

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Desigualdades Críticas e Subcríticas de Trudinger-Moser e Adams em $\mathbb{R}^N$

por

Aurílio Rodrigues Machado Filho

João Pessoa - PB

Julho de 2024

# Desigualdades Críticas e Subcríticas de Trudinger-Moser e Adams em $\mathbb{R}^N$

por

Aurílio Rodrigues Machado Filho

sob a orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Dissertação apresentada à Coordenação  
do Programa de Pós-Graduação em Ma-  
temática da Universidade Federal da Pa-  
raíba como requisito para obtenção do tí-  
tulo de Mestre em Matemática.

João Pessoa – PB

Julho de 2024

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

M149d Machado Filho, Aurílio Rodrigues.  
Desigualdades críticas e subcríticas de  
Trudinger-Moser e Adams em  $\mathbb{R}^N$  / Aurílio Rodrigues  
Machado Filho. - João Pessoa, 2024.  
127 f.

Orientação: Manassés Xavier de Souza.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Desigualdade de Trudinger-Moser.  
3. Desigualdade de Adams. 4. Funções extremantes. I.  
Souza, Manassés Xavier de. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

# Desigualdades Críticas e Subcríticas de Trudinger-Moser e Adams em $\mathbb{R}^N$

por

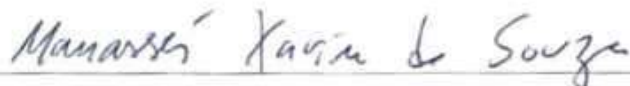
Aurílio Rodrigues Machado Filho <sup>1</sup>

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

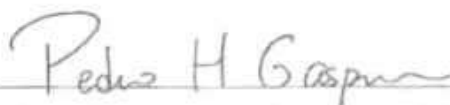
Área de Concentração: Análise

Aprovada em 24 de julho de 2024

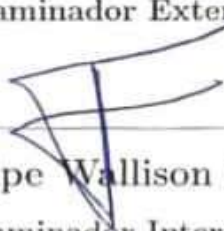
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza  
(Orientador)



Prof. Dr. Pedro Henrique Gaspar Marques da Silva  
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Felipe Wallison Chaves Silva  
(Examinador Interno)

---

<sup>1</sup>O autor foi bolsista da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - durante a elaboração desta dissertação.

*À minha mãe, Karla.*

*À minha avó, Jardimina.*

*À minha irmã, Anália.*

# Agradecimentos

- Agradeço, primeiramente, a Deus por me conceder forças durante toda esta trajetória.
- Aos meus familiares, em especial, à minha mãe, Karla Maria Belarmino Serra, expresso minha eterna gratidão pelo suporte oferecido, tanto financeiro quanto psicológico. Seu apoio constante foi crucial para que eu alcançasse este marco.
- Gostaria de expressar meu sincero agradecimento, em especial, a Joyce Saraiva Sindeaux, por seu inestimável apoio ao longo deste período de mestrado. Sua dedicação, carinho e amor foram fundamentais para que eu pudesse seguir em frente nesta jornada. Jamais esquecerei seu apoio incondicional e sua contribuição essencial para a concretização deste trabalho.
- Ao Professor Manassés Xavier de Souza, expresso meu profundo agradecimento pela orientação neste trabalho. Agradeço não apenas pela atenção dedicada, mas, principalmente, pelas valiosas experiências compartilhadas, que contribuíram significativamente para a conclusão desta importante etapa da minha vida.
- Ao grupo "Bolo de Morango", expresso minha gratidão pelas incontáveis risadas e pela celebração das conquistas, por menores que fossem, ao longo deste mestrado. A camaradagem e o apoio que vocês ofereceram tornaram essa jornada muito mais leve e agradável.
- A todos os meus amigos do PPGMAT da UFPB, especialmente a Aureliana Belém Tavares e Francisco Jonatã Chaves de Lima, agradeço sinceramente por compartilharem comigo esses anos de estudos. Valorizo profundamente a amizade cultivada e as enriquecedoras discussões que tivemos na Pós-Graduação de Matemática.

- Aos professores do Departamento de Matemática da UFPB, expresso minha gratidão pelos preciosos conhecimentos transmitidos ao longo desta jornada acadêmica. Em particular, gostaria de agradecer aos professores Uberlandio Batista Severo, Flank David Moraes Bezerra, Marcio Silva Santos, Otoniel Nogueira da Silva e Bruno Henrique Carvalho Ribeiro pelo comprometimento e dedicação no ensino.
- Gostaria de expressar meu agradecimento aos professores Pedro Henrique Gaspar Marques da Silva e Felipe Wallison Chaves Silva por aceitarem participar da banca e contribuíram significativamente para este trabalho.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), expresso meu sincero agradecimento pelo apoio financeiro fornecido durante este período.

# Resumo

Nesta dissertação, apresentamos uma análise detalhada das melhores constantes para as desigualdades de Trudinger-Moser e Adams, por meio de uma nova abordagem para as desigualdades críticas e subcríticas. Inicialmente, introduzimos desigualdades do tipo Trudinger-Moser para uma classe de espaços de Sobolev baseados em espaços de Lebesgue com peso. Essas desigualdades são, posteriormente, generalizadas para dimensões fracionárias. Ademais, estabelecemos limites assintóticos para o supremo subcrítico, os quais são utilizados para demonstrar, de forma rigorosa, a equivalência entre as desigualdades críticas e subcríticas de Trudinger-Moser e Adams. Com base nessa equivalência, apresentamos a prova da existência de funções extremantes para ambos os problemas associados aos extremos subcríticos e críticos. Como consequência, conseguimos calcular explicitamente o valor do supremo crítico em algumas situações especiais.

**Palavras-chave:** Desigualdade de Trudinger-Moser; Desigualdade de Adams; Funções extremantes.



# Abstract

In this dissertation, we present a detailed analysis of the best constants for the Trudinger-Moser and Adams inequalities through a new approach to the critical and subcritical inequalities. Initially, we introduce Trudinger-Moser-type inequalities for a class of Sobolev spaces modeled on weighted Lebesgue spaces. These inequalities are subsequently extended to fractional dimensions. Furthermore, we establish asymptotic bounds for the subcritical supremum, which are used to remarkably demonstrate the equivalence between the critical and subcritical Trudinger-Moser and Adams inequalities. Based on this equivalence, we provide a proof of the existence of extremal functions for both the subcritical and critical extremal problems. As a consequence, we are able to explicitly calculate the value of the critical supremum in some special cases.

**Keywords:** Trudinger-Moser inequalities, Adams inequalities, Extremal functions.

# Sumário

|                                                                                                                                 |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Introdução . . . . .                                                                                                            | 2          |
| <b>1 Um Breve Contexto Histórico</b>                                                                                            | <b>6</b>   |
| 1.1 Desigualdade de Trudinger-Moser em domínios limitados . . . . .                                                             | 6          |
| 1.2 Desigualdade de Trudinger-Moser em domínios não limitados . . . . .                                                         | 9          |
| 1.3 A existência de uma função extremante . . . . .                                                                             | 11         |
| 1.4 A desigualdade de Adams . . . . .                                                                                           | 12         |
| <b>2 Equivalência das desigualdades crítica e subcrítica de Trudinger-Moser e Adams</b>                                         | <b>14</b>  |
| 2.1 Resultados Preliminares . . . . .                                                                                           | 19         |
| 2.2 Comportamento Assintótico dos Supremos Subcrítico e Crítico na Desigualdade de Trudinger-Moser . . . . .                    | 27         |
| 2.3 Comportamento assintótico da desigualdade subcrítica de Adams e sua relação com a crítica . . . . .                         | 45         |
| 2.3.1 Desigualdades de Adams em $W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ . . . . .                                                    | 45         |
| 2.3.2 Desigualdade de Adams em $W^{\gamma, \frac{N}{\gamma}}(\mathbb{R}^N)$ . . . . .                                           | 68         |
| <b>3 Equivalência das desigualdades crítica e subcrítica de Trudinger-Moser em dimensões fracionárias e funções extremantes</b> | <b>72</b>  |
| 3.1 Resultados Preliminares . . . . .                                                                                           | 75         |
| 3.2 Equivalência das desigualdades crítica e subcrítica de Trudinger-Moser                                                      | 86         |
| 3.3 Existência de Funções extremantes . . . . .                                                                                 | 95         |
| 3.3.1 Funções maximais para a desigualdade subcrítica . . . . .                                                                 | 96         |
| 3.3.2 Funções maximais para a desigualdade crítica . . . . .                                                                    | 100        |
| 3.4 Atingibilidade da desigualdade crítica no caso $k_0 = p - 1$ . . . . .                                                      | 108        |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                                                                                               | <b>115</b> |

# Notações

Aqui estão algumas notações adotadas ao longo do texto:

- $L^p(\Omega)$  - Espaço de Lebesgue, onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ;
- $W^{k,p}(\Omega)$  - Espaço de Sobolev;
- $W_0^{1,p}(\Omega)$  - Completamento de  $C_c^1(\Omega)$ , na norma  $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ ,  $1 \leq p < \infty$ ;
- $X_R := X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$  - classe de espaços de Sobolev com peso;
- $B(x, r) = B_r(x)$  - Bola aberta de centro  $x$  e raio  $r$ ;
- $|\Omega|$  - Medida de Lebesgue de um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ;
- $|\cdot|$  - Norma de um elemento de  $\mathbb{R}^N$ ;
- $\|\cdot\|$  - Norma de um vetor;
- $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$  - Norma do Espaço de Lebesgue;
- $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$  - Norma no espaço de Sobolev;
- $q.t.p$  - Quase toda parte;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$  - Gradiente da função  $u$ ;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  - Laplaciano da função  $u$ ;
- $f'(x)$  - Derivada de  $f$  no ponto  $x$ ;
- $\exp(x) = e^x$  - Função exponencial aplicada no ponto  $x \in \mathbb{R}$ ;

- $f = o(g)$  quando  $x \rightarrow x_0$ , se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$ ;
- $f_n = o_n(1)$  quando  $n \rightarrow \infty$ , se  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = 0$ ;
- $f = O(g)$  quando  $x \rightarrow x_0$ , se  $|f(x)| \leq C|g(x)|$  para todo  $x$  suficientemente próximo de  $x_0$ ;
- $\rightharpoonup$  - Convergência fraca;
- $\rightarrow$  - Convergência forte;
- $A_n \approx B_n$  - quando  $A_n = B_n + o_n(1)$ ;
- $A_n \gtrsim B_n$  - quando  $A_n \geq B_n + o_n(1)$ ;
- $A_n \lesssim B_n$  - quando  $A_n \leq B_n + o_n(1)$ ;
- $\omega_{N-1} = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$  - é a área da superfície da N-bola unitária em  $\mathbb{R}^N$ ;
- $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ .

# Introdução

Nesta dissertação, abordaremos as desigualdades de Trudinger-Moser e Adams, que desempenham um papel fundamental na teoria das Equações Diferenciais Parciais, especialmente em situações em que o expoente crítico de Sobolev tende ao infinito. Essas desigualdades são essenciais para estabelecer a existência e a regularidade de soluções em uma ampla gama de problemas elípticos e parabólicos. Além disso, elas são cruciais para a compreensão de fenômenos não lineares em espaços de Sobolev, especialmente em contextos em que os métodos clássicos falham devido à falta de compacidade ou outras dificuldades técnicas.

Essa perda de compacidade é frequentemente causada pelo crescimento crítico da não-linearidade ou pela não-limitação do domínio de definição do problema. Esse crescimento crítico na parte não-linear é motivado pelas desigualdades de Trudinger-Moser e Adams (veja [3, 43]). Nesse contexto, apresentaremos as desigualdades críticas e subcríticas de Trudinger-Moser e Adams em  $\mathbb{R}^N$ .

Além disso, apresentaremos uma classe de espaços de Sobolev baseada em espaços de Lebesgue com peso, nos quais a desigualdade de Trudinger-Moser é válida. Posteriormente, essas desigualdades serão estendidas para dimensões fracionárias, proporcionando um método eficaz para a análise de problemas de crescimento crítico relacionados a uma variedade de operadores elípticos quasilineares, como, por exemplo, o Laplaciano, o  $p$ -Laplaciano e o  $k$ -Hessiano, especialmente em aplicações a funções simétricas.

Nesse contexto, os temas que abordaremos nesta dissertação são:

No Capítulo 1, exploraremos a motivação e a origem das desigualdades de Trudinger-Moser. Em seguida, apresentaremos um contexto histórico detalhado, abordando diversos aspectos cruciais. Primeiramente, discutiremos as desigualda-

des do tipo Trudinger-Moser em domínios limitados. Posteriormente, examinaremos a determinação da melhor constante associada a essas desigualdades. Além disso, analisaremos a generalização da desigualdade de Trudinger-Moser para espaços de Sobolev de ordem superior, conforme proposto por D.R. Adams. Por fim, discutiremos a extensão completa da desigualdade de Trudinger-Moser para domínios não limitados, substituindo a seminorma de Dirichlet,

$$\|u\|_{1,N} := \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^N dx \right)^{\frac{1}{N}}$$

pela norma padrão do espaço de Sobolev  $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ , representada por

$$\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} := \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^N + |u|^N) dx \right)^{\frac{1}{N}}.$$

Além desses desenvolvimentos, exploraremos também as desigualdades do tipo Trudinger-Moser em outros espaços funcionais.

No Capítulo 2, estudaremos as desigualdades ótimas críticas e subcríticas de Trudinger-Moser e Adams. Analisaremos o comportamento assintótico do supremo para as desigualdades subcríticas de Trudinger-Moser-Adams nos espaços euclidianos, demonstrando que tais desigualdades são equivalentes e estabelecendo uma relação precisa entre os supremos das desigualdades mencionadas.

É importante destacar que essa análise é fundamental para a determinação da existência de funções extremais para essas desigualdades. Embora este tópico seja discutido no Capítulo 3 para um caso específico, ele não será abordado no Capítulo 2. Para uma análise detalhada sobre o caso tratado no Capítulo 2, recomendamos ao leitor consultar [31].

Um aspecto notável deste capítulo é que, embora esses resultados já estarem presentes na literatura, a abordagem utilizada, que é apresentada em [30], oferece um método simples e inovador para tratar essas desigualdades, gerando novos resultados.

Por fim, no Capítulo 3, adotaremos uma abordagem semelhante, ampliando os resultados apresentados no Capítulo 2 para o espaço de Sobolev  $X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$ . Além disso, incluiremos um tópico adicional sobre funções extremantes e suas aplicações. Nele, estudamos [19] e organizamos o conteúdo da seguinte maneira: primeiramente, apresentaremos um resultado assintótico sobre a desigualdade de Trudinger-Moser nos espaços de Sobolev  $X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$ . Em seguida, demonstraremos a equivalência entre

os casos subcrítico e crítico. Posteriormente, provaremos a existência de funções extremantes tanto para o supremo crítico quanto para o supremo subcrítico fracionário.

# Capítulo 1

## Um Breve Contexto Histórico

As generalizações da desigualdade de Trudinger-Moser têm atraído grande atenção devido à sua importância em aplicações às Equações Diferenciais Parciais e à Análise Geométrica. Neste capítulo, apresentamos uma visão panorâmica dos principais resultados relacionados à desigualdade do tipo Trudinger-Moser. As informações aqui apresentadas são baseadas em [15].

### 1.1 Desigualdade de Trudinger-Moser em domínios limitados

Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio suave e limitado. Da teoria clássica de Equações Diferenciais Parciais, sabemos que as imersões contínuas de Sobolev (Corolário IX.14, [6]) estabelecem que

- i) se  $1 \leq p < N$ , então  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, p^*]$ , em que  $p^* = \frac{Np}{N-p}$ ;
- ii) se  $p = N$ , então  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, \infty)$ ;
- iii) Se  $p > N$ , então  $W_0^{1,p} \subset L^\infty(\Omega)$ .

Em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , é possível dotá-lo com a norma de Dirichlet, em virtude da desigualdade de Poincaré, que é dada por:

$$\|u\|_{1,p} = \|\nabla u\|_p = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

ou, alternativamente, com a norma usual do espaço  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , dada por:

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left( \|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$



A desigualdade de Trudinger-Moser trata o caso limite

$$p = N.$$

Mais precisamente, uma vez que (formalmente)

$$p^* = \frac{pN}{N-p} \sim +\infty,$$

uma pergunta natural que surge é se a imersão de  $W_0^{1,N}(\Omega)$  em  $L^\infty(\Omega)$  é válida. No entanto, verifica-se, por meio de exemplos, que  $W_0^{1,N}(\Omega) \not\subset L^\infty(\Omega)$ . De fato, basta considerar o contra-exemplo

$$u(x) = \left( \ln \left( \frac{1}{|x|} \right) \right)^\alpha$$

em que  $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{N}$  e  $\Omega = B(0, 1)$ . Neste caso, temos que

$$u \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Mas,

$$u \notin L^\infty(\Omega).$$

No entanto, note que

$$\int_{\Omega} e^{|u|^{\frac{N}{N-1}}} dx < \infty.$$

De fato, utilizando coordenadas polares, segue que

$$\int_{B(0,1)} e^{(-\ln|x|)^{\frac{\alpha N}{N-1}}} dx = \omega_{N-1} \int_0^1 e^{(-\ln \rho)^{\frac{\alpha N}{N-1}}} \rho^{N-1} d\rho. \quad (1.1)$$

Mas observe que, para  $\beta - 1 < 0$ , temos que

$$(-\ln t)^\beta < -\ln(t^\beta), \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+, \quad (1.2)$$

pois

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(-\ln t)^\beta}{-\ln(t^\beta)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\beta(-\ln t)^{\beta-1} \left(\frac{-1}{t}\right)}{-\beta \left(\frac{1}{t}\right)} = 0.$$

Assim, como

$$\alpha < 1 - \frac{1}{N} \quad \Rightarrow \quad \alpha < \frac{N-1}{N} \quad \Rightarrow \quad \alpha N < N-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha N}{N-1} < 1,$$

e utilizando (1.2) em (1.1), segue que

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,1)} e^{(-\ln|x|)^{\frac{\alpha N}{N-1}}} dx &\leq w_{N-1} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 e^{-\ln(\rho)^{\frac{\alpha N}{N-1}}} \rho^{N-1} d\rho \\
&= \omega_{N-1} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \rho^{\frac{-\alpha N}{N-1}} \rho^{N-1} d\rho \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

já que  $\frac{-\alpha N}{N-1} + N > 0$ . Sendo assim, apesar de essa função não estar em  $L^\infty(\Omega)$ , pelo Teorema da Convergência Monótona e pelo que foi feito anteriormente, temos que a expansão

$$\int_{\Omega} e^{|u|^{\frac{N}{N-1}}} dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Omega} \frac{|u|^{\frac{jN}{N-1}}}{j!} dx < \infty.$$

Portanto, espera-se que exista uma função de crescimento máximo  $g(t)$  tal que, se  $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ , então

$$\int_{\Omega} g(u) dx < \infty.$$

De fato, S. Pohozaev [47] e N. Trudinger [52] mostraram que esse crescimento máximo é do tipo exponencial. Mais precisamente, tem-se o teorema abaixo.

**Teorema 1.1** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio suave e limitado. Se  $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ , então*

$$\int_{\Omega} e^{|u|^{\frac{N}{N-1}}} dx < \infty.$$

Além disso, vale salientar que este resultado é ótimo no sentido de que, para qualquer crescimento superior, existem funções para as quais a integral correspondente se torna infinita. As provas de Pohozaev e Trudinger utilizam a mesma ideia, ou seja, desenvolvendo a exponencial em uma série de potências, o que reduz o problema a mostrar que uma série de  $L^m$ -normas ( $m \in \mathbb{N}$ ) permanece finita. Ao controlar as constantes de incorporação de  $W_0^{1,N}(\Omega) \subset L^m(\Omega)$ , obtém-se o resultado.

Posteriormente, as afirmações acima foram refinadas por J. Moser em [43], que provou o seguinte resultado:

**Teorema 1.2 ([43])** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio com medida finita. Denote por  $\|\nabla u\|_N$  a norma em  $W_0^{1,N}(\Omega)$ . Então*

$$\sup_{\|\nabla u\|_N \leq 1} \int_{\Omega} e^{\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}} dx \begin{cases} \leq c|\Omega|, & \text{se } \alpha \leq \alpha_N \\ = \infty, & \text{se } \alpha > \alpha_N \end{cases} \quad (1.3)$$

em que  $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}} = N \left( \frac{N\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)} \right)^{\frac{1}{N-1}}$  e  $\omega_{N-1}$  é a medida da esfera unitária em  $\mathbb{R}^N$ .

A desigualdade (1.3) é atualmente conhecida como a desigualdade de Trudinger-Moser. Além disso, um aspecto interessante na demonstração desse resultado, que também aplicaremos nesta dissertação, é a famosa sequência de Moser, introduzida por J. Moser, que consiste em uma sequência de funções não-negativas, dada por

$$u_n(x) = \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} \begin{cases} (\ln(n))^{\frac{N-1}{N}}, & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{\ln(\frac{1}{|x|})}{(\ln(n))^{\frac{1}{N}}}, & \text{se } \frac{1}{n} \leq |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

## 1.2 Desigualdade de Trudinger-Moser em domínios não limitados

A partir de (1.3), observamos que essas desigualdades são válidas apenas para domínios limitados, o que restringe a aplicabilidade direta da desigualdade de Trudinger-Moser a domínios não limitados. Entretanto, versões para domínios não limitados foram estabelecidas. Podemos citar, por exemplo, o trabalho de Cao [7] para  $N = 2$ , onde ele provou que, para todo  $\alpha > 0$  e  $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ , temos que  $e^{\alpha u^2} - 1 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ . Além disso, se  $\|\nabla u\|_2 \leq 1$ ,  $\|u\|_2 \leq M < \infty$  e  $0 < \alpha < 4\pi$ , então existe  $C = C(M, \alpha) > 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1) dx \leq C(M, \alpha). \quad (1.4)$$

Este resultado foi generalizado para dimensões superiores por J. M. do Ó [21] e Panda [46] para  $N \geq 2$ . Precisamente, eles provaram que se  $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\|\nabla u\|_N \leq 1$  e  $\|u\|_N \leq M$ , então, para  $0 < \alpha < \alpha_N$ , existe uma constante  $C(M, \alpha) > 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\alpha(u) dx \leq C(M, \alpha),$$

em que

$$\Phi_\alpha(u) = e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} - \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\alpha^k |u|^{\frac{kN}{N-1}}}{k!}. \quad (1.5)$$

Gostaríamos de ressaltar que a expressão dada em (1.5) é motivada pela imersão contínua de Sobolev ao considerarmos  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Neste caso, quando  $N = p$ , temos que:

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \quad \text{para } q \in [N, \infty).$$

Logo, ao subtrairmos aqueles termos da expansão de Taylor da exponencial, estamos, assim, removendo apenas a parte não integrável.

Citamos também Adachi-Tanaka [2], que refina os trabalhos [21, 46]. Todos esses resultados trataram somente do caso subcrítico, isto é,  $\alpha < \alpha_N$ . Contudo, Ruf [48], quando  $N = 2$ , e Li-Ruf [36], quando  $N \geq 3$ , estudaram o caso crítico, isto é,  $\alpha = \alpha_N$  e demonstraram que o resultado de Moser [43] pode ser generalizado para domínios não limitados, se a norma de Dirichlet

$$\|u\|_{1,N} := \|\nabla u\|_N$$

é substituída pela norma padrão de Sobolev

$$\|u\|_{W^{1,N}} := (\|\nabla u\|_N + \|u\|_N)^{1/N}.$$

Precisamente, eles mostraram que

$$\sup_{\substack{u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \\ \|u\|_{W^{1,N}} \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\alpha(u) dx \quad \begin{cases} < \infty, & \text{se } 0 < \alpha \leq \alpha_N, \\ = \infty, & \text{se } \alpha > \alpha_N. \end{cases}$$

Em [2, 21, 46], uma ferramenta fundamental foi a simetrização de Schwarz. Posteriormente, Lam-Lu [29] desenvolveram uma abordagem sem simetrização para fornecer uma nova prova para algumas versões da desigualdade de Trudinger-Moser em  $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ . Vale destacar que esta abordagem pode ser aplicada a outras configurações em que o argumento de simetrização não é aplicável.

Sendo assim, diversas generalizações, extensões e aplicações da desigualdade de Trudinger-Moser têm sido desenvolvidas recentemente, por exemplo, em [3], Adams estendeu a desigualdade de Trudinger-Moser para derivadas de ordem superior, que será abordado na Seção 1.4. Além disso, para extensões da desigualdade de Trudinger-Moser em variedades, veja P. Cherrier [10], L. Fontana [24], Y. Li [33, 34] e Y. Yang [53]. Recentemente, Adimurthi-Druet [4] apresentaram uma desigualdade de Trudinger-Moser aprimorada, com um termo de resto, demonstrando o seguinte resultado:

**Teorema 1.3** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado e seja*

$$C_\alpha = \sup_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|\nabla u\|_2 \leq 1}} \int_{\Omega} e^{4\pi e^2(1+\alpha)\|u\|_{1,2}^2} dx.$$

*Seja  $\lambda_1$  o primeiro autovalor associado ao operador laplaciano em  $H_0^1(\Omega)$ . Então*

$$\begin{cases} C_\alpha < \infty, & \text{se } \alpha < \lambda_1, \\ C_\alpha = \infty, & \text{se } \alpha \geq \lambda_1. \end{cases}$$

É relevante observar que essa constante ótima é determinada pela construção de sequências do tipo Moser adaptadas, enquanto a prova dos resultados de convergência é inspirada no princípio de concentração-compacidade, devido a Lions [38], que, no caso  $N = 2$ , é enunciado da seguinte forma:

**Teorema 1.4** *Seja  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  uma sequência de funções em  $H_0^1(\Omega)$ , com  $\|\nabla u_\varepsilon\|_2 = 1$  tal que  $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Para qualquer  $p < \frac{1}{1-\|\nabla u_0\|_2^2}$  tem-se*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} e^{4\pi \cdot p \cdot u_\varepsilon^2} dx < \infty.$$

Este resultado oferece informações mais precisas do que a desigualdade de Trudinger-Moser apresentada em (1.3) quando  $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$  em  $H_0^1(\Omega)$ , com  $u_0 \neq 0$ . Adimurthi-Druet estenderam o resultado de Lions, fornecendo informações adicionais, mesmo quando  $u_\varepsilon \rightharpoonup 0$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Mencionamos também que foram obtidas desigualdades do tipo Trudinger-Moser com condições de fronteira variadas, veja Cianchi [12, 13]. Por fim, destacamos desigualdades do tipo Trudinger-Moser em outros espaços funcionais, especialmente nos espaços de Orlicz, Zygmund, Lorentz e Besov, conforme explorado por Cianchi [11].

### 1.3 A existência de uma função extremante

É bem conhecido que, no caso da imersão de Sobolev  $W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ , a melhor constante de imersão

$$S_N^{2^*} = \sup_{\|\nabla u\|_2=1} \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx \tag{1.6}$$

não é atingida, em geral, se  $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ . Observe que (1.6) é análoga a (1.3). Por outro lado, na situação de Trudinger-Moser (1.3), tem-se o seguinte resultado surpreendente, obtido por L. Carleson e A. Chang [8].

**Teorema 1.5** *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é a bola  $B(0,1)$ , então o supremo em (1.3) é alcançado quando  $\alpha \leq \alpha_N$ .*

Posteriormente, M. Struwe [50], em 1988, mostrou que esse resultado continua válido para pequenas perturbações da bola em  $\mathbb{R}^2$ . Mais tarde, M. Flucher [23], em 1992, estendeu o resultado para qualquer domínio limitado em  $\mathbb{R}^2$ . Por fim, em 1996, Lin [37] generalizou o resultado para qualquer dimensão. Outros resultados de existência para a desigualdade de Trudinger-Moser podem ser encontrados em diversos trabalhos, veja Li [34, 33] para a existência de funções extremantes no contexto de uma variedade Riemanniana compacta e Li-Ruf [36] para a existência de extremantes em domínios não limitados.

## 1.4 A desigualdade de Adams

A desigualdade de Trudinger-Moser foi generalizada para o espaço de Sobolev de ordem superior por D.R. Adams em [3]. Para isso, considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto aberto e limitado,  $\frac{N}{m} > 1$  e o espaço

$$W_0^{m, \frac{N}{m}}(\Omega) := \overline{\left\{ u \in C_0^\infty(\Omega); \|u\|_{W^{m, \frac{N}{m}}} = \|\nabla^m u\|_{L^{\frac{N}{m}}} < \infty \right\}}^{\|\cdot\|_{W^{m, \frac{N}{m}}}},$$

sendo  $W_0^{m, \frac{N}{m}}$  o espaço de Sobolev de ordem superior, em que o símbolo  $\nabla^m u$  é definido como

$$\nabla^m u = \begin{cases} \Delta^{\frac{m}{2}} u, & \text{para } m \text{ par} \\ \nabla \Delta^{\frac{m-1}{2}} u, & \text{para } m \text{ ímpar} \end{cases}$$

e denota o gradiente de  $m$ -ésima ordem da função  $u$ . Nestas condições, D.R. Adams provou em [3], o seguinte Teorema:

**Teorema 1.6** *Para  $m \in \mathbb{N}$  e  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^N$  com  $|\Omega| < \infty$  e  $m < N$ , existe uma constante positiva  $c = C_{m,N}$  tal que*

$$\sup_{\|\nabla^m u\|_{L^{\frac{N}{m}}} \leq 1} \int_{\Omega} e^{\beta|u|^{\frac{N}{N-m}}} dx \begin{cases} \leq c, & \text{se } \beta \leq \beta_{m,N}, \\ = \infty, & \text{se } \beta > \beta_{m,N}, \end{cases} \quad (1.7)$$

em que

$$\beta_{m,N} := \frac{N}{\omega_{N-1}} \begin{cases} \left[ \frac{\pi^{\frac{N}{2}} 2^m \Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{N-m}{2})} \right]^{\frac{N}{N-m}}, & \text{se } m \text{ é par}, \\ \left[ \frac{\pi^{\frac{N}{2}} 2^m \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{N-m+1}{2})} \right]^{\frac{N}{N-m}}, & \text{se } m \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

Semelhante à clássica desigualdade de Trudinger-Moser, a desigualdade de Adams em sua forma (1.7), não pode ser estendida para domínios não limitados. Uma generalização da desigualdade de Adams para domínios não limitados foi estabelecida por Ozawa [45]. Ele provou a existência de duas constantes positivas  $\gamma$  e  $C$  tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi_{m,N} \left( \gamma |u|^{\frac{N}{N-m}} \right) dx \leq C \|u\|_{\frac{N}{m}}^{\frac{N}{m}}, \quad \forall u \in W^{m, \frac{N}{m}}(\mathbb{R}^N) \quad \text{com} \quad \|\nabla^m u\|_{\frac{N}{m}} \leq 1, \quad (1.8)$$

em que

$$\phi_{m,N}(t) := e^{|t|} - \sum_{j=0}^{j_{\frac{N}{m}}-2} \frac{|t|^j}{j!}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad N > m, \quad j_{\frac{N}{m}} := \min \left\{ j \in \mathbb{N} : j \geq \frac{N}{m} \right\}.$$

Muitas outras melhorias da desigualdade de Adams, tanto em domínios limitados quanto não limitados, foram provadas. Consultar, por exemplo, Ruf-Sani [49], Masmoudi-Sani [42] e Tarsi [51].

## Capítulo 2

# Equivalência das desigualdades crítica e subcrítica de Trudinger-Moser e Adams

Neste capítulo, nosso objetivo é estudar dois tipos de desigualdades: as do tipo Trudinger-Moser e as de Adams. Primeiramente, analisaremos as desigualdades críticas, nas quais, em geral, utiliza-se a seguinte norma:

$$\|u\|_{W^{1,N}} := \left( \|u\|_N^N + \|\nabla u\|_N^N \right)^{\frac{1}{N}}. \quad (2.1)$$

Em seguida, trataremos das desigualdades subcríticas. Nesse caso, utiliza-se frequentemente a seminorma:

$$\|u\|_{1,N} := \|\nabla u\|_N, \quad (2.2)$$

a qual é equivalente à norma dada em (2.1) no espaço de Sobolev, desde que o domínio seja limitado e sujeito a condições de fronteira de Dirichlet. É importante salientar que ambas as desigualdades são analisadas considerando as melhores constantes possíveis. Mais precisamente, em [2], Adachi e Tanaka estabeleceram a desigualdade de Trudinger-Moser subcrítica no  $\mathbb{R}^N$ , isto é,

**Teorema 2.1** *Para qualquer  $\alpha < \alpha_N$ , existe uma constante positiva  $C_{N,\alpha}$  tal que para toda função  $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  com  $\|\nabla u\|_N \leq 1$ , vale a seguinte desigualdade:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) dx \leq C_{N,\alpha} \|u\|_N^N, \quad (2.3)$$

em que

$$\phi_N(t) = e^t - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{t^j}{j!}.$$



Além disso, a constante  $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$  é ótima no sentido de que o supremo dado em (2.3) é infinito se  $\alpha \geq \alpha_N$ .

Gostaríamos de destacar que a definição de  $\phi_N(t)$ , apresentada omitindo certos termos, foi motivada pelo fato de que as imersões contínuas dos espaços de Sobolev em  $\mathbb{R}^N$  são válidas quando  $N \leq p$ . Observe que, no teorema acima, há apenas a restrição à seminorma dada em (2.2), sem impor limitações à norma completa apresentada em (2.1). É relevante mencionar que, em [2], o método utilizado baseia-se em um argumento de simetrização que, em muitos contextos não euclidianos, não pode ser aplicado devido à famosa desigualdade de Polya-Szego:

$$\int_{B(0,R)} |\nabla u^*(x)|^p dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \quad (2.4)$$

a qual, em geral, não é válida.

Na desigualdade acima,  $u$  é uma função positiva e não crescente definida em  $B(0,r)$ , com  $|B(0,R)| = |\Omega|$  e  $u^*$  é uma função radialmente simétrica associada a  $u$ , denominada de simetrização de Schwarz de  $u$ .

Por outro lado, é importante observar que a desigualdade dada em (2.3) falha no caso crítico, ou seja, quando  $\alpha = \alpha_N$ . Portanto, é natural perguntar quando a desigualdade acima pode ser verdadeira para  $\alpha = \alpha_N$ . Essa pergunta foi respondida por Li e Ruf, em [36] e [48], utilizando a norma completa (2.1) do espaço de Sobolev  $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ . Mais precisamente, eles demonstraram o seguinte resultado abaixo.

**Teorema 2.2** *Para todo  $0 \leq \alpha \leq \alpha_N$*

$$\sup_{0 < \|u\|_{W^{1,N}} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) dx < \infty. \quad (2.5)$$

Além disso,  $\alpha_N$  é ótima, no sentido de que se  $\alpha > \alpha_N$ , então o supremo dado em (2.5) é infinito.

A simetrização tem se mostrado um método útil e eficiente para lidar com desigualdades dessa natureza. No entanto, é necessário investigar essas desigualdades em contextos onde a simetrização não é aplicável, como, por exemplo, no Espaço de Sobolev de ordem superior e em Variedades Riemannianas. Nesses cenários, uma desigualdade como (2.4) não é válida.

Nesse contexto, o primeiro avanço significativo foi realizado por D. Adams em [3], quando estabeleceu a desigualdade de Trudinger-Moser no âmbito de derivadas de ordem superior em espaços euclidianos. Adams demonstrou, em [3], uma desigualdade com condições de contorno de Dirichlet, posteriormente generalizada para condição de contorno de Navier em [51]. Para entendermos uma dessas extensões, consideremos o símbolo  $\nabla^m u$ , cuja definição é dada por

$$\nabla^m u = \begin{cases} \Delta^{\frac{m}{2}} u, & \text{para } m \text{ par,} \\ \nabla \Delta^{\frac{m-1}{2}} u, & \text{para } m \text{ ímpar,} \end{cases}$$

em que  $m$  é um inteiro positivo, denotando o gradiente de ordem  $m$  para função  $u \in C^m(\Omega)$ , pertencente à classe de funções diferenciáveis de ordem  $m$ . Aqui,  $\nabla$  representa o operador gradiente usual e  $\Delta$  o laplaciano. Além disso, definimos  $W_N^{m, \frac{N}{m}}(\Omega)$  como o espaço de Sobolev com condições de contorno de Navier homogêneas

$$W_N^{m, \frac{N}{m}}(\Omega) := \left\{ u \in W^{m, \frac{N}{m}}(\Omega); \Delta^j u = 0, \text{ em } \partial\Omega \text{ para } 0 \leq j \leq \frac{m-1}{2} \right\}.$$

O que segue baseia-se em [28].

**Teorema 2.3** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto aberto e limitado com  $0 \in \Omega$ . Se  $m$  for um número inteiro positivo menor que  $N$ ,  $0 \leq \beta < N$ , então existe uma constante  $C_0 = C(N, m, \beta) > 0$  tal que para todo  $u \in W_N^{m, \frac{N}{m}}(\Omega) \setminus \{0\}$  e  $\|\nabla^m u\|_{L^{\frac{N}{N-m}}(\Omega)} \leq 1$ , tem-se que*

$$\frac{1}{|\Omega|^{1-\frac{\beta}{N}}} \int_{\Omega} \exp \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-m}} \right) \frac{dx}{|x|^{\beta}} \leq C_0$$

para todo  $\alpha \leq \alpha(N, m)$ , em que

$$\alpha(N, m) = \begin{cases} \frac{N}{w_{N-1}} \left[ \frac{\pi^{\frac{N}{2}} 2^m \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{N-m+1}{2})} \right]^{\frac{N}{N-m}}, & \text{quando } m \text{ é ímpar,} \\ \frac{N}{w_{N-1}} \left[ \frac{\pi^{\frac{N}{2}} 2^m \Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{N-m}{2})} \right]^{\frac{N}{N-m}}, & \text{quando } m \text{ é par.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Além disso, a constante  $\alpha(N, m)$  é ótima no sentido de que, para qualquer  $\alpha > \alpha(N, m)$ , a integral pode ser tomada tão grande quanto desejado.

Por fim, vale ressaltar que em [29], Lam e Lu desenvolveram um método que adapta a ideia das desigualdade de Trudinger-Moser e Adams em domínios de medida finita para domínios não limitados, utilizando os conjuntos de níveis das funções em consideração. Assim, este argumento de local para global em [29], não utiliza o método

de simetrização e, portanto, também funciona para espaços de Lorentz-Sobolev [40], espaços hiperbólicos [39] e Variedades Riemannianas [35]. Sendo assim, com base no trabalho de Lam-Lu [29], apresentaremos a definição do espaço de Sobolev fracionário e, em seguida, uma versão geral do resultado.

Sejam  $p \in [1, \infty)$  e  $\gamma > 1$  um número não inteiro tal que  $\gamma = m + \sigma$  com  $m \in \mathbb{N}$  e  $\sigma \in (0, 1)$ . Definimos o espaço de Sobolev fracionário por

$$W^{\gamma,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N); D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^N) \text{ com } |\alpha| = m\},$$

e este é um espaço de Banach com a seguinte norma

$$\|u\|_{W^{\gamma,p}(\mathbb{R}^N)} = \left( \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^N)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

em que

$$W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + \sigma}} \in L^p(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \right\}$$

e

$$[u]_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^N)} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{n+\sigma p}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma seminorma, chamada seminorma de Gagliardo. Mais ainda,  $W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^N)$  é um espaço de Banach com a norma abaixo

$$\|u\|_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^N)} = \left( \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + [u]_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^N)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, denotando por  $(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}$  o operador laplaciano fracionário, cuja definição é dada por

$$(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u(x) := a_{N,\gamma} \text{ P.V. } \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{N+\gamma}} dy = a_{N,\gamma} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{N+\gamma}} dy,$$

em que  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ , P.V. é uma abreviação para “valor principal” e

$$a_{N,\gamma} := 2^\gamma \pi^{-\frac{N}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{N+\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\gamma}{2}\right)}$$

é uma constante de normalização e  $\Gamma$  denota a função gama de Euler. Para mais detalhes do espaço de Sobolev fracionário, consulte [20]. Nesse contexto, quando o espaço ambiente é o espaço definido anteriormente, Lam e Lu em [29] obtiveram o seguinte resultado:

**Teorema 2.4 (Lam-Lu, 2013)** *Seja  $0 < \gamma < N$  um número real positivo,  $p = \frac{N}{\gamma}$ ,  $p' = \frac{p}{p-1}$  e  $\tau > 0$ . Então vale*

$$\sup_{\substack{u \in W^{\gamma,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \\ \|(\tau I - \Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u\|_p \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\beta_0(N, \gamma) |u(x)|^{p'}) dx < \infty,$$

em que

$$\phi(t) = e^t - \sum_{j=0}^{j_p-2} \frac{t^j}{j!}, \quad \text{com } j_p := \min\{j \in \mathbb{N}; j \geq p\},$$

e

$$\beta_0(N, \gamma) = \frac{N}{w_{N-1}} \left[ \frac{\pi^{\frac{N}{2}} 2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-\gamma}{2}\right)} \right]^{p'}.$$

Além disso, essa desigualdade é ótima no sentido de que, se  $\beta_0(N, \gamma)$  for substituído por qualquer  $\beta > \beta_0(N, \gamma)$ , então o supremo é infinito.

Por fim, no artigo “Equivalence of critical and subcritical sharp Trudinger-Moser-Adams inequalities” [30], Lam, Lu e Zhang investigaram as desigualdades associadas a Trudinger-Moser e Adams, que desempenham um papel crucial na análise geométrica e em equações diferenciais parciais. Este capítulo baseia-se no trabalho desses autores.

Neste capítulo, serão analisados, em detalhes, o comportamento assintótico do supremo para as desigualdades subcríticas de Trudinger-Moser e Adams no espaço euclidiano, as desigualdades críticas e subcríticas, bem como as constantes ótimas associadas a essas desigualdades. Ademais, será demonstrado que tais desigualdades são equivalentes. Esses resultados são essenciais para a determinação da existência e inexistência de funções extremantes para as desigualdades de Trudinger-Moser e Adams.

Dessa forma, os resultados apresentados não apenas ampliam a compreensão das desigualdades, mas também proporcionam ferramentas analíticas valiosas para futuras pesquisas na área.

Por fim, é importante ressaltar que o principal resultado deste capítulo consiste na surpreendente equivalência entre esses dois tipos de desigualdades. Tal equivalência sugere uma nova abordagem tanto para as desigualdades críticas quanto para as subcríticas de Trudinger-Moser e Adams.

## 2.1 Resultados Preliminares

Nesta seção, serão apresentados alguns resultados preliminares fundamentais para o desenvolvimento deste capítulo. Serão discutidas relações e propriedades iniciais das desigualdades de Trudinger-Moser e Adams, tanto em suas formas críticas quanto subcríticas. Além disso, serão introduzidas definições e lemas essenciais para os resultados subsequentes do Capítulo.

**Lema 2.1** *Sejam  $N \geq 2$ ,  $0 \leq \beta < N$ ,  $0 \leq \alpha < \alpha_N$  e  $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ . Denote*

$$AT(\alpha, \beta) := \sup_{\|\nabla u\|_N \leq 1} \frac{1}{\|u\|_N^{N-\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta}, \quad (2.7)$$

*de modo que*

$$\phi_N(t) = e^t - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{t^j}{j!}. \quad (2.8)$$

*Então, sempre podemos assumir sempre que  $\|u\|_N = 1$ , isto é,*

$$AT(\alpha, \beta) = \sup_{\substack{\|\nabla u\|_N \leq 1 \\ \|u\|_N = 1}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta}.$$

**Demonstração:** Seja  $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  tal que  $\|\nabla u\|_N \leq 1$ . Definindo

$$v(x) = u(\lambda x),$$

com  $\lambda = \|u\|_N$ , temos que

$$\nabla v(x) = \nabla(u(\lambda x)) = \lambda \nabla u(\lambda x).$$

Assim, ao aplicar a mudança de variável  $y = \lambda x$ , com  $dy = \lambda^N dx$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_N &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(v(x))|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} \lambda^N |\nabla u(\lambda x)|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^N dy \right)^{\frac{1}{N}} \\ &= \|\nabla u\|_N \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Além disso, pela definição de  $v$ , temos que

$$\|v\|_N = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^N dx \right)^{\frac{1}{N}}. \quad (2.9)$$

Assim, utilizando novamente a mudança de variável  $y = \lambda x$  em (2.9), segue que

$$\|v\|_N = \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y)|^N}{\lambda^N} dy \right)^{\frac{1}{N}} = \frac{1}{\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^N dy \right)^{\frac{1}{N}} = \frac{\|u\|_N}{\|u\|_N} = 1.$$

Por fim, usando novamente a mudança de variável  $y = \lambda x$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |v(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(\lambda x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \frac{1}{\lambda^{-\beta}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(\lambda x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|\lambda x|^\beta} \right) \\ &= \frac{1}{\|u\|_N^{N-\beta}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(y)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta} \right). \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ■

Observa-se que, de acordo com o Lema 2.1, é sempre possível assumir  $\|u\|_N = 1$  na desigualdade. No próximo lema, mostraremos que a finitude da desigualdade de Trudinger-Moser subcrítica decorre diretamente da finitude da desigualdade de Trudinger-Moser crítica.

**Lema 2.2** *Sejam  $N \geq 2$ ,  $0 \leq \beta < N$ ,  $a, b > 0$ ,  $0 \leq \alpha < \alpha_N$  e  $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ .*

*Denote*

$$\text{MT}_{a,b}(\beta) := \sup_{\|\nabla u\|_N^a + \|u\|_N^b \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta}. \quad (2.10)$$

*Se  $\text{MT}_{a,b}(\beta)$  é finito, então  $\text{AT}(\alpha, \beta)$  é finito. Além disso,*

$$\text{AT}(\alpha, \beta) \leq \left( \frac{\left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{(N-1)b}{N}}}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{(N-1)a}{N}}} \right)^{\frac{N-\beta}{b}} \text{MT}_{a,b}(\beta).$$

*Em particular, se  $a = b = N$ , então*

$$\text{AT}(\alpha, \beta) \leq \left( \frac{\left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1}}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1}} \right)^{\frac{N-\beta}{N}} \text{MT}(\beta).$$

**Demonstração:** Seja  $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  tal que  $\|\nabla u\|_N \leq 1$  e  $\|u\|_N = 1$ . Considere

$$v(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{N-1}{N}} u(\lambda x), \quad \text{com} \quad \lambda = \left(\frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{(N-1)b}{N}}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{(N-1)a}{N}}}\right)^{\frac{1}{b}}. \quad (2.11)$$

Então

$$\nabla v(x) = \nabla \left( \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{N-1}{N}} u(\lambda x) \right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{N-1}{N}} \lambda \nabla u(\lambda x).$$

Assim, realizando a mudança de variável  $y = \lambda x$ , podemos concluir que

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_N^a &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^N dx \right)^{\frac{a}{N}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{N-1}{N}} \lambda \nabla u(\lambda x) \right|^N dx \right)^{\frac{a}{N}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{(N-1)a}{N}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \lambda^N |\nabla u(\lambda x)|^N dx \right)^{\frac{a}{N}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{(N-1)a}{N}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^N dy \right)^{\frac{a}{N}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{(N-1)a}{N}} \|\nabla u\|_N^a. \end{aligned}$$

Portanto, utilizando o fato de que  $\|\nabla u\|_N \leq 1$ , na expressão acima, temos que

$$\|\nabla v\|_N^a \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{(N-1)a}{N}}. \quad (2.12)$$

Além disso, analogamente ao que foi feito anteriormente e utilizando (2.11), segue que

$$\begin{aligned} \|v\|_N^b &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{N-1}{N}} u(\lambda x) \right|^N dx \right)^{\frac{b}{N}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{(N-1)b}{N}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^N dx \right)^{\frac{b}{N}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{(N-1)b}{N}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^N \frac{dy}{\lambda^N} \right)^{\frac{b}{N}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{(N-1)b}{N}} \lambda^{-b} \|u\|_N^b \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{(N-1)b}{N}} \left( \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{(N-1)b}{N}}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\frac{(N-1)a}{N}}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|v\|_N^b = 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{(N-1)a}{N}}. \quad (2.13)$$

Assim, segue de (2.12) e (2.13) que

$$\|\nabla v\|_N^a + \|v\|_N^b \leq 1.$$

Sendo assim, utilizando a mudança de variável  $x = \lambda y$ , obtemos que  $dx = \lambda^N dy$ . Além disso, usando a definição de  $v(y)$  (veja (2.11)) e a definição de  $\text{MT}_{a,b}(\beta)$  (veja (2.10)), respectivamente, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(\lambda y)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{\lambda^N dy}{|\lambda y|^\beta} \\ &= \lambda^{N-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |v(y)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta} \\ &\leq \lambda^{N-\beta} \text{MT}_{a,b}(\beta). \end{aligned}$$

Logo, pela definição de supremo e usando (2.11) na equação acima, segue que

$$\text{AT}(\alpha, \beta) \leq \lambda^{N-\beta} \text{MT}_{a,b}(\beta) = \left( \frac{\left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{(N-1)b}{N}}}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{(N-1)a}{N}}} \right)^{\frac{N-\beta}{b}} \text{MT}_{a,b}(\beta).$$

Em particular, tomando  $a = b = N$ , temos que

$$\text{AT}(\alpha, \beta) \leq \left( \frac{\left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{(N-1)N}{N}}}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{(N-1)N}{N}}} \right)^{\frac{N-\beta}{N}} \text{MT}_{N,N}(\beta) = \left( \frac{\left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1}}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1}} \right)^{\frac{N-\beta}{N}} \text{MT}(\beta).$$

O que conclui a demonstração. ■

O próximo resultado refere-se à desigualdade de Adams no caso subcrítico para o espaço  $W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ . Ele afirma que é sempre possível assumir  $\|u\|_{\frac{N}{2}} = 1$  na desigualdade de Adams subcrítica.

**Lema 2.3** *Sejam  $N \geq 3$ ,  $0 \leq \beta < N$ ,  $0 \leq \alpha < \alpha(N, 2)$  (para a definição de  $\alpha(N, 2)$  veja a equação (2.6) com  $m = 2$ ) e  $u \in W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ . Denote*

$$\text{ATA}(\alpha, \beta) := \sup_{\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}} \leq 1} \frac{1}{\|u\|_{\frac{N}{2}(1-\frac{\beta}{N})}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta}, \quad (2.14)$$



em que

$$\phi_{N,2}(t) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \geq \frac{N-2}{2}}} \frac{t^j}{j!}.$$

Então, para  $u \in W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  e tal que  $\|u\|_{\frac{N}{2}} = 1$ , vale

$$\text{ATA}(\alpha, \beta) = \sup_{\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta}.$$

**Demonstração:** Seja  $u \in W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  tal que  $\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}} \leq 1$  e considere

$$v(x) = u(\lambda x), \quad \text{com} \quad \lambda = \|u\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{1}{2}}.$$

Então,

$$\nabla v(x) = \lambda \nabla u(\lambda x) \quad \Rightarrow \quad \Delta v(x) = \lambda^2 \Delta u(\lambda x).$$

Além disso, usando a mudança de variável  $y = \lambda x$ , temos que

$$\begin{aligned} \|\Delta v\|_{\frac{N}{2}} &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda^2 \Delta u(\lambda x)|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} \lambda^N |\Delta u(\lambda x)|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u(y)|^{\frac{N}{2}} dy \right)^{\frac{2}{N}} \\ &= \|\Delta u\|_{\frac{N}{2}} \leq 1 \end{aligned}$$

e

$$\|v\|_{\frac{N}{2}} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\lambda^N} |u(y)|^{\frac{N}{2}} dy \right)^{\frac{2}{N}} = \left( \frac{\|u\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}}{\|u\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}} \right)^{\frac{2}{N}} = 1.$$

Para concluir o argumento, basta observar que, ao realizar a mudança de variável  $y = \lambda x$ , tem-se que  $dy = \lambda^N dx$ , e assim obtemos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |v(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(\lambda x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \frac{1}{\lambda^{N-\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(y)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta} \\ &= \frac{1}{\|u\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{(N-\beta)}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(y)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta}. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ■

O próximo resultado analisa a desigualdade de Adams em seu caso subcrítico. Esse resultado estabelece uma condição necessária para que  $ATA(\alpha, \beta)$  seja finito. Além disso, fornecemos um limite superior para  $ATA(\alpha, \beta)$ , isto é, demonstrando que o caso subcrítico pode ser controlado pelo crítico.

**Lema 2.4** *Sejam  $N \geq 3$ ,  $0 \leq \beta < N$ ,  $a, b > 0$ . Assuma que  $u \in W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  e denote*

$$A_{a,b} := \sup_{\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}}^a + \|u\|_{\frac{N}{2}}^b \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta}.$$

Se  $A_{a,b} < \infty$ , então  $ATA(\alpha, \beta) < \infty$ . Além disso,

$$ATA(\alpha, \beta) \leq \left( \frac{\left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}b}}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}a}} \right)^{\frac{N-\beta}{2b}} A_{a,b}(\beta).$$

Em particular, se  $A_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}}(\beta) := A(\beta) < \infty$ , então

$$ATA(\alpha, \beta) \leq \left( \frac{\left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{2}}}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{2}}} \right)^{\frac{N-\beta}{N}} A(\beta).$$

**Demonstração:** Aplicando o Lema 2.3, podemos assumir  $u \in W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  tal que

$$\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}} \leq 1 \quad \text{e} \quad \|u\|_{\frac{N}{2}} = 1. \quad (2.15)$$

Assim, definindo

$$v(x) = \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}} u(\lambda x); \quad \text{com} \quad \lambda = \left( \frac{\left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}b}}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}a}} \right)^{\frac{1}{2b}},$$

temos que

$$\Delta v(x) = \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}} \lambda^2 \Delta u(\lambda x)$$

Então, realizando a mudança de variável  $y = \lambda x$ , tem-se que  $dy = \lambda^N dx$ , o que implica que

$$\begin{aligned}
\|\Delta v\|_{\frac{N}{2}}^a &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}} \lambda^2 \Delta u(\lambda x) \right|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2a}{N}} \\
&= \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}a} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u(y)|^N dy \right)^{\frac{2a}{N}} \\
&= \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}a} \|\Delta u\|_{\frac{N}{2}}^a.
\end{aligned}$$

Mas, por hipótese (consulte a equação (2.15)), temos que  $\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}} \leq 1$ . Logo,

$$\|\Delta v\|_{\frac{N}{2}}^a \leq \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}a}. \quad (2.16)$$

Além disso, usando a mudança de variável  $y = \lambda x$  e a definição de  $\lambda$ , respectivamente, segue que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{\frac{N}{2}}^b &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}} u(\lambda x) \right|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2b}{N}} \\
&= \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}b} \left( \frac{1}{\lambda^N} \right)^{\frac{2b}{N}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^{\frac{N}{2}} dy \right)^{\frac{2b}{N}} \\
&= \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}b} \left( \left( \frac{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}a}}{\left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}b}} \right)^{\frac{1}{2b}} \right)^{2b} \|u\|_{\frac{N}{2}}^b.
\end{aligned}$$

Assim, aplicando (2.15) na equação acima, temos que

$$\|v\|_{\frac{N}{2}}^b = 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}a}. \quad (2.17)$$

Deste modo, de (2.16) e (2.17), concluímos que

$$\|\Delta v\|_{\frac{N}{2}}^a + \|v\|_{\frac{N}{2}}^b \leq 1.$$

Portanto, de acordo com a definição de  $A_{a,b}(\beta)$  e realizando a mudança de variável  $y = \lambda x$ , segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(y)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(\lambda x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{\lambda^N dx}{|\lambda x|^\beta}.
\end{aligned} \quad (2.18)$$

Sendo assim, dado que

$$v(x) = \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}} u(\lambda x) \Rightarrow \left( \frac{\alpha(N, 2)}{\alpha} \right) v(x)^{\frac{N}{N-2}} = u(\lambda x)^{\frac{N}{N-2}},$$

ao inserir essa expressão na equação (2.18), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(y)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta} = \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \left( \frac{\alpha(N, 2)}{\alpha} \right) |v(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{\lambda^N dx}{|\lambda x|^\beta}.$$

Assim, pela definição de  $\lambda$  e a do supremo, segue que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(y)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta} \\ &= \lambda^{N-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \alpha(N, 2) |v(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &\leq \left( \left( \frac{\left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N} b}}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N} a}} \right)^{\frac{1}{2b}} \right)^{N-\beta} A_{a,b}(\beta). \end{aligned}$$

Em particularmente, quando  $a = b = \frac{N}{2}$ , temos que

$$\text{ATA}(\alpha, \beta) \leq \left( \frac{\left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N} \frac{N}{2}}}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N} \frac{N}{2}}} \right)^{\frac{N-\beta}{2 \frac{N}{2}}} A_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}}(\beta) = \left( \frac{\left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}}}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}}} \right)^{\frac{N-\beta}{N}} A(\beta).$$

Como queríamos demonstrar. ■

Por fim, apresentaremos um resultado técnico que será utilizado repetidamente ao longo deste capítulo.

**Lema 2.5** *Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $x, y \geq 0$ . Então para todo  $r \in (0, 1)$ , tem-se*

$$(x + y)^p \leq r^{1-p} x^p + (1 - r)^{1-p} y^p.$$

**Demonstração:** Demonstramos este lema em dois casos distintos. No primeiro caso, consideramos  $p = 1$  ou  $x = y = 0$ . Nesta situação, é evidente que o resultado vale. Agora, se  $p > 1$  e  $x, y > 0$ , considere  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(r) = r^{1-p} x^p + (1 - r)^{1-p} y^p.$$

Assim,

$$f'(r) = (1 - p) r^{-p} x^p - (1 - p) (1 - r)^{-p} y^p$$

e, portanto, os pontos críticos de  $f$  serão

$$\begin{aligned}
f'(r) = 0 &\Rightarrow r^{-p} x^p = (1-r)^{-p} y^p \\
&\Rightarrow r^{-1} x = (1-r)^{-1} y \\
&\Rightarrow x - xr = ry \\
&\Rightarrow r = \frac{x}{x+y}.
\end{aligned}$$

Além disso, como  $p > 1$ , segue que

$$\begin{aligned}
f''(r) &= ((1-p)r^{-p} x^p - (1-p)(1-r)^{-p} y^p)' \\
&= -p(1-p)r^{-p-1} x^p - p(1-p)(1-r)^{-p-1} y^p \\
&= -p(1-p)(r^{-p-1} x^p + (1-r)^{-p-1} y^p) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Logo, como a função é convexa, segue que para  $\tilde{r} = \frac{x}{x+y}$ , a aplicação  $f$  admite mínimo global. Assim, se  $r \in (0, 1)$ , segue que

$$\begin{aligned}
f(\tilde{r}) &= f\left(\frac{x}{x+y}\right) \\
&= \left(\frac{x}{x+y}\right)^{1-p} x^p + \left(1 - \left(\frac{x}{x+y}\right)\right)^{1-p} y^p \\
&= \frac{x}{(x+y)^{1-p}} + \frac{y}{(x+y)^{1-p}} \\
&= (x+y)^p \\
&\leq r^{1-p} x^p + (1-r)^{1-p} y^p.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ■

## 2.2 Comportamento Assintótico dos Supremos Subcrítico e Crítico na Desigualdade de Trudinger-Moser

Nesta seção, será demonstrada a desigualdade subcrítica de Trudinger-Moser, abordando especialmente o comportamento assintótico para o supremo subcrítico  $AT(\alpha, \beta)$  (veja Teorema 2.5). É importante observar que, na prova do Teorema 2.5, não é assumido que o supremo crítico satisfaz  $MT(\beta) < \infty$ . Adicionalmente, será

estabelecida a relação entre os supremos  $\text{AT}(\alpha, \beta)$  e  $\text{MT}(\beta)$  (veja (2.7) e (2.10) para relembrar as definições) das desigualdades crítica e subcrítica de Trudinger-Moser (vide Teorema 2.6).

Posto isso, o primeiro resultado tem como objetivo investigar o comportamento, em  $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ , do seguinte supremo:

$$\text{AT}(\alpha, \beta) = \sup_{\|\nabla u\|_N \leq 1} \frac{1}{\|u\|_N^{N-\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta}.$$

Estamos interessados em investigar o comportamento assintótico deste supremo à medida que  $\alpha \rightarrow \alpha_N$ , além de fornecer os limites inferior e superior para o mesmo. Em termos mais precisos, enunciaremos o seguinte teorema:

**Teorema 2.5** *Sejam  $N \geq 2$ ,  $0 \leq \beta < N$ ,  $0 \leq \alpha < \alpha_N$  e  $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ . Denote*

$$\text{AT}(\alpha, \beta) = \sup_{\|\nabla u\|_N \leq 1} \frac{1}{\|u\|_N^{N-\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta}.$$

*Então existem constantes  $c = c(N, \beta) > 0$  e  $C = C(N, \beta) > 0$  tais que, para  $\alpha$  suficientemente próximo de  $\alpha_N$ , temos que*

$$\frac{c(N, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{(N-\beta)}{N}}} \leq \text{AT}(\alpha, \beta) \leq \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{(N-\beta)}{N}}}.$$

*Além disso, a constante  $\alpha_N$  é ótima no sentido de que  $\text{AT}(\alpha_N, \beta) = \infty$ .*

**Demonstração:** Por densidade, pelo Lema 2.1 e considerando o fato de trabalharmos com  $|u|$ , podemos supor que  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$  e é tal que

$$u \geq 0, \quad \|\nabla u\|_N \leq 1 \quad \text{e} \quad \|u\|_N = 1. \quad (2.19)$$

Seja

$$\Omega := \Omega(u) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N; u(x) > \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{1}{N}} \right\}.$$

Então, como  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ , segue que  $K(u) := \text{supp}(u) \subset \mathbb{R}^N$  é compacto tal que  $u(x) = 0$  para todo  $x \notin K(u)$ . Sendo assim, como  $\alpha < \alpha_N$ , segue que  $\Omega(u) \subset K(u)$ . Logo,  $\Omega(u)$  é limitado em  $\mathbb{R}^N$ . Além disso, temos que se  $x \in \Omega(u)$ , segue que

$$u(x) > \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{1}{N}} \Rightarrow \frac{u(x)^N}{\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)} > 1. \quad (2.20)$$

Assim, utilizando (2.20), temos que

$$\begin{aligned}
|\Omega| &= \int_{\Omega} 1 \, dx \\
&\leq \int_{\Omega} \frac{u(x)^N}{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}\right)} \, dx \\
&= \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}\right)} \int_{\Omega} |u(x)|^N \, dx \\
&\leq \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}\right)} \|u\|_N^N
\end{aligned}$$

Mas, a partir da equação (2.19), temos que  $\|u\|_N^N = 1$  e, portanto,

$$|\Omega| \leq \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}\right)}. \quad (2.21)$$

Por outro lado, temos que

$$\Omega^c = \mathbb{R}^N \setminus \Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; u(x) \leq \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}\right)^{\frac{1}{N}} < 1 \right\}.$$

Assim, como  $0 \leq \beta < N$  e usando o fato de que

$$\phi_N(t) = e^t - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{t^j}{j!}$$

é crescente, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \phi_N \left( \alpha \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} &\leq \int_{\{u \leq 1\}} \phi_N \left( \alpha |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&= \int_{\{u \leq 1\}} \left( \sum_{j=N-1}^{\infty} \frac{\left(\alpha |u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)^j}{j!} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&\leq \int_{\{u \leq 1\}} |u(x)|^N \left( \sum_{j=N-1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&\leq e^\alpha \int_{\{u \leq 1\}} |u(x)|^N \frac{dx}{|x|^\beta}.
\end{aligned}$$

Mas, observe que

$$e^\alpha \int_{\{u \leq 1\}} |u(x)|^N \frac{dx}{|x|^\beta} = e^\alpha \left( \underbrace{\int_{\{u \leq 1, |x| < 1\}} |u(x)|^N \frac{dx}{|x|^\beta}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\{u \leq 1, |x| \geq 1\}} |u(x)|^N \frac{dx}{|x|^\beta}}_{I_2} \right). \quad (2.22)$$

Assim, ao calcular separadamente para  $I_1$ , utilizando o fato de que  $u \leq 1$  e coordenadas polares, concluimos que

$$I_1 = \int_{\{u \leq 1, |x| < 1\}} |u(x)|^N \frac{dx}{|x|^\beta} \leq \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^\beta} dx = w_{N-1} \int_0^1 \frac{\rho^{N-1}}{\rho^\beta} d\rho = w_{N-1} \frac{1}{N-\beta}. \quad (2.23)$$

e, para  $I_2$ , utilizando o fato de que  $|x| \geq 1$  e  $\|u\|_N = 1$ , segue que

$$I_2 = \int_{\{u \leq 1, |x| \geq 1\}} |u(x)|^N \frac{dx}{|x|^\beta} \leq \int_{\{u \leq 1, |x| \geq 1\}} |u(x)|^N dx \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} |u(x)|^N dx \leq 1. \quad (2.24)$$

Sendo assim, como  $e^\alpha \leq e^{\alpha N}$  e utilizando (2.23) e (2.24) em (2.22), segue que existe uma constante  $C(N, \beta) > 0$ , tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \leq C(N, \beta) \leq \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{N-\beta}{N}}}.$$

Agora, considere

$$I = \int_{\Omega} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \leq \int_{\Omega} \exp \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta}.$$

Em  $\Omega$ , definimos

$$v(x) = u(x) - \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{1}{N}}.$$

Portanto, como  $v$  é uma translação da função  $u(x)$  e tal que  $v(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$ , segue que  $v \in W_0^{1,N}(\Omega)$  e por (2.19), concluimos que

$$\|\nabla v\|_N = \|\nabla u\|_N \leq 1.$$

Além disso, em  $\Omega$ , utilizando o Lema 2.5, com  $\varepsilon = \frac{\alpha_N}{\alpha} - 1$ ,  $p = \frac{N}{N-1}$  e  $r = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{1-p}}$ , segue que

$$\begin{aligned} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} &= \left| v(x) + \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{1}{N}} \right|^{\frac{N}{N-1}} \\ &\leq \left( |v(x)| + \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{1}{N}} \right)^{\frac{N}{N-1}} \\ &\leq (1+\varepsilon) |v|^{\frac{N}{N-1}} + \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^{N-1}} \right)^{\frac{1}{N-1}} \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{1}{N-1}} \\ &= \left( \frac{\alpha_N}{\alpha} \right) |v|^{\frac{N}{N-1}} + \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^{N-1}} \right)^{\frac{1}{N-1}} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^{N-1}} \right)^{\frac{-1}{N-1}} \\ &= \left( \frac{\alpha_N}{\alpha} \right) |v|^{\frac{N}{N-1}} + 1. \end{aligned}$$



Logo,

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{\Omega} \exp \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^{\beta}} \\ &\leq \int_{\Omega} \exp \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \left( \left( \frac{\alpha_N}{\alpha} \right) |v|^{\frac{N}{N-1}} + 1 \right) \right) \frac{dx}{|x|^{\beta}} \end{aligned}$$

e, portanto, pela desigualdade de Trudinger-Moser em domínios de medida finita (veja Teorema 1.2), concluímos que

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{\Omega} \exp \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \left( \frac{\alpha_N}{\alpha} \right) |v|^{\frac{N}{N-1}} + \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \right) \frac{dx}{|x|^{\beta}} \\ &\leq \int_{\Omega} \exp \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |v|^{\frac{N}{N-1}} + \alpha \right) \frac{dx}{|x|^{\beta}} \\ &\leq C(N, \beta) |\Omega|^{\frac{N-\beta}{N}}. \end{aligned}$$

Assim, aplicando (2.21), segue que

$$I \leq \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{N-\beta}{N}}},$$

e, conseqüentemente, pelo Lema 2.1, concluímos que

$$AT(\alpha, \beta) \leq \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{N-\beta}{N}}}. \quad (2.25)$$

Agora mostraremos que

$$AT(\alpha_N, \beta) = \infty. \quad (2.26)$$

De fato, considere a sequência de Moser

$$u_n(x) = \begin{cases} \left( \frac{1}{\omega_{N-1}} \right)^{\frac{1}{N}} \left( \frac{n}{N-\beta} \right)^{\frac{(N-1)}{N}}, & \text{se } |x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}}, \\ \left( \frac{N-\beta}{n\omega_{N-1}} \right)^{\frac{1}{N}} \ln \left( \frac{1}{|x|} \right), & \text{se } e^{\frac{-n}{N-\beta}} < |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\nabla u_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}}, \\ - \left( \frac{N-\beta}{n\omega_{N-1}} \right)^{\frac{1}{N}} \frac{x}{|x|^2}, & \text{se } e^{\frac{-n}{N-\beta}} < |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Assim,

$$\|\nabla u_n\|_N = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x)|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} = \left( \int_{\left\{ e^{\frac{-n}{N-\beta}} < |x| < 1 \right\}} \left( \left( \frac{N-\beta}{n\omega_{N-1}} \right)^{\frac{1}{N}} \frac{1}{|x|} \right)^N dx \right)^{\frac{1}{N}},$$

e por coordenadas polares, temos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_n\|_N &= \left( \int_{e^{\frac{-n}{N-\beta}}}^1 \left( \frac{N-\beta}{n\omega_{N-1}} \right) \frac{1}{r^N} \omega_{N-1} r^{N-1} dr \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= \left( \int_{e^{\frac{-n}{N-\beta}}}^1 \left( \frac{N-\beta}{n} \right) \frac{1}{r} dr \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= \left( \left( \frac{N-\beta}{n} \right) \ln(r) \Big|_{e^{\frac{-n}{N-\beta}}}^1 \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\|u_n\|_N = \left( \int_0^{e^{\frac{-n}{N-\beta}}} \left( \frac{n}{N-\beta} \right)^{(N-1)} r^{N-1} dr + \int_{e^{\frac{-n}{N-\beta}}}^1 \left( \frac{N-\beta}{n} \right) \ln \left( \frac{1}{r} \right)^N r^{N-1} dr \right)^{\frac{1}{N}}.$$

Assim, fazendo a mudança de variável

$$\begin{cases} y = \ln \left( \frac{1}{r} \right) & \Rightarrow & y = -\ln(r) & \Rightarrow & \exp(-y) = r \\ -\exp(-yN) dy = r^{N-1} dr \end{cases}$$

Deduz-se que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_N^N &= \left( \frac{n}{N-\beta} \right)^{N-1} \int_0^{e^{\frac{-n}{N-\beta}}} r^{N-1} dr - \frac{N-\beta}{n} \int_{\frac{n}{N-\beta}}^0 y^N e^{-yN} dy \\
&= \left( \frac{n}{N-\beta} \right)^{N-1} \left( \frac{e^{\frac{-nN}{N-\beta}}}{N} - 0 \right) + \left( \frac{N-\beta}{n} \right) \int_0^{\frac{n}{N-\beta}} y^N e^{-Ny} dy \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Desse modo, como

$$\int_0^\infty s^p e^{-s} ds = \Gamma(p+1) = p! > 0,$$

segue que existem  $C_1 = C(N, \beta) > 0$  e  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|u_n\|_N^N \leq \frac{C_1}{n}, \quad \forall n \geq n_1. \quad (2.28)$$

No entanto, usando a definição de  $u_n$ , conclui-se que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&\geq \int_{\{|x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}}\}} \phi_N \left( \alpha \left( \frac{N-\beta}{N} \right) \left( \frac{1}{\omega_{N-1}} \right)^{\frac{1}{N-1}} \left( \frac{n}{N-\beta} \right) \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&= \int_{\{|x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}}\}} \phi_N \left( \alpha \left( \frac{1}{N} \right) \left( \frac{1}{\omega_{N-1}} \right)^{\frac{1}{N-1}} n \right) \frac{dx}{|x|^\beta}.
\end{aligned}$$

Mas, como  $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$  e  $0 \leq \alpha < \alpha_N$ , segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} &= \int_{\{|x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}}\}} \phi_N \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} n \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&= \omega_{N-1} \phi_N \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} n \right) \int_0^{e^{\frac{-n}{N-\beta}}} r^{N-1-\beta} dr \\
&= \omega_{N-1} \phi_N \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} n \right) \left( \frac{e^{-n} - 0}{N - \beta} \right) \\
&\geq \frac{\omega_{N-1}}{N - \beta} e^{-n} \left[ e^{\left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)n} - \left( \sum_{j=0}^{N-2} \frac{n^j}{j!} \right) \right] \\
&= \frac{\omega_{N-1}}{N - \beta} \left[ e^{\left(\frac{\alpha}{\alpha_N}-1\right)n} - \left( \sum_{j=0}^{N-2} \frac{n^j}{j!} \right) e^{-n} \right]
\end{aligned}$$

Assim, utilizando (2.28), para todo  $n \geq n_1$ , temos que

$$\begin{aligned}
\text{AT}(\alpha, \beta) &\geq \frac{1}{\|u_n\|_N^{N-\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&\geq \left( \frac{n^{\frac{N-\beta}{N}}}{C_1^{\frac{N-\beta}{N}}} \right) \frac{\omega_{N-1}}{N - \beta} \left[ e^{\left(\frac{\alpha}{\alpha_N}-1\right)n} - \left( \sum_{j=0}^{N-2} \frac{n^j}{j!} \right) e^{-n} \right] \\
&= \frac{C_2 \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{N-\beta}{N}}}{\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{N-\beta}{N}}} \cdot \left[ n^{\frac{N-\beta}{N}} e^{\left(\frac{\alpha}{\alpha_N}-1\right)n} - \left( \sum_{j=0}^{N-2} \frac{n^j}{j!} \right) n^{\frac{N-\beta}{N}} e^{-n} \right]
\end{aligned} \tag{2.29}$$

para  $C_2 = \frac{\omega_{N-1}}{(N-\beta)(C_1)^{\frac{N-\beta}{N}}} > 0$ . Mas, como

$$\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{N-\beta}{N}} \left( \sum_{j=0}^{N-2} \frac{n^j}{j!} \right) n^{\frac{N-\beta}{N}} e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

então pela definição de limite existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_2 \geq n_1$  e

$$\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{N-\beta}{N}} \left( \sum_{j=0}^{N-2} \frac{n^j}{j!} \right) n^{\frac{N-\beta}{N}} e^{-n} \leq \frac{1}{e^5}, \quad \forall n \geq n_2 \text{ e } 0 \leq \alpha < \alpha_N \tag{2.30}$$

Sendo assim, para todo  $n \geq n_2$ , aplicando (2.30) em (2.29), segue que

$$\text{AT}(\alpha, \beta) \geq \frac{C_2}{\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{N-\beta}{N}}} \cdot \left[ \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{N-\beta}{N}} n^{\frac{N-\beta}{N}} e^{\left(\frac{\alpha}{\alpha_N}-1\right)n} - \frac{1}{e^5} \right].$$

Logo, para  $\alpha$  suficientemente próximo de  $\alpha_N$  e tal que

$$\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{-(N-\beta)}{N}} \geq n_2,$$

e escolhendo  $n \in \mathbb{N}$  suficiente grande tal que

$$\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}\right)^{\frac{-(N-\beta)}{N}} \leq n^{\frac{N-\beta}{N}} \leq 4^{\frac{N-\beta}{N}} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}\right)^{\frac{-(N-\beta)}{N}},$$

segue que

$$\begin{aligned} \text{AT}(\alpha, \beta) &\geq \frac{C_2}{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}\right)^{\frac{N-\beta}{N}}} \cdot \left[ \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}\right)^{\frac{N-\beta}{N}} n^{\frac{N-\beta}{N}} e^{\left(\frac{\alpha}{\alpha_N}-1\right)n} - \frac{1}{e^5} \right] \\ &\geq \frac{C_2}{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}\right)^{\frac{N-\beta}{N}}} \cdot \left[ \left(\frac{1}{n^{\frac{N-\beta}{N}}}\right) n^{\frac{N-\beta}{N}} e^{\left(\frac{-4}{n}\right)n} - \frac{1}{e^5} \right] \\ &\geq \frac{C_2}{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}\right)^{\frac{N-\beta}{N}}} \cdot \left[ \frac{1}{e^4} - \frac{1}{e^5} \right] \end{aligned}$$

Por fim, se  $\alpha = \alpha_N$ , segue que  $\text{AT}(\alpha_N, \beta)$  é infinito, pois de (2.29), temos que

$$\text{AT}(\alpha_N, \beta) \geq \left(\frac{n^{\frac{N-\beta}{N}}}{C_1^{\frac{N-\beta}{N}}}\right) \frac{\omega_{N-1}}{N-\beta} \left[ e^{\left(\frac{\alpha_N}{\alpha_N}-1\right)n} - \left(\sum_{j=0}^{N-2} \frac{n^j}{j!}\right) e^{-n} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

O que conclui a prova. ■

A partir de agora, analisaremos como o supremo  $\text{AT}(\alpha, \beta)$ , estabelecido no Teorema 2.5, fornece uma demonstração da desigualdade crítica de Trudinger-Moser em todas as dimensões  $N$ . Também discutiremos quais valores positivos de  $a$  e  $b$  tornam a desigualdade crítica de Trudinger-Moser válida sob a restrição da norma completa:

$$\|\nabla u\|_N^a + \|u\|_N^b \leq 1.$$

Além disso, estabeleceremos a relação precisa entre os supremos da desigualdade crítica e subcrítica de Trudinger-Moser. Em particular, apresentaremos uma demonstração da desigualdade crítica de Trudinger-Moser utilizando a desigualdade subcrítica de Trudinger-Moser, conforme mencionada no Teorema 2.5. Esta abordagem sugere uma nova perspectiva e metodologia no estudo da desigualdade ótima de Trudinger-Moser.

**Teorema 2.6** *Sejam  $N > 2$ ,  $0 < \beta < N$ ,  $a, b > 0$  e  $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ . Denotemos por*

$$\text{MT}_{a,b}(\beta) = \sup_{\|\nabla u\|_N^a + \|u\|_N^b \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta};$$

e

$$\text{MT}(\beta) = \text{MT}_{N,N}(\beta).$$

Se  $b \leq N$ , então,  $\text{MT}_{a,b}(\beta) < \infty$ . A constante  $\alpha_N$  é ótima. Além disso, temos a seguinte identidade:

$$\text{MT}_{a,b}(\beta) = \sup_{\alpha \in (0, \alpha_N)} \left( \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\left(\frac{N-1}{N}\right)a}}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{\left(\frac{N-1}{N}\right)b}} \right)^{\frac{N-\beta}{b}} \text{AT}(\alpha, \beta).$$

Em particular,  $\text{MT}(\beta) < \infty$  e

$$\text{MT}(\beta) = \sup_{\alpha \in (0, \alpha_N)} \left( \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_N}\right)^{N-1}} \right)^{\frac{N-\beta}{b}} \text{AT}(\alpha, \beta).$$

**Demonstração:** Seja  $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  tal que

$$\|\nabla u\|_N^a + \|u\|_N^b \leq 1.$$

Considere

$$\|\nabla u\|_N = \theta \in (0, 1),$$

então

$$\|u\|_N^b \leq 1 - \theta^a. \quad (2.31)$$

Dividiremos a demonstração em dois casos:

Caso 1:  $\frac{1}{2} < \theta < 1$ .

Neste caso, definindo

$$v(y) = \frac{u(\lambda y)}{\theta}; \quad \text{com} \quad \lambda = \frac{(1 - \theta^a)^{\frac{1}{b}}}{\theta} > 0, \quad (2.32)$$

temos que

$$\nabla v(y) = \frac{\lambda}{\theta} \nabla u(\lambda y).$$

Assim, fazendo  $x = \lambda y$ , tem-se que  $dx = \lambda^N dy$  e, portanto, segue que

$$\|\nabla v\|_N = \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda^N}{\theta^N} |\nabla u(\lambda y)|^N dy \right)^{\frac{1}{N}} = \frac{1}{\theta} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} = \frac{\|\nabla u\|_N}{\theta} = 1.$$

Além disso, utilizando (2.31) e realizando novamente a mudança de variável  $x = \lambda y$ , temos que

$$\begin{aligned}
\|v\|_N^N &= \int_{\mathbb{R}^N} |v(y)|^N dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{u(\lambda y)}{\theta} \right)^N dy \\
&= \frac{1}{\theta^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda y)|^N dy \\
&= \frac{1}{\theta^N \lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^N dx \\
&= \frac{1}{\theta^N \lambda^N} \|u\|_N^N \\
&\leq \frac{1}{\theta^N \lambda^N} (1 - \theta^a)^{\frac{N}{b}} \\
&= \frac{1}{\theta^N \left( \frac{(1 - \theta^a)^{\frac{1}{b}}}{\theta} \right)^N} (1 - \theta^a)^{\frac{N}{b}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando novamente a mudança de variável  $x = \lambda y$  e a equação (2.32), segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(\lambda y)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{\lambda^N dy}{|\lambda y|^\beta} \\
&= \lambda^{N-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \theta^{\frac{N}{N-1}} v(y)^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta}
\end{aligned}$$

Logo, pela definição de supremo, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \leq \lambda^{N-\beta} \text{AT} \left( \theta^{\frac{N}{N-1}} \alpha_N, \beta \right). \quad (2.33)$$

Agora, note que, utilizando o Teorema 2.5 em (2.33), temos que

$$\lambda^{N-\beta} \text{AT} \left( \theta^{\frac{N}{N-1}} \alpha_N, \beta \right) \leq \left( \frac{(1 - \theta^a)^{\frac{1}{b}}}{\theta} \right)^{N-\beta} \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\theta^{\frac{N}{N-1}} \alpha_N}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{N-\beta}{N}}}.$$

Assim, voltando a (2.33), concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} &\leq \left( \frac{(1 - \theta^a)^{\frac{1}{b}}}{\theta} \right)^{N-\beta} \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\theta^{\frac{N}{N-1}} \alpha_N}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{N-\beta}{N}}} \\
&= \left( \frac{(1 - \theta^a)^{\frac{N}{b}}}{\theta^N} \right)^{1-\frac{\beta}{N}} \frac{C(N, \beta)}{(1 - \theta^N)^{1-\frac{\beta}{N}}} \\
&\leq \frac{\left( (1 - \theta^a)^{\frac{N}{b}} \right)^{1-\frac{\beta}{N}}}{(1 - \theta^N)^{1-\frac{\beta}{N}}} C(N, \beta) \\
&\leq C(N, \beta, a, b).
\end{aligned}$$

Aqui, utilizamos o fato de termos  $\frac{1}{2} < \theta < 1$ .

Caso 2:  $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$ .

Inicialmente, definindo

$$v(y) = 2u(2y),$$

segue que

$$\nabla v(y) = 4\nabla u(2y).$$

Assim, utilizando a mudança de variável  $x = 2y$ , temos que  $dx = 2^N dy$ , e obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_N &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(y)|^N dy \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^N} (2^2 |\nabla u(2y)|)^N dy \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= 2^2 \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(2y)|^N dy \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= 2^2 \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u(x)|^N}{2^N} dx \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= 2 \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= 2 \|\nabla u\|_N \\
&= 2\theta \\
&\leq 1,
\end{aligned}$$

em que usamos na desigualdade acima o fato de que  $0 < \theta < \frac{1}{2}$ . Além disso, utilizando novamente a mudança de variável  $x = 2y$ , segue que

$$\begin{aligned}\|v\|_N &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} |v(y)|^N dy \right)^{\frac{1}{N}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} 2^N |u(2y)|^N dy \right)^{\frac{1}{N}} \\ &= 2 \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^N}{2^N} dx \right)^{\frac{1}{N}} \\ &= \|u\|_N^{N-\beta} \leq 1.\end{aligned}$$

Assim, fazendo novamente a mudança de variável  $x = 2y$  e utilizando o Teorema 2.5, concluimos que

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(2y)|^{\frac{N}{N-1}} \right) 2^N \frac{dy}{|2y|^\beta} \\ &= 2^{N-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \frac{|v(y)|^{\frac{N}{N-1}}}{2^{\frac{N}{N-1}}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta} \\ &\leq 2^{N-\beta} \left( \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\frac{\alpha_N}{2^{\frac{N}{N-1}}}}{\alpha_N} \right)^{N-1} \right)^{\frac{N-\beta}{N}}} \right) \|v\|_N^{N-\beta} \\ &\leq 2^{N-\beta} \left( \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \frac{1}{2^N} \right)^{\frac{N-\beta}{N}}} \right) \\ &= 2^{N-\beta} \left( \frac{C(N, \beta)}{\frac{(2^N-1)}{2^{N-\beta}}} \right) \\ &\leq C(N, \beta).\end{aligned}$$

A seguir, verificaremos se a constante  $\alpha_N$  é a melhor constante possível. De fato, utilizando novamente a sequência de Moser  $(u_n)$  dada por

$$u_n(x) = \begin{cases} \left( \frac{1}{\omega_{N-1}} \right)^{\frac{1}{N}} \left( \frac{n}{N-\beta} \right)^{\frac{N-1}{N}}, & \text{se } |x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}}, \\ \left( \frac{N-\beta}{\omega_{N-1}n} \right)^{\frac{1}{N}} \ln \left( \frac{1}{|x|} \right), & \text{se } e^{\frac{-n}{N-\beta}} < |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$



então

$$\nabla u_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}}, \\ \left( \frac{N-\beta}{\omega_{N-1}n} \right)^{\frac{1}{N}} \left( \frac{-x}{|x|^2} \right), & \text{se } e^{\frac{-n}{N-\beta}} < |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Assim, utilizando coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_N^N &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x)|^N dx \\ &= \int_{\left\{ e^{\frac{-n}{N-\beta}} < |x| < 1 \right\}} \left( \frac{N-\beta}{\omega_{N-1}n} \right) \frac{|x|^N}{|x|^{2N}} dx \\ &= \int_{e^{\frac{-n}{N-\beta}}}^1 \left( \frac{n-\beta}{\omega_{N-1}n} \right) \frac{1}{r^N} r^{N-1} \omega_{N-1} dr \\ &= \frac{n-\beta}{n} \int_{e^{\frac{-n}{N-\beta}}}^1 \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{n-\beta}{n} \left( \ln |r| \Big|_{e^{\frac{-n}{N-\beta}}}^1 \right) = 1. \end{aligned}$$

Além disso, denotando

$$\Omega_{1,n} = \left\{ x \in \mathbb{R}^N; 0 \leq |x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}} \right\}$$

e

$$\Omega_{2,n} = \left\{ x \in \mathbb{R}^N; e^{\frac{-n}{N-\beta}} < |x| \leq 1 \right\},$$

podemos escrever

$$\|u_n\|_N = \left( \underbrace{\int_{\Omega_{1,n}} \frac{1}{\omega_{N-1}} \left( \frac{n}{N-\beta} \right)^{N-1} dx}_{I_{1,n}} + \underbrace{\int_{\Omega_{2,n}} \left( \frac{N-\beta}{\omega_{N-1}n} \right) \log \left( \frac{1}{|x|} \right) dx}_{I_{2,n}} \right)^{\frac{1}{N}}. \quad (2.34)$$

Calculando separadamente essas integrais, temos que

$$\begin{aligned} I_{1,n} &= \int_{\left\{ |x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}} \right\}} \frac{1}{\omega_{N-1}} \left( \frac{n}{N-\beta} \right)^{N-1} dx \\ &= \int_0^{e^{\frac{-n}{N-\beta}}} \left( \frac{n}{N-\beta} \right)^{N-1} r^{N-1} dr \\ &= \left( \frac{n}{N-\beta} \right)^{N-1} \left( \frac{e^{\frac{-nN}{N-\beta}}}{N} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$I_{1,n} = \frac{C_{1,n}}{n} \left[ \frac{n^N}{e^{\frac{nN}{N-\beta}}} \right] \quad (2.35)$$

Analísaremos, agora,  $I_{2,n}$ . Veja que, utilizando  $s = \ln \left( \frac{1}{r} \right) \cdot N$ , temos que

$$\begin{aligned} I_{2,n} &= \int_{\Omega_{2,n}} \left( \frac{N-\beta}{\omega_{N-1}n} \right) \log \left( \frac{1}{|x|} \right)^N dx \\ &= \int_{\left\{ e^{\frac{-n}{N-\beta}} < |x| \leq 1 \right\}} \left( \frac{N-\beta}{\omega_{N-1}n} \right) \log \left( \frac{1}{|x|} \right)^N dx \\ &= \int_{e^{\frac{-n}{N-\beta}}}^1 \left( \frac{N-\beta}{\omega_{N-1}n} \right) \log \left( \frac{1}{r} \right)^N \omega_{N-1} r^{N-1} dr \\ &= \int_{\frac{n}{N-\beta}}^0 \left( \frac{N-\beta}{n} \right) \left( \frac{s}{N} \right)^N \left( \frac{-e^{-s}}{N} \right) ds \\ &= \int_0^{\frac{n}{N-\beta}} \left( \frac{N-\beta}{nN^{N+1}} \right) s^N e^{-s} ds. \end{aligned}$$

Assim, como

$$\int_0^\infty s^p e^{-s} ds = \Gamma(p+1) = p!, \quad (2.36)$$

e, portanto, aplicando (2.35), (2.36) em (2.34), obtemos que

$$\|u_n\|_N \leq \frac{c}{n} \left[ n^N e^{\frac{-nN}{N-\beta}} + \int_0^n s^N e^{-s} ds \right] \Rightarrow \|u_n\|_N = O \left( \frac{1}{n} \right).$$

Seja

$$w_n = \lambda_n u_n(x) = \lambda_n \begin{cases} \left( \frac{1}{\omega_{N-1}} \right)^{\frac{1}{N}} \left( \frac{n}{N-\beta} \right)^{\frac{N-1}{N}}, & \text{se } |x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}}, \\ \left( \frac{N-\beta}{\omega_{N-1}n} \right)^{\frac{1}{N}} \ln \left( \frac{1}{|x|} \right), & \text{se } e^{\frac{-n}{N-\beta}} < |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (2.37)$$

com  $\lambda_n \in (0, 1)$  solução de

$$\lambda_n^a + \lambda_n^b \|u_n\|_N^b = 1, \quad (2.38)$$

com

$$\lambda_n = 1 - O \left( \frac{1}{n^{\frac{b}{aN}}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (2.39)$$

Assim, como  $\|\nabla u_n\|_N = 1$ , segue que

$$\|\nabla w_n\|_N = \left( \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n^N |\nabla u_n(x)|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} = \lambda_n \|\nabla u_n\|_N = \lambda_n$$

e

$$\|w_n\|_N = \lambda_n \|u_n\|_N.$$

Logo, por (2.38), temos

$$\|\nabla w_n\|_N^a + \|w_n\|_N^b = \lambda_n^a + \lambda_n^b \|u_n\|_N^b = 1.$$

Além disso, pela definição de  $\phi_N$ , temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |w_n(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ & \geq \int_{\left\{ |x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}} \right\}} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |w_n(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ & = \int_{\left\{ |x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}} \right\}} \exp \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |w_n(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \\ & \quad - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{\left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |w_n(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right)^j}{j!} \frac{dx}{|x|^\beta} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Assim, aplicando a definição de  $w_n$  (veja (2.37)) em (2.40), obtemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |w_n(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ & = \int_{\left\{ |x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}} \right\}} \exp \left[ \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) (\lambda_n)^{\frac{N}{N-1}} \left( \frac{1}{w_{N-1}} \right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \left( \frac{n}{N-\beta} \right) \right] \frac{dx}{|x|^\beta} \\ & \quad - \int_{\left\{ |x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}} \right\}} \sum_{j=0}^{N-2} \left[ \alpha^j \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right)^j (\lambda_n)^{\frac{Nj}{N-1}} \cdot \left( \frac{1}{w_{N-1}} \right)^{\frac{j}{N-1}} \left( \frac{n}{N-\beta} \right)^j \frac{1}{j!} \right] \frac{dx}{|x|^\beta}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Calculemos separadamente essas integrais. Primeiramente, observe que se

$$K_{2,n} := - \int_{\left\{ |x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}} \right\}} \sum_{j=0}^{N-2} \left[ \alpha^j \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right)^j (\lambda_n)^{\frac{Nj}{N-1}} \cdot \left( \frac{1}{w_{N-1}} \right)^{\frac{j}{N-1}} \left( \frac{n}{N-\beta} \right)^j \frac{1}{j!} \right] \frac{dx}{|x|^\beta},$$

então substituindo e utilizando que  $\alpha_N = N w_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ , segue que

$$K_{2,n} = - \int_{\left\{ \|x\| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}} \right\}} \sum_{j=0}^{N-2} \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^j (\lambda_n)^{\frac{Nj}{N-1}} n^j \frac{dx}{|x|^\beta}$$

e, portanto, por coordenadas polares, concluimos que

$$K_{2,n} = - \int_0^{e^{\frac{-n}{N-\beta}}} \sum_{j=0}^{N-2} \left( \frac{\alpha \lambda_n^{\frac{N}{N-1}} n}{\alpha_N} \right)^j \omega_{N-1} r^{N-1-\beta} dr \quad (2.42)$$

No entanto, para  $j \in \{0, \dots, N-2\}$ , escolhendo uma constante  $C > 0$  tal que

$$\lambda_n^{\frac{Nj}{N-1}} \leq C \lambda_n^{\frac{(N-2)N}{N-1}}, \quad \forall j$$

e utilizando que  $\alpha > \alpha_n$ , segue que

$$\left( \frac{\alpha \lambda_n^{\frac{N}{N-1}} n}{\alpha_N} \right)^j \omega_{N-1} \frac{r^{N-\beta}}{N-\beta} \leq \tilde{C} \frac{\lambda_n^{\frac{(N-2)N}{N-1}} n^{N-2}}{e^N}$$

Portanto, aplicando isso em (2.42), temos que

$$K_{2,n} = O \left( \frac{n^{N-2} \lambda_n^{\frac{(N-2)N}{N-1}}}{e^n} \right) \xrightarrow[(2.39)]{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.43)$$

Por outro lado, definido

$$\begin{aligned} K_{1,n} &:= \int_{\{|x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}}\}} \exp \left[ \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \left( 1 - O \left( \frac{1}{n^{\frac{b}{aN}}} \right) \right)^{\frac{N}{N-1}} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left( \frac{1}{w_{N-1}} \right)^{\frac{1}{N-1}} \left( \frac{n}{N-\beta} \right) \right] \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \int_{\{|x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}}\}} \exp \left[ \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right) \left( 1 - O \left( \frac{1}{n^{\frac{b}{aN}}} \right) \right)^{\frac{N}{N-1}} n \right] \frac{dx}{|x|^\beta}. \end{aligned}$$

Na última igualdade, utilizamos o fato de que  $\alpha_N = N \omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ . Logo, para  $\alpha > \alpha_n$ , considere  $\alpha = \alpha_N + \delta$ , tal que  $\delta > 0$ . Assim, utilizando coordenadas polares, segue que

$$\begin{aligned} K_{1,n} &\geq \exp \left( \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right) \left( 1 - O \left( \frac{1}{n^{\frac{b}{aN}}} \right) \right)^{\frac{N}{N-1}} n \right) \int_{\{|x| \leq e^{\frac{-n}{N-\beta}}\}} \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \exp \left( \left( \frac{\alpha_N + \delta}{\alpha_N} \right) \left( 1 - O \left( \frac{1}{n^{\frac{b}{aN}}} \right) \right)^{\frac{N}{N-1}} n \right) \omega_{N-1} \int_0^{e^{\frac{-n}{N-\beta}}} \frac{r^{N-1}}{r^\beta} dr \\ &= \exp \left( \left( \frac{\alpha_N + \delta}{\alpha_N} \right) \left( 1 - O \left( \frac{1}{n^{\frac{b}{aN}}} \right) \right)^{\frac{N}{N-1}} n \right) \omega_{N-1} \cdot \frac{\exp(-n)}{N-\beta}. \end{aligned}$$

Consequentemente, ao utilizar (2.39) e observando que o expoente da exponencial será positivo, segue que

$$K_{1,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty. \quad (2.44)$$

Assim, utilizando (2.43) e (2.44) em (2.41), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |w_n(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \rightarrow \infty.$$

Agora, demonstraremos que

$$\text{MT}_{a,b}(\beta) = \sup_{\alpha \in (0, \alpha_N)} \left( \frac{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{N-1}{N}a}}{\left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{N-1}{N}b}} \right)^{\frac{N-\beta}{b}} \text{AT}(\alpha, \beta)$$

quando  $\text{MT}_{a,b}(\beta) < \infty$ . De fato, pelo Lema 2.2, temos que

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_N)} \left( \frac{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{N-1}{N}a}}{\left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{N-1}{N}b}} \right)^{\frac{N-\beta}{b}} \text{AT}(\alpha, \beta) \leq \text{MT}_{a,b}(\beta).$$

Seja  $(u_n)$  uma sequência maximizante de  $\text{MT}_{a,b}(\beta)$ , ou seja,  $u_n \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  e tal que

- $\|\nabla u_n\|_N^a + \|u_n\|_N^b \leq 1.$
- $\int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{MT}_{a,b}(\beta).$

Assim, definindo

$$v_n(x) = \frac{u_n(\lambda_n x)}{\|\nabla u_n\|_N}; \quad \lambda_n = \left( \frac{1 - \|\nabla u_n\|_N^a}{\|\nabla u_n\|_N^b} \right)^{\frac{1}{b}} > 0 \quad (2.45)$$

temos que

$$\nabla v_n(x) = \frac{\lambda_n \nabla u_n(\lambda_n x)}{\|\nabla u_n\|_N}$$

e, portanto, fazendo  $y = \lambda_n x$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla v_n\|_N^N &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda_n^N |\nabla u_n(\lambda_n x)|^N}{\|\nabla u_n\|_N^N} dx \\ &= \frac{\lambda_n^N}{\|\nabla u_n\|_N^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(\lambda_n x)|^N dx \\ &= \frac{\lambda_n^N}{\|\nabla u_n\|_N^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(y)|^N \frac{dy}{\lambda_n^N} = 1. \end{aligned}$$

De modo análogo, concluímos que

$$\|v_n\|_N^N = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(\lambda_n x)|^N}{\|\nabla u_n\|_N^N} dx = \frac{1}{\|\nabla u_n\|_N^N \lambda_n^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(y)|^N dy$$

Mas, como  $\|\nabla u_n\|_N^a + \|u_n\|_N^b \leq 1$ , segue da definição de  $\lambda_n$  que

$$\|v_n\|_N^N = \frac{1}{\|\nabla u_n\|_N^{\frac{N(1-\|\nabla u_n\|_N^a)}{b}} \lambda_n^{\frac{N}{b}}} \|u_n\|_N^N = \frac{\|u_n\|_N^N}{(1 - \|\nabla u_n\|_N^a)^{\frac{N}{b}}} \leq 1.$$

Além disso, utilizando a mudança de variável  $x = \lambda_n y$  e (2.45), temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u_n(\lambda_n y)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \lambda_n^N \frac{dy}{|\lambda_n y|^\beta} \\ &= \lambda_n^{N-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u_n(\lambda_n y)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta} \\ &= \lambda_n^{N-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \|\nabla u_n\|_N^{\frac{N}{N-1}} |v_n(y)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta}. \end{aligned}$$

Contudo, pela definição de supremo e por (2.45), segue que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \phi_N \left( \alpha_N \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ & \leq \lambda_n^{N-\beta} \text{AT} \left( \|\nabla u_n\|_N^{\frac{N}{N-1}} \alpha_N, \beta \right) \\ & = \left( \frac{1 - \|\nabla u_n\|_N^a}{\|\nabla u_n\|_N^b} \right)^{\frac{N-\beta}{b}} \text{AT} \left( \|\nabla u_n\|_N^{\frac{N}{N-1}} \alpha_N, \beta \right) \\ & \leq \sup_{\alpha \in (0, \alpha_N)} \left\{ \left( \frac{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{N-1}{N} a}}{\left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{N-1}{N} b}} \right)^{\frac{N-\beta}{b}} \text{AT}(\alpha, \beta) \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\text{MT}_{a,b}(\beta) = \sup_{\alpha \in (0, \alpha_N)} \left( \frac{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{N-1}{N} a}}{\left( \frac{\alpha}{\alpha_N} \right)^{\frac{N-1}{N} b}} \right)^{\frac{N-\beta}{b}} \text{AT}(\alpha, \beta)$$

quando  $\text{MT}_{a,b}(\beta) < \infty$ . Como queríamos demonstrar. ■

É importante destacar que a relação entre os supremos das desigualdades críticas e subcríticas de Trudinger-Moser desempenham um papel crucial no estabelecimento da existência e não-existência de funções extremantes para essas desigualdades em espaços inteiros. Para mais detalhes, consulte [31]. Embora não abordemos esse resultado neste capítulo, no próximo capítulo demonstraremos a existência de funções extremantes para espaços de Sobolev  $X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$ .

## 2.3 Comportamento assintótico da desigualdade subcrítica de Adams e sua relação com a crítica

Nesta subseção, estabelecemos o comportamento assintótico do supremo na desigualdade subcrítica de Adams em  $W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ , conforme o Teorema 2.7. É importante ressaltar que não se assume nenhuma versão do Teorema 2.8 para a demonstração do Teorema 2.7. Além disso, também estabelecemos a relação entre os supremos da desigualdade crítica e subcrítica de Adams no Teorema 2.8.

### 2.3.1 Desigualdades de Adams em $W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$

Agora, consideramos as desigualdades crítica e subcrítica de Adams para  $N \geq 3$  no espaço  $W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ . O próximo resultado aborda a desigualdade subcrítica de Adams. Mais precisamente, apresentaremos o comportamento assintótico do supremo, conforme descrito a seguir.

**Teorema 2.7** *Sejam  $N \geq 3$ ,  $0 \leq \beta < N$  e  $0 \leq \alpha < \alpha(N, 2)$  (veja (2.6) para a definição de  $\alpha(N, 2)$ ). Para  $u \in W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ , denote*

$$\text{ATA}(\alpha, \beta) := \sup_{\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}} \leq 1} \frac{1}{\|u\|_{\frac{N}{2}}^{1-\frac{\beta}{N}}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta},$$

em que

$$\phi_{N,2}(t) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \geq \frac{N-2}{2}}} \frac{t^j}{j!},$$

então existem constantes positivas  $c = c(N, \beta)$  e  $C = C(N, \beta)$  tal que quando  $\alpha$  se aproxima de  $\alpha(N, 2)$  tem-se

$$\frac{c(N, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{2}} \right)^{1-\frac{\beta}{N}}} \leq \text{ATA}(\alpha, \beta) \leq \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{2}} \right)^{1-\frac{\beta}{N}}}. \quad (2.46)$$

Além disso, a constante  $\alpha(N, 2)$  é ótima no sentido de que  $\text{ATA}(\alpha(N, 2), \beta) = \infty$ .

**Demonstração:** Por meio de um argumento de densidade e pelo Lema 2.3, podemos assumir que

$$u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, \quad \|\nabla u\|_{\frac{N}{2}} \leq 1 \quad \text{e} \quad \|u\|_{\frac{N}{2}} = 1. \quad (2.47)$$

Consequentemente, uma vez que

$$|u| = \sqrt{u^2},$$

temos que

$$\frac{\partial |u|}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{u^2}} \cdot 2u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{u^2}}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 |u|}{\partial x_i^2} &= \frac{\left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \sqrt{u^2} - u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{u}{\sqrt{u^2}} \frac{\partial u}{\partial x_i}}{u^2} \\ &= \frac{\sqrt{u^2} \cdot u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}}{u^2} \\ &= \frac{|u| \cdot u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}}{u^2}. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\Delta(|u|) = \sum_{i=1}^N \frac{|u| \cdot u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}}{u^2} = \frac{|u| \cdot u}{u^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{|u| \cdot u \cdot \Delta u}{u^2},$$

o que implica que

$$|\Delta(|u|)| = \left| \frac{|u| \cdot u \cdot \Delta u}{u^2} \right| = |\Delta u|.$$

Agora seja

$$\Omega(u) := \left\{ x \in \mathbb{R}^N; |u(x)| > \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{2}} \right]^{\frac{2}{N}} \right\}.$$

Assim, como  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ , segue que  $u$  tem suporte compacto e, portanto, existe  $K(u) := \text{supp}(u) \subset \mathbb{R}^N$  compacto tal que  $u(x) = 0$  para todo  $x \notin K(u)$ . Sendo assim, como  $\alpha < \alpha(N, 2)$ , segue que  $\Omega(u) \subset K(u)$ . Logo,  $\Omega(u)$  é limitado em  $\mathbb{R}^N$ . Além disso, temos que

$$\begin{aligned} |\Omega(u)| &= \int_{\Omega(u)} 1 \, dx \\ &\leq \int_{\Omega(u)} \frac{|u|^{\frac{N}{2}}}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{2}}} \, dx \\ &= \frac{1}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{2}}} \int_{\Omega(u)} |u|^{\frac{N}{2}} \, dx \end{aligned}$$



Logo, utilizando (2.47), concluimos que

$$|\Omega(u)| \leq \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha(N,2)}\right)^{\frac{N-2}{2}}}. \quad (2.48)$$

Agora, considere

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\Omega(u)} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &\leq \int_{\Omega(u)} \exp \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta}. \end{aligned}$$

Em  $\Omega(u)$ , definimos

$$v(x) = |u(x)| - \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} \right)^{\frac{N-2}{2}} \right]^{\frac{2}{N}}. \quad (2.49)$$

Assim,  $v \in W_N^{2, \frac{N}{2}}(\Omega(u))$  e por (2.49), temos

$$\nabla v(x) = \nabla |u(x)| \quad \Rightarrow \quad \Delta v(x) = \Delta |u(x)| = |\Delta u|.$$

Deste modo,

$$\|\Delta v\|_{\frac{N}{2}} = \left( \int_{\Omega(u)} |\Delta v(x)|^{\frac{N}{2}} \right)^{\frac{2}{N}} = \left( \int_{\Omega(u)} |\Delta u|^{\frac{N}{2}} \right)^{\frac{2}{N}} \leq \|\Delta u\|_{\frac{N}{2}} \leq 1.$$

Além disso, utilizando o Lema 2.5 em  $\Omega(u)$  com  $\varepsilon = \frac{\alpha(N,2)}{\alpha} - 1 > 0$ ,  $r = \frac{1}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{p-1}}}$  e  $p = \frac{N}{N-2}$ , obtemos que

$$\begin{aligned} |u|^{\frac{N}{N-2}} &= \left| |u| - \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} \right)^{\frac{N-2}{2}} \right]^{\frac{2}{N}} + \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} \right)^{\frac{N-2}{2}} \right]^{\frac{2}{N}} \right|^{\frac{N}{N-2}} \\ &= \left| v + \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} \right)^{\frac{N-2}{2}} \right]^{\frac{2}{N}} \right|^{\frac{N}{N-2}} \\ &\leq \left( |v| + \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} \right)^{\frac{N-2}{2}} \right]^{\frac{2}{N}} \right)^{\frac{N}{N-2}} \\ &\leq (1+\varepsilon) |v|^{\frac{N}{N-2}} + \left( 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{N-2}{2}}}} \right)^{\frac{2}{2-N}} \left| \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} \right)^{\frac{N-2}{2}} \right)^{\frac{2}{N}} \right|^{\frac{N}{N-2}} \\ &= \left( 1 + \frac{\alpha(N,2)}{\alpha} - 1 \right) |v|^{\frac{N}{N-2}} + \left( 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^{\frac{N-2}{2}}} \right)^{\frac{2}{2-N}} \left( 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^{\frac{N-2}{2}}} \right)^{\frac{2}{N-2}}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$|u|^{\frac{N}{N-2}} \leq \frac{\alpha(N, 2)}{\alpha} |v|^{\frac{N}{N-2}} + 1. \quad (2.50)$$

Assim, utilizando (2.50) e a desigualdade de Adams em domínios de medida finita (Teorema 2.3), temos que

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{\Omega(u)} \exp \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &\leq \int_{\Omega(u)} \exp \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \left( \frac{\alpha(N, 2)}{\alpha} |v(x)|^{\frac{N}{N-2}} + 1 \right) \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &\leq \int_{\Omega(u)} \exp \left( \alpha(N, 2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |v(x)|^{\frac{N}{N-2}} + \alpha \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= e^\alpha \int_{\Omega(u)} \exp \left( \alpha(N, 2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |v(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &\leq e^\alpha C(N, \beta) |\Omega(u)|^{1 - \frac{\beta}{N}}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Logo, aplicação (2.48) em (2.51), segue que

$$I \leq C(N, \beta) \left( \frac{1}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{2}}} \right)^{1 - \frac{\beta}{N}}. \quad (2.52)$$

Agora, se  $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega(u)$ , então

$$|u(x)| < \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}} \right]^{\frac{2}{N}} < 1,$$

e, portanto, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega(u)} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &\leq \int_{\{u \leq 1\}} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &\leq \int_{\{u \leq 1\}} \phi_{N,2} \left( \alpha |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \int_{\{u \leq 1\}} \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \geq \frac{N-2}{2}}} \frac{\alpha^j |u(x)|^{\frac{N \cdot j}{N-2}}}{j!} \frac{dx}{|x|^\beta}. \end{aligned}$$

Mas, como

$$|u(x)| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |u(x)|^{\frac{N \cdot j}{N-2}} \leq |u(x)|^{\frac{N}{2}}, \quad \forall j \geq \frac{N-2}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega(u)} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
& \leq \int_{\{u \leq 1\}} |u(x)|^{\frac{N}{2}} \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \geq \frac{N-2}{2}}} \frac{\alpha^j}{j!} \frac{dx}{|x|^\beta} \\
& \leq e^\alpha \int_{\{u \leq 1\}} |u(x)|^{\frac{N}{2}} \frac{dx}{|x|^\beta} \\
& \leq C(N) \int_{\{u \leq 1\}} |u(x)|^{\frac{N}{2}} \frac{dx}{|x|^\beta} \\
& = C(N) \left( \underbrace{\int_{\{u \leq 1, |x| \geq 1\}} |u(x)|^{\frac{N}{2}} \frac{dx}{|x|^\beta}}_{J_1} + \underbrace{\int_{\{u \leq 1, |x| < 1\}} |u(x)|^{\frac{N}{2}} \frac{dx}{|x|^\beta}}_{J_2} \right).
\end{aligned}$$

Calculando separadamente as expressões, obtemos que

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\{u \leq 1, |x| \geq 1\}} |u(x)|^{\frac{N}{2}} \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&\leq \int_{\{u \leq 1, |x| \geq 1\}} |u(x)|^{\frac{N}{2}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} |u(x)|^{\frac{N}{2}} dx \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

em que na última desigualdade utilizamos (2.47). Por outro lado,

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{\{u \leq 1, |x| < 1\}} |u(x)|^{\frac{N}{2}} \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&\leq \int_{B(0,1)} \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&= \omega_{N-1} \int_0^1 \frac{\rho^{N-1}}{\rho^\beta} d\rho \\
&= \omega_{N-1} \frac{1}{N-\beta} \\
&= C(N, \beta).
\end{aligned}$$

O que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega(u)} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \leq \frac{C(N, \beta)}{\left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} \right)^{\frac{N-2}{2}} \right]^{1-\frac{\beta}{N}}}. \quad (2.53)$$

Dessa forma, utilizando (2.52), (2.53) e a definição de supremo, concluímos que

$$\text{ATA}(\alpha, \beta) \leq \frac{C(N, \beta)}{\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha(N, 2)}\right)^{\frac{N-2}{2}}\right]^{1 - \frac{\beta}{N}}}.$$

Mostraremos agora que

$$\text{ATA}(\alpha(N, 2), \beta) = \infty.$$

Com efeito, seja  $\psi \in C^\infty([0, 1])$  tal que

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0 \quad e \quad \psi(1) = \psi'(1) = 1.$$

Para  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  considere a função  $H(t)$  definida por

$$H(t) = \begin{cases} \varepsilon \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) & , \text{ se } 0 < t \leq \varepsilon, \\ t & , \text{ se } \varepsilon < t \leq 1 - \varepsilon, \\ 1 - \varepsilon \psi\left(\frac{1-t}{\varepsilon}\right) & , \text{ se } 1 - \varepsilon < t \leq 1, \\ 1 & , \text{ se } 1 < t. \end{cases}$$

Além disso, fixado  $r > 0$ , considere a função teste de Adams

$$\psi_r(|x|) = H\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}\right).$$

Neste caso, por construção  $\psi_r \in W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ , e se

$$\begin{aligned} x \in B(0, r) \quad \Rightarrow \quad |x| \leq r \quad \Rightarrow \quad \frac{|x|}{r} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{|x|}{r}\right) \leq \ln(1) \\ \Rightarrow \ln(|x|) - \ln(r) \leq 0 \\ \Rightarrow -\left(\ln\left(\frac{1}{|x|}\right) - \ln\left(\frac{1}{r}\right)\right) \leq 0 \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \geq \ln\left(\frac{1}{r}\right) \\ \Rightarrow \frac{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} \geq 1. \end{aligned}$$

Sendo assim, se  $x \in B(0, r)$ , segue que  $\psi_r(|x|) = 1$ . Além disso, por [3], temos que

$$\begin{aligned}
\|\Delta\psi_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} &\leq \omega_{N-1}a(N, 2)^{\frac{N}{2}} \ln\left(\frac{1}{r}\right)^{1-\frac{N}{2}} A_r; \\
\|\psi_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} &= o\left(\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}\right)^{\frac{N-2}{2}}\right); \quad a(N, 2) = \frac{\alpha(N, 2)^{\frac{N-2}{N}}}{N\sigma_N^{\frac{2}{N}}}; \\
A_r &= A_r(N, 2) = \left[1 + 2\varepsilon\left(\|\psi'\|_{\infty} + O\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}\right)\right)^{\frac{N}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Agora, definimos

$$u_r(|x|) = \left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{\frac{N-2}{N}} \psi_r(|x|). \quad (2.54)$$

Assim, para  $x \in B(0, r)$ , temos que

$$\psi_r(|x|) = 1,$$

o que implica que

$$u_r(|x|) = \left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{\frac{N-2}{N}}. \quad (2.55)$$

Além disso,

$$\Delta u_r(|x|) = \left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{\frac{N-2}{N}} \Delta\psi_r(|x|)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u_r(|x|)|^{\frac{N}{2}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{\frac{N-2}{N}} |\Delta\psi_r(|x|)|^{\frac{N}{2}} dx \\
&= \left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{\frac{N-2}{N}} \|\Delta\psi_r(|x|)\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \\
&\leq \left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{\frac{N-2}{N}} \omega_{N-1}a(N, 2)^{\frac{N}{2}} \ln\left(\frac{1}{r}\right)^{1-\frac{N}{2}} A_r \\
&= \omega_{N-1}a(N, 2)^{\frac{N}{2}} A_r,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
\left(\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{N-2}} &\leq \omega_{N-1}^{\frac{2}{N-2}} a(N, 2)^{\frac{N}{N-2}} A_r^{\frac{2}{N-2}} \\
&= \omega_{N-1}^{\frac{2}{N-2}} \frac{\alpha(N, 2)}{N^{\frac{N}{N-2}} \sigma_N^{\frac{2}{N-2}}} A_r^{\frac{2}{N-2}},
\end{aligned}$$

em que  $\sigma_N$  denota o volume da bola centrada na origem de raio 1, isto é,

$$\sigma_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\frac{N}{2}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} = \frac{2}{N} \frac{\omega_{N-1}}{2} = \frac{\omega_{N-1}}{N},$$

na qual utilizamos a seguinte propriedade:  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . Desse modo, concluímos

$$\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}} \leq \omega_{N-1}^{\frac{2}{N-2}} \frac{\alpha(N, 2)}{N^{\frac{N}{N-2}} \left(\frac{\omega_{N-1}}{N}\right)^{\frac{2}{N-2}}} A_r^{\frac{2}{N-2}} = \frac{\alpha(N, 2) A_r^{\frac{2}{N-2}}}{N}. \quad (2.56)$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned} & \text{ATA}(\alpha(N, 2), \beta) \\ &= \sup_{\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}} \leq 1} \frac{1}{\|u\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}(1-\frac{\beta}{N})}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &\geq \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left\| \frac{u_r}{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}} \right\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N-\beta}{N}}} \int_{B(0,r)} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left( \frac{N-\beta}{N} \right) \left| \frac{u_r(|x|)}{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}} \right|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N-\beta}{2}}}{\|u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N-\beta}{2}}} \int_{B(0,r)} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left( \frac{N-\beta}{N} \right) \left| \frac{\log\left(\frac{1}{r}\right)}{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}} \right|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta}. \end{aligned}$$

Mas, observe que

$$\begin{aligned} \phi_{N,2} \left( \frac{\alpha(N, 2) \left( \frac{N-\beta}{N} \right) \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}}} \right) &\geq \phi_{N,2} \left( \frac{\alpha(N, 2) \left( \frac{N-\beta}{N} \right) \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\frac{\alpha(N, 2) A_r^{\frac{2}{N-2}}}{N}} \right) \\ &= \phi_{N,2} \left( \frac{\left( \frac{N-\beta}{N} \right) \log\left(\frac{1}{r}\right)}{A_r^{\frac{2}{N-2}}} \right). \end{aligned}$$

Assim, por coordenadas polares, temos que

$$\begin{aligned} \text{ATA}(\alpha(N, 2), \beta) &\geq \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N-\beta}{2}}}{\|u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N-\beta}{2}}} \phi_{N,2} \left( \frac{\left( \frac{N-\beta}{N} \right) \log\left(\frac{1}{r}\right)}{A_r^{\frac{2}{N-2}}} \right) \int_{B(0,r)} \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N-\beta}{2}}}{\|u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N-\beta}{2}}} \phi_{N,2} \left( \frac{\left( \frac{N-\beta}{N} \right) \log\left(\frac{1}{r}\right)}{A_r^{\frac{2}{N-2}}} \right) \omega_{N-1} \int_0^r y^{N-1-\beta} dy \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N-\beta}{2}}}{\|u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N-\beta}{2}}} \phi_{N,2} \left( \frac{\left( \frac{N-\beta}{N} \right) \log\left(\frac{1}{r}\right)}{A_r^{\frac{2}{N-2}}} \right) \omega_{N-1} \frac{r^{N-\beta}}{N-\beta} \\ &\xrightarrow{r \rightarrow 0^+} \infty. \end{aligned}$$

Agora, consideramos a seguinte sequência

$$u_k(x) = \begin{cases} \left[ \frac{\ln(k)}{\alpha(N,2)} \right]^{1-\frac{2}{N}} - \frac{N\alpha(N,2)^{\frac{2}{N}-1}}{2} \cdot \frac{|x|^2}{\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^{\frac{2}{N}}} \cdot \frac{N\alpha(N,2)^{\frac{2}{N}-1}}{2(\ln(k))^{\frac{2}{N}}}, & \text{se } |x| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}, \\ N\alpha(N,2)^{\frac{2}{N}-1}(\ln(k))^{\frac{-2}{N}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), & \text{se } \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}} < |x| \leq 1, \\ \zeta_k, & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

em que  $\zeta_k$  é uma função suave que satisfaz

- $\text{supp}(\zeta_k) \subset \{|x| < 2\}$ ;
- $\zeta_k|_{|x|=1} = 0$ ;
- $\left. \frac{\partial \zeta_k}{\partial \nu} \right|_{|x|=1} = N\alpha(N,2)^{\frac{2}{N}-1}(\ln k)^{\frac{-2}{N}},$

de modo que  $\zeta_k$  e  $\Delta \zeta_k$  são todos  $O\left(\left(\frac{1}{\ln k}\right)^{\frac{2}{N}}\right)$ . Por exemplo, podemos escolher

$$\zeta_k(x) = \frac{1}{2}N\alpha(N,2)^{\frac{2}{N}-1}(\ln k)^{\frac{-2}{N}} - \frac{1}{2}N\alpha(N,2)^{\frac{2}{N}-1}(\ln k)^{\frac{-2}{N}}\|x\|^2$$

perto de  $|x| = 1$ . A escolha da sequência acima é inspirada em uma sequência semelhante a tomada em [41], no caso em que a dimensão é 4. Portanto,

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} -\frac{N\alpha(N,2)^{\frac{2}{N}-1}}{2} \frac{2x_i}{\left(\frac{\ln k}{k}\right)^{\frac{2}{N}}}, & \text{se } |x| < \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}, \\ -N\alpha(N,2)^{\frac{2}{N}-1}(\ln k)^{\frac{-2}{N}} \left(\frac{x_i}{|x|^2}\right), & \text{se } \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}} < |x| < 1, \\ \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}, & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2}(x) = \begin{cases} -\frac{N\alpha(N,2)^{\frac{2}{N}-1}}{2} \cdot \frac{2}{\left(\frac{\ln k}{k}\right)^{\frac{2}{N}}}, & \text{se } |x| < \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}, \\ -N\alpha(N,2)^{\frac{2}{N}-1}(\ln k)^{\frac{-2}{N}} \left(\frac{|x|^2 - 2x_i^2}{|x|^4}\right), & \text{se } \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}} < |x| < 1, \\ \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial x_i^2}, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Assim,

$$\Delta u_k(x) = \begin{cases} -\frac{N\alpha(N,2)^{\frac{2}{N}-1}}{2} \cdot \frac{2N}{\left(\frac{\ln k}{k}\right)^{\frac{2}{N}}}, & \text{se } |x| < \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}, \\ -N\alpha(N,2)^{\frac{2}{N}-1}(\ln k)^{\frac{-2}{N}} \left(\frac{N-2}{|x|^2}\right), & \text{se } \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}} < |x| < 1, \\ \Delta \zeta_k, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Mas como  $\text{supp}(\zeta_k) \subset \{|x| < 2\}$  e  $\Delta\zeta_k = O\left(\left(\frac{1}{\ln k}\right)^{\frac{2}{N}}\right)$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_{\{|x|>1\}} |\Delta u_k(x)|^{\frac{N}{2}} dx &= \int_{\{|x|>1\}} |\Delta\zeta_k|^{\frac{N}{2}} dx \\ &= \int_{\{1<|x|<2\}} |\Delta\zeta_k|^{\frac{N}{2}} dx \\ &\leq \int_{\{1<|x|<2\}} \left| C \left( \frac{1}{\ln(k)} \right)^{\frac{2}{N}} \right|^{\frac{N}{2}} dx \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\{|x|>1\}} |\Delta u_k(x)|^{\frac{N}{2}} dx \leq \tilde{C} \cdot \frac{1}{\ln(k)}. \quad (2.57)$$

Além disso, por coordenadas polares, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\left\{|x|<\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}} |\Delta u_k(x)|^{\frac{N}{2}} dx &= \int_{\left\{|x|<\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}} \left| -\frac{N\alpha(N, 2)^{\frac{2}{N}-1}}{2} \cdot \frac{2N}{\left(\frac{\ln k}{k}\right)^{\frac{2}{N}}} \right|^{\frac{N}{2}} dx \\ &= \omega_{N-1} \int_0^{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}} \left[ N^2 \cdot \alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{N}} \left( \frac{k}{\ln k} \right)^{\frac{2}{N}} \right]^{\frac{N}{2}} r^{N-1} dr \\ &= \omega_{N-1} N^N \cdot \alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{2}} \left( \frac{k}{\ln k} \right) \left[ \frac{r^N}{N} \right]_0^{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}} \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\int_{\left\{|x|<\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}} |\Delta u_k(x)|^{\frac{N}{2}} dx = \omega_{N-1} N^{N-1} \alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{2}} \frac{1}{\ln(k)}. \quad (2.58)$$

Por fim, por coordenadas polares novamente, temos que

$$\begin{aligned} &\int_{\left\{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}} < |x| < 1\right\}} |\Delta u_k(x)|^{\frac{N}{2}} dx \\ &= \int_{\left\{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}} < |x| < 1\right\}} \left| -N\alpha(N, 2)^{\frac{2}{N}-1} (\ln k)^{\frac{-2}{N}} \left( \frac{N-2}{|x|^2} \right) \right|^{\frac{N}{2}} dx \\ &= \int_{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}}^1 \omega_{N-1} N^{\frac{N}{2}} \alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{2}} (\ln(k))^{-1} (N-2)^{\frac{N}{2}} r^{-1} dr \\ &= \omega_{N-1} N^{\frac{N}{2}} \alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{2}} (\ln(k))^{-1} (N-2)^{\frac{N}{2}} \frac{\ln(k)}{N} \\ &= \omega_{N-1} N^{\frac{N}{2}} \alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{2}} (N-2)^{\frac{N}{2}} \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Mas, lembre-se que

$$\alpha(N, 2) = \frac{N}{\omega_{N-1}} \left[ \frac{\pi^{\frac{N}{2}} 2^2}{\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)} \right]^{\frac{N}{N-2}}, \quad \omega_{N-1} = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \quad \text{e} \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$

Portanto,



$$\begin{aligned}
\int_{\left\{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}} < |x| < 1\right\}} |\Delta u_k(x)|^{\frac{N}{2}} dx &= \omega_{N-1} N^{\frac{N}{2}} \alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{2}} (N-2)^{\frac{N}{2}} \frac{1}{N} \\
&= \omega_{N-1} N^{\frac{N}{2}} \left( \frac{N}{\omega_{N-1}} \left[ \frac{\pi^{\frac{N}{2}} 2^2}{\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)} \right]^{\frac{N}{N-2}} \right)^{\frac{2-N}{2}} (N-2)^{\frac{N}{2}} \frac{1}{N} \\
&= \omega_{N-1}^{\frac{N}{2}} \left( \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\pi^{\frac{N}{2}} 2^2 \left(\frac{N-2}{2}\right)} \right)^{\frac{N}{2}} (N-2)^{\frac{N}{2}} \\
&= \left( \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \right)^{\frac{N}{2}} \left( \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\pi^{\frac{N}{2}} 2^2 \left(\frac{N-2}{2}\right)} \right)^{\frac{N}{2}} (N-2)^{\frac{N}{2}},
\end{aligned}$$

ou seja, obtemos que

$$\int_{\left\{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}} < |x| < 1\right\}} |\Delta u_k(x)|^{\frac{N}{2}} dx = 1. \quad (2.59)$$

Assim, utilizando (2.57), (2.58) e (2.59), concluímos que

$$1 \leq \|\Delta u_k\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \leq 1 + O\left(\frac{1}{\ln k}\right). \quad (2.60)$$

Por outro lado, pela definição de  $(u_k)$ , segue que

$$\begin{aligned}
\|u_k\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_k(x)|^{\frac{N}{2}} dx \\
&= \int_{\left\{|x| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}} \left[ \left[ \frac{\ln(k)}{\alpha(N, 2)} \right]^{\frac{N-2}{N}} - \frac{N\alpha(N, 2)^{\frac{2}{N-1}}}{2} \frac{|x|^2}{\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^{\frac{2}{N}}} \frac{N\alpha(N, 2)^{\frac{2}{N-1}}}{2(\ln(k))^{\frac{2}{N}}} \right]^{\frac{N}{2}} dx \\
&\quad + \int_{\left\{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}} \leq |x| \leq 1\right\}} \left[ N\alpha(N, 2)^{\frac{2}{N}-1} (\ln(k))^{\frac{-2}{N}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \right]^{\frac{N}{2}} dx + \int_{\{|x| > 1\}} \zeta_k^{\frac{N}{2}} dx.
\end{aligned} \quad (2.61)$$

Assim, calculando separadamente, temos que

$$\begin{aligned}
J_1 &:= \int_{\{|x| > 1\}} \zeta_k^{\frac{N}{2}} dx = \int_{\{1 < |x| < 2\}} \zeta_k^{\frac{N}{2}} dx \\
&\leq C \int_{\{1 < |x| < 2\}} \left( \frac{1}{(\ln k)^{\frac{2}{N}}} \right)^{\frac{N}{2}} dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$J_1 \leq \tilde{C} \frac{1}{\ln k} \quad (2.62)$$

e

$$\begin{aligned}
J_2 &:= \int_{\left\{ \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}} \leq |x| \leq 1 \right\}} \left[ N \alpha(N, 2)^{\frac{2}{N}-1} (\ln(k))^{\frac{-2}{N}} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \right]^{\frac{N}{2}} dx \\
&= \omega_{N-1} \int_{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}}^1 N^{\frac{N}{2}} \alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{2}} \ln(k)^{-1} \ln\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{N}{2}} r^{N-1} dr \\
&\leq \omega_{N-1} N^{\frac{N}{2}} \alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{2}} \frac{1}{\ln(k)} \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{N}{2}} r^{N-1} dr.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo a mudança de variável,

$$\begin{cases} u = \ln\left(\frac{1}{r}\right) & \Rightarrow & u = -\ln(r) & \Rightarrow & e^{(-u)} = r \\ -e^{(-uN)} du = r^{N-1} dr \end{cases}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{N}{2}} r^{N-1} dr &= \int_0^\infty u^{\frac{N}{2}} (e^{-u})^{N-1} (-e^{-u}) du \\
&= \int_0^\infty u^{\frac{N}{2}} e^{-uN+u-u} du \\
&= \int_0^\infty u^{\frac{N}{2}} e^{-uN} du \\
&= \int_0^\infty \frac{t^N}{N^{\frac{N}{2}}} e^{-t} \frac{dt}{N} \\
&= \frac{1}{N^{\frac{N}{2}+1}} \Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right).
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Em que utilizamos a mudança de variável  $u = \frac{t}{N}$  em (2.63). Assim,

$$J_2 \leq C_1 \frac{1}{\ln(k)}. \tag{2.64}$$

Por fim, definindo

$$J_3 := \int_{\left\{ 0 \leq |x| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}} \right\}} \left[ \left( \frac{1}{\alpha(N, 2)} \ln(k) \right)^{\frac{N-2}{N}} - \left( \frac{N \alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{N}}}{2} \right) \left( \frac{|x|^2 k^{\frac{2}{N}} - 1}{\ln(k)^{\frac{2}{N}}} \right) \right]^{\frac{N}{2}} dx,$$

e utilizando a desigualdade

$$(|a| + |b|)^p \leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p), \quad p \geq 1,$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
J_3 \leq & 2^{\frac{N}{2}-1} \int_{\left\{0 \leq |x| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}} \left[ \left( \frac{1}{\alpha(N, 2)} \ln(k) \right)^{\frac{N-2}{N}} \right]^{\frac{N}{2}} dx \\
& + 2^{\frac{N}{2}-1} \int_{\left\{0 \leq |x| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}} \left[ \left( \frac{N\alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{N}}}{2} \right) \left( \frac{|x|^2 k^{\frac{2}{N}} - 1}{\ln(k)^{\frac{2}{N}}} \right) \right]^{\frac{N}{2}} dx
\end{aligned}$$

Assim, utilizando coordenadas polares, segue que

$$\begin{aligned}
J_3 = & 2^{\frac{N}{2}-1} \omega_{N-1} \int_0^{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}} \left[ \frac{1}{\alpha(N, 2)} \ln(k) \right]^{\frac{N-2}{2}} r^{N-1} dr \\
& + 2^{\frac{N}{2}-1} \omega_{N-1} \int_0^{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}} \left[ \frac{N\alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{N}}}{2} \frac{1}{\ln(k)^{\frac{2}{N}}} \right]^{\frac{N}{2}} (r^2 k^{\frac{2}{N}} - 1)^{\frac{N}{2}} r^{N-1} dr.
\end{aligned}$$

No entanto, estimando superiormente a segunda integral acima, concluimos que

$$\begin{aligned}
& 2^{\frac{N}{2}-1} \omega_{N-1} \int_0^{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}} \left[ \frac{N\alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{N}}}{2} \frac{1}{\ln(k)^{\frac{2}{N}}} \right]^{\frac{N}{2}} (r^2 k^{\frac{2}{N}} - 1)^{\frac{N}{2}} r^{N-1} dr \\
& \leq 2^{\frac{N}{2}-1} \omega_{N-1} \left[ \frac{N\alpha(N, 2)^{\frac{2-N}{N}}}{2} \frac{1}{\ln(k)^{\frac{2}{N}}} \right]^{\frac{N}{2}} \left( \left( \left( \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{N}} \right)^2 k^{\frac{2}{N}} - 1 \right) \left( \left( \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{N}} \right)^{N-1} \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$J_3 \leq \omega_{N-1} \left[ \frac{1}{\alpha(N, 2)} \ln(k) \right]^{\frac{N-2}{2}} \frac{\left( \left( \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{N}} \right)^N}{N},$$

ou seja,

$$J_3 \leq C_2 \ln(k)^{\frac{N-2}{2}} \frac{1}{k}. \quad (2.65)$$

Dessa forma, utilizando (2.62), (2.64) e (2.65) em (2.61), obtemos que

$$\|u_k\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \leq A(\ln(k))^{-1} + B(\ln(k))^{\frac{N-2}{2}} \frac{1}{k}, \quad (2.66)$$

em que  $A, B$  são dois números positivos, isto é,  $A, B > 0$ . Considere agora

$$v_k = \frac{u_k}{\|\Delta u_k\|_{\frac{N}{2}}},$$

então

$$\Delta v_k = \frac{\Delta u_k}{\|\Delta u_k\|_{\frac{N}{2}}}.$$

Assim,

$$\|\Delta v_k\|_{\frac{N}{2}} = \left\| \frac{\Delta u_k}{\|\Delta u_k\|_{\frac{N}{2}}} \right\|_{\frac{N}{2}} = 1$$

e, utilizando (2.60), (2.66), segue que

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{\frac{N}{2}} &= \left\| \frac{u_k}{\|\Delta u_k\|_{\frac{N}{2}}} \right\|_{\frac{N}{2}} \\ &= \frac{\|u_k\|_{\frac{N}{2}}}{\|\Delta u_k\|_{\frac{N}{2}}} \\ &\leq \|u_k\|_{\frac{N}{2}} \\ &\leq A(\ln(k))^{-1} + B(\ln(k))^{\frac{N-2}{2}} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Logo, pela definição de  $\text{ATA}(\alpha, \beta)$ , temos que

$$\begin{aligned} \text{ATA}(\alpha, \beta) &= \sup_{\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}} \leq 1} \frac{1}{\|u\|_{\frac{N}{2}(1-\frac{\beta}{N})}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &\geq \frac{1}{\|v_k\|_{\frac{N}{2}(1-\frac{\beta}{N})}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |v_k(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &\geq \frac{1}{\|v_k\|_{\frac{N}{2}(1-\frac{\beta}{N})}} \int_{\left\{ |x| \leq \left( \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{N}} \right\}} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |v_k(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta}. \end{aligned}$$

Assim, para  $k$  grande, temos que, para  $|x| \leq \left( \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{N}}$ ,

$$\begin{aligned} |u_k(x)| &= \left| \left[ \frac{1}{\alpha(N, 2)} \ln(k) \right]^{\frac{N-2}{N}} - \frac{N\alpha(N, 2)^{\frac{2}{N}-1}}{2} \frac{|x|^2}{\left( \frac{\ln(k)}{k} \right)^{\frac{2}{N}}} + \frac{N\alpha(N, 2)^{\frac{2}{N}-1}}{2} \frac{1}{(\ln(k))^{\frac{2}{N}}} \right| \\ &\leq \left[ \frac{1}{\alpha(N, 2)} \ln(k) \right]^{\frac{N-2}{N}} + \left| \frac{N\alpha(N, 2)^{\frac{2}{N}-1}}{2} \frac{\left( \frac{1}{k} \right)^{\frac{2}{N}}}{\left( \frac{\ln(k)}{k} \right)^{\frac{2}{N}}} \right| + \left| \frac{N\alpha(N, 2)^{\frac{2}{N}-1}}{2(\ln(k))^{\frac{2}{N}}} \right| \\ &\leq \left[ \frac{1}{\alpha(N, 2)} \ln(k) \right]^{\frac{N-2}{N}} + \frac{N}{2} \left[ \frac{1}{\alpha(N, 2)} \ln(k) \right]^{\frac{N-2}{N}} + \frac{N}{2} \left[ \frac{1}{\alpha(N, 2)} \ln(k) \right]^{\frac{N-2}{N}} \end{aligned}$$

Deste modo,

$$u_k(x) = O \left( \left( \frac{1}{\alpha(N, 2)} \ln(k) \right)^{\frac{N-2}{N}} \right)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\text{ATA}(\alpha, \beta) &\geq \frac{1}{\|v_k\|_{\frac{N}{2}(1-\frac{\beta}{N})}} \int_{\left\{|x| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}} \phi_{N,2} \left( \alpha \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) |v_k(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&= \frac{1}{\|v_k\|_{\frac{N}{2}(1-\frac{\beta}{N})}} \int_{\left\{|x| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}} \phi_{N,2} \left( \alpha \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) \frac{|u_k(x)|^{\frac{N}{N-2}}}{\|\Delta u_k\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&= \frac{1}{\|v_k\|_{\frac{N}{2}(1-\frac{\beta}{N})}} \int_{\left\{|x| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}} \phi_{N,2} \left( \alpha \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) \frac{O\left(\frac{\ln(k)}{\alpha(N,2)}\right)}{\|\Delta u_k\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&\geq \frac{C \exp \left( \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) \frac{1}{\|\Delta u_k\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}}} \ln(k) \right)}{\left( A(\ln(k))^{-1} + B(\ln(k))^{\frac{N-2}{2}} \frac{1}{k} \right)^{1-\frac{\beta}{N}}} \\
&\geq \frac{C \exp \left( \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) \left( \frac{1}{\|\Delta u_k\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}}} - \frac{\alpha(N,2)}{\alpha} \right) \ln(k) \right)}{\left( A(\ln(k))^{-1} + B(\ln(k))^{\frac{N-2}{2}} \frac{1}{k} \right)^{1-\frac{\beta}{N}}}.
\end{aligned}$$

Além disso, de (2.60) para  $k$  grande (independente de  $\alpha$ ), temos que

$$\frac{1}{\|\Delta u_k\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}}} - \frac{\alpha(N,2)}{\alpha} = 1 - \frac{\alpha(N,2)}{\alpha} + o_k(1) \approx 1 - \frac{\alpha(N,2)}{\alpha}$$

e

$$\left( A(\ln(k))^{-1} + B(\ln(k))^{\frac{N-2}{2}} \frac{1}{k} \right)^{1-\frac{\beta}{N}} \approx (\ln(k)^{-1})^{1-\frac{\beta}{N}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\text{ATA}(\alpha, \beta) &\geq \frac{e^{\left\{ \left(1-\frac{\beta}{N}\right) \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} \left(1-\frac{\alpha(N,2)}{\alpha}\right) \ln(k) \right\}}}{[(\ln(k))^{-1}]^{1-\frac{\beta}{N}}} + o_k(1) \\
&\gtrsim \frac{e^{\left\{ \left(1-\frac{\beta}{N}\right) \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} \left(1-\frac{\alpha(N,2)}{\alpha}\right) \ln(k) \right\}}}{[(\ln(k))^{-1}]^{1-\frac{\beta}{N}}} \\
&= e^{\left\{ \left(1-\frac{\beta}{N}\right) \left( \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} - 1 \right) \ln(k) \right\}} \ln(k)^{1-\frac{\beta}{N}}. \tag{2.67}
\end{aligned}$$

Quando  $\alpha$  está próximo de  $\alpha(N,2)$ , podemos escolher  $k$  suficientemente grande, se necessário, tal que

$$\ln(k) \approx \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\alpha(N,2)}} \quad \text{ou} \quad \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) \left( \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} - 1 \right) \ln(k) \approx 1.$$

Assim,

$$\text{ATA}(\alpha, \beta) \geq C \left( \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\alpha(N,2)}} \right)^{1-\frac{\beta}{N}} \approx \left( \frac{1}{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N,2)} \right)^{\frac{N-2}{N}}} \right)^{1-\frac{\beta}{N}}$$

quando  $\alpha$  está próximo de  $\alpha(N, 2)$ . Por fim, note que aplicando o limite quando  $k \rightarrow \infty$  na equação (2.67), obtemos que  $\alpha(N, 2)$  é ótima, pois o limite irá divergir. ■

Agora, apresentaremos outra demonstração do Teorema 2.8, utilizando a desigualdade de Adams subcrítica dada em (2.46). Mais precisamente, o próximo teorema estabelece uma relação precisa entre os supremos das desigualdades de Adams crítica e subcrítica. Além disso, ele propõe uma nova abordagem para demonstrar desigualdades de Adams, sejam elas crítica ou subcrítica, a partir de uma delas.

**Teorema 2.8** *Sejam  $N \geq 3$ ,  $0 \leq \beta < N$  e  $a, b > 0$ . Denotamos*

$$A_{a,b}(\beta) = \sup_{\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}}^a + \|u\|_{\frac{N}{2}}^b \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta};$$

$$A_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}}(\beta) = A(\beta).$$

*Se  $b \leq \frac{N}{2}$ , então  $A_{a,b} < \infty$ . A constante  $\alpha(N, 2)$  é ótima. Além disso, temos a seguinte identidade:*

$$A_{a,b}(\beta) = \sup_{\alpha \in (0, \alpha(N, 2))} \left( \frac{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}a}}{\left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}b}} \right)^{\frac{N-\beta}{2b}} \text{ATA}(\alpha, \beta).$$

*Em particular,  $A(\beta) < \infty$  e*

$$A(\beta) = \sup_{\alpha \in (0, \alpha(N, 2))} \left( \frac{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{2}}}{\left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{2}}} \right)^{\frac{N-\beta}{N}} \text{ATA}(\alpha, \beta).$$

**Demonstração:** Inicialmente, assuma que  $0 < b \leq \frac{N}{2}$ . Seja  $u \in W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  tal que

$$\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}}^a + \|u\|_{\frac{N}{2}}^b \leq 1.$$

Além disso, assuma que

$$\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}} = \theta \in (0, 1). \quad (2.68)$$

Observe que, se  $\theta = 1$ , então  $\|u\|_{\frac{N}{2}} = 0$  e, portanto,  $u = 0$ , o que é uma contradição já que  $u$  é não nula. Se, no entanto,  $\theta = 0$  teríamos  $\Delta u = 0$ , o que implica que  $u(x) = n + mx$ , em que  $n, m$  são constantes reais. Mas, note que

$$\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}}^a + \|u\|_{\frac{N}{2}}^b \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \|u\|_{\frac{N}{2}}^b \leq 1 \quad \Rightarrow \quad u = 0,$$

pois, caso contrário, não teríamos que  $\|u\|_{\frac{N}{2}}^b \leq 1$  e chegamos à mesma contradição. Por isso, consideramos o intervalo aberto na equação (2.68). Sendo assim,

$$\|u\|_{\frac{N}{2}}^b \leq 1 - \theta^a. \quad (2.69)$$

Vamos considerar dois casos para  $\theta$ . Primeiramente, se  $\frac{1}{4} < \theta < 1$ , considere

$$v(x) = \frac{u(\lambda x)}{\theta}, \quad \text{com} \quad \lambda = \frac{(1 - \theta^a)^{\frac{1}{2b}}}{\theta^{\frac{1}{2}}} > 0. \quad (2.70)$$

Assim,

$$\nabla v(x) = \frac{\lambda}{\theta} \nabla u(\lambda x),$$

e conseqüentemente,

$$\Delta v(x) = \frac{\lambda^2}{\theta} \Delta u(\lambda x).$$

Portanto,

$$\|\Delta v\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v(x)|^{\frac{N}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda^N}{\theta^{\frac{N}{2}}} |\Delta u(\lambda x)|^{\frac{N}{2}} dx = \frac{\lambda^N}{\theta^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u(\lambda x)|^{\frac{N}{2}} dx.$$

Fazendo a mudança de variável  $y = \lambda x$ , temos que  $dy = \lambda^N dx$ . Portanto, a igualdade acima resulta em:

$$\|\Delta v\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} = \frac{\lambda^N}{\theta^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u(y)|^{\frac{N}{2}} \frac{dy}{\lambda^N} = \frac{\|\Delta u\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}}{\theta^{\frac{N}{2}}} = 1,$$

a última igualdade segue de (2.68). Além disso, procedendo da mesma forma, obtemos

$$\begin{aligned} \|v\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} &= \int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{\frac{N}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\theta^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^{\frac{N}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\theta^{\frac{N}{2}} \lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^{\frac{N}{2}} dy \\ &= \frac{\|u\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}}{\theta^{\frac{N}{2}} \lambda^N} \\ &\leq \frac{(1 - \theta^a)^{\frac{N}{2b}}}{\theta^{\frac{N}{2}} \left( \frac{(1 - \theta^a)^{\frac{1}{2b}}}{\theta^{\frac{1}{2}}} \right)^N} \\ &= 1. \end{aligned}$$

A desigualdade acima segue de (2.69) e (2.70). Por outro lado, utilizando novamente a mudança de variável  $x = \lambda y$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&= \lambda^{N-\beta} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(\lambda y)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta} \right) \\
&= \lambda^{N-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \theta^{\frac{N}{N-2}} |v(y)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta}. \tag{2.71}
\end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de que, por (2.70), temos  $\theta v(x) = u(\lambda x)$ . Como  $\theta \in (0, 1)$ , segue da definição de ATA (veja (2.14) para relembrar a definição de ATA) que

$$\begin{aligned}
& \lambda^{N-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \theta^{\frac{N}{N-2}} |v(y)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta} \\
& \leq \lambda^{N-\beta} \text{ATA}(\theta^{\frac{N}{N-2}} \alpha(N, 2), \beta). \tag{2.72}
\end{aligned}$$

Assim, utilizando (2.72) em (2.71), e utilizando também o Teorema 2.7, obtemos que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
& \leq \lambda^{N-\beta} \text{ATA}(\theta^{\frac{N}{N-2}} \alpha(N, 2), \beta) \\
& \leq \left( \frac{(1 - \theta^a)^{\frac{1}{2b}}}{\theta^{\frac{1}{2}}} \right)^{N-\beta} \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\theta^{\frac{N-2}{N}} \alpha(N, 2)}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}} \right)^{1-\frac{\beta}{N}}} \\
& = \frac{((1 - \theta^a)^{\frac{N}{2b}})^{1-\frac{\beta}{N}}}{\theta^{\frac{N-\beta}{2}}} \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \theta^{\frac{N}{2}} \right)^{1-\frac{\beta}{N}}} \\
& \leq \frac{((1 - \theta^a)^{\frac{N}{2b}})^{1-\frac{\beta}{N}}}{(1 - \theta^{\frac{N}{2}})^{1-\frac{\beta}{N}}} \tilde{C}(N, \beta) \\
& \leq C(N, \beta, a, b).
\end{aligned}$$

Vale salientar que a hipótese de que  $\frac{1}{4} < \theta < 1$  é utilizada fortemente na penúltima desigualdade, pois próximo de  $\theta = 0$  aquela fração iria tender ao infinito.

Agora, se  $0 < \theta \leq \frac{1}{4}$ . Defina

$$v(x) = 2^2 u(2x).$$

Consequentemente,

$$\Delta v(x) = 4 \cdot 4 \Delta u(2x).$$



Assim,

$$\begin{aligned}\|\Delta v\|_{\frac{N}{2}} &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v(x)|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} 2^N 2^N |\Delta u(2x)|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}}.\end{aligned}$$

Utilizando a mudança de variável  $y = 2x$ , temos que  $dy = 2^N dx$ . Logo, a igualdade acima se torna:

$$\begin{aligned}\|\Delta v\|_{\frac{N}{2}} &= \left( 2^N \int_{\mathbb{R}^N} 2^N |\Delta u(y)|^{\frac{N}{2}} \frac{dy}{2^N} \right)^{\frac{2}{N}} \\ &= 4 \|\Delta u\|_{\frac{N}{2}} \\ &= 4\theta \leq 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.\end{aligned}$$

Além disso, fazendo novamente a mudança de variável  $y = 2x$ , obtemos que

$$\begin{aligned}\|v\|_{\frac{N}{2}} &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} 2^N u(2x)^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} u(y)^{\frac{N}{2}} dy \right)^{\frac{2}{N}} \\ &= \|u\|_{\frac{N}{2}} \leq 1.\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 2.7, e utilizando novamente a mudança de variável  $x = 2y$ , segue que

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N,2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{N}{(N-2)}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N,2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(2y)|^{\frac{N}{(N-2)}} \right) 2^N \frac{dy}{2^\beta |y|^\beta} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N,2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \frac{|v(y)|^{\frac{N}{(N-2)}}}{4^{\frac{N}{(N-2)}}} \right) 4^N \frac{dy}{|y|^\beta} \\ &\leq 4^N \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\frac{\alpha(N,2)}{4^{\frac{N}{N-2}}}}{\alpha(N,2)} \right)^{\frac{N-2}{N}} \right)^{1 - \frac{\beta}{N}}} \\ &= 4^N \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \frac{1}{4^{\frac{\beta}{2}}} \right)^{1 - \frac{\beta}{N}}} \\ &\leq \tilde{C}(N, \beta).\end{aligned}$$

Consideramos agora também as funções teste de Adams, como na prova do Teorema 2.7 (veja (2.54)). Seja  $\alpha > \alpha(N, 2)$ . Considere

$$w_r(|x|) = \lambda_r \frac{u_r(|x|)}{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^b},$$

sendo  $\lambda_r \in (0, 1)$  a solução de

$$\lambda_r^a + \frac{\lambda_r^b \|u_r\|_{\frac{N}{2}}^b}{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^b} = 1 \quad (2.73)$$

e  $\lambda_r \rightarrow 1$  quando  $r \rightarrow 0^+$ . Assim, utilizando (2.73), segue que

$$\|\Delta w_r\|_{\frac{N}{2}}^a + \|w_r\|_{\frac{N}{2}}^b = \lambda_r^a \left( \frac{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}}{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}} \right)^a + \lambda_r^b \left( \frac{\|u_r\|_{\frac{N}{2}}}{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}} \right)^b = 1.$$

Agora, lembre-se que

- $\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \leq \omega_{N-1} a(N, 2)^{\frac{N}{2}} \ln \left( \frac{1}{r} \right)^{1-\frac{N}{2}} A_r;$
- $\|u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} = o \left( \left( \ln \left( \frac{1}{r} \right) \right)^{\frac{N-2}{N}} \right);$
- $a(N, 2) = \frac{\alpha(N, 2)^{\frac{N-2}{2}}}{N \sigma_N^{\frac{2}{N}}};$
- $A_r = A_r(n, 2) = 1 + 2\varepsilon \left( \|\psi'\|_{\infty} + O \left( \frac{1}{\ln \left( \frac{1}{r} \right)} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$

Assim,

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |w_r(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ & \geq \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B_r} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |w_r(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ & = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B_r} \phi_{N,2} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \lambda_r^{\frac{N}{N-2}} \frac{|u_r(x)|^{\frac{N}{N-2}}}{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ & = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^r w_{N-1} \phi_{N,2} \left( \frac{\alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \lambda_r^{\frac{N}{N-2}} |u_r(\rho)|^{\frac{N}{N-2}}}{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}}} \right) \rho^{N-1-\beta} d\rho \\ & = \lim_{r \rightarrow 0^+} w_{N-1} \int_0^r \phi_{N,2} \left( \frac{\alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) \lambda_r^{\frac{N}{N-2}} |u_r(\rho)|^{\frac{N}{N-2}}}{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}}} \right) \rho^{N-1-\beta} d\rho. \end{aligned}$$

Entretanto, como para  $x \in B(0, r)$  (veja (2.55)), temos que

$$u_r(|x|) = \left( \ln \left( \frac{1}{r} \right) \right)^{\frac{N-2}{N}}$$

e a partir de (2.56), segue que

$$\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}} \leq \frac{\alpha(N, 2) A_r^{\frac{N-2}{N}}}{N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0^+} w_{N-1} \int_0^r \phi_{N,2} \left( \frac{\alpha \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) \lambda_r^{\frac{N}{N-2}} |u_r(\rho)|^{\frac{N}{N-2}}}{\|\Delta u_r\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}}} \right) \rho^{N-1-\beta} d\rho \\ & \geq \lim_{r \rightarrow 0^+} w_{N-1} \phi_{N,2} \left( \frac{\alpha \left(\frac{N-\beta}{N}\right) \lambda_r^{\frac{N}{N-2}} \left(\ln \left(\frac{1}{r}\right)\right)}{\frac{\alpha(N,2) A_r^{\frac{N-2}{N}}}{N}} \right) \int_0^r \rho^{N-1-\beta} d\rho \\ & = \lim_{r \rightarrow 0^+} w_{N-1} \left( \frac{r^{N-\beta}}{N-\beta} \right) \phi_{N,2} \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \frac{(N-\beta) \ln \left(\frac{1}{r}\right) \lambda_r^{\frac{N}{N-2}}}{\left(1 + 2\varepsilon \left(\|\psi'\|_{\infty} + O\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}\right)\right)^{\frac{N}{2}}}\right)^{\frac{2}{N-2}}} \right). \end{aligned}$$

Logo, para  $\varepsilon$  pequeno e fazendo  $r \rightarrow 0^+$ , segue que

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0^+} w_{N-1} \left( \frac{r^{N-\beta}}{N-\beta} \right) \phi_{N,2} \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \frac{(N-\beta) \ln \left(\frac{1}{r}\right) \lambda_r^{\frac{N}{N-2}}}{\left(1 + 2\varepsilon \left(\|\psi'\|_{\infty} + O\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}\right)\right)^{\frac{N}{2}}}\right)^{\frac{2}{N-2}}} \right) \\ & \geq \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{N-\beta} \exp \left( \frac{\alpha(N-\beta)}{\alpha(N, 2)} \ln \left(\frac{1}{r}\right) \right) \\ & = \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{(N-\beta)(1-\frac{\alpha}{\alpha(N,2)})} \rightarrow +\infty, \quad \text{já que } \alpha > \alpha(N, 2). \end{aligned}$$

Resta agora mostrar que

$$A_{a,b}(\beta) = \sup_{\alpha \in (0, \alpha(N,2))} \left( \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha(N,2)}\right)^{\frac{N-2}{N}a}}{\left(\frac{\alpha}{\alpha(N,2)}\right)^{\frac{N-2}{N}b}} \right)^{\frac{N-\beta}{2b}} \text{ATA}(\alpha, \beta). \quad (2.74)$$

Pelo Lema 2.4, temos que

$$\text{ATA}(\alpha, \beta) \leq \left( \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha(N,2)}\right)^{\frac{N-2}{N}b}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha(N,2)}\right)^{\frac{N-2}{N}a}} \right)^{\frac{N-\beta}{2b}} A_{a,b}(\beta).$$

Portanto,

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha(N, 2))} \left\{ \left( \frac{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}a}}{\left( \frac{\alpha}{\alpha(N, 2)} \right)^{\frac{N-2}{N}b}} \right)^{\frac{N-\beta}{2b}} \text{ATA}(\alpha, \beta) \right\} \leq A_{a,b}(\beta).$$

Agora, seja  $(u_n)$  uma sequência maximizante de  $A_{a,b}(\beta)$ , isto é,  $u_n \in W^{2, \frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  com

$$\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^a + \|u_n\|_{\frac{N}{2}}^b \leq 1 \quad (2.75)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u_n(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\rho} \rightarrow A_{a,b}(\beta), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Definindo a sequência

$$v_n(x) = \frac{u_n(\lambda_n x)}{\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}}; \quad \text{com} \quad \lambda_n = \left( \frac{1 - \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^a}{\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^b} \right)^{\frac{1}{2b}} > 0,$$

segue que

$$\Delta v_n(x) = \frac{\lambda_n^2 \Delta u_n(\lambda_n x)}{\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}}.$$

Assim, utilizando a mudança de variável  $y = \lambda_n x$ , segue que

$$\|\Delta v_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n(x)|^{\frac{N}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n^N \frac{|\Delta u_n(\lambda_n x)|^{\frac{N}{2}}}{\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}} dx = \frac{1}{\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u_n(y)|^{\frac{N}{2}} dy = 1.$$

Além disso, utilizando novamente a mudança de variável  $y = \lambda_n x$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(\lambda_n x)|^{\frac{N}{2}}}{\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}} dx \\ &= \frac{1}{\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{1}{\lambda_n^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(y)|^{\frac{N}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{1}{\left( \left( \frac{1 - \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^a}{\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^b} \right)^{\frac{1}{2b}} \right)^N} \cdot \|u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \\ &= \frac{1}{\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}}{\left( 1 - \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^a \right)^{\frac{N}{2b}}} \cdot \|u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \\ &= \frac{\|u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}}{\left( 1 - \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^a \right)^{\frac{N}{2b}}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|v_n\|_{\frac{N}{2}} = \frac{\|u_n\|_{\frac{N}{2}}}{\left(1 - \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{a}{N}}\right)^{\frac{1}{b}}}. \quad (2.76)$$

Por outro lado, por (2.75), obtemos que

$$\|u_n\|_{\frac{N}{2}}^b \leq 1 - \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{a}{N}} \Rightarrow \|u_n\|_{\frac{N}{2}} \leq (1 - \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{a}{N}})^{\frac{1}{b}}. \quad (2.77)$$

Portanto, substituindo (2.77) em (2.76), concluimos que

$$\|v_n\|_{\frac{N}{2}} \leq 1.$$

Assim, utilizando  $x = \lambda_n y$  e o Teorema 2.7, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) |u_n(x)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) |u_n(\lambda_n y)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{\lambda_n^N dy}{|\lambda_n y|^\beta} \\ &= \lambda_n^{N-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}} |v_n(y)|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta} \\ &\leq \lambda_n^{N-\beta} \text{ATA} \left( \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}} \alpha(N, 2), \beta \right) \\ &= \left( \frac{1 - \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{a}{N}}}{\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{b}{N}}} \right)^{\frac{N-\beta}{2b}} \text{ATA} \left( \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}} \alpha(N, 2), \beta \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Seja

$$\alpha = \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}} \alpha(N, 2).$$

Do fato de que  $\|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}} < 1$ , concluimos que

$$\alpha = \|\Delta u_n\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{N-2}} \alpha(N, 2) < \alpha(N, 2).$$

Deste modo, voltando a (2.78), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,2} \left( \alpha(N, 2) \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) |u_n|^{\frac{N}{N-2}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &\leq \sup_{\alpha \in (0, \alpha(N, 2))} \left( \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha(N, 2)}\right)^{\frac{N-2}{N}a}}{\left(\frac{\alpha}{\alpha(N, 2)}\right)^{\frac{N-2}{N}b}} \right)^{\frac{N-\beta}{2b}} \text{ATA}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Concluindo a demonstração de (2.74) e a do Teorema. ■

### 2.3.2 Desigualdade de Adams em $W^{\gamma, \frac{N}{\gamma}}(\mathbb{R}^N)$

Por fim, estudaremos a desigualdade crítica de Adams, sob a suposição de que a desigualdade subcrítica de Adams seja válida para as derivadas de ordem fracionária.

**Teorema 2.9** *Sejam  $0 < \gamma < N$  um número real positivo arbitrário,  $p = \frac{N}{\gamma}$ ,  $0 \leq$*

*$\alpha < \beta_0(N, \gamma) = \frac{N}{\omega_{N-1}} \left( \frac{\pi^{\frac{N}{2}} 2^\gamma \Gamma(\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(\frac{N-\gamma}{2})} \right)^{\frac{p}{p-1}}$ ,  $0 \leq \beta < N$  e  $a, b > 0$ . Denotamos*

$$\text{GATA}(\alpha, \beta) = \sup_{\substack{\|(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u\|_p \leq 1 \\ u \in W^{\gamma, p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}}} \frac{1}{\|u\|_p^{p(1-\frac{\beta}{N})}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N, \gamma} \left( \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta};$$

$$\text{GA}(\beta) = \sup_{\substack{\|(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u\|_p^a + \|u\|_p^b \leq 1 \\ u \in W^{\gamma, p}(\mathbb{R}^N)}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N, \gamma} \left( \beta_0(N, \gamma) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta};$$

sendo

$$\phi_{N, \gamma}(t) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \geq p-1}} \frac{t^j}{j!}.$$

Assuma que  $\text{GATA}(\alpha, \beta) < \infty$  e que exista uma constante  $C(N, \gamma, \beta) > 0$  tal que

$$\text{GATA}(\alpha, \beta) \leq \frac{C(N, \gamma, \beta)}{\left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\beta_0(N, \gamma)} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right)}. \quad (2.79)$$

Então, quando  $b \leq p$ , temos que  $\text{GA}_{a, b}(\beta) < \infty$ . Em particular,  $\text{GA}_{p, p}(\beta) < \infty$ .

**Demonstração:** Seja  $u \in W^{\gamma, p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  com

$$\left\| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u \right\|_p^a + \|u\|_p^b \leq 1.$$

Considere

$$\left\| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u \right\|_p = \theta \in (0, 1).$$

Assim,

$$\|u\|_p^b \leq 1 - \theta^a.$$

Dividiremos a demonstração em casos. Primeiramente, se  $\frac{1}{2^\gamma} < \theta < 1$ , então definindo uma nova função

$$v(x) = \frac{u(\lambda x)}{\theta}, \quad \lambda = \frac{(1 - \theta^a)^{\frac{1}{\gamma b}}}{\theta^{\frac{1}{\gamma}}} > 0. \quad (2.80)$$

Deste modo, como

$$(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} f(\lambda x) = \lambda^\gamma \left( (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} f \right) (\lambda x),$$

segue que

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v(x) &= (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \left( \frac{u(\lambda x)}{\theta} \right) \\ &= \lambda^\gamma \left( (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \frac{u}{\theta} \right) (\lambda x) \\ &= \frac{\lambda^\gamma}{\theta} \left( (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u \right) (\lambda x). \end{aligned}$$

Assim, utilizando a mudança de variável  $y = \lambda x$ , temos que

$$\begin{aligned} \left\| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v \right\|_p &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\lambda^\gamma ((-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u)(\lambda x)}{\theta} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda^{\gamma p - N}}{\theta^p} \left| ((-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u)(y) \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Contudo, sendo  $p = \frac{N}{\gamma}$ , segue que  $\gamma = \frac{N}{p}$ , e assim,

$$\left\| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v \right\|_p = \frac{\left\| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u \right\|_p}{\theta} = 1.$$

Além disso, fazendo  $y = \lambda x$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \|v\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \\ &= \frac{1}{\theta^p} \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^p dx \\ &= \frac{1}{\theta^p \lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p dy \\ &\leq \frac{1}{\theta^p} \left( \frac{\theta^{\frac{N}{\gamma}}}{(1 - \theta^a)^{\frac{N}{\gamma b}}} \right) (1 - \theta^a)^{\frac{p}{b}} \\ &\leq \frac{1}{\theta^p} \left( \frac{\theta^p}{(1 - \theta^a)^{\frac{p}{b}}} \right) (1 - \theta^a)^{\frac{p}{b}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sendo assim, utilizando a mudança de variável  $x = \lambda y$ , segue que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,\gamma} \left( \beta_0(N, \gamma) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,\gamma} \left( \beta_0(N, \gamma) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(\lambda y)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \frac{\lambda^N dy}{|\lambda y|^\beta}. \end{aligned}$$

Pela definição de  $\text{GATA}(\alpha, \beta)$ , e usando (2.80), a expressão anterior torna-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,\gamma} \left( \beta_0(N, \gamma) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&= \lambda^{N-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,\gamma} \left( \theta^{\frac{p}{p-1}} \beta_0(N, \gamma) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |v(y)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \frac{dy}{|y|^\beta} \\
&\leq \lambda^{N-\beta} \text{GATA} \left( \theta^{\frac{p}{p-1}} \beta_0(N, \gamma), \beta \right) \\
&\leq \left( \frac{(1 - \theta^a)^{\frac{1}{\gamma b}}}{\theta^{\frac{1}{\gamma}}} \right)^{N-\beta} \frac{C(N, \beta)}{\left[ 1 - \left( \frac{\theta^{\frac{p}{p-1}} \beta_0(N, \gamma)}{\beta_0(N, \gamma)} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right]^{1 - \frac{\beta}{N}}}.
\end{aligned}$$

Na última desigualdade, utilizamos a equação (2.79). No entanto, como estamos assumindo que

$$\frac{1}{2^\gamma} < \theta < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < \theta^{\frac{1}{\gamma}} < 1 \quad \Rightarrow \quad 2^{N-\beta} > \frac{1}{\theta^{\frac{N-\beta}{\gamma}}} > 1,$$

segue, então, do fato de que  $b \leq p = \frac{N}{\gamma}$ , e, portanto,  $\frac{N}{\gamma b} \geq 1$ , que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,\gamma} \left( \beta_0(N, \gamma) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} &\leq \frac{\left( (1 - \theta^a)^{\frac{N}{\gamma b}} \right)^{1 - \frac{\beta}{N}}}{(1 - \theta)^{1 - \frac{\beta}{N}}} \bar{C}(N, \beta) \\
&\leq C(N, \beta, b),
\end{aligned}$$

Agora, se  $0 < \theta \leq \frac{1}{2^\gamma}$ , então definindo

$$v(x) = 2^\gamma u(2x), \tag{2.81}$$

temos que

$$\left\| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v \right\|_p = 2^\gamma \left\| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u \right\|_p \leq 1.$$

Além disso, utilizando a mudança de variável  $2x = y$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
\|v\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N} 2^{\gamma p} |u(2x)|^p dx \\
&= 2^{\lambda p - N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p dy \\
&= 2^{\gamma \frac{N}{\gamma} - N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p dy \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$



Logo, pela mudança de variável  $x = 2y$ , pela equação (2.81), pela definição de  $\text{GATA}(\alpha, \beta)$  e utilizando (2.79), respectivamente, temos que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,\gamma} \left( \beta_0(N, \gamma) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \frac{dx}{|x|^\beta} \\
&= 2^{N-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,\gamma} \left( \beta_0(N, \gamma) \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |u(2y)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \frac{dy}{|\lambda y|^\beta} \\
&\leq 2^N \int_{\mathbb{R}^N} \phi_{N,\gamma} \left( \frac{\beta_0(N, \gamma)}{2^{\frac{\gamma p}{p-1}}} \left( 1 - \frac{\beta}{N} \right) |v(y)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \frac{dy}{|\lambda y|^\beta} \\
&\leq 2^N \frac{C(N, \beta)}{\left[ 1 - \left( \frac{\frac{\beta_0(N, \gamma)}{2^{\frac{\gamma p}{p-1}}}}{\beta_0(N, \gamma)} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right]} \\
&= 2^N \frac{C(N, \beta)}{\left( 1 - \frac{1}{2^\gamma} \right)} \\
&= 2^N \frac{C(N, \beta)}{\left( \frac{2^\gamma - 1}{2^\gamma} \right)} \\
&\leq \tilde{C}(N, \beta),
\end{aligned}$$

assim concluímos a prova. ■

Embora seja necessário assumir a desigualdade subcrítica de Adams em (2.79), a ideia principal do Teorema anterior é que  $\text{GATA}(\alpha, \beta)$  é, de fato, subcrítica, ou seja,  $\alpha$  é estritamente menor que o nível crítico  $\beta_0(N, \gamma)$ . Assim, ela se apresenta como uma alternativa mais acessível para estudo em comparação com  $\text{GA}_{a,b}(\beta)$ . Essa característica sugere uma nova abordagem no estudo de  $\text{GA}_{a,b}(\beta)$ .

## Capítulo 3

# Equivalência das desigualdades crítica e subcrítica de Trudinger-Moser em dimensões fracionárias e funções extremantes

Sejam  $0 < R \leq \infty$ ,  $\alpha, \theta \geq 0$  e  $q \geq 1$  números reais. Definimos

$$L_\theta^q = L_\theta^q(0, R)$$

como o espaço de Lebesgue com peso constituído por todas as funções mensuráveis  $u$  em  $(0, R)$  tal que

$$\|u\|_{L_\theta^q} = \begin{cases} \left( \int_0^R |u(r)|^q d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, & \text{se } 1 \leq q < \infty \\ \text{ess sup}_{0 < r < R} |u(r)| < \infty, & \text{se } q = \infty \end{cases}$$

a qual estamos denotando a medida ponderada  $d\lambda_\theta$  por

$$\int_0^R f(r) d\lambda_\theta = \omega_\theta \int_0^R f(r) r^\theta dr \quad (3.1)$$

com  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $0 < R \leq \infty$  e  $\omega_\theta$  definido como

$$\omega_\theta = \frac{2\pi^{\frac{\theta+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\theta+1}{2}\right)} \quad \text{com} \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

É importante notar que, quando  $\theta = N - 1$ , é um número inteiro positivo, então  $\omega_\theta$  coincide com  $w_{N-1}$ , conforme é definido no Capítulo 2, ou seja, coincide com o elemento de área da bola unitária do espaço  $\mathbb{R}^{\theta+1} = \mathbb{R}^N$ . Analogamente ao que foi

apresentado no Capítulo 2, podemos definir espaços do tipo Sobolev para investigar uma classe de operadores diferenciais como, por exemplo, os operadores  $p$ -laplaciano, consulte [14, 22, 44] e as referências contidas neles.

De acordo com P. Clément, D.G. de Figueiredo e E. Mitidieri em [14], considerando o espaço

$$X_R := X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$$

em que  $\alpha, \theta \geq 0$ ,  $p > 1$  e  $0 < R \leq \infty$ , como o conjunto de todas as funções localmente absolutamente contínuas no intervalo  $(0, R)$ , que satisfazem

$$\lim_{r \rightarrow R} u(r) = 0, \quad \text{com } u \in L_\theta^p \text{ e } u' \in L_\alpha^p.$$

O espaço  $X_R$  torna-se Banach quando munido da seguinte norma:

$$\|u\| = \left( \|u\|_{L_\theta^p}^p + \|u'\|_{L_\alpha^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, podemos distinguir dois comportamentos especiais para os espaços de Sobolev  $X_R$ . A saber, o caso Sobolev, quando a condição

$$\alpha - p + 1 > 0 \tag{3.2}$$

é satisfeita, e o caso de Trudinger-Moser, quando

$$\alpha - p + 1 = 0.$$

No caso Sobolev (3.2), o valor

$$p^* := p^*(\alpha, p, v) = \frac{(v+1)p}{\alpha - p + 1}$$

é o expoente crítico para a imersão contínua

$$X_R^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_\nu^q.$$

De fato, para a situação limitada  $0 < R < \infty$ , tem-se a seguinte imersão contínua:

$$X_R^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_\nu^q, \quad \text{se } q \in (1, p^*] \text{ e } \min\{\theta, \nu\} \geq \alpha - p.$$

Além disso, no caso estrito  $q < p^*$ , a imersão compacta também é válida. Por outro lado, para o caso de Trudinger-Moser, temos a imersão compacta

$$X_R^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_\nu^q, \quad \text{se } q \in (1, \infty) \text{ e } \nu \geq 0. \tag{3.3}$$

No entanto,

$$X_R \hookrightarrow L_\nu^\infty$$

não é válida, como pode ser observado ao considerar a função  $u(r) = \ln\left(\ln\left(\frac{eR}{r}\right)\right)$ .

Dito isso, neste Capítulo trataremos de algumas propriedades do espaço  $X_R$ , relacionadas à desigualdade de Trudinger-Moser. Nesse contexto, relembremos alguns resultados clássicos. Primeiramente, é importante salientar que a imersão apresentada em (3.3) não é válida para seu valor limite nos espaços de Lebesgue com peso  $L_\nu^q$ . Como resposta a essa limitação, em [18], foi provada uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser para  $X_R$ , demonstrando que este espaço é imerso em um espaço de Orlicz com peso determinado pelo crescimento exponencial. Mais precisamente, denotando

$$\mu_{\alpha,\theta} = (\theta + 1)\omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{e} \quad |B_R|_\theta = \int_0^R d\lambda_\theta,$$

os autores de [18] provaram o seguinte:

**Teorema 3.1** *Sejam  $0 < R < \infty$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $\theta \geq 0$  e  $p = \alpha + 1$  números reais. Então*

i)  $e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} \in L_\nu^1$ , para qualquer  $\mu > 0$  e  $u \in X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$ ;

ii) *Existe uma constante  $c > 0$  que depende apenas de  $\alpha, p$  e  $\theta$  tal que*

$$\sup_{\|u\|_{L_\alpha^p} \leq 1} \frac{1}{|B_R|_\theta} \int_0^R e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta \begin{cases} \leq c, & \text{se } \mu \leq \mu_{\alpha,\theta}, \\ = \infty, & \text{se } \mu > \mu_{\alpha,\theta}. \end{cases} \quad (3.4)$$

iii) *O supremo em (3.4) é atingido para todo  $0 < \mu \leq \mu_{\alpha,\theta}$ .*

Neste capítulo, estaremos principalmente interessados no caso não limitado, isto é, quando  $R = \infty$ . Nesse contexto, conforme mostrado por de Oliveira, em [17], no caso dos de Sobolev  $X_R$ , também temos a seguinte imersão contínua:

$$X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_\theta^q, \quad \text{se } q \in [p, p^*] \text{ e } \theta \geq \alpha - p. \quad (3.5)$$

Além disso, as imersões em (3.5) são compactas sob as condições estritas  $\theta > \alpha - p$  e  $p < q < p^*$ . No caso de Trudinger-Moser, valem as imersões contínuas:

$$X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_\theta^q, \quad \text{se } q \in [p, \infty)$$

as quais são compactas quando  $q > p$ . Agora, lembraremos a seguinte desigualdade do tipo Trudinger-Moser na forma invariante por escala obtida em [18].

**Teorema 3.2** *Assuma que  $p \geq 2$ ,  $\alpha = p - 1$  e  $\theta \geq 0$ . Para todo  $\mu < \mu_{\alpha, \theta}$  existe uma constante positiva  $C(p, \mu, \theta) > 0$  tal que para todo  $u \in X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta)$ , com  $\|u'\|_{L_{\alpha}^p} \leq 1$  tem-se*

$$\int_0^{\infty} \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta} \leq C(p, \mu, \theta) \|u\|_{L_{\theta}^p}^p,$$

em que

$$\varphi_p(t) = e^t - \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{t^k}{k!} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \geq p-1}} \frac{t^j}{j!}, \quad t \geq 0, \quad (3.6)$$

com  $k_0 := \min\{j \in \mathbb{N}; j \geq p - 1\}$ . A constante  $\mu_{\alpha, \theta}$  é ótima no sentido de que o supremo é infinito quando  $\mu \geq \mu_{\alpha, \theta}$ .

Neste capítulo, de forma semelhante ao que foi feito no Capítulo 2, também estabeleceremos limites assintóticos superior e inferior para a desigualdade subcrítica de Trudinger-Moser. Em seguida, utilizaremos essa abordagem para mostrar a equivalência entre as desigualdades crítica e subcrítica de Trudinger-Moser aplicadas a espaços de Sobolev de dimensão fracionária. Além disso, mostraremos a existência de funções extremantes para ambas as desigualdade e, como consequência desse fato, explicitaremos alguns dos supremos críticos da desigualdade de Trudinger-Moser, considerando casos específicos. Este capítulo fundamenta-se no trabalho de Oliveira e do Ó [19], intitulado "Equivalence of critical and subcritical sharp Trudinger–Moser inequalities in fractional dimensions and extremal functions".

## 3.1 Resultados Preliminares

Nesta seção, apresentaremos algumas notações e resultados preliminares que serão fundamentais para o desenvolvimento deste capítulo. Abordaremos diversas relações e propriedades iniciais da desigualdade de Trudinger-Moser subcrítica. Apresentaremos também definições e lemas essenciais para os resultados subsequentes do Capítulo. Por fim, apresentaremos um resultado assintótico relacionado à desigualdade obtida no Teorema 3.2.

Note que, com base em (3.1), ao realizar a mudança de variável  $s = \tau r$ , temos que  $ds = \tau dr$ . Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(\tau r) d\lambda_\theta &= \omega_\theta \int_0^\infty f(\tau r) r^\theta dr \\
&= \omega_\theta \int_0^\infty f(s) \left(\frac{s}{\tau}\right)^\theta \frac{ds}{\tau} \\
&= \frac{1}{\tau^{\theta+1}} \left( \omega_\theta \int_0^\infty f(s) s^\theta ds \right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^\infty f(\tau r) d\lambda_\theta = \frac{1}{\tau^{\theta+1}} \left( \int_0^\infty f(s) d\lambda_\theta \right), \quad \tau > 0. \quad (3.7)$$

Agora, ao definirmos

$$u_\tau(r) = \zeta u(\tau r)$$

com  $\zeta, \tau > 0$  e  $u \in X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$ , temos que

$$u'_\tau(r) = \zeta \tau u(\tau r).$$

Assim, ao considerar o caso em que  $1 \leq p < \infty$  (adotado daqui em diante) e utilizando (3.7), segue que

$$\|u_\tau\|_{L_\theta^q}^q = \left( \int_0^\infty \zeta^q |u(\tau r)|^q d\lambda_\theta \right) = \zeta^q \int_0^\infty \frac{1}{\tau^{\theta+1}} |u(s)|^q d\lambda_\theta = \frac{\zeta^q}{\tau^{\theta+1}} \|u\|_{L_\theta^q}^q, \quad q \geq p \quad (3.8)$$

Além disso, ao aplicar novamente a mudança de variável  $s = \tau r$ , segue que

$$\begin{aligned}
\|u'_\tau\|_{L_\alpha^p}^p &= \int_0^\infty |u'_\tau(r)|^p d\lambda_\alpha \\
&= \omega_\theta \int_0^\infty \zeta^p \tau^p |u'(\tau r)|^p d\lambda_\alpha \\
&= \omega_\theta \int_0^\infty \zeta^p \tau^p |u'(\tau r)|^p r^\alpha dr \\
&= \omega_\theta \int_0^\infty \zeta^p \tau^p |u'(s)|^p \left(\frac{s}{\tau}\right)^\alpha \frac{ds}{\tau} \\
&= \frac{(\zeta \tau)^p}{\tau^{\alpha+1}} \omega_\theta \int_0^\infty |u'(s)|^p s^\alpha ds \\
&= \frac{(\zeta \tau)^p}{\tau^{\alpha+1}} \int_0^\infty |u'(s)|^p d\lambda_\alpha,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|u'_\tau\|_{L_\alpha^p}^p = \frac{(\zeta \tau)^p}{\tau^{\alpha+1}} \|u'\|_{L_\alpha^p}^p. \quad (3.9)$$

Ademais, considerando  $0 \leq \rho \leq 1$  e utilizando a expressão de  $\varphi_p(t)$  apresentada em (3.6), segue que

$$\varphi_p(\rho t) = e^{\rho t} - \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{(\rho t)^k}{k!} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \geq p-1}} \frac{(\rho t)^j}{j!} \leq \rho^{p-1} \varphi_p(t),$$

uma vez que  $\rho^j \leq \rho^{p-1}$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$  com  $j \geq p-1$ .

Agora, para  $\rho \geq 1$ , temos que

$$\varphi_p(\rho t) \geq \rho^{p-1} \varphi_p(t), \quad (3.10)$$

pois  $\rho^{p-1} \leq \rho^j$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$  tal que  $j \geq p-1$ .

A seguir, apresentaremos um Lema técnico que será utilizado de forma recorrente ao longo deste capítulo.

**Lema 3.1** *Para todo  $q \geq 1$  e  $\varepsilon > 0$ , temos que*

$$(x + y)^q \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{q-1}{q}} x^q + \left(1 - (1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{q}}\right)^{1-q} y^q, \quad x, y \geq 0.$$

**Demonstração:** De fato, para o caso em que  $x = 0$  ou  $y = 0$  é imediato, então considere  $x > 0$  e a função

$$x \mapsto x^q, \quad \text{com } q \geq 1,$$

a qual é convexa. Logo, para  $x, y > 0$ , e  $t \in [0, 1]$ , temos que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Em particular, tomando  $t = \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{q}}}$ , segue que

$$\begin{aligned} (x + y)^q &= \left( \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{q}}} \cdot (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{q}} x + \left(1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{q}}}\right) \left(1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{q}}}\right)^{-1} y \right)^q \\ &\leq \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{q}}} (1 + \varepsilon) x^q + \left(1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{q}}}\right) \left(1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{q}}}\right)^{-q} y^q \\ &= (1 + \varepsilon)^{\frac{q-1}{q}} x^q + \left(1 - (1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{q}}\right)^{1-q} y^q, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Suponhamos agora que a condição

$$\alpha + 1 = p$$

seja satisfeita. Neste caso, o próximo resultado assegura que o supremo subcrítico da desigualdade de Trudinger-Moser pode ser normalizado. Mais precisamente, o resultado está formalizado no Lema a seguir.

**Lema 3.2** *Assuma que  $p \geq 2$ ,  $\alpha = p - 1$  e  $\theta \geq 0$ . Então para qualquer  $0 \leq \mu \leq \mu_{\alpha, \theta}$  e  $u \in X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta) \setminus \{0\}$ , tem-se*

$$\begin{aligned} \text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) &:= \sup_{\|u'\|_{L_{\alpha}^p} \leq 1} \frac{1}{\|u\|_{L_{\theta}^p}^p} \int_0^{\infty} \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta} \\ &= \sup_{\|u'\|_{L_{\alpha}^p} = \|u\|_{L_{\theta}^p} = 1} \int_0^{\infty} \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta}. \end{aligned}$$

**Demonstração:** Primeiramente, observe que, como o conjunto

$$\left\{ u \in X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta); \|u'\|_{L_{\alpha}^p} = \|u\|_{L_{\theta}^p} = 1 \right\} \subseteq \left\{ u \in X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta); \|u'\|_{L_{\alpha}^p} \leq 1 \right\},$$

é suficiente mostrar que

$$\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) \leq \sup_{\|u'\|_{L_{\alpha}^p} = \|u\|_{L_{\theta}^p} = 1} \int_0^{\infty} \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta}.$$

Para cada  $u \in X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta) \setminus \{0\}$ , com  $\|u'\|_{L_{\alpha}^p} \leq 1$ , considere

$$v(r) = \frac{u(\tau r)}{\|u'\|_{L_{\alpha}^p}} \quad \text{com} \quad \tau = \left( \frac{\|u\|_{L_{\theta}^p}^p}{\|u'\|_{L_{\alpha}^p}^p} \right)^{\frac{1}{\theta+1}}.$$

Assim,

$$v'(r) = \frac{\tau u'(\tau r)}{\|u'\|_{L_{\alpha}^p}}.$$

E, portanto, dado que  $\alpha - p + 1 = 0$  e utilizando (3.8) e (3.9), concluímos que

$$\|v'\|_{L_{\alpha}^p} = \left( \frac{\left( \frac{1}{\|u'\|_{L_{\alpha}^p}^p} \cdot \tau \right)^p}{\tau^{\alpha+1}} \cdot \|u'\|_{L_{\alpha}^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{\|u'\|_{L_{\alpha}^p}^{p-p}}{\tau^{\alpha+1-p}} \right)^{\frac{1}{p}} = 1$$

e

$$\|v\|_{L_{\theta}^p} = \left( \frac{\left( \frac{1}{\|u'\|_{L_{\alpha}^p}^p} \right)^p}{\tau^{\theta+1}} \cdot \|u\|_{L_{\theta}^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{\|u\|_{L_{\theta}^p}^p}{\|u'\|_{L_{\alpha}^p}^p} \cdot \frac{\|u'\|_{L_{\alpha}^p}^p}{\|u\|_{L_{\theta}^p}^p} \right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Então de (3.7) e (3.10), segue que



$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |v|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta &= \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu \cdot \frac{|u(\tau r)|^{\frac{p}{p-1}}}{\|u'\|_{L_\alpha^p}^{\frac{p}{p-1}}} \right) d\lambda_\theta \\
&= \frac{1}{\tau^{\theta+1}} \int_0^\infty \varphi_p \left( \frac{1}{\|u'\|_{L_\alpha^p}^{\frac{p}{p-1}}} \cdot \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\
&\geq \frac{1}{\tau^{\theta+1}} \left( \frac{1}{\|u'\|_{L_\alpha^p}^{\frac{p}{p-1}}} \right)^{p-1} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\
&= \frac{\|u'\|_{L_\alpha^p}^p}{\|u\|_{L_\theta^p}^p} \frac{1}{\|u'\|_{L_\alpha^p}^p} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\
&= \frac{1}{\|u\|_{L_\theta^p}^p} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta.
\end{aligned}$$

Logo, dado  $u \in X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta) \setminus \{0\}$  com  $\|u'\|_{L_\alpha^p} \leq 1$ , conseguimos uma  $v \in X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta) \setminus \{0\}$  tal que vale a desigualdade acima, o que conclui a demonstração.  $\blacksquare$

O próximo resultado é o mais significativo desta seção, pois ele fornece o comportamento assintótico para a desigualdade apresentada no Teorema 3.2.

**Teorema 3.3** *Assuma que  $p \geq 2$ ,  $\alpha = p - 1$  e  $\theta \geq 0$ . Para qualquer  $0 \leq \mu \leq \mu_{\alpha, \theta}$ , e lembrando que*

$$\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) = \sup_{\|u'\|_{L_\alpha^p} \leq 1} \frac{1}{\|u\|_{L_\theta^p}^p} \int_0^\infty \varphi_p(\mu |u|^{\frac{p}{p-1}}) d\lambda_\theta.$$

*Então existem constantes positivas  $c(\alpha, \theta)$  e  $C(\alpha, \theta)$  tal que quando  $\mu$  está suficientemente próximo de  $\mu_{\alpha, \theta}$ ,*

$$\frac{c(\alpha, \theta)}{1 - \left( \frac{\mu}{\mu_{\alpha, \theta}} \right)^{p-1}} \leq \text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) \leq \frac{C(\alpha, \theta)}{1 - \left( \frac{\mu}{\mu_{\alpha, \theta}} \right)^{p-1}}.$$

*Além disso, a constante  $\mu_{\alpha, \theta}$  é ótima no sentido de que*

$$\text{TMSC}(\mu_{\alpha, \theta}, \alpha, \theta) = \infty.$$

**Demonstração:** Seja  $u \in X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$ , com  $\|u'\|_{L_\alpha^p} \leq 1$ . A partir da desigualdade de Pólya-Szegő obtida em [1, 5], podemos assumir que  $u$  é uma função não-crescente. Além disso, pelo Lemma 3.2, é suficiente analisar o caso que  $\|u\|_{L_\theta^p} = 1$ . Inicialmente, provaremos que

$$\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) \leq \frac{C(\alpha, \theta)}{1 - \left( \frac{\mu}{\mu_{\alpha, \theta}} \right)^{p-1}}. \quad (3.11)$$

Denote

$$A_u = \left\{ r > 0; |u(r)|^p > 1 - \left( \frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{p-1} \right\}.$$

Observe que para todo  $|t| \leq 1$ , temos que

$$\varphi_p \left( \mu |t|^{\frac{p}{p-1}} \right) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \geq p-1}} \frac{\left( \mu |t|^{\frac{p}{p-1}} \right)^j}{j!} \leq \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \geq p-1}} |t|^p \cdot \frac{\mu^j}{j!} \leq |t|^p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu^j}{j!} = e^\mu |t|^p. \quad (3.12)$$

Assim, se  $A_u = \emptyset$  e, conseqüentemente,  $u \leq 1$  em  $(0, \infty)$ , então a desigualdade (3.12) implica que

$$\int_0^\infty \varphi_p(\mu |u|^{\frac{p}{p-1}}) d\lambda_\theta \leq e^u \int_0^\infty |u|^p d\lambda_\theta = e^\mu \leq e^{\mu_{\alpha,\theta}} \leq \frac{e^{\mu_{\alpha,\theta}}}{1 - \left( \frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{p-1}}, \quad (3.13)$$

pois  $\|u\|_{L_\theta^p} = 1$  e  $\mu \leq \mu_{\alpha,\theta}$ . Logo, podemos assumir que  $A_u \neq \emptyset$ . Dessa forma, se existe  $r_0 > 0$  tal que  $r_0 \in A_u$ , então pela hipótese

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0$$

e, pelo Teorema do Valor Intermediário, segue que existe  $R_u > 0$  tal que  $A_u = (0, R_u)$ , pois temos que  $u$  é uma função não-crescente. Analogamente, como (3.13), temos que se  $r \in \mathbb{R} \setminus A_u$ , então

$$|u(r)|^p \leq 1 - \left( \frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{p-1} < 1.$$

Portanto, usando (3.12), temos que

$$\begin{aligned} \int_{R_u}^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta &\leq \int_{\{u \leq 1\}} \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &\leq e^\mu \int_{\{u \leq 1\}} |u|^p d\lambda_\theta \\ &\leq e^\mu \\ &\leq e^{\mu_{\alpha,\theta}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{R_u}^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \leq \frac{e^{\mu_{\alpha,\theta}}}{1 - \left( \frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{p-1}}. \quad (3.14)$$

Agora, observe que se  $r \in A_u = (0, R_u)$ , então

$$|u(r)|^p > 1 - \left( \frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{p-1}$$

e, portanto

$$\frac{|u(r)|^p}{1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right)^{p-1}} > 1.$$

Deste modo, temos

$$|B_{R_u}|_\theta = \int_0^{R_u} 1 \cdot d\lambda_\theta \leq \frac{1}{1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right)^{p-1}} \int_0^{R_u} |u|^p d\lambda_\theta \leq \frac{1}{1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right)^{p-1}}, \quad (3.15)$$

em que usamos mais uma vez que  $\|u\|_{L_\theta^p} = 1$ . Agora, para  $r \in (0, R_u)$ , considere

$$v(r) = u(r) - \left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, claramente  $v \in X_{R_u}^{1,p}(\alpha, \theta)$ , pois como  $u \in X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$ , com  $\|u'\|_{L_\alpha^p} \leq 1$ , segue que  $u$  é localmente absolutamente contínua em  $(0, \infty)$  e tal que  $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0$ ,  $u \in L_\theta^p$  e  $u' \in L_\alpha^p$ , segue que  $v$  também vai satisfazer essas propriedades para  $r \rightarrow R_u$ . Além disso, como  $v'(r) = u'(r)$ , obtemos que

$$\|v'\|_{L_\alpha^p(0, R_u)} \leq \|u'\|_{L_\alpha^p} \leq 1.$$

Mais ainda, considerando

$$\varepsilon = \left(\frac{\mu_{\alpha,\theta}}{\mu}\right)^p - 1 \text{ e } q = \frac{p}{p-1}$$

no Lema 3.1, temos que

$$\begin{aligned} |u|^{\frac{p}{p-1}} &= \left| v + \left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \right|^q \\ &\leq (1 + \varepsilon)^{\frac{q-1}{q}} |v|^q + \left(1 - (1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{q}}\right)^{1-q} \left[ \left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \right]^q \\ &= \left(\frac{\mu_{\alpha,\theta}}{\mu}\right) |v|^{\frac{p}{p-1}} + \left(1 - \left(\left(\frac{\mu_{\alpha,\theta}}{\mu}\right)^p\right)^{-\frac{(p-1)}{p}}\right)^{-\frac{1}{p-1}} \left[ \left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{p}{p-1}} \\ &= \frac{\mu_{\alpha,\theta}}{\mu} |v|^{\frac{p}{p-1}} + 1. \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade de Trundiger-Moser ( veja 3.4), implica que

$$\begin{aligned}
\int_0^{R_u} \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta &\leq \int_0^{R_u} e^{\mu |u|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta \\
&\leq \int_0^{R_u} e^{\mu \left( \frac{\mu_{\alpha,\theta}}{\mu} |v|^{\frac{p}{p-1}} + 1 \right)} d\lambda_\theta \\
&= e^\mu \int_0^{R_u} e^{\mu_{\alpha,\theta} |v|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta \\
&\leq e^\mu C(\alpha, \theta) |B(0, R)|_\theta.
\end{aligned}$$

Logo, por (3.15), concluimos que

$$\int_0^{R_u} \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \leq \frac{e^{\mu_{\alpha,\theta}} C(\alpha, \theta)}{1 - \left( \frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{p-1}} \quad (3.16)$$

e, consequentemente, pelas equações (3.14) e (3.16), temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta &= \int_0^{R_u} \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta + \int_{R_u}^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\
&\leq \frac{C(\alpha, \theta)}{1 - \left( \frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{p-1}},
\end{aligned}$$

para qualquer  $\mu < \mu_{\alpha,\theta}$  não necessariamente próximo de  $\mu_{\alpha,\theta}$ , o que prova (3.11). A seguir provaremos a desigualdade oposta, isto é,

$$\text{TMS}(\mu, \alpha, \theta) \geq \frac{c(\alpha, \theta)}{1 - \left( \frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{p-1}}.$$

Para isso, considere a sequência

$$u_n(r) = \frac{1}{\omega_\alpha^{\frac{1}{p}}} \begin{cases} \left( \frac{n}{\theta+1} \right)^{\frac{p-1}{p}}, & \text{se } 0 \leq r \leq e^{-\frac{n}{\theta+1}}, \\ \left( \frac{\theta+1}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \ln \left( \frac{1}{r} \right), & \text{se } e^{-\frac{n}{\theta+1}} < r < 1, \\ 0, & \text{se } r \geq 1. \end{cases} \quad (3.17)$$

Assim,

$$u'_n(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r \leq e^{-\frac{n}{\theta+1}}, \\ \left( \frac{\theta+1}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\omega_\alpha^{\frac{1}{p}}} \left( -\frac{1}{r} \right), & \text{se } e^{-\frac{n}{\theta+1}} < r < 1, \\ 0, & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$$

e, dado que  $\alpha = p - 1$ , segue que

$$\begin{aligned}
\|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p &= \int_0^\infty |u'_n(r)|^p d\lambda_\alpha \\
&= \int_{e^{-\frac{n}{\theta+1}}}^1 \left( \left( \frac{\theta+1}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \left( \frac{1}{\omega_\alpha^{\frac{1}{p}}} \right)^p \left| \left( -\frac{1}{r} \right) \right|^p d\lambda_\alpha \\
&= \left( \frac{\theta+1}{n} \right) \frac{1}{\omega_\alpha} \int_{e^{-\frac{n}{\theta+1}}}^1 \left( \frac{1}{r} \right)^p r^\alpha dr \\
&= \left( \frac{\theta+1}{n} \right) \int_{e^{-\frac{n}{\theta+1}}}^1 r^{\alpha-p} dr \\
&= \left( \frac{\theta+1}{n} \right) \int_{e^{-\frac{n}{\theta+1}}}^1 \frac{1}{r} dr \\
&= \left( \frac{\theta+1}{n} \right) \left( \ln(r) \Big|_{e^{-\frac{n}{\theta+1}}}^1 \right) \\
&= \left( \frac{\theta+1}{n} \right) \left( 0 - \left( -\frac{n}{\theta+1} \right) \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p = 1 \quad (3.18)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{L_\theta^p}^p &= \int_0^\infty |u_n(r)|^p d\lambda_\theta \\
&= \underbrace{\int_0^{e^{-\frac{n}{\theta+1}}} \frac{1}{\omega_\alpha} \left( \frac{n}{\theta+1} \right)^{p-1} d\lambda_\theta}_{I_1} + \underbrace{\int_{e^{-\frac{n}{\theta+1}}}^1 \frac{1}{\omega_\alpha} \left( \frac{\theta+1}{n} \right) \ln \left( \frac{1}{r} \right)^p d\lambda_\theta}_{I_2}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, ao calcular separadamente estas integrais, obtemos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\omega_\alpha} \left( \frac{n}{\theta+1} \right)^{p-1} \int_0^{e^{-\frac{n}{\theta+1}}} d\lambda_\theta \\
&= \frac{1}{\omega_\alpha} \left( \frac{n}{\theta+1} \right)^{p-1} \omega_\alpha \int_0^{e^{-\frac{n}{\theta+1}}} r^\theta dr \\
&= \left( \frac{n}{\theta+1} \right)^{p-1} \frac{\left( e^{-\frac{n}{\theta+1}} \right)^{\theta+1}}{\theta+1} \\
&= n^{p-1} \left( \frac{1}{\theta+1} \right)^p e^{-n}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$I_1 = \frac{c(\alpha, \theta)}{n} [n^p e^{-n}] \quad (3.19)$$

Além disso, utilizando a mudança de variável

$$s = \ln\left(\frac{1}{r}\right)(\theta + 1) \quad \Rightarrow \quad e^{-s} = r^{\theta+1} \quad \Rightarrow \quad -e^s ds = (\theta + 1)r^\theta dr ,$$

segue que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{e^{-\frac{n}{\theta+1}}}^1 \frac{1}{\omega_\alpha} \left(\frac{\theta+1}{n}\right) \ln\left(\frac{1}{r}\right)^p d\lambda_\theta \\ &= \left(\frac{\theta+1}{n}\right) \frac{1}{\omega_\alpha} \int_{e^{-\frac{n}{\theta+1}}}^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right)^p r^\theta dr \\ &= \left(\frac{\theta+1}{n}\right) \int_n^0 \left(\frac{s}{\theta+1}\right)^p \left(\frac{-e^{-s}}{\theta+1}\right) ds \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(\theta+1)^p} \int_0^n s^p e^{-s} ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$I_2 = \frac{c(\alpha, \theta)}{n} \int_0^n s^p e^{-s} ds. \quad (3.20)$$

Desse modo, combinando (3.19) e (3.20), obtemos que

$$\|u_n\|_{L_\theta^p}^p = \frac{c}{n} \left[ n^p e^{-n} + \int_0^n s^p e^{-s} ds \right] \quad (3.21)$$

em que  $c = c(\alpha, \theta) = \left(\frac{1}{\theta+1}\right)^p = \left(\frac{1}{\theta+1}\right)^{\alpha+1}$ . Desse modo, como

$$\int_0^\infty s^p e^{-s} ds = \Gamma(p+1) = p!,$$

existem  $c_1 = c_1(\alpha, \theta) > 0$  e  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|u_n\|_{L_\theta^p}^p \leq \frac{c_1}{n}, \quad \forall n \geq n_1. \quad (3.22)$$

Por outro lado, como  $\mu_{\alpha, \theta} = (\theta+1)\omega_\alpha^{\frac{1}{p-1}}$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi_p\left(\mu|u_n|^{\frac{p}{p-1}}\right) d\lambda_\theta &\geq \int_0^{e^{-\frac{n}{\theta+1}}} \varphi_p\left(\mu\left(\frac{1}{\omega_\alpha^{\frac{1}{p-1}}}\right) \cdot \left(\frac{n}{\theta+1}\right)\right) d\lambda_\theta \\ &\geq \int_0^{e^{-\frac{n}{\theta+1}}} \varphi_p\left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha, \theta}} \cdot n\right) d\lambda_\theta \\ &= \omega_\theta \int_0^{e^{-\frac{n}{\theta+1}}} \varphi_p\left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha, \theta}} \cdot n\right) r^\theta d\lambda_\theta \\ &= \omega_\theta \varphi_p\left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha, \theta}}\right) \frac{e^{-n}}{\theta+1}. \end{aligned}$$

Logo, pela definição de  $\varphi$ , concluímos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta &\geq \omega_\theta \cdot \frac{e^{-n}}{\theta+1} \left[ e^{\left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\beta}}\right)^n} - \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right)^k n^k}{k!} \right] \\ &\geq \frac{\omega_\theta}{\theta+1} \left[ e^{\left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\beta}}-1\right)^n} - \left( \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{n^k}{k!} \right) e^{-n} \right]. \end{aligned}$$

Assim, para todo  $n \geq n_1$ , temos

$$\begin{aligned} \text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) &\geq \frac{1}{\|u_n\|_{L_\theta^p}^p} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &\geq \frac{n}{c_1(\alpha, \theta)} \left[ \frac{\omega_\theta}{\theta+1} \left( e^{\left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}-1\right)^n} - \left( \sum_{j=0}^{k_0-1} \frac{n^j}{j!} \right) e^{-n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{c_1(\alpha, \theta)} \cdot \frac{\omega_\theta}{\theta+1} \left[ ne^{\left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}-1\right)^n} - \left( \sum_{j=0}^{k_0-1} \frac{n^j}{j!} \right) ne^{-n} \right] \\ &= \frac{c_2(\alpha, \theta)}{1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right)^{p-1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right)^{p-1}}{1} \left[ ne^{\left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}-1\right)^n} - \left( \sum_{j=0}^{k_0-1} \frac{n^j}{j!} \right) ne^{-n} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

para  $c_2(\alpha, \theta) = \frac{\omega_\theta}{\theta+1} \cdot \frac{1}{c_1(\alpha, \theta)} > 0$ . Assim, como

$$\left( 1 - \frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{p-1} \left( \sum_{j=0}^{k_0-1} \frac{n^j}{j!} \right) ne^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

segue da definição de limite que existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_2 \geq n_1$  e

$$\left( 1 - \frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{p-1} \left( \sum_{j=0}^{k_0-1} \frac{n^j}{j!} \right) ne^{-n} \leq \frac{1}{e^5}, \quad 0 \leq \mu < \mu_{\alpha,\theta}.$$

Sendo assim, para todo  $n \geq n_2$ , segue que

$$\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) \geq \frac{c_2(\alpha, \theta)}{1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right)^{p-1}} \left[ \left( 1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right)^{p-1} \right) ne^{\left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}-1\right)^n} - e^{-5} \right].$$

Logo, para  $\mu$  suficientemente próximo de  $\mu_{\alpha,\theta}$  e tal que

$$\left( 1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right) \right)^{-1} \geq n_2,$$

e escolhendo  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left( 1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right) \right)^{-1} \leq n \leq 4 \left( 1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}\right) \right)^{-1},$$

segue que

$$\begin{aligned} \text{TMS}(\mu, \alpha, \theta) &\geq \frac{c_2(\alpha, \theta)}{1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha, \theta}}\right)^{p-1}} \left[ \frac{1}{n} \cdot n e^{\left(\frac{-4}{n}\right)n} - e^{-5} \right] \\ &= \frac{c_2(\alpha, \theta)}{1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha, \theta}}\right)^{p-1}} [e^{-4} - e^{-5}]. \end{aligned}$$

Por fim, se  $\mu = \mu_{\alpha, \theta}$ , segue que  $\text{TMS}(\mu_{\alpha, \theta}, \alpha, \theta)$  é infinito, pois de (3.23), temos que

$$\begin{aligned} \text{TMS}(\mu_{\alpha, \theta}, \alpha, \theta) &\geq c_2(\alpha, \theta) \left[ n e^{\left(\frac{\mu_{\alpha, \theta}}{\mu_{\alpha, \theta}} - 1\right)n} - \left( \sum_{j=0}^{k_0-1} \frac{n^j}{j!} \right) n e^{-n} \right] \\ &= c_2(\alpha, \theta) \left[ n - \left( \sum_{j=0}^{k_0-1} \frac{n^j}{j!} \right) n e^{-n} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos a demonstração. ■

## 3.2 Equivalência das desigualdades crítica e subcrítica de Trudinger-Moser

Para os Espaços de Sobolev clássicos, o supremo crítico

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) := \sup_{\|u\| \leq 1} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta,$$

foi inicialmente estudado por Ruf em [48], bem como por Y. Li e B. Ruf em [36]. Nas últimas décadas, o interesse por esse tipo de desigualdade significativamente, gerando uma vasta literatura sobre o tema, conforme evidenciado em [9, 25, 26, 27, 30, 32], e nas referências citadas nesses trabalhos.

É importante destacar que a limitação de  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  foi previamente analisada por Abreu e Fernandes em [1]. Nesta seção, apresentaremos uma nova prova para essa limitação, proposta por de Oliveira e do Ó em [19], onde, em particular, é estabelecida uma relação entre  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  e  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$ .

Dessa forma, o objetivo desta seção é investigar o expoente crítico  $\mu = \mu_{\alpha, \theta}$  e demonstrar a equivalência crítica no Teorema 3.4. Ressaltamos que, no argumento desenvolvido a seguir, assumimos que  $\text{TMC}(\mu_{\alpha, \theta}, \alpha, \theta)$  é finito.

O próximo resultado aborda a desigualdade de Trudinger-Moser em seu caso subcrítico. Este resultado estabelece uma condição necessária para que  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \beta)$



seja finito. Além disso, apresentaremos um limite superior para  $\text{TMSC}(\mu, \alpha, \beta)$ , demonstrando que o caso subcrítico é controlado pelo crítico.

**Lema 3.3** *Para qualquer  $0 < \sigma \leq \mu_{\alpha, \theta}$  e  $0 < \mu < \sigma$ , temos que*

$$\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) \leq \left( \frac{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}}{1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta).$$

*Em particular, se  $\text{TMC}(\mu_{\alpha, \theta}, \alpha, \theta)$  é finito, então  $\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta)$  é finito.*

**Demonstração:** Seja  $u \in X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta)$ , com  $\|u'\|_{L_{\alpha}^p} = 1$  e  $\|u\|_{L_{\theta}^p} = 1$ . Considere

$$u_t(r) = \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{\frac{p-1}{p}} u(tr), \quad \text{com } t = \left(\frac{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}}{1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{\theta+1}}.$$

Utilizando que  $\alpha + 1 = p$  e  $\|u'\|_{L_{\alpha}^p}^p = 1$ , juntamente com as equações (3.8) e (3.9), obtemos que

$$\|u'_t\|_{L_{\alpha}^p}^p = \frac{\left(\left[\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right] t\right)^p}{t^{\alpha+1}} \cdot \|u'\|_{L_{\alpha}^p}^p = \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}$$

e

$$\|u_t\|_{L_{\theta}^p}^p = \frac{\left(\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)^p}{t^{\theta+1}} \cdot \|u\|_{L_{\theta}^p}^p = \frac{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}}{1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}}\right)} = 1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}.$$

Assim,

$$\|u'_t\|_{L_{\alpha}^p}^p + \|u_t\|_{L_{\theta}^p}^p = 1,$$

e portanto,

$$\|u_t\| = 1.$$

Além disso, utilizando a mudança de variável  $r = tx$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varphi_p\left(\mu|u(r)|^{\frac{p}{p-1}}\right) d\lambda_{\theta} &= \omega_{\theta} \int_0^{\infty} \varphi_p\left(\mu|u(r)|^{\frac{p}{p-1}}\right) r^{\theta} dr \\ &= \omega_{\theta} \int_0^{\infty} \varphi_p\left(\mu|u(tx)|^{\frac{p}{p-1}}\right) (tx)^{\theta} \cdot t dx \\ &= t^{\theta+1} \int_0^{\infty} \varphi_p\left(\mu|u(tx)|^{\frac{p}{p-1}}\right) d\lambda_{\theta} \\ &= t^{\theta+1} \int_0^{\infty} \varphi_p\left(\mu\left(\frac{\sigma}{\mu}|u_t(x)|^{\frac{p}{p-1}}\right)\right) d\lambda_{\theta} \\ &= t^{\theta+1} \int_0^{\infty} \varphi_p\left(\sigma|u_t(x)|^{\frac{p}{p-1}}\right) d\lambda_{\theta} \\ &\leq t^{\theta+1} \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \leq \left( \frac{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}}{1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta).$$

Assim, dado que  $u \in X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$ , com  $\|u'\|_{L_\alpha^p} = 1$  e  $\|u\|_{L_\theta^p} = 1$  é arbitrário, o resultado segue do Lema 3.2. ■

**Teorema 3.4** *Assuma  $p \geq 2$ ,  $\alpha = p - 1$  e  $\theta \geq 0$ . Para qualquer  $0 \leq \sigma \leq \mu_{\alpha, \theta}$ , relembre-se que*

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) = \sup_{\|u\| \leq 1} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta.$$

*Então,  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  é finito. A constante  $\mu_{\alpha, \theta}$  é ótima. Além disso, temos a seguinte identidade, para todo  $\sigma \leq \mu_{\alpha, \theta}$ ,*

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) = \sup_{\mu \in (0, \sigma)} \left( \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta). \quad (3.24)$$

**Demonstração:** Seja  $u \in X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$  tal que

$$0 < \|u'\|_{L_\alpha^p}^p + \|u\|_{L_\theta^p}^p \leq 1.$$

Assuma que

$$\|u'\|_{L_\alpha^p} = \vartheta \in (0, 1) \text{ e } \|u\|_{L_\theta^p}^p \leq 1 - \vartheta^p.$$

Dividiremos a análise inicialmente em dois casos. No primeiro, suponhamos que  $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$ .

Considere

$$u_t(r) = \frac{u(tr)}{\vartheta}, \quad \text{com} \quad t = \left( \frac{1 - \vartheta^p}{\vartheta^p} \right)^{\frac{1}{\vartheta+1}} > 0. \quad (3.25)$$

Por (3.8) e (3.9), temos que

$$\|u'_t\|_{L_\alpha^p}^p = \frac{\left(\frac{1}{\vartheta} \cdot t\right)^p}{t^{\alpha+1}} \cdot \|u'\|_{L_\alpha^p}^p = \frac{\|u'\|_{L_\alpha^p}^p}{\vartheta^p} = 1$$

e

$$\|u_t\|_{L_\theta^p}^p = \frac{\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^p}{t^{\theta+1}} \cdot \|u\|_{L_\theta^p}^p \leq \frac{1 - \vartheta^p}{\vartheta^p \cdot t^{\theta+1}} = \frac{1 - \vartheta^p}{\vartheta^p \left(\frac{1 - \vartheta^p}{\vartheta^p}\right)} = 1.$$

Assim, procedendo como no Lema anterior, para qualquer  $\sigma \leq \mu_{\alpha, \theta}$ , o Teorema 3.3 e (3.25), implicam que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta &= t^{\theta+1} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u(tr)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\
&= t^{\theta+1} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma \vartheta^{\frac{p}{p-1}} |u_t(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\
&\leq t^{\theta+1} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu_{\alpha,\theta} \vartheta^{\frac{p}{p-1}} |u_t(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\
&\leq t^{\theta+1} \text{TMSC} \left( \mu_{\alpha,\theta} \vartheta^{\frac{p}{p-1}}, \alpha, \theta \right) \\
&\leq \left( \frac{1 - \vartheta^p}{\vartheta^p} \right) \frac{C(\alpha, \theta)}{1 - \left( \frac{\vartheta^{\frac{p}{p-1}} \cdot \mu_{\alpha,\theta}}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{p-1}} \\
&= \frac{C(\alpha, \theta)}{\vartheta^p} \\
&\leq 2^p C(\alpha, \theta).
\end{aligned}$$

Na última desigualdade utilizamos o fato de que  $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$ .

Agora, se  $0 < \vartheta \leq \frac{1}{2}$ , considere

$$w(r) = 2u \left( \frac{r}{\vartheta} \right).$$

Logo,

$$w'(r) = \frac{2}{\vartheta} u' \left( \frac{r}{\vartheta} \right).$$

Assim, utilizando a mudança de variável  $\frac{r}{\vartheta} = x$  e utilizando o fato de que  $\alpha + 1 = p$ , temos

$$\begin{aligned}
\|w'\|_{L_\alpha^p}^p &= \int_0^\infty |w'(r)|^p d\lambda_\alpha \\
&= \int_0^\infty \left( \frac{2}{\vartheta} \right)^p \left| u' \left( \frac{r}{\vartheta} \right) \right|^p d\lambda_\alpha \\
&= \left( \frac{2}{\vartheta} \right)^p \omega_\alpha \int_0^\infty \left| u' \left( \frac{r}{\vartheta} \right) \right|^p r^\alpha dr \\
&= \left( \frac{2}{\vartheta} \right)^p \omega_\alpha \int_0^\infty |u'(x)|^p (\vartheta x)^\alpha \vartheta dx \\
&= \left( \frac{2}{\vartheta} \right)^p \vartheta^{\alpha+1} \omega_\alpha \int_0^\infty |u'(x)|^p x^\alpha dx \\
&= \left( \frac{2}{\vartheta} \right)^p \vartheta^{\alpha+1} \int_0^\infty |u'(x)|^p d\lambda_\alpha \\
&= 2^p \|u'\|_{L_\alpha^p}^p \\
&= 2^p \vartheta^p
\end{aligned}$$

$$\leq 1.$$

Na última desigualdade utilizamos o fato de que  $0 < \vartheta \leq \frac{1}{2}$ . Além disso, fazendo novamente a mudança de variável  $\frac{r}{\vartheta} = x$ , segue que

$$\begin{aligned} \|w\|_{L_\theta^p}^p &= \int_0^\infty |w(r)|^p d\lambda_\theta \\ &= \int_0^\infty \left| 2u\left(\frac{r}{\vartheta}\right) \right|^p d\lambda_\theta \\ &= 2^p \int_0^\infty \left| u\left(\frac{r}{\vartheta}\right) \right|^p d\lambda_\theta \\ &= 2^p \omega_\theta \int_0^\infty \left| u\left(\frac{r}{\vartheta}\right) \right|^p r^\theta dr \\ &= 2^p \omega_\theta \int_0^\infty |u(x)|^p (\vartheta x)^\theta v dx \\ &= 2^p \vartheta^{\theta+1} \int_0^\infty |u|^p d\lambda_\theta \\ &= 2^p \vartheta^{\theta+1} \|u\|_{L_\theta^p}^p \\ &\leq 2^p \vartheta^{\theta+1} (1 - \vartheta^p) \\ &\leq 2^p \vartheta^{\theta+1}. \end{aligned}$$

Consequentemente, pelo Teorema 3.3, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta &= \omega_\theta \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) r^\theta dr \\ &= \omega_\theta \cdot \frac{1}{\vartheta^{\theta+1}} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma \left| u\left(\frac{x}{\vartheta}\right) \right|^{\frac{p}{p-1}} \right) x^\theta dx \\ &= \frac{1}{\vartheta^{\theta+1}} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma \left| u\left(\frac{x}{\vartheta}\right) \right|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &= \frac{1}{\vartheta^{\theta+1}} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma \left| \frac{w(x)}{2} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &\leq \frac{1}{\vartheta^{\theta+1}} \int_0^\infty \varphi_p \left( 2^{\frac{-p}{p-1}} \mu_{\alpha,\theta} |w(x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &\leq \frac{1}{\vartheta^{\theta+1}} \|w\|_{L_\theta^p}^p \cdot \text{TMSC} \left( 2^{\frac{-p}{p-1}} \mu_{\alpha,\theta}, \alpha, \theta \right) \\ &\leq \frac{1}{\vartheta^{\theta+1}} (2^p \vartheta^{\theta+1}) \cdot \text{TMSC} \left( 2^{\frac{-p}{p-1}} \mu_{\alpha,\theta}, \alpha, \theta \right) \\ &\leq 2^p \cdot \frac{C(\alpha, \theta)}{1 - \left( \frac{2^{\frac{-p}{p-1}} \mu_{\alpha,\theta}}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{p-1}} \\ &= C(\alpha, \theta) \left( \frac{2^p}{1 - 2^{-p}} \right). \end{aligned}$$

Assim, como  $u \in X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$  é tal que  $\|u\| \leq 1$  é arbitrário, segue que, para todo  $\sigma \leq \mu_{\alpha, \theta}$  tem-se  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) < \infty$ . A seguir, mostraremos que a constante  $\mu_{\alpha, \theta}$  é ótima. Para demonstrar isso, utilizaremos novamente a seguinte sequência dada (3.17), a saber

$$u_n(r) = \frac{1}{\omega_\alpha^{\frac{1}{p}}} \begin{cases} \left(\frac{n}{\theta+1}\right)^{\frac{p-1}{p}}, & \text{se } 0 \leq r \leq e^{-\frac{n}{\theta+1}}, \\ \left(\frac{\theta+1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \ln\left(\frac{1}{r}\right), & \text{se } e^{-\frac{n}{\theta+1}} < r < 1, \\ 0, & \text{se } r \geq 1. \end{cases}$$

Como visto em (3.18), temos que

$$\|u'_n\|_{L_\theta^p}^p = 1$$

e conforme (3.21) e (3.22), observamos que

$$\|u_n\|_{L_\theta^p}^p = \frac{c}{n} \left[ n^p e^{-n} + \int_0^n s^p e^{-s} ds \right] = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Agora para  $\tau_n \in (0, 1)$  tal que

$$\tau_n^p \left(1 + \|u_n\|_{L_\theta^p}^p\right) = 1, \quad \text{com } \tau_n = 1 - O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (3.26)$$

Assim, considerando

$$w_n(r) = \tau_n u_n(r),$$

segue que

$$w'_n(r) = \tau_n u'_n(r).$$

Então, utilizando o fato de que  $\|u_n\|_{L_\alpha^p}^p = 1$  e (3.26), obtemos que

$$\|w'_n\|_{L_\alpha^p}^p + \|w_n\|_{L_\theta^p}^p = \tau_n^p \|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p + \tau_n^p \|u_n\|_{L_\theta^p}^p = \tau_n^p + \tau_n^p \|u_n\|_{L_\theta^p}^p = 1.$$

Além disso, para qualquer  $\sigma > \mu_{\alpha, \theta}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi_p\left(\sigma |w_n(r)|^{\frac{p}{p-1}}\right) d\lambda_\theta &\geq \int_0^{e^{-\frac{n}{\theta+1}}} \varphi_p\left(\sigma \left|\tau_n \left(\frac{1}{\omega_\alpha^{\frac{1}{p}}}\right) u_n(r)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right) d\lambda_\theta \\ &= \int_0^{e^{-\frac{n}{\theta+1}}} \varphi_p\left(\sigma \tau_n^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{\omega_\alpha^{\frac{1}{p-1}}}\right) \left(\frac{n}{\theta+1}\right)\right) d\lambda_\theta. \end{aligned}$$

Mas, como  $\mu_{\alpha,\theta} = (\theta + 1)\omega_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}$  e  $\alpha = p - 1$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |w_n(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta &= \int_0^{e^{\frac{-n}{\theta+1}}} \varphi_p \left( \frac{\sigma \tau_n^{\frac{p}{p-1}} n}{\mu_{\alpha,\theta}} \right) d\lambda_\theta \\ &= \int_0^{e^{\frac{-n}{\theta+1}}} \left[ e^{\left( \frac{n\sigma}{\mu_{\alpha,\theta}} \right) \tau_n^{\frac{p}{p-1}}} - \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{\left( \frac{\sigma \tau_n^{\frac{p}{p-1}} n}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^k}{k!} \right] d\lambda_\theta. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Logo, calculando separadamente essas integrais, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{e^{\frac{-n}{\theta+1}}} e^{\left( \frac{n\sigma}{\mu_{\alpha,\theta}} \right) \tau_n^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta &= e^{\left( \frac{n\sigma}{\mu_{\alpha,\theta}} \right) \tau_n^{\frac{p}{p-1}}} \omega_\theta \int_0^{e^{\frac{-n}{\theta+1}}} r^\theta d\lambda_\theta \\ &= e^{\left( \frac{n\sigma}{\mu_{\alpha,\theta}} \right) \tau_n^{\frac{p}{p-1}}} \left( \frac{\omega_\theta e^{-n}}{\theta + 1} \right) \\ &= \frac{\omega_\theta}{\theta + 1} \left[ e^{n \left( \left( \frac{\sigma}{\mu_{\alpha,\theta}} \right) \tau_n^{\frac{p}{p-1}} - 1 \right)} \right] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned} \quad (3.28)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^{e^{\frac{-n}{\theta+1}}} \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{\left( \frac{\sigma \tau_n^{\frac{p}{p-1}} n}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^k}{k!} d\lambda_\theta &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{\left( \frac{\sigma \tau_n^{\frac{p}{p-1}} n}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^k}{k!} \int_0^{e^{\frac{-n}{\theta+1}}} 1 d\lambda_\theta \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{\left( \frac{\sigma \tau_n^{\frac{p}{p-1}} n}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^k}{k!} \left( \frac{\omega_\theta}{e^n (\theta + 1)} \right). \end{aligned}$$

No entanto, para todo  $k \in \{0, \dots, k_0 - 1\}$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\omega_\theta \cdot n^k \left( \frac{\sigma}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^k \tau_n^{\frac{kp}{p-1}}}{(\theta + 1) \cdot e^n \cdot k!} &\leq C \cdot \frac{\omega_\theta \cdot n^{k_0-1} \left( \frac{\sigma}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^{k_0-1} \tau_n^{\frac{(k_0-1)p}{p-1}}}{(\theta + 1) \cdot e^n} \\ &= \tilde{C} \cdot \frac{n^{k_0-1} \tau_n^{\frac{(k_0-1)p}{p-1}}}{e^n}, \end{aligned}$$

em que  $C > 0$  é uma constante positiva tal que  $\tau_n^{\frac{kp}{p-1}} \leq C \cdot \tau_n^{\frac{(k_0-1)p}{p-1}}$  para todo  $k \in \{0, \dots, k_0 - 1\}$ . Dessa forma,

$$\sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{\left( \frac{\sigma \tau_n^{\frac{p}{p-1}} n}{\mu_{\alpha,\theta}} \right)^k}{k!} \left( \frac{\omega_\theta}{e^n (\theta + 1)} \right) = O \left( \frac{n^{k_0-1} \tau_n^{\frac{(k_0-1)p}{p-1}}}{e^n} \right) \frac{\omega_\theta}{\theta + 1}$$

e, portanto,

$$\int_0^{e^{\frac{-n}{\theta+1}}} \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{\left(\frac{\sigma \tau_n^{\frac{p}{p-1}} n}{\mu_{\alpha, \theta}}\right)^k}{k!} d\lambda_{\theta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.29)$$

Assim, aplicando (3.29) e (3.28) em (3.27), concluimos que

$$\int_0^{\infty} \varphi_p \left( \sigma |w_n(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Agora mostraremos que

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) = \sup_{\mu \in (0, \sigma)} \left( \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta). \quad (3.30)$$

Pelo Lema 3.3, temos que

$$\sup_{\mu \in (0, \sigma)} \left( \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) \leq \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta). \quad (3.31)$$

Para obter a desigualdade contrária, seja  $(u_n)$  uma sequência maximizante do supremo  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$ , isto é,  $(u_n)$  é uma sequência satisfazendo

- $u_n \in X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta)$ ;
- $0 < \|u'_n\|_{L_{\alpha}^p}^p + \|u_n\|_{L_{\theta}^p}^p \leq 1$ ,

e tal que

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varphi_p \left( \sigma |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta}.$$

Desse modo, considerando

$$u_{\tau_n}(r) = \frac{u_n(\tau_n r)}{\|u'_n\|_{L_{\alpha}^p}}, \quad \text{com} \quad \tau_n = \left( \frac{1 - \|u'_n\|_{L_{\alpha}^p}^p}{\|u'_n\|_{L_{\alpha}^p}^p} \right)^{\frac{1}{\theta+1}} > 0,$$

temos que

$$u'_{\tau_n}(r) = \frac{\tau_n}{\|u'_n\|_{L_{\alpha}^p}} \cdot u'_n(\tau_n r) = \tau_n u'_{\tau_n}(r).$$

Logo, utilizando a definição de  $u_{\tau_n}$ , obtemos que

$$\|u_{\tau_n}\|_{L_{\theta}^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |u_{\tau_n}(r)|^p d\lambda_{\theta} = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{u_n(\tau_n r)}{\|u'_n\|_{L_{\alpha}^p}} \right|^p d\lambda_{\theta} = \frac{1}{\|u'_n\|_{L_{\alpha}^p}^p} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |u_n(\tau_n r)|^p d\lambda_{\theta}.$$

Mas pela mudança de variável  $\tau_n r = x$ , e visto que  $\tau_n dr = dx$ , segue que

$$\|u_{\tau_n}\|_{L_{\theta}^p}^p = \frac{1}{\|u'_n\|_{L_{\alpha}^p}^p} \cdot \omega_{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |u_n(\tau_n r)|^p r^{\theta} dr = \frac{1}{\|u'_n\|_{L_{\alpha}^p}^p} \cdot \omega_{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |u_n(x)|^p \left( \frac{x}{\tau_n} \right)^{\theta} \frac{dx}{\tau_n}.$$

Assim, manipulando as expressões, concluímos que

$$\|u_{\tau_n}\|_{L_\theta^p}^p = \frac{1}{\|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p} \cdot \frac{1}{\tau_n^{\theta+1}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_n(x)|^p d\lambda_\theta = \frac{1}{\|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p} \cdot \frac{1}{\tau_n^{\theta+1}} \cdot \|u_n\|_{L_\theta^p}^p.$$

No entanto,  $0 < \|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p + \|u_n\|_{L_\theta^p}^p \leq 1$ , o que implica que

$$\|u_{\tau_n}\|_{L_\theta^p}^p = \frac{1}{\|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p} \cdot \left( \frac{\|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p}{1 - \|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p} \right) \cdot \|u_n\|_{L_\theta^p}^p = \frac{\|u_n\|_{L_\theta^p}^p}{1 - \|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p} \leq 1.$$

Além disso, de forma análoga, e utilizando o fato de que  $\alpha + 1 = p$ , temos que

$$\|u'_{\tau_n}\|_{L_\alpha^p} = \|\tau_n u'_{\tau_n}\|_{L_\alpha^p} = \tau_n \|u'_{\tau_n}\|_{L_\alpha^p} = \tau_n \left( \frac{\|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p}{\|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p \cdot \tau_n^{\alpha+1}} \right)^{\frac{1}{p}} = 1$$

e, consequentemente, pela mudança de variável  $r = \tau_n x$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u_n(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta &= \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u_n(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) r^\theta dr \\ &= \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u_n(\tau_n x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) (\tau_n x)^\theta \tau_n dx \\ &= \tau_n^{\theta+1} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u_n(\tau_n x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) x^\theta dx \\ &= \tau_n^{\theta+1} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u_n(\tau_n x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta. \end{aligned}$$

Assim, pela definição de  $u_n(\tau_n x)$  e TMS, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u_n(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta &= \tau_n^{\theta+1} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u_n(\tau_n x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &= \tau_n^{\theta+1} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma \cdot \|u'_n\|_{L_\alpha^p}^{\frac{p}{p-1}} |u_{\tau_n}(x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &\leq \tau_n^{\theta+1} \text{TMS}(\sigma \cdot \|u'_n\|_{L_\alpha^p}^{\frac{p}{p-1}}, \alpha, \theta) \\ &= \left( \frac{1 - \|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p}{\|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p} \right) \text{TMS}(\sigma \cdot \|u'_n\|_{L_\alpha^p}^{\frac{p}{p-1}}, \alpha, \theta) \\ &\leq \sup_{\mu \in (0, \sigma)} \left( \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \text{TMS}(\mu, \alpha, \theta), \end{aligned}$$

em que utilizamos o fato de que  $\sigma \|u'_n\|_{L_\alpha^p}^{\frac{p}{p-1}} < \sigma$  na última desigualdade. Logo, pela definição de TMC( $\sigma, \alpha, \theta$ ), concluímos que

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) \leq \sup_{\mu \in (0, \sigma)} \left( \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \text{TMS}(\mu, \alpha, \theta). \quad (3.32)$$

Agora (3.30), segue diretamente de (3.31) e (3.32). ■



### 3.3 Existência de Funções extremantes

Uma questão relevante sobre os supremos  $\text{TMSC}(\sigma, \alpha, \theta)$  e  $\text{TMS}(\sigma, \alpha, \theta)$ , bem como para as desigualdades de Trudinger-Moser em geral, é se existem ou não funções extremantes. Inspirados por abordagens recentes em [9, 30, 31, 32], utilizaremos a identidade (3.24) para estudar esta questão.

Nesta seção, demonstraremos a existência de funções extremantes tanto para o caso crítico quanto para o subcrítico da desigualdade de Trudinger-Moser. Em particular, no que diz respeito ao supremo subcrítico  $\text{TMSC}(\sigma, \alpha, \theta)$ , somos capazes de estabelecer o seguinte resultado:

**Teorema 3.5** *Sejam  $\alpha, p$  e  $\theta$  satisfazendo as condições do Teorema 3.3. Então o supremo subcrítico fracionário  $\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta)$  é atingido.*

Posteriormente, utilizando o Teorema 3.5 e a Identidade (3.24), demonstraremos o seguinte resultado de atingibilidade para o supremo crítico fracionário  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$ .

**Teorema 3.6** *Sejam  $k_0 = \min\{j \in \mathbb{N}; j \geq p - 1\}$ ,  $p \geq 2$ ,  $\alpha = p - 1$  e  $\theta \geq 0$ .*

- i) Se  $k_0 > p - 1$  e  $0 < \sigma < \mu_{\alpha, \theta}$ , então  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  é atingido.*
- ii) Se  $k_0 = p - 1$  e  $0 < \sigma < \mu_{\alpha, \theta}$ , então  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  é atingido sempre que*

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) > \frac{\sigma^{p-1}}{(p-1)!}.$$

É importante salientar que a demonstração do Teorema 3.6 depende da equivalência crítica e subcrítica apresentada no Teorema 3.4.

Inicialmente, apresentaremos o seguinte Lema radial.

**Lema 3.4** *Para cada  $u \in X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta)$ ,  $p \geq 2$ , temos a seguinte desigualdade*

$$|u(r)|^p \leq \frac{C}{r^{\frac{\alpha+\theta(p-1)}{p}}} \cdot \|u\|^p, \quad \forall r > 0,$$

*em que  $C > 0$  depende apenas de  $\alpha, p, \theta$ . Além disso,*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{\alpha+\theta(p-1)}{p}} \cdot |u(r)|^p = 0.$$

**Demonstração:** Seja  $u \in X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta)$  arbitrário. Para qualquer  $r > 0$ , pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$|u(r)|^p = -(|u(\infty)|^p - |u(r)|^p)$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_r^\infty \frac{d}{ds} (|u(s)|^p) ds \\
&= - \int_r^\infty p|u(s)|^{p-1} u'(s) ds.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left| - \int_r^\infty \frac{d}{ds} (|u(s)|^p) ds \right| \leq p \int_r^\infty |u(s)|^{p-1} |u'(s)| ds$$

e, portanto, para  $r \leq s$ , segue que

$$\begin{aligned}
r^{\frac{\alpha+\theta(p-1)}{p}} \cdot |u(r)|^p &\leq p \cdot r^{\frac{\alpha+\theta(p-1)}{p}} \int_r^\infty |u(s)|^{p-1} |u'(s)| ds \\
&\leq p \int_r^\infty |u(s)|^{p-1} |u'(s)| s^{\frac{\alpha+\theta(p-1)}{p}} ds \\
&= p \int_r^\infty |u(s)|^{p-1} s^{\frac{\theta(p-1)}{p}} |u'(s)| s^{\frac{\alpha}{p}} ds.
\end{aligned}$$

Mas, pela desigualdade de Young com expoentes  $p$  e  $q = \frac{p}{p-1}$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
r^{\frac{\alpha+\theta(p-1)}{p}} \cdot |u(r)|^p &\leq p \int_r^\infty \frac{\left( |u(s)|^{p-1} s^{\frac{\theta(p-1)}{p}} \right)^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}} + \frac{\left( |u'(s)| s^{\frac{\alpha}{p}} \right)^p}{p} ds \\
&= (p-1) \int_r^\infty |u(s)|^p s^\theta ds + \int_r^\infty |u'(s)|^p s^\alpha ds \\
&\leq C(\alpha, p, \theta) \left[ \int_r^\infty |u(s)|^p d\lambda_\theta + \int_r^\infty |u'(s)|^p d\lambda_\alpha \right] \\
&\leq C(\alpha, p, \theta) \left[ \|u\|_{L_\theta^p}^p + \|u'\|_{L_\alpha^p}^p \right] \\
&= C(\alpha, p, \theta) \cdot \|u\|^p.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Em particular, aplicando  $r \rightarrow \infty$  em (3.33), temos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{\alpha+\theta(p-1)}{p}} \cdot |u(r)|^p = 0.$$

Assim, concluímos a demonstração. ■

### 3.3.1 Funções maximais para a desigualdade subcrítica

Nosso objetivo agora é demonstrar o Teorema 3.5.

Seja  $(u_n) \subset X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$  uma sequência maximizante para o supremo subcrítico de Trudinger-Moser  $\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta)$ . De acordo com o Lema 3.2, podemos assumir que:

$$\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta$$

e

$$\|u'_n\|_{L_\alpha^p} = \|u_n\|_{L_\theta^p} = 1. \quad (3.34)$$

Assim, de (3.34), temos que

$$\|u_n\| = \left( \|u'_n\|_{L_\alpha^p}^p + \|u_n\|_{L_\theta^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$$

ou seja,  $(u_n)$  é limitada em  $X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$ . Sendo  $X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$  um espaço reflexivo para  $1 < p < \infty$  (veja [31]), segue que existe  $u \in X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$  tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta).$$

Pela imersão compacta

$$X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_\theta^q, \quad \forall q \in (p, \infty).$$

Podemos também assumir que

$$u_n \rightarrow u, \quad \text{em } L_\theta^q \quad q > p \quad \text{e} \quad u_n(r) \rightarrow u(r) \quad q.t.p \text{ em } (0, \infty). \quad (3.35)$$

Note que, neste ponto observamos que existe uma constante  $C = C(p, \mu)$  tal que

$$\varphi_p \left( \mu t^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} \cdot t^{\frac{k_0 p}{p-1}} \leq C \varphi_p \left( \mu t^{\frac{p}{p-1}} \right) t^{\frac{p}{p-1}}, \quad t \geq 0. \quad (3.36)$$

Logo, dado  $\varepsilon > 0$ , pelo Lema 3.4, temos que existe  $R > 0$  tal que

$$|u_n(r)| \leq \varepsilon, \quad \forall r \geq R. \quad (3.37)$$

Assim, de (3.36), (3.37) e pelo Teorema 3.2, segue que

$$\begin{aligned} \int_R^\infty \left[ \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} \cdot |u_n|^{\frac{k_0 p}{p-1}} \right] d\lambda_\theta &\leq C(p, \mu) \int_R^\infty \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) |u_n|^{\frac{p}{p-1}} d\lambda_\theta \\ &\leq C(p, \mu) \cdot \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} \int_R^\infty \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &\leq C(p, \mu) \cdot \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &\leq C(p, \mu) \cdot \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} C(p, \mu, \theta) \|u_n\|_{L_\theta^p}^p \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_R^\infty \left[ \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} \cdot |u_n|^{\frac{k_0 p}{p-1}} \right] d\lambda_\theta \leq \tilde{C}(p, \mu, \theta) \cdot \varepsilon^{\frac{p}{p-1}}. \quad (3.38)$$

Por outro lado, de (3.35) e pela continuidade de  $\varphi_p$ , obtemos que

$$\varphi_p \left( \mu |u_n(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} \cdot |u_n(r)|^{\frac{k_0 p}{p-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_p \left( \mu |u(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} \cdot |u(r)|^{\frac{k_0 p}{p-1}}$$

q.t.p. em  $(0, R)$ . Ademais, definindo

$$v_n(r) = u_n(r) - u_n(R), \quad \forall r \in (0, R),$$

segue que  $v_n \in X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$  com

$$v'_n(r) = u'_n(r)$$

e, portanto, usando (3.34), obtemos que

$$\|v'_n\|_{L_\alpha^p} = 1.$$

Além disso, pelo Lema 3.1 para  $q = 1 + \varepsilon > 1$ , deduzimos que

$$\begin{aligned} |u_n|^{\frac{p}{p-1}} &\leq |v_n + u_n(R)|^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} |v_n|^{\frac{p}{p-1}} + \left( 1 - (1 + \varepsilon)^{\frac{-(p-1)}{p}} \right)^{\frac{-1}{p-1}} |u_n(R)|^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} |v_n|^{\frac{p}{p-1}} + \left( 1 - (1 + \varepsilon)^{\frac{-(p-1)}{p}} \right)^{\frac{-1}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

em que na última desigualdade utilizamos (3.37). Assim, escolhendo  $q > 1$ , próximo de 1 tal que

$$q^{\frac{p+1}{p}} \mu < \mu_{\alpha, \theta},$$

e utilizando (3.39), juntamente com o Teorema 3.1, verifica-se que

$$\begin{aligned} \int_0^R \left[ \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} \cdot |u_n|^{\frac{k_0 p}{p-1}} \right]^q d\lambda_\theta &\leq \int_0^R \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right)^q d\lambda_\theta \\ &\leq \int_0^R \left( e^{\mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}}} \right)^q d\lambda_\theta \\ &\leq \int_0^R e^{q\mu \left( q^{\frac{1}{p}} |v_n|^{\frac{p}{p-1}} + C(p, q) \right)} d\lambda_\theta \\ &\leq C(p, q, \alpha, \theta) \int_0^R e^{\mu_{\alpha, \theta} |v_n|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^R \left[ \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} \cdot |u_n|^{\frac{k_0 p}{p-1}} \right]^q d\lambda_\theta \leq C(p, q, \mu, \theta, R). \quad (3.40)$$

Logo, pelo Lema 2.1 de [16], concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^R \left[ \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u_n|^{\frac{k_0 p}{p-1}} \right] d\lambda_\theta = \int_0^R \left[ \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u|^{\frac{k_0 p}{p-1}} \right] d\lambda_\theta.$$

Agora, utilizando a definição da sequência  $(u_n)$ , juntamente com (3.35), obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty |u_n|^{\frac{k_0 \cdot p}{p-1}} d\lambda_\theta = \begin{cases} \int_0^\infty |u|^{\frac{k_0 \cdot p}{p-1}} d\lambda_\theta, & \text{se } k_0 > p-1 \\ 1, & \text{se } k_0 = p-1. \end{cases}$$

Assim, se  $k_0 > p-1$  e utilizando (3.38), segue que

$$\begin{aligned} \text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u_n|^{\frac{k_0 \cdot p}{p-1}} d\lambda_\theta + \int_0^\infty \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u_n|^{\frac{k_0 \cdot p}{p-1}} d\lambda_\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^R \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u_n|^{\frac{k_0 \cdot p}{p-1}} d\lambda_\theta \\ &\quad + \int_R^\infty \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u_n|^{\frac{k_0 \cdot p}{p-1}} d\lambda_\theta + \int_0^\infty \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u_n|^{\frac{k_0 \cdot p}{p-1}} d\lambda_\theta \\ &\leq \int_0^R \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u|^{\frac{k_0 \cdot p}{p-1}} d\lambda_\theta + C(p, \mu, \theta) \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u|^{\frac{k_0 \cdot p}{p-1}} d\lambda_\theta \\ &\leq \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u|^{\frac{k_0 \cdot p}{p-1}} d\lambda_\theta + C(p, \mu, \theta) \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u|^{\frac{k_0 \cdot p}{p-1}} d\lambda_\theta \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) \leq \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta + C(p, \mu, \theta) \varepsilon^{\frac{p}{p-1}}. \quad (3.41)$$

Portanto, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  em (3.41), temos que

$$\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) \leq \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta.$$

E, como  $0 < \|u\|_{L_\theta^p} \leq 1$ , segue que

$$\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) \leq \frac{1}{\|u\|_{L_\theta^p}^p} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta.$$

O que completa a prova para o caso  $k_0 < p-1$ . Agora, se  $k_0 = p-1$ , de forma análoga ao que foi feito anteriormente podemos escrever

$$\begin{aligned}
\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u_n|^p d\lambda_\theta + \int_0^\infty \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u_n|^p d\lambda_\theta \\
&\leq \int_0^R \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u|^p d\lambda_\theta + C(p, \mu, \theta) \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} + \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} \\
&\leq \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u|^p d\lambda_\theta + C(p, \mu, \theta) \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} + \frac{\mu^{k_0}}{k_0!}.
\end{aligned}$$

Assim, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos que

$$\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) \leq \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u|^p d\lambda_\theta + \frac{\mu^{k_0}}{k_0!}. \quad (3.42)$$

Além disso, para qualquer  $w \in X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$  com  $\|w'\|_{L_\alpha^p} = \|w\|_{L_\theta^p} = 1$ , temos pela definição de  $\varphi_p$  que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |w|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta &\geq \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} \int_0^\infty |w|^p d\lambda_\theta + \frac{\mu^{k_0+1}}{(k_0+1)!} \int_0^\infty |w|^{\frac{p(k_0+1)}{p-1}} d\lambda_\theta \\
&\geq \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} + \frac{\mu^{k_0+1}}{(k_0+1)!} \int_0^\infty |w|^{\frac{p(k_0+1)}{p-1}} d\lambda_\theta,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) > \frac{\mu^{k_0}}{k_0!}.$$

Assim, de (3.42) e pelo fato de que  $0 < \|u\|_{L_\theta^p} \leq 1$ , concluímos que

$$\begin{aligned}
\text{TMSC}(\mu, \alpha, \theta) &\leq \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u|^p d\lambda_\theta + \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} \\
&\leq \frac{1}{\|u\|_{L_\theta^p}^p} \left( \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} |u|^p d\lambda_\theta \right) + \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} \\
&= \frac{1}{\|u\|_{L_\theta^p}^p} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta - \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} + \frac{\mu^{k_0}}{k_0!} \\
&= \frac{1}{\|u\|_{L_\theta^p}^p} \int_0^\infty \varphi_p \left( \mu |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta,
\end{aligned}$$

e o Teorema 3.5 está provado, visto que a outra desigualdade é imediata. ■

### 3.3.2 Funções maximais para a desigualdade crítica

Utilizaremos agora o Teorema 3.4 e o Teorema 3.5 para demonstrar o Teorema 3.6. Primeiramente, para

$$0 < s < \mu_{\alpha, \theta},$$

considere

$$f(s) = \text{TMSC}(s, \alpha, \theta) \quad \text{e} \quad g(s) = \text{TMC}(s, \alpha, \theta).$$

Assim, pelo Teorema 3.4, temos que

$$g(\sigma) = \sup_{s \in (0, \sigma)} \left( \frac{1 - \left(\frac{s}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) f(s), \quad \forall 0 < \sigma < \mu_{\alpha, \theta}. \quad (3.43)$$

**Lema 3.5** *A função  $f$  definida anteriormente é contínua em  $(0, \mu_{\alpha, \theta})$ .*

**Demonstração:** Pelo Teorema 3.5, existem  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  e  $u_n \in X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta)$  tal que  $\|u'_n\|_{L_{\alpha}^p} \leq 1$ ,  $\|u_n\|_{L_{\theta}^p} = 1$  e

$$f(s + \varepsilon_n) = \int_0^{\infty} \varphi_p \left( (s + \varepsilon_n) |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(s + \varepsilon_n) - f(s) \\ &= \int_0^{\infty} \varphi_p \left( (s + \varepsilon_n) |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta} - \sup_{\substack{\|u'\|_{L_{\alpha}^p} \leq 1 \\ \|u\|_{L_{\theta}^p} = 1}} \int_0^{\infty} \varphi_p \left( s |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta} \\ &\leq \int_0^{\infty} \varphi_p \left( (s + \varepsilon_n) |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta} - \int_0^{\infty} \varphi_p \left( s |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Além disso, como para  $1 < p < \infty$  tem-se que  $X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta)$  é um espaço de Banach, reflexivo (veja [31]) e  $(u_n)$  é uma sequência limitada em  $X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta)$ , segue que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta),$$

e, pela imersão compacta, temos que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L_{\theta}^p, \quad q > p$$

e

$$u_n(r) \rightarrow u(r) \quad \text{q.t.p. em } (0, \infty).$$

Em particular, como  $\varphi_p$  é contínua, segue que

$$\varphi_p \left( (s + \varepsilon_n) |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \varphi_p \left( s |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{q.t.p. em } (0, \infty).$$

Da mesma forma que foi feito em (3.40), podemos utilizar o Lema 3.4 e o Teorema 3.1 para obtermos uma constante positiva  $C(p, q, s, \theta, R)$  tal que

$$\begin{aligned}
\int_0^R \left[ \varphi_p \left( (s + \varepsilon_n) |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \varphi_p \left( s |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) \right]^q d\lambda_\theta &\leq \int_0^R \varphi_p \left( (s + \varepsilon_n) |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right)^q d\lambda_\theta \\
&\leq \int_0^R \left( e^{(s+\varepsilon_n) |u_n|^{\frac{p}{p-1}}} \right)^q d\lambda_\theta \\
&\leq \int_0^R e^{q(s+\varepsilon_n) \left( q^{\frac{1}{p}} |v_n|^{\frac{p}{p-1}} + C(p,q) \right)} d\lambda_\theta \\
&\leq C(p, q, \alpha, \theta) \int_0^R e^{\mu_{\alpha, \theta} |v_n|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta \\
&\leq C(p, q, s, \theta, R),
\end{aligned}$$

para algum  $q > 1$  e para todo  $R > 0$ . Assim, pelo Lema 2.1 de [16], concluímos que

$$\int_0^R \left[ \varphi_p \left( (s + \varepsilon_n) |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \varphi_p \left( s |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) \right] d\lambda_\theta \rightarrow 0.$$

Por outro lado, para  $R$  suficientemente grande o Lema 3.4 implica que

$$|u_n(r)| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, r \geq R$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_R^\infty \left[ \varphi_p \left( (s + \varepsilon_n) |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) - \varphi_p \left( s |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right) \right] d\lambda_\theta \\
&= \int_R^\infty \sum_{\substack{j \geq p-1 \\ j \in \mathbb{N}}} \left[ \frac{(s + \varepsilon_n)^j}{j!} - \frac{s^j}{j!} \right] |u_n|^{\frac{j \cdot p}{p-1}} d\lambda_\theta \\
&\leq \int_R^\infty \sum_{\substack{j \geq p-1 \\ j \in \mathbb{N}}} \left[ \frac{(s + \varepsilon_n)^j}{j!} - \frac{s^j}{j!} \right] |u_n|^p d\lambda_\theta \\
&\leq \sum_{\substack{j \geq p-1 \\ j \in \mathbb{N}}} \left[ \frac{(s + \varepsilon_n)^j}{j!} - \frac{s^j}{j!} \right] \int_R^\infty |u_n|^p d\lambda_\theta \\
&\leq \sum_{\substack{j \geq p-1 \\ j \in \mathbb{N}}} \left[ \frac{(s + \varepsilon_n)^j}{j!} - \frac{s^j}{j!} \right] \\
&= \varphi_p(s + \varepsilon_n) - \varphi_p(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

em que, na ultima desigualdade, utilizamos o fato de que  $\|u_n\|_{L_\theta^p} = 1$ . Logo de (3.44), temos que

$$0 \leq f(s + \varepsilon_n) - f(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$



Analogamente, segue que

$$0 \leq f(s) - f(s - \varepsilon_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Logo,  $f$  é contínua em  $s$  e, como ele foi tomado arbitrariamente, segue que  $f$  é contínua em  $(0, \mu_{\alpha, \theta})$ .  $\blacksquare$

Agora, para garantir a existência de uma função extremal para  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  quando  $0 < \sigma < \mu_{\alpha, \theta}$ , é suficiente mostrar que

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 - \left(\frac{s}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) f(s) < g(\sigma) \quad (3.45)$$

e

$$\limsup_{s \rightarrow \sigma^-} \left( \frac{1 - \left(\frac{s}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) f(s) < g(\sigma). \quad (3.46)$$

De fato, dadas as equações (3.45), (3.46), (3.43) e juntamente com o Lema 3.5, garante a existência de  $s_\sigma \in (0, \sigma)$  tal que

$$g(\sigma) = \left( \frac{1 - \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) f(s_\sigma). \quad (3.47)$$

Seja  $(u_\sigma)$  uma função extremal para  $\text{TMSC}(s_\sigma, \alpha, \theta)$  devido ao Teorema 3.5. Considere

$$v_\sigma(r) = \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{p-1}{p}} u_\sigma(\tau r), \quad \text{com } \tau = \left( \frac{\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1} \|u_\sigma\|_{L_\theta^p}^p}{1 - \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}} \right)^{\frac{1}{\theta+1}}.$$

Então,

$$v'_\sigma(r) = \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{p-1}{p}} \tau u'_\sigma(\tau r),$$

e, por (3.9) e (3.8), temos que

$$\begin{aligned} \|v_\sigma\|^p &= \|v'_\sigma\|_{L_\alpha^p}^p + \|v_\sigma\|_{L_\theta^p}^p \\ &= \frac{\left(\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{p-1}{p}} \tau\right)^p \|u'_\sigma\|_{L_\alpha^p}^p}{\tau^{\alpha+1}} + \frac{\left(\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)^p \|u_\sigma\|_{L_\theta^p}^p}{\tau^{\theta+1}} \\ &= \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1} \left[ \|u'_\sigma\|_{L_\alpha^p}^p + \tau^{-(\theta+1)} \|u_\sigma\|_{L_\theta^p}^p \right] \\ &= \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1} \left[ \|u'_\sigma\|_{L_\alpha^p}^p + \left( \frac{\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1} \|u_\sigma\|_{L_\theta^p}^p}{1 - \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}} \right)^{-1} \|u_\sigma\|_{L_\theta^p}^p \right] \\ &= \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1} \|u'_\sigma\|_{L_\alpha^p}^p + 1 - \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1} \leq 1, \end{aligned}$$

em que, na última desigualdade, utilizamos o fato de que  $\|u'_\sigma\|_{L_\alpha^p}^p \leq 1$ . Além disso, por (3.47), também temos que

$$g(\sigma) = \left( \frac{1 - \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) f(s_\sigma).$$

Portanto, utilizando a mudança de variável  $r = \tau x$  e a definição de  $v_\sigma$ , concluímos que

$$\begin{aligned} \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) &= \left( \frac{1 - \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \text{TMSC}(s_\sigma, \alpha, \theta) \\ &= \left( \frac{1 - \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \frac{1}{\|u_\sigma\|_{L_\theta^p}^p} \int_0^\infty \varphi_p \left( s_\sigma |u_\sigma(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &= \left( \frac{1 - \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \frac{1}{\|u_\sigma\|_{L_\theta^p}^p} \int_0^\infty \varphi_p \left( s_\sigma |u_\sigma(r)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \omega_\theta \cdot r^\theta dr \\ &= \left( \frac{1 - \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \frac{1}{\|u_\sigma\|_{L_\theta^p}^p} \int_0^\infty \varphi_p \left( s_\sigma |u_\sigma(\tau x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \omega_\theta \cdot (\tau x)^\theta \tau dx \\ &= \left( \frac{1 - \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \frac{1}{\|u_\sigma\|_{L_\theta^p}^p} \cdot \tau^{\theta+1} \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |v_\sigma|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &= \left( \frac{1 - \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1} \|u_\sigma\|_{L_\theta^p}^p} \right) \left( \frac{\left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1} \|u_\sigma\|_{L_\theta^p}^p}{1 - \left(\frac{s_\sigma}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |v_\sigma|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &= \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |v_\sigma|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta. \end{aligned}$$

Assim,  $v_\sigma$  é uma função maximal para  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$ . Mas, como

$$\limsup_{s \rightarrow \sigma^-} \left( \frac{1 - \left(\frac{s}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) f(s) = 0 < g(\sigma),$$

é evidente que (3.46) é válido.

A seguir, provaremos que (3.45) é válido. Em primeiro lugar, fornecemos a seguinte estimativa.

**Lema 3.6** *Para todo  $q \geq p$  e  $0 < \mu < \mu_{\alpha, \theta}$ , temos que*

$$\sup_{\substack{\|u'\|_{L_\alpha^p} \leq 1 \\ \|u\|_{L_\theta^p} = 1}} \int_0^\infty e^{\mu |u|^{\frac{p}{p-1}}} |u|^q d\lambda_\theta \leq c,$$

para alguma constante  $c = C(\mu, \alpha, \theta, q) > 0$ .

**Demonstração:** Procedemos como no Teorema 3.3. Seja  $u \in X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta) \setminus \{0\}$ , com  $\|u'\|_{L_\alpha^p} \leq 1$  e  $\|u\|_{L_\theta^p}^p = 1$ . A partir da desigualdade de Polya-Szego obtida em [1], podemos assumir que  $u$  é uma função não-crescente. Assim, escrevendo

$$\int_0^\infty e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} |u|^q d\lambda_\theta = \int_{\{u < 1\}} e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} |u|^q d\lambda_\theta + \int_{\{u \geq 1\}} e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} |u|^q d\lambda_\theta,$$

e utilizando o fato de que  $\|u\|_{L_\theta^p}^p = 1$ , segue que

$$\int_{\{u < 1\}} e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} |u|^q d\lambda_\theta \leq \int_{\{u < 1\}} e^\mu |u|^q d\lambda_\theta \leq \int_{\{u < 1\}} e^\mu |u|^p d\lambda_\theta = e^\mu.$$

Seja

$$I_u := \{r > 0; u(r) \geq 1\}.$$

Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que  $I_u \neq \emptyset$ . Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $R_u > 0$  tal que

$$I_u = (0, R_u).$$

Sendo assim, definindo

$$v(r) = u(r) - 1, \quad \text{com } r \in (0, R_u),$$

segue que  $v \in X_{R_u}^{1,p}(\alpha, \theta)$  e

$$\|v'\|_{L_\alpha^p} = \|u'\|_{L_\alpha^p} \leq 1.$$

Além disso, pelo Lema 3.1, temos que

$$\begin{aligned} |u|^{\frac{p}{p-1}} &= |v + 1|^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq (|v| + 1)^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq (1 + \varepsilon)^{\frac{\frac{p}{p-1}-1}{\frac{p}{p-1}}} |v|^{\frac{p}{p-1}} + \left(1 - (1 + \varepsilon)^{\frac{-(p-1)}{p}}\right)^{1-\frac{p}{p-1}} \\ &\leq (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} |v|^{\frac{p}{p-1}} + c_1(\varepsilon, \alpha, \theta), \end{aligned}$$

para alguma constante  $c_1 = c_1(\varepsilon, \alpha, \theta) > 0$ . Assim, escolhendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e  $\eta > 1$  tal que

$$\mu(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{\eta}{\eta - 1} \leq \mu_{\alpha, \theta},$$

segue da desigualdade de Hölder com expoentes  $\eta$  e  $\frac{\eta}{\eta-1}$ , juntamente com o Teorema 3.1, que

$$\begin{aligned}
\int_{\{u \geq 1\}} e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} |u|^q d\lambda_\theta &= \int_0^{R_u} e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} |u|^q d\lambda_\theta \\
&\leq \left( \int_0^{R_u} (|u|^q)^\eta d\lambda_\theta \right)^{\frac{1}{\eta}} \left( \int_0^{R_u} \left( e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{\eta}{\eta-1}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \\
&\leq \|u\|_{L_\theta^{nq}}^q \left( \int_0^{R_u} e^{\left( \frac{\mu_{\alpha,\theta}}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{p}}} \right) \cdot \left( (1+\varepsilon)^{\frac{1}{p}} |v|^{\frac{p}{p-1}} + c_1(\varepsilon, \alpha, \theta) \right)} d\lambda_\theta \right)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \\
&\leq C(\varepsilon, \alpha, \theta, \eta, \mu) \|u\|_{L_\theta^{nq}}^q \left( \int_0^{R_u} e^{\mu_{\alpha,\theta}|v|^{\frac{p}{p-1}}} d\lambda_\theta \right)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \\
&\leq \tilde{C}(\varepsilon, \alpha, \theta, \eta, \mu) \|u\|_{L_\theta^{nq}}^q (|B_{R_u}|_\theta)^{\frac{\eta-1}{\eta}}. \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Finalmente, como

$$|B_{R_u}|_\theta = \int_0^{R_u} d\lambda_\theta \leq \int_0^{R_u} |u|^p d\lambda_\theta \leq \|u\|_{L_\theta^p}^p = 1 \tag{3.49}$$

e pela imersão contínua

$$X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_\theta^q, \quad \forall q \in [p, \infty),$$

em particular, para  $\eta q \geq p$ , segue que

$$\|u\|_{L_\theta^{nq}} \leq C\|u\| \quad \Rightarrow \quad \|u\|_{L_\theta^{nq}}^q \leq C\|u\|^q \leq c(\alpha, \theta, q, \eta). \tag{3.50}$$

Assim, utilizando (3.49) e (3.50) em (3.48), temos que

$$\int_{\{u \geq 1\}} e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} |u|^q d\lambda_\theta = \int_0^{R_u} e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} |u|^q d\lambda_\theta \leq c(\alpha, \theta, q, \mu),$$

o que conclui o resultado. ■

Como estamos supondo que  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) > \frac{\sigma^{K_0}}{k_0!}$ , quando  $k_0 = p - 1$ , para completar a prova de (3.45), e, consequentemente, a prova do Teorema 3.6, é suficiente mostrar o Lema abaixo.

**Lema 3.7** *Para cada  $0 < \sigma < \mu_{\alpha,\theta}$ , temos que*

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 - \left( \frac{s\sigma}{\sigma} \right)^{p-1}}{\left( \frac{s\sigma}{\sigma} \right)^{p-1}} \right) f(s) \begin{cases} = 0, & \text{se } k_0 > p - 1 \\ \leq \frac{\sigma^{k_0}}{k_0!}, & \text{se } k_0 = p - 1. \end{cases}$$

**Demonstração:** Seja  $(s_n)$  uma sequência arbitrária tal que

$$s_n \rightarrow 0.$$

Pelo Teorema 3.5, existe uma sequência  $(u_n) \subset X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$  satisfazendo  $\|u'_n\|_{L_\alpha^p} \leq 1$  e  $\|u_n\|_{L_\theta^p} = 1$ , tal que

$$\begin{aligned} f(s_n) &= \text{TMS}C(s_n, \alpha, \theta) \\ &= \frac{s_n^{k_0}}{k_0!} \int_0^\infty |u_n|^{\frac{k_0 p}{p-1}} d\lambda_\theta + s_n^{k_0+1} \sum_{j \geq k_0+1} \int_0^\infty \frac{s_n^{j-(k_0+1)}}{j!} |u_n|^{\frac{j p}{p-1}} d\lambda_\theta \\ &= \frac{s_n^{k_0}}{k_0!} \int_0^\infty |u_n|^{\frac{k_0 p}{p-1}} d\lambda_\theta + s_n^{k_0+1} \sum_{l=0}^\infty \int_0^\infty \frac{s_n^l}{(l+k_0+1)!} |u_n|^{\frac{l p}{p-1} + \frac{(k_0+1)p}{p-1}} d\lambda_\theta. \end{aligned}$$

Assim, observando que  $(l+k_0+1)! \geq l!$  e utilizando o Lema 3.6, temos que

$$\begin{aligned} f(s_n) &\leq \frac{s_n^{k_0}}{k_0!} \int_0^\infty |u_n|^{\frac{k_0 p}{p-1}} d\lambda_\theta + s_n^{k_0+1} \int_0^\infty e^{\sigma|u_n|^{\frac{p}{p-1}}} |u_n|^{\frac{(k_0+1)p}{p-1}} d\lambda_\theta \\ &\leq \frac{s_n^{k_0}}{k_0!} \int_0^\infty |u_n|^{\frac{k_0 p}{p-1}} d\lambda_\theta + s_n^{k_0+1} c(\sigma, \alpha, \theta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 - \left(\frac{s_n}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s_n}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) f(s_n) & \tag{3.51} \\ &\leq \left( \frac{1 - \left(\frac{s_n}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \left( \frac{s_n^{k_0-(p-1)}}{k_0!} \right) \left[ \int_0^\infty |u_n|^{\frac{k_0 p}{p-1}} d\lambda_\theta + c(\sigma, \alpha, \theta) k_0! s_n \right]. \end{aligned}$$

Sendo assim, se

$$k_0 > p-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_0}{p-1} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_0 p}{p-1} > p.$$

Logo, pela imersão contínua

$$X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_\theta^q, \quad \forall q \in [p, \infty),$$

segue que a integral é limitada e, portanto, como  $s_n \rightarrow 0$ , segue de (3.51) que

$$\left( \frac{1 - \left(\frac{s_n}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s_n}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) f(s_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por outro lado, caso  $k_0 = p-1$ , temos que

$$\begin{aligned}
\left( \frac{1 - \left(\frac{s_n}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{s_n}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) f(s_n) &\leq \left( \frac{1 - \left(\frac{s_n}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \left( \frac{s_n^0}{k_0!} \right) \left[ \int_0^\infty |u_n|^p d\lambda_\theta + c(\sigma, \alpha, \theta) k_0! s_n \right] \\
&= \left( \frac{1 - \left(\frac{s_n}{\sigma}\right)^{p-1}}{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \left( \frac{1}{k_0!} \right) [1 + c(\sigma, \alpha, \theta) k_0! s_n] \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{p-1}} \right) \left( \frac{1}{k_0!} \right) = \frac{\sigma^{k_0}}{k_0!}
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

### 3.4 Atingibilidade da desigualdade crítica no caso $k_0 = p - 1$

Nesta seção, analisaremos a atingibilidade do supremo crítico  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  sob a condição  $k_0 = p - 1$  for satisfeita. Para isso, definiremos inicialmente o valor  $\sigma_* = \sigma_*(\alpha, \theta) \in [0, \mu_{\alpha, \theta})$  como

$$\sigma_* := \inf \{ \sigma \in (0, \mu_{\alpha, \theta}); \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) \text{ é atingido} \},$$

quando  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  for atingido para algum  $\sigma \in (0, \mu_{\alpha, \theta})$ .

Por outro lado, se  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  não for atingido para qualquer  $\sigma \in (0, \mu_{\alpha, \theta})$ , definimos  $\sigma_* = \infty$ .

Apresentaremos, inicialmente, uma estimativa para a desigualdade crítica de Trundiger-Moser.

**Lema 3.8** *Para qualquer  $\sigma \in (0, \mu_{\alpha, \theta})$ , temos*

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) \geq \frac{\sigma^{k_0}}{k_0!}. \quad (3.52)$$

*Além disso, se  $p > 2$ , a desigualdade acima torna-se estrita.*

**Demonstração:** Para a demonstração desse Lema utilizaremos o argumento de Ishiwata (veja [26]). Seja  $u \in X_\infty^{1,p}(\alpha, \theta)$  tal que  $\|u\| = 1$ , e considere

$$u_t(r) = t^{\frac{1}{p}} u \left( t^{\frac{1}{\theta+1}} r \right).$$

Assim, para todo  $q \geq p$ , e pela definição de  $u_t$ , temos que

$$\|u_t\|_{L_\theta^q}^q = \int_0^\infty |u_t(r)|^q d\lambda_\theta = \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} \left| u \left( t^{\frac{1}{\theta+1}} r \right) \right|^q d\lambda_\theta = \omega_\theta \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} \left| u \left( t^{\frac{1}{\theta+1}} r \right) \right|^q r^\theta dr.$$

Fazendo a mudança de variável  $x = rt^{\frac{1}{\theta+1}}$ , segue que

$$\begin{aligned}\|u_t\|_{L_\theta^q}^q &= \omega_\theta \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} |u(x)|^q \frac{x^\theta}{t^{\frac{\theta}{\theta+1}}} \frac{dx}{t^{\frac{1}{\theta+1}}} \\ &= \omega_\theta \int_0^\infty t^{\frac{q-p}{p}} |u(x)|^q x^\theta dx \\ &= t^{\frac{q-p}{p}} \int_0^\infty |u(x)|^q d\lambda_\theta\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u_t\|_{L_\theta^q}^q = t^{\frac{q-p}{p}} \|u\|_{L_\theta^q}^q. \quad (3.53)$$

Além disso, considerando que

$$u'_t(r) = t^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{\theta+1}} u' \left( t^{\frac{1}{\theta+1}} r \right),$$

e realizando a substituição  $x = t^{\frac{1}{\theta+1}} r$ , conclui-se que

$$\begin{aligned}\|u'_t\|_{L_\alpha^p}^p &= \int_0^\infty |u'_t(r)|^p d\lambda_\alpha \\ &= \int_0^\infty t \cdot t^{\frac{p}{\theta+1}} \left| u' \left( t^{\frac{1}{\theta+1}} r \right) \right|^p d\lambda_\alpha \\ &= \omega_\alpha \int_0^\infty t \cdot t^{\frac{p}{\theta+1}} \left| u' \left( t^{\frac{1}{\theta+1}} r \right) \right|^p r^\alpha dr \\ &= \omega_\alpha \int_0^\infty t \cdot t^{\frac{p}{\theta+1}} |u'(x)|^p \frac{x^\alpha}{t^{\frac{\alpha}{\theta+1}}} \frac{dx}{t^{\frac{1}{\theta+1}}} \\ &= \int_0^\infty t t^{\frac{p}{\theta+1}} \frac{|u'(x)|^p}{t^{\frac{\alpha+1}{\theta+1}}} d\lambda_\alpha,\end{aligned}$$

isto é,

$$\|u'_t\|_{L_\alpha^p}^p = t \|u'\|_{L_\alpha^p}^p,$$

em que utilizamos que  $\alpha + 1 = p$ . Assim, para  $t > 0$  suficientemente pequeno, e

$$\xi_t = \left( t + (1-t) \|u\|_{L_\theta^p}^p \right)^{-\frac{1}{p}}$$

podemos concluir, a partir das construções realizadas anteriormente, que

$$\begin{aligned}\|\xi_t u_t\|^p &= \|\xi_t u_t\|_{L_\theta^p}^p + \|\xi_t u'_t\|_{L_\alpha^p}^p \\ &= \xi_t^p t \|u'\|_{L_\alpha^p}^p + \xi_t^p t^{\frac{p-p}{p}} \|u\|_{L_\theta^p}^p \\ &= t \xi_t^p \|u'\|_{L_\alpha^p}^p + \xi_t^p \|u\|_{L_\theta^p}^p \\ &= t \left( t + (1-t) \|u\|_{L_\theta^p}^p \right)^{-1} \left( 1 - \|u\|_{L_\theta^p}^p \right) + \left( t + (1-t) \|u\|_{L_\theta^p}^p \right)^{-1} \|u\|_{L_\theta^p}^p = 1,\end{aligned}$$

em que usamos o fato de que  $\|u\| = 1$ . Por fim, note que, quando  $t \rightarrow 0^+$ , temos

$$\xi_t^p \rightarrow \frac{1}{\|u\|_{L_\theta^p}^p}.$$

Assim, para

$$v_t = \xi_t u_t,$$

e utilizando a relação apresentada em (3.53), concluimos que

$$\begin{aligned} \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) &\geq \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |v_t|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta \\ &\geq \frac{\sigma^{k_0}}{k_0!} \int_0^\infty |v_t|^p d\lambda_\theta + \frac{\sigma^{k_0+1}}{(k_0+1)!} \int_0^\infty |v_t|^{\frac{p(k_0+1)}{p-1}} d\lambda_\theta \\ &= \frac{\sigma^{p-1}}{(p-1)!} \left[ \xi_t^p \|u\|_{L_\theta^p}^p + \frac{\sigma}{p} \xi_t^{\frac{p}{p-1}+p} \|u\|_{L_\theta^{\frac{p^2}{p-1}}}^{\frac{p^2}{p-1}} t^{\frac{1}{p-1}} \right] \\ &\xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{\sigma^{p-1}}{(p-1)!}, \end{aligned} \tag{3.54}$$

o que prova (3.52). Além disso, se  $p > 0$ , observamos que a função

$$h_{p,\theta,\sigma}(t) = \xi_t^p \|u\|_{L_\theta^p}^p + \frac{\sigma}{p} \cdot \xi_t^{\frac{p}{p-1}+p} \|u\|_{L_\theta^{\frac{p^2}{p-1}}}^{\frac{p^2}{p-1}} t^{\frac{1}{p-1}}$$

satisfaz

$$h_{p,\theta,\sigma}(0) = \xi_0^p \|u\|_{L_\theta^p}^p = \left( 0 + (1-0) \|u\|_{L_\theta^p}^p \right)^{-1} \|u\|_{L_\theta^p}^p = 1$$

e

$$h'_{p,\theta,\sigma}(t) > 0$$

para todo  $t > 0$  suficientemente pequeno. Assim, de (3.54), segue o resultado.  $\blacksquare$

**Lema 3.9** *i) A função*

$$\sigma \mapsto \frac{(p-1)!}{\sigma^{p-1}} \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$$

*é não decrescente para  $0 < \sigma \leq \mu_{\alpha,\theta}$ .*

*ii) Seja  $0 < \sigma_1 < \sigma_2 \leq \mu_{\alpha,\theta}$ . Suponha que  $\text{TMC}(\sigma_1, \alpha, \theta)$  é atingido. Então,*

$$\frac{(p-1)!}{\sigma_2^{p-1}} \text{TMC}(\sigma_2, \alpha, \theta) > \frac{(p-1)!}{\sigma_1^{p-1}} \text{TMC}(\sigma_1, \alpha, \theta)$$

*e  $\text{TMC}(\sigma_2, \alpha, \theta)$  é também atingido.*



**Demonstração:** i) Como

$$\frac{(p-1)!}{\sigma^{p-1}} \varphi_p \left( \sigma |t|^{\frac{p}{p-1}} \right) = (p-1)! \sum_{j=p-1}^{\infty} \frac{\sigma^{j-(p-1)}}{j!} t^{\frac{jp}{p-1}}$$

segue que, se  $0 < \sigma_1 < \sigma_2 \leq \mu_{\alpha, \theta}$ , então

$$\begin{aligned} \frac{(p-1)!}{\sigma_1^{p-1}} \varphi_p \left( \sigma_1 |t|^{\frac{p}{p-1}} \right) &= (p-1)! \sum_{j=p-1}^{\infty} \frac{\sigma_1^{j-(p-1)}}{j!} t^{\frac{jp}{p-1}} \\ &\leq (p-1)! \sum_{j=p-1}^{\infty} \frac{\sigma_2^{j-(p-1)}}{j!} t^{\frac{jp}{p-1}} \\ &= \frac{(p-1)!}{\sigma_2^{p-1}} \varphi_p \left( \sigma_2 |t|^{\frac{p}{p-1}} \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

ii) Como  $\text{TMC}(\sigma_1, \alpha, \theta)$  é atingido, segue que existe  $u \in X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta)$  tal que  $\|u\| = 1$  e

$$\text{TMC}(\sigma_1, \alpha, \theta) = \int_0^{\infty} \varphi_p \left( \sigma_1 |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta}. \quad (3.56)$$

Assim, pelo Lema 3.8, (3.55) e (3.56), temos que

$$\begin{aligned} \frac{(p-1)!}{\sigma_2^{p-1}} \text{TMC}(\sigma_2, \alpha, \theta) &\geq \frac{(p-1)!}{\sigma_2^{p-1}} \int_0^{\infty} \varphi_p \left( \sigma_2 |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta} \\ &> \frac{(p-1)!}{\sigma_1^{p-1}} \int_0^{\infty} \varphi_p \left( \sigma_1 |u|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta} \\ &= \frac{(p-1)!}{\sigma_1^{p-1}} \text{TMC}(\sigma_1, \alpha, \theta) \\ &\geq \frac{(p-1)!}{\sigma_1^{p-1}} \frac{\sigma^{k_0}}{k_0!} \\ &= 1 \end{aligned}$$

uma vez que  $k_0 = p-1$ . Logo,

$$\frac{(p-1)!}{\sigma_2^{p-1}} \text{TMC}(\sigma_2, \alpha, \theta) > 1$$

e, portanto, pela parte (ii) do Teorema 3.6, segue que  $\text{TMC}(\sigma_2, \alpha, \theta)$  é atingido. ■

**Teorema 3.7** *Seja  $k_0 = p-1$  e  $\alpha, \theta$  como no Teorema 3.4, isto é,  $\alpha = p-1$  e  $\theta \geq 0$ . Suponha*

$$\sigma_* := \inf \{ \sigma \in (0, \mu_{\alpha, \theta}); \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) \text{ é atingido} \} < \mu_{\alpha, \theta}.$$

*Então*

*i)  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  é atingido para  $\sigma_* < \sigma < \mu_{\alpha, \theta}$ ;*

ii) A função  $v : (\sigma_*, \mu_{\alpha, \theta}) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$v(\sigma) = \frac{(p-1)!}{\sigma^{p-1}} \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$$

é estritamente crescente. Além disso, definindo  $\text{TMC}(0, \alpha, \theta) = 0$ , também vale que

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) \begin{cases} = \frac{\sigma^{p-1}}{(p-1)!} & , \text{ para } \sigma \in [0, \sigma_*] \\ > \frac{\sigma^{p-1}}{(p-1)!} & , \text{ para } \sigma \in (\sigma_*, \mu_{\alpha, \theta}) \end{cases} \quad (3.57)$$

e, em particular,

$$\sigma_* = \inf \left\{ \sigma \in (0, \mu_{\alpha, \theta}); \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) > \frac{\sigma^{p-1}}{(p-1)!} \right\}. \quad (3.58)$$

iii) Se  $p > 2$ , então  $\sigma_* = 0$  e, assim,  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  é atingido para qualquer  $(0, \mu_{\alpha, \theta})$ .

**Demonstração:** i) Observe que pela definição de  $\sigma_*$ , temos que  $\text{TMC}(\sigma_*, \alpha, \theta)$  é atingido. Logo, pelo Lema 3.9, segue que  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  é atingido para  $\sigma_* < \sigma < \mu_{\alpha, \theta}$ .

ii) Pelo Lema 3.9, a função

$$\sigma \mapsto \frac{(p-1)!}{\sigma^{p-1}} \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$$

é estritamente crescente em  $(\sigma_*, \mu_{\alpha, \theta})$ . Mostraremos agora que

$$\text{TMC}(\sigma_*, \alpha, \theta) = \frac{\sigma_*^{p-1}}{(p-1)!}. \quad (3.59)$$

De fato, lembre-se que, por hipótese, sabemos que

$$\text{TMC}(0, \alpha, \theta) = 0$$

e estamos assumindo que  $\sigma_* \in (0, \mu_{\alpha, \theta})$ . Assim, pelo Lema 3.8, temos que se (3.59) não ocorre, então

$$\text{TMC}(\sigma_*, \alpha, \theta) > \frac{\sigma_*^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Desse modo, como  $\sigma_* < \mu_{\alpha, \theta}$ , segue do item (ii) do Teorema 3.6 que  $\text{TMC}(\sigma_*, \alpha, \theta)$  é atingido para algum  $u_* \in X_{\infty}^{1,p}(\alpha, \theta)$ . Logo,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_*} \int_0^{\infty} \varphi_p \left( \sigma |u_*|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta} = \int_0^{\infty} \varphi_p \left( \sigma_* |u_*|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_{\theta} = \text{TMC}(\sigma_*, \alpha, \theta) > \frac{\sigma_*^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Assim, se  $\sigma \in (0, \sigma_*)$  é suficientemente próximo de  $\sigma_*$ , então

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) \geq \int_0^\infty \varphi_p \left( \sigma |u_*|^{\frac{p}{p-1}} \right) d\lambda_\theta > \frac{\sigma_*^{p-1}}{(p-1)!} > \frac{\sigma^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Utilizando novamente o item (ii) do Teorema 3.6, para cada  $\sigma \in (0, \sigma_*)$ , temos que  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  é atingido, o que é uma contradição com a definição de  $\sigma_*$ , já que neste caso teríamos que

$$\sigma_* = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TMC}(\sigma_*, \alpha, \theta) = 0 > \frac{\sigma_*^{p-1}}{(p-1)!} > 0.$$

Sendo assim, (3.59) é válido e, portanto, utilizando (3.59) e o Lema 3.9 item (ii), temos que para cada  $\sigma \in (\sigma_*, \mu_{\alpha, \theta})$  o supremo  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  é atingido e satisfaz

$$\frac{(p-1)!}{\sigma^{p-1}} \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) > \frac{(p-1)!}{\sigma_*^{p-1}} \text{TMC}(\sigma_*, \alpha, \theta) = \frac{(p-1)!}{\sigma_*^{p-1}} \cdot \frac{\sigma_*^{p-1}}{(p-1)!} = 1. \quad (3.60)$$

Além disso, pelo Lema 3.8, temos que para todo  $\sigma \in (0, \mu_{\alpha, \theta})$

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) \geq \frac{\sigma^{k_0}}{k_0!} = \frac{\sigma^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Mas pelo item (ii) do Teorema 3.6 e pela definição de  $\sigma_*$ , segue que

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) = \frac{\sigma^{p-1}}{(p-1)!}, \quad \forall \sigma \in [0, \sigma_*]. \quad (3.61)$$

Logo, de (3.60) e (3.61), segue 3.57. Por fim, denotando

$$\overline{\sigma_*} := \inf \left\{ \sigma \in (0, \mu_{\alpha, \theta}); \text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) > \frac{\sigma^{p-1}}{(p-1)!} \right\},$$

e utilizando o Teorema 3.6 item (ii), temos que

$$\sigma_* \leq \overline{\sigma_*}.$$

**Afirmção:**  $\overline{\sigma_*} = \sigma_*$ .

Suponha por absurdo que

$$\sigma_* < \overline{\sigma_*}.$$

Assim, escolhendo  $\sigma_0 \in (\sigma_*, \overline{\sigma_*})$ , segue do fato da função ser crescente que

$$\frac{(p-1)!}{\sigma_0} \text{TMC}(\sigma_0, \alpha, \theta) > \frac{(p-1)!}{\sigma_*^{p-1}} \text{TMC}(\sigma_*, \alpha, \theta) = 1$$

ou seja,

$$\text{TMC}(\sigma_0, \alpha, \theta) > \frac{\sigma_0^{p-1}}{(p-1)!}$$

o que é uma contradição com a definição de  $\overline{\sigma}_*$ . Logo, (3.58) é válida.

iii) Pelo Lema 3.8, se  $p > 2$ , então

$$\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta) > \frac{\sigma^{p-1}}{(p-1)!}, \quad \forall \sigma \in (0, \mu_{\alpha, \theta}),$$

e, portanto, pelo item (ii) do Teorema 3.7, segue que

$$\sigma_* = 0.$$

Por fim, pelo item (ii) do Teorema 3.6, concluímos que  $\text{TMC}(\sigma, \alpha, \theta)$  é atingido para todo  $\sigma \in (0, \mu_{\alpha, \theta})$ . ■

Uma consequência do Teorema 3.7 é que, uma vez que  $\text{TMC}(\sigma, 1, \theta)$  não é atingido para  $\sigma$  suficientemente pequeno (veja [1]), o Teorema 3.7 fornece que

$$\text{TMC}(\sigma, 1, \theta) = \sup_{\|u\| \leq 1} \int_0^\infty \phi_2(\sigma |u|^2) d\lambda_\theta = \sigma, \quad \forall \sigma \in [0, \sigma_*].$$

Dessa forma, demonstramos que a existência de funções extremantes para ambas as desigualdades de Trudinger-Moser resulta na explicitação de alguns desses supremos críticos da desigualdade de Trudinger-Moser, quando  $k_0 = p - 1$ , conforme previsto neste Capítulo.

# Referências Bibliográficas

- [1] Abreu, E. and Fernandes, L. G., Jr, *On a weighted Trudinger–Moser inequality in  $\mathbb{R}^N$* , J. Differential Equations **269** (2020), 3089–3118.
- [2] Adachi, S. and Tanaka, K., *Trudinger type inequalities in  $\mathbb{R}^N$  and their best exponents*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2051–2057.
- [3] Adams, D. R., *A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives*. Ann. of Math, (2) **128** (1988), 385–398.
- [4] Adimurthi and Druet, O., *Blow-up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger–Moser inequality*, Comm. Part. Diff. Equ., **29** (2004), 295–322.
- [5] Alvino, A., Brock, F., Chiacchio, F., Mercaldo, A. and Posteraro, M. R., *Some isoperimetric inequalities on  $\mathbb{R}^N$  with respect to weights  $|x|^\alpha$*  J. Math. Anal. Appl. **451** (2017), 280–318.
- [6] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1987.
- [7] Cao, D. M., *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in  $\mathbb{R}^2$* , Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 407–435.
- [8] Carleson, L. and Chang, S.-Y. A., *On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser*, Bull. Sci. Math. (2) **110** (1986), 113–127.
- [9] Cassani, D., Sani, F. and Tarsi, C, *Equivalent Moser type inequalities in  $\mathbb{R}^2$  and the zero mass case*, J. Funct. Anal. **267** (2014), 4236–4263.
- [10] Cherrier, P., *Cas d’exception du théorème d’inclusion de Sobolev sur les variétés Riemanniennes e applications*, Bull. Sci. Math. (2), **105** (1981), 235–288.

- [11] Cianchi, A., *A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces*, Indiana U. Math. J., **45** (1996), 39–65.
- [12] Cianchi, A., *Moser-Trudinger inequalities without boundary conditions and isoperimetric problems*, Indiana U. Math. J., **54** (2005), 669–705.
- [13] Cianchi, A., *Moser-Trudinger trace inequalities*, Adv. Math., **217** (2008), 2005–2044.
- [14] Clément, P., de Figueiredo, D. G. and Mitidieri, E., *Quasilinear elliptic equations with critical exponents*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **7** (1996), 133–170.
- [15] de Figueiredo, D. G., do Ó, J. M. and Ruf, B., *Elliptic Equations and systems with critical Trudinger-Moser nonlinearities*, Discrete Continuous Dyn Syst, **30** (2011), 455–476.
- [16] de Figueiredo, D. G., Miyagaki, O. H. and Ruf, B., *Elliptic equations in  $\mathbb{R}^2$  with nonlinearities in the critical growth range*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **3** (1995), 139–153.
- [17] de Oliveira, J. F., *On a class of quasilinear elliptic problems with critical exponential growth on the whole space*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **49** (2017), 529–550.
- [18] de Oliveira, J. F. and do Ó, J. M., *Trudinger–Moser type inequalities for weighted Sobolev spaces involving fractional dimensions*, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), 2813–2828.
- [19] de Oliveira, J. F. and do Ó, J. M., *Equivalence of critical and subcritical sharp Trudinger–Moser inequalities in fractional dimensions and extremal functions*, Rev. Mat. Iberoam. **39** (2023), 1073–1096
- [20] Di Nezza, E., Palatucci, G. and Valdinoci, E., *Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. math. **136** (2012) 521–573.
- [21] do Ó, J. M.,  *$N$ -Laplacian equations in  $\mathbb{R}^N$  with critical growth*, Abstr. Appl. Anal. **2** (1997), 301–315.

- [22] do Ó, J. M., Macedo, A. C. and de Oliveira, J. F., *A sharp Adams-type inequality for weighted Sobolev spaces*, Q. J. Math. **71** (2020), 517–538.
- [23] Flucher, M., *Extremal functions for the Trudinger–Moser inequality in 2 dimensions*, Comment. Math. Helv. **67** (1992), 471–497.
- [24] Fontana, L., *Sharp borderline Sobolev inequalities on compact Riemannian manifolds*, Comment. Math. Helv. **68** (1993), 415–454.
- [25] Ikoma, N., Ishiwata, M. and Wadade, H., *Existence and non-existence of maximizers for the Moser–Trudinger type inequalities under inhomogeneous constraints* Math. Ann. **373** (2019), 831–851.
- [26] Ishiwata, M., *Existence and nonexistence of maximizers for variational problems associated with Trudinger–Moser type inequalities in  $\mathbb{R}^N$* , Math. Ann. **351** (2011), 781–804.
- [27] Lam, N. and Lu, G., *Sharp Moser–Trudinger inequality on the Heisenberg group at the critical case and applications*, Adv. Math. **231** (2012), 3259–3287.
- [28] Lam, N. and Lu, G., *Sharp singular Adams inequalities in high order Sobolev spaces* Methods Appl. Anal. **19** (2012), 243–266.
- [29] Lam, N. and Lu, G., *A new approach to sharp Moser–Trudinger and Adams type inequalities: a rearrangement-free argument*, J. Differential Equations **255** (2013), 298–325.
- [30] Lam, N., Lu, G. and Zhang, L., *Equivalence of critical and subcritical sharp Trudinger–Moser–Adams inequalities*, Rev. Mat. Iberoam. **33** (2017), 1219–1246.
- [31] Lam, N., Lu, G. and Zhang, L., *Existence and nonexistence of extremal functions for sharp Trudinger–Moser inequalities*, Adv. in Mathematics **352** (2019), 1253–1298.
- [32] Lam, N., Lu, G. and Zhang, L., *Sharp singular Trudinger–Moser inequalities under different norms*, Adv. Nonlinear Stud. **19** (2019), 239–261.

- [33] Li, Y. X., *Extremal functions for the Moser–Trudinger inequalities on compact Riemannian manifolds*, Sci. China Ser. A **48** (2005), 618–648.
- [34] Li, Y., *Moser–Trudinger inequality on compact Riemannian manifolds of dimension two*, J. Partial Differential Equ., **14** (2001), 163–192.
- [35] Li, J. and Lu, G., *Critical and subcritical Moser–Trudinger inequalities on complete noncompact Riemannian manifolds*, Adv. in Mathematics **389** (2021) 107915.
- [36] Li, Y. X. and Ruf, B., *A sharp Trudinger–Moser type inequality for unbounded domains in  $\mathbb{R}^n$* , Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), 451–480.
- [37] Lin, K., *Extremal functions for Moser’s inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 2663–2671.
- [38] Lions, P.-L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations, The limit case, part 1*, Rev. Mat. Iberoamericana, **1** (1985), 145–201.
- [39] Lu, G. and Tang, H., *Best constants for Moser–Trudinger inequalities on high dimensional hyperbolic spaces*, Adv. Nonlinear Stud. **13** (2013), 1035–1052.
- [40] Lu, G. and Tang, H., *Sharp singular Trudinger–Moser inequalities in Lorentz–Sobolev spaces*, Adv. Nonlinear Stud. **16** (2016), 581–601.
- [41] Lu, G. and Yang, Y., *Adams’ inequalities for bi-Laplacian and extremal functions in dimension four*, Adv. Math. **220** (2009), 1135–1170.
- [42] Masmoudi, N. and Sani, F., *Adams’ inequality with the exact growth condition in  $\mathbb{R}^4$* , Commun. Pure Appl. Math. **67** (2014), 1307–1335.
- [43] Moser, J., *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970/71), 1077–1092.
- [44] Opic, B. and Kufner, A., *Hardy-type inequalities*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 219, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.
- [45] Ozawa, T., *On critical cases of Sobolev’s inequalities*, J. Funct. Anal. **127** (1995), 259–269.



- [46] Panda, R., *Nontrivial solution of a quasilinear elliptic equation with critical growth in  $\mathbb{R}^N$* , Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **105** (1995), 425–444.
- [47] Pohožaev, S. I., *The Sobolev embedding in the case  $pl = n$* , Proc. of the Technical Scientific Conference on Advances of Scientific Research 1964–1965, Mathematics Section, (Moskov. Energet. Inst., Moscow), (1965), 158–170.
- [48] Ruf, B., *A sharp Trudinger–Moser type inequality for unbounded domains in  $\mathbb{R}^2$* , J. Funct. Anal. **219** (2005), 340–367.
- [49] Ruf, B. and Sani, F., *Sharp Adams-type inequalities in  $\mathbb{R}^n$* , Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), 645–670.
- [50] Struwe, M., *Critical points of embeddings of  $H_0^{1,n}$  into Orlicz spaces*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **5** (1988), 425–464.
- [51] Tarsi, C., *Adams’ inequality and limiting Sobolev embeddings into Zygmund spaces*, Potential Anal. **37** (2012), 353–385.
- [52] Trudinger, N. S., *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473–483.
- [53] Yang, Y., *Extremal functions for Moser-Trudinger inequalities on 2-dimensional compact Riemannian manifolds with boundary*, Internat. J. Math., **17** (2006), 313–330.