos vetores e_1, e_2 e e_3, respectivamente.

Como o modelo de Timoshenko considera o cisalhamento, designamos $\frac{du_3(x)}{dx}$ como a inclinação total da linha de centro (Ver Figura 2.3), decorrente das deformações por cisalhamento (Ver Figura 2.4) e flexão, donde segue que:

$$\frac{du_3(x)}{dx} = \theta_2(x) + \beta_2(x), \tag{2.19}$$

onde $\theta_2(x)$ é a rotação devido apenas o efeito de flexão e $\beta_2(x)$ é a rotação devido ao efeito de cisalhamento.

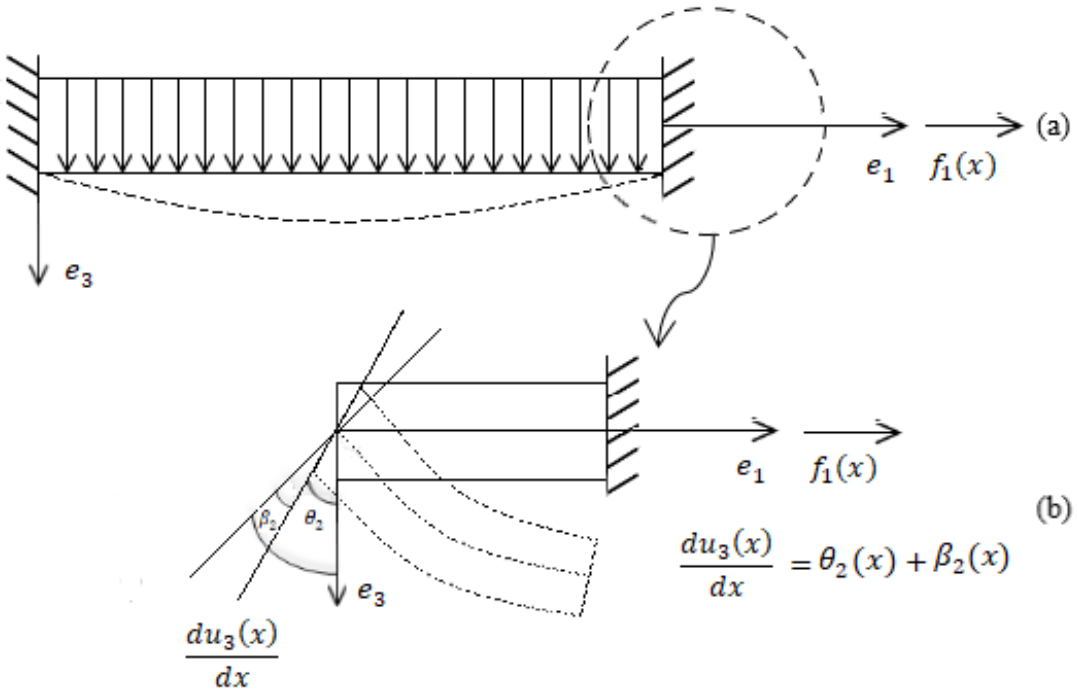

Figura 2.3: (a) Representação de uma Viga prismática bi-engastada, com destaque para a seção transversal cuja deformação está sendo analisada. (b) Representação da deformação da viga, devido ao efeito do cisalhamento associado à flexão.

Assim, o campo de deslocamentos é análogo ao anterior, bastando adicionar o efeito de cisalhamento $\theta_2(x)$ no eixo centroide da seção, sendo expressas as suas componentes

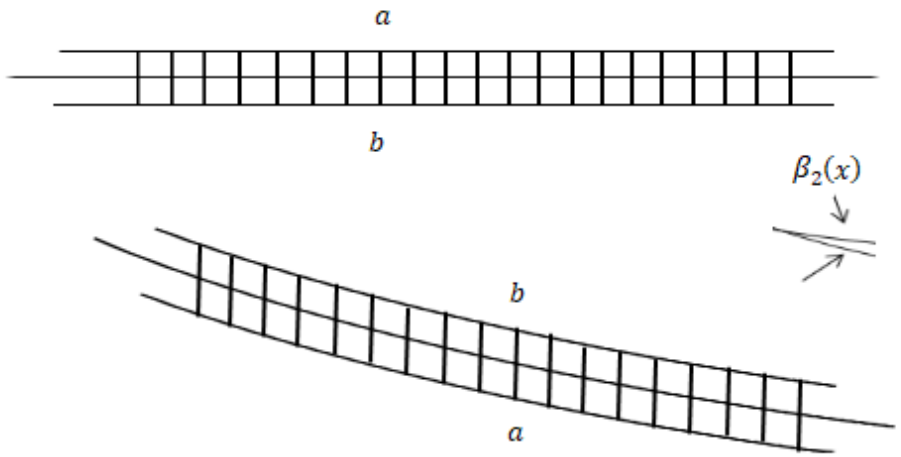

Figura 2.4: Deformação por cisalhamento em uma viga.

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_1(x,y,z) &= (u_1)_1(x) - z\theta_2(x) \\ u_2(x,y,z) &= 0 \\ u_3(x,y,z) &= u_3(x). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Com isso, o campo de deslocamento da viga de Timoshenko é dada por:

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = \left((u_1)_1(x) - z\left(\frac{du_3(x)}{dx} - \beta_2(x)\right)\right)e_1 + u_3(x)e_3, \tag{2.21}$$

a qual mostra a existência de deslocamentos apenas nas direções tangencial e normal.

Já o gradiente do deslocamento, $\nabla \boldsymbol{u}$ é dado por

$$\nabla \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - z\frac{d\theta_2(x)}{dx} & 0 & -\theta_2(x) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{du_3(x)}{dx} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Então, como o gradiente do deslocamento $\boldsymbol{u}$ é simétrico, expressamos o tensor deformação $\varepsilon(x)$ como

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \nabla \boldsymbol{u}^{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} \frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - z\frac{d\theta_2(x)}{dx} & 0 & \frac{1}{2}(-\theta_2(x) + \frac{du_3(x)}{dx}) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(-\theta_2(x) + \frac{du_3(x)}{dx}) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Em conformidade com as hipóteses definidas anteriormente, as componentes da deformação não nulas, considerando o efeito de flexão e cisalhamento são descritas como:

$$\varepsilon_{11} = \frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - z\frac{d\theta_2(x)}{dx}, \tag{2.24}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\beta_2(x) = \frac{1}{2}(\frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x)). \tag{2.25}$$

Os tensores (ε_{11}) e (ε_{13}) expressam a deformação devido a flexão e a rotação devido ao cisalhamento, respectivamente, as quais se relacionam com as tensões (σ_{11}) e (σ_{13}) através do módulo de elasticidade e do coeficiente de cisalhamento. Assim, as tensões não nulas são expressas da seguinte forma

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = E(\frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - z\frac{d\theta_2(x)}{dx}), \tag{2.26}$$

$$\sigma_{13} = kE\varepsilon_{13} = \frac{kE}{2}(\frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x)) = kG(\frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x)), \tag{2.27}$$

onde as constantes $G = \dfrac{E}{2}$ representam o coeficiente de cisalhamento e k o coeficiente de correção.

Por questão de simplicidade, mantivemos a deformação como função apenas da coordenada espacial x e para as tensões de cisalhamento introduzimos um coeficiente de correção k, porque quando consideramos os efeitos cisalhantes na estrutura, as deformações e tensões são variáveis ao longo da seção transversal, sendo necessário compensar essa variação, pois conforme a razão entre a base e altura da seção variam, ocorrem discrepâncias nos valores obtidos para as formulações.

Então, baseado nas relações estabelecidas em (2.26) e (2.27), escrevemos as relações constitutivas que caracterizam o momento fletor (m_2) e o esforço cisalhante (n_3), integrando a distribuição de tensões normais e cisalhantes ao longo da área da seção transversal, donde temos:

$$m_2(x) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} b\sigma_{11}z dz = -E(\frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - \frac{d\theta_2(x)}{dx})\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} bz^2 dz \Rightarrow \tag{2.28}$$

$$\Rightarrow m_2(x) = -EI_1(\frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - \frac{d\theta_2(x)}{dx}), \tag{2.29}$$

$$n_3(x) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} b\sigma_{13} dz = kG\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} b(\frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x))dz \Rightarrow \tag{2.30}$$

$$\Rightarrow n_3(x) = kGA(\frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x)). \tag{2.31}$$

Recorrendo ao princípio dos trabalhos virtuais, o qual estabelece a condição de equilíbrio para um sistema mecânico. Esta condição define a diferença entre os trabalhos

interno e externo como sendo nula, para o caso de forças estaticamente admissíveis e deslocamentos cinematicamente admissíveis.

O trabalho interno (W_i) corresponde a integral do produto entre a tensão e a deformação no domínio I e podemos representá-lo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
W_i &= \int_I \sigma\varepsilon dI = \int_0^L \int_a^b \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11}\varepsilon_{11} + 2\sigma_{13}\varepsilon_{13} dydzdx = \\
&= \int_0^L \int_a^b \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11}(\frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - z\frac{d\theta_2(x)}{dx})dydzdx + \\
&+ \int_0^L \int_a^b \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13}(-\theta_2(x) + \frac{du_3(x)}{dx})dydzdx = \\
&= \int_0^L \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} b\sigma_{11}(\frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - z\frac{d\theta_2(x)}{dx})dzdx + \int_0^L \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} b\sigma_{13}(-\theta_2(x) + \frac{du_3(x)}{dx})dzdx.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Substituindo as relações constitutivas para o momento fletor e esforço cisalhante dadas em (2.29) e (2.31) na expressão do trabalho interno encontrada anteriormente, e integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
W_i &= [-m_2(x)\theta_2(x)]_0^L + \int_I -m_2'(x)\theta_2(x)dx + [n_3(x)u_3(x)]_0^L - \int_I n_3'(x)u_3(x)dx - \\
&- \int_I n_3(x)\theta_2(x)dx + [n_1(x)(u_1)_1(x)]_0^L - \int_I n_1'(x)(u_1)_1(x)dx \\
&= \int_I [(m_2'(x) - n_3(x))\theta_2(x) - n_3'(x)u_3(x) - n_1'(x)(u_1)_1(x)]dx - m_2(L)\theta_2(L) + \\
&+ m_2(0)\theta_2(0) + n_3(L)u_3(L) - n_3(0)u_3(0) + n_1(L)(u_1)_1(L) - n_1(0)(u_1)_1(0).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Escolhemos como sinal positivo dos momentos aqueles que produzem tensões na linha superior da viga e para as forças o sentido positivo do eixo oe_3, Figura (2.1(b)).

O trabalho externo (W_e), corresponde a integral do produto entre as forças externas e o deslocamento no domínio I e, por dualidade, derivando a expressão (2.33), podemos expressá-lo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
W_e &= \int_I [-\bar{m}_2(x)\theta_2(x) + f_3(x)u_3(x) + f_1(x)(u_1)_1(x)]dx + \bar{m}_2(0)\theta_2(0) - \\
&- \bar{m}_2(L)\theta_2(L) - f_3(0)u_3(0) + f_3(L)u_3(L) - f_1(0)(u_1)_1(0) + f_1(L)(u_1)_1(L).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Considerando o fato de que $\theta_2(x)$ e $u_3(x)$ são arbitrários e utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, seguem as equações de equilíbrio, expressas como

$$m_2'(x) - n_3(x) + \bar{m}_2(x) = 0, \tag{2.35}$$
$$n_1'(x) + f_1(x) = 0, \tag{2.36}$$
$$n_3'(x) + f_3(x) = 0. \tag{2.37}$$

Como trabalhamos com uma viga bi-engastada, com momento nulo, pequenas deformações e seções da viga constante, as condições de contorno para este caso são expressas como

$$\begin{aligned} (u_1)_1(0) &= (u_1)_1(L) = 0, && (2.38)\\ u_3(0) &= \theta_2(0) = 0, && (2.39)\\ \theta_2(L) &= u_3(L) = 0. && (2.40) \end{aligned}$$

Logo, o problema estático de Viga de Timoshenko com a aplicação de uma carga uniformemente distribuída pode ser descrito como

Equações de equilíbrio

$$m_2'(x) - n_3(x) + \bar{m}_2(x) = 0, \tag{2.41}$$
$$n_1'(x) + f_1(x) = 0, \tag{2.42}$$
$$n_3'(x) + f_3(x) = 0, \tag{2.43}$$

Relações constitutivas

$$m_2(x) = -EI_1\left(\frac{d(u_1)_1(x)}{dx} - \frac{d\theta_2(x)}{dx}\right), \tag{2.44}$$
$$n_1(x) = EA\frac{d(u_1)_1(x)}{dx}, \tag{2.45}$$
$$n_3(x) = GAk\left(\frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x)\right), \tag{2.46}$$

Condições de contorno

$$\begin{aligned} (u_1)_1(0) &= (u_1)_1(L) = 0, && (2.47)\\ u_3(0) &= \theta_2(0) = 0 && (2.48)\\ \theta_2(L) &= u_3(L) = 0. && (2.49) \end{aligned}$$

Capítulo 3

Modelo de Timoshenko para estruturas flexíveis de geometria arbitrária no espaço

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados da geometria diferencial aplicada a curvas descritas no espaço 3D e descrevemos as equações de equilíbrio e constitutivas do modelo de Timoshenko no sistema de referência de Serret-Frenet. Posteriormente, escrevemos a formulação variacional cinemática e mista do modelo, descrevemos sua forma discreta e introduzimos uma formulação aproximada pelo método de Elementos Finitos misto.

3.1 Equações diferenciais modeladoras

Inicialmente, seja $\boldsymbol{\mu} : I = [0, L] \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$ (Ver Figura 3.1), definimos em cada ponto s da curva os vetores unitários e ortogonais $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$, que representam os vetores tangencial, normal e binormal, respectivamente. O vetor tangente $\mathbf{t}(s)$ é o vetor $(x'(s), y'(s), z'(s)) = \boldsymbol{\mu}'(s)$, onde $x, y, z \in \mathbb{C}^3(I)$ representam as coordenadas do vetor de posição em relação ao comprimento de arco s e $'$ a derivada primeira em relação a s. O comprimento $|\boldsymbol{\mu}''(s)|$ representa a curvatura de $\boldsymbol{\mu}$ em s e é denotado por κ.

O vetor normal $\mathbf{n}(s)$ é definido na direção $\boldsymbol{\mu}''(s)$, formando com o vetor tangente $\mathbf{t}(s)$, um sistema orientado positivamente, chamado plano osculante em s, que satisfaz a equação $\boldsymbol{\mu}''(s) = \kappa\mathbf{n}(s)$, $\kappa \geq 0$. Derivando $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1$, obtemos $\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$, o que implica dizer que $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{t}(s)$ são ortogonais, logo, $\mathbf{n}(s)$ é o vetor normal. O vetor binormal $\mathbf{b}(s)$ é normal ao plano osculante, definido como o produto vetorial entre os vetores $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$, isto é, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$. Verifica-se que $\mathbf{b}'(s)$ é normal a $\mathbf{b}(s)$, ou seja, $\mathbf{b}'(s) = (\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s))' = \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s)$, e, como $\mathbf{b}(s)$ é um vetor unitário, então $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{b}(s)$. Logo, $\mathbf{b}'(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ são paralelos e

$\mathbf{b}'(s) = -\rho\mathbf{n}(s)$, onde ρ representa a torção da curva $\boldsymbol{\mu}$ em s, a qual mede a rapidez com que a curva se afasta do plano osculante.

As derivadas dos vetores tangencial, normal e binormal, $\mathbf{t}'(s) = \kappa\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{n}'(s) = -\kappa\mathbf{t}(s) + \rho\mathbf{b}(s)$, $\mathbf{b}'(s) = -\rho\mathbf{n}(s)$ fornecem informações sobre o comportamento da curva $\boldsymbol{\mu}$ na vizinhança de s e são conhecidas como fórmulas de Serret-Frenet. As funções geométricas $\rho > 0$ e $\kappa > 0$ representam a torção e a curvatura, respectivamente.

Quando os vetores $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ formam uma base orientada positivamente no $\mathbb{R}^3$, então $\rho > 0$. Sejam $\rho, \kappa \in \mathbb{C}[I]$ funções contínuas e limitadas, então: Se κ é uma constante, a curva é um cilindro; Se κ e ρ são constantes, a curva é uma hélice; Se $\rho = 0$ a curva está no plano e $\rho = 0$ e κ constante, então a curva é um arco de círculo.

Em sua configuração indeformada, denotamos por $\boldsymbol{f}(s) = (f_1, f_2, f_3)$, $\boldsymbol{u}(s) = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{\theta}(s) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\boldsymbol{m}(s) = (m_1, m_2, m_3)$, $\mathbf{n}(s) = (n_1, n_2, n_3)$, os vetores de força, deslocamento, rotação, esforços de flexão e torção, e esforços cisalhantes e normais, respectivamente.

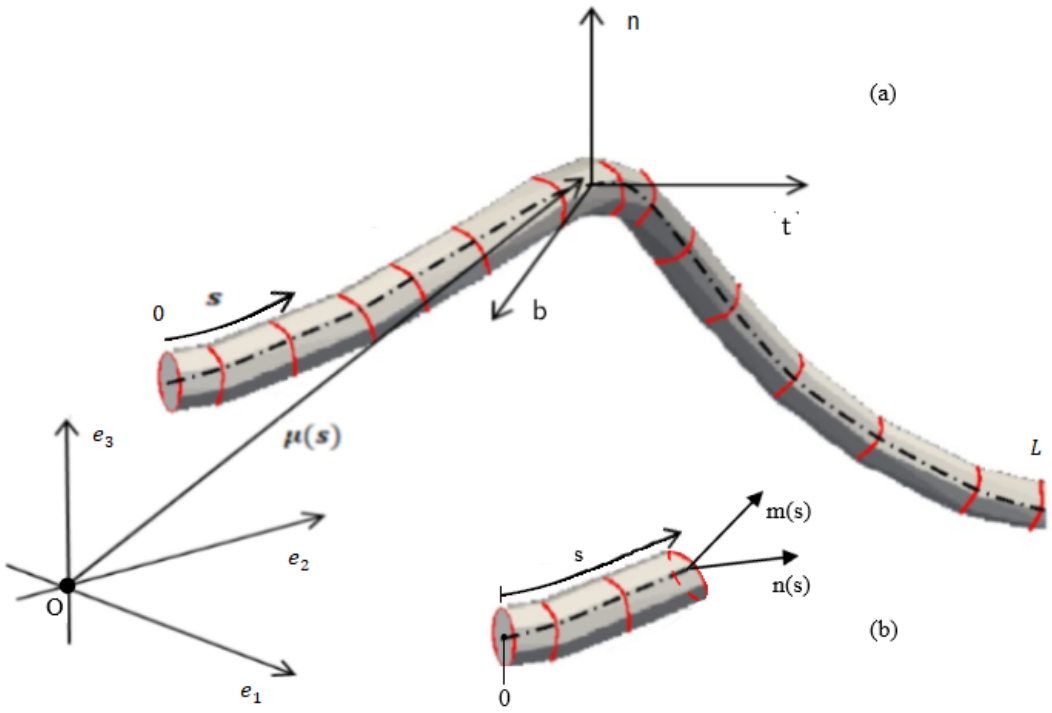

Figura 3.1: (a) Modelo geométrico para estruturas flexíveis no espaço.(b) Representação de um corte na barra em uma posição s.

Fazendo um corte na barra em uma posição s e realizando o seu estudo de equilíbrio de forças e momentos, temos que:

$$\mathbf{n}(s) + \int_0^s \boldsymbol{f}(\xi)d\xi - \mathbf{n}(0) = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{m}(s) + \boldsymbol{\mu}(s) \times \mathbf{n}(s) + \int_0^s \boldsymbol{\mu}(\xi) \times \boldsymbol{f}(\xi)d\xi - \boldsymbol{\mu}(0) \times \mathbf{n}(0) - \boldsymbol{m}(0) = \mathbf{0}, \tag{3.2}$$

para qualquer $s \in I$.

Derivamos as equações acima em relação a s e obtemos:

$$\mathbf{n}'(s) + \boldsymbol{f}(s) = \mathbf{0} \tag{3.3}$$
$$\boldsymbol{m}'(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mu(s) \times \mathbf{n}'(s) + \boldsymbol{\mu}(s) \times \boldsymbol{f}(s) = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Substituindo a equação (3.3) em (3.4), as equações de equilíbrio na forma vetorial são descritas por

$$\mathbf{n}'(s) + \boldsymbol{f}(s) = \mathbf{0}, \tag{3.5}$$
$$\boldsymbol{m}'(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

As equações de equilíbrio apresentadas anteriormente podem ser descritas em função de suas componentes (Ver Apêndice A.2), obtendo

$$-n_1' + \kappa n_2 = f_1, \tag{3.7}$$
$$-\kappa n_1 - n_2' + \rho n_3 = f_2, \tag{3.8}$$
$$-\rho n_2 - n_3' = f_3, \tag{3.9}$$
$$-m_1' + \kappa m_2 = \mathbf{0}, \tag{3.10}$$
$$-\kappa m_1 - m_2' + \rho m_3 + n_3 = \mathbf{0}, \tag{3.11}$$
$$-\rho m_2 - m_3' - n_2 = \mathbf{0}. \tag{3.12}$$

Para pequenos deslocamentos e deformações e supondo que a barra não sofra um deslocamento de corpo rígido, podemos definir o deslocamento e rotação como $\boldsymbol{u}(0)$ e $\boldsymbol{\theta}(0)$, respectivamente. De fato, neste caso,

$$\boldsymbol{\theta}(s) = \boldsymbol{\theta}(0), \tag{3.13}$$
$$\boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{\theta}(0) \times (\boldsymbol{\mu}(s) - \boldsymbol{\mu}(0)), \tag{3.14}$$

que após derivação resulta em

$$\boldsymbol{\theta}'(s) = \mathbf{0}, \tag{3.15}$$
$$\boldsymbol{u}'(s) = \boldsymbol{\theta}(0) \times \boldsymbol{\mu}'(s) = \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{t}. \tag{3.16}$$

Assim, definimos as deformações generalizadas através das seguintes funções vetoriais

$$\boldsymbol{\lambda}(s) = \boldsymbol{\theta}'(s), \tag{3.17}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}(s) = \boldsymbol{u}'(s) - \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{t}, \tag{3.18}$$

onde $\boldsymbol{\lambda}(s)$ representa as deformações devido aos efeitos de flexão e torção e $\boldsymbol{\varepsilon}(s)$ as deformações associadas aos efeitos cisalhantes e axial.

Consideramos materiais elásticos, lineares, homogêneos e isotrópicos, então as relações constitutivas são dadas por

$$\mathbf{n}(s) = A_u \boldsymbol{\varepsilon}(s), \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{m}(s) = A_\theta \boldsymbol{\lambda}(s), \tag{3.20}$$

onde $A_u = diag[EA, GAk_1, GAk_2]$ e $A_\theta = diag[GJ, EI_1, EI_2]$ são matrizes diagonais, A representa a área da seção transversal, E o módulo de Young, G o módulo de cisalhamento, J é o segundo momento polar de inércia, I_1 e I_2 os momentos de inércia e k_1 e k_2 os coeficientes de correção de cisalhamento nas direções binormal e tangencial, respectivamente.

As relações constitutivas descritas anteriormente podem ser expressas em função de suas componentes (Ver Apêndice A.2), como:

$$n_1 = EA(u_1' - \kappa u_2), \tag{3.21}$$

$$n_2 = GAk_1(u_2' + \kappa u_1 - \rho u_3 - \theta_3), \tag{3.22}$$

$$n_3 = GAk_2(u_3' + \rho u_2 + \theta_2), \tag{3.23}$$

$$m_1 = GJ(\theta_1' - \kappa\theta_2), \tag{3.24}$$

$$m_2 = EI_1(\theta_2' + \kappa\theta_1 - \rho\theta_3), \tag{3.25}$$

$$m_3 = EI_2(\theta_3' + \rho\theta_2). \tag{3.26}$$

Sem perda de generalidade, assumimos que a estrutura está engastada em ambas as extremidades, de modo que podemos escrever as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, isto é,

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{0}, \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{u}(L) = \boldsymbol{\theta}(L) = \mathbf{0}. \tag{3.28}$$

Para melhor esclarecer as relações existentes entre o comprimento e a seção transversal da estrutura, introduzimos as seguintes adimensionalizações das variáveis envolvidas:

$$
\begin{aligned}
&w_1 = \frac{u_1}{L}, w_2 = \frac{u_2}{L}, w_3 = \frac{u_3}{L}, \phi_1 = \theta_1, \phi_2 = \theta_2, \phi_3 = \theta_3, \\
&\sigma_1 = \frac{m_1 L}{EI_1}, \sigma_2 = \frac{m_2 L}{EI_1}, \sigma_3 = \frac{m_3 L}{EI_1}, \tau_1 = \frac{n_1 L^2}{EI_1}, \tau_2 = \frac{n_2 L^2}{EI_1}, \tau_3 = \frac{n_3 L^2}{EI_1}, \\
&q_1 = \frac{f_1 L^3}{EI_1}, q_2 = \frac{f_2 L^3}{EI_1}, q_3 = \frac{f_3 L^3}{EI_1},
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

além de que $s \in \Gamma = (0, 1)$ e o parâmetro geométrico é dado por

$$
\varpi = \frac{I_1}{L^2 A}. \tag{3.30}
$$

A medida que a estrutura torna-se mais esbelta, o parâmetro ϖ assume valores cada vez menores e, assim podemos resumir o modelo para estrutura flexível no espaço tridimensional da seguinte forma:

Problema A: Para $s \in \Gamma$, dado $\boldsymbol{q}(s) = (q_1, q_2, q_3)$, encontre $\boldsymbol{w}(s) = (w_1, w_2, w_3)$, $\boldsymbol{\phi}(s) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, $\boldsymbol{\sigma}(s) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e $\boldsymbol{\tau}(s) = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ satisfazendo o seguinte sistema de equações lineares:

Equações de equilíbrio

$$
\boldsymbol{\tau}'(s) + \boldsymbol{q}(s) = \mathbf{0}, \tag{3.31}
$$

$$
\boldsymbol{\sigma}'(s) + \boldsymbol{\tau}(s) \times \mathbf{t}(s) = \mathbf{0}. \tag{3.32}
$$

Equações constitutivas

$$
\varpi \bar{A}_w \boldsymbol{\tau}(s) = \boldsymbol{w}'(s) - \boldsymbol{\phi}(s) \times \mathbf{t}, \qquad \bar{A}_w = diag\left[1, \frac{Gk_1}{E}, \frac{Gk_2}{E}\right], \tag{3.33}
$$

$$
\bar{A}_\phi \boldsymbol{\sigma}(s) = \boldsymbol{\phi}'(s), \qquad \bar{A}_\phi = diag\left[\frac{GJ}{EI_1}, 1, \frac{I_2}{I_1}\right]. \tag{3.34}
$$

Condições de contorno

$$
\boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{0}, \tag{3.35}
$$

$$
\boldsymbol{w}(1) = \boldsymbol{\phi}(1) = \mathbf{0}. \tag{3.36}
$$

Retornando ao Problema A e utilizando as equações constitutivas, podemos escrever as equações de equilíbrio em função apenas dos deslocamentos generalizados. Então, obtemos um modelo apenas em deslocamentos como definido no Problema B, a seguir:

Problema B: Para $s \in \Gamma$, dado $\boldsymbol{q}(s)$, encontre $\boldsymbol{w}(s)$ e $\boldsymbol{\phi}(s)$ satisfazendo o seguinte

sistema de equações lineares:

$$\frac{1}{\varpi}\bar{A}_w^{-1}[\boldsymbol{w}'(s) - \boldsymbol{\phi}(s) \times \mathbf{t}(s)]' + \boldsymbol{q}(s) = \mathbf{0}, \tag{3.37}$$

$$[\bar{A}_\phi^{-1}\boldsymbol{\phi}'(s)]' + \frac{1}{\varpi}\bar{A}_w^{-1}\mathbf{t}(s) \times [\boldsymbol{w}'(s) - \boldsymbol{\phi}(s) \times \mathbf{t}(s)] = \mathbf{0}, \tag{3.38}$$

com condições de contorno:

$$\boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{0}, \tag{3.39}$$

$$\boldsymbol{w}(1) = \boldsymbol{\phi}(1) = \mathbf{0}. \tag{3.40}$$

3.2 Formulação Variacional Cinemática e Mista

No geral, os métodos variacionais são métodos numéricos que permitem obter soluções aproximadas utilizando funções suficientemente regulares, pertencentes a alguns espaços de funções, e para as quais a integração faz sentido.

Para isso, vamos definir nossas funções nos espaços de Hilbert, que surgem como uma generalização dos espaços euclidianos de dimensão infinita, satisfazendo as propriedades de linearidade, ortogonalidade, magnitude e dualidade, que garantem a existência do produto interno e norma, os quais são essenciais ao desenvolvimento das formulações.

Inicialmente, introduzimos os espaços de funções quadrado integráveis e o espaço de Hilbert, no intervalo aberto Γ, os quais desempenham funções importantes na formulação variacional do problema.

Seja $L^2(\Gamma)$ o espaço de funções quadrado integráveis no sentido de Lebesgue e $H(\Gamma) = \{\upsilon; \upsilon \in L^2(\Gamma), \upsilon' \in L^2(\Gamma), \upsilon(0) = \upsilon(1) = 0\}$ o espaço de Hilbert. Definimos os espaços $\mathbb{Q} = (L^2(\Gamma))^3$ e $\mathbb{S} = (H(\Gamma))^3$ com produto interno e norma, dados respectivamente, por

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})_1 &= \int_\Gamma \boldsymbol{w}' \cdot \boldsymbol{v}' ds, \forall \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{S}, \\ \| \boldsymbol{v} \|_1 &= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_1^{\frac{1}{2}}, \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{S}, \end{aligned} \tag{3.41}$$

onde $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_1^{\frac{1}{2}} = (\| v_1 \|^2 + \| v_2 \|^2 + \| v_3 \|^2 + \| v_1' \|^2 + \| v_2' \|^2 + \| v_3' \|^2)^{\frac{1}{2}}$ e a seminorma $|\cdot|_1$ é equivalente a norma $\|\cdot\|_1$ no espaço $\mathbb{S}$, ver Arunakirinathar (1993).

Introduzimos o espaço $\mathbb{Z} = \mathbb{S} \times \mathbb{S}$, com produto interno e norma definidos respectivamente por

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{z}, \mathbf{p})_1 &= (\boldsymbol{w}', \boldsymbol{v}') + (\boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{\psi}'), \\ \| \mathbf{p} \|_1^2 &= |\boldsymbol{v}|_1^2 + |\boldsymbol{\psi}|_1^2 \end{aligned}, \tag{3.42}$$

com $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{Z}$ e $\mathbf{p} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbb{Z}$, além de que denotamos por $\mathbb{Z}'$ o espaço dos

funcionais lineares e contínuos de $\mathbb{Z}$.

3.2.1 Formulação Variacional Cinemática

A formulação Variacional Cinemática é uma das mais conhecidas, sendo aplicado o método de Galerkin, o qual baseia-se no conceito de ortogonalidade de funções, sendo empregado diretamente na equação diferencial que descreve o problema em estudo.

Para obtermos uma aproximação de Galerkin, como proposto em Oden (1983), colocamos o problema variacional em um subespaço de dimensão finita do espaço de funções admissíveis, que corresponde ao espaço que contém as funções que satisfazem as condições de contorno e são suaves de modo que façam o problema ter sentido.

Retornando as equações apresentadas no **Problema B**, e tomando o produto escalar entre as equações dadas em (3.37) e (3.38) e as funções arbitrárias $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{S}$, respectivamente, obtemos:

$$\left(\frac{1}{\varpi}\bar{A_w}^{-1}[\boldsymbol{w}'(s) - \boldsymbol{\phi}(s) \times \mathbf{t}(s)]', \boldsymbol{v}\right) + (\boldsymbol{q}(s), \boldsymbol{v}) = \mathbf{0}, \tag{3.43}$$

$$\left(\bar{A_\phi}^{-1}\boldsymbol{\phi}''(s), \boldsymbol{\psi}\right) + \left(\frac{1}{\varpi}\bar{A_w}^{-1}\mathbf{t}(s) \times [\boldsymbol{w}'(s) - \boldsymbol{\phi}(s) \times \mathbf{t}(s)], \boldsymbol{\psi}\right) = \mathbf{0}. \tag{3.44}$$

Integrando por partes as duas equações anteriores no intervalo Γ, aplicando as condições de contorno, e adicionando as duas equações obtidas, a equação variacional pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_\Gamma \bar{A_\phi}^{-1}\boldsymbol{\phi}''(s)\cdot\boldsymbol{\psi}ds + \frac{1}{\varpi}\int_\Gamma \bar{A_w}^{-1}[\boldsymbol{w}'(s) - \boldsymbol{\phi}(s)\times\mathbf{t}(s)]\cdot[\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{\psi}(s)\times\mathbf{t}(s)]ds = \int_\Gamma \boldsymbol{q}(s)\cdot\boldsymbol{v}(s)ds. \tag{3.45}$$

Definimos a forma bilinear simétrica $a : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ como

$$a(\boldsymbol{z}, \mathbf{p}) = \int_\Gamma \bar{A_{\boldsymbol{\phi}}}^{-1}\boldsymbol{\phi}'(s)\cdot\boldsymbol{\psi}'(s)ds + \frac{1}{\varpi}\int_\Gamma \bar{A_w}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{z})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p})ds, \tag{3.46}$$

e o funcional linear $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}'$ por

$$g(\mathbf{p}) = \int_\Gamma \boldsymbol{q}(s)\cdot\boldsymbol{v}(s)ds. \tag{3.47}$$

O **Problema B** na sua formulação variacional cinemática será dada pelo seguinte problema:

Problema P: Dado $(\boldsymbol{q}, \mathbf{0}) \in \mathbb{Z}'$, encontre $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a(\boldsymbol{z}, \mathbf{p}) = g(\mathbf{p}), \forall \mathbf{p} \in \mathbb{Z}, \tag{3.48}$$

A existência e unicidade de solução para o **Problema P** são garantidas se as seguintes

condições forem satisfeitas:

i. A forma bilinear a ser contínua, isto é, existe uma constante $0 < \alpha_0 < \infty$ tal que $|a(\boldsymbol{z}, \mathbf{p})| \leq \alpha_0 \parallel \boldsymbol{z} \parallel_1 \parallel \mathbf{p} \parallel_1$, $\forall \boldsymbol{z}, \mathbf{p} \in \mathbb{Z}$;

ii. A forma $a(\cdot, \cdot)$ ser $\mathbb{Z}$-elíptica, isto é, existe uma constante $0 < \alpha_1 < \infty$ tal que $|a(\mathbf{p}, \mathbf{p})| \geq \alpha_1 \parallel \mathbf{p} \parallel_1^2$, $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{Z}$;

iii. O funcional linear $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ser contínuo em $\mathbb{Z}'$, ou seja, existe uma constante $0 < \alpha_2 < \infty$ tal que $|g(\mathbf{p})| \leq \alpha_2 \parallel \mathbf{p} \parallel_1$, $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{Z}$.

Desse modo, verificamos as condições descritas anteriormente no lema a seguir.

Lema 1: Se as propriedades seguintes se verificam:

i. A forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é contínua e $\mathbb{Z}$-elíptica para $\varpi \in (0, 1]$.

ii. O funcional linear g é contínuo em $\mathbb{Z}'$.

3.2.2 Formulação variacional Mista

Ainda em relação ao **Problema B**, podemos construir uma formulação variacional em mais de um campo. Para isso, definiremos por

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\varpi}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{z}), \tag{3.49}$$

um multiplicador de Lagrange, o qual representa um vetor de forças internas associado aos esforços cisalhantes e axial. Então, o **Problema B** na sua formulação variacional mista será dada pelo seguinte problema:

Problema M: Dado $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}'$, com $\mathbb{Z}'$ o dual de $\mathbb{Z}$ e $\varpi \in [0, 1]$, encontre $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ tal que

$$b(\boldsymbol{z}, \mathbf{p}) + d(\mathbf{p}, \boldsymbol{\tau}) = g(\mathbf{p}), \forall \mathbf{p} \in \mathbb{Z}, \tag{3.50}$$

$$-\varpi(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{r}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{r}) = 0, \forall \boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}, \tag{3.51}$$

com $b(\boldsymbol{z}, \mathbf{p}) = \int_\Gamma \boldsymbol{\phi}'(s) \cdot \boldsymbol{\psi}'(s) ds$ e $d(\mathbf{p}, \boldsymbol{\tau}) = \int_\Gamma \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}) ds$. Resolvendo a equação (3.51) para $\boldsymbol{\tau}$, temos $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\varpi}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{Q}$.

É importante destacar que pela forma como o **Problema M** foi formulado, fica evidente a equivalência com o **Problema P**. As condições de existência e unicidade de solução para este tipo de problema misto podem ser vistas em Arunakirinathar (1993) e são descritas a seguir para o caso de $\varpi \in [0, 1]$:

i. A forma bilinear $b(\cdot, \cdot)$ é simétrica, positiva semidefinida e contínua;

ii. A forma $b(\cdot,\cdot)$ é $\mathbb{W}$-elíptica, isto é, existe uma constante $0 < \alpha_3 < \infty$ tal que

$$|b(\mathbf{p},\mathbf{p})| \geq \alpha_3 \parallel \mathbf{p} \parallel_1^2, \forall \mathbf{p} \in \mathbb{W}, \tag{3.52}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbb{W} &= \{\mathbf{p} = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{\psi}) \in \mathbb{Z}/d(\mathbf{p},\boldsymbol{r}) = 0, \forall \boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}\} \\ &= \{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}/\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{t} = 0\} \end{aligned} \tag{3.53}$$

iii. Existe uma constante $0 < \alpha_4 < \infty$ tal que

$$\sup \frac{d(\mathbf{p},\boldsymbol{r})}{\parallel \mathbf{p} \parallel_1} \geq \alpha_4 \parallel \boldsymbol{r} \parallel_0, \forall \boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}, \mathbf{p} \in \mathbb{Z}, \mathbf{p} \neq 0. \tag{3.54}$$

3.3 Métodos de Elementos Finitos

O método dos Elementos Finitos fornece uma técnica geral e sistemática para a construção das funções de interpolação, de forma simples e de fácil implementação computacional. A ideia principal por trás do método é a representação do domínio em subdomínios menores chamados de elementos finitos, os quais são interligados por meio de nós com determinados graus de liberdade. As funções de forma devem ser um conjunto completo de polinômios, cuja precisão da solução depende, dentre outros fatores, da ordem desses polinômios, os quais podem ser lineares, quadráticos, cúbicos ou de ordem superior.

Nesta seção, apresentamos e analisamos uma nova aproximação de elementos finitos para o Problema P. Seja Γ_e uma partição regular de elementos finitos, h_e o diâmetro do elemento e, n o número total de elementos e $h = \max\{h_e\}$, $1 \leq e \leq n$ o parâmetro de malha. Denotamos por $(L^2(\Gamma))_h^l = \{\boldsymbol{\tau}_h(s) \in \mathbb{C}^{-1}(\Gamma), \boldsymbol{\tau}_h(\Gamma_e) = \mathbb{P}_l(\Gamma_e)\}$ o espaço de funções descontínuas cuja restrição a Γ_e são polinômios de grau l e $(H(\Gamma))_h^l = \{\boldsymbol{\tau}_h(s) \in (L^2(\Gamma))_h^l \bigcap H(\Gamma) \subset \mathbb{C}^0(\Gamma), \boldsymbol{\tau}_h(\Gamma_e) = \mathbb{P}_l(\Gamma_e)\}$ o espaço de funções L^2 que a nível de elemento pertence a classe dos polinômios de grau l. Com isso, podemos representar $\mathbb{S}^h = [(H(\Gamma))_h^l]^3 \subset \mathbb{S}$, $\mathbb{Q}^h = [(H(\Gamma))_h^{l-1}]^3 \subset \mathbb{Q}$ e o subespaço fechado $\mathbb{Z}^h = \mathbb{S}^h \times \mathbb{S}^h$. Já as projeções L^2-ortogonais $\pi_l : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma))_h^l$ e $\pi_l^0 : L^2(\Gamma) \to H(\Gamma))_h^l$ são definidas como sendo $(p - \pi_l p, p_l)_0 = 0, \forall p \in L^2(\Gamma), p_l \in L^2(\Gamma))_h^l$ e $(p - \pi_l^0 p, p_l)_0 = 0, \forall p \in L^2(\Gamma), p_l \in H(\Gamma))_h^l$.

Então definimos os Problemas P^h e M^h da seguinte forma:

Problema P^h: Dado $(\boldsymbol{q},\mathbf{0}) \in \mathbb{Z}'$, encontre $\boldsymbol{z}_h = (\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in \mathbb{Z}^h$ tal que

$$a(\boldsymbol{z}_h, \mathbf{p}_h) = g(\mathbf{p}_h), \forall \mathbf{p}_h \in \mathbb{Z}^h. \tag{3.55}$$

Pelo Lema 2, no Apêndice (A.1), o problema P^h tem uma única solução $\boldsymbol{z}_h \in \mathbb{Z}^h$, pois $\mathbb{Z}^h$ é um subespaço fechado de $\mathbb{Z}$.

Problema M^h: Dado $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}'$, encontre $(\boldsymbol{z}_h, \boldsymbol{\tau}_h) \in \mathbb{Z}^h \times \mathbb{Q}^h$ tal que

$$b(\boldsymbol{z}_h, \mathbf{p}_h) + d(\mathbf{p}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = g(\mathbf{p}_h), \forall \mathbf{p}_h \in \mathbb{Z}^h, \tag{3.56}$$

$$-\varpi(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{r}_h) + d(\boldsymbol{z}_h, \boldsymbol{r}_h) = 0, \forall \boldsymbol{r}_h \in \mathbb{Q}^h. \tag{3.57}$$

Utilizando a equação 3.57 e considerando $\varpi \neq 0$, obtemos: $(\frac{1}{\varpi}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{z}_h) - \boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{r}_h) = 0, \forall \boldsymbol{r}_h \in \mathbb{Q}^h$, de modo que as forças internas são obtidas através da projeção $\mathbb{Q}$ do campo de deformação em $\mathbb{Q}_h$, isto é, $\boldsymbol{\tau}_h = \frac{1}{\varpi}\pi_{l-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{z}_h) \in \mathbb{Q}^h$, a qual se aplica as componentes do vetor. Mas utilizando $\boldsymbol{\tau}_h$ na equação (3.56), eliminamos o vetor força $\boldsymbol{\tau}_h$ e, concluímos que o problema variacional misto M_h é equivalente ao problema P_h^π definido a seguir.

Problema P_h^π: Dado $(\boldsymbol{q}, \mathbf{0}) \in \mathbb{Z}'$, encontre $\boldsymbol{z}_h \in \mathbb{Z}^h$ tal que

$$a^\pi(\boldsymbol{z}_h, \mathbf{p}_h) = g(\mathbf{p}_h), \forall \mathbf{p}_h \in \mathbb{Z}^h, \tag{3.58}$$

com

$$a^\pi(\boldsymbol{z}_h, \mathbf{p}_h) = (a(\boldsymbol{z}_h, \mathbf{p}_h) + (\frac{1}{\varpi}(\pi_{l-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{z}), \pi_{l-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p})), \forall \boldsymbol{z}, \mathbf{p} \in \mathbb{Z}. \tag{3.59}$$

Quando comparamos a forma discreta da forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ com a forma bilinear $a^\pi(\cdot,\cdot)$, observamos que $a^\pi(\cdot,\cdot) \neq a(\cdot,\cdot)$, o que implica dizer que os problemas P^h e M^h não são equivalentes, como mostrado no caso contínuo, mas M^h é equivalente a P_π^h.

As condições de existência e unicidade de solução para o **Problema** M_h são garantidas se as seguintes condições são satisfeitas:

i. A forma bilinear $b(\cdot,\cdot)$ é simétrica e positiva semidefinida;

ii. A forma $b(\cdot,\cdot)$ é $\mathbb{W}^h$-elíptica, isto é, existe uma constante $0 < \alpha_{3_h} < \infty$ tal que

$$|b(\mathbf{p}_h, \mathbf{p}_h)| \geq \alpha_{3_h}|\mathbf{p}|_1^2, \forall \mathbf{p}_h \in \mathbb{W}_h, \tag{3.60}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_h &= \{\mathbf{p}_h = (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathbb{Z}_h / d(\mathbf{p}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = 0, \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{Q}^h\} \\ &= \{\mathbf{p}_h \in \mathbb{Z}_h / \boldsymbol{v}_h' - \boldsymbol{\psi}_h \times \mathbf{t} = 0\} \end{aligned} \tag{3.61}$$

iii. Existe uma constante $0 < \alpha_{4_h} < \infty$, independente de h, tal que

$$\sup \frac{d(\mathbf{p}_h, \boldsymbol{\tau}_h)}{\| \mathbf{p}_h \|_1} \geq \alpha_{4_h} \| \boldsymbol{\tau}_h \|_0, \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{Q}_h, \mathbf{p}_h \neq 0. \tag{3.62}$$

Desse modo, verificamos as condições descritas anteriormente nos Lemas (2, 3 e 4) que se encontram nos Apêndice (A.1).

Como os problemas M^h e P_π^h são equivalentes, então a existência e unicidade do problema P_π^h está garantida. Então, a interpolação do campo dos deslocamentos com uma ordem a mais do que o campo dos esforços, sem dependência do parâmetro ϖ assegura a estabilidade da formulação descrita.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

Neste capítulo apresentaremos alguns experimentos numéricos objetivando comprovar o comportamento das formulações apresentadas no capítulo anterior, bem como os resultados da análise numérica.

4.1 Experimento 1

Neste experimento, consideramos uma viga com sua linha de centroides coincidente com o eixo e_1, de comprimento $L = 1$, engastada e livre nas suas extremidades inicial e final, respectivamente, possuindo as seguintes propriedades geométricas e constitutivas unitárias, $E = G = J = 1$, $I_1 = I_2 = 1$, a área $A = 1,0.10^6$ e os parâmetros $k_1 = k_2 = 1$, $\kappa = 10^{-100}$ e $\rho = 0$. A única carga a que esta estrutura está submetida é uma força distribuída $q_3 = -1$ na direção e_3, transversal ao eixo da viga.

As figuras (4.1) a (4.3) mostram uma comparação entre a solução analítica, para os campos não nulos dos deslocamentos, rotações e esforços generalizados, e a solução numérica da formulação. Para a solução numérica, consideramos a discretização da malha de elementos finitos com 04 e 08 elementos, e interpolações lineares e quadráticas para os campos das tensões e deslocamentos generalizados, respectivamente.

Nas figuras (4.1) e (4.2) apresentamos dois gráficos que ilustram a influência da quantidade de elementos na convergência da solução aproximada do campo de deslocamentos generalizados. Notem que mesmo com poucos elementos a formulação foi capaz de capturar a solução com boa precisão, tanto para o campo dos deslocamentos quanto das rotações. À medida que incrementamos a quantidade de elementos, percebemos que as soluções numéricas apresentam melhoras, demonstrando convergência para a solução.

Os dois gráficos da figura (4.3) também ilustram a influência da quantidade de elementos na convergência da solução, mas neste caso para o campo dos esforços cisalhantes. Notem na formulação que o campo de esforços generalizados são formados apenas pelos esforços cisalhantes. Para obtermos os momentos torna-se necessário a realização de um pós-processamento da solução. Como no caso dos deslocamentos, os esforços também

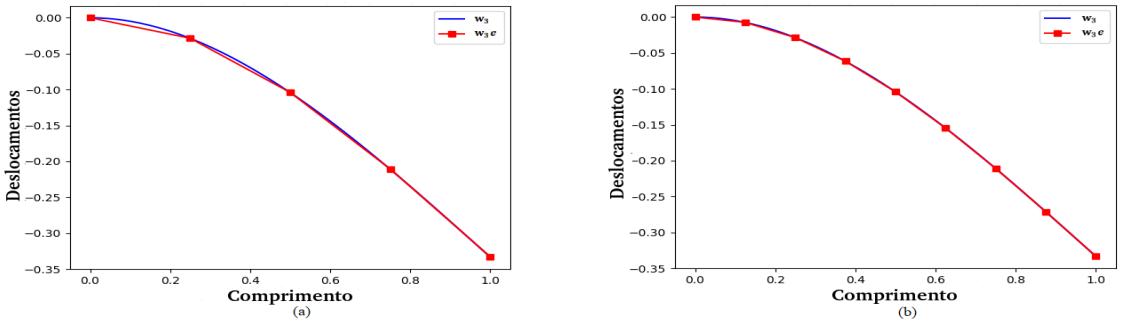

Figura 4.1: Solução numérica e analítica do campo de deslocamentos w_3 (direção normal) da viga reta, engastada e livre, e com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 4 elementos, (b) 8 elementos.

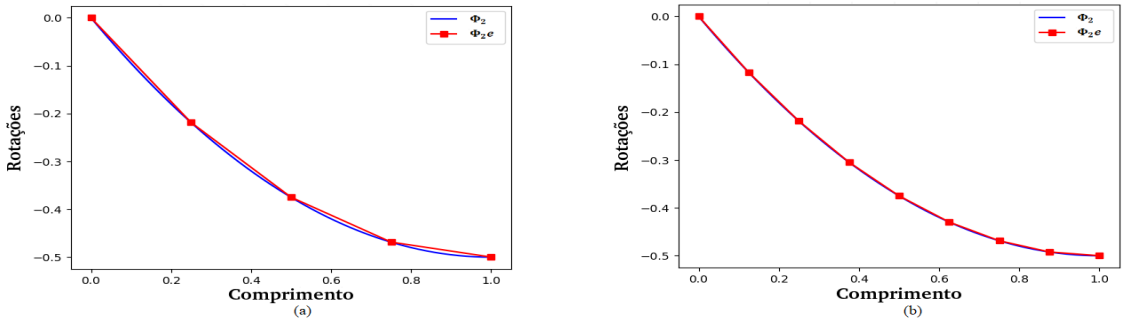

Figura 4.2: Solução numérica e analítica do campo de rotações ϕ_2 (em relação ao eixo binormal) da viga reta, engastada e livre, e com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 4 elementos, (b) 8 elementos.

apresentaram boa precisão com poucos elementos e melhoras da solução com o refinamento da malha.

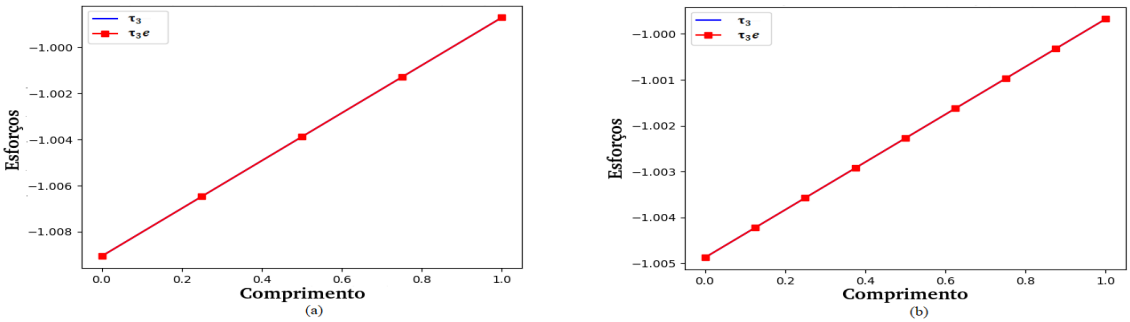

Figura 4.3: Solução numérica e analítica do campo de esforços cisalhantes τ_3 (direção normal) da viga reta, engastada e livre, e com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 4 elementos, (b) 8 elementos.

Para caracterizar melhor a influência da malha na acuracidade da solução, apresentamos na figura (4.4) as taxas de convergência dos campos de deslocamentos nas normas $L_2(\Gamma)$ e $H_1(\Gamma)$. Notem que ambos os campos possuem taxas ótimas de convergência, isto é, lineares e quadráticas nas normas $L_2(\Gamma)$ e $H_1(\Gamma)$, respectivamente.

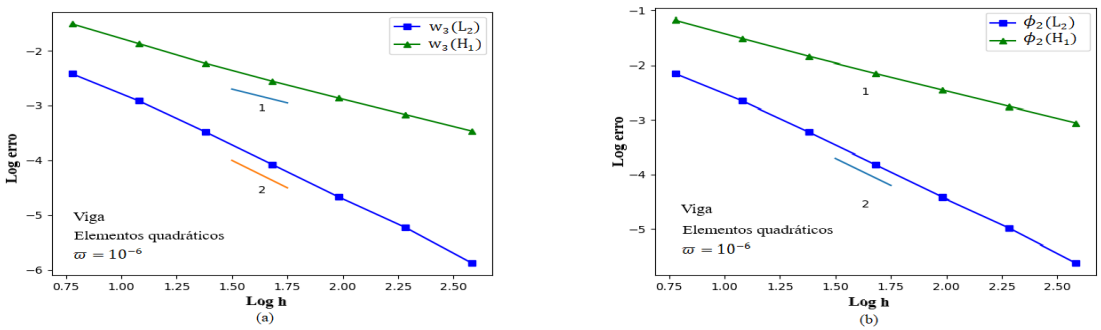

Figura 4.4: Gráficos de convergência das componentes w_3 e ϕ_2 nas normas L_2 e H_1 de uma viga reta, engastada e livre e com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Foram utilizadas malhas com 4, 8, 16, 32, 64, 128 e 256 elementos.

É importante ressaltar que em nenhum dos casos analisados ocorreu o trancamento de solução, confirmando a eficiência e capacidade do método misto em resolver este tipo de problema e gerar uma solução precisa.

4.2 Experimento 2

Neste experimento, consideramos uma estrutura flexível de comprimento unitário, com sua linha de centroides descrevendo uma hélice no espaço, engastada na sua extremidade inicial e livre na final. As propriedades constitutivas e geométricas são idênticas as do Experimento 1 excetuando as propriedades geométricas $\kappa = \rho = 0,11253953$. A única carga submetida é uma força concentrada $\boldsymbol{q} = 1$ na direção e_3, a qual decomposta nas direções locais é representada por $q_1 = 0,70710678$ na direção tangencial e $q_2 = -0,70710678$ na direção binormal.

A equação da curva definida pela linha de centroides é

$$\boldsymbol{\mu}(s) = r\cos\left(\frac{s}{r^2+c^2}\right)\mathbf{n} + r\sin\left(\frac{s}{s^2+c^2}\right)\mathbf{b} + \frac{cs}{r^2+c^2}\mathbf{t},$$

com a altura do passo (c) e o raio (r) da curva iguais e assumindo o valor de $c = r = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}$.

As figuras (4.5) a (4.13) mostram uma comparação entre a solução analítica e a numérica da formulação, para os campos de deslocamentos, rotações e esforços cisalhantes. Para a solução numérica, consideramos a discretização da malha de elementos finitos com 08 e 16 elementos, e interpolações lineares e quadráticas para os campos dos esforços e deslocamentos generalizados, respectivamente.

Nas figuras (4.5) a (4.10) mostramos a influência da quantidade de elementos na convergência da solução aproximada para os campos de deslocamentos generalizados nas direções tangencial, binormal e normal. Observem que mesmo com uma quantidade pequena de elementos a formulação mista não apresentou dificuldades numéricas na obtenção da solução com boa precisão, tanto para o campo dos deslocamentos quanto das rotações.

Notem que à medida que aumentamos a quantidade de elementos, as soluções numéricas evidenciaram melhoras, apresentando convergência para a solução.

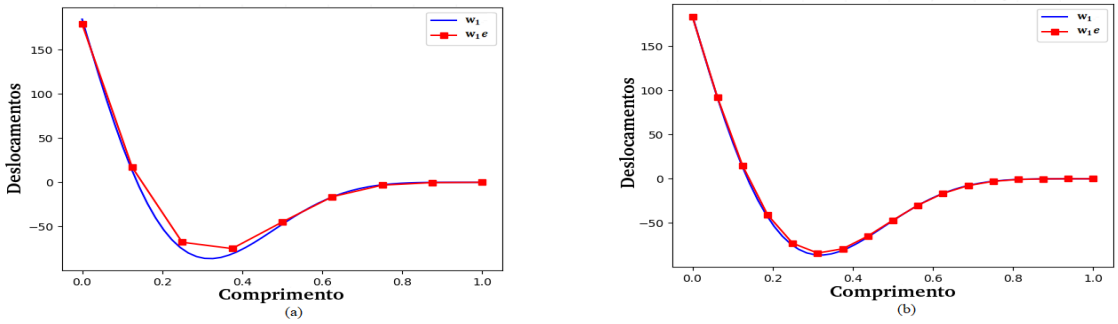

Figura 4.5: Solução numérica e analítica do campo de deslocamentos w_1 (direção tangencial) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos.

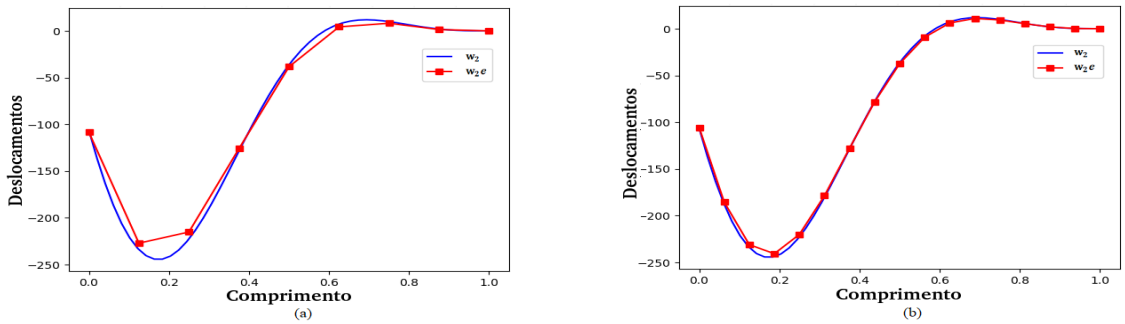

Figura 4.6: Solução numérica e analítica do campo de deslocamentos w_2 (direção binormal) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos.

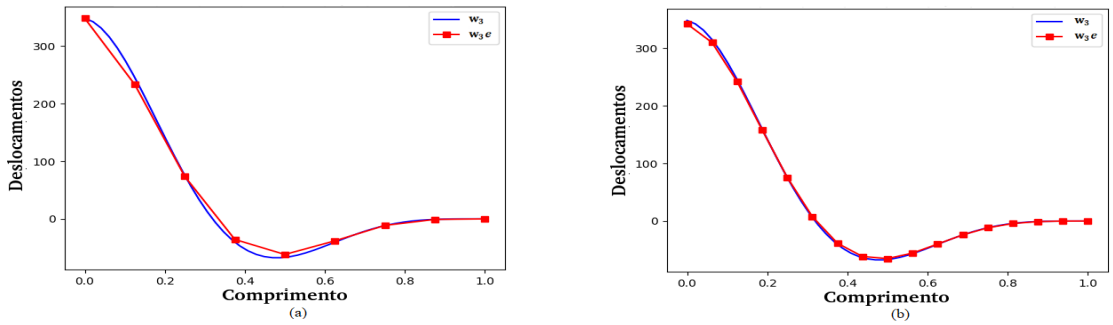

Figura 4.7: Solução numérica e analítica do campo de deslocamentos w_3 (direção normal) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos.

Os gráficos das figuras (4.11) e (4.12) também apresentam a influência da quantidade de elementos na convergência da solução, porém para o caso dos esforços cortantes. Como

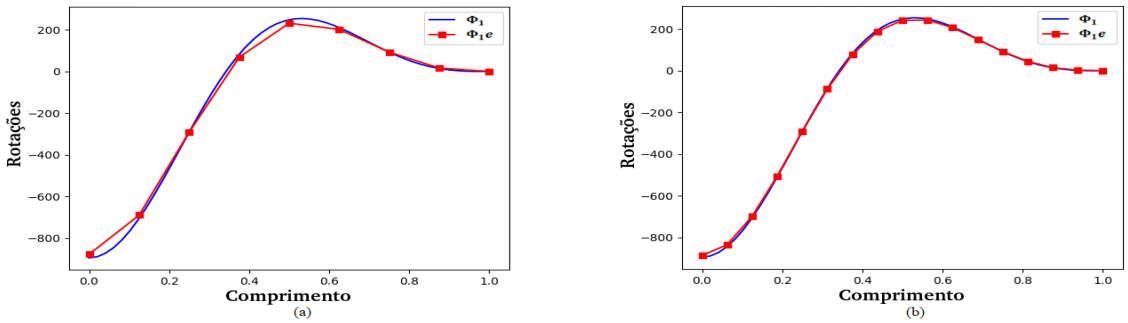

Figura 4.8: Solução numérica e analítica do campo de rotações ϕ_1 (em relação ao eixo tangencial) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos.

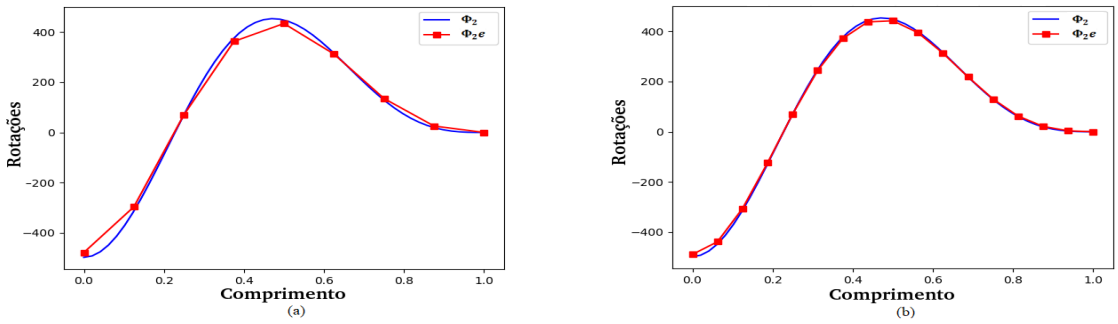

Figura 4.9: Solução numérica e analítica do campo de rotações ϕ_2 (em relação ao eixo binormal) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos.

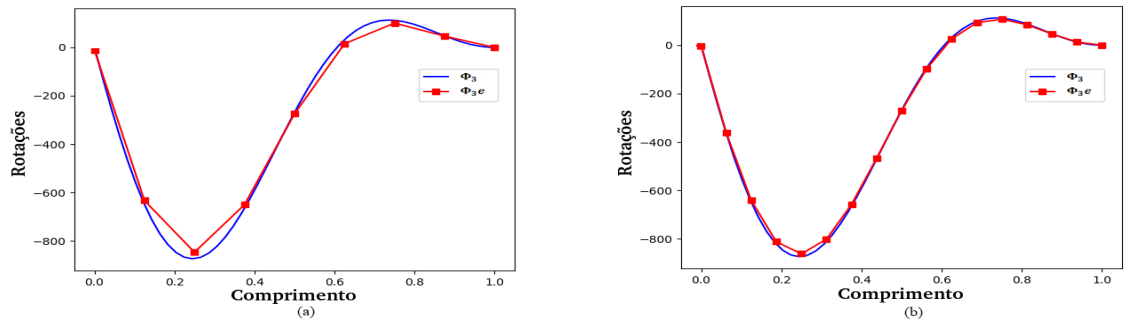

Figura 4.10: Solução numérica e analítica do campo de rotações ϕ_3 (em relação ao eixo normal) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos.

observado no caso dos deslocamentos, os esforços também evidenciaram uma boa precisão mesmo com poucos elementos e melhora na solução ao realizar o refinamento da malha.

Para uma melhor representação da influência da malha na precisão da solução, mostramos nas figuras (4.13) e (4.14) as taxas de convergência dos campos de deslocamentos e rotações nas normas $L_2(\Gamma))$ e $H_1(\Gamma))$. Observem que ambos os campos apresentam taxas ótimas de convergência, ou seja, lineares e quadráticas nas normas $L_2(\Gamma))$ e $H_1(\Gamma))$,

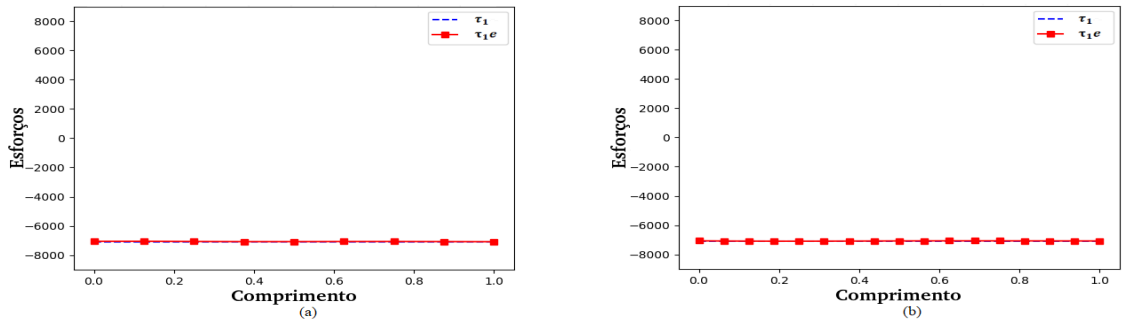

Figura 4.11: Solução numérica e analítica do campo de esforços cisalhantes τ_1 (direção tangencial) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos.

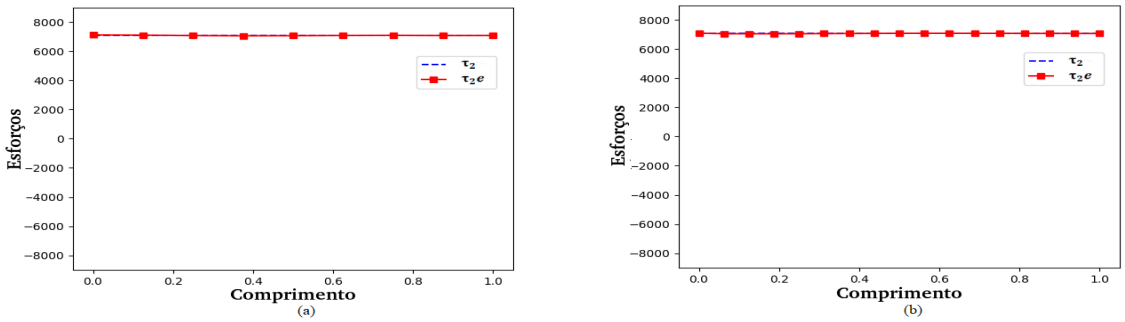

Figura 4.12: Solução numérica e analítica do campo de esforços cisalhantes τ_2 (direção binormal) da hélice, engastada e livre, com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Para a solução numérica utilizamos malhas com: (a) 8 elementos, (b) 16 elementos.

respectivamente.

É relevante destacar que, assim como no Experimento 1, nenhum dos casos estudados apresentaram trancamento de solução, evidenciando o desempenho e potencial do método misto na resolução destes tipos de problemas com a obtenção de uma solução precisa.

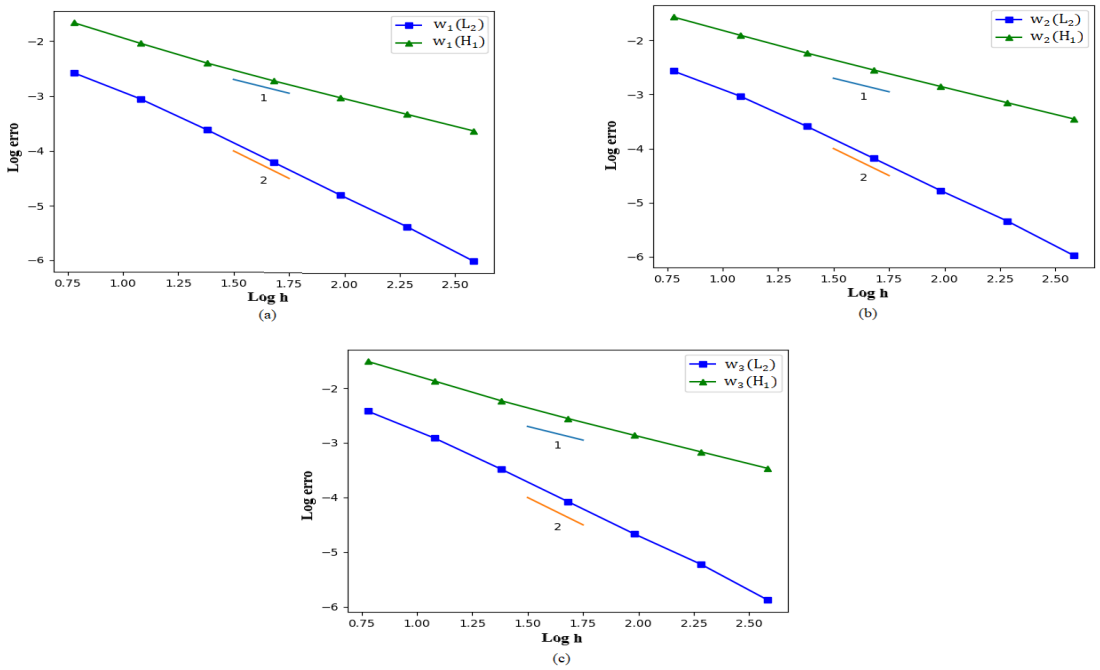

Figura 4.13: Gráficos de convergência das componentes w_1, w_2 e w_3 nas normas L_2 e H_1 de uma hélice, engastada e livre, e com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Foram utilizadas malhas com 8, 16, 32, 64, 128, 256 e 512 elementos.

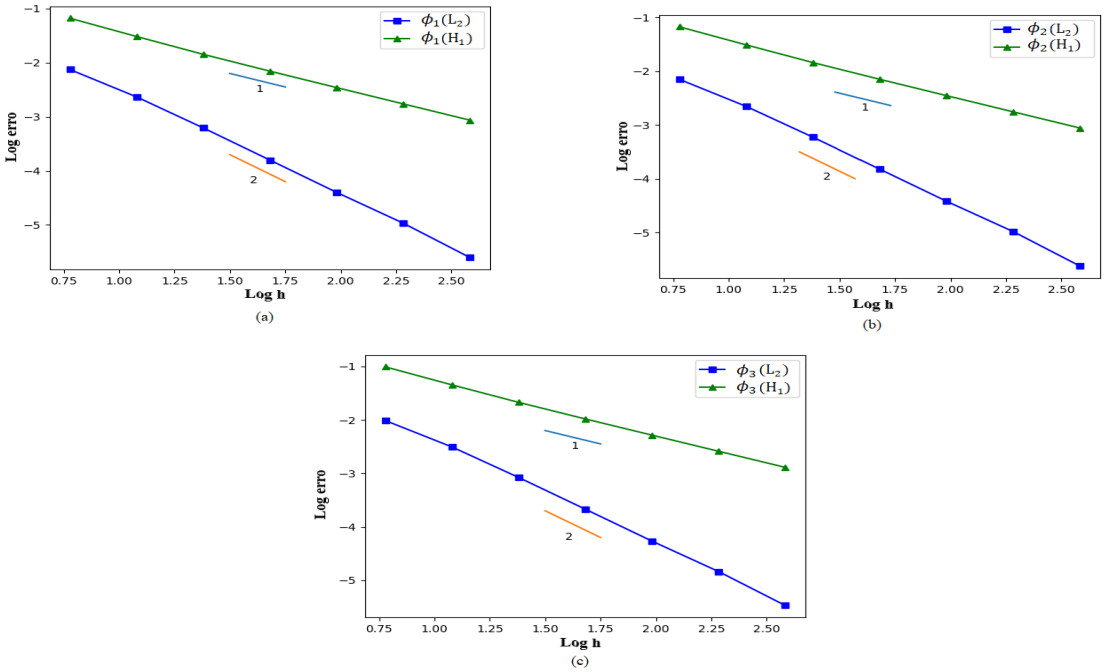

Figura 4.14: Gráficos de convergência das componentes ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 nas normas L_2 e H_1 de uma hélice, engastada e livre, e com um parâmetro de esbeltez, $\varpi = 10^{-6}$. Foram utilizadas malhas com 8, 16, 32, 64, 128, 256 e 512 elementos.

Capítulo 5

Considerações finais

Apresentamos neste trabalho um modelo matemático para estruturas flexíveis, baseado na teoria de vigas de Timoshenko, o qual considera os efeitos de flexão e cisalhamento, em regime de pequenos deslocamentos e deformações. Na sua construção, introduzimos alguns resultados da geometria diferencial de curvas no espaço, generalizando o seu comportamento para o espaço tridimensional.

Formulamos o problema variacionalmente na forma cinemática e mista, explicitando o parâmetro associado a esbeltez da viga. Fizemos a aproximação pelo método dos elementos finitos misto e verificamos que a formulação apresenta convergência da solução independente dos valores deste parâmetro, isto é, não apresentam trancamento de solução (*"locking"*), muito comum na formulação cinemática para valores do parâmetro de esbeltez muito pequenos.

Os experimentos numéricos apresentados ilustram o comportamento da formulação proposta e as soluções das aproximações, através da comparação entre a solução analítica para os campos dos deslocamentos generalizados e esforços cisalhantes e a solução numérica da formulação. No Experimento 1, consideramos uma estrutura de viga com propriedades geométricas e constitutivas unitárias, enquanto no Experimento 2, utilizamos uma estrutura com configuração de uma hélice, com propriedades semelhantes as do Experimento 1, divergindo apenas quanto a curvatura e a torção.

Observamos através dos experimentos que ao refinarmos a malha, incrementando a quantidade de elementos, as soluções numéricas apresentaram melhoras, evidenciando convergência para a solução mesmo com uma quantidade pequena de elementos. Além disso, para confirmarmos a influência da malha na acuracidade da solução, calculamos as taxas de convergência e as representamos graficamente.

Constatamos por meio dos gráficos de convergência que os campos de deslocamentos e rotações possuem taxas ótimas de convergência nas normas $L_2(\Gamma)$ e $H_1(\Gamma)$, o que comprova a eficiência e potencial do método misto na resolução destes tipos de problemas, com obtenção de soluções precisas sem ocorrer trancamento de solução.

Como proposta de trabalhos futuros sugerimos a exploração de aplicações na área das

ciências, como na Engenharia Naval, Mecânica e Oceânica, incorporando outras características ao modelo matemático para estruturas flexíveis, como por exemplo, os dutos flexíveis.

Referências Bibliográficas

[1] Antolin, M. Q et al. (21), "*Análise estrutural e otimização de um veículo mini baja.*", Cadernos UniFOA, Volta Redonda (RJ), v. 16, n. 47, p. 7-17, dez, 2021.

[2] Arnold, D. (1981), "*Discretization by Finite Elements of a Model Parameter Dependent Problem.*", Numerische Mathematik, Texas.

[3] Arunakirinathar, K., REDDY, B. (1993), "*Mixed Finite Element Method for Elastic Rods of Arbitrary Geometry.*", Numerische Mathematik, 16, 13-43.

[4] Balan, T. A.; POPOV, E. P. (1983), "*Mecánica de sólidos*", México, Pearson Educacíon.

[5] Feijó, V. (2007), "*Modelagem do fluxo sanguíneo na aorta abdominal utilizando interação fluido-estrutura*", Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

[6] Loula, A., Franca, L., Hughes, J., MIRANDA, I. (1987a), "*Stability, Convergence and Accuracy of a New Finite Element Method for the Circular Arch Problem.*", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 63, 281-303.

[7] Loula, A., Hughes, J., Franca, L., Miranda, I. (1987b), "*Mixed Petrov-Galerkin Methods for Timoshenko Beam Problem.*", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 63, 133-154.

[8] Malta, E.R. (2016), "*Investigação do Comportamento Estrutural de Tubos flexíveis sob Cargas Compressivas*", Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo.

[9] Oden, J, T; GRAHAM, F. C. (1983), "*Finite Elements: A Second Course*", Texas, Texas Institute for Computational Mechanics.

[10] Rincon, M. A; LIU, I. (2020), "*Introdução ao Método de Elementos Finitos.*", Rio de Janeiro, UFRJ/IM.

[11] Rizzo, N.A.S. (2010), "*Análise da Instabilidade das Armaduras de Dutos Flexíveis pelo Método de Elementos Finitos*", Dissertação de Mestrado, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro.

[12] Sá, G. B. (2019), "*Projeto e análise estrutural de um chassi de uma motocicleta de competição categoria Moto 3.*", Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

[13] Santos, A. J. B. (2007), "*Modelos Mecânicos e numéricos para estruturas flexíveis unidimensionais.*", Tese de Doutorado, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ.

[14] Shames, I.H, DYM, C. L. (1985), "*Energy and finite element methods in structural mechanics.*", McGraw Hill Higher Education, New York.

[15] Silva, L. G. (2018), "*Análise estrutural e modal de um chassi de motocicleta*", Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB.

[16] Souza, A; Paschoalini, A; Bazani, M. (2010),"*Modeling of Arterial Clipping by Finite Element Method*", Journal Mecánica Computacional, 29, 65-97.

[17] Souza, A. K. P. (2019), "*Análise de Vigas de Timoshenko pelo Método dos Elementos Finitos.*", Monografia (Graduação), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN.

[18] Steffens, J. C. (2019), "*Análise Estrutural de quadro para motocicleta elétrica através do método de elementos finitos*", Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, PR.

[19] Stein, E.M; SHAKARCHI, R. (2005), "*Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces.*", Princeton University Press, EUA.

[20] Timoshenko, S. (1953), History of Strength of Materials. Dover Publications, New York, 1983.

Apêndice A

Alguns resultados

A.1 Lemas

Lema 2: Seja $\pi_{l-1} : \mathbb{S}^h \to \mathbb{Q}^h$ a $\mathbb{Q}$-projeção, então existe uma constante $0 < \alpha_6 < \infty$ tal que

$$\| \boldsymbol{v}'_h - \pi_{l-1}\boldsymbol{v}'_h \|_0 \leq \alpha_6 h|\boldsymbol{v}_h|, \tag{A.1}$$

para cada $\boldsymbol{v}_h \in \mathbb{S}^h$.

Lema 3: Para h suficientemente pequeno, existe uma constante positiva $0 < \alpha_{7_h} < \infty$, independente de h, tal que

$$b(\mathbf{p}_h, \mathbf{p}_h) \geq \alpha_{7_h}|\mathbf{p}_h|_1^2, \tag{A.2}$$

para cada $\mathbf{p}_h \in \mathbb{W}_h$.

Lema 4: Para h suficientemente pequeno, existe uma constante positiva $0 < \alpha_{8_h} < \infty$, independente de h, tal que

$$\sup \frac{d(\mathbf{p}_h, \boldsymbol{\tau}_h)}{\| \mathbf{p}_h \|_1} \geq \alpha_{8_h} \| \boldsymbol{\tau}_h \|_0, \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{Z}_h, \mathbf{p}_h \neq 0. \tag{A.3}$$

As demonstrações dos Lemas (2, 3 e 4) podem ser vistas em Arunakirinathar (1993).

A.2 Equações que representam o modelo em função de suas componentes

Seja $\boldsymbol{\mu} : I = [0, L] \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. Consideremos os vetores unitários e ortogonais $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$, que representam os vetores tangencial, normal e binormal, que formam em cada ponto s uma base ortonormal. Suas derivadas $\mathbf{t}'(s) = \kappa\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{n}'(s) = -\kappa\mathbf{t}(s) + \rho\mathbf{b}(s)$, $\mathbf{b}'(s) = -\rho\mathbf{n}(s)$ fornecem informações sobre o comportamento da curva $\boldsymbol{\mu}$ na vizinhança de s, sendo que as funções geométricas $\rho > 0$ e $\kappa > 0$ representam a torção e a curvatura, respectivamente.

Denotamos por $\boldsymbol{f}(s) = (f_1, f_2, f_3)$, $\boldsymbol{u}(s) = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{\theta}(s) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\boldsymbol{m}(s) = (m_1, m_2, m_3)$, $\mathbf{n}(s) = (n_1, n_2, n_3)$, os vetores de força, deslocamento, rotação, esforços de flexão e torção, e esforços cisalhantes e normais, respectivamente.

Consideremos $\boldsymbol{u}(s)$ e $\boldsymbol{\theta}(s)$ como funções vetoriais com componentes na base intrínseca, $\boldsymbol{v}(s)$ e $\boldsymbol{\psi}(s)$ funções arbitrárias, como descritas abaixo:

$$\boldsymbol{u}(s) = u_1\mathbf{t}(s) + u_2\mathbf{n}(s) + u_3\mathbf{b}(s), \tag{A.4}$$
$$\boldsymbol{\theta}(s) = \theta_1\mathbf{t}(s) + \theta_2\mathbf{n}(s) + \theta_3\mathbf{b}(s), \tag{A.5}$$
$$\boldsymbol{v}(s) = v_1\mathbf{t}(s) + v_2\mathbf{n}(s) + v_3\mathbf{b}(s), \tag{A.6}$$
$$\boldsymbol{\psi}(s) = \psi_1\mathbf{t}(s) + \psi_2\mathbf{n}(s) + \psi_3\mathbf{b}(s). \tag{A.7}$$

A derivada da função vetorial $\boldsymbol{u}(s)$ é dada da seguinte forma:

$$\boldsymbol{u}'(s) = (u_1'\mathbf{t}(s) + u_1\mathbf{t}'(s)) + (u_2'\mathbf{n}(s) + u_2\mathbf{n}'(s)) + (u_3'\mathbf{b}(s) + u_3\mathbf{b}'(s)) \tag{A.8}$$
$$= (u_1'\mathbf{t}(s) + u_1\kappa\mathbf{n}(s)) + (u_2'\mathbf{n}(s) + u_2(-\kappa\mathbf{t}(s) + \rho\mathbf{b}(s))) + \tag{A.9}$$
$$+(u_3'\mathbf{b}(s) + u_3(-\rho\mathbf{n}(s)) \tag{A.10}$$
$$\boldsymbol{u}'(s) = (u_1' - \kappa u_2)\mathbf{t}(s) + (\kappa u_1 + u_2' - \rho u_3)\mathbf{n}(s) + (\rho u_2 + u_3')\mathbf{b}(s). \tag{A.11}$$

Analogamente, segue que:

$$\boldsymbol{\theta}'(s) = (\theta_1' - \kappa\theta_2)\mathbf{t}(s) + (\kappa\theta_1 + \theta_2' - \rho\theta_3)\mathbf{n}(s) + (\rho\theta_2 + \theta_3')\mathbf{b}(s), \tag{A.12}$$
$$\boldsymbol{v}'(s) = (v_1' - \kappa v_2)\mathbf{t}(s) + (\kappa v_1 + v_2' - \rho v_3)\mathbf{n}(s) + (\rho v_2 + v_3')\mathbf{b}(s), \tag{A.13}$$
$$\boldsymbol{\psi}'(s) = (\psi_1' - \kappa\psi_2)\mathbf{t}(s) + (\kappa\psi_1 + \psi_2' - \rho\psi_3)\mathbf{n}(s) + (\rho\psi_2 + \psi_3')\mathbf{b}(s). \tag{A.14}$$

Substituindo as relações constitutivas (3.17 e 3.18) e cinemáticas (3.19 e 3.20) nas equações de equilíbrio na forma vetorial descritas em (3.5 e 3.6), temos:

$$A_u\boldsymbol{\varepsilon}'(s) + \boldsymbol{f}(s) = \mathbf{0}, \tag{A.15}$$
$$A_\theta\boldsymbol{\theta}''(s) + \mathbf{t}(s) \times A_u\boldsymbol{\varepsilon}(s) = \mathbf{0} \tag{A.16}$$

Multiplicando as equações de equilíbrio anteriores pelas funções vetoriais arbitrárias $\boldsymbol{v}(s)$ e $\boldsymbol{\psi}(s)$ e integrando, segue que:

$$\int_0^s A_\theta\boldsymbol{\theta}'(s)\cdot\boldsymbol{\psi}'(s)ds + \int_0^s A_u[\boldsymbol{u}'(s) - \boldsymbol{\theta}(s)\times\mathbf{t}(s)]\cdot[\boldsymbol{v}'(s) - \boldsymbol{\psi}(s)\times\mathbf{t}(s)]ds = \int_0^s \boldsymbol{f}(s)\cdot\boldsymbol{v}(s)ds. \tag{A.17}$$

Como $\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{t} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)\times(1, 0, 0) = \theta_3\mathbf{n} - \theta_2\mathbf{b}$ e $\boldsymbol{u}'(s) - \boldsymbol{\theta}(s)\times\mathbf{t} = (u_1' - \kappa u_2)\mathbf{t} +$

$(\kappa u_1' + u_2' - \rho u_3 - \theta_3)\mathbf{n} + (\rho u_2 + u_3' + \theta_2)\mathbf{b}$, observemos que:

$$\int_0^s A_\theta \boldsymbol{\theta}'(s) \cdot \boldsymbol{\psi}'(s) ds = \int_0^s GJ(\theta_1' - \kappa\theta_2) \cdot (\psi_1' - \kappa\psi_2) ds + \\ + \int_0^s EI_1(\kappa\theta_1 + \theta_2' - \rho\theta_3) \cdot (\kappa\psi_1 + \psi_2' - \rho\psi_3) ds + \int_0^s EI_2(\rho\theta_2 + \theta_3') \cdot (\rho\psi_2 + \psi_3') ds \tag{A.18}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_0^s A_u(\boldsymbol{u}'(s) - \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{t}(s)) \cdot (\boldsymbol{v}'(s) - \boldsymbol{\psi}(s) \times \mathbf{t}(s)) ds = \\ &= \int_0^s EA(u_1' - \kappa u_2) \cdot (v_1' - \kappa v_2) ds + \\ &+ \int_0^s GAk_1(\kappa u_1 + u_2' - \rho u_3 - \theta_3) \cdot (\kappa v_1 + v_2' - \rho v_3 - \psi_3) ds + \\ &+ \int_0^s GAk_2(\rho u_2 + u_3' + \theta_2) \cdot (\rho v_2 + v_3' + \psi_2). \end{aligned} \tag{A.19}$$

Com isso, segue que:

$$\begin{aligned} &\int_0^s A_\theta \boldsymbol{\theta}'(s) \cdot \boldsymbol{\psi}'(s) ds + \int_0^s A_u(\boldsymbol{u}'(s) - \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{t}(s)) \cdot (\boldsymbol{v}'(s) - \boldsymbol{\psi}(s) \times \mathbf{t}(s)) ds = \\ &= \int_0^s GJ(\theta_1' - \kappa\theta_2) \cdot (\psi_1' - \kappa\psi_2) ds + \int_0^s EI_1(\kappa\theta_1 + \theta_2' - \rho\theta_3) \cdot (\kappa\psi_1 + \psi_2' - \rho\psi_3) ds + \\ &+ \int_0^s EI_2(\rho\theta_2 + \theta_3') \cdot (\rho\psi_2 + \psi_3') ds + \int_0^s EA(u_1' - \kappa u_2) \cdot (v_1' - \kappa v_2) ds + \\ &+ \int_0^s GAk_1(\kappa u_1 + u_2' - \rho u_3 - \theta_3) \cdot (\kappa v_1 + v_2' - \rho v_3 - \psi_3) ds + \\ &+ \int_0^s GAk_2(\rho u_2 + u_3' + \theta_2) \cdot (\rho v_2 + v_3' + \psi_2) ds, \end{aligned} \tag{A.20}$$

ou equivalentemente,

$$\int_0^s A_\theta \boldsymbol{\theta}'(s)\cdot\boldsymbol{\psi}'(s)ds + \int_0^s A_u(\boldsymbol{u}'(s)-\boldsymbol{\theta}(s)\times\mathbf{t}(s))\cdot(\boldsymbol{v}'(s)-\boldsymbol{\psi}(s)\times\mathbf{t}(s))ds =$$
$$= GJ[(\theta_1',\psi_1')-(\theta_1',\kappa\psi_2)-(\kappa\theta_2,\psi_1')+(\kappa\theta_2,\kappa\psi_2)]+$$
$$+ EI_1[(\kappa\theta_1,\kappa\psi_1)+(\kappa\theta_1,\psi_2')-(\kappa\theta_1,\rho\psi_3)+(\theta_2',\kappa\psi_1)+(\theta_2',\psi_2')-(\theta_2',\rho\psi_3)-$$
$$-(\rho\theta_3,\kappa\psi_1)-(\rho\theta_3,\psi_2')+(\rho\theta_3,\rho\psi_3)]+EI_2[(\rho\theta_2,\rho\psi_2)+(\rho\theta_2,\psi_3')+(\theta_3',\rho\psi_2)+$$
$$+(\theta_3',\psi_3')]+EA[(u_1',v_1')-(u_1',\kappa v_2)-(\kappa u_2,v_1')+(\kappa u_2,\kappa v_2)]+GAk_1[(\kappa u_1,\kappa v_1)+$$
$$+(\kappa u_1,v_2')-(\kappa u_1,\rho v_3)-(\kappa u_1,\psi_3)+(u_2',\kappa v_1)+(u_2',v_2')-(u_2',\rho v_3)-(u_2',\psi_3)-$$
$$-(\rho u_3,\kappa v_1)-(\rho u_3,v_2')+(\rho u_3,\rho v_3)+(\rho u_3,\psi_3)-(\theta_3,\kappa v_1)-(\theta_3,v_2')+(\theta_3,\rho v_3)+$$
$$+(\theta_3,\psi_3)]+GAk_2[(\rho u_2,\rho v_2)+(\rho u_2,v_3')+(\rho u_2,v_2)+(u_3',\rho v_2)+(u_3',v_3')+$$
$$+(u_3',v_2)+(\theta_2,\rho v_2)+(\theta_2,v_3')+(\theta_2,v_2)]=\int_0^s \boldsymbol{f}(s)\cdot\boldsymbol{v}(s)ds=(f_1,v_1)+$$
$$+(f_2,v_2)+(f_3,v_3)+(\mathbf{0},\psi_1)+(\mathbf{0},\psi_2)+(\mathbf{0},\psi_3) \tag{A.21}$$

Então, calculemos o trabalho interno, dado pela integral do produto entre a tensão e a deformação no domínio I, o qual podemos representar da seguinte forma:

$$-\int_0^s m_1\cdot(\psi_1'-\kappa\psi_2)ds-\int_0^s m_2\cdot(\kappa\psi_1+\psi_2'-\rho\psi_3)ds-\int_0^s m_3\cdot(\rho\psi_2+\psi_3')ds-$$
$$-\int_0^s n_1\cdot(v_1'-\kappa v_2)ds-\int_0^s n_2\cdot(\kappa v_1+v_2'-\rho v_3-\psi_3)ds-$$
$$-\int_0^s n_3\cdot(\rho v_2+v_3'+\psi_2)ds. \tag{A.22}$$

Já o trabalho externo corresponde a integral do produto entre as forças externas e o deslocamento no domínio I, como descrito a seguir:

$$\int_0^s (f_1\cdot v_1+f_2\cdot v_2+f_3\cdot v_3)+\mathbf{0}\cdot\psi_1+\mathbf{0}\cdot\psi_2+\mathbf{0}\cdot\psi_3)ds. \tag{A.23}$$

Mas pelo princípio dos trabalhos virtuais, segue que:

$$\int_0^s m_1\cdot(\psi_1'-\kappa\psi_2)ds+\int_0^s m_2\cdot(\kappa\psi_1+\psi_2'-\rho\psi_3)ds+\int_0^s m_3\cdot(\rho\psi_2+\psi_3')ds+$$
$$+\int_0^s n_1\cdot(v_1'-\kappa v_2)ds+\int_0^s n_2\cdot(\kappa v_1+v_2'-\rho v_3-\psi_3)ds+$$
$$+\int_0^s n_3\cdot(\rho v_2+v_3'+\psi_2)ds=\int_0^s (f_1\cdot v_1)ds+\int_0^s (f_2\cdot v_2)ds+\int_0^s (f_3\cdot v_3)ds+$$
$$+\int_0^s (\mathbf{0}\cdot\psi_1)ds+\int_0^s (\mathbf{0}\cdot\psi_2)ds+\int_0^s (\mathbf{0}\cdot\psi_3)ds, \tag{A.24}$$

ou equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
&(m_1,\psi_1') - (m_1,\kappa\psi_2) + (m_2,\kappa\psi_1) + (m_2,\psi_2') - (m_2,\rho\psi_3) + (m_3,\rho\psi_2) + (m_3,\psi_3') + \\
&+ (n_1,v_1') - (n_1,\kappa v_2) + (n_2,\kappa v_1) + (n_2,v_2') - (n_2,\rho v_3) - (n_2,\psi_3) + (n_3,\rho v_2) + \\
&+ (n_3,v_3') + (n_3,\psi_2) = m_1\psi_1|_0^s - (m_1',\psi_1) - (m_1,\kappa\psi_2) + (m_2,\kappa\psi_1) + m_2\psi_2|_0^s - \\
&- (m_2',\psi_2) - (m_2,\rho\psi_3) + (m_3,\rho\psi_2) + m_3\psi_3|_0^s - (m_3',\psi_3) + n_1v_1|_0^s - (n_1',v_1) - \\
&- (n_1,\kappa v_2) + (n_2,\kappa v_1) + n_2v_2|_0^s - (n_2',v_2) - (n_2,\rho v_3) - (n_2,v_3) + (n_3,\rho v_2) + \\
&+ n_3v_3|_0^s - (n_3',v_3) + (n_3,\psi_2) = (f_1,v_1) + (f_2,v_2) + (f_3,v_3) + \\
&+ (\mathbf{0},\psi_1) + (\mathbf{0},\psi_2) + (\mathbf{0},\psi_3).
\end{aligned}
\tag{A.25}
$$

Agrupando os termos semelhantes e aplicando as condições de contorno, segue que:

$$
\begin{aligned}
&(-m_1 + \kappa m_2,\psi_1) + (-\kappa m_1 - m_2' + \rho m_3 + n_3,\psi_2) + (-\rho m_2 - m_3' - n_2,\psi_3) + \\
&+ (-n_1' + \kappa n_2, v_1) + (-\kappa n_1 - n_2' + \rho n_3, v_2) + (-\rho n_2 - n_3', v_3) = (f_1,v_1) + (f_2,v_2) \\
&+ (f_3,v_3) + (\mathbf{0},\psi_1) + (\mathbf{0},\psi_2) + (\mathbf{0},\psi_3)
\end{aligned}
\tag{A.26}
$$

Logo, as equações de equilíbrio são descritas em função de suas componentes, como

$$-n_1' + \kappa n_2 = f_1 \tag{A.27}$$
$$-\kappa n_1 - n_2' + \rho n_3 = f_2 \tag{A.28}$$
$$-\rho n_2 - n_3' = f_3 \tag{A.29}$$
$$-m_1 + \kappa m_2 = \mathbf{0} \tag{A.30}$$
$$-\kappa m_1 - m_2' + \rho m_3 + n_3 = \mathbf{0} \tag{A.31}$$
$$-\rho m_2 - m_3' - n_2 = \mathbf{0}. \tag{A.32}$$

Portanto comparando as equações (A.21) e (A.25), obtemos as relações constitutivas descritas em função de suas componentes como

$$n_1 = EA(u_1' - \kappa u_2) \tag{A.33}$$

$$n_2 = GAk_1(\kappa u_1 + u_2' - \rho u_3 - \theta_3) \tag{A.34}$$

$$n_3 = GAk_2(\rho u_2 + u_3' + \theta_2) \tag{A.35}$$

$$m_1 = GJ(\theta_1' - \kappa\theta_2) \tag{A.36}$$

$$m_2 = EI_1(\theta_2' + \kappa\theta_1 - \rho\theta_3) \tag{A.37}$$

$$m_3 = EI_2(\theta_3' + \rho\theta_2). \tag{A.38}$$