



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Marcos Lucena Rodrigues

**Um estudo sobre a energia do campo
gravitacional em espaços-tempo estáticos e
esfericamente simétricos no contexto do
teleparalelismo**

João Pessoa - PB

2025



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Marcos Lucena Rodrigues

**Um estudo sobre a energia do campo gravitacional em
espaços-tempo estáticos e esfericamente simétricos no
contexto do teleparalelismo**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física na área de concentração de Gravitação e Cosmologia

Orientador: Jansen Brasileiro Formiga

João Pessoa - PB

2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R696e Rodrigues, Marcos Lucena.

Um estudo sobre a energia do campo gravitacional em espaços-tempo estáticos e esfericamente simétricos no contexto do teleparalelismo / Marcos Lucena Rodrigues.
- João Pessoa, 2025.
108 f. : il.

Orientação: Jansen Brasileiro Formiga.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Campo gravitacional. 2. Teleparalelismo. 3. Espaço-tempo esfericamente simétrico. 4. Tensor de energia-momento. 5. Densidade de energia. I. Formiga, Jansen Brasileiro. II. Título.

UFPB/BC

CDU 52-336(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** do aluno **Marcos Lucena Rodrigues**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos sete dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e cinco, às 10h00, na sala virtual meet.google.com/ewr-rfgq-bdw, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Gravitação e Cosmologia, de **Marcos Lucena Rodrigues**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Jansen Brasileiro Formiga (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Fábio Leal de Melo Dahia (UFPB) e Iarley Pereira Lobo (UFPB). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jansen Brasileiro Formiga comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada “*Um estudo sobre a energia do campo gravitacional em espaços-tempo estáticos e esféricamente simétricos no contexto do teleparalelismo*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Ana Beatriz Cândido Vieira, Assistente em Administração, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **07 de fevereiro de 2025**.

Documento assinado digitalmente
 **JANSEN BRASILEIRO FORMIGA**
Data: 11/02/2025 10:05:23-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga
Orientador - PPGF/UFPB

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
 **IARLEY PEREIRA LOBO**
Data: 10/02/2025 18:00:52-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Iarley Pereira Lobo
CCA/UFPB

Pedro “L1veStar” Paulo (in memoriam).

Agradecimentos

À todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação como físico. Em especial, os meus pais e minha avó, que me proporcionaram a condição e a autonomia de seguir um caminho voltado ao intelecto e ao conhecimento. E também, o meu orientador, professor Jansen Brasileiro Formiga, que me guia e me inspira como físico.

À CAPES pelo suporte financeiro.

“Como é possível alguém escrever umas poucas fórmulas simples e elegantes, como poemas curtos governados pelas regras estritas do soneto ou do waka, e prever regularidades universais da natureza?” (Murray Gell-Mann)

Resumo

A teoria da relatividade geral não oferece de forma satisfatória uma definição de um tensor de energia-momento para o campo gravitacional. A formulação alternativa da gravidade, conhecida como teleparallelismo equivalente à relatividade geral, baseada na geometria de Weitzenböck e cujo campo fundamental é o campo de tetradas, surge como uma possível solução para esse problema. Portanto, esta dissertação se propõe a, partindo das equações de campo do teleparallelismo equivalente à relatividade geral, estudar a energia de espaços-tempo estáticos e esfericamente simétricos e verificar sua consistência. Como método de análise, calculamos o tensor de energia-momento do espaço-tempo e do campo gravitacional para esses espaços-tempo e particularizamos o resultado para dois casos: buracos negros de Reissner-Nordström-de Sitter e um buraco negro regular com carga magnética no contexto da eletrodinâmica não linear. Os resultados obtidos foram consistentes com o que esperávamos: o 4-momento possui apenas componente temporal e o fluxo de energia, tanto do espaço-tempo quanto gravitacional, é nulo. Para o espaço-tempo de Reissner-Nordström-de Sitter, confirmamos a compatibilidade dos nossos resultados com a primeira lei da termodinâmica para os buracos negros, além de obter também, que a densidade de energia do campo gravitacional é sempre negativa. Além disso, obtivemos que a densidade de energia gravitacional por unidade de comprimento tem o mesmo valor para todos os horizontes. Para o caso do buraco negro regular, verificamos que a energia do espaço-tempo tende à energia ADM no limite de r indo para o infinito e que a densidade de energia e pressão do espaço-tempo são negativas para um certo valor de r .

Palavras-chave: teleparallelismo; espaço-tempo esfericamente simétrico; tensor de energia-momento; densidade de energia; campo gravitacional.

Abstract

The theory of general relativity does not offer in a satisfactory way a definition of the gravitational energy-momentum tensor. The alternative formulation of the gravity, known as the teleparallel equivalent of general relativity, based on the Weitzenböck geometry and whose fundamental field is the tetrad field, arises as an possible solution to this problem. Therefore, based on the field equations of the teleparallel equivalent of general relativity, this master's thesis proposes to study the static and spherically symmetric spacetime energy and to verify the consistency of the results. As an approach to analysis, we calculate the gravitational and spacetime energy-momentum tensor to these spacetime and focus on two particular cases: Reissner-Nordström-de Sitter black hole and a regular black hole with a magnetic charge in the context of nonlinear electrodynamics. The results obtained were fully consistent to what we expected: the 4-momentum only have temporal component and both spacetime and gravitational energy flux vanishes. In the case of Reissner-Nordström-de Sitter spacetime, we confirm the compatibility of our results with the first law of black holes thermodynamics, and that the gravitational energy density is always negative. Furthermore, we obtain that the gravitational energy density per length has the same value to all the horizons; but for the density of the spacetime, this only occurs when $Q = 0$. In the regular black holes case, we find that the spacetime energy tends to ADM energy in the limit of r going to infinity and that both pressure and energy density of spacetime are negative to an certain value of r .

Keywords: teleparallelism; spherically symmetric spacetime; energy-momentum tensor; energy density; gravitational field.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Mudança de coordenadas de um ponto P.	19
Figura 2 – Representação coordenada de uma curva no $\mathbb{R}^n$	20
Figura 3 – Noção heurística do transporte paralelo de um vetor.	33
Figura 4 – Transporte paralelo de V na direção definida por U	35
Figura 5 – Efeito da torção na geometria.	39
Figura 6 – Transporte de V^α ao redor de um loop.	43
Figura 7 – Efeito da torção, curvatura e não metricidade em uma geometria. . . .	45
Figura 8 – Este diagrama exhibe a relação entre os mais variados tipos de geometrias não-riemannianas dado que definimos uma conexão afim na variedade.	46
Figura 9 – Um relógio na dianteira de um foguete acelerado parece estar em ritmo mais acelerado que um relógio na traseira do foguete.	53
Figura 10 – Superfícies t e r constantes: S_+ representa o caso $r = R_+$, enquanto S_L representa $r = L$	86

Lista de abreviaturas e siglas

ADM	Sigla associada aos autores Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles W. Misner.
TEGR	Teleparallel Equivalent of General Relativity

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	GEOMETRIA RIEMANNIANA E NÃO-RIEMANNIANA	17
2.1	Espaços Topológicos	17
2.2	Variedade	18
2.3	Vetores	19
2.4	1-Formas	24
2.5	Tensores	25
2.5.1	Tensor Métrico	29
2.6	Noção heurística de derivada covariante	31
2.7	Conexão afim e derivada covariante	33
2.8	Conexão riemanianna	36
2.9	Torção	37
2.10	Curvatura	40
2.11	Não-Metricidade	43
2.12	Geometria não-riemanianna e Conexão de Weintzböck	44
2.13	Teorema de Stokes	46
2.13.1	Elemento de volume invariante	46
2.13.2	Divergência e teorema de Stokes	47
3	RELATIVIDADE GERAL	49
3.1	Princípio da relatividade geral	50
3.2	Equações de campo de Einstein	53
3.3	Equações de Einstein-Maxwell	55
3.4	Colapso Gravitacional	56
3.5	Soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström-de Sitter	57
3.6	Decomposição de Eckart	59
3.7	Termodinâmica de buracos negros	60
4	TELEPARALELISMO EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL	63
4.1	Expansão de alguns objetos em bases não-coordenadas	63
4.1.1	Parênteses de Lie	64
4.1.2	Conexão	64
4.1.3	Curvatura e Torção	65
4.2	Teleparalelismo	65
4.3	Campos de tetrada como referenciais no espaço-tempo	67

4.3.1	Tensor das acelerações	68
4.3.2	Transporte de Fermi-Walker	69
4.4	Equações de campo do TEGR	69
4.5	Eletrodinâmica não-linear e buracos negros regulares	71
4.6	Maquinário híbrido	72
5	ENERGIA EM ESPAÇOS-TEMPO ESFERICAMENTE SIMÉTRICOS	74
5.1	Frame teleparalelo em um espaço-tempo esfericamente simétrico .	74
5.1.1	Torção	75
5.1.2	Conexão de Levi-Civita	76
5.1.3	Tensor das acelerações	76
5.2	Energia-momento de um espaço-tempo esfericamente simétrico .	76
5.2.1	Superpotencial	76
5.2.2	Energia-momento do espaço-tempo	77
5.3	Tensor de energia-momento do espaço-tempo	78
5.4	Tensor de energia-momento do campo gravitacional	79
5.5	Decomposição de Eckart de $\tau^{\mu a}$, $t^{\mu a}$ e $t_{\Lambda}^{\mu a}$	80
5.5.1	Campo gravitacional	80
5.5.2	Espaço-tempo	80
5.5.3	Constante cosmológica	81
5.6	Buraco negro de Reissner-Nordström-de Sitter	81
5.6.1	Verificando a consistência da energia	82
5.6.2	Densidades	83
5.6.3	Energia na região $R_+ < r < L$	85
5.7	Buraco negro regular	86
5.7.1	Densidades	87
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	88
	REFERÊNCIAS	90
	APÊNDICES	94
	APÊNDICE A – TORÇÃO	95
	APÊNDICE B – CONEXÃO DE LEVI-CIVITA	97
	APÊNDICE C – TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO DO ESPAÇO-TEMPO	98

	APÊNDICE D – TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO DO CAMPO GRAVITACIONAL	101
	APÊNDICE E – DECOMPOSIÇÃO DE ECKART	105
E.1	Campo gravitacional	105
E.2	Espaço-tempo	105
E.2.1	ρ e p - Buraco negro de Reissner-Nordström-de Sitter	106
E.2.2	ρ e p - Buraco negro regular	108

1 Introdução

Alguns anos após obter grande sucesso concebendo uma nova teoria para a gravitação, no verão de 1928, Albert Einstein começa a trabalhar numa nova teoria que visava unificar o campo eletromagnético e gravitacional através dos graus de liberdade extras do campo de tetradas. Depois de muitas tentativas, Einstein chega a uma teoria, mas não obteve sucesso no seu objetivo inicial; percebeu que os graus de liberdade supracitados não eram capazes de dar conta de uma descrição do campo eletromagnético, o que culminou no abandono deste projeto na primavera de 1931. A teoria na qual ele trabalhava era baseada numa geometria não-riemana conhecida como geometria de Weitzenböck, cuja conexão afim associada tem curvatura nula. Em 1927 Eisenhart (EISENHART, 1927) demonstra que qualquer teoria baseada em uma variedade n -dimensional dotada de uma conexão afim cuja curvatura associada se anula, é uma teoria chamada de teleparalela. Historicamente, a tentativa de unificação do Einstein foi uma das primeiras vezes em que uma teoria teleparalela foi utilizada. Teorias teleparalelas voltam a aparecer alguns anos depois em diferentes contextos, como por exemplo, sendo um possível caminho para se resolver o problema da localização da energia do campo gravitacional, em 1961, no artigo de Møller (Møller, 1961). Mais tarde, em 1976, Cho, resolvendo formular uma teoria de gauge para o grupo das translações (CHO, 1976), chegou por acidente na mesma lagrangeana na qual Einstein trabalhava quando tentava unificar o campo eletromagnético e gravitacional. Em 1977, K. Hayashi (HAYASHI, 1977) mostrou que a teoria na qual Cho estava trabalhando era uma teoria gravitacional baseada no espaço de Weitzenböck.

Em 1916 Einstein tenta calcular o tensor de energia-momento para o campo gravitacional, mas não obtém sucesso; seus resultados sempre levavam-no a uma quantidade dependente do sistema de coordenadas. Este é um problema ainda em aberto na física, e normalmente atribui-se essa falha ao princípio da equivalência. Este argumento é sustentado pela afirmação de que sempre é possível encontrar um sistema de coordenadas onde os coeficientes da conexão de Levi-Civita (símbolos de Christoffel) se anulam e, portanto, a métrica é localmente plana (MALUF et al., 2023). No entanto, esta é uma questão bastante controversa; uma mudança no sistema de coordenadas não deve ter implicações físicas tão importantes. Neste contexto, o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR, da sigla em inglês) oferece uma descrição da energia gravitacional que é independente do sistema de coordenadas e, por isso, é considerada mais promissora.

O TEGR é uma formulação alternativa da gravidade baseada na geometria de Weitzenböck e cujo campo fundamental é o campo das tetradas (conjunto de 4 vetores ortonormais). Como o próprio nome sugere, o TEGR é equivalente à relatividade geral, pois suas equações de campo são equivalente às da relatividade geral. Há várias teorias

teleparalelas que vão além do TEGR. Muitas têm sido usadas em diversas aplicações, dentre as quais podemos citar: definição da energia total do espaço-tempo; definição da energia do campo gravitacional (MALUF, 2013); explicação para a atual expansão acelerada do universo sem a necessidade de uma pressão negativa (BENGOCHEA; FERRARO, 2009; CARDONE; RADICELLA; CAMERA, 2012; CAI et al., 2016), análise da entropia de buracos negros (HAMMAD et al., 2019), etc. Os pioneiros na formulação Hamiltoniana do TEGR foram Nester (NESTER, 1989) e Maluf (MALUF, 1994; MALUF; ROCHA-NETO, 1999; MALUF; ROCHA-NETO, 2001; MALUF et al., 2002; NETO; MALUF; ULHOA, 2010). Nos trabalhos do Maluf, é possível encontrar uma definição do 4-momento do espaço-tempo canonicamente conjugado, e também de um objeto que se comporta como momento angular, sendo interpretado como o momento angular do campo gravitacional.

Nesta dissertação, estudamos a energia de espaços-tempo esfericamente simétricos e estáticos. Como método de análise, calculamos as quantidades do TEGR que estão associadas às noções de energia e momento, e analisamos a consistência dos resultados. Para isso, usamos um referencial estático cuja parte espacial não possui rotações, além de ser um referencial inercial global na ausência de gravidade. Comparamos nossos resultados com os da literatura, em especial os obtidos por Maluf (MALUF, 1996) e David Brown (BROWN; YORK, 1993). Também fazemos uma decomposição de Eckart (ECKART, 1940) dos tensores de energia-momento e analisamos o sinal da densidade de energia e da pressão isotrópica, além de verificar que não há fluxo de energia. Dividimos o conteúdo desta dissertação da seguinte forma: os capítulos 2, 3, e 4 são dedicados a uma revisão de geometria diferencial, relatividade geral e teleparalelismo, respectivamente; enquanto os resultados das pesquisas estão nos capítulos 5 e 6, sendo este último um resumo dos resultados obtidos. O leitor será antes preparado com o ferramental matemático necessário (capítulo 2) para entender a física que se segue. No capítulo 3, apresentamos a teoria da relatividade geral, partindo do princípio fundamental que norteia esta última, até chegar nas equações de Einstein. Ainda nesse capítulo, discorremos brevemente sobre as equações de Einstein-Maxwell, cuja solução será de suma importância no que se sucede. Além disso, falamos brevemente sobre a inevitabilidade da formação dos chamados buracos negros, como um estado final de colapsos gravitacionais. Por fim, exibimos resumidamente as leis que regem a dinâmica desses corpos e explicitamos sua incrível semelhança com as leis da termodinâmica.

No capítulo 4, apresentamos a noção de teleparalelismo presente no TEGR, escrevemos expressões dos objetos geométricos definidos no capítulo 2 em termos de bases não-coordenadas, bem como introduzimos a ideia de usar campos de tetrada como referenciais no espaço-tempo, além de também mostrar como estudar o estado de movimento desses referenciais. Na sequência, escrevemos as equações de campo do TEGR numa tetrada teleparalela e também o seu acoplamento com a eletrodinâmica não-linear, cuja solução é estudada no capítulo seguinte. O capítulo 5 é dedicado a escrever equações gerais, no

contexto de espaços-tempo esfericamente simétricos, para as quantidades relevantes para o cálculo da energia, e realizar a decomposição de Eckart, para obter as densidades de energia, pressão isotrópica e fluxo de calor do espaço-tempo e campo gravitacional. Nesse mesmo capítulo, analisamos a consistência dos resultados obtidos, além de comparar com aqueles que já existem na literatura. A decomposição de Eckart, tanto para o caso geral de espaços-tempo esfericamente simétricos quanto para o caso particular do buraco negro de Reissner-Nordström-de Sitter, é um resultado inédito e que é estudado com detalhes nesse capítulo. Para não prejudicar o entendimento dos aspectos mais importantes deste trabalho, colocamos o passo a passo das contas nos apêndices.

2 Geometria riemanniana e não-riemanniana

Se a natureza fosse um livro escrito em linguagem matemática e seus caracteres fossem triângulos, círculos e outras figuras geométricas, seria humanamente impossível compreendê-la sem uma formação em geometria. O grande palco no qual ocorrem os fenômenos da natureza, é, de acordo com a relatividade geral, uma variedade quadridimensional, que curva-se na presença de matéria e energia. Nesta última sentença, as palavras "variedade" e "curvatura" remetem à geometria diferencial, cujo formalismo nos permitirá explorar os pormenores da teoria da gravitação einsteiniana. Sendo assim, o conteúdo deste primeiro capítulo visa preparar o leitor com o ferramental necessário para compreender a física por trás desta dissertação. Nas primeiras cinco seções, um conjunto de definições serão apresentadas, com o objetivo de familiarizar o leitor com entidades tais como: espaços topológicos, variedade, vetores, 1-formas e tensores. Na sequência, o leitor será apresentado a uma nova estrutura, que quando aliada às definições anteriores, permitirá introduzir novas operações (derivada covariante), e novas entidades geométricas (torção, curvatura e não-metricidade), além de permitir diferenciar dois tipos de geometria: riemanniana e não-riemanniana; este será o conteúdo das seções 2.6 até a seção 2.11. Na seção 2.12 será comentado brevemente sobre os tipos de geometria não-riemanniana, e, por fim, na seção 2.13 será definido o teorema de Stokes em variedades.

2.1 Espaços Topológicos

Definição 2.1.1 *Um espaço topológico é um conjunto χ de subconjuntos $T = \{U_i | i \in I\}$, onde os U_i são chamados de conjuntos abertos, que satisfazem às seguintes propriedades:*

- i) O conjunto χ e o espaço vazio $\emptyset$ são conjuntos abertos¹.*
- ii) A união dos conjuntos abertos também é um aberto.*
- iii) A intersecção dos conjuntos abertos também é um aberto.*

O conjunto T é chamado de topologia de χ e o par (χ, T) é o espaço topológico. Definiremos agora a noção de um mapa entre dois espaços topológicos.

Definição 2.1.2 *Seja χ_1 e χ_2 dois espaços topológicos. Seja φ uma função contínua tal que $\varphi : \chi_1 \rightarrow \chi_2$ com a inversa φ^{-1} também contínua. Uma função definida de tal forma é dita ser um homeomorfismo. Se existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, eles são dito serem homeomorfos.*

¹ Um conjunto é aberto no $\mathbb{R}^n$ se para todo elemento pertencente ao conjunto, existe uma vizinhança que contém o conjunto. Para mais detalhes, ver seção 1.1 da ref. (SCHUTZ, 1980)

A função φ definida dessa forma implica que χ_1 e χ_2 tem a mesma topologia (NAKAHARA, 2003). Vamos agora definir uma outra aplicação chamada de métrica, da seguinte forma:

Definição 2.1.3 *Uma métrica $d : \chi \times \chi \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação que satisfaz às seguintes propriedades:*

- i) $d(x, y) = d(y, x)$
- ii) $d(x, y) \geq 0$
- iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Para qualquer $x, y \in \chi$. Se a topologia de χ é dotada de uma métrica, os conjuntos abertos são promovidos à “bolas abertas” de raio ϵ ,

$$U_\epsilon(\chi) = \{x \in \chi | d(x, y) < \epsilon\} \quad (2.1)$$

e todas as suas possíveis uniões. Dessa forma, a topologia T recebe o nome de topologia métrica e o espaço topológico (χ, T) é chamado de espaço métrico (NAKAHARA, 2003).

2.2 Variedade

As definições da seção anterior nos permitirão definir agora uma outra estrutura chamada de variedade.

Definição 2.2.1 *Uma variedade diferenciável n -dimensional M é um espaço topológico cujos pontos têm vizinhanças homeomórficas à um conjunto aberto no $\mathbb{R}^n$ e satisfazem às seguintes propriedades:*

i) A união de todos os conjuntos abertos devem cobrir toda a variedade, isto é, $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$.

ii) A intersecção entre os conjuntos abertos é não vazia, ou seja, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

iii) Dado U_α e U_β de forma que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, o mapa $\varphi_{\alpha\beta} \equiv \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ é um difeomorfismo.

O par $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, onde os φ_α são os homeomorfismos, são chamados de carta. Os φ_α também podem ser chamados de funções coordenadas, pois atribuem coordenadas $\{x_1(P), \dots, x_n(P)\}$ no $\mathbb{R}^n$ aos pontos $P \in M$. Entretanto, perceba que a existência dos pontos $P \in M$ independe da escolha de coordenadas; somos nós que atribuímos coordenadas a estes pontos mapeando-os no $\mathbb{R}^n$. Note também pela definição que localmente a variedade tem a mesma topologia do $\mathbb{R}^n$. A noção de variedade diferenciável surge da propriedade iii), onde exigimos que o mapa $\varphi_{\alpha\beta}$ seja um difeomorfismo. Um difeomorfismo nada mais é do que um homeomorfismo com a propriedade extra de que o próprio mapa

e sua inversa, nesse caso $\varphi_{\alpha\beta}^{-1}$, sejam de classe $C^{\infty 2}$. O mapa $\varphi_{\alpha\beta}$ pode ser pensado como uma transformação de coordenada pois, por definição, $\varphi_{\alpha\beta} : \varphi_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \subset \mathbb{R}^n$. Pictoricamente, temos a seguinte representação para as discussões precedentes:

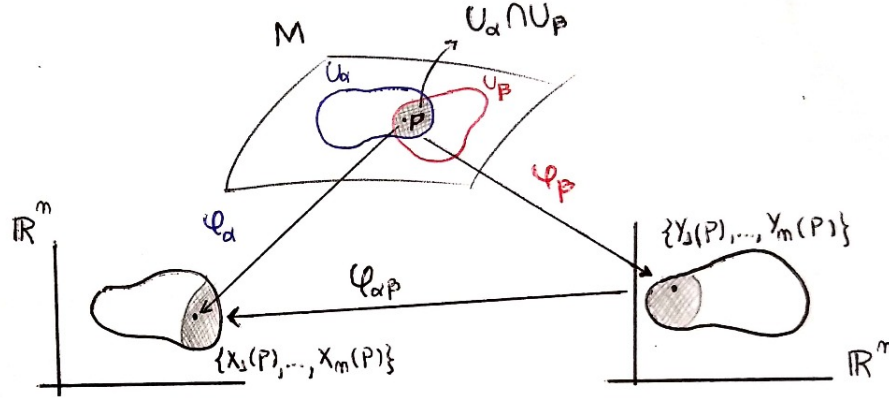


Figura 1 – Mudança de coordenadas de um ponto P.

Na física, a noção de variedade é imprescindível para se descrever o espaço-tempo. Veremos posteriormente que na teoria da relatividade o espaço-tempo é descrito por uma variedade 4-dimensional. Mas por que uma variedade? Conforme comentado antes, localmente uma variedade “se parece” com o $\mathbb{R}^n$; e note que, pelo princípio da equivalência de Einstein, o espaço-tempo curvo da relatividade geral é localmente plano. As teorias físicas modernas se preocupam em descrever fenômenos definindo quantidades que independam de um sistema de coordenadas específico; a noção de variedade é tal que permite definir entidades geométricas com essa natureza, portanto, seu conceito é fundamental na física teórica.

2.3 Vetores

Nesta seção repensaremos no conceito de vetores como entidades geométricas desvinculadas de um sistema de coordenadas. Começaremos primeiro definindo curvas diferenciáveis em uma variedade.

Definição 2.3.1 *Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional. Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que γ é uma curva diferenciável contida na variedade.*

Perceba que o que chamamos de curva é a aplicação diferenciável γ que associa um número $t \in \mathbb{R}$ chamado de parâmetro, a um ponto $\gamma(t) \in M$. O conjunto dos pontos $\gamma(t)$ é o chamado traço da curva na variedade (pictoricamente, o traço da curva é o seu

² Uma função de classe C^{∞} é uma função infinitamente diferenciável.

“desenho”). Contudo, é comum na literatura chamar de curva o traço de γ ; portanto, à menos de exceções que serão pontuadas quando necessário, chamaremos de curva o traço de γ . A partir da definição precedente, acompanhe agora o seguinte raciocínio. Consideremos uma carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ da variedade tal que uma curva γ qualquer esteja contida no aberto U_α . Se mapearmos cada ponto da curva no $\mathbb{R}^n$ usando o homeomorfismo φ_α , construiremos a chamada representação coordenada da curva γ no $\mathbb{R}^n$, isto é, $(\varphi_\alpha \circ \gamma) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esquematicamente isso pode ser visto na figura 2.

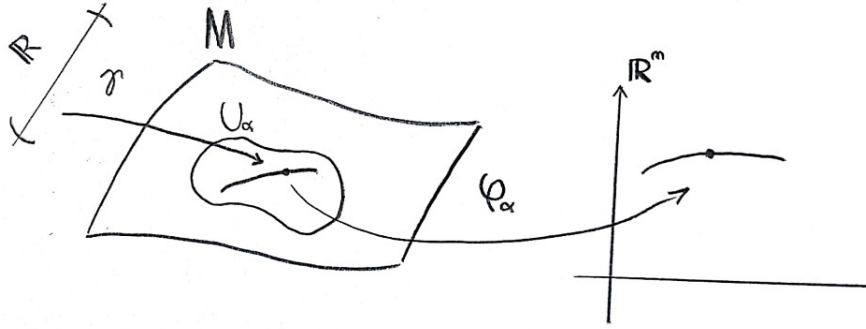


Figura 2 – Representação coordenada de uma curva no $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.3.2 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é diferenciável em M se sua representação coordenada for diferenciável no $\mathbb{R}^n$.*

A representação coordenada de f nada mais é do que o mapa $(f \circ \varphi_\alpha^{-1}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, uma função no $\mathbb{R}^n$. Note que para cada ponto $\gamma(t) \in M$ podemos calcular o valor de f neste ponto, ou seja, $f(\gamma(t))$. Note ainda que podemos também calcular como f varia ao longo da curva, tomando a derivada de f com relação a t , isto é, df/dt . É possível demonstrar que o conjunto dos operadores diferenciáveis forma um espaço vetorial, que chamaremos de espaço vetorial tangente no ponto $\gamma(t)$. Considere um ponto P qualquer da curva γ . Avaliemos

$$\left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_P. \quad (2.2)$$

Como as regras usuais do cálculo não são válidas nas variedades, podemos utilizar um mapa φ associado à vizinhança U de P para fazer esse cálculo no $\mathbb{R}^n$. Faremos isso inserindo o mapa identidade $\varphi^{-1} \circ \varphi$ da seguinte forma:

$$\left. \frac{d}{dt} [(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)(t)] \right|_P. \quad (2.3)$$

Das discussões anteriores fica claro que $(f \circ \varphi^{-1})$ e $(\varphi \circ \gamma)$ são as representações de f e γ no $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Adotaremos à fim de simplificar a notação, as escritas $F \equiv (f \circ \varphi^{-1})$ e $\gamma_c \equiv (\varphi \circ \gamma)$. Pela regra da cadeia, a expressão (2.3) será desenvolvida para

$$\left. \frac{d(F(\gamma_c(t)))}{dt} \right|_P = \left. \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} \right|_P. \quad (2.4)$$

Na equação anterior foi utilizada a convenção da soma de Einstein — que será utilizada durante todo o resto desta dissertação. De acordo com essa convenção, ficará implícito que uma soma está sendo feita nos índices repetidos. Reorganizado a expressão precedente de maneira conveniente, ficamos com:

$$\frac{d}{dt}f = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu} F. \quad (2.5)$$

Do lado esquerdo temos o operador d/dt — que é um vetor — atuando na função f . Do lado direito, temos a mesma expressão, porém expressa no $\mathbb{R}^n$. O leitor familiarizado com geometria diferencial de curvas reconhecerá dx^μ/dt como as componentes do vetor tangente à γ_c . Como F é a representação coordenada de f no $\mathbb{R}^n$, é inevitável fazer a seguinte associação:

$$\frac{d}{dt} \xrightarrow{\text{rep. coord.}} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.6)$$

Como dx^μ/dt são as componentes do vetor, ∂_μ ³ pode ser reconhecido como uma base para este vetor, e é chamada de base coordenada. Portanto, o espaço dos operadores diferenciáveis em $P \in M$ ao longo de curvas estão em correspondência biunívoca com o espaço dos vetores tangentes a P no $\mathbb{R}^n$ (SCHUTZ, 1980). Por esta razão, é comum dizermos que d/dt são os vetores tangentes às curvas γ_c . Todas as classes de equivalência de curvas em $P \in M$, isto é, todos os vetores tangentes em P , formam um espaço vetorial chamado espaço tangente de M em P , denotado por $T_P M$ (NAKAHARA, 2003). Note que a existência do vetor d/dt independe de qualquer sistema de coordenadas. Como ficou evidente, eles são operadores diferenciáveis que computam como uma função varia ao longo de uma curva; portanto, essencialmente, são derivadas direcionais. A existência das componentes e uma base associada só surgem quando o representamos no $\mathbb{R}^n$ por meio do mapa φ . Em suma, o vetor existe independente se atribuímos um sistema de coordenadas ou não; quando atribuímos um sistema de coordenadas, temos a chamada representação coordenada do vetor, que é onde surge as componentes e a base associada. Naturalmente, diferentes sistemas de coordenadas implicarão em diferentes representações coordenadas (componentes e bases diferentes), mas o vetor continuará sendo o mesmo. Além disso, o termo vetor é designado para se referir à um vetor específico avaliado em um ponto P . O termo campo vetorial também é utilizado na literatura, e significa uma regra matemática específica que atribui um vetor a cada ponto P da variedade. O conjunto dos campos vetoriais na variedade M será denotado por $\chi(M)$.

³ Quando conveniente, será utilizada a seguinte notação $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Estamos agora interessados em saber como se relaciona as componentes de um vetor em diferentes sistemas de coordenadas. Sejam $\{x^\nu\}$ e $\{x^{\mu'}\}$ dois sistemas de coordenadas. Para descobrir a relação entre as componentes, usaremos o fato que:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\{x^\nu\}} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\{x^{\mu'}\}} \quad (2.7)$$

e

$$V^\nu \partial_\nu = V^{\mu'} \partial_{\mu'}. \quad (2.8)$$

Lembrando que as operações acima são feitas em um ponto P específico da variedade, vamos supor que $P \in U_\alpha \cap U_\beta$, onde U_α e U_β são dois abertos da variedade. Da definição 2.2.1 sabemos que existe o mapa $\varphi_{\beta\alpha}$ que pode ser encarado como uma transformação de sistema de coordenadas. O $\varphi_{\beta\alpha}$ é uma aplicação da forma

$$\varphi_{\beta\alpha} \equiv \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^{1'}, \dots, x^{n'}), \quad (2.9)$$

ou seja, ele estabelece uma relação entre as coordenadas do ponto P no sistema de coordenadas $\{x^\nu\}$ e $\{x^{\mu'}\}$. Sabendo disso, o cálculo diferencial nos permite escrever que

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}. \quad (2.10)$$

Substituindo em (2.8), obtemos

$$V^\nu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = V^{\mu'} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \quad (2.11)$$

ou seja,

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (2.12)$$

A equação (2.12) é a lei de transformação de um vetor. Qualquer vetor da maneira como os definimos se transformará como em (2.12) mediante uma mudança no sistema de coordenadas. O termo $\partial x^{\mu'}/\partial x^\nu$ pode ser escrito no formato matricial, e recebe o nome de matriz jacobiana. Esta matriz é não singular, o que significa que é inversível, logo, nos permite escrever a relação inversa de (2.12), isto é, conhecendo $V^{\mu'}$ podemos encontrar V^ν . A relação inversa à (2.10) pode ser encarada como a lei de transformação das bases coordenadas. Note que esta mudança foi induzida por uma mudança no sistema de coordenadas, o que por sua vez induziu uma mudança nas componentes do vetor. Para chegar à relação inversa, basta trocar as posições das linhas, colocando-as no índice ν ; ou ainda, multiplicar de ambos os lados da igualdade por $\partial x^\nu/\partial x^{\mu'}$, para obter

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (2.13)$$

O leitor a princípio pode imaginar que as únicas bases existentes em $T_p M$ são as bases coordenadas, mas isto não é verdade. Podemos escrever os vetores em termos das chamadas bases não-coordenadas, que inclusive, desempenhará um papel muito importante nas seções futuras. De maneira simplificada, uma base é não-coordenada se não for possível escrevê-la na forma da derivada parcial de algum sistema de coordenadas. Ou ainda, de forma mais rigorosa, podemos definir um outro objeto matemático que nos permitirá identificar se uma base é ou não-coordenada.

Definição 2.3.3 *Seja V e W dois elementos de $\chi(M)$. O comutador entre V e W $[V, W]$ é definido por*

$$[V, W]f = V[W[f]] - W[V[f]] \quad (2.14)$$

em que f é uma função de classe C^∞ . O comutador também é conhecido na literatura como parênteses de Lie. Dado duas funções, f e g , de classe C^∞ , pode-se demonstrar que $[V, W]$ também pertence à $T_p M$ e obedece às propriedades de linearidade e a regra de Leibniz:

$$[V, W](af + bg) = a[V, W]f + b[V, W]g \quad (2.15)$$

$$[V, W](fg) = f[V, W](g) + g[V, W](f). \quad (2.16)$$

A representação coordenada de $[V, W]$ é da seguinte forma:

$$[V, W]f = V^\mu \partial_\mu (W^\nu \partial_\nu (F)) - W^\mu \partial_\mu (V^\nu \partial_\nu (F)) \quad (2.17)$$

$$[V, W]f = V^\mu (W^\nu \partial_\mu \partial_\nu F + \partial_\nu F \partial_\mu W^\nu) - W^\mu (V^\nu \partial_\mu \partial_\nu F + \partial_\nu F \partial_\mu V^\nu) \quad (2.18)$$

$$[V, W]f = (V^\mu \partial_\mu W^\nu - W^\mu \partial_\mu V^\nu) \partial_\nu F. \quad (2.19)$$

Onde a ν -ésima componente de $[V, W]$ é

$$[V, W]^\nu = V^\mu \partial_\mu W^\nu - W^\mu \partial_\mu V^\nu. \quad (2.20)$$

Fica claro que se $V = \partial_\mu$ e $W = \partial_\nu$, $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, como consequência da comutatividade das derivadas parciais. Por outro lado, para as bases não-coordenadas, $[\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu] \neq 0$.

Como comentado em sua definição, $dx^\mu/dt = V^\mu$ são as componentes de um vetor tangente a uma dada curva. Resolver esta equação diferencial significa encontrar a curva à qual o vetor V é tangente. Na verdade, como V é um campo vetorial, resolver esta equação é equivalente a encontrar uma família de curvas que preenche a variedade, e que em cada uma delas, tem V como vetor tangente. O teorema da existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias garante que a solução existe e é única. A esta família de curvas dá-se o nome de congruência, ou ainda, curvas integrais de V .

2.4 1-Formas

Nesta seção será definido um novo objeto geométrico, chamado de 1-forma. Estes objetos também podem ser chamados de vetores duais, vetores cotangentes ou ainda covetores. Começaremos introduzindo-os pela sua definição:

Definição 2.4.1 *Seja M uma variedade diferenciável. Seja T_pM o espaço dos vetores tangentes no ponto $P \in M$. Uma 1-forma é uma aplicação linear do tipo*

$$\omega : T_pM \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Um exemplo de uma 1-forma é a diferencial de uma função df , que é definido de forma à exercer o mesmo papel do gradiente de uma função f no $\mathbb{R}^n$. Sabemos que no $\mathbb{R}^n$

$$\nabla f(v) = \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (2.22)$$

Onde $v \in T_pM$ e $\partial f / \partial v \in \mathbb{R}$. Como estamos definindo df de forma que $df(v) \equiv \partial f / \partial v = v(f)$, usaremos o fato de sabermos calcular $v(f)$ para encontrar a forma coordenada de $df(v)$. Assumindo que em coordenadas df tenha a forma genérica $C_\mu b^\mu$, $df(v)$ fica:

$$df(v) = C_\mu b^\mu (V^\nu \partial_\nu) = V^\mu \partial_\mu F. \quad (2.23)$$

Para que a segunda igualdade seja satisfeita, imporemos a seguinte condição:

$$b^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu. \quad (2.24)$$

Impondo (2.10) em (2.9), obtemos que

$$C_\mu = \partial_\mu F. \quad (2.25)$$

Recordando que a diferencial de uma função no $\mathbb{R}^n$ tem a forma $\partial_\mu F dx^\mu$, somos levados a concluir que:

$$df \xrightarrow{\text{rep. coord.}} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (2.26)$$

Pode-se demonstrar que df forma um espaço vetorial, que será chamado de espaço vetorial cotangente, representado por T_p^*M . Também é possível mostrar que qualquer 1-forma pode ser expandida em termos de dx^μ que serve de base para o espaço $T_p^*M^4$. Da álgebra linear, sabemos que o espaço T_p^*M pode ser completamente caracterizado a partir da atuação do seus vetores de base nos elementos de base do T_pM . Dessa forma, a relação (2.24), chamada de relação de dualidade, pode ser reescrita como

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu, \quad (2.27)$$

⁴ O leitor interessado em mais detalhes pode consultar a seção 1, página 44 de (BAEZ; MUNIAIN, 1994)

o que nos permite saber como é a atuação de qualquer elemento do espaço T_p^*M nos elementos de T_p . Seja $\omega \in T_p^*M$ e $V \in T_pM$, a atuação $\omega(V)$ é escrita da seguinte forma:

$$\omega(V) = \omega_\mu dx^\mu (V^\nu \partial_\nu) \quad (2.28)$$

$$\omega(V) = \omega_\mu V^\mu. \quad (2.29)$$

No caso em que $\omega = df \implies \omega_\mu = \partial_\mu F$, e, das discussões anteriores, $V(f) = V^\mu \partial_\mu F$, que de (2.29) concluímos

$$V(f) \equiv df(V). \quad (2.30)$$

Da mesma forma que os vetores, os covetores possuem uma forma específica de se transformar mediante uma mudança no sistema de coordenadas. Assim como os vetores, as 1-formas são objetos geométricos independentes de um sistema de coordenadas, logo, podemos escrever que

$$\omega_\nu dx^\nu = \omega_{\mu'} dx^{\mu'}. \quad (2.31)$$

A relação entre os sistemas de coordenadas $\{x^\nu\}$ e $\{x^{\mu'}\}$ nos permite escrever que

$$dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} dx^{\mu'}. \quad (2.32)$$

Logo, substituindo (2.32) em (2.31), chegamos a

$$\omega_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \omega_\nu. \quad (2.33)$$

Todos os covetores se transformarão como em (2.33) mediante uma mudança no sistema de coordenadas. A matriz $\partial x^\nu / \partial x^{\mu'}$ é chamada de matriz jacobiana inversa e também é não singular, o que nos permite escrever a relação inversa de (2.32), que nada mais é do que a lei de transformação das bases de T_p^*M .

2.5 Tensores

Um tensor é uma extensão natural das definições de vetores e vetores duais.

Definição 2.5.1 *Seja M uma variedade diferenciável. Seja T_pM e T_p^*M o espaço dos vetores tangentes e cotangentes em um ponto P de M , respectivamente. Um tensor é uma aplicação multilinear do tipo*

$$T : T_p^*M \times \dots \times T_p^*M \times T_pM \times \dots \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.34)$$

O rank/ordem de um tensor é dado por $r = h + k$, onde h é o número de vetores duais e k é o número de vetores que T atua. O tipo do tensor é escrito como (h, k) . De imediato podemos perceber que os vetores e covetores são tensores do tipo $(1, 0)$ e $(0, 1)$,

respectivamente. As componentes de um tensor podem ser obtidas por definição atuando-os nos elementos de base de T_p^*M e T_p . Dessa forma, temos por exemplo:

$$T(dx^\mu, \partial_\nu) = T^\mu_\nu. \quad (2.35)$$

Quando o índice de um tensor⁵ ocorre como sobrescrito, ele é chamado de índice contravariante, já quando ocorre como subscrito, é chamado de índice covariante. Por este motivo, quando o tensor possui somente índices contravariantes, é chamado de tensor contravariante. Já quando possui somente índices covariantes, chama-se tensor covariante. Generalizando (2.35), temos

$$T(dx^\alpha, dx^\beta, \dots, \partial_\mu, \partial_\nu, \dots) = T^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots}, \quad (2.36)$$

que é um tensor misto, pois possui índices contravariantes e covariantes. Vamos agora definir uma operação nova que nos permitirá expandir os tensores em termos de uma base.

Definição 2.5.2 *Seja M uma variedade diferenciável. Seja T_pM e T_p^*M o espaço dos vetores tangentes e cotangentes em um ponto P de M , respectivamente. Seja V e W dois vetores $\in T_pM$. Definimos o produto tensorial entre V e W simbolizado por $V \otimes W$ como sendo a aplicação bilinear*

$$T_pM \otimes T_pM : T_p^*M \times T_p^*M \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.37)$$

$$V \otimes W : (\omega, \sigma) \mapsto V(\omega)W(\sigma) \in \mathbb{R} \quad (2.38)$$

Note de imediato que, pela definição, $V \otimes W \neq W \otimes V$. É possível também estender a definição 2.5.2 para incluir os casos $\omega \otimes \sigma$ e $\omega \otimes V$, onde ω e $\sigma \in T_p^*M$ e $V \in T_pM$. Não é difícil ver que os objetos definidos acima nada mais são do que tensores. Veja que podemos atuar $\partial_\mu \otimes \partial_\nu$ em dx^α e dx^β , para obter

$$\partial_\mu \otimes \partial_\nu(dx^\alpha, dx^\beta) = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu. \quad (2.39)$$

Mostraremos que $\partial_\mu \otimes \partial_\nu$ forma uma base para um tensor $(2, 0)$. Seja ω e σ dois elementos de T_p^*M . Façamos $T(\omega, \sigma)$.

$$T(\omega, \sigma) = T(\omega_\mu dx^\mu, \sigma_\nu dx^\nu) \quad (2.40)$$

$$T(\omega, \sigma) = \omega_\mu \sigma_\nu T^{\mu\nu} \quad (2.41)$$

Mas da definição 2.5.2 e usando (2.39), podemos substituir $\omega_\mu \sigma_\nu = \partial_\mu \otimes \partial_\nu(\omega, \sigma)$. Portanto, substituindo em (2.41), temos

$$T(\omega, \sigma) = T^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu(\omega, \sigma). \quad (2.42)$$

⁵ Há um vício de linguagem comum na literatura que é se referir às componentes dos tensores como simplesmente tensores, contudo, que fique claro que os tensores são na verdade aplicações multilineares. Porém, ao longo desta dissertação, faremos uso desse vício de linguagem.

Onde vemos que $T = T^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu$. De forma geral, podemos escrever qualquer tensor na forma

$$T = T^{\mu\nu\dots\xi}_{\alpha\beta\dots\gamma} dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes \dots \otimes dx^\gamma \otimes \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \dots \otimes \partial_\xi. \quad (2.43)$$

Assim como os vetores e os covetores, os tensores também possuem formas específicas de se transformar mediante uma mudança no sistema de coordenadas. Os índices contravariantes se transformarão como em (2.12), e os índices covariantes se transformarão como em (2.33). Assim, um tensor de tipo (h, k) se transforma como

$$T^{\mu'_1\dots\mu'_h}_{\nu'_1\dots\nu'_k} = T^{\mu_1\dots\mu_h}_{\nu_1\dots\nu_k} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu'_k}}{\partial x^{\nu_k}}. \quad (2.44)$$

Agora consideremos algumas operações entre tensores. A primeira delas é a adição: somar tensores corresponde a somar as componentes dos tensores de mesmo tipo, resultando num tensor do mesmo tipo. A segunda é a multiplicação por escalar: multiplicar as componentes de um tensor por um escalar resulta em novas componentes de um tensor do mesmo tipo. A terceira operação é a multiplicação entre as componentes de tensores, onde podemos formar novos tensores a partir do produto entre componentes. Por exemplo, se fizermos

$$T^{\alpha\beta}_{\gamma} \equiv S^{\alpha\beta} Q_{\gamma}, \quad (2.45)$$

onde $S^{\alpha\beta}$ e Q_{γ} são tensores $(2, 0)$ e $(0, 1)$ respectivamente, podemos mostrar que $T^{\alpha\beta}_{\gamma}$ é um tensor $(2, 1)$. Da lei de transformação dos tensores, temos:

$$T^{\alpha'\beta'}_{\gamma'} \equiv S^{\alpha'\beta'} Q_{\gamma'} = \partial_\rho x^{\alpha'} \partial_\sigma x^{\beta'} \partial_{\gamma'} x^\lambda S^{\rho\sigma} Q_\lambda \quad (2.46)$$

$$T^{\alpha'\beta'}_{\gamma'} = \partial_\rho x^{\alpha'} \partial_\sigma x^{\beta'} \partial_{\gamma'} x^\lambda T^{\rho\sigma}_{\lambda}. \quad (2.47)$$

Demonstrando assim que $T^{\alpha\beta}_{\gamma}$ de fato se transforma como um tensor $(2, 1)$.

A última operação é a contração. É comum aparecer na multiplicação das componentes dos tensores, índices contravariantes e covariantes repetidos, como por exemplo em (2.41). Considere um caso genérico qualquer, onde temos um tensor $(2, 0)$ $A^{\mu\nu}$ e um tensor $(0, 1)$ B_ν . Se efetuarmos a multiplicação entre $A^{\mu\nu}$ e B_ν , podemos fazer a contração entre os índices ν , implicando que $A^{\mu\nu} B_\nu$ se transformará como um tensor $(1, 0)$ C^μ . Acompanhe a rápida demonstração abaixo:

$$A^{\mu\nu'} B_{\nu'} = \partial_\rho x^{\mu'} \partial_\sigma x^{\nu'} \partial_{\nu'} x^\alpha A^{\rho\sigma} B_\alpha \quad (2.48)$$

sabendo que $\partial_\sigma x^{\nu'} \partial_{\nu'} x^\alpha = \delta_\sigma^\alpha$, temos que

$$A^{\mu\nu'} B_{\nu'} = \partial_\rho x^{\mu'} \delta_\sigma^\alpha A^{\rho\sigma} B_\alpha \quad (2.49)$$

$$A^{\mu\nu'} B_{\nu'} = \partial_\rho x^{\mu'} A^{\rho\alpha} B_\alpha \quad (2.50)$$

$$C^{\mu'} = \partial_\rho x^{\mu'} C^\rho, \quad (2.51)$$

onde vemos que $A^{\mu\nu}B_\nu = C^\mu$ de fato se transforma como um tensor $(1, 0)$. De forma geral, a contração se baseia em remover os índices repetidos (contraí-los) e manter os índices restantes em suas posições originais. Para o caso mais trivial onde temos por exemplo $\omega_\mu V^\mu$, o resultado é, por obviedade, um objeto sem índices, ou seja, um escalar.

Existem alguns tensores com algumas propriedades especiais em relação aos seus índices. Um tensor é dito simétrico em qualquer dos seus índices se ele fica inalterado mediante uma troca na ordem desses índices. Portanto, se $T_{\mu\nu\rho}$ é simétrico em todos índices, temos que

$$T_{\mu\nu\rho} = T_{\mu\rho\nu} = T_{\rho\mu\nu} = T_{\nu\mu\rho} = T_{\nu\rho\mu} = T_{\rho\nu\mu}. \quad (2.52)$$

Se $T_{\mu\nu\rho}$ for simétrico apenas no primeiro e terceiro índices, temos que

$$T_{\mu\nu\rho} = T_{\rho\nu\mu}. \quad (2.53)$$

Similarmente, um tensor é antissimétrico em qualquer dos seus índices se ele troca de sinal quando esses índices são trocados; logo,

$$S_{\mu\nu\rho} = -S_{\rho\nu\mu} \quad (2.54)$$

é dito ser antissimétrico no primeiro e terceiro índice. Se um tensor é antissimétrico em todos os índices, podemos nos referir a ele como completamente antissimétrico.

Dado qualquer tensor, podemos simetrizá-lo (ou anti simetrizá-lo) em qualquer número de índices. A simetrização é feita da seguinte forma

$$T_{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_n)\rho}{}^\sigma = \frac{1}{n!}(T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n\rho}{}^\sigma + \text{soma em todas as permutações possíveis nos índices}), \quad (2.55)$$

em que os índices entre parênteses são os índices simetrizados e n é o número de índices permutados. Se os índices simetrizados não estão próximos uns dos outros, fazemos

$$T_{(\mu|\nu|\rho)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\nu\mu}). \quad (2.56)$$

Já a antissimetrização é feita da seguinte maneira:

$$T_{[\mu_1\mu_2\ldots\mu_n]\rho}{}^\sigma = \frac{1}{n!}(T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n\rho}{}^\sigma + \text{soma alternada em todas as permutações possíveis nos índices}), \quad (2.57)$$

em que os índices entre colchetes são os índices antissimetrizados e n é o número de índices permutados. “Soma alternada” significa que um número ímpar de permutações nos índices torna a componente negativa, portanto

$$T_{[\mu\nu\rho]\sigma} = \frac{1}{6}(T_{\mu\nu\rho\sigma} - T_{\mu\rho\nu\sigma} + T_{\rho\mu\nu\sigma} - T_{\nu\mu\rho\sigma} + T_{\nu\rho\mu\sigma} - T_{\rho\nu\mu\sigma}). \quad (2.58)$$

Para quaisquer dois índices, sempre podemos escrever um tensor como a soma de sua parte simétrica e antissimétrica, portanto

$$T_{\mu\nu\rho\sigma} = T_{(\mu\nu)\rho\sigma} + T_{[\mu\nu]\rho\sigma}. \quad (2.59)$$

Em geral, isto não será válido para três índices.

2.5.1 Tensor Métrico

Na seção 2.1 definimos uma aplicação chamada de métrica que satisfazia algumas propriedades. Note que esta aplicação pegava elementos dos abertos do espaço topológico e atribuía um número real. Nas variedades com as quais estamos trabalhando, os elementos dos abertos são vetores e covetores, pertencentes aos espaços vetoriais definidos ponto à ponto. Na linguagem que estamos utilizando agora, a métrica pode ser reinterpretada como um tensor de rank 2.

Definição 2.5.3 *Uma métrica riemanniana g é uma aplicação bilinear, simétrica e não degenerada, da forma $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ e que satisfaz às seguintes propriedades:*

- i) $g_p(V, W) = g_p(W, V)$; para quaisquer V e $W \in T_p M$.
- ii) $g_p(V, V) \geq 0$, onde só vale a igualdade para $V = 0$.

Da primeira propriedade fica claro que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. A condição de não-degenerescência da métrica significa que $\det(g_{\mu\nu}) \equiv g \neq 0$, sendo assim, ela possui inversa, denotado por $g^{\mu\nu}$, o que nos permite escrever a seguinte relação em termos de seus componentes:

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = g_{\nu\sigma} g^{\sigma\mu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.60)$$

Em cada ponto P da variedade sempre é possível achar uma base ortornormal de $T_p M$ tal que $g(\partial_\mu, \partial_\nu) = \delta_{\mu\nu}$. Em outras palavras, isto significa que sempre é possível encontrar um sistema de coordenadas tal que $g_{\mu\nu}$ pode ser posta na forma diagonal e todos os seus autovalores são $+1$. O fato dos autovalores serem positivos é consequência da propriedade dois, isto é, g é positiva-definida. Uma métrica definida dessa forma é chamada de riemanniana.

Por outro lado, uma métrica que, posta na forma diagonal, possui i autovalores negativos e j autovalores positivos é chamada de pseudo-riemanniana⁶. Um caso particular interessante para a física é quando $i = 1$, neste caso ela é chamada de Lorentziana. A diferença entre o número de $+$ e $-$ que aparece em $g_{\mu\nu}$ é chamada de assinatura. A métrica do espaço-tempo pode ser representada por $(-+++)$, logo possui assinatura $+2$ ⁷.

Uma das propriedades mais importantes do tensor métrico é que podemos definir uma aplicação $g(V, \cdot)$ que, fixado o vetor V , pode ser usada para mapear um vetor em um número real; em outras palavras, a aplicação $g(V, \cdot) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ nada mais é do que

⁶ Variedades dotadas de uma métrica riemanniana ou pseudo-riemanniana são chamadas de variedade riemanniana e variedade pseudo-riemanniana, respectivamente. Como será melhor exposto futuramente na seção 3.2, o espaço-tempo da relatividade geral é descrito por uma variedade pseudo-riemanniana.

⁷ Alguns autores escolhem adotar a assinatura $(+---)$, que também pode ser indicada por “assinatura” -2 .

uma 1-forma. Fazendo $g(V, \cdot) \equiv \tilde{V}$ e atuando $\tilde{V}$ em um vetor de base ∂_ν , obtemos

$$V_\nu = \tilde{V}(\partial_\nu) \quad (2.61)$$

$$= g(V, \partial_\nu) = g(V^\mu \partial_\mu, \partial_\nu) = V^\mu g_{\mu\nu}. \quad (2.62)$$

Multipliquemos agora (2.62) por $g^{\nu\rho}$, e utilizemos (2.60), para obter

$$V_\nu g^{\nu\rho} = V^\mu g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} \quad (2.63)$$

$$V_\nu g^{\nu\rho} = V^\mu \delta_\mu^\rho \quad (2.64)$$

$$V_\nu g^{\nu\rho} = V^\rho. \quad (2.65)$$

Note que o fato da métrica ser inversível nos permitiu escrever (2.60) e utilizá-la em (2.62), para obter (2.65). As duas relações

$$V_\nu = V^\mu g_{\mu\nu} \quad (2.66)$$

$$V^\rho = V_\nu g^{\nu\rho} \quad (2.67)$$

nos mostra que $g(V, \cdot)$ fixa uma relação de 1-1 entre os vetores e covetores. Perceba que de (2.66), podemos dizer que V_ν foi obtido “baixando” o índice de V^μ ; da mesma forma, podemos dizer que V^ρ foi obtido “subindo” o índice de V_ν . As equações (2.66) e (2.67) estabelecem uma relação de dualidade entre V_ν e V^μ . Por esse motivo, são chamados de duais, e é comum utilizar a mesma letra para representar o objeto que está tendo o índice levantado ou baixado. Para tensores de ordem maior a mesma operação pode ser feita; logo, por exemplo

$$R^{\mu\nu\rho} g_{\nu\sigma} = R^\mu{}_\sigma{}^\rho. \quad (2.68)$$

Munidos desta propriedade da métrica, podemos falar sobre o traço de um tensor. Se tomarmos um tensor $S^\mu{}_\nu$ genérico, o traço do tensor é obtido fazendo $\nu = \mu$, onde obtemos, claro, o escalar $S^\mu{}_\mu$. Para um tensor $(0, 2)$, obter o traço significa primeiro subir o índice, isto é, $Y^\mu{}_\nu = Y_{\sigma\nu} g^{\sigma\mu}$, e depois tomar $\mu = \nu$, obtendo $Y^\mu{}_\mu$.

O tensor métrico também nos permite introduzir a noção de produto interno se atuarmos g em dois vetores V e W genéricos, para obter

$$g(V, W) = g(V^\mu \partial_\mu, W^\nu \partial_\nu) \quad (2.69)$$

$$g(V, W) = V^\mu W^\nu g_{\mu\nu} \quad (2.70)$$

$$g(V, W) = V^\mu W_\mu. \quad (2.71)$$

O módulo de um vetor genérico U pode então ser obtido fazendo $\sqrt{|g(U, U)|}$. Com isto, o tensor métrico substitui o produto interno da geometria euclidiana e nos abre um leque de possibilidades para calcular, por exemplo, comprimentos. Inclusive, isto nos torna capazes

de recuperar a noção de elemento de linha (comprimento infinitesimal), atuando g em um vetor ϵ com “componentes infinitesimais”⁸ da forma $\epsilon = dx^\mu \partial_\mu$, para obter⁹

$$ds^2 = g(\epsilon, \epsilon) = g(dx^\mu \partial_\mu, dx^\nu \partial_\nu) \quad (2.72)$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.73)$$

O espaço-tempo da relatividade especial é descrito por uma variedade dotada de uma métrica Lorentziana, que é um caso particular de métrica pseudo-riemanniana. Adotando a assinatura $+2$, podemos classificar um vetor $V \neq 0$ de acordo com

$$g(V, V) \begin{cases} < 0 & \text{U é do tipo-tempo.} \\ = 0 & \text{U é do tipo-luz.} \\ > 0 & \text{U é do tipo-espaço.} \end{cases} \quad (2.74)$$

O intervalo entre eventos no espaço-tempo é dado por uma relação análoga à (2.73), com os índices μ, ν variando de 0 à 3. Sua classificação também pode ser feita de acordo com os valores de ds^2 , sendo análoga à dos vetores. A convenção dada por (2.74) também será usada em uma variedade pseudo-riemanniana mais geral, como será o caso dos espaços-tempo com curvatura.

2.6 Noção heurística de derivada covariante

Os vetores como definidos anteriormente nos fornecem uma espécie de derivada direcional para funções. Para os tensores, ainda carecemos de um procedimento que nos permita computar a derivada destes objetos, que, em outras palavras, significa derivar suas componentes. Consideremos a derivada usual de um vetor, por exemplo. Pode-se demonstrar que em geral a derivada de um vetor não será mais um vetor¹⁰, isto é, não obedecerá mais a lei de transformação (2.12), devido ao fato de que o mapa definido por esta aplicação não é mais independente de coordenadas.

Para podermos definir derivadas de tensores e ao mesmo tempo preservar seu caráter tensorial, precisamos de uma estrutura adicional em nossa variedade: a conexão afim. Este objeto nos permitirá definir a chamada derivada covariante, que é uma espécie de derivada direcional para os tensores, e será apresentada na próxima seção. Contudo, antes de a introduzirmos formalmente, apresentaremos a noção de derivada via um argumento mais heurístico.

⁸ O uso das aspas é justificado pelo fato de que há uma sutileza com respeito a estas componentes e a noção de elemento de linha que estamos introduzindo agora. Para mais detalhes, consultar seção 2.5, página 72 de (CARROLL, 2003)

⁹ É comum na literatura referir-se à ds^2 como métrica. Eventualmente esta nomenclatura também será utilizada nesta dissertação.

¹⁰ Ver por exemplo seção 6.1, página 85 de (D'INVERNO; VICKERS, 2022)

Considere um campo vetorial arbitrário V^μ . Avaliemos este campo em um ponto Q com coordenadas $x^\mu + \delta x^\mu$ e façamos uma expansão em série de Taylor até primeira ordem de $V^\mu(x^\nu + \delta x^\nu)$, para obter

$$V^\mu(x^\nu + \delta x^\nu) \approx V^\mu(x^\nu) + \partial_\nu V^\mu \delta x^\nu. \quad (2.75)$$

Denotaremos $\partial_\nu V^\mu \delta x^\nu \equiv \Delta V^\mu$. Agora, introduziremos um vetor em um ponto P (ver fig. 3), cujas coordenadas diferem de Q em δx^μ ; temos então, $V^\mu(x^\nu)$. Agora, transportemos “paralelamente” $V^\mu(x^\nu)$ até Q, para obter um vetor

$$V^\mu(x^\nu) + \Delta \bar{V}^\mu(x^\nu). \quad (2.76)$$

Em que $\Delta \bar{V}^\mu(x^\nu) = -\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}(x^\nu) V^\lambda(x^\nu) \delta x^\sigma$. No $\mathbb{R}^n$ transportar paralelamente significa “arrastar” o vetor para outro ponto mantendo suas componentes constantes (no sistema de coordenadas cartesiano). Em variedades mais gerais, não podemos assumir que um vetor transportado paralelamente irá se manter o mesmo, portanto a quantidade $\Delta \bar{V}^\mu$ quantifica a diferença entre o vetor transportado paralelamente e o vetor “original”. A razão para $\Delta \bar{V}^\mu$ ter a forma como mostrada acima é uma suposição razoável e a mais simples possível, dado que a diferença entre o vetor antes e depois do transporte será nula se $\delta x^\sigma = 0$ ou $V^\lambda = 0$. Os coeficientes $\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}$ são termos de proporcionalidade, e o sinal negativo foi colocado por convenção.

Agora efetuem os subtração entre os vetores definidos por (2.75) e (2.76), para obter

$$(\partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda) \delta x^\nu, \quad (2.77)$$

em que o índice σ de $\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}$ foi trocado por ν . Agora vamos dividir (2.77) por δx^ν e tomar o limite quando δx^ν vai à zero, obtendo assim

$$\lim_{\delta x^\nu \rightarrow 0} \left[\frac{(\partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda) \delta x^\nu}{\delta x^\nu} \right] = (\partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda) \partial_\mu. \quad (2.78)$$

Note que o que fizemos até agora para obter (2.78) foi comparar um vetor em um ponto Q com outro vetor que foi transportado paralelamente de P até Q, obtendo naturalmente um novo vetor, dado pela expressão precedente. O transporte paralelo nesse raciocínio é justificado pelo fato de que só podemos comparar vetores que estejam no mesmo espaço vetorial, isto é, no mesmo ponto. É importante também destacar o que significa transporte paralelo nesse contexto. Transportar paralelamente um vetor de um ponto à outro significa dizer que um vetor transportado obedecerá à regra dado por (2.76). Esta não era a única regra possível; $\Delta \bar{V}^\mu$ poderia ter diferentes formas, dependendo do Γ que escolhêssemos. Então, para cada forma específica do Γ , a noção do que significa transporte paralelo de um vetor em uma variedade estará definido.

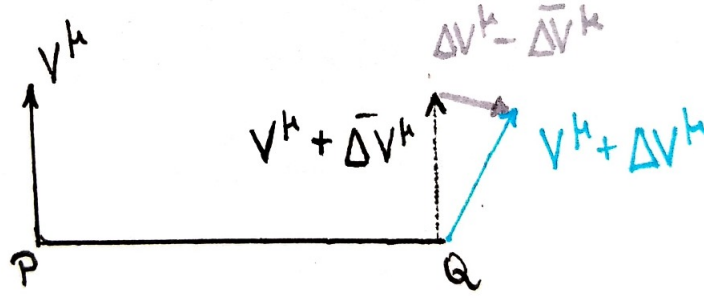


Figura 3 – Noção heurística do transporte paralelo de um vetor.

2.7 Conexão afim e derivada covariante

Definição 2.7.1 *Seja $\chi(M)$ o conjunto dos campos vetoriais de classe C^∞ . Uma conexão afim ∇ é um mapa $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$, ou $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ que obedece às seguintes propriedades:*

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad (2.79)$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \quad (2.80)$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y \quad (2.81)$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y \quad (2.82)$$

em que f é uma função arbitrária e X, Y e $Z \in \chi(M)$. Tomemos uma carta (U, φ) de M para escrever X e $Y \in \chi(M)$ na forma coordenada; operemos $\nabla_Y X$, para assim obter:

$$\nabla_Y X = \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda. \quad (2.83)$$

Concluimos de (2.83) que $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ são funções diferenciáveis e são chamadas de coeficientes da conexão¹¹. Se atente também ao fato de que essa operação é feita em um ponto P específico da variedade. Agora que sabemos como ∇ atua nos vetores de base, podemos saber como fica a atuação da conexão aplicado à um vetor genérico. Da definição 2.7.1 segue-se que:

$$\nabla_{\partial_\nu} V \equiv \nabla_\nu V = \nabla_{\partial_\nu} (V^\mu \partial_\mu) = \partial_\nu (V^\mu) \partial_\mu + V^\mu \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda \quad (2.84)$$

$$\nabla_{\partial_\nu} V = (\partial_\nu V^\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} V^\mu) \partial_\lambda. \quad (2.85)$$

Na literatura é ainda comum expressar o termo entre parênteses da expressão (2.85) na forma $\nabla_\nu V^\lambda$, que também será utilizada nesta dissertação. Contudo, se atente ao fato de que isto é apenas uma notação, e não é a conexão aplicada às componentes do vetor. Perceba que (2.85) coincidiu exatamente com a expressão (2.78), onde construímos uma noção de derivada de vetores. A conexão é a estrutura formal que nos permite falar de derivadas de vetores, neste caso, derivamos vetores em relação à vetores. O raciocínio desenvolvido na

¹¹ Na literatura, é comum que quando os autores falem sobre conexão, eles estejam se referindo aos Γ .

seção passada explicita bem o significado da derivada covariante. Retomando a discussão da seção 2.6, a derivada covariante computa a diferença entre um vetor definido em um ponto Q e um vetor que foi transportado paralelamente de P até Q , na direção do vetor que já existia em Q . Portanto ela também pode ser visualizada como uma espécie de derivada direcional para vetores, já que o transporte paralelo é realizado na direção do vetor em relação ao qual estamos derivando.

Na seção 2.6 comentamos que a derivada parcial não preservava a independência de coordenadas dos vetores. Esta noção de derivada como aqui definida é independente de coordenadas; isto significa que $\nabla_U V$ obedece às leis de transformações de coordenadas dos vetores. A grande chave para que esta derivada se transforme como um vetor é que os coeficientes da conexão dependam do sistema de coordenadas. A dedução da lei de transformação dessas estruturas pode ser conferida na seção 3.2, página 96 de (CARROLL, 2003) e é dada por:

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}. \quad (2.86)$$

Perceba que ainda podemos fazer a contração $W^\nu \nabla_\nu V^\lambda$, o que significa que estamos projetando $\nabla_\nu V^\lambda$ na direção de W^ν , portanto derivando V na direção de W . Retomando (2.83), perceba que ela implica naturalmente que

$$\nabla_{\partial_\nu} dx^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} dx^\lambda. \quad (2.87)$$

Para ver como essa relação surge, apliquemos ∇ à relação de dualidade (2.27), onde obteremos:

$$0 = \nabla_\lambda [dx^\mu (\partial_\nu)] = (\nabla_\lambda dx^\mu) \partial_\nu + \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} dx^\mu (\partial_\alpha) \quad (2.88)$$

$$0 = Z^\mu_{\lambda\sigma} dx^\sigma (\partial_\nu) + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} dx^\sigma (\partial_\sigma). \quad (2.89)$$

A derivada covariante da delta de Kronecker é zero, pois ela pode ser visto como uma constante. Na equação (2.87) expandimos $\nabla_\lambda dx^\mu$ na base de 1-formas, escrevendo então $\nabla_\lambda dx^\mu = Z^\mu_{\lambda\sigma} dx^\sigma$. Por fim, podemos usar a relação de dualidade em (2.89) para enfim obter

$$Z^\mu_{\lambda\nu} = -\Gamma^\mu_{\lambda\nu}. \quad (2.90)$$

Com este resultado, podemos agora operar a derivada covariante de uma 1-forma arbitrária ω ; assim, temos

$$\nabla_\nu (\omega_\mu dx^\mu) = \partial_\nu (\omega_\mu) dx^\mu - \omega_\mu \Gamma^\mu_{\nu\lambda} dx^\lambda \quad (2.91)$$

$$\nabla_\nu \omega = (\partial_\nu \omega_\lambda - \omega_\mu \Gamma^\mu_{\nu\lambda}) dx^\lambda. \quad (2.92)$$

Assim como para os vetores, é costumeiro denotar o termo entre parênteses da expressão (2.92) como $\nabla_\nu \omega_\lambda$.

Definição 2.7.2 Dizemos que $V \in \chi(M)$ é paralelo ao longo de uma curva cujo vetor tangente é U , se

$$\nabla_U V = 0. \quad (2.93)$$

A definição 2.7.2 significa que se o vetor V em pontos infinitesimalmente próximos da curva são paralelos e de igual comprimento, V foi transportado paralelamente ao longo da curva. A figura 4 ajuda a visualizar melhor esta relação.

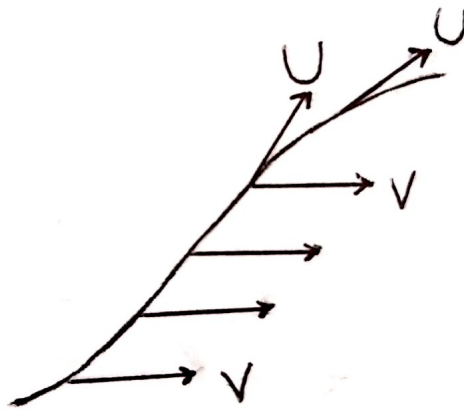


Figura 4 – Transporte paralelo de V na direção definida por U .

A relação (2.93) escrita em coordenadas fica:

$$\frac{dV^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} V^\lambda = 0. \quad (2.94)$$

Em que t é o parâmetro da curva à qual U é tangente, e dx^ν/dt são as componentes de U . Para o caso particular em que $U = V$, (2.93) fica

$$\nabla_V V = 0, \quad (2.95)$$

e dizemos que o vetor foi transportado paralelamente nele mesmo. Em coordenadas (2.95) é escrita como

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0. \quad (2.96)$$

Resolver (2.96) significa encontrar a curva à qual V é transportado paralelamente nele mesmo. Esta curva recebe o nome de geodésica afim.

Definição 2.7.3 Uma curva c é chamada geodésica afim se o vetor tangente permanece paralelo a si mesmo ao ser transportado ao longo de c . Em termos matemáticos isto se traduz como:

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} = f(t) \frac{d}{dt}. \quad (2.97)$$

Sempre é possível reparametrizar a curva tal que (2.97) se reduza à (2.95). Tal parâmetro é chamado de parâmetro afim.

Definição 2.7.4 *Seja c uma curva na variedade. O comprimento de c é definido como*

$$L(c) = \int_{t_a}^{t_b} \left[g\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right) \right]^{1/2} dt. \quad (2.98)$$

Chama-se geodésica métrica entre t_a e t_b a curva cujo comprimento é o menor possível.

De maneira mais formal, a geodésica métrica é a curva cujo comprimento é estacionário frente à pequenas variações que se anulam nos pontos t_a e t_b . Escrevendo (2.98) em coordenadas obtemos

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0. \quad (2.99)$$

Ocorre que em geometrias riemannianas as geodésicas métrica e afim coincidem. Em geometrias mais gerais que as riemannianas, isto não acontece ¹².

Como já definimos a derivada covariante para os vetores e covetores, partiremos agora para a derivada covariante dos tensores. Naturalmente, a derivada obedecerá todas as propriedades da definição 2.7.1 e preservará a independência de coordenadas dos tensores.

Definição 2.7.5 *Seja T um tensor do tipo (h, k) e $V \in T_p M$. Chamamos de derivada covariante de T a operação*

$$\begin{aligned} \nabla_V T = & V(T^{\mu_1 \dots \mu_h}_{\nu_1 \dots \nu_k})(\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_h} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_k}) \\ & + (T^{\mu_1 \dots \mu_h}_{\nu_1 \dots \nu_k}) \nabla_V (\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_h} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_k}), \end{aligned} \quad (2.100)$$

em que a atuação de ∇_V na base de $T_p M \otimes T_p M \otimes \dots \otimes T_p^* M \otimes T_p^* M$ obedece a regra de Leibniz ¹³.

2.8 Conexão riemanniana

A definição de conexão feita anteriormente independe se a geometria é riemanniana ou não. Uma geometria é dita riemanniana se a conexão satisfizer as seguintes propriedades.

Definição 2.8.1 *Uma conexão $\overset{\circ}{\nabla}$ é dita riemanniana se obedece as duas propriedades a seguir:*

$$\overset{\circ}{\nabla}_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_Y X + [X, Y]. \quad (2.101)$$

$$X[g(Y, Z)] = g(\overset{\circ}{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overset{\circ}{\nabla}_X Z). \quad (2.102)$$

Em que $X, Y, Z \in \chi(M)$. A primeira propriedade implica na simetria dos índices dos coeficientes Γ quando escrita em termos de um base cujos vetores comutam, por este

¹² Conferir, por exemplo, seção 4.3, página 42 e seção 5.2, página 63 de (FORMIGA, 2011).

¹³ Como por exemplo, $\nabla_V(\partial_\mu \otimes dx^\nu) = (\nabla_V \partial_\mu) \otimes dx^\nu + \partial_\mu \otimes \nabla_V dx^\nu$.

motivo, esta conexão é dita ser simétrica. Para as bases coordenadas, por exemplo, segue-se que $\nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu = \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu$. A segunda propriedade é chamada de compatibilidade conexão-métrica; uma conexão que obedece (2.102) é dita compatível com a métrica. É possível a partir desta propriedade escrever os coeficientes de uma conexão riemanniana em termos da métrica e suas derivadas. Para isso, basta reescrever (2.102) alternando as posições de X, Y e Z . Assim, ficamos com

$$X[g(Y, Z)] = g(\overset{\circ}{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overset{\circ}{\nabla}_X Z), \quad (2.103)$$

$$Y[g(Z, X)] = g(\overset{\circ}{\nabla}_Y Z, X) + g(Z, \overset{\circ}{\nabla}_Y X), \quad (2.104)$$

$$Z[g(X, Y)] = g(\overset{\circ}{\nabla}_Z X, Y) + g(X, \overset{\circ}{\nabla}_Z Y). \quad (2.105)$$

Substituindo nas equações acima $X = \partial_\mu, Y = \partial_\nu$ e $Z = \partial_\sigma$, obteremos

$$\partial_\mu g_{\nu\sigma} = \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} + \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}, \quad (2.106)$$

$$\partial_\nu g_{\sigma\mu} = \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\nu\sigma} g_{\lambda\mu} + \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\nu\mu} g_{\sigma\lambda}, \quad (2.107)$$

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\sigma\mu} g_{\lambda\nu} + \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} g_{\mu\lambda}. \quad (2.108)$$

O próximo passo é efetuar a soma de (2.106) com (2.107) e subtrair o resultado de (2.108), para obter

$$\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} = 2\overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma}. \quad (2.109)$$

Para chegar a este resultado foi utilizado a simetria dos índices da métrica e também dos coeficientes da conexão. Agora multipliquemos (2.109) por $g^{\lambda\sigma}$ para obter enfim

$$\overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.110)$$

Os coeficientes da conexão escritos em termos da métrica e suas derivadas é conhecido como símbolo de Christoffel.

2.9 Torção

Ao introduzirmos a conexão riemanniana impusemos que ela satisfizesse a propriedade de ser simétrica. Relaxando esta condição, podemos definir um novo objeto matemático chamado de torção e assim, definir uma nova geometria, que neste caso, será não-riemanniana.

Definição 2.9.1 *Seja (M, ∇, g) uma variedade dotada de uma métrica e uma conexão. A aplicação bilinear $T : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$, definida por*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (2.111)$$

é denominada torção.

Tomemos $X = \partial_\mu$ e $Y = \partial_\nu$ para obter as componentes da torção; temos então que

$$\begin{aligned} T(\partial_\mu, \partial_\nu) &= \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu - \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu \\ &= (\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}) \partial_\sigma \end{aligned} \quad (2.112)$$

e, usando a definição $dx^\lambda(T(\partial_\mu, \partial_\nu))^{14} \equiv T^\lambda_{\mu\nu}$, obtemos

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \quad (2.113)$$

O significado geométrico da torção está associado ao não fechamento de um paralelogramo, acompanhe o seguinte raciocínio. Considere dois vetores $X = \epsilon^\mu \partial_\mu$ e $Y = \delta^\mu \partial_\mu$ avaliados no ponto A , de coordenadas $\{x^\lambda\}$, e que suas componentes sejam infinitesimais. Tomemos dois pontos arbitrários B e C , de coordenadas $\{b^\lambda\} = \{x^\lambda + \epsilon^\lambda\}$ e $\{c^\lambda\} = \{x^\lambda + \delta^\lambda\}$, respectivamente. Efetuemos o transporte paralelo de X e Y para os pontos C e B , respectivamente, obtendo assim a situação da figura 5a. De (2.76), podemos expressar as coordenadas dos vetores transportados paralelamente por $\epsilon^{\parallel\lambda} = \epsilon^\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \epsilon^\mu \delta^\nu$ e $\delta^{\parallel\lambda} = \delta^\lambda - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \delta^\nu \epsilon^\mu$. Está claro da figura 5a que as componentes dos vetores $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ são dadas por

$$\overrightarrow{AD}^\lambda = \epsilon^\lambda + \delta^{\parallel\lambda} = \epsilon^\lambda + \delta^\lambda - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \delta^\nu \epsilon^\mu, \quad (2.114)$$

$$\overrightarrow{AE}^\lambda = \delta^\lambda + \epsilon^{\parallel\lambda} = \delta^\lambda + \epsilon^\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \epsilon^\mu \delta^\nu. \quad (2.115)$$

Na geometria riemanniana teríamos $\overrightarrow{AD}^\lambda = \overrightarrow{AE}^\lambda$. Porém, uma generalização natural de geometrias riemannianas é permitir a existência da torção, o que nos leva a

$$\overrightarrow{AD}^\lambda - \overrightarrow{AE}^\lambda = (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) \epsilon^\mu \delta^\nu. \quad (2.116)$$

Outro efeito da torção é que uma curva fechada na variedade não será representada por uma curva fechada no $\mathbb{R}^n$, consequentemente, um vetor que for transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada será transladado para outro ponto. A figura 5b ilustra a ideia aqui comentada.

Podemos agora buscar expressar os coeficientes da conexão em termos da métrica e da torção. Exigindo que a propriedade (2.102) ainda seja satisfeita pela conexão, podemos reescrever as equações (2.106), (2.107) e (2.108) como

$$\partial_\mu g_{\nu\sigma} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}, \quad (2.117)$$

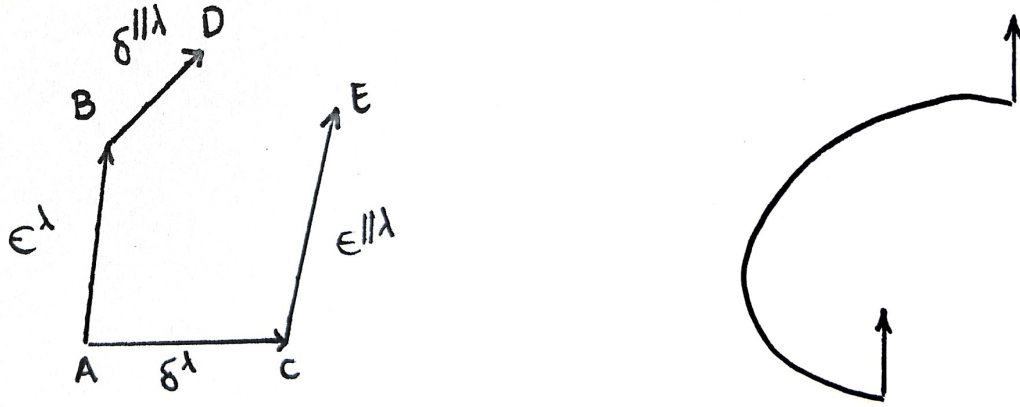
$$\partial_\nu g_{\sigma\mu} = \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} g_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\sigma\lambda}, \quad (2.118)$$

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} g_{\mu\lambda}. \quad (2.119)$$

Repetir os passos realizados na obtenção de (2.109) nos levará a

$$\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} g_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\sigma\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} g_{\mu\lambda}. \quad (2.120)$$

¹⁴ Perceba que sempre podemos atuar uma 1-forma em um tensor para obter suas componentes. Um exemplo trivial é $dx^\mu(V^\nu \partial_\nu) = V^\nu \delta^\mu_\nu = V^\mu$.



(a) O transporte paralelo de X na direção de Y e o transporte paralelo de Y na direção de X não produziu um paralelogramo.

(b) Uma curva fechada na variedade não será representada por uma curva fechada no $\mathbb{R}^n$. Consequentemente, um vetor transportado paralelamente ao longo desta curva não retornará ao ponto de início.

Figura 5 – Efeito da torção na geometria.

Perceba que o lado esquerdo da igualdade pode ser substituído por (2.109). Fazendo essa substituição e agrupando alguns termos, obtemos

$$2\mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} = g_{\nu\lambda}T^\lambda_{\mu\sigma} + g_{\lambda\mu}T^\lambda_{\nu\sigma} + g_{\lambda\sigma}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}). \quad (2.121)$$

Sabendo que $T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$, podemos fazer a substituição $\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - T^\lambda_{\mu\nu}$, para obter

$$2\mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} = g_{\nu\lambda}T^\lambda_{\mu\sigma} + g_{\lambda\mu}T^\lambda_{\nu\sigma} + g_{\lambda\sigma}(2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - T^\lambda_{\mu\nu}). \quad (2.122)$$

Dividindo a equação por 2 e multiplicando por $g^{\sigma\alpha}$ para isolar $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, obtemos

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(T_{\mu\nu}{}^\alpha + T_{\nu\mu}{}^\alpha - T^\alpha_{\mu\nu}). \quad (2.123)$$

Fazendo a definição de um novo tensor $K^\alpha_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2}(T_{\mu\nu}{}^\alpha + T_{\nu\mu}{}^\alpha - T^\alpha_{\mu\nu})$ chamado de contorção, podemos reescrever a equação precedente como

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + K^\alpha_{\mu\nu}. \quad (2.124)$$

Portanto, quando uma conexão é dotada de uma torção, podemos escrever os coeficientes dessa conexão em termos dos símbolos de Christoffel e da contorção. Para encerrar esta seção, listemos algumas propriedades obedecidas pelo tensor de torção e contorção, que

são dadas por

$$T^\lambda_{\mu\nu} = -T^\lambda_{\nu\mu}, \quad (2.125)$$

$$K^{\lambda(\mu\nu)} = -\frac{1}{2}(T^{\mu\nu\lambda} + T^{\nu\mu\lambda}), \quad (2.126)$$

$$K^{\lambda[\mu\nu]} = \frac{1}{2}T^{\lambda\mu\nu}, \quad (2.127)$$

$$K^{\lambda\mu\nu} = -K^{\nu\mu\lambda}. \quad (2.128)$$

2.10 Curvatura

Definição 2.10.1 *Seja (M, ∇, g) uma variedade dotada de uma métrica e uma conexão. A curvatura é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \chi(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in T_p M. \quad (2.129)$$

Esta correspondência também é chamado de tensor de curvatura, ou ainda, tensor de Riemann. Pode-se demonstrar que o tensor de curvatura é bilinear em $\chi(M) \times \chi(M)$ e que para todo par $X, Y \in \chi(M)$, o operador curvatura $R(X, Y)$ é linear. Matematicamente expressamos isso como:

i) Bilinearidade

$$R(fX_1 + gX_2, Y) = fR(X_1, Y) + gR(X_2, Y), \quad (2.130)$$

$$R(X, fY_1 + gY_2) = fR(X, Y_1) + gR(X, Y_2). \quad (2.131)$$

ii) Linearidade

$$R(X, Y)(fZ + gW) = fR(X, Y)Z + gR(X, Y)W. \quad (2.132)$$

Em que $X_i, Y_i, Z, W \in \chi(M)$ e f, g são funções. Para extrair suas componentes em uma base coordenada, façamos $X = \partial_\mu, Y = \partial_\nu$ e $Z = \partial_\sigma$, para obter, portanto,

$$\begin{aligned} R(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\sigma &= \nabla_{\partial_\mu} \nabla_{\partial_\nu} \partial_\sigma - \nabla_{\partial_\nu} \nabla_{\partial_\mu} \partial_\sigma \\ R(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\sigma &= (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\sigma})\partial_\alpha - (\partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\sigma})\partial_\alpha + (\Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\beta_{\mu\alpha})\partial_\beta - (\Gamma^\alpha_{\mu\sigma} \Gamma^\beta_{\nu\alpha})\partial_\beta. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Fazendo $dx^\lambda(R(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\sigma)$, obtemos

$$R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}. \quad (2.134)$$

Tensores de 4 índices normalmente são trabalhosos de se lidar, portanto, é frequentemente útil construir novos tensores a partir desses que condensem as informações

contidas no tensor original. Sendo assim, podemos definir o tensor de Ricci como sendo a contração do primeiro índice contravariante com o segundo índice covariante do tensor de curvatura, isto é, $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$. A partir desse, podemos definir o escalar de curvatura como o traço do tensor de Ricci, ou seja, $R = R^\mu_\mu$.

Até agora, não especificamos se a geometria aqui tratada é riemanniana ou não. Portanto, tudo o que foi dito até o momento é válido independentemente da geometria considerada. Agora, vamos admitir que nossa conexão seja riemanniana; os coeficientes em (2.134), portanto, podem ser substituídos pelos símbolos de Christoffel. O tensor de curvatura então será dado por:

$$\dot{R}^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \dot{\Gamma}^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu \dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\sigma} + \dot{\Gamma}^\alpha_{\nu\sigma} \dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\alpha} - \dot{\Gamma}^\alpha_{\mu\sigma} \dot{\Gamma}^\lambda_{\nu\alpha}. \quad (2.135)$$

Naturalmente, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura passam a ser escritos como $\dot{R}^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ e $\dot{R}^\mu_\mu$, respectivamente. É possível demonstrar que o tensor de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:

$$\dot{R}_{\lambda\mu\sigma\nu} = -\dot{R}_{\mu\lambda\sigma\nu}, \quad (2.136)$$

$$\dot{R}_{\lambda\mu\sigma\nu} = -\dot{R}_{\lambda\mu\nu\sigma}, \quad (2.137)$$

$$\dot{R}_{\lambda\mu\sigma\nu} = \dot{R}_{\sigma\nu\lambda\mu}. \quad (2.138)$$

As propriedades (2.136) e (2.137) implicam que $\dot{R}^\lambda_{\lambda\sigma\nu} = \dot{R}_{\sigma\lambda\nu}^\lambda = 0$. Já a propriedade (2.138) implica na simetria do tensor de Ricci, bastando contrair λ com σ para verificá-lo. A importância de tais propriedades reside no fato de que elas ajudam a diminuir o número de componentes independentes. Pode-se ainda demonstrar que graças a propriedade de simetria dos índices do símbolo de Christoffel, o tensor de curvatura obedece as duas identidades a seguir.

$$\dot{R}^\lambda_{\sigma\mu\nu} + \dot{R}^\lambda_{\nu\sigma\mu} + \dot{R}^\lambda_{\mu\nu\sigma} = 0 \quad (2.139)$$

$$\nabla_\alpha \dot{R}^\sigma_{\mu\nu\rho} + \nabla_\rho \dot{R}^\sigma_{\mu\alpha\nu} + \nabla_\nu \dot{R}^\sigma_{\mu\rho\alpha} = 0 \quad (2.140)$$

As identidades (2.139) e (2.140) são conhecidas como primeira e segunda identidade de Bianchi, respectivamente. A segunda identidade pode ser reescrita de forma tal que tem uma importância fundamental para a física. Primeiro, façamos a contração de α com μ e σ com ρ ; depois, utilizemos (2.136) e (2.137) para inverter os índices do primeiro e segundo termo. Por fim, troque o índice da derivada covariante do último termo usando a delta de Kronecker para englobar todos os termos na mesma derivada e use a métrica para subir todos os índices, obtendo, enfim

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \dot{R}^{\sigma\mu}_{\nu\rho} + \nabla_\rho \dot{R}^{\sigma\mu}_{\alpha\nu} + \nabla_\nu \dot{R}^{\sigma\mu}_{\rho\alpha} &= 0 \\ \nabla_\mu \dot{R}^{\rho\mu}_{\nu\rho} + \nabla_\rho \dot{R}^{\rho\mu}_{\mu\nu} + \nabla_\nu \dot{R}^{\rho\alpha}_{\rho\alpha} &= 0 \\ -2\nabla_\mu \dot{R}^\mu_\nu + \nabla_\nu \dot{R} &= 0 \\ \nabla_\mu (\dot{R}^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu \dot{R}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Fazendo a definição $\mathring{G}^{\mu\nu} \equiv \mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathring{R}$, chegamos a

$$\nabla_\nu \mathring{G}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.142)$$

O tensor $\mathring{G}^{\mu\nu}$ é conhecido como tensor de Einstein e tem uma importância fundamental na teoria da relatividade geral, conforme será melhor detalhado nos próximos capítulos.

Podemos agora explorar o efeito da curvatura na geometria da variedade. Para isto, consideremos fazer o transporte paralelo de um vetor V^α ao longo de dois caminhos que juntos formam um loop, e calculemos a diferença entre os vetores. Observe a figura 6 para uma melhor compreensão do processo.

Primeiro, consideremos que nosso vetor V^α seja transportado paralelamente de um ponto $x \equiv \{x^\mu\}$ até um ponto $x + \delta x$; obteremos, portanto

$$V^\alpha(x + \delta x) = V^\alpha(x) - \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}(x)V^\beta(x)\delta x^\rho. \quad (2.143)$$

Agora, façamos o transporte paralelo deste último até o ponto $x + \delta x + dx$, para obter

$$V^\alpha(x + \delta x + dx) = V^\alpha(x + \delta x) - \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}(x + \delta x)V^\beta(x + \delta x)dx^\rho. \quad (2.144)$$

Expandindo $\mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}(x + \delta x)$ em série de Taylor e avaliando-o em x , teremos $\mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}(x + \delta x) \approx \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}(x) + \partial_\sigma \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho} \delta x^\sigma$. Substituindo esta última expressão e (2.143) em (2.144), chegaremos a

$$V^\alpha(x + \delta x + dx) = V^\alpha - \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}V^\beta\delta x^\rho - (\mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho} + \partial_\sigma \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}\delta x^\sigma)(V^\beta - \mathring{\Gamma}^\beta_{\nu\phi}V^\nu\delta x^\phi)dx^\rho \quad (2.145)$$

$$V^\alpha(x + \delta x + dx) = V^\alpha - \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}V^\beta\delta x^\rho - \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}V^\beta dx^\rho + \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}\mathring{\Gamma}^\beta_{\nu\phi}V^\nu\delta x^\phi dx^\rho - \partial_\sigma \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}\delta x^\sigma V^\beta dx^\rho, \quad (2.146)$$

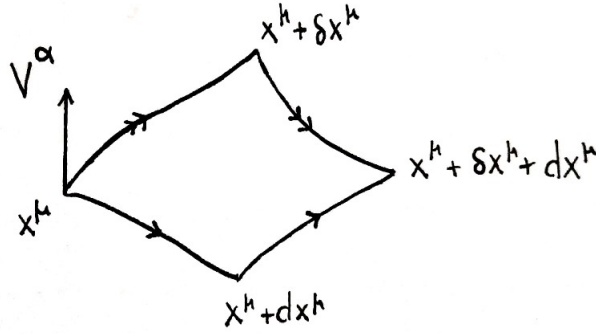
onde na passagem de (2.145) para (2.146) desprezamos termos de terceira ordem. Agora, transportaremos V^α de x até $x + dx$, e depois até $x + dx + \delta x$. Note, porém, que para obter o resultado, basta trocar $\delta x \rightarrow dx$ e $dx \rightarrow \delta x$ em (2.146). Portanto, ficamos com

$$V^\alpha(x + dx + \delta x) = V^\alpha - \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}V^\beta dx^\rho - \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}V^\beta\delta x^\rho + \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}\mathring{\Gamma}^\beta_{\nu\phi}V^\nu dx^\phi\delta x^\rho - \partial_\sigma \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}dx^\sigma V^\beta\delta x^\rho. \quad (2.147)$$

Façamos agora a subtração de (2.146) por (2.147), para obter, enfim

$$\begin{aligned} \Delta V^\alpha &= \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}\mathring{\Gamma}^\beta_{\nu\phi}V^\nu\delta x^\phi dx^\rho - \partial_\sigma \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}\delta x^\sigma V^\beta dx^\rho - \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}\mathring{\Gamma}^\beta_{\nu\phi}V^\nu dx^\phi\delta x^\rho + \partial_\sigma \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}dx^\sigma V^\beta\delta x^\rho \\ \Delta V^\alpha &= (\partial_\sigma \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho} - \partial_\rho \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\sigma} + \mathring{\Gamma}^\alpha_{\phi\sigma}\mathring{\Gamma}^\phi_{\beta\rho} - \mathring{\Gamma}^\alpha_{\phi\rho}\mathring{\Gamma}^\phi_{\beta\sigma})X^\beta\delta x^\rho dx^\sigma \\ \Delta V^\alpha &= \mathring{R}^\alpha_{\rho\sigma}X^\beta\delta x^\rho dx^\sigma. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Veja que a curvatura produz uma diferença nos vetores transportados por caminhos diferentes. Portanto, o efeito da curvatura é produzir uma mudança na orientação dos vetores quando estes são transportados ao longo de curvas.

Figura 6 – Transporte de V^α ao redor de um loop.

2.11 Não-Metricidade

A introdução de torção na geometria de uma variedade surge do relaxamento da propriedade de simetria da conexão. Agora, comentaremos sobre um novo objeto que surge devido ao relaxamento da condição de compatibilidade entre a métrica e a conexão. Na definição 2.8.1, ao escrevermos (2.102), assumimos implicitamente que

$$\nabla_X g = 0. \quad (2.149)$$

Exigir que a conexão não seja mais compatível com a métrica significa dizer que a derivada do tensor métrico não é mais nula. Isto nos permite introduzir uma nova entidade geométrica, chamada de não-metricidade.

Definição 2.11.1 *Seja (M, ∇, g) uma variedade dotada de uma métrica e uma conexão. A aplicação trilinear $N : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$, definida por*

$$N(X, Y, Z) \equiv (\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \quad X, Y, Z \in \chi(M). \quad (2.150)$$

é denominada não-metricidade.

Perceba que se $\nabla_X g = 0$, recuperamos (2.102). Podemos notar dessa definição que N é simétrico nos dois últimos argumentos, dado a sua relação com g . Note que, se jogarmos os termos do lado direito da igualdade de (2.106) para o lado esquerdo, isto é, $\partial_\mu g_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} = 0$, e substituir o 0 por $N_{\mu\nu\sigma}$, obteremos as componentes da não metricidade, ou seja,

$$\nabla_\mu g_{\nu\sigma} \equiv N_{\mu\nu\sigma} = \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}. \quad (2.151)$$

Vamos agora expressar os coeficientes da conexão em termos da não-metricidade, destacando que a conexão com a qual estamos trabalhando obedece a condição de simetria. Note que podemos reescrever as equações (2.117), (2.118) e (2.119) acrescentando do lado

direito as componentes da não-metricidade, para obter, portanto

$$\partial_\mu g_{\nu\sigma} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} + N_{\mu\nu\sigma}, \quad (2.152)$$

$$\partial_\nu g_{\sigma\mu} = \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} g_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\sigma\lambda} + N_{\nu\sigma\mu}, \quad (2.153)$$

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} g_{\mu\lambda} + N_{\sigma\mu\nu}. \quad (2.154)$$

Somando (2.152) e (2.153) e subtraindo o total de (2.154) nos leva a

$$2\overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} = 2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} + N_{\mu\nu\sigma} + N_{\nu\sigma\mu} + N_{\sigma\mu\nu}, \quad (2.155)$$

onde o lado esquerdo foi substituído por (2.109) e alguns termos foram cancelados, graças a simetria dos índices dos coeficientes da conexão. Utilizando a propriedade de simetria nos dois últimos índices da não-metricidade para fazer $N_{\nu\sigma\mu} = N_{\nu\mu\sigma}$ e multiplicando ambos os lados da equação precedente por $g^{\sigma\alpha}$ chegaremos a

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + L^\alpha_{\mu\nu}, \quad (2.156)$$

em que $L^\alpha_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2}(N_{\mu\nu}{}^\alpha + N_{\nu\mu}{}^\alpha - N^\alpha_{\mu\nu})$ é conhecido por disformation na literatura.

Para explorarmos o efeito da não-metricidade na geometria de uma variedade, considere em (2.150) fazer $Y = Z$, e que este último é transportado paralelamente ao longo da curva a qual X é tangente. Matematicamente isto se traduz como

$$(\nabla_X g)(Y, Y) = X(g(Y, Y)) \quad (2.157)$$

$$(\nabla_X g)(Y, Y) = \frac{d}{dt}(g(Y, Y)). \quad (2.158)$$

Note que o fato do lado esquerdo ser não nulo implica que o transporte paralelo de Y não preservará o seu comprimento. Em outras palavras, o efeito geométrico da não-metricidade é a alteração do comprimento de um vetor.

2.12 Geometria não-riemanianna e Conexão de Weintzböck

Até agora temos trabalhado separadamente com variedades dotadas de uma conexão que obedecia as propriedades de simetria e compatibilidade com a métrica, ou obedecia apenas uma destas. A exigência de que a conexão seja apenas compatível com a métrica levou a definição de torção, cujo efeito na geometria é a de produzir translações nos vetores que são transportados ao longo de curvas que são fechadas na variedade, mas não no $\mathbb{R}^n$. Uma conexão que é simétrica mas não é compatível com a métrica nos levou a definição de não-metricidade, cujo efeito é a de não preservar comprimentos e ângulos de vetores. Quer a conexão seja apenas simétrica, ou apenas compatível com a métrica, o efeito da curvatura também estará presente nos processos descritos anteriormente. Os efeitos da torção e da não-metricidade se somam com o da curvatura, cujo efeito desta última é a mudança

na orientação dos vetores. Uma geometria em que pelo menos uma das propriedades da definição 2.8.1 não é satisfeita é denominada geometria não-riemanniana.

Partindo de uma variedade M dotada de uma conexão ∇ e uma métrica g , poderíamos a princípio exigir que a conexão não satisfizesse (2.101) e nem (2.102). Em tal geometria, os coeficientes da conexão seriam dados por

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + K^\alpha_{\mu\nu} + L^\alpha_{\mu\nu}. \quad (2.159)$$

Um vetor transportado paralelamente em uma curva fechada não retornaria ao mesmo ponto, graças a torção, e nem teria seu comprimento e orientação preservados devido aos efeitos da não-metricidade e curvatura, respectivamente.

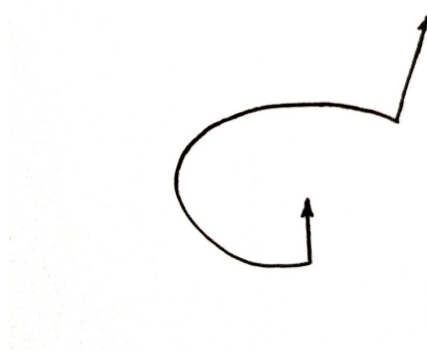


Figura 7 – Efeito da torção, curvatura e não metricidade em uma geometria.

Uma vez que tenhamos uma conexão afim cujos coeficientes sejam aqueles dados por (2.159), podemos, por exemplo, exigir que a não metricidade seja nula, o que nos levaria a uma geometria conhecida na literatura como geometria de Riemann-Cartan. Por outro lado, poderíamos a partir de (2.159) zerar a contorção, o que equivale a dizer que a torção é nula, o que nos levaria a uma geometria denominada de Einstein-Weyl¹⁵. Como as possibilidades são numerosas, a figura 8 exhibe uma relação entre os mais variados tipos de geometrias não-riemannianas.

Fazendo $L^\alpha_{\mu\nu} = 0$ em (2.159), podemos substituir os coeficientes da conexão resultante em (2.139), obtendo, portanto

$$\begin{aligned} R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = & \partial_\mu \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\nu\sigma} + \partial_\mu K^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\mu\sigma} - \partial_\nu K^\lambda_{\mu\sigma} + (\overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_{\nu\sigma} + K^\alpha_{\nu\sigma})(\overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\mu\alpha} + K^\lambda_{\mu\alpha}) \\ & - (\overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_{\mu\sigma} + K^\alpha_{\mu\sigma})(\overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\nu\alpha} + K^\lambda_{\nu\alpha}). \end{aligned} \quad (2.160)$$

Fazendo algumas manipulações para escrever a expressão precedente em termos de (2.136) e da derivada covariante da contorção, obtemos, enfim

$$R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \overset{\circ}{R}^\lambda_{\sigma\mu\nu} + \overset{\circ}{\nabla}_\mu K^\lambda_{\nu\sigma} - \overset{\circ}{\nabla}_\nu K^\lambda_{\mu\sigma} + K^\alpha_{\nu\sigma} K^\lambda_{\mu\alpha} - K^\alpha_{\mu\sigma} K^\lambda_{\nu\alpha}; \quad (2.161)$$

¹⁵ Convido o leitor a ler, por exemplo, os capítulos 4 e 5 de (FORMIGA, 2011), para mais detalhes sobre as geometrias de Riemann-Cartan e Einstein-Weyl e suas respectivas aplicações na física.

em que a derivada covariante da contorção é tomada utilizando os símbolos de Christoffel. É ainda possível exigir que em (2.161), $R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = 0$; neste contexto, uma conexão cuja curvatura associada seja nula e que os coeficientes sejam dados por $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + K^\alpha_{\mu\nu}$, recebe o nome de conexão de Weitzenböck.

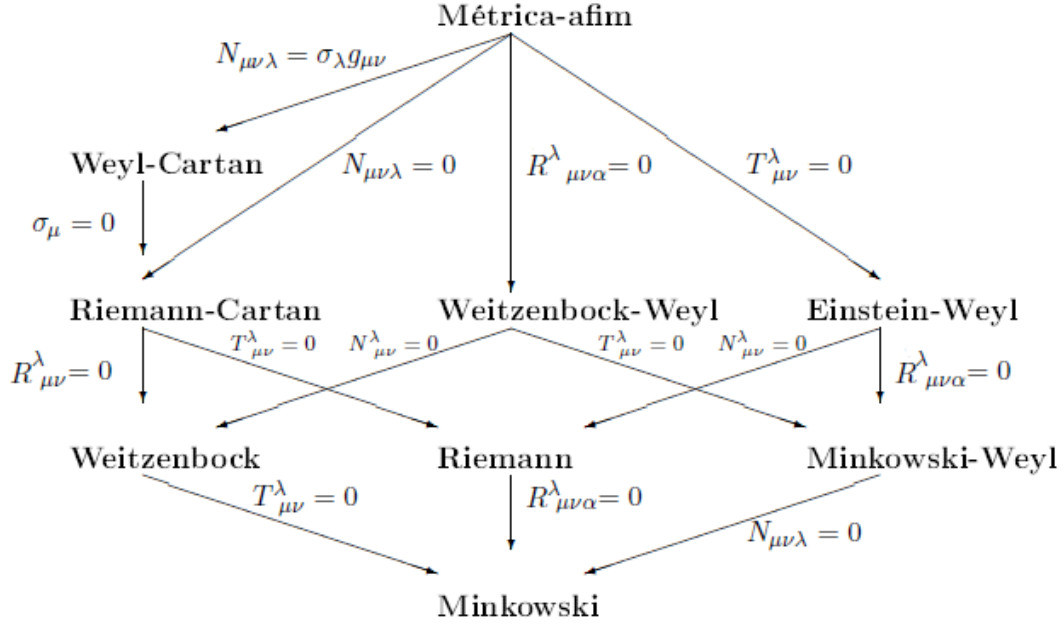


Figura 8 – Este diagrama exhibe a relação entre os mais variados tipos de geometrias não-riemannianas dado que definimos uma conexão afim na variedade.

2.13 Teorema de Stokes

Será apresentado nesta seção o teorema de Stokes, cuja uma das principais utilidades para a física, é a de descrever leis de conservação. Como desenvolvemos ao longo deste capítulo um formalismo independente de coordenadas, é de nosso interesse escrever um elemento de volume que seja invariante mediante uma mudança no sistema de coordenadas. Este é o conteúdo que será explorado a seguir. Na última subseção definiremos a divergência de um vetor e escreveremos o teorema de Stokes propriamente dito.

2.13.1 Elemento de volume invariante

O cálculo de volumes é muito importante para integrações nas variedades. Denotando o determinante da métrica por $\det(g_{\mu\nu}) \equiv g$; mediante uma mudança no sistema de coordenadas, este último se transforma como

$$g' = \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right|^2 g. \quad (2.162)$$

Em que o termo quadrático é o determinante da matriz jacobiana.

Em um sistema de coordenadas arbitrário, definimos o elemento de volume como

$$d^n x \equiv dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n} = \sum_{P \in S_n} \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_{P(n)}}. \quad (2.163)$$

No somatório, S_r é o grupo simétrico de ordem n e P um elemento de S_r ; $\text{sgn}(P) = 1$ para permutações pares e $\text{sgn}(P) = -1$ para permutações ímpares. Na prática, a expressão acima significa que devemos somar todas as permutações possíveis, começando a partir de $dx^{\mu_{P(1)}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{P(n)}}$, colocando “+” quando a troca for par e “−” quando a troca for ímpar. Exemplo:

$$\begin{aligned} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma &= dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma + dx^\gamma \otimes dx^\alpha \otimes dx^\beta + dx^\beta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\alpha \\ &\quad - dx^\alpha \otimes dx^\gamma \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha \otimes dx^\gamma - dx^\gamma \otimes dx^\beta \otimes dx^\alpha. \end{aligned}$$

Sob uma mudança no sistema de coordenadas, as 1-formas se transformam conforme (2.33), levando-nos a concluir que dx^n se transforma da seguinte maneira:

$$dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n} = \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right| dx^{\mu'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu'_n}. \quad (2.164)$$

Multiplicando (2.162) por -1 e tirando a raiz quadrada de ambos os lados, podemos substituir a matriz jacobiana, em (2.164), levando-nos a

$$d^n \sqrt{-g} = d^n x' \sqrt{-g'}. \quad (2.165)$$

Concluimos, portanto, que o elemento de volume acima é invariante sob mudanças no sistema de coordenadas.

2.13.2 Divergência e teorema de Stokes

A partir da derivada covariante de um vetor, cujas componentes são $\mathring{\nabla}_\nu V^\lambda = \partial_\nu V^\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} V^\mu$, definimos a divergência de V^λ contraindo ν com λ ; portanto

$$\mathring{\nabla}_\nu V^\nu = \partial_\nu V^\nu + \mathring{\Gamma}^\nu_{\nu\mu} V^\mu. \quad (2.166)$$

A partir de (2.110), podemos escrever o símbolo de Levi-Civita como

$$\mathring{\Gamma}^\nu_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \partial_\mu g_{\sigma\nu}, \quad (2.167)$$

em que foi usado o resultado $g^{\nu\sigma}(\partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) = 0$, uma vez que o termo entre parênteses é anti-simétrico em ν e σ , enquanto é contraído em ν e σ com $g_{\nu\sigma}$, que é simétrico.

É possível demonstrar que a derivada do determinante da métrica vale

$$\partial_\mu g = g g^{\nu\sigma} \partial_\mu g_{\sigma\nu}. \quad (2.168)$$

Usando isso em (2.167), encontramos que

$$\mathring{\Gamma}^\nu_{\nu\mu} = \frac{\partial_\mu(\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}}. \quad (2.169)$$

Portanto podemos escrever o divergente, (2.166), como

$$\mathring{\nabla}_\nu V^\nu = \partial_\nu V^\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}} V^\nu \partial_\nu \sqrt{-g} \quad (2.170)$$

ou

$$\mathring{\nabla}_\nu V^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} V^\nu). \quad (2.171)$$

Integrando (2.171) sobre um hipervolume quadridimensional:

$$\int \mathring{\nabla}_\nu V^\nu \sqrt{-g} d^4x = \int \partial_\nu (\sqrt{-g} V^\nu) d^4x, \quad (2.172)$$

em que utilizamos (2.165). Note que a expressão acima é independente do sistema de coordenadas. A integração sobre o quadrivolume pode ser transformada em uma integral sobre uma hipersuperfície fechada; portanto

$$\int \partial_\nu (\sqrt{-g} V^\nu) d^4x = \oint V^\nu n_\nu \sqrt{-g} d^3S. \quad (2.173)$$

ou

$$\int \mathring{\nabla}_\nu V^\nu \sqrt{-g} d^4x = \oint V^\nu n_\nu \sqrt{-g} d^3S. \quad (2.174)$$

O d^3S denota o trivolume da hipersuperfície tridimensional que delimita o quadrivolume da integração e obedece à definição (2.163); por sua vez, n_ν é um vetor normal unitário ao elemento de hipersuperfície que, por convenção, aponta para fora do quadrivolume.

3 Relatividade Geral

A teoria eletromagnética construída por J. C. Maxwell previa que o valor da velocidade da luz era $c = 300.000 km/s$. Partindo de observações astronômicas, o holandês Willem de Sitter demonstrou que a velocidade de propagação da luz não depende da velocidade de movimento do corpo emitente (EINSTEIN, 2019). Estes fatos estavam em claro desacordo com os fundamentos da mecânica clássica, que previam exatamente o oposto do que foi verificado pelo de Sitter. Essa incompatibilidade entre o eletromagnetismo e a mecânica clássica só foi resolvida em 1905, quando Albert Einstein publicou sua teoria da relatividade especial. Tomando como referência as palavras do próprio Einstein (EINSTEIN, 2019), por meio de uma série de experimentos mentais, a primeira seção deste capítulo imerge o leitor em uma construção do que ficou conhecido como princípio da relatividade geral. Com as conclusões alcançadas por meio deste princípio, a segunda seção apresenta de forma heurística as equações de campo de Einstein, cujo conteúdo físico é a descrição da gravidade por meio da curvatura do espaço-tempo. Na sequência, são apresentadas as equações de Einstein-Maxwell, que descrevem a dinâmica dos campos eletromagnéticos e gravitacionais. Na seção 3.4 será descrito de forma breve o processo físico que leva a formação dos buracos negros, cujo campo gravitacional externo a esses corpos é descrito por meio da solução das equações de Einstein. Por sua vez, um conjunto de soluções das equações de Einstein e Einstein-Maxwell serão apresentadas na seção 3.5; em particular, a solução de Reissner-Nordström-de Sitter será de interesse para os próximos capítulos. Na seção 3.6 será apresentado o formalismo conhecido como decomposição de Eckart, cujos resultados serão utilizados no capítulo 5.

O formalismo da relatividade geral permite construir as leis gerais que governam a dinâmica dos buracos negros. Em 1973, Bardeen, Carter e Hawking (BARDEEN; CARTER; HAWKING, 1973) chegaram a essas leis, cuja notável semelhança com as leis da termodinâmica é destacada pelos próprios autores. Todavia, conforme eles mesmos apontam, a semelhança entre esses conjuntos de leis é apenas uma analogia formal; de fato, buracos negros clássicos têm temperatura nula, uma vez que eles absorvem radiação mas não emitem (para maiores detalhes, veja, por exemplo, (BARDEEN; CARTER; HAWKING, 1973)). Contudo, os buracos negros quânticos emitem radiação e, o que parecia ser apenas uma analogia formal, foi revelado ser uma importante característica sobre os buracos negros; as leis obtidas pelos três físicos possuem, na verdade, um conteúdo termodinâmico. Por este motivo, essas leis ficaram conhecidas por leis da termodinâmica de buracos negros, e é o conteúdo de análise da seção 3.7.

3.1 Princípio da relatividade geral

A teoria da relatividade especial publicada por Albert Einstein em 1905 postula que para fins de descrição de um processo físico que ocorra na natureza, qualquer referencial inercial é válido. Como toda boa teoria que se preze, as consequências deste postulado não de ser testadas e, portanto, apenas a experiência pode falar se nossa premissa é verdadeira. Desde que foi formulada, inúmeras verificações experimentais da teoria da relatividade especial foram confirmadas, logo, ela vem se mostrando uma teoria confiável quanto a sua utilização na descrição da natureza.

A relatividade especial, em certo sentido, privilegia os referenciais supracitados, uma vez que esta postula que as leis da natureza só são válidas em relação a estes referenciais, chamados de inerciais. Assim, é natural que qualquer espírito desejoso de generalização queira estender esse princípio, e enunciar que as leis da natureza sejam as mesmas em qualquer sistema de referência, independente do seu estado de movimento. Portanto, uma teoria física baseada neste princípio teria suas equações escritas da mesma forma em qualquer sistema de referência. Contudo, a experiência cotidiana de estar sentado no banco de um ônibus e sentir um “puxão” jogando-nos para a frente quando o ônibus freia, parece frustrar essa busca por uma possível generalização do princípio da relatividade especial. Todavia, a interpretação minuciosa de um fato já reconhecido pela mecânica clássica, nos levará a uma nova teoria que obedecerá ao nosso princípio da relatividade especial generalizado (que chamaremos a partir de agora de princípio da relatividade geral), e também nos fornecerá uma nova visão sobre a gravidade.

Na gravitação newtoniana, a equação de movimento de um corpo que esteja sob a ação de um campo gravitacional é escrita como

$$m_i \vec{a}(t) = -m_g \vec{\nabla} \phi(\vec{r}(t), t), \quad (3.1)$$

em que $\vec{a}$ é a aceleração do corpo e ϕ o potencial gravitacional. Do lado esquerdo, a massa inercial m_i mede a resistência oferecida pelo corpo na tentativa de mudar seu estado de movimento; já do lado direito, a massa gravitacional m_g quantifica a resposta do corpo dado a presença de um campo gravitacional. Experimentalmente já é bem conhecido o resultado de que corpos com diferentes propriedades físicas caem com a mesma aceleração em um campo gravitacional. Dito isto, é inevitável concluir que $m_i/m_g = 1$. Conforme ficará claro a seguir, essa igualdade entre massa inercial e massa gravitacional é um argumento a favor do nosso princípio da relatividade geral.

Acompanhe o seguinte experimento mental (EINSTEIN, 2019). Um ser, cuja a origem não é relevante, acelera uniformemente “para cima” um elevador, que possui em seu interior um observador. O observador no interior do elevador realiza o experimento de soltar dois objetos de diferentes propriedades, e observa que ambos caem com a mesma aceleração, chegando a conclusão de que está em “repouso” no campo gravitacional de

algum planeta. Para alguém que esteja do lado de fora do elevador observando a situação, descreverá este cenário falando que o “chão” do elevador acelera uniformemente em direção aos dois objetos soltos e, portanto, colidem com ele ao mesmo tempo. A afirmação do observador no interior do elevador em interpretar o seu experimento em termos de um campo gravitacional, repousa na igualdade entre massa inercial e massa gravitacional, caso contrário, jamais poderia descrever seu experimento em termos de um campo gravitacional. Imagine ainda que o observador dentro do elevador olha para um lustre pendurado no “teto”, e percebe que o cabo que o sustenta está tensionado. Ele interpreta este fato como sendo consequência de que o lustre está sendo puxado para baixo por uma força gravitacional e, em resposta a isso, o cabo puxa o lustre para cima para equilibrar a “gravidade”. Contudo, para alguém do lado de fora, o cabo de sustentação está tensionado, pois a aceleração que é impressa ao elevador, é comunicada ao lustre por meio do cabo, que força o lustre a acompanhar o movimento. Portanto, o que determina a tensão para um é a massa gravitacional, e para o outro, a massa inercial.

Retomando o contraexemplo citado anteriormente no segundo parágrafo desta seção, alguém que esteja dentro de um ônibus e experencia um “puxão” para a frente após o ônibus freiar, poderá interpretar esta situação como estando em repouso dentro do ônibus e que durante um certo intervalo de tempo, é submetido a um campo gravitacional variável no tempo. Portanto, se conhecemos como um determinado fenômeno se desenvolve do ponto de vista de um referencial inercial, saberemos como ele ocorre do ponto de vista de um referencial que acelera em relação ao primeiro, bastando somar os efeitos do campo gravitacional existente do ponto de vista do referencial acelerado, ao fenômeno em questão. Com toda esta discussão, gostaríamos de chamar atenção para um detalhe. O leitor pode ser levado a chegar a errada conclusão de que poderá anular ou simular um campo gravitacional mediante apenas uma troca de referencial; contudo, isto está longe de ser verdade para campos gravitacionais reais. Como exemplo, não há nenhum referencial na Terra que possa ser usado para “cancelar” o seu campo gravitacional, dado que este último não é homogêneo. Apenas campos gravitacionais uniformes satisfazem as propriedades descritas.

Uma das conclusões que segue do princípio da relatividade geral é a seguinte. Uma lei física já bem conhecida é a que os raios de luz seguem trajetórias tais que o tempo para percorrer uma determinada distância saindo de um ponto A até um ponto B é extremizado. Na ausência de campos gravitacionais, esta trajetória é uma reta. Porém, do ponto de vista de um referencial que se move aceleradamente, existe um “campo gravitacional”. Pelo princípio da relatividade geral, deve valer a mesma lei de extremização do tempo, contanto que o efeito do campo gravitacional existente neste referencial seja levado em consideração. Por outro lado, já é bem conhecido que a trajetória que extremiza o tempo em um campo gravitacional uniforme é uma parábola, o que nos leva a incrível conclusão de que os raios de luz não seguirão mais trajetórias retilíneas no referencial acelerado, e

sim, trajetórias curvas!

Considere agora o seguinte experimento mental (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008). Dois relógios são colocados nas extremidades dianteira e traseira de um foguete, que acelera verticalmente “para cima”; os relógios serão nomeados de relógio A e B, respectivamente. Suponha que quando o foguete passa pela posição *I*, o relógio A emita um sinal de luz, que chegará no relógio B quando o foguete estiver na posição *II*, tendo percorrido uma distância D_1 . Agora, suponha que quando o foguete estiver na posição *III*, A emita outro sinal de luz, que percorrerá uma distância D_2 e alcançará o relógio B quando o foguete estiver em *IV*. Pela figura 9, está claro que $D_1 > D_2$, afinal, o foguete está acelerando, logo, o sinal que sai de A até B quando o foguete está passando pelas posições *III* e *IV* precisará percorrer uma distância menor. Supondo que o intervalo entre os sinais emitidos pelo relógio A tenha sido de um segundo, o relógio B o receberá em um intervalo menor do que um segundo, pois o segundo sinal precisou percorrer uma menor distância. Um observador que esteja com o relógio B na traseira do foguete concluirá que o seu relógio está passando mais devagar.

Pelo princípio da relatividade geral, esta mesma conclusão deverá ser válida no campo gravitacional terrestre. Se apoiarmos um relógio em cima de uma mesa, e outro no chão, os dois marcarão tempos diferentes, devido a intensidade do campo gravitacional ser diferente nos dois pontos. Um cálculo rápido dessa diferença nos leva ao resultado

$$t_{\text{mesa}} - t_{\text{chão}} = \frac{2gh}{c^2 t_{\text{chão}}}. \quad (3.2)$$

Em que g é o módulo do campo gravitacional terrestre, h a altura da mesa e c a velocidade da luz.

Outro experimento mental (EINSTEIN, 2019) cujos detalhes serão dados a seguir nos levarão a conclusão de que é necessário uma geometria mais geral do que a geometria Euclideana para se formular uma teoria baseada no princípio da relatividade geral. Imagine um disco que gira no seu próprio plano e em torno do seu eixo. Considere agora que um observador que está no centro do disco posicione uma régua tangencialmente à borda do disco. Da relatividade especial, um observador que está fora do disco observará uma contração ocorrendo no comprimento desta régua. Se esta última for colocada na direção radial, nenhuma contração será observada. Portanto, se o observador que vê o disco girando, medir o comprimento deste e dividir pelo diâmetro, obterá que

$$\frac{C}{2r} > \pi; \quad (3.3)$$

contrariando o resultado bem estabelecido da geometria Euclideana, que $C/2r = \pi$. Com isto, prova-se que teoremas da geometria Euclideana não podem valer com exatidão no disco giratório, e portanto nem em campos gravitacionais gerais.

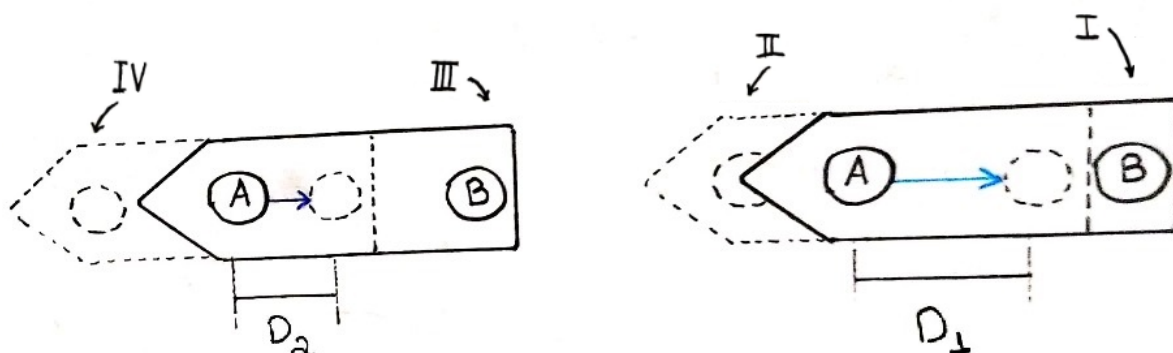


Figura 9 – Um relógio na dianteira de um foguete acelerado parece estar em ritmo mais acelerado que um relógio na traseira do foguete.

3.2 Equações de campo de Einstein

Façamos um breve resumo das conclusões alcançadas até o momento, graças ao princípio da relatividade geral.

- A) A trajetória dos raios de luz são afetadas pela presença de um campo gravitacional.
- B) Campos gravitacionais exercem influência sobre a passagem do tempo.
- C) Campos gravitacionais exercem influência sobre a geometria do espaço.

O item A) se mostrou surpreendentemente correto na expedição financiada em 1919 pela Royal Society, que verificou a curvatura da trajetória dos raios de luz que passavam próximo do Sol, durante a observação de um eclipse solar, na cidade de Sobral no estado do Ceará ¹. Já os itens B) e C), nos mostram que a gravidade influencia não só geometria do espaço, mas também, do tempo, e, portanto, do espaço-tempo.

Por meio desta série de discussões, é evidente que uma generalização do princípio da relatividade especial nos levará a uma teoria nova do campo gravitacional. As equações que descreverão o campo gravitacional devem reger o comportamento de qualquer campo, inclusive daqueles que são percebidos por observadores em referenciais em movimento arbitrário. Baseados nesta série de argumentos e com o auxílio de hipóteses adicionais que serão destacadas a seguir, chegaremos a lei que descreve a gravitação de um ponto de vista geral, e que naturalmente estará de acordo com nosso princípio da relatividade geral.

Uma das primeiras hipóteses que levantaremos é a de que a matéria curva o espaço-tempo. Note que esta é uma hipótese razoável, uma vez que o princípio da relatividade

¹ O leitor pode achar que este fato viola a relatividade especial, entretanto, interpretamos esta situação concluindo que a relatividade especial não tem validade irrestrita.

geral nos permitiu chegar a conclusão destacada no item A) supracitado. O item C) deixa claro que uma teoria que descreve o comportamento geral de campos gravitacionais não pode ser construída com base em uma geometria Euclideana. Note que isto não implica que a geometria do espaço-tempo seja necessariamente riemanniana. É possível construir teorias que tenham geometrias mais gerais do que a riemanniana e que dão conta de abarcar a hipótese supracitada. Portanto, uma hipótese adicional que faremos é a de que o espaço-tempo seja descrito em termos de uma variedade pseudo-riemanniana e quadridimensional. Supõe-se ainda que as equações de campo devam reduzir-se a equação de Poisson que descreve a gravidade no regime que chamaremos de Newtoniano ², logo, supomos que as equações dependam da métrica e das suas derivadas em segunda ordem. Também conjecturamos que a parte da geometria que acopla com o tensor de energia e momento, tenha 4-divergência nula.

Suponha um cenário onde tenhamos um corpo massivo curvando a geometria do espaço; a maneira como este corpo modifica a geometria ao seu redor, ditará como um segundo corpo deverá se mover na presença do primeiro. Portanto, é esperado que das equações de campo, possamos obter as equações de movimento do segundo objeto. Desta forma, justifica-se a última hipótese feita no parágrafo anterior. Por fim, dado que todas as leis da natureza devem ser expressas de uma forma covariante, isto é, devam ser válidas em todos os sistemas de referência, as equações devem se transformar da mesma forma quando passarem por uma mudança no sistema de coordenadas e manterem seu aspecto. Devido a natureza universal da lei de transformações dos tensores, uma equação escrita no formalismo tensorial automaticamente satisfaz essa exigência. Note que uma equação escrita conforme os requisitos supracitados também está de acordo com o princípio da relatividade geral.

Vimos na seção 2.10 que o tensor de Einstein carrega informação sobre a curvatura e tem 4-divergência nula. Portanto, ele possui as propriedades desejadas para acoplar com o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ que descreverá a matéria. Fazendo esse acoplamento, chegamos a

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

em que G é a constante da gravitação universal de Newton e c é a velocidade da luz. Essa equação pode ser generalizada com a adição do termo cosmológico. Denotando a constante cosmológica por Λ , podemos escrever a versão generalizada na forma

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

A constante cosmológica foi adicionada por Einstein para dar uma solução de um modelo cosmológico estático. Ela foi acrescentada nas suas equações antes do trabalho

² Regime em que os campos gravitacionais podem ser considerados fracos e que os corpos massivos se movem com velocidades menores do que a da luz.

do Hubble a respeito da expansão do universo, e foi considerada por ele seu pior erro. Entretanto, ela se provou muito importante pois é o termo que explica a expansão acelerada do universo, detectada na década de 90.

Os argumentos usados, aqui, para chegar em (3.5) foram heurísticos. Todavia, o teorema de Lovelock assegura que as equações de Einstein com o termo cosmológico são as únicas equações de Euler-Lagrange de segunda ordem, em um espaço quadridimensional, que podem ser obtidas a partir de uma densidade lagrangiana do tipo $L(g_{\mu\nu})$. (Para maiores detalhes, veja (LOVELOCK, 1969).)

3.3 Equações de Einstein-Maxwell

O princípio da ação estacionária é um dos princípios mais fundamentais da física, governando todas as teoria físicas conhecidas. Ele se baseia em escrever uma função, chamada lagrangeana³, que descreve o sistema em questão, e integrá-la no espaço-tempo, definindo assim, a ação. As equações que governam a dinâmica do sistema são obtidas mediante a exigência de que sob pequenas variações nos campos, a ação se mantenha estacionária. Matematicamente isto se traduz da seguinte forma

$$\delta S = \delta \int L d^4x = 0. \quad (3.6)$$

O resultado de (3.6) são as equações de Euler-Lagrange.

A título de exemplo, consideremos a lagrangeana que descreve o campo eletromagnético no vácuo, nos restringindo a regiões livres de cargas e correntes. Esta lagrangeana pode ser escrita como

$$L = -\frac{\sqrt{-g}}{4\mu_0} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

em que μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor do campo eletromagnético, e A^μ é o 4-potencial, definido como $A^\mu = (\phi, \vec{A})$, em que ϕ é o chamado potencial escalar e $\vec{A}$ o potencial vetor. As variáveis independentes neste caso são a métrica e o 4-potencial. Para cada uma, haverá uma equação de Euler-Lagrange. Para as variação em A_μ , obtemos

$$\overset{\circ}{\nabla}_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.8)$$

No formalismo da teoria clássica de campos, podemos definir o tensor de energia-momento⁴ de um campo arbitrário através da variação da ação em relação ao tensor métrico, o que nos levará a

$$T^{\mu\nu} = 2 \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} L. \quad (3.9)$$

³ O correto seria densidade lagrangeana, muito embora usa-se na literatura a palavra lagrangeana.

⁴ Em geral, $T^{\mu\nu}$ não é simétrico, mas há métodos e razões para querer simetrizá-lo. Para mais detalhes, o leitor é convidado a ler a seção 32, página 79 de (LANDAU; LIFSCHITZ, 1971).

Executando esta conta para a lagrangeana (3.7), chegamos que o tensor de energia-momento do campo eletromagnético é

$$T_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{\mu_0} (F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}). \quad (3.10)$$

Note que este tensor é simétrico nos seus índices e obedece a equação de conservação de energia

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.11)$$

Portanto, substituindo (3.10) em (3.4), chegamos as chamadas equações de Einstein-Maxwell.

$$\mathring{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G\epsilon_0}{c^2} (F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}). \quad (3.12)$$

3.4 Colapso Gravitacional

As estrelas no universo se formam quando núvens de gás e poeira se aglutinam por causa da gravidade, deixando essa mistura cada vez mais densa. Devido ao atrito entre as partículas, a temperatura começa a aumentar até um ponto em que reações nucleares começam a ocorrer, convertendo átomos de hidrogênio em hélio e liberando energia, que dá o brilho característico das estrelas. Quando o “combustível” nuclear da estrela acaba, ela passa por colapsos, cujo estado final dependerá de sua massa. Se a massa for aproximadamente da mesma ordem da massa solar ($M_\odot$), seu estado final será um anã branca ou uma estrela de neutrôns.

Os constituintes de uma anã branca são em sua maioria elétrons, uma vez que a energia térmica média por partícula é o suficiente para ionizar o hélio presente na composição da estrela. A razão entre a temperatura média dessas estrelas e a temperatura de Fermi T_F é da ordem de 10^{-3} , o que nos permite modelar essas estruturas como um gás de elétrons em um estado degenerado e que obedecem a estatística de Fermi-Dirac. Com base nisso, podemos derivar uma relação entre a massa da estrela e o seu raio (PATHRIA, 1996). A relação explícita do raio como função da massa é obtida em dois casos extremos. Se o raio da estrela R obedecer a

$$i) R \gg 10^6 m \quad R \propto M^{-1/3} \quad (3.13)$$

$$ii) R \ll 10^6 m$$

$$R \approx \frac{(9\pi)^{1/3}}{2} \frac{\hbar}{mc} \left(\frac{M}{m_p} \right)^{1/3} \left\{ 1 - \left(\frac{M}{M_0} \right)^{2/3} \right\}^{1/2} \quad (3.14)$$

em que, em (3.14), m é a massa de repouso do elétron, m_p é massa do próton, M é a massa da estrela e, por sua vez, M_0 é um valor limite para a massa da estrela. Note que de acordo

com (3.14), quanto maior a massa da estrela, menor o seu tamanho; se $M = M_0$, seu raio é nulo. Um caso interessante ocorre quando $M \geq M_0$. Neste estágio de vida, uma anã branca se mantém em equilíbrio devido a pressão de degenerescência exercida pelos elétrons, que contrabalança a gravidade da própria estrela, que tende a aglutinar todo o seu material no centro. A pressão de degenerescência surge devido ao princípio da exclusão de Pauli, que impede que mais de um elétron ocupe o mesmo estado. Contudo, fazendo $M \geq M_0$ em (3.14), interpretamos que a pressão de degenerescência da estrela não seria mais o suficiente para impedir que a estrela colapse sobre si mesma, levando portanto, a uma contração contínua do material estelar à regiões cada vez menores, resultando na formação de uma região no espaço-tempo em que toda a matéria foi concentrada em uma região extremamente pequena, e cuja curvatura é tão intensa, que nem mesmo a luz consegue escapar; chamamos isso de buraco negro. Na década de 60, Roger Penrose demonstrou que os buracos negros são formados a partir do colapso gravitacional de estrelas supermassivas, o que o levou a ganhar o prêmio Nobel de 2020.

A inevitabilidade da singularidade como um estado final de colapso de corpos massivos resulta do teorema das singularidades, provado por Penrose, Hawking e Geroch (HAWKING; PENROSE, 1970). Se o tensor de energia-momento que descreve a matéria passando por um colapso gravitacional satisfizer a condição forte de energia, o colapso gravitacional levará a uma contração ilimitada da matéria.

3.5 Soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström-de Sitter

Qualquer corpo massivo com simetria esférica pode produzir um campo gravitacional com também simetria esférica, constituindo uma importante classe de soluções das equações de Einstein: as soluções esfericamente simétricas. De forma geral, as soluções das equações de Einstein que descrevem o campo gravitacional exterior de corpos massivos isolados e com simetria esférica possui a forma

$$ds^2 = -B^2(r)c^2dt^2 + C^2(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (3.15)$$

O chamado teorema de Birkhoff, afirma que toda solução das equações de Einstein no vácuo que é esfericamente simétrica é necessariamente estática. Isto significa que a métrica além de ser estacionária, isto é, que ela é invariante sob translação temporal, também é invariante sob reversão temporal.

A primeira solução das equações de Einstein dessa forma foi encontrada por Karl Schwarzschild em 1916, cuja forma específica é

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (3.16)$$

Note que neste caso, $B(r) = 1/C(r)$. Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ três vetores espaciais ortonormais em um ponto p . O vetor deslocamento $\delta\mathbf{r}$ da posição de um ponto em uma vizinhança pequena

de p pode ser caracterizada pelos três números $(\delta x, \delta y, \delta z)$: $\delta \mathbf{r} = \delta x \mathbf{e}_1 + \delta y \mathbf{e}_2 + \delta z \mathbf{e}_3$. Se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, e $\mathbf{e}_3$ estão direcionados ao longo de r, θ e ϕ , respectivamente, então

$$\delta x = \sqrt{g_{11}} dr = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right), \quad (3.17)$$

$$\delta y = \sqrt{g_{22}} d\theta = r d\theta, \quad (3.18)$$

$$\delta z = \sqrt{g_{33}} d\phi = r \sin \theta d\phi. \quad (3.19)$$

O fator $(1 - 2GM/c^2 r)$ reflete a curvatura do espaço tridimensional. Tomando o limite de $r \rightarrow \infty$ em (3.16), é fácil ver que o fator que caracteriza a curvatura no espaço some, e a métrica tende à forma que ela possui na relatividade especial, isto é, em um espaço sem curvatura. Veja também que, da definição de tempo-próprio τ (tempo físico que é medido por relógios)

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt \rightarrow d\tau \leq dt. \quad (3.20)$$

O que evidencia que conforme a distância r diminui, o tempo medido por relógios também passa mais devagar. A igualdade é válida somente no limite em que $r \rightarrow \infty$. Nesse mesmo limite, o campo gravitacional passa a ser descrito pela aproximação de campos fracos, isto é, passamos a estar no domínio da gravitação Newtoniana. Nesta aproximação $g_{00} = -(1 + 2\Phi/c^2)$; em que Φ é o potencial gravitacional Newtoniano dado por $\Phi = -GM/r$, com M sendo a massa do sistema. Comparando este resultado com (3.16), fica evidente que o fator M que lá aparece pode ser associado exatamente com a massa do sistema.

De (3.15), vemos que as componentes da métrica apresentam duas singularidades; em $r = 0$ e em $r = 2GM/c^2$. Essas duas singularidades podem ter duas origens; (i) uma singularidade nas coordenadas ou (ii) uma verdadeira singularidade na estrutura do espaço-tempo. A origem dessas singularidades é distinta, sendo a segunda uma singularidade coordenada, que pode ser removida por uma troca de sistema de coordenadas. Já a primeira, $r = 0$, é chamada de singularidade física, pois não pode ser removida por uma transformação de coordenadas. Em valores numéricos, a “singularidade” em $r_S = 2GM/c^2$ é dada por

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) km, \quad (3.21)$$

em que $M_\odot \approx 2 \times 10^{30} kg$ é a massa do Sol. Portanto, para corpos celestiais ordinários, como o Sol ou a Terra, o raio de Schwarzschild r_S fica no interior destes corpos, onde a solução de vácuo de Schwarzschild não é mais válida. Na verdade, as singularidades supracitadas só serão relevantes para corpos que sofrerem um colapso gravitacional completo.

As equações de Einstein-Maxwell discutidas na seção anterior podem ser modificadas para incluir a constante cosmológica, passando a serem escritas como

$$\dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G \epsilon_0}{c^2} (F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}). \quad (3.22)$$

Uma solução bem conhecida desta equação é a de Reissner-Nordström-de Sitter, que pode descrever um buraco negro eletricamente carregado em um espaço-tempo com constante cosmológica. Esta solução tem a forma dada por (3.15), com $B(r) = 1/C(r)$, em que $B(r)$ é escrito como

$$B^2(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{r^2}{L^2}. \quad (3.23)$$

Nessa equação, M é chamada de massa geométrica no caso em que $Q = 0$, Q está relacionada com a carga elétrica q , e por sua vez, L é a escala de comprimento de de Sitter, que está relacionada com a constante cosmológica. As equações que relacionam M com m , Q com q e L com Λ são

$$M = \frac{Gm}{c^2}, \quad Q = q\sqrt{\frac{G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}, \quad \Lambda = \frac{3}{L^2}. \quad (3.24)$$

Perceba que, aqui, estamos usando o sistema internacional de unidades, isto é, m é dada em quilogramas, c em metros por segundo, q em coulomb etc.

3.6 Decomposição de Eckart

O tensor de energia-momento, como comentado anteriormente, pode ser construído a partir da variação da ação em relação a métrica, o que nos leva a (3.9). Independentemente da forma deste tensor, foi demonstrado por Eckart (ECKART, 1940) que sempre podemos decompô-lo em termos das suas componentes projetadas numa congruência tipo-tempo, e que terão uma interpretação física conveniente. Para isto, Eckart, considerando a 4-velocidade v^α de um conjunto de partículas materiais, tal que

$$v^\alpha v_\alpha = -1, \quad (3.25)$$

definiu um tensor, dado por

$$h_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu + v_\mu v^\nu; \quad (3.26)$$

de modo que, qualquer vetor F^μ pode ser projetado na direção do eixo do tempo-próprio e do espaço-próprio, a partir de

$$f = -u_\mu F^\mu \quad (3.27)$$

$$f^\mu = h_\nu{}^\mu F^\nu. \quad (3.28)$$

Por conveniência, estamos usando $c = 1$. Porém, retornaremos o c mais adiante.

A partir das equações (3.27) e (3.28), é fácil verificar que

$$F^\mu = f v^\mu + f^\mu. \quad (3.29)$$

Além disso, é imediato verificar que o tensor definido em (3.26) obedece às seguintes propriedades

$$h_\nu{}^\mu h_\rho{}^\nu = h_\rho{}^\mu, \quad h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + v^\mu v^\nu, \quad h^{\mu\nu} = h_\sigma{}^\mu g^{\sigma\gamma} h_\gamma{}^\nu. \quad (3.30)$$

Além de obedecer também a

$$v_\mu h_\nu{}^\mu = 0, \quad v^\nu h_\nu{}^\mu = 0. \quad (3.31)$$

Munido destas propriedades e de (3.25), podemos concluir também que

$$h^{\mu\nu} F_\mu F_\nu = g^{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \geq 0, \quad (3.32)$$

sendo a igualdade válida apenas quando $F_\mu = f v_\mu$. A partir do campo vetorial v^μ e o tensor $h^{\mu\nu}$, podemos então decompor qualquer tensor de energia-momento em termos de suas componentes próprias, sendo estas definidas por

$$\rho \equiv T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu, \quad p \equiv \frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad (3.33)$$

$$q^\mu \equiv -c h_\alpha{}^\mu T^{\alpha\beta} v_\beta, \quad \mathcal{P}^{\mu\nu} \equiv -h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu T^{\alpha\beta} + p h^{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

em que voltamos com o $c \neq 1$. Na decomposição de Eckart, identificamos o ρ como densidade de energia, p como pressão isotrópica, q como fluxo de energia (“fluxo de calor”) e $\mathcal{P}$ como pressão anisotrópica (ou ainda, “tensor de tensão viscosa”). Desta forma, dado sua decomposição, o tensor de energia-momento passa a ser escrito como

$$T^{\mu\nu} = \frac{\rho v^\mu v^\nu}{c^2} + p h^{\mu\nu} + \frac{2}{c} q^{(\mu} v^{\nu)} - \mathcal{P}^{\mu\nu}. \quad (3.35)$$

Logo, se v^μ representar a 4-velocidade das partículas de um fluido, esta equação representa o tensor de energia-momento desse fluido. E, se considerarmos que não há fluxo de energia e nem pressão anisotrópica, nós obtemos o tensor de energia-momento de um fluido ideal

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) v^\mu v^\nu + p g^{\mu\nu}. \quad (3.36)$$

3.7 Termodinâmica de buracos negros

Em 1973, Bardeen, Carter e Hawking, publicaram um trabalho intitulado “As quatro leis da mecânica dos buracos negros” (BARDEEN; CARTER; HAWKING, 1973) em que exploram, por meio da relatividade geral, as leis que governam os buracos negros. Dentre os resultados, está a notável propriedade de que a área do horizonte de eventos sempre cresce, quando matéria ou radiação cai dentro de um buraco negro. Além disso, se dois buracos negros se fundem, a área do buraco negro resultante é maior do que a soma da área dos dois buracos negros iniciais. Essa lei é expressa matematicamente na forma

$$\Delta A \geq 0. \quad (3.37)$$

Analogamente, a entropia de um sistema termodinâmico fechado não diminui. A entropia é a medida do número de configurações microscópicas que um sistema termodinâmico pode ter, para certas variáveis macroscópicas definindo um macroestado. Por outro lado, a

entropia também pode ser compreendida em termos de informação; em outras palavras, isso significa que diminuir o número de microestados acessíveis é equivalente a ganhar informação sobre a configuração interna do sistema. Em um colapso gravitacional que resulta na formação de um buraco negro, muita informação é perdida a respeito da configuração interna da matéria. Para um dado buraco negro com uma determinada massa, carga e momento angular, muitas configurações diferentes de matéria passando por um colapso gravitacional poderia ter resultado na formação deste. Como a entropia está relacionada com o ganho ou a perda de informação, e no processo de formação de um buraco negro, muita informação é perdida à respeito da configuração interna da matéria, os buracos negros devem possuir entropia. De fato, caso esses corpos não tivessem entropia, a existência deles permitiria a possibilidade de processos que violassem a segunda lei da termodinâmica.

Ainda sobre o trabalho de Bardeen, Carter e Hawking, foi demonstrado por eles que pequenas variações na massa M estão conectadas com pequenas variações na área A do horizonte de eventos, carga Q e momento angular J através da equação

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ, \quad (3.38)$$

em que $\kappa = 4\pi\sqrt{M^2 - Q^2 - J^2/M^2}/A$ é a gravidade superficial, e representa a força necessária para manter um objeto estacionário no horizonte de eventos; $\Omega_H = 4\pi J/MA$ é a velocidade angular, e $\Phi_H = 4\pi Qr_+/A$ é o potencial elétrico do buraco negro. Quanto ao significado físico de κ , este representa a força realizada por um observador no infinito para manter um corpo de massa unitária estático no horizonte de eventos, que equivale à aceleração gravitacional gerada na superfície do buraco negro (MENEZES, 2021).

Note que, nessa analogia com a termodinâmica, a área desempenha o papel de entropia, e portanto, κ desempenharia um papel análogo ao da temperatura; de fato, κ é constante ao longo do horizonte de eventos, bem como a temperatura é constante em um sistema em equilíbrio térmico. A analogia pode ir ainda mais longe se explorarmos o fato de que κ não pode ser feito igual a zero por meio de uma série finita de processos, conforme demonstrado em (BARDEEN; CARTER; HAWKING, 1973). Na termodinâmica, é bem conhecido que a terceira lei afirma que a temperatura não atinge $T = 0\text{ K}$ por meio de processos finitos. Todos esses resultados obtidos em (BARDEEN; CARTER; HAWKING, 1973) foram puramente com o uso de relatividade geral, e nada tem haver com termodinâmica; todavia, o que parecia ser apenas uma analogia formal, se revelará na verdade uma importante característica a respeito dos buracos negros.

Em 1975, Hawking, ao considerar a interação entre o campo gravitacional dos buracos negros e campos quânticos no espaço-tempo (HAWKING, 1975), chegou ao importante resultado de que buracos negros possuem um espectro de radiação térmica equivalente ao de um corpo com temperatura diferente de zero. Para um buraco negro de

Schwarzschild de massa M , no sistema internacional de unidades, essa temperatura vale

$$T_{BH} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}, \quad (3.39)$$

em que $\hbar$ é a constante de Planck reduzida e k_B é a constante de Boltzmann.

Em 1973, Bekeinstein, convencido de que buracos negros deveriam de fato possuir entropia, e baseado nos resultados do Hawking a respeito da área do horizonte de eventos (HAWKING, 1971) e sua incrível semelhança com a segunda lei da termodinâmica, derivou que a entropia é um múltiplo da área do horizonte de eventos, mais precisamente (BEKENSTEIN, 1973)

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}. \quad (3.40)$$

Essa quantidade é conhecida como entropia de Bekenstein-Hawking.

A área do horizonte de eventos escrita em termos da massa M , carga Q e momento angular J é

$$A = 4\pi \left(2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - J^2/M^2} \right). \quad (3.41)$$

Essa relação pode ser invertida, levando a fórmula da energia interna de um buraco negro

$$M \equiv M(A, J, Q) = \left\{ \frac{\pi \left(Q^2 + A/4\pi \right)^2 + 4J^2}{A} \right\}^{1/2}. \quad (3.42)$$

Diferenciando (3.42), somos levados a (3.38).

4 Teleparallelismo Equivalente à Relatividade Geral

Teorias teleparalelas são baseadas em uma configuração geométrica chamada de paralelismo a distância (ou teleparallelismo). Uma condição única e suficiente para estabelecer o paralelismo a distância é que o tensor de curvatura seja zero, conforme estabelecido por Eisenhart em 1927 (EISENHART, 1927). Uma vez que essa condição é satisfeita, o transporte paralelo de um vetor de um ponto P para um ponto Q independe do caminho percorrido¹. Com base nisso, é possível construir a partir do transporte paralelo de um vetor V em um ponto P , um campo de vetores paralelos para todos os pontos da variedade.

Diversas teorias baseadas no paralelismo a distância já foram usadas por inúmeros pesquisadores para investigar e tratar vários problemas; dentre eles, podemos citar: o problema da localização da energia gravitacional (MALUF, 2013); a explicação da expansão acelerada do universo sem o uso de pressão negativa (BENGOCHEA; FERRARO, 2009; CARDONE; RADICELLA; CAMERA, 2012; CAI et al., 2016); entropia de buracos negros (HAMMAD et al., 2019), entre outros. Nesta dissertação, estamos interessados na teoria teleparalela que descreve a gravidade, e cujas equações de campo são equivalentes às da relatividade geral. Porém, antes de apresentarmos o teleparallelismo equivalente à relatividade geral (TEGR, da sigla em inglês) propriamente dito, nas primeiras três seções prepararemos o leitor com os prolegômenos matemáticos necessários, em que reescreveremos algumas entidades geométricas anteriormente definidas, em termos de bases não-coordenadas, na sequência apresentaremos a noção de teleparallelismo que estará presente noTEGR, e por sua vez, introduziremos a noção de campos de tetrada como referenciais, que será de fundamental importância para o equivalente teleparalelo da relatividade geral. Na quarta e quinta seção serão apresentadas as equações de campo doTEGR, bem como o seu acoplamento com a eletrodinâmica não-linear, cujas soluções serão de interesse nos próximos capítulos. A última seção será devotada a apresentar uma abordagem que nos permitirá simplificar as expressões.

4.1 Expansão de alguns objetos em bases não-coordenadas

Esta seção é destinada a escrever alguns objetos matemáticos anteriormente definidos, em termos de bases não coordenadas.

¹ Conferir seção 2.10, equação (2.148).

4.1.1 Parênteses de Lie

Na seção 2.3 definimos os parênteses de Lie e o escrevemos em termos de uma base coordenada, cuja forma explícita está dada na equação (2.20). Contudo, considere agora um conjunto de vetores de base não-coordenada $\{e_a\}$, que quando expandidos em termos de uma base coordenada qualquer tem a forma

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu. \quad (4.1)$$

Em termos desta base, os parênteses de Lie tomam a forma

$$[e_a, e_b] = (e_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu - e_b^\mu \partial_\mu e_a^\nu) e_c^\nu e_c. \quad (4.2)$$

A partir disso, podemos ainda definir o chamado objeto de não-holonomia, dado por ²

$$\Omega_{bc}^a \equiv -\vartheta^a([e_b, e_c]), \quad (4.3)$$

em que ϑ^a é vetor dual de e_a .

4.1.2 Conexão

Os coeficientes da conexão afim em relação a uma base não-coordenada são definidos como

$$\omega_{bc}^a \equiv \vartheta^a(\nabla_b e_c). \quad (4.4)$$

É interessante também computarmos a derivada covariante $\nabla_\mu e_a$. Um cálculo simples nos leva a

$$\nabla_\mu e_a = (\partial_\mu e_a^\lambda + e_a^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \partial_\lambda. \quad (4.5)$$

Como usualmente é feito, o termo entre parêntese é denotado por $\nabla_\mu e_a^\lambda$. Utilizando as propriedades da conexão, podemos ainda extrair uma relação entre (4.4) e (4.5); portanto, temos

$$\nabla_\mu e_a = e_b^\mu \nabla_b e_a = e_b^\mu \omega_{ba}^c e_c \quad (4.6)$$

Conforme o que foi dito no parágrafo acima, podemos fazer $\nabla_\mu e_a = (\nabla_\mu e_a^\lambda) \partial_\lambda$. Expandindo $e_c = e_c^\lambda \partial_\lambda$, podemos igualar as componentes, para obter

$$\nabla_\mu e_a^\lambda = e_b^\mu \omega_{ba}^c e_c^\lambda \quad (4.7)$$

e por fim, contraindo com e_λ^d e e_e^μ , obtemos

$$\omega_{ba}^c = e_c^\lambda e_b^\mu \nabla_\mu e_a^\lambda. \quad (4.8)$$

² Atente-se a possibilidade de variação de sinal na literatura, uma vez que a quantidade definida acima possui um sinal de menos.

4.1.3 Curvatura e Torção

Partindo das definições de torção e curvatura, dadas nas seções 2.9 e 2.10, respectivamente, podemos escrever

$$R^a_{bcd} = e_c[\omega^a_{db}] - e_d[\omega^a_{cb}] + \omega^e_{db}\omega^a_{ce} - \omega^e_{cb}\omega^a_{de} + \Omega^e_{cd}\omega^a_{eb}, \quad (4.9)$$

$$T^a_{bc} = \omega^a_{bc} - \omega^a_{cb} + \Omega^a_{bc} \equiv 2\omega^a_{[bc]} + \Omega^a_{bc}. \quad (4.10)$$

A partir desta última equação, podemos demonstrar a seguinte identidade

$$\omega^a_{bc} = \frac{1}{2}(\Omega_{bc}^a + \Omega_{cb}^a - \Omega_{bc}^a) + K^a_{bc}. \quad (4.11)$$

Perceba que a partir de (4.7) e (4.8), podemos recuperar as componentes da curvatura e torção em uma base coordenada fazendo as contrações

$$R^\lambda_{\mu\nu\sigma} = e_a^\lambda e_\mu^b e_\nu^c e_\sigma^d R^a_{bcd}, \quad (4.12)$$

$$T^\lambda_{\mu\nu} = e_a^\lambda e_\mu^b e_\nu^c T^a_{bc}. \quad (4.13)$$

4.2 Teleparallelismo

A partir da noção de teleparallelismo definida por Eisenhart (EISENHART, 1927), podemos estabelecer a noção mais restrita que está presente no TEGR da seguinte forma:

Definição 4.2.1 *Seja M uma variedade diferenciável dotada de uma métrica g e uma conexão ∇ , compatível com a métrica e não-simétrica. Seja $\{e_a\}$ um conjunto de campos vetoriais e ortonormais entre si. Definimos a noção de teleparallelismo à distância a partir de*

$$\nabla_\mu e_a = 0 \Leftrightarrow \omega^a_{bc} = 0 \quad (4.14)$$

À conexão que satisfaz (4.14) dá-se o nome de conexão de Weitzenböck.

Como consequência desta definição, os e_a são dito serem paralelos; por isso, chamaremos $\{e_a\}$ de referencial teleparalelo. Um outro ponto importante é que a equação (4.14) define uma família de campos vetoriais que estão todos relacionados entre si por transformações globais de Lorentz. É interessante destacar que (4.14) não é invariante sob transformações locais de Lorentz. Portanto, não é possível fixar dois referenciais como teleparalelos simultaneamente na mesma conexão, se eles estiverem conectados por transformações locais de Lorentz.

O conjunto de campos vetoriais $\{e_a\}$ será denotado por $\{e_{(0)}, e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}\}$ e será chamado de tetrada (neologismo da palavra inglesa “tetrad”). Por sua vez, é possível definir uma base dual que será denotada por $\{\vartheta^a\}$ e também chamada de tetrada, através da relação

$$\vartheta^a(e_b) = \delta_b^a. \quad (4.15)$$

Assim como e_a , também podemos expandir ϑ^a em termos de uma base coordenada, obtendo

$$\vartheta^a = e^a_{\mu} dx^{\mu}. \quad (4.16)$$

Logo, é possível reexpressar a relação (4.15) na forma

$$e^a_{\mu} e_b^{\mu} = \delta_b^a, \quad e^a_{\nu} e_a^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (4.17)$$

em que foi utilizado a relação inversa de (4.1) e (4.16) em conjunto de (4.15) para obter a segunda relação de (4.15). Como a base é ortonormal e $e_{(0)}$ será, por escolha, um vetor tipo-tempo, devemos ter

$$g(e_a, e_b) = e_a^{\mu} e_b^{\nu} g_{\mu\nu} = \eta_{ab}, \quad (4.18)$$

com η_{ab} é representando a métrica que descreve o espaço-tempo de Minkowski. Note que estamos usando índices latinos do início do alfabeto para representar índices³ $SO(1,3)$, enquanto usamos os índices gregos para representar índices do espaço-tempo; estes últimos são um caso particular do grupo linear geral.

Substituindo (4.14) em (4.10), podemos escrever as componentes da torção em termos do objeto de não-holonomia, que pode ser escrito na forma

$$T^a_{\mu\nu} = \partial_{\mu} e^a_{\nu} - \partial_{\nu} e^a_{\mu}; \quad (4.19)$$

em que uma contração com e^b_{μ} e e^c_{ν} foi realizada. Além disso, fica claro a partir de (4.9) que a curvatura associada a conexão de Weitzenböck é nula, portanto

$$R^a_{bcd} = 0. \quad (4.20)$$

E por sua vez, sabendo que a conexão adotada é compatível com a métrica e não-simétrica, os coeficientes da conexão de Weitzenböck expandidos em uma base coordenada podem ser escritos em termos dos símbolos de Levi-Civita e da contorção, conforme (2.124). Partindo de (4.14) podemos escrever esses coeficientes na forma $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = e_a^{\alpha} \partial_{\mu} e^a_{\nu}$, bastando para isso substituir (4.1) em (4.14) e aplicar as propriedades da conexão. Por outro lado, quando expandimos (2.124) em uma base não-coordenada, essa expressão toma a forma

$$\omega^a_{bc} = \dot{\omega}^a_{bc} + K^a_{bc}. \quad (4.21)$$

Mas, uma vez que $\omega^a_{bc} = 0$, temos que

$$\dot{\omega}^a_{bc} = -K^a_{bc} = \frac{1}{2}(\Omega_{bc}^a + \Omega_{cb}^a - \Omega^a_{bc}). \quad (4.22)$$

³ Um elemento do grupo $SO^+(1,3)$, omitiremos o sinal +, corresponde a uma transformação de Lorentz própria e ortócrona.

4.3 Campos de tetrada como referenciais no espaço-tempo

Tradicionalmente, não é costumeiro a literatura diferenciar duas ideias distintas; um sistema de referência e um sistema de coordenadas. Nesta dissertação, adotaremos a distinção apresentada por Norton ((NORTON, 1993), p.837): Um sistema de coordenadas é uma atribuição suave e invertível de quatro números a eventos em um dado espaço-tempo. Por outro lado, um sistema de referência está relacionado a um sistema físico idealizado que é usado para atribuir esses números, não sendo, portanto, apenas abstrações matemáticas; eles estão relacionados a entes físicos reais.

Definição 4.3.1 *Seja S um sistema de instrumentos hipotéticos que preenchem o espaço inteiro movendo-se com velocidades arbitrárias. Um sistema de referência, ou um frame, é definido como sendo a congruência de curvas tipo-tempo definidas por S . Os eventos no espaço-tempo, portanto, pertencem a uma das curvas dessa congruência.*

A partir dessa definição, as passagens de tempo serão computadas pelos relógios que se movem com o frame⁴. Os campos vetoriais tipo-tempo que dão origem a congruência da definição 4.3.1 podem ser suplementados por uma tríade de vetores tipo-espaço, que apontam para as linhas de mundo de elementos vizinhos dos elementos que compõe o frame (NORTON, 1993). Portanto, um sistema de referência se torna a especificação de um conjunto de quatro vetores mutualmente ortonormais sobre o espaço-tempo. Finalmente, dizemos que um sistema de coordenadas está adaptado a um frame se as curvas definidas pelo frame coincidem com as curvas definidas quando fazemos as coordenadas espaciais constantes. Nessa visão, poderíamos ainda pensar em um frame como sendo a classe de equivalência de sistemas de coordenadas adaptados a alguma congruência.

No TEGR, a tetrada definida dentro do formalismo da seção anterior é utilizada como frame⁵ (no sentido definido na presente seção). Vejamos de que forma isso é feito. Seja $x(\tau)$ a trajetória de um observador, em que τ é o tempo próprio do observador; a sua velocidade é dada pelo 4-vetor definido por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (4.23)$$

Podemos definir $e_{(0)}$ de forma que $e_{(0)} = u$; logo, suas componentes são

$$u^\mu = ce_{(0)}^\mu. \quad (4.24)$$

Portanto, o observador está sempre em repouso em relação a $\{e_{(0)}, e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}\}$. Está claro, então, que se tivermos uma congruência cujas curvas representam as trajetórias de observadores caracterizados pelo campo de velocidade u^μ , o campo vetorial $e_{(0)}$ também descreverá essa congruência.

⁴ Daqui para frente nos referiremos ao sistema S de referência por frame.

⁵ Os vetores duais $\{\vartheta^a\}$ serão denominados de co-frame.

4.3.1 Tensor das acelerações

Como a tríade não é definida univocamente pela congruência, é interessante estudarmos as acelerações associados com o referencial. Começemos pela 4-aceleração. A partir de (4.24), obtemos

$$a^\mu = u^\nu \overset{\circ}{\nabla}_\nu u^\mu = c u^\nu \overset{\circ}{\nabla}_\nu e_{(0)}^\mu. \quad (4.25)$$

Ao introduzirmos uma tríade no referencial, é possível que ela possua rotações em relação a um referencial que não rotaciona. Assim, é interessante calcular as rotações do frame. De maneira geral, podemos incluir a aceleração do referencial e a rotação dos vetores da tríade em uma única expressão. Calculemos a taxa de variação da tetrada ao longo da linha de universo do observador:

$$\frac{De_a}{d\tau} = u^\nu \left(\partial_\nu e_a^\mu + \overset{\circ}{\Gamma}^\mu_{\nu\sigma} e_a^\sigma \right) \partial_\mu = \phi_a^\mu \partial_\mu. \quad (4.26)$$

Se quisermos escrever ϕ_a^μ no referencial da tetrada, podemos fazer $\phi_a^\mu e_\mu^b$ em (4.26); portanto

$$\frac{De_a}{d\tau} = \phi_a^b e_b. \quad (4.27)$$

O objeto ϕ_a^b é conhecido como tensor das acelerações.

A partir da versão de (4.5) para a conexão de Levi-Civita, isto é

$$\overset{\circ}{\nabla}_\nu e_a^\mu = \partial_\nu e_a^\mu + \overset{\circ}{\Gamma}^\mu_{\nu\sigma} e_a^\sigma, \quad (4.28)$$

podemos escrever $\phi_a^\mu e_\mu^b$, na forma

$$\phi_a^b = e_\mu^b u^\mu \overset{\circ}{\nabla}_\nu e_a^\mu. \quad (4.29)$$

Devido à antissimetria dos índices, o tensor das acelerações pode ser decomposto de maneira análoga ao tensor do campo eletromagnético. Mediante esta decomposição, o tensor das acelerações pode ser reescrito na forma

$$\phi^{ab} = \frac{1}{c^2} (a^a u^b - a^b u^a) + \Omega^{ab}; \quad (4.30)$$

em que $\Omega^{ab} = \frac{1}{c} u_\alpha \omega_\beta \epsilon^{\alpha\beta ab}$, sendo ω_β a velocidade angular da tríade e $\epsilon^{\alpha\beta ab}$ o tensor de Levi-Civita⁶. Por outro lado, usando a identidade $\overset{\circ}{\nabla}_\nu e_a^\mu = \overset{\circ}{\omega}^c_{\nu a} e_c^\mu$ em (4.29), é possível reescrever o tensor das acelerações na forma (FORMIGA, 2024)

$$\phi_{ab} = c \overset{\circ}{\omega}_{b(0)a}. \quad (4.31)$$

Portanto, uma vez que calculamos os componentes da torção a partir de (4.19)⁷, obtemos toda a informação do estado de movimento do frame. Se $\phi_{ab} = 0$, o frame está em queda livre e não rotacionando.

⁶ Não confundir Ω^{ab} com o objeto de não-holonomia, que é denotado por Ω^a_{bc}

⁷ O objeto de não-holonomia coincide com as componentes da torção como consequência de (4.14).

4.3.2 Transporte de Fermi-Walker

Um observador movendo-se em uma dimensão e que sente uma aceleração uniforme em seu referencial de repouso descreverá um movimento hiperbólico no espaço-tempo de Minkowski. Nesse caso, podemos escolher uma tetrad cuja triade não rotaciona; a única rotação presente será aquela que ocorre no plano tipo-tempo definido pela 4-velocidade e a aceleração.

Suponha que um frame acelera arbitrariamente e é tal que $\phi_{ij} \neq 0$, isto é, as componentes espaciais do frame estão rotacionando. É possível realizar uma transformação nesse frame de forma que a única rotação existente seja aquela devido a taxa de mudança de e_0 . Em outras palavras, após essa transformação, $\tilde{\phi}_{ij} = 0$.

Sob uma transformação local de Lorentz nas componentes espaciais, nos temos $\tilde{e}_i^\mu = \Lambda_i^k e_k^\mu$; logo

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{i\mu\nu} &= \partial_\mu \tilde{e}_{i\nu} - \partial_\nu \tilde{e}_{i\mu} \\ &= \Lambda_i^k T_{k\mu\nu} + \partial_\mu (\Lambda_i^k) e_{k\nu} - \partial_\nu (\Lambda_i^k) e_{k\mu}.\end{aligned}$$

Os coeficientes $\{\Lambda_i^j(x)\}$ das componentes espaciais da transformação local de Lorentz são fixados exigindo que $\tilde{\phi}_{ij} = 0$.

Podemos realizar uma transformação de Lorentz nas componentes espaciais da tetrad e mostrar que, se os coeficientes espaciais $\{\Lambda_i^j(x)\}$ obedecerem a

$$e_{(0)}^\mu \Lambda_m^j \partial_\mu \Lambda_{jk} - \phi_{km} = 0,$$

obteremos $\tilde{\phi}_{jk} = 0$. Dizemos então que a tetrad sofreu um transporte de Fermi-Walker. Em termos práticos, o transporte de Fermi-Walker pode ser obtido conectando a triade a giroscópios.

4.4 Equações de campo do TEGR

Podemos obter as equações de campo do TEGR a partir da lagrangeana definida por

$$L_{total} = -keT - L_M, \quad T \equiv \frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^a T_a, \quad (4.32)$$

em que T é o escalar de torção, $e \equiv \det(e^a_\mu) = \pm\sqrt{-g}$, k é uma constante de acoplamento, dada por $k = c^4/16\pi G$, e, por sua vez, L_M é a lagrangeana dos campos de matéria. Variando a ação com respeito a e_a^μ , chegamos a⁸

$$\partial_\nu (e \Sigma^{a\mu\nu}) = \frac{e}{4k} (t^{\mu a} + T^{\mu a}). \quad (4.33)$$

⁸ Para uma dedução detalhada das equações de campo, o leitor é convidado a ler as seções 4.2 e 4.3 de (GONCALVES, 2022)

Nesta equação, $t^{\mu a}$ e $T^{\mu a}$ são interpretados como os tensores de energia-momento do campo gravitacional e da matéria, respectivamente; e sua soma é o tensor de energia-momento do espaço-tempo representado por $\tau^{\mu a}$. O tensor $\Sigma^{a\mu\nu}$ é chamado de superpotencial, e pode ser escrito como (FORMIGA, 2024)

$$\Sigma_{abc} = \frac{1}{2}\dot{\omega}_{cab} + \dot{\omega}^d_{d[c}\eta_{b]a}. \quad (4.34)$$

Por sua vez, o tensor de energia-momento do campo gravitacional pode ser calculado através da equação (FORMIGA, 2024)

$$t^b_a = 2k(2\dot{\omega}^c_{[ad]}\dot{\omega}^b_c{}^d - 2\dot{\omega}^b_{[ad]}\dot{\omega}^c_c{}^d - \dot{\omega}^c_{ca}\dot{\omega}^d_d{}^b + \delta^b_a\dot{\omega}^c_{[c]f}\dot{\omega}^d{}^f{}_{|d]}). \quad (4.35)$$

Perceba que, quando usamos o frame teleparalelo, a energia do campo gravitacional fica determinada univocamente pelos coeficientes da conexão de Levi-Civita expandidos nesse frame.

Na literatura, é mais comum escrever Σ_{abc} e t^{ab} em termos da torção (veja, por exemplo, (MALUF, 2013)). Entretanto, nesta dissertação, escrevemos eles na forma (4.34) e (4.35) pela conveniência dos cálculos, e também para evidenciar a similaridade entre esses objetos e o tensor das acelerações (ambos são determinados pelos coeficientes da conexão de Levi-Civita).

É possível generalizar (4.33) para o caso no qual temos a constante cosmológica, bastando para isso adicionarmos aos tensores de energia-momento a contribuição que seria produzida pelo termo da constante. Fazendo isso, obtemos

$$\partial_\nu(e\Sigma^{a\mu\nu}) = \frac{e}{4k}(t^{\mu a} + T^{\mu a} - 2k\Lambda e^{a\mu}). \quad (4.36)$$

Dado que o superpotencial $\Sigma^{a\mu\nu}$ é antissimétrico nos dois últimos índices, se aplicarmos a derivada parcial ∂_μ em ambos os lados de (4.36), obtemos a lei de conservação de energia-momento, expresso pela equação

$$\partial_\mu[e(t^{\mu a} + T^{\mu a} + t_\Lambda^{\mu a})] = 0; \quad (4.37)$$

em que fizemos $t_\Lambda^{\mu a} \equiv -2k\Lambda e^{\mu a}$. Integrando (4.37) em uma região V livre de singularidade, e usando o teorema de Stokes, obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x e(t^{0a} + T^{0a} + t_\Lambda^{0a}) = - \oint_S dS_i e(t^{ia} + T^{ia} + t_\Lambda^{ia}), \quad (4.38)$$

sendo S a fronteira de V . A integral do lado esquerdo da igualdade é definida como sendo o conteúdo de energia-momento total contido na região V (MALUF, 2013), isto é,

$$P^a \equiv \int_V d^3x e(t^{0a} + T^{0a} + t_\Lambda^{0a}); \quad (4.39)$$

já

$$P_g^a = \int_V d^3x e t^{0a}, \quad (4.40)$$

é interpretado como o conteúdo de energia-momento do campo gravitacional contido em V . Por sua vez

$$P_M^a = \int_V d^3x e T^{0a} \quad (4.41)$$

é interpretado como o conteúdo de energia-momento dos campos de matéria. E finalmente,

$$P_\Lambda^a = -2k\Lambda \int_V d^3x e e^{a0} \quad (4.42)$$

representa a contribuição para o conteúdo de energia-momento advindo da constante cosmológica.

Partindo de (4.33) e usando o teorema de Stokes, é possível reescrever P^a em termos de uma integral de superfície:

$$P^a = 4k \oint_S dS_j e \Sigma^{a0j}, \quad (4.43)$$

em que fizemos $\mu = 0$ em (4.33) e usamos o fato de que $\Sigma^{a00} = 0$, haja vista que este tensor é antissimétrico.

4.5 Eletrodinâmica não-linear e buracos negros regulares

Nesta seção apresentaremos brevemente uma introdução à eletrodinâmica não-linear com o intuito de apresentar um buraco negro que é regular em $r = 0$, e utilizá-lo no capítulo 5, onde a energia do campo gravitacional será analisada.

Os buracos negros regulares, isto é, que não possuem singularidade em $r = 0$, podem ser obtidos quando introduzimos um conteúdo de matéria que não satisfaz todas as condições de energia (BEATO; GARCÍA, 2000). O primeiro exemplo desse tipo de solução foi obtido por Bardeen em 1968 (BARDEEN, 1968). Segundo Kumar e Gosh (KUMAR; GHOSH, 2021) os buracos negros regulares são soluções da relatividade geral minimamente acoplada com o campo da eletrodinâmica não-linear.

No contexto do TEGR, a ação que reproduz as equações de Einstein com essa eletrodinâmica pode ser escrita na forma

$$S = - \int d^4x e [kT + \epsilon_0 \mathcal{L}(F)], \quad (4.44)$$

em que $\mathcal{L}(F)$ é uma função não-linear e contínua do invariante $F \equiv \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. Tratando e^a_λ e A_μ como variáveis independentes, obtemos

$$\partial_\nu (e \Sigma^{a\mu\nu}) = \frac{e}{4k} (t^{\mu a} + T^{\mu a}), \quad (4.45)$$

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} \mathcal{L}_F F^{\mu\nu}) = 0, \quad (4.46)$$

$$T^{\mu a} = \epsilon_0 [\mathcal{L}_F F^{\mu\sigma} F^a_\sigma - e^{a\mu} \mathcal{L}(F)], \quad (4.47)$$

$$\mathcal{L}_F = \frac{\partial \mathcal{L}(F)}{\partial F}. \quad (4.48)$$

Para um buraco negro puramente carregado magneticamente com carga monopolar magnética q_m , potencial $A_\mu = -\alpha \cos \theta \delta_\mu^3$ e $\mathcal{L}(F) = F e^{-\beta F^{1/4}}$ (KUMAR; GHOSH, 2021), somos levados a⁹

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2}{r} M e^{-\lambda^2/r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2}{r} M e^{-\lambda^2/r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2); \quad (4.49)$$

em que as constantes α , λ e β são dadas por¹⁰

$$\alpha = \frac{q_m}{4\pi\epsilon_0 c}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\alpha q_m}{2mc^3}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{|\alpha|}{2\sqrt{2}}} \left(\frac{|q_m|}{mc^3}\right); \quad (4.50)$$

e M por sua vez está relacionado com m , que é a massa do buraco negro, via (3.24). Note que esta solução se reduz a solução de Schwarzschild quando fazemos $q_m = 0$. Já para $r \gg \lambda^2$, é possível identificar a solução com a de Reissner-Nordström.

4.6 Maquinário híbrido

Nesta dissertação, estamos interessados em trabalhar com espaços-tempo esfericamente simétricos, porém usando uma tetrada adaptada a direções (quase) cartesianas. Por este motivo, apresentaremos nesta seção o maquinário híbrido desenvolvido em (FORMIGA, 2021). Essa abordagem servirá não só para simplificar as expressões, mas também propiciará uma mudança imediata na natureza dos índices destas. Por exemplo, se conhecermos um tensor arbitrário A^{abc} , conheceremos de imediato $A^{a\mu\nu}$.

Seja (r, θ, ϕ) e (x, y, z) os sistemas de coordenadas esféricas e cartesianas, respectivamente. A relação ente eles é dado por $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$. Destas expressões, podemos definir os vetores unitários

$$\begin{aligned} \hat{t}^a &\equiv \delta_{(0)}^a, \hat{r}^a \equiv \sin \theta (\cos \phi \hat{x}^a + \sin \phi \hat{y}^a) + \cos \theta \hat{z}^a, \\ \hat{\theta}^a &\equiv \partial_\theta \hat{r}^a = \cos \theta (\cos \phi \hat{x}^a + \sin \phi \hat{y}^a) - \sin \theta \hat{z}^a, \\ \hat{\phi}^a &\equiv \partial_\phi (\hat{r}^a / \sin \theta) = -\sin \phi \hat{x}^a + \cos \phi \hat{y}^a, \\ \hat{x}^a &= \delta_{(1)}^a, \hat{y}^a = \delta_{(2)}^a, \hat{z}^a = \delta_{(3)}^a. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Sem perda de generalidade, podemos definir o ato de subir e descer os índices destes vetores com a métrica de Minkowski dotada de assinatura $+2$, isto é: $\hat{t}_a \equiv \eta_{ab} \hat{t}^b = -\delta_a^{(0)}$, $\hat{x}_a \equiv \eta_{ab} \hat{x}^b = \delta_a^{(1)}$ e assim por diante. Segue também destas definições que $\hat{t}^a \hat{t}_a = -1$, $\hat{r}^a \hat{r}_a = \hat{\theta}^a \hat{\theta}_a = \dots = 1$, $\hat{t}^a \hat{r}_a = \hat{r}^a \hat{\phi}_a = \dots = 0$. Também é fácil ver que estes vetores satisfazem as

⁹ Em $\mathcal{L}(F)$, $F = \alpha^2/2r^4$.

¹⁰ Estas quantidades estão no sistema internacional de unidades, com a carga magnética em unidades de coulombs metros por segundo (C·m/s).

relações

$$\begin{aligned}\partial_\theta \hat{\theta}^a &= -\hat{r}^a, \quad \partial_\phi \hat{\theta}^a = \cos \theta \hat{\phi}^a, \\ \partial_\theta \hat{\phi}^a &= 0, \quad \partial_\phi \hat{\phi}^a = -\sin \theta \hat{r}^a - \cos \theta \hat{\theta}^a, \\ \partial_\mu \hat{t}^a &= 0.\end{aligned}\tag{4.52}$$

Para um dado espaço-tempo $g_{\mu\nu}$, podemos encontrar uma tetrada com componentes e^a_μ , tal que $g_{\mu\nu} = e_{a\mu}e^a_\nu$. A partir dessas componentes, podemos definir as componentes dos vetores unitários citados acima por

$$\begin{aligned}\hat{t}^\mu &\equiv e_a^\mu \hat{t}^a, \\ \hat{r}^\mu &\equiv e_a^\mu \hat{r}^a, \\ \hat{\theta}^\mu &\equiv e_a^\mu \hat{\theta}^a, \\ \hat{\phi}^\mu &\equiv e_a^\mu \hat{\phi}^a.\end{aligned}\tag{4.53}$$

É fácil ver destas relações que $\hat{t}^a \hat{t}_a = \hat{t}^\mu \hat{t}_\mu = -1$, $\hat{r}^a \hat{r}_a = \hat{r}^\mu \hat{r}_\mu = 1$, e assim por diante.

Partindo das relações acima, podemos escrever

$$e_a^\lambda = -\hat{t}^\lambda \hat{t}_a + \hat{r}^\lambda \hat{r}_a + \hat{\theta}^\lambda \hat{\theta}_a + \hat{\phi}^\lambda \hat{\phi}_a,\tag{4.54}$$

$$e^a_\lambda = -\hat{t}_\lambda \hat{t}^a + \hat{r}_\lambda \hat{r}^a + \hat{\theta}_\lambda \hat{\theta}^a + \hat{\phi}_\lambda \hat{\phi}^a.\tag{4.55}$$

Segue então que podemos escrever as componentes da métrica na forma

$$g_{\mu\nu} = -\hat{t}_\mu \hat{t}_\nu + \hat{r}_\mu \hat{r}_\nu + \hat{\theta}_\mu \hat{\theta}_\nu + \hat{\phi}_\mu \hat{\phi}_\nu.\tag{4.56}$$

Já as componentes da torção $T^a_{\mu\nu}$ podem ser expressas como

$$T^a_{\mu\nu} = -T^{\hat{t}}_{\mu\nu} \hat{t}^a + T^{\hat{r}}_{\mu\nu} \hat{r}^a + T^{\hat{\theta}}_{\mu\nu} \hat{\theta}^a + T^{\hat{\phi}}_{\mu\nu} \hat{\phi}^a,\tag{4.57}$$

em que

$$T^{\hat{t}}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} \hat{t}_{\nu]},\tag{4.58}$$

$$T^{\hat{r}}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} \hat{r}_{\nu]} - 2\delta_{[\mu}^2 \hat{\theta}_{\nu]} - 2\sin \theta \delta_{[\mu}^3 \hat{\phi}_{\nu]},\tag{4.59}$$

$$T^{\hat{\theta}}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} \hat{\theta}_{\nu]} + 2\delta_{[\mu}^2 \hat{r}_{\nu]} - 2\cos \theta \delta_{[\mu}^3 \hat{\phi}_{\nu]},\tag{4.60}$$

$$T^{\hat{\phi}}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} \hat{\phi}_{\nu]} + 2\sin \theta \delta_{[\mu}^3 \hat{r}_{\nu]} + 2\cos \theta \delta_{[\mu}^3 \hat{\theta}_{\nu]}.\tag{4.61}$$

Para maiores detalhes, veja (FORMIGA, 2021).

5 Energia em espaços-tempo esfericamente simétricos

O objetivo desta seção é construir o tensor de energia-momento do espaço-tempo e campo gravitacional, para espaços-tempo esfericamente simétricos, partindo das definições do teleparalelismo. Como essas quantidades dependem do frame teleparalelo escolhido, a primeira seção é destinada a definição do frame teleparalelo que será utilizado, bem como uma caracterização do seu estado de movimento. A segunda seção é reservada para o cálculo do 4-momento de um espaço-tempo esfericamente simétrico, bem como a energia total contida em uma região esférica de volume V . A construção dos tensores de energia-momento do espaço-tempo e do campo gravitacional serão feitas nas seções 5.3 e 5.4, respectivamente, com o objetivo de posteriormente realizar a decomposição de Eckart (seção 5.5), que nos permitirá obter informação à respeito das densidades e fluxo de energia e também pressão isotrópica. Como consideraremos as equações de campo que incluem a constante cosmológica, na seção 5.5 também será calculado a contribuição para o conteúdo de energia-momento advindo da constante cosmológica, assim como sua decomposição de Eckart. Nas seções 5.6 e 5.7, particularizaremos as equações obtidas nas seções anteriores para dois casos específicos e avaliaremos a consistência dos resultados.

5.1 Frame teleparalelo em um espaço-tempo esfericamente simétrico

Considerando um espaço-tempo esfericamente simétrico, cuja métrica tem a forma geral dada por

$$ds^2 = -B^2(r)c^2dt^2 + C^2(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (5.1)$$

uma possível escolha para o co-frame é

$$\vartheta^a = B(r)dt\hat{t}^a + C(r)dr\hat{r}^a + rd\theta\hat{\theta}^a + r\sin\theta d\phi\hat{\phi}^a, \quad (5.2)$$

com $\hat{t}^a$, $\hat{r}^a$, $\hat{\theta}^a$ e $\hat{\phi}^a$ definidos por (4.51). Comparando (5.2) com (4.16), concluímos que as componentes do co-frame são

$$e^a{}_\mu = B(r)\delta_\mu^0\hat{t}^a + C(r)\delta_\mu^1\hat{r}^a + r\delta_\mu^2\hat{\theta}^a + r\sin\theta\delta_\mu^3\hat{\phi}^a. \quad (5.3)$$

Relacionando (5.3) com (4.55), vemos que

$$\hat{t}_\mu = -B(r)\delta_\mu^0, \quad \hat{r}_\mu = C(r)\delta_\mu^1, \quad \hat{\theta}_\mu = r\delta_\mu^2, \quad \hat{\phi}_\mu = r\sin\theta\delta_\mu^3. \quad (5.4)$$

Levantando os índices com a métrica, obtemos

$$\hat{t}^\mu = B^{-1}(r)\delta_0^\mu, \quad \hat{r}^\mu = C^{-1}(r)\delta_1^\mu, \quad \hat{\theta}^\mu = \frac{1}{r}\delta_2^\mu, \quad \hat{\phi}^\mu = (r \sin \theta)^{-1}\delta_3^\mu. \quad (5.5)$$

Substituindo (5.5) em (4.54), as componentes do frame são

$$e_a{}^\mu = -B^{-1}(r)\delta_0^\mu \hat{t}_a + C^{-1}(r)\delta_1^\mu \hat{r}_a + \frac{1}{r}\delta_2^\mu \hat{\theta}_a + (r \sin \theta)^{-1}\delta_3^\mu \hat{\phi}_a. \quad (5.6)$$

Na análise da energia, desejamos que o referencial teleparalelo se torne um referencial inercial global na ausência de curvatura na conexão de Levi-Civita. No nosso caso, isso corresponde ao limite $B, C \rightarrow 1$. Matematicamente, essa condição se traduz na nulidade dos coeficientes da conexão no referido limite. No caso de (5.6), é fácil verificar que no limite $B, C \rightarrow 1$, o frame $\{e_a\}$ se torna $e_a = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Para maiores detalhes sobre os motivos para impor esta restrição, veja a discussão sobre a relação entre o referencial teleparalelo e a interpretação da energia gravitacional em (FORMIGA, 2022).

5.1.1 Torção

Conforme o formalismo desenvolvido na seção 4.6, as componentes da torção em uma tetrada adaptada às direções (quase) cartesianas são obtidas a partir do cálculo de cada um dos elementos de (4.57). Note que nas expressões de cada um desses elementos, existe termos do tipo $\partial_{[\mu}A_{\nu]}$. Com base no que foi discutido na seção 2.5, esse objeto pode ser reescrito na forma $\partial_{[\mu}A_{\nu]} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$. Com base nisso, e utilizando as definições acima, os elementos que compõe (4.57) em termos de $\hat{t}_\mu, \hat{r}_\mu, \hat{\theta}_\mu$ e $\hat{\phi}_\mu$ têm a forma (veja os detalhes no apêndice A)

$$T_{\mu\nu}^{\hat{t}} = (BC)^{-1}B'(\hat{r}_\mu \hat{t}_\nu - \hat{t}_\mu \hat{r}_\nu), \quad (5.7)$$

$$T_{\mu\nu}^{\hat{\theta}} = r^{-1}(1 - C^{-1})(\hat{\theta}_\mu \hat{r}_\nu - \hat{r}_\mu \hat{\theta}_\nu), \quad (5.8)$$

$$T_{\mu\nu}^{\hat{\phi}} = r^{-1}(1 - C^{-1})(\hat{\phi}_\mu \hat{r}_\nu - \hat{r}_\mu \hat{\phi}_\nu). \quad (5.9)$$

O sobrescrito $'$ denota a derivada da função em relação a r . Reunindo essas expressões em (4.57), chegamos a

$$T_{abc} = (BC)^{-1}B'\hat{t}_a(\hat{t}_b \hat{r}_c - \hat{r}_b \hat{t}_c) + \frac{1}{r}(1 - C^{-1})[\hat{\theta}_a(\hat{\theta}_b \hat{r}_c - \hat{r}_b \hat{\theta}_c) + \hat{\phi}_a(\hat{\phi}_b \hat{r}_c - \hat{r}_b \hat{\phi}_c)]. \quad (5.10)$$

Para mais detalhes, ver apêndice A.

Como o objeto de não-holonomia coincide com a torção no referencial teleparalelo, podemos usar (5.10) e (4.22) para calcular os coeficientes da conexão de Levi-Civita.

5.1.2 Conexão de Levi-Civita

Como a tetrada em questão é teleparalela, $T_{abc} = \Omega_{abc}$. Para obter T_{cba} e T_{bca} , basta renomear os índices em (5.10); portanto

$$T_{cba} = (BC)^{-1} B' \hat{t}_c (\hat{t}_b \hat{r}_a - \hat{r}_b \hat{t}_a) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \hat{\theta}_c (\hat{\theta}_b \hat{r}_a - \hat{r}_b \hat{\theta}_a) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \hat{\phi}_c (\hat{\phi}_b \hat{r}_a - \hat{r}_b \hat{\phi}_a), \quad (5.11)$$

$$T_{bca} = (BC)^{-1} B' \hat{t}_b (\hat{t}_c \hat{r}_a - \hat{r}_c \hat{t}_a) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \hat{\theta}_b (\hat{\theta}_c \hat{r}_a - \hat{r}_c \hat{\theta}_a) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \hat{\phi}_b (\hat{\phi}_c \hat{r}_a - \hat{r}_c \hat{\phi}_a). \quad (5.12)$$

Reunindo (5.10), (5.11) e (5.12) em (4.22), chegamos em (para mais detalhes, consultar apêndice B)

$$\hat{\omega}_{abc} = (BC)^{-1} B' \hat{t}_b (\hat{r}_a \hat{t}_c - \hat{t}_a \hat{r}_c) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) [\hat{\theta}_b (\hat{r}_a \hat{\theta}_c - \hat{\theta}_a \hat{r}_c) + \hat{\phi}_b (\hat{r}_a \hat{\phi}_c - \hat{\phi}_a \hat{r}_c)]. \quad (5.13)$$

Note que $\hat{\omega}_{abc} = -\hat{\omega}_{cba}$.

5.1.3 Tensor das acelerações

Fazendo $b = (0)$ em (5.13) e multiplicando o resultado pela velocidade da luz c , podemos substituir o resultado em (4.31), o que nos leva a

$$\phi_a^b = c C^{-1} B^{-1} B' (\hat{t}^b \hat{r}_a - \hat{t}_a \hat{r}^b). \quad (5.14)$$

Conforme esperado, $\phi_{ab} = -\phi_{ba}$. Veja que $\phi_{(i)(j)} = 0$, o que nos permite concluir que o frame não está rotacionando. Todavia, ele está acelerando, pois $\phi_{(0)(i)} = c C^{-1} B^{-1} B' \hat{r}_{(i)}$.

5.2 Energia-momento de um espaço-tempo esfericamente simétrico

Nesta seção, calcularemos o 4-momento de um espaço-tempo esfericamente simétrico e determinaremos a energia contida em uma região esférica de volume V . Para isso, será necessário primeiro calcular o superpotencial, o que faremos a seguir.

5.2.1 Superpotencial

A partir de (4.34) podemos obter o superpotencial na tetrada (5.2). Para isso, precisamos primeiro realizar a contração nos dois primeiros índices de $\hat{\omega}_{abc}$. Usando a ortonormalidade da base $\{\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$, obtemos

$$\hat{\omega}_{abc} \eta^{ab} = \hat{\omega}^b_{bc} = \left[-\frac{2}{r} (1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right] \hat{r}_c. \quad (5.15)$$

A métrica η_{ab} na base $\{\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ toma a forma

$$\eta_{ab} = -\hat{t}_a \hat{t}_b + \hat{r}_a \hat{r}_b + \hat{\theta}_a \hat{\theta}_b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b. \quad (5.16)$$

Operando $\dot{\omega}_{dc}^d \eta_{ba}$ e $\dot{\omega}_{db}^d \eta_{ca}$, obtemos

$$\dot{\omega}_{dc}^d \eta_{ba} = \left[-\frac{2}{r}(1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right] \left(-\hat{t}_a \hat{t}_b \hat{r}_c + \hat{r}_a \hat{r}_b \hat{r}_c + \hat{\theta}_a \hat{\theta}_b \hat{r}_c + \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b \hat{r}_c \right), \quad (5.17)$$

$$\dot{\omega}_{db}^d \eta_{ca} = \left[-\frac{2}{r}(1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right] \left(-\hat{t}_c \hat{t}_a \hat{r}_b + \hat{r}_c \hat{r}_a \hat{r}_b + \hat{\theta}_c \hat{\theta}_a \hat{r}_b + \hat{\phi}_c \hat{\phi}_a \hat{r}_b \right). \quad (5.18)$$

Realizando a subtração de (5.17) por (5.18), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{dc}^d \eta_{ba} - \dot{\omega}_{db}^d \eta_{ca} = & \left[-\frac{2}{r}(1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right] \left(-\hat{t}_a \hat{t}_b \hat{r}_c + \hat{r}_a \hat{r}_b \hat{r}_c + \hat{\theta}_a \hat{\theta}_b \hat{r}_c + \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b \hat{r}_c + \hat{t}_c \hat{t}_a \hat{r}_b \right. \\ & \left. - \hat{r}_c \hat{r}_a \hat{r}_b - \hat{\theta}_c \hat{\theta}_a \hat{r}_b - \hat{\phi}_c \hat{\phi}_a \hat{r}_b \right); \quad (5.19) \end{aligned}$$

em que os termos em comum foram postos em evidência. Sabendo que $\dot{\omega}_{d[c}^d \eta_{b]a} = \frac{1}{2}(\dot{\omega}_{dc}^d \eta_{ba} - \dot{\omega}_{db}^d \eta_{ca})$ e cancelando os termos destacados em (5.19), concluímos que o segundo membro de (4.34) vale

$$\dot{\omega}_{d[c}^d \eta_{b]a} = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{r}(1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right] \left[\left(-\hat{t}_a \hat{t}_b + \hat{\theta}_a \hat{\theta}_b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b \right) \hat{r}_c + \left(\hat{t}_a \hat{t}_c - \hat{\theta}_a \hat{\theta}_c - \hat{\phi}_a \hat{\phi}_c \right) \hat{r}_b \right]. \quad (5.20)$$

A partir da conexão de Levi-Civita (5.13), se fizermos $a \rightarrow c, b \rightarrow a$ e $c \rightarrow b$ para obter $\dot{\omega}_{cab}$, e substituir, juntamente com (5.20), em (4.34), chegaremos em

$$\begin{aligned} \Sigma_{abc} = & \frac{1}{2} \left[\hat{\theta}_a (\hat{\theta}_b \hat{r}_c - \hat{r}_b \hat{\theta}_c) + \hat{\phi}_a (\hat{\phi}_b \hat{r}_c - \hat{r}_b \hat{\phi}_c) \right] \left[(BC)^{-1} B' - \frac{1}{r}(1 - C^{-1}) \right] \\ & - \frac{1}{r}(1 - C^{-1}) \hat{t}_a (\hat{r}_b \hat{t}_c - \hat{t}_b \hat{r}_c). \quad (5.21) \end{aligned}$$

A forma do superpotencial a qual temos maior interesse e que servirá para calcular P^a na próxima subseção, é obtida levantando os índices e fazendo a troca¹ $b \rightarrow \lambda, c \rightarrow \nu$; a partir disto, façamos $\lambda = 0, \nu = 1$ e usemos a equação (5.5), para obter

$$\Sigma^{a01} = \frac{(BC)^{-1}}{r} (1 - C^{-1}) \hat{t}^a. \quad (5.22)$$

5.2.2 Energia-momento do espaço-tempo

A equação (4.43) nos permite calcular o 4-vetor energia-momento do espaço-tempo uma vez que conhecemos o superpotencial na forma (5.22). Porém, antes precisamos calcular e . Das definições feitas na seção 4.4,

$$e = \sqrt{-g}; \quad (5.23)$$

¹ Como $\hat{t}^a, \hat{r}^a, \hat{\theta}^a, \hat{\phi}^a$ são componentes de vetores, podemos simplesmente trocar um índice latino por um grego sem problemas.

em que g é o determinante da métrica. Como fica claro de (5.1), $g_{\mu\nu}$ é uma matriz diagonal, logo seu determinante é simplesmente o produto dos termos da diagonal principal, portanto $g = -(BC)^2 r^4 \sin^2 \theta$. Desta última, concluímos que $e = B C r^2 \sin \theta$. Enfim, substituindo (5.22) em (4.43) e realizando a integração em uma superfície esférica, teremos que

$$P^a = 4k \oint_S dS_i \Sigma^{a0i} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\phi e \Sigma^{a01}. \quad (5.24)$$

Lembrando que $e = B C r^2 \sin \theta$ e realizando algumas simplificações, somos levados a

$$P^a = 16\pi k r (1 - C^{-1}) \hat{t}^a. \quad (5.25)$$

Fazendo $a = (0)$, obtemos o conteúdo de energia contida em uma região esférica

$$E = 16\pi k r (1 - C^{-1}). \quad (5.26)$$

Note que, aqui, estamos ignorando a possibilidade de uma singularidade na região V . Caso haja uma singularidade, a equação (5.25) representa o valor da integral (4.43) no contorno externo, que tomaremos como sendo o momento total do espaço tempo quando $r \rightarrow \infty$.

Foi demonstrado em (GONÇALVES; FORMIGA, 2021) que no caso do buraco negro de Schwarzschild e com referenciais teleparalelos adaptados às coordenadas de Kruskal, ou às coordenadas de Novikov, o contorno interno que envolve a singularidade não contribui. Todavia, ele pode contribuir em outros casos. (Em qualquer caso, será a integral externa que será considerada como representando o conteúdo total de energia-momento do espaço-tempo.)

De qualquer forma, a presença de uma quadriaceleração interfere no cálculo da energia. As energias aqui obtidas não são as mesmas que seriam obtidas em um referencial em queda livre, ou com uma aceleração diferente. Por exemplo, para Schwarzschild, a energia (5.26) não está definida para a região interna do buraco negro, pois C se torna complexo nessa região. Porém, para referenciais adaptados as coordenadas de Novikov (queda livre) e Kruskal (acelerado na direção do buraco negro) (GONÇALVES; FORMIGA, 2021), as energias estão definidas na região interna.

5.3 Tensor de energia-momento do espaço-tempo

Com a tetrada fixada na seção 5.1, resolver as equações de Einstein (4.36) nos permite obter o conteúdo de energia-momento de um espaço-tempo esfericamente simétrico. Realizando as operações, concluímos que o tensor de energia-momento do espaço-tempo vale (apêndice C)

$$\tau^{a\mu} = 4k[g(r)(\hat{\theta}^a \hat{\theta}^\mu + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^\mu) + h(r)\hat{t}^a \hat{t}^\mu + l(r)\hat{r}^a \hat{r}^\mu], \quad (5.27)$$

em que

$$g(r) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{B''}{BC^2} + \frac{2B'}{rBC^2} - \frac{B'C'}{BC^3} - \frac{C'}{rC^3} - \frac{B'}{rBC} \right), \quad (5.28)$$

$$h(r) \equiv \frac{1}{Cr^2} - \frac{1}{C^2r^2} + \frac{C'}{rC^3}, \quad (5.29)$$

$$l(r) \equiv \frac{B'}{rBC} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2C}. \quad (5.30)$$

5.4 Tensor de energia-momento do campo gravitacional

Uma vez conhecido os coeficientes da conexão de Levi-Civita (5.13), podemos agora calcular o tensor de energia-momento do campo gravitacional (4.35). Realizaremos o cálculo de cada termo da equação (4.35) separadamente. Assim, a partir de (5.13) e utilizando as equações (4.51), depois de muito algebrismo somos levados a (apêndice D)

$$2\hat{\omega}_{[ad]}^c \hat{\omega}_c^{b\ d} = \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right]^2 (\hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b + 2\hat{r}_a \hat{r}^b) + (BC)^{-2} (B')^2 (\hat{r}_a \hat{r}^b - \hat{t}_a \hat{t}^b). \quad (5.31)$$

$$2\hat{\omega}_{[ad]}^b \hat{\omega}_c^{c\ d} = - \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right] (\hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b) + (BC)^{-1} B' \hat{t}_a \hat{t}^b \left[- \frac{2}{r} (1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right]. \quad (5.32)$$

$$\hat{\omega}_{ca}^c \hat{\omega}_d^{d\ b} = \left[- \frac{2}{r} (1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right]^2 \hat{r}_a \hat{r}^b. \quad (5.33)$$

$$\delta_b^a \hat{\omega}_{[c|f]}^c \hat{\omega}_{|d]}^{d\ f} = \frac{1}{2} \left\{ \left[- \frac{2}{r} (1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right]^2 - 2 \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right]^2 - (BC)^{-2} (B')^2 \right\} \delta_b^a. \quad (5.34)$$

A partir de (5.16), é possível escrever o δ_b^a de (5.34) em termos dos vetores unitários. Fazendo isso e substituindo (5.31), (5.32), (5.33), (5.34) em (4.35), obtemos (apêndice D)

$$t_a^b = (\rho_g - f) \hat{r}_a \hat{r}^b + \rho_g \hat{t}_a \hat{t}^b + \frac{f}{2} (\hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b), \quad (5.35)$$

em que

$$\rho_g = -\frac{2k}{r^2} (C^{-1} - 1)^2, \quad f = \frac{4k}{r} (BC)^{-1} B' (C^{-1} - 1). \quad (5.36)$$

Fazendo $a = b$ em (5.35), vemos que $t_b^b = 0$, como era de se esperar.

5.5 Decomposição de Eckart de $\tau^{\mu a}$, $t^{\mu a}$ e $t_{\Lambda}^{\mu a}$

Com base no formalismo desenvolvido na seção 3.6, faremos a decomposição de Eckart dos tensores de energia-momento do espaço-tempo, campo gravitacional e constante cosmológica, para um espaço-tempo esfericamente simétrico, conforme definido na seção 5.1. Os resultados aqui obtidos serão particularizados para a análise de dois casos (seções 5.6 e 5.7).

Primeiro precisamos calcular o tensor h_{μ}^{ν} definido em (3.26). Conforme (4.24), $v^{\mu} = c e_{(0)}^{\mu}$. De (5.6), é fácil ver que $e_{(0)}^{\mu} = t^{\mu}$. Portanto, podemos escrever h_{μ}^{ν} na forma

$$h_{\mu\nu} = \hat{r}_{\mu}\hat{r}_{\nu} + \hat{\theta}_{\mu}\hat{\theta}_{\nu} + \hat{\phi}_{\mu}\hat{\phi}_{\nu}; \quad (5.37)$$

em que foi utilizado o fato de que podemos escrever a métrica na forma $g_{\mu\nu} = -\hat{t}_{\mu}\hat{t}_{\nu} + \hat{r}_{\mu}\hat{r}_{\nu} + \hat{\theta}_{\mu}\hat{\theta}_{\nu} + \hat{\phi}_{\mu}\hat{\phi}_{\nu}$.

5.5.1 Campo gravitacional

Partindo de (5.37) e usando as relações (3.33), descobrimos que (apêndice E.1)

$$\rho_g = -\frac{2k}{r^2}(C^{-1} - 1)^2, \quad (5.38)$$

$$p_g = \frac{1}{3}\rho_g. \quad (5.39)$$

Interpretamos ρ_g como sendo a densidade de energia do campo gravitacional, enquanto p_g é interpretada como a pressão isotrópica.

A equação (5.39) está de acordo com o resultado mais geral obtido em (FORMIGA; GONCALVES, 2022), onde foi demonstrado que a equação de estado do campo gravitacional é do tipo radiação, uma consequência do fato de $t^{\mu\nu}$ ter traço nulo. (Esse resultado é compatível com o fato do campo gravitacional não ter massa.)

Calculando o fluxo de energia a partir de (3.34), chegamos a (ver apêndice E.1)

$$q_g^{\mu} = 0. \quad (5.40)$$

5.5.2 Espaço-tempo

Partindo novamente de (5.37), podemos também realizar a decomposição de Eckart de $\tau^{\mu\nu}$, o que nos leva aos seguintes resultados (ver apêndice E.2):

$$\rho = 4k h(r), \quad (5.41)$$

$$p = \frac{4k}{3}(2g(r) + l(r)), \quad (5.42)$$

$$q^{\mu} = 0. \quad (5.43)$$

Em que $g(r)$, $h(r)$ e $l(r)$ são as funções definidas em (5.28), (5.29) e (5.30), respectivamente.

Os resultados (5.40) e (5.43) são compatíveis com o fato do espaço tempo ser estático. A ausência de fluxo de energia era esperada, pois, em princípio, o espaço-tempo (3.15) representa um sistema físico que atingiu seu estado de equilíbrio, e a tetrada usada está adaptada ao sistema de coordenadas no qual a métrica é estática. A única sutileza consiste na necessidade de manter os observadores que usam a referida tetrada em repouso nesse sistema de coordenadas, pois, como foi demonstrado anteriormente, o referencial possui uma aceleração, equação (5.14).

Perceba que estamos admitindo que tanto o campo que acelera os observadores estáticos quanto os próprios observadores não interferem no espaço-tempo. Seus tensores de energia-momento são negligenciados. Assim, o fluxo da energia que mantém os observadores parados é desprezível.

5.5.3 Constante cosmológica

Conforme definido na seção 4.4, a contribuição da constante cosmológica para o conteúdo de energia-momento do espaço-tempo é descrita por $t_{\Lambda}^{\mu a} = -2k\Lambda e^{a\mu}$. Por sua vez, na decomposição que estamos usando, o frame pode ser escrito na forma

$$e^{a\mu} = -\hat{t}^{\mu}\hat{t}^a + \hat{r}^{\mu}\hat{r}^a + \hat{\theta}^{\mu}\hat{\theta}^a + \hat{\phi}^{\mu}\hat{\phi}^a. \quad (5.44)$$

A substituição de (5.44) em $t_{\Lambda}^{\mu a} = -2k\Lambda e^{a\mu}$ nos leva a

$$t_{\Lambda}^{\mu a} = -2k\Lambda(-\hat{t}^{\mu}\hat{t}^a + \hat{r}^{\mu}\hat{r}^a + \hat{\theta}^{\mu}\hat{\theta}^a + \hat{\phi}^{\mu}\hat{\phi}^a). \quad (5.45)$$

Calculando $\rho_{\Lambda} = t_{\Lambda\mu\nu}\hat{t}^{\mu}\hat{t}^{\nu}$; obtemos

$$\rho_{\Lambda} = 2k\Lambda. \quad (5.46)$$

Através da substituição de $t_{\Lambda\mu\nu}$ em (3.33), podemos obter p_{Λ} ; portanto

$$p_{\Lambda} = \frac{-2k\Lambda}{3}(-\hat{t}_{\mu}\hat{t}_{\nu} + \hat{r}_{\mu}\hat{r}_{\nu} + \hat{\theta}_{\mu}\hat{\theta}_{\nu} + \hat{\phi}_{\mu}\hat{\phi}_{\nu})(\hat{r}^{\mu}\hat{r}^{\nu} + \hat{\theta}^{\mu}\hat{\theta}^{\nu} + \hat{\phi}^{\mu}\hat{\phi}^{\nu})$$

realizando as contrações e usando a ortonormalidade da base somos levados a

$$p_{\Lambda} = -2k\Lambda. \quad (5.47)$$

Como era esperado, obtemos $p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$.

5.6 Buraco negro de Reissner-Nordström-de Sitter

Os resultados gerais obtidos na seção passada nos permitem a particularização para dois casos de interesse, o primeiro deles sendo o conteúdo de estudo desta seção. As

equações de Einstein-Maxwell (3.12) no TEGR assumem a forma

$$\partial_\nu(e\Sigma^{a\mu\nu}) = \frac{e}{4k}(t^{\mu a} + t_\Lambda^{\mu a} + T^{\mu a}); \quad (5.48)$$

em que $t_\Lambda^{\mu a} = -2k\Lambda e^{a\lambda}$, $T^{\mu\nu} = \epsilon_0(F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta}g_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})$ e ainda $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Supondo que a densidade de corrente seja nula, teremos

$$\overset{\circ}{\nabla}_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0. \quad (5.49)$$

A solução das equações de Einstein-Maxwell com o espaço-tempo (5.1) tem, $C(r) = 1/B(r)$, em que $B(r)$ é dado por

$$B^2(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{r^2}{L^2}. \quad (5.50)$$

Logo, (5.1) com $B(r)$ dado por (5.50) descreve o campo gravitacional externo criado por um buraco negro carregado em um espaço com constante cosmológica. Substituindo (5.50) em (5.26), temos que a energia total contida em uma região de volume V deste espaço-tempo é dada por

$$E = 16\pi k r \left[1 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{r^2}{L^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (5.51)$$

A energia obtida por Maluf em (MALUF, 1996), equação (16), é um caso particular de (5.51) quando $Q = 0$.

5.6.1 Verificando a consistência da energia

Para verificar a consistência deste resultado, façamos a aproximação Newtoniana, que consiste em assumir M/r muito pequeno, desprezar termos de ordem maior que 2 e admitir ainda que r^2/L^2 é da ordem de M^2/r^2 ou maior. Após algumas simplificações e usando as relações (3.24), teremos que

$$E = mc^2 - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r} + \frac{Gm^2}{2r}. \quad (5.52)$$

Note que esta energia nada mais é do que a energia de repouso associada ao buraco negro, mais o negativo da energia potencial necessária para a construção de uma casca esférica de raio r , massa m e carga q , trazendo os constituintes elementares do infinito (BROWN; YORK, 1993). A equação (5.52) está em acordo com o resultado obtido por (BROWN; YORK, 1993) usando outro método para calcular a energia. Para ser mais preciso, a equação (5.51) aqui generaliza (6.14) obtida nessa referência.

Escrevendo (5.52) em função de M e Q , e fazendo $c = G = 1$, temos

$$E = M - \frac{Q^2}{2r} + \frac{M^2}{2r}. \quad (5.53)$$

Perceba que fazendo $r \rightarrow \infty \Rightarrow E \rightarrow M$, que é precisamente a energia ADM no infinito. Assim, interpreta-se M como sendo a energia interna do buraco negro. Resolvendo a equação (5.53) para M , obtém-se

$$M = E - \frac{E^2}{2r} + \frac{Q^2}{2r}, \quad (5.54)$$

que corresponde exatamente à (6.17) de (BROWN; YORK, 1993) (Note que as energias obtidas aqui são definidas em uma região finita, isto é, sem tomar r indo para o infinito. Esse tipo de energia é conhecida na literatura por “energia quase local”).

Por completeza, confirmemos que a equação (5.54) reproduz a forma bem conhecida da primeira lei da termodinâmica para buracos negros. A partir da definição da área do horizonte de eventos (3.41), fazendo $J = 0$, obtemos

$$A = 4\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2. \quad (5.55)$$

Substituindo (5.54) na fórmula acima, isolando E , e diferenciando a equação resultante, chegamos a

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Phi_H dQ, \quad (5.56)$$

em que κ e Φ_H são dados por

$$\kappa = \frac{4\pi\sqrt{M^2 - Q^2}}{A}, \quad \Phi_H = \frac{4\pi Q(M - \sqrt{M^2 - Q^2})}{A}. \quad (5.57)$$

Fazendo $J = 0$ em (3.38) e comparando com (5.56), reconhecemos esta última como a primeira lei da termodinâmica de buracos negros. Note que também trocamos $E \rightarrow M$, já que a partir de (5.54) podemos interpretar M como sendo a energia interna do buraco negro.

5.6.2 Densidades

Para calcular as densidades de energia deste espaço-tempo e do campo gravitacional, recorremos a (5.38) e (5.41). De (5.39), se conhecermos a densidade de energia do campo gravitacional, conheceremos a pressão. A pressão p do espaço-tempo por sua vez pode ser obtida através de (5.42). Porém, é interessante antes particularizar as equações (5.28), (5.29) e (5.30) para o caso em que $B = 1/C$; fazendo-o, obteremos

$$g(r) = \frac{1}{2} \left(BB'' + \frac{3BB'}{r} + B'^2 - \frac{B'}{r} \right), \quad (5.58)$$

$$h(r) = \frac{B}{r^2} - \frac{B^2}{r^2} - \frac{BB'}{r}, \quad (5.59)$$

$$l(r) = \frac{B'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{B}{r^2}. \quad (5.60)$$

Substituindo (5.50) nas equações acima, teremos (ver apêndice E.2.1)

$$g(r) = \frac{1}{2} \left[\frac{M}{r^3} - \frac{4}{L^2} - \frac{1}{B} \left(\frac{M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} - \frac{1}{L^2} \right) \right], \quad (5.61)$$

$$h(r) = \frac{1}{r^2} (B - 1) + \frac{M}{r^3} + \frac{2}{L^2}, \quad (5.62)$$

$$l(r) = \frac{1}{r^2} (B - 1) + \frac{1}{B} \left(\frac{M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} - \frac{1}{L^2} \right). \quad (5.63)$$

Substituindo as relações precedentes em (5.41) e (5.42) chegamos a

$$\rho = 4k \left[\frac{1}{r^2} (B - 1) + \frac{M}{r^3} + \frac{2}{L^2} \right], \quad (5.64)$$

$$p = \frac{4k}{3} \left[\frac{M}{r^3} - \frac{4}{L^2} + \frac{1}{r^2} (B - 1) \right] = \frac{\rho}{3} - \frac{c^4}{2\pi G L^2} \quad (5.65)$$

Os detalhes dos cálculos podem ser conferidos no apêndice E.2.1.

Já para o campo gravitacional, basta substituir $B(r)$ em (5.38), para obter

$$\rho_g = -2k \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2M}{r^3} + \frac{Q^2}{r^4} - \frac{1}{L^2} - \frac{2B}{r^2} \right). \quad (5.66)$$

De maneira geral, vemos de (5.66) que² $\rho_g < 0$. O sinal negativo talvez reflita o fato de que, no limite newtoniano, a energia potencial gravitacional é negativa. A análise do sinal de ρ para um r arbitrário é mais complicada, pois esse sinal depende de como a matéria, que tem uma densidade positiva, está distribuída. Por exemplo, no vácuo, $\rho = \rho_g$, logo ρ é sempre negativo no vácuo; já em uma região com matéria, em princípio, é possível ter tanto o sinal positivo (matéria “dominando”) quanto negativo (gravidade “dominando”).

Analisemos, agora, os casos nos quais B zera. Supondo $M/r, Q^2/r^2 \ll r^2/L^2$, vemos de (5.50)

$$B \approx \left(1 - \frac{r^2}{L^2} \right)^{1/2} \implies R = L. \quad (5.67)$$

Note que para distâncias de ordens cosmológicas, (5.67) é uma boa aproximação. Por outro lado, próximo a um buraco negro, podemos admitir que $M/r \gg r^2/L^2$, dessa forma, (5.50) toma a forma

$$B \approx \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{1/2} \implies R_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (5.68)$$

Perceba que, seja para o valor de R dado por (5.67) ou por (5.68), fazendo $B(R) = C^{-1}(R)$ em (5.38), teremos

$$\rho_g = -\frac{2k}{R^2}. \quad (5.69)$$

² Note que este resultado também é válido para o caso geral, dado pela equação (5.38).

Integrando esse resultado em uma casca esférica de raio $r = R$, chegaremos em

$$\mu_g = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\phi e \rho_g = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\phi R^2 \sin \theta \left(-\frac{2k}{R^2} \right) = -\frac{c^4}{2G}, \quad (5.70)$$

em que utilizamos $k = c^4/16\pi G$. A grandeza μ_g corresponde a uma densidade de energia gravitacional por unidade de comprimento; curiosamente, seu valor nas superfícies onde B é nulo independe do valor de R .

Podemos realizar o mesmo cálculo acima para a densidade de energia do espaço-tempo, dada pela equação (5.64). Isso nos leva a

$$\mu = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\phi R^2 \sin \theta 4k \left(\frac{M}{R^3} + \frac{2}{L^2} - \frac{1}{R^2} \right) = \frac{c^4}{G} \left(\frac{M}{R} + \frac{2R^2}{L^2} - 1 \right). \quad (5.71)$$

Avaliando (5.71) em $R = R_+$ e $R = L$, chegamos em

$$\mu(R_+) = -\frac{c^4}{G} \left[\frac{\sqrt{1 - Q^2/M^2}}{1 + \sqrt{1 - Q^2/M^2}} - \frac{2M^2}{L^2} (1 + \sqrt{1 - Q^2/M^2})^2 \right], \quad \mu(L) \approx \frac{c^4}{G}. \quad (5.72)$$

Um passo interessante neste estudo é calcular a pressão exercida pelo espaço-tempo sobre uma casca esférica de raio R . Para isso, ao integrar a equação (5.65) e utilizar o resultado de (5.71), é possível obter a expressão

$$f = \frac{1}{3}\mu - \frac{2R^2 c^4}{GL^2}. \quad (5.73)$$

Particularizando esta última para $R = R_+$ e $R = L$, e usando (5.72), chegamos em

$$f_+ = -\frac{c^4}{3G} \frac{\sqrt{1 - Q^2/M^2}}{1 + \sqrt{1 - Q^2/M^2}} - \frac{4M^2 c^4}{3GL^2} (1 + \sqrt{1 - Q^2/M^2})^2, \quad f_L \approx -\frac{5c^4}{3G}. \quad (5.74)$$

Concluimos a partir desses resultados que o espaço-tempo contribui com uma força negativa tanto no horizonte cosmológico, quanto no horizonte do buraco negro.

5.6.3 Energia na região $R_+ < r < L$

Como o espaço-tempo que estamos considerando possui singularidades, vamos calcular (4.43) na região definida por $R_+ < r < L$ (figura 10). O cálculo do integrando levará a (5.25), com $C^{-1} = B$. Na prática, para obter o valor dentro da região em questão, basta subtrair o P^a dado em (5.25) e avaliado em R_L por seu valor em R_+ . Fazendo isso, obtemos

$$P^a = \frac{c^4}{G} (R_L - R_+) \hat{t}^a = \frac{c^4}{G} \left[L - (M + \sqrt{M^2 - Q^2}) \right] \hat{t}^a \quad (5.75)$$

Está claro que a energia contida na região $R_+ < r < L$ é positiva. Por sua vez, se fôssemos calcular a energia na região $R_- < r < R_+$, também obteríamos um valor positivo, pois teríamos a diferença entre o raio maior e o menor. Essas são propriedades desejadas, uma vez que a positividade da energia pode estar relacionada à estabilidade do espaço-tempo de Minkowski. (Para maiores detalhes sobre esse problema, veja, por exemplo, Edward Witten (WITTEN, 1981).)

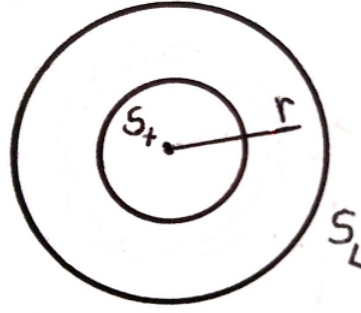


Figura 10 – Superfícies t e r constantes: S_+ representa o caso $r = R_+$, enquanto S_L representa $r = L$

5.7 Buraco negro regular

Verifiquemos agora como ficam nossos resultados da seção 5.5 aplicados aos buracos negros regulares descritos na seção 4.5. Uma vez que esta solução também é da forma de (5.1), com $C(r) = 1/B(r)$, mas com $B(r)$ agora tendo a forma

$$B^2(r) = 1 - \frac{2}{r} M e^{-\lambda^2/r}; \quad (5.76)$$

podemos obter a energia do espaço-tempo contido em uma região esférica de volume V simplesmente substituindo $B(r)$ em (5.26), que nos dá como resultado

$$E = 16\pi k r \left[1 - \left(1 - \frac{2}{r} M e^{-\lambda^2/r} \right)^{1/2} \right]. \quad (5.77)$$

No limite $r \rightarrow \infty$, obtemos $E = M$. Por outro lado, no limite $r \rightarrow 0^+$, obtemos 0.

Note que, para o caso (5.76), há valores de M e λ para os quais não temos a singularidade coordenada. Nesses casos, a região V possui apenas uma fronteira, e podemos calcular a energia dentro de qualquer casca esférica de raio r .

Vejamos qual é a condição necessária para evitar a singularidade coordenada. Calculando o valor que maximiza a função $f(r) = (1/r) \exp(-\lambda^2/r)$, encontramos $r_m = \lambda^2$; este valor fornece o máximo de $f(r)$. Assim, impondo $1 - (2M/\lambda^2)e^{-1} > 0$, não teremos singularidade. Por sua vez, de (3.24) e (4.50), vemos que a condição imposta acima é equivalente a

$$q_m^2 > \frac{16\pi G \epsilon_0 m^2 c^2}{e}. \quad (5.78)$$

Assumindo que q_m seja igual ao valor dado pela expressão acima, em termos numéricos obtemos $q_m = 0,0313m$. Para buracos negros com a massa do tamanho da do Sol, teremos $6,22 \cdot 10^{28}$ C·m/s; para comparar com uma carga elétrica, dividimos esse resultado por c , obtendo $2,07 \cdot 10^{20}$ C. Este valor é claramente muito alto e incompatível com o que é observado.

5.7.1 Densidades

A densidade de energia e pressão do campo gravitacional será obtida novamente via (5.38) e (5.39). Fazendo as devidas substituições, chegamos em

$$\rho_g = \frac{4k}{r^2} \left(B - 1 + \frac{1}{r} M e^{-\lambda^2/r} \right), \quad p_g = \frac{1}{3} \rho_g. \quad (5.79)$$

Para calcular a densidade de energia e pressão desse espaço-tempo, primeiro precisamos particularizar as funções $g(r)$, $h(r)$ e $l(r)$ para o valor de B em questão, isto é, (5.76). Fazendo isso (conferir o passo a passo no apêndice E.2.2), obtemos

$$g(r) = \frac{M}{2r^3} e^{-\lambda^2/r} \left[\frac{2M}{rB^2} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{r} - \frac{\lambda^4}{r^2} - \frac{1}{B} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right) + 1 \right], \quad (5.80)$$

$$h(r) = \frac{1}{r^2} (B - 1) + \frac{M}{r^3} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right), \quad (5.81)$$

$$l(r) = \frac{1}{r^2} (B - 1) + \frac{M}{Br^3} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right). \quad (5.82)$$

Substituindo (5.65), (5.66) e (5.76) em (5.41) e (5.42), concluimos que ρ e p valem, respectivamente (apêndice E.2.2)

$$\rho = 4k \left[\frac{1}{r^2} (B - 1) + \frac{M}{r^3} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right) \right], \quad (5.83)$$

$$p = \frac{4k}{3} \left\{ \frac{M}{r^3} e^{-\lambda^2/r} \left[\frac{2M}{rB^2} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{r} - \frac{\lambda^4}{r^2} + 1 \right] + \frac{1}{r^2} (B - 1) + \frac{M}{Br^3} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right) \right\}. \quad (5.84)$$

Está claro em (5.76) que o valor mínimo de B ocorre no máximo da função $f(r)$ que definimos acima. Neste caso, $r_m = \lambda^2$ corresponde ao valor de r que fornece o mínimo de B . Calculando (5.83) e (5.84) nesse valor, obtemos

$$\rho = \frac{4k}{\lambda^4} \left[\left(1 - \frac{2M}{\lambda^2} e^{-1} \right)^{1/2} - 1 \right], \quad p = \frac{\rho}{3} + \frac{4Mk}{3\lambda^6} e^{-1}. \quad (5.85)$$

Como $B(\lambda^2) < 1$, podemos concluir da expressão acima que $\rho < 0$. Para os casos nos quais $2M/(e\lambda^2) < 1$, podemos expandir o termo entre parênteses em (5.85), substituir ρ na segunda equação de (5.85), e considerando o fato de que todos os termos da expansão são negativos, exceto o primeiro, concluimos que p também é negativo. Já para o caso $2M/(e\lambda^2) = 1$, o mesmo que $B(\lambda^2) = 0$, vemos que ρ é negativo; já a pressão fica $p = 4k/3\lambda^4(-1 + M/e\lambda^2) = -4k/6\lambda^4$, que também é negativa. De qualquer forma, a positividade da energia do espaço-tempo já está assegurada pelo fato de que o termo dentro da raiz quadrada em (5.77) está limitado entre 0 e 1. Em uma teoria ou abordagem na qual apenas as quantidades quase locais e/ou globais tenham significado físico, o valor negativo de ρ não teria muita relevância física, em princípio.

6 Resultados e Discussão

Vejamos, primeiramente, quais são os resultados desta dissertação em relação ao que já é conhecido na literatura. Até onde saibamos, o cálculo e a análise da energia (5.25) é um resultado inédito, embora suspeitemos que esse resultado já possa ser conhecido, devido à importância dos espaços esfericamente simétricos. Embora a energia do buraco negro de Reissner-Nordström-de Sitter para o caso $Q = 0$ já tinha sido calculada por Maluf (MALUF, 1996), e indiretamente sugerida pelo David Brown (BROWN; YORK, 1993), desconhecemos na literatura o resultado “completo” (5.51). Os cálculos da decomposição de Eckart, tanto para o caso geral de espaços-tempo esfericamente simétricos e estáticos quanto para o caso particular do buraco negro de Reissner-Nordström-de Sitter, é um resultado inédito de nossas pesquisas. A análise do Buraco negro regular a partir das quantidades do TEGR também são inéditas. Abaixo, segue um resumo mais detalhado dos nossos resultados.

No capítulo 5, utilizamos a decomposição da métrica e da tetrada na base $\{\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ para calcular as quantidades relevantes para a análise da energia em um referencial teleparalelo que se reduz a um referencial inercial global (lorentziano). Essa base permitiu tirar proveito da simetria esférica mesmo com a tetrada teleparalela não estando adaptada ao sistema de coordenadas esféricas. Vimos que esse método reduziu bastante o tamanho das expressões e facilitou as mudanças de índices, viabilizando assim contas que, realizadas de outra forma, seriam inviáveis. Com isso, fomos capazes de obter os coeficientes da conexão na base de tetrada, equação (5.13), calcular as acelerações do frame, equação (5.14), calcular o 4-momento do espaço-tempo, equação (5.25), além de realizar a decomposição de Eckart, seção 5.5, obtendo as densidades de energia, a pressão isotrópica e o fluxo de calor do espaço-tempo e do campo gravitacional. Os resultados obtidos foram consistentes com o que esperávamos: o 4-momento possui apenas a componente temporal, o fluxo de energia, tanto do espaço-tempo quanto gravitacional, é nulo, equações (5.40) e (5.43). (Esses resultados refletem o fato do espaço-tempo ser estático, isto é, está em um estado de equilíbrio.) Além disso, verificamos a consistência da decomposição de Eckart através do termo da constante cosmológica, subseção 5.5.3, onde confirmamos que $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$.

Na seção 5.6, particularizamos os cálculos para o caso do buraco negro de Reissner-Nordström-de Sitter. Verificamos a consistência do nosso resultado comparando com o resultado obtido pelo David Brown através do limite newtoniano; também confirmamos a compatibilidade com a primeira lei da termodinâmica para buracos negros. Na análise das densidades, vimos que a densidade de energia do campo gravitacional é sempre negativa, fato esse que é válido para qualquer espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, como é evidente em (5.38). Interpretamos esse resultado como sendo compatível com o fato de a

energia potencial gravitacional newtoniana ser negativa. Não foi possível fazer uma análise clara do sinal da densidade de energia total, pois ela depende da distribuição da matéria, que tem densidade positiva e, portanto, compete com a gravitacional; pudemos concluir apenas que ela é negativa no vácuo. Fizemos uma análise dos valores dessas densidades nos horizontes e descobrimos que a densidade de energia gravitacional por unidade de comprimento tem o mesmo valor em todos os horizontes, [equação (5.70)]. No caso da densidade total, verificamos que a densidade depende da carga elétrica, sendo independente do horizonte apenas para $Q = 0$ [equação (5.72)]. Por completeza, também calculamos a integral da pressão sobre os horizontes (força) e descobrimos que o horizonte cosmológico e do buraco negro são responsáveis por fornecerem uma contribuição negativa, equações (5.73) e (5.74). Devido as singularidades, tivemos que analisar a energia do espaço-tempo em regiões separadas. Fazendo isso, verificamos que ela é sempre positiva, evitando assim problemas com a estabilidade do espaço-tempo de Minkowski. (Em relação a este último ponto, é importante destacar que todos os teoremas de positividade da energia ADM em espaços-tempo assintoticamente planos podem ser estendidos para o TEGR, desde que o referencial teleparalelo satisfaça o gauge do tempo (FORMIGA; GONCALVES, 2022).)

Para finalizar, estudamos outro caso particular de espaço-tempo estático e esfericamente simétrico, um buraco negro regular com carga magnética, no contexto da eletrodinâmica não linear. Calculamos a energia do espaço-tempo contida em uma região limitada por uma superfície esférica de raio r , equação (5.77), e vimos que essa energia tende a energia ADM no limite que r tende ao infinito. Também vimos que seria possível remover o horizonte para certos valores da carga magnética; porém, o valor necessário é alto e incompatível com as observações. Terminamos essa parte com a decomposição de Eckart e vimos que a densidade de energia e pressão do espaço-tempo são negativas no valor mínimo de B .

Referências

- BAEZ, J.; MUNIAIN, J. P. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. WORLD SCIENTIFIC, 1994. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/2324>>. Citado na página 24.
- BARDEEN, J. Non-singular general relativistic gravitational collapse. In: *Proceedings of the 5th International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity*. [S.l.: s.n.], 1968. p. 87. Citado na página 71.
- BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The Four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, v. 31, p. 161–170, 1973. Citado 3 vezes nas páginas 49, 60 e 61.
- BEATO, E. A.; GARCÍA, A. The bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. *Physics Letters B*, v. 493, n. 1, p. 149–152, 2000. ISSN 0370-2693. Citado na página 71.
- BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, v. 7, p. 2333–2346, 1973. Citado na página 62.
- BENGOCHEA, G. R.; FERRARO, R. Dark torsion as the cosmic speed-up. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 79, p. 124019, Jun 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.124019>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 63.
- BROWN, J. D.; YORK, J. W. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 47, p. 1407–1419, Feb 1993. Citado 4 vezes nas páginas 15, 82, 83 e 88.
- CAI, Y. et al. $f(T)$ teleparallel gravity and cosmology. *Rep. Prog. Phys.*, IOP Publishing, v. 79, n. 10, p. 106901, sep 2016. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 63.
- CARDONE, V. F.; RADICELLA, N.; CAMERA, S. Accelerating $f(T)$ gravity models constrained by recent cosmological data. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 85, p. 124007, Jun 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.124007>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 63.
- CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003. ISBN 0805387323. Disponível em: <<http://www.amazon.com/Spacetime-Geometry-Introduction-General-Relativity/dp/0805387323>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 34.
- CHO, Y. M. Einstein Lagrangian as the translational Yang-Mills Lagrangian. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 14, p. 2521–2525, Nov 1976. Citado na página 14.
- D'INVERNO, R.; VICKERS, J. *Introducing Einstein's Relativity: A Deeper Understanding*. New York: Oxford University Press Inc, 2022. Citado na página 31.
- ECKART, C. The thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 58, p. 919–924, Nov 1940.

Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.58.919>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 59.

EINSTEIN, A. *A teoria da relatividade: sobre a teoria da relatividade especial e geral: (para leigos)*. Porto Alegre, RS: L&PM, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 49, 50 e 52.

EISENHART, L. P. *Non-Riemannian geometry*. Mineola: Dover Publications, 1927. v. 8. ISBN 978-0-486-15463-3. Citado 3 vezes nas páginas 14, 63 e 65.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *Lições de Física de Feynman*. Edição definitiva. Porto Alegre: Bookman, 2008. v. 2. Tradução de Elcio Abdalla, Cecília Bertoni, Martha Hadler Chirenti, e Mario Cesar Baldiotti. ISBN 978-85-7780-322-4. Citado na página 52.

FORMIGA, J. The meaning of torsion in teleparallel theories. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, v. 21, 06 2024. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 70.

FORMIGA, J. B. *Confinamento clássico e quântico de partículas induzido pela geometria*. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 45.

FORMIGA, J. B. Revisiting the gravitational energy of the schwarzschild spacetime with a new approach to the calculations. *Braz. J. Phys.*, Springer, v. 51, p. 1823–1832, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s13538-021-00975-8>>. Citado 3 vezes nas páginas 72, 73 e 95.

FORMIGA, J. B. On the teleparallel frame problem. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 37, n. 33n34, p. 2250222, 2022. Citado na página 75.

FORMIGA, J. B.; GONCALVES, V. R. Generalization of the ADM gravitational energy momentum. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 106, p. 044021, Aug 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.044021>>. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 89.

GONCALVES, V. *Um estudo sobre a energia gravitacional na abordagem do teleparallelismo equivalente à relatividade geral*. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2022. Citado na página 69.

GONÇALVES, V. R.; FORMIGA, J. B. The black hole energy and the energy of the other universe. *Eur. Phys. J. Plus*, Springer, v. 136, p. 1063, 2021. Citado na página 78.

HAMMAD, F. et al. Noether charge and black hole entropy in teleparallel gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 100, p. 124040, Dec 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.124040>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 63.

HAWKING, S. W. Gravitational radiation from colliding black holes. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 26, p. 1344–1346, May 1971. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.26.1344>>. Citado na página 62.

HAWKING, S. W. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, v. 43, p. 199–220, 1975. [Erratum: *Commun.Math.Phys.* 46, 206 (1976)]. Citado na página 61.

- HAWKING, S. W.; PENROSE, R. The Singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, v. 314, p. 529–548, 1970. Citado na página 57.
- HAYASHI, K. The gauge theory of the translation group and underlying geometry. *Phys. Lett. B*, v. 69, n. 4, p. 441 – 444, 1977. ISSN 0370-2693. Citado na página 14.
- KUMAR, R.; GHOSH, S. G. Photon ring structure of rotating regular black holes and no-horizon spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 38, n. 8, p. 085010, mar 2021. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/abdd48>>. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields*. 3. ed. Oxford: Pergamon Press, 1971. v. 2. Citado na página 55.
- LOVELOCK, D. The uniqueness of the einstein field equations in a four-dimensional space. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 33: 54-70 (1969)., 1 1969. Disponível em: <<https://www.osti.gov/biblio/4779240>>. Citado na página 55.
- MALUF, J. W. Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. *J. Math. Phys. (N.Y.)*, v. 35, n. 1, p. 335–343, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.530774>>. Citado na página 15.
- MALUF, J. W. On the distribution of gravitational energy in the de sitter space. *J. Math. Phys.*, v. 37, n. 12, p. 6293–6301, 12 1996. ISSN 0022-2488. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.531777>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 82 e 88.
- MALUF, J. W. The teleparallel equivalent of general relativity. *Ann. Phys. (Berlin)*, v. 525, n. 5, p. 339–357, 2013. ISSN 1521-3889. Citado 3 vezes nas páginas 15, 63 e 70.
- MALUF, J. W. et al. Tetrad fields, reference frames, and the gravitational energy–momentum in the teleparallel equivalent of general relativity. *Ann. Phys. (Berlin)*, v. 535, n. 12, p. 2300241, 2023. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.202300241>>. Citado na página 14.
- MALUF, J. W.; ROCHA-NETO, J. F. D. General relativity on a null surface: Hamiltonian formulation in the teleparallel geometry. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 31, n. 2, p. 173–185, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1018836025605>>. Citado na página 15.
- MALUF, J. W.; ROCHA-NETO, J. F. da. Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 64, p. 084014, Sep 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.084014>>. Citado na página 15.
- MALUF, J. W. et al. Energy and angular momentum of the gravitational field in the teleparallel geometry. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 65, p. 124001, May 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.124001>>. Citado na página 15.
- MENEZES, F. *Termodinâmica de Buracos Negros*. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2021. Citado na página 61.
- Møller, C. Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 12, n. 1, p. 118 – 133, 1961. ISSN 0003-4916. Citado na página 14.

NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. 2nd. ed. Bristol: IOP Publishing Ltd, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 21.

NESTER, J. M. Positive energy via the teleparallel Hamiltonian. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 04, p. 1755, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217751X89000704>>. Citado na página 15.

NETO, J. F. da R.; MALUF, J. W.; ULHOA, S. C. Hamiltonian formulation of unimodular gravity in the teleparallel geometry. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 82, p. 124035, Dec 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.124035>>. Citado na página 15.

NORTON, J. D. General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute. *Rep. Prog. Phys.*, IOP Publishing, v. 56, n. 7, p. 791–858, jul 1993. Citado na página 67.

PATHRIA, R. K. *Statistical Mechanics*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1996. Citado na página 56.

SCHUTZ, B. F. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.

WITTEN, E. A new proof of the positive energy theorem. *Commun. Math. Phys.*, v. 80, p. 381–402, 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01208277>>. Citado na página 85.

Apêndices

APÊNDICE A – Torção

As componentes da torção $T_{\mu\nu}^a$ em uma tetrada adaptada às direções (quase) cartesianas podem ser expressas como (FORMIGA, 2021)

$$T_{\mu\nu}^a = -T_{\mu\nu}^{\hat{t}} \hat{t}^a + T_{\mu\nu}^{\hat{r}} \hat{r}^a + T_{\mu\nu}^{\hat{\theta}} \hat{\theta}^a + T_{\mu\nu}^{\hat{\phi}} \hat{\phi}^a, \quad (\text{A.1})$$

em que

$$T_{\mu\nu}^{\hat{t}} = 2\partial_{[\mu} \hat{t}_{\nu]}, \quad (\text{A.2})$$

$$T_{\mu\nu}^{\hat{r}} = 2\partial_{[\mu} \hat{r}_{\nu]} - 2\delta_{[\mu}^2 \hat{\theta}_{\nu]} - 2\sin\theta \delta_{[\mu}^3 \hat{\phi}_{\nu]}, \quad (\text{A.3})$$

$$T_{\mu\nu}^{\hat{\theta}} = 2\partial_{[\mu} \hat{\theta}_{\nu]} + 2\delta_{[\mu}^2 \hat{r}_{\nu]} - 2\cos\theta \delta_{[\mu}^3 \hat{\phi}_{\nu]}, \quad (\text{A.4})$$

$$T_{\mu\nu}^{\hat{\phi}} = 2\partial_{[\mu} \hat{\phi}_{\nu]} + 2\sin\theta \delta_{[\mu}^3 \hat{r}_{\nu]} + 2\cos\theta \delta_{[\mu}^3 \hat{\theta}_{\nu]}. \quad (\text{A.5})$$

Para calcular cada elemento de (A.1), usamos o fato de que $\partial_{[\mu} A_{\nu]} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu})$. Além disso, conforme discutido na seção 5.1, os vetores $\hat{t}_{\mu}, \hat{r}_{\mu}, \hat{\theta}_{\mu}, \hat{\phi}_{\mu}$ têm a forma

$$\hat{t}_{\mu} = -B(r)\delta_{\mu}^0, \quad \hat{r}_{\mu} = C(r)\delta_{\mu}^1, \quad \hat{\theta}_{\mu} = r\delta_{\mu}^2, \quad \hat{\phi}_{\mu} = r\sin\theta\delta_{\mu}^3. \quad (\text{A.6})$$

Começando por (A.2), temos que

$$T_{\mu\nu}^{\hat{t}} = \partial_{\mu} \hat{t}_{\nu} - \partial_{\nu} \hat{t}_{\mu} = -\partial_{\mu} (B\delta_{\nu}^0) + \partial_{\nu} (B\delta_{\mu}^0). \quad (\text{A.7})$$

Uma vez que $B \equiv B(r)$, note que sua derivada $\partial_{\mu} B$ só será diferente de zero quando $\mu = 1$, logo $\partial_{\mu} B = \delta_{\mu}^1 B'$. Portanto, chegamos em

$$T_{\mu\nu}^{\hat{t}} = B' (\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^1 - \delta_{\nu}^0 \delta_{\mu}^1). \quad (\text{A.8})$$

Para calcular (A.3), uma rápida inspeção nos permite ver que aparecerão termos do tipo $\partial_{\mu} C$. Sabendo que $C \equiv C(r)$, podemos proceder de maneira análoga ao cálculo anterior, e concluir que $\partial_{\mu} C = \delta_{\mu}^1 C'$. Abrindo as expressões, obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\hat{r}} &= \partial_{\mu} \hat{r}_{\nu} - \partial_{\nu} \hat{r}_{\mu} - \delta_{\mu}^2 \hat{\theta}_{\nu} + \delta_{\nu}^2 \hat{\theta}_{\mu} - \sin\theta \delta_{\mu}^3 \hat{\phi}_{\nu} + \sin\theta \delta_{\nu}^3 \hat{\phi}_{\mu} \\ T_{\mu\nu}^{\hat{r}} &= \delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^1 C' - \delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^1 C' - r\delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^2 + r\delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^2 - r\sin^2\theta \delta_{\mu}^3 \delta_{\nu}^3 + r\sin^2\theta \delta_{\mu}^3 \delta_{\nu}^3 \\ T_{\mu\nu}^{\hat{r}} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

No cálculo de (A.4) obtemos que

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\hat{\theta}} &= \partial_{\mu} \hat{\theta}_{\nu} - \partial_{\nu} \hat{\theta}_{\mu} + \delta_{\mu}^2 \hat{r}_{\nu} - \delta_{\nu}^2 \hat{r}_{\mu} - \cos\theta \delta_{\mu}^3 \hat{\phi}_{\nu} + \cos\theta \delta_{\nu}^3 \hat{\phi}_{\mu} \\ T_{\mu\nu}^{\hat{\theta}} &= (C - 1) (\delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^1 - \delta_{\nu}^2 \delta_{\mu}^1), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

em que usamos o simples fato que $\partial_\mu r = \delta_\mu^1$.

Por fim, para calcular (A.5), primeiro notemos que aparecerão termos do tipo $\partial_\mu(r \sin \theta)$. Aplicando a regra do produto e sabendo que $\partial_\mu \sin \theta = \cos \theta \delta_\mu^2$, concluímos que $\partial_\mu(r \sin \theta) = \delta_\mu^1 \sin \theta + \delta_\mu^2 r \cos \theta$. Abrindo as expressões em (A.5), concluímos que $T_{\mu\nu}^{\hat{\phi}}$ vale

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\hat{\phi}} &= \partial_\mu \hat{\phi}_\nu - \partial_\nu \hat{\phi}_\mu + \sin \theta \delta_\mu^3 \hat{r}_\nu - \sin \theta \delta_\nu^3 \hat{r}_\mu + \cos \theta \delta_\mu^3 \hat{\theta}_\nu - \cos \theta \delta_\nu^3 \hat{\theta}_\mu \\ T_{\mu\nu}^{\hat{\phi}} &= \delta_\nu^3 (\delta_\mu^1 \sin \theta + \delta_\mu^2 r \cos \theta) - \delta_\mu^3 (\delta_\nu^1 \sin \theta + \delta_\nu^2 r \cos \theta) + C \sin \theta (\delta_\mu^3 \delta_\nu^1 - \delta_\mu^1 \delta_\nu^3) \\ &\quad + r \cos \theta (\delta_\mu^3 \delta_\nu^2 - \delta_\mu^2 \delta_\nu^3) \\ T_{\mu\nu}^{\hat{\phi}} &= \sin \theta (C - 1) (\delta_\mu^3 \delta_\nu^1 - \delta_\mu^1 \delta_\nu^3). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Usando (5.4) para substituir os deltas em (A.8), (A.10) e (A.11) pelos vetores $\hat{t}_\mu, \hat{r}_\mu, \hat{\theta}_\mu, \hat{\phi}_\mu$ somos levados a

$$T_{\mu\nu}^{\hat{t}} = (BC)^{-1} B' (\hat{r}_\mu \hat{t}_\nu - \hat{t}_\mu \hat{r}_\nu), \quad (\text{A.12})$$

$$T_{\mu\nu}^{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) (\hat{\theta}_\mu \hat{r}_\nu - \hat{r}_\mu \hat{\theta}_\nu), \quad (\text{A.13})$$

$$T_{\mu\nu}^{\hat{\phi}} = \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) (\hat{\phi}_\mu \hat{r}_\nu - \hat{r}_\mu \hat{\phi}_\nu). \quad (\text{A.14})$$

Reunir (A.9), (A.12), (A.13) e (A.14) em (A.1) resulta que

$$T_{\mu\nu}^a = -(BC)^{-1} B' (\hat{r}_\mu \hat{t}_\nu - \hat{t}_\mu \hat{r}_\nu) \hat{t}^a + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) [(\hat{\theta}_\mu \hat{r}_\nu - \hat{r}_\mu \hat{\theta}_\nu) \hat{\theta}^a + (\hat{\phi}_\mu \hat{r}_\nu - \hat{r}_\mu \hat{\phi}_\nu) \hat{\phi}^a]. \quad (\text{A.15})$$

Para obter T_{bc}^a , basta trocar os índices μ, ν por b, c .

APÊNDICE B – Conexão de Levi-Civita

Conforme comentado na subseção 5.1.2, as componentes da torção coincidem com o objeto de não-holonomia, pois a tetrada foi definida teleparalela. Para calcular a conexão de Levi-Civita via (4.22), precisamos de T_{cba} e T_{bca} . Isso pode ser obtido facilmente apenas trocando os índices na expressão (5.10). Dessa forma, obtemos as expressões (5.11) e (5.12).

Primeiro, efetuemos $T_{bca} + T_{cba}$; portanto

$$T_{bca} + T_{cba} = (BC)^{-1} B' \left(\underbrace{\hat{t}_b \hat{t}_c \hat{r}_a}_{\text{comum}} - \hat{r}_b \hat{t}_c \hat{t}_a + \underbrace{\hat{t}_c \hat{t}_b \hat{r}_a}_{\text{comum}} - \hat{r}_c \hat{t}_b \hat{t}_a \right) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \left(\underbrace{\hat{\theta}_b \hat{\theta}_c \hat{r}_a}_{\text{comum}} - \hat{r}_b \hat{\theta}_c \hat{\theta}_a + \underbrace{\hat{\theta}_c \hat{\theta}_b \hat{r}_a}_{\text{comum}} \right. \\ \left. - \hat{r}_c \hat{\theta}_b \hat{\theta}_a + \underbrace{\hat{\phi}_b \hat{\phi}_c \hat{r}_a}_{\text{comum}} - \hat{r}_b \hat{\phi}_c \hat{\phi}_a + \underbrace{\hat{\phi}_c \hat{\phi}_b \hat{r}_a}_{\text{comum}} - \hat{r}_c \hat{\phi}_b \hat{\phi}_a \right); \quad (\text{B.1})$$

em que, nessa soma, foram evidenciados os termos em comum. Efetuando a soma das parcelas destacadas dentro dos parênteses, chegamos a

$$T_{bca} + T_{cba} = (BC)^{-1} B' \left(2\hat{t}_b \hat{t}_c \hat{r}_a - \hat{r}_b \hat{t}_c \hat{t}_a - \hat{r}_c \hat{t}_b \hat{t}_a \right) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \left(2\hat{\theta}_b \hat{\theta}_c \hat{r}_a - \hat{r}_b \hat{\theta}_c \hat{\theta}_a - \hat{r}_c \hat{\theta}_b \hat{\theta}_a \right. \\ \left. + 2\hat{\phi}_b \hat{\phi}_c \hat{r}_a - \hat{r}_b \hat{\phi}_c \hat{\phi}_a - \hat{r}_c \hat{\phi}_b \hat{\phi}_a \right). \quad (\text{B.2})$$

Por fim, podemos subtrair (B.2) de T_{abc} ; logo

$$T_{bca} + T_{cba} - T_{abc} = (BC)^{-1} B' \left(2\hat{t}_b \hat{t}_c \hat{r}_a - \hat{r}_b \hat{t}_c \hat{t}_a - \underbrace{\hat{r}_c \hat{t}_b \hat{t}_a}_a - \underbrace{\hat{t}_a \hat{t}_b \hat{r}_c}_a + \hat{t}_a \hat{r}_b \hat{t}_c \right) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \left(2\hat{\theta}_b \hat{\theta}_c \hat{r}_a \right. \\ \left. - \hat{r}_b \hat{\theta}_c \hat{\theta}_a - \underbrace{\hat{r}_c \hat{\theta}_b \hat{\theta}_a}_b + 2\hat{\phi}_b \hat{\phi}_c \hat{r}_a - \hat{r}_b \hat{\phi}_c \hat{\phi}_a - \underbrace{\hat{r}_c \hat{\phi}_b \hat{\phi}_a}_c - \underbrace{\hat{\theta}_a \hat{\theta}_b \hat{r}_c}_b + \hat{\theta}_a \hat{r}_b \hat{\theta}_c - \underbrace{\hat{\phi}_a \hat{\phi}_b \hat{r}_c}_c + \hat{\phi}_a \hat{r}_b \hat{\phi}_c \right); \quad (\text{B.3})$$

em que novamente os termos em comum foram evidenciados. Efetuar a soma das parcelas destacadas dentro dos parênteses, cancelar os termos iguais e, em seguida, dividir tudo por dois, nos permite concluir que

$$\hat{\omega}_{abc} = (BC)^{-1} B' \hat{t}_b \left(\hat{r}_a \hat{t}_c - \hat{t}_a \hat{r}_c \right) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \left[\hat{\theta}_b \left(\hat{r}_a \hat{\theta}_c - \hat{\theta}_a \hat{r}_c \right) + \hat{\phi}_b \left(\hat{r}_a \hat{\phi}_c - \hat{\phi}_a \hat{r}_c \right) \right]. \quad (\text{B.4})$$

APÊNDICE C – Tensor de energia-momento do espaço-tempo

As equações de Einstein na forma teleparalela são escritas como

$$\partial_\nu(e\Sigma^{a\mu\nu}) = \frac{e}{4k}\tau^{a\mu}. \quad (\text{C.1})$$

Em que $\tau^{a\mu}$ é o tensor de energia-momento do espaço-tempo. Uma vez que a tetrada está fixada (seção 5.1), podemos resolver essa equação para obter $\tau^{a\mu}$ para um espaço-tempo esfericamente simétrico.

Operando a regra do produto no membro do lado esquerdo da igualdade em (C.1), temos $\partial_\nu(e)\Sigma^{a\mu\nu} + e\partial_\nu(\Sigma^{a\mu\nu})$. Relembrando que $e = BCr^2 \sin \theta$, $\partial_\nu B = B'\delta_\nu^1$, $\partial_\nu C = C'\delta_\nu^1$, $\partial_\nu r^2 = 2r\delta_\nu^1$ e, por sua vez, $\partial_\nu \sin \theta = \cos \theta \delta_\nu^2$, $\partial_\nu(e)$ resultará em

$$\partial_\nu(e) = (r^2 B' \sin \theta + BC^{-1} r^2 C' \sin \theta + 2rB \sin \theta)\hat{r}_\nu + BCr \cos \theta \hat{\theta}_\nu, \quad (\text{C.2})$$

em que foram utilizadas as equações (5.4) para trocar as deltas pelos vetores $\hat{r}_\nu$ e $\hat{\theta}_\nu$. Passamos agora ao cálculo de $\partial_\nu(\Sigma^{a\mu\nu})$. De (5.21), o superpotencial tem a forma

$$\begin{aligned} \Sigma^{a\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\hat{\theta}^a (\hat{\theta}^\mu \hat{r}^\nu - \hat{r}^\mu \hat{\theta}^\nu) + \hat{\phi}^a (\hat{\phi}^\mu \hat{r}^\nu - \hat{r}^\mu \hat{\phi}^\nu) \right] \left[(BC)^{-1} B' - \frac{1}{r}(1 - C^{-1}) \right] \\ - \frac{1}{r}(1 - C^{-1}) \hat{t}^a (\hat{r}^\mu \hat{t}^\nu - \hat{t}^\mu \hat{r}^\nu); \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

em que subimos todos os índices e trocamos os dois últimos por índices gregos. Aplicando ∂_ν em (C.3), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\nu(\Sigma^{a\mu\nu}) = \frac{1}{2} \partial_\nu \left\{ \left[\hat{\theta}^a (\hat{\theta}^\mu \hat{r}^\nu - \hat{r}^\mu \hat{\theta}^\nu) + \hat{\phi}^a (\hat{\phi}^\mu \hat{r}^\nu - \hat{r}^\mu \hat{\phi}^\nu) \right] \left[(BC)^{-1} B' - \frac{1}{r}(1 - C^{-1}) \right] \right\} \\ + \frac{1}{2} \left[\hat{\theta}^a (\hat{\theta}^\mu \hat{r}^\nu - \hat{r}^\mu \hat{\theta}^\nu) + \hat{\phi}^a (\hat{\phi}^\mu \hat{r}^\nu - \hat{r}^\mu \hat{\phi}^\nu) \right] \partial_\nu \left[(BC)^{-1} B' - \frac{1}{r}(1 - C^{-1}) \right] \\ - \partial_\nu \left[\frac{1}{r}(1 - C^{-1}) \right] \hat{t}^a (\hat{r}^\mu \hat{t}^\nu - \hat{t}^\mu \hat{r}^\nu) - \frac{1}{r}(1 - C^{-1}) \partial_\nu [\hat{t}^a (\hat{r}^\mu \hat{t}^\nu - \hat{t}^\mu \hat{r}^\nu)]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

A primeira derivada em (C.4) envolve a derivada de 4 termos, cujos resultados são

$$\partial_\nu(\hat{\theta}^a \hat{\theta}^\mu \hat{r}^\nu) = - \left(\frac{C^{-1}}{r} + C' C^{-2} \right) \hat{\theta}^a \hat{\theta}^\mu, \quad (\text{C.5})$$

$$\partial_\nu(\hat{\theta}^a \hat{r}^\mu \hat{\theta}^\nu) = - \left(\frac{\hat{r}^a \hat{r}^\mu}{r} \right), \quad (\text{C.6})$$

$$\partial_\nu(\hat{\phi}^a \hat{\phi}^\mu \hat{r}^\nu) = - \left(\frac{C^{-1}}{r} + C' C^{-2} \right) \hat{\phi}^a \hat{\phi}^\mu, \quad (\text{C.7})$$

$$\partial_\nu(\hat{\phi}^a \hat{r}^\mu \hat{\phi}^\nu) = - \frac{1}{r \sin \theta} (\sin \theta \hat{r}^a + \cos \theta \hat{\theta}^a) \hat{r}^\mu. \quad (\text{C.8})$$

Para obter os resultados precedentes, foram utilizados as equações (5.5) para contrair os índices ν e realizar a derivação, bem como as equações (4.51). Operando a segunda e a terceira derivada em (C.4) nos leva respectivamente a

$$\partial_\nu \left[(BC)^{-1} B' - \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right] = \left[-C^{-3} B^{-1} B' C' - (BC)^{-2} (B')^2 + C^{-2} B^{-1} B'' + \frac{1}{r^2} (C^{-1} - C^{-2}) - \frac{1}{r} C^{-3} C' \right] \hat{r}_\nu, \quad (\text{C.9})$$

$$\partial_\nu \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right] = \left[-\frac{1}{r^2} (C^{-1} - C^{-2}) + \frac{1}{r} C^{-3} C' \right] \hat{r}_\nu. \quad (\text{C.10})$$

Em que as equações (5.4) foram utilizadas para por o fator $\hat{r}_\nu$ em evidência. Por fim, a quarta derivação resulta em

$$\partial_\nu \left[\hat{t}^a (\hat{r}^\mu \hat{t}^\nu - \hat{t}^\mu \hat{r}^\nu) \right] = \left[C^{-2} C' + (BC)^{-1} B' \right] \hat{t}^a \hat{t}^\mu. \quad (\text{C.11})$$

Realizando algumas manipulações e reunindo (C.5), (C.6), (C.7), (C.8), (C.9), (C.10) e (C.11) em (C.4) resulta que

$$\partial_\nu (\Sigma^{a\mu\nu}) = \beta \psi \varphi (\hat{\theta}^a \hat{\theta}^\mu + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^\mu) + \frac{\psi}{2r} (2\hat{r}^a + \cot \theta \hat{\theta}^a) \hat{r}^\mu + \alpha \hat{t}^a \hat{t}^\mu; \quad (\text{C.12})$$

em as funções β, ψ, φ e α definidas provisoriamente têm a forma

$$\beta \equiv -\frac{1}{2} \left(\frac{C^{-1}}{r} + C^{-2} C^1 \right), \quad (\text{C.13})$$

$$\psi \equiv (BC)^{-1} B' - \frac{1}{r} (1 - C^{-1}), \quad (\text{C.14})$$

$$\varphi \equiv \frac{1}{2} \left[C^{-2} B^{-1} (B'' - C^{-1} B' C') - (BC)^{-2} (B')^2 + \frac{1}{r^2} (C^{-1} - C^{-2}) - \frac{1}{r} C^{-3} C' \right], \quad (\text{C.15})$$

$$\alpha \equiv \left[\left(C^{-2} - C^{-1} \right) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{B' B^{-1}}{r} \right) + \frac{C^{-2} C'}{r} (2C^{-1} - 1) \right]. \quad (\text{C.16})$$

A contração de (C.2) com (C.3) resulta

$$\begin{aligned} \partial_\nu (e) \Sigma^{a\mu\nu} = (r^2 B' \sin \theta + BC^{-1} r^2 C' \sin \theta + 2rB \sin \theta) & \left[\frac{\psi}{2} (\hat{\theta}^a \hat{\theta}^\mu + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^\mu) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \hat{t}^a \hat{t}^\mu \right] - BC r \cos \theta \frac{\psi}{2} \hat{\theta}^a \hat{r}^\mu. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Uma vez que vamos isolar $\tau^{a\mu}$ em (C.1), podemos dividir (C.17) por e , o que resulta em

$$\frac{1}{e} \partial_\nu (e) \Sigma^{a\mu\nu} = \frac{\gamma \psi}{2} (\hat{\theta}^a \hat{\theta}^\mu + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^\mu) + \frac{\gamma}{r} (1 - C^{-1}) \hat{t}^a \hat{t}^\mu - \frac{\psi}{2r} \cot \theta \hat{\theta}^a \hat{r}^\mu. \quad (\text{C.18})$$

A função γ foi definida de forma provisória para poupar notação e tem a forma

$$\gamma \equiv (BC)^{-1} B' + C^{-2} C' + \frac{2C^{-1}}{r}. \quad (\text{C.19})$$

Dividir $e \partial_\nu (\Sigma^{a\mu\nu})$ por e resulta simplesmente em (C.12). Dessa forma, somando (C.12) com (C.18) resulta em

$$\frac{1}{e} \left[\partial_\nu (e) \Sigma^{a\mu\nu} + e \partial_\nu (\Sigma^{a\mu\nu}) \right] = \underbrace{\left(\beta\psi + \frac{\gamma\psi}{2} + \varphi \right) (\hat{\theta}^a \hat{\theta}^\mu + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^\mu)}_I + \underbrace{\left[\frac{\gamma}{r} (1 - C^{-1}) + \alpha \right] \hat{t}^a \hat{t}^\mu + \frac{\psi}{r} \hat{r}^a}_{II} \quad (C.20)$$

Os termos destacados serão resolvidos separadamente com o auxílio das definições (C.13), (C.14), (C.15), (C.16) e (C.19). Começando por I , temos que

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2} \left[-\frac{C^{-2} \cancel{B^{-1} B'}}{r} + \frac{\cancel{C^b}}{r^2} - \frac{\cancel{C^c}}{r^2} - C^{-3} B^{-1} B' C' + \frac{\cancel{C^{-2} C'}}{r} - \frac{C^{-3} C'}{r} + (\cancel{B^{-1} C^{-1} B'})^2 \right. \\ \left. - \frac{(BC)^{-1} B'}{r} + \frac{\cancel{B^{-1} C^{-2} B'}}{r} + \cancel{B^{-1} C^{-3} B' C'} - \frac{\cancel{C^{-2} C'}}{r} + \frac{\cancel{C^{-3} C'}}{r} + \frac{2B^{-1} C^{-2} B'}{r} - \frac{\cancel{2C^b}}{r^2} + \frac{\cancel{2C^c}}{r^2} \right. \\ \left. - \cancel{B^{-1} C^{-3} B' C'} - (\cancel{B^{-1} C^{-1} B'})^2 + B^{-1} C^{-2} B'' + \frac{\cancel{C^b}}{r^2} - \frac{\cancel{C^c}}{r^2} - \frac{\cancel{C^{-3} C'}}{r} \right] \quad (C.21) \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2} \left[-B^{-1} C^{-3} B' C' - \frac{C^{-3} C'}{r} - \frac{(BC)^{-1} B'}{r} + \frac{2B^{-1} C^{-2} B'}{r} + B^{-1} C^{-2} B'' \right], \quad (C.22)$$

em que de (C.21) para (C.22) alguns termos foram cancelados, conforme o destacado. O calculo de II nos leva a

$$\begin{aligned} II = \left[\frac{(\cancel{BC})^{-1} \cancel{B'}}{r} + \frac{\cancel{C^{-2} C'}}{r} + \frac{\overbrace{2C^{-1}}^B}{r^2} - \frac{\cancel{B^{-1} C^{-2} B'}}{r} - \frac{\cancel{C^{-3} C'}}{r} - \frac{\overbrace{2C^{-2}}^A}{r^2} - \frac{\overbrace{C^{-1}}^B}{r^2} + \frac{\overbrace{C^{-2}}^A}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{C^{-3} C'}{r} - \frac{(\cancel{BC})^{-1} \cancel{B'}}{r} - \frac{\cancel{C^{-2} C'}}{r} + \frac{\cancel{B^{-1} C^{-2} B'}}{r} + \frac{\cancel{C^{-3} C'}}{r} \right] \quad (C.23) \end{aligned}$$

$$II = \left[\frac{C^{-1}}{r^2} - \frac{C^{-2}}{r^2} + \frac{C^{-3} C'}{r} \right]. \quad (C.24)$$

De (C.23) para (C.24), alguns termos foram cancelados e outros somados. Finalmente, substituindo (C.22) e (C.24) em (C.20) e multiplicando o resultado por $4k$, chegamos a

$$\tau^{a\mu} = 4k \left[g(r) (\hat{\theta}^a \hat{\theta}^\mu + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^\mu) + h(r) \hat{t}^a \hat{t}^\mu + l(r) \hat{r}^a \hat{r}^\mu \right]; \quad (C.25)$$

em que

$$g(r) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{B''}{BC^2} + \frac{2B'}{rBC^2} - \frac{B'C'}{BC^3} - \frac{C'}{rC^3} - \frac{B'}{rBC} \right), \quad (C.26)$$

$$h(r) \equiv \frac{1}{Cr^2} - \frac{1}{C^2 r^2} + \frac{C'}{rC^3}, \quad (C.27)$$

$$l(r) \equiv \frac{B'}{rBC} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 C}. \quad (C.28)$$

APÊNDICE D – Tensor de energia-momento do campo gravitacional

O tensor de energia momento do campo gravitacional pode ser obtido via (4.35); isto é

$$t^b_a = 2k \left(\underbrace{2\dot{\omega}^c_{[ad]}\dot{\omega}^b_c}_{1^\circ \text{ membro}} \overbrace{-2\dot{\omega}^b_{[ad]}\dot{\omega}^c_d}^{2^\circ \text{ membro}} - \underbrace{\dot{\omega}^c_{ca}\dot{\omega}^d_d}_{3^\circ \text{ membro}} + \overbrace{\delta^b_a\dot{\omega}^c_{[c]f}\dot{\omega}^d_{|d|}{}^f}_{4^\circ \text{ membro}} \right). \quad (\text{D.1})$$

Resolveremos cada membro destacado separadamente. Começando pelo primeiro membro, temos que

$$2\dot{\omega}^c_{[ad]}\dot{\omega}^b_c = \underbrace{\dot{\omega}^c_{ad}\dot{\omega}^b_c}_I - \underbrace{\dot{\omega}^c_{da}\dot{\omega}^b_c}_{II} \quad (\text{D.2})$$

Para resolver todos os termos destacados, seja em (D.1), como em (D.2), recorreremos a conexão de Levi-Civita (5.13). Renomeando e subindo os índices, I resulta em

$$I = \left\{ (BC)^{-1} B' \hat{t}_a (\hat{r}^c \hat{t}_d - \hat{t}^c \hat{r}_d) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) [\hat{\theta}_a (\hat{r}^c \hat{\theta}_d - \hat{\theta}^c \hat{r}_d) + \hat{\phi}_a (\hat{r}^c \hat{\phi}_d - \hat{\phi}^c \hat{r}_d)] \right\} \\ \left\{ (BC)^{-1} B' \hat{t}_c (\hat{r}^b \hat{t}^d - \hat{t}^b \hat{r}^d) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) [\hat{\theta}_c (\hat{r}^b \hat{\theta}^d - \hat{\theta}^b \hat{r}^d) + \hat{\phi}_c (\hat{r}^b \hat{\phi}^d - \hat{\phi}^b \hat{r}^d)] \right\}. \quad (\text{D.3})$$

Realizando as contrações com a ajuda de (4.51) e evidenciando os termos em comum, obtemos

$$I = \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right]^2 (\hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b) + (BC)^{-2} (B')^2 (\hat{t}_d \hat{r}^c - \hat{t}^c \hat{r}_d) (\hat{t}^d \hat{r}^b - \hat{t}^b \hat{r}^d) \hat{t}_a \hat{t}_c \quad (\text{D.4})$$

$$I = \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right]^2 (\hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b) - (BC)^{-2} (B')^2 \hat{t}_a \hat{t}^b. \quad (\text{D.5})$$

Em que de (D.4) pra (D.5) recorremos mais uma vez às relações (4.51), de forma que $(\hat{t}_d \hat{r}^c - \hat{t}^c \hat{r}_d) (\hat{t}^d \hat{r}^b - \hat{t}^b \hat{r}^d) \hat{t}_a \hat{t}_c = -\hat{t}_a \hat{t}^b$. Partindo para o cálculo de II , temos que

$$II = \left\{ (BC)^{-1} B' \hat{t}_d (\hat{r}^c \hat{t}_a - \hat{t}^c \hat{r}_a) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) [\hat{\theta}_d (\hat{r}^c \hat{\theta}_a - \hat{\theta}^c \hat{r}_a) + \hat{\phi}_d (\hat{r}^c \hat{\phi}_a - \hat{\phi}^c \hat{r}_a)] \right\} \\ \left\{ (BC)^{-1} B' \hat{t}_c (\hat{r}^b \hat{t}^d - \hat{t}^b \hat{r}^d) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) [\hat{\theta}_c (\hat{r}^b \hat{\theta}^d - \hat{\theta}^b \hat{r}^d) + \hat{\phi}_c (\hat{r}^b \hat{\phi}^d - \hat{\phi}^b \hat{r}^d)] \right\}. \quad (\text{D.6})$$

Evidenciando os termos em comum e realizando as devidas contrações, chegamos em

$$II = - \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right]^2 \underbrace{(\hat{r}_a \hat{r}^b + \hat{r}_a \hat{r}^b)}_{2\hat{r}_a \hat{r}^b} + (BC)^{-2} (B')^2 \underbrace{(\hat{t}_a \hat{r}^c - \hat{t}^c \hat{r}_a) (\hat{t}^d \hat{r}^b - \hat{t}^b \hat{r}^d) \hat{t}_d \hat{t}_c}_{-2\hat{r}_a \hat{r}^b}. \quad (\text{D.7})$$

A contração do termo destacado resulta $(\hat{t}_a \hat{r}^c - \hat{t}^c \hat{r}_a) (\hat{t}^d \hat{r}^b - \hat{t}^b \hat{r}^d) \hat{t}_d \hat{t}_c = -\hat{r}_a \hat{r}^b$; logo, somos levados a

$$II = -2 \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right]^2 \hat{r}_a \hat{r}^b - (BC)^{-2} (B')^2 \hat{r}_a \hat{r}^b. \quad (\text{D.8})$$

Enfim, reunindo (D.5) e (D.8) em (D.2) resulta

$$2\dot{\omega}_{[ad]}^c \dot{\omega}_c^{b\,d} = \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right]^2 (\hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b + 2\hat{r}_a \hat{r}^b) + (BC)^{-2} (B')^2 (\hat{r}_a \hat{r}^b - \hat{t}_a \hat{t}^b). \quad (D.9)$$

Vamos ao cálculo do segundo membro, isto é

$$2\dot{\omega}_{[ad]}^b \dot{\omega}_c^{c\,d} = \underbrace{\dot{\omega}_{ad}^b \dot{\omega}_c^{c\,d}}_{III} - \underbrace{\dot{\omega}_{da}^b \dot{\omega}_c^{c\,d}}_{IV}. \quad (D.10)$$

Para realizar os cálculos de *III* e *IV*, recorremos a (5.15). Não é difícil ver que, graças a ortonormalidade dos vetores $(\hat{t}_a, \hat{r}_a, \hat{\theta}_a, \hat{\phi}_a)$, a contração $\dot{\omega}_{da}^b \dot{\omega}_c^{c\,d}$ resulta 0, uma vez que $\hat{\phi}_d \hat{r}^d = \hat{\theta}_d \hat{r}^d = \hat{t}_d \hat{r}^d = 0$. Por sua vez, *III* resulta em

$$III = \left\{ (BC)^{-1} B' \hat{t}_a \underbrace{(\hat{r}^b \hat{t}_d - \hat{t}^b \hat{r}_d)} + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \left[\hat{\theta}_a (\hat{r}^b \hat{\theta}_d - \hat{\theta}^b \hat{r}_d) + \hat{\phi}_a (\hat{r}^b \hat{\phi}_d - \hat{\phi}^b \hat{r}_d) \right] \right\} \left[-\frac{2}{r} (1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right] \hat{r}^d.$$

Contraindo $\hat{r}_d$ com os termos destacados, chegamos em

$$III = \left[-\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) (\hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b) - (BC)^{-1} B' \hat{t}_a \hat{t}^b \right] \left[-\frac{2}{r} (1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right].$$

Portanto, (D.10) vale

$$2\dot{\omega}_{[ad]}^b \dot{\omega}_c^{c\,d} = - \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) (\hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b) + (BC)^{-1} B' \hat{t}_a \hat{t}^b \right] \left[-\frac{2}{r} (1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right]. \quad (D.11)$$

O terceiro membro é obtido reunindo os termos semelhantes, uma vez que o cálculo envolve apenas o produto da conexão de Levi-civita na forma (5.15). Fazendo as devidas trocas de índices, obtemos que $\dot{\omega}_{ca}^c \dot{\omega}_d^{d\,b}$ vale

$$\dot{\omega}_{ca}^c \dot{\omega}_d^{d\,b} = \left[-\frac{2}{r} (1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right]^2 \hat{r}_a \hat{r}^b. \quad (D.12)$$

Por fim, o último e quarto membro é obtido a partir de

$$\delta_b^a \dot{\omega}_{[c]f}^c \dot{\omega}_{[d]}^{d\,f} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\dot{\omega}_{cf}^c \dot{\omega}_d^{d\,f}}_V - \underbrace{\dot{\omega}_{df}^c \dot{\omega}_c^{d\,f}}_{VI} \right) \delta_b^a. \quad (D.13)$$

Para obter *V*, basta recorrer mais uma vez à (5.15) e realizar a contração $\hat{r}_f \hat{r}^f$, que de (4.53) resulta $\hat{r}_f \hat{r}^f = 1$. Logo, *V* vale

$$V = \left[-\frac{2}{r} (1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right]^2. \quad (D.14)$$

Por sua vez, VI resulta em

$$VI = \left\{ (BC)^{-1} B' \hat{t}_d (\hat{r}^c \hat{t}_f - \hat{t}^c \hat{r}_f) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) [\hat{\theta}_d (\hat{r}^c \hat{\theta}_f - \hat{\theta}^c \hat{r}_f) + \hat{\phi}_d (\hat{r}^c \hat{\phi}_f - \hat{\phi}^c \hat{r}_f)] \right\} \\ \left\{ (BC)^{-1} B' \hat{t}_c (\hat{r}^d \hat{t}^f - \hat{t}^d \hat{r}^f) + \frac{1}{r} (1 - C^{-1}) [\hat{\theta}_c (\hat{r}^d \hat{\theta}^f - \hat{\theta}^d \hat{r}^f) + \hat{\phi}_c (\hat{r}^d \hat{\phi}^f - \hat{\phi}^d \hat{r}^f)] \right\}. \quad (D.15)$$

Elevando ao quadrado os termos iguais e colocando-os em evidência, chegamos em

$$VI = 2 \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right]^2 + (BC)^{-2} (B')^2 \underbrace{(\hat{t}_f \hat{r}^c - \hat{t}^c \hat{r}_f) (\hat{t}^f \hat{r}^d - \hat{t}^d \hat{r}^f) \hat{t}_d \hat{t}_c}_{=1}. \quad (D.16)$$

A contração do termo destacado resulta $(\hat{t}_f \hat{r}^c - \hat{t}^c \hat{r}_f) (\hat{t}^f \hat{r}^d - \hat{t}^d \hat{r}^f) \hat{t}_d \hat{t}_c = 1$, portanto

$$VI = 2 \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right]^2 + (BC)^{-2} (B')^2. \quad (D.17)$$

Logo, (D.13) resulta

$$\delta_b^a \hat{\omega}_{[c|f}^c \hat{\omega}_{|d]}^d{}^f = \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{2}{r} (1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right]^2 - 2 \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right]^2 - (BC)^{-2} (B')^2 \right\} \delta_b^a. \quad (D.18)$$

Por fim, reunindo (D.9), (D.11), (D.18) e (D.18) em (D.1) e colocando os termos iguais em evidência, temos que

$$t_a^b = 4k \left\{ \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right]^2 (2\hat{r}_a \hat{r}^b - \hat{\theta}_a \hat{\theta}^b - \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b - \delta_a^b) + (BC)^{-2} (B')^2 \left(\hat{r}_a \hat{r}^b - \frac{\delta_a^b}{2} \right) \right. \\ \left. \left[-\frac{2}{r} (1 - C^{-1}) + (BC)^{-1} B' \right]^2 \left(\frac{\delta_a^b}{2} - \hat{r}_a \hat{r}^b \right) + \frac{(BC)^{-1} B'}{r} (1 - C^{-1}) (\hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b - 2\hat{t}_a \hat{t}^b) \right\} \quad (D.19)$$

Desenvolvendo os termos quadráticos e colocando os termos em comum em evidência, obtemos

$$t_a^b = 4k \left\{ \left[\frac{1}{r} (1 - C^{-1}) \right]^2 \overbrace{(2\hat{r}_a \hat{r}^b - \hat{\theta}_a \hat{\theta}^b - \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b - \delta_a^b + 2\delta_a^b - 4\hat{r}_a \hat{r}^b)} + (BC)^{-2} (B')^2 \left(\hat{r}_a \hat{r}^b - \frac{\delta_a^b}{2} \right) \right. \\ \left. - (BC)^{-2} (B')^2 \left(\hat{r}_a \hat{r}^b - \frac{\delta_a^b}{2} \right) + \frac{(BC)^{-1} B'}{r} (1 - C^{-1}) \underbrace{(\hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b - 2\hat{t}_a \hat{t}^b - 2\delta_a^b + 2\hat{r}_a \hat{r}^b)} \right\}. \quad (D.20)$$

De (5.16), podemos escrever δ_a^b na forma

$$\delta_a^b = -\hat{t}_a \hat{t}^b + \hat{r}_a \hat{r}^b + \hat{\theta}_a \hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a \hat{\phi}^b. \quad (D.21)$$

Com base nisso podemos simplificar os termos destacados de (D.20) que envolvem os vetores unitários; portanto

$$\left(2\hat{r}_a\hat{r}^b - \hat{\theta}_a\hat{\theta}^b - \hat{\phi}_a\hat{\phi}^b - \delta_a^b + 2\delta_a^b - 4\hat{r}_a\hat{r}^b\right) = -\hat{t}_a\hat{t}^b - \hat{r}_a\hat{r}^b, \quad (\text{D.22})$$

$$\left(\hat{\theta}_a\hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a\hat{\phi}^b - 2\hat{t}_a\hat{t}^b - 2\delta_a^b + 2\hat{r}_a\hat{r}^b\right) = -\hat{\theta}_a\hat{\theta}^b - \hat{\phi}_a\hat{\phi}^b - 2\hat{r}_a\hat{r}^b. \quad (\text{D.23})$$

Logo, substituindo (D.22) e (D.23) em (D.12), obtemos

$$t_a^b = (\rho - f)\hat{r}_a\hat{r}^b + \rho\hat{t}_a\hat{t}^b + \frac{f}{2}(\hat{\theta}_a\hat{\theta}^b + \hat{\phi}_a\hat{\phi}^b), \quad (\text{D.24})$$

em que

$$\rho = -\frac{2k}{r^2}(C^{-1} - 1)^2, \quad f = \frac{4k}{r}(BC)^{-1}B'(C^{-1} - 1). \quad (\text{D.25})$$

APÊNDICE E – Decomposição de Eckart

E.1 Campo gravitacional

De (5.35), podemos trocar os índices latinos pelos gregos, para obter

$$t_{\mu\nu} = (\rho - f)\hat{r}_\mu\hat{r}_\nu + \rho\hat{t}_\mu\hat{t}_\nu + \frac{f}{2}(\hat{\theta}_\mu\hat{\theta}_\nu + \hat{\phi}_\mu\hat{\phi}_\nu). \quad (\text{E.1})$$

Sabendo que $v^\mu = e_{(0)}^\mu = t^\mu$, podemos substituir esta relação, juntamente de (E.1), em (3.33), para obter a densidade de energia do campo gravitacional ρ_g ; portanto

$$\rho_g = t_{\mu\nu}e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu = t_{00} \quad (\text{E.2})$$

logo,

$$\rho_g = -\frac{2k}{r^2}(C^{-1} - 1)^2. \quad (\text{E.3})$$

Como o traço de $t_{\mu\nu}$ é nulo, o campo gravitacional obedece a equação de estado $p_g = \frac{1}{3}\rho_g$, logo

$$p_g = -\frac{2k}{3r^2}(C^{-1} - 1)^2. \quad (\text{E.4})$$

Substituindo (5.37) em (3.34), podemos calcular o fluxo de energia q_g^μ ; portanto, temos

$$q_g^\mu = -h_\alpha^\mu t^{\alpha\beta} e_{(0)\beta}. \quad (\text{E.5})$$

A contração $t^{\alpha\beta} e_{(0)\beta}$ resulta $t^{\alpha 0}$, que de (E.1), é igual a $\rho B^{-1}(r)\hat{t}^\alpha$. Como $\hat{t}^\alpha \hat{r}_\alpha = \hat{t}^\alpha \hat{\theta}_\alpha = \hat{t}^\alpha \hat{\phi}_\alpha = 0$, segue que

$$q_g^\mu = 0. \quad (\text{E.6})$$

E.2 Espaço-tempo

Partindo de (5.30), podemos trocar o índice latino pelo grego, para obter

$$\tau^{\mu\nu} = 4k[g(r)(\hat{\theta}^\mu\hat{\theta}^\nu + \hat{\phi}^\mu\hat{\phi}^\nu) + h(r)\hat{t}^\mu\hat{t}^\nu + l(r)\hat{r}^\mu\hat{r}^\nu] \quad (\text{E.7})$$

O resultado (E.2) também pode ser utilizado para obter a densidade de energia do espaço-tempo, trocando $t_{\mu\nu}$ por $\tau_{\mu\nu}$. Logo, graças a ortonormalidade dos vetores unitários, ρ vale

$$\rho = 4kh(r). \quad (\text{E.8})$$

Com $h(r)$ sendo dado por (5.29). Para calcular a pressão, usaremos a expressão (3.33), isto é

$$p = \frac{1}{3} \tau_{\mu\nu} h^{\mu\nu}. \quad (\text{E.9})$$

Abrindo as contas, temos

$$p = \frac{4k}{3} \left[g(r) (\hat{\theta}^\mu \hat{\theta}^\nu + \hat{\phi}^\mu \hat{\phi}^\nu) + h(r) \hat{t}^\mu \hat{t}^\nu + l(r) \hat{r}^\mu \hat{r}^\nu \right] (\hat{r}_\mu \hat{r}_\nu + \hat{\theta}_\mu \hat{\theta}_\nu + \hat{\phi}_\mu \hat{\phi}_\nu); \quad (\text{E.10})$$

da ortonormalidade dos vetores unitários, chegamos em

$$p = \frac{4k}{3} (2g(r) + l(r)), \quad (\text{E.11})$$

com $l(r)$ sendo dado por (5.30).

Por fim, para calcular o fluxo de energia q^μ , podemos aproveitar o resultado (E.5) e trocar $t^{\alpha 0}$ por $\tau^{\alpha 0} = 4kh(r)B^{-1}(r)\hat{t}^\alpha$. Como $\hat{t}^\alpha \hat{r}_\alpha = \hat{t}^\alpha \hat{\theta}_\alpha = \hat{t}^\alpha \hat{\phi}_\alpha = 0$, segue que

$$q^\mu = 0. \quad (\text{E.12})$$

Dado nosso interesse nas seções 5.6 e 5.7 em calcular a densidade de energia do espaço-tempo para o caso em que $C(r) = 1/B(r)$, particularizaremos (5.28), (5.29) e (5.30) para esse caso. Nas próximas subseções, calcularemos (E.8) e (E.11) para quando $B(r)$ assume as formas dadas em (5.50) e (5.76). Portanto, substituir $C(r) = 1/B(r)$ em (5.28), (5.29) e (5.30) nos leva a

$$g(r) = \frac{1}{2} \left(BB'' + \frac{3BB'}{r} + (B')^2 - \frac{B'}{r} \right), \quad (\text{E.13})$$

$$h(r) = \frac{B}{r^2} - \frac{B^2}{r^2} - \frac{BB'}{r}, \quad (\text{E.14})$$

$$l(r) = \frac{B'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{B}{r^2}. \quad (\text{E.15})$$

E.2.1 ρ e p - Buraco negro de Reissner-Nordström-de Sitter

Para $B(r)$ dado por

$$B^2(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{r^2}{L^2}, \quad (\text{E.16})$$

B' e B'' têm a forma

$$B' = \frac{1}{B} \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{r}{L^2} \right), \quad (\text{E.17})$$

$$B'' = \frac{1}{B} \left[-\frac{2M}{r^3} + \frac{3Q^2}{r^4} - \frac{1}{L^2} - \frac{1}{B^2} \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{r}{L^2} \right)^2 \right]. \quad (\text{E.18})$$

Para calcular $g(r)$, $h(r)$ e $l(r)$, basta substituir (E.16), (E.17) e (E.18) em (E.13), (E.14) e (E.15). Começando por $g(r)$, temos

$$g(r) = \frac{1}{2} \left[-\frac{2M}{r^3} + \cancel{\frac{3Q^2}{r^4}} - \widehat{\frac{1}{L^2}} - \cancel{\frac{1}{B^2} \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{r}{L^2} \right)^2} + 3 \left(\frac{M}{r^3} - \cancel{\frac{Q^2}{r^4}} - \widehat{\frac{1}{L^2}} \right) + \cancel{\frac{1}{B^2} \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{r}{L^2} \right)^2} - \frac{1}{B} \left(\frac{M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} - \frac{1}{L^2} \right) \right]. \quad (\text{E.19})$$

Após simplificar a expressão conforme o destacado, chegamos em

$$g(r) = \frac{1}{2} \left[\frac{M}{r^3} - \frac{4}{L^2} - \frac{1}{B} \left(\frac{M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} - \frac{1}{L^2} \right) \right]. \quad (\text{E.20})$$

O cálculo de $h(r)$ nos leva a

$$h(r) = \frac{B}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \underbrace{\frac{2M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4}}_b + \underbrace{\frac{1}{L^2}}_a - \left(\underbrace{\frac{M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4}}_b - \underbrace{\frac{1}{L^2}}_a \right). \quad (\text{E.21})$$

Ao reunir os termos em destaque e eliminar os restantes, concluímos que

$$h(r) = \frac{1}{r^2}(B-1) + \frac{M}{r^3} + \frac{2}{L^2}. \quad (\text{E.22})$$

Por sua vez, $l(r)$ resulta simplesmente em

$$l(r) = \frac{1}{r^2}(B-1) + \frac{1}{B} \left(\frac{M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} - \frac{1}{L^2} \right). \quad (\text{E.23})$$

Para obter ρ e p basta substituir (E.20), (E.22) e (E.23). Para ρ o cálculo é bem direto, bastando substituir $h(r)$; portanto

$$\rho = 4k \left[\frac{1}{r^2}(B-1) + \frac{M}{r^3} + \frac{2}{L^2} \right]. \quad (\text{E.24})$$

Por outro lado, o cálculo de p nos leva a

$$p = \frac{4k}{3} \left[\frac{M}{r^3} - \frac{4}{L^2} - \frac{1}{B} \left(\frac{M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} - \frac{1}{L^2} \right) + \frac{1}{r^2}(B-1) + \frac{1}{B} \left(\frac{M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} - \frac{1}{L^2} \right) \right] \quad (\text{E.25})$$

logo,

$$p = \frac{4k}{3} \left[\frac{M}{r^3} - \frac{4}{L^2} + \frac{1}{r^2}(B-1) \right]. \quad (\text{E.26})$$

E.2.2 ρ e p - Buraco negro regular

Para $B(r)$ dado por

$$B^2(r) = 1 - \frac{2}{r} M e^{-\lambda^2/r}, \quad (\text{E.27})$$

B' tem a forma

$$B' = \frac{M}{Br^2} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right). \quad (\text{E.28})$$

Na obtenção B' foi utilizado a regra da cadeia e do produto da derivação. Além disso, os termos em comum foram postos em evidência. Executando o mesmo procedimento para obter B'' , temos

$$\begin{aligned} B'' = M \left[-\frac{B'}{(Br)^2} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right) - \frac{2}{Br^3} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right) \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{Br^4} e^{-\lambda^2/r} \left(\overbrace{1}^a - \frac{\lambda^2}{r} \right) + \overbrace{\frac{\lambda^2}{Br^4} e^{-\lambda^2/r}}^a \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

Uma vez que o fator que atende os parênteses multiplique os termos destacados, teremos três termos iguais. Executando a soma das parcelas iguais e colocando $e^{-\lambda^2/r}/r^2$ em evidência, obtemos

$$B'' = \frac{M}{r^2} e^{-\lambda^2/r} \left[\frac{\lambda^2}{Br^2} \left(4 - \frac{\lambda^2}{r} \right) + \underbrace{\frac{\lambda^2 B'}{B^2 r} - \frac{B'}{r^2}}_{\text{destacado}} - \frac{2}{Br} \right]. \quad (\text{E.30})$$

Substituindo (E.28) no fator destacado, obtemos

$$\frac{M}{B^3 r^2} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right)^2. \quad (\text{E.31})$$

Substituindo o termo destacado em (E.30) por (E.31), e fatorando $1/Br$, concluímos que B'' vale

$$B'' = \frac{M}{Br^3} e^{-\lambda^2/r} \left[\frac{\lambda^2}{r} \left(4 - \frac{\lambda^2}{r} \right) + \frac{M}{B^2 r} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right)^2 - 2 \right]. \quad (\text{E.32})$$

Substituindo (E.27), (E.28) e (E.32) em (E.13), temos

$$\begin{aligned} g(r) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{M}{r^3} e^{-\lambda^2/r} \left[\frac{\lambda^2}{r} \left(4 - \frac{\lambda^2}{r} \right) + \frac{M}{B^2 r} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right)^2 - 2 \right] + \frac{3M}{r^3} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right) \right. \\ \left. + \frac{M^2}{B^2 r^4} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right)^2 - \frac{M}{Br^3} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

Distribuindo o fator $M e^{-\lambda^2/r}/Br^3$ nos termos entre colchetes, obtemos

$$\frac{4M\lambda^2}{r^4} e^{-\lambda^2/r} - \frac{M\lambda^4}{r^5} e^{-\lambda^2/r} + \frac{M^2}{B^2 r^4} e^{-\lambda^2/r} \left(1 - \frac{\lambda^2}{r} \right)^2 - \frac{2M}{r^3} e^{-\lambda^2/r}. \quad (\text{E.34})$$

Fazendo o mesmo com $\frac{3M}{r^3}e^{-\lambda^2/r}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right)$, chegamos a

$$\frac{3M}{r^3}e^{-\lambda^2/r} - \frac{3M\lambda^2}{r^4}e^{-\lambda^2/r}. \quad (\text{E.35})$$

Substituindo (E.34) e (E.35) em (E.33), temos que

$$g(r) = \frac{1}{2} \left\{ \overbrace{\frac{4M\lambda^2}{r^4}e^{-\lambda^2/r}}^a - \frac{M\lambda^4}{r^5}e^{-\lambda^2/r} + \overbrace{\frac{M^2}{B^2r^4}e^{-\lambda^2/r}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right)^2}^b - \overbrace{\frac{2M}{r^3}e^{-\lambda^2/r}}^c + \overbrace{\frac{3M}{r^3}e^{-\lambda^2/r}}^c \right. \\ \left. - \overbrace{\frac{3M\lambda^2}{r^4}e^{-\lambda^2/r}}^a + \overbrace{\frac{M^2}{B^2r^4}e^{-\lambda^2/r}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right)^2}^b - \frac{M}{Br^3}e^{-\lambda^2/r}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right) \right\}. \quad (\text{E.36})$$

Unindo os termos destacados e colocando $Me^{-\lambda^2/r}/r^3$ em evidência, concluimos que

$$g(r) = \frac{M}{2r^3}e^{-\lambda^2/r} \left[\frac{2M}{rB^2}e^{-\lambda^2/r}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{r} - \frac{\lambda^4}{r^2} - \frac{1}{B}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right) + 1 \right]. \quad (\text{E.37})$$

Prosseguindo com os cálculos, $h(r)$ é obtido substituindo (E.27) e (E.28) em (E.14); portanto

$$h(r) = \frac{1}{r^2}(B - 1) + \frac{M}{r^3}e^{-\lambda^2/r}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right). \quad (\text{E.38})$$

E por fim, substituindo (E.27) e (E.28) em (E.15), concluimos que $l(r)$ vale

$$l(r) = \frac{1}{r^2}(B - 1) + \frac{M}{Br^3}e^{-\lambda^2/r}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right). \quad (\text{E.39})$$

Como é evidente, a densidade ρ é obtida simplesmente substituindo (E.38) em (E.8); portanto

$$\rho = 4k \left[\frac{1}{r^2}(B - 1) + \frac{M}{r^3}e^{-\lambda^2/r}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right) \right]. \quad (\text{E.40})$$

Por sua vez, para calcular p , substituímos (E.37) e (E.39) em (E.11), para obter

$$p = \frac{4k}{3} \left\{ \frac{M}{r^3}e^{-\lambda^2/r} \left[\frac{2M}{rB^2}e^{-\lambda^2/r}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{r} - \frac{\lambda^4}{r^2} - \underbrace{\frac{1}{B}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right)}_{+1} + 1 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2}(B - 1) + \frac{M}{Br^3}e^{-\lambda^2/r}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right) \right\} \quad (\text{E.41})$$

Perceba que se multiplicarmos $\frac{M}{r^3}e^{-\lambda^2/r}$ pelo fator em destaque, ele poderá se cancelar com o último termo de (E.40), logo

$$p = \frac{4k}{3} \left\{ \frac{M}{r^3}e^{-\lambda^2/r} \left[\frac{2M}{rB^2}e^{-\lambda^2/r}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{r} - \frac{\lambda^4}{r^2} + 1 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2}(B - 1) + \frac{M}{Br^3}e^{-\lambda^2/r}\left(1 - \frac{\lambda^2}{r}\right) \right\}. \quad (\text{E.42})$$