

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Bacharelado em Matemática

Introdução às Categorias Modelo

Francisco Inácio de Sousa

João Pessoa – PB
Abril de 2025

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Bacharelado em Matemática

Introdução às Categorias Modelo

por

Francisco Inácio de Sousa

sob a orientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

João Pessoa – PB
Abril de 2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S725i Sousa, Francisco Inacio de.
Introdução às categorias modelo / Francisco Inacio
de Sousa. - João Pessoa, 2025.
107 p. : il.

Orientação: Napoleón Caro Tuesta.
TCC (Curso de Bacharelado em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Categorias modelo. 2. Teoria da homotopia. 3.
Complexos de R-módulos. 4. Espaços topológicos. 5.
Categorias simpliciais. I. Tuesta, Napoleón Caro. II.
Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

Introdução às Categorias Modelo

por

Francisco Inácio de Sousa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Trabalho aprovado em 25 de abril de 2025.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **NAPOLEON CARO TUESTA**
Data: 27/04/2025 20:36:27-0300
Verifique em <https://validar.itb.gov.br>

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta – UFPB
(Orientador)

Documento assinado digitalmente
 **JACQUELINE FABIOLA ROJAS ARANCIBIA**
Data: 28/04/2025 22:09:46-0300
Verifique em <https://validar.itb.gov.br>

Profa. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia – UFPB
(Examinadora Interna)

Documento assinado digitalmente
 **WALLACE MANGUEIRA DE SOUSA**
Data: 28/04/2025 21:11:44-0300
Verifique em <https://validar.itb.gov.br>

Prof. Dr. Wallace Mangueira de Sousa – UFPB
(Examinador Interno)

João Pessoa – PB
Abril de 2025

*“A vida se encolhe ou se expande em proporção à sua
coragem.”
God Bless and Protect Us!*

Agradecimentos

A conclusão deste trabalho é um marco importante em minha jornada acadêmica, e não poderia deixar de expressar minha gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para essa conquista.

Primeiramente, agradeço a Deus, pela força e pela sabedoria concedida ao longo dessa caminhada, iluminando meu caminho e me dando perseverança nos momentos mais desafiadores.

À minha mãe, Edimunda, pelo amor incondicional, pelo apoio incansável e por sempre acreditar em mim. Sua força e dedicação foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui.

À minha família, pelo incentivo constante e pela base sólida que me proporcionaram ao longo dos anos. Sem vocês, esta conquista não seria possível.

Ao Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta, meu orientador e amigo: este trabalho carrega sua marca intelectual e humana. Sua paixão pela matemática transformou nossas discussões em lições de rigor e criatividade, e sua generosidade fez da orientação um diálogo entre colegas. Por desafiar meus pensamentos, celebrar cada avanço e mostrar que os erros também ensinam, minha gratidão, por ter encontrado não apenas um mestre, mas um amigo.

Aos meus colegas de curso, pelo companheirismo, pelas discussões matemáticas enriquecedoras e pelo apoio mútuo ao longo dos desafios da graduação. Compartilhar essa trajetória com vocês tornou a jornada muito mais gratificante.

Aos professores do Departamento de Matemática, pelo conhecimento transmitido e pelo compromisso com o ensino e a pesquisa. Cada disciplina, cada orientação e cada desafio proposto contribuíram imensamente para minha formação.

À banca examinadora, composta, pela Profa. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia e pelo Prof. Dr. Wallace Manguiera de Sousa, pelo tempo dedicado à leitura e avaliação deste trabalho, pelas valiosas contribuições e sugestões que certamente enriquecerão minha trajetória acadêmica.

A todos vocês, meu sincero agradecimento!

“Superar suas próprias limitações e dominar o universo.”

“Texto na medalha Fields”

Resumo

Este trabalho apresenta uma introdução à teoria das categorias modelo, um conceito revolucionário introduzido por Daniel Quillen na década de 1960, que fornece uma estrutura unificada para o estudo de estruturas homotópicas em diversas áreas da matemática. Exploramos a estrutura de categorias modelo em três contextos fundamentais: a categoria dos complexos de R -módulos, a categoria dos espaços topológicos e a categoria das categorias simpliciais. Para cada uma dessas categorias, apresentamos a estrutura modelo correspondente, detalhamos suas propriedades essenciais e discutimos suas aplicações. O objetivo deste trabalho é fornecer uma exposição introdutória e acessível do tema, enfatizando a importância das categorias modelo na unificação de conceitos homotópicos e algébricos.

Palavras-chave: Categorias modelo, teoria da homotopia, complexos de R -módulos, espaços topológicos, categorias simpliciais.

Abstract

This work presents an introduction to model category theory, a groundbreaking concept introduced by Daniel Quillen in the 1960s, which provides a unified framework for the study of homotopical structures across various areas of mathematics. We explore the model category structure in three fundamental contexts: the category of R -modules complexes, the category of topological spaces, and the category of simplicial categories. For each of these categories, we present the corresponding model structure, detail its essential properties, and discuss its applications. The aim of this work is to provide an introductory and accessible exposition of the subject, emphasizing the importance of model categories in unifying homotopical and algebraic concepts.

Keywords: Model categories, homotopy theory, chain complexes of R -modules, topological spaces, simplicial categories.

Sumário

Introdução	10
1 Categorias Modelo	12
1.1 Categorias e Funtores	12
1.1.1 Funtores	15
1.1.2 Isomorfismo de categorias e transformações naturais	19
1.1.3 Construções Universais	22
1.2 Categorias Modelo	28
1.3 Definições Preliminares	29
1.4 Fundamentos e Estrutura	29
2 Complexo de Cadeia	33
2.1 Categorias Abelianas	33
2.1.1 Núcleo e Conúcleo	35
2.2 Complexos de Cadeia	37
2.2.1 Definição Geral em Categorias Abelianas	37
3 Categoria dos Complexos de R-módulos $\text{Ch}(R)$	41
3.1 Morfismos Especiais em $\text{Ch}(R)$	41
3.2 Estrutura de Categoria Modelo $\text{Ch}(R)$	43
4 A Categoria Modelo de Quillen para Espaços Topológicos	56
4.1 Definições Preliminares e o Teorema Principal	56
4.2 Propriedades de Levantamento	58
4.2.1 Pushouts, Pullbacks e Levantamento	59
4.2.2 Coprodutos, Composição Transfinita e Propriedades de Levantamento	62
4.2.3 Retrações e Propriedades de Elevação	64
4.3 Complexo Celular Relativo	66
4.3.1 Subconjuntos compactos de complexos celulares relativos	69
4.3.2 Complexos celulares relativos e levantamento	71
4.4 O Argumento do Objeto Pequeno	72
4.4.1 A primeira fatoração	73
4.4.2 A Segunda Fatoração	76
4.5 O Axioma de Fatoração	79
4.5.1 Cofibração e Fibração Trivial	79
4.5.2 Cofibração Trivial e Fibração	81
4.6 Grupos de Homotopia e Mapas de Discos	82
4.6.1 Mapas de Diferença	82
4.6.2 Levantamento de Mapas em Discos	85

4.7	O Axioma de Levantamento	89
4.7.1	Cofibrações e Fibrções Triviais	89
4.7.2	Cofibrações Triviais e Fibrções	89
4.8	A prova do Teorema 4.1	90
5	Uma Estrutura de Categoria Modelo na Categoria de Categorias Sim-	
	pliciais	92
5.1	Contexto Histórico e Motivação	92
5.2	Definições Preliminares	92
5.2.1	Estrutura e Terminologias	93
5.2.2	Classes de Morfismos em \mathcal{SC}	93
5.3	Resultado Principal	94
5.3.1	Conjuntos Simpliciais e a Estrutura de Categoria Modelo em $\mathbf{S}\mathbf{Sets}$	94
5.3.2	Cofibrações e Cofibrações Acíclicas Geradoras	95
5.3.3	Propriedades da Estrutura de Categoria Modelo	95
5.4	As Cofibras Acíclicas Geradoras	96
5.5	Estrutura de Categoria Modelo	102
5.5.1	Prova da Proposição 5.6	106
5.5.2	Prova do Teorema 5.1	107
5.6	Prova do Lema 5.2	109
	Bibliografia	114

Introdução

A teoria das categorias modelo foi introduzida por Daniel G. Quillen em 1967 como um arcabouço abstrato destinado a formalizar e generalizar técnicas da teoria da homotopia. Sua formulação permitiu uma unificação notável entre estruturas oriundas da topologia algébrica e da álgebra homológica, promovendo uma ponte conceitual entre áreas até então tratadas com ferramentas distintas. A inspiração para esse desenvolvimento, no entanto, remonta às primeiras décadas do século *XX*, impulsionada pelos trabalhos fundamentais de matemáticos como Henri Cartan, Samuel Eilenberg, Alexander Grothendieck, Witold Hurewicz, Jean-Pierre Serre e John C. Moore.



Figura 1: **A Ponte de Quillen:** representação simbólica da ligação entre a topologia algébrica e a álgebra homológica por meio da teoria das categorias modelo.

A Figura acima, intitulada Ponte de Quillen, ilustra simbolicamente essa transição teórica: à esquerda, o campo da topologia algébrica, com suas ferramentas como o grupo fundamental π_1 e as sequências espectrais; à direita, a álgebra homológica, com os funtores Ext e Tor aplicados a complexos de cadeias. Ao centro, sob a ponte formada pelos funtores F e G , observa-se o trânsito de ideias entre as duas áreas, representadas por alguns dos protagonistas históricos desse avanço.

Henri Cartan e Samuel Eilenberg, por exemplo, estabeleceram os alicerces da álgebra homológica em seu livro *Homological Algebra* (1956), ao introduzirem as noções de funtores deriváveis e sequências espectrais. Witold Hurewicz, por sua vez, conectou de forma profunda a homologia e a homotopia por meio do teorema que leva seu nome. Jean-Pierre Serre, em sua tese *Homotopie singulière des espaces fibrés* (1951), foi um dos primeiros a aplicar métodos homotópicos à cohomologia e aos espaços fibrados.

John C. Moore, em colaboração com Eilenberg, introduziu a homologia de Eilenberg-Moore, essencial no tratamento moderno da homotopia algébrica. Alexander Grothendi-

eck, embora não tenha trabalhado diretamente com categorias modelo, reformulou profundamente a geometria algébrica ao introduzir categorias derivadas e a teoria dos topos, oferecendo uma linguagem abstrata e poderosa para tratar invariâncias homológicas.

Nesse contexto, a categoria dos espaços topológicos oferece um exemplo paradigmático de uma categoria modelo. As equivalências fracas correspondem às equivalências homotópicas usuais, enquanto as fibrações e cofibrações descrevem aspectos estruturais que permitem um tratamento categórico da homotopia. Outro exemplo importante é a categoria dos complexos de cadeias de R -módulos, onde as equivalências fracas são os quasi-isomorfismos, refletindo a equivalência homológica entre complexos.

Além disso, destacam-se as categorias simpliciais, enriquecidas sobre conjuntos simpliciais, fundamentais para a formulação moderna da homotopia algébrica e da teoria das $(\infty, 1)$ -categorias. A estrutura modelo proposta por Dwyer, Hirschhorn e Kan, com as importantes correções de Toën e Vezzosi, é ilustrativa dessa abordagem. As equivalências de Dwyer-Kan, por exemplo, estendem a noção clássica de equivalência de categorias para o contexto simplicial, sendo essenciais para capturar estruturas homotópicas em categorias superiores.

Nas últimas décadas, a teoria das categorias modelo consolidou-se como uma linguagem unificadora de vasto alcance na matemática moderna. Suas aplicações na K -teoria algébrica, na geometria algébrica derivada e na homotopia abstrata permitiram avanços significativos na compreensão estrutural de diversos domínios. Este trabalho tem como objetivo explorar formalmente essas ideias, apresentando as principais definições, exemplos e propriedades estruturais das categorias modelo no contexto da matemática contemporânea.

Capítulo 1

Categorias Modelo

Antes de entrar na definição formal do que é uma categoria modelo, vamos relembrar algumas noções básicas sobre categorias. Este capítulo tem como objetivo fornecer uma base sólida em teoria das categorias, necessária para entender a estrutura de categorias modelo. Nas seções iniciais, revisaremos conceitos como categorias, funtores, transformações naturais, construções universais (produtos, coprodutos, pullbacks, pushouts, limites e colimites). O leitor familiarizado com esses tópicos pode passar diretamente para a Seção 1.2, onde começamos a discutir categorias modelo. Os conceitos apresentados aqui podem ser encontrados em [11], [14]. Alguns dos resultados apresentados aqui não serão demonstrados.

1.1 Categorias e Funtores

No desenvolvimento de um determinado ramo da Matemática, é comum estudarmos alguns objetos e as relações entre eles.

Na *Teoria de Conjuntos*, como o próprio nome sugere, os objetos de investigação são os conjuntos, e as relações entre estes são as funções.

Na *Teoria de Anéis*, os objetos de investigação são os anéis, e as relações entre tais objetos capazes de capturar as operações envolvidas são os morfismos de anéis. Analogamente, para as *Teorias de Grupos, Módulos, Espaços Vetoriais, Álgebras* e etc., temos respectivamente: grupos e homomorfismos de grupos; módulos e homomorfismos de módulos; espaços vetoriais e transformações lineares; álgebras e homomorfismos de álgebras.

Afastando-nos um pouco da Álgebra, em *Topologia*, os objetos de estudo são os espaços topológicos e as relações entre tais objetos competentes para detectar a estrutura subjacente são as funções contínuas. Restringindo este ambiente para a *Topologia Diferencial*, os objetos são as variedades diferenciáveis e as relações entre elas são as funções diferenciáveis.

A partir dos exemplos acima, percebemos algo em comum: a presença de objetos e relações entre tais objetos. Esta observação motiva a definição de uma *categoria*.

Definição 1.1 (Categoria). Uma *categoria* \mathcal{C} consiste de:

1. Uma classe ¹ de objetos, denotada por $\text{ob}(\mathcal{C})$;

¹O termo classe para os objetos é usado para evitar paradoxos como o de Russell.

2. Para cada par de objetos $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$, existe um conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Os elementos deste conjunto são chamados de \mathcal{C} -*morfismo* (ou simplesmente *morfismos*) de A em B e um elemento $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é denotado por $f : A \rightarrow B$;
3. Para quaisquer $A, B, C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ existe uma função

$$\begin{aligned} \circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f := \circ(f, g) \end{aligned}$$

chamada *composição de morfismos* tais que as seguintes condições são satisfeitas:

- **(Associatividade)** Para quaisquer $A, B, C, D \in \text{ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ tem-se que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

- **(Unidade)** Para qualquer $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ existe um morfismo

$$\text{id}_A : A \rightarrow A$$

chamado *morfismo identidade* de A , tal que para quaisquer $B \in \text{ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tem-se que

$$\text{id}_A \circ g = g \quad \text{e} \quad f \circ \text{id}_A = f.$$

O morfismo identidade muitas vezes também é denotado por 1_A .

Exemplos de Categorias

Abaixo estão alguns exemplos importantes de categorias:

- **0**: A categoria vazia, que não possui objetos nem morfismos.
- **Set**: A categoria em que os objetos são todos os conjuntos e os morfismos são as funções entre conjuntos.
- **Grp**: A categoria cujos objetos são todos os grupos e os morfismos são os homomorfismos de grupos.
- **Ab**: A categoria cujos objetos são todos os grupos abelianos e os morfismos são os homomorfismos de grupos abelianos.
- **Ring**: A categoria cujos objetos são todos os anéis e os morfismos são os homomorfismos de anéis.
- **CRing**: A categoria cujos objetos são todos os anéis comutativos e os morfismos são os homomorfismos de anéis comutativos.
- **R-Mod**: A categoria cujos objetos são todos os módulos à esquerda sobre um anel R fixo e os morfismos são os R -homomorfismos entre módulos.
- **Mod-R**: A categoria cujos objetos são todos os módulos à direita sobre um anel R fixo e os morfismos são os R -homomorfismos entre módulos.
- **Top**: A categoria em que os objetos são todos os espaços topológicos e os morfismos são as funções contínuas entre esses espaços.

Definição 1.2. Seja \mathcal{A} uma categoria. Um morfismo $f : A \rightarrow B$ em \mathcal{A} é chamado de *corretração* se existe um morfismo $g : B \rightarrow A$ em \mathcal{A} tal que $g \circ f = 1_A$. Dualmente, dizemos que f é uma *retração* se existe um morfismo $h : B \rightarrow A$ tal que $f \circ h = 1_B$.

Se f é uma retração e uma corretração, então chamamos f de *isomorfismo* e dizemos que os objetos A e B são *isomorfos*, denotado por $A \cong B$. Neste caso, temos que:

$$g = g \circ 1_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = 1_A \circ h = h,$$

onde chamamos $g = h$ de *inverso* de f , e o denotamos por f^{-1} .

Definição 1.3. Um morfismo $\alpha : A \rightarrow B$ é chamado de *monomorfismo* se $\alpha \circ f = \alpha \circ g$ implica $f = g$ para qualquer par de morfismos f, g com contradomínio A . Duplamente, α é chamado de *epimorfismo* se $f \circ \alpha = g \circ \alpha$ implica $f = g$ para qualquer par de morfismos f, g com domínio B .

Lema 1.1. Todo isomorfismo é um monomorfismo e um epimorfismo.

Definição 1.4 (Categorias especiais). 1. Uma categoria é *discreta* quando os únicos morfismos são as identidades.

2. Uma categoria é *pequena* quando sua classe de objetos é um conjunto.

3. Seja \mathcal{A} uma categoria. Construimos a categoria $\mathcal{A}^{\rightarrow}$ tomando como objetos os morfismos em \mathcal{A} . Dados dois morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$, tomamos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

como um morfismo de f para g .

4. Seja \mathcal{A} uma categoria. Construimos a categoria $\mathcal{A}^{\rightarrow\rightarrow}$ tomando como objetos os pares de morfismos em \mathcal{A} . Dados dois pares de morfismos $g \circ f$ e $g' \circ f'$, sendo $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $f' : A' \rightarrow B'$ e $g' : B' \rightarrow C'$, tomamos um diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

como um morfismo de $g \circ f$ para $g' \circ f'$.

Definição 1.5. Seja Z um objeto de uma categoria \mathcal{C} :

- Dizemos que Z é *inicial* se para todo $C \in \mathcal{C}$ existe um único morfismo $Z \rightarrow C$.
- Dizemos que Z é *final* se para todo $C \in \mathcal{C}$ existe um único morfismo $C \rightarrow Z$.
- Dizemos que Z é *zero* se é inicial e final. Qualquer par de objetos zeros é isomorfo, e eles são identificados por um objeto zero 0 de \mathcal{C} .

Chamamos uma categoria com objeto inicial e objeto final de *pontuada* se o morfismo do objeto inicial para o objeto final é um isomorfismo.

Definição 1.6. Para cada categoria \mathcal{C} , existe uma *categoria dual* \mathcal{C}^{op} , cujo conjunto subjacente é o mesmo de \mathcal{C} e onde

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(C, C') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C),$$

com a composição $\circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ dada por $\alpha \circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} \beta = \beta \circ_{\mathcal{C}} \alpha$. Toda definição ou teorema para \mathcal{C} tem uma correspondente definição ou teorema para \mathcal{C}^{op} .

Definição 1.7. Uma categoria \mathcal{C} é *preaditiva* se cada conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ é um grupo abeliano e as composições

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C'') \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C'')$$

são bilineares.

Se \mathcal{C} é uma categoria preaditiva e tem um objeto zero 0 , então o elemento zero do grupo $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ é idêntico ao morfismo composto $C \rightarrow 0 \rightarrow C'$, o que segue da bilinearidade da composição

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, 0) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, C') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C').$$

1.1.1 Funtores

Após definir o conceito de categorias, é natural buscar uma maneira de comparar ou relacionar duas categorias. A ideia é estabelecer uma conexão entre categorias de forma semelhante à maneira como conectamos conjuntos por meio de funções. No entanto, como a classe de objetos de uma categoria nem sempre é um conjunto, não utilizamos o termo “função”. Em vez disso, usamos o termo functor para descrever essa conexão.

Além disso, como uma categoria é composta por objetos e morfismos, uma relação entre duas categorias deve envolver não apenas uma correspondência entre os objetos, mas também entre os morfismos das categorias envolvidas.

Definição 1.8 (Functor Covariante). Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas categorias. Um functor covariante $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste em uma aplicação que:

1. Associa cada $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$, a um único objeto $T(A) \in \text{ob}(\mathcal{D})$;
2. Para quaisquer objetos $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$, associa cada morfismo $f : A \rightarrow B$ em \mathcal{C} a um único morfismo $T(f) : T(A) \rightarrow T(B)$ em \mathcal{D} de modo que as seguintes condições são satisfeitas:
 - $T(\text{id}_A) = \text{id}_{T(A)}$ para todo $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$.

- Para todos $A, B, C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ e morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ em \mathcal{C} , tem-se que

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f).$$

É possível, como veremos em alguns exemplos, que a associação entre os morfismos inverta a ordem dos objetos. Neste caso, dizemos que o funtor é contravariante.

Definição 1.9 (Funtor Contravariante). Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias. Um *funtor contravariante* consiste em uma aplicação que:

1. Associa cada $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$, a um único objeto $T(A) \in \text{ob}(\mathcal{D})$;
2. Para quaisquer objetos $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$, associa cada morfismo $f : A \rightarrow B$ em \mathcal{C} a um único morfismo $T(f) : T(B) \rightarrow T(A)$ em \mathcal{D} de modo que as seguintes condições são satisfeitas:
 - (a) $T(\text{id}_A) = \text{id}_{T(A)}$ para todo $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$.
 - (b) Para todos $A, B, C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ e morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ em \mathcal{C} , tem-se que

$$T(g \circ f) = T(f) \circ T(g).$$

Exemplos de Funtores

Exemplo 1.1.

Seja \mathcal{A} uma categoria aditiva e $A \in \mathcal{A}$. Podemos definir dois funtores importantes associados ao objeto A :

1. **Funtor Covariante** $\text{Hom}(A, -)$:

O funtor covariante $\text{Hom}(A, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ é definido da seguinte maneira:

- Para cada objeto $B \in \mathcal{A}$, associamos o grupo abeliano $\text{Hom}(A, B)$.
- Para cada morfismo $\alpha : B \rightarrow C$ em \mathcal{A} , associamos o homomorfismo de grupos

$$\text{Hom}(A, \alpha) : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$$

definido por

$$\text{Hom}(A, \alpha)(x) = \alpha \circ x, \quad \text{para todo } x \in \text{Hom}(A, B).$$

Dualmente, o funtor contravariante $\text{Hom}(-, A) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ é definido da seguinte maneira:

- Para cada objeto $B \in \mathcal{A}$, associamos o grupo abeliano $\text{Hom}(B, A)$.
- Para cada morfismo $\alpha : B \rightarrow C$ em \mathcal{A} , associamos o homomorfismo de grupos

$$\text{Hom}(\alpha, A) : \text{Hom}(C, A) \rightarrow \text{Hom}(B, A)$$

definido por

$$\text{Hom}(\alpha, A)(x) = x \circ \alpha, \quad \text{para todo } x \in \text{Hom}(C, A).$$

Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana e A um objeto de \mathcal{A} . Podemos definir o funtor $\text{Ext}^n(A, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ de duas maneiras diferentes:

1. Como Funtores Derivados:

O funtor $\text{Ext}^n(A, -)$ é definido como o n -ésimo funtor derivado à direita do funtor $\text{Hom}(A, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$. Essa abordagem é baseada na teoria de funtores derivados.

2. Como Classes de Extensões:

Alternativamente, $\text{Ext}^n(C, A)$ pode ser definido como uma classe de equivalência de extensões com n dobras de A para C . Isso significa que $\text{Ext}^n(C, A)$ consiste em seqüências exatas da forma

$$0 \rightarrow A \rightarrow B_{n-1} \rightarrow B_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow B_1 \rightarrow B_0 \rightarrow C \rightarrow 0.$$

A seguir apresentamos alguns funtores clássicos que emergem de algumas construções em Álgebra Comutativa.

Exemplo 1.2 (Localização). Sejam A um anel comutativo com unidade e $S \subseteq A$ um conjunto multiplicativo. Lembre-se de que, se M é um A -módulo, a *localização de M por S* é o conjunto

$$S^{-1}M := \left\{ \frac{u}{s} \mid u \in M \text{ e } s \in S \right\},$$

onde $\frac{u}{s}$ é a classe de equivalência do par $(u, s) \in M \times S$, dada pela relação de equivalência que satisfaz

$$\frac{u}{s} = \frac{v}{t} \iff \exists c \in S \text{ tal que } c(tu - sv) = 0_M.$$

Assim, a localização $S^{-1}M$ possui uma estrutura canônica de $S^{-1}A$ -módulo. Além disso, cada morfismo de A -módulos $f : M \rightarrow N$ induz um morfismo de $S^{-1}A$ -módulos

$$S^{-1}f : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$$

$$\frac{u}{s} \longmapsto \frac{f(u)}{s}$$

Portanto, a aplicação

$$S^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}_A & \longrightarrow & \mathbf{Mod}_{S^{-1}A} \\ M & \longmapsto & S^{-1}M \\ f : M \rightarrow N & \longmapsto & S^{-1}f : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N \end{array}$$

satisfaz as condições de um *funtor covariante*² e é chamada de *funtor localização*.

Exemplo 1.3 (Produto Tensorial). Sejam R um anel comutativo com unidade e M um R -módulo fixado. A propriedade universal do produto tensorial garante que, para qualquer morfismo de R -módulos $f : N \rightarrow N'$, existe um único morfismo de R -módulos $\text{id}_M \otimes f : M \otimes N \rightarrow M \otimes N'$ que satisfaz

$$(\text{id}_M \otimes f)(u \otimes v) = u \otimes f(v), \quad \forall u \in M \text{ e } v \in N.$$

Portanto, é fácil verificar que a aplicação

$$M \otimes (-) : \begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}_R & \longrightarrow & \mathbf{Mod}_R \\ N & \longmapsto & M \otimes N \\ f : N \rightarrow N' & \longmapsto & \text{id}_M \otimes f : M \otimes N \rightarrow M \otimes N' \end{array}$$

é um funtor covariante, chamado *funtor produto tensorial por M* .

²Faça este exercício. Juro que é bem de boa!

Tipos Especiais de Morfismos

Nos mais diversos ramos de estudo em Matemática, geralmente o ambiente determina uma noção de *isomorfismo*, um conceito que, a grosso modo, estabelece uma maneira de reconhecer dois objetos *ontologicamente diferentes* como *equivalentes* com respeito à estrutura que os compõe.

Por exemplo, quando dois anéis são isomorfos, significa que, mesmo os conjuntos subjacentes sendo diferentes, a estrutura algébrica dada pelas operações os transforma em *entes* que se comportam da *mesma forma* do ponto de vista algébrico. Assim acontece com as demais estruturas algébricas (grupos, módulos, álgebras, etc.).

Na *Topologia*, objetos com a *mesma* estrutura topológica são chamados *homeomorfos*, o que significa que um objeto pode ser *deformado continuamente* até se transformar no outro, e vice-versa. Se acrescentarmos um ingrediente de diferenciabilidade, objetos com a *mesma* estrutura diferenciável são ditos *difeomorfos*.

Em todos os exemplos acima, encontramos um ponto em comum: para que dois objetos sejam *isomorfos*, *homeomorfos*, *difeomorfos*, etc., é necessário existir um certo tipo de morfismo entre os objetos com um morfismo *inverso*. Isso nos dá a pista de como definir uma noção de *isomorfismo* numa categoria arbitrária.

Definição 1.10 (Isomorfismo em Categorias). Sejam \mathcal{C} uma categoria e $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} é chamado de \mathcal{C} -*isomorfismo* se existe um morfismo $g : Y \rightarrow X$ em \mathcal{C} tal que

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{e} \quad f \circ g = \text{id}_Y.$$

Neste caso, dizemos que X e Y são *isomorfos em \mathcal{C}* , denotamos $X \cong Y$, e dizemos que g é um *morfismo inverso* de f .

Quando não houver risco de ambiguidade, podemos remover o prefixo \mathcal{C} - do termo definido.

Proposição 1.1 (Unicidade do Morfismo Inverso). Sejam \mathcal{C} uma categoria e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo em \mathcal{C} . Se $g, h : Y \rightarrow X$ são morfismos inversos de f , então $g = h$.

Em particular, se $f : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo em \mathcal{C} , então f admite um único morfismo inverso, que denotamos por $f^{-1} : Y \rightarrow X$.

Demonstração. Por hipótese, temos que

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{e} \quad f \circ g = \text{id}_Y,$$

e

$$h \circ f = \text{id}_X \quad \text{e} \quad f \circ h = \text{id}_Y.$$

Logo,

$$g = g \circ \text{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \text{id}_X \circ h = h.$$

□

Definição 1.11. Sejam \mathcal{C} uma categoria e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo em \mathcal{C} .

1. Dizemos que f é \mathcal{C} -*invertível à esquerda* se existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = \text{id}_X$.

2. Dizemos que f é um \mathcal{C} -*monomorfismo* se, para quaisquer objetos $Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$ e morfismos $g_1, g_2 : Z \rightarrow X$ tais que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, tem-se que $g_1 = g_2$.

Exemplo 1.4. Na categoria **Set**, pela teoria básica de conjuntos sabemos que para qualquer função $f : X \rightarrow Y$, vale que

f é injetiva se, e somente se, f é um **Set**-monomorfismo.

Agora vamos aos conceitos duais.

Definição 1.12. Sejam \mathcal{C} uma categoria e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo em \mathcal{C} .

1. Dizemos que f é \mathcal{C} -*invertível à direita* se existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = \text{id}_Y$.
2. Dizemos que f é um \mathcal{C} -*epimorfismo* se, para quaisquer objetos $Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$ e morfismos $g_1, g_2 : Z \rightarrow X$ tais que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, tem-se que $g_1 = g_2$.

Exemplo 1.5. Na categoria **Set**, pela teoria básica de conjuntos sabemos que para qualquer função $f : X \rightarrow Y$, vale que

f é sobrejetiva se, e somente se, f é um **Set**-epimorfismo.

1.1.2 Isomorfismo de categorias e transformações naturais

Vimos que é possível comparar objetos em uma mesma categoria. O modo como isto é feito dentro de uma mesma categoria indica que também é possível comparar duas categorias diferentes. De fato, entre objetos precisamos de uma relação. Neste sentido, os funtores passam a ser os melhores candidatos para estabelecer a comparação entre duas categorias, uma vez que estes relacionam categorias, podem ser compostos um com o outro e, por fim, a noção do functor identidade permite dar uma noção razoável de um functor ser inverso de outro.

Definição 1.13. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias. Um functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é chamado de *isomorfismo de categorias* se existe um functor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$. Neste caso, dizemos que \mathcal{C} e \mathcal{D} são categorias isomorfas e denotamos $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$.

Um exercício simples mostra que $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um isomorfismo de categorias se, e somente se, F é uma bijeção sobre os objetos e morfismos.

Exemplo 1.6. Considere as categorias **Ab** e $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}$. Vamos demonstrar que

$$\text{Mod}_{\mathbb{Z}} \cong \text{Ab}.$$

Defina o functor

$$\begin{aligned} F : \quad \text{Mod}_{\mathbb{Z}} &\longrightarrow \quad \text{Ab} \\ (M, +, \cdot) &\mapsto \quad (M, +) \\ f : M \rightarrow M' &\mapsto \quad f : M \rightarrow M' \end{aligned}$$

que é claramente bijetivo sobre os morfismos.

1. **Injetividade sobre objetos:** Sejam $(M, +, \cdot), (M', \oplus, \odot) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}})$ com $F(M, +, \cdot) = F(M', \oplus, \odot)$. Então:

- $M = M'$ e $+ = \oplus$
- Para $n \in \mathbb{Z}$ e $v \in M = M'$:

$$n \cdot v = \begin{cases} \underbrace{v + \cdots + v}_{n \text{ parcelas}}, & n > 0 \\ \underbrace{(-v) + \cdots + (-v)}_{-n \text{ parcelas}}, & n < 0 = n \odot v \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

Portanto, $\cdot = \odot$ e F é injetiva.

2. **Sobrejetividade sobre objetos:** Dado $(G, +) \in \mathbf{Ab}$, defina a ação $\mathbb{Z} \times G \rightarrow G$ por:

$$n \cdot v := \begin{cases} \underbrace{v + \cdots + v}_{n \text{ parcelas}}, & n > 0 \\ \underbrace{(-v) + \cdots + (-v)}_{-n \text{ parcelas}}, & n < 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

Então $(G, +, \cdot) \in \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$ e $F(G, +, \cdot) = (G, +)$.

Concluimos que F é um isomorfismo de categorias.

Se quisermos compararmos dois funtores seguindo as ideias desenvolvidas, até aqui precisamos de alguma especie de relação entre os funtores. Isto nos leva a seguinte definição.

Definição 1.14. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias e $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtores covariantes (contravariantes). Uma transformação natural ³ $\alpha : F \rightarrow G$ é uma família $\{\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X) \mid X \in \text{ob}(\mathcal{C})\}$ de morfismos em \mathcal{D} , tal que, para qualquer morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} , o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{F(f)} & F(X) \\ \alpha_Y \downarrow & & \downarrow \alpha_X \\ G(Y) & \xrightarrow{G(f)} & G(X) \end{array}$$

(Caso covariante)

(Caso contravariante)

Dizemos que α é um *isomorfismo natural* se $\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)$ é um isomorfismo em \mathcal{D} para todo $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$.

³Uma transformação natural também é chamada de **morfismo de funtores**.

Exemplo 1.7. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Considere $\text{id}_F : F \rightarrow F$ pela família

$$\{\text{id}_F : F(X) \rightarrow F(X) \mid X \in \text{ob}(\mathcal{C})\}.$$

Vamos mostrar que id_F é uma transformação natural. De fato, suponha F covariante (o caso contravariante é análogo). Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo qualquer em \mathcal{C} . Então

$$\text{id}_{F(Y)} \circ F(f) = F(f) = \text{id}_{F(X)}.$$

Portanto, id_F é uma transformação natural, chamada *identidade de F* .

Funtores fiéis

Isso mesmo. Um funtor está sujeito à fidelidade!

Definição 1.15. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor covariante. Dizemos que F é *fiel* se

$$\begin{array}{ccc} F_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \\ f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

é injetiva, para quaisquer objetos X e Y em \mathcal{C} . No caso contravariante, definimos de modo inteiramente análogo.

Exemplo 1.8. Considere o funtor de inclusão:

$$F: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp},$$

que envia um grupo abeliano $(G, +)$ ao mesmo conjunto G com a estrutura de grupo (ignorando a comutatividade). Este funtor é:

- **Fiel:** Se dois homomorfismos $\phi, \psi: G \rightarrow H$ entre grupos abelianos são iguais como homomorfismos de grupos (via F), então $\phi = \psi$.
- **Não pleno:** Existem homomorfismos de grupos $F(G) \rightarrow F(H)$ que não preservam a comutatividade (e.g., a inversão $g \mapsto g^{-1}$ em $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Funtores plenos

Definição 1.16. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor covariante. Dizemos que F é *pleno* se

$$\begin{array}{ccc} F_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \\ f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

é sobrejetiva, para quaisquer objetos X e Y em \mathcal{C} . No caso contravariante, definimos de modo inteiramente análogo.

Exemplo 1.9. Considere o funtor de conjunto subjacente:

$$U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set},$$

que envia um espaço topológico (X, τ) ao seu conjunto X (esquecendo a topologia). Este funtor é:

- **Pleno:** Para qualquer função $f: X \rightarrow Y$ entre conjuntos, existe uma topologia (e.g., a discreta) que faz f contínua.
- **Não fiel:** Diferentes funções contínuas $f, g: X \rightarrow Y$ podem coincidir como funções em \mathbf{Set} .

Funtores Densos

Definição 1.17. Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Dizemos que F é *denso* (ou *essencialmente sobrejetivo*) se, para todo $Y \in \text{ob}(\mathcal{D})$, existe $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ tal que $F(X) \cong Y$.

Equivalências de Categorias

A noção de transformação natural nos permite definir um conceito chamado *equivalência de categorias*, que é uma espécie de isomorfismo *um pouco mais fraco*, mas suficiente para afirmar que muitas propriedades são invariantes por este tipo de equivalência. O leitor familiarizado com a noção de equivalência homotópica perceberá uma certa similaridade.

Definição 1.18. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Dizemos que F é uma *equivalência de categorias* se existe um funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tais que

$$G \circ F \cong \text{id}_{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad F \circ G \cong \text{id}_{\mathcal{D}},$$

ou seja, existem isomorfismos naturais $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ e $\varepsilon : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$.

Para ilustrar a equivalência acima no caso covariante, para quaisquer $f : X \rightarrow Y$ morfismo em \mathcal{C} e $g : X' \rightarrow Y'$ morfismo em \mathcal{D} , os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} \text{id}_{\mathcal{C}}(X) = X & \xrightarrow{f} & \text{id}_{\mathcal{C}}(Y) = Y & & F \circ G(X') & \xrightarrow{F(G(g))} & F \circ G(Y') \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y & & \varepsilon_{X'} \downarrow & & \downarrow \varepsilon_{Y'} \\ G \circ F(X) & \xrightarrow{G(F(f))} & G \circ F(Y) & & \text{id}_{\mathcal{D}}(X') = X' & \xrightarrow{g} & \text{id}_{\mathcal{D}}(Y') = Y' \end{array}$$

1.1.3 Construções Universais

Definição 1.19. Seja \mathcal{C} uma categoria e $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Um produto de X e Y consiste em:

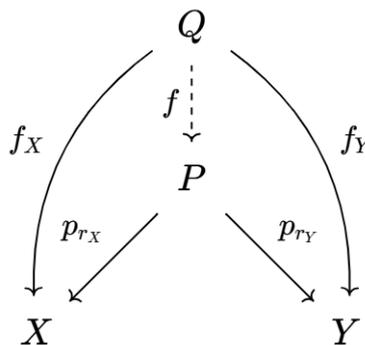
Um objeto $P \in \text{ob}(\mathcal{C})$, chamado de produto de X e Y .

- Dois morfismos $\text{pr}_X : P \rightarrow X$ e $\text{pr}_Y : P \rightarrow Y$, chamados de projeções.

Esses morfismos devem satisfazer a seguinte propriedade universal:

- Para qualquer outro objeto $Q \in \text{ob}(\mathcal{C})$ com morfismos $f_X : Q \rightarrow X$ e $f_Y : Q \rightarrow Y$, existe um único morfismo $f : Q \rightarrow P$ tal que:

$$f_X = \text{pr}_X \circ f \quad \text{e} \quad f_Y = \text{pr}_Y \circ f.$$



Em símbolos, escrevemos $P = X \times Y$.

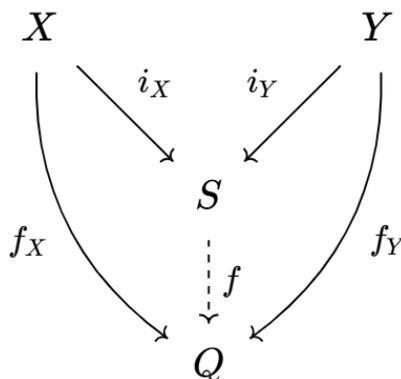
Contextos Específicos

- Na Categoria dos Conjuntos (**Set**) o produto de dois conjuntos X e Y é o produto cartesiano $X \times Y$, que consiste em todos os pares ordenados (x, y) , onde $x \in X$ e $y \in Y$. As projeções $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$ e $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$ são dadas por $\text{pr}_X(x, y) = x$ e $\text{pr}_Y(x, y) = y$. Qualquer par de funções $f_X : Q \rightarrow X$ e $f_Y : Q \rightarrow Y$ pode ser fatorado de maneira única através de $X \times Y$.
- Na Categoria dos Espaços Topológicos (**Top**) o produto de dois espaços topológicos X e Y é o espaço produto $X \times Y$, equipado com a topologia produto. As projeções $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$ e $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$ são contínuas. Qualquer par de funções contínuas $f_X : Q \rightarrow X$ e $f_Y : Q \rightarrow Y$ pode ser fatorado de maneira única através de $X \times Y$.
- Na Categoria dos R -Módulos (**R -Mod**) o produto de dois R -módulos M e N é o produto direto $M \times N$, que consiste em todos os pares (m, n) , onde $m \in M$ e $n \in N$. As projeções $\text{pr}_M : M \times N \rightarrow M$ e $\text{pr}_N : M \times N \rightarrow N$ são dadas por $\text{pr}_M(m, n) = m$ e $\text{pr}_N(m, n) = n$. Qualquer par de morfismos $f_M : Q \rightarrow M$ e $f_N : Q \rightarrow N$ pode ser fatorado de maneira única através de $M \times N$.
- Na Categoria dos Complexos de R -Módulos (**$\text{Ch}(\mathbf{R})$**) o produto de dois complexos C_\bullet e D_\bullet é o complexo $C_\bullet \times D_\bullet$, onde em cada grau n , o módulo é $C_n \times D_n$, e os diferenciais são dados por $d_n(c, d) = (d_n^C(c), d_n^D(d))$. As projeções $\text{pr}_C : C_\bullet \times D_\bullet \rightarrow C_\bullet$ e $\text{pr}_D : C_\bullet \times D_\bullet \rightarrow D_\bullet$ são definidas grau a grau como as projeções canônicas. Qualquer par de morfismos de complexos $f_C : E_\bullet \rightarrow C_\bullet$ e $f_D : E_\bullet \rightarrow D_\bullet$ pode ser fatorado de maneira única através de $C_\bullet \times D_\bullet$.

Definição 1.20. Seja \mathcal{C} uma categoria e $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Um coproduto de X e Y consiste em:

- Um objeto $S \in \text{ob}(\mathcal{C})$, chamado de coproduto de X e Y .
- Dois morfismos $i_X : X \rightarrow S$ e $i_Y : Y \rightarrow S$, chamados de inclusões.
Esses morfismos devem satisfazer a seguinte propriedade universal:
- Para qualquer outro objeto $Q \in \text{ob}(\mathcal{C})$ com morfismos $f_X : X \rightarrow Q$ e $f_Y : Y \rightarrow Q$, existe um único morfismo $f : S \rightarrow Q$ tal que:

$$f_X = f \circ i_X \quad \text{e} \quad f_Y = f \circ i_Y.$$



Em símbolos, escrevemos $S = X \amalg Y$.

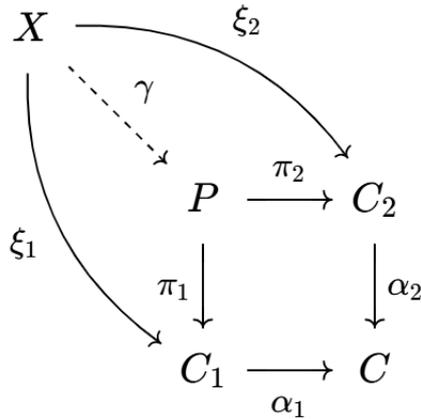
Contextos Específicos

- Na Categoria dos Conjuntos (Set) o coproduto de dois conjuntos X e Y é a união disjunta $X \sqcup Y$, que consiste em todos os elementos de X e Y , mas com identificadores para distinguir elementos de X e Y . As inclusões $i_X : X \rightarrow X \sqcup Y$ e $i_Y : Y \rightarrow X \sqcup Y$ são dadas por $i_X(x) = (x, 0)$ e $i_Y(y) = (y, 1)$. Qualquer par de funções $f_X : X \rightarrow Q$ e $f_Y : Y \rightarrow Q$ pode ser fatorado de maneira única através de $X \sqcup Y$.
- Na Categoria dos Espaços Topológicos (Top) o coproduto de dois espaços topológicos X e Y é a união disjunta $X \sqcup Y$, equipada com a topologia disjunta. As inclusões $i_X : X \rightarrow X \sqcup Y$ e $i_Y : Y \rightarrow X \sqcup Y$ são contínuas. Qualquer par de funções contínuas $f_X : X \rightarrow Q$ e $f_Y : Y \rightarrow Q$ pode ser fatorado de maneira única através de $X \sqcup Y$.
- Na Categoria dos R -Módulos ($R\text{-Mod}$) o coproduto de dois R -módulos M e N é a soma direta $M \oplus N$, que é isomorfa ao produto direto $M \times N$ nessa categoria. As inclusões $i_M : M \rightarrow M \oplus N$ e $i_N : N \rightarrow M \oplus N$ são dadas por $i_M(m) = (m, 0)$ e $i_N(n) = (0, n)$. Qualquer par de morfismos $f_M : M \rightarrow Q$ e $f_N : N \rightarrow Q$ pode ser fatorado de maneira única através de $M \oplus N$.
- Na Categoria dos R -Módulos ($R\text{-Mod}$) o coproduto de dois complexos C_\bullet e D_\bullet é o complexo $C_\bullet \amalg D_\bullet$, onde em cada grau n , o módulo é $C_n \oplus D_n$, e os diferenciais são dados por $d_n(c, d) = (d_n^C(c), d_n^D(d))$. As inclusões $i_C : C_\bullet \rightarrow C_\bullet \amalg D_\bullet$ e $i_D : D_\bullet \rightarrow C_\bullet \amalg D_\bullet$ são definidas grau a grau como as inclusões canônicas. Qualquer par de morfismos de complexos $f_C : C_\bullet \rightarrow E_\bullet$ e $f_D : D_\bullet \rightarrow E_\bullet$ pode ser fatorado de maneira única através de $C_\bullet \amalg D_\bullet$.

Definição 1.21 (Pullback). Sejam $\alpha_1 : C_1 \rightarrow C$ e $\alpha_2 : C_2 \rightarrow C$ morfismos em uma categoria \mathcal{C} . Um *pullback* de α_1 e α_2 é um objeto $P \in \text{ob}(\mathcal{C})$, juntamente com dois morfismos $\pi_1 : P \rightarrow C_1$ e $\pi_2 : P \rightarrow C_2$, que satisfazem:

1. $\alpha_1 \circ \pi_1 = \alpha_2 \circ \pi_2$;
2. Para qualquer objeto $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ e morfismos $\xi_1 : X \rightarrow C_1$, $\xi_2 : X \rightarrow C_2$, com $\alpha_1 \circ \xi_1 = \alpha_2 \circ \xi_2$, existe um único morfismo $\gamma : X \rightarrow P$ tal que $\pi_1 \circ \gamma = \xi_1$ e $\pi_2 \circ \gamma = \xi_2$.

O diagrama comutativo correspondente, chamado de *quadrado pullback*, é representado como segue:

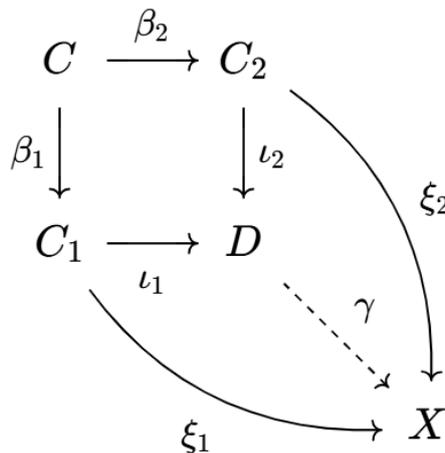


Proposição 1.2 (Unicidade do Pullback). O pullback é único a menos de isomorfismo.

Definição 1.22 (Pushout). De modo dual, sejam $\beta_1 : C \rightarrow C_1$ e $\beta_2 : C \rightarrow C_2$ morfismos em uma categoria \mathcal{C} . Um *pushout* de β_1 e β_2 é um objeto $D \in \text{ob}(\mathcal{C})$, juntamente com dois morfismos $\iota_1 : C_1 \rightarrow D$ e $\iota_2 : C_2 \rightarrow D$, que satisfazem:

1. $\iota_1 \circ \beta_1 = \iota_2 \circ \beta_2$;
2. Para qualquer objeto $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ e morfismos $\xi_1 : C_1 \rightarrow X$, $\xi_2 : C_2 \rightarrow X$, com $\xi_1 \circ \beta_1 = \xi_2 \circ \beta_2$, existe um único morfismo $\gamma : D \rightarrow X$ tal que $\gamma \circ \iota_1 = \xi_1$ e $\gamma \circ \iota_2 = \xi_2$.

O diagrama comutativo correspondente, chamado de *quadrado pushout*, é representado como segue:



Proposição 1.3 (Unicidade do Pushout). O pushout é único a menos de isomorfismo.

Definição 1.23. Seja $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ um diagrama em uma categoria \mathcal{C} . Um cone sobre D consiste em:

- Um objeto $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$, chamado de vértice do cone.
- Para cada objeto $i \in \text{ob}(\mathcal{I})$, um morfismo $f_i : C \rightarrow D(i)$, chamado de perna do cone.

Esses morfismos devem ser compatíveis com os morfismos do diagrama D , ou seja, para cada morfismo $\alpha : i \rightarrow j$ em \mathcal{I} , o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 f_i \swarrow & & \searrow f_j \\
 D(i) & \xrightarrow{D(\alpha)} & D(j)
 \end{array}$$

Um cone pode ser visualizado como um objeto C “flutuando” acima de um diagrama D , com morfismos apontando para cada objeto do diagrama, de forma que todas as composições sejam compatíveis. A compatibilidade garante que o cone “respeite” a estrutura do diagrama.

Definição 1.24. Um limite de um diagrama $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ é um cone $(L \xrightarrow{p_i} D(i))_{i \in \text{ob}(\mathcal{I})}$ que satisfaz a seguinte propriedade universal:

- Para qualquer outro cocone $C \rightarrow D(i)_{i \in \text{ob}(\mathcal{I})}$, existe um único morfismo $f : C \rightarrow L$ tal que $f_i = p_i \circ f$ para todo $i \in \text{ob}(\mathcal{I})$.

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 f_i \swarrow & \text{---} f \text{---} & \searrow f_j \\
 & L & \\
 p_i \swarrow & & \searrow p_j \\
 D(i) & \xrightarrow{D(\alpha)} & D(j)
 \end{array}$$

Em símbolos, escrevemos $L = \lim D$ ou $\varprojlim D$.

O limite é o “melhor” cone possível sobre o diagrama D , no sentido de que todos os outros cones podem ser obtidos a partir dele de maneira única. Ele captura a noção de “maior objeto comum” que se relaciona com todos os objetos do diagrama.

Um tipo especial de limite é o equalizador.

Definição 1.25. Dados dois morfismos $f, g : X \rightarrow Y$ em uma categoria \mathcal{C} o equalizador de f e g é um objeto E equipado com um morfismo $e : E \rightarrow X$ que satisfaz:

1. $f \circ e = g \circ e$.
2. Para qualquer outro morfismo $h : Z \rightarrow X$ tal que $f \circ h = g \circ h$, existe um único morfismo $\bar{h} : Z \rightarrow E$ tal que $h = e \circ \bar{h}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & \swarrow \bar{h} & \downarrow h & & \\
 E & \xrightarrow{e} & X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y
 \end{array}$$

Em símbolos, $E = \text{eq}(f, g)$.

O equalizador “seleciona” os elementos de X que tornam f e g iguais. Em **Set**, o equalizador de f e g é o subconjunto $E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ com a inclusão $e : E \rightarrow X$.

Um cocone é a noção dual de um cone, obtida invertendo a direção das setas.

Definição 1.26. Seja $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ um diagrama em uma categoria \mathcal{C} . Um cocone sobre D consiste em:

- Um objeto $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$, chamado de vértice do cocone.
- Para cada objeto $i \in \text{ob}(\mathcal{I})$, um morfismo $f_i : D(i) \rightarrow C$, chamado de perna do cocone.

Esses morfismos devem ser compatíveis com os morfismos do diagrama D , ou seja, para cada morfismo $\alpha : i \rightarrow j$ em \mathcal{I} , o seguinte diagrama comuta:

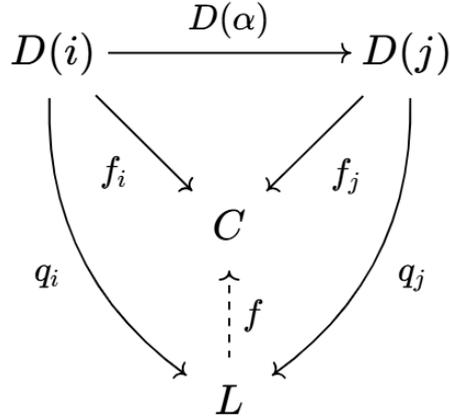
$$\begin{array}{ccc}
 D(i) & \xrightarrow{D(\alpha)} & D(j) \\
 \searrow f_i & & \swarrow f_j \\
 & C &
 \end{array}$$

Um cocone pode ser visualizado como um objeto C “recebendo” setas de todos os objetos do diagrama D , de forma que todas as composições sejam compatíveis. Ele é o dual de um cone, onde os mapas apontam para o vértice em vez de sair dele.

Um colimite é um cocone que é “universal”, no sentido de que qualquer outro cocone sobre o mesmo diagrama pode ser fatorado de maneira única através dele.

Definição 1.27. Um colimite de um diagrama $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ é um cocone $(D(i) \rightarrow L)_{i \in \text{ob}(\mathcal{I})}$ que satisfaz a seguinte propriedade universal:

- Para qualquer outro cone $(D(i) \xrightarrow{f_i} C)_{i \in \text{ob}(\mathcal{I})}$, existe um único morfismo $f : L \rightarrow C$ tal que $f_i = f \circ q_i$ para todo $i \in \text{ob}(\mathcal{I})$.



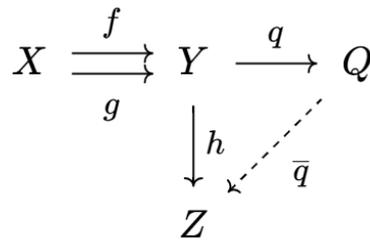
Em símbolos, escrevemos $L = \text{colim } D$ ou $\varinjlim D$.

O colimite é o “melhor” cocone possível sobre o diagrama D , no sentido de que todos os outros cocones podem ser obtidos a partir dele de maneira única. Ele captura a noção de “menor objeto comum” que recebe mapas de todos os objetos do diagrama.

Um tipo especial de colimite é o coequalizador.

Definição 1.28. Dados dois morfismos $f, g : X \rightarrow Y$ em uma categoria \mathcal{C} , o coequalizador de f e g é um objeto Q equipado com um morfismo $q : Y \rightarrow Q$ que satisfaz:

1. $q \circ f = q \circ g$
2. Para qualquer outro morfismo $h : Y \rightarrow Z$ tal que $h \circ f = h \circ g$, existe um único morfismo $\bar{q} : Q \rightarrow Z$ tal que $h = \bar{q} \circ q$.



Em símbolos, $Q = \text{coeq}(f, g)$.

O coequalizador “identifica” os elementos de Y que são relacionados por f e g . Em **Set**, o coequalizador de f e g é o conjunto quociente $Q = Y/\sim$, onde \sim é a menor relação de equivalência que identifica $f(x)$ com $g(x)$ para todo $x \in X$.

1.2 Categorias Modelo

As categorias modelo são estruturas que transformam a homotopia, originalmente um estudo topológico, em uma poderosa ferramenta algébrica. Esta seção consolida os pilares teóricos das categorias modelo, integrando as formulações pioneiras de Quillen [12] com refinamentos contemporâneos [8], [10].

1.3 Definições Preliminares

Definição 1.29. Seja \mathcal{C} uma categoria. Um morfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado de monomorfismo se, para todo par de morfismo $g, h : L \rightarrow M$, a igualdade $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$. Em outras palavras, f é injetivo no sentido categórico.

Exemplo 1.10. A função

$$\begin{aligned} f : \quad \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} &\longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \\ x + 2\mathbb{Z} &\mapsto 2x + 4\mathbb{Z} \end{aligned}$$

como \mathbb{Z} -módulos é um monomorfismo, pois é injetiva.

Definição 1.30. Seja \mathcal{C} uma categoria. Um morfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado de epimorfismo se, para todo par de morfismo $g, h : L \rightarrow M$, a igualdade $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$. Em outras palavras, f é sobrejetivo no sentido categórico.

Exemplo 1.11. A função

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{Z} &\longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \\ x &\mapsto x + 3\mathbb{Z} \end{aligned}$$

como \mathbb{Z} -módulos é um epimorfismo, pois é sobrejetiva.

Definição 1.31. Seja \mathcal{C} uma categoria. Um objeto P é chamado de *Projetivo* se, para todo epimorfismo $f : M \rightarrow N$ e todo morfismo $g : P \rightarrow N$, existe um morfismo $h : P \rightarrow M$ tal que $f \circ h = g$. Em outras palavras, P possui a propriedade de levantamento em relação a epimorfismos.

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow h & \downarrow f \\ P & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

1.4 Fundamentos e Estrutura

Definição 1.32. Seja \mathcal{C} uma categoria. Dizemos que um morfismo $f : A \rightarrow B$ é retração de um morfismo $g : C \rightarrow D$ quando existem morfismos em \mathcal{C} :

- $i : A \rightarrow C$ (monomorfismo)
- $j : B \rightarrow D$ (monomorfismo)
- $r : C \rightarrow A$ (retração de i)

- $s : D \rightarrow B$ (retração de j)

tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & id_A & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 A & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{r} & A \\
 f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{j} & D & \xrightarrow{s} & B \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\
 & & id_B & &
 \end{array}$$

onde $r \circ i = id_A$ e $s \circ j = id_B$. Em termos da categoria de setas $\mathcal{C}^{\rightarrow}$, isso significa que (f, g) forma um par retrátil.

A partir de uma categoria \mathcal{C} , podemos construir a categoria $\mathcal{C}^{\rightarrow}$, cujos objetos são os morfismos de \mathcal{C} e cujos morfismos são dados por quadrados comutativos.

Definição 1.33. Uma *fatoração funtorial* é um par ordenado (α, β) de funtores $\mathcal{C}^{\rightarrow} \rightarrow \mathcal{C}^{\rightarrow}$ tal que, para todo $f \in \mathcal{C}^{\rightarrow}$, temos $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$. Especificamente, o domínio de $\alpha(f)$ coincide com o domínio de f , o contradomínio de $\alpha(f)$ é o domínio de $\beta(f)$, e o contradomínio de $\beta(f)$ coincide com o contradomínio de f .

Definição 1.34. Sejam $i : A \rightarrow B$ e $p : X \rightarrow Y$ morfismos em uma categoria \mathcal{C} . Dizemos que i possui a *propriedade de levantamento à esquerda* em relação a p , e que p possui a *propriedade de levantamento à direita* em relação a i , se para qualquer diagrama comutativo da forma:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & X \\
 i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

existe um morfismo $h : B \rightarrow X$ tal que $h \circ i = f$ e $p \circ h = g$.

Definição 1.35. Uma *estrutura modelo* em uma categoria \mathcal{C} consiste em três classes de morfismos de \mathcal{C} , chamadas *equivalências fracas*, *fibrações* e *cofibrações*, juntamente com duas fatorações funtoriais (α, β) e (γ, δ) , que satisfazem os seguintes axiomas ⁴:

⁴The axioms are designed to carry over to abstract homotopy theory some of the properties of the category of topological spaces which are relevant to homotopy theory". — Quillen, Homotopical Algebra (1967), p. 1.3.

1. **(Fechamento sob Retrações)** As classes de morfismos das três subcategorias (equivalências fracas, fibrações e cofibrações) são fechadas sob retrações. Isso significa que, se $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo em uma dessas classes e f é uma retração (ou seja, existe um morfismo $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = id_Y$, então g também pertence à mesma classe.
2. **(Propriedade 3 por 2)** Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são morfismos em \mathcal{C} tais que o morfismo composto $g \circ f : X \rightarrow Z$ está definido, e quaisquer dois dos morfismos f , g e $g \circ f$ são equivalências fracas, então o terceiro também é uma equivalência fraca.
3. **(Axioma do Levantamento)**
 - Cofibração Trivial: Um morfismo f é chamado de cofibração trivial se é simultaneamente uma cofibração e uma equivalência fraca.
 - Fibração Trivial: Um morfismo g é chamado de fibração trivial se é simultaneamente uma fibração e uma equivalência fraca.

O axioma do levantamento estabelece que:

- (a) **(Levantamento à Esquerda)** Se f é uma cofibração trivial e g é uma fibração, então f possui a propriedade de levantamento à esquerda em relação a g . Isso significa que, para qualquer diagrama comutativo da forma:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u} & X \\
 f \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\
 B & \xrightarrow{v} & Y
 \end{array}$$

existe um morfismo $h : B \rightarrow X$ que faz o diagrama comutar, ou seja, $h \circ f = u$ e $g \circ h = v$

- (b) **(Levantamento à Direita)** Se f é uma cofibração e g é uma fibração trivial, então f possui a propriedade de levantamento à esquerda em relação a g .
4. **(Axioma de Fatoração)** Para qualquer morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} , existem duas fatorações functoriais:

Primeira Fatoração: $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$ onde:

- $\alpha(f)$ é uma cofibração.
- $\beta(f)$ é uma fibração trivial.

Segunda Fatoração: $f = \delta(f) \circ \gamma(f)$ onde:

- $\delta(f)$ é uma cofibração trivial.

- $\gamma(f)$ é uma fibração.

Definição 1.36. Uma *categoria modelo* ⁵ é uma categoria \mathcal{C} que possui todos os limites e colimites, além de uma estrutura modelo em \mathcal{C} .

Proposição 1.4. Uma categoria modelo \mathcal{C} possui um objeto inicial e um objeto final.

Demonstração. Considere a categoria 0 , cuja classe de objetos é o conjunto vazio, e o funtor $F : 0 \rightarrow \mathcal{C}$. Ao aplicar o colimite a F , obtemos um objeto $A = \varinjlim F$ em \mathcal{C} , tal que, para qualquer objeto X em \mathcal{C} , existe um único morfismo $f \in \text{Hom}(A, X)$. Analogamente, aplicando o limite a F , obtemos um objeto $B = \varprojlim F$ em \mathcal{C} , tal que, para qualquer objeto X em \mathcal{C} , existe um único morfismo $f \in \text{Hom}(X, B)$. \square

Definição 1.37. Seja \mathcal{C} uma categoria modelo. Um objeto X em \mathcal{C} é chamado de:

1. Cofibrante se o morfismo $f : 0 \rightarrow X$, do objeto inicial 0 para X , é uma cofibração.
2. Fibrante se o morfismo $f : X \rightarrow 0$, de X para o objeto final 0 , é uma fibração.
3. Trivial (em uma categoria pontuada) se o morfismo $f : 0 \rightarrow X$ é uma equivalência fraca. Aqui, uma categoria é dita pontuada se o morfismo do objeto inicial para o objeto final é um isomorfismo.

Sejam A um objeto inicial e B um objeto final em uma categoria pontuada \mathcal{C} . Seja X um objeto trivial de \mathcal{C} . Observe que o morfismo $\alpha : A \rightarrow B$ é uma retração do morfismo $f : A \rightarrow X$, conforme ilustrado no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xlongequal{\quad} & A & \xlongequal{\quad} & A \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \alpha \\
 B & \xrightarrow{f \circ \alpha^{-1}} & X & \xrightarrow{g} & B
 \end{array}$$

Como $f : A \rightarrow X$ e $g \circ f = \alpha : A \rightarrow B$ são equivalências fracas, segue que o morfismo $g : X \rightarrow B$ também é uma equivalência fraca.

⁵Em [8] e [10], pode-se encontrar a definição de categoria modelo como definimos.

Capítulo 2

Complexo de Cadeia

Embora nosso foco principal recaia sobre a categoria dos complexos de cadeia de R -módulos ($Ch(R)$), que constitui o ambiente natural para muitas aplicações em álgebra homológica e teoria de representações, iniciaremos por uma apresentação geral no contexto abstrato de categorias abelianas. Esta abordagem oferece três vantagens fundamentais: unifica a teoria para diversas categorias concretas de interesse, revela a estrutura essencial independente da base categórica específica e facilita a transição para contextos mais gerais em álgebra homológica.

2.1 Categorias Abelianas

Seja \mathcal{C} uma categoria pré-aditiva na qual todos os morfismos possuem núcleo e conúcleo. Para um morfismo $\alpha : B \rightarrow C$, existe uma fatoração canônica representada no diagrama comutativo a seguir:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Ker}(\alpha) & \xrightarrow{\text{Ker}(\alpha)} & B & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\text{Coker}(\alpha)} & \text{Coker}(\alpha) \\
 & & \downarrow \lambda & \searrow \beta & \uparrow \mu & & \\
 & & \text{Coker}(\text{Ker}(\alpha)) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \text{Ker}(\text{Coker}(\alpha)) & &
 \end{array}$$

onde $\tilde{\alpha}$ é obtido da seguinte maneira: Como $\text{coker}(\alpha) \circ \alpha = 0$, podemos escrever $\alpha = \mu \circ \beta$, onde $\beta : B \rightarrow \ker(\text{coker}(\alpha))$. Sabemos que $\mu \circ \beta \circ \ker(\alpha) = \alpha \circ \ker(\alpha) = 0$, o que implica $\beta \circ \ker(\alpha) = 0$, pois μ é um monomorfismo. Assim, β se fatora como $\beta = \tilde{\alpha} \circ \lambda$ para algum λ .

Definição 2.1. Uma categoria \mathcal{C} é dita *abeliana* se satisfaz as seguintes condições:

1. \mathcal{C} é pré-aditiva.
2. Toda família finita de objetos possui um produto (e coproduto).
3. Todo morfismo em \mathcal{C} possui núcleo e conúcleo.

4. Para todo morfismo α , o morfismo canônico $\tilde{\alpha} : \text{Coker}(\ker(\alpha)) \rightarrow \ker(\text{Coker}(\alpha))$ é um isomorfismo.

Proposição 2.1. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana e $\alpha : A \rightarrow B$ um morfismo em \mathcal{C} . Então:

1. Se α é um monomorfismo, então $\alpha = \ker(\text{coker}(\alpha))$.
2. Se α é um epimorfismo, então $\alpha = \text{coker}(\ker(\alpha))$.
3. Se α é simultaneamente um monomorfismo e um epimorfismo, então α é um isomorfismo.

Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana. Quando A é um subobjeto de B , frequentemente escrevemos $\frac{B}{A}$ para o objeto quociente $\text{Coker}(A \rightarrow B)$ de B . Para todo morfismo $\alpha : A \rightarrow B$, definimos a imagem de α como

$$\text{Im}(\alpha) = \ker(\text{coker}(\alpha)).$$

Dessa forma, α tem uma fatoração

$$A \xrightarrow{\alpha'} \text{Im}(\alpha) \xrightarrow{\gamma} B$$

na qual α' é um epimorfismo e γ é um monomorfismo. Se A' é um subobjeto de A , denotamos por $\alpha(A')$ a imagem do morfismo composto $A' \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$. Se α é um epimorfismo, então $\text{Im}(\alpha) \cong B$.

Dizemos que uma seqüência da forma

$$\cdots \rightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} C_i \xrightarrow{\alpha_i} C_{i-1} \rightarrow \cdots$$

é exata em C_i se $\text{Im}(\alpha_{i+1}) = \ker(\alpha_i)$ (iguais como subobjetos de C_i). Além disso, a seqüência é exata se é exata em cada C_i .

Proposição 2.2. Um morfismo $f : A \rightarrow B$:

1. é um monomorfismo se, e somente se, a seqüência $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ é exata.
2. é um epimorfismo se, e somente se, a seqüência $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ é exata.
3. é um isomorfismo se, e somente se, a seqüência $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ é exata.

Chamamos de seqüência exata curta uma seqüência exata da forma:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

Uma seqüência exata curta cinde se existe um morfismo $j : C \rightarrow B$ tal que $g \circ j = 1_C$. Nesse caso, podemos mostrar que $B \cong A \oplus C$.

Seja C um objeto de \mathcal{A} com uma família $(C_i)_{i \in I}$ de subobjetos e suponha que $\bigoplus_{i \in I} C_i$ existe. O monomorfismo $C_i \rightarrow C$ induz um morfismo

$$\alpha : \bigoplus_{i \in I} C_i \rightarrow C.$$

A imagem de α é chamada de soma dos subobjetos C_i e é denotada por $\sum_{i \in I} C_i$. Dizemos que a soma $\sum_{i \in I} C_i$ é uma soma direta se α é um monomorfismo. Neste caso, a família $(C_i)_{i \in I}$ é independente e temos um isomorfismo

$$\bigoplus_{i \in I} C_i \cong \sum_{i \in I} C_i.$$

De fato, $\text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\text{coker}(\alpha))$ e considere o seguinte diagrama comutativo, com $\tilde{\alpha}$ um isomorfismo

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(\alpha) & \xrightarrow{\text{Ker}(\alpha)} & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\text{Coker}(\alpha)} & \text{Coker}(\alpha) \\ & & \lambda \downarrow & & \uparrow \mu & & \\ & & \text{Coker}(\text{Ker}(\alpha)) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \text{Ker}(\text{Coker}(\alpha)) & & \end{array}$$

Como α é monomorfismo, temos $\text{Ker}(\alpha) = 0$. Segue que λ é isomorfismo. Como α é isomorfismo, temos $\text{Ker}(\text{coker}(\alpha)) \cong B$. Ou seja,

$$\sum_{i \in I} C_i = \text{Im}(\alpha) = \text{ker}(\text{coker}(\alpha)) \cong B = \bigoplus_{i \in I} C_i$$

Dualmente, o epimorfismo $C \rightarrow \frac{C}{C_i}$ induz $\beta : C \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$ (quando o produto existe). O núcleo de β é a interseção dos subobjetos C_i e é denotado por $\bigcap_{i \in I} C_i$.

Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana.

- Um objeto P é projetivo se o funtor $\text{Hom}(P, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é exato.
- Um objeto I é injetivo se o funtor $\text{Hom}(-, I) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é exato.

Se $(C_i)_{i \in I}$ é uma família de objetos, então:

1. $\bigoplus_{i \in I} C_i$ é projetivo se, e somente se, cada C_i é projetivo.
2. $\prod_{i \in I} C_i$ é injetivo se, e somente se, cada C_i é injetivo.

A categoria \mathcal{C} tem suficientes projetivos se todo objeto é quociente de um objeto projetivo, e tem suficientes injetivos se todo objeto é subobjeto de um objeto injetivo.

Seja \mathcal{C} uma categoria preaditiva com objeto zero. Nesta subseção, discutiremos as noções de núcleo e conúcleo, que são fundamentais para o estudo de morfismos em categorias preaditivas.

2.1.1 Núcleo e Conúcleo

Em uma categoria abeliana, os conceitos de núcleo (kernel) e conúcleo (cokernel) generalizam as noções de núcleo e conúcleo da álgebra linear e da teoria de módulos.

Definição 2.2 (Núcleo). O núcleo de um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em uma categoria \mathcal{C} é um objeto $\text{Ker}(f)$ junto com um morfismo $\text{Ker}(f) : \text{Ker}(f) \rightarrow X$ que satisfaz a seguinte propriedade universal:

1. $f \circ \text{Ker}(f) = 0$;
2. Para qualquer morfismo $g : Z \rightarrow X$ tal que $f \circ g = 0$, existe um único morfismo $h : Z \rightarrow \text{Ker}(f)$ tal que $g = \text{Ker}(f) \circ h$.

Em símbolos, o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & & \downarrow g & & \\
 & h & & & \\
 & \swarrow & & & \\
 \text{Ker}(f) & \xrightarrow{\text{Ker}(f)} & X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

O núcleo de α , quando existe, é único a menos de isomorfismo e é denotado por $\ker(\alpha)$.

Proposição 2.3 (Unicidade do Núcleo). Dois núcleos de f representam o mesmo subobjeto.

Definição 2.3 (Conúcleo). O conúcleo de um morfismo $f : X \rightarrow Y$ um morfismo em uma categoria \mathcal{C} é um objeto $\text{Coker}(f)$ junto com um morfismo $\text{Coker}(f) : Y \rightarrow \text{Coker}(f)$ que satisfaz a seguinte propriedade universal:

1. $\text{coker}(f) \circ f = 0$;
2. Para qualquer morfismo $g : Y \rightarrow Z$ tal que $g \circ f = 0$, existe um único morfismo $h : \text{Coker}(f) \rightarrow Z$ tal que $g = h \circ \text{Coker}(f)$.

Em símbolos, o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{Coker}(f)} & \text{Coker}(f) \\
 & & \downarrow g & & \swarrow h \\
 & & Z & &
 \end{array}$$

O conúcleo de f , é o “menor” quociente de Y que anula f . Em $R\text{-Mod}$ o conúcleo de um homomorfismo $f : M \rightarrow N$ é o módulo quociente $\text{Coker}(f) = N/\text{Im}(f)$, onde $\text{Im}(f)$ é a imagem de f .

Em uma categoria abeliana, o núcleo e o conúcleo estão relacionados pela sequência exata:

$$0 \rightarrow \text{Ker}(f) \xrightarrow{\text{Ker}(f)} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\text{Coker}(f)} \text{Coker}(f) \rightarrow 0$$

Essa sequência é exata, o que significa que a imagem de cada morfismo é igual ao núcleo do próximo.

Proposição 2.4 (Relação entre Núcleo e Conúcleo). Se $f : A \rightarrow B$ é um núcleo de algum morfismo e se $\text{Coker}(f)$ existe, então $f = \ker(\text{coker}(f))$.

Definição 2.4. Uma categoria é chamada de *aditiva* se é preaditiva, tem um objeto zero e possui produtos e coprodutos finitos.

2.2 Complexos de Cadeia

Os complexos de cadeia, originalmente desenvolvidos no âmbito da álgebra homológica, revelaram-se estruturas fundamentais em diversas áreas da matemática. Eles podem ser definidos de forma mais geral em categorias abelianas.

2.2.1 Definição Geral em Categorias Abelianas

Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana. A categoria dos complexos de cadeia em \mathcal{A} , denotada por $\text{Ch}(\mathcal{A})$, constitui o ambiente natural para o desenvolvimento da álgebra homológica.

Definição 2.5. Um *complexo* de cadeia $(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet)$ em \mathcal{A} consiste em:

1. Uma família de objetos $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ em \mathcal{A}
2. Morfismos $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ (chamados diferenciais) satisfazendo:

$$d_n \circ d_{n+1} = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Tal complexo é representado diagramaticamente como:

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

Exemplo 2.1. Na categoria $\mathcal{A} = \text{R-Mod}$, esta definição recupera a noção clássica de complexo de cadeia de R-módulos, onde:

- Cada C_n é um R-módulo
- Os d_n são homomorfismos R-lineares
- A condição $d^2 = 0$ implica a inclusão fundamental $\text{im}(d_{n+1}) \subseteq \ker(d_n)$.

É conveniente considerar a categoria de todos os complexos, e por isso introduzimos seus morfismos.

Definição 2.6. Se $(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet)$ e $(\mathbf{C}'_\bullet, d'_\bullet)$ são complexos, então um *mapa de cadeias*

$$f = f_\bullet : (\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (\mathbf{C}'_\bullet, d'_\bullet)$$

é uma sequência de morfismos $f_n : C_n \rightarrow C'_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\
\cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n+1} \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

É fácil verificar que a composição $g \circ f$ de dois mapas de cadeias

$$f_{\bullet}: (C_{\bullet}, d_{\bullet}) \rightarrow (C'_{\bullet}, d'_{\bullet}) \quad \text{e} \quad g_{\bullet}: (C'_{\bullet}, d'_{\bullet}) \rightarrow (C''_{\bullet}, d''_{\bullet})$$

é ela mesma um mapa de cadeias, onde $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$. O mapa de cadeias identidade $1_{C_{\bullet}}$ em $(C_{\bullet}, d_{\bullet})$ é a seqüência de morfismos identidade $1_{C_n} : C_n \rightarrow C_n$.

O complexo singular $\mathbf{S}_{\bullet}(X)$ de um espaço topológico X é um exemplo de um complexo de grupos abelianos.

Definição 2.7. Se \mathcal{A} é uma categoria abeliana, então a categoria de todos os complexos em \mathcal{A} é denotada por $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. Se R é um anel, então $\mathbf{Ch}(R\mathbf{Mod})$ é denotado por ${}_R\mathbf{Ch}$ e $\mathbf{Ch}(\mathbf{Mod}_R)$ é denotado por $\mathbf{Ch}(R)$. Se a categoria \mathcal{A} (ou o anel R) é entendida, podemos simplesmente escrever \mathbf{Ch} .

O exemplo mais importante de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ é $\mathbf{Ch} = \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$, mas também é interessante quando $\mathcal{A} = \mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$, que surge quando se define a cohomologia de um espaço topológico com coeficientes em feixes. Embora tudo o que dizemos nesta subseção seja válido para categorias abelianas gerais, assumimos aqui que os complexos são complexos de grupos abelianos, deixando ao leitor a generalização usando o Metateorema na página 316.

Definição 2.8. Um complexo $(A_{\bullet}, \delta_{\bullet})$ é definido como um *subcomplexo* de um complexo $(C_{\bullet}, d_{\bullet})$ se houver um mapa de cadeias $i: A_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet}$ com cada i_n monomórfico. Em ${}_R\mathbf{Ch}$, temos que $(A_{\bullet}, \delta_{\bullet})$ é um subcomplexo de $(C_{\bullet}, d_{\bullet})$ se A_n é um submódulo de C_n e $\delta_n = d_n|_{A_n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 2.5. Se \mathcal{A} é uma categoria abeliana, então $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ é uma categoria abeliana.

Demonstração. Como acabamos de dizer, provamos isso apenas quando $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$. Veja \mathbb{Z} primeiro como um conjunto parcialmente ordenado sob desigualdade reversa e depois como uma pequena categoria (com morfismos $m \rightarrow n$ se $m \geq n$). Pela Proposição [14, Prop : 5.92], a categoria de funtores $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$ é uma categoria abeliana. A Proposição 5.92 diz que \mathcal{S} é abeliana se \mathcal{S} é uma subcategoria cheia de $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$ contendo um objeto zero, a soma direta $A \oplus B$ de $A, B \in \text{ob}(\mathcal{S})$, e ambos $\ker f$ e $\text{coker } f$, onde f é um morfismo em \mathcal{S} . Note que \mathbf{Ch} é, por definição, uma subcategoria cheia de $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$. O *complexo zero* é o complexo cujos termos são todos 0, enquanto $(C_{\bullet}, d_{\bullet}) \oplus (C'_{\bullet}, d'_{\bullet})$ é, por definição, o complexo cujo n -ésimo termo é $C_n \oplus C'_n$ e cujo n -ésimo diferencial é $d_n \oplus d'_n$. Se $f_{\bullet}: (C_{\bullet}, d_{\bullet}) \rightarrow (C'_{\bullet}, d'_{\bullet})$ é um mapa de cadeias, defina

$$\ker f \Rightarrow \ker f_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} \ker f_n \xrightarrow{\delta_n} \ker f_{n-1} \rightarrow,$$

onde $\delta_n = d_n|_{\ker f_n}$, e

$$\mathbf{im} f \Rightarrow \mathbf{im} f_{n+1} \xrightarrow{\Delta_{n+1}} \mathbf{im} f_n \xrightarrow{\Delta_n} \mathbf{im} f_{n-1} \rightarrow,$$

onde $\Delta_n = d'_n|_{\mathbf{im} f_n}$. Então $\ker f$ é um subcomplexo de \mathbf{C}_\bullet , e $\mathbf{im} f$ é um subcomplexo de \mathbf{C}'_\bullet . Se \mathbf{A}_\bullet é um subcomplexo de \mathbf{C}_\bullet , defina o *complexo quociente* como

$$\mathbf{C}_\bullet/\mathbf{A}_\bullet \Rightarrow C_n/A_n \xrightarrow{\bar{d}_n} C_{n-1}/A_{n-1} \rightarrow,$$

onde $\bar{d}_n: c_n + A_n \mapsto d_n c_n + A_{n-1}$ (deve-se mostrar que \bar{d}_n é bem definido: se $c_n + A_n = b_n + A_n$, então $d_n c_n + A_{n-1} = d_n b_n + A_{n-1}$). Se $p_n: C_n \rightarrow C_n/A_n$ é o mapa natural, então $p: \mathbf{C}_\bullet \rightarrow \mathbf{C}_\bullet/\mathbf{A}_\bullet$ é um mapa de cadeias. Finalmente, defina

$$\mathbf{coker} f = \cdots \rightarrow C_{n+1}/\mathbf{im} \partial_{n+2} \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} C_n/\mathbf{im} \partial_{n+1} \xrightarrow{\bar{\partial}_n} C_{n-1}/\mathbf{im} \partial_n \xrightarrow{\bar{\partial}_{n-1}} \cdots$$

O leitor deve verificar que as definições dadas concordam com as definições categóricas de \ker e \mathbf{coker} em \mathbf{Ch} . \square

Vamos tornar explícitos alguns outros itens importantes em \mathbf{Ch} .

- (i) Um *isomorfismo* em \mathbf{Ch} é um mapa de cadeias $f: \mathbf{C}_\bullet \rightarrow \mathbf{C}'_\bullet$ para o qual $f_n: C_n \rightarrow C'_n$ é um isomorfismo em \mathcal{A} para todo $n \in \mathbb{Z}$ (note que a sequência de inversos f_n^{-1} é um mapa de cadeias; ou seja, o diagrama apropriado comuta).
- (ii) Se $((\mathbf{C}_\bullet^i, d_\bullet^i))_{i \in I}$ é uma família de complexos, então sua *soma direta* é o complexo

$$\bigoplus_i \mathbf{C}_\bullet^i \Rightarrow \bigoplus_i C_{n+1}^i \xrightarrow{\bigoplus_i d_n^i} \bigoplus_i C_n^i \xrightarrow{\bigoplus_i d_{n-1}^i} \bigoplus_i C_{n-1}^i \rightarrow,$$

onde $\bigoplus_i d_n^i$ age coordenadamente; ou seja, $\bigoplus_i d_n^i: (c_n^i) \mapsto (d_n^i c_n^i)$.

- (iii) É fácil ver que limites diretos e limites inversos de complexos existem em $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ se existirem em \mathcal{A} .
- (iv) Uma sequência de complexos e mapas de cadeias

$$\cdots \rightarrow \mathbf{C}_\bullet^{m+1} \xrightarrow{f^{m+1}} \mathbf{C}_\bullet^m \xrightarrow{f^m} \mathbf{C}_\bullet^{m-1} \rightarrow \cdots$$

é *exata* se $\mathbf{im} f^{m+1} = \ker f^m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

O leitor deve perceber que essa notação é muito compacta. Por exemplo, se escrevermos um complexo como uma coluna, então uma sequência exata curta de complexos é realmente o diagrama comutativo infinito com três colunas e linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & C_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & C''_{n+1} \longrightarrow 0 \\
& & d'_{n+1} \downarrow & & d_{n+1} \downarrow & & \downarrow d''_{n+1} \\
0 & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{i_n} & C_n & \xrightarrow{p_n} & C''_n \longrightarrow 0 \\
& & d'_n \downarrow & & d_n \downarrow & & \downarrow d''_n \\
0 & \longrightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & C''_{n-1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

Uma seqüência de complexos $\rightarrow C_{\bullet}^{n+1} \xrightarrow{f^{n+1}} C_{\bullet}^n \xrightarrow{f^n} C_{\bullet}^{n-1} \rightarrow$ é exata se e somente se cada linha $\rightarrow C_m^{n+1} \rightarrow C_m^n \rightarrow C_m^{n-1} \rightarrow$ é uma seqüência exata de módulos.

Capítulo 3

Categoria dos Complexos de R -módulos $\mathbf{Ch}(R)$

Neste capítulo, estabeleceremos os fundamentos da estrutura de modelo na categoria $(\mathbf{Ch}(R))$. Demonstraremos que a categoria $\mathbf{Ch}(R)$ dos complexos de cadeia de R -módulos admite uma estrutura de modelo canônica.

3.1 Morfismos Especiais em $\mathbf{Ch}(R)$

Definição 3.1 (Equivalências Fracas). Um morfismo $f: (M_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (N_\bullet, \delta_\bullet)$ na categoria dos complexos de R -módulos é denominado *equivalência fraca* quando o homomorfismo induzido em homologia

$$H_*(f) = \frac{\ker(d_n: M_n \rightarrow M_{n+1})}{\operatorname{im}(d_{n+1}: M_{n+1} \rightarrow M_n)} \xrightarrow{\sim} \frac{\ker(\delta_n: N_n \rightarrow N_{n+1})}{\operatorname{im}(\delta_{n+1}: N_{n+1} \rightarrow N_n)}$$

é um isomorfismo de R -módulos para todo inteiro $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 1. Esta classe de morfismos corresponde aos *quasi-isomorfismos* na literatura de álgebra homológica.

Definição 3.2 (Fibrações). Um morfismo de complexos $f: (M_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (N_\bullet, \delta_\bullet)$ é chamado *fibração* quando, para todo inteiro $n \geq 1$, o homomorfismo componente

$$f_n: M_n \rightarrow N_n$$

é um epimorfismo de R -módulos.

Definição 3.3 (Cofibrações). Um morfismo $f: (M_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (N_\bullet, \delta_\bullet)$ é denominado *cofibracão* quando satisfaz as seguintes condições:

1. Para cada $n \geq 1$, o homomorfismo $f_n: M_n \rightarrow N_n$ é um monomorfismo de R -módulos;
2. O R -módulo $f_n : M_n \rightarrow N_n \rightarrow N_n/\operatorname{im}(f_n) = \operatorname{coker}(f_n)$ $\operatorname{coker} f_n = N_n/f_n(M_n)$ é projetivo para todo $n \geq 1$.

Observação 2.

Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana, e seja (C, d) um complexo em $\text{Ch}(\mathcal{A})$. A n -ésima homologia de (C, d) é definida como:

$$H_n(C) = \frac{\text{Ker}(d_n)}{\text{Im}(d_{n+1})}.$$

Dizemos que $H_n(f) : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ é o n -ésimo morfismo induzido pelo morfismo de complexos $f : (C, d) \rightarrow (D, \delta)$. O n -ésimo functor homológico:

$$H_n : \text{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$$

é um functor aditivo da categoria dos complexos de \mathcal{A} para a categoria \mathcal{A} (ver [14]). Para $f \in \text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{A})}(A, B)$, dizer que $H_*(f)$ é um isomorfismo significa que $H_n(f)$ é um isomorfismo para todo n .

Proposição 3.1. Sejam $j : A \rightarrow B$ e $q : M \rightarrow N$ morfismos de complexos, tais que:

1. Para todo $n \geq 0$, o morfismo $A_n \rightarrow B_n$ é um monomorfismo e B_n/A_n é projetivo;
2. $H_*(q)$ é um isomorfismo, e $M_n \rightarrow N_n$ é um epimorfismo para $n > 0$.

Então, qualquer quadrado comutativo da forma:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & M \\ j \downarrow & \nearrow h & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

possui um levantamento $h : B \rightarrow M$ tal que os triângulos resultantes comutam, ou seja, $h \circ j = f$ e $q \circ h = g$.

Lema 3.1. Seja $f : M \rightarrow N$ um morfismo de complexos. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $H_*(f)$ é um isomorfismo, e $f : M_n \rightarrow N_n$ é um epimorfismo para $n > 0$;
2. O morfismo induzido ¹.

$$M_n \rightarrow Z_{n-1}M \times_{Z_{n-1}N} N_n$$

é um epimorfismo para $n \geq 0$.

Além disso, sob qualquer uma dessas condições, o morfismo induzido:

$$Z_nM \rightarrow Z_nN$$

é um epimorfismo.

¹Aqui, Z_{n-1} é o produto fibrado sobre $Z_{n-1}N$

3.2 Estrutura de Categoria Modelo $\mathbf{Ch}(R)$

Nesta seção mostraremos que a categoria $\mathbf{Ch}(R)$ dos complexos de R -módulos constitui o exemplo paradigmático onde a teoria de categorias modelo manifesta seu poder unificador entre álgebra homológica e topologia algébrica.

Teorema 3.2. Seja $\mathbf{Ch}(R)$ a categoria dos complexos de R -módulos. Então, $\mathbf{Ch}(R)$ possui a estrutura de uma categoria modelo, onde um morfismo $f : (M, d) \rightarrow (N, \delta)$ é definido da seguinte forma:

1. Um morfismo f é uma equivalência fraca se o morfismo induzido em homologia $H_*(f) : H_*(M) \rightarrow H_*(N)$ é um isomorfismo. Ou seja, $H_n(f)$ é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. Um morfismo f é uma fibração se, para todo $n \geq 1$, o morfismo $f_n : M_n \rightarrow N_n$ é um epimorfismo de R -módulos.
3. Um morfismo f é uma cofibração se, e somente se, para todo $n \geq 1$, o morfismo $f_n : M_n \rightarrow N_n$ é um monomorfismo de R -módulos e o conúcleo de f_n (isto é, $\text{Coker}(f_n)$) é um R -módulo projetivo.

Demonstração. A demonstração consiste em verificar que a categoria $\mathbf{Ch}(R)$, com as definições acima, satisfaz os axiomas de uma categoria modelo. A seguir, detalhamos a verificação do axioma das retrações.

Verificação do Axioma das Retrações:

Seja $f : (M, d) \rightarrow (N, \delta)$ uma fibração e $g : (A, d') \rightarrow (B, \delta')$ uma retração de f . Para cada $n \geq 1$, considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 A_n & \xrightarrow{\alpha_n} & M_n & \xrightarrow{\alpha'_n} & A_n \\
 g_n \downarrow & & f_n \downarrow & & \downarrow g_n \\
 B_n & \xrightarrow{\beta_n} & N_n & \xrightarrow{\beta'_n} & B_n
 \end{array}$$

onde

$$\alpha'_n \circ \alpha_n = 1_{A_n} \quad \text{e} \quad \beta'_n \circ \beta_n = 1_{B_n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Suponha que exista um morfismo $h : B_n \rightarrow X$ tal que $h \circ g_n = 0$. Isso implica que:

$$h \circ \beta'_n \circ f_n = h \circ g_n \circ \alpha'_n = 0.$$

Como f_n é um epimorfismo, segue que $h \circ \beta'_n = 0$, e portanto,

$$0 = h \circ \beta'_n \circ \beta_n = h \circ 1_{B_n} = h.$$

Assim, g_n é um epimorfismo para todo $n \geq 1$.

Agora, suponha que $f : (M, d) \rightarrow (N, \delta)$ seja uma cofibração. Então, para cada $n \geq 0$, o morfismo $f_n : M_n \rightarrow N_n$ é um monomorfismo com conúcleo projetivo. Suponha que exista um morfismo $h : X \rightarrow A_n$ tal que $g_n \circ h = 0$. Nesse caso, temos:

$$f_n \circ \alpha_n \circ h = \beta_n \circ g_n \circ h = 0.$$

Como f_n é um monomorfismo, isso implica $\alpha_n \circ h = 0$. Logo,

$$0 = \alpha'_n \circ \alpha_n \circ h = h.$$

Portanto, g_n é um monomorfismo para todo $n \geq 0$.

Para mostrar que o conúcleo de g_n é projetivo, considere um epimorfismo $h : A \rightarrow X$ e um morfismo $j : \text{Coker}(g_n) \rightarrow X$. Suponha que:

$$j \circ \text{Coker}(g_n) \circ \beta'_n \circ f_n = j \circ \text{Coker}(g_n) \circ g_n \circ \alpha'_n = 0.$$

O diagrama abaixo ilustra a situação:

$$\begin{array}{ccccc} M_n & \xrightarrow{f_n} & N_n & \xrightarrow{\text{Coker}(f_n)} & \text{Coker}(f_n) \\ & \searrow 0 & \downarrow j \circ \text{Coker}(g_n) \circ \beta'_n & & \swarrow \text{---} \\ & & X & & \\ & & & & \nwarrow \text{---} \\ & & & & l \end{array}$$

Existe um morfismo $l : \text{Coker}(f_n) \rightarrow X$ tal que:

$$j \circ \text{Coker}(g_n) \circ \beta'_n = l \circ \text{Coker}(f_n).$$

Como $\text{Coker}(f_n)$ é projetivo, existe um morfismo $\alpha : \text{Coker}(f_n) \rightarrow A$ tal que $h \circ \alpha = l$. Além disso, temos:

$$\text{Coker}(f_n) \circ \beta_n \circ g_n = \text{Coker}(f_n) \circ f_n \circ \alpha_n = 0.$$

O diagrama abaixo ilustra essa relação:

$$\begin{array}{ccccc} A_n & \xrightarrow{g_n} & B_n & \xrightarrow{\text{coker}(g_n)} & \text{Coker}(g_n) \\ & \searrow 0 & \downarrow \text{coker}(g_n) \circ \beta_n & & \swarrow \text{---} \\ & & X & & \\ & & & & \nwarrow \text{---} \\ & & & & t \end{array}$$

Segue que existe um morfismo $t : \text{Coker}(g_n) \rightarrow \text{Coker}(f_n)$ tal que:

$$\text{Coker}(f_n) \circ \beta_n = t \circ \text{Coker}(g_n).$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
l \circ t \circ \text{Coker}(g_n) &= l \circ \text{Coker}(f_n) \circ \beta_n \\
&= j \circ \text{Coker}(g_n) \circ \beta'_n \circ \beta_n \\
&= j \circ \text{Coker}(g_n).
\end{aligned}$$

Como $\text{Coker}(g_n)$ é um epimorfismo, temos $l \circ t = j$.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Coker}(g_n) & \xrightarrow{t} & \text{Coker}(f_n) & \xrightarrow{\alpha} & A \\
& & & \searrow l & \downarrow h \\
& & & & X \\
& \searrow & & \nearrow j & \\
& & & &
\end{array}$$

Assim, $h \circ (\alpha \circ t) = l \circ t = j$. Portanto, $\text{Coker}(g_n)$ é projetivo.

Se f é uma equivalência fraca, então $H_*(f)$ é um isomorfismo. Aplicando o funtor homológico no diagrama correspondente, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(A) & \xrightarrow{H_n(\alpha)} & H_n(M) & \xrightarrow{H_n(\alpha')} & H_n(A) \\
H_n(g) \downarrow & & H_n(f) \downarrow & & \downarrow H_n(g) \\
H_n(B) & \xrightarrow{H_n(\beta)} & H_n(N) & \xrightarrow{H_n(\beta')} & H_n(B)
\end{array}$$

Como $H_n(g)$ é uma retração de $H_n(f)$, segue que $H_n(g)$ é tanto um monomorfismo quanto um epimorfismo para cada $n \geq 0$. Logo, g é uma equivalência fraca.

Verificação do Axioma 3 por 2:

O Axioma 3 por 2 afirma que, dados dois morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ em $\text{Ch}(R)$, se dois dos três morfismos f , g e $g \circ f$ são equivalências fracas, então o terceiro também é. A seguir, detalhamos a verificação desse axioma.

Suponha que f e g sejam equivalências fracas. Isso significa que $H_*(f)$ e $H_*(g)$ são isomorfismos. Como a homologia é um funtor, temos:

$$H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(f)$$

Como a composição de isomorfismos é um isomorfismo, segue que $H_*(g \circ f)$ é um isomorfismo. Portanto, $g \circ f$ é uma equivalência fraca.

Suponha agora que f e $g \circ f$ sejam equivalências fracas. Nesse caso, $H_*(f)$ e $H_*(g \circ f)$ são isomorfismos. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} H_*(g) &= (H_*(g)) \circ (H_*(f)) \circ (H_*(f))^{-1} \\ &= H_*(g \circ f) \circ (H_*(f))^{-1}, \end{aligned}$$

Como $H_*(g \circ f)$ e $H_*(f)^{-1}$ são isomorfismos, segue que $H_*(g)$ é um isomorfismo. Portanto, g é uma equivalência fraca.

O caso em que g e $g \circ f$ são equivalências fracas é análogo ao caso anterior. Aplicando o mesmo raciocínio, concluímos que f é uma equivalência fraca.

Fatoração de Morfismos:

Agora, mostramos que qualquer morfismo em $\text{Ch}(R)$ pode ser fatorado como uma fibração seguida de uma cofibração trivial.

Denotamos por $(D(n), \partial)$, para $n > 1$, o complexo com $D(n)_k = 0$ para $k \neq n, n - 1$, e $\partial_n = 1_R : D(n)_n = R \rightarrow R = D(n)_{n-1}$. Então, existe um isomorfismo natural $\text{Hom}(D(n), N) \cong N_n$. De fato, considere a aplicação $\varphi_N : \text{Hom}(D(n), N) \rightarrow N_n$ definida por $\varphi_N(f) = f_n(1)$. Vamos demonstrar que φ_N é um homomorfismo de R -módulos.

Primeiro, mostremos que φ_N é uma função. Para quaisquer morfismos f e g em $\text{Ch}(R)$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi_N(f + g) &= (f + g)_n(1) \\ &= f_n(1) + g_n(1) \\ &= \varphi_N(f) + \varphi_N(g), \end{aligned}$$

e, para qualquer $r \in R$,

$$\begin{aligned} \varphi_N(rf) &= (rf)_n(1) \\ &= rf_n(1) \\ &= r\varphi_N(f). \end{aligned}$$

Portanto, φ_N é um homomorfismo de módulos.

Afirmção: O morfismo $\varphi_N : \text{Hom}(D(n), N) \rightarrow N_n$ definido por $\varphi_N(f) = f_n(1)$, é um monomorfismo.

Seja $x \in N_n$. Considere o morfismo $f : (D(n), \partial) \rightarrow (N, d)$, onde:

- $f_k = 0$ para $k \neq n, n - 1$;
- $f_n : R \rightarrow N_n$ é um homomorfismo de R -módulos tal que $f_n(1) = x$;
- $f_{n-1} = d_n \circ f_n$.

O seguinte diagrama ilustra a construção de f :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{1_R} & R & \longrightarrow & 0 \\
f_{n+1} = 0 \downarrow & & f_n \downarrow & \searrow f_{n-1} & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow \\
N_{n+1} & \longrightarrow & N_n & \xrightarrow{d_n} & N_{n-1} & \longrightarrow & N_{n-2}
\end{array}$$

Temos que $\varphi_N(f) = f_n(1) = x$. Portanto, para qualquer $x \in N_n$ existe um morfismo $f \in \text{Hom}(D(n), N)$ tal que $\varphi_N(f) = x$. Isso mostra que φ_N é sobrejetor. No entanto, para mostrar que φ_N é um monomorfismo precisamos mostrar que $\varphi_N(f) = 0$ implica que $f = 0$.

Se $\varphi_N(f) = f_n(1) = 0$, então $f_n = 0$, pois f_n é um homomorfismo de R -módulos e 1 é um gerador de R . Como $f_{n-1} = d_n \circ f_n$, segue que $f_{n-1} = 0$. Portanto, $f = 0$, e φ_N é de fato um monomorfismo.

Afirmção: A família de morfismo $\varphi = (\varphi_N)$ é uma transformação natural entre os funtores:

$$\text{Hom}(D(n), -) : \text{Ch}(R) \rightarrow \text{Mod}_R \quad \text{e} \quad F_n : \text{Ch}(R) \rightarrow \text{Mod}_R,$$

onde $F_n(M) = M_n$ e $F_n(f) = f_n$.

Para mostrar que φ é uma transformação natural, precisamos verificar que, para qualquer morfismo $f : (M, d) \rightarrow (N, \delta)$ em $\text{Ch}(R)$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}(D(n), M) & \xrightarrow{\varphi_M} & M_n \\
f_* \downarrow & & \downarrow f_n \\
\text{Hom}(D(n), N) & \xrightarrow{\varphi_N} & N_n
\end{array}$$

onde, $f_* : \text{Hom}(D(n), M) \rightarrow \text{Hom}(D(n), N)$ é o morfismo induzido por f definido por $f_*(g) = f \circ g$ para $g \in \text{Hom}(D(n), M)$.

Seja $g \in \text{Hom}(D(n), M)$. Então:

$$f_n \circ \varphi_M(g) = f_n(g_n(1)) = (f_n \circ g_n)(1) = (f \circ g)_n(1)$$

Por outro lado:

$$\varphi_N(f_*(g)) = \varphi_N(g \circ f) = (f \circ g)_n(1) = f_n(g_n(1)).$$

Portanto:

$$f_n \circ \varphi_M(g) = \varphi_N(f_*(g)),$$

o que mostra que o diagrama comuta. Assim, φ é uma transformação natural.

A aplicação $\varphi_N : \text{Hom}(D(n), N) \rightarrow N_n$ é um isomorfismo natural, pois é monomorfismo injetor, é sobrejetor como mostrado anteriormente, a família $\varphi = (\varphi_N)$ é uma transformação natural entre os funtores $\text{Hom}(D(n), -)$ e F_n . Portanto, φ é um isomorfismo natural.

Afirmção: Um morfismo $q : (Q, d) \rightarrow (N, \delta)$ é uma fibração se, e somente se, q possui a propriedade de levantamento à direita em relação ao morfismo $0 \rightarrow (D(n), \partial)$, para $n > 0$.

Suponha que $q : (Q, d) \rightarrow (N, \delta)$ seja uma fibração. Considere o morfismo $p : (D(n), \partial) \rightarrow (N, \delta)$ entre complexos. Como q_n é um epimorfismo para $n > 0$, existe um elemento $t \in Q_n$ tal que $q_n(t) = \varphi_N(p)$, onde $\varphi_N : \text{Hom}(D(n), N) \rightarrow N_n$ é o isomorfismo natural definido por $\varphi_N(p) = p_n(1)$.

Definimos então $h = \varphi_Q^{-1}(t)$, onde $\varphi_Q : \text{Hom}(D(n), Q) \rightarrow Q_n$ é o isomorfismo natural correspondente. A partir disso, temos:

$$\begin{aligned} p &= \varphi_N^{-1}(\varphi_N(p)) \\ &= \varphi_N^{-1}(q_n(t)) \\ &= \varphi_N^{-1}(q_n(\varphi_Q(h))) \\ &= (\varphi_N^{-1} \circ \varphi_N \circ q)(h) \\ &= q(h) = q \circ h. \end{aligned}$$

Portanto, q possui a propriedade de levantamento à direita em relação ao morfismo $0 \rightarrow (D(n), \partial)$.

Reciprocamente, suponha que q possui a propriedade de levantamento à direita em relação ao morfismo $0 \rightarrow (D(n), \partial)$ para $n > 0$. Seja $x \in N_n$ para $n > 0$. Por hipótese, existe um morfismo $h : (D(n), \partial) \rightarrow (Q, d)$ tal que $q \circ h = \varphi_N^{-1}(x)$. Assim, podemos escrever:

$$x = \varphi_N(q(h)) = q_n(h_n(1)).$$

Como $h_n(1) \in Q_n$ segue que q_n é um epimorfismo para $n > 0$. Portanto, q é de fato uma fibração.

Construção do Complexo $P(N)$:

Se (N, δ) é um complexo, definimos um novo complexo $(P(N), \delta')$ e um morfismo $\varepsilon : (P(N), \delta') \rightarrow (N, \delta)$ da seguinte forma:

$$P(N) = \bigoplus_{n>0} \bigoplus_{x \in N_n} D(n) \rightarrow N.$$

onde, para cada $n > 0$, o morfismo $\bigoplus_{x \in N_n} D(n) \rightarrow N$ é induzido pelos morfismos $\varphi_N^{-1}(x) : (D(n), \partial) \rightarrow (N, \delta)$.

O morfismo $\varepsilon : P(N) \rightarrow N$ é definido como a soma direta desses morfismos. O seguinte diagrama comutativo ilustra a construção:

$$\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & P(N) \\
\downarrow & & \downarrow \varepsilon \\
D(n) & \longrightarrow & N
\end{array}$$

O levantamento é dado pelo morfismo de inclusão $i_{x_n} : D(n) \rightarrow P(N)$. Assim, ε é uma fibração.

Dado o morfismo $M \rightarrow N$, observe que o quadrado comutativo a seguir:

$$\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & M \oplus P(N) \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow \varepsilon \\
D(n) & \longrightarrow & N
\end{array}$$

admite como levantamento a inclusão. Portanto, q é uma fibração.

Fatoração de Morfismos:

Dado um morfismo $f : (M, d) \rightarrow (N, \delta)$ podemos fatorá-lo da seguinte forma:

$$M \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} M \oplus P(N) \xrightarrow{\begin{bmatrix} f & \varepsilon \end{bmatrix}} N. \quad (3.1)$$

A sequência:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} M \oplus P(N) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} N \longrightarrow 0$$

é exata curta, implicando que $P(N) = \text{Coker} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, ou seja, $\text{Coker} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é projetivo.

Além disso, para cada $n \geq 0$, o morfismo $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_n$ é um monomorfismo, e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma cofibração.

Suponha agora que $q' : (A, d') \rightarrow (B, d'')$ seja uma fibração. Considere o seguinte quadrado comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
& & M & \xrightarrow{a} & A \\
& & \downarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & & \downarrow q' \\
P(N) & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & M \oplus P(N) & \xrightarrow{[b \ b']} & B \\
& \nearrow \alpha & & &
\end{array}$$

Como q' é um epimorfismo e $(P(N), \delta')$ é projetivo, existe um morfismo $\alpha : (P(N), \delta') \rightarrow (A, d')$ tal que

$$q' \circ \alpha = [b \ b'] \circ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b'.$$

Considere o morfismo $[a \ \alpha] : (M, d) \oplus (P(N), \delta') \rightarrow (A, d')$. Como:

$$q' \circ [a \ \alpha] = [q'a \ q'\alpha] = [b \ b'],$$

concluimos que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ possui a propriedade de levantamento à esquerda em relação a toda fibração.

Como $P(N) = \bigoplus_{n>0} \bigoplus_{x \in N_n} D(n)$ é soma direta de complexos acíclicos, temos $H_n(P(N)) = 0$ para todo $n > 0$. A exatidão da sequência:

$$H_{n+1}(P(N)) \longrightarrow H_n(M) \longrightarrow H_n(M \oplus P(N)) \longrightarrow H_n(P(N))$$

implica que $H_* \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é um isomorfismo. Portanto, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma equivalência fraca.

Dessa forma, conseguimos fatorar f como uma fibração seguida de uma cofibração trivial, conforme ilustrado no diagrama (3.1).

Levantamento de Cofibrações Triviais:

Agora, mostramos que cofibrações triviais possuem a propriedade de levantamento à esquerda em relação a fibrações. Seja $i : (M, d) \rightarrow (N, \delta)$ uma cofibração trivial. Podemos fatorar i da seguinte forma:

$$M \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} M \oplus P(N) \xrightarrow{[i \ p]} N,$$

onde $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma cofibração trivial e $[i \ p]$ é uma fibração. Como i e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ são equivalências fracas e $i = [i \ p] \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, segue que $[i \ p]$ também é uma equivalência fraca.

Pela Proposição 3.1, existe um levantamento $\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} : N \rightarrow M \oplus P(N)$ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & M \oplus P(N) \\
 \downarrow i & \nearrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} & \downarrow [i \ p] \\
 N & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & N
 \end{array}$$

Verificação da Propriedade de Levantamento:

Considere um quadrado comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{a} & A \\
 \downarrow i & & \downarrow f \\
 N & \xrightarrow{b} & B
 \end{array}$$

onde f é uma fibração. Como $i = [i \ p] \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{a} & A \\
 \downarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & & \downarrow f \\
 M \oplus P(N) & \xrightarrow{b \circ [i \ p]} & B
 \end{array}$$

Como $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ possui a propriedade de levantamento à esquerda em relação a todas as fibrações, existe um morfismo $\beta : M \oplus P(N) \rightarrow A$ tal que

$$f \circ [\beta \ \beta'] = b \circ [i \ p]$$

e

$$[\beta \ \beta'] \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a.$$

Considerando a composição $[\beta \ \beta'] \circ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} : N \rightarrow A$, temos:

$$f \circ [\beta \ \beta'] \circ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} = b \circ [i \ p] \circ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix},$$

e

$$[\beta \ \beta'] \circ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} \circ i = [\beta \ \beta'] \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a.$$

Portanto, i possui a propriedade de levantamento à esquerda em relação a qualquer fibração.

Fatoração de Morfismos em $\text{Ch}(R)$:

Vamos demonstrar que qualquer morfismo em $\text{Ch}(R)$ pode ser fatorado como uma fibração trivial seguida de uma cofibração. Seja $f : (M, d) \rightarrow (N, \delta)$ um monomorfismo de complexos. Construímos, de forma indutiva sobre $n \geq 0$, R -módulos Q_n e morfismos de R -módulos $i_n : M_n \rightarrow Q_n$, $p_n : Q_n \rightarrow N_n$, e $\partial_n : Q_n \rightarrow Q_{n-1}$ tais que:

1. $p_n \circ i_n = f_n$;
2. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ e os seguintes diagramas comutam para todo $k \leq n$:

$$\begin{array}{ccc} M_k & \xrightarrow{d_k} & M_{k-1} \\ \downarrow i_k & & \downarrow i_{k-1} \\ Q_k & \xrightarrow{\partial_k} & Q_{k-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Q_k & \xrightarrow{\partial_k} & Q_{k-1} \\ \downarrow p_k & & \downarrow p_{k-1} \\ N_k & \xrightarrow{\delta_k} & N_{k-1} \end{array}$$

3. i_n é um monomorfismo com conúcleo projetivo, e o morfismo induzido:

$$Q_n \rightarrow Z_{n-1}Q \times_{Z_{n-1}N} N_n$$

é um epimorfismo.

Caso Base ($n=0$):

Para $n = 0$, tomamos $Q_0 = M_0 \oplus P(N_0)$, onde $P(N_0)$ é um R -módulo projetivo. Como os complexos são 0 nos graus negativos, temos $Z_{-1}Q = Z_{-1}N = 0$. O seguinte diagrama é um pullback:

$$\begin{array}{ccc}
N_0 & \xrightarrow{1_{N_0}} & N_0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & \xlongequal{\quad\quad\quad} & 0
\end{array}$$

isso significa que $Z_{-1}Q \times_{Z_{-1}N} N_0 = N_0$.

Definimos $i_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $p_0 = [f_0 \ \varepsilon]$, onde $\varepsilon : P(N_0) \rightarrow N_0$ é um epimorfismo. Temos que $p_0 \circ i_0 = f_0 : M_0 \rightarrow N_0$, pois $p_0 \circ i_0 = [f_0 \ \varepsilon] \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = f_0$. Como $Q_{-1} = Q_{-2} = 0$, temos $\partial_{-1} \circ \partial_0 = 0$, com $\partial_0 : Q_0 \rightarrow 0$ e $\partial_{-1} : 0 \rightarrow 0$.

A seqüência:

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{i_0} M_0 \oplus P(N_0) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} P(N_0) \longrightarrow 0$$

é exata curta e cinde, implicando que $\text{Coker}(i_0) = P(N_0)$ é projetivo.

O morfismo $\alpha : Q_0 \rightarrow Z_{-1}Q \times_{Z_{-1}N} N_0 = N_0$ é dado por $p_0 = 1_{N_0} \circ \alpha = \alpha$. Para mostrar que α é um epimorfismo, seja $x \in N_0$. Como $\varepsilon : P(N_0) \rightarrow N_0$ é um epimorfismo, existe $t \in P(N_0)$ tal que $\varepsilon(t) = x$. Tomamos $\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} \in M_0 \oplus P(N_0)$, temos:

$$p_0 \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = [f_0 \ \varepsilon] \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = f_0(0) + \varepsilon(t) = x.$$

Portanto, p_0 é um epimorfismo.

Passo Indutivo:

Suponha, por indução, que existam R -módulos Q_k e morfismos $i_k : M_k \rightarrow Q_k$, $p_k : Q_k \rightarrow N_k$, e $\partial_k : Q_k \rightarrow Q_{k-1}$ satisfazendo as condições acima para $0 \leq k \leq n-1$. tais que:

1. $p_k \circ i_k = f_k$;
2. $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ e os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
M_l & \xrightarrow{d_l} & M_{l-1} \\
\downarrow i_l & & \downarrow i_{l-1} \\
Q_l & \xrightarrow{\partial_l} & Q_{l-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Q_l & \xrightarrow{\partial_l} & Q_{l-1} \\
\downarrow p_l & & \downarrow p_{l-1} \\
N_l & \xrightarrow{\delta_l} & N_{l-1}
\end{array}$$

comutam para todo $l \leq k$

3. i_k é um monomorfismo com conúcleo projetivo, e o morfismo induzido pelo pullback

$$Q_k \rightarrow Z_{k-1}Q \times_{Z_{k-1}N} N_k$$

é epimorfismo, com $0 \leq k \leq n-1$.

Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 M_n & \xrightarrow{d_n} & M_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & M_{n-2} & & \\
 \downarrow f_n & \dashrightarrow c & \downarrow & \searrow i_{n-1} & \downarrow & \searrow i_{n-2} & \\
 & & Z_{n-1}Q & \xrightarrow{z_Q} & Q_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & Q_{n-2} \\
 & & \downarrow b & \downarrow f_{n-1} & \downarrow f_{n-2} & & \\
 N_n & \xrightarrow{a} & Z_{n-1}N & \xrightarrow{\delta_n} & N_{n-1} & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & N_{n-2} \\
 & & \downarrow z_N & \swarrow p_{n-1} & \downarrow p_{n-2} & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

Além disso, considere os núcleos $z_Q = \text{Ker}(\partial_{n-1})$ e $z_N = \text{Ker}(\delta_{n-1})$. Como $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$, existe um único morfismo $a : N_n \rightarrow Z_{n-1}N$ tal que $z_N \circ a = \delta_n$. Analogamente, como $\delta_{n-1} \circ p_{n-1} \circ z_Q = p_{n-2} \circ (\partial_{n-1} \circ z_Q) = 0$, existe um único morfismo $b : Z_{n-1}Q \rightarrow Z_{n-1}N$ tal que $p_{n-1} \circ z_Q = z_N \circ b$. Finalmente, como $\partial_{n-1} \circ i_{n-1} \circ d_n = i_{n-2} \circ d_{n-1} \circ d_n = 0$, existe um único morfismo $c : M_n \rightarrow Z_{n-1}Q$ tal que $i_{n-1} \circ d_n = z_Q \circ c$. Além disso, temos a seguinte relação:

$$z_N \circ a \circ f_n = \delta_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n = p_{n-1} \circ i_{n-1} \circ d_n = p_{n-1} \circ z_Q \circ c = z_N \circ b \circ c.$$

Como z_N é um monomorfismo, segue que $a \circ f_n = b \circ c$. Pela definição de pullback, existe um único morfismo $f' : M_n \rightarrow Z_{n-1}Q \times_{Z_{n-1}N} N_n$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 M_n & & \\
 \downarrow f_n & & \downarrow b' \\
 & & Z_{n-1}Q \times_{Z_{n-1}N} N_n \xrightarrow{b'} N_n \\
 \downarrow f' & & \downarrow a \\
 & & Z_{n-1}Q \xrightarrow{b} Z_{n-1}N \\
 \downarrow c & & \downarrow a' \\
 & &
 \end{array}$$

Tomando $P = P(Z_{n-1}Q \times_{Z_{n-1}N} N_n)$ e $\varepsilon : P \rightarrow Z_{n-1}Q \times_{Z_{n-1}N} N_n$ como um epimorfismo definido pelo mapa de avaliação. Podemos fatorar f' como:

$$M_n \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} M_n \oplus P \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' & \varepsilon \end{bmatrix}} Z_{n-1}Q \times_{Z_{n-1}N} N_n$$

Aqui, $\begin{bmatrix} f' & \varepsilon \end{bmatrix}$ um epimorfismo. Definimos $Q_n = M_n \oplus P$, $i_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} : M_n \rightarrow M_n \oplus P$, $p_n = b' \circ \begin{bmatrix} f' & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f' & b'\varepsilon \end{bmatrix} : M_n \oplus P \rightarrow N_n$ e $\partial_n = \begin{bmatrix} z_Q c & z_Q a' \varepsilon \end{bmatrix} : Q_n \rightarrow Q_{n-1}$. Note que

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = \partial_{n-1} z_Q \begin{bmatrix} c & a' \varepsilon \end{bmatrix} = 0$$

O morfismo $p_n = \begin{bmatrix} f' & b'\varepsilon \end{bmatrix}$ é um epimorfismo, pois ε é um epimorfismo e f' é sobrejetor. Assim, o morfismo $i_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um monomorfismo, e seu conúcleo $\text{Coker}(i_n) = P$ é projetivo e, pelo princípio de indução finita, estas propriedades valem, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 3.1, $H_*(p)$ é um isomorfismo e $p_n : Q_n \rightarrow N_n$ é um epimorfismo para $n > 0$. Portanto, o morfismo de complexos p é uma cofibração trivial. Dessa forma, concluímos que qualquer morfismo em $Ch(R)$ pode ser fatorado como uma fibração trivial seguida de uma cofibração, satisfazendo os axiomas de uma categoria modelo. \square

Capítulo 4

A Categoria Modelo de Quillen para Espaços Topológicos

Este capítulo apresenta a construção fundacional da teoria de categorias modelo, a estrutura canônica na categoria Top dos espaços topológicos, concebida por Daniel Quillen em sua revolucionária obra sobre álgebra homotópica [12]. Mais do que um mero exemplo, esta estrutura constitui:

- O arquétipo que deu origem à própria noção de categoria modelo
- O paradigma que unificou os métodos homotópicos em topologia algébrica
- A ponte entre a homotopia clássica e a álgebra homológica moderna

Adotamos aqui a formulação contemporânea de Hirschhorn [9, Def.7.1.3], que refina a visão original de Quillen em aspectos cruciais. Exigimos a existência de todos os colimites e limites (não apenas os finitos) e requeremos que as duas fatorações sejam funtoriais. Essas modificações garantem maior flexibilidade na teoria e adaptabilidade ao contexto moderno de categorias modelo.

4.1 Definições Preliminares e o Teorema Principal

Definição 4.1 (Retração de um Mapa). Se existe um diagrama comutativo da forma:

$$\begin{array}{ccccc} & & id_A & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ A & \xrightarrow{r} & C & \xrightarrow{s} & A \\ \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{t} & D & \xrightarrow{u} & B \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\ & & id_B & & \end{array}$$

então dizemos que o mapa $i : A \rightarrow B$ é um retração do mapa $j : C \rightarrow D$ se existirem mapas $r : A \rightarrow C$, $s : C \rightarrow A$, $t : B \rightarrow D$ e $u : D \rightarrow B$ tais que $s \circ r = id_A$ e $u \circ t = id_B$.

Definição 4.2 (Categoria Modelo). Uma *categoria modelo* é uma categoria \mathcal{M} equipada com três classes de morfismos que são as equivalências fracas, cofibrações e fibrações, que satisfazem os seguintes axiomas:

- (M1) (**Axioma dos Limites**) A categoria \mathcal{M} é completa e cocompleta, ou seja, contém limites e colimites para todo diagrama pequeno.
- (M2) (**Axioma do Dois de Três**) Se f e g são morfismos em \mathcal{M} tais que $g \circ f$ está definido e dois dentre f, g e $g \circ f$ são equivalências fracas, então o terceiro também é.
- (M3) (**Axioma da Retração**) Se f é uma retração de g na categoria dos morfismos de \mathcal{M} e g é uma equivalência fraca, cofibração ou fibração, então f também o é.
- (M4) (**Axioma da Elevação**) Sejam $i : A \rightarrow B$ e $p : X \rightarrow Y$ morfismos em uma categoria \mathcal{M} . Assumindo a existência de dois outros morfismos $f : A \rightarrow X$ e $g : B \rightarrow Y$ tais que $p \circ f = g \circ i$:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & X \\
 i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

Existe um morfismo $h : B \rightarrow X$ tal que:

$$h \circ i = f \quad \text{e} \quad p \circ h = g$$

nas seguintes condições:

- (a) i é uma cofibração e p é uma fibração trivial (isto é, também é uma equivalência fraca);
- (b) i é uma cofibração trivial (isto é, também é uma equivalência fraca) e p é uma fibração.

Definição 4.3 (Terminologias em Categorias Modelo). Seja \mathcal{M} uma categoria modelo.

1. Uma fibração trivial é um morfismo que é simultaneamente uma fibração e uma equivalência fraca.
2. Uma cofibração trivial é um morfismo que é simultaneamente uma cofibração e uma equivalência fraca.
3. Um objeto A é cofibrante se o morfismo do objeto inicial $\emptyset \rightarrow A$ é uma cofibração.
4. Um objeto B é fibrante se o morfismo de B para o objeto terminal $B \rightarrow *$ é uma fibração.

5. Um objeto é cofibrante-fibrante se for cofibrante e fibrante.

Definição 4.4. Seja $f : X \rightarrow Y$ um mapa entre espaços topológicos. Dizemos que:

- f é uma equivalência fraca se for uma equivalência homotópica fraca, ou seja:
 1. X e Y são ambos vazios, ou
 2. X e Y são ambos não vazios e, para qualquer escolha de ponto base $x \in X$, o mapa induzido

$$f_* : \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$$

entre os grupos (para $i > 0$) ou conjuntos (para $i = 0$) de homotopia é um isomorfismo.

- f é uma cofibração se for um complexo celular relativo (ver Definição 4.8) ou um retrato (ver Definição 4.1) de um complexo celular relativo.
- f é uma fibração se for uma fibração de Serre.

Teorema 4.1. A categoria dos espaços topológicos admite uma estrutura de uma categoria modelo na qual as classes de morfismos equivalências fracas, cofibrações e fibrações são como na Definição 4.4.

A demonstração do Teorema 4.1 encontra-se na Seção 4.8.

4.2 Propriedades de Levantamento

Definição 4.5. Sejam $i : A \rightarrow B$ e $f : X \rightarrow Y$ dois mapas. Dizemos que i possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a f , e que f possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a i , se, para todo diagrama da forma:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & X \\ i \downarrow & \nearrow \eta & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

existe um mapa $\eta : B \rightarrow X$ que torna os triângulos resultantes comutativos, ou seja, $f \circ \eta = \psi$ e $\eta \circ i = \phi$.

O Axioma de levantamento $M4$ (ver Definição 4.2) é um dos pilares das estruturas modelo e afirma que:

- Cofibrações têm a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a todas as fibras triviais (ou seja, fibras que também são equivalências fracas).
- Fibrações têm a propriedade de levantamento à direita com respeito a todas as cofibrações triviais (ou seja, cofibrações que também são equivalências fracas).

Esse axioma permite organizar as classes de cofibrações, fibrações e equivalências fracas dentro de uma categoria modelo.

A seguir, provaremos que a classe de mapas com a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a um mapa $f : X \rightarrow Y$ é fechada sob as seguintes operações categóricas:

1. Pushouts (Lema 5.3): a classe é preservada quando mapas são estendidos por pushouts.
2. Coprodutos (Lema 4.3): a classe é fechada sob união disjunta de mapas.
3. Composições transfinitas (Lema 4.4): a propriedade é preservada em composições transfinitas de mapas.
4. Retrações (Lema 4.5): se um mapa i é uma retração de j , então j herda a propriedade de levantamento de i .

Os resultados apresentados são combinados na Proposição 4.4, que demonstra o seguinte:

Se um mapa $f : X \rightarrow Y$ possui a propriedade de levantamento à direita em relação às inclusões padrão $S^{n-1} \rightarrow D^n$ para todo $n \geq 0$, então f possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todos os complexos celulares relativos (ver Definição 4.8) e suas retrações.

Este é um passo crucial para estabelecer que o Axioma de Levantamento $M4$ é satisfeito em categorias modelo (veja a prova do Teorema 4.11). O axioma $M4$ organiza a relação entre cofibrações, fibrações e equivalências fracas em uma categoria modelo.

Além disso, apresentaremos o Argumento de Retração (ver Proposição 5.7), uma ferramenta poderosa frequentemente utilizada para mostrar que um mapa possui a propriedade de levantamento à esquerda ou à direita com respeito a outros mapas.

O argumento de retração é essencial em provas como a do Teorema 4.12, onde se demonstra que um mapa $i : A \rightarrow B$, que é simultaneamente uma cofibração e uma equivalência fraca, possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a todas as fibrações.

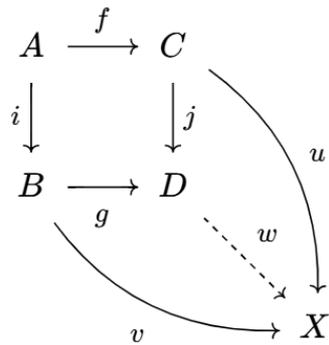
4.2.1 Pushouts, Pullbacks e Levantamento

Definição 4.6 (Pushouts e Pullbacks). Seja \mathcal{M} uma categoria.

1. Um **pushout** (colimite cocartesiano) de morfismos $i : A \rightarrow B$ e $f : A \rightarrow C$ é um diagrama comutativo

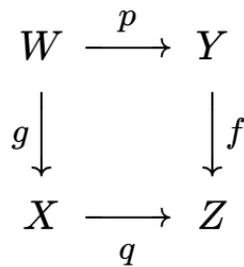
$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & C \\
 i \downarrow & & \downarrow j \\
 B & \xrightarrow{g} & D
 \end{array}$$

satisfazendo a seguinte propriedade universal: para qualquer objeto X e pares de morfismos $u : C \rightarrow X$, $v : B \rightarrow X$ com $u \circ f = v \circ i$, existe um único morfismo $w : D \rightarrow X$ tornando o diagrama

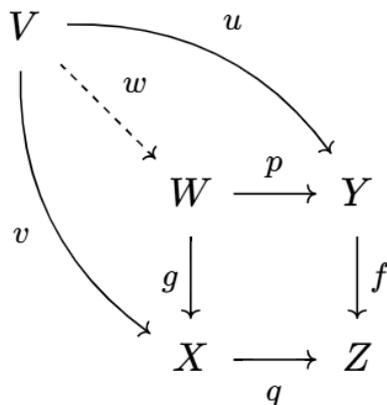


comutativo. Neste caso, $j : C \rightarrow D$ é dito o pushout de $i : A \rightarrow B$.

- Um **pullback** (limite cartesiano) de morfismos $f : Y \rightarrow Z$ e $q : X \rightarrow Z$ é um diagrama comutativo



satisfazendo a seguinte propriedade universal: para qualquer objeto V e pares de morfismos $u : V \rightarrow Y$, $v : V \rightarrow X$ com $f \circ u = q \circ v$, existe um único morfismo $w : V \rightarrow W$ tornando o diagrama



comutativo. Neste caso, $g : W \rightarrow X$ é dito o pullback de $f : Y \rightarrow Z$.

Lema 4.2 (Preservação de Propriedades de Levantamento).

- (1) Se j é um *pushout* de i (veja a Definição 4.6) e i possui a propriedade de elevação à esquerda em relação a um morfismo $f : X \rightarrow Y$, então j também possui a propriedade de elevação à esquerda em relação a f .
- (2) Se g é um *pullback* de f e f possui a propriedade de elevação à direita em relação a um morfismo i , então g também possui a propriedade de elevação à direita em relação a i .

Demonstração. Provemos a parte (1). A demonstração da parte (2) é análoga.

Sejam $i : A \rightarrow B$ e $j : C \rightarrow D$ mapas tal que j é um *pushout* de i , ou seja, existem morfismos $s : A \rightarrow C$ e $u : B \rightarrow D$ conforme o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & C \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ B & \xrightarrow{u} & D \end{array}$$

tal que $j \circ s = u \circ i$. Por outro lado, por hipótese, i possui a propriedade de levantamento à esquerda com relação ao morfismo $f : X \rightarrow Y$. Assim, existem morfismos $t : C \rightarrow X$ e $v : D \rightarrow Y$ e o mapa de elevação $w : B \rightarrow X$ tal que:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{t} & X \\ i \downarrow & & j \downarrow & \nearrow w & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{u} & D & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

$$w \circ i = t \circ s \quad \text{e} \quad f \circ w = v \circ u.$$

Agora, utilizando a propriedade universal do *pushout*, o morfismo $w : B \rightarrow X$ induz um único morfismo $g : D \rightarrow X$ tal que:

$$g \circ u = w \quad \text{e} \quad g \circ j = t.$$

Para verificar que $f \circ g = v$ e $g \circ j = t$, consideremos as seguintes composições:

$$\begin{aligned} (g \circ j) \circ s &= g \circ (j \circ s) & (f \circ g) \circ u &= f \circ (g \circ u) \\ &= g \circ (u \circ i) & &= f \circ w \\ &= (g \circ u) \circ i & &= v \circ u \\ &= w \circ i & & \\ &= t \circ s & & \end{aligned}$$

assim, segue da unicidade garantida pela propriedade universal do *pushout* que $f \circ g = v$ e que $g \circ j = t$. Logo, j também possui a propriedade de elevação a esquerda em relação ao mapa f . □

4.2.2 Coprodutos, Composição Transfinita e Propriedades de Levantamento

Lema 4.3 (Elevação para Coprodutos). Seja $f : X \rightarrow Y$ um mapa. Suponha que S seja um conjunto e, para cada $s \in S$, o mapa $\eta_s : A_s \rightarrow B_s$ possua a propriedade de elevação à esquerda em relação a f . Então o mapa

$$\xi : \coprod_{s \in S} A_s \rightarrow \coprod_{s \in S} B_s$$

também possui a propriedade de elevação à esquerda em relação a f .

Demonstração. Por hipótese, temos que para cada $s \in S$ o mapa $\eta_s : A_s \rightarrow B_s$ possui a propriedade de elevação à esquerda em relação a f . Assim, no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_s & \xrightarrow{\alpha_s} & X \\ \eta_s \downarrow & \nearrow g_s & \downarrow f \\ B_s & \xrightarrow{\beta_s} & Y \end{array}$$

existe um morfismo $g_s : B_s \rightarrow X$ tal que $f \circ g_s = \beta_s$ e $\alpha_s \circ \eta_s = g_s$. Por outro lado, para cada $s \in S$, temos os mapas naturais de inclusão: $\iota_s^A : A_s \rightarrow \coprod_{s \in S} A_s$ e $\iota_s^B : B_s \rightarrow \coprod_{s \in S} B_s$.

Agora considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} A_s & \xrightarrow{\iota_s^A} & \coprod_{s \in S} A_s & \xrightarrow{\gamma} & X \\ \eta_s \downarrow & & \xi \downarrow & \nearrow g_s & \downarrow f \\ B_s & \xrightarrow{\iota_s^B} & \coprod_{s \in S} B_s & \xrightarrow{\delta} & Y \end{array}$$

pela propriedade universal do coproduto existe um único morfismo $g : \coprod_{s \in S} B_s \rightarrow X$ tal

que $g \circ \iota_s^B = g_s$. Assim, note que:

$$\begin{aligned}
 (g \circ \xi) \circ \iota_s^A &= g \circ (\xi \circ \iota_s^A) \\
 &= g \circ (\iota_s^B \circ \eta_s) & (f \circ g) \circ \iota_s^B &= f \circ (g \circ \iota_s^B) \\
 &= (g \circ \iota_s^B) \circ \eta_s & &= f \circ g_s \\
 &= g_s \circ \eta_s & &= \delta \circ \iota_s^B \\
 &= \gamma \circ \iota_s^A & &= \beta_s \\
 &= \alpha_s
 \end{aligned}$$

Portanto, segue que ξ também possui a propriedade de elevação a esquerda com relação ao mapa f . □

Lema 4.4 (Levantamento para Composição Transfinita). Seja $f : X \rightarrow Y$ um mapa entre espaços topológicos. Suponha que exista uma sequência de mapas

$$A_0 \xrightarrow{\varphi_0} A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots$$

tal que, para todo $n \geq 0$, o mapa $\varphi_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$ possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a f . Então, o mapa natural

$$\lambda_0 : A_0 \rightarrow \operatorname{colim}_{n \geq 0} A_n$$

também possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito ao mapa f .

Demonstração. Considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 A_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & X \\
 \varphi_0 \downarrow & \nearrow \alpha_1 & \downarrow f \\
 A_1 & & \\
 \varphi_1 \downarrow & \nearrow \tilde{\alpha} & \\
 \vdots & & \\
 \operatorname{colim}_{n \geq 0} A_n & \xrightarrow{\beta} & Y
 \end{array}$$

onde buscamos encontrar um mapa $\tilde{\alpha} : \operatorname{colim}_{n \geq 0} A_n \rightarrow X$ que torne o diagrama comutativo, ou seja, que satisfaça $f \circ \tilde{\alpha} = \beta$ e $\tilde{\alpha} \circ \lambda_0 = \alpha_0$. Por hipótese, cada $\varphi_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$ admite um levantamento $\alpha_n : A_n \rightarrow X$, ou seja, para cada $n \geq 0$, existe um mapa α_n tal que $f \circ \alpha_n = \beta_n$ e $\alpha_n \circ \varphi_{n-1} = \alpha_{n-1}$. Como a sequência $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots$ é transfinita, podemos definir indutivamente os mapas $\alpha_n : A_n \rightarrow X$ garantindo compatibilidade com os colimites. Dessa forma, os levantamentos α_n se combinam para definir um único mapa

$$\tilde{\alpha} : \operatorname{colim}_{n \geq 0} A_n \rightarrow X$$

tal que $\tilde{\alpha} \circ \lambda_0 = \alpha_0$ e $f \circ \tilde{\alpha} = \beta$. Isso demonstra que λ_0 possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a f . □

4.2.3 Retrações e Propriedades de Elevação

Lema 4.5 (Retrações e Propriedades de Elevação).

- (1) Se o mapa i é uma retração do mapa j (ver Definição 4.1), e j possui a propriedade de elevação à esquerda em relação a um mapa $f : X \rightarrow Y$, então i também possui a propriedade de elevação à esquerda em relação a f .
- (2) Se o mapa f é uma retração do mapa g e g possui a propriedade de elevação à direita em relação a um mapa $i : A \rightarrow B$, então f também possui a propriedade de elevação à direita em relação a i .

Demonstração. Demonstramos o item (1). A prova do item (2) é análoga.

Considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & id_A & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 A & \xrightarrow{p} & C & \xrightarrow{r} & A \\
 i \downarrow & & j \downarrow & & \downarrow i \\
 B & \xrightarrow{q} & D & \xrightarrow{s} & B \\
 & & \curvearrowleft & & \\
 & & id_B & &
 \end{array}$$

Como estamos assumindo, por hipótese, que i é uma retração de j , isto é, existem mapas $p : A \rightarrow C$ e $r : C \rightarrow A$ tais que $r \circ p = id_A$ e $s \circ q = id_B$. Além disso, como o mapa j possui a propriedade de levantamento à esquerda em relação ao mapa $f : X \rightarrow Y$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & id_A & & & & \\
 & & \curvearrowright & & & & \\
 A & \xrightarrow{p} & C & \xrightarrow{r} & A & \xrightarrow{t} & X \\
 i \downarrow & & j \downarrow & & i \downarrow & \nearrow v & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{q} & D & \xrightarrow{s} & B & \xrightarrow{u} & Y \\
 & & \curvearrowleft & & & & \\
 & & id_B & & & &
 \end{array}$$

Isso significa que existe um mapa $v : D \rightarrow X$ tal que

$$v \circ j = t \circ r \quad \text{e} \quad f \circ v = u \circ s.$$

Agora, definimos o mapa $w : B \rightarrow X$ como $w = v \circ q$. Precisamos verificar que w satisfaz as condições do diagrama. De fato, note que:

$$\begin{aligned}
 w \circ i &= (v \circ q) \circ i \\
 &= v \circ (q \circ i) & f \circ w &= f \circ (v \circ q) \\
 &= v \circ (j \circ p) & &= (f \circ v) \circ q \\
 &= (v \circ j) \circ p & &= (u \circ s) \circ q \\
 &= (t \circ r) \circ p & &= u \circ (s \circ q) \\
 &= t \circ (r \circ p) & &= u \circ id_B \\
 &= t \circ id_A & &= u. \\
 &= t
 \end{aligned}$$

Portanto, o mapa w torna o diagrama comutativo e mostra que de fato i possui a propriedade de elevação à esquerda com relação ao mapa f , conforme requerido. \square

Observação 3. O resultado acima, conhecido como argumento da retração, é amplamente utilizado para mostrar que um mapa possui a propriedade de levantamento (à esquerda ou à direita) em relação a outros mapas. Isso ocorre porque o Lema 4.5 garante que, se um mapa é uma retração de outro e o segundo possui uma propriedade de levantamento, o primeiro também a possui. Este argumento será utilizado na última Seção para demonstrar que o axioma de elevação $M4$ é satisfeito (ver a prova do Teorema 4.12).

Proposição 4.1 (O Argumento da Retração).

- (1) Se o morfismo g pode ser fatorado como $g = p \circ i$, onde g possui a propriedade de elevação à esquerda com respeito a p , então g é uma retração de i .
- (2) Se o morfismo g pode ser fatorado como $g = p \circ i$, onde g possui a propriedade de elevação à direita com respeito a i , então g é uma retração de p .

Demonstração. Vamos provar a parte (1), a prova da parte (2) é dual.

Por hipótese, o morfismo g pode ser fatorado como $g = p \circ i$, onde g tem a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a p . Isso significa que, para qualquer diagrama comutativo da forma:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i} & Z \\
 g \downarrow & & \downarrow p \\
 Y & \xlongequal{\quad} & Y
 \end{array}$$

existe um morfismo $q : Y \rightarrow Z$ que torna o diagrama comutativo. A partir da fatoração $g = p \circ i$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i} & Z \\
 g \downarrow & \nearrow q & \downarrow p \\
 Y & \xlongequal{\quad} & Y
 \end{array}$$

Como g possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a p , existe um morfismo $q : Y \rightarrow Z$ que faz o diagrama comutar, ou seja:

$$q \circ g = i \quad \text{e} \quad p \circ q = \text{id}_Y.$$

Agora, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X \\
 g \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow g \\
 Y & \xrightarrow{q} & Z & \xrightarrow{p} & Y
 \end{array}$$

A comutatividade do diagrama implica que:

$$g = p \circ i \quad \text{e} \quad q \circ g = i.$$

Além disso, como $p \circ q = \text{id}_Y$, temos:

$$g = p \circ i = p \circ (q \circ g) = (p \circ q) \circ g = \text{id}_Y \circ g = g.$$

Isso mostra que g é um retração de i , pois g pode ser recuperado a partir de i e p . Portanto, g é um retrato de i , como afirmado na parte (1) da proposição. \square

4.3 Complexo Celular Relativo

Nesta seção, definimos e estudamos complexos celulares relativos (ver Definição 4.8) que, juntamente com suas retrações (ver Definição 4.1), são as cofibrações da categoria modelo.

Definição 4.7. Se X é um subespaço topológico de Y tal que existe um quadrado de pushout

$$\begin{array}{ccc}
S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & X \\
\sigma \downarrow & & \downarrow f \\
D^n & \xrightarrow{\beta} & Y
\end{array}$$

para algum $n \geq 0$, dizemos que Y é obtido a partir de X por meio da adição de uma célula.

Definição 4.8. Um complexo celular relativo é uma inclusão de subespaço $f : X \rightarrow Y$ tal que Y pode ser construído a partir de X por um processo (possivelmente infinito) de repetidas adições de células (ver Definição 4.7). Diz-se que f é um complexo celular relativo finito se Y pode ser construído anexando um número finito de células.

Um espaço topológico X é um complexo celular se o mapeamento $\emptyset \rightarrow X$ for um complexo celular relativo, e é um complexo celular finito se X puder ser construído a partir de \emptyset anexando um número finito de células.

Exemplo 4.1. Todo CW -complexo relativo é um complexo celular relativo, e todo CW -complexo é um complexo celular. De fato, um CW -complexo relativo pode ser obtido por um processo de anexação transfinitamente longo de células, como descrito nas observações anteriores, utilizando *pushouts* adequados das inclusões das fronteiras das células. No entanto, como o mapeamento de anexação de uma célula em um complexo de células não é obrigado a se fatorar através da união das células de dimensões inferiores, nem todos os complexos de células são CW -complexos.

Esse fato ilustra a flexibilidade dos complexos celulares, permitindo construções mais gerais do que os CW -complexos, que têm uma estrutura mais restrita devido à exigência de anexação sequencial e ordenada de células.

Observação 4. Frequentemente, construiremos um complexo celular relativo anexando múltiplas células simultaneamente. Mais precisamente, dado um espaço X_0 , um conjunto de índices S e, para cada $s \in S$, um mapa de anexação $\alpha_s : S^{n_s-1} \rightarrow X_0$, podemos formar o seguinte *pushout*:

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{s \in S} S^{(n_s-1)} & \xrightarrow{\alpha} & X_0 \\
\hat{\sigma} \downarrow & & \downarrow f \\
\coprod_{s \in S} D^{n_s} & \xrightarrow{\beta} & X_1
\end{array}$$

Nesse diagrama, os mapas são definidos como segue:

- $\alpha : \coprod_{s \in S} S^{(n_s-1)} \rightarrow X_0$ é a aplicação cujos componentes são os mapas α_s .

- $\hat{\sigma} : \coprod_{s \in S} S^{n_s-1} \hookrightarrow \coprod_{s \in S} D^{n_s}$ é a inclusão padrão das esferas S^{n_s-1} como bordas dos discos D^{n_s} .
- $\beta : \coprod_{s \in S} D^{n_s} \rightarrow X_1$ é o mapa que anexa as células D^{n_s} ao espaço X_1 de modo que $\beta|_{\partial D^{n_s}} = \alpha_s$.
- $f : X_0 \rightarrow X_1$ é a aplicação induzida no pushout, dada pela inclusão canônica de X_0 em X_1 .

O espaço X_1 é obtido a partir de X_0 pela anexação das células $\{D^{n_s} \mid s \in S\}$. Esse processo pode ser iterado sucessivamente, gerando uma sequência de espaços X_0, X_1, X_2, \dots , onde cada X_k é obtido anexando novas células ao espaço anterior. Dessa forma, obtemos um complexo celular crescente que pode conter um número finito ou infinito de etapas.

Observação 5. Embora a construção de um CW-complexo exija um processo contável de anexação de células (coprodutos de células), um complexo celular relativo pode necessitar de uma construção transfinitamente longa. Isto ocorre porque o processo de anexação de uma célula em um complexo celular não exige, em geral, que o mapa de anexação seja fatorado pela união das células de dimensões inferiores, permitindo a possibilidade de anexações mais complexas e de maior dimensão em um único passo.

Observação 6. A Definição 4.8 implica que um complexo celular relativo pode ser descrito como um mapa que resulta de uma composição transfinitamente longa de *pushouts* das inclusões das fronteiras das células nas próprias células. No entanto, em muitos casos, há diferentes formas de realizar essas construções, e é importante notar que, ao lidar com um espaço topológico que é um complexo celular ou um mapa que é um complexo celular relativo, assumimos frequentemente uma construção específica dessa natureza (ver Definição 4.11). Essa construção pode ser escolhida como uma composição transfinitamente longa de *pushouts* de coprodutos de células, ou seja, podemos considerar situações em que múltiplas células são anexadas simultaneamente.

Definição 4.9 (Ordinais). Adotamos a definição de ordinais na qual um ordinal é o conjunto bem-ordenado de todos os ordinais menores, e todo conjunto bem-ordenado é isomorfo a um único ordinal. Frequentemente, veremos um ordinal como uma pequena categoria com objetos iguais aos elementos do ordinal e um único mapeamento de α para β quando $\alpha \leq \beta$.

Definição 4.10. Seja C uma classe de morfismos e λ um ordinal. Uma λ -sequência em C é um funtor $X : \lambda \rightarrow \mathbf{Top}$ representado como:

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_\beta \rightarrow \dots (\beta < \lambda)$$

tal que

1. o mapa $X_\beta \rightarrow X_{\beta+1}$ pertence a C para todo $\beta + 1 < \lambda$ e,
2. para todo ordinal limite $\gamma < \lambda$, o mapa induzido $\text{colim}_{\beta < \gamma} X_\beta \rightarrow X_\gamma$ é um isomorfismo.

Equivalentemente, uma λ -sequência em C é um funtor preservador de colimite de λ para \mathbf{Top} , que associa cada mapa $\beta \rightarrow \beta + 1$ a um elemento de C . A composição da λ -sequência é o mapa $X_0 \rightarrow \text{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta$.

Definição 4.11. Seja $f : X \rightarrow Y$ um complexo relativo de células. Uma apresentação de f é uma λ -sequência de pushouts de coprodutos de elementos de I :

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots X_\beta \rightarrow \cdots (\beta < \lambda)$$

tal que a composição $X_0 \rightarrow \operatorname{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta$ é isomorfa a f .

Se e é uma célula do complexo relativo de células, então o ordinal de apresentação de e é o primeiro ordinal β tal que e está em X_β .

4.3.1 Subconjuntos compactos de complexos celulares relativos

O principal resultado desta seção é o Corolário 4.1, que será utilizado na construção das fatorações requeridas pelo axioma $M5$ (veja a demonstração da Proposição 4.5).

Proposição 4.2. Se $f : X \rightarrow Y$ é um complexo celular relativo, então um subconjunto compacto de Y pode intersectar os interiores de apenas um número finito de células de $Y - X$.

Demonstração. Seja $C \subseteq Y$ um subconjunto compacto. Construímos um subconjunto $P \subseteq C$ escolhendo, para cada célula de $Y - X$ cujo interior intersecta C , um ponto de C contido no interior dessa célula. Mostraremos que P não possui pontos de acumulação em C , o que implica que P é finito. Consequentemente, C intersecta os interiores de apenas um número finito de células de $Y - X$.

Para cada célula e de $Y - X$ tal que $\operatorname{int}(e) \cap C \neq \emptyset$, escolha um ponto $p_e \in \operatorname{int}(e) \cap C$. Defina,

$$P = \{p_e \mid e \text{ é uma célula de } Y - X \text{ com } \operatorname{int}(e) \cap C \neq \emptyset\}.$$

Seja $c \in C$. Mostraremos que existe um subconjunto aberto $U \subseteq Y$ tal que $c \in U$ e $U \cap P \subseteq \{c\}$, o que implica que c não é um ponto de acumulação de P .

Se $c \in X$, então c não pertence ao interior de nenhuma célula de $Y - X$. Nesse caso, $U = X$ é um aberto que contém c e não intersecta P , pois $P \subseteq Y - X$.

Se $c \in Y - X$, seja e_c a única célula de $Y - X$ que contém c em seu interior. Como P contém no máximo um ponto no interior de cada célula, podemos escolher um subconjunto aberto $U_c \subseteq \operatorname{int}(e_c)$ tal que $U_c \cap P \subseteq \{c\}$.

Para garantir que U_c possa ser estendido a um aberto de Y que ainda satisfaça $U \cap P \subseteq \{c\}$, utilizamos o Lema de Zorn.

Seja α o ordinal de apresentação da célula e_c , e seja γ o ordinal de apresentação do complexo celular relativo $f : X \rightarrow Y$.

Defina:

$$T = \{(\beta, U) \mid \alpha \leq \beta \leq \gamma, U \subseteq Y^\beta \text{ é aberto, } U \cap Y^\alpha = U_c, U \cap P \subseteq \{c\}\}.$$

onde Y^β denota o esqueleto de ordem β de Y .

Defina a relação \leq em T por:

$$(\beta_1, U_1) \leq (\beta_2, U_2) \iff \beta_1 \leq \beta_2 \text{ e } U_2 \cap Y^{\beta_1} = U_1.$$

Essa relação é uma pré-ordem (reflexiva e transitiva).

Se $\{(\beta_s, U_s)\}_{s \in S}$ é uma cadeia em T , então

$$\left(\bigcup_{s \in S} \beta_s, \bigcup_{s \in S} U_s \right)$$

é uma cota superior para a cadeia em T . Pelo Lema de Zorn, T possui um elemento maximal (β_m, U_m) .

Afirmção: $\beta_m = \gamma$.

Suponha, por contradição, que $\beta_m < \gamma$. Considere as células de Y com ordinal de apresentação $\beta_m + 1$. Como Y possui a topologia fraca determinada por X e pelas células em $Y - X$, basta expandir U_m para incluir abertos em cada célula de ordinal $\beta_m + 1$ ainda evitando os (no máximo um) pontos de P na célula.

Para cada célula e de ordinal $\beta_m + 1$, seja $h : S^{n-1} \rightarrow Y^{\beta_m}$ o mapa de adjunção que define e . Como $U_m \subseteq Y^{\beta_m}$ é aberto, $h^{-1}(U_m) \subseteq S^{n-1}$ é aberto. Espessando $h^{-1}(U_m)$ para um subconjunto aberto $V \subseteq D^n$, obtemos um conjunto $U' = U_m \cup V$, união de U_m , que ainda satisfaz $U' \cap P \subseteq \{c\}$. Assim,

$$(\beta_m + 1, U') \in T,$$

contradizendo a maximalidade de (β_m, U_m) . Portanto, $\beta_m = \gamma$, U_m é um aberto de Y que contém c e satisfaz $U_m \cap P \subseteq \{c\}$.

Como P não possui pontos de acumulação em C , P é finito. Logo, C intersecta os interiores de apenas um número finito de células de $Y - X$. \square

Proposição 4.3. Seja $f : X \rightarrow Y$ um complexo celular relativo. Então, toda célula de $Y \setminus X$ está contida em um subcomplexo finito de Y .

Demonstração. Pela Definição 4.11, Y é construído como uma seqüência transfinita de pushouts de coprodutos de elementos do conjunto I , ou seja, existe uma apresentação transfinita

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots X_\beta \rightarrow \cdots \quad (\beta < \lambda),$$

onde cada espaço $X_{\beta+1}$ é obtido de X_β anexando células por pushouts, e para ordinais limite γ , tem-se $X_\gamma = \text{colim}_{\beta < \gamma} X_\beta$.

Cada célula e em $Y \setminus X$ possui um ordinal de apresentação, que é o menor ordinal β tal que e é anexada em X_β . Demonstraremos a proposição por indução transfinita sobre o ordinal de apresentação das células.

Se e é uma célula com ordinal de apresentação 0, então e pertence a X_0 , que é um subcomplexo finito de Y . Assim, a proposição é válida nesse caso trivial.

Suponha que para algum ordinal β , toda célula com ordinal de apresentação de no máximo β esteja contida em um subcomplexo finito de Y . Precisamos provar que o mesmo vale para qualquer célula e com ordinal de apresentação $\beta + 1$. A célula e é anexada ao complexo em $X_{\beta+1}$ através de um pushout da forma:

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{h} & X_\beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & X_{\beta+1} \end{array}$$

onde $h : S^{n-1} \rightarrow X_\beta$ é o mapa de adjunção da célula e . Pela compacidade de S^{n-1} e continuidade de h , a imagem de h é um subconjunto compacto de X_β .

Pela Proposição 4.2, a imagem de h intersecta os interiores de apenas um número finito de células de $X_\beta \setminus X$. Sejam $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ essas células. Pela hipótese de indução, cada célula e_i ($1 \leq i \leq k$) está contida em um subcomplexo finito $Y_i \subseteq X_\beta$. Definimos

$$K = \bigcup_{i=1}^k Y_i.$$

Como cada Y_i é um subcomplexo finito, a união finita K ainda é um subcomplexo finito de X_β . Ao anexarmos a nova célula e , obtemos o novo espaço $X_{\beta+1}$ que contém K e a célula e . Assim, a união $K' = K \cup \{e\}$ é um subcomplexo finito de $X_{\beta+1}$ que contém e . Se β for um ordinal limite, então $X_\beta = \text{colim}_{\alpha < \beta} X_\alpha$. Como cada célula de X_β foi adicionada em um estágio finito anterior, então pela hipótese de indução, cada célula de X_β está contida em um subcomplexo finito K_α para algum $\alpha < \beta$. Como a união finita de subcomplexos finitos ainda é finita, segue que X_β pode ser coberto por um subcomplexo finito. Pelo princípio da indução transfinita, concluímos que toda célula de $Y \setminus X$ está contida em um subcomplexo finito de Y . \square

Corolário 4.1. Seja $f : X \rightarrow Y$ um complexo celular relativo. Então, qualquer subconjunto compacto de Y está contido em um subcomplexo finito de Y .

Demonstração. Seja $C \subseteq Y$ um subconjunto compacto. Precisamos mostrar que existe um subcomplexo finito $Y' \subseteq Y$ tal que $C \subseteq Y'$.

Pela Proposição 4.2, o subconjunto compacto C intersecta os interiores de apenas um número finito de células de $Y \setminus X$. Sejam

$$\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$$

essas células. Pela Proposição 4.3, para cada célula e_i está contida em um subcomplexo finito Y_i de Y . Definimos

$$Y' = \bigcup_{i=1}^m Y_i.$$

Como a união de um número finito de subcomplexos finitos ainda é um subcomplexo finito, segue que Y' é um subcomplexo finito de Y . Além disso, o subconjunto compacto C está contido em Y' , pois C intersecta apenas as células $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, que, por sua vez, estão contidas em Y' . Portanto, C está contido em um subcomplexo finito de Y . \square

4.3.2 Complexos celulares relativos e levantamento

Definição 4.12. Seja I o conjunto dos mapas definido por:

$$I = \{S^{n-1} \rightarrow D^n \mid n \geq 0\}.$$

Chamamos I de conjunto de cofibrações geradoras.

Proposição 4.4. Se um mapa $f : X \rightarrow Y$ possui a propriedade de levantamento à direita (veja a Definição 4.5) com respeito a cada elemento de I (veja a Definição 4.12), então ele possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todos os complexos celulares relativos e suas retrações (veja a Definição 4.1).

Demonstração. Se um mapa f possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a cada elemento de I , então:

- Pelo Lema 4.3: f possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todo coproduto de elementos de I .

Isso significa que para qualquer conjunto de mapas $\{i_\lambda : A_\lambda \rightarrow B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ em I , o mapa induzido

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda : \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$$

possui a propriedade de levantamento à direita.

- Pelo Lema 5.3: f possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todo pushout de um coproduto de elementos de I .

Dado um diagrama pushout construído a partir de um coproduto de elementos de I :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda & \xrightarrow{\phi} & X \\ \downarrow \coprod i_\lambda & & \downarrow f \\ \coprod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

o mapa $f : X \rightarrow Y$ também possui a propriedade de levantamento à direita.

- Pelo Lema 4.4: f possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a toda composição transfinita de pushouts de coprodutos de elementos de I . Isso cobre a construção de complexos celulares relativos, que podem ser vistos como composições transfinitas de pushouts.
- Pelo Lema 4.5: f possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todos os retrações de tais composições.

Como os complexos celulares relativos e suas retrações são construídos exatamente dessa forma, segue que f possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a eles. \square

4.4 O Argumento do Objeto Pequeno

Nesta seção, construímos duas fatorações functoriais de mapas (veja a Proposição 4.5 e a Proposição 4.8) que serão mostradas, na Seção 4.5, como sendo as duas fatorações exigidas pelo axioma de fatoração $M5$ (veja a Definição 4.2). Um ponto importante em ambas as fatorações é que o segundo mapa na fatoração deve possuir a propriedade de levantamento à direita com respeito a um conjunto de mapas, cada um dos quais tem um domínio compacto. Espaços compactos são pequenos no sentido de que, por conta do Corolário 4.1, todo mapa de um espaço compacto no colimite de uma λ -sequência (veja a Definição 4.10) de complexos celulares relativos deve se fatorar através de algum estágio intermediário da λ -sequência. Este fato é fundamental para mostrarmos que o segundo mapa na fatoração possui a propriedade de levantamento requerida. Ambas as fatorações discutidas nesta seção são exemplos do argumento do objeto pequeno (veja [9, Prop.10.5.16]).

4.4.1 A primeira fatoração

Proposição 4.5. Existe uma fatoração functorial de qualquer aplicação $f : X \rightarrow Y$ como

$$X \xrightarrow{i} W \xrightarrow{p} Y$$

tal que i é um complexo celular relativo (veja a Definição 4.8) e p satisfaz a propriedade de levantamento à direita (veja a Definição 1.36) em relação a cada elemento de I (veja a Definição 4.12).

Demonstração. Vamos construir o espaço W como o colimite de uma sequência de espaços W_k , representada pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xlongequal{\quad} & W_0 & \xrightarrow{i_0} & W_1 & \xrightarrow{i_1} & W_2 & \xrightarrow{i_2} & \dots \\ & & \downarrow p_0 & \nearrow p_1 & \nearrow p_2 & \nearrow & \nearrow & & \\ & & Y & & & & & & \end{array}$$

em que cada espaço W_k vem acompanhado de uma aplicação $p_k : W_k \rightarrow Y$ que torna o diagrama comutativo. A construção de W_k será feita de forma indutiva, começando com $W_0 = X$ e $p_0 = f$. Assumimos que $k \geq 0$ e que já construímos o diagrama até W_k . Para construir W_{k+1} , consideramos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \coprod S^{n-1} & \xrightarrow{\tilde{j}} & W_k \\ \downarrow \tilde{\sigma} & \nearrow k_{k+1} & \downarrow p_k \\ & W_{k+1} & \\ \downarrow \tilde{\tau} & \nearrow \tilde{l}_{k+1} & \downarrow p_{k+1} \\ \coprod D^n & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & Y \end{array}$$

onde o mapa j é a inclusão de uma esfera S^{n-1} no espaço W_k sendo parte da estrutura de células, σ é o mapa de inclusão da esfera S^{n-1} no disco D^n , τ é uma projeção que leva o disco D^n ao espaço Y , l_{k+1} é o mapa que faz a colagem das células no novo espaço W_{k+1} e p_{k+1} é a continuação do processo de fatoração, levando o novo espaço W_{k+1} para Y . Note que os coprodutos à esquerda são indexados por:

$$\coprod_{n \geq 0} \text{Map}(S^{n-1}, W_k) \times_{\text{Map}(S^{n-1}, Y)} \text{Map}(S^{n-1}, Y),$$

que corresponde ao conjunto de quadrados comutativos do tipo:

$$\begin{array}{ccc}
S^{n-1} & \xrightarrow{j} & W_k \\
\sigma \downarrow & & \downarrow p_k \\
D^n & \xrightarrow{\tau} & Y
\end{array}$$

existindo um somatório para cada um desses quadrados. Definimos W_{k+1} como o pushout:

$$\begin{array}{ccc}
\coprod S^{n-1} & \xrightarrow{\tilde{j}} & W_k \\
\tilde{\sigma} \downarrow & & \downarrow k_{k+1} \\
\coprod D^n & \xrightarrow{\tilde{l}_{k+1}} & W_{k+1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\searrow p_k \\
\downarrow p_{k+1} \\
\downarrow \tau \\
Y
\end{array}$$

o que define W_{k+1} e o morfismo $p_{k+1} : W_{k+1} \rightarrow Y$. Finalmente, definimos $W = \text{colim}_{k \geq 0} W_k$, $p : W \rightarrow Y$ como o colimite dos morfismos p_k , e definimos $i : X \rightarrow W$ como a composição $X = W_0 \rightarrow \text{colim} W_k = W$. Como W foi construído por meio da adição (anexação) de células a X , a aplicação $i : X \rightarrow W$ é um complexo celular relativo.

Para verificar que $p : W \rightarrow Y$ possui a propriedade de levantamento à direita com relação a todo elemento de I , consideremos $n \geq 0$ e o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
S^{n-1} & \xrightarrow{\hat{j}} & W \\
\sigma \downarrow & \tilde{l} \nearrow & \downarrow p \\
D^n & \xrightarrow{\tau} & Y
\end{array}$$

onde, S^{n-1} denota a esfera de dimensão $n - 1$, D^n é o disco de dimensão n , e desejamos encontrar um mapa $\tilde{l} : D^n \rightarrow W$ que torne todo o diagrama comutativo, ou seja, que satisfaça $p \circ \tilde{l} = \tau$ e $\tilde{l} \circ \sigma = \hat{j}$, onde $i : S^{n-1} \rightarrow D^n$ é a inclusão da esfera no disco. Observamos que S^{n-1} é um espaço compacto, e sua inclusão $\tilde{j} : S^{n-1} \rightarrow W$ está presente em um dos morfismos de colagem no diagrama de *pushout* que define W_{k+1} . Como consequência, existe um morfismo $\sigma : D^n \rightarrow W_{k+1}$ que torna comutativo o diagrama correspondente. A composição desse morfismo com a inclusão $\kappa : W_{k+1} \rightarrow W$ fornece o levantamento desejado $\tilde{l} = \kappa \circ \sigma$. Além disso, pela compacidade de S^{n-1} , o Corolário 4.1 implica que existe um inteiro positivo k tal que a aplicação $\hat{j} : S^{n-1} \rightarrow W$ pode ser fatorado através de algum estágio W_k . Dessa forma, podemos reformular o diagrama inicial da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccccc}
S^{n-1} & \xrightarrow{j'} & W_k & \xrightarrow{k_{k+1}} & W_{k+1} & \xrightarrow{\kappa} & W \\
\tilde{\sigma} \downarrow & & & \nearrow l_{k+1} & & & \downarrow p \\
D^n & & & & & \nearrow \tilde{l} & \\
& & & \xrightarrow{\tau} & & & Y
\end{array}$$

onde, $j' : S^{n-1} \rightarrow W_k$ é um dos mapas de colagem utilizados na construção de W_{k+1} a partir de W_k , o mapa $k_{k+1} : W_k \rightarrow W_{k+1}$ representa a inclusão na próxima etapa da construção, e $\kappa : W_{k+1} \rightarrow W$ é a inclusão no colimite. Pela definição de W_{k+1} , ele é construído como um colimite *pushout*, anexando células de dimensão n a W_k . Assim, o mapa $j' : S^{n-1} \rightarrow W_k$ permite estender $\sigma : D^n \rightarrow W_{k+1}$ para que o diagrama comute. Finalmente, a composição de σ com $\kappa : W_{k+1} \rightarrow W$ fornece o mapa $\tilde{l} : D^n \rightarrow W$ necessário no diagrama inicial.

Agora mostramos que a construção é funtorial. Suponha que temos um quadrado comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\iota_X} & X' \\
f \downarrow & & \downarrow f' \\
Y & \xrightarrow{\iota_Y} & Y'
\end{array}$$

Queremos demonstrar que a fatoração de $f : X \rightarrow Y$ é compatível com a de $f' : X' \rightarrow Y'$, ou seja, que existe um diagrama comutativo conectando as construções:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & Y \\
& & & & & & \downarrow \iota_Y \\
X & \equiv & W_0 & \xrightarrow{i_0} & W_1 & \xrightarrow{i_1} & W_2 & \xrightarrow{i_2} & \dots \\
& & f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & \\
X' & \equiv & W'_0 & \xrightarrow{i'_0} & W'_1 & \xrightarrow{i'_1} & W'_2 & \xrightarrow{i'_2} & \dots \\
& & & & & & & & Y'
\end{array}$$

Curved arrows from W_0 to Y are labeled p_0, p_1, p_2 . Curved arrows from W'_0 to Y' are labeled p'_0, p'_1, p'_2 .

Definimos $f_0 = f$. Suponha que já tenhamos definido $f_n : W_n \rightarrow W'_n$. O espaço W_{n+1} é construído anexando células de n -dimensões a W'_n conforme o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & W_n \\ \sigma \downarrow & & \downarrow p_n \\ D^n & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Mapeamos a célula anexada a W_n por α para a célula anexada a W'_n por meio do mapa $f_n \circ \alpha$, indexado pelo retângulo externo comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & W_n & \xrightarrow{f_n} & W'_n \\ \sigma \downarrow & & \downarrow p_n & & \downarrow p'_n \\ D^n & \xrightarrow{\beta} & Y & \xrightarrow{\iota_Y} & Y' \end{array}$$

Fazendo isso para cada célula anexada a W_n define-se $f_{n+1} : W_{n+1} \rightarrow W'_{n+1}$, e a compatibilidade é preservada no limite colimado. □

4.4.2 A Segunda Fatoração

Definição 4.13. Seja J o conjunto de mapas ¹:

$$J = \{D^n \times \{0\} \rightarrow D^n \times I \mid n \geq 0\}.$$

Chamamos J de conjunto de cofibrações triviais geradoras.

Proposição 4.6. Um mapa $f : X \rightarrow Y$ é uma fibração de Serre se, e somente se, possui a propriedade de levantamento à direita (veja Definição 4.5) com respeito a todos os elementos de J (veja Definição 4.13).

Demonstração. Isto é uma reformulação direta da definição de uma fibração de Serre. □

Definição 4.14. Seja X um subespaço de Y . Dizemos que Y é obtido de X anexando uma J -célula (ver Definição 4.13) se existir um diagrama de pushout da forma:

¹Observe que $I = [0, 1]$.

$$\begin{array}{ccc}
D^n \times \{0\} & \xrightarrow{g} & X \\
i \downarrow & & \downarrow f \\
D^n \times I & \xrightarrow{h} & Y
\end{array}$$

onde $n \geq 0$ e os mapas são definidos como: i é a inclusão padrão, g é o mapa que cola a borda $D^n \times \{0\}$ ao subespaço X , h é o mapa que cola o cilindro ao espaço X e f é o mapa de inclusão do subespaço X no espaço Y . Uma inclusão de subespaço $f : X \rightarrow Y$ é chamada de complexo celular relativo de J -células se Y pode ser construído a partir de X por um processo (possivelmente infinito) de anexação iterada de J -células.

Lema 4.6. Todo elemento de J é um complexo celular relativo (ver Definição 4.8) composto por duas células. Além disso, se Y for obtido a partir de X pela adição de uma J -célula, então o mapa de inclusão $f : X \rightarrow Y$ define um complexo celular relativo, no qual primeiro é anexada uma única n -célula, seguida pela anexação de uma única $(n + 1)$ -célula, para algum $n \geq 0$.

Demonstração. Existe um homeomorfismo entre $D^n \times I$ e D^{n+1} , que mapeia $D^n \times \{0\}$ sobre um dos dois n -discos cuja união forma ∂D^{n+1} . Dessa forma, D^{n+1} pode ser obtido primeiro anexando-se uma n -célula e, em seguida, uma $(n + 1)$ -célula. Consideremos agora o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\phi} & X \\
\psi \downarrow & & \\
D^n \times I & &
\end{array}$$

onde ϕ representa a anexação inicial da n -célula, ψ representa a inclusão trivial. Como $D^n \times I$ é homeomorfo a D^{n+1} , esse processo equivale a anexar uma $(n + 1)$ -célula a X .

Assim, a construção do espaço Y a partir de X por anexação de uma J -célula equivale a anexar sequencialmente uma n -célula e uma $(n + 1)$ -célula, o que confirma que $f : X \rightarrow Y$ é um complexo celular relativo com duas células. \square

Observação 7. Frequentemente, construímos um complexo celular relativo de J -células anexando mais de uma J -célula simultaneamente. Dado um espaço X_0 , um conjunto S , e, para cada $s \in S$, um mapa

$$\phi_s : D^{n_s} \times \{0\} \rightarrow X_0,$$

podemos construir um diagrama de pushout:

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{s \in S} D^{n_s} \times \{0\} & \xrightarrow{\phi} & X_0 \\
\psi \downarrow & & \downarrow i \\
\coprod_{s \in S} D^{n_s} \times I & \xrightarrow{\psi'} & X_1
\end{array}$$

onde $\phi = \coprod \phi_s$ é o mapa de anexação das J -células ao espaço X_0 , ψ é a inclusão natural das bases dos cilindros, i é a inclusão do espaço inicial no espaço resultante e ψ' é o mapa obtido no pushout, que cola os cilindros ao espaço inicial. Após realizar essa operação, podemos repetir o processo com X_1 , iterando esse procedimento um número finito ou infinito de vezes, resultando em um complexo relativo de J -células.

Proposição 4.7. Toda fibração possui a propriedade de levantamento à direita (veja a Definição 4.5) com respeito a todos os complexos relativos J -celulares e seus retráteis (veja a Definição 4.1).

Demonstração. De acordo com a Proposição 4.6, uma fibração possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a cada elemento do conjunto J . Pelo Lema 4.3, segue-se que a fibração também possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todo coproduto de elementos de J .

Além disso, o Lema 5.3 garante que a fibração tem a propriedade de levantamento à direita com respeito a qualquer pushout de um coproduto de elementos de J . Conseqüentemente, pelo Lema 4.4, conclui-se que a fibração possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a qualquer composição de pushouts de coprodutos de elementos de J .

Finalmente, pelo Lema 4.5, obtemos que a fibração possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a qualquer retrátil de uma composição de pushouts.

Assim, verificamos que toda fibração possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todos os complexos relativos J -celulares e seus retráteis. \square

Proposição 4.8. Seja $f : X \rightarrow Y$ um mapa. Existe uma fatoração funtorial de f como:

$$X \xrightarrow{j} W \xrightarrow{q} Y$$

onde j é um complexo celular relativo de J -células (veja a Definição 4.14) e q possui a propriedade de levantamento à direita (veja a Definição 4.5) com relação a todo elemento de J (veja a Definição 4.13).

Demonstração. A construção da fatoração segue o mesmo procedimento apresentado na Proposição 4.5, com a diferença de que utilizamos o conjunto J de cofibrações triviais geradoras (veja a Definição 4.13) no lugar do conjunto I de cofibrações geradoras (veja a Definição 4.12). O espaço W é construído a partir de X pela anexação de J -células. Por definição, uma J -célula é obtida considerando cópias de $D^n \times I$ coladas ao longo de $D^n \times \{0\}$, para todo $n \geq 0$. Assim, o mapa $j : X \rightarrow W$ é um complexo celular relativo de J -células. Para construir W_{k+1} a partir de W_k , utilizamos o seguinte processo em dois passos:

Consiste em anexar múltiplas cópias de $D^n \times I$ ao longo de $D^n \times \{0\}$ (para todos $n \geq 0$). O Lema 4.6 implica que essa construção pode ser vista como um processo em dois passos:

1. Anexar n -células (para todo $n \geq 0$) a W_k para criar um espaço intermediário W'_k .
2. Anexar $(n + 1)$ -células (para todo $n \geq 0$) a W'_k para formar W_{k+1} .

Esse processo é justificado pelo Lema 4.6, que mostra que a construção pode ser vista como um procedimento em dois passos. Definimos $V_{2k} = W_k$ e $V_{2k+1} = W'_k$. Assim, W é o colimite da sequência:

$$X = V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \cdots,$$

onde cada espaço V_{k+1} é construído a partir de V_k pela anexação de células. Como W é obtido anexando J -células a X , concluímos que $j : X \rightarrow W$ é um complexo celular relativo de J -células. Além disso, pelo Corolário 4.1 implica que qualquer mapa $D^n \times \{0\} \rightarrow W$ pode ser fatorado por W_k , para algum $k \geq 0$. Pela construção, o mapa $q : W \rightarrow Y$ possui a propriedade de levantamento à direita com relação a todo elemento de J . Isso ocorre porque as anexações de J -células foram feitas de forma que cada J -célula resolve o problema de levantamento localmente. O argumento detalhado é análogo ao da Proposição 4.5. A construção é funtorial, pois, para cada mapa $f : X \rightarrow Y$, os espaços intermediários W_k e os mapas j, q dependem funtorialmente de f . Assim, j e q são bem definidos de forma natural e compatível com morfismos. \square

Proposição 4.9. O complexo celular relativo de J -células construído na demonstração da Proposição 4.8 é um complexo celular relativo.

Demonstração. Isso segue diretamente da prova da Proposição 4.8, onde foi explicitamente mostrado que o complexo celular relativo de J -células construído é, de fato, formado pela adição iterativa de células (via pushouts) e, portanto, satisfaz as condições necessárias para ser um complexo celular relativo. \square

4.5 O Axioma de Fatoração

Demonstraremos que as duas fatorações de mapas, construídas conforme descrito anteriormente, correspondem às duas fatorações exigidas pelo axioma de fatoração $M5$ (ver Definição 4.2).

4.5.1 Cofibração e Fibração Trivial

Proposição 4.10. A fatoração funtorial construída na Proposição 4.5 de um mapa $f : X \rightarrow Y$ como $X \xrightarrow{i} W \xrightarrow{p} Y$, onde i é um complexo celular relativo e p possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todos os elementos de I (veja a Definição 4.12), é uma fatoração em uma cofibração seguida por uma fibração trivial.

Demonstração. Como as cofibrações são definidas como os complexos de células relativos e suas retrações (veja a Definição 4.4), o mapa i é uma cofibração. Pelo Lema 4.6, todo elemento de J é um complexo relativo de células. Além disso, a Proposição 4.4 implica que o mapa p possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todos os complexos relativos de células. Assim, a Proposição 4.6 implica que p é uma fibração. Para verificar que p é uma equivalência fraca, é necessário mostrar que p induz um isomorfismo entre todos os grupos de homotopia, ou seja, $p_* : \pi_i(W, w) \rightarrow \pi_i(Y, p(w))$ é um isomorfismo para todo $i \geq 0$ e para todo ponto base $w \in W$.

Sobrejetividade em π_0 :

Como p possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a inclusão trivial $\emptyset \rightarrow D^0$,²

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & \xrightarrow{h} & W \\
 i \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\
 D^0 & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

Como D^0 é um único ponto, \tilde{h} simplesmente escolhe $w \in W$ tal que $p(w) = y$, para todo $y \in Y$. Segue que p é sobrejetora. Portanto, cada componente conexa de Y , existe pelo menos uma componente conexa de W que é mapeada sobrejetivamente sobre ela. Logo, $p_* : \pi_0(W) \rightarrow \pi_0(Y)$ é sobrejetivo.

Injetividade π_i (para $i \geq 0$):

Seja $w \in W$ e considere um elemento $[g] \in \pi_i(W, x)$ tal que $p_*([g]) = 0$ em $\pi_i(Y, p(w))$. Isso significa que $p \circ g : S^i \rightarrow Y$ é homotópico a um mapa constante. Seja $h : D^{i+1} \rightarrow Y$ uma homotopia entre $p \circ g$ e o mapa constante. Obtemos o seguinte diagrama comutativo:

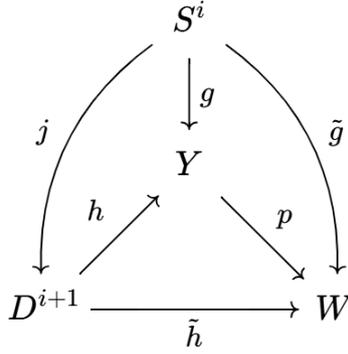
$$\begin{array}{ccc}
 S^i & \xrightarrow{g} & W \\
 g \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\
 D^{i+1} & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}$$

onde $j : S^i \rightarrow D^{i+1}$ é a inclusão da esfera S^i como o bordo de D^{i+1} . Pela propriedade de elevação à direita de p , existe $\tilde{h} : D^{i+1} \rightarrow W$ tal que $p \circ \tilde{h} = h$ e $\tilde{h} \circ j = g$. Isso implica que g é homotópico ao mapa constante em W , ou seja, $[g] = 0$ em $\pi_i(W, w)$. Portanto, p_* é injetivo.

Sobrejetividade de π_i (para $i \geq 0$):

Seja $y \in Y$ e $[g] \in \pi_i(Y, y)$. O elemento $[g]$ pode ser representado por um mapa $g : S^i \rightarrow Y$ que leva a esfera S^i ao ponto y . Esse mapa g pode ser estendido a um mapa $h : D^{i+1} \rightarrow Y$ que torna o diagrama comutativo:

²O leitor atento notará que apenas a sobrejetividade em π_0 é requerida, seguindo Quillen. A estrutura modelo compensa esta condição mais fraca via propriedades em dimensões superiores (ver. [10, Prop.7.6]).



Como $p : W \rightarrow Y$ possui a propriedade de levantamento à direita com $j : S^i \rightarrow D^{i+1}$, existe um mapa $\tilde{h} : D^{i+1} \rightarrow W$ que torna o diagrama comutativo, ou seja, $p \circ \tilde{h} = h$ e $\tilde{h} \circ j = g$. Isso implica que \tilde{h} é um levantamento de h através de p . A restrição de \tilde{h} ao bordo S^i fornece um mapa $\tilde{g} : S^i \rightarrow W$ tal que $\tilde{g} = \tilde{h} \circ j$. Pela comutatividade do diagrama, temos:

$$p \circ \tilde{g} = p \circ (\tilde{h} \circ j) = (p \circ \tilde{h}) \circ j = h \circ j = g.$$

Portanto, \tilde{g} é um levantamento de g através de p . O mapa $\tilde{g} : S^i \rightarrow W$ define um elemento $[g] \in \pi_i(Y, w)$. Como $p \circ \tilde{g} = g$, temos $p_*([g]) = [g]$. Isso mostra que p_* é sobrejetivo. \square

4.5.2 Cofibração Trivial e Fibração

Proposição 4.11. A fatoração functorial construída na Proposição 4.8 de um mapa $f : X \rightarrow Y$ como $X \xrightarrow{j} W \xrightarrow{q} Y$, onde j é um complexo celular relativo de J -células (ver Definição 4.14) e q possui a propriedade de levantamento à direita em relação a todo elemento de J (ver Definição 4.13), é uma fatoração em um mapa que é simultaneamente uma cofibração e uma equivalência fraca, seguido por um mapa que é uma fibração.

Demonstração. Pela Proposição 4.8, o complexo celular relativo de J -células é um complexo celular relativo. Pela Proposição 4.4 todo complexo celular relativo é uma cofibração. Portanto, o mapa $j : X \rightarrow W$ é uma cofibração.

Cada inclusão $D^n \times \{0\} \rightarrow D^n \times I$ é a inclusão de um retrato por deformação forte. Portanto, cada mapa $W_k \rightarrow W_{k+1}$ na construção da fatoração é também a inclusão de um retrato por deformação forte, e assim, é uma equivalência fraca. Consequentemente, para todo $i \geq 0$, a sequência:

$$\pi_i(W_0) \rightarrow \pi_i(W_1) \rightarrow \pi_i(W_2) \rightarrow \dots$$

é uma sequência de isomorfismos. Como os espaços S^i e D^{i+1} são compactos, o Corolário 4.1 implica que todo mapa de S^i ou D^{i+1} para W fatora-se através de W_k , para algum $k \geq 0$. Assim, o mapa

$$\operatorname{colim}_k \pi_i(W_k) \rightarrow \pi_i(W)$$

é um isomorfismo. Portanto, o mapa $\pi_i(X) \rightarrow \pi_i(W)$ também é um isomorfismo, implicando que j é uma equivalência fraca. Pela Proposição 4.6, o mapa q possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todo elemento de J . Portanto, q é uma fibração. \square

4.6 Grupos de Homotopia e Mapas de Discos

O principal resultado aqui é a Proposição 4.14, que será utilizada posteriormente para demonstrar que o axioma de levantamento $M4$ (veja a Definição 4.2) é válido. Considere um diagrama do tipo apresentado no Diagrama 4.14. Neste contexto, o mapa h define um elemento do grupo de homotopia $\pi_{n-1}(X)$ (com respeito a um ponto base), e a existência do mapa g implica que a imagem desse elemento sob o homomorfismo induzido $f_* : \pi_{n-1}(X) \rightarrow \pi_{n-1}(Y)$ é o elemento nulo em $\pi_{n-1}(Y)$. Como o mapa f é uma equivalência fraca, isso significa que h também define o elemento nulo em $\pi_{n-1}(X)$. Consequentemente h pode ser estendido para um mapa $G : D^n \rightarrow X$. No entanto, não há garantia de que $f \circ G$ coincidam na borda de D^n .

Dessa forma, é necessário analisar situações em que dois mapas $\alpha, \beta : D^n \rightarrow X$ concordam na borda de D^n . A partir desses mapas, define-se (ver Definição 4.16) um mapa de diferença $d(\alpha, \beta) : S^n \rightarrow X$, onde α é usado no hemisfério superior e β no hemisfério inferior. Esse mapa de diferença define um elemento em $\pi_n(X)$ (em algum ponto-base), e as propriedades desses elementos são devidamente estabelecidas.

Além disso, os resultados obtidos permitem substituir o mapa G original por outro G' , construído de forma que a composição $f \circ G'$ coincida exatamente com g , resolvendo o problema inicial.

4.6.1 Mapas de Diferença

Considere dois mapas $\alpha, \beta : D^n \rightarrow X$ que coincidem na borda de D^n , ou seja, $\alpha|_{\partial D^n} = \beta|_{\partial D^n}$. Nessas condições, é possível definir o mapa de diferença entre α e β . Esse conceito será formalizado na definição a seguir e desempenhará um papel essencial nos resultados subsequentes.

Definição 4.15 (Hemisférios de S^n). Para $n \geq 1$, definimos os hemisfério superior e inferior de S^n como:

$$S_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1, x_{n+1} \geq 0\}$$

$$S_-^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1, x_{n+1} \leq 0\}.$$

Os mapas $p_+ : S_+^n \rightarrow D^n$ e $p_- : S_-^n \rightarrow D^n$ são homeomorfismos naturais definidos por:

$$p_+(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$p_-(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Definição 4.16 (Mapas de diferença). Seja X um espaço topológico e sejam $\alpha, \beta : D^n \rightarrow X$ dois mapas tais que $\alpha|_{\partial D^n} = \beta|_{\partial D^n}$. O mapa de diferença $d(\alpha, \beta) : S^n \rightarrow X$ é definido como:

$$d(\alpha, \beta)(x) = \begin{cases} \alpha \circ p_+(x), & \text{se } x \in S_+^n, \\ \beta \circ p_-(x), & \text{se } x \in S_-^n. \end{cases}$$

O mapa $d(\alpha, \beta)$ compara α e β nos hemisférios de S^n .

Lema 4.7. Seja X um espaço topológico e $\alpha : D^n \rightarrow X$ um mapa. Seja $[g] \in \pi_n(X, \alpha(p_0))$ um elemento do grupo de homotopia baseado em $\alpha(p_0)$, onde p_0 é o ponto-base de D^n . Então existe um mapa $\beta : D^n \rightarrow X$ tal que:

1. $\beta|_{\partial D^n} = \alpha|_{\partial D^n}$ (ou seja, β coincide com α na borda de D^n).
2. $[d(\alpha, \beta)] = [g]$ em $\pi_n(X, \alpha(p_0))$ (ou seja, o mapa de diferença $d(\alpha, \beta)$ representa a mesma classe de homotopia que g).

Demonstração. O ponto base p_0 de D^n é uma retração por deformação forte de D^n . Isso significa que D^n pode ser deformado continuamente sobre p_0 mantendo p_0 fixo durante a deformação. Consequentemente, qualquer dois mapas $D^n \rightarrow X$ que coincidem no ponto base p_0 são homotópicos relativamente ao ponto base. O mapa $g : S^n \rightarrow X$ define um elemento $[g] \in \pi_n(X, \alpha(p_0))$. A restrição de g ao hemisfério superior S_+^n (ou seja, $g|_{S_+^n}$) é homotópica relativamente ao ponto base ao mapa $\alpha \circ p_+$, onde $p_+ : S_+^n \rightarrow D^n$ é a projeção natural do hemisfério superior no disco D^n . Isso ocorre porque $\alpha \circ p_+$ e $g|_{S_+^n}$ coincidem no ponto base p_0 , e qualquer dois mapas que coincidem no ponto base são homotópicos relativamente ao ponto base. A inclusão $S_+^n \hookrightarrow S^n$ possui a propriedade de extensão de homotopia (PEH). Isso significa que qualquer homotopia definida em S_+^n pode ser estendida a uma homotopia em S^n . Usando a PEH, podemos estender a homotopia entre $g|_{S_+^n}$ e $\alpha \circ p_+$ a uma homotopia de g para um mapa $h : S^n \rightarrow X$ tal que $h|_{S_+^n} = \alpha \circ p_+$. Definimos $\beta = h \circ (p_-^{-1})$, onde $p_- : S_-^n \rightarrow D^n$ é a projeção natural do hemisfério inferior S_-^n no disco D^n , e p_-^{-1} é sua inversa. O mapa $h : S^n \rightarrow X$ é precisamente o mapa de diferença $d(\alpha, \beta)$, pois:

$$h(x) = \begin{cases} \alpha \circ p_+(x), & \text{se } x \in S_+^n, \\ \beta \circ p_-(x), & \text{se } x \in S_-^n. \end{cases}$$

O mapa $\beta : D^n \rightarrow X$ satisfaz $\beta|_{\partial D^n} = \alpha|_{\partial D^n}$, pois h coincide com $\alpha \circ p_+$ no hemisfério superior S_+^n , que contém a borda ∂D^n . Além disso, o mapa de diferença $d(\alpha, \beta)$ é homotópico a g , ou seja, $[d(\alpha, \beta)] = [g]$ em $\pi_n(X, \alpha(p_0))$. □

Lema 4.8 (Aditividade dos Mapas de Diferença). Seja X um espaço topológico, $n \geq 1$, e sejam $\alpha, \beta, \gamma : D^n \rightarrow X$ mapas que coincidem na borda ∂D^n . Então, em $\pi_n(X, \alpha(p_0))$, (onde p_0 é o ponto base de D^n), temos

$$[d(\alpha, \beta)] + [d(\beta, \gamma)] = [d(\alpha, \gamma)],$$

onde, no caso $n = 1$, a adição é substituída pela multiplicação.

Demonstração. Definimos $T^n = S^n \cup D^n$, onde D^n é o subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} dado por

$$D^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1, x_{n+1} = 0\}.$$

O espaço T^n é um CW-complexo formado pela união de três células n -dimensionais S_+^n , S_-^n e D^n , todas compartilhando uma borda comum. Definimos o mapa $t(\alpha, \beta, \gamma) : T^n \rightarrow X$ como:

$$t(\alpha, \beta, \gamma)|_{S_+^n} = \alpha \circ p_+, \quad t(\alpha, \beta, \gamma)|_{D^n} = \beta, \quad t(\alpha, \beta, \gamma)|_{S_-^n} = \gamma \circ p_-,$$

onde $p_+ : S_+^n \rightarrow D^n$ e $p_- : S_-^n \rightarrow D^n$ são projeções homeomórficas.

Assim, temos:

- A composição $S^n \hookrightarrow T^n \xrightarrow{t(\alpha, \beta, \gamma)} X$ resulta no mapa $d(\alpha, \gamma)$.

- A composição $S^n \rightarrow S_+^n \cup D^n \subset T^n \xrightarrow{t(\alpha, \beta, \gamma)} X$ (onde o primeiro mapa é a identidade em S_+^n e p_- em S_-^n) resulta em $d(\alpha, \beta)$.
- A composição $S^n \rightarrow D^n \cup S_-^n \subset T^n \xrightarrow{t(\alpha, \beta, \gamma)} X$ (onde o primeiro mapa é p_+ em S_+^n e a identidade em S_-^n) resulta em $d(\beta, \gamma)$.

O ponto base p_0 de D^n é uma retração por deformação forte de D^n , o que implica que o mapa $\beta : D^n \rightarrow X$ é homotópico relativamente ao ponto base ao mapa constante $\alpha(p_0)$. Como a inclusão $D^n \hookrightarrow T^n$ possui a propriedade de extensão de homotopia, existe uma homotopia de $t(\alpha, \beta, \gamma)$ relativamente ao ponto base para um mapa $\hat{t}(\alpha, \beta, \gamma) : T^n \rightarrow X$ que leva D^n ao ponto base $\alpha(p_0)$.

Decomposição e Aditividade:

Existe um mapa $T^n \rightarrow S^n \vee S^n$ que colapsa D^n a um ponto. Então, $\hat{t}(\alpha, \beta, \gamma)$ se decompõe como:

$$T^n \rightarrow S^n \vee S^n \xrightarrow{\alpha\beta \vee \beta\gamma} X,$$

onde $\alpha\beta : S^n \rightarrow X$ é homotópico a $d(\alpha, \beta)$ e $\beta\gamma : S^n \rightarrow X$ é homotópico a $d(\beta, \gamma)$.

Portanto, o mapa $d(\alpha, \gamma)$ é homotópico à composição:

$$S^n \hookrightarrow T^n \rightarrow S^n \vee S^n \xrightarrow{\alpha\beta \vee \beta\gamma} X.$$

Logo, temos que

$$[d(\alpha, \gamma)] = [d(\alpha, \beta)] + [d(\beta, \gamma)] \quad \text{para } n > 1,$$

ou

$$[d(\alpha, \gamma)] = [d(\alpha, \beta)] \cdot [d(\beta, \gamma)] \quad \text{para } n = 1.$$

□

Lema 4.9. Se X um espaço topológico e, $\alpha, \beta : D^n \rightarrow X$ são mapas que coincidem em ∂D^n , e $[d(\alpha, \beta)]$ é o elemento identidade de $\pi_n(X)$, então α e β são homotópicos em relação a ∂D^n .

Demonstração. Como $[d(\alpha, \beta)]$ é o elemento identidade de $\pi_n(X)$, existe um mapa $h : D^{n+1} \rightarrow X$ cuja restrição à borda ∂D^{n+1} é o mapa de diferença $d(\alpha, \beta)$.

Visualizamos $D^n \times I$ como o cone sobre $\partial(D^n \times I) = (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I) \cup (D^n \times \{1\})$, com vértice no ponto central de $D^n \times I$. Seja $p : D^n \times I \rightarrow D^{n+1}$ o mapa definido da seguinte forma:

1 Em $D^n \times \{0\}$, p é a composição

$$D^n \times \{0\} \xrightarrow{\text{proj}} D^n \xrightarrow{(p_+)^{-1}} S_+^n \hookrightarrow D^{n+1}.$$

2 Em $D^n \times \{1\}$, p é a composição

$$D^n \times \{1\} \xrightarrow{\text{proj}} D^n \xrightarrow{(p_-)^{-1}} S_-^n \hookrightarrow D^{n+1}.$$

3 Em $S^{n-1} \times I$, p é a composição

$$S^{n-1} \times I \xrightarrow{\text{proj}} S^{n-1} \hookrightarrow S_+^n \cap S_-^n \subset D^{n+1}.$$

4 p leva o ponto central de $D^n \times I$ ao ponto central de D^{n+1} .

5 p é linear em cada linha reta conectando o ponto central de $D^n \times I$ à sua borda.

A composição

$$D^n \times I \xrightarrow{p} D^{n+1} \xrightarrow{h} X$$

é então uma homotopia entre α e β relativa a ∂D^n . □

4.6.2 Levantamento de Mapas em Discos

Neste contexto, utilizamos os resultados prévios para demonstrar a Proposição 4.14. Dado um diagrama conforme apresentado em 4.14, a Proposição 4.12 garante que, mesmo se a equivalência fraca $f : X \rightarrow Y$ não for uma fibração, existe uma seta diagonal que faz o triângulo superior comutar exatamente e o triângulo inferior comutar até uma homotopia relativa à borda de D^n . Adicionalmente, a Proposição 4.13 mostra que, no caso em que a equivalência fraca f também for uma fibração, então existe um mapa que torna ambos os triângulos comutativos de forma exata. Embora as Proposições 4.12 e 4.13 tratem apenas de um único valor de n por vez, a Proposição 4.14 afirma que, se todos os grupos (ou conjuntos) de homotopia são mapeados por um isomorfismo sob f_* então o mapa existe para todos os valores de n .

Proposição 4.12. Seja $f : X \rightarrow Y$ um mapa, $n \geq 1$, e suponha que temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \partial D^n & \xrightarrow{h} & X \\ i \downarrow & \nearrow G & \downarrow f \\ D^n & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Se F é a fibra homotópica de f sobre algum ponto na imagem de g e $\pi_{n-1}(F) = 0$, então existe um mapa $G : D^n \rightarrow X$ tal que:

1. $G \circ i = h$ (ou seja, G estende h para D^n .)
2. $f \circ G \simeq g$ relativamente a ∂D^n (ou seja $f \circ G$ é homotópico a g mantendo a borda ∂D^n fixa).

Demonstração. O mapa $h : \partial D^n \rightarrow X$ define um elemento $[h] \in \pi_{n-1}(X)$ (em algum ponto base), tal que $f_*([h]) = 0$ em $\pi_{n-1}(Y)$. Como o diagrama comuta, temos $f \circ h = g \circ i$ o que implica que $f_*([h]) = 0$ em $\pi_{n-1}Y$. A fibra homotópica F de f sobre um ponto na imagem de g é o espaço de pares (x, γ) onde $x \in X$ e γ é um caminho em Y de $f(x)$ até o ponto base. A sequência exata longa de homotopia para a fibração $F \rightarrow X \rightarrow Y$ implica:

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \cdots$$

Como $\pi_{n-1}(F) = 0$, a aplicação $f_* : \pi_{n-1}(X) \rightarrow \pi_{n-1}(Y)$ é injetiva. Portanto, $[h] = 0$ em $\pi_{n-1}(X)$. Como $[h] = 0$, existe um mapa $j : D^n \rightarrow X$ tal que $j \circ i = h$. Os mapas

$f \circ j : D^n \rightarrow Y$ e $g : D^n \rightarrow Y$ coincidem sobre ∂D^n . Consequentemente, existe um mapa de diferença $d(f \circ j, g) : S^n \rightarrow X$ (ver Definição 4.16) que define um elemento $\alpha \in \pi_n(Y)$.

Como $\pi_{n-1}(F) = 0$, a seqüência exata longa implica que existe um elemento $\beta \in \pi_n(X)$ tal que $f_*(\beta) = -\alpha$ (se $n > 1$) ou $f_*(\beta) = \alpha^{-1}$ (se $n = 1$). Pelo Lema 4.7, podemos escolher um mapa $G : D^n \rightarrow X$ que coincide com $j : D^n \rightarrow X$ em ∂D^n e tal que $[d(G, j)] = \beta$ em $\pi_n X$. Assim, $G \circ i = j \circ i = h$, temos $G \circ i = h$. O mapa de diferença $[d(f \circ G, f \circ j)]$ satisfaz:

$$[d(f \circ G, f \circ j)] = f_*[d(G, j)] = f_*(\beta) = -\alpha \quad (\text{se } n > 1) \quad \text{ou} \quad \alpha^{-1} \quad (\text{se } n = 1).$$

Pelo Lema 4.8, obtemos:

$$[d(f \circ G, g)] = [d(f \circ G, f \circ j)] + [d(f \circ j, g)] = -\alpha + \alpha = 0 \quad (\text{para } n > 1).$$

Com uma conclusão similar para $n = 1$. Portanto, pelo Lema 4.9, $f \circ G \simeq g$ relativamente a ∂D^n . \square

Lema 4.10. Um mapa $f : X \rightarrow Y$ é uma fibração de Serre se, e somente se, para todo $n \geq 0$ e para todo diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (D^n \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I) & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{h} & \downarrow f \\ D^n \times I & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

existe um mapa $\tilde{h} : D^n \times I \rightarrow X$ que torna ambos os triângulos comutativos.

Demonstração. Para cada $n \geq 0$, existe um homeomorfismo de pares:

$$\Phi : (D^n \times I, (D^n \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I)) \rightarrow (D^n \times I, D^n \times \{0\}),$$

que indiacia o par $(D^n \times I, (D^n \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I))$ com o par mais simples $(D^n \times I, D^n \times \{0\})$. Sob esse homeomorfismo, diagramas da forma:

$$\begin{array}{ccc} (D^n \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I) & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{h} & \downarrow f \\ D^n \times I & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

são equivalentes a diagramas da forma:

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} & \xrightarrow{h'} & X \\ \downarrow i' & \nearrow \tilde{h}' & \downarrow f \\ D^n \times I & \xrightarrow{g'} & Y \end{array}$$

onde h', f, i', g' e \tilde{h}' são as versões correspondentes dos mapas sob o homeomorfismo Φ . A Proposição 4.6 implica que sempre existe um mapa $\tilde{h}' : D^n \times I \rightarrow X$ tornando o diagrama comutativo se, e somente se $f : X \rightarrow Y$ é uma fibração. Portanto, o lema segue diretamente. \square

Proposição 4.13. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma fibração e $n \geq 1$. Suponha que temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \partial D^n & \xrightarrow{h} & X \\ i \downarrow & \nearrow G & \downarrow f \\ D^n & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Se F é a fibra de f sobre algum ponto na imagem de g , e $\pi_{n-1}(F) = 0$, então existe um mapa contínuo $G : D^n \rightarrow X$ que torna ambos os triângulos comutativos, ou seja:

1. $G \circ i = h$ (o triângulo superior comuta).
2. $f \circ G = g$ (o triângulo inferior comuta).

Demonstração. Pela Proposição 4.12, existe um mapa $G : D^n \rightarrow X$ tal que $G \circ i = h$ e $f \circ G \simeq g$ relativamente a ∂D^n . Isso significa que G estende h para D^n , e $f \circ G$ é homotópico a g mantendo a borda ∂D^n fixa. Seja $H : D^n \times I \rightarrow Y$ uma homotopia de $f \circ G$ para g , relativamente a ∂D^n . A homotopia H satisfaz:

$$H(d, 0) = f(G(d)) \quad \text{e} \quad H(d, 1) = g(d) \quad \text{para todo} \quad d \in D^n.$$

Além disso, H é constante em ∂D^n , ou seja, $H(t, d) = g(d)$ para $d \in \partial D^n$ e $t \in I$. A restrição de H a $(D^n \times 0 \cap (\partial D^n \times I))$ pode ser levantada para X usando G e h :

$$H|_{D^n \times 0} = G \quad \text{e} \quad H|_{\partial D^n \times I} = h.$$

Pelo Lema 4.10, como f é uma fibração, podemos levantar a homotopia H para uma homotopia $H' : D^n \times I \rightarrow X$ tal que:

$$H'(d, 0) = G(d) \quad \text{e} \quad H'(x, t) = h(x) \quad \text{para} \quad d \in \partial D^n \quad \text{e} \quad t \in I.$$

Definimos $G' : D^n \rightarrow X$ por:

$$G'(d) = H'(d, 1) \quad \text{para todo} \quad d \in D^n.$$

Esse mapa G' satisfaz:

$$G' \circ i = h \quad \text{e} \quad f \circ G' = g.$$

Portanto, G' é o mapa que torna ambos os triângulos comutativos. \square

Proposição 4.14. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma fibração trivial. Então, para todo $n \geq 0$ e todo diagrama da forma:

$$\begin{array}{ccc} \partial D^n & \xrightarrow{h} & X \\ i \downarrow & \nearrow G & \downarrow f \\ D^n & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

existe um mapa $G : D^n \rightarrow X$ que torna o diagrama comutativo, isto é:

$$G \circ i = h \quad \text{e} \quad f \circ G = g.$$

Demonstração. Quando $n = 0$, temos $D^0 = \{\star\}$ (um único ponto) e $\partial D^0 = \emptyset$. Assim, o diagrama reduz-se a:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow G & \downarrow f \\ \{\star\} & \longrightarrow & Y \\ & g & \end{array}$$

Como $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência fraca, ela induz uma sobrejeção entre as componentes de caminho de X e Y (ou seja, $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ é sobrejetora). Logo, dado $g(\star) : \{\star\} \rightarrow Y$, existe $G(\star) : \{\star\} \rightarrow X$ tal que $f(G(\star)) = g(\star)$. Assim, o caso $n = 0$ está provado. Agora suponha $n \geq 1$, neste caso temos que diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \partial D^n & \xrightarrow{h} & X \\ i \downarrow & & \downarrow f \\ D^n & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

onde $i : \partial D^n \rightarrow D^n$ é a inclusão da borda do disco D^n . Como $f : X \rightarrow Y$ é uma fibração, podemos aplicar a Proposição 4.13. Para isso, verificamos as condições necessárias. Seja F a fibra de f sobre um ponto na imagem de g . Como f é uma equivalência fraca, os grupos de homotopia da fibra F são trivializados:

$$\pi_k(F) = 0, \quad \text{para todo } k \geq 0.$$

Em particular, para $k = n - 1$, temos $\pi_{n-1}(F) = 0$, o que satisfaz as condições da Proposição 4.13. Pela Proposição 4.12, existe um mapa contínuo $G : D^n \rightarrow X$ tal que $G \circ i = h$ e $f \circ G \simeq g$ relativamente a ∂D^n . Como f é uma fibração, podemos escolher G de modo que $f \circ G = g$ (sem necessidade de homotopia). Portanto, o mapa $G : D^n \rightarrow X$ satisfaz $G \circ i = h$ e $f \circ G = g$, tornando o diagrama comutativo. \square

4.7 O Axioma de Levantamento

Com base nos resultados apresentados anteriormente, em especial a Proposição 4.14, demonstramos que o axioma de levantamento $M4$ (veja a Definição 4.2) é satisfeito. Essa conclusão é estabelecida nos Teoremas 4.11 e 4.12.

4.7.1 Cofibrações e Fibrações Triviais

Teorema 4.11. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma fibração trivial, então f possui a propriedade de levantamento à direita com relação a todas as cofibrações.

Demonstração. Pela Proposição 4.14, $f : X \rightarrow Y$ possui a propriedade de levantamento à direita com relação a todos os elementos de I conforme definido em 4.12, I é o conjunto de cofibrações geradoras, que são mapas da forma $S^{n-1} \rightarrow D^n$ (inclusão da esfera no disco). Uma cofibração é definida como um retrato de um complexo celular relativo. Pela Proposição 4.4, se f possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todos os elementos de I , então f também possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todas as cofibrações. Como f é uma fibração e uma equivalência fraca, ela possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todas as cofibrações. \square

4.7.2 Cofibrações Triviais e Fibrações

Teorema 4.12. Se $i : A \rightarrow B$ é uma cofibração trivial, então i possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a todas as fibrações.

Demonstração. Pela Proposição 4.8, podemos fatorar $i : A \rightarrow B$ como:

$$A \xrightarrow{s} W \xrightarrow{t} B,$$

onde s é um complexo celular relativo de J -celulas, e t é uma fibração (veja a Proposição 4.6). Pela Proposição 4.11, s é simultaneamente uma cofibração e uma equivalência fraca. Como s e i são equivalências fracas, a propriedade "dois entre três" das equivalências fracas implica que t também é uma equivalência fraca. Como t é uma fibração e uma equivalência fraca, pelo Teorema 4.11, t possui a propriedade de levantamento à direita com respeito a todas as cofibrações. Em particular, i possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a t . Pelo argumento de retração (ver Proposição 4.1) implica que i é uma retração de s . Como s possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a todas as fibrações (pela Proposição 4.7), i também possui essa propriedade. Portanto, i possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a todas as fibrações. \square

Corolário 4.2. Se $i : A \rightarrow B$ é simultaneamente um CW -complexo relativo e uma equivalência fraca, e $p : X \rightarrow Y$ é uma fibração de Serre, então, para todo diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{g} & X \\
i \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\
B & \xrightarrow{p} & Y
\end{array}$$

existe um mapa $h : B \rightarrow X$ que torna ambos os triângulos comutativo, ou seja:

1. $h \circ i = g$ (o triângulo superior comuta).
2. $p \circ h = f$ (o triângulo inferior comuta).

Demonstração. Por hipótese, $i : A \rightarrow B$ é um CW -complexo relativo. Como todo CW -complexo relativo é também um complexo celular relativo (veja a Definição 4.4). Portanto, $i : A \rightarrow B$ é uma cofibração (também pela Definição 4.4). Além disso, i é uma equivalência fraca por hipótese. Por hipótese, $p : X \rightarrow Y$ é uma fibração de Serre. Pela Definição 4.4 nossas fibrações são fibrações de Serre. Pelo Teorema 4.12 afirma que, se um mapa i , é simultaneamente uma cofibração e uma equivalência fraca, então i possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito a qualquer fibração. Nesse caso, $p : X \rightarrow Y$ é uma fibração, e $i : A \rightarrow B$ é uma cofibração trivial. Portanto, podemos aplicar o Teorema 4.12. Aplicando a propriedade de levantamento à esquerda de i com respeito a p , obtemos um mapa $h : B \rightarrow X$ tal que $h \circ i = g$ e $p \circ h = f$. Isso significa que h torna ambos os triângulos do diagrama comutativos. Portanto, o mapa $h : B \rightarrow X$ satisfaz todas as condições exigidas, e o resultado segue diretamente do Teorema 4.12. \square

4.8 A prova do Teorema 4.1

Demonstração. Devemos verificar que as cinco condições da Definição 4.2 são satisfeitas para as classes de equivalências fracas, cofibrações e fibrações da Definição 4.4.

1 Axioma do Limites $M1$:

A categoria dos espaços topológicos é assumida como completa e cocompleta, contendo tanto os limites quanto os colimites para qualquer diagrama pequeno.

2 Axioma Dois de Três $M2$:

Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ mapas de espaços topológicos, com $g \circ f : X \rightarrow Z$ definido. Se dois dentre f , g ou $g \circ f$ forem equivalências fracas, então o terceiro também será uma equivalência fraca.

Primeiramente, se dois desses mapas induzem isomorfismos no conjunto de componentes de caminho, então o terceiro também o faz.

No caso em que f e g são equivalências fracas, ou g e $g \circ f$ são equivalências fracas, o resultado segue da aplicação da propriedade das três ao nível dos homomorfismos nos grupos de homotopia.

Se f e $g \circ f$ são equivalências fracas, então qualquer ponto-base em Y está na mesma componente de caminho que a imagem de f . Assim, é suficiente verificar que os grupos de

homotopia baseados na imagem de f também são isomorfismos, o que segue diretamente da propriedade das três para homomorfismos de grupos.

3 Axioma do Retração $M3$:

- Uma retração de uma equivalência fraca também é uma equivalência fraca, pois uma retração de um isomorfismo de grupos (ou de componentes de caminho) é ainda um isomorfismo.
- Um retração de uma cofibração é uma cofibração, pois uma retração de um complexo celular relativo é ele mesmo um complexo celular relativo.
- Um retração de uma fibração é uma fibração, conforme mostrado pela Proposição 4.6 e pelo Lema 4.5.

4 Axioma de Levantamento $M4$:

- Se i é uma cofibração e p é uma fibração que também é uma equivalência fraca, o resultado segue do Teorema 4.11.
- Se i é uma cofibração e também uma equivalência fraca, e p é uma fibração, então o resultado segue do Teorema 4.12.

5 Axioma de Fatoração $M5$:

- A fatoração de qualquer mapa em uma cofibração seguida de um mapa que é tanto uma fibração quanto uma equivalência fraca é garantida pela Proposição 4.10.
- A fatoração de qualquer mapa em um mapa que é tanto uma cofibração quanto uma equivalência fraca, seguida de uma fibração, é garantida pela Proposição 4.11.

Portanto, os cinco axiomas são satisfeitos, estabelecendo a estrutura de categoria modelo desejada. \square

Capítulo 5

Uma Estrutura de Categoria Modelo na Categoria de Categorias Simpliciais

Neste capítulo, construímos uma estrutura de categoria modelo na categoria de categorias simpliciais pequenas, denotada por \mathcal{SC} . As categorias simpliciais, entendidas como categorias enriquecidas sobre conjuntos simpliciais, desempenham um papel central no estudo de teorias de homotopia. Em particular, a localização simplicial de uma categoria modelo \mathcal{M} , conforme introduzida por Dwyer e Kan [5], fornece uma categoria simplicial que encapsula a informação homotópica contida em \mathcal{M} . A construção de uma estrutura de categoria modelo em \mathcal{SC} é, portanto, um passo fundamental para o estudo da teoria da homotopia das teorias de homotopia.

5.1 Contexto Histórico e Motivação

Em uma versão preliminar do livro [3], Dwyer, Hirschhorn e Kan propuseram uma estrutura de categoria modelo cofibrantemente gerada na categoria de categorias simpliciais. No entanto, como observado por Toën e Vezzosi [2], essa proposta apresentava uma inconsistência crucial: algumas das cofibrações acíclicas geradoras sugeridas não eram, de fato, equivalências fracas. Este capítulo corrige essa lacuna ao apresentar um conjunto alternativo de cofibrações acíclicas geradoras que são verdadeiras equivalências fracas. Essas cofibrações, juntamente com as cofibrações geradoras originais, permitem estabelecer a estrutura de categoria modelo desejada.

A existência dessa estrutura tem implicações significativas. Em [1], é demonstrado que ela é Quillen equivalente a outras três estruturas de categoria modelo, o que é de grande interesse tanto para a teoria da homotopia quanto para a teoria das categorias superiores. Além disso, categorias simpliciais são ferramentas essenciais em geometria algébrica homotópica, como destacado no trabalho de Toën e Vezzosi [2].

5.2 Definições Preliminares

Antes de prosseguir, é necessário estabelecer algumas definições e notações fundamentais. Uma categoria simplicial é uma categoria enriquecida sobre a categoria de conjuntos simpliciais. Dados dois objetos a e b em uma categoria simplicial \mathcal{C} , denotamos por $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ o complexo de funções, ou conjunto simplicial de mapas $a \rightarrow b$ em \mathcal{C} . Essa noção é mais restritiva do que a de um objeto simplicial na categoria de categorias, pois

exige que todos os operadores simpliciais induzam o mapa identidade nos objetos das categorias envolvidas [4, 2.1].

Assumiremos que todas as categorias simpliciais consideradas são pequenas, ou seja, possuem um conjunto de objetos. Um functor entre duas categorias simpliciais $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste em um mapa entre os conjuntos de objetos $f : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ e mapas entre os complexos de funções $f : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(fa, fb)$, compatíveis com a composição. A categoria \mathcal{SC} , cujos objetos são categorias simpliciais pequenas e cujos morfismos são funtores entre elas, será o foco principal deste capítulo.

5.2.1 Estrutura e Terminologias

Uma estrutura de categoria modelo em uma categoria \mathcal{C} consiste na escolha de três classes de morfismos: fibrações, cofibrações e equivalências fracas. Um morfismo que é simultaneamente uma (co)fibração e uma equivalência fraca é denominado (co)fibração acíclica. Essa estrutura deve satisfazer cinco axiomas, conforme detalhado em [10, 3.3].

Para definir essas classes em \mathcal{SC} , introduzimos algumas notações adicionais. Dada uma categoria simplicial \mathcal{C} , denotamos por $\pi_0\mathcal{C}$ a categoria dos componentes de \mathcal{C} , cujos objetos são os mesmos que os de \mathcal{C} e cujos morfismos são dados por:

$$\mathbf{Hom}_{\pi_0\mathcal{C}}(a, b) = \pi_0\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b).$$

Se $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um morfismo de categorias simpliciais, denotamos por $\pi_0f : \pi_0\mathcal{C} \rightarrow \pi_0\mathcal{D}$ o morfismo induzido entre as categorias dos componentes.

Um morfismo $e \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)_0$ é uma equivalência homotópica se ele se torna um isomorfismo em $\pi_0\mathcal{C}$.

5.2.2 Classes de Morfismos em \mathcal{SC}

As três classes de morfismos em \mathcal{SC} são definidas da seguinte forma:

1. **Equivalências Fracas:** Um morfismo $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma equivalência fraca se satisfaz as seguintes condições:
 - **(W1)** Para quaisquer objetos a_1 e a_2 em \mathcal{C} , o morfismo $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(a_1, a_2) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(fa_1, fa_2)$ é uma equivalência fraca de conjuntos simpliciais.
 - **(W2)** O funtor induzido $\pi_0f : \pi_0\mathcal{C} \rightarrow \pi_0\mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias.
2. **Fibrações:** Um morfismo $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma fibração se satisfaz as seguintes condições:
 - **(F1)** Para quaisquer objetos a_1 e a_2 em \mathcal{C} , o morfismo $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(a_1, a_2) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(fa_1, fa_2)$ é uma fibração de conjuntos simpliciais.
 - **(F2)** Para qualquer objeto $a_1 \in \mathcal{C}$, objeto $b \in \mathcal{D}$, e equivalência homotópica $e : fa_1 \rightarrow b$ em \mathcal{D} , existe um objeto $a_2 \in \mathcal{C}$ e uma equivalência homotópica $d : a_1 \rightarrow a_2$ em \mathcal{C} tal que $f(d) = e$.
3. **Cofibrações:** Um morfismo é uma cofibração se possui a propriedade de levantamento à esquerda em relação a todos os morfismos que são simultaneamente fibrações e equivalências fracas.

5.3 Resultado Principal

O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema:

Teorema 5.1. Existe uma estrutura de categoria modelo na categoria \mathcal{SC} de todas as categorias simpliciais pequenas, com as equivalências fracas, fibrações e cofibrações definidas acima. Além disso, essa estrutura é cofibrantemente gerada.

A demonstração deste teorema será desenvolvida ao longo do capítulo, com base em uma proposição geral sobre categorias modelo cofibrantemente geradas, conforme apresentada por Hirschhorn [9, 11.3.1].

Proposição 5.1. Seja \mathcal{M} uma categoria com todos os limites e colimites pequenos e classes especificadas de equivalências fracas e fibrações. Defina um mapa como uma cofibração se ele possui a propriedade de levantamento à esquerda em relação às fibrações acíclicas. Suponha que:

1. A classe de equivalências fracas é fechada por retrações e satisfaz a propriedade "dois de três" [6, 3.3].
2. Existem conjuntos C e A de mapas em \mathcal{M} que satisfazem as seguintes propriedades:
 - (a) Tanto C quanto A permitem o argumento do objeto pequeno [9, 10.5.15];
 - (b) Um mapa é uma fibração se, e somente se, possui a propriedade de levantamento à direita em relação aos mapas em A ;
 - (c) Um mapa é uma fibração acíclica se, e somente se, possui a propriedade de levantamento à direita em relação aos mapas em C ;
 - (d) Um mapa é uma cofibração acíclica se, e somente se, possui a propriedade de levantamento à esquerda em relação às fibrações.

Então, existe uma estrutura de categoria modelo cofibradamente gerada em \mathcal{M} , na qual C é um conjunto de cofibrações geradoras e A é um conjunto de cofibrações acíclicas geradoras.

5.3.1 Conjuntos Simpliciais e a Estrutura de Categoria Modelo em \mathbf{SSets}

Seja \mathbf{SSets} a categoria de conjuntos simpliciais. Recorde que, em \mathbf{SSets} , para qualquer $n \geq 0$, temos:

- O n -simplexo $\Delta[n]$,
- Sua borda $\dot{\Delta}[n]$, e
- Para todo $0 \leq k \leq n$, $V[n, k]$, que é $\dot{\Delta}[n]$ com a k -ésima face removida.

Dado um conjunto simplicial X , denotamos por $|X|$ sua realização geométrica. A estrutura padrão de categoria modelo em \mathbf{SSets} é cofibradamente gerada; as cofibrações geradoras são os mapas $\dot{\Delta}[n] \rightarrow \Delta[n]$, para $n \geq 0$, e as cofibrações acíclicas geradoras são os mapas $V[n, k] \rightarrow \Delta[n]$, para $n \geq 1$ e $0 \leq k \leq n$. Mais detalhes sobre conjuntos simpliciais e a estrutura de categoria modelo sobre eles podem ser encontrados em [10].

Existe um funtor:

$$U : \mathbf{SSets} \rightarrow \mathcal{SC}, \quad (5.1)$$

que leva um conjunto simplicial X à categoria com objetos x e y , e com $\text{Hom}(x, y) = X$, mas sem outros morfismos não identitários.

Chamaremos um conjunto simplicial K fracamente contrátil se todos os grupos de homotopia de $|K|$ forem triviais.

Referimo-nos à estrutura de categoria modelo na categoria de categorias simpliciais com um conjunto fixo \mathcal{O} de objetos, denotada por $\mathcal{SC}_{\mathcal{O}}$, onde todos os morfismos induzem o mapa identidade nos objetos, conforme definida por Dwyer e Kan em [5]. As equivalências fracas são os mapas que satisfazem a condição **W1**, e as fibrações são os mapas que satisfazem a condição **F1**.

5.3.2 Cofibrações e Cofibrações Acíclicas Geradoras

Podemos então definir nossas cofibrações geradoras e cofibrações acíclicas geradoras da seguinte forma:

As cofibrações geradoras são os mapas:

- **(C1)** $U\dot{\Delta}[n] \rightarrow U\Delta[n]$ para $n \geq 0$; e
- **(C2)** $\varphi \rightarrow \{x\}$, onde φ é a categoria simplicial sem objetos e $\{x\}$ denota a categoria simplicial com um único objeto x e sem morfismos não identitários.

As cofibrações acíclicas geradoras são:

- **(A1)** os mapas $UV[n, k] \rightarrow U\Delta[n]$ para $n \geq 1$.
- **(A2)** mapas de inclusão $\{x\} \rightarrow H$ que são DK -equivalências, onde $\{x\}$ é como definido em **C2**, e H é um conjunto de representantes para as classes de isomorfismo de categorias simpliciais com dois objetos x e y , complexos funcionais fracamente contráteis, e apenas um número contável de simplexes em cada complexo funcional. Além disso, exigimos que o mapa de inclusão $\{x\} \amalg \{y\} \rightarrow H$ seja uma cofibração em $\mathcal{SC}_{\{x, y\}}$.

5.3.3 Propriedades da Estrutura de Categoria Modelo

Essa estrutura de categoria modelo é própria à direita. Lembre-se de que uma categoria modelo é própria à direita se todo pullback de uma equivalência fraca ao longo de uma fibração é uma equivalência fraca. Seria útil saber se essa estrutura de categoria modelo também é própria à esquerda, ou seja, se todo pushout de uma equivalência fraca ao longo de uma cofibração é uma equivalência fraca. Atualmente, não sabemos se essa condição é satisfeita para \mathcal{SC} . Também seria interessante verificar se \mathcal{SC} possui a estrutura adicional de uma categoria modelo simplicial, mas até o momento não encontramos tal estrutura.

A ideia por trás do conjunto **A2** de cofibrações acíclicas geradoras é o fato de que duas categorias simpliciais podem ter uma equivalência fraca entre elas que não seja uma bijeção nos objetos, assim como duas categorias podem ser equivalentes mesmo que não possuam os mesmos objetos. Apenas exigimos que nossas equivalências fracas sejam sobrejetivas nas classes de equivalência dos objetos. Assim, devemos considerar cofibrações acíclicas para as quais os conjuntos de objetos não sejam isomorfos. A exigência de que existam apenas um número contável de simplexes é incluída para garantir que tenhamos um conjunto, em vez de uma classe própria de mapas.

5.4 As Cofibras Acíclicas Geradoras

Nesta seção, mostraremos que um mapa em \mathcal{SC} satisfaz as propriedades **F1** e **F2** se, e somente se, ele possui a propriedade de levantamento à direita em relação aos mapas em **A1** e **A2**. Começamos apresentando alguns fatos sobre a estrutura de categoria modelo de Dwyer-Kan $\mathcal{SC}_{\mathcal{O}}$ na categoria de categorias simpliciais com um conjunto fixo \mathcal{O} de objetos.

As equivalências fracas são os mapas que satisfazem a propriedade **W1**, e as fibrações são os mapas que satisfazem a propriedade **F1**. As cofibrações são os mapas que possuem a propriedade de levantamento à esquerda em relação às fibrações acíclicas. Contudo, gostaríamos de uma descrição mais explícita das cofibrações nesta categoria, para a qual precisamos de algumas definições. Se \mathcal{C} é uma categoria simplicial, então seja \mathcal{C}_k a categoria (discreta) cujos morfismos são os k -simplexos dos morfismos de \mathcal{C} .

Definição 5.1. [5, 7.4] Um mapa $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ em $\mathcal{SC}_{\mathcal{O}}$ é livre se:

1. O mapa f é um monomorfismo;
2. Se $*$ denota o produto livre, então, em cada dimensão simplicial k , a categoria \mathcal{D}_k admite uma única fatoração livre $\mathcal{D}_k = f(\mathcal{C}_k) * \mathcal{F}_k$, onde \mathcal{F}_k é uma categoria livre; e
3. Para cada $k \geq 0$, todas as degenerações dos geradores de \mathcal{F}_k são geradores de \mathcal{F}_{k+1} .

Definição 5.2. [5, 7.5] Um mapa $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ de categorias simpliciais é uma retração forte de um mapa $f' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}'$ se existir um diagrama comutativo da forma:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{C} & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & & \mathcal{D}' \\
 & \swarrow & \searrow \\
 \mathcal{D} & & \mathcal{D} \\
 & \xrightarrow{id} &
 \end{array}$$

Com isso, temos que (conforme seção (7.6) em [5]), as cofibrações de $\mathcal{SC}_{\mathcal{O}}$ são precisamente as retrações fortes de mapas livres. Em particular, uma categoria simplicial cofibrante é uma retração de uma categoria livre.

Com base nesses fatos, prosseguimos com a discussão sobre as cofibrações acíclicas geradoras.

Recordemos em (5.1) que $U : \mathbf{SSets} \rightarrow \mathcal{SC}$ é o functor que leva conjuntos simpliciais a categorias simpliciais. Consideramos primeiro o conjunto **A1**, de mapas $UV[n, k] \rightarrow U\Delta[n]$ para $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$. Usando a estrutura de categoria modelo em conjuntos simpliciais, vemos que um mapa de categorias simpliciais possui a propriedade de levantamento à direita em relação aos mapas em **A1** se, e somente se, satisfaz a propriedade **F1**.

Agora, consideremos os mapas em **A2**, que também gostaríamos que fossem cofibrações acíclicas geradoras, e mostraremos que os mapas com a propriedade de levantamento à

direita em relação aos mapas em **A1** e **A2** são precisamente os mapas que satisfazem as condições **F1** e **F2**. A demonstração dessa afirmação ocupará o restante desta seção, e trataremos cada implicação separadamente.

Proposição 5.2. Seja $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um mapa de categorias simpliciais que possui a propriedade de levantamento à direita em relação aos mapas em **A1** e **A2**. Então, f satisfaz a condição **F2**.

Antes de provar essa proposição, enunciemos o seguinte lema.

Lema 5.2. Seja \mathcal{F} uma categoria simplicial (discreta) com conjunto de objetos $\{x, y\}$ e um único morfismo não identidade $g : x \rightarrow y$. Seja \mathcal{E}' uma categoria simplicial também com conjunto de objetos $\{x, y\}$. Seja $i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}'$ um mapa que envia g para uma equivalência homotópica em $\text{Hom}_{\mathcal{E}'}(x, y)$. Este mapa i pode ser fatorado como uma composição $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}'$ de forma que o mapa composto $\{x\} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ seja isomorfo a um mapa em **A2**.

A prova deste lema será apresentada na Seção *X*. Agora, provamos a Proposição 5.2 assumindo o Lema 5.2.

Prova da Proposição 5.2. Dados objetos $a_1 \in \mathcal{C}$ e $b \in \mathcal{D}$, queremos mostrar que uma equivalência homotópica $e : f(a_1) \rightarrow b$ em \mathcal{D} pode ser elevada a uma equivalência homotópica $d : a_1 \rightarrow a_2$ para algum $a_2 \in \mathcal{C}$, tal que $f(a_2) = b$ e $f(d) = e$. Começamos considerando os objetos $a = f(a_1)$ e b em \mathcal{D} .

Caso 1: $a \neq b$.

Definimos \mathcal{E}' como a subcategoria simplicial plena (completa) de \mathcal{D} com objetos $a = f(a_1)$ e b . Seja \mathcal{F} uma categoria simplicial com objetos a e b e um único morfismo não identidade $g : a \rightarrow b$. Seja $i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}'$ o mapa que envia g para a equivalência homotópica $e : a \rightarrow b$ em $\text{Hom}_{\mathcal{E}'}(a, b)$. Pelo Lema 5.2, podemos fatorar o mapa i como:

$$i : \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{H} \xrightarrow{k} \mathcal{E}'$$

de forma que o mapa composto $\{a_1\} \rightarrow \{a\} \rightarrow \mathcal{H}$ seja isomorfo a um mapa em **A2**. Como $a = f(a_1)$, o composto $\{a_1\} \rightarrow \{a\} \xrightarrow{j} \mathcal{H}$ também é isomorfo a um mapa em **A2**.

Considere agora a composição $\mathcal{H} \xrightarrow{k} \mathcal{E}' \xrightarrow{\iota} \mathcal{D}$, onde $\iota : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{D}$ é o mapa de inclusão. Esses mapas se ajustam em um diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \{a_1\} & \xrightarrow{u} & \mathcal{C} \\ \downarrow v & \nearrow h & \downarrow f \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{w} & \mathcal{D} \end{array}$$

onde u é o mapa original, v é isomorfo a um mapa em **A2** e w é a composição dos mapas k e ι . A existência do levantamento $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$ é garantida pela hipótese de que $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ possui a propriedade de elevação à direita com respeito a todos os mapas em **A2**.

Compondo o mapa $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ com o levantamento h , obtemos um mapa $d : a_1 \rightarrow a_2$ em \mathcal{C} , tal que $f(d) = e$. Como todos os morfismos em \mathcal{H} são equivalências homotópicas, segue que d também é uma equivalência homotópica.

Caso 2: $a = b$.

Defina \mathcal{E}' como a categoria simplicial com dois objetos a e a' , onde cada complexo funcional de \mathcal{E}' é o conjunto simplicial $\text{Hom}_{\mathcal{E}'}(a, a)$, e as composições são definidas como em \mathcal{D} . Definimos um mapa $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{D}$ que envia ambos os objetos de \mathcal{E}' para a em \mathcal{D} , e é a identidade nos complexos funcionais. Com esta nova definição de \mathcal{E}' , o argumento procede de maneira análoga ao caso anterior, garantindo a existência de $d : a_1 \rightarrow a_2$ em \mathcal{C} , com $f(d) = e$, completando a prova. \square

Vamos agora provar o inverso.

Proposição 5.3. Suponha que $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ seja um mapa de categorias simpliciais que satisfaz as propriedades **F1** e **F2**. Então, f possui a propriedade de levantamento à direita com respeito aos mapas em **A2**.

Antes de provar esta proposição, apresentamos o seguinte lema.

Lema 5.3. Suponha que $\alpha' : A \rightarrow B$ seja uma cofibração, $\beta : C \rightarrow D$ seja uma fibração, e $\gamma' : B' \rightarrow B$ seja uma equivalência fraca em uma categoria modelo \mathcal{M} . Então, no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xlongequal{\quad} & A & \xrightarrow{\xi} & C \\
 \alpha' \downarrow & & \alpha \downarrow \psi' & \nearrow \gamma & \downarrow f \\
 B' & \xrightarrow{\gamma'} & B & \xrightarrow{\delta} & D
 \end{array}$$

existe um levantamento $\phi : B \rightarrow C$ se, e somente se, existe um levantamento $\psi' : B' \rightarrow C$.

Demonstração. (\Rightarrow): Suponha que existe um levantamento $\phi : B \rightarrow C$. Definimos $\psi' : B' \rightarrow C$ como a composição $\psi' = \phi \circ \gamma'$. Como $\gamma' : B' \rightarrow B$ é uma equivalência fraca e $\phi : B \rightarrow C$ é um levantamento, a comutatividade do diagrama é preservada, e ψ' satisfaz as condições necessárias. Portanto, a existência de ϕ implica a existência de ψ' .

(\Leftarrow): Suponha que existe um levantamento $\psi' : B' \rightarrow C$. Como $\gamma' : B' \rightarrow B$ é uma equivalência fraca, podemos fatorá-la da seguinte forma:

$$\gamma' : B' \xrightarrow{\gamma_1} B'' \xrightarrow{\gamma_2} B$$

onde $\gamma_1 : B' \rightarrow B''$ é uma cofibração trivial e $\gamma_2 : B'' \rightarrow B$ é uma fibração trivial. Como $\alpha : A \rightarrow B$ é uma cofibração e $\gamma_2 : B'' \rightarrow B$ é uma fibração, então no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\gamma_1} & B'' \\
 \alpha \downarrow & & & \nearrow \lambda & \downarrow \gamma_2 \\
 B & \xlongequal{\quad} & B & & B
 \end{array}$$

existe um levantamento $\lambda : B \rightarrow B''$ tal que $\lambda \circ \alpha = \gamma_1 \circ \alpha'$ e $\gamma_2 \circ \lambda = id_B$.

Por outro lado, como $\gamma_1 : B' \rightarrow B''$ é uma cofibração e $\beta : C \rightarrow D$, então no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 B' & \xrightarrow{\psi} & C \\
 \gamma_1 \downarrow & \nearrow \mu & \downarrow \beta \\
 B'' & \xrightarrow{\gamma_2} B \xrightarrow{\delta} & D
 \end{array}$$

existe um levantamento $\mu : B'' \rightarrow C$ que torna o diagrama comuta, ou seja, $\mu \circ \gamma_1 = \psi$ e $\beta \circ \mu = \delta \circ \gamma_2$.

Definimos $\phi : B \rightarrow C$ como a composição $\phi = \mu \circ \lambda$. Assim, temos

$$\psi' = (\mu \circ \lambda) \circ \gamma = \mu \circ (\lambda \circ \gamma) = \mu \circ \gamma_1 = \psi'.$$

Logo, a comutatividade do diagrama é preservada, pois ϕ é construído a partir de levantamentos que respeitam a estrutura da categoria modelo. Portanto, a existência de $\psi : B' \rightarrow C$ implica a existência de $\phi : B \rightarrow C$. Concluimos que ϕ existe se, e somente se, ψ existe. \square

Prova da Proposição 5.3: Precisamos mostrar que, para qualquer diagrama da forma:

$$\begin{array}{ccc}
 \{x\} & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{C} \\
 \beta_0 \downarrow & \nearrow \gamma_0 & \downarrow f \\
 \mathcal{H} & \xrightarrow{\beta_1} & \mathcal{D}
 \end{array}$$

onde $\beta_0 : \{x\} \rightarrow \mathcal{H}$ é um mapa em **A2**, existe um levantamento $\gamma_0 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $f \circ \gamma_0 = \beta_1$.

Dado um objeto $a_1 \in \mathcal{C}$ e uma equivalência homotópica $e : a = f(a_1) \rightarrow b$ em \mathcal{D} , a propriedade **F2** de f garante que existe um objeto $a_2 \in \mathcal{C}$ e uma equivalência homotópica $d : a_1 \rightarrow a_2$ tal que $f(d) = e$. Seja $g : x \rightarrow y$ uma equivalência homotópica em \mathcal{H} . Definimos \mathcal{F} como a subcategoria simplicial de \mathcal{H} consistindo dos objetos x e y e um único morfismo g não identidade. Considere o mapa composto $\beta_0 : \{x\} \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta_2} \mathcal{H}$. O diagrama correspondente é:

$$\begin{array}{ccc}
\{x\} & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{C} \\
\alpha_1 \downarrow & \nearrow \gamma_1 & \downarrow f \\
\mathcal{F} & & \mathcal{D} \\
\beta_2 \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H} & \xrightarrow{\beta_1} & \mathcal{D}
\end{array}$$

onde α_1 é a inclusão de $\{x\}$ em \mathcal{F} , β_2 é a inclusão de \mathcal{F} em \mathcal{H} . Como o mapa $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{D}$ por meio de \mathcal{H} consiste em equivalências homotópicas, a imagem de g em \mathcal{D} é uma equivalência homotópica. Assim, a existência do levantamento $\gamma_1 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ no diagrama acima decorre do fato de que o mapa f satisfaz a propriedade **F2**. Agora, precisamos mostrar que o restante da categoria simplicial \mathcal{H} pode ser "levantado" para \mathcal{C} no diagrama original.

Caso geral $a \neq b$:

Suponha que $a \neq b$, ou seja, $a_1 \neq a_2$, onde $a_1, a_2 \in \mathcal{C}$. Definimos \mathcal{C}' como a subcategoria simplicial de \mathcal{C} gerada pelos a_1 e a_2 , renomeados como x e y . Assim, denote \mathcal{C}' isomorfa a uma categoria simplicial com objetos $\{x, y\}$. Analogamente, definimos \mathcal{D}' como sendo a subcategoria simplicial de \mathcal{D} gerada pelos objetos x e y . Trabalharemos agora com as categorias \mathcal{C}' e \mathcal{D}' que têm objetos fixos $\{x, y\}$, permitindo operar no contexto da categoria $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$ de categorias simpliciais com conjunto fixo de objetos $\{x, y\}$.

Construímos a categoria \mathcal{E} como o pullback no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E} & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{C}' \\
\beta_3 \downarrow & & \downarrow \delta_1 \\
\mathcal{H} & \xrightarrow{\beta_4} & \mathcal{D}'
\end{array}$$

Observe que o mapa $\delta_1 : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}'$ ainda é uma fibração em \mathcal{SC} , e de fato é uma fibração em $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$. O mapa $\beta_3 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$ também é uma fibração em $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$ (conforme seção (3.14) [6]).

Pelo Lema 5.2 podemos fatorar o mapa $\alpha_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ como $\alpha_2 : \mathcal{F} \xrightarrow{\gamma_2} \mathcal{H}' \xrightarrow{\beta_5} \mathcal{E}$, onde $\gamma_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}'$ é uma cofibração acíclica e $\beta_5 : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{E}$ é uma fibração. Note que \mathcal{H}' é uma categoria simplicial tal que o mapa composto $\{x\} \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F} \xrightarrow{\gamma_2} \mathcal{H}'$ é isomorfo a um mapa em **A2**. Além disso, o mapa de composição

$$\beta : \mathcal{H}' \xrightarrow{\beta_5} \mathcal{E} \xrightarrow{\beta_2} \mathcal{H}$$

onde $\beta : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ é uma equivalência fraca em $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$, uma vez que todos os complexos de funções de \mathcal{H} e \mathcal{H}' são fracamente contráteis. Assim, consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{id} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha_2} & \mathcal{E} \\
 \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \beta_2 & \nearrow \beta_5 & \downarrow \alpha_3 \\
 \mathcal{H}' & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H} & \xrightarrow{\beta_1} & \mathcal{D} \\
 & & & \nearrow \gamma_3 &
 \end{array}$$

Como o mapa β é uma equivalência fraca, o mapa $\alpha_3 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma fibração e o mapa $\beta_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ é uma cofibração. Logo, segue pelo Lema 5.3, que existe o levantamento $\gamma_3 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}$ como desejado.

Caso particular $a = b$:

Quando $a = b$, as categorias simpliciais \mathcal{D}' (e possivelmente \mathcal{C}') possuem apenas um objeto, denotado por x , pois a e b colapsam em um único ponto em \mathcal{D}' e \mathcal{C}' . Nesse caso, definimos uma nova categoria simplicial \mathcal{D}'' com dois objetos x e y , onde o complexo de funções é $\text{Hom}_{\mathcal{D}''}(x, x)$ é igual a $\text{Hom}_{\mathcal{D}'}(x, x)$. Esse procedimento replica o argumento usado na Proposição 5.2. Podemos então fatorar o mapa $q : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}'$ através do objeto \mathcal{D}'' :

$$q : \mathcal{H} \xrightarrow{q''} \mathcal{D}'' \xrightarrow{q'} \mathcal{D}'$$

onde $q'' : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}''$ é uma fibração assumida pela construção da categoria modelo $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$. O mapa $q' : \mathcal{D}'' \rightarrow \mathcal{D}'$ é definido como os objetos $q'(x) = q'(y) = a$ e q' é a identidade nos complexos $\text{Hom}_{\mathcal{D}''}(x, x)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{D}''}(y, y)$. De maneira análoga, se \mathcal{C}' possui apenas um objeto, construímos a categoria simplicial \mathcal{C}'' com dois objetos x e y , onde $\text{Hom}_{\mathcal{C}''}(x, x) = \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(x, x)$. O mapa $v : \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C}'$ também é identidade nos complexos de funções. Agora, consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{t} & \mathcal{C}'' & \xrightarrow{v} & \mathcal{C}' \\
 \downarrow \beta_2 & & \downarrow f'' & \nearrow k & \downarrow f' \\
 \mathcal{H} & \xrightarrow{q''} & \mathcal{D}'' & \xrightarrow{q'} & \mathcal{D}' \\
 & & & \nearrow k' &
 \end{array}$$

onde $t : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}''$ é uma cofibração, pois \mathcal{F} é uma subcategoria gerada por x e y e a inclusão é livre, o mapa $q'' : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}''$ é uma fibração assumida pela construção da categoria modelo $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$ em [6], e $f' : \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{D}''$ é uma equivalência fraca, pois \mathcal{C}'' e \mathcal{D}'' têm a mesma estrutura simplicial e os mesmos complexos de funções. Portanto, pelo Lema 5.3, existe um levantamento $k' : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}''$ tal que $f'' \circ k' = q''$. A existência do levantamento k' implica que há um mapa $q'' : \mathcal{H} \xrightarrow{k'} \mathcal{C}'' \xrightarrow{v} \mathcal{D}''$ que comuta. A composição $\mathcal{H} \xrightarrow{k'} \mathcal{C}'' \xrightarrow{v} \mathcal{C}'$ fornece o levantamento $k : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}'$ tal que $v \circ k' = k$ \square

5.5 Estrutura de Categoria Modelo

Para demonstrar que a estrutura de categoria modelo proposta existe, é necessário mostrar que nossas definições são compatíveis entre si. Em particular, precisamos provar que os morfismos com a propriedade de levantamento à esquerda em relação às fibrações são exatamente as cofibrações acíclicas, e que os morfismos com a propriedade de levantamento à direita em relação às cofibrações geradoras são precisamente os mapas que são fibrações e equivalências fracas. Antes de provar essas afirmações, entretanto, verificaremos que os três primeiros axiomas de categoria modelo são satisfeitos em \mathcal{SC} .

Proposição 5.4. A categoria \mathcal{SC} possui todos os limites e colimites finitos, e sua classe de equivalências fracas é fechada sob retrações e satisfaz a propriedade “dois de três”.

Demonstração. Pode-se demonstrar que a categoria de todas as categorias simpliciais possui todos os coprodutos e coequalizadores e, portanto, todos os colimites finitos, bem como todos os produtos e equalizadores, e, conseqüentemente, todos os limites finitos. Para provar a existência de coequalizadores, por exemplo, utilizamos a existência de coequalizadores para conjuntos (nos objetos) e conjuntos simpliciais (nos morfismos). As duas propriedades para a classe de equivalências fracas seguem como de forma usual, como, por exemplo, em [9, 8.10]. \square

Inicialmente, consideremos os conjuntos **C1** e **C2**. Suponha que temos um mapa $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, o qual é uma fibração e uma equivalência fraca. Utilizando a categoria modelo de conjuntos simpliciais, podemos observar que um mapa satisfaz as condições **F1** e **W1** se, e somente se, ele possui a propriedade de levantamento à direita em relação aos mapas $U\hat{\Delta}[n] \rightarrow U\Delta[n]$, para $n \geq 0$, onde U é o funtor (5.1) dos conjuntos simpliciais para categorias simpliciais.

Contudo, os mapas $U\hat{\Delta}[n] \rightarrow U\Delta[n]$ geram apenas aquelas cofibras entre categorias simpliciais com o mesmo número de objetos, uma condição que não exigimos para nossas cofibras de categorias simpliciais. Portanto, incluímos como uma cofibra geradora o mapa $i_{\varphi, x} : \varphi \rightarrow \{x\}$ da categoria simplicial sem objetos (φ) para a categoria simplicial com um único objeto x e sem morfismos não-identitários. Em outras palavras, estamos incluindo a adição de um objeto como uma cofibra.

Proposição 5.5. Um mapa $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ em \mathcal{SC} é uma fibração e uma equivalência fraca se, e somente se, possui a propriedade de levantamento à direita com respeito aos mapas de **C1** e **C2**.

Demonstração. Suponha inicialmente que $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ seja simultaneamente uma fibração e uma equivalência fraca. Pelas condições **F1** e **W1**, o mapa

$$\phi_{\mathcal{C}} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(f(a), f(b))$$

é uma fibração acíclica de conjuntos simpliciais para quaisquer objetos a e b em \mathcal{C} . Em outras palavras, existe um levantamento no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\dot{\Delta}[n] & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) \\
\downarrow \beta & \nearrow \psi & \downarrow \phi_{\mathcal{C}} \\
\Delta[n] & \xrightarrow{\gamma} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(f(a), f(b))
\end{array}$$

onde α é a inclusão da borda do n -simplexo no complexo funcional de \mathcal{C} , $\phi_{\mathcal{C}}$ é o mapa induzido pelo morfismo f , β é o mapa de inclusão do bordo do n -simplexo no n -simplexo completo, γ é o mapa que descreve como o n -simplexo completo é mapeado no complexo funcional e o levantamento ψ garante que o diagrama comute.

No entanto, ter este levantamento é equivalente a ter um levantamento no diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
U\dot{\Delta}[n] & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{C} \\
\downarrow \beta' & \nearrow \psi' & \downarrow f \\
U\Delta[n] & \xrightarrow{\gamma'} & \mathcal{D}
\end{array}$$

onde o mapa α' envia a borda do n -simplexo para a categoria simplicial \mathcal{C} usando o funtor U , f é o mapa entre as categorias simpliciais, β' é o mapa que transforma a borda do n -simplexo em seu correspondente n -simplexo completo no contexto de categorias simpliciais, via o funtor U , γ' este mapa aplica o n -simplexo completo na categoria simplicial \mathcal{D} usando o funtor U e ψ' é o levantamento que garante a comutatividade do diagrama, note que em que os objetos x e y de $U\dot{\Delta}[n]$ mapeiam para a e b em \mathcal{C} , de maneira análoga para $U\Delta[n]$ e \mathcal{D} . Assim, f possui a propriedade de levantamento à direita com respeito aos mapas em **C1**.

Resta mostrar que f possui a propriedade de levantamento à direita em relação ao mapa $i_{\{\varphi, x\}} : \varphi \rightarrow x$. Este mapa equivale a f ser sobrejetor em objetos. A sobrejetividade em classes de equivalência homotópicas de objetos decorre da condição **W2**. Suponha que $e : a \rightarrow b$ seja um isomorfismo em \mathcal{D} , e que exista um objeto a_1 em \mathcal{C} tal que $fa_1 = a$. Como e é uma equivalência homotópica, pela condição **F2**, existe uma equivalência homotópica $d : a_1 \rightarrow a_2$ em \mathcal{C} tal que $fd = e$. Em particular, a_2 é mapeado para b por f .

Agora, suponha que f possui a propriedade de levantamento à direita em relação aos mapas de **C1** e **C2**. Usando a estrutura de categoria modelo sobre conjuntos simpliciais, temos que o mapa

$$\phi_{\mathcal{C}} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(f(a), f(b))$$

é tanto uma fibração quanto uma equivalência fraca, satisfazendo **F1** e **W1**. Assim, segue que

$$\pi_0(\phi_{\mathcal{C}}) : \text{Hom}_{\pi_0\mathcal{C}}(a, b) \rightarrow \text{Hom}_{\pi_0\mathcal{D}}(f(a), f(b))$$

é um isomorfismo. Além disso, a propriedade de levantamento à direita em relação ao mapa $i_{\varphi, x} : \varphi \rightarrow \{x\}$ equivale a f ser sobrejetor em objetos. Estas duas observações implicam que $\pi_0 f : \pi_0\mathcal{C} \rightarrow \pi_0\mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias, provando **W2**.

Por fim, resta mostrar que f satisfaz a condição **F2**. Pela Proposição 5.2 e pelo fato de que satisfazer **F1** é equivalente a possuir a propriedade de levantamento à direita em relação aos mapas de **A1**, basta mostrar que f possui a propriedade de levantamento à direita em relação aos mapas de **A2**. No entanto, um mapa $\{x\} \rightarrow \mathcal{H}$ em **A2** pode ser escrito como uma composição (possivelmente infinita) de um pushout ao longo de $i_{\varphi,x}$, seguido por pushouts ao longo de mapas da forma $U\hat{\Delta}[n] \rightarrow U\Delta[n]$. Como f possui a propriedade de levantamento à direita em relação a todos esses mapas, segue que f também satisfaz a condição **F2**. \square

Proposição 5.6. Um mapa em \mathcal{SC} é uma cofibração acíclica se e somente se ele tem a propriedade de elevação à esquerda com relação às fibrações.

A prova exigirá o uso do seguinte lema:

Lema 5.4. Seja $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um mapa em **A1** ou **A2**, e $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ um mapa qualquer em \mathcal{SC} . Então, no diagrama pushout:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{i} & \mathcal{C} \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{j} & \mathcal{D} \end{array}$$

o mapa $f' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma equivalência fraca.

Demonstração. Caso 1: Suponha inicialmente que o mapa $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ pertence a **A2**. Seja \mathcal{O} o conjunto de objetos de \mathcal{C} . Defina $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \setminus \{x\}$ onde $x \in \mathcal{O}$ é um objeto mapeado por $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$. Para simplificar a notação, assumimos que $i(x) = x$. Sejam, x e y objetos de \mathcal{H} . Denotamos por \mathcal{O}' a categoria simplicial com conjunto de objetos \mathcal{O}' e nenhum morfismo de não identidade. Considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} = \mathcal{O} \amalg \{y\} & \xrightarrow{u} & \mathcal{C} \amalg \{y\} = \mathcal{C}' \\ h \downarrow & & \downarrow p' \\ \mathcal{H}' = \mathcal{O}' \amalg \mathcal{H} & \xrightarrow{v} & \mathcal{D} \end{array}$$

note que \mathcal{D} também é o pushout deste diagrama. Como \mathcal{X} é o conjunto de objetos das categorias envolvidas, $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}'$ é uma cofibração em $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$.

O mapa $u : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}'$ pode ser fatorado como:

$$u : \mathcal{X} \xrightarrow{u_1} \mathcal{C}'' \xrightarrow{u_2} \mathcal{C}'$$

onde $u_1 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}''$ é uma cofibração e $u_2 : \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C}'$ é uma fibração acíclica.

Pela propriedade de $\mathcal{SC}_{\mathcal{X}}$ ser uma categoria modelo própria [5, 7.3], segue de [6, 13.5.4] que os pushouts de cada linha no diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H}' & \xleftarrow{h} & \mathcal{X} & \xrightarrow{u} & \mathcal{C}' \\
\uparrow id & & \uparrow id & & \uparrow u_2 \\
\mathcal{H}' & \xleftarrow{h} & \mathcal{X} & \xrightarrow{u_1} & \mathcal{C}'' \\
\downarrow r & & \downarrow id & & \downarrow id \\
\pi_0 \mathcal{H}' & \xleftarrow{\pi(h)} & \mathcal{X} & \xrightarrow{u_1} & \mathcal{C}''
\end{array}$$

são fracamente equivalentes entre si. Em particular, o pushout da linha inferior é fracamente equivalente a \mathcal{D} . Resta mostrar que há uma equivalência fraca de pushouts das linhas no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_0 \mathcal{H}' & \xleftarrow{\pi(h)} & \mathcal{X} & \xrightarrow{u_1} & \mathcal{C}'' \\
\downarrow id_{\pi_0 \mathcal{H}'} & & \downarrow id & & \downarrow u_2 \\
\pi_0 \mathcal{H}' & \xleftarrow{\pi(h)} & \mathcal{X} & \xrightarrow{u} & \mathcal{C}'
\end{array}$$

No entanto, um cálculo mostra que o pushout da linha inferior é fracamente equivalente em \mathcal{SC} ao pushout do seguinte diagrama:

$$\pi_0 \mathcal{H} \xrightarrow{\psi} \{x\} \xrightarrow{\omega} \mathcal{C}$$

Portanto, o pushout da linha superior é fracamente equivalente ao pushout da linha inferior. Segue-se que o mapa $f' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma equivalência fraca em \mathcal{SC} .

Para os mapas em **A1**, consideramos os seguintes diagramas pushout:

$$\begin{array}{ccc}
UV[n, k] & \xrightarrow{j} & \mathcal{C} \\
\downarrow \iota & & \downarrow p \\
U\Delta[n] & \xrightarrow{j'} & \mathcal{D}
\end{array}$$

Como antes, seja \mathcal{O} o conjunto de objetos de \mathcal{C} . Definimos $\mathcal{O}'' = \mathcal{O} \setminus \{x, y\}$. (Novamente, para simplicidade de notação, assumimos que $j(x) = x$ e $j(y) = y$). Agora, consideramos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}'' \amalg UV[n, k] & \xrightarrow{j''} & \mathcal{C} \\
\downarrow t' & & \downarrow p \\
\mathcal{O}'' \amalg U\Delta[n] & \xrightarrow{j'''} & \mathcal{D}
\end{array}$$

em $\mathcal{SC}_{\mathcal{O}}$. Como o mapa t' é uma equivalência fraca, e assumindo que o mapa j'' é uma cofibração (podendo ser fatorado, se necessário, como discutido anteriormente), podemos novamente usar o fato de que $\mathcal{SC}_{\mathcal{O}}$ é próprio. Assim, o mapa $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma equivalência fraca em $\mathcal{SC}_{\mathcal{O}}$ o que implica que também é uma equivalência fraca \mathcal{SC} . □

5.5.1 Prova da Proposição 5.6

Demonstração. Suponha que o mapa $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ seja uma cofibração acíclica. Pelo argumento do pequeno objeto [9, Sec.7] ou [6, Cap.11], podemos fatorar o mapa f como a composição de dois mapas:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{i} \mathcal{C}' \xrightarrow{p} \mathcal{D}$$

onde \mathcal{C}' é obtido a partir de \mathcal{C} como um colimite direto de pushouts iterados ao longo dos mapas em **A1** e **A2**. Assim, pelo Lema 5.4 e pelo fato de que um colimite direto de tais mapas é uma equivalência fraca, segue que o mapa $i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é uma equivalência fraca e o mapa $p : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$ possui a propriedade de levantamento à direita em relação aos mapas em **A1** e **A2**.

Pela Proposição 5.3, o mapa p é uma fibração. Como $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ são equivalências fracas, segue do axioma MC2 que p também é uma equivalência fraca. Em particular, por definição de cofibração, p possui a propriedade de levantamento à direita em relação às cofibrações. Portanto, existe um levantamento no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} & \xrightarrow{i} & \mathcal{C}' \\
\downarrow f & \nearrow \delta & \downarrow p \\
\mathcal{D} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{D}
\end{array}$$

onde i é o mapa induzido no colimite, p é a fibração resultante e δ o levantamento obtido pela propriedade de levantamento. Como $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um retrato do mapa $i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, segue que f possui a propriedade de levantamento à esquerda em relação às fibrações.

Por outro lado, suponha que o mapa $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tenha a propriedade de levantamento à esquerda em relação às fibrações acíclicas, o que implica que f é uma cofibração por definição. Novamente podemos fatorar f como:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{i} \mathcal{C}' \xrightarrow{p} \mathcal{D}$$

onde \mathcal{C}' é obtido a partir de \mathcal{C} por pushouts iterados dos mapas em **A1** e **A2**.

Mais uma vez, o mapa $p : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$ possui a propriedade de levantamento à direita em relação aos mapas em **A1** e **A2**. Pela Proposição 5.3, p é uma fibração. Portanto, existe um levantamento no diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{i} & \mathcal{C}' \\
 \downarrow f & \nearrow \delta & \downarrow p \\
 \mathcal{D} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{D}
 \end{array}$$

Pelo Lema 5.4, o mapa $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma equivalência fraca, pois é um retrato do mapa $i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ que também é uma equivalência fraca. \square

Agora provamos tudo o que é necessário para a existência da estrutura de categoria modelo em \mathcal{SC} .

5.5.2 Prova do Teorema 5.1

Demonstração. Para provar que \mathcal{SC} admite uma estrutura de categoria modelo, é necessário verificar as quatro condições estabelecidas na Proposição 5.1

Condição 1: Pequenez relativa

Deve-se verificar que os objetos ϕ (a categoria vazia) e $\{x\}$ (a categoria com um único objeto e apenas o morfismo identidade) são pequenos. Além disso, deve-se verificar que os conjuntos de geradores $U\hat{\Delta}[n]$ e $UV[n, k]$ satisfazem a condição de pequenez relativa em \mathcal{SC} .

- Pequenez de ϕ e $\{x\}$:
 ϕ é pequeno, pois não possui morfismos ou objetos, e sua simplicidade implica que qualquer diagrama indexado por ϕ é finitamente acessível. $\{x\}$ é pequeno porque contém apenas um objeto e sua simplicidade também implica acessibilidade finita.
- Pequenez relativa dos conjuntos $U\hat{\Delta}[n]$ e $UV[n, k]$:
 Usando a propriedade de pequenez dos geradores $V[n, k]$ e $\Delta[n]$ em **SSets** [10, 3.1.1], segue que $U\hat{\Delta}[n]$ é pequeno em relação ao conjunto C_1 . Analogamente, $UV[n, k]$ é pequeno em relação ao conjunto A_1 [6, 10.5.12].

Portanto, a **Condição 1** é satisfeita.

Condição 2: Fatoração de morfismos

Deve-se verificar que todo morfismo em \mathcal{SC} pode ser fatorado como:

- Uma cofibração seguida de uma fibração acíclica; ou
- Uma cofibração acíclica seguida de uma fibração.

Esta condição é satisfeita diretamente pelas Proposições 5.2 e 5.3, que garantem as respectivas fatorações:

- Pela Proposição 5.2, todo mapa que possui a propriedade de levantamento à direita com respeito às cofibrações é uma fibração.
- Pela Proposição 5.3, todo mapa que satisfaz **F1** e **F2** possui a propriedade de levantamento à direita com respeito aos mapas em **A2**.

Portanto, a **Condição 2** é satisfeita.

Condição 3: Levantamentos associados às fibrações e cofibrações

É necessário mostrar que:

- Toda cofibração acíclica possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito às fibrações.
- Toda fibração acíclica possui a propriedade de levantamento à direita com respeito às cofibrações.

Esta propriedade é demonstrada na Proposição 5.5, que estabelece as condições de levantamento apropriadas:

- Mapas em **A1** e **A2** possuem estas propriedades de levantamento por construção.

Assim, a **Condição 3** é satisfeita.

Condição 4: Fechamento das equivalências fracas

Deve-se verificar que as equivalências fracas são fechadas sob composição e satisfazem as condições necessárias para definir uma estrutura de categoria modelo.

A Proposição 5.6 demonstra que:

- Todo mapa que possui a propriedade de levantamento à esquerda com respeito às fibrações é uma cofibração acíclica.
- Além disso, as equivalências fracas em \mathcal{SC} são fechadas sob composição, garantindo a estabilidade necessária.

Portanto, a condição 4 é satisfeita.

Como todas as condições da Proposição 5.1 foram verificadas, conclui-se que a categoria \mathcal{SC} admite uma estrutura de categoria modelo com as equivalências fracas, fibrações e cofibrações especificadas.

□

Concluimos esta seção com o seguinte resultado sobre esta estrutura de categoria do modelo.

Proposição 5.7. A estrutura de categoria modelo \mathcal{SC} é propriamente à direita.

Demonstração. Suponha que o diagrama a seguir seja um diagrama de pullback:

$$\begin{array}{ccc}
A = B \times_D C & \xrightarrow{f} & B \\
\pi_1 \downarrow & & \downarrow g \\
C & \xrightarrow{h} & D
\end{array}$$

onde os mapas $f : A \rightarrow B$ e $\pi_1 : A \rightarrow C$ são as projeções do pullback o mapa $g : B \rightarrow D$ é uma fibração e o mapa $h : C \rightarrow D$ é uma DK-equivalência (ou equivalência de Dwyer-Kan). Devemos mostrar que $f : A \rightarrow B$ também é uma DK-equivalência.

Sejam $x, y \in A$. Precisamos verificar que o mapa:

$$\text{Hom}_A(x, y) \rightarrow \text{Hom}_B(f(x), f(y))$$

é uma equivalência fraca de conjuntos simpliciais.

Essa propriedade segue diretamente do fato de que a estrutura de categoria modelo em conjuntos simpliciais (**SSets**) é propriamente à direita [6, 7, 13.1.4]. Assim, os complexos de funções preservam equivalências fracas no pullback.

Agora, resta provar que o funtor $\pi_0(f) : \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(B)$ induzido por f é essencialmente sobrejetivo em objetos, garantindo que $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(B)$ seja uma equivalência de categorias.

Após aplicarmos π_0 ao morfismo $\text{Hom}_A(x, y) \rightarrow \text{Hom}_B(fx, fy)$, o que precisamos fazer é mostrar que $A \rightarrow B$ é essencialmente sobrejetivo sobre os objetos.

Seja $b \in B$ um objeto qualquer. Consideremos sua imagem $g(b) \in D$ via $g : B \rightarrow D$. Como $h : C \rightarrow D$ é uma DK-equivalência, existe um objeto $c \in C$ e uma equivalência homotópica:

$$\alpha : g(b) \rightarrow h(c)$$

em D . Como $g : B \rightarrow D$ é uma fibração, existe um objeto $b' \in B$ e uma equivalência homotópica $\beta : b \rightarrow b'$ em B , tal que :

$$g(b') = h(c).$$

Pela propriedade universal do pullback $A = B \times_D C$, temos que o par $(b', c) \in A$ satisfaz:

$$f((b', c)) = b',$$

e, combinando com a equivalência homotópica $\beta : b \rightarrow b'$ obtemos uma equivalência homotópica:

$$\gamma : b \rightarrow f((b', c))$$

em B . Assim $f : A \rightarrow B$ é essencialmente sobrejetivo em objetos, pois para todo objeto $b \in B$ encontramos um objeto em A que se projeta em b até equivalência homotópica. \square

5.6 Prova do Lema 5.2

Recordemos que temos uma categoria (simplicial) \mathcal{F} com objetos x e y , e um único morfismo não identidade $g : x \rightarrow y$. Além disso, há uma categoria simplicial \mathcal{E}' , também com objetos x e y , tal que existe um mapa $i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}'$ que envia g para uma equivalência

de homotópica $h : x \rightarrow y$ em \mathcal{E}' . Primeiramente, substituímos \mathcal{E}' por sua subcategoria das equivalências homotópicas, denotada por \mathcal{E} . Para que nossas construções sejam invariantes por homotopia, tomamos substituições cofibrantes functoriais $\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}$ na categoria modelo $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$, conforme descrito em [5, 2.5]. Nessa construção, $\tilde{\mathcal{F}}$ é, de fato, isomorfa a \mathcal{F} .

Agora, tomamos a localização $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ (respectivamente $\tilde{\mathcal{E}}^{-1}\tilde{\mathcal{E}}$), obtida invertendo formalmente todos os morfismos em cada grau simplicial de \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{E}}$ respectivamente. Ao tomar uma substituição cofibrante functorial e, em seguida, a completude grupoidal, obtemos as localizações simpliciais \mathcal{F} e \mathcal{E} com respeito a todos os morfismos em cada uma, conforme definido em [5].

Essas localizações correspondem às finalizações grupoidais de \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{E}}$, respectivamente. Agora temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F} & \xleftarrow{id} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\ell_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \varphi_{\mathcal{F}} & & \downarrow \psi_1 \\
 \mathcal{E} & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{E}}} & \tilde{\mathcal{E}} & \xrightarrow{\ell_{\tilde{\mathcal{E}}}} & \mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}
 \end{array}$$

Para assegurar que o próximo passo seja invariante por homotopia, fatoramos o mapa $\psi_1 : \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}$ como o composto:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{Z} \xrightarrow{p} \mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}$$

onde i é uma cofibração acíclica, e p é uma fibração em $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$. Para simplificar notação, assumiremos que ψ_1 é uma fibração, continuando a usar $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ em vez de \mathcal{Z} . Por fim, tomamos o pullback do canto inferior direito do diagrama anterior e o denotamos o resultado por \mathcal{G} . O diagrama resultante é:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} \\
 \downarrow \pi_2 & & \downarrow \psi_1 \\
 \tilde{\mathcal{E}} & \xrightarrow{\ell_{\tilde{\mathcal{E}}}} & \mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}
 \end{array}$$

Observe que este diagrama é um pullback tanto em $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$ quanto em \mathcal{SC} .

Lema 5.5. O mapa composto $\{x\} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G}$ é uma equivalência fraca em \mathcal{SC} .

Demonstração. Como as categorias simpliciais $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{\mathcal{E}}^{-1}\tilde{\mathcal{E}}$ e $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ consistem todas de equivalências homotópicas, o mesmo ocorre com \mathcal{G} . Assim, todos os morfismos de $\pi_0\mathcal{G}$ são isomorfismos, e, em particular, os objetos x e y são isomorfos em $\pi_0\mathcal{G}$.

Dessa forma, basta mostrar que \mathcal{G} possui complexos de função fracamente contráteis. Como todos os morfismos de \mathcal{E} , e portanto de $\tilde{\mathcal{E}}$, são equivalências homotópicas, o mapa $\gamma : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^{-1}\tilde{\mathcal{E}}$ é uma equivalência fraca em $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$ [5, 9.5].

Observe que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ é a categoria simplicial em $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$ com exatamente um morfismo entre quaisquer dois objetos. Em particular, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ possui complexos de função fracamente contráteis.

Agora, como todas as categorias têm x e y , como objetos e todos os mapas envolvidos são a identidade nesses objetos, podemos considerar o diagrama de pullback acima em $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$. Como esta estrutura de categoria modelo é própria a direita *right proper* [5, 7.3], todo pullback de uma equivalência fraca ao longo de uma fibração é uma equivalência fraca.

O mapa $\gamma : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^{-1}\tilde{\mathcal{E}}$ é uma equivalência fraca, e o mapa $\delta : \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^{-1}\tilde{\mathcal{E}}$ é uma fibração, então segue que o mapa $\epsilon : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ é uma equivalência fraca em $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$ e, portanto, \mathcal{G} possui complexos de função fracamente contráteis. Assim, o mapa $\{x\} \xrightarrow{\alpha \circ \beta} \mathcal{G}$ satisfaz as condições para ser uma equivalência fraca em \mathcal{SC} . \square

No entanto, nem todos os mapas $\{x\} \rightarrow \mathcal{G}$ são isomorfos a mapas em **A2**, pois as categorias simpliciais \mathcal{G} podem ter um número incontável de simplexes em seus complexos de função. Além disso, não há razão para assumir que o mapa de inclusão $\{x\} \amalg \{y\} \rightarrow \mathcal{G}$ seja uma cofibração em $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$.

Para completar a prova, precisamos mostrar que qualquer cofibração acíclica $\{x\} \rightarrow \mathcal{G}$, como acima, se fatora como um composto $\{x\} \xrightarrow{\eta} \mathcal{H} \xrightarrow{\theta} \mathcal{G}$, onde o mapa de inclusão $\{x\} \rightarrow \mathcal{H}$ está em **A2**.

Seja \mathcal{H}_0 a categoria simplicial \mathcal{F} . Seja $i : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{G}$ o mapa de inclusão. Construiremos uma categoria simplicial \mathcal{H} a partir de \mathcal{H}_0 , satisfazendo as propriedades necessárias especificadas em **A2**. Primeiramente, enunciaremos o seguinte lema:

Lema 5.6. Seja $f : A \rightarrow B$ um mapa de conjuntos simpliciais, onde B é fracamente contrátil, e seja $u : S^n \rightarrow |A|$ um mapa de CW-complexos para algum $n \geq 0$. Então f pode ser fatorado como o composto $A \rightarrow A' \rightarrow B$, onde A' é obtido a partir de A anexação um número finito de simplexes não degenerados e o mapa composto de espaços $S^n \rightarrow |A| \rightarrow |A'|$ é homotópico a zero.

Demonstração. Primeiramente, assumimos que o mapa f é uma cofibração. Caso contrário, fatoramos f como a composição

$$A \xrightarrow{i} A' \xrightarrow{p} B$$

onde, na estrutura de categoria modelo sobre conjuntos simpliciais, i é uma cofibração e p é uma fibração acíclica. Assim, podemos assumir que f é um mapa de inclusão, substituindo B por A' , se necessário.

Agora, considere o mapa composto de espaços $S^n \xrightarrow{u} |A| \xrightarrow{|f|} |B|$, onde u é o mapa dado e $|f|$ é o mapa geométrico induzido por f . Esse mapa composto é necessariamente homotópico a zero, pois B é fracamente contrátil. Portanto, o mapa composto se fatora através do cone CS^n , gerando o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
S^n & \xrightarrow{u} & |A| & \xrightarrow{|f|} & |B| \\
\downarrow j & & & \nearrow v & \\
CS^n & & & &
\end{array}$$

onde j é o mapa de inclusão no cone, e v é o mapa que fatora $S^n \rightarrow |B|$ através de CS^n . Como CS^n é compacto, sua imagem em $|B|$ intersecta apenas um número finito de células de $|B|$ de forma não trivial. Definimos então A' como um conjunto simplicial tal que $|A'|$ contém $|A|$ e todas as células dessa imagem. Assim, obtemos um novo conjunto simplicial A' , juntamente com os mapas:

$$A \xrightarrow{i} A' \xrightarrow{p} B$$

onde i é a inclusão de A em A' , incorporando as células adicionadas, e p é o mapa estendido que preserva as propriedades de f . Por fim, o mapa composto $S^n \rightarrow |A| \rightarrow |A'|$ é homotópico a zero. □

Agora, consideremos as categorias \mathcal{H}_0 e \mathcal{G} descritas acima e o mapa de inclusão $i : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{G}$. Cada uma dessas categorias possui quatro complexos de funções para análise. Para a categoria \mathcal{H}_0 , denotamos esses complexos por H_j , e para \mathcal{G} , por G_j , com $1 \leq j \leq 4$. A numeração é arbitrária, mas deve corresponder entre as duas categorias. Assim, se $H_1 = \text{Hom}_{\mathcal{H}_0}(x, y)$, então $G_1 = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$.

Observamos que $\text{Hom}_{\mathcal{H}_0}(y, x) = \emptyset$. Introduzimos, então, um mapa $y \rightarrow x$ para tornar esse complexo de funções não vazio, juntamente com todos os compostos gerados por ele. Consideramos agora todos os quatro complexos de funções e identificamos $n \geq 0$ tal que todos os mapas $S^m \rightarrow |H_j|$ são nulo-homotópicos para $0 \leq m < n$ e $1 \leq j \leq 4$, mas existe um mapa $S^n \rightarrow |H_j|$ que não é nulo-homotópico para algum j . Aplicamos o Lema 4.2 ao mapa $H_j \rightarrow G_j$ e ao mapa $S^n \rightarrow |H_j|$.

Substituímos o complexo de funções H_j pelo conjunto simplicial A' obtido no Lema 4.2. Esse processo pode introduzir novos mapas $S^m \rightarrow |A'|$ não nulo-homotópicos para $m > n$, mas apenas uma quantidade enumerável de novos mapas desse tipo em relação ao $|H_j|$ original.

Agora que adicionamos simplices ao nosso complexo de funções, incluímos todas as composições necessárias com os morfismos originais de \mathcal{H}_0 , formando uma nova categoria simplicial \mathcal{H}_1 . O número de novas simplices adicionadas por essas composições continua sendo, no máximo, enumerável.

Repetimos o processo para outro mapa de S^n para um complexo de funções de \mathcal{H}_1 , onde n é mínimo, obtendo uma nova categoria \mathcal{H}_2 . Prosseguimos dessa forma, potencialmente infinitas vezes, para obter uma categoria \mathcal{H} onde, para qualquer n e qualquer complexo de funções H' em \mathcal{H} , qualquer mapa $S^n \rightarrow |H'|$ é nulo-homotópico.

Para garantir que tal \mathcal{H} pode ser obtida dessa forma, basta mostrar que há, no máximo, uma quantidade enumerável de classes de homotopia de mapas de esferas para cada complexo de funções. Esse resultado decorre do seguinte lema:

Lema 5.7. Seja A um conjunto simplicial com uma quantidade enumerável de simplexos. Então, para todo $n \geq 0$, existem, no máximo, uma quantidade enumerável de classes de homotopia distintas de mapas $S^n \rightarrow |A|$.

Demonstração. Basta mostrar que existem, no máximo, uma quantidade enumerável de classes de homotopia de mapas de S^n para qualquer CW-complexo finito X . Para um CW-complexo simplesmente conexo X , um argumento baseado na teoria de Serre Mod \mathcal{C} [16] mostra que todos os grupos de homotopia de X são enumeráveis se, e somente se, os grupos de homologia de X forem enumeráveis, o que ocorre quando X é finito. O caso geral de X segue desse resultado via um argumento de cobertura universal.

Pela construção, essa categoria simplicial \mathcal{H} é livre e, portanto, o mapa

$$\{x\} \coprod \{y\} \rightarrow \mathcal{H}$$

é uma cofibração em $\mathcal{SC}_{\{x,y\}}$. Assim, obtemos uma fatoração $\{x\} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$.

Agora podemos completar a prova do Lema 5.2.

Demonstração. Prova do Lema 5.2: Usando a categoria simplicial \mathcal{H} descrita acima e o mapa $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$, obtemos o mapa composto:

$$\{x\} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

Em particular, obtemos a fatoração $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}'$. Como demonstrado anteriormente, o mapa composto $\{x\} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ é isomorfo a um mapa em **A2**.

□

Referências Bibliográficas

- [1] BERGNER, J. E. *Three models for the homotopy theory of homotopy theories*. Ph.D. Thesis, University of Notre Dame, 2005.
- [2] BERTRAND, Töen; VEZZOSI, Gabriele. *Homotopical algebraic geometry I: topos theory*. Preprint disponível em math.AG/0207028.
- [3] DWYER, W. G.; HIRSCHHORN, P. S.; KAN, D. M.; SMITH, J. H. *Homotopy limit functors on model categories and homotopical categories*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 113. Providence, RI: American Mathematical Society, 2004.
- [4] DWYER, W. G.; KAN, D. M. *Function complexes in homotopical algebra*. Topology, v. 19, p. 427–440, 1980.
- [5] DWYER, W. G.; KAN, D. M. *Simplicial localizations of categories*. Journal of Pure and Applied Algebra, v. 17, p. 267–284, 1980.
- [6] DWYER, W. G.; SPALINSKI, J. *Homotopy theories and model categories*. In: *Handbook of Algebraic Topology*. Elsevier, 1995.
- [7] GOERSS, Paul G.; JARDINE, John F. *Simplicial homotopy theory*. Springer Science Business Media, 2009.
- [8] GOERSS, P. G.; SCHEMMERHORN, K. *Model categories and simplicial methods*. arXiv preprint math/0609537, 2006.
- [9] HIRSCHHORN, P. S. *Model Categories and Their Localizations*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99. Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.
- [10] HOVEY, M. *Model categories*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999.
- [11] MITCHELL, B. *Theory of categories*. London: Academic Press, 1966. v. 17.
- [12] QUILLEN, D. G. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, no. 43. Berlin: Springer-Verlag, 1967.
- [13] QUILLEN, D. *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. (2) 90 (1969), 205–295.
- [14] ROTMAN, J. *An introduction to homological algebra*. New York: Springer, 2009.
- [15] SERRE, Jean-Pierre. *Homologie singulière des espaces fibrés. Applications*. Annales de Mathématiques, v. 54, n. 2, p. 425–505, 1951.

- [16] SERRE, Jean-Pierre. *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens*. Annales de Mathématiques, v. 58, p. 258–294, 1953.
- [17] STRØM, Arne. *The homotopy category is a homotopy category*. Archiv der Mathematik, v. 23, p. 435–441, 1972.