

Uma abordagem em três etapas para o problema de roteamento de veículos com múltiplas restrições de sincronização

Eduardo Luiz Araujo dos Santos



CENTRO DE INFORMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

João Pessoa, PB
2025

Eduardo Luiz Araujo dos Santos

Uma abordagem em três etapas para o problema de roteamento de veículos com múltiplas restrições de sincronização

Monografia apresentada ao curso Engenharia da Computação do Centro de Informática, da Universidade Federal da Paraíba, como requisito para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia da Computação

Orientador: Teobaldo Leite Bulhões Júnior

João Pessoa, PB
2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237a Santos, Eduardo Luiz Araujo Dos.

Uma abordagem em três etapas para o problema de roteamento de veículos com múltiplas restrições de sincronização / Eduardo Luiz Araujo Dos Santos. - João Pessoa, 2025.

52 f. : il.

Orientação: Teobaldo Leite Bulhões Júnior.
TCC (Graduação) - UFPB/CI.

1. Sincronização. 2. Roteamento de veículos. 3. Meta-heurísticas. 4. Programação inteira. 5. Otimização Combinatória. I. Bulhões Júnior, Teobaldo Leite. II. Título.

UFPB/CI

CDU 004



CENTRO DE INFORMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia da Computação intitulado ***Uma abordagem em três etapas para o problema de roteamento de veículos com múltiplas restrições de sincronização*** de autoria de Eduardo Luiz Araujo dos Santos, aprovada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

Prof. Dr. Teobaldo Leite Bulhões Júnior
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Anand Subramanian
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Bruno Petrato Bruck
Universidade Federal da Paraíba

João Pessoa, 13 de maio de 2025

Centro de Informática, Universidade Federal da Paraíba
Rua dos Escoteiros, Mangabeira VII, João Pessoa, Paraíba, Brasil CEP: 58058-600
Fone: +55 (83) 3216 7093 / Fax: +55 (83) 3216 7117

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar, primeiramente, minha gratidão à pessoa que mais amo na vida: minha mãe, Claudia Simone. Ela é o maior exemplo de gentileza e carinho que consigo imaginar. Sempre me mostrou o caminho certo, sem que eu deixasse de sentir, nem por um instante, o calor do amor materno. Dedicou (e ainda dedica) toda a sua vida à minha felicidade, estando sempre presente quando eu mais preciso.

E não é só comigo — é assim com todos: amigos, família, até desconhecidos. Quem conhece minha mãe se encanta com a grande mulher que ela é e sempre será. Ela é, sem dúvida, o espelho de quem eu desejo me tornar. Não há quem diga o contrário: a senhora é LUZ, Mainha. Eu não poderia ter uma mãe melhor. Te amo!

Na mesma nota, estendo meus agradecimentos à Painho, Luiz Antônio, que também me criou junto de Mainha com muito amor e dedicação. Painho também fez muitos sacrifícios para o meu crescimento e para que eu pudesse ter as oportunidades que tive. Sou imensamente grato por tudo que fez e faz por mim.

Não poderia deixar de agradecer a uma grande pessoa que esbanja carisma e é, em grande parte, responsável por eu ter chegado até aqui na minha trajetória acadêmica: meu avô, Flávio Luiz. Vovô sempre ajudou todos da família e esteve presente para pavimentar o caminho que eu trilhava — seja com o ingresso em uma nova escola, com cursos de idiomas, com estímulo ao aprendizado intelectual ou em inúmeras outras situações. Além disso, não tenho dúvidas de que Mainha herdou de Vovô essa capacidade de transmitir alegria com as palavras. Ele é, sem dúvida, um grande pilar da nossa família.

E se Mainha aprendeu com Vovô a levar alegria, também aprendeu o carinho e o modo gentil de tratar as pessoas com outra figura que mora no meu coração e que também merece meu agradecimento: minha avó, Maria Elizabeth (Betinha), que infelizmente faleceu em 2024. Uma mulher muito amada e respeitada por onde passou e por todas as pessoas que tiveram a sorte de conhecê-la.

Agradeço também a toda a minha família de forma geral — irmãos, tios, tias, primos, primas — que, mesmo não mencionados individualmente, sempre estiveram ao meu lado, apoiando minhas decisões e torcendo pelo meu sucesso. Incluo aqui, com muito carinho, uma pessoa que não é do meu sangue, mas que considero como uma segunda mãe: Paula, que cuidava de mim quando pequeno, na casa dos meus avós, enquanto Mainha não chegava do trabalho, e que também cuidou deles com muito afeto. O carinho, a presença e o incentivo de cada um foram fundamentais nessa jornada.

Expresso também minha felicidade por ter encontrado grandes amigos na vida. Pedro, Bianca e eu formamos um trio desde o ensino fundamental II, há mais de 10 anos, e a amizade só cresceu. Depois, vieram o Will, com quem me aproximei mais com o tempo,

e a Hiza, que chegou um pouco depois. Seguimos por áreas completamente diferentes após a escola — exatas, humanas, artes, e por aí vai — mas seguimos nos reunindo até hoje, e até tivemos uma pequena banda por um tempo. Nosso grupo ser tão eclético faz parte da graça, e só reforça o quanto nossa amizade é forte e verdadeira.

Também não posso deixar de mencionar uma amiga muito querida, pela qual sou profundamente grato: a Júlia, que conheço há 7 anos. Mesmo com a distância que temos atualmente, nossa amizade permanece viva — e tenho certeza de que continuará por muito tempo ainda.

Aos meus amigos mais próximos que conheci durante o curso — André, Danilo, Phellipe e Rayque — foi extremamente gratificante ter compartilhado boa parte dessa jornada com vocês. Tive muita sorte em ter ingressado em um período tão único e em ter encontrado pessoas divertidas como vocês no caminho.

Agradeço ao meu orientador, Professor Teobaldo Bulhões, e aos Professores Anand Subramanian e Bruno Bruck, por terem demonstrado disponibilidade e aceitado participar da orientação e da banca examinadora mesmo com o prazo tão apertado. Deixo meus sinceros agradecimentos pelos ensinamentos transmitidos e pelo apoio constante na construção do meu conhecimento — não apenas nesta área, mas também em minha formação humana como um todo. Se hoje tenho a oportunidade de expandir meus horizontes após a graduação, é graças à orientação e às oportunidades que me proporcionaram.

Por fim, agradeço ao Vitor Nesello e à Atoptima. Com eles, adquiri um vasto conhecimento técnico e vivi experiências valiosas ao longo da graduação. Fui agraciado com oportunidades inimagináveis, tanto durante o curso quanto após sua conclusão, pelas quais serei eternamente grato.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem em três etapas para resolver o Problema de Roteamento de Veículos com Múltiplas Restrições de Sincronização (VRPMS), uma extensão complexa do Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (VRPTW), em que alguns clientes exigem visitas sincronizadas entre dois ou mais veículos distintos. A proposta utiliza parâmetros de sincronização (δ e γ) que permitem sua aplicação a diferentes variantes do problema que envolvem restrições sincronizadas. O método combina uma heurística de Busca Local Iterada (ILS) para geração eficiente de soluções, um modelo exato de Particionamento de Conjuntos (SP) para refinamento das soluções, e uma etapa final de validação temporal por meio de um modelo de sincronização. A busca local emprega uma estratégia de concatenação de subsequências para avaliação de restrições e uma busca em dois estágios para seleção do melhor movimento, com o objetivo de mitigar o impacto da sincronização. Além disso, adota-se uma forma relaxada das restrições de sincronização tanto na ILS quanto no modelo de SP. Foram conduzidos experimentos extensivos com base no conjunto de instâncias de Hojabri et al. (2018), considerando diferentes tamanhos, classes e níveis de sincronização. Os resultados evidenciam a eficiência da abordagem proposta na geração de soluções de boa qualidade em tempos computacionalmente reduzidos e destacam o impacto das restrições de sincronização na viabilidade e no custo computacional. A etapa exata demonstrou bom potencial de refinamento das soluções, enquanto o modelo de sincronização permitiu uma verificação rigorosa das janelas relativas entre rotas.

Palavras-chave: Sincronização, Roteamento de veículos, Meta-heurísticas, Programação inteira, Otimização Combinatória.

ABSTRACT

This work presents a three-stage approach to solve the Vehicle Routing Problem with Multiple Synchronization Constraints (VRPMS), a complex extension of the Vehicle Routing Problem with Time Windows (VRPTW), in which some customers require synchronized visits from two or more distinct vehicles. The proposed method incorporates synchronization parameters (δ and γ) that enable its applicability to different problem variants involving synchronization constraints. The approach combines an Iterated Local Search (ILS) heuristic for efficient solution generation, an exact Set Partitioning (SP) model for solution refinement, and a final temporal validation stage using a synchronization model. The local search employs a subsequence concatenation strategy for constraint evaluation and a two-stage search mechanism to select the best move, aiming to mitigate the impact of synchronization. Additionally, a relaxed form of synchronization constraints is adopted in both the ILS and the SP model. Extensive experiments were conducted based on the instance set proposed by Hojabri et al. (2018), considering different sizes, instance classes, and synchronization levels. The results highlight the efficiency of the proposed approach in generating high-quality solutions in reduced computational times and emphasize the impact of synchronization constraints on solution feasibility and computational cost. The exact stage showed strong potential for solution refinement, while the synchronization model enabled a rigorous verification of the relative time windows between routes.

Keywords: Synchronization, Vehicle routing, Metaheuristics, Integer programming, Combinatorial optimization.

LISTA DE FIGURAS

1	Exemplo de uma solução viável para o VRPMS.	24
---	---	----

LISTA DE TABELAS

1	Resultados para as instâncias de 25, 50, 100 e 200 clientes.	36
2	Resultados para as instâncias de 25, 50, 100 e 200 clientes (continuação). .	37
3	Resultados comparativos para as instâncias de 25, 50, 100 e 200 clientes. .	38
4	Resultados comparativos para as instâncias resolvidas nas categorias abaixo de 100% de viabilidade.	46
5	Resultados comparativos para as instâncias resolvidas nas categorias abaixo de 100% de viabilidade (continuação).	47
6	Resultados comparativos para as novas melhores soluções encontradas. . .	49
7	Resultados comparativos para as novas melhores soluções encontradas (continuação).	50
8	Resultados comparativos para as novas melhores soluções encontradas (continuação II).	51
9	Resultados comparativos para as novas melhores soluções encontradas (continuação III).	52
10	Resultados comparativos para as novas melhores soluções encontradas (continuação IV).	53

LISTA DE ABREVIATURAS

VRP – Problema de Roteamento de Veículos

2E-VRP – Problema de Roteamento de Veículos de Dois Níveis

VRPMS – Problema de Roteamento de Veículos com Múltiplas Restrições de Sincronização

VRPTW – Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo

VRPTWSyn – Problema de Roteamento de Veículos com Visitas Sincronizadas

VRPTWTD – Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo e Precedência Temporal

SDVDP – Problema de Despacho Dinâmico de Veículos com Sincronização

CP – *Constraint Programming*

ALNS – *Adaptive Large Neighborhood Search*

DIRP – Problema de Roteamento de Entrega e Instalação

ILS – Busca Local Iterada

RVND – Descida Variável em Vizinhança Aleatória

R&R – *Ruin and Recreate*

SP – Particionamento de Conjuntos

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Definição do tema	14
1.2	Motivação	15
1.3	Definição geral do problema	15
1.4	Objetivos	16
1.4.1	Objetivo geral	16
1.4.2	Objetivos específicos	16
1.5	Estrutura da monografia	16
2	CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DA LITERATURA	17
3	DEFINIÇÃO FORMAL E MODELAGEM MATEMÁTICA	20
4	MÉTODO PROPOSTO	23
4.1	Representação da solução	24
4.2	Geração de soluções via ILS	25
4.2.1	Construção	25
4.2.2	Busca local	26
4.2.3	Perturbação	28
4.2.4	Avaliação das restrições	28
4.3	Refinamento de soluções via SP	30
4.4	Validação de soluções via modelo de sincronização	31
5	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	33
5.1	Conjunto de instâncias	33
5.2	Ambiente e configuração experimental	33
5.3	Análise da performance do algoritmo e suas etapas	34
5.4	Comparação com o algoritmo de Hojabri et al. (2018)	35
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	39

Referências	40
Apêndices	43
A Instâncias não solucionadas	44
B Categorias abaixo de 100% de viabilidade	45
C Novas melhores soluções encontradas	48

1 INTRODUÇÃO

1.1 Definição do tema

A otimização combinatória é capaz de modelar problemas e aspectos da vida real para serem resolvidos por meio de métodos matemáticos e técnicas de programação. Com a crescente complexidade das operações logísticas modernas, especialmente no contexto urbano, planejar rotas de distribuição de mercadorias e serviços de forma otimizada torna-se essencial para reduzir custos, melhorar a qualidade de serviço e minimizar impactos ambientais (CATTARUZZA et al., 2017). Nesse contexto, o Problema de Roteamento de Veículos (VRP, do inglês *Vehicle Routing Problem*) consolida-se como um dos tópicos mais relevantes e estudados na área da otimização combinatória, tanto pela ampla aplicação prática quanto pela dificuldade computacional que apresenta, originando diversas subclasses de problemas (TOTH; VIGO, 2014).

Em geral, um problema da classe de VRPs tem por objetivo encontrar um conjunto de rotas de menor custo para atender a um grupo de clientes, utilizando frotas de veículos e respeitando uma série de demandas ou restrições. Na prática, esses problemas raramente aparecem de forma simples, dada a diversidade de etapas, limitações e particularidades inerentes aos processos de transporte e logística urbana. No entanto, é justamente por esse motivo que a otimização combinatória se mostra uma ferramenta poderosa, capaz de capturar essas nuances e propor soluções para problemas com alto grau de complexidade estrutural.

Nos VRPs, o custo a ser minimizado pode representar diferentes aspectos, como gastos com transporte, emissões de poluentes, tempo total das operações, entre outros, dependendo do contexto da aplicação. Além disso, diversas restrições são incorporadas ao modelo para torná-lo mais aderente à realidade, como janelas de tempo para atendimento aos clientes, limites de capacidade dos veículos, restrições específicas relacionadas à frota, entre outras (BRAEKERS; RAMAEKERS; VAN NIEUWENHUYSE, 2016). Dentre essas restrições, destaca-se a sincronização.

A sincronização é uma das restrições mais complexas e relevantes nos VRPs, surgindo como uma resposta às crescentes exigências logísticas do transporte urbano e às particularidades do crescimento do comércio eletrônico, como descrito por Grangier et al. (2016) e Sakarya et al. (2025). No contexto do Problema de Roteamento de Veículos de Dois Níveis (2E-VRP, do inglês *Two-Echelon VRP*) — em que veículos do primeiro nível entregam mercadorias em pontos intermediários, e veículos do segundo nível completam as entregas aos clientes —, a sincronização consiste em alinhar os tempos de chegada e partida dos veículos, de modo que as transferências de carga ocorram sem atrasos ou desperdícios. Desse modo, essa restrição permite modelar cenários bastante diversos. Por

exemplo, os pontos de entrega intermediários podem representar grandes armazéns, cujo custo de manutenção é elevado e, portanto, é desejável reduzir o tempo de operação no local. Alternativamente, podem ser locais de descarga temporários, como no trabalho de Sakarya et al. (2025), onde veículos de grande porte abastecem veículos menores em estacionamentos, sendo necessário coordenar as transferências de carga entre as rotas.

Este trabalho lida com a sincronização nos PRVs, apresentando um algoritmo que combina uma meta-heurística com um método exato para resolver o Problema de Roteamento de Veículos com Múltiplas Restrições de Sincronização (VRPMS, do inglês *VRP with Multiple Synchronization constraints*).

1.2 Motivação

Os exemplos apresentados destacam a importância de estudar os VRPs para aumentar a eficiência, reduzir custos e melhorar a experiência final do cliente. Contudo, modelar e resolver tais problemas se mostra uma tarefa difícil, principalmente pelo fato do VRP ser um problema classificado como $\mathcal{NP}$ -difícil (LENSTRA; RINNOOY KAN, 1981), ou seja, não há, até o momento, algoritmos capazes de garantir a solução ótima em tempo polinomial. Diante disso, torna-se necessário recorrer a técnicas avançadas, como formulações de programação inteira mista ou meta-heurísticas, especialmente quando há interdependência entre rotas imposta por restrições de sincronização.

É importante destacar que este trabalho também resulta de uma colaboração com uma empresa francesa que possui expertise em otimização exata e metodologias heurísticas, a qual fornece módulos avançados para o planejamento de operações. A empresa possui uma aplicação que gera rotas de entrega de recursos aos clientes, utilizando depósitos como pontos de entrega intermediários e sincronizando o início das rotas dos veículos de segundo nível com o término do serviço dos veículos de primeiro nível. Nesse contexto, a aplicação da empresa se enquadra na classe do 2E-VRP com sincronização no início das rotas. A colaboração teve como objetivo aprimorar essa aplicação para lidar com o VRPMS descrito por Hojabri et al. (2018), um problema ainda mais complexo que o formato base originalmente considerado, agregando valor tanto do ponto de vista teórico quanto prático.

1.3 Definição geral do problema

O VRPMS é uma extensão do Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (VRPTW, do inglês *VRP with Time Windows*), que incorpora restrições adicionais de sincronização entre dois tipos de veículos: veículos regulares e veículos especiais. Os clientes são divididos em dois grupos: clientes regulares, atendidos apenas

por veículos regulares, e clientes especiais, que exigem atendimento por ambos os tipos de veículos. Os horários de chegada dos veículos especiais a esses clientes devem estar dentro de janelas de tempo relativas aos horários de chegada dos veículos regulares, definidas por parâmetros de sincronização que variam conforme o tipo de serviço exigido. Essas janelas relativas e os diferentes tipos de veículos permitem modelar diferentes cenários que exigem sincronização, como, por exemplo, quando uma equipe de instalação de móveis pode chegar antes da entrega para preparar o local ou auxiliar no descarregamento, ou quando é desejável limitar o tempo de espera do cliente entre a entrega e a instalação, evitando sua insatisfação. O objetivo do problema consiste em gerar rotas para os veículos em que todos os clientes sejam atendidos de forma eficiente, respeitando todas as restrições. Atrasos nas janelas de tempo dos clientes não são permitidos; no entanto, é permitido chegar adiantado e aguardar.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo geral

Desenvolver um algoritmo que combine meta-heurísticas e métodos exatos para resolver de forma eficiente o VRPMS.

1.4.2 Objetivos específicos

- Conduzir experimentos computacionais para avaliar a eficácia do algoritmo proposto.
- Analisar estatisticamente os desempenhos individuais dos métodos empregados.
- Avaliar o impacto da sincronização no custo computacional e na viabilidade do problema.
- Comparar a performance do método proposto com o de Hojabri et al. (2018).

1.5 Estrutura da monografia

O trabalho está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta uma revisão dos trabalhos mais relevantes e relacionados ao VRPMS, posicionando o problema estudado dentro do panorama atual da pesquisa. A Seção 3 apresenta a definição formal e a modelagem matemática do problema. A Seção 4 descreve detalhadamente a abordagem proposta. A Seção 5 apresenta os resultados e análises experimentais da avaliação do algoritmo. Por fim, a Seção 6 resume os principais resultados alcançados, discute as contribuições do trabalho e propõe possíveis direções para pesquisas futuras.

2 CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DA LITERATURA

A terminologia utilizada para descrever problemas de roteamento de veículos com restrições de sincronização ainda apresenta variabilidade na literatura. Por vezes, autores se referem aos mesmos problemas utilizando nomenclaturas diferentes. Alguns trabalhos utilizam a nomeação de Problema de Roteamento de Veículos com Visitas Sincronizadas (VRPTWSyn, do inglês *VRP with Time Windows and Synchronized visits*) para designar uma variante mais específica, na qual as visitas sincronizadas devem ocorrer exatamente no mesmo instante, sem margem para atraso ou adiantamento, e envolvendo apenas um tipo de veículo, como descrito por Hà et al. (2020). Observa-se que, em muitos casos, problemas originalmente definidos ou considerados VRPTWSyn são posteriormente tratados como VRPMS em estudos subsequentes, e vice-versa. Por exemplo, o problema desenvolvido por Bredström e Rönnqvist (2008) é, em alguns trabalhos, rotulado como VRPTWSyn (como em Afifi, Dang e Moukrim (2016)), enquanto em levantamentos como Drexl (2012) e Soares et al. (2024) é incluído como VRPMS. De maneira semelhante, o trabalho de Hojabri et al. (2018), inicialmente definido como VRPMS, foi referenciado como VRPTWSyn em Shi et al. (2020) e Li et al. (2020). Observa-se que muitos problemas denominados VRPTWSyn podem ser interpretados como casos específicos do VRPMS, ajustando-se os parâmetros de sincronização (δ e γ) para impor a configuração da sincronização. Assim, doravante, serão referenciados trabalhos definidos nessas duas classes ou com descrições parecidas, englobando toda a família de problemas de roteamento com restrições de sincronização que o algoritmo tem por objetivo cobrir.

Bredström e Rönnqvist (2008) foram um dos primeiros a propor uma formulação matemática para problemas de roteamento com restrições de precedência temporal e sincronização. O modelo, voltado para o contexto de serviços domiciliares de saúde, considera clientes que podem requerer a presença simultânea de dois profissionais. A abordagem buscou minimizar o tempo total de viagem, maximizar as preferências dos clientes e equilibrar os tempos de serviço dos cuidadores. O problema foi resolvido por meio de uma heurística baseada na técnica de *Local Branching* em novas instâncias geradas.

Dohn, Rasmussen e Larsen (2011) propuseram o Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo e Precedência Temporal (VRPTWTD, do inglês *VRP with Time Windows and Temporal Dependencies*), uma extensão do VRPTW que generaliza dependências temporais entre clientes através de novas restrições. O trabalho também categorizou os tipos de dependências temporais que são comumente encontrados na prática, e o problema foi resolvido utilizando um algoritmo *Branch-Cut-and-Price*.

Rousseau, Gendreau e Pesant (2013) descreveram uma versão dinâmica do VRPMS, denominada Problema de Despacho Dinâmico de Veículos com Sincronização (SDVDP, do inglês *Synchronized Dynamic Vehicle Dispatching Problem*). Nesse problema, as re-

quisições dos clientes surgem durante a operação, exigindo atualização em tempo real das rotas. A solução foi obtida por meio de uma heurística baseada em *Constraint Programming* (CP), com operadores de inserção sucessiva e procedimentos de busca local entre requisições.

Affi, Dang e Moukrim (2016) desenvolveram uma heurística de *Simulated Annealing* com buscas locais dedicadas para o VRPTWSyn. Os autores destacam que uma combinação específica de visitas sincronizadas pode causar um problema denominado sincronização cruzada, onde a ordem de atendimento de diferentes veículos impede que os pares de visitas, que deveriam ocorrer simultaneamente, sejam efetivamente realizados ao mesmo tempo. Por exemplo, se um veículo visita os vértices i e a em sequência, enquanto um segundo veículo visita os vértices b e j , e os vértices i e j representam as duas visitas sincronizadas de um mesmo cliente – assim como a e b representam as visitas em outro cliente –, torna-se impossível realizar a sincronização exata dessas visitas. Para lidar com esse problema, os autores implementaram uma estratégia que utiliza uma solução reduzida, composta apenas pelas visitas que requerem sincronização, para restringir posições candidatas de inserção de novos vértices que poderiam levar à sincronização cruzada durante os procedimentos de inserção e de busca local. Testado nas instâncias de Bredström e Rönnqvist (2008), o algoritmo superou as soluções conhecidas até então, atingindo ótimos resultados de qualidade e tempo computacional.

Hojabri et al. (2018) descrevem o problema alvo deste trabalho e propõem uma abordagem híbrida que integra CP com *Adaptive Large Neighborhood Search* (ALNS). Nesse método, o ALNS é utilizado para explorar iterativamente o espaço de soluções, enquanto o CP é empregado para reinserir clientes e verificar a viabilidade das modificações, aproveitando suas capacidades de propagação de restrições e poda do espaço de busca. Além disso, os autores geraram um conjunto de instâncias benchmark que foi utilizado em estudos subsequentes.

Liu, Tao e Xie (2019) propuseram uma heurística baseada em ALNS para o VRPTWSyn. Os autores desenvolveram um mecanismo para lidar com a sincronização cruzada utilizando uma matriz quadrada. Essa matriz registra a sequência de visitas dos clientes que necessitam de sincronização, permitindo que o algoritmo verifique, a cada operação de inserção, se a alteração proposta não compromete a ordem das visitas sincronizadas.

Hà et al. (2020) propuseram um novo modelo que combina CP para estruturar as restrições com uma heurística de ALNS baseada em Programação Linear para acelerar a verificação da viabilidade das inserções. Os resultados mostraram melhorias expressivas em relação a métodos puramente baseados em CP, inclusive resolvendo instâncias derivadas de Hojabri et al. (2018).

Polnik, Riccardi e Akartunali (2020) propuseram um algoritmo multietapa aplicado ao agendamento de serviços domiciliares de saúde. Sua estratégia, baseada em CP para modelar as rotas e sincronizações, tem como objetivo decompor o problema em subproblemas menores, seguida por etapas iterativas de refinamento que melhoram as rotas, permitindo resolver instâncias grandes de forma rápida e eficiente.

Ali, Côté e Coelho (2021) apresentam o Problema de Roteamento de Entrega e Instalação (DIRP, *Delivery and Installation Routing Problem*), uma extensão dos VRPTW e VRPMS. Nesse problema, também há dois conjuntos de veículos – um para entregas e outro para instalações – que devem operar de forma coordenada. Porém, a instalação pode ser realizada tanto por uma equipe especializada, quanto pelos mesmos funcionários responsáveis pela entrega. Os autores desenvolveram uma heurística ALNS que obteve resultados de alta qualidade para as instâncias de Hojabri et al. (2018).

Como é possível notar, a literatura sobre o VRPMS é vasta e diversificada, e diversos trabalhos usaram ferramentas em comum para resolver esses problemas, como CP. A utilização de CP oferece uma modelagem bastante expressiva para problemas com restrições complexas – como as janelas de tempo, dependências temporais e as sincronizações entre rotas – mas, conforme observado em estudos como os de Hojabri et al. (2018), essa abordagem pode apresentar tempos de execução consideravelmente altos. Esse aspecto motivou diversos autores a desenvolverem estratégias heurísticas híbridas, como em Hà et al. (2020), Polnik, Riccardi e Akartunali (2020), Ali, Côté e Coelho (2021) e neste trabalho.

Adicionalmente, alguns autores também desenvolveram mecanismos específicos para lidar com o problema de sincronização cruzada, como em Afifi, Dang e Moukrim (2016) e Liu, Tao e Xie (2019). No entanto, a aplicação de tais mecanismos pode, em determinados casos, eliminar combinações viáveis de inserção, reduzindo a qualidade final das soluções – especialmente quando há parâmetros de sincronização para permitir certa flexibilidade, como no caso deste trabalho. Por exemplo, se δ for negativo, isso indica que um dos veículos poderá operar antes do outro, relaxando a necessidade de uma sincronização exata e, assim, a sincronização cruzada não compromete as soluções. Portanto, o presente trabalho não implementará mecanismos de filtragem nesse sentido, optando por uma abordagem que preserva a flexibilidade no espaço de soluções.

Para o leitor interessado em uma visão mais abrangente sobre os desafios e as diversas metodologias aplicadas neste campo, recomenda-se a leitura do levantamento recente de Soares et al. (2024), que propõem um *framework* de modelagem unificado e um sistema de classificação para os diferentes tipos de sincronização presentes na literatura.

3 DEFINIÇÃO FORMAL E MODELAGEM MATEMÁTICA

O problema pode ser formalmente definido da seguinte forma. Considere um grafo direcionado $G = (V, A)$, onde $V = V_{reg} \cup V_{esp}$ é o conjunto de todos os vértices do problema e A é o conjunto de arcos. Define-se $V_{reg} = V_r^+ \cup \{d_b\} \cup \{d_e\}$ como o conjunto de vértices que aparecem nas rotas dos veículos regulares; e $V_{esp} = V_s \cup \{d_b\} \cup \{d_e\}$ como o conjunto de vértices visitados que aparecem nas rotas dos veículos especiais. V_r é o conjunto de clientes regulares, que são visitados apenas por veículos regulares, enquanto V_s é o conjunto de clientes especiais, que requerem a visita de ambos os tipos de veículo. Seja V_s^c o conjunto de vértices que são cópias dos clientes especiais V_s , define-se $V_r^+ = V_r \cup V_s^c$ como o conjunto de vértices de clientes que devem ser visitados por veículos regulares. Sejam d_b e d_e os vértices onde os veículos iniciam e terminam suas rotas. Note que estes dois vértices possuem a mesma localização, representando um único depósito onde está localizado um conjunto de veículos K . O conjunto K é dividido em dois subconjuntos: veículos regulares (conjunto K_{reg}) e veículos especiais (conjunto K_{esp}), e cada veículo $k \in K$ possui capacidade w_k . O conjunto S contém todos os pares de vértices que representam um mesmo cliente especial entre V_s^c e V_s e que devem ser sincronizados, onde cada par $\rho \in S$ é representado como (ρ^{reg}, ρ^{esp}) . Cada par de vértices $\rho \in S$ está associado a δ_ρ e γ_ρ , que representam uma possível defasagem entre os atendimentos regular e especial no cliente especial sincronizado. Cada vértice $i \in V$ está associado a uma demanda q_i , um tempo de serviço p_i^k (para cada veículo $k \in K$), e uma janela de tempo $[l_i, u_i]$. Note que os tempos de serviço no depósito e em suas cópias são iguais a 0. Finalmente, cada arco $(i, j) \in A$ está associado a valores não negativos c_{ij}^k e t_{ij}^k , representando o custo de viagem, que pode refletir a distância ou o custo operacional total, e o tempo de viagem do vértice i ao vértice j para um veículo $k \in K$.

O problema consiste então em construir rotas para a frota de veículos de forma que o custo total de viagem seja minimizado e que as seguintes restrições sejam satisfeitas:

- Cada veículo deve iniciar sua rota no depósito, realizar os atendimentos aos clientes e, por fim, retornar ao depósito.
- Cada cliente regular é atendido por exatamente um veículo regular.
- Cada cliente especial é atendido por exatamente um veículo regular e um veículo especial.
- A demanda total atendida por um veículo não deve exceder sua capacidade w_k .
- Um veículo deve iniciar seu atendimento em um vértice $i \in V$ dentro da janela de tempo $[l_i, u_i]$.

- O tempo de início do serviço em um cliente especial $i \in V_s$, visitado por um veículo especial, deve estar dentro de uma janela de tempo $[y_{\rho^{reg}} - \delta_{\rho}, y_{\rho^{reg}} + \gamma_{\rho}]$. Aqui, $y_{\rho^{reg}}$ é o tempo de início do serviço no vértice ρ^{reg} (vértice que representa o cliente especial i na rota do veículo regular).

As variáveis de decisão do modelo são: x_{ij}^k , que assume valor 1 se o veículo $k \in K$ percorre o arco (i, j) , e 0 caso contrário; e y_i , que representa o instante de início do serviço no vértice i . O VRPMS pode, então, ser formalizado matematicamente:

$$\min \quad \sum_{k \in K} \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} c_{ij}^k x_{ij}^k \quad (1)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{k \in K} \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in V \quad (2)$$

$$\sum_{k \in K_{esp}} \sum_{j \in V} x_{ij}^k = 0 \quad \forall i \in V_{reg} \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K_{reg}} \sum_{j \in V} x_{ij}^k = 0 \quad \forall i \in V_{esp} \quad (4)$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq d_b}} x_{d_b j}^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{\substack{i \in V \\ i \neq d_e}} x_{i d_e}^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (6)$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} x_{ij}^k = \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} x_{ji}^k \quad \forall k \in K, i \in V \quad (7)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} q_i x_{ij}^k \leq Q \quad \forall k \in K \quad (8)$$

$$y_i + p_i^k + t_{ij}^k - M(1 - x_{ij}^k) \leq y_j \quad \forall k \in K, i, j \in V \mid i \neq j \quad (9)$$

$$l_i \leq y_i \leq u_i \quad \forall i \in V \quad (10)$$

$$y_{\rho^{reg}} - \delta_{\rho} \leq y_{\rho^{esp}} \leq y_{\rho^{reg}} + \gamma_{\rho} \quad \forall \rho \in S \quad (11)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, i, j \in V \mid i \neq j \quad (12)$$

$$y_i \in \mathbb{R}_+ \quad \forall i \in V \quad (13)$$

A função objetivo (1) visa minimizar o custo total de deslocamento de todos os veículos. As restrições (2) garantem que cada vértice seja visitado exatamente uma vez por algum veículo. As restrições (3) e (4) asseguram a compatibilidade entre tipos de veículos e vértices, impedindo que veículos especiais atendam vértices regulares e vice-versa. As restrições (5) e (6) obrigam cada veículo a sair do depósito de início d_b e

retornar ao depósito final d_e . A conservação do fluxo é garantida pelas restrições (7), que exigem que cada entrada em um vértice tenha uma saída correspondente. As restrições (8) geram o limite de carga transportada pelos veículos. As restrições (9) e (10) regulam a consistência temporal, respeitando o tempo de serviço e deslocamento, bem como as janelas de tempo definidas para cada cliente. As restrições de sincronização entre visitas regulares e especiais são formalizadas em (11), impondo que a segunda visita ocorra dentro de uma faixa temporal relativa à primeira. Por fim, as restrições (12) e (13) definem os domínios das variáveis de decisão.

4 MÉTODO PROPOSTO

O pseudocódigo do método proposto está apresentado no Algoritmo 1. Ele é dividido em três etapas principais: geração de soluções por meio de uma heurística de Busca Local Iterada (ILS, do inglês *Iterated Local Search*), refinamento de soluções através de um modelo de Particionamento de Conjuntos (SP, do inglês *Set Partitioning*) e validação temporal das soluções utilizando um modelo de sincronização.

Na primeira etapa, o algoritmo executa o procedimento ILS, que retorna uma solução principal s' e um conjunto auxiliar de soluções *SolPool* (Linha 3). Na etapa seguinte, extrai-se um conjunto de rotas viáveis a partir de s' e das soluções em *SolPool*, que são armazenadas em *RotasSP* (Linhas 5–8). O modelo de SP é então executado com *RotasSP*, e a nova melhor solução resultante é adicionada ao conjunto *SolPool* (Linhas 9 e 10). Na terceira etapa, as soluções em *SolPool* são ordenadas em ordem crescente de custo e avaliadas por um modelo de sincronização, responsável por calcular os tempos exatos de início de serviço em cada vértice e verificar a viabilidade da solução quanto às restrições de sincronização (Linhas 11–17). A primeira solução viável encontrada é adotada como solução final do algoritmo.

Em mais detalhes, a Seção 4.2 apresenta os algoritmos de ILS, a Seção 4.3 introduz o modelo de SP utilizado no refinamento e, por fim, a Seção 4.4 detalha a formulação do modelo de sincronização.

Algoritmo 1: ILS-SP-SYNC

```

1  $s^* \leftarrow \emptyset$ 
2  $t^* \leftarrow \emptyset$ 
3  $s', \text{SolPool} \leftarrow \text{ILS}(\dots)$ 
4  $\text{RotasSP} \leftarrow \emptyset$ 
5 para  $s \in \text{SolPool} \cup \{s'\}$  faça
6   para  $r \in s$  faça
7     se  $r$  é viável então
8        $\text{RotasSP} \leftarrow \text{RotasSP} \cup \{r\}$ 
9  $s' \leftarrow \text{Solução do modelo de SP}(\text{RotasSP})$ 
10  $\text{SolPool} \leftarrow \text{SolPool} \cup \{s'\}$ 
11  $\text{SolPool} \leftarrow \text{ordenar}(\text{SolPool})$ 
12 para  $s \in \text{SolPool}$  faça
13    $t \leftarrow \text{Solução do modelo de sincronização}(s)$ 
14   se  $t$  é viável então
15      $s^* \leftarrow s$ 
16      $t^* \leftarrow t$ 
17   pare
18 retorne  $s^*, t^*$ 

```

4.1 Representação da solução

Uma rota contém uma sequência de vértices que representa o trajeto de um veículo visitando os clientes. Uma solução viável para o VRPMS consiste em um conjunto de rotas nas quais todas as demandas e restrições são respeitadas. Em cada rota, avaliam-se as restrições locais — a capacidade do veículo e as janelas de tempo dos clientes visitados. Já na solução completa, são avaliadas as restrições globais — a sincronização entre rotas e a cobertura de todas as visitas.

Na Figura 1, há três clientes regulares e dois clientes especiais. Os vértices 1 a 5 representam clientes atendidos por veículos regulares, enquanto os vértices 6 e 7 representam clientes atendidos por veículos especiais. Os pares de vértices (1, 6) e (2, 7), que pertencem à mesma localidade de cliente, exigem atendimento sincronizado. Nesse exemplo, consideram-se todos os tempos de serviço iguais a 1, $\delta = \gamma = 0$ e que todas as restrições locais estão sendo respeitadas. Arcos sólidos são utilizados para representar as rotas dos veículos regulares, enquanto arcos tracejados indicam a rotas do veículo especial. A variável t_i^k representa o tempo de início do serviço no vértice i pelo veículo k .

As rotas dos veículos são as seguintes:

- Rota do veículo regular 1: **Dep** $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ **Dep**
- Rota do veículo regular 2: **Dep** $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ **Dep**
- Rota do veículo especial: **Dep** $\rightarrow$ 6 $\rightarrow$ 7 $\rightarrow$ **Dep**

A sincronização ocorre entre os pares de vértices (1, 6) e (2, 7), com ambos os veículos chegando simultaneamente aos respectivos clientes ($t_1^1 = t_6^3 = 6$ e $t_2^2 = t_7^3 = 8$).

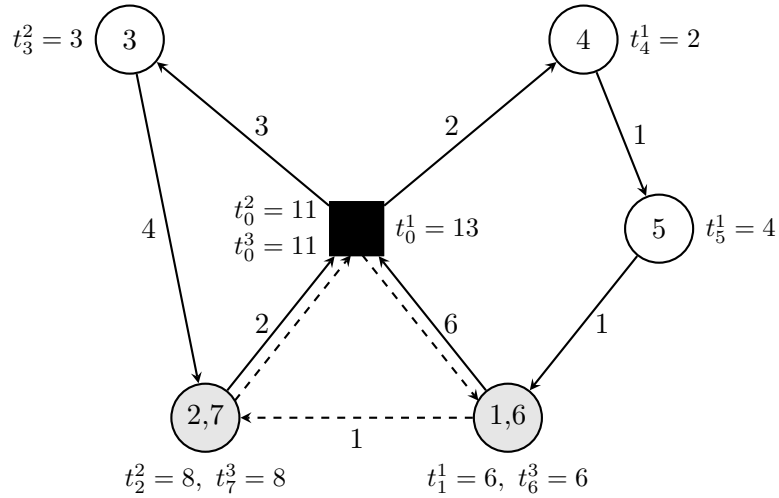


Figura 1: Exemplo de uma solução viável para o VRPMS.

4.2 Geração de soluções via ILS

O ILS é uma meta-heurística que permite explorar diferentes regiões do espaço de busca por meio da combinação de mecanismos de intensificação e diversificação (LOURENÇO; MARTIN; STÜTZLE, 2019). A primeira etapa do algoritmo utiliza o ILS para obter uma solução de melhor qualidade e, paralelamente, armazena outras soluções candidatas em um conjunto auxiliar, que será utilizado nas etapas seguintes.

O pseudocódigo do ILS está apresentado no Algoritmo 2. O algoritmo é executado I_R vezes (Linhas 3–17). A cada iteração, uma nova solução inicial é gerada (Linha 4), e uma sequência de operações de melhoria - por meio de busca local - e de diversificação - por meio de perturbação - é aplicada à solução durante I_{ILS} iterações (Linhas 7–15). A busca local (Linha 8) tem como objetivo explorar o espaço de soluções até atingir um ótimo local, enquanto a perturbação (Linha 13) permite escapar desse ótimo local, possibilitando a exploração de novas regiões do espaço de busca. Ao final desse processo, obtêm-se tanto a melhor solução encontrada (s^*), quanto um conjunto de soluções candidatas ($SolPool$), que serão aproveitadas nas etapas posteriores.

Algoritmo 2: ILS(I_R, I_{ILS})

```

1  $s^* \leftarrow \emptyset$ 
2  $SolPool \leftarrow \emptyset$ 
3 para  $iterR \leftarrow 1, \dots, I_R$  faça
4    $s \leftarrow \text{Construção}()$ 
5    $s' \leftarrow s$ 
6    $iterILS \leftarrow 0$ 
7   enquanto  $iterILS < I_{ILS}$  faça
8      $s \leftarrow \text{BuscaLocal}(s)$ 
9      $SolPool \leftarrow SolPool \cup \{s\}$ 
10    se  $f(s) < f(s')$  então
11       $s' \leftarrow s$ 
12       $IterILS \leftarrow 0$ 
13     $s \leftarrow \text{Perturbação}(s')$ 
14     $SolPool \leftarrow SolPool \cup \{s\}$ 
15     $iterILS \leftarrow iterILS + 1$ 
16  se  $f(s') < f(s^*)$  então
17     $s^* \leftarrow s'$ 
18 retorne  $s^*, SolPool$ 

```

4.2.1 Construção

Neste ponto, o objetivo é apenas gerar uma solução inicial contendo todos os vértices, sem se preocupar com os tempos de sincronização. Para isso, cria-se uma solução composta por rotas unitárias, ou seja, cada vértice do conjunto é alocado individualmente em uma rota distinta, garantindo a cobertura completa. Em seguida, aplica-se uma fase de busca local ignorando temporariamente as restrições de sincronização, a fim de melhorar a qualidade da solução inicial antes da aplicação das fases posteriores do algoritmo.

4.2.2 Busca local

A busca local implementada é composta pelo método de Descida Variável em Vizinhança Aleatória (RVND, do inglês *Randomized Variable Neighborhood Descent*) (SUBRAMANIAN et al., 2010) e integrado com uma busca de melhor movimento em dois estágios, por conta do quão custoso é avaliar a restrição de sincronização em cada movimento de vizinhança.

A busca entre rotas (Inter-RVND) é hierárquica e apresentada no Algoritmo 3. Primeiro, uma estrutura de vizinhança entre rotas é selecionada aleatoriamente (Linha 5) e explorada na solução. Caso a vizinhança encontre um movimento que melhore a solução atual em algum par de rotas, o movimento é aplicado (Linha 8), a lista de vizinhanças entre rotas é preenchida novamente com todas as vizinhanças entre rotas (Linha 9), e as rotas modificadas são então melhoradas por meio de uma busca local dentro das rotas (Linhas 10–12). Caso contrário, a vizinhança entre rotas é removida da lista (Linha 14). A busca dentro das rotas (Intra-RVND), apresentada no Algoritmo 4, explora exaustivamente a lista de vizinhanças até nenhuma vizinhança conseguir melhorar mais a solução (Linhas 4–9).

Algoritmo 3: Inter-RVND(s)

```

1  $s' \leftarrow \emptyset$ 
2  $NL \leftarrow$  Lista de vizinhanças
3  $f \leftarrow$  Função de avaliação de soluções
4 enquanto  $NL \neq \emptyset$  faça
5    $v \leftarrow$  Vizinhança aleatória de  $NL$ 
6    $s' \leftarrow$  BuscaDoisEstágios( $s, v$ )
7   se  $f(s') < f(s)$  então
8      $s \leftarrow s'$ 
9      $NL \leftarrow$  Lista de vizinhanças
10     $r^1, r^2 \leftarrow$  Rotas modificadas em  $s'$  por  $v$ 
11     $r^1 \leftarrow$  Intra-RVND( $r^1$ )
12     $r^2 \leftarrow$  Intra-RVND( $r^2$ )
13  senão
14     $NL \leftarrow NL \setminus v$ 
15 retorne  $s'$ 
```

Algoritmo 4: Intra-RVND(s)

```

1  $s' \leftarrow \emptyset$ 
2  $NL \leftarrow$  Lista de vizinhanças
3  $f \leftarrow$  Função de avaliação de soluções
4 enquanto  $f(s') < f(s)$  faça
5    $NL \leftarrow \text{rand}(NL)$ 
6   para  $v \in NL$  faça
7      $s' \leftarrow$  BuscaDoisEstágios( $s, v$ )
8     se  $f(s') < f(s)$  então
9        $s \leftarrow s'$ 
10 retorne  $s'$ 
```

As estruturas de vizinhança utilizadas são descritas abaixo:

- *IntraShift*(n): Move uma subsequência de n vértices consecutivos para outra posição dentro da mesma rota, preservando a ordem.
- *IntraSwap*(n, m): Troca duas subsequências de n e m vértices dentro da mesma rota.
- *2-opt*: Inverte a ordem dos vértices em um segmento de rota, removendo duas arestas e reconectando os extremos.
- *InterShift*(n): Move uma subsequência de n vértices consecutivos de uma rota para outra, inserindo-a em uma nova posição.
- *InterSwap*(n, m): Troca duas subsequências de n e m vértices entre duas rotas diferentes.
- *2-opt**(*modo*): Reconfigura duas rotas trocando os segmentos finais das rotas a partir de certos pontos de corte. No modo *Forward*, as subsequências trocadas mantêm sua ordem original; no modo *Backward*, as subsequências são invertidas antes de serem trocadas.

Para o Intra-RVND, foram utilizados os movimentos *IntraShift*(1), *IntraShift*(2), *IntraSwap*(1, 1), *IntraSwap*(1, 2), *IntraSwap*(2, 2) e *2-opt*. Para o Inter-RVND, foram utilizados os movimentos *InterShift*(1), *InterShift*(2), *InterSwap*(1, 1), *InterSwap*(1, 2), *InterSwap*(2, 2), *2-opt**(*Forward*), e *2-opt**(*Backward*).

Na busca pelo melhor movimento em uma determinada vizinhança, adota-se uma abordagem em dois estágios, conforme ilustrado no Algoritmo 5. O primeiro estágio percorre todos os movimentos possíveis da vizinhança v na solução s e armazena, de forma ordenada, os melhores $|EliteCands|$ movimentos, com base em uma avaliação simplificada que ignora as restrições de sincronização (Linhas 5 e 6). Em seguida, o segundo estágio avalia esse subconjunto reduzido de candidatos considerando agora as restrições de sincronização (Linhas 7–9). Caso exista um melhor movimento viável entre eles, ele é então aplicado à solução atual (Linha 10). A motivação para essa estratégia reside no fato de que avaliar a sincronização dos tempos de visita aos clientes especiais é uma operação computacionalmente custosa de complexidade linear e abordado em mais detalhes na Seção 4.2.4. Para reduzir esse custo computacional, realiza-se um *trade-off* entre a qualidade da solução e o tempo de execução.

Algoritmo 5: BuscaDoisEstágios(s, v)

```
1  $MelhorCand \leftarrow \emptyset$ 
2  $EliteCands \leftarrow$  Lista ordenada de movimentos vazia
3  $f' \leftarrow$  Função de avaliação de movimentos em primeiro estágio
4  $f'' \leftarrow$  Função de avaliação de movimentos em segundo estágio
5 para  $mv \in \mathbf{MovimentosVizinhança}(s, v)$  faça
6   | Adiciona  $mv$  em  $EliteCands$  de forma ordenada, avaliando com  $f'(mv)$ 
7 para  $cand \in EliteCands$  faça
8   | se  $f''(cand) < f''(MelhorCand)$  então
9     |  $MelhorCand \leftarrow cand$ 
10  $s' \leftarrow$   $MelhorCand$  aplicado em  $s$ 
11 retorne  $s'$ 
```

4.2.3 Perturbação

No algoritmo, há duas opções de perturbação: a abordagem de *Ruin and Recreate* (R&R) (SCHRIMPF et al., 2000) ou a aplicação de movimentos aleatórios do tipo *InterShift*. Caso a solução seja viável nesse ponto do algoritmo, a escolha entre os dois métodos ocorre com probabilidade igual. Caso contrário, há 90% de chance de aplicar o R&R e 10% de chance de realizar de 2 a 4 movimentos *InterShift*(1) aleatórios.

A estratégia R&R consiste em destruir parcialmente a solução atual e, em seguida, reconstruí-la, buscando escapar de ótimos locais. Para a etapa de destruição, adota-se a estratégia de remoção de sequências adjacentes proposta por Christiaens e Vanden Berghe (2020). Essa abordagem seleciona aleatoriamente uma rota e um de seus clientes e, a partir dele, remove uma sequência contínua de clientes adjacentes dentro da mesma rota, criando lacunas que permitem a reinserção desses clientes em posições potencialmente mais vantajosas. Esse mecanismo é complementado pela remoção de vértices pertencentes a pares de visitas sincronizadas cujo vértice complementar não está presente em nenhuma outra rota da solução. A estratégia de reconstrução busca e aplica os melhores movimentos de inserção para os vértices que não estão mais cobertos nas rotas existentes.

4.2.4 Avaliação das restrições

As restrições do problema podem ser divididas em duas categorias: locais e globais. As restrições de capacidade do veículo e de janelas de tempo dos vértices são locais a cada rota, enquanto as de cobertura de visitas e de sincronização das visitas especiais são globais à solução completa.

Para as restrições locais, foi utilizada uma abordagem de concatenação de sub-sequências. Uma matriz 2D é utilizada para armazenar a propagação das informações temporais e de capacidade referentes às concatenações dos percursos possíveis dentro de uma rota. Por exemplo, considere a rota $r = [1, 2, 3]$. Uma matriz M associada a essa rota é inicializada com dimensões 3×3 , em que M_{13} armazena as informações locais do

percurso $1 \rightarrow 3$, e M_{32} armazena as informações locais do percurso $3 \rightarrow 2$. Para propagar as informações de capacidade, basta manter um registro do valor de consumo por vértice e somá-lo ao concatenar as informações individuais. Para calcular os tempos de visita de uma rota, utiliza-se a estrutura definida por Vidal et al. (2013), que permite propagar informações temporais de forma eficiente ao longo da rota, fornecendo a configuração com menor atraso possível. Essa estrutura associa a cada subsequência de vértices um conjunto de atributos agregados: tempo total de serviço, tempo total de espera, atraso acumulado e os tempos mais cedo e mais tarde de partida do primeiro vértice da subsequência. Ao concatenar essas estruturas de forma incremental, obtêm-se as informações temporais para qualquer subsequência dentro da rota. Essa abordagem permite, ao avaliar um movimento de vizinhança, quebrar a solução em partes alteradas e não alteradas e reutilizar os blocos de informações locais já calculados, calculando apenas os trechos novos da solução, permitindo avaliar se a capacidade foi excedida e se houve algum atraso em tempo $\mathcal{O}(1)$ amortizado.

A restrição de cobertura de visitas é sempre satisfeita, uma vez que a fase de Construção e a fase de restauração da Perturbação garantem essa cobertura, e a busca local não realiza movimentos que removem ou adicionam vértices da cobertura global — apenas os realoca entre rotas ou posições.

Para verificar a restrição de sincronização, é necessário calcular os tempos de início de serviço dos vértices das rotas que foram modificadas por algum movimento, e compará-los com os tempos nas demais rotas que complementam os atendimentos sincronizados, o que torna essa operação de complexidade $\mathcal{O}(n)$. Por isso, a avaliação da sincronização também utiliza as estruturas propostas em Vidal et al. (2013) e baseia-se nas Expressões (14) e (15), que devem ser satisfeitas para todo par de vértices sincronizados. Nelas, S representa o conjunto de pares de vértices que requerem sincronização; t_v^{cedo} e t_v^{tarde} correspondem, respectivamente, aos tempos mais cedo e mais tarde possíveis de início de serviço no vértice v ; e δ_ρ e γ_ρ são os parâmetros de sincronização para o par ρ sincronizado.

$$t_{\rho^{reg}}^{cedo} - \delta_\rho \leq t_{\rho^{esp}}^{tarde} \quad \forall \rho \in S \quad (14)$$

$$t_{\rho^{esp}}^{cedo} \leq t_{\rho^{reg}}^{tarde} + \gamma_\rho \quad \forall \rho \in S \quad (15)$$

As Equações (16)–(18) demonstram como calcular os tempos t_v^{cedo} e t_v^{tarde} com base nas estruturas de propagação temporal de Vidal et al. (2013). Nelas, R representa o conjunto de rotas; V é o conjunto total de vértices; $V_r \subset V$ é o subconjunto de vértices pertencente à rota r ; σ_v representa a estrutura temporal individual associada ao vértice v , η_r^v é a estrutura temporal acumulada do início da rota r até o vértice v ; e $\oplus$ representa o operador de concatenação entre estruturas. As funções $E(\cdot)$, $L(\cdot)$ e $D(\cdot)$ retornam, respectivamente, o horário de partida mais cedo possível, o horário de partida mais tarde

possível, e a duração total (incluindo tempo de viagem, espera e serviço) associadas à estrutura temporal. Em termos práticos, o tempo mais cedo (ou mais tarde) de início de serviço em um vértice v é obtido somando-se o tempo de partida mais cedo (ou mais tarde) possível da rota ao tempo acumulado necessário para alcançar e finalizar o serviço em v , e subtraindo-se o tempo de serviço nesse vértice — uma vez que se deseja calcular o instante de início do atendimento.

$$\eta_r^v = \bigoplus_{k=1}^v \sigma_k \quad \forall r \in R, v \in V_r \quad (16)$$

$$t_v^{\text{cedo}} = E(\eta_r^{|V_r|}) + D(\eta_r^v) - D(\sigma_v) \quad \forall r \in R, v \in V_r \quad (17)$$

$$t_v^{\text{tarde}} = L(\eta_r^{|V_r|}) + D(\eta_r^v) - D(\sigma_v) \quad \forall r \in R, v \in V_r \quad (18)$$

Como se pode observar, ao utilizar o método de propagação nas estruturas de Vidal et al. (2013), o algoritmo não obtém exatamente o instante em que o veículo chegará a um determinado vértice, mas sim uma janela entre os tempos mais cedo e mais tarde possíveis para garantir o menor atraso (a menos que esses tempos coincidam). Isso implica que a verificação de sincronização no ILS se torna uma aproximação mais fraca do que a considerada na descrição do problema, mas, em contrapartida, traz ganhos significativos de desempenho computacional para o método heurístico. Em razão disso, a etapa final, apresentada na Seção 4.4, descreve um mecanismo para compensar o impacto dessa aproximação.

4.3 Refinamento de soluções via SP

Nessa etapa, propõe-se um modelo matemático de SP para encontrar uma nova solução de menor custo. O modelo seleciona, a partir de um conjunto pré-gerado de rotas viáveis, um subconjunto ótimo de rotas que respeite todas as restrições globais e minimize o custo total. Como entrada, são utilizadas as rotas da melhor solução (s^*) e do conjunto de soluções candidatas (*SolPool*) geradas pelo ILS. A partir de s^* e das soluções em *SolPool*, extraem-se todas as rotas viáveis, ou seja, aquelas que atendem às restrições locais (capacidade e janelas de tempo). As restrições globais (sincronização e cobertura), por exigirem análise conjunta de múltiplas rotas, são modeladas diretamente no modelo. No pior cenário, a solução obtida será equivalente a s^* .

Seja R o conjunto de rotas disponíveis, V o conjunto de vértices do problema, $V_{reg} \subset V$ o subconjunto de vértices regulares, e S o conjunto de pares de vértices sujeitos a restrições de sincronização, onde cada par $\rho \in S$ é representado como (ρ^{reg}, ρ^{esp}) . Cada rota $r \in R$ possui um custo associado c_r . A cobertura de vértices é representada por a_v^r , que assume valor 1 se o vértice $v \in V$ é visitado pela rota $r \in R$, e 0 caso contrário.

Para cada par de vértices $\rho \in S$, são definidos δ_ρ e γ_ρ , que representam uma possível defasagem entre os atendimentos sincronizados. Além disso, t_{rv}^{cedo} e t_{rv}^{tarde} representam, respectivamente, os tempos mais cedo e mais tarde de início de serviço no vértice $v \in V$ pela rota $r \in R$.

Considerando a variável de decisão y_r , que assume valor 1 se a rota $r \in R$ for selecionada na solução, e 0 caso contrário, define-se o modelo de Programação Inteira da seguinte forma:

$$\min \quad \sum_{r \in R} c_r y_r \quad (19)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{r \in R} a_v^r y_r = 1 \quad \forall v \in V_{reg} \quad (20)$$

$$\sum_{r \in R} (a_{\rho^{reg}}^r - a_{\rho^{esp}}^r) y_r = 0 \quad \forall \rho \in S \quad (21)$$

$$\sum_{r \in R} [(t_{r\rho^{reg}}^{cedo} - \delta_\rho) a_{\rho^{reg}}^r - t_{r\rho^{esp}}^{tarde} a_{\rho^{esp}}^r] y_r \leq 0 \quad \forall \rho \in S \quad (22)$$

$$\sum_{r \in R} [t_{r\rho^{esp}}^{cedo} a_{\rho^{esp}}^r - (t_{r\rho^{reg}}^{tarde} + \gamma_\rho) a_{\rho^{reg}}^r] y_r \leq 0 \quad \forall \rho \in S \quad (23)$$

$$y_r \in \{0, 1\} \quad \forall r \in R \quad (24)$$

A função objetivo (19) busca minimizar o custo total das rotas selecionadas. As restrições (20) e (21) garantem a cobertura das visitas: as restrições (20) asseguram que todas as visitas regulares aos clientes sejam realizadas exatamente uma vez, por uma única rota, enquanto as restrições (21) complementam essa cobertura para os vértices especiais dos clientes sujeitos a sincronização. As restrições (22) e (23) impõem as janelas de sincronização entre pares de vértices, sendo uma reformulação direta das Expressões (14) e (15) da Seção 4.2.4. Por fim, as restrições (24) definem a natureza binária das variáveis de decisão y_r .

4.4 Validação de soluções via modelo de sincronização

Durante as fases de obtenção de soluções heurísticas e refinamento das soluções (Seções 4.2 e 4.3), as restrições de sincronização são avaliadas com uma certa folga, conforme apresentado na Seção 4.2.4. Embora isso melhore a eficiência computacional, a solução final pode apresentar violações quando submetida às restrições originais e estritas de sincronização. Assim, essa etapa define um modelo matemático para calcular os tempos exatos de início de serviço em cada vértice e verificar a viabilidade da solução obtida no SP quanto às janelas de sincronização entre rotas. Caso essa solução não seja viável, também é válido verificar as demais soluções do *SolPool*, pois elas podem conter

configurações alternativas que satisfazem as restrições de sincronização.

Sejam R o conjunto de rotas da solução, V o conjunto de vértices do problema, $V_r \subset V$ o subconjunto de vértices pertencentes à rota $r \in R$, e S o conjunto de pares de vértices sujeitos a restrições de sincronização. Para cada par $\rho \in S$, representado por (ρ^{reg}, ρ^{esp}) , $R_\rho \subset R$ contém o par de rotas associadas aos vértices de ρ , denotado por (r^{reg}, r^{esp}) . Para cada rota $r \in R$ e vértices $(v, w) \in V_r$, define-se a janela de tempo disponível para início do serviço como $[l_v^r, u_v^r]$, o tempo de serviço como d_v^r , e o tempo de deslocamento entre os vértices v e w como t_{vw}^r . Além disso, para cada par de vértices $\rho \in S$, δ_ρ e γ_ρ representam as defasagens permitidas na sincronização.

Considerando a variável de decisão s_v^r , que indica o instante de início do serviço no vértice $v \in V$ da rota $r \in R$, define-se o modelo de Programação Linear da seguinte forma:

$$\min \quad \sum_{r \in R} (s_{|V_r|}^r - s_1^r) \quad (25)$$

$$\text{sujeito a} \quad l_v^r \leq s_v^r \leq u_v^r \quad \forall r \in R, v \in V_r \quad (26)$$

$$s_v^r + d_v^r + t_{vw}^r \leq s_w^r \quad \forall r \in R, v, w \in V_r \mid v < w \quad (27)$$

$$s_{\rho^{reg}}^r - \delta_\rho \leq s_{\rho^{esp}}^r \leq s_{\rho^{reg}}^r + \gamma_\rho \quad \forall \rho \in S, r \in R_\rho \quad (28)$$

$$s_v^r \in \mathbb{R}_+ \quad \forall r \in R, v \in V_r \quad (29)$$

A função objetivo (25) busca minimizar o somatório das durações efetivas de cada rota. As restrições (26) garantem que os tempos de início estejam dentro das janelas permitidas. As restrições (27) impõem a conservação temporal entre os vértices de uma mesma rota. As restrições (28) asseguram a validade das restrições de sincronização originais. Por fim, as restrições (29) definem o domínio da variável de início de serviço.

Se a solução for considerada viável, ela é validada como solução final do algoritmo. Caso contrário, outras soluções do conjunto *SolPool* são avaliadas iterativamente com o mesmo modelo, até que se encontre a solução viável de menor custo.

5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Para validar o trabalho, foram realizados extensivos experimentos e análises computacionais. A Seção 5.1 descreve a natureza das instâncias utilizadas. A Seção 5.2 apresenta as configurações do ambiente experimental. A Seção 5.3 analisa o desempenho do algoritmo proposto e de suas etapas, enquanto a Seção 5.4 discute a comparação com o método de Hojabri et al. (2018).

5.1 Conjunto de instâncias

Foram selecionadas as instâncias propostas por Hojabri et al. (2018), disponíveis em: <https://data.mendeley.com/datasets/v5hf63zxk2/1>. As instâncias foram geradas a partir dos conjuntos clássicos de Solomon (1987) e Homberger e Gehring (1999), com $n = 25, 50, 100$ e 200 clientes. Nessas instâncias euclidianas, o tempo de viagem é igual à distância.

Além do tamanho, as instâncias são classificadas em seis classes — R1, R2, C1, C2, RC1 e RC2 — variando segundo a distribuição espacial dos clientes (aleatória (R), agrupada (C) ou mista (RC)) e o horizonte de planejamento (curto (1) ou longo (2)). Para transformá-las em instâncias do VRPMS, foi considerado um percentual de clientes especiais (S_p) de 5%, 25% e 50%. O número de clientes especiais é dado por $S_p \times n$, com o primeiro cliente sempre especial, e os demais definidos com intervalos regulares de $\frac{1}{S_p}$.

A construção das instâncias maiores é incremental: por exemplo, as de 50 clientes são obtidas adicionando-se clientes às de 25, mantendo-se os clientes especiais. Agrupam-se instâncias em uma mesma categoria quando compartilham tamanho, classe e proporção de clientes especiais.

No total, há 684 instâncias, organizadas em 72 categorias. Cada categoria contém de 8 a 12 instâncias, com mesmas localizações de clientes, mas diferentes janelas de tempo. Como apontado por Hà et al. (2020), as instâncias C101, C105 e C106, com 25 clientes e 2 clientes especiais, contêm dados incorretos e foram removidas. Os parâmetros de sincronização δ e γ foram fixados em 0 e 10, respectivamente, para todos os pares sincronizados.

5.2 Ambiente e configuração experimental

O algoritmo e a modelagem matemática foram implementados em Julia (versão 1.11.3) e executados em um computador com processador Intel i5-13420H (2,1 GHz), 16 GB de RAM e sistema Linux Ubuntu 24.04.2. O HiGHS (versão 1.8.1) foi utilizado na resolução dos modelos de SP e sincronização. Os parâmetros do algoritmo foram definidos como: $I_R = 3$, $I_{ILS} = 5$, tamanho máximo do conjunto de movimentos candidatos na

busca em dois estágios (*EliteCands*) igual a 50, tempo limite do ILS de 8 minutos, e tempo limite de 30 segundos para os modelos com HiGHS. Instâncias de tamanhos 25 e 50 foram executadas 10 vezes cada; as de 100 e 200, 5 vezes.

5.3 Análise da performance do algoritmo e suas etapas

As Tabelas 1 e 2 apresentam os resultados obtidos nas três principais etapas do algoritmo para cada categoria de instância (definida pelas colunas *Tam* — número total de clientes —, *Classe* e *Sin* — número de clientes especiais). A coluna *ILS* mostra os valores das soluções obtidas na primeira etapa, baseada em ILS. A coluna *SP* corresponde aos valores obtidos após a aplicação do modelo de SP sobre a solução principal e o conjunto auxiliar de soluções. Já a coluna *SYNC* mostra os valores das soluções finais, selecionadas após a validação pelo modelo de sincronização. Cada linha dessas colunas representa a média dos valores médios obtidos nas múltiplas execuções das 8 a 12 instâncias que compõem a respectiva categoria. As colunas *SP-Imp* e *SYNC-Diff* reportam indicadores adicionais: *SP-Imp* expressa a melhora percentual média obtida com o SP em relação ao valor da solução do ILS, calculada pela Equação (30); já *SYNC-Diff* indica a porcentagem de soluções finais que não foram a melhor solução em termos de valor, mas sim uma alternativa viável selecionada do *SolPool*. Por fim, a coluna *Viab* mostra a taxa de sucesso do algoritmo, ou seja, a porcentagem de instâncias da categoria cuja solução viável foi encontrada dentro do tempo limite.

$$SP-Imp = 100 \times (ILS - SP) / ILS \quad (30)$$

Pelos tempos de execução, observa-se que a primeira etapa (*ILS*) é, de longe, a mais custosa computacionalmente, como esperado, por ser o momento em que ocorre a exploração intensiva do espaço de soluções. As outras duas etapas (*SP* e *SYNC*) são significativamente mais rápidas, com tempos médios de execução inferiores a 1 segundo — com exceção das categorias 100-C1-25, 100-R1-50, 100-C1-50 e 200-C1-50. Além disso, o impacto das restrições de sincronização torna-se evidente.

Como descrito anteriormente, o aumento no número de clientes especiais implica que mais clientes exigem sincronização, o que resulta em um maior número de vértices e em maior interdependência entre as rotas. Esse efeito é observado em todas as categorias com mesmo número total de clientes, na qual o aumento do valor de *Sin* acarreta um crescimento significativo nos tempos de execução. Nesse caso, o acréscimo percentual médio no tempo foi de 125,60% ao passar de 5% para 25% de clientes especiais, e de 118,74% ao passar de 25% para 50%. Os valores das soluções também aumentam, pois são necessárias visitas adicionais aos clientes especiais, o que aumenta a distância total percorrida.

Através de *SP-Imp*, observa-se que a etapa de SP foi efetiva em melhorar a solução principal, com ganhos em 69 das 72 categorias (95,83%), ainda que a maior melhoria registrada tenha sido de apenas 3,59%, na categoria 50-RC2-25. Já os valores de *SYNC-Diff* evidenciam a importância de validar a solução na terceira etapa, com o conjunto auxiliar de soluções sendo utilizado para obter a solução final também em 69 categorias. Nessas categorias, os valores diferentes de 0% indicam a proporção de instâncias (entre 8 a 12 por categoria) em que o mecanismo descrito foi necessário. O uso médio do mecanismo entre as categorias foi de 57,53%.

A coluna *Viab* fornece informações importantes ao evidenciar as categorias em que o algoritmo enfrentou maiores dificuldades. No total, o método foi capaz de obter uma solução final viável em 633 das 681 instâncias utilizadas (92,95%). As falhas de resolução ocorreram nas categorias com tamanho 100 e 50 clientes especiais, e com tamanho 200 e 50 ou 100 clientes especiais.

Esses resultados indicam que, a partir de 50 clientes especiais, as restrições de sincronização tornam o problema significativamente mais difícil de resolver com a configuração de parâmetros adotada. Vale destacar que, no caso das instâncias com 200 clientes e 50% de clientes especiais, todas foram interrompidas por limite de tempo, o que impossibilitou uma exploração mais aprofundada do espaço de soluções. A lista das 48 instâncias que o algoritmo não obteve uma solução viável encontra-se no Apêndice A.

5.4 Comparação com o algoritmo de Hojabri et al. (2018)

A Tabela 3 compara os resultados obtidos pelos métodos propostos neste trabalho com os de Hojabri et al. (2018), para cada categoria de instância (definida pelas colunas *Tam* — número total de clientes —, *Classe* e *Sin* — número de clientes especiais). As colunas *ILS-SP-SYNC* e *CP-ALNS* apresentam, respectivamente, os valores das soluções finais do algoritmo proposto neste trabalho e da abordagem de Hojabri et al. (2018). Cada linha dessas colunas representa a média dos melhores resultados obtidos nas múltiplas execuções de cada uma das 8 a 12 instâncias que compõem a respectiva categoria. A coluna *Melhor* indica, para cada categoria, em quantas instâncias o algoritmo proposto obteve uma solução final superior à do método de CP-ALNS. A coluna *Gap* apresenta a diferença percentual entre os dois métodos, calculada conforme a Equação (31).

Para fins de uma comparação justa entre as médias, considera-se apenas as categorias para as quais o método proposto obteve 100% de viabilidade, conforme indicado nas Tabelas 1 e 2. Para o leitor interessado nos resultados das instâncias resolvidas dentro das categorias que não alcançaram 100% de viabilidade, recomenda-se a consulta ao Apêndice B.

Tabela 1: Resultados para as instâncias de 25, 50, 100 e 200 clientes.

Tam	Classe	Sin	Valores das Soluções			Tempos de Execução (s)			SP-Imp (%)	SYNC-Diff (%)	Viab (%)
			ILS	SP	SYNC	ILS	SP	SYNC			
25	R1	2	530,24	530,19	530,19	0,671	0,027	0,001	0,01	0,00	100,00
			449,79	449,78	449,79	0,705	0,031	0,001	0,00	9,09	100,00
			241,54	241,54	241,54	0,429	0,026	0,001	0,00	0,00	100,00
			290,36	290,36	290,39	0,690	0,027	0,001	0,00	12,50	100,00
			530,66	527,99	528,01	0,657	0,028	0,001	0,51	12,50	100,00
			487,41	486,04	486,06	0,660	0,033	0,001	0,28	25,00	100,00
	R2	7	687,77	686,01	688,04	1,363	0,038	0,001	0,26	8,33	100,00
			601,74	600,96	615,24	1,391	0,043	0,006	0,13	81,82	100,00
			367,30	366,49	366,80	1,688	0,049	0,001	0,22	11,11	100,00
			365,58	364,67	367,54	1,487	0,054	0,002	0,25	62,50	100,00
			655,93	650,32	653,89	1,295	0,034	0,003	0,86	75,00	100,00
			610,06	608,20	623,89	1,342	0,036	0,005	0,31	87,50	100,00
	C1	13	823,19	819,30	821,49	2,633	0,055	0,002	0,47	33,33	100,00
			725,37	721,47	735,52	2,896	0,085	0,007	0,54	90,91	100,00
			400,81	398,70	405,77	3,609	0,089	0,003	0,53	33,33	100,00
			456,83	455,11	462,97	3,275	0,082	0,003	0,38	50,00	100,00
			711,83	703,24	706,70	2,599	0,045	0,002	1,21	25,00	100,00
			647,83	633,75	642,44	2,617	0,055	0,003	2,17	75,00	100,00
50	R1	3	875,04	871,79	872,35	3,444	0,032	0,001	0,37	50,00	100,00
			725,32	723,04	730,51	2,956	0,033	0,005	0,32	81,82	100,00
			453,07	452,10	454,40	2,705	0,035	0,002	0,21	22,22	100,00
			470,18	470,08	471,12	2,429	0,035	0,002	0,02	25,00	100,00
			982,87	970,53	971,64	2,839	0,029	0,001	1,26	12,50	100,00
			799,11	785,86	797,78	2,550	0,038	0,005	1,66	25,00	100,00
	R2	13	1149,24	1142,72	1145,30	7,190	0,060	0,002	0,57	58,33	100,00
			984,61	979,68	996,84	6,940	0,082	0,009	0,50	90,91	100,00
			716,55	709,69	724,83	7,488	0,071	0,006	0,96	77,78	100,00
			699,29	692,72	724,16	7,142	0,088	0,012	0,94	87,50	100,00
			1258,46	1237,72	1253,21	6,557	0,048	0,004	1,65	50,00	100,00
			1074,34	1039,93	1080,46	6,894	0,063	0,010	3,20	75,00	100,00
	C1	25	1338,87	1322,95	1327,28	22,569	0,238	0,005	1,19	41,67	100,00
			1158,74	1152,38	1188,99	22,083	0,316	0,026	0,55	90,91	100,00
			807,94	791,82	804,69	25,076	0,337	0,007	1,99	66,67	100,00
			806,49	800,85	829,38	22,389	0,229	0,025	0,70	87,50	100,00
			1388,51	1359,41	1388,50	19,817	0,103	0,011	2,10	62,50	100,00
			1178,98	1136,64	1188,68	20,717	0,138	0,015	3,59	100,00	100,00
100	R1	5	1393,54	1382,01	1386,59	36,241	0,100	0,005	0,83	58,33	100,00
			1092,34	1090,00	1112,17	41,913	0,135	0,026	0,21	90,91	100,00
			1034,95	1029,58	1036,16	25,337	0,057	0,003	0,52	44,44	100,00
			816,41	814,76	852,51	20,716	0,062	0,022	0,20	75,00	100,00
			1626,30	1613,35	1616,66	33,414	0,080	0,003	0,80	37,50	100,00
			1277,03	1268,14	1284,95	31,652	0,094	0,014	0,70	75,00	100,00
	R2	25	1779,13	1760,55	1801,02	57,454	0,414	0,034	1,04	83,33	100,00
			1425,11	1423,03	1478,31	52,002	0,310	0,050	0,15	54,55	100,00
			1646,49	1624,05	1689,28	115,938	1,133	0,049	1,36	88,89	100,00
			1302,26	1286,93	1346,96	99,387	0,445	0,058	1,18	75,00	100,00
			2171,95	2144,77	2173,08	68,691	0,528	0,017	1,25	100,00	100,00
			1775,78	1751,51	1806,81	58,190	0,542	0,019	1,37	100,00	100,00
	C1	50	2121,18	2099,65	2147,87	210,483	1,787	0,047	1,01	83,33	91,67
			1848,30	1839,03	1904,52	195,286	0,971	0,061	0,50	63,64	63,64
			1956,55	1905,39	1977,26	234,251	2,295	0,040	2,61	66,67	88,89
			1549,96	1527,99	1637,59	126,357	0,620	0,045	1,42	100,00	100,00
			2546,32	2499,61	2546,55	145,731	0,554	0,022	1,84	100,00	100,00
			2176,03	2159,31	2267,39	127,622	0,821	0,079	0,77	87,50	87,50

Tabela 2: Resultados para as instâncias de 25, 50, 100 e 200 clientes (continuação).

Tam	Classe	Sin	Valores das Soluções			Tempos de Execução (s)			SP-Imp (%)	SYNC-Diff (%)	Viab (%)
			ILS	SP	SYNC	ILS	SP	SYNC			
200	R1	10	4105,60	4080,27	4109,76	348,411	0,363	0,020	0,62	70,00	100,00
	R2		3606,15	3583,16	3583,16	306,801	0,279	0,003	0,64	0,00	100,00
	C1		3491,09	3453,95	3474,13	292,502	0,189	0,014	1,06	60,00	100,00
	C2		2629,89	2611,54	2647,60	272,292	0,253	0,036	0,70	80,00	100,00
	RC1		4099,84	4063,92	4087,54	383,784	0,494	0,015	0,88	60,00	100,00
	RC2		3269,90	3249,00	3307,57	310,066	0,273	0,032	0,64	50,00	100,00
	R1	50	5671,13	5636,93	5760,38	478,140	0,584	0,052	0,60	50,00	70,00
	R2		5132,50	5120,42	5203,73	473,619	0,806	0,033	0,24	70,00	80,00
	C1		5014,85	4926,70	5183,55	474,820	1,086	0,079	1,76	90,00	90,00
	C2		3917,34	3864,52	4066,17	452,340	0,683	0,093	1,35	70,00	80,00
	RC1		5184,56	5154,43	5234,88	477,314	0,567	0,055	0,58	80,00	100,00
	RC2		4310,89	4295,92	4401,12	417,616	0,436	0,038	0,35	60,00	80,00
	R1	100	7481,14	7448,87	7532,38	488,041	0,404	0,026	0,43	30,00	50,00
	R2		6354,14	6336,49	6427,55	481,261	0,532	0,036	0,28	30,00	50,00
	C1		6862,41	6804,20	6934,64	490,564	0,342	0,031	0,85	30,00	50,00
	C2		4709,16	4700,80	5037,04	486,314	0,429	0,121	0,18	50,00	60,00
	RC1		6598,24	6580,69	6708,50	487,995	0,483	0,041	0,27	40,00	60,00
	RC2		5623,83	5595,01	5729,04	484,623	0,357	0,049	0,51	40,00	40,00

$$Gap = 100 \times (ILS-SP-SYNC - CP-ALNS) / ILS-SP-SYNC \quad (31)$$

Os tempos de execução e os valores de solução fornecem uma análise relevante sobre os *trade-offs* entre as diferentes estratégias de resolução do problema. Observa-se que a abordagem proposta neste trabalho é significativamente mais eficiente em termos de tempo computacional — levando minutos — em comparação à abordagem baseada em CP, que demanda horas, para todas as categorias. Em média, o algoritmo proposto é 4.747 vezes mais rápido do que o método comparado.

Entretanto, é válido notar que a geração de soluções ao longo de períodos mais extensos, ainda que computacionalmente custosa, pode levar à obtenção de soluções de alta qualidade, difíceis de serem alcançadas por abordagens mais rápidas. Esse comportamento é ilustrado pelo *Gap* de 22,10% na categoria 100-C2-50, em favor do método de Hojabri.

Ainda assim, o algoritmo proposto superou o CP-ALNS em 29 das 57 categorias comparadas, ou seja, em mais da metade dos casos, alcançando um *Gap* mínimo de -5,1% nas categorias 50-R1-3 e 200-R2-10. Além disso, conforme indicado na coluna *Melhor*, foram obtidas 271 novas melhores soluções individuais em relação ao CP-ALNS — número que sobe para 283 ao incluir também as instâncias listadas no Apêndice B, referentes a categorias não incluídas na comparação principal. Dentre essas 283 instâncias, destaca-se um *Gap* mínimo de -22,56% na instância de ID 8 da categoria 200-R2-10. Os resultados completos dessas soluções encontram-se no Apêndice C.

Tabela 3: Resultados comparativos para as instâncias de 25, 50, 100 e 200 clientes.

Tam	Classe	Sin	Valores das Soluções		Tempos de Execução (s)		Melhor	Gap (%)
			CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	CP-ALNS	ILS-SP-SYNC		
25	R1	2	544,25	527,97	8407	0,567	11	-3,08
	R2		458,21	447,12	9978	0,636	11	-2,48
	C1	7	246,91	241,54	9255	0,323	6	-2,22
	C2		286,41	290,35	7644	0,553	3	1,36
	RC1	13	520,13	517,86	6805	0,540	6	-0,44
	RC2		485,18	485,17	7672	0,517	6	-0,00
	R1	7	692,97	682,96	7846	1,144	10	-1,47
	R2		587,39	601,20	10290	1,330	2	2,30
	C1	13	318,35	357,36	8304	1,763	1	10,92
	C2		325,01	359,86	7309	1,311	0	9,68
	RC1	25	623,59	638,85	6388	1,090	4	2,39
	RC2		573,43	608,51	8828	1,225	1	5,77
	R1	13	821,16	811,75	7684	2,412	9	-1,16
	R2		701,39	713,13	10195	2,635	5	1,65
	C1	25	356,26	390,68	6594	3,225	1	8,81
	C2		384,08	434,60	6977	3,346	0	11,63
	RC1	50	657,53	686,21	5892	2,266	2	4,18
	RC2		600,02	623,10	8504	2,788	1	3,71
50	R1	3	909,58	865,37	19518	3,116	12	-5,11
	R2		747,68	714,84	23889	3,085	11	-4,60
	C1	13	460,12	451,89	39268	2,241	8	-1,82
	C2		476,70	469,37	35246	1,959	4	-1,56
	RC1	25	959,14	946,02	17810	2,750	4	-1,39
	RC2		788,36	781,66	20047	2,124	5	-0,86
	R1	13	1178,03	1132,04	19893	6,944	12	-4,06
	R2		991,71	968,59	23972	7,698	8	-2,39
	C1	50	625,05	694,72	18575	7,657	1	10,03
	C2		610,50	689,37	22449	6,452	0	11,44
	RC1	25	1231,84	1220,50	17850	5,770	4	-0,93
	RC2		1014,30	1029,79	22600	6,386	2	1,50
	R1	25	1354,38	1309,26	19457	24,381	12	-3,45
	R2		1134,51	1138,31	24312	22,748	4	0,33
	C1	50	689,73	779,73	16393	25,871	0	11,54
	C2		697,09	794,29	20694	24,296	0	12,24
	RC1	100	1331,45	1345,16	17536	19,791	2	1,02
	RC2		1087,59	1115,56	23088	21,147	2	2,51
100	R1	5	1429,05	1368,62	82716	39,752	12	-4,42
	R2		1114,93	1094,05	107910	48,295	7	-1,91
	C1	25	1017,52	1029,91	41402	20,502	2	1,20
	C2		841,67	826,64	75868	20,490	6	-1,82
	RC1	50	1637,62	1594,35	73411	33,387	8	-2,71
	RC2		1286,37	1251,05	97137	32,892	6	-2,82
	R1	25	1789,48	1764,06	80930	64,418	9	-1,44
	R2		1407,66	1470,47	106303	52,836	0	4,27
	C1	100	1441,88	1645,56	74135	114,565	0	12,38
	C2		1087,37	1309,92	70059	96,887	0	16,99
	RC1	200	2146,34	2141,95	71074	74,148	4	-0,20
	RC2		1709,74	1801,51	99530	60,465	1	5,09
	C2	50	1180,34	1515,15	54501	132,134	0	22,10
	RC1		2522,19	2496,76	67992	160,288	5	-1,02
	R1	10	4144,38	4047,77	126806	386,613	9	-2,39
	R2		3713,92	3533,32	161934	299,323	7	-5,11
	C1	50	3391,80	3435,51	100175	295,555	3	1,27
	C2		2578,90	2592,70	145856	277,692	5	0,53
	RC1	200	4088,11	4023,23	138911	392,898	7	-1,61
	RC2		3303,76	3190,83	149640	360,818	9	-3,54
	RC1	50	4944,82	5160,71	144935	480,929	1	4,18

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma estratégia em três etapas para o Problema de Roteamento de Veículos com Múltiplas Restrições de Sincronização. A estratégia desenvolvida combina uma heurística de ILS, um modelo de Programação Inteira baseado em SP e, por fim, uma etapa de validação com um modelo de sincronização responsável por garantir a viabilidade temporal das soluções geradas. A proposta foi motivada por um cenário prático de uma empresa francesa, o que reforça sua aplicabilidade e relevância real.

Os experimentos computacionais foram realizados sobre 681 instâncias de Hojabri et al. (2018) e comparados com o método de CP-ALNS. Os testes evidenciaram o impacto das restrições de sincronização tanto no custo computacional quanto na viabilidade das soluções. Além disso, a análise demonstrou que a abordagem proposta é capaz de gerar soluções de boa qualidade em tempos razoáveis pela etapa de ILS. No entanto, a ausência de um mecanismo mais preciso para obtenção dos tempos de viagem limitou o aperfeiçoamento das restrições de sincronização, dificultando a geração de soluções plenamente viáveis nesse aspecto. A etapa de refinamento mostrou-se eficaz na redução dos custos, enquanto o modelo final garantiu a consistência com os requisitos de sincronização nas soluções viáveis, obtendo-se, assim, 283 novas melhores soluções.

Entre as principais contribuições deste trabalho, destacam-se: (i) o desenvolvimento de um algoritmo modular, que permite combinar de forma eficiente componentes heurísticos e exatos; (ii) a adaptação de estruturas específicas para avaliação de restrições temporais complexas; e (iii) a análise detalhada do impacto das restrições de sincronização nessa classe de problemas.

Como trabalhos futuros, propõe-se: (i) comparar os resultados com outros trabalhos da literatura que utilizaram as mesmas instâncias; (ii) aplicar e testar o algoritmo em outros contextos, como na classe dos VRPTWSyn, onde $\delta = \gamma = 0$; (iii) desenvolver um método mais preciso para o cálculo dos tempos de viagem, permitindo utilizar restrições de sincronização mais realistas e rigorosas durante a busca local; e (iv) ajustar os parâmetros do algoritmo, a fim de permitir execuções mais longas e melhorar significativamente a exploração do espaço de soluções.

Referências

- AFIFI, S.; DANG, D.-C.; MOUKRIM, A. Heuristic Solutions for the Vehicle Routing Problem with Time Windows and Synchronized Visits. *Optimization Letters*, Springer Verlag, v. 10, n. 3, p. 511–525, 2016. Disponível em: <https://hal.science/hal-01131888>.
- ALI, O.; Côté, J.-F.; COELHO, L. C. Models and algorithms for the delivery and installation routing problem. *European Journal of Operational Research*, v. 291, n. 1, p. 162–177, 2021. ISSN 0377-2217. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221720307979>.
- BRAEKERS, K.; RAMAEKERS, K.; VAN NIEUWENHUYSE, I. The vehicle routing problem: State of the art classification and review. *Computers Industrial Engineering*, v. 99, p. 300–313, 2016. ISSN 0360-8352. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835215004775>.
- BREDSTRÖM, D.; RÖNNQVIST, M. Combined vehicle routing and scheduling with temporal precedence and synchronization constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 191, n. 1, p. 19–31, 2008. ISSN 0377-2217. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221707007436>.
- CATTARUZZA, D. et al. Vehicle routing problems for city logistics. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, v. 6, n. 1, p. 51–79, 2017. ISSN 2192-4376. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2192437620300893>.
- CHRISTIAENS, J.; VANDEN BERGHE, G. Slack induction by string removals for vehicle routing problems. *Transportation Science*, v. 54, n. 2, p. 417–433, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1287/trsc.2019.0914>.
- DOHN, A.; RASMUSSEN, M. S.; LARSEN, J. The vehicle routing problem with time windows and temporal dependencies. *Networks*, v. 58, n. 4, p. 273–289, 2011. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/net.20472>.
- DREXL, M. Synchronization in Vehicle Routing—A Survey of VRPs with Multiple Synchronization Constraints. *Transportation Science*, v. 46, n. 3, p. 297–316, August 2012. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/inm/ortrsc/v46y2012i3p297-316.html>.
- GRANGIER, P. et al. An adaptive large neighborhood search for the two-echelon multiple-trip vehicle routing problem with satellite synchronization. *European Journal of Operational Research*, v. 254, n. 1, p. 80–91, 2016. ISSN 0377-2217. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221716301862>.
- HOJABRI, H. et al. Large neighborhood search with constraint programming for a vehicle routing problem with synchronization constraints. *Computers Operations Research*, v. 92, p. 87–97, 2018. ISSN 0305-0548. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054817302885>.
- HOMBERGER, J.; GEHRING, H. Two evolutionary metaheuristics for the vehicle routing problem with time windows. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, Taylor & Francis, v. 37, n. 3, p. 297–318, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/03155986.1999.11732386>.

Hà, M. H. et al. A new constraint programming model and a linear programming-based adaptive large neighborhood search for the vehicle routing problem with synchronization constraints. *Computers Operations Research*, v. 124, p. 105085, 2020. ISSN 0305-0548. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054820302021>.

LENSTRA, J. K.; RINNOOY KAN, A. H. G. Complexity of vehicle routing and scheduling problems. *Networks*, v. 11, n. 2, p. 221–227, 1981. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/net.3230110211>.

LI, J. qing et al. Meta-heuristic algorithm for solving vehicle routing problems with time windows and synchronized visit constraints in prefabricated systems. *Journal of Cleaner Production*, v. 250, p. 119464, 2020. ISSN 0959-6526. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959652619343343>.

LIU, R.; TAO, Y.; XIE, X. An adaptive large neighborhood search heuristic for the vehicle routing problem with time windows and synchronized visits. *Computers Operations Research*, v. 101, p. 250–262, 2019. ISSN 0305-0548. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030505481830220X>.

LOURENÇO, H. R.; MARTIN, O. C.; STÜTZLE, T. Iterated local search: Framework and applications. In: GENDREAU, M.; POTVIN, J.-Y. (Ed.). *Handbook of Metaheuristics*. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 129–168. ISBN 978-3-319-91086-4. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-319-91086-4_5.

POLNIK, M.; RICCARDI, A.; AKARTUNALI, K. A multistage optimisation algorithm for the large vehicle routing problem with time windows and synchronised visits. *Journal of the Operational Research Society*, v. 72, p. 1–16, 08 2020.

ROUSSEAU, L.-M.; GENDREAU, M.; PESANT, G. The synchronized dynamic vehicle dispatching problem. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, Taylor & Francis, v. 51, n. 2, p. 76–83, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.3138/infor.51.2.76>.

SAKARYA, I. E. et al. Two-echelon prize-collecting vehicle routing with time windows and vehicle synchronization: A branch-and-price approach. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, v. 171, p. 104987, 2025. ISSN 0968-090X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X24005084>.

SCHRIMPF, G. et al. Record breaking optimization results using the ruin and recreate principle. *Journal of Computational Physics*, v. 159, n. 2, p. 139–171, 2000. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999199964136>.

SHI, Y. et al. A relative robust optimization for a vehicle routing problem with time-window and synchronized visits considering greenhouse gas emissions. *Journal of Cleaner Production*, v. 275, p. 124112, 2020. ISSN 0959-6526. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959652620341573>.

SOARES, R. et al. Synchronisation in vehicle routing: Classification schema, modelling framework and literature review. *European Journal of Operational*

Research, v. 313, n. 3, p. 817–840, 2024. ISSN 0377-2217. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221723002904>.

SOLOMON, M. M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations Research*, v. 35, n. 2, p. 254–265, 1987. Disponível em: <https://doi.org/10.1287/opre.35.2.254>.

SUBRAMANIAN, A. et al. A parallel heuristic for the vehicle routing problem with simultaneous pickup and delivery. *Computers Operations Research*, v. 37, n. 11, p. 1899–1911, 2010. ISSN 0305-0548. Metaheuristics for Logistics and Vehicle Routing. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054809002779>.

TOTH, P.; VIGO, D. *Vehicle Routing*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014. Disponível em: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611973594>.

VIDAL, T. et al. A hybrid genetic algorithm with adaptive diversity management for a large class of vehicle routing problems with time-windows. *Computers Operations Research*, v. 40, n. 1, p. 475–489, 2013. ISSN 0305-0548. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054812001645>.

Apêndices

A Instâncias não solucionadas

As instâncias em que o algoritmo não foi capaz de encontrar uma solução final viável foram:

- syn=50_C109.data_100
- syn=50_R112.data_100
- syn=50_R204.data_100
- syn=50_R207.data_100
- syn=50_R208.data_100
- syn=50_R211.data_100
- syn=50_RC208.data_100
- syn=50_C1.2.10.200
- syn=50_C2.2.3.200
- syn=50_C2.2.4.200
- syn=50_R1.2.3.200
- syn=50_R1.2.4.200
- syn=50_R1.2.8.200
- syn=50_R2.2.4.200
- syn=50_R2.2.8.200
- syn=50_RC2.2.4.200
- syn=50_RC2.2.8.200
- syn=100_C1.2.10.200
- syn=100_C1.2.3.200
- syn=100_C1.2.4.200
- syn=100_C1.2.8.200
- syn=100_C1.2.9.200
- syn=100_C2.2.10.200
- syn=100_C2.2.3.200
- syn=100_C2.2.4.200
- syn=100_C2.2.9.200
- syn=100_R1.2.10.200
- syn=100_R1.2.3.200
- syn=100_R1.2.4.200
- syn=100_R1.2.7.200
- syn=100_R1.2.8.200
- syn=100_R2.2.10.200
- syn=100_R2.2.3.200
- syn=100_R2.2.4.200
- syn=100_R2.2.7.200
- syn=100_R2.2.8.200
- syn=100_R2.2.9.200
- syn=100_R2.2.10.200
- syn=100_R2.2.3.200
- syn=100_R2.2.4.200
- syn=100_R2.2.7.200
- syn=100_R2.2.8.200
- syn=100_R2.2.9.200
- syn=100_R2.2.10.200
- syn=100_RC1.2.3.200
- syn=100_RC1.2.4.200
- syn=100_RC1.2.8.200
- syn=100_RC1.2.9.200
- syn=100_RC2.2.10.200
- syn=100_RC2.2.3.200
- syn=100_RC2.2.4.200
- syn=100_RC2.2.7.200
- syn=100_RC2.2.8.200
- syn=100_RC2.2.9.200

B Categorias abaixo de 100% de viabilidade

As Tabelas 4 e 5 apresentam os resultados para as instâncias resolvidas dentro das categorias que não alcançaram 100% de viabilidade.

Tabela 4: Resultados comparativos para as instâncias resolvidas nas categorias abaixo de 100% de viabilidade.

Tam	Classe	Sin	Id	Valores das Soluções		Tempos de Execução (s)		Gap (%)
				CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	
100	R1	50	1	2663,67	2675,10	9724	331,706	0,43
			2	2437,05	2439,17	59262	305,073	0,09
			3	2050,08	2068,00	65517	174,932	0,87
			4	1818,32	1794,62	91252	199,721	-1,32
			5	2333,84	2307,80	48523	273,286	-1,13
			6	2221,52	2175,70	76597	215,596	-2,11
			7	1909,97	1952,36	89890	246,649	2,17
			8	1830,39	1717,91	99255	223,732	-6,55
			9	2111,57	2014,22	77333	126,751	-4,83
			10	1971,61	1921,73	83379	147,734	-2,60
			11	1999,84	1937,50	83577	116,023	-3,22
100	R2	50	1	2042,31	2063,56	108370	199,223	1,03
			2	1831,22	1947,80	103953	106,375	5,99
			3	1743,41	1771,40	105883	236,365	1,58
			5	1773,36	1885,17	105610	190,680	5,93
			6	1691,71	1833,27	106154	273,291	7,72
			9	1583,82	1708,60	101489	224,097	7,30
			10	1694,57	1731,04	97836	180,326	2,11
100	C1	50	1	1584,73	2050,65	9800	255,673	22,72
			2	1686,40	2015,00	100797	207,925	16,31
			3	1654,75	1859,51	91134	323,894	11,01
			4	1642,38	1704,94	95685	226,046	3,67
			5	1566,23	2013,74	66229	300,871	22,22
			6	1594,39	1966,69	67512	294,955	18,93
			7	1565,92	1931,47	63655	216,519	18,93
			8	1617,13	1765,50	77497	279,040	8,40
100	RC2	50	1	2241,31	2520,64	96075	149,292	11,08
			2	1990,36	2152,71	104950	196,655	7,54
			3	1847,42	2110,28	102581	89,345	12,46
			4	1664,14	1898,96	82283	129,805	12,37
			5	2103,99	2306,71	99703	152,172	8,79
			6	2124,56	2276,87	97395	127,779	6,69
			7	1969,85	2007,31	84207	132,321	1,87
200	R1	50	1	6577,85	6569,78	75918	464,659	-0,12
			2	5538,36	5896,12	136867	480,937	6,07
			5	5835,07	6018,03	109892	476,623	3,04
			6	5096,55	5505,86	137384	484,077	7,43
			7	4607,33	5120,77	156950	487,068	10,03
			9	5306,44	5542,36	131622	483,550	4,26
			10	4577,11	4941,06	153984	474,400	7,37
	R2	50	1	5241,35	5614,61	168123	487,127	6,65
			2	5373,15	5092,24	172687	480,616	-5,52
			3	4501,56	5003,34	153796	485,863	10,03
			5	5114,15	5316,93	166189	483,552	3,81
			6	4913,05	4852,57	164555	342,991	-1,25
			7	4661,87	4663,76	167927	489,839	0,04
			9	4879,27	5047,38	171445	483,678	3,33
			10	4807,96	5304,18	156543	475,867	9,36
	C1	50	1	4551,00	5534,67	12792	482,152	17,77
			2	4337,21	5158,63	144462	487,633	15,92
			3	4190,62	5003,03	150351	361,276	16,24
			4	4026,69	4563,47	153081	469,986	11,76
			5	4405,43	5082,56	94480	430,814	13,32
			6	4350,38	5585,36	126674	504,430	22,11
			7	4359,85	4900,06	121762	486,732	11,02
			8	4126,40	5024,91	120865	483,416	17,88
			9	4112,69	4412,04	143905	497,313	6,78
200	C2	50	1	3302,80	3782,43	158513	485,767	12,68
			2	3261,30	3886,14	165019	481,118	16,08
			5	3221,42	3762,75	143826	485,200	14,39
			6	3107,50	4005,65	169452	343,225	22,42
			7	3174,25	3863,61	152990	428,111	17,84
			8	3197,10	3744,76	170774	375,703	14,62
			9	3306,56	3692,37	152781	490,999	10,45
			10	3356,47	4412,20	164262	458,386	23,93

Tabela 5: Resultados comparativos para as instâncias resolvidas nas categorias abaixo de 100% de viabilidade (continuação).

Tam	Classe	Sin	Id	Valores das Soluções		Tempos de Execução (s)		Gap (%)
				CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	
200	RC2	50	1	4431,53	4472,22	157554	422,514	0,91
			2	4181,28	4387,88	159044	494,043	4,71
			3	4152,17	3988,79	170073	481,377	-4,10
			5	4086,57	4364,97	146489	277,428	6,38
			6	4112,96	4348,32	156495	444,516	5,41
			7	3837,88	4333,55	157165	320,191	11,44
			9	3859,50	4074,39	141266	340,884	5,27
200	R1	100	10	4039,98	3932,43	155598	426,672	-2,73
			1	7817,65	7933,91	97607	480,922	1,47
			2	6943,62	7485,24	147656	481,296	7,24
			5	6853,72	7252,41	117067	480,482	5,50
			6	6441,98	6884,18	145259	495,658	6,42
			9	6265,69	7170,52	125520	485,809	12,62
			1	6226,82	6562,02	163326	414,102	5,11
200	R2	100	2	6040,17	6158,86	162491	486,880	1,93
			5	6433,96	6470,27	172657	484,416	0,56
			6	5445,35	6322,22	163501	483,686	13,87
			9	5751,42	6178,58	170062	480,379	6,91
			1	5108,27	6885,98	10166	488,037	25,82
200	C1	100	2	5122,32	6815,09	140921	495,171	24,84
			5	4949,73	6713,93	75712	488,330	26,28
			6	5213,36	7180,32	125057	489,511	27,39
			7	4991,32	6483,03	100979	496,114	23,01
			1	3633,11	4551,46	54297	491,219	20,18
200	C2	100	2	3710,68	4759,47	150506	492,287	22,04
			5	3640,72	5118,47	153683	489,051	28,87
			6	3503,52	5463,30	138156	481,593	35,87
			7	3491,52	5049,63	137275	491,177	30,86
			8	3504,25	4857,33	117390	483,128	27,86
200	RC1	100	1	6480,87	6894,79	144538	489,703	6,00
			2	6086,77	6780,82	152351	494,043	10,24
			5	6168,38	7165,40	149361	485,507	13,91
			6	6248,20	6739,98	147725	508,583	7,30
			7	5951,93	6176,60	149154	482,213	3,64
			10	5448,87	6066,44	147616	482,763	10,18
200	RC2	100	1	5334,19	5825,48	164696	484,564	8,43
			2	5056,60	5772,12	162595	481,812	12,40
			5	5379,02	5501,54	171461	489,498	2,23
			6	5096,53	5524,53	160548	485,871	7,75

C Novas melhores soluções encontradas

As Tabelas 6–10 apresentam os resultados para as instâncias em que o algoritmo proposto obteve novas melhores soluções.

Tabela 6: Resultados comparativos para as novas melhores soluções encontradas.

Tam	Classe	Sin	Id	Valores das Soluções		Tempos de Execução (s)		Gap (%)
				CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	
25	R1	2	1	693,60	680,86	120	0,483	-1,87
			2	621,37	610,64	7600	0,460	-1,76
			3	545,20	518,23	8426	0,569	-5,20
			4	502,84	480,50	8957	0,713	-4,65
			5	609,81	598,06	6754	0,665	-1,96
			6	557,82	529,01	8564	0,557	-5,45
			7	508,89	487,80	10113	0,552	-4,32
			8	477,17	460,83	9737	0,529	-3,55
			9	514,99	509,14	8522	0,500	-1,15
			11	518,96	492,23	11152	0,550	-5,43
			12	470,32	456,64	10670	0,632	-3,00
25	R2	2	1	545,87	530,89	8451	0,609	-2,82
			2	484,29	474,02	9898	0,502	-2,17
			3	460,93	454,86	9839	0,495	-1,34
			4	439,85	418,43	9710	0,747	-5,12
			5	464,04	460,58	9267	0,610	-0,75
			6	445,12	438,02	9915	0,524	-1,62
			7	425,81	425,17	10770	0,621	-0,15
			8	401,57	391,87	11380	0,592	-2,48
			9	439,93	438,08	9824	0,725	-0,42
			10	496,11	468,01	9778	0,697	-6,00
			11	436,81	418,43	10928	0,869	-4,39
25	C1	2	2	248,91	241,55	11559	0,305	-3,05
			3	248,91	241,55	11361	0,302	-3,05
			4	240,85	238,26	10024	0,324	-1,09
			7	249,41	242,62	5739	0,338	-2,80
			8	249,41	242,62	8568	0,300	-2,80
			9	243,95	242,62	8280	0,368	-0,55
25	C2	2	2	284,00	284,00	8263	0,525	-0,00
			3	285,88	284,00	9194	0,556	-0,66
			4	301,75	283,80	8249	0,463	-6,33
25	RC1	2	2	517,41	517,41	7224	0,581	-0,00
			3	502,05	498,59	7236	0,541	-0,69
			4	479,36	471,61	9707	0,499	-1,64
			5	581,05	578,53	6674	0,535	-0,44
			7	466,76	463,42	7309	0,521	-0,72
			8	461,30	459,91	9044	0,437	-0,30
25	RC2	2	1	525,71	525,71	6543	0,597	-0,00
			2	504,05	503,30	8038	0,492	-0,15
			3	492,92	492,17	7881	0,513	-0,15
			4	466,46	464,71	7557	0,554	-0,38
			7	463,42	463,42	8107	0,458	-0,00
			8	435,88	435,72	10078	0,462	-0,04
25	R1	7	1	848,31	838,34	84	0,853	-1,19
			2	788,83	780,11	5487	1,110	-1,12
			3	711,22	700,75	8684	1,136	-1,49
			4	655,66	653,04	9034	1,203	-0,40
			6	704,20	662,17	8288	1,055	-6,35
			7	664,30	645,26	8964	1,367	-2,95
			8	620,44	587,88	10442	1,030	-5,54
			10	647,11	633,79	10430	1,119	-2,10
			11	649,40	630,74	8879	0,923	-2,96
			12	610,58	587,90	10581	1,641	-3,86
25	R2	7	7	571,95	568,76	11514	1,004	-0,56
			11	542,34	539,00	11280	1,332	-0,62
25	C1	7	9	335,73	326,42	10968	1,687	-2,85
25	RC1	7	2	626,46	626,27	5878	1,447	-0,03
			3	606,07	590,78	6894	1,425	-2,59
			4	584,76	580,60	9017	0,906	-0,72
			5	722,48	681,08	4576	1,240	-6,08
25	RC2	7	3	605,87	596,24	8910	1,159	-1,61

Tabela 7: Resultados comparativos para as novas melhores soluções encontradas (continuação).

Tam	Classe	Sin	Id	Valores das Soluções		Tempos de Execução (s)		Gap (%)
				CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	
25	R1	13	2	899,60	886,99	5400	2,619	-1,42
			3	820,49	792,60	8939	1,747	-3,52
			4	774,95	772,03	10069	2,042	-0,38
			6	811,64	789,64	8212	3,028	-2,79
			7	781,16	772,06	8970	3,096	-1,18
			8	722,74	712,82	10687	2,480	-1,39
			9	808,45	798,96	7255	3,350	-1,19
			10	776,87	772,48	9847	2,017	-0,57
			12	750,86	700,95	10073	2,167	-7,12
			1	795,35	791,97	9367	2,898	-0,43
			3	722,79	721,19	10099	2,665	-0,22
			4	692,70	683,17	10631	2,162	-1,39
25	R2	13	10	747,88	727,32	9446	2,340	-2,83
			11	647,21	625,81	10701	1,899	-3,42
			9	368,56	365,76	9680	2,636	-0,77
			7	583,05	579,72	7528	1,943	-0,57
25	RC1	13	8	578,63	575,76	9198	1,445	-0,50
			5	656,49	633,82	6725	2,471	-3,58
50	R1	3	1	1155,05	1135,31	287	2,339	-1,74
			2	1024,07	1006,94	19782	2,533	-1,70
			3	899,35	867,16	22607	2,428	-3,71
			4	809,78	723,65	23129	2,283	-11,90
			5	1011,65	1010,06	13354	3,025	-0,16
			6	949,54	890,75	20703	3,912	-6,60
			7	865,33	817,03	22199	4,361	-5,91
			8	761,37	711,46	22585	4,043	-7,02
			9	921,65	885,03	20839	4,792	-4,14
			10	849,63	806,49	22387	2,236	-5,35
			11	866,39	807,48	22735	2,699	-7,30
			12	801,15	723,13	23612	2,739	-10,79
50	R2	3	1	921,82	892,56	23068	2,872	-3,28
			2	829,24	805,10	23689	2,997	-3,00
			3	761,12	707,37	23843	2,575	-7,60
			4	622,68	601,03	23957	1,990	-3,60
			5	796,34	793,69	23638	4,734	-0,33
			6	762,28	733,09	23500	3,514	-3,98
			7	710,50	671,65	24643	2,695	-5,78
			8	619,87	581,77	23990	3,206	-6,55
			9	747,61	693,80	23467	3,494	-7,76
			10	773,02	746,70	23997	3,078	-3,52
			11	680,07	636,45	24986	2,775	-6,85
50	C1	3	1	464,47	458,37	61434	1,930	-1,33
			2	462,65	450,35	22752	1,996	-2,73
			3	478,21	450,35	23489	2,326	-6,19
			4	442,39	439,87	21257	3,507	-0,57
			5	464,47	458,37	82639	1,899	-1,33
			6	464,47	458,37	94584	1,802	-1,33
			7	446,47	446,47	10996	2,065	-0,00
			9	472,23	450,89	20917	2,233	-4,73
50	C2	3	2	534,54	467,62	22410	1,703	-14,31
			3	467,42	467,24	24012	2,497	-0,04
			4	465,45	455,62	23465	2,087	-2,16
			8	471,39	465,67	21374	2,049	-1,23
50	RC1	3	3	955,85	905,34	20705	3,873	-5,58
			4	797,79	740,64	21431	1,698	-7,72
			7	901,75	853,83	18923	3,012	-5,61
			8	827,45	792,54	21071	2,157	-4,40
50	RC2	3	3	795,71	792,97	21221	2,090	-0,35
			4	703,06	659,97	20972	1,650	-6,53
			5	827,22	821,82	19526	2,050	-0,66
			7	791,86	754,43	20186	2,544	-4,96
			8	695,17	686,66	21459	1,709	-1,24

Tabela 8: Resultados comparativos para as novas melhores soluções encontradas (continuação II).

Tam	Classe	Sin	Id	Valores das Soluções		Tempos de Execução (s)		Gap (%)
				CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	
50	R1	13	1	1448,40	1418,89	545	5,904	-2,08
			2	1308,38	1298,91	18551	6,316	-0,73
			3	1160,22	1124,34	23198	7,450	-3,19
			4	1058,58	978,30	24709	6,687	-8,21
			5	1307,60	1297,52	14086	6,255	-0,78
			6	1215,13	1183,11	21542	7,113	-2,71
			7	1146,20	1107,99	23123	6,140	-3,45
			8	1025,66	951,05	23857	8,617	-7,85
			9	1196,66	1160,63	19951	6,685	-3,10
			10	1120,39	1050,67	22811	7,945	-6,64
			11	1111,93	1059,23	22599	6,525	-4,98
			12	1037,26	953,87	23746	7,693	-8,74
50	R2	13	2	1087,30	1064,86	24529	9,510	-2,11
			3	1003,69	957,44	24634	7,012	-4,83
			6	1055,90	975,86	24450	6,517	-8,20
			7	967,54	935,67	24611	8,691	-3,41
			8	847,83	826,99	24083	5,937	-2,52
			9	982,34	981,95	24017	9,912	-0,04
			10	1056,60	994,18	23367	8,331	-6,28
			11	832,60	821,06	23170	6,748	-1,41
50	C1	13	3	671,44	659,37	28338	6,705	-1,83
50	RC1	13	3	1253,49	1154,98	20662	6,769	-8,53
			5	1386,14	1365,13	11865	7,074	-1,54
			7	1120,50	1118,61	21229	6,819	-0,17
			8	1120,50	1040,95	23246	5,876	-7,64
50	RC2	13	3	1013,70	1006,86	24085	7,507	-0,68
			7	1000,27	978,77	22491	6,622	-2,20
50	R1	25	1	1754,78	1732,33	654	17,703	-1,30
			2	1506,54	1504,76	17841	23,427	-0,12
			3	1342,57	1272,57	22480	26,557	-5,50
			4	1137,74	1103,50	23994	22,254	-3,10
			5	1572,67	1547,76	14099	25,146	-1,61
			6	1391,67	1359,26	20712	24,773	-2,38
			7	1264,95	1245,95	22700	22,077	-1,52
			8	1150,92	1078,93	24445	32,146	-6,67
			9	1360,31	1327,25	18351	24,364	-2,49
			10	1295,33	1217,74	22264	26,424	-6,37
			11	1277,75	1227,18	22734	21,684	-4,12
			12	1197,33	1093,83	23210	26,022	-9,46
50	R2	25	3	1191,58	1167,84	25344	20,657	-2,03
			4	1005,68	973,56	23165	17,590	-3,30
			8	1008,08	907,56	24062	16,704	-11,08
			11	995,32	942,11	24700	13,766	-5,65
50	RC1	25	4	1065,14	1059,44	20124	17,574	-0,54
			8	1145,35	1102,28	21229	13,896	-3,91
50	RC2	25	4	987,99	917,11	23043	17,704	-7,73
			8	967,97	936,95	24217	12,950	-3,31
100	R1	5	1	1850,86	1830,76	4681	35,788	-1,10
			2	1680,65	1657,59	73749	47,646	-1,39
			3	1457,24	1377,68	78798	34,252	-5,77
			4	1229,25	1160,28	99848	46,345	-5,94
			5	1581,12	1550,15	61298	58,253	-2,00
			6	1466,97	1424,90	87195	28,414	-2,95
			7	1336,71	1259,49	95376	22,360	-6,13
			8	1194,37	1111,63	102053	35,090	-7,44
			9	1420,55	1365,47	93279	35,396	-4,03
			10	1373,30	1300,02	97370	38,830	-5,64
			11	1330,09	1253,43	100296	26,729	-6,12
			12	1227,47	1132,06	98654	67,916	-8,43

Tabela 9: Resultados comparativos para as novas melhores soluções encontradas (continuação III).

Tam	Classe	Sin	Id	Valores das Soluções		Tempos de Execução (s)		Gap (%)
				CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	
100	R2	5	2	1306,99	1265,07	118592	46,603	-3,31
			3	1099,37	1068,12	103916	48,785	-2,93
			5	1195,23	1157,11	107023	80,535	-3,29
			7	1045,24	998,89	99086	48,531	-4,64
			8	994,92	906,98	109622	28,493	-9,70
			10	1107,93	1102,85	112241	57,827	-0,46
			11	1006,08	962,77	107934	49,883	-4,50
100	C1	5	4	1023,56	984,51	83071	24,622	-3,97
			9	1053,40	1031,61	66670	28,069	-2,11
100	C2	5	2	835,96	822,36	56698	28,347	-1,65
			3	848,39	825,65	99007	27,806	-2,75
			4	875,71	801,41	101259	21,971	-9,27
			5	844,78	817,71	87293	15,136	-3,31
			6	865,31	826,87	84663	20,391	-4,65
			8	838,58	836,13	89240	19,859	-0,29
100	RC1	5	1	1911,52	1886,18	27782	38,487	-1,34
			2	1724,62	1715,45	77157	39,261	-0,53
			3	1563,31	1531,32	91084	23,336	-2,09
			4	1433,45	1372,37	88303	43,482	-4,45
			5	1820,40	1783,24	51945	39,084	-2,08
			6	1692,66	1620,71	72888	26,617	-4,44
			7	1525,31	1499,20	87438	28,009	-1,74
			8	1429,70	1346,35	90695	28,822	-6,19
100	RC2	5	3	1281,73	1196,81	100174	22,812	-7,10
			4	1072,57	1016,09	102612	13,337	-5,56
			5	1382,47	1374,57	89305	27,211	-0,57
			6	1350,81	1309,19	96990	56,805	-3,18
			7	1256,83	1206,78	98699	52,481	-4,15
			8	1093,21	1034,81	99158	40,062	-5,64
100	R1	25	1	2244,95	2230,02	5318	45,428	-0,67
			3	1815,43	1757,83	85179	82,397	-3,28
			4	1605,75	1576,95	105160	75,933	-1,83
			5	1974,35	1929,95	50807	79,120	-2,30
			6	1882,70	1853,30	83101	73,105	-1,59
			8	1554,62	1498,20	102614	32,922	-3,77
			9	1767,13	1712,47	79517	75,097	-3,19
			10	1679,04	1625,26	93255	59,907	-3,31
			11	1694,79	1646,93	96497	70,232	-2,91
100	RC1	25	2	2213,69	2198,86	67155	112,271	-0,67
			5	2333,32	2305,80	54879	75,067	-1,19
			6	2232,35	2169,91	71629	63,012	-2,88
			8	2006,30	1898,01	89225	76,097	-5,71
100	RC2	25	8	1482,62	1377,59	98535	43,797	-7,62
100	R1	50	4	1818,32	1794,62	91252	199,721	-1,32
			5	2333,84	2307,80	48523	273,286	-1,13
			6	2221,52	2175,70	76597	215,596	-2,11
			8	1830,39	1717,91	99255	223,732	-6,55
			9	2111,57	2014,22	77333	126,751	-4,83
			10	1971,61	1921,73	83379	147,734	-2,60
			11	1999,84	1937,50	83577	116,023	-3,22
100	RC1	50	3	2470,02	2410,24	77711	226,251	-2,48
			4	2227,12	2223,28	87789	130,147	-0,17
			5	2814,78	2774,03	44895	73,500	-1,47
			7	2352,13	2312,73	82905	116,418	-1,70
			8	2234,14	2086,72	82904	125,625	-7,06
200	R1	10	1	5370,24	5270,89	54021	484,713	-1,88
			3	3897,60	3817,07	147338	467,070	-2,11
			4	3326,06	3198,33	155900	486,451	-3,99
			5	4839,94	4697,93	95880	265,409	-3,02
			6	4218,11	4172,23	134896	480,587	-1,10
			7	3647,54	3563,78	156063	480,513	-2,35
			8	3373,74	3033,10	158716	234,583	-11,23
			9	4373,29	4331,67	103378	247,457	-0,96
			10	3752,83	3729,17	143009	232,512	-0,63

Tabela 10: Resultados comparativos para as novas melhores soluções encontradas (continuação IV).

Tam	Classe	Sin	Id	Valores das Soluções		Tempos de Execução (s)		Gap (%)
				CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	CP-ALNS	ILS-SP-SYNC	
200	R2	10	3	3454,86	3359,49	164490	354,270	-2,84
			4	3142,26	2657,49	161100	345,675	-18,24
			5	4157,27	4032,87	161049	425,072	-3,08
			6	3658,82	3626,07	159883	230,088	-0,90
			7	3478,46	3154,03	170131	179,324	-10,29
			8	3192,63	2604,89	166147	167,674	-22,56
200	C1	10	10	4006,23	3647,60	165081	293,266	-9,83
			3	3430,05	3407,40	154143	453,881	-0,66
			4	3237,20	3176,27	145552	401,945	-1,92
200	C2	10	10	3286,07	3216,71	141876	473,559	-2,16
			3	2659,04	2563,24	167692	461,509	-3,74
			4	2539,58	2441,57	153598	326,449	-4,01
			8	2528,43	2494,52	152288	224,926	-1,36
			9	2610,06	2561,55	141154	188,480	-1,89
200	RC1	10	10	2666,15	2572,63	154523	253,590	-3,64
			1	4495,63	4415,90	119780	423,638	-1,81
			2	4233,23	4162,53	149622	355,440	-1,70
			3	4065,87	3864,21	156572	480,762	-5,22
			4	3700,58	3595,85	152336	488,412	-2,91
			6	4231,31	4175,42	131309	482,683	-1,34
			9	4043,66	3910,43	146353	273,435	-3,41
			10	3850,06	3811,21	149027	343,669	-1,02
200	RC2	10	2	3408,21	3370,31	144281	444,759	-1,12
			3	3254,56	3173,03	154738	373,725	-2,57
			4	2958,88	2602,68	155232	379,488	-13,69
			5	3407,96	3372,65	155878	489,950	-1,05
			6	3567,07	3394,15	152929	317,187	-5,09
			7	3231,84	3227,85	159390	481,392	-0,12
			8	3203,34	3065,69	151879	298,043	-4,49
			9	3099,46	3048,95	155156	277,718	-1,66
			10	3254,37	2873,28	138479	210,153	-13,26
200	R1	50	1	6577,85	6569,78	75918	464,659	-0,12
200	R2	50	2	5373,15	5092,24	172687	480,616	-5,52
200	R2	50	6	4913,05	4852,57	164555	342,991	-1,25
200	RC1	50	6	5392,50	5332,11	151333	482,111	-1,13
200	RC2	50	3	4152,17	3988,79	170073	481,377	-4,10
			10	4039,98	3932,43	155598	426,672	-2,73