

Bárbara Vitória Silva Guinote

**Um estudo da eletrodinâmica acoplada a
férmions e alguns aspectos da mecânica
quântica relativística**

João Pessoa - PB

13 de maio de 2025

Bárbara Vitória Silva Guinote

Um estudo da eletrodinâmica acoplada a férmions e alguns aspectos da mecânica quântica relativística

Trabalho de conclusão de curso apresentado
como componente curricular obrigatório para
obtenção do título de Bacharel em Física pela
Universidade Federal de Paraíba.

Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Física

Orientador: Paulo Porfírio

João Pessoa - PB

13 de maio de 2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G964e Guinote, Bárbara Vitória Silva.

Um estudo da eletrodinâmica acoplada a férmions e alguns aspectos da mecânica quântica relativística / Bárbara Vitória Silva Guinote. - João Pessoa, 2025.
53 p. : il.

Orientação: Paulo José Ferreira da Silva Porfírio.
TCC (Curso de Bacharelado em Física) - UFPB/CCEN.

1. Teoria de campos. 2. Eletromagnetismo. 3. Mecânica quântica relativística. I. Porfírio, Paulo José Ferreira da Silva. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 53(043.2)

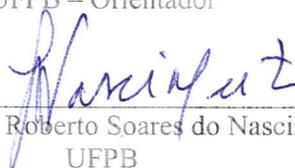


Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação dos Cursos de Graduação em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa do Trabalho
de Conclusão de Curso de Bacharelado em
Física, da discente Bárbara Vitória Guinote.

Aos 05 dias do mês de maio do ano de 2025, às 10h, na sala 201 - Departamento de Física/CCEN/UFPB, realizou-se a Sessão Pública da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Física, da discente Bárbara Vitória Guinote, sendo a Banca Examinadora constituída pelos docentes Prof. Dr. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva (UFPB), orientador e presidente da banca, Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento (UFPB) e Prof. Dr. Albert Petrov (UFPB). Dando início aos trabalhos, o professor orientador e presidente da banca examinadora comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, concedeu a palavra à discente para que fizesse a explanação de seu Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado "*Um estudo da eletrodinâmica acoplada a férmions e alguns aspectos da mecânica quântica relativística*". Concluída a exposição, a discente foi arguida pelos membros presentes da Banca Examinadora. Após as arguições, a Banca, de comum acordo, declarou que o Trabalho apresentado foi aprovado com nota 10,0. E para constar, encerrada a sessão, lavrou-se esta ata que será assinada pelos presentes. João Pessoa, 05 de maio de 2025.


Prof. Dr. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva
UFPB – Orientador


Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento
UFPB


Prof. Dr. Albert Petrov
UFPB

Dedico esse trabalho à minha mãe, Ana Patricia da Silva (in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, em especial aos meus avós Cícera e Paulo, meu tio João Bosco e ao meu irmão Bruno, por todo o suporte emocional e financeiro que foi extremamente fundamental para a minha formação, apoiando-me independentemente da minha decisão e me dando muito amor.

À minha mãe, Ana Patricia (*in memoriam*), a quem dedico este trabalho com todo o meu amor e gratidão. Foi ela quem despertou em mim a curiosidade pelo entendimento do universo, inspirando-me a buscar conhecimento sobre tudo ao nosso redor e a jamais desistir dos meus sonhos. Seu amor, sua força e sua luz seguem comigo em cada passo desta jornada. Para sempre a amarei, incondicionalmente.

Ao meu companheiro José Augusto Jr e toda a sua família, em especial ao meu sogro José Augusto (*in memoriam*) e a minha sogra Kelma Martins que me acompanhou do meio ao fim da minha jornada, me dando suporte, apoio e muito carinho.

Aos professores do Departamento de Física da UFPB, meu sincero agradecimento. Em especial, aos professores Carlos Romero e Jorge Gabriel, por suas aulas brilhantes nas disciplinas que cursei com grandes discussões filosóficas por trás de toda a física; ao professor Charlie Salvador, pelos excelentes debates no laboratório, pelos cafés, conversas e conselhos esclarecedores que tanto contribuíram para minha trajetória acadêmica; e aos professores Henrondy e Eugênio, pelas aulas excepcionais e pelos valiosos conselhos que me ajudaram ao longo do meu desenvolvimento.

Um agradecimento em especial ao meu orientador Paulo Porfírio por ter me proporcionado tempo para exercer seu trabalho com excelência e ter me dado a chance de realizar esse trabalho.

A todos os meus amigos da universidade, minha gratidão. Em especial, à minha querida amiga Tarcila, que esteve comigo desde o início até o fim da nossa jornada na graduação e se tornou uma grande companheira de pesquisa juntamente a Pedro, compartilhando momentos únicos ao meu lado. Às incríveis meninas da Física – Rafaelly, Fernanda e Isa –, aos meus grandes amigos, que se tornaram verdadeiros irmãos, Erick e Miguel, e a Hugo, por todas as caronas e conversas que tornaram essa trajetória ainda mais especial.

Aos meus melhores amigos, Rafael Pimentel e Dhiego Andrade, que estiveram ao meu lado ao longo de todos esses anos, acompanhando cada passo desta jornada. Rafael, que mesmo de longe, nunca deixou de estar comigo, independente dos acasos da vida. Dhiego, com quem passei metade da graduação, compartilhando muitos momentos, boas

risadas e choros, mas sempre apoiando um ao outro. Seus incentivos e suas inspirações foram fundamentais para que eu seguisse em frente, especialmente nos momentos mais difíceis. Agradeço verdadeiramente por terem sido meu porto seguro, por me ouvirem com paciência, aconselharem com carinho e me apoiarem de forma incondicional. Sou imensamente grata pela sua amizade e por todo o suporte em cada etapa dessa caminhada.

Obrigada a todos por fazerem parte da minha trajetória e se tornarem uma família para mim.

“Pick a flower on Earth and you move the farthest star.” - Paul Dirac

Resumo

O presente trabalho procura explorar os fundamentos da Teoria de Campos Clássica e Quântica, estabelecendo uma ponte entre a Mecânica Clássica e os modernos conceitos de simetria e invariância de gauge. Inicialmente, desenvolve-se o formalismo variacional e tensorial necessário para compreender a transição da física clássica para a formulação em campos. Em seguida, analisa-se o eletromagnetismo sob a ótica de uma teoria de gauge, com ênfase na covariância das equações de Maxwell e na distinção entre simetrias globais e locais. O estudo também contempla o princípio de gauge e sua relevância na mecânica quântica. Finalmente, introduz-se a mecânica quântica relativística por meio das equações de Klein-Gordon e Dirac, discutindo suas soluções, correntes de probabilidade e a famosa interpretação do Mar de Dirac. Este estudo tem por objetivo consolidar uma base conceitual e matemática sólida para a compreensão das teorias fundamentais que regem as interações físicas em diferentes regimes.

Palavras-chave: Teoria de Campos; Invariância de Gauge; Equação de Dirac; Eletromagnetismo; Mecânica Quântica Relativística.

Abstract

This work seeks to explore the foundations of Classical and Quantum Field Theory, establishing a bridge between Classical Mechanics and modern concepts such as symmetry and gauge invariance. It begins by developing the variational and tensorial formalism required to understand the transition from classical physics to field formulations. Then, electromagnetism is examined from the perspective of a gauge theory, with emphasis on the covariance of Maxwell's equations and the distinction between global and local symmetries. The study also addresses the gauge principle and its role in quantum mechanics. Finally, relativistic quantum mechanics is introduced through the Klein-Gordon and Dirac equations, discussing their solutions, probability currents, and the famous Dirac Sea interpretation. This study aims to provide a solid conceptual and mathematical foundation for understanding the fundamental theories governing physical interactions in various regimes.

Keywords: Field Theory; Gauge Invariance; Dirac Equation; Electromagnetism; Relativistic Quantum Mechanics.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 12 |
| 2 | TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS | 14 |
| 2.1 | Da Mecânica Clássica ao Princípio Variacional | 14 |
| 2.2 | Transição para Campos | 17 |
| 2.2.1 | Postulados da Relatividade | 17 |
| 2.2.2 | Notação e Formalismo Tensorial | 17 |
| 2.2.3 | Tempo Próprio e Quadri-Velocidade | 18 |
| 2.2.4 | Campos Clássicos | 19 |
| 3 | ELETROMAGNETISMO COMO UMA TEORIA DE GAUGE | 21 |
| 3.1 | As Equações de Maxwell: Covariância de Lorentz e Invariância de Gauge | 22 |
| 3.1.1 | Simetria global x Simetria Local | 23 |
| 3.2 | Invariância de Gauge | 24 |
| 3.2.1 | Formulação covariante | 25 |
| 3.3 | Invariância de Gauge e Covariância na Mecânica Quântica | 28 |
| 3.4 | O Princípio de Gauge | 33 |
| 4 | MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA | 36 |
| 4.1 | Equação de Klein-Gordon | 36 |
| 4.1.1 | Corrente de probabilidade para equação de KG | 38 |
| 4.1.2 | Solução de onda plana | 39 |
| 4.2 | Equação de Dirac | 40 |
| 4.2.1 | Solução de onda plana | 43 |
| 4.2.2 | Probabilidade de corrente para a equação de Dirac | 44 |
| 4.2.3 | Soluções da equação de Dirac para partícula Livre | 45 |
| 4.2.3.1 | Soluções para Energia Positiva | 45 |
| 4.2.3.2 | Soluções para Energia Negativa | 46 |
| 4.2.4 | Interpretação de Dirac: o Mar de Dirac | 47 |
| 5 | CONCLUSÃO | 49 |
| | REFERÊNCIAS | 50 |

APÊNDICES

51

APÊNDICE A – UNIDADES NATURAIS DE HEAVISIDE-LORENTZ 52

1 Introdução

Ao longo do século XX, a física teórica viveu uma revolução silenciosa, transformando radicalmente nossa compreensão das interações fundamentais da natureza. Nesse período, consolidou-se um arcabouço matemático sofisticado, capaz de descrever fenômenos que vão do comportamento quântico das partículas à estrutura do cosmos. Dois marcos se destacam nessa jornada: a reformulação do **eletromagnetismo como teoria de gauge** e o surgimento da **mecânica quântica relativística**, pilares que sustentam a moderna descrição das forças fundamentais.

Originalmente formulada por James Clerk Maxwell no século XIX, a teoria eletromagnética unificou fenômenos elétricos e magnéticos em uma estrutura matemática elegante. Contudo, foi apenas no século seguinte, com o advento da relatividade restrita, que sua simetria intrínseca ganhou novos contornos. Hermann Weyl, ao propor o conceito de **invariância de gauge**, revelou uma simetria ainda mais profunda, associada ao grupo $U(1)$. Essa reinterpretação não apenas elucidou a natureza dos potenciais eletromagnéticos, mas também pavimentou o caminho para a formulação do Modelo Padrão, no qual as interações fundamentais são descritas por teorias de gauge.

Enquanto o eletromagnetismo era reinterpretado sob a ótica das simetrias de gauge, a mecânica quântica também enfrentava desafios conceituais importantes. A equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t),$$

embora extremamente eficaz na descrição de sistemas atômicos não relativísticos, apresenta limites de aplicabilidade quando confrontada com os princípios da relatividade restrita. Essa limitação impulsionou a busca por uma equação de onda que fosse compatível com a estrutura relativística do espaço-tempo, o que levou, inicialmente, à formulação da equação de Klein-Gordon,

$$\left(\square + m^2\right) \phi = 0,$$

cujos limites interpretativos motivaram avanços decisivos. Foi Paul Dirac quem, em um salto teórico inspirado, propôs uma equação relativística para partículas de spin- $\frac{1}{2}$:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

Sua formulação não apenas desvendou o comportamento do elétron, como previu a existência da antimatéria - triunfo confirmado experimentalmente em 1932, com a descoberta do pósitron.

A intersecção entre eletromagnetismo e mecânica quântica relativística materializou-se na **eletrodinâmica quântica (QED)**, teoria pioneira que descreve interações mediadas

por fótons. Nesse contexto, o princípio de gauge mostrou-se universal: as forças fundamentais passaram a ser entendidas como trocas de bósons, ideia que se estendeu às interações fraca e forte. Assim, o Modelo Padrão emergiu como síntese desses esforços, unificando matéria e força sob um mesmo formalismo.

Diante desse cenário, este trabalho investiga a estrutura matemática e as implicações conceituais do eletromagnetismo como teoria de gauge, explorando seu desenvolvimento juntamente à mecânica quântica relativística. O objetivo é elucidar como esses pilares teóricos fundamentam a descrição moderna das interações físicas, destacando seu papel na construção de um entendimento coerente e unificado da natureza.

2 Teoria Clássica de Campos

A formulação da Mecânica Clássica, baseada nas leis de Newton, fornece uma descrição eficaz para sistemas de partículas pontuais, mas sua aplicabilidade torna-se limitada quando lidamos com sistemas contínuos ou com teorias relativísticas. Nesse cenário, uma abordagem mais geral e fundamental emerge a partir do formalismo variacional, onde as equações do movimento não são impostas diretamente, mas derivadas a partir de um princípio fundamental: o **Princípio de Mínima Ação**.

Neste capítulo, iniciaremos com a reformulação da Mecânica Clássica de Newton no contexto do princípio variacional, estabelecendo as bases conceituais para uma descrição mais requintada dos sistemas físicos. Em seguida, avançaremos da dinâmica de sistemas de partículas para a Teoria Clássica de Campos, generalizando os conceitos da equação de Euler-Lagrange para descrever grandezas distribuídas no espaço e no tempo. Essa transição requer a introdução de elementos da Relatividade Restrita, uma vez que campos físicos, como o eletromagnético, devem obedecer às transformações relativísticas para garantir a consistência com a estrutura espaço-temporal da natureza. Por fim, demonstraremos a abordagem para campos contínuos, chegando à equação de Euler-Lagrange para campos.

2.1 Da Mecânica Clássica ao Princípio Variacional

Sabe-se que uma das teorias científicas mais brilhantes e revolucionárias de todos os tempos foi o trabalho desenvolvido por Isaac Newton, que, em 1687, publicou a obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, um tratado em três volumes no qual estabeleceu as bases da mecânica clássica [1, 2].

O formalismo adotado por Newton nessa teoria foi a mecânica vetorial, cujo objetivo é identificar todas as forças atuantes sobre uma partícula em um dado instante de tempo e, a partir disso, determinar seu movimento subsequente. Essa abordagem se fundamenta na Segunda Lei de Newton, que estabelece a relação entre a força resultante aplicada a uma partícula e sua aceleração:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad (2.1)$$

em que: \vec{F} representa a força que atua sobre a partícula, \vec{p} representa o momento linear e \vec{r} representa o vetor posição.

A teoria desenvolvida por Newton continua sendo bem-sucedida na resolução de diversos problemas, permitindo a derivação dos teoremas de conservação do momento linear, do momento angular e da energia. No entanto, apesar de sua grande utilidade e

do seu amplo limite de validade, o formalismo vetorial utilizado por Newton apresenta dificuldades ao lidar com certos tipos de problemas, especialmente em sistemas com muitas partículas ou com vínculos, nos quais a identificação das forças atuantes em cada partícula torna-se inviável.

Como alternativa ao formalismo vetorial — no qual é necessário identificar todas as forças que atuam sobre cada partícula para determinar suas equações de movimento —, é possível obter essas mesmas equações a partir de um único princípio variacional fundamental, conhecido como **Princípio de Hamilton**. Esse princípio fornece uma formulação mais geral e elegante da mecânica, sendo considerado mais fundamental do que a abordagem baseada diretamente nas forças. O formalismo resultante estabelece uma base poderosa e unificada, capaz de descrever uma ampla variedade de sistemas físicos de forma mais sistemática e sofisticada.

A construção do formalismo que se seguirá será no **Princípio de Hamilton**, que afirma que o movimento do sistema entre os tempos t_1 e t_2 é tal que, dentre todos os caminhos que o sistema poderia percorrer, o que ele realmente irá percorrer será dado pela ação.

A **ação** de um sistema é uma grandeza fundamental na mecânica analítica e na teoria de campos, e serve como a base para a formulação do **princípio variacional**. Ela é definida como a integral da lagrangiana ao longo do tempo:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (2.2)$$

onde:

- S é a ação do sistema;
- $L(q, \dot{q}, t)$ é a **lagrangiana**, que comumente é dada pela diferença entre a energia cinética e a energia potencial:

$$L = T - V, \quad (2.3)$$

sendo ela a forma correta de restaurar a segunda lei de Newton e sua simetria; - q, \dot{q} são as **coordenadas generalizadas** do sistema e suas velocidades generalizadas associadas às coordenadas q respectivamente.

O princípio variacional que rege a ação é conhecido como o Princípio de Hamilton, esse princípio estabelece que a trajetória física de um sistema entre dois instantes de tempo ocorre de tal forma que a ação S é **extremizada** (geralmente minimizada ou estacionária):

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (2.4)$$

utilizando os princípios do cálculo variacional e o fato da lagrangiana depender apenas de q_i, \dot{q}_i , temos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt. \quad (2.5)$$

Na equação acima, e em todas a partir daqui, será utilizada a notação da soma de Einstein, em que dois índices repetidos indicam uma soma no mesmo, eliminando a necessidade de carregar o símbolo de somatório. O índice i varia de 1 a n , sendo n o número de graus de liberdade do sistema — isto é, o número mínimo de coordenadas independentes necessárias para descrever completamente a configuração do sistema. Esse valor pode ser obtido subtraindo o número de restrições (ou vínculos) impostas ao sistema do número total de coordenadas que seriam necessárias para descrever as posições de todas as partículas livremente [1, 2].

Para o presente trabalho, consideremos verdadeira a seguinte relação de comutação:

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d(\delta q)}{dt}. \quad (2.6)$$

Com objetivo de obtermos a equação de Euler-Lagrange, fazemos uma integração por partes em (2.5) a fim de eliminar determinados termos, portanto:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\delta q_i}{dt} dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (2.7)$$

No entanto, as condições de contorno iniciais do problema fixam um valor das coordenadas nos pontos inicial e final da trajetória, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, com isso, o primeiro termo do lado direito da equação (2.7) é nulo. Substituindo esse resultado na equação (2.5):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0. \quad (2.8)$$

Como as variações infinitesimais são arbitrárias, a condição para que a equação (2.8) seja satisfeita é que os coeficientes que multiplicam esses termos sejam nulos. Essa condição nos leva diretamente às **equações de Euler-Lagrange**, que são as equações de movimento do sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (2.9)$$

A formulação lagrangiana baseada na ação é extremamente poderosa, pois permite descrever sistemas complexos de maneira mais simples e integralizada, além de ser um caminho natural para a transição à teoria de campos e à mecânica quântica.

2.2 Transição para Campos

Na seção anterior, introduzimos o formalismo Lagrangiano para a mecânica de partículas pontuais. Esse formalismo pode ser facilmente generalizado para descrever sistemas contínuos, como veremos nesta seção.

Aqui, descreveremos um sistema utilizando funções contínuas das variáveis espaço-temporais. Essas funções são chamadas de **campos** e serão o objeto central de estudo deste trabalho a partir de agora.

Antes de apresentar a generalização para campos, é essencial definir alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento dos cálculos que faremos. No estudo de partículas, não enfatizamos a distinção entre coordenadas covariantes e contravariantes, uma questão que surge naturalmente na formulação relativística. Entretanto, para os temas abordados nas seções adiante, essa distinção será crucial [4].

2.2.1 Postulados da Relatividade

Antes de iniciarmos a introdução de algumas notações e formalismos, é importante lembrar que a teoria da Relatividade Especial é baseada em dois postulados fundamentais [3]:

1. “As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.”
2. “A velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores inerciais, independentemente do movimento da fonte.”

Esses postulados implicam diretamente nas transformações de Lorentz, que substituem as transformações de Galileu da mecânica clássica. Essas transformações mostram que o espaço e o tempo estão interligados em uma única entidade: o espaço-tempo de Minkowski.

2.2.2 Notação e Formalismo Tensorial

Uma das questões mais importantes da física é estudar como os objetos de uma teoria comportam-se sob determinadas transformações. Sob uma transformação de coordenadas $x^\mu = x'^\mu$, objetos se transformam de duas formas distintas [1, 2]. Primeiramente, temos os chamados **objetos contravariantes**, que se transformam da seguinte maneira:

$$V^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} V^j.$$

Dizemos que um vetor é contravariante porque seus componentes se transformam de maneira oposta (ou "contra") à base do sistema de coordenadas. Isso ocorre porque, quando mudamos o sistema de referência (isto é, os eixos de coordenadas), a base vetorial se transforma de modo que os componentes do vetor se ajustem para que o vetor geométrico

como um todo permaneça o mesmo objeto no espaço. Em outras palavras, o vetor permanece fixo no espaço, enquanto os eixos de coordenadas giram ou se deformam — e seus componentes devem variar de forma a compensar essa mudança. Essa é a essência do comportamento contravariante.

Para o presente trabalho, usaremos a seguinte transformação:

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}. \quad (2.10)$$

Por outro lado, vejamos agora como um vetor dado pelo gradiente de um campo escalar transforma-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}, \quad (2.11)$$

onde coordenadas do espaço-tempo são descritas pelo quadri vetor da posição:

$$x^{\mu} = (ct, \mathbf{x}), \quad (2.12)$$

em que $\mu = 0, 1, 2, 3$, sendo $x^0 = ct$ e $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ as coordenadas espaciais.

A métrica de Minkowski é a estrutura matemática que define a geometria do espaço-tempo na Relatividade Especial. Ela permite medir intervalos entre eventos de forma invariante sob transformações de Lorentz, distinguindo separações do tipo tempo, luz e espaço. Representada por $\eta_{\mu\nu}$ e definida como:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

A métrica permite calcular a separação entre dois eventos no espaço-tempo, nos permitindo calcular intervalos invariante como:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (2.14)$$

Como consequência, o intervalo ds^2 se mantém invariante sob transformações de Lorentz, preservando a estrutura causal do espaço-tempo entre diferentes referenciais inerciais.

2.2.3 Tempo Próprio e Quadri-Velocidade

O **tempo próprio** $d\tau$ é o intervalo de tempo medido no referencial da própria partícula. Ele está relacionado ao intervalo espaço-temporal pela equação [3]:

$$d\tau^2 = ds^2 = \eta^{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}. \quad (2.15)$$

A **quadri-velocidade** de uma partícula é definida como a derivada do quadri vetor posição em relação ao tempo próprio:

$$\dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}. \quad (2.16)$$

Ela satisfaz a relação fundamental:

$$\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = c^2, \quad (2.17)$$

o que garante que seu módulo seja invariante sob transformações de Lorentz.

O **quadri-momento** de uma partícula de massa m é definido como:

$$P^\mu = m\dot{x}^\mu. \quad (2.18)$$

Isso leva à conhecida relação energia-momento relativística:

$$E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = m^2c^4. \quad (2.19)$$

Agora, com a base matemática necessária descrita, vamos seguir adiante e iniciar o estudo do formalismo lagrangiano para campos.

2.2.4 Campos Clássicos

Ao transitarmos da formulação de um sistema discreto de partículas para a descrição de um campo contínuo, a Lagrangiana L deixa de ser a quantidade mais conveniente para descrever o sistema. Em seu lugar, introduzimos a densidade Lagrangiana \mathcal{L} , pois os sistemas de campo possuem infinitos graus de liberdade distribuídos continuamente no espaço [2]. A relação entre essas quantidades é dada pela integral espacial da densidade Lagrangiana:

$$L = \int \mathcal{L} d^3x. \quad (2.20)$$

Como os campos considerados neste trabalho são relativísticos, a densidade Lagrangiana \mathcal{L} deve ser construída a partir de quantidades que preservem a invariância relativística. Dessa forma, é natural que ela seja uma função dos próprios campos ϕ e de suas derivadas de primeira ordem $\partial_\mu\phi$, evitando o uso de derivadas de ordem superior que frequentemente introduzem problemas teóricos, como graus de liberdade espúrios ou instabilidades.

Esse formalismo pode ser estendido para descrever o movimento de elementos infinitesimais de um campo. Para garantir uma descrição covariante, introduzimos um parâmetro afim τ , que caracteriza a evolução ao longo da trajetória do sistema no espaço-tempo. O parâmetro τ permite expressar as equações de movimento de forma independente do referencial adotado, garantindo uma formulação compatível com a relatividade restrita. Como o tempo próprio de uma partícula relativística já possui essa propriedade, torna-se natural utilizá-lo como parâmetro afim da trajetória. Essa abordagem facilita a construção da ação e a derivação das equações de Euler-Lagrange para campos. Assim, a ação pode ser escrita como:

$$S = \int \mathcal{L} d\tau d^3x. \quad (2.21)$$

Conquanto, para garantir a invariância relativística da formulação, a Lagrangiana deve ser expressa em termos de uma integral sobre o espaço-tempo completo. Isso nos leva a reescrever a ação na forma:

$$S = \int \mathcal{L} d^4x \quad (2.22)$$

¹ Ao adotarmos essa abordagem para campos contínuos, os graus de liberdade do sistema deixam de estar restritos a um conjunto discreto de partículas e passam a ser distribuídos continuamente no espaço-tempo. Dessa forma, em vez de uma soma sobre partículas, utilizamos integrais sobre o contínuo, e os objetos fundamentais da teoria passam a ser os campos ϕ , que dependem das coordenadas espaço-temporais. Assim, a Lagrangiana L se transforma em uma densidade Lagrangiana \mathcal{L} , que é função do campo $\phi(\mathbf{x}, t)$, de suas derivadas espaciais e temporais e, possivelmente, das próprias coordenadas x e t . Portanto, para campos, a ação S assume a forma [1]:

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x, t) d^4x. \quad (2.23)$$

Com essa transição, podemos agora desenvolver a formulação dos campos relativísticos, chegando à equação de Euler-Lagrange para campos. Em analogia com a mecânica lagrangiana, em que as equações de movimento são obtidas da condição de extremização da ação, impomos a condição de estacionariedade da ação variacional:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi = 0, \quad (2.24)$$

como essa equação deve ser válida para qualquer variação arbitrária, obtemos a equação de Euler-Lagrange para campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (2.25)$$

Esta equação representa as equações de movimento dos campos no formalismo lagrangiano e é fundamental para a descrição dinâmica de teorias de campos clássicas e quânticas, sendo retratados nesse presente trabalho somente os campos clássicos compatíveis com a relatividade.

¹ Mais precisamente, $S = \int \mathcal{L} dt d^3x$.

3 Eletromagnetismo como uma Teoria de Gauge

O eletromagnetismo é uma das quatro interações fundamentais da natureza e tem sido descrito com notável precisão pela teoria clássica de Maxwell. No entanto, uma compreensão mais profunda de sua estrutura matemática revela que o eletromagnetismo pode ser formulado como uma teoria de gauge, um conceito essencial na física teórica moderna.

As teorias de gauge são baseadas na ideia de simetrias locais, ou seja, transformações que podem ser aplicadas independentemente em diferentes pontos do espaço-tempo sem alterar as equações da teoria. No caso do eletromagnetismo, a simetria fundamental é a invariância de fase local da função de onda de uma partícula carregada. Essa simetria está associada ao grupo de Lie abeliano $U(1)$, e sua imposição leva naturalmente à introdução de um campo de conexão, identificado com o potencial eletromagnético.

A reformulação do eletromagnetismo como uma teoria de gauge permite uma interpretação mais profunda da interação eletromagnética, conectando-a diretamente a conceitos fundamentais da teoria de campos. O formalismo de gauge não apenas explica a origem do campo eletromagnético a partir de uma simetria subjacente, mas também estabelece um paradigma que se estende a outras interações fundamentais, como a força fraca e a força forte, descritas pelo Modelo Padrão da física de partículas.

Nesta abordagem, o campo eletromagnético é entendido como uma consequência da exigência de invariância de gauge local. Isso significa que a introdução do potencial vetor não é arbitrária, mas sim necessária para garantir a consistência da teoria quando se considera a interação de partículas carregadas com o campo eletromagnético. Essa perspectiva leva naturalmente à formulação da dinâmica do campo em termos do tensor de campo eletromagnético.

Dessa forma, dedicaremos este capítulo ao estudo do eletromagnetismo como uma teoria de gauge, servindo como um modelo para a compreensão das interações fundamentais da natureza e fornecendo um entendimento de como a exigência de invariância de gauge impõe restrições sobre as leis físicas. Veremos como essa estrutura não somente descreve a interação eletromagnética de forma elegante, mas também estabelece a base conceitual para teorias mais gerais, como, por exemplo, a eletrodinâmica quântica. No entanto, tais teorias serão abordadas em estudos futuros, não estando no escopo deste trabalho [8].

3.1 As Equações de Maxwell: Covariância de Lorentz e Invariância de Gauge

As equações de Maxwell são as mais importantes do eletromagnetismo, pois determinam a dinâmica dos campos elétrico e magnético, mostrando como esses campos estão intrinsecamente relacionados. A contribuição de Maxwell não foi a descoberta dessas equações, mas sim a adição de um termo corretivo em uma delas, bem como a percepção de que as quatro equações, em conjunto, demonstravam a unificação dos fenômenos elétricos e magnéticos [8].

A partir deste ponto, utilizaremos unidades naturais do sistema de unidades Heaviside-Lorentz (apêndice A) sendo mais conveniente em física de partículas. Antes do fator de correção de Maxwell, as leis eram [5]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Ausência de carga magnéticas}) \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Faraday-Lenz}) \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \quad (\text{Lei de Ampère para correntes constantes}) \quad (3.4)$$

em que ρ é a **densidade de carga** e \mathbf{J} é a **densidade de corrente**; essas densidades atuam como “fontes” para os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} .

Com isso, a partir da equação (3.1), tomando sua derivada temporal, chegamos a um princípio de conservação. Vejamos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \longrightarrow \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.5)$$

substituindo a expressão da Lei de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.6)$$

Essa equação é a equação da continuidade, que expressa o princípio da conservação da carga elétrica. Porém Maxwell notou que tomar a divergência da equação (3.4) leva ao conflito com a equação de continuidade (3.6). Desde que,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0, \quad (3.7)$$

da equação (3.4) segue o resultado:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.8)$$

Isso só pode ser verdade em situações que a densidade de carga é constante no tempo. Para o caso geral, Maxwell modificou a lei de Ampère para:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{Lei de Ampère-Maxwell}) \quad (3.9)$$

que agora sim é consistente com a equação (3.6). As equações (3.1 - 3.4) juntamente a equação (3.9) constituem o que conhecemos como as equações de Maxwell no espaço (além das fontes).

Analisemos a equação (3.6), vamos ver o comportamento dela ao integrá-la sobre qualquer volume arbitrário Ω :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{J} dV. \quad (3.10)$$

A equação acima afirma que a taxa de diminuição da carga em um volume arbitrário Ω deve-se exclusivamente ao fluxo de corrente para fora de sua superfície. Isso implica que nenhuma carga líquida pode ser criada ou destruída dentro de Ω . Como ele pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, conclui-se que a carga elétrica é conservada localmente [8].

Se a carga pudesse ser criada em um ponto e destruída em outro, ainda que a conservação global fosse mantida, isso exigiria a propagação instantânea de sinais, o que violaria a relatividade restrita. Para garantir essa conservação local, Maxwell introduziu o termo adicional conhecido como “corrente de deslocamento elétrico”, essencial para a coerência das equações dinâmicas do eletromagnetismo. Neste ponto introduzimos a diferença entre local/global, vamos entender o que são essas simetrias.

3.1.1 Simetria global x Simetria Local

A distinção entre simetrias globais e locais desempenha um papel fundamental na formulação das teorias físicas, especialmente nas teorias de gauge. Essa diferença se reflete diretamente nas leis de conservação, que, assim como as invariâncias, possuem um papel central na dinâmica dos sistemas físicos.

De maneira geral, uma simetria global envolve transformações aplicadas uniformemente a todo o espaço-tempo, independentemente da posição. Ou seja, os parâmetros que caracterizam a transformação são constantes. Pelo teorema de Noether, tais simetrias estão diretamente associadas às quantidades conservadas. Um exemplo clássico é a invariância da lagrangiana sob transformações de fase globais no espaço das funções de onda, o que implica na conservação de uma carga associada.

Já uma simetria local (ou gauge) permite que a transformação varie ponto a ponto no espaço-tempo, ou seja, seu parâmetro depende das coordenadas. Ao estender uma simetria global para uma simetria local, nós vamos ver que surge a necessidade de introduzir novos campos dinâmicos para garantir a invariância da teoria. Esses campos, geralmente interpretados como potenciais ou conexões, desempenham o papel de mediadores das interações fundamentais.

A introdução da simetria local é um dos conceitos centrais das teorias de gauge, pois conduz naturalmente à existência de interações mediadas por campos de força, que

será usado nesse trabalho. Do ponto de vista matemático, essa formulação leva à noção de conexões e curvaturas em uma fibra, conceitos fundamentais na teoria de campos moderna.

3.2 Invariância de Gauge

Uma das propriedades fundamentais da teoria eletromagnética é a chamada **invariância de gauge**, que se refere à liberdade de escolher diferentes potenciais eletromagnéticos sem alterar os campos físicos observáveis. No eletromagnetismo clássico (e também na mecânica quântica), é conveniente introduzir os **potenciais eletromagnéticos** - o potencial escalar ϕ e o potencial vetor \vec{A} - em vez de trabalhar diretamente com os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} . Para isso, devemos observar que o campo vetorial \mathbf{B} tem divergência nula (3.2), possibilitando ser reescrito como o rotacional de um campo vetorial:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.11)$$

e portanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \therefore \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \quad (3.12)$$

Ao substituir (3.12) em (3.3), tem-se:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.13)$$

Essa equação nos mostra que o campo elétrico é conservativo, e por ser conservativo, ele pode ser expresso como um gradiente de um potencial escalar. Ou seja,

$$\mathbf{E} = -\left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad (3.14)$$

que define o potencial 3-vetor \mathbf{A} e o potencial escalar ϕ . Com essas definições, as equações (3.3) e (3.2) são automaticamente satisfeitas.

A origem da invariância de Gauge no eletromagnetismo clássico manifesta-se do fato que podemos transformar os potenciais \mathbf{A} e ϕ sem alterar os campos. Contudo, esses potenciais não são únicos para esses campos então as transformações que \mathbf{A} e ϕ podem sofrer enquanto preservam \mathbf{E} e \mathbf{B} os mantendo inalterado são chamados de *transformações de gauge* e a invariância associada as equações de Maxwell é chamado de *invariância de gauge*. Mas afinal, o que são essas transformações?

Como dito, observamos que ambos potenciais não são unicamente definidos. Isto significa que é viável aplicar transformações nos potenciais sem que isso afete os valores dos campos nem outras quantidades observáveis. Consideremos que o potencial \mathbf{A} pode ser alterado por:

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad (3.15)$$

sendo χ uma função arbitrária, sem alteração em \mathbf{B} , desde que $\nabla \times \nabla f = 0$. Para preservar \mathbf{E} , ϕ deve mudar simultaneamente por:

$$\phi \Rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Essa liberdade de redefinição dos potenciais sem modificar as grandezas físicas mensuráveis é o que caracteriza a **invariância de gauge** no eletromagnetismo clássico.

Essa propriedade não é apenas uma conveniência matemática, mas sim um reflexo profundo da estrutura da teoria, sendo essencial para a formulação da eletrodinâmica quântica e de outras teorias de gauge em física moderna.

3.2.1 Formulação covariante

Essas transformações podem ser combinadas em uma única equação ao introduzirmos o 4-vetor potencial:

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}). \quad (3.17)$$

Observando que os operadores diferenciais $(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$ formam as componentes de um operador de 4-vetores ∂_μ , temos que uma transformação de gauge é, então, especificada por:

$$A^\mu \Rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi. \quad (3.18)$$

Facilmente notamos que, ao substituirmos os novos valores de \mathbf{A}' e ϕ' não há nenhuma variação nos campos. Esse fato é o que chamamos de invariância de *gauge* e a escolha de uma função arbitrária χ é chamado de escolha de *gauge*.

Como mencionado anteriormente, as equações de Maxwell podem ser escritas em uma forma manifestamente covariante de Lorentz em que as grandezas do campo eletromagnético são tratadas de forma a preservar a simetria entre as diferentes componentes do espaço-tempo. Usando então a 4-corrente j^μ dada por:

$$j^\mu = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (\rho, j_x, j_y, j_z) \quad \therefore \quad j = (\rho, \mathbf{j}). \quad (3.19)$$

onde $j^0 = \rho$ é a densidade de carga e $(j^1, j^2, j^3) = \mathbf{j}$ são as componentes da densidade de corrente no espaço tridimensional. Esta formulação nos permite reescrever a equação de continuidade (3.6) de forma compacta e covariante:

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} + \partial_i j^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_0 j^0 + \partial_i j^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.20)$$

Essa expressão mostra a conservação da carga elétrica de maneira covariante, indicando que a divergente do 4-vetor corrente é zero, ou seja, a carga elétrica é conservada no espaço-tempo.

A existência de um 4-vetor potencial sugere que os campos elétricos e magnéticos formem um tensor em termos do 4-potencial. Logo, a ideia mais simples seria:

$$F^{\mu\nu} \stackrel{?}{=} \partial^\mu A^\nu. \quad (3.21)$$

Todavia, surgem dois problemas nessa definição [4]:

1. Fornece 16 graus de liberdade, porém são necessárias apenas 6.
2. A definição não é um invariante de gauge.

Para que esse problema seja resolvido, aplicaremos a transformação de gauge (3.18) em (3.21) e observaremos seu comportamento:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \tilde{A}^\nu &= \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \chi) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \chi \neq \partial^\mu A^\nu \\ \partial^\nu \tilde{A}^\mu &= \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \chi) = \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu \chi. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Subtraindo as equações acima, determinamos o tensor eletromagnético:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu = \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (3.23)$$

no qual esse tensor permanece inalterado sob transformação de gauge, $F^{\mu\nu} = \tilde{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$ e possui 6 graus de liberdade para os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} e leva característica de um tensor antissimétrico:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (3.24)$$

e os campos elétricos e magnéticos são expressos em função desse tensor da seguinte forma:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, como $F^{\mu\nu}$ é um invariante de gauge, as equações de Maxwell podem ser reescritas em termos do tensor $F^{\mu\nu}$ como:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (3.25)$$

essa equação expressa a relação entre o campo magnético e as cargas/correntes elétricas, que descreve as equações (3.1) e (3.4).

Podemos mostrar explicitamente como as equações de Maxwell podem ser reformuladas em termos do 4-vetor potencial A^μ de forma manifestamente covariante, estando conectada a invariância de gauge e a conservação de carga. Substituindo $F^{\mu\nu}$ em (3.25), temos:

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= j^\nu \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu &= j^\nu \end{aligned}$$

definindo $\square = \partial_\mu \partial^\mu$,

$$\square A^\nu - \partial_\mu (\partial^\nu A^\mu) = j^\nu. \quad (3.26)$$

Na qual nos mostra que a corrente elétrica j^ν gera os campos eletromagnéticos através do potencial A^μ . Para verificar a invariância de gauge, apliquemos a transformação (3.18) em (3.26):

$$\square (A^\nu - \partial^\nu \chi) - \partial^\nu (\partial_\mu (A^\mu - \partial^\mu \chi)) = j^\nu, \quad (3.27)$$

expandindo os termos:

$$\square A^\nu - \square \partial^\nu \chi - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu \chi) = j^\nu, \quad (3.28)$$

como $\square \partial^\nu \chi = \partial_\nu \square \chi$, reescrevemos:

$$\square A^\nu - \partial^\nu \square \chi - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + \partial^\nu \square \chi = j^\nu. \quad (3.29)$$

os termos $-\partial^\nu \square \chi$ e $\partial^\nu \square \chi$ se cancelam, voltando à equação (3.26). Concluí-se então que a equação permanece inalterada após uma transformação de gauge.

Vale ressaltar que a escolha do gauge é de suma importância. Tomando novamente equação (3.26) ela contém um termo extra $\partial_\mu (\partial^\nu A^\mu)$. Se impusermos uma escolha do **calibre de Lorentz**:

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (3.30)$$

a equação de Maxwell para A^μ reduz-se a uma **equação de onda relativística**:

$$\square A^\nu = j^\nu. \quad (3.31)$$

mostrando, como já bem sabemos, que os potenciais eletromagnéticos se propagam como ondas na presença de cargas e correntes, sendo crucial na descrição do eletromagnetismo.

Vimos que na formulação tradicional das equações de Maxwell contém expressões diferentes para os campos elétricos e magnéticos, o que não deixa evidente a sua simetria relativística. Ao reformularmos as equações em termos do 4-potencial e da 4-corrente vemos claramente que essa estrutura é invariante sob transformação de Lorentz, sendo válida para qualquer referencial relativístico.

É importante ressaltar que a relação entre a invariância de calibre e a conservação da carga elétrica não é trivial. O físico húngaro Eugene Paul Wigner (1949) argumentou que a conservação da carga pode ser derivada do princípio de que nenhuma quantidade física depende do valor absoluto do potencial eletrostático, combinado com a conservação da energia (WIGNER, 1949) [6]. No entanto, essa invariância global não é suficiente para descrever toda a dinâmica do eletromagnetismo.

Já o físico holandês Gerard 't Hooft (1980) sugeriu que, ao incluir efeitos magnéticos, a invariância global do potencial eletrostático pode ser estendida para uma invariância

local. Essa exigência leva naturalmente à formulação das equações de Maxwell em termos do tensor de campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$, garantindo que as quantidades físicas sejam invariantes sob transformações locais de calibre ('T HOOFT, 1980) [7].

A formulação de teorias dinâmicas a partir da exigência de invariância local tornou-se um princípio central na física moderna. Yang e Mills (1954) ampliaram essa abordagem para descrever interações fundamentais além do eletromagnetismo, introduzindo novas simetrias de calibre, enquanto Utiyama (1956) desenvolveu uma estrutura formal para essas teorias, estabelecendo as bases do formalismo moderno de gauge. Neste trabalho não adentraremos nessas extensões, tendo como objetivo ser estudado em trabalhos futuros.

3.3 Invariância de Gauge e Covariância na Mecânica Quântica

A lei da força de Lorentz para uma partícula não relativística de carga q movendo-se com velocidade v sob a influência de campos elétricos e magnéticos é dado por [8]:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3.32)$$

que pode ser derivado, através das equações de Hamilton, para o Hamiltoniano clássico. Para encontrar o Hamiltoniano, tomemos a lagrangiana dada pela equação (2.3):

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}. \quad (3.33)$$

Na qual: $v = -q\phi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ é a energia potencial de uma partícula carregada em um campo eletromagnético. A Hamiltoniana é definida como:

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L, \quad (3.34)$$

sendo p_i o momento canônico e \dot{q}_i a velocidade. O momento canônico pode ser calculado de tal forma:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}. \quad (3.35)$$

obtemos, portanto:

$$p_i = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}. \quad (3.36)$$

Substituindo em (3.34), temos:

$$H = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{v} + q\mathbf{A}) - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\phi - q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad \therefore \quad H = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\phi. \quad (3.37)$$

Pegando a equação (3.36) e isolando \mathbf{v} , substituindo em (3.37) e dividindo por m , obtemos a hamiltoniana para esse sistema:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + q \cdot \mathbf{A})^2 + q\phi. \quad (3.38)$$

A equação de Schrödinger dependente do tempo não relativística (usando as unidades naturais já mencionadas) é dada por:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t) = \hat{H}\psi(\mathbf{x}, t). \quad (3.39)$$

Ao quantizar esse Hamiltoniano usando a prescrição $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$, obtemos a equação de Schrödinger para a partícula no campo eletromagnético:

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + q\phi \right] \psi(\mathbf{x}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t). \quad (3.40)$$

E, como discutido anteriormente, os potenciais eletromagnéticos não são únicos e podem ser transformados por uma transformação de gauge. Essa transformação não altera os campos elétricos e magnéticos garantindo que a teoria de Maxwell continue invariante.

Dessa forma, surge a seguinte questão: ao realizarmos tal transformação nos potenciais na equação (3.40), a física da solução permanecerá inalterada? Se a resposta for afirmativa, isso indicará a compatibilidade da teoria de Maxwell com a formulação quântica. Caso contrário, será necessária uma reformulação, visto que a simetria de gauge, fundamental às equações de Maxwell, estaria violada no contexto quântico.

A resposta a essa questão é, evidentemente, negativa, pois o mesmo ψ não pode satisfazer simultaneamente a equação (3.40) e a equação análoga com (ϕ, \mathbf{A}) substituídos por (ϕ', \mathbf{A}') . Ao contrário das equações de Maxwell, as equações de Schrödinger não são invariantes sob transformações de gauge (tema que será explorado com mais detalhes adiante). No entanto, é importante lembrar que a função de onda ψ não é uma quantidade diretamente observável, como são os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} . Assim, podemos conceber que a função de onda ψ não precisa permanecer invariável quando os potenciais são alterados por uma transformação de gauge. De fato, para que seja possível “descrever a mesma física” em termos dos potenciais transformados, devemos permitir que ψ também sofra modificações.

Este ponto é crucial para este trabalho: para que a mecânica quântica seja consistente com as equações de Maxwell, é necessário que as transformações de gauge dos potenciais de Maxwell sejam acompanhadas também por uma transformação na função de onda, $\psi \rightarrow \psi'$, onde ψ' satisfaz a seguinte equação:

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\nabla - q\mathbf{A}')^2 + q\phi' \right] \psi'(\mathbf{x}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi'(\mathbf{x}, t). \quad (3.41)$$

Notemos que a forma de (3.41) tem exatamente a mesma forma de (3.40) - é isso que efetivamente irá nos garantir que ambos “descrevam a mesma física”. Em decorrência disto, se pudermos encontrar tal ψ' , podemos inferir que (3.40) é covariante de gauge, significando que o mesmo mantém a mesma forma sob transformação de gauge.

Considerando que já temos conhecimento das relações (3.15) e (3.16) que relaciona $\mathbf{A}, \phi \Rightarrow \mathbf{A}', \phi'$, é viável encontrar o que $\psi'(\mathbf{x}, t)$ deve ser para que a equação (3.41) seja

consistente com (3.40). Por enquanto, vamos fornecer a resposta e verificá-la e, logo após, discutir sua interpretação física. O ψ' necessário é:

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = \exp[iq\chi(\mathbf{x}, \mathbf{t})]\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad (3.42)$$

sendo χ a mesma função dependente do espaço-tempo que aparece nas equações (3.15) e (3.16). Para verificar isso, tomando o termo contendo o potencial \mathbf{A} e tomando seu gauge juntamente a ψ , temos:

$$(-i\nabla - q\mathbf{A}')\psi' = [-i\nabla - q\mathbf{A} - q(\nabla\chi)] [\exp(iq\chi)\psi], \quad (3.43)$$

expandindo:

$$-i\nabla \exp(iq\chi)\psi - i(\nabla\psi) \exp(iq\chi) - q\mathbf{A} \exp(iq\chi)\psi - q(\nabla\chi) \exp(iq\chi)\psi, \quad (3.44)$$

fazendo a regra do produto:

$$\nabla \exp(iq\chi)\psi = \exp(iq\chi)\nabla(iq\chi) = iq(\nabla\chi) \exp(iq\chi),$$

sendo iq uma constante. Substituindo em (3.44) com $-i \cdot i = 1$:

$$q(\nabla\chi) \exp(iq\chi) - i(\nabla\psi) \exp(iq\chi) - q\mathbf{A} \exp(iq\chi)\psi - q(\nabla\chi) \exp(iq\chi)\psi, \quad (3.45)$$

o primeiro e último termo se cancelam, resultando:

$$(-i\nabla - q\mathbf{A}')\psi' = \exp(iq\chi) \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})\psi. \quad (3.46)$$

Isso nos mostra que o operador diferencial $-i\nabla - q\mathbf{A}'$ sobre a nova função ψ' pode ser escrito como o mesmo operador aplicado a ψ apenas multiplicado por $\exp(iq\chi)$.

Essa é uma propriedade fundamental da covariância de gauge: *a transformação não altera a estrutura do operador, apenas adiciona um fator de fase*. Essa propriedade garante que a equação de Schrödinger permaneça válida mesmo quando os potenciais são transformados, sendo, portanto, essencial para a manutenção da covariância de gauge.

Entretanto, se utilizarmos diretamente o operador ∇ , ele não respeita a nova transformação de ψ . Para corrigir esse problema, precisamos introduzir um novo operador de derivada, chamado **derivada covariante**, que preserve a invariância de gauge. Vamos analisar esse problema em detalhes e explorar a solução que leva à formulação correta da derivada covariante.

Sabemos que a função de onda transforma-se sob uma transformação de gauge como:

$$\psi' = \exp(iq\chi)\psi. \quad (3.47)$$

Se quisermos calcular a derivada espacial da nova função de onda, aplicamos o operador ∇ diretamente em ψ' :

$$\nabla\psi' = \nabla(\exp(iq\chi)\psi), \quad (3.48)$$

que, como vimos antes, ao aplicar a regra do produto, temos o seguinte:

$$\nabla\psi' = iq(\nabla\chi)\exp(iq\chi)\psi + \exp(iq\chi)\nabla\psi. \quad (3.49)$$

Esse termo extra, $iq(\nabla\chi)\exp(iq\chi)\psi$, nos mostra que a derivada simples ∇ não se transforma covariantemente, ou seja, $\nabla\psi' \neq \exp(iq\chi)\nabla\psi$. Isso significa que se tentarmos escrever uma equação de movimento usando apenas ∇ , ela não será consistente sob transformações de fase locais.

Por fim, para garantir que as equações de movimento permaneçam consistentes, introduzimos o operador derivada covariante que respeite a transformação de gauge. Definimos:

$$\mathbf{D} \equiv \nabla - iq\mathbf{A}, \quad (3.50)$$

$$D^0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi. \quad (3.51)$$

Vejamos agora como ele age sobre ψ' :

$$\mathbf{D}'\psi' = (\nabla + iq\mathbf{A}')(\exp(iq\chi)\psi), \quad (3.52)$$

expandindo:

$$\mathbf{D}'\psi' = \exp(iq\chi)\nabla\psi + iq(\nabla\chi)\exp(iq\chi)\psi + iq\mathbf{A}'\exp(iq\chi)\psi, \quad (3.53)$$

substituindo $A' = A + \nabla\chi$:

$$iq\mathbf{A}'\exp(iq\chi)\psi = iq(A + \nabla\chi)\exp(iq\chi)\psi. \quad (3.54)$$

Notemos que o termo $iq(\nabla\chi)\exp(iq\chi)\psi$ irão se cancelar, resultando:

$$\mathbf{D}'\psi' = \exp(iq\chi)(\nabla + iq\mathbf{A})\psi, \quad (3.55)$$

ou seja,

$$\mathbf{D}'\psi' = \exp(iq\chi)\mathbf{D}\psi. \quad (3.56)$$

Isso significa que a ação de \mathbf{D} sobre ψ transforma-se da mesma maneira que ψ respeitando a simetria de gauge. A aplicação direta do operador diferencial ∇ à função de onda ψ não respeita a transformação de calibre local. Isso ocorre porque a derivada simples introduz um termo adicional dependente de $\nabla\chi$, tornando a formulação inconsistente sob uma transformação de fase dependente do espaço-tempo.

Esse resultado garante que a estrutura matemática preserve a simetria de calibre, evitando termos espúrios e garantindo a coerência da teoria. Assim, a introdução do

potencial de calibre A não é apenas uma conveniência, mas uma exigência fundamental para a consistência da teoria quântica de campos com interações eletromagnéticas.

Agora que está definido a derivada covariante (3.50), podemos reescrever (3.46) como:

$$(-i\mathbf{D}'\psi') = \exp(iq\chi) \cdot (-i\mathbf{D}\psi). \quad (3.57)$$

Significando que essa transformação de gauge simplesmente leva \mathbf{D} para \mathbf{D}' preservando sua ação sobre a função de onda. Da mesma forma, usando (3.51) encontramos a seguinte equação:

$$(iD^0\psi') = \exp(iq\chi) \cdot (iD^0\psi), \quad (3.58)$$

usando a equação (3.16) pra ϕ . Novamente, $D^0\psi'$ está relacionado a $D^0\psi$. Repetindo a operação que nos levou à equação (3.57) encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}(-i\mathbf{D}')^2\psi' &= \exp(iq\chi) \cdot \frac{1}{2m}(i\mathbf{D})^2\psi \\ &= \exp(iq\chi) \cdot iD^0\psi \\ &= iD^0\psi'. \end{aligned} \quad (3.59)$$

A equação (3.59) é apenas (3.41) escrita na notação da derivada covariante, então verificamos que a equação (3.42) é a relação correta para relacionar ψ e ψ' para garantir a consistência das equações (3.40) e (3.41) resumida da afirmação que (3.40) é covariante de gauge.

Com isso, estabelecemos que as funções de onda ψ e ψ' representam a mesma realidade física, uma vez que suas densidades de probabilidade permanecem invariantes sob uma transformação de fase. Essa invariância sugere um princípio mais geral, especialmente ao considerarmos a formulação relativística da teoria.

Sabemos que a equação de Schrödinger não é relativística, enquanto as equações de Maxwell são completamente compatíveis com a relatividade. Isso indica que as prescrições desenvolvidas neste capítulo também sejam relativísticas - e, de fato, são.

No próximo capítulo, apresentaremos as equações relativísticas para partículas de spin-0 e spin-1/2. Por ora, observemos que a derivada covariante pode ser escrita de forma manifestamente covariante sob transformações de Lorentz como:

$$D^\mu \equiv \partial^\mu + iqA^\mu, \quad (3.60)$$

em que os potenciais \mathbf{A} e a função de onda ψ transformam-se da seguinte maneira:

$$\mathbf{A}^\mu \rightarrow \mathbf{A}'^\mu = \mathbf{A}^\mu - \partial^\mu\chi \quad \psi \rightarrow \psi' = \exp(iq\chi)\psi, \quad (3.61)$$

desde que ∂^μ seja substituído por D^μ .

Isso nos leva a uma prescrição bastante natural para obter a equação de onda de uma partícula na presença de um campo eletromagnético a partir da equação de onda da partícula livre correspondente: basta realizar a substituição

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu \equiv \partial^\mu + iqA^\mu. \quad (3.62)$$

Na próxima seção, veremos como essa ideia fundamenta o *princípio de gauge*, segundo o qual, conforme discutido nas seções anteriores, a forma da interação é determinada pela exigência da invariância de gauge local.

3.4 O Princípio de Gauge

Na seção anterior, tomamos como conhecido que a equação de Schrodinger, por exemplo, para uma partícula carregada em um campo eletromagnético, tem a forma (3.40) onde foram verificadas a invariância de gauge pela combinação de transformação nos potenciais e na função de onda [8].

O próximo passo é inverter o argumento. Em vez de assumir o eletromagnetismo e verificar que ele é invariante sob essas transformações, vamos exigir desde o início que a teoria seja invariante sob transformações de fase dependentes do tempo e do espaço:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi'(\mathbf{x}, t) = \exp[iq\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{t})]\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}). \quad (3.63)$$

Essa equação significa que estamos pedindo para que a função de onda possa ser multiplicada por uma fase que depende da posição x e do tempo t , e a teoria ainda deve permanecer a mesma. Isso é chamado de invariância de fase local. Demonstraremos que tal invariância de fase não é possível para uma teoria livre pois ela requer uma teoria interativa envolvendo um campo (de 4 vetores) cujas interações com a partícula carregada são precisamente determinadas, e que sobre a transformação nos potenciais dadas por (3.15) e (3.16) quando $\psi \rightarrow \psi'$. A demanda desse tipo de invariância de fase terá então ditado a forma de interação - esta é a base do princípio de gauge.

Ao nos atentarmos para as fases das funções de onda, sabemos que a fase absoluta de uma função de onda na mecânica quântica **não pode ser medida**; apenas fases relativas são mensuráveis, via algum experimento de interferência. Um exemplo simples é a difração de elétrons em um sistema de duas fendas. Sabemos que ao realizar o experimento, abaixo das fendas, a função de onda será uma superposição coerente de dois componentes, cada um originado de uma fenda:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2. \quad (3.64)$$

A distribuição de probabilidade $|\psi|^2$ conterà, além das intensidades separadas para ψ_1 e ψ_2 , o termo de interferência:

$$2\text{Re}(\psi_1^*\psi_2) = 2|\psi_1||\psi_2|\cos\delta, \quad (3.65)$$

em que $\delta = (\delta_1 - \delta_2)$ é a diferença de fase entre os componentes ψ_1 e ψ_2 .

O padrão que esperamos de máximos e mínimos de intensidade alternados é atribuído a essa diferença de fase δ . Quando os componentes estão em fase, esperamos ver uma interferência construtiva onde $|\psi|^2$ tem um máximo; quando estão fora de fase, a interferência é destrutiva e $|\psi|^2$ tem um mínimo. Claramente que, se as fases individuais forem alteradas pelo mesmo valor, não haveria consequência observável, já que apenas a diferença de fase entra na equação.

Porém, se houver uma situação em que a função de onda pode ser alterada de determinada maneira sem levar em conta os efeitos observáveis é precisamente o que significa um princípio de simetria ou invariância na mecânica quântica.

No caso abordado nessa seção, a invariância está no fato de que uma **mudança global** não afeta quase nada. Ao fazermos cálculos, precisamos adotar uma convenção de fase. O princípio da invariância garante que qualquer escolha ou convenção será equivalente a qualquer outra.

A invariância sob uma mudança constante de fase é um exemplo do que chamamos de invariância global, como já foi introduzido neste trabalho. Podemos expressar isso escrevendo a seguinte transformação:

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(i\alpha)\psi, \quad (3.66)$$

sendo α uma constante, definindo a invariância de fase global.

Isso nos diz que, uma vez adotada uma convenção de fase em um ponto do espaço-tempo, ela deve ser adotada também em todos os outros pontos. Por exemplo, no experimento de duas fendas, não podemos escolher a fase localmente pois colocar uma meia-onda atrás de uma das fendas certamente terá consequências observáveis. Assim, uma convenção de fase adotada em um ponto deve ser mantida em todos os outros.

Se quisermos explorar a possibilidade de exigir uma invariância sob transformação de fases locais (escolhas independentes da fase de cada ponto do espaço-tempo), como feito em (3.63), isso nos leva à noção de *invariância de fase local*. No entanto, há um problema: essa não é uma simetria da equação de Schrödinger para uma partícula livre ou de qualquer equação relativística livre.

Se a função de onda $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ satisfaz a equação de Schrödinger para uma partícula livre, teríamos:

$$\frac{1}{2m}(-i\nabla)^2\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = i\frac{\partial\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial t}. \quad (3.67)$$

Vemos que a nova função de onda ψ' , dada pela transformação de fase local, não a satisfará pois ∇ e $\frac{\partial}{\partial t}$ agora irão atuar sobre $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ no fator da fase. Portanto, a invariância de fase local não é uma simetria de equação livres para partículas.

Se quisermos que uma teoria seja localmente invariante de fase, devemos modificar a equação de Schrödinger da partícula livre para que ela possua essa propriedade – mais precisamente, devemos modificá-la para que seja covariante sob essa transformação. Essa equação, ao ser modificada, não descreverá mais uma partícula livre, ou seja, a liberdade de alterar localmente a fase de uma partícula carregada só será possível se introduzirmos algum tipo de campo de força atuando sob a partícula que se move. Mas que tipo de campo será esse?

Sabemos imediatamente a resposta para essa pergunta: a transformação de fase local:

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(iq\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{t}))\psi, \quad (3.68)$$

com $\alpha = q\chi$ que é exatamente a transformação de fase associada à invariância de gauge eletromagnética. Portanto a equação (3.67) pode ser modificada tornando a equação:

$$\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A})^2\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = (i\frac{\partial}{\partial t} - q\phi)\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}). \quad (3.69)$$

Para que seja satisfeita a invariância de fase local, exigindo que \mathbf{A} e ϕ se transformem como:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + q^{-1}\nabla\alpha, \quad (3.70)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - q^{-1}\frac{\partial\alpha}{\partial t}. \quad (3.71)$$

Essa é a equação da mecânica quântica descrevendo a interação de uma partícula carregada com o campo eletromagnético, como vimos antes.

Esse é o princípio de gauge, na qual nos diz que primeiramente a invariância sob uma transformação local deve ser primeiramente satisfeita. Isso nos mostra que a simetria de gauge local não é compatível com uma teoria livre, exigindo a presença de uma interação. Notemos sua extrema importância na formulação das interações físicas pois nos diz que todas as forças fundamentais da natureza podem ser formuladas a partir do princípio de gauge, sendo o eletromagnetismo apenas um exemplo particular, em que o campo de gauge é identificado como o potencial eletromagnético.

4 Mecânica Quântica Relativística

Sabemos que a equação de Schrödinger, em sua forma não relativística, é inadequada para descrever fenômenos em altas energias (ou seja, quando a energia envolvida é muito maior que a massa de repouso das partículas). Além disso, férmions possuem spin-1/2 — um grau de liberdade ausente na formulação original da equação de Schrödinger. Assim, são necessárias duas generalizações fundamentais: (1) de uma equação não relativística para uma equação relativística adequada a partículas de spin-0 e (2) de uma equação para partículas de spin-0 para outra que incorpore partículas com spin-1/2.

Neste capítulo, desenvolveremos primeiramente a equação de Klein-Gordon, que descreve partículas escalares (bósons de spin-0) no regime relativístico. Em seguida, estudaremos a equação de Dirac, apropriada para férmions de spin-1/2. Posteriormente, analisaremos as soluções da equação de Dirac e sua interpretação física. Por fim, discutiremos brevemente as consequências da introdução de interações eletromagnéticas via o princípio de gauge [8].

4.1 Equação de Klein-Gordon

A equação de Schrödinger não-relativística pode ser derivada a partir da relação clássica energia-momento [9]:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (4.1)$$

Promovendo E e \mathbf{p} a operadores quânticos através do processo de **quantização canônica** que consiste em promover variáveis clássicas a operadores quânticos através das seguintes substituições:

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\nabla, \quad (4.2)$$

Aplicando essas substituições à equação (4.1), obtemos a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi. \quad (4.3)$$

A função $\psi(\mathbf{r}, t)$, chamada **função de onda**, possui as seguintes propriedades:

- Descreve completamente o estado quântico de uma partícula;
- Seu módulo quadrado $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ representa a densidade de probabilidade (interpretação de Born);
- Evolui deterministicamente de acordo com a equação de Schrödinger.

Contudo, a equação de Schrödinger apresenta uma limitação fundamental: sua formulação não é covariante sob transformações de Lorentz. Isso ocorre porque:

- O termo temporal ($\partial/\partial t$) aparece como derivada de primeira ordem;
- O termo espacial (∇^2) aparece como derivada de segunda ordem.

Essa assimetria na ordem das derivadas rompe com a estrutura do espaço-tempo de Minkowski, onde as coordenadas espaciais e temporais devem ser tratadas em pé de igualdade, conforme exigido pelos postulados da relatividade restrita. Conseqüentemente:

- A equação não se mantém invariante sob transformações entre referenciais inerciais;
- Diferentes observadores mediriam diferentes equações de evolução temporal;
- A estrutura causal do espaço-tempo não é respeitada.

Essas limitações motivaram o desenvolvimento de equações de onda relativísticas, como a equação de Klein-Gordon e posteriormente a equação de Dirac, que preservam a covariância lorentziana.

Portanto, para formular uma equação de onda relativística, Klein e Gordon partiram da relação de dispersão relativística, tratando energia e momento como componentes de um quadrivetor:

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}), \quad (4.4)$$

satisfazendo a relação:

$$p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (4.5)$$

Aplicando os operadores da equação (4.2), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{-\partial^2}{\partial t^2} &= -\nabla^2 + m^2 \\ \therefore \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi &= m^2 \phi. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Essa é a equação de Klein-Gordon.

Diferente da equação de Schrödinger, a equação de Klein-Gordon trata o tempo e o espaço em pé de igualdade, sendo compatível com a relatividade especial. Pode-se reescrevê-la de forma manifestamente covariante, usando o operador D'Alembertiano:

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (4.7)$$

De modo que a equação (4.6) torna-se:

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (4.8)$$

Embora a equação de Klein-Gordon descreva corretamente a dinâmica relativística de partículas escalares (bósons de spin-0), sua consistência formal oculta desafios quanto à interpretação probabilística, pois, como veremos a seguir, a densidade de corrente não apresentará um comportamento positivo-definido, contrariando o requisito fundamental para interpretação probabilística na formulação padrão da mecânica quântica.

4.1.1 Corrente de probabilidade para equação de KG

Assim como na equação de Schrödinger, é possível derivar uma equação de continuidade da forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (4.9)$$

Da mesma forma que para a equação de Schrodinger não relativística, é possível derivar uma lei de conservação para uma “corrente de probabilidade” advinda da equação de Klein-Gordon.

Para isso, tomamos a equação de Klein-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0, \quad (4.10)$$

tomando seu conjugado:

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi^* + m^2 \phi^* = 0, \quad (4.11)$$

e multiplicando (4.10) por ϕ^* pela direita:

$$\phi^* \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi \right) = 0, \quad (4.12)$$

e (4.11) por ϕ pela esquerda:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi^* + m^2 \phi^* \right) \phi = 0, \quad (4.13)$$

e subtraindo (4.13) e (4.12):

$$\begin{aligned} & \phi^* \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi \right) - \left(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi^* + m^2 \phi^* \right) \phi = 0 \\ & \phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \phi^* \nabla^2 \phi + \phi^* m^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} \phi - \nabla^2 \phi^* \phi + m^2 \phi^* \phi = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right) - \nabla \cdot (\phi^* \nabla \phi - (\nabla \phi^*) \phi) = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Comparando com a equação (4.9), obtemos a densidade de carga e a densidade de corrente referente a equação (4.10):

$$\rho = i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \phi \right), \quad (4.15)$$

$$\mathbf{j} = i^{-1} (\phi^* \nabla \phi - (\nabla \phi^*) \phi). \quad (4.16)$$

Entretanto, de acordo com os postulados fundamentais da Mecânica Quântica, a densidade de probabilidade associada à função de onda deve ser sempre positiva definida, de modo que seus valores estejam restritos ao intervalo entre 0 e 1, assegurando uma interpretação probabilística consistente. Conquanto, a densidade ρ obtida a partir da equação de Klein-Gordon apresenta uma dependência explícita da derivada temporal da função de onda, o que compromete sua interpretação como uma densidade de probabilidade. Essa dependência faz com que ρ possa assumir valores negativos, violando diretamente os princípios probabilísticos da teoria.

Dessa forma, a estrutura da equação de Klein-Gordon impede que se atribua à função ϕ uma interpretação probabilística no mesmo sentido que ocorre na equação de Schrödinger, tornando a equação inadequada como descrição de partículas únicas dentro da mecânica quântica convencional.

Essa incompatibilidade se torna ainda mais evidente quando analisamos soluções explícitas da equação de Klein-Gordon. Ao considerarmos uma solução do tipo onda plana, é possível verificar diretamente como a densidade ρ depende do valor da energia da partícula, a qual pode assumir tanto valores positivos quanto negativos devido à estrutura quadrática da equação. Como consequência, ρ também pode assumir valores negativos, o que reforça a impossibilidade de interpretá-la como uma densidade de probabilidade no sentido usual da Mecânica Quântica. Essa análise será feita com mais detalhes na subseção a seguir.

4.1.2 Solução de onda plana

Tomemos como exemplo uma solução do tipo onda plana: $\phi(\mathbf{x}, t) = Ne^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)}$. Calculando as derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= -iE\phi; \\ \frac{\partial\phi^*}{\partial t} &= iE\phi^*.\end{aligned}$$

Substituindo em (4.15):

$$\rho = i[\phi^*(-iE)\phi - (iE)\phi^*\phi] = 2E|N|^2. \quad (4.17)$$

Portanto, a densidade ρ depende do sinal da energia E . Como a equação de Klein-Gordon admite soluções com $E < 0$, ρ pode assumir valores negativos - o que invalida sua interpretação como densidade de probabilidade.

Esse problema surge porque a derivada temporal em ρ não garante positividade nem conservação da norma da função de onda, violando o postulado fundamental da interpretação probabilística da mecânica quântica.

Devido a esse obstáculo, a equação de Klein-Gordon não é interpretada como uma equação de onda para partículas únicas. Sua aplicação é reinterpretada no contexto da Teoria Quântica de Campos, onde ela descreve corretamente bósons escalares de spin-0, como o campo do méson π^0 ou o campo de Higgs, mas não abordaremos isto nesse trabalho. Portanto, ainda fora feita a busca por uma equação relativística que:

1. Eliminasse as soluções com energias infinitas;
2. Garantisse uma densidade de probabilidade positiva definida;

o que levou Paul Dirac a propor uma nova equação - linear nas derivadas temporais - adequada à descrição de partículas de spin-1/2. Tal equação será estudada na próxima seção.

4.2 Equação de Dirac

A equação de Klein-Gordon, embora seja relativisticamente invariante, apresenta problemas conceituais quanto à interpretação probabilística e não descreve corretamente partículas com spin-1/2, como o elétron. Para resolver essas questões, Paul Dirac propôs uma nova equação em 1928, cuja principal motivação era encontrar uma equação de onda relativística de primeira ordem nas derivadas temporais e espaciais, de forma análoga à equação de Schrödinger, mas compatível com a relatividade restrita e adequada a férmions [8].

A proposta de Dirac consistia em partir da relação relativística entre energia, momento e massa:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \quad (4.18)$$

e buscar uma fatoração linear da equação da forma:

$$E = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m. \quad (4.19)$$

Onde $\boldsymbol{\alpha}$ e β são objetos ainda indefinidos a princípio, que devem satisfazer certas propriedades para que o quadrado da equação (4.19) reproduza corretamente a relação de dispersão relativística.

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$E^2 = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)^2,$$

expandindo,

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)^2 \psi &= (\boldsymbol{\alpha}^2 \cdot \mathbf{p}^2 + (\boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{\alpha}_j + \boldsymbol{\alpha}_j \boldsymbol{\alpha}_i) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j + (\boldsymbol{\alpha}_i \beta + \beta \boldsymbol{\alpha}_i) \mathbf{p}_i m + \beta^2 m^2) \psi \\ &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 + \beta^2 m^2 + \{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \beta m\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Temos que para (4.20) seja igual a (4.18), devemos analisar termo a termo. Para isso, temos que admitir: $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 = \beta^2 m^2 = 1$ e $\{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \beta m\} = 0$. A partir disso, obtemos as seguintes condições sobre $\boldsymbol{\alpha}$ e β :

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}; \quad (4.21)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0; \quad (4.22)$$

$$\beta^2 = \mathbb{I}. \quad (4.23)$$

Essas relações indicam que $\boldsymbol{\alpha}$ e β não podem ser números, mas sim matrizes para que a álgebra seja satisfeita, tendo também que o estado ψ da partícula deve ser representado por um vetor com múltiplos componentes na qual esses operadores atuam sobre o mesmo.

Ao todo, temos que essas relações satisfazem 10 condições a serem satisfeitas, e essas condições determinam as propriedades algébricas. A primeira representação que vem a tona seria que essas matrizes poderiam ser propriamente as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

As matrizes de Pauli, juntamente com a identidade formam uma base completa de matrizes hermitianas 2×2 . Elas obedecem a condições similares a qual procuramos, porém só satisfazendo 6 condições, sendo ela:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}. \quad (4.25)$$

porém, as matrizes $\boldsymbol{\alpha}$ e β satisfazem 10 condições, portanto elas não são matrizes 2×2 . Então precisamos encontrar qual seria a menor dimensão para essas matrizes que satisfaçam essas 10 condições.

Como as matrizes devem ser hermitianas, e por ser matrizes, devem ser matrizes quadradas, logo temos que mostrar que essas matrizes devem ter ordem par.

Da a relação (4.21), temos:

$$\boldsymbol{\alpha}_i \beta = -\beta \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (4.26)$$

tirando o determinante:

$$\det(\boldsymbol{\alpha}_i \beta) = \det(-\beta \boldsymbol{\alpha}_i). \quad (4.27)$$

Uma das propriedades fundamentais do determinante é:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B). \quad (4.28)$$

Essa identidade é válida para quaisquer matrizes quadradas A e B da mesma ordem n . Logo,

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{\alpha}_i) \det(\beta) &= \det(-\beta) \det(\boldsymbol{\alpha}_i) = \det(-\mathbb{I}) \det(\beta) \det(\boldsymbol{\alpha}_i) \\ &= \det(-\mathbb{I}) \det(\boldsymbol{\alpha}_i) \det(\beta) \\ \therefore \det(-\mathbb{I}) &= 1. \end{aligned}$$

Sendo \mathbb{I} a matriz identidade $n \times n$. Então a matriz $-\mathbb{I}_n$ é dada por:

$$-\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix},$$

o determinante dessa matriz é o produto dos elementos da diagonal principal:

$$\det(-\mathbb{I}_n) = (-1)^n = 1.$$

logo, concluímos que n deve ser par.

Concluí-se então que a menor representação matricial que satisfaz as condições (4.21) - (4.23) requer matrizes 4×4 , implicando que ψ deve ser um vetor coluna com quatro componentes complexos. Esse vetor é chamado de **espinor de Dirac**.

Logo, uma escolha convencional para α_i e β é conhecido como **representação de Dirac-Pauli**, na qual essas matrizes são 4×4 com a seguinte estrutura matricial em blocos diagonais 2×2 :

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

onde:

- \mathbb{I}_2 é a matriz identidade 2×2 ,
- σ^i são as matrizes de Pauli para $i = 1, 2, 3$.

A estrutura de β reflete a separação entre estados de energia positiva e negativa (partículas e antipartículas), enquanto os termos α_i conectam esses dois subespaços, representando o acoplamento do momento com o spin. Assim, promovendo as quantidades clássicas a operadores, a equação (4.19) torna-se a equação de Dirac:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi. \quad (4.29)$$

Podemos reescrever (4.29) em uma forma manifestamente covariante introduzindo as matrizes de Dirac γ^μ , definidas como:

$$\gamma^0 = \beta \quad , \quad \gamma^i = \beta \alpha^i. \quad (4.30)$$

A equação de Dirac então assume agora a forma:

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad (4.31)$$

em que as matrizes γ^μ satisfazem a álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \eta^{\mu\nu} \mathbb{I}. \quad (4.32)$$

sendo $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é o tensor métrico de Minkowski.

4.2.1 Solução de onda plana

Analisando a equação de Dirac para uma partícula livre (4.29) na qual buscamos uma solução de onda plana na forma:

$$\psi = w \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \quad (4.33)$$

substituindo em (4.29) e aplicando a derivada temporal:

$$Ew \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) = (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)w \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \quad (4.34)$$

a derivada espacial vai atuar sobre o fator $\exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$, produzindo um fator \mathbf{p} :

$$Ew = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)w, \quad (4.35)$$

substituindo as matrizes dadas pela representação (4.24):

$$Ew = \left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} m \right] w. \quad (4.36)$$

Podemos dividir o spinor w em dois subespinores:

$$w = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

substituindo:

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} m \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

portanto:

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} m\mathbb{I} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m\mathbb{I} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Multiplicando os blocos, obtemos duas equações:

$$E\phi = +m\phi + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi; \quad (4.40)$$

$$E\chi = -m\chi + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\phi. \quad (4.41)$$

Resolvendo essas equações para χ :

$$\chi = \frac{1}{E + m}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\phi. \quad (4.42)$$

Substituindo em (4.41):

$$(E - m)\phi = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{E + m}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\phi, \quad (4.43)$$

usando a identidade $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2\mathbb{I}$ resultando em:

$$\begin{aligned} (E - m)\phi &= \frac{\mathbf{p}^2}{E + m}\phi \\ \therefore (E^2 - m^2)\phi &= \mathbf{p}^2\phi, \end{aligned} \quad (4.44)$$

ou seja,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (4.45)$$

Nos resulta exatamente a relação de dispersão relativística, no entanto, o problema de soluções de energia negativa da equação de Klein-Gordon se mantém. Agora precisamos verificar a probabilidade de corrente para saber se será satisfeita.

4.2.2 Probabilidade de corrente para a equação de Dirac

Tomando novamente equação de Dirac para uma partícula livre (4.29), tiramos seu conjugado:

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi^\dagger. \quad (4.46)$$

Multiplicamos ambos lados por β pela esquerda pois, se multiplicássemos diretamente pelo ψ^\dagger não chegaríamos diretamente na equação de continuidade, temos:

$$-i \beta \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \beta (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi^\dagger, \quad (4.47)$$

definindo o *spinor adjunto*: $\bar{\psi} = \beta \psi^\dagger$, temos:

$$\begin{aligned} -i \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial t} &= \bar{\psi} (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \overleftarrow{\nabla} + \beta m) \cdot (-1) \\ &= i \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial t} = \bar{\psi} (i \boldsymbol{\alpha} \cdot \overleftarrow{\nabla} - \beta m), \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde $\overleftarrow{\nabla}$ é introduzido para deixar explícito que estamos atuando com a derivada pela esquerda pois aqui estamos tratando de matrizes, respeitando a ordem de multiplicação. Multiplicando (4.29) pela esquerda por $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \bar{\psi} (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi, \quad (4.49)$$

e (4.48) pela direita por ψ :

$$i \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \bar{\psi} (i \boldsymbol{\alpha} \cdot \overleftarrow{\nabla} - \beta m) \psi. \quad (4.50)$$

Subtraindo (4.50) e (4.49):

$$\bar{\psi} i \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi - i \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \bar{\psi} (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi - \bar{\psi} (i \boldsymbol{\alpha} \cdot \overleftarrow{\nabla} - \beta m) \psi, \quad (4.51)$$

obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\psi} \psi) - \nabla \cdot (\bar{\psi} \boldsymbol{\alpha} \psi) = 0. \quad (4.52)$$

Que, ao comparar com a equação da continuidade, identificamos

$$\rho = \bar{\psi} \psi; \quad (4.53)$$

$$\mathbf{j} = \bar{\psi} \boldsymbol{\alpha} \psi. \quad (4.54)$$

Ao contrário do que ocorre na equação de Klein-Gordon, na qual a densidade de probabilidade não é positiva definida, na equação de Dirac a densidade é sempre real e positiva definida, desde que ψ seja devidamente normalizada. Isso garante uma interpretação probabilística consistente da equação, tornando a teoria de Dirac uma descrição quântica relativística adequada para partículas com spin $\frac{1}{2}$.

4.2.3 Soluções da equação de Dirac para partícula Livre

Consideramos a equação de Dirac para uma partícula livre no espaço dos momentos, escrita como:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (4.55)$$

onde $p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = (E, \mathbf{p})$, e assumimos soluções do tipo onda plana dado por (4.33). Substituindo na equação, obtemos:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)w(p) = 0. \quad (4.56)$$

Buscaremos soluções tanto para energia positiva $E > 0$, com $w(p) = u(s, \mathbf{p})$, quanto para energia negativa $E < 0$, com $w(p) = v(s, \mathbf{p})$ na qual nos resultam espinores que descrevem os férmions.

4.2.3.1 Soluções para Energia Positiva

Para $E > 0$, reescrevemos a equação de Dirac na base de Dirac (ou representação padrão) com os blocos de matrizes γ^μ , de modo que a equação toma a forma:

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)u(s, \mathbf{p}) = Eu(s, \mathbf{p}), \quad (4.57)$$

onde $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$ e $\beta = \gamma^0$.

Assumimos uma solução com estrutura em blocos:

$$u(s, \mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \phi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

com $\phi^{(s)}, \chi^{(s)}$ espinores de duas componentes. Substituindo na equação, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi^{(s)} + m\phi^{(s)} = E\phi^{(s)}; \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\phi^{(s)} - m\chi^{(s)} = E\chi^{(s)}. \end{cases} \quad (4.59)$$

Isolando $\chi^{(s)}$, encontramos:

$$\chi^{(s)} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \phi^{(s)}. \quad (4.60)$$

Logo, a solução geral para energia positiva é:

$$u(s, \mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \phi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \phi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

em que $\phi^{(s)}$ são os espinores de duas componentes que representam os dois estados de spin da partícula de spin $\frac{1}{2}$, com $s = 1, 2$.

Quanto a constante de normalização N , ela pode ser determinada impondo a condição:

$$u^\dagger(s, \mathbf{p})u(s, \mathbf{p}) = 2E. \quad (4.62)$$

Calculando explicitamente:

$$\begin{aligned} u^\dagger u &= |N|^2 \left[\phi^\dagger \phi + \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \phi \right)^\dagger \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \phi \right) \right] \\ &= |N|^2 \left[\phi^\dagger \phi + \frac{\phi^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \phi}{(E + m)^2} \right] \\ &= |N|^2 \left[\phi^\dagger \phi + \frac{\phi^\dagger (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \phi}{(E + m)^2} \right] \\ &= |N|^2 \left[1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{(E + m)^2} \right] \phi^\dagger \phi. \end{aligned}$$

Utilizando $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$, temos:

$$1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{(E + m)^2} = \frac{(E + m)^2 + |\mathbf{p}|^2}{(E + m)^2} = \frac{2E(E + m)}{(E + m)^2} = \frac{2E}{E + m}.$$

Logo:

$$u^\dagger u = |N|^2 \cdot \frac{2E}{E + m} \cdot \phi^\dagger \phi.$$

Se escolhermos $\phi^\dagger \phi = 1$, então:

$$\begin{aligned} |N|^2 &= \frac{E + m}{2E}. \\ |N|^2 \cdot \left(\frac{2E}{E + m} \right) &= 2E \end{aligned}$$

Simplificando:

$$N = \sqrt{E + m}$$

Portanto, a solução normalizada é:

$$u(s, \mathbf{p}) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \phi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \phi^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

4.2.3.2 Soluções para Energia Negativa

Para $E < 0$, consideramos:

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)v(s, \mathbf{p}) = -Ev(s, \mathbf{p}), \quad (4.64)$$

e assumimos uma solução análoga:

$$v(s, \mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \eta^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Seguindo os mesmos passos da resolução anterior, obtemos:

$$\eta^{(s)} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)},$$

e assim:

$$v(s, \mathbf{p}) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad (4.66)$$

em que novamente $\chi^{(s)}$ são espiniores arbitrários normalizados com $\chi^\dagger \chi = 1$.

As soluções com $E < 0$ representaram, inicialmente, um grande desafio conceitual, pois não admitiam uma interpretação direta dentro da mecânica quântica não relativística. A presença de estados com energia negativa parecia implicar na instabilidade do vácuo, permitindo que partículas decaíssem indefinidamente para energias cada vez menores. No entanto, Dirac propôs uma interpretação inovadora e profundamente influente para lidar com essa dificuldade, abrindo caminho para a formulação relativística das antipartículas, conhecido como **mar de Dirac**.

4.2.4 Interpretação de Dirac: o Mar de Dirac

Diante da presença inevitável de soluções com energia negativa na equação de Dirac, surgiu um problema conceitual profundo: se tais estados estiverem disponíveis, nada impediria uma partícula de energia positiva de decair espontaneamente para níveis cada vez menores de energia, emitindo radiação sem fim - uma situação claramente incompatível com a estabilidade do mundo físico. A mecânica quântica tradicional não oferecia recursos para lidar com esse cenário [8, 9].

Foi então que Dirac propôs uma solução notavelmente criativa e inovadora: todos os estados de energia negativa estariam, de fato, já preenchidos por partículas - formando um contínuo de ocupação chamado **mar de Dirac**. Como os férmions obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, nenhuma outra partícula poderia transitar para um desses estados já ocupados, garantindo assim a estabilidade do sistema.

Nessa construção, as partículas do mar não são diretamente observáveis, pois sua ocupação completa não gera efeitos físicos mensuráveis. No entanto, a ausência de uma partícula nesse mar - isto é, um estado de energia negativa *desocupado* - se manifesta como uma entidade com carga oposta, massa idêntica e energia positiva. Esse “buraco” no mar de Dirac se comporta como uma nova partícula, que hoje reconhecemos como a **antipartícula** associada ao férmion original. No caso do elétron, esse buraco foi identificado como o **pósitron**, cuja existência foi confirmada experimentalmente por Carl Anderson em 1932, validando de maneira espetacular a previsão teórica de Dirac.

A proposta do mar de Dirac teve implicações revolucionárias: ela introduziu, pela primeira vez, a noção de antipartículas no contexto da física relativística, antecipando um

dos conceitos centrais da física de partículas moderna. No entanto, apesar de seu poder explicativo, a ideia do mar de Dirac apresentava dificuldades conceituais, especialmente relacionadas à definição do vácuo e à presença infinita de carga e energia negativa - problemas que se tornavam cada vez mais evidentes com o desenvolvimento da física teórica.

Com o advento da **Teoria Quântica de Campos** (TQC), uma nova abordagem foi introduzida, oferecendo uma reinterpretação mais consistente. Na TQC, partículas e antipartículas surgem naturalmente como excitações de campos quânticos, e as soluções de energia negativa não requerem mais a ocupação de um mar infinito de estados. Em vez disso, o vácuo é redefinido como o estado sem partículas reais, e as antipartículas aparecem como os quanta associados às soluções de energia negativa, reinterpretadas como operadores de criação agindo sobre o vácuo. Essa formulação elimina as dificuldades conceituais do mar de Dirac, mantendo, porém, sua intuição física essencial: a simetria entre partículas e antipartículas, prevista originalmente pela genial proposta de Dirac.

5 Conclusão

O trabalho desenvolvido teve como objetivo central a compreensão progressiva de conceitos fundamentais que sustentam a física moderna, estruturando-se em quatro eixos temáticos. Iniciamos com a Teoria Clássica de Campos, revisitando o princípio variacional e formalismos relativísticos, essenciais para a transição do ponto de vista da mecânica clássica para o campo. Na sequência, estudamos o eletromagnetismo sob a ótica da Teoria de Gauge, analisando a estrutura das equações de Maxwell, a distinção entre simetrias globais e locais, e a introdução do princípio de gauge.

Prosseguimos com o estudo da mecânica quântica relativística, abordando a equação de Klein-Gordon e, em maior profundidade, a equação de Dirac, suas soluções e interpretações físicas. Esta estrutura permitiu construir uma base sólida para compreender os vínculos entre simetria, relatividade e quantização, aspectos centrais da física contemporânea.

A equação de Dirac representa um marco na física teórica, pois une com sucesso os princípios da mecânica quântica e da relatividade restrita, além de incorporar de forma natural o spin- $\frac{1}{2}$ e a antimatéria. Diferente da equação de Klein-Gordon, sua estrutura matemática permite uma interpretação consistente da densidade de probabilidade e fornece a base para a construção de teorias quânticas de campos para férmions.

A importância deste estudo reside na formação de um alicerce teórico-matemático robusto, indispensável para o entendimento da Teoria Quântica de Campos (TQC). Como extensão natural deste trabalho, os próximos estudos irão se concentrar na quantização desses campos, onde partículas e campos são tratados de forma unificada dentro de um formalismo quântico. A partir disso, será possível explorar a construção de teorias mais completas, como a Eletrodinâmica Quântica (QED) e os modelos de interações fundamentais que compõem o Modelo Padrão da física de partículas.

Referências

- [1] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. L. *Classical Mechanics*. 3. ed. San Francisco: Addison-Wesley, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 14, 16, 17 e 20.
- [2] LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora (LTC), 2003. Citado 4 vezes nas páginas 14, 16, 17 e 19.
- [3] Leonard Susskind e Art Friedman, *Special Relativity and Classical Field Theory: The Theoretical Minimum*, Basic Books, New York, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Volume 2 of *Course of Theoretical Physics*, 4th edition, Pergamon Press, Oxford, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 26.
- [5] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th edition, Pearson, Boston, 2013. Citado na página 22.
- [6] Eugene Paul Wigner, *On the Conservation of Charge and the Structure of Elementary Particles*, *Physical Review* **73**, 1002-1009 (1949). Citado na página 27.
- [7] Gerard 't Hooft, *The Baryon Number as a Topological Quantum Number*, *Nuclear Physics B* **35**, 167-174 (1980). Citado na página 28.
- [8] AITCHISON, I. J. R.; HEYL, A. J. G. *Gauge Theory in Particle Physics: A Practical Introduction*. 4. ed. Boca Raton: CRC Press, 2013. v. 1. Citado 8 vezes nas páginas 21, 22, 23, 28, 33, 36, 40 e 47.
- [9] GROSS, F. *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. New York: Wiley-VCH, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 47.
- [10] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An Introduction to Quantum Field Theory**. Boulder: Westview Press, 1995. 842 p. (Frontiers in Physics). Nenhuma citação no texto.

Apêndices

APÊNDICE A – Unidades Naturais de Heaviside-Lorentz

As *unidades naturais de Heaviside-Lorentz* (HL) constituem uma convenção adotada na eletrodinâmica clássica e na teoria quântica de campos, especialmente em contextos relativísticos e de altas energias. O principal objetivo desse sistema é simplificar as expressões matemáticas, eliminando constantes físicas que se repetem com frequência nas equações fundamentais.

Este sistema baseia-se na adoção de um conjunto de unidades naturais em que algumas constantes fundamentais da natureza são fixadas como unitárias, a saber:

$$\begin{aligned} \text{Velocidade da luz no vácuo: } & c = 1. \\ \text{Constante de Planck reduzida: } & \hbar = 1. \\ \text{Permissividade do vácuo: } & \varepsilon_0 = 1. \end{aligned}$$

Como consequência de $c = 1$ e da relação $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, segue-se também que $\mu_0 = 1$. Essa normalização torna as unidades coerentes com a estrutura relativística das equações e contribui para uma notação mais enxuta.

Nas unidades de Heaviside-Lorentz, o conjunto das equações de Maxwell assume a forma simetricamente simplificada:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

A principal diferença em relação ao sistema SI é o desaparecimento dos fatores de 4π , o que também se reflete na forma da lei de Coulomb, que passa a ser expressa como:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2}.$$

Apesar da presença explícita de 4π nesta equação, nota-se que ela decorre da convenção de se manter o fator na constante de força, e não nos campos. Em contraste, no sistema Gaussiano, o fator 4π aparece diretamente nas equações de Maxwell, o que altera as expressões de campo e densidades.

As conversões entre os sistemas Gaussianos e HL envolvem fatores de $\sqrt{4\pi}$, particularmente para:

- Campo elétrico: $\mathbf{E}_{\text{HL}} = \mathbf{E}_{\text{Gauss}}/\sqrt{4\pi}$;
- Densidade de carga: $\rho_{\text{HL}} = \rho_{\text{Gauss}}/\sqrt{4\pi}$;
- Densidade de corrente: $\mathbf{J}_{\text{HL}} = \mathbf{J}_{\text{Gauss}}/\sqrt{4\pi}$.

O uso das unidades HL é vantajoso no desenvolvimento de teorias relativísticas e na formulação de teorias quânticas de campos, como a Eletrodinâmica Quântica (QED). Ao eliminar constantes como \hbar , c e ε_0 , os cálculos tornam-se mais diretos, e a simetria das equações fica mais evidente, favorecendo a análise conceitual e algébrica das interações fundamentais.