



UFPB

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Análise Fractal das Propriedades de Transporte Quântico no Regime Universal

Felipe Moreira de Oliveira

João Pessoa - PB

2023

Felipe Moreira de Oliveira

Análise Fractal das Propriedades de Transporte Quântico no Regime Universal

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Física**

Orientador: Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos.

João Pessoa - PB

2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

O48a Oliveira, Felipe Moreira de.

Análise fractal das propriedades de transporte quântico no regime universal / Felipe Moreira de Oliveira. - João Pessoa, 2023.

70 f. : il.

Orientação: Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Física - Sierpinski - Fractal. 2. Transporte quântico. 3. Condutância. 4. Ruído de disparo. 5. Regime universal. I. Ramos, Jorge Gabriel Gomes de Souza. II. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** do aluno **Felipe Moreira de Oliveira**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos vinte e sete dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e três, às 15:00, nas dependências do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Física da Matéria Condensada, de **Felipe Moreira de Oliveira**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Paulo Sérgio Rodrigues da Silva (UFPB) e João Medeiros de Araújo (UFRN). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada “*Análise Fractal das Propriedades de Transporte Quântico no Regime Universal*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **27 de fevereiro de 2023**.

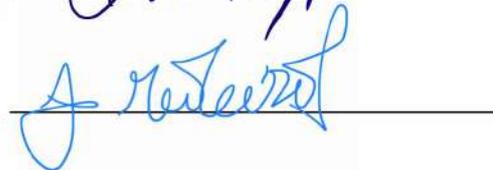
Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos
Orientador – UFPB



Prof. Dr. Paulo Sérgio Rodrigues da Silva
Membro Interno – UFPB



Prof. Dr. João Medeiros de Araújo
Membro Externo – UFRN



Dedico este trabalho aos meus avós.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a minha família, meus avós Francisca, Luiz, Fátima e Crésio que me educaram e sempre me motivaram a buscar o conhecimento. Agradeço também aos meus pais Nelsino e Kaline por todo incentivo e apoio. Agradeço ao meu orientador, o professor Jorge Gabriel por dedicar tantas horas do seu tempo à minha formação, pela competência e pela confiança depositada no meu trabalho. Agradeço a Louis Gustavo da Costa pelas contribuições que deu a este trabalho. Agradeço também aos professores do programa de pós graduação, em especial ao professor Fábio Dahia. Em nome de Maria e Thiago agradeço a todos os meus amigos pela sincera amizade. Agradeço também aos amigos da pós-graduação, em especial a Juliana, Isaiane, Rosa, Jamyle, Antônio, Jardel, Alex, Hugo e Matheus. Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

“Um fractal é uma maneira de ver o infinito.”
Benoit Mandelbrot

Resumo

A dimensionalidade de um sistema quântico influencia em inúmeras propriedades; Podemos observar diferentes comportamentos se um mesmo sistema é bidimensional ou tridimensional. Já existem na literatura inúmeros trabalhos que investigam essas propriedades em dimensões inteiras. No entanto, pouco se conhecesse sobre o comportamento desses sistemas em dimensões fracionárias. Esta dissertação tem o propósito de estudar o fenômeno de transporte quântico em uma região de espalhamento com dimensão fracionária no regime universal. Para atingir este objetivo, realizamos inúmeras simulações computacionais utilizando uma região de espalhamento no formato de um fractal denominado carpete de Sierpinski, que possui dimensão fractal 1,8928. Determinamos a configuração em que o sistema atinge o regime universal em cada um dos *ensembles* da teoria de matrizes aleatórias, no *ensemble* circular ortogonal, *ensemble* circular unitário e *ensemble* circular simplético. Finalmente, calculamos a dimensão fractal das curvas de condutância e da potência do ruído de disparo em cada *ensemble* através da técnica *box-counting*.

Palavras-chave: Fractal, Sierpinski, Transporte Quântico, Condutância, Ruído de Disparo, Regime Universal.

Abstract

The dimensionality of a quantum system influences many properties, we can observe different behaviors if the same system is two-dimensional or three-dimensional. There are already many papers in the literature that investigate these properties in integer dimensions, however little is known about the behavior of these systems in fractional dimensions. This master thesis has the purpose of studying the phenomenon of quantum transport in a scattering region with fractional dimension in the universal regime, to achieve this goal, we performed many computer simulations using a scattering region in the shape of a fractal called the Sierpinski carpet, which has a fractal dimension of 1.8928. We determined the configuration in which the system reaches the universal regime in each of the ensembles of random matrix theory, in the orthogonal circular ensemble, unitary circular ensemble and symplectic circular ensemble. Finally, we calculated the fractal dimension of the conductance and shot noise curves in each ensemble using the box-counting technique.

Key words: Fractal, Sierpinski, Quantum Transport, Conductance, Shot Noise, Universal Regime.

Lista de Figuras

1.1	Padrão de difração. Fonte: [1].	4
1.2	Padrão de difração devido a espalhamento em meio inhomogêneo. Fonte: [1].	5
1.3	Representação do regime de espalhamento simples e (a) espalhamentos múltiplos (b). Enquanto que no regime de espalhamento simples, a onda espalha apenas uma vez antes de emergir do obstáculo, no espalhamento múltiplo (b) a onda espalha inúmeras vezes antes de emergir. Fonte: [1]. . .	6
1.4	No quadro (a) temos o instantâneo de um padrão de difração gerado por um meio aleatório. Nos quadros (b) e (c) temos o resultado da média de <i>ensemble</i> que é possível ver o desaparecimento das manchas. Fonte: [1]. . .	6
1.5	Representação esquemática do efeito de Aharonov-Bohm.	7
1.6	Representação esquemática do experimento de Webb para medição da resistência elétrica em um anel de ouro. Este experimento ocorre no regime de múltiplos espalhamentos.	9
1.7	Estrutura bidimensional de rede quadrada, em azul temos a região de espalhamento, em vermelho a região de incidência de elétrons.	10
1.8	Condutância em função do fluxo magnético.	10
1.9	Magnetoresistência de um anel de ouro [2].	11
1.10	Representação esquemática do modelo de Bohr para o núcleo atômico As esferas representam os nêutrons e prótons. Fonte [3].	12
1.11	Representação das trajetórias de elétrons ao passar por uma região com campo magnético.	13
1.12	Representação de um bidimensional. Neste sistema de referência, a coordenada x representa a direção de propagação e a coordenada y representa a direção transversal de propagação.	15
1.13	Representação de uma partícula incidindo em uma barreira de potencial. A partícula é transmitida com uma probabilidade τ e refletida com uma probabilidade $1 - \tau$	18
1.14	Modelo tridimensional de um fio quântico semiconductor criado no <i>Kwant</i> . As esferas representam os sítios da rede. A região vermelha representa uma barreira de tunelamento e a região azul representa um supercondutor. [4]. .	19

2.1	Curva de Koch [5].	22
2.2	Observação da propriedade de autossimilaridade da curva de Koch. Nesta figura, é possível observar que o fractal pode ser subdividido em estruturas semelhantes a si mesmo.	23
2.3	Representação de um ponto localizado em um espaço bidimensional. São necessários duas informações para se localizar o ponto no plano.	24
2.4	Preparação de um segmento de reta de comprimento L subdividido em 4 partes de mesmo comprimento.	25
2.5	Representação de um objeto bidimensional subdividido em em quatro partes de mesma área.	26
2.6	Aplicação do método <i>box-counting</i> à curva de Koch. [6].	26
2.7	Processo de regressão linear para determinar a dimensão fractal [6].	27
2.8	Conjunto de Cantor representado até o nível de construção $k = 3$ [7].	28
2.9	Construção do triângulo de Sierpinski.	29
2.10	Construção do tapete de sierpinski.	30
2.11	Esponja de Menger [8].	32
2.12	Fractal gerado pelo processo de agregação limitada por difusão [9].	33
2.13	Linha costeira da Austrália [10].	34
2.14	Representação dos brônquios de um pulmão [11].	35
3.1	Região de espalhamento da estrutura no formato do tapete de Sierpinski de nível $m = 3$ em (a) e de nível $m = 4$ em (b). Os guias foram posicionados de forma simétrica em lados opostos.	36
3.2	Condutância em função da desordem e desvio padrão para o tapete de Sierpinski $m = 3$ sem campo magnético e sem acoplamento spin-órbita. <i>Ensemble</i> circular ortogonal ($\beta = 1$).	37
3.3	Condutância em função da desordem para o tapete de sierpinski $m = 3$ com fluxo magnético $\Phi = 5$ e sem acoplamento spin-órbita. <i>Ensemble</i> circular unitário ($\beta = 2$).	38
3.4	Condutância em função da desordem para o tapete de sierpinski $m = 3$ sem campo magnético e com acoplamento spin - órbita. <i>Ensemble</i> circular simplético ($\beta = 4$).	38
3.5	Condutância em função da desordem para o tapete de Sierpinski $m = 4$ sem fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita.	39
3.6	Condutância em função da desordem para o tapete de Sierpinski $m = 4$ com fluxo magnético $\Phi = 5$ e sem acoplamento spin-órbita.	39
3.7	Condutância em função da desordem para o tapete de Sierpinski $m = 4$ sem fluxo magnético e com acoplamento spin-órbita.	40

3.8	Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 3$ sem fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita ($\beta = 1$). Nesta simulação não aplicamos força de desordem ($W = 0$).	40
3.9	Determinação da dimensão fractal das curvas de condutância e potência ruído de disparo na ausência de desordem.	41
3.10	Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 4$ sem fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita ($\beta = 1$). Nesta simulação não aplicamos força de desordem ($W = 0$).	42
3.11	Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 3$ sem fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita ($\beta = 1$). Nesta simulação aplicamos uma força de desordem ($W = 0, 80$).	43
3.12	Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 4$ sem fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita ($\beta = 1$). Nesta simulação aplicamos uma força de desordem ($W = 0, 36$).	43
3.13	Determinação da dimensão fractal das curvas de condutância e potência do ruído de disparo no <i>ensemble</i> circular ortogonal ($\beta = 1$).	44
3.14	Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 3$ com fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita ($\beta = 2$). Nesta simulação aplicamos uma força de desordem ($W = 2, 13$).	45
3.15	Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski com fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita ($\beta = 2$) para o carpete de Sierpinski de nível $m = 4$. Nesta simulação aplicamos uma força de desordem ($W = 1, 56$).	45
3.16	Determinação da dimensão fractal das curvas de condutância e ruído de disparo no <i>ensemble</i> circular unitário ($\beta = 2$).	46
3.17	Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 3$ com fluxo magnético e com acoplamento spin-órbita ($\beta = 4$). Nesta simulação aplicamos uma força de desordem ($W = 3, 70$).	47
3.18	Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 4$ com fluxo magnético e com acoplamento spin-órbita ($\beta = 4$). Nesta simulação aplicamos uma força de desordem ($W = 2, 84$).	47

3.19	Determinação da dimensão fractal das curvas de condutância e potência do ruído de disparo no <i>ensemble</i> circular simplético ($\beta = 4$).	48
------	---	----

Lista de Tabelas

3.1 Dimensão fractal das curvas de condutância e potência do ruído de disparo no regime universal.	49
---	----

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Física mesoscópica	3
1.1 Efeitos de coerência em meios desordenados	3
1.2 Efeito de Aharonov-Bohm	7
1.3 Observação experimental do efeito de Aharonov-Bohm	8
1.4 Teoria de Matrizes aleatórias	11
1.4.1 Probabilidade de encontrar uma matriz particular	14
1.4.2 Modelo de Landauer-Büttiker para a condutância	14
1.4.3 Modelo de Landauer-Büttiker para o ruído de disparo	18
1.4.4 Simulações numéricas em transporte quântico	18
2 Teoria dos fractais	21
2.1 Definição	21
2.2 Propriedade da não diferenciabilidade	22
2.3 Autossimilaridade	22
2.4 Ausência de escala típica	23
2.5 Dimensão Fractal	23
2.5.1 Dimensão de similaridade	24
2.5.2 Método <i>Box-Counting</i>	26
2.6 Exemplos de fractais	27
2.6.1 Conjunto de Cantor	27
2.6.2 Triângulo de Sierpinski	29
2.6.3 Carpete de Sierpinski	30
2.6.4 Esponja de Menger	31
2.6.5 Processo de agregação limitada por difusão	32

2.6.6	Fractais Naturais	33
3	Resultados e discussões	36
3.1	Cálculo da condutância e do ruído de disparo	36
3.2	Dimensão fractal da curva de condutância e ruído e da potência do disparo sem desordem	40
3.3	Dimensão fractal da curva de condutância e da potência do ruído de disparo no regime universal	42
3.3.1	<i>Ensemble</i> circular ortogonal ($\beta = 1$)	42
3.3.2	<i>Ensemble</i> circular unitário ($\beta = 2$)	44
3.3.3	<i>Ensemble</i> circular simplético ($\beta = 4$)	46
	Conclusão	50

Introdução

Os fractais têm despertado bastante interesse dos cientistas nas últimas décadas. Existem na literatura inúmeros trabalhos realizados em uma ampla variedade de áreas do conhecimento que vão desde a matemática [12], passando por saúde [13–15], ecologia até aplicações na engenharia [16–18]. Podemos encontrar o padrão fractal em vários lugares na natureza. Por exemplo, na geometria de rios, na formação de recifes de corais ou na quebra de rigidez dielétrica de um material. Uma das principais características destes objetos é a de possuírem dimensão fracionária.

A dimensionalidade de um sistema quântico eletrônico impacta fortemente nas suas propriedades. Em sistemas unidimensionais ocorrem a formação do líquido de Luttinger [19], em sistemas bidimensionais observamos o efeito hall quântico [20]. No entanto, o comportamento dos elétrons em sistema com dimensão fracionária ainda é pouco explorado na literatura.

Temos o objetivo de estudar neste trabalho os padrões fractais que emergem do fenômeno de transporte quântico. Para isso, simulamos o fenômeno sobre uma estrutura mesoscópica cuja forma é a de um fractal. Em seguida, analisamos o comportamento de observáveis físicos de interesse. Focamos nosso estudo mais especificamente na condutividade e na potência do ruído de disparo.

A condutividade é um dos principais parâmetros que utilizamos para estudar fenômenos de transporte em materiais. Podemos associar a condutividade ao transporte de inúmeras grandezas, por exemplo, cargas [21, 22], phonons [23, 24], magnons [25, 26], dentre outras. Neste trabalho, focamos no transporte de carga, que é o transporte de elétrons em baixas temperaturas em um material.

No primeiro capítulo desta dissertação, iremos apresentar um estudo geral sobre a temática de física mesoscópica, tendo como ponto de partida os efeitos de coerência em meios desordenados. Também apresentamos tópicos relevantes para a área como o efeito de Aharonov-Bohm. Finalizamos este capítulo como uma breve descrição da teoria de matrizes aleatórias.

No segundo capítulo serão apresentados conceitos e definições sobre dimensionalidade de espaços e também aspectos teóricos referentes aos fractais. Apresentamos também a metodologia utilizada para realizar os cálculos da dimensão fractal. Finalizamos o capítulo exibindo alguns exemplos de fractais idealizados e fractais naturais manifestados na

natureza.

No quarto e último capítulo apresentamos nossos resultados obtidos ao longo do desenvolvimento da pesquisa e discutimos sobre os mesmos. Inicialmente identificamos o regime universal para cada uma das estruturas estudadas, em seguida realizamos os cálculos de dimensão fractal das curvas de ruído de disparo.

Capítulo 1

Física mesoscópica

A física mesoscópica dedica-se a descrever fenômenos que ocorrem em um regime intermediário entre o regime microscópico e macroscópico. Neste regime, assim como na física microscópica, o comportamento ondulatório da matéria é mais evidente do que na física macroscópica. Além disso, nota-se o surgimento de propriedades físicas peculiares de interesse científico.

Podemos estudar, sob a luz da física mesoscópica, dispositivos macroscópicos miniaturizados, por exemplo, um fio condutor, no qual a transição do regime macroscópico para o regime mesoscópico faz emergir fenômenos curiosos, como a quantização da condutância que não ocorre em dispositivos em grandes escalas de comprimento e energia [27].

Os estudos em física mesoscópicas iniciaram-se em meados da década de 1980 [27] através da realização de experimentos em pequenos dispositivos [28], concentrando-se no transporte semi-clássico de nanoestruturas. Neste capítulo, apresentaremos os conceitos fundamentais deste ramo do conhecimento a fim de possibilitar uma compreensão geral do tema.

1.1 Efeitos de coerência em meios desordenados

O fenômeno de propagação de ondas em meios desordenados é comum em muitos campos da física e já vem sendo estudado há um certo tempo. Um exemplo deste tipo de fenômeno é o da propagação da luz solar no interior de nuvens [29]. A luz oriunda do sol encontra muitos obstáculos antes de chegar aos nossos olhos, podendo ser refletida, refratada, espalhada ou absorvida e reemitida ao longo do caminho que ela percorre.

Na ausência de obstáculos, a luz se propaga em um regime balístico, isto significa que a luz se propaga em linha reta no meio sem sofrer espalhamento. A luz se propagando no interior de uma nuvem interage com gotículas de água, ocasionando alterações na direção de propagação do feixe, produzindo o fenômeno de espalhamento.

Em 1905, foi realizado um estudo que descreve a transferência de radiação eletromagnética através da atmosfera. Este estudo proposto por Schuster [30] foi realizado

através de uma abordagem puramente clássica, baseando-se na equação de Boltzman. Posteriormente o problema foi estendido para incluir os domínios de meios turbulentos, meteorologia e líquidos [1].

Até então, pensava-se que não era possível existir efeitos de coerência de fase em espalhamento de ondas em meios desordenados, porém, em 1980 percebeu-se que este efeito também pode acontecer neste tipo de meio. O interesse em torno desta questão está fortemente relacionado aos avanços na teoria de espalhamento quântico [31].

Ao incidir uma onda monocromática coerente em um minúsculo orifício circular, a luz proveniente desta abertura atinge um anteparo distante formando um padrão de difração como representado na figura 1.1. Nesta figura podemos observar anéis concêntricos, representando regiões de interferência construtiva intercaladas por regiões de interferências destrutiva.

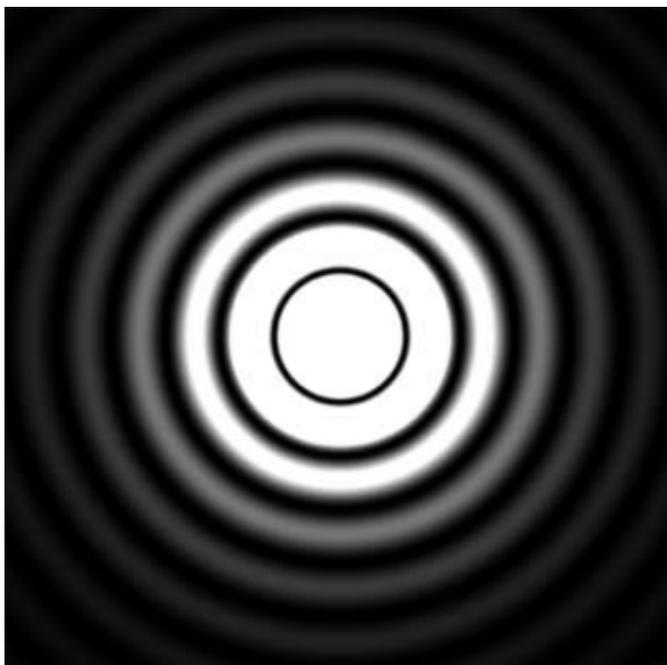


Figura 1.1: Padrão de difração. Fonte: [1].

O princípio de Huygens afirma que cada frente de onda atua como uma nova fonte, gerando novas ondas. Desta forma o orifício passa a ser uma nova fonte virtual de ondas. Baseando-se neste princípio, é possível determinar a intensidade em cada ponto do anteparo, considerando o caminho óptico percorrido por cada onda, e também podemos associar a cada anel um número inteiro.

Se, em vez de incidirmos luz coerente no orifício, incidirmos luz incoerente, o padrão de difração desaparece e o anteparo passa a ser iluminado de forma uniforme, não sendo mais possível observar os anéis. Outra forma de destruir o padrão de difração, mesmo que a luz incidente seja coerente, é mover rapidamente e aleatoriamente o obstáculo na direção do plano.

No primeiro caso, o padrão de difração desaparece em decorrência da distribuição aleatória dos comprimentos de onda e também pelo fato da diferença de fase se alterar a todo instante, pois se trata de uma luz incoerente. No segundo caso, ocorre uma média sobre um conjunto de fontes virtuais distribuídas espacialmente no plano de incidência.

Para estudar o padrão de difração gerado por uma fonte de luz coerente através de um obstáculo de configuração arbitrária, vamos considerar que este obstáculo é um material dielétrico com índice de refração que varia no espaço em uma escala comparável ao comprimento de onda da luz incidente.

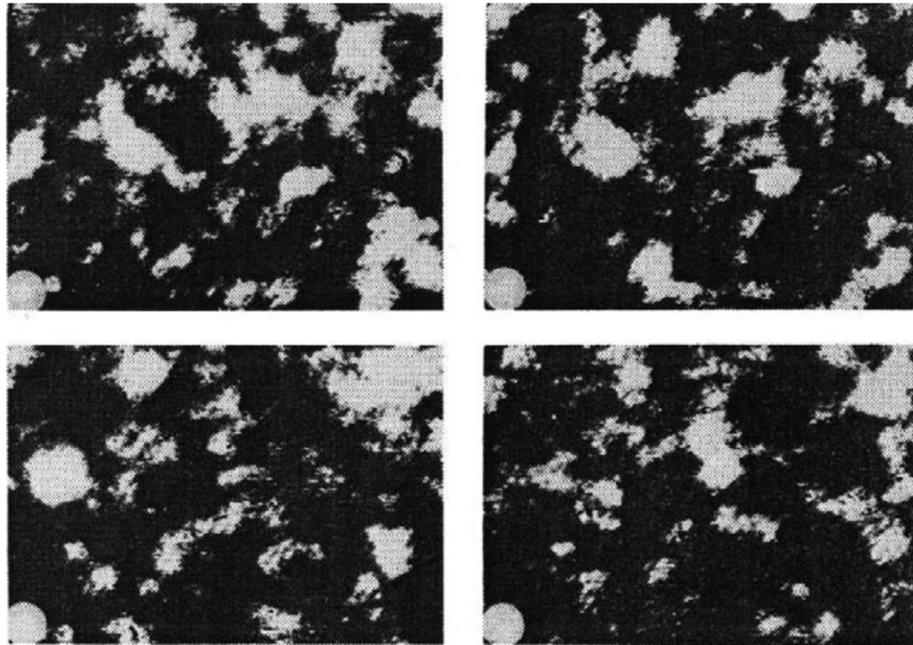


Figura 1.2: Padrão de difração devido a espalhamento em meio inhomogêneo. Fonte: [1].

Na figura 1.2, podemos observar o padrão de difração projetado em um anteparo distante, gerado por uma luz coerente ao passar pelo dielétrico. Como resultado, temos uma distribuição aleatória de regiões claras e regiões escuras, em inglês conhecido como *speckle pattern*.

Diferente do padrão de difração gerado por um obstáculo simétrico, no caso de meios aleatórios, é impossível identificar um padrão regular de difração. Portanto não podemos definir uma sequência determinística de números inteiros, tornando-se uma das principais características dos meios aleatórios.

O tipo de padrão de difração representado na figura 1.1 ocorre em um regime denominado espalhamento simples. Neste regime, a onda espalha uma única vez antes de emergir do obstáculo, de forma que podemos observar esta representação na figura 1.3a. Em contrapartida, o tipo de padrão de difração representado na figura 1.3b ocorre em um regime chamado de múltiplos espalhamentos. Neste regime, a onda espalha inúmeras vezes antes de emergir do obstáculo.

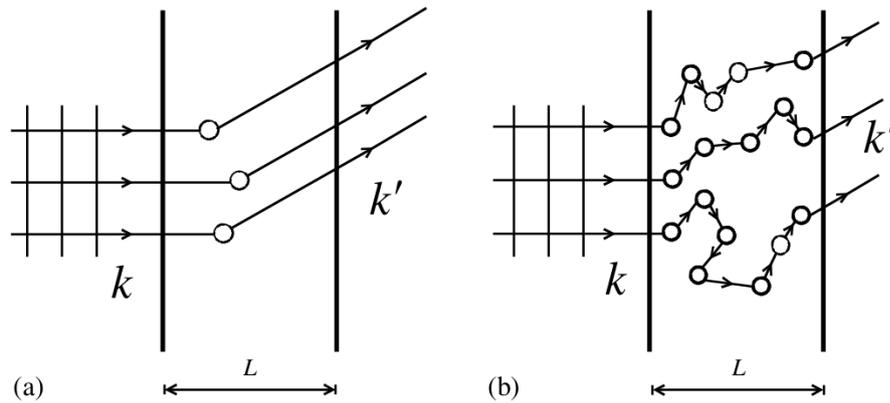


Figura 1.3: Representação do regime de espalhamento simples e (a) espalhamentos múltiplos (b). Enquanto que no regime de espalhamento simples, a onda espalha apenas uma vez antes de emergir do obstáculo, no espalhamento múltiplo (b) a onda espalha inúmeras vezes antes de emergir. Fonte: [1].

A intensidade em cada ponto da interface onde é projetado o padrão de difração devido ao espalhamento em meios inhomogêneos é calculada através da soma das amplitudes complexas das ondas que incidem em cada ponto desta interface. As fases associadas com cada amplitude são proporcionais ao comprimento do caminho percorrido por múltiplos espalhamentos dividido pelo comprimento de onda.

Sabendo que o comprimento dos caminhos percorridos por múltiplos espalhamentos são distribuídos aleatoriamente, espera-se que haja flutuações na fase com a média sendo zero. Com base nisso espera-se também que as manchas desapareçam. Esta é uma descrição do ponto de vista clássico. Na figura 1.4 podemos observar esse processo.

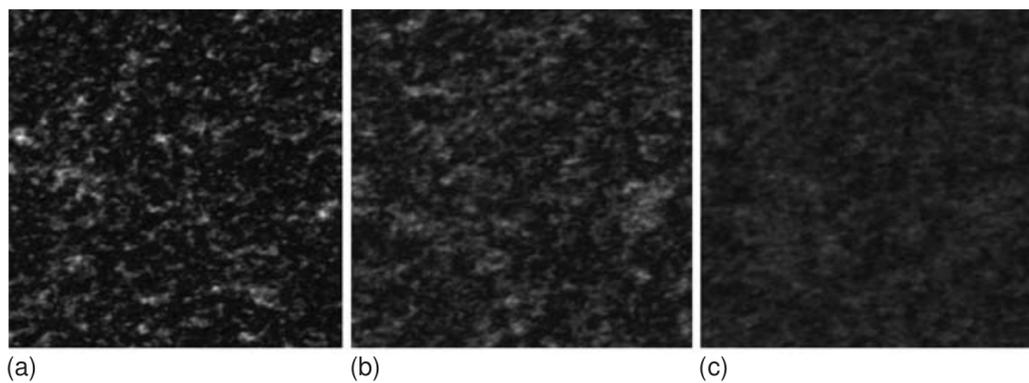


Figura 1.4: No quadro (a) temos o instantâneo de um padrão de difração gerado por um meio aleatório. Nos quadros (b) e (c) temos o resultado da média de *ensemble* que é possível ver o desaparecimento das manchas. Fonte: [1].

Após esta descrição puramente clássica, baseada no modelo ondulatório da luz, podemos, através de uma adaptação, descrever como ocorre a propagação de elétrons em metais. Neste caso, as impurezas presentes no metal representam os obstáculos e a

intensidade das ondas representa a condutividade do metal.

Por se tratar de elétrons, espera-se que a condução de eletricidade em metais possa ser descrita sob a ótica da física quântica. Contudo, Drude mostrou que propriedades de condução de eletricidade em metais podem ser descritas pela física clássica, criando um modelo que leva seu nome. Neste modelo, podemos observar fenômenos de interferência, entretanto, ao realizarmos uma média este fenômeno desaparece [32].

Tanto o modelo da interferência da luz em meios aleatórios como o modelo da condução de eletricidade de Drude, ambas descrições clássicas, sugerem que efeitos de coerência devem desaparecer em meios aleatórios no regime de múltiplos espalhamentos. Porém, a partir de 1980, uma série de experimentos comprovou que é possível observar efeitos de coerência neste tipo de meio [33]. Um destes experimentos foi o que demonstrou o efeito de Aharonov-Bohm.

1.2 Efeito de Aharonov-Bohm

Podemos idealizar o efeito de Aharonov-Bohm através da incidência de elétrons em um dispositivo de fenda dupla. Próximo às fendas, posiciona-se um solenoide infinito a fim de gerar um fluxo de campo magnético como esquematizado na figura 1.5. Este dispositivo irá gerar um padrão de interferência que poderá ser observado no anteparo.

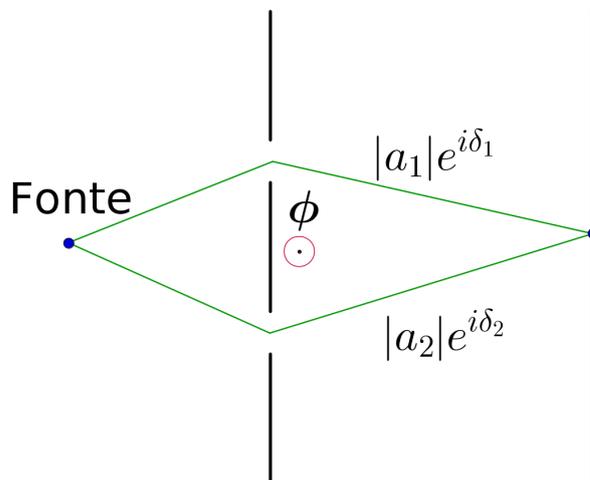


Figura 1.5: Representação esquemática do efeito de Aharonov-Bohm.

Consideremos um solenóide de raio R , n espiras por unidade de comprimento sendo percorrido por uma corrente elétrica I . De acordo com a lei de Ampère, o módulo do campo magnético gerado por este solenóide será dado por $B = \mu_0 n I$ no interior do solenóide (apontando na direção do eixo longitudinal) e $B = 0$ no exterior. Pelo fato do campo magnético ser nulo no exterior do solenóide, este campo não afeta a trajetória dos elétrons. Porém, o potencial vetor poderá afetar a fase destes elétrons, uma vez que possui um valor não nulo no exterior do solenóide.

De acordo com a teoria eletromagnética, uma partícula carregada com carga q viajando por um caminho \mathbf{c} em uma região com campo magnético nulo, mas com um potencial vetor \mathbf{A} não nulo, adquire uma mudança de fase δ dada por:

$$\delta = \delta^{(0)} - \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.1)$$

onde $\delta^{(0)}$ é a fase do elétron quando não há um solenóide no aparato.

Como representado na figura 1.5, as funções de onda dos elétrons que emergem em cada uma das fendas são dadas por $\Psi_1 = |a_1|e^{i\delta_1}$ e $\Psi_2 = |a_2|e^{i\delta_2}$. A intensidade final resultante da interferência pode ser calculada da seguinte maneira:

$$I(\phi) = |a_1 + a_2|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1 a_2| \cos(\delta_1 - \delta_2),$$

$$I(\phi) = I_1^2 + I_2^2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta_1 - \delta_2).$$

Definimos a diferença de fase entre as duas trajetórias como $\Delta(\phi) \equiv \delta_1 - \delta_2$. Esta diferença de fase é agora modulada pela presença do potencial vetor \mathbf{A} gerado pelo solenóide. A diferença de fase $\Delta(\phi)$ pode ser calculada utilizando a equação (1.1) da seguinte forma:

$$\Delta(\phi) = \delta_1 - \delta_2 = \delta_1^{(0)} - \delta_2^{(0)} + \frac{e}{\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Delta\delta^{(0)} + \frac{e\phi}{\hbar},$$

definindo $\phi_0 \equiv \frac{h}{e}$ como um quantum de fluxo magnético, temos que a diferença de fase entre as duas trajetórias é dada por:

$$\Delta(\phi) = \Delta\delta^{(0)} + 2\pi \frac{\phi}{\phi_0}. \quad (1.2)$$

A equação (1.2) representa o efeito de Aharonov-Bohm. Este efeito mostra que um solenóide colocado nas proximidades de um dispositivo de fenda dupla pode alterar a fase dos elétrons mesmo o campo magnético sendo nulo na região por onde os elétrons passam. O campo magnético afeta indiretamente o comportamento dos elétrons através do potencial vetor.

1.3 Observação experimental do efeito de Aharonov-Bohm

Em 1986, Richard A. Webb e seus colaboradores conseguiram observar o efeito de Aharonov-Bohm em uma série de experimentos [28]. Nestes experimentos, um feixe coerente de elétrons emitidos por um microscópio eletrônico foi dividido em dois antes de passar por um ímã toroidal onde o campo magnético foi confinado no interior do torus.

Os elétrons estarão sujeitos ao regime de múltiplos espalhamentos ao passar pelo interior do material.

Neste experimento, o campo magnético é nulo ao longo de toda a trajetória dos elétrons. Além disso, o experimento foi realizado no vácuo, logo, os elétrons não sofrem espalhamento antes de adentrar no torus. A fim de demonstrar o efeito de coerência de fase em metais, R. Webb e seu colaboradores mediram a resistência em um anel de ouro variando o fluxo de campo magnético na região central do anel. A figura 1.6 mostra esquematicamente como o experimento foi realizado.

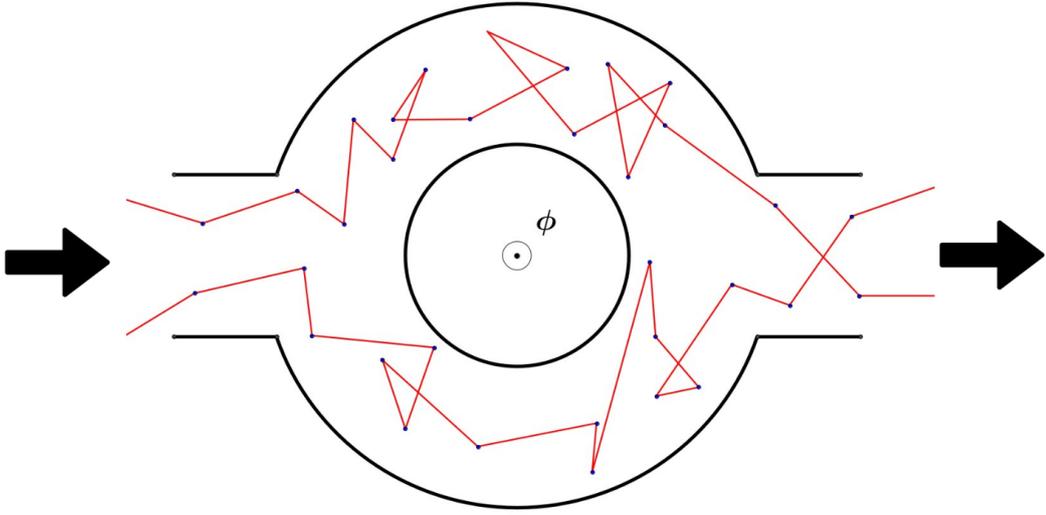


Figura 1.6: Representação esquemática do experimento de Webb para medição da resistência elétrica em um anel de ouro. Este experimento ocorre no regime de múltiplos espalhamentos.

A grandeza análoga à intensidade $I(\phi)$ para o caso de interferência de elétrons é a condutância $G(\phi)$ que varia com o fluxo magnético. Com base neste experimento, pode-se observar que a condutância varia de forma periódica com período igual ao quantum de fluxo $\phi_0 = h/e$. Matematicamente a condutância possui a seguinte representação:

$$G(\phi) = G_0 + \delta G \cos \left(\Delta\delta^0 + 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \right). \quad (1.3)$$

Através do pacote de simulação *Kwant* simulamos este sistema. Considerando um anel circular constituído por uma rede quadrada como mostrado na figura 1.7. Enquanto que os pontos azuis representam a região de espalhamento (*scattering region*), os pontos em vermelho representam a região de incidência dos elétrons (*lead*). Os elétrons entram por um lado, dividem-se em dois grupos e saem do lado oposto.

A modelagem deste problema pode ser realizado para diferentes tipos de rede, quadrada, triangular, hexagonal (uma rede hexagonal compõem-se de duas redes triangulares sobrepostas) e também para estruturas tridimensionais, como por exemplo um toróide. Por simplicidade, nesta simulação a análise é feita em uma estrutura bidimensional com

rede quadrada.

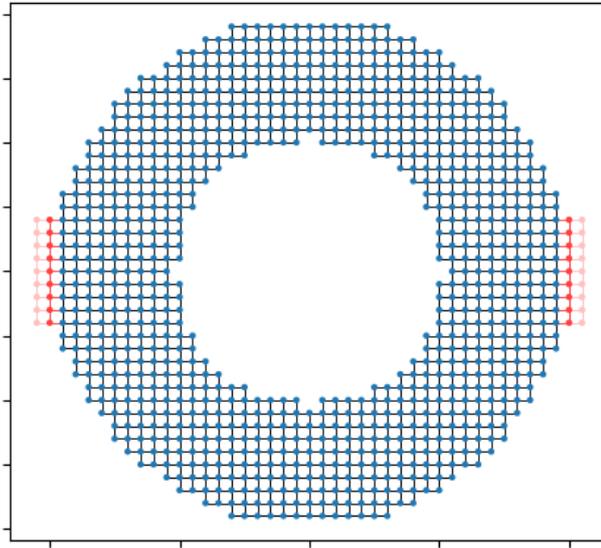


Figura 1.7: Estrutura bidimensional de rede quadrada, em azul temos a região de espalhamento, em vermelho a região de incidência de elétrons.

Através desta simulação foi calculada a condutância exibida na figura 1.8. A partir desse resultado, é possível ver que o comportamento periódico da condutância com relação ao fluxo de campo magnético concorda com a equação (1.3). Este efeito também mostra a existência de magnetoresistência, a qual resistência varia ao aplicar um campo magnético externo.

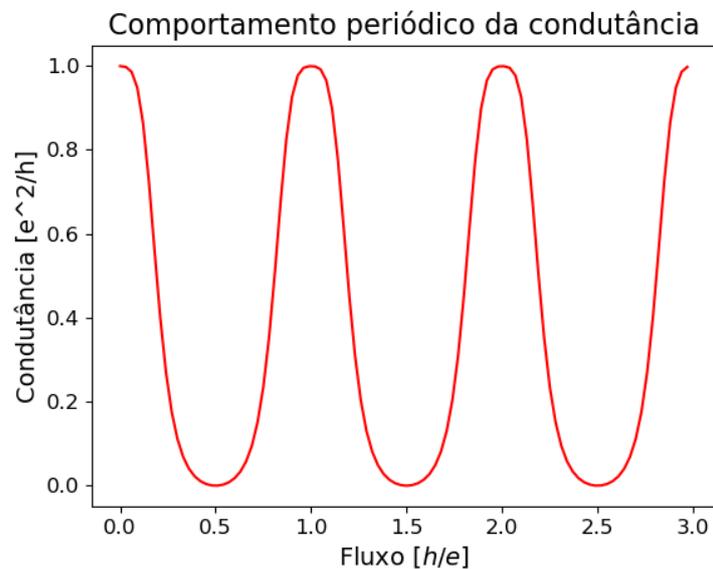


Figura 1.8: Condutância em função do fluxo magnético.

O resultado exposto na figura 1.9 mostra a magnetoresistência de um anel de ouro medida a uma temperatura $T = 0.01K$ por Webb *et al.* [2]. No gráfico é possível observar claramente o comportamento periódico. O período dessa oscilação de alta frequência é de $\Delta H = 0.00759T$.

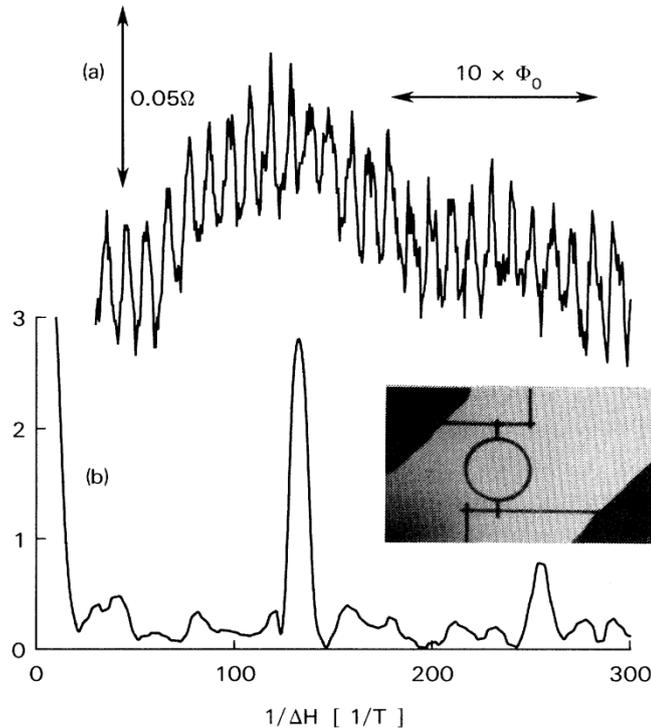


Figura 1.9: Magnetoresistência de um anel de ouro [2].

Este comportamento periódico da condutância resulta da existência de efeitos de coerência em um meio onde a desordem é suficiente para que os elétrons sejam submetidos ao regime de múltiplos espalhamentos. Com base nestes resultados, o argumento de que efeitos de coerência desaparecem em meios desordenados não se sustenta.

1.4 Teoria de Matrizes aleatórias

A teoria de matrizes aleatórias foi desenvolvida inicialmente por Wigner com o objetivo de estudar sistemas de interesse da física nuclear [3]. Esta teoria lida com a estatística de autovalores e autofunções de sistemas quânticos altamente complexos e de muitos corpos. Neste domínio, a teoria de matrizes aleatórias tem sido aplicada na descrição das propriedades de flutuação espectral de núcleos atômicos.

Embora tenha sido desenvolvida inicialmente no âmbito da física nuclear, a teoria de matrizes aleatórias se adequa naturalmente a estudos em matéria condensada no regime mesoscópico, uma vez que esta teoria fornece uma abordagem estatística para descrever sistemas complexos de muitos corpos. Esta teoria pode explicar por exemplo propriedades de transporte em sistemas quânticos desordenados.

O físico dinamarquês Niels Bohr contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento da física nuclear. Em seu famoso artigo de 1936 ele descreveu o núcleo atômico como um sistema composto de prótons e nêutrons interagindo por meio da força forte [34]. Em uma reação induzida por nêutrons pensava-se que a interação forte levava a um compartilhamento de energia aproximadamente igual para todos os constituintes do núcleo [3].

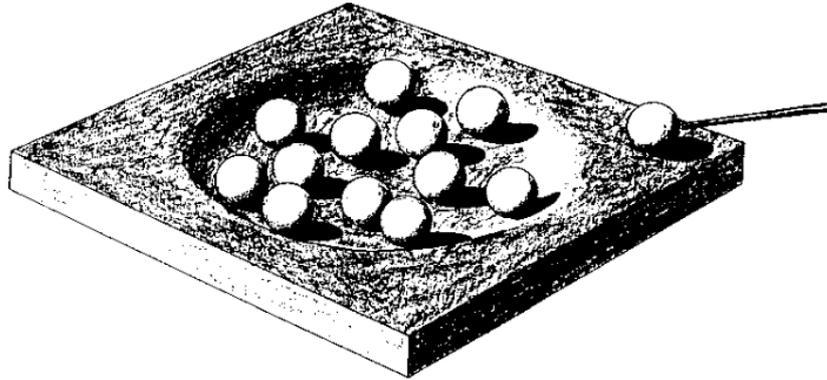


Figura 1.10: Representação esquemática do modelo de Bohr para o núcleo atômico. As esferas representam os nêutrons e prótons. Fonte [3].

Na figura 1.10 podemos ver a representação do modelo utilizado por Bohr para ilustrar sua ideia. O vale representa o potencial nuclear que mantém as partículas juntas, partículas estas representadas por pequenas esferas. Uma partícula ao atingir o núcleo (por exemplo, um nêutron) com uma determinada energia cinética desencadeia uma série de colisões entre as partículas que constituem o núcleo.

Wigner estudou essas colisões do ponto de vista estatístico dos espectros nucleares revelados através de experimentos de espalhamento de nêutrons. Esta análise estatística da espectroscopia nuclear pode parecer estranha, uma vez que o espectro é determinado pelo hamiltoniano, aparentemente deixando nenhum espaço para conceitos estatísticos.

Na mecânica estatística convencional, consideramos um conjunto de sistemas idênticos diferindo apenas pelas condições iniciais, este conjunto é comumente chamado de *ensemble*. Todos estes sistemas são governados pelo mesmo hamiltoniano e é possível realizar a conexão com a termodinâmica através de médias de *ensemble*. Wigner abordou o problema de maneira diferente, ele considerou o conjunto desses sistemas governados por diferentes hamiltonianos com algumas propriedades de simetria em comum [3].

Através desta nova abordagem, é possível explorar características gerais que são comuns a todos os constituintes do conjunto determinados por simetrias fundamentais. Ao analisar sistemas sob a ótica da teoria de matrizes aleatória os detalhes atômicos se tornam irrelevantes, as propriedades dependem apenas da dimensionalidade do sistema e de simetrias fundamentais.

De acordo com a teoria de matrizes aleatórias, existem três *ensembles*, cada um

sendo representado pelo parâmetro β :

- *Ensemble* circular ortogonal ($\beta = 1$);
- *Ensemble* circular unitário ($\beta = 2$);
- *Ensemble* circular simplético ($\beta = 4$).

O *ensemble* circular ortogonal ($\beta = 1$) possui a propriedade de ser invariante sob reversão temporal, neste caso, nenhum campo magnético é aplicado ($B = 0$) e a interação spin - órbita é negligenciada. A matriz do hamiltoniano deve ser real e simétrica. Sistemas invariantes sob reversão temporal, com spin inteiro e simetria rotacional quebrada também pertencem a este *ensemble*. Matematicamente podemos representar estas propriedades como:

$$H_{mn} = H_{nm} = H_{mn}^*. \quad (1.4)$$

O *ensemble* circular unitário ($\beta = 2$) agrupa os sistemas cuja simetria de reversão temporal foi quebrada por um campo magnético \mathbf{B} diferente de zero. Um exemplo deste tipo de situação é o movimento de elétrons em um campo magnético externo. O hamiltoniano desse sistema deve ser uma matriz hermitiana.

$$H_{mn} = [H^\dagger]_{mn}. \quad (1.5)$$

A figura 1.11 mostra a trajetória de elétrons se deslocando em uma região com campo magnético. Quando o elétron se desloca da esquerda para a direita, a trajetória é desviada para baixo. Quando o elétron se desloca da direita para a esquerda a trajetória é desviada para cima e isso representa uma quebra de simetria por inversão temporal.

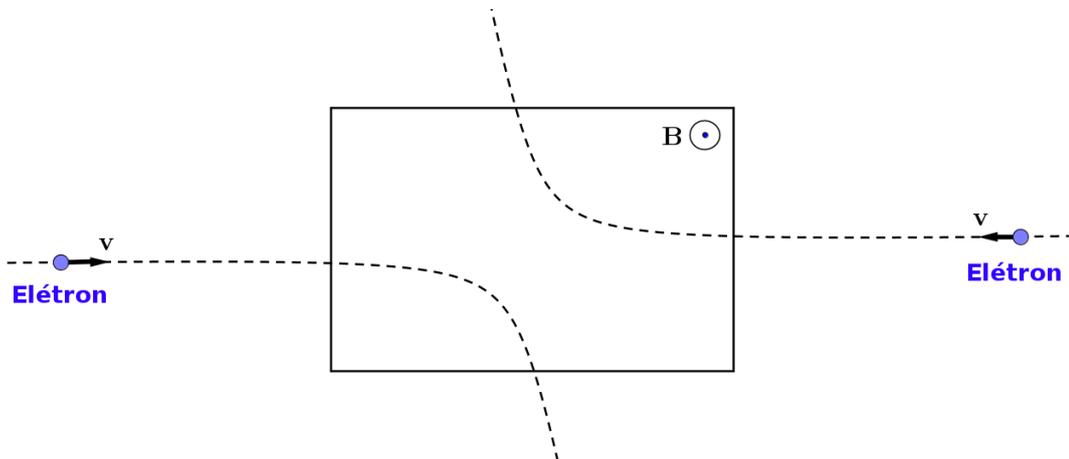


Figura 1.11: Representação das trajetórias de elétrons ao passar por uma região com campo magnético.

Quando a simetria de rotação de spin é quebrada e a simetria de reversão temporal é preservada, estamos nos referindo ao ensemble circular simplético, neste ensemble ocorre a quebra de simetria rotacional. O hamiltoniano pode ser escrito em termo de *quaternions* ou das matrizes de Pauli σ_γ com $\gamma = 1, 2, 3$. O hamiltoniano possui a seguinte forma:

$$H_{nm}^{(0)} - i \sum_{\gamma=1}^3 H_{nm}^{(\gamma)} \sigma_\gamma. \quad (1.6)$$

1.4.1 Probabilidade de encontrar uma matriz particular

Nos três *ensembles* a probabilidade de encontrar uma matriz particular é dada pela função peso $P_{N\beta}(H)$ multiplicado pelos elementos independentes da matriz. A função peso $P_{N\beta}(H)$ é invariante sob transformações ortogonais, unitárias e simpléticas para $\beta = 1$, $\beta = 2$ e $\beta = 4$, respectivamente. O índice β especifica completamente o *ensemble*.

Poderíamos definir a função peso como $P_{N\beta} = 1$, isto seria consistente com os requisitos de simetria, porém levaria a integrais divergentes. Por esta razão, as funções peso $P_{N\beta}$ associadas aos *ensembles* considerados por Wigner são escolhidas para terem forma gaussiana. Podemos representar matematicamente como:

$$P_{N\beta} \propto \exp\left(-\frac{\beta N}{\lambda^2} \text{Tr} H^2\right). \quad (1.7)$$

1.4.2 Modelo de Landauer-Büttiker para a condutância

De acordo com o modelo de Landauer-Büttiker, o sistema é dividido em duas partes, a região de espalhamento e os canais propagantes. Nesta abordagem, impõem-se um finito número de modos transversais nos guias de onda. Consideramos que os elétrons presentes nas regiões dos canais propagantes satisfazem à equação de Schrödinger independente do tempo definida como

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (1.8)$$

em que $V(\mathbf{r})$ representa o potencial de confinamento no interior do guia de onda e E denota a energia da partícula incidente.

Por se tratar de um sistema bidimensional, nosso vetor posição \mathbf{r} é definido como $\mathbf{r} = (x, y)$. A coordenada x refere-se à direção de propagação da onda e y refere-se à direção transversal de propagação. Com base na figura 1.12, a direção de propagação da onda é da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, a depender da diferença de potencial entre os guias.

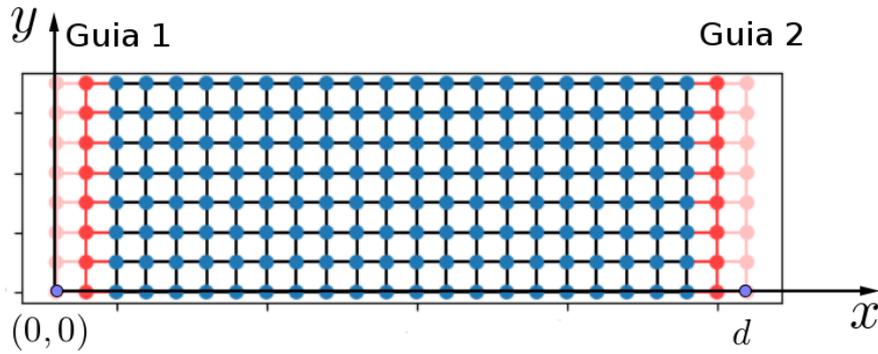


Figura 1.12: Representação de um bidimensional. Neste sistema de referência, a coordenada x representa a direção de propagação e a coordenada y representa a direção transversal de propagação.

Dentro do guia de onda o potencial $V(\mathbf{r})$ é zero. Neste caso, podemos reescrever a equação (1.8) como

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) = E\psi(x, y); \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (1.9)$$

Pelo método da separação de variáveis, podemos escrever a solução geral da equação (1.9) como

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (1.10)$$

Para encontrar a equação $X(x)$, precisamos resolver a equação

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2 X(x) \quad (1.11)$$

cuja solução geral é dada por

$$X(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x) \quad (1.12)$$

A função $X(x)$ deve ser nula nas paredes dos guias de onda ($X(0) = X(d) = 0$). Podemos utilizar isto como condições de contorno. A solução se assemelha com a solução do poço quadrado infinito.

$$X(0) = A \sin(0) + B \cos(0) = 0,$$

$$X(d) = A \sin(k_x d) + B \cos(k_x d) = 0.$$

Para satisfazer as equações acima, fazemos $B = 0$ e $k_x d = n\pi$, com n sendo números inteiros. Por fim, podemos expressar a solução $X(x)$ como

$$X(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{d}x\right). \quad (1.13)$$

A solução em y será a de uma partícula livre, pois não há potencial espalhador dentro do guia de onda. Então, podemos escrever a solução em y como

$$Y(y) = Ce^{\pm ik_y y} \quad (1.14)$$

Por fim, a solução (1.10) pode ser reescrita como a combinação da solução em x e da solução em y :

$$\psi(x, y) = A\sqrt{\frac{2}{d}}\text{sen}(k_x x)e^{\pm ik_y y}, \quad (1.15)$$

em que A é a constante de normalização. A energia na direção longitudinal E_x e na direção E_y são dadas por

$$E_x = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}; \quad E_y = \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m}. \quad (1.16)$$

A energia de Fermi E_F do sistema é composta pela soma da energia E_x referente a componente x e a energia E_y referente a componente y . Com base nisso ($E_F = E_x + E_y$), caso $E_x < E_F$, então, a energia $E_y > 0$, necessariamente será positiva. Isto impõe que a solução da equação de Schrödinger (equação (1.8)) seja uma onda propagante livre, na qual denominamos de canal aberto. Caso $E_x > E_F$, a solução representará um decaimento exponencial, na qual chamamos de canal fechado.

Nesta abordagem, o número quântico n possui um valor máximo N_1 referente ao guia 1 e N_2 referente ao guia 2. A solução da equação para o sistema é uma combinação linear das soluções representadas na equação (1.15).

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{N_1} (a_n^{(1)}\psi_n^{-,1} + b_n^{(1)}\psi_n^{+,1}), \quad (1.17)$$

em que ψ são as funções de ondas na forma da equação (1.15) e os coeficientes a_n e b_n representam as amplitudes das funções de onda. Os sinais (+) e (-) representam os canais propagantes para a esquerda e direita, respectivamente.

Podemos organizar os valores das amplitudes de entrada e saída em forma de matrizes colunas. A matriz $\mathbf{A}^{(g)}$ representa as amplitudes de entrada e a matriz $\mathbf{B}^{(g)}$ representa as matrizes de saída para cada guia de onda, ambas representadas na equação (1.18).

$$\mathbf{A}^{(g)} \equiv \begin{bmatrix} a_1^{(g)} \\ a_2^{(g)} \\ \vdots \\ a_{N_g^{(g)}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^{(g)} \equiv \begin{bmatrix} b_1^{(g)} \\ b_2^{(g)} \\ \vdots \\ b_{N_g^{(g)}} \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

em que g representa o índice do guia. Estamos considerando 2 guias de ondas, logo,

$g = 1, 2$. Vamos definir agora as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} que contém todos as amplitudes de entrada e saída do sistema.

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(2)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(1)} \\ \mathbf{B}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

A partir destas duas matrizes representadas na equação (1.19), podemos definir a matriz de espalhamento. A matriz de espalhamento \mathbf{S} é uma matriz que faz a conexão entre a matriz de amplitudes de entrada \mathbf{A} e a matriz de amplitudes de saída \mathbf{B} , desta maneira, podemos escrever

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{A}. \quad (1.20)$$

A matriz de espalhamento \mathbf{S} usualmente é decomposta em quatro blocos que são interpretados como matriz de reflexão \mathbf{r} , matriz de transmissão \mathbf{t} . Os outros dois blocos referem-se ao complexo conjugado das matrizes \mathbf{r} e \mathbf{t} . Desta forma, podemos escrever \mathbf{S} como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{t}' \\ \mathbf{t} & \mathbf{r}' \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

O princípio da conservação do fluxo de carga requer que

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}. \quad (1.22)$$

Substituindo (1.20) em (1.22)

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = (\mathbf{S}\mathbf{A})^\dagger \mathbf{S}\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S}\mathbf{A}. \quad (1.23)$$

Isto implica que

$$\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \mathbf{1}. \quad (1.24)$$

Os autovalores de $\mathbf{t}\mathbf{t}'$ representam as probabilidades de tunelamento do guia 1 para o guia 2. A probabilidade de transmissão T é dada por $T = \text{Tr}(\mathbf{t}\mathbf{t}')$. Em termos das matrizes de bloco, a condutância pode ser calculada através da fórmula

$$G = \frac{G_0}{N} \text{Tr}(\mathbf{t}\mathbf{t}'), \quad (1.25)$$

em que $G_0 = 2e^2/\hbar$.

Uma vez fixada a matriz de espalhamento \mathbf{S} , obtém-se imediatamente o valor da condutância através da fórmula (1.25).

1.4.3 Modelo de Landauer-Büttiker para o ruído de disparo

Vamos considerar uma corrente de elétrons incidindo em uma barreira como está representado na figura 1.13. Há uma probabilidade τ de ocorrer a transmissão e a probabilidade $1 - \tau$ de não ocorrer. Quando a probabilidade de transmissão é pequena a intensidade do ruído de disparo é definida por

$$S_{\text{ruído}} = 2e|\langle I \rangle|, \quad (1.26)$$

em que e é a carga do elétrons e I a média da corrente [35].

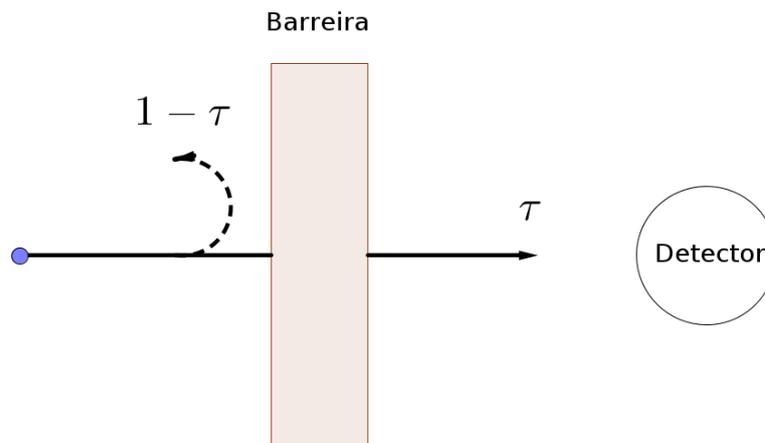


Figura 1.13: Representação de uma partícula incidindo em uma barreira de potencial. A partícula é transmitida com uma probabilidade τ e refletida com uma probabilidade $1 - \tau$.

Utilizando o formalismo Landauer-Büttiker descrito na seção anterior, podemos determinar a potência do ruído de disparo através da matriz de espalhamento \mathbf{S} . A partir do momento em que temos a matriz de espalhamento \mathbf{S} podemos obter diretamente matrizes de bloco \mathbf{t} e \mathbf{r} . E então, podemos definir a potência do ruído de disparo em termos das matrizes de bloco como

$$S_{\text{ruído}} = \frac{e^2}{\pi\hbar} \text{Tr}(\mathbf{r}^\dagger \mathbf{r} \mathbf{t}^\dagger \mathbf{t}). \quad (1.27)$$

1.4.4 Simulações numéricas em transporte quântico

A resolução de problemas de espalhamento é uma das tarefas mais realizadas em matéria condensada. A solução deste tipo de problema nos fornece a condutância e várias outras propriedades de transporte. A partir da introdução dos métodos numéricos para a resolução deste tipo de problema foi possível estudar estruturas maiores e de geometrias mais complexas.

O uso de simulações numéricas para resolver problemas de espalhamento remonta aos primórdios da física mesoscópica [36, 37]. O método mais popular para este tipo de

problema era o chamado algoritmo recursivo da função de Green (RGF - *Recursive Green's Functions*) [38]. Vários grupos criaram suas próprias implementações que serviram para verificar os resultados obtidos de forma analítica e também para estender o estudo para estruturas mais complexas.

O *Kwant* é um pacote disponível para a linguagem de programação Python que realiza cálculos numéricos de transporte quântico. No idioma polonês, a palavra *Kwant* significa *quantum* que faz alusão a física quântica. Este pacote possui uma sintaxe acessível por ter sido baseado na linguagem de programação Python. Com ele é possível simular qualquer sistema de uma, duas ou três dimensões que possam ser descritos pelo modelo *tight-binding*.

O pacote *Kwant* oferece suporte para o cálculo de várias propriedades de transporte, por exemplo, condutância, potência do ruído de disparo, matriz de espalhamento, densidade de estados, função de onda, relação de dispersão, dentre outras. Na figura 1.14, podemos observar um exemplo de um modelo tridimensional de um fio quântico gerado no *Kwant*.

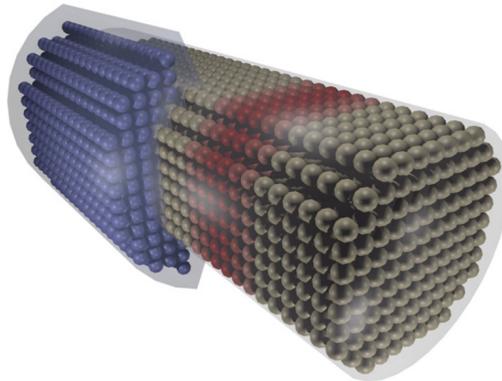


Figura 1.14: Modelo tridimensional de um fio quântico semiconductor criado no *Kwant*. As esferas representam os sítios da rede. A região vermelha representa uma barreira de tunelamento e a região azul representa um supercondutor. [4].

O algoritmo padrão que o *Kwant* utiliza para determinar as propriedades de transporte não se baseia no método RGF. Em vez disso, utiliza a abordagem das funções de onda. Esta abordagem é mais simples que o algoritmo RGF, além disso, ambas as abordagens são matematicamente equivalentes devido à relação de Fisher-Lee [39]. Através da abordagem das funções de onda, determina-se a matriz de espalhamento \mathbf{S} para em seguida determinar as propriedades de transporte.

O método *kwant.smatrix* realiza todos os cálculos numéricos e retorna a matriz de espalhamento \mathbf{S} estruturada na forma da matriz representada na equação (1.21). Este método recebe como parâmetro as características geométricas do sistema, a energia de Fermi, além de outros parâmetros opcionais a depender do que se esteja estudando. Podemos obter as matrizes bloco \mathbf{t} e \mathbf{r} através da função *submatrix* e calcular diretamente

a condutância através da fórmula expressa na equação (1.25).

Existe uma forma mais otimizada de obter os observáveis físicos recebendo como parâmetro a matriz de espalhamento \mathbf{S} . Há funções específicas para determinar a condutância, potência do ruído de disparo, densidade de estados, dentre outras.

Capítulo 2

Teoria dos fractais

Por muitos séculos perdurou a ideia de que a geometria euclidiana era a que melhor descrevia o mundo em que vivemos. Além disso, a matemática era quase que exclusivamente associada a conjuntos e funções cujos métodos convencionais do cálculo diferencial e integral podiam ser aplicados. Funções pouco regulares eram classificadas como “patológicas”, consideradas apenas como curiosidades individuais [40].

Esta visão passou a mudar quando percebeu-se que inúmeros fenômenos da natureza são melhores descritos por funções e conjuntos irregulares. Uma situação em que essa irregularidade se manifesta é na zona litorânea de um país ou continente, uma vez que a linha costeira (fronteira natural que separa a terra e a água) possui um padrão bastante irregular. Denominamos de geometria fractal o ramo da matemática que se dedica a estudar estas estruturas.

Neste capítulo, serão expostas definições, propriedades e métodos de construção de fractais bem como cálculo de dimensão. Além disso, será mostrado exemplos de fractais idealizados e também fractais encontrados na natureza.

2.1 Definição

Para definir os fractais de maneira rigorosa, podemos fazer uso do conceito de dimensão. Sobre o conceito de dimensão deve-se destacar que há várias definições e que cada definição pode produzir números distintos para um mesmo objeto. Iremos abordar duas definições, a definição de dimensão topológica (d_T) e a dimensão de *Hausdorff* (d_H). Dentre estas duas definições, a dimensão topológica é a mais intuitiva e sempre possui valores inteiros. A dimensão de *Hausdorff* não necessariamente será inteira.

Em se tratando de dimensão topológica, um conjunto vazio (\emptyset) deve ter dimensão (-1) . A dimensão de outros espaços é definida como uma unidade maior que a dimensão do objeto que poderia ser usado para separar completamente qualquer parte deste espaço. Uma linha tem dimensão 1 e pode ser separada em duas partes por apenas um ponto que

possui dimensão 0. Já para separar a parte de um plano é preciso apenas de uma reta de dimensão 1, logo o plano tem dimensão 2.

O termo ‘fractal’ criado por Benoit Mandelbrot [41] advém do latim *fractus* que significa quebrado ou fragmentado. Matematicamente, um fractal é um conjunto no qual a dimensão de *Hausdorff* excede a dimensão topológica. Além disso, sempre que a dimensão de *Hausdorff* for um valor fracionário o conjunto será considerado um fractal.

2.2 Propriedade da não diferenciabilidade

Em 1872, Karl Weierstrass encontrou uma função com a propriedade de ser contínua em todo o seu domínio, porém não diferenciável em nenhuma parte. Esta função ficou bem conhecida por seu comportamento “patológico” e pode ser expressa como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

em que a é um número real contido no intervalo $[0, 1]$, b é um número natural ímpar e a condição $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ deve ser satisfeita. Esta série converge uniformemente e define uma função contínua mas não diferenciável em nenhuma parte.

Em 1904, Von Koch definiu de forma geométrica uma curva que também tem a propriedade de ser contínua em todo o domínio mas não diferenciável [42]. Esta curva é hoje conhecida como curva de Koch e está representada na figura 2.1. Há também a versão fechada dessa curva, conhecida como floco de neve de Koch ou estrela de Koch.

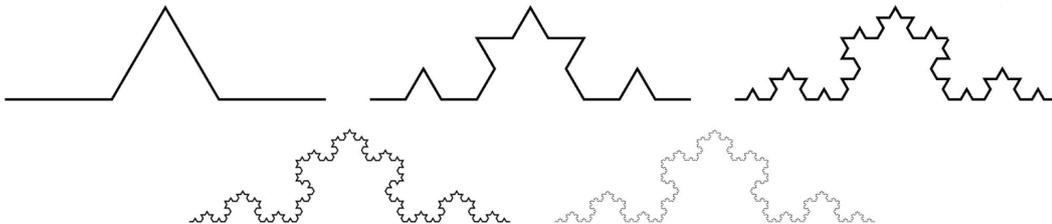


Figura 2.1: Curva de Koch [5].

Também podemos observar esta propriedade na curva da trajetória de uma partícula browniana. Por se tratar de uma difusão, o movimento browniano é um processo contínuo.

2.3 Autossimilaridade

Em matemática, um objeto é considerado autossimilar quando sua forma é exatamente ou aproximadamente semelhante a uma parte de si mesmo [41]. Por esta razão, um fractal pode ser gerado através da junção de cópias de si próprio.

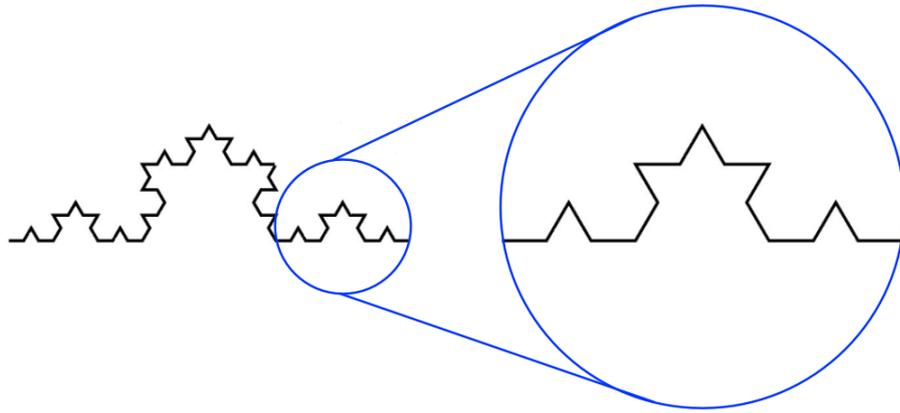


Figura 2.2: Observação da propriedade de autossimilaridade da curva de Koch. Nesta figura, é possível observar que o fractal pode ser subdividido em estruturas semelhantes a si mesmo.

2.4 Ausência de escala típica

Ao descrever objetos, estamos acostumados com a ideia de escala típica. Por exemplo, quando descrevemos a altura de um edifício utilizamos a escala de metros, enquanto ao descrever uma caneta, utilizamos a escala de centímetro. As distâncias atômicas são medidas em ângström e as distâncias interestelares são medidas em anos-luz. Os objetos fractais não possuem escala típica de medição, ou seja, é possível encontrar medidas de seus componentes em todas as escalas.

Em 1961, o matemático Lewis Fry Richardson percebeu algo curioso ao tentar medir o comprimento das fronteiras de um país: os valores mudavam de acordo com a escala adotada. Atualmente este comportamento é conhecido por efeito Richardson. Ele também encontrou uma relação matemática que descreve o comportamento dessas medições. Esta relação é definida como

$$L(\epsilon) = F\epsilon^{1-D}, \quad (2.2)$$

em que F é um valor constante e positivo, ϵ está associado a escala adotada. Para Richardson, a constante D representava a característica geométrica da fronteira, hoje conhecida como dimensão fractal que será abordada na próxima seção.

2.5 Dimensão Fractal

De forma intuitiva, o conceito de dimensão está associado ao número de informações para se localizar um ponto em um determinado espaço. Por exemplo, para determinar a posição de um ponto no plano cartesiano, precisamos de duas informações, uma associada ao eixo das abscissas e outra associada ao eixo das ordenadas. Na figura 2.3, podemos

ver esta ideia ilustrada.

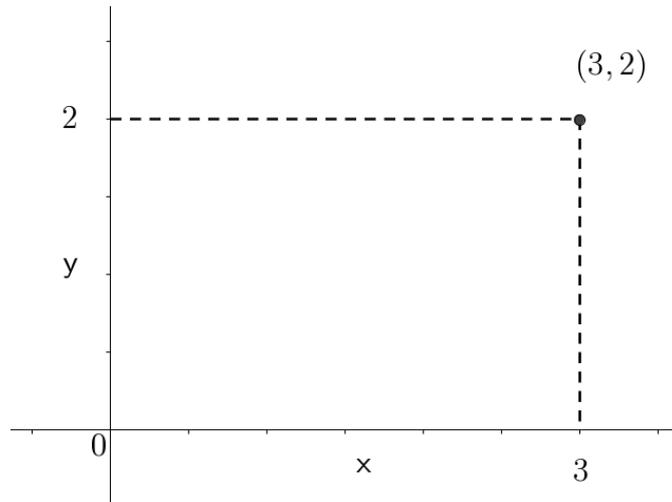


Figura 2.3: Representação de um ponto localizado em um espaço bidimensional. São necessários duas informações para se localizar o ponto no plano.

2.5.1 Dimensão de similaridade

A noção de dimensão de similaridade pode ser utilizada para calcular a dimensão fractal de objetos fractais ou não fractais, desde que este objeto possua a propriedade de autosimilaridade descrita na seção 3.3. Baseado na ideia de autosimilaridade, a dimensão está relacionada com a forma como o número M de objetos que compõem o conjunto varia com a mudança da dimensão linear L . Considerando que uma pequena parte do conjunto possui dimensão γL , o número de elementos $M(\gamma L)$ do conjunto é modificado pelo fator γ^d :

$$M(\gamma L) = \gamma^d M(L). \quad (2.3)$$

Um segmento de reta como o representado na figura 2.4 é um objeto autossimilar. Neste exemplo específico, o segmento foi subdividido em quatro partes e cada uma dessas partes é semelhante ao segmento original, exceto pelo comprimento que vale $L/4$, logo temos que $M(L) = 4$, $M(\gamma L) = 1$ e o fator $\gamma = 1/4$. Com o auxílio da equação (2.3), podemos calcular a dimensão da seguinte forma:

$$M(\gamma L) = \gamma^d M(L),$$

$$1 = \left(\frac{1}{4}\right)^d 4,$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^d,$$

$$d = 1.$$

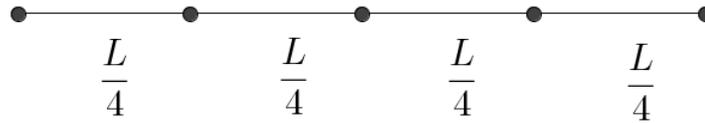


Figura 2.4: Representação de um segmento de reta de comprimento L subdividido em 4 partes de mesmo comprimento.

Um quadrado também é um objeto autossimilar, pois pode ser formado por quatro quadrados menores similares ao quadrado original como pode ser visto na figura 2.5. Cada parte do quadrado resultante da subdivisão possui dimensão linear $L/2$. Neste caso temos que $M(L) = 4$ e $M(\gamma L) = 1$. O tamanho linear de uma pequena parte vale $\gamma L = L/2$. Com o auxílio da equação (2.3) podemos calcular a dimensão:

$$M(\gamma L) = \gamma^d M(L),$$

$$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^d 4,$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^d,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^d,$$

$$d = 2.$$

Logo, mostramos que este quadrado é um objeto bidimensional.

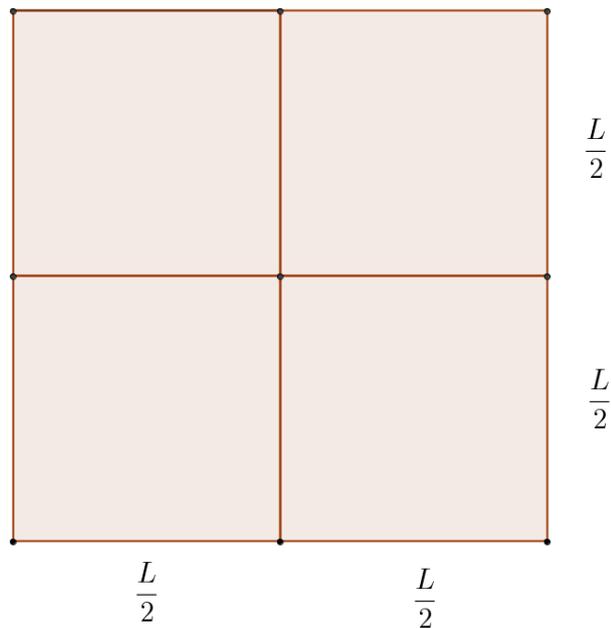


Figura 2.5: Representação de um objeto bidimensional subdividido em em quatro partes de mesma área.

2.5.2 Método *Box-Counting*

Para se determinar a dimensão de um objeto fractal através do método de *box-counting*, cobrimos a estrutura com uma grade de caixas quadradas de lado δ e contamos a quantidade de caixas interceptadas pelo fractal. Em seguida, aumentamos o lado δ da caixa e contamos novamente a quantidade de caixas interceptadas pelo fractal. Tal processo está representado na figura 2.6.

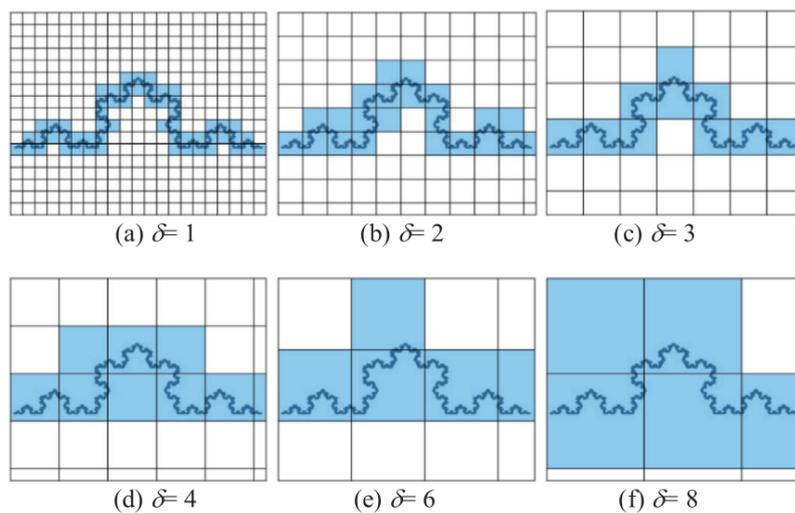


Figura 2.6: Aplicação do método *box-counting* à curva de Koch. [6].

Na figura 2.6 é possível observar que ao aumentar o tamanho do lado da caixa, o número de caixas que são interceptadas pelo fractal diminuem. Após esta contagem ser realizada podemos construir um gráfico do logaritmo do número de caixas N interceptadas pelo fractal em função do logaritmo do inverso do comprimento δ do lado desta caixa. Ao realizar um ajuste de curva linear, a dimensão fractal será dada pelo coeficiente linear desta reta.

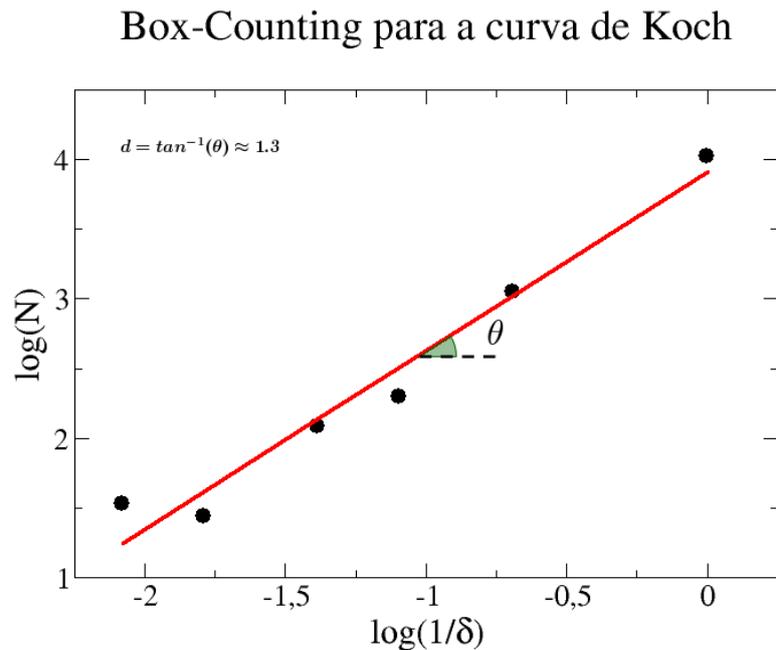


Figura 2.7: Processo de regressão linear para determinar a dimensão fractal [6].

2.6 Exemplos de fractais

2.6.1 Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor é um fractal determinístico idealizado por Georg Cantor em 1883 [7]. Este fractal, apesar de simples, desempenha um papel muito importante em muitos ramos da matemática [43, 44], sobretudo na teoria de conjuntos e na teoria fractal. O conjunto de Cantor é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ e existem na literatura muitas definições e métodos de construção.

Cantor forneceu inicialmente uma definição puramente abstrata. O método de construção mais acessível é conhecido como “terço médio”. Através deste método, o conjunto é gerado tomando-se um segmento de reta de comprimento 1, este primeiro conjunto é dado por $C_0 = [0, 1]$. Dividimos este segmento em três partes iguais e suprimimos a parte central, e dessa forma obtemos o conjunto $C_1 = \left\{ \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \right\}$. Podemos repetir

este procedimento indefinidamente e assim geramos qualquer conjunto C_n .

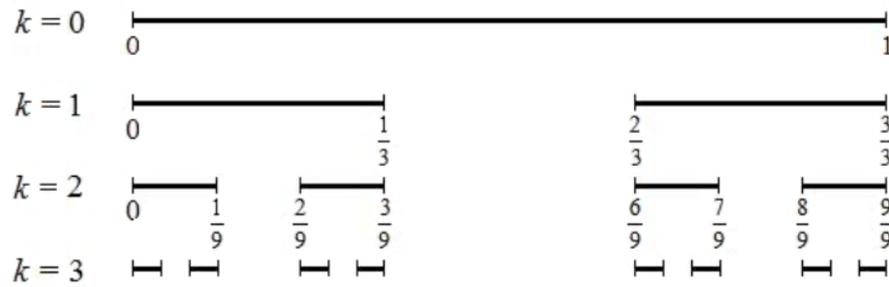


Figura 2.8: Conjunto de Cantor representado até o nível de construção $k = 3$ [7].

Na figura 2.8, podemos observar os quatro primeiros passos da criação do conjunto de cantor. O comprimento total do conjunto de cantor após n interações é dado por

$$L_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad (2.4)$$

o número de segmentos de reta é dado por

$$N_n = 2^n. \quad (2.5)$$

Com base na equação (2.4) e (2.5), podemos determinar o comprimento de cada segmento como:

$$\epsilon_n = \frac{L_n}{N_n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \quad (2.6)$$

A dimensão fractal deste conjunto pode ser calculada pela definição de dimensão de similaridade. Utilizando o nível de interação $k = 2$, neste caso $M(L) = 4$, pois nessa etapa o conjunto é formado por quatro segmentos e $b = \frac{1}{3}$. Temos $M(bL) = 2$, que é justamente o número de segmentos no nível $k = 1$. Substituindo na equação (2.3) temos:

$$M(\gamma L) = \gamma^d M(L),$$

$$2 = \left(\frac{1}{3}\right)^d 4,$$

$$\log\left(\frac{2}{4}\right) = d \cdot \log\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\log(2) = d \cdot \log(3),$$

$$d = \frac{\log(2)}{\log(3)},$$

$$d = 0.6309\dots$$

2.6.2 Triângulo de Sierpinski

O matemático polonês Waclaw Sierpinski definiu formalmente este fractal em 1916 [45] e atualmente leva seu nome. Na figura 2.9, podemos observar a construção deste fractal até o quarto nível. A construção deste fractal se dá da seguinte maneira. Iniciamos com um triângulo equilátero de lado 1 (nível $k = 0$). Em seguida retiramos da região central um triângulo equilátero invertido de lado $1/2$ de forma que restem três triângulos equiláteros de lado $1/2$ e assim obtemos o nível $k = 1$. Este mesmo processo pode ser repetido indefinidamente, e o fractal é obtido quando o valor k tende ao infinito.

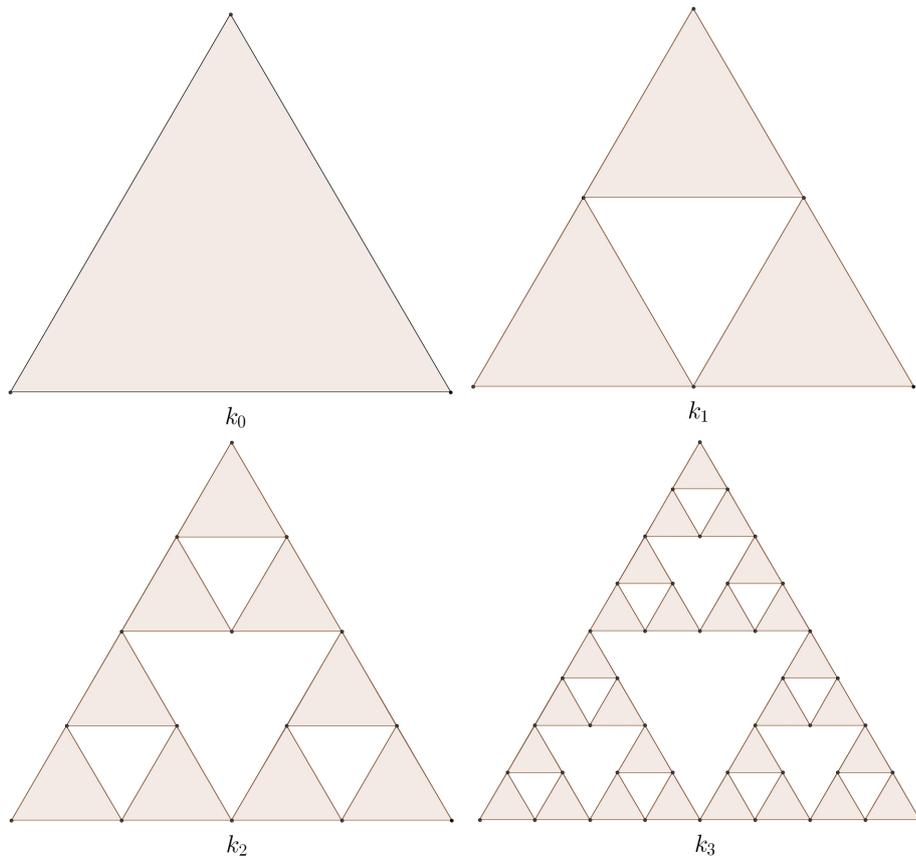


Figura 2.9: Construção do triângulo de Sierpinski.

Em cada nível de construção n , o número total de triângulos é dado por:

$$N_n = 3^n, \quad (2.7)$$

podemos conferir observando o nível $k = 3$ na figura 2.9 e notamos que há 27 triângulos. A área de cada triângulo do fractal após n passos é dada por:

$$A_n^* = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} A_0, \quad (2.8)$$

em que A_0 é a área do triângulo original no nível $k = 0$. Por fim, a área total do fractal após n passos é dada por:

$$A_n = 3^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} A_0, \quad (2.9)$$

desta equação surge uma interessante propriedade, a área total deste fractal tende a zero quando o número n tende ao infinito.

2.6.3 Carpete de Sierpinski

O carpete de sierpinski é um fractal determinístico que foi descrito por Waclaw Sierpiński em 1926. O método de construção deste fractal inicia-se com um quadrado de lado L . No primeiro passo, retiramos um quadrado de lado $L/3$ da região central do quadrado original, resultando na forma da etapa de construção $m = 1$ apresentado na figura 2.10.

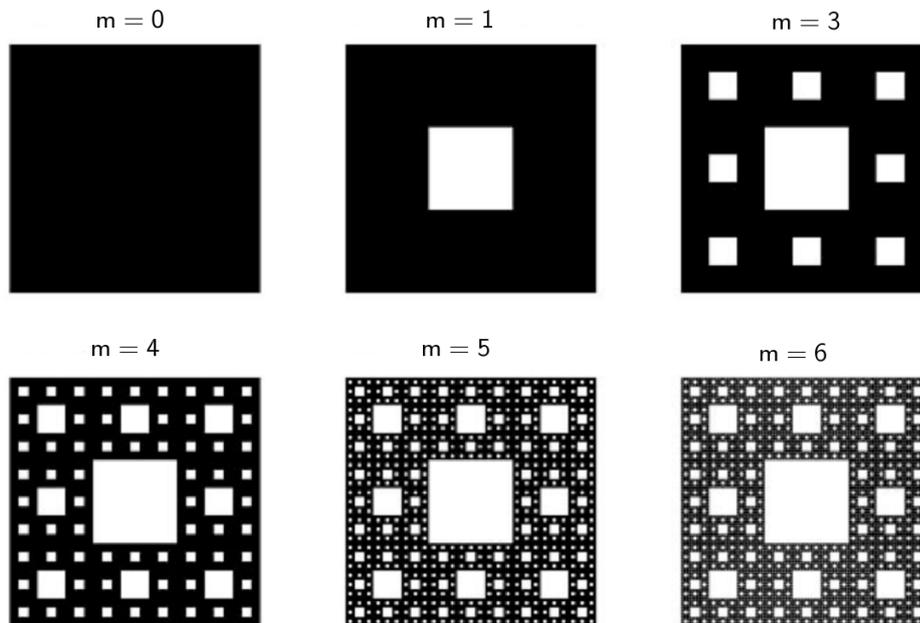


Figura 2.10: Construção do carpete de sierpinski.

A aplicação do primeiro passo resulta no carpete de sierpinski de etapa $m = 1$ que pode ser subdividido em 8 quadrados menores de lado $L/3$. Ao aplicar o procedimento realizado no primeiro passo em cada um dos 8 quadrados resultantes, com a diferença de que o quadrado a ser excluído deve ter comprimento do lado $L/9$, gerando assim a etapa $m = 2$. Este procedimento pode ser realizado indefinidamente.

O procedimento de criação deste fractal é recursivo e obedece a regras rígidas, por esta razão podemos realizar as seguintes generalizações. Para uma certa etapa de construção $m = n$, o número de quadrados de lado $(L/3)^n$ é igual:

$$N_n = 8^n, \quad (2.10)$$

pois em cada etapa a figura pode ser subdividida em 8 novos quadrados.

A área de cada quadrado em cada etapa de construção $m = n$ é dada por:

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} L^2, \quad (2.11)$$

e a área total em cada etapa $m = n$ é:

$$A_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n L^2. \quad (2.12)$$

Da equação (2.12) emerge uma interessante propriedade deste fractal. Ao fazermos $n \rightarrow \infty$, a área total da figura tende a zero. Com isso, temos uma figura com contorno fechado, perímetro diferente de zero e área igual a zero.

Vamos agora considerar o tapete de sierpinski na etapa $m = 1$ com $L = 1$ para calcular a dimensão fractal pela noção de dimensão de similaridade. Nesta etapa, $M(L) = 8$ pois a figura pode ser subdividida em 8 quadrados de lado $1/3$, logo, o fator de diminuição é $\gamma = 1/3$ e $M(\gamma L) = 1$ pois em $m = 0$ só havia um quadrado. Aplicando estes valores na equação (2.3) ficamos com a seguinte expressão:

$$1 = (1/3)^d 8,$$

$$1/8 = (1/3)^d,$$

$$\ln(1/8) = d \cdot \ln(1/3),$$

$$d = \frac{\ln(1/8)}{\ln(1/3)} \approx 1.892\dots$$

2.6.4 Esponja de Menger

A esponja de menger é um fractal tridimensional semelhante ao tapete de Sierpinski. Por vezes este fractal é chamado de esponja de Sierpinski-Menger ou esponja de Sierpinski. A construção deste fractal inicia-se com um cubo, em seguida dividimos o cubo em 27 cubos iguais, feito isto, cada face terá sido subdividida em 9 partes iguais. Feita esta divisão, retiramos o cubo da região central do cubo original e retiramos também os cubos da região central de cada face, restando apenas 20 cubos obtendo assim a esponja de Menger de nível 1.

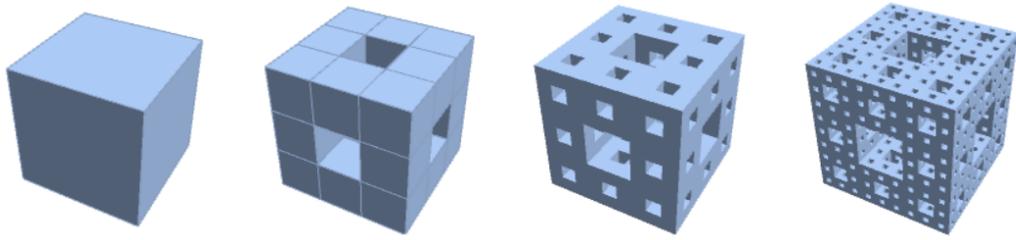


Figura 2.11: Esponja de Menger [8].

O mesmo processo pode ser aplicado em todos os cubos restantes para obter a esponja de Menger de nível 2, 3 e assim por diante. Podemos calcular a dimensão fractal desta estrutura através da dimensão de similaridade. Considerando a esponja de Menger no nível $k = 2$, temos que $M(L) = 400$, pois nesta etapa podemos dividir o fractal em 400 cubos iguais. Na etapa $k = 1$, podemos dividir em 20 cubos iguais, logo, $M(\gamma L) = 20$ com $\gamma = 1/3$. Aplicando estes valores na equação (2.3) temos que:

$$M(\gamma L) = \gamma^d M(L),$$

$$20 = \left(\frac{1}{3}\right)^d 400,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d = \frac{1}{20},$$

$$d \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{20}\right),$$

$$d \cdot \ln(3) = \ln(20),$$

$$d = \frac{\ln(20)}{\ln(3)} \approx 2.7268.$$

O valor da dimensão fractal da esponja de Menger é um valor entre 2 e 3, logo, sua dimensão é intermediária entre um plano bidimensional e um cubo tridimensional. Curiosamente, o volume da esponja de Menger tende a zero enquanto que a área de superfície tende ao infinito. Como já foi dito, cada uma das faces da esponja de Menger representa um tapete de Sierpinski, além disso, a interseção entre este fractal e a diagonal do cubo representa um conjunto de Cantor definido na seção 2.6.1.

2.6.5 Processo de agregação limitada por difusão

O algoritmo responsável por gerar o processo de agregação limitada por difusão foi proposto por Witten e Sander em 1981 [9]. Este processo gera um fractal aleatório como o ilustrado na figura 2.12. O primeiro passo desse algoritmo é fixar uma partícula na origem de uma rede quadrada de tamanho finito. Feito isto, é sorteado um sítio arbitrário a determinada distância da origem e a partir dessa posição inicial colocamos a partícula para descrever movimentos erráticos.

Quando a partícula alcança um sítio adjacente a partícula inicialmente fixada, esta partícula passará a fazer parte do aglomerado e o processo é iniciado com a introdução de uma nova partícula iniciando o movimento em um novo sítio aleatório. Quando o aglomerado atinge um grande número de partículas a estrutura toma a forma do fractal representado na figura 2.12.

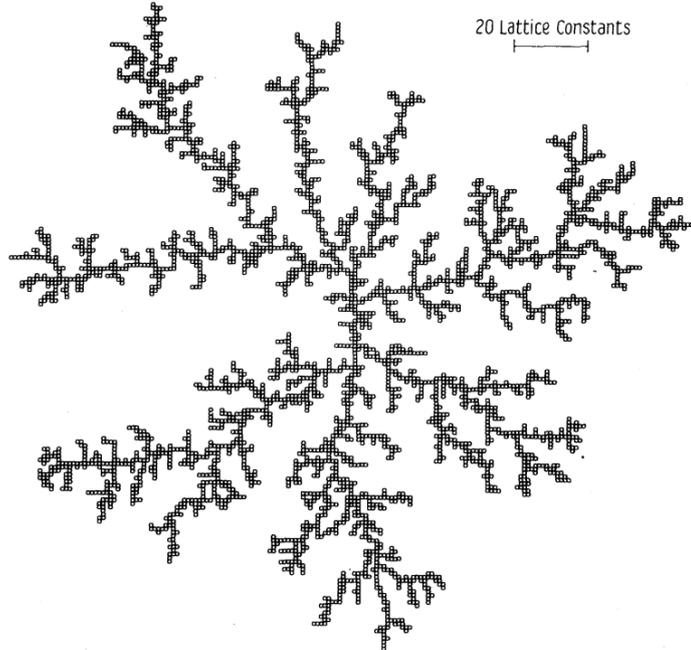


Figura 2.12: Fractal gerado pelo processo de agregação limitada por difusão [9].

Esta mesma ideia pode ser estendida para o espaço tridimensional fazendo a partícula executar movimentos erráticos nas três dimensões antes de encontrar o aglomerado. Por se tratar de um fractal aleatório, não podemos aplicar o método de dimensão de similaridade para calcular a dimensão fractal. Neste caso, podemos aplicar o método *Box-Counting* para determinar a dimensão fractal.

2.6.6 Fractais Naturais

Ao observar os objetos encontrados na natureza, percebemos que não é uma tarefa fácil descrever-los através da geometria euclidiana. Em seu famoso livro intitulado “*The geometry fractal of the nature*” (A geometria fractal da natureza) [41], Benoit Mandelbrot exemplifica essa ideia afirmando que as nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos e os raios não viajam em linha reta.

Parte dos fractais encontrados na natureza são fractais aleatórios. Apesar desta característica, todos eles possuem as propriedades que os tornam fractais. O exemplo mais clássico de fractal natural é a linha costeira de um país ou continente. Na figura 2.13, podemos observar a linha costeira da Austrália. Este objeto fractal possui a dimensão

fractal $d = 1,13$.



Figura 2.13: Linha costeira da Austrália [10].

Também é possível encontrar na natureza fractais semelhantes ao gerado pelo processo de agregação limitada por difusão. Na figura 2.14 podemos ver a representação dos brônquios de um pulmão [11]. A ampliação realizada na imagem destaca a propriedade de autossimilaridade, pois mesmo mudando a escala as características geométricas se mantêm. Este tipo de fractal tem a característica de ser altamente ramificado, no caso dos pulmões, isto facilita o processo de trocas gasosas uma vez que o ar entra em contato com uma grande área.

Além destes objetos descritos acima, podemos observar a presença da geometria fractal em outras estruturas da natureza, como por exemplo rios [46], raízes de árvores [47], folhas de plantas [48], montanhas [49] e nuvens [50, 51].

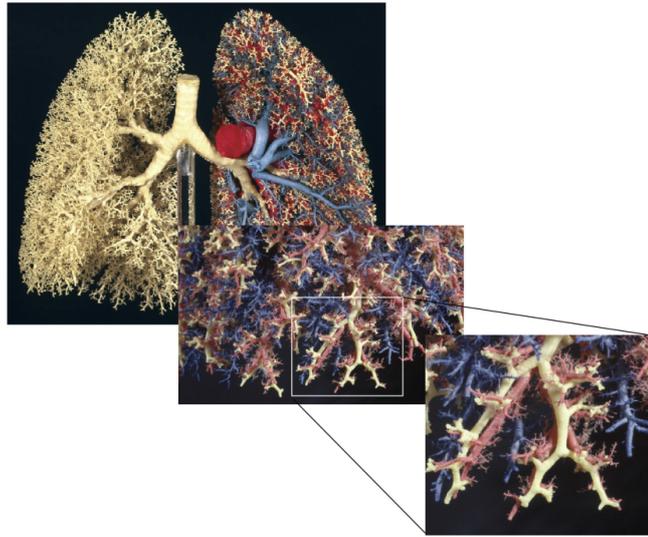


Figura 2.14: Representação dos brônquios de um pulmão [11].

Capítulo 3

Resultados e discussões

3.1 Cálculo da condutância e do ruído de disparo

Utilizamos o pacote de simulação *Kwant* [4] para gerar as estruturas e calcular as grandezas associadas ao transporte quântico. Este pacote é uma biblioteca para a linguagem Python que auxilia no cálculo de transporte quântico baseado no modelo *tight-binding*. Com o auxílio deste recurso podemos obter a matriz de espalhamento de um sistema, possibilitando o cálculo dos observáveis físicos.

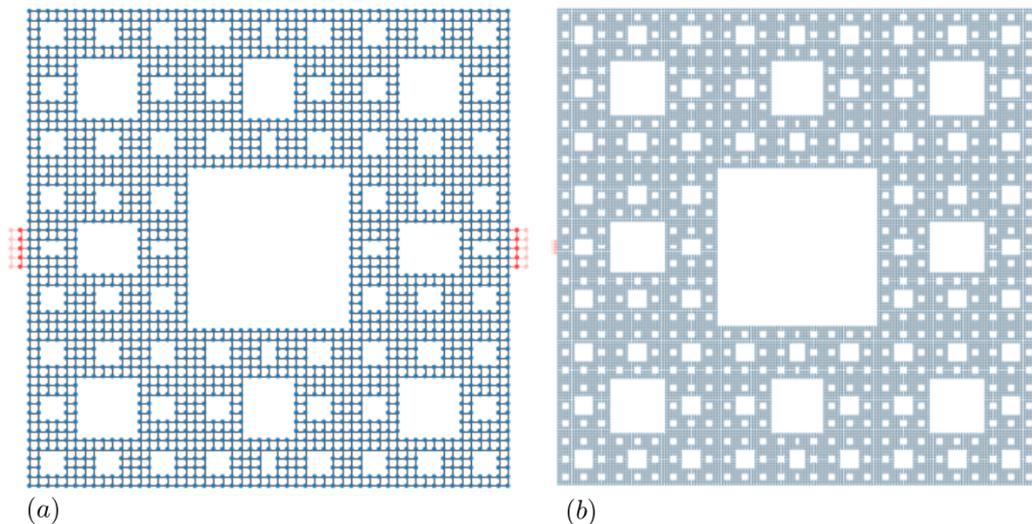


Figura 3.1: Região de espalhamento da estrutura no formato do tapete de Sierpinski de nível $m = 3$ em (a) e de nível $m = 4$ em (b). Os guias foram posicionados de forma simétrica em lados opostos.

Na figura 3.1, podemos observar duas estruturas geradas através do *Kwant*. Em (a), temos a região de espalhamento no formato do tapete de Sierpinski de nível $m = 3$, em (b) de nível $m = 4$. A região de espalhamento em (a) possui comprimento de lado equivalente a 54 átomos dispostos em uma rede quadrada com parâmetro de rede a (em nossas simulações utilizamos $a = 1$), enquanto que a região da figura (b) possui o

comprimento do lado equivalente a 162 átomos.

Determinamos o regime universal para as estruturas estudadas neste trabalho nos três *ensembles* da teoria de matrizes aleatória. Inicialmente determinamos para o *ensemble* circular e ortogonal (*COE* - *circular orthogonal ensemble*) caracterizado por $\beta = 1$, em seguida determinamos para o *ensemble* circular e unitário (*CUE* - *circular unitary ensemble*) caracterizado por $\beta = 2$ e por fim o *ensemble* circular simplético (*CSE* - *circular symplectic ensemble*) caracterizado por $\beta = 4$.

Para determinar o regime universal, calculamos a condutância na estrutura para vários valores de força de desordem distintos. Variamos a desordem em uma determinada faixa, e para cada ponto geramos 1000 valores de condutância. Com base nesses valores, podemos determinar a média e o desvio padrão da condutância em função da desordem que podem ser observados na figura 3.2.

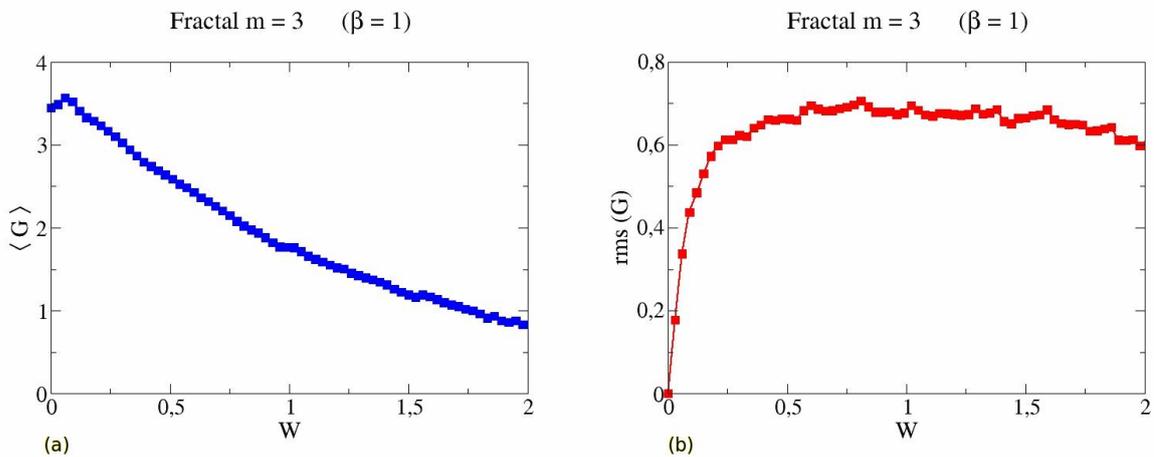


Figura 3.2: Condutância em função da desordem e desvio padrão para o carpete de Sierpinski $m = 3$ sem campo magnético e sem acoplamento spin-órbita. *Ensemble* circular ortogonal ($\beta = 1$).

Na figura 3.2, o regime universal é caracterizado por uma força de desordem cujo valor é $W = 0.8$, pois é neste ponto que o desvio padrão atinge o valor máximo. Para $\beta = 2$, aplicamos a estrutura um fluxo magnético ($\Phi = 5$) ainda sem inserir o acoplamento spin-órbita. Neste caso, o valor da força de desordem que caracteriza o regime universal é $W = 2.13$.

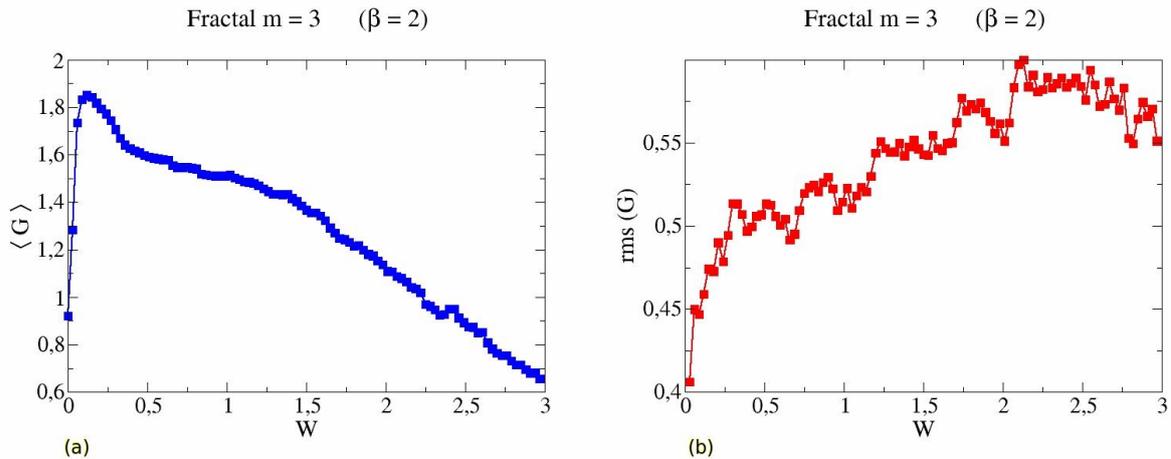


Figura 3.3: Condutância em função da desordem para o carpete de sierpinkki $m = 3$ com fluxo magnético $\Phi = 5$ e sem acoplamento spin-órbita. *Ensemble* circular unitário ($\beta = 2$).

Para determinar o regime universal no *ensemble* circular simplético, inserimos na simulação o efeito do acoplamento spin-órbita. O resultado está representado graficamente na figura 3.4. Assim como nos outros *ensembles*, o valor de desordem associado ao regime universal é aquele associado ao valor máximo do desvio padrão da condutância. Para $\beta = 4$, concluímos que $W = 3,70$.

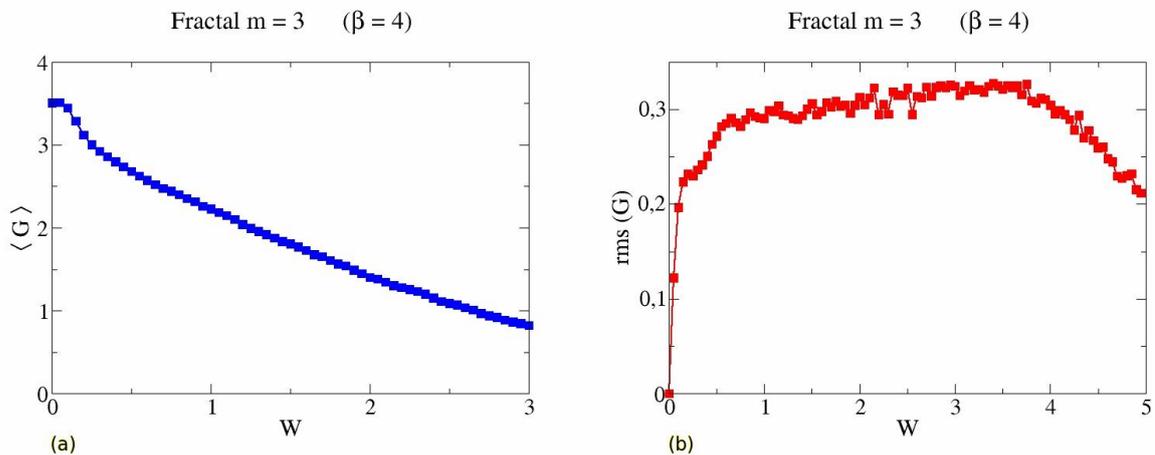


Figura 3.4: Condutância em função da desordem para o carpete de sierpinkki $m = 3$ sem campo magnético e com acoplamento spin - órbita. *Ensemble* circular simplético ($\beta = 4$).

Esta mesma análise foi feita para o fractal $m = 4$. Para o *ensemble* circular ortogonal ($\beta = 1$), para o *ensemble* circular unitário ($\beta = 2$) e para o *ensemble* circular simplético ($\beta = 4$). Para o *ensemble* circular ortogonal, representado na figura 3.5 o desvio padrão máximo está associado ao valor de desordem $W = 0,36$. Da mesma forma que acontece para as estruturas $m = 3$, nas estruturas $m = 4$ a média da condutância

possui um valor máximo para a desordem $W = 0$ e diminui a medida que a desordem aumenta.

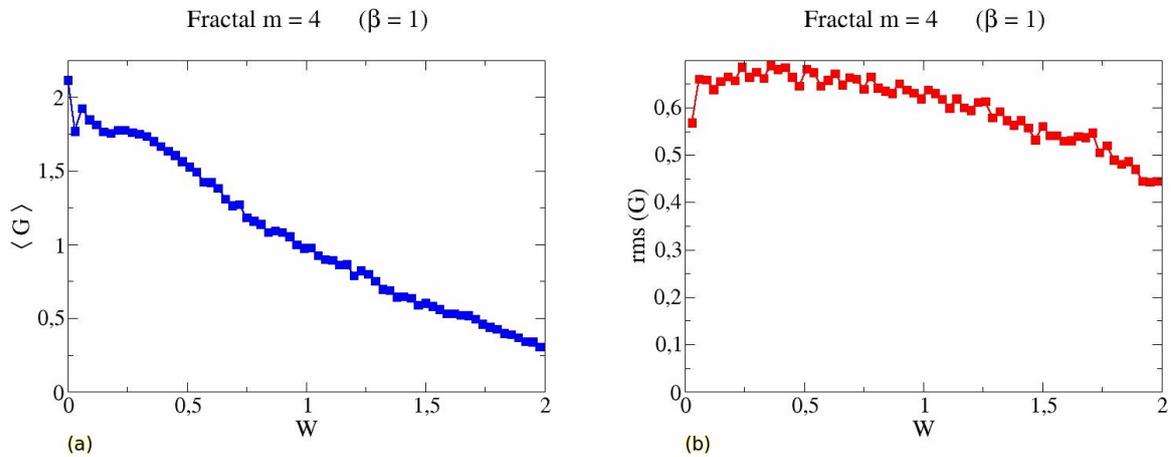


Figura 3.5: Condutância em função da desordem para o carpete de Sierpinski $m = 4$ sem fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita.

O *ensemble* circular unitário ($\beta = 2$) é obtido aplicando um fluxo magnético na estrutura, neste caso utilizamos o fluxo $\Phi = 5$. Neste caso específico, o valor da força de desordem que caracteriza o regime universal é $W = 1,56$. Nesta simulação não inserimos o acoplamento spin-órbita.

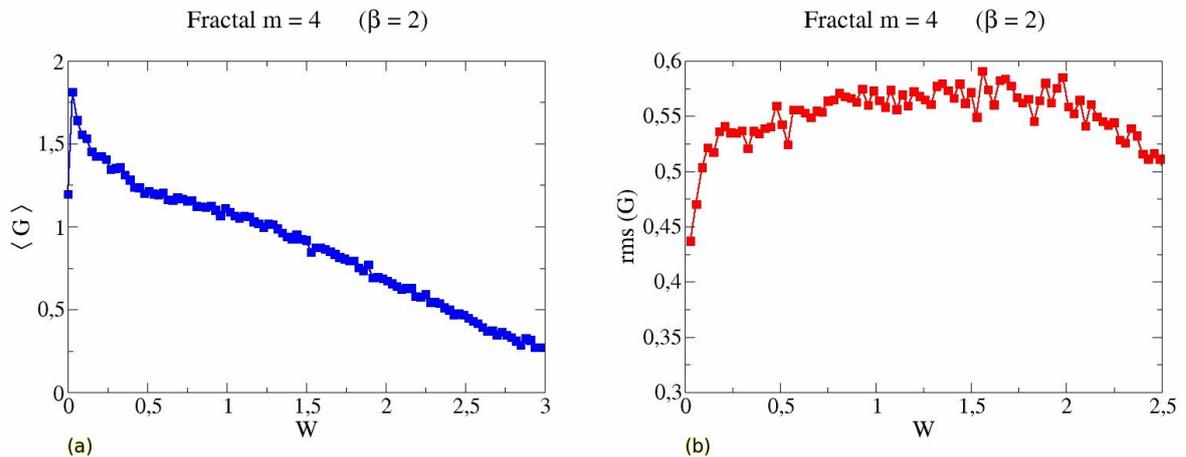


Figura 3.6: Condutância em função da desordem para o carpete de Sierpinski $m = 4$ com fluxo magnético $\Phi = 5$ e sem acoplamento spin-órbita.

Para obter o *ensemble* circular simplético referente ao fractal $m = 4$ não aplicamos o fluxo magnético, mas inserimos a interação spin-órbita. O valor da força de desordem que caracteriza o regime universal para esta estrutura vale $W = 2,84$, que é justamente neste valor que o desvio padrão da condutância atinge o valor máximo.

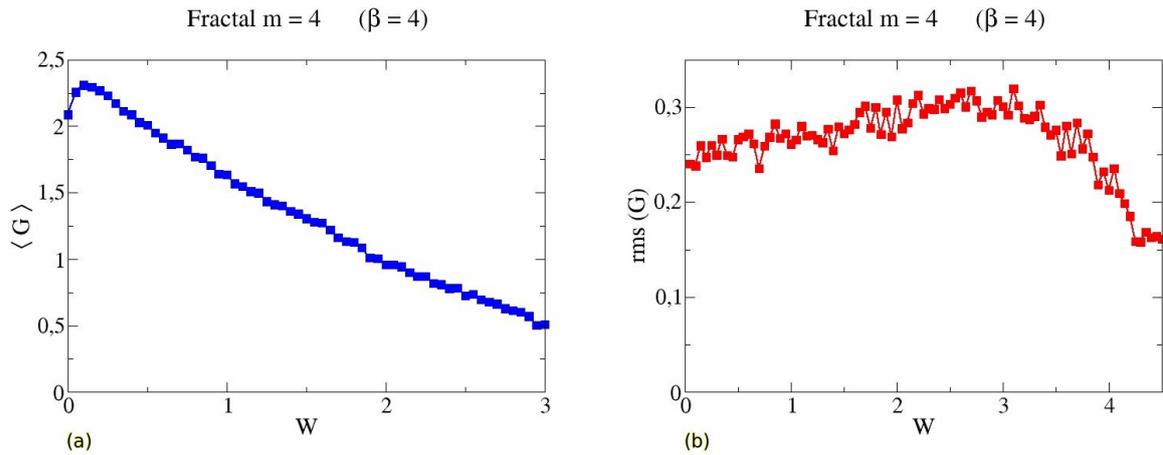


Figura 3.7: Condutância em função da desordem para o carpete de Sierpinski $m = 4$ sem fluxo magnético e com acoplamento spin-órbita.

3.2 Dimensão fractal da curva de condutância e ruído e da potência do disparo sem desordem

Na figura 3.8, podemos observar os gráficos da condutância e da potência do ruído de disparo em função da energia. Este cálculo foi realizado em uma região de espalhamento no formato de um carpete de sierpinski com o nível de construção $m = 3$. É possível notar a simetria da curva em torno da energia zero, tanto para a condutância como para o ruído de disparo. Esta simetria surge devido a ausência da força de desordem.

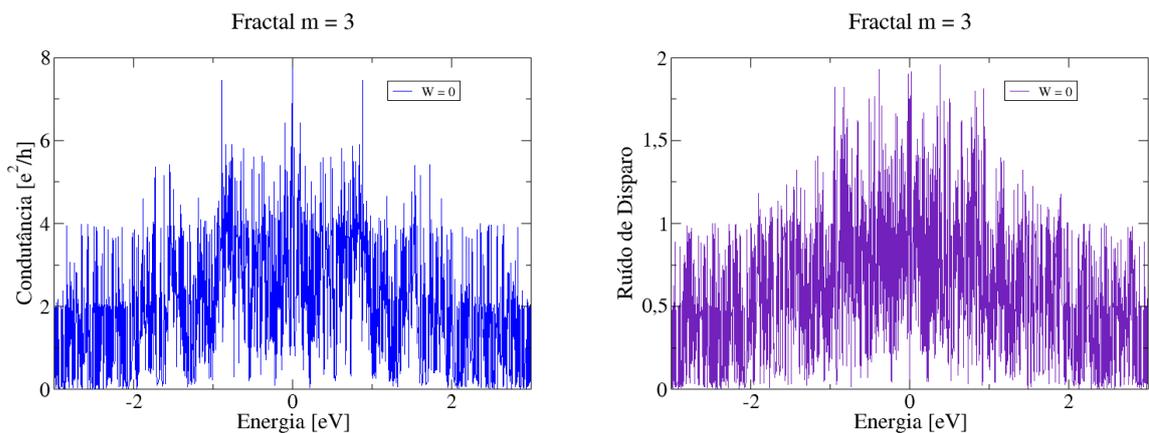


Figura 3.8: Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 3$ sem fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita ($\beta = 1$). Nesta simulação não aplicamos força de desordem ($W = 0$).

Determinamos o valor da dimensão fractal de ambas as curvas representadas na figura 3.8 e obtivemos os valores 1,63 e 1,73 para a curva de condutância e potência do ruído de disparo, respectivamente. Para determinar estes valores utilizamos a técnica *box-counting* descrita na seção 2.5.2.

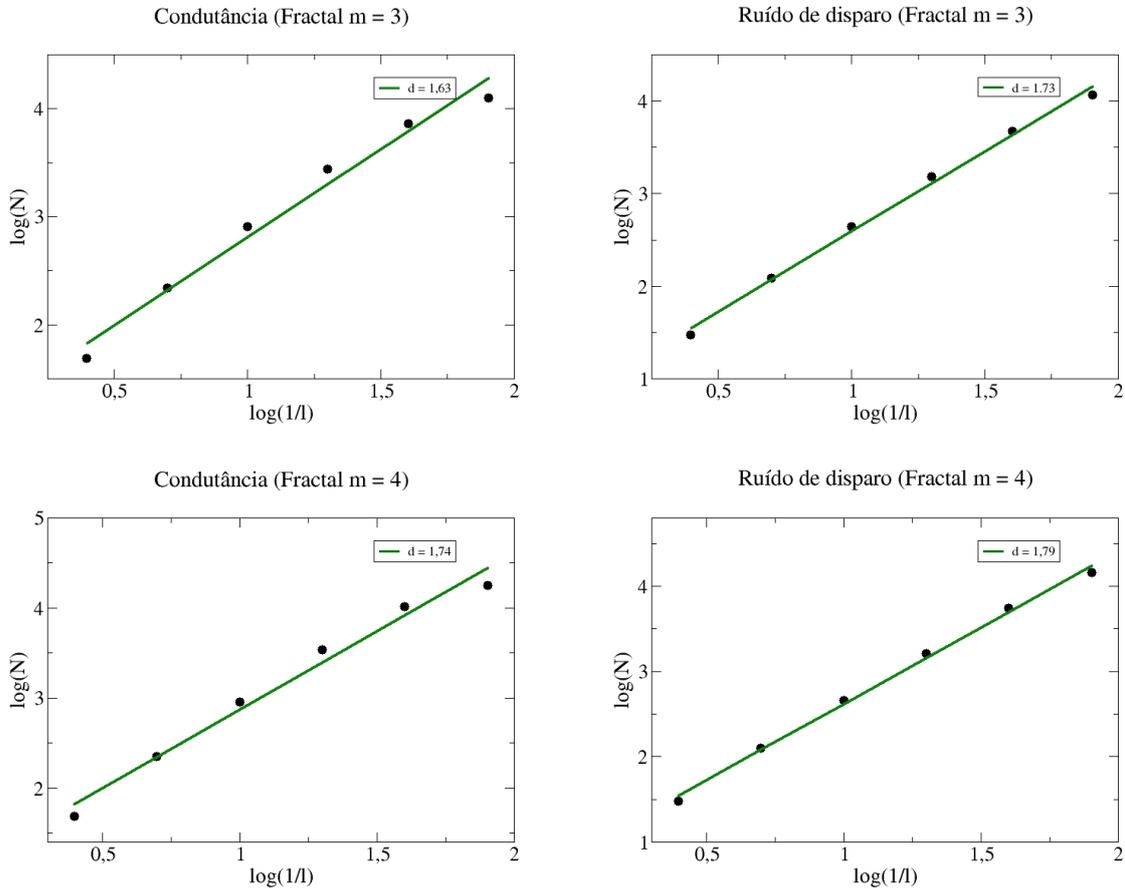


Figura 3.9: Determinação da dimensão fractal das curvas de condutância e potência ruído de disparo na ausência de desordem.

Na figura 3.10, observamos a curva de condutância e potência do ruído de disparo ambas em função da energia. Para $m = 4$, diferentemente do cálculo realizado na estrutura $m = 3$, este gráfico apresenta uma maior quantidade de irregularidades, uma vez que carpete de Sierpinski de nível $m = 4$ possui mais buracos que o de nível $m = 3$, ocasionando uma maior complexidade geométrica. Ao calcular a dimensão fractal dessas curvas obtivemos os valores 1,74 e 1,79 para a curva de condutância e potência ruído de disparo, respectivamente.

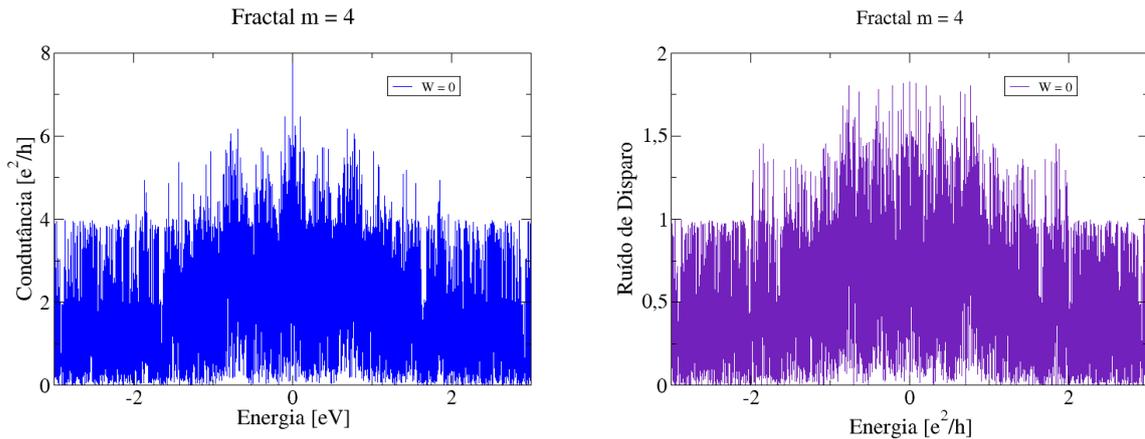


Figura 3.10: Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 4$ sem fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita ($\beta = 1$). Nesta simulação não aplicamos força de desordem ($W = 0$).

3.3 Dimensão fractal da curva de condutância e da potência do ruído de disparo no regime universal

Nesta seção determinaremos as dimensões fractais das curvas de condutância e da potência do ruído de disparo no regime universal nos três *ensembles*. *Ensemble* circular ortogonal ($\beta = 1$), *ensemble* circular unitário ($\beta = 2$) e *ensemble* circular simplético ($\beta = 4$).

3.3.1 *Ensemble* circular ortogonal ($\beta = 1$)

Ao inserir uma certa força de desordem ao sistema percebe-se que não é mais possível observar a simetria em torno da energia 0 (figura 3.11). Aplicamos ao sistema, cuja forma da região de espalhamento é da forma do carpete de Sierpinski de nível $m = 3$, uma força de desordem $W = 0,8$.

Determinamos a dimensão fractal das curvas de condutância e da potência do ruído de disparo representadas na figura 3.11 e obtivemos os valores de 1,71 e 1,72 para a curva de condutância e potência ruído de disparo, respectivamente. Para as dimensões fractais associadas ao carpete de Sierpinski de nível $m = 4$ (figura 3.12) calculamos os valores 1,75 para a curva de condutância e 1,80 para a curva da potência do ruído de disparo.

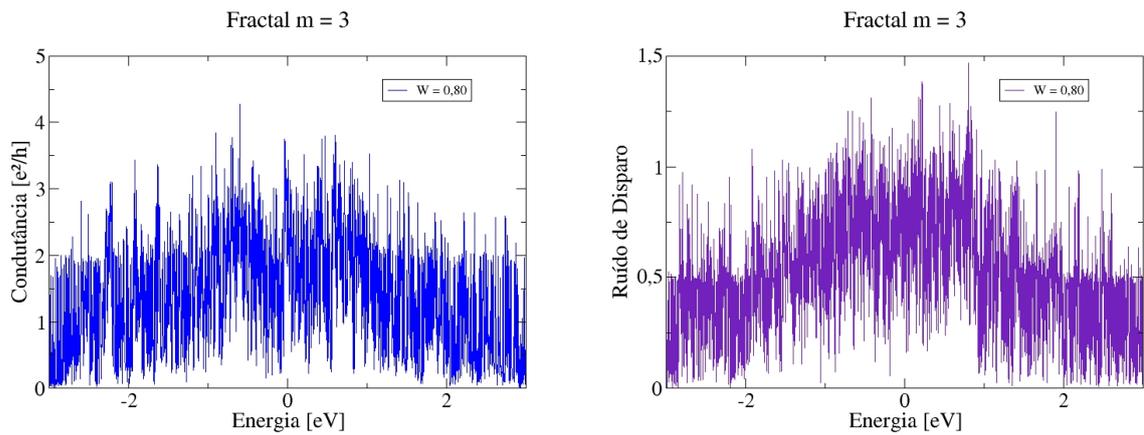


Figura 3.11: Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 3$ sem fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita ($\beta = 1$). Nesta simulação aplicamos uma força de desordem ($W = 0,80$).

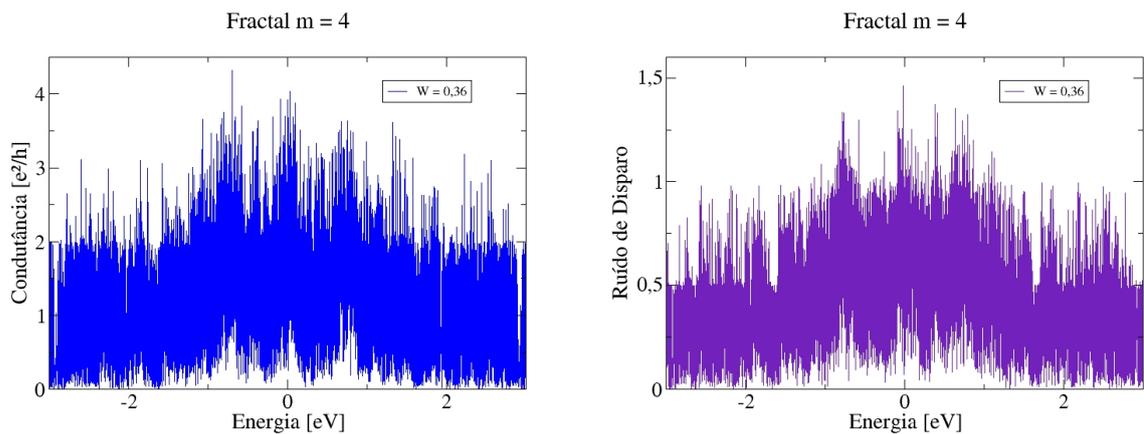


Figura 3.12: Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 4$ sem fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita ($\beta = 1$). Nesta simulação aplicamos uma força de desordem ($W = 0,36$).

Na figura 3.13 observamos o gráfico de regressão linear gerado no processo do cálculo da dimensão fractal. O coeficiente angular de cada uma das retas define a dimensão fractal da curva em questão.

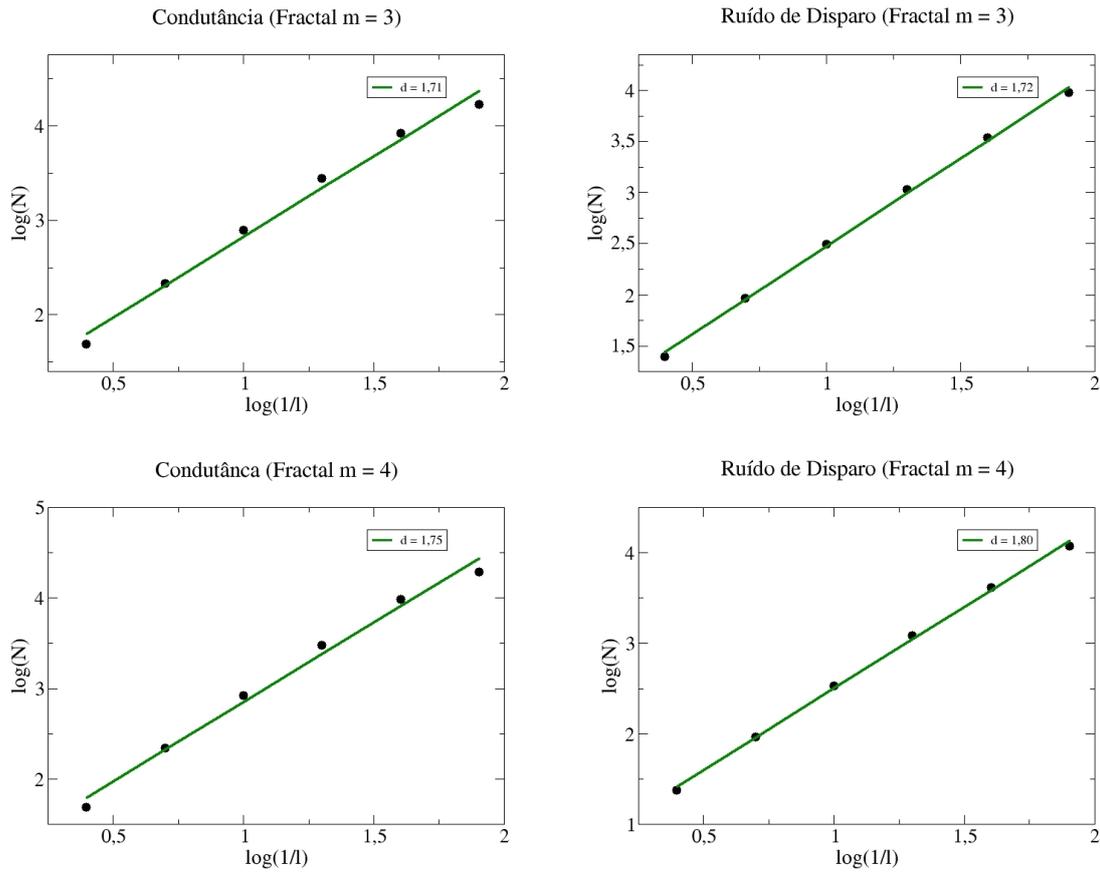


Figura 3.13: Determinação da dimensão fractal das curvas de condutância e potência do ruído de disparo no *ensemble* circular ortogonal ($\beta = 1$).

3.3.2 *Ensemble* circular unitário ($\beta = 2$)

Para determinar as curvas de condutância e da potência do ruído de disparo representadas na figura 3.14, aplicamos um fluxo magnético $\Phi = 5$ e uma força de desordem $W = 2,13$ na estrutura cuja forma é o carpete de Sierpinski de nível $m = 3$. Para o carpete de Sierpinski de nível $m = 4$, aplicamos uma força de desordem $W = 1,56$ e mantivemos o mesmo fluxo magnético $\Phi = 5$.

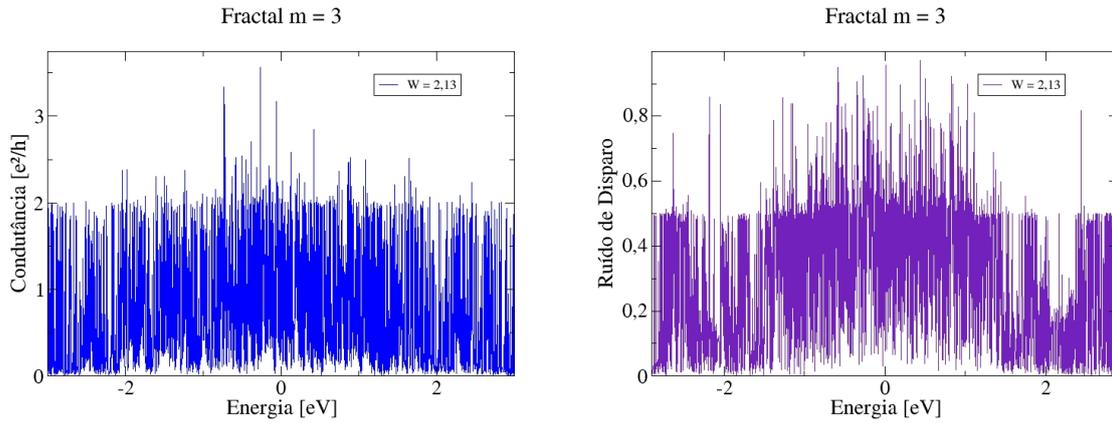


Figura 3.14: Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 3$ com fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita ($\beta = 2$). Nesta simulação aplicamos uma força de desordem ($W = 2,13$).

Calculamos as dimensões fractais para as curvas de condutância e potência do ruído de disparo para as estruturas no formato do carpete de Sierpinski $m = 3$ (figura 3.14), no *ensemble* circular unitário ($\beta = 2$). Encontramos os valores de dimensão fractal 1,67 e 1,75 para a curva de condutância e potência do ruído de disparo, respectivamente.

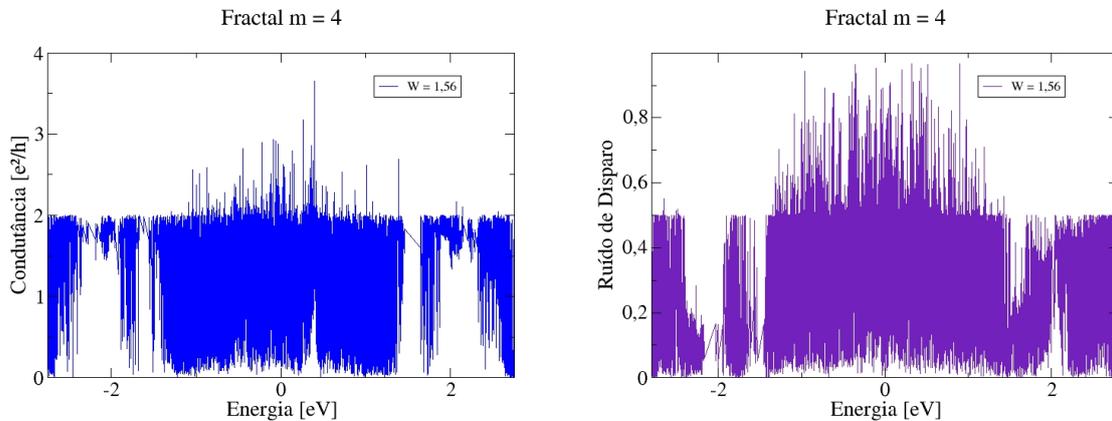


Figura 3.15: Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski com fluxo magnético e sem acoplamento spin-órbita ($\beta = 2$) para o carpete de Sierpinski de nível $m = 4$. Nesta simulação aplicamos uma força de desordem ($W = 1,56$).

Para estruturas no formato do carpete de Sierpinski de nível $m = 4$ calculamos os valores 1,71 e 1,80 para as dimensões fractais das curvas de condutância e potência do ruído de disparo, respectivamente. Na figura 3.16 podemos ver os gráficos de regressão linear gerados no cálculo das dimensões fractais utilizando o método *box-counting*.

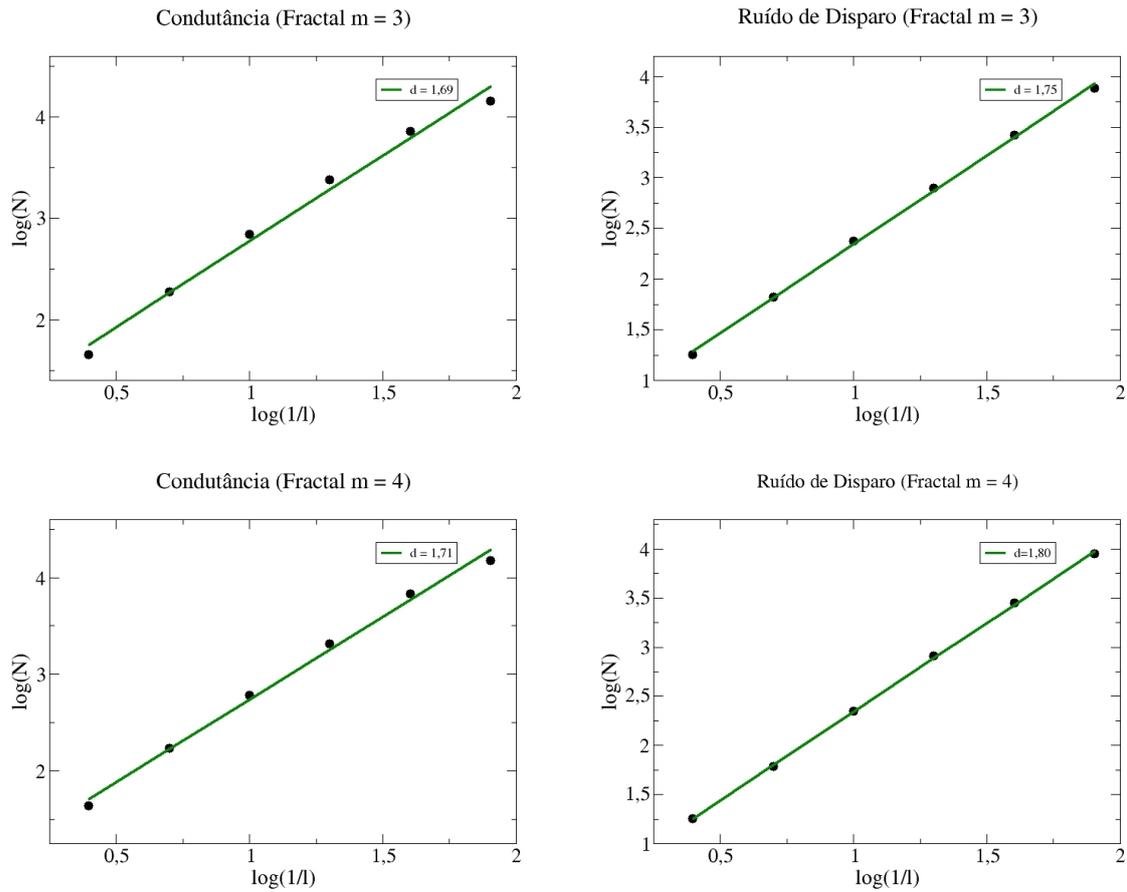


Figura 3.16: Determinação da dimensão fractal das curvas de condutância e ruído de disparo no *ensemble* circular unitário ($\beta = 2$).

3.3.3 *Ensemble* circular simplético ($\beta = 4$)

As curvas de condutância e potência do ruído de disparo são obtidas no *ensemble* circular simplético ($\beta = 4$) quando inserimos o acoplamento spin-órbita no sistema. Nas estruturas formadas pelo carpete de Sierpinski de nível $m = 3$ aplicamos uma força de desordem $W = 3,70$ e obtivemos as curvas representadas na figura 3.17. Na figura 3.18 podemos observar as curvas de condutância e potência do ruído de disparo para a estrutura de nível $m = 4$.

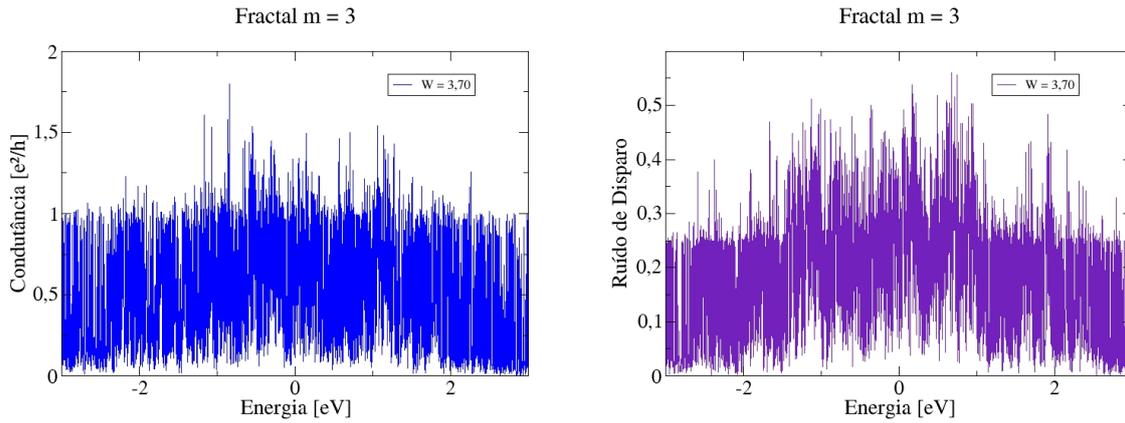


Figura 3.17: Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 3$ com fluxo magnético e com acoplamento spin-órbita ($\beta = 4$). Nesta simulação aplicamos uma força de desordem ($W = 3,70$).

Assim como no *ensemble* circular ortogonal ($\beta = 1$) e no ensemble circular unitário ($\beta = 2$), no *ensemble* circular simplético as curvas de condutância e potência do ruído de disparo apresentam mais irregularidades para os fractais de nível $m = 4$, pois a desordem total inserida no sistema é mais alta.

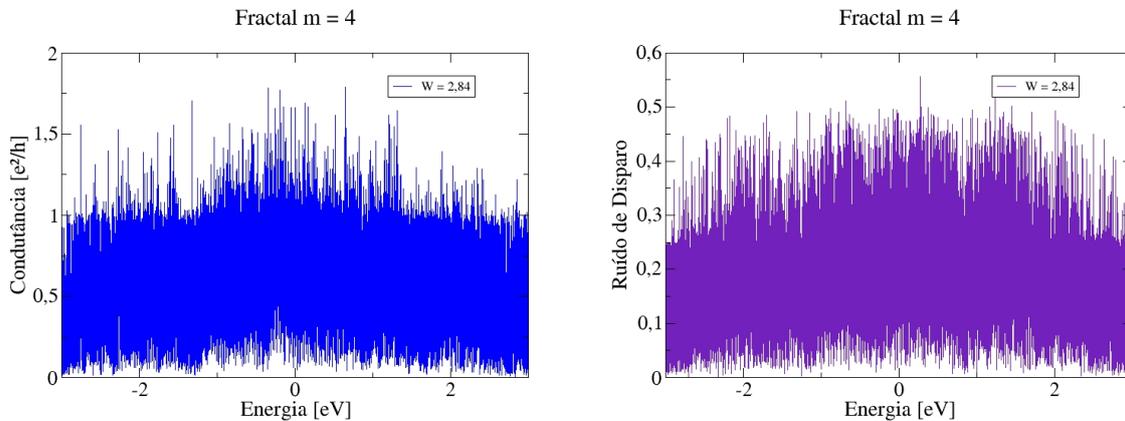


Figura 3.18: Condutância (a) e potência do ruído de disparo (b) em função da energia para o carpete de Sierpinski $m = 4$ com fluxo magnético e com acoplamento spin-órbita ($\beta = 4$). Nesta simulação aplicamos uma força de desordem ($W = 2,84$).

A figura 3.19 apresenta os gráficos do processo de regressão linear obtidos através do método *box-counting*. Para a estrutura baseada no carpete de Sierpinski de nível $m = 3$ calculamos os valores 1,79 e 1,76 para dimensão fractal da curva de condutância e potência do ruído de disparo, respectivamente. Para a estrutura baseada no carpete de Sierpinski de nível $m = 4$ calculamos a dimensão fractal de valor 1,81 para a condutância e 1,80 para a potência do ruído de disparo.

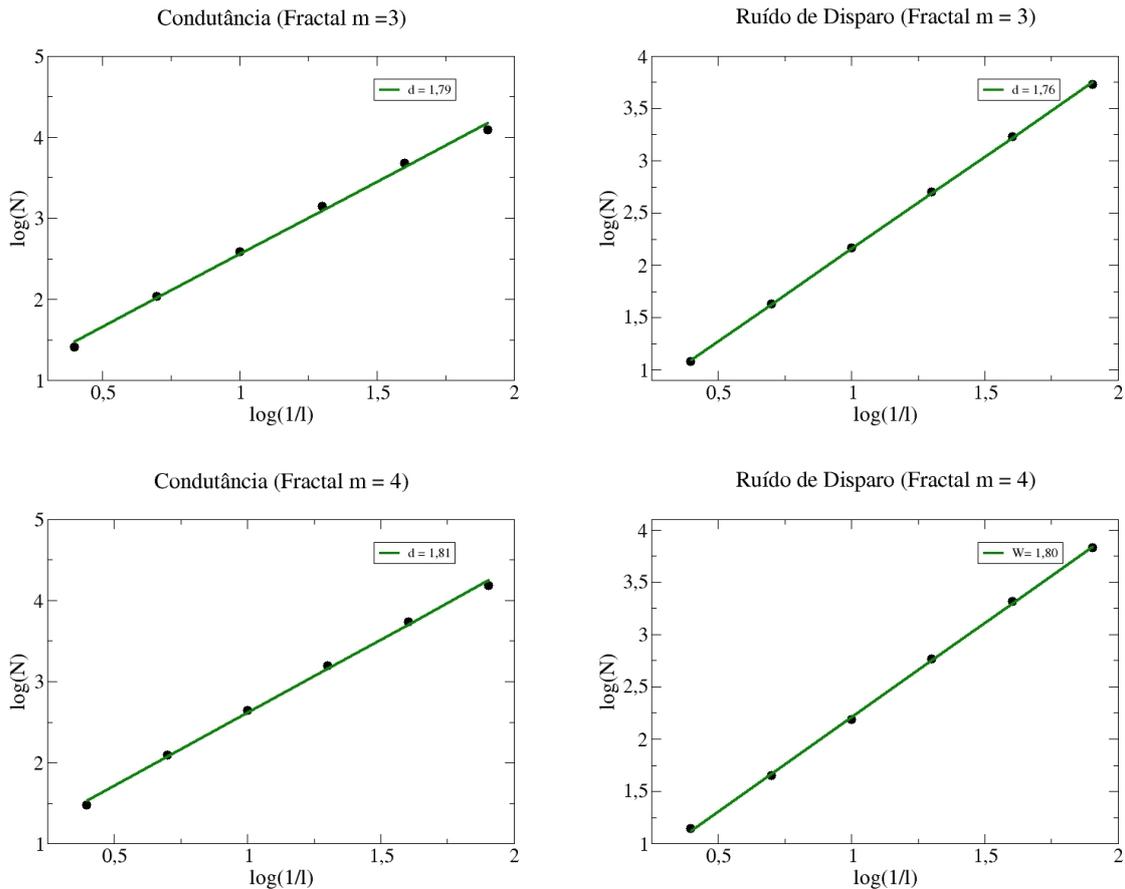


Figura 3.19: Determinação da dimensão fractal das curvas de condutância e potência do ruído de disparo no *ensemble* circular simplético ($\beta = 4$).

A tabela 3.1 sintetiza todos os valores de dimensão fractal calculados no *ensemble* circular ortogonal ($\beta = 1$), *ensemble* circular unitário ($\beta = 2$), *ensemble* circular simplético ($\beta = 4$) e também na ausência de desordem. Nota-se que mesmo em diferentes situações, as dimensões fractais calculadas assumem valores relativamente próximos. Isto sugere que esta grandeza pode ser considerada um invariante, mesmo inserindo fluxo magnético e acoplamento spin-órbita ao sistema.

Para gerar os dados apresentados na tabela 3.1 foram geradas 30 curvas para cada *ensemble*, calculamos a dimensão fractal para cada uma dessas curvas e obtivemos a média e desvio padrão destes resultados. O baixo desvio padrão reflete o fato de que a dimensão fractal caracteriza o padrão geral da geometria da curva, e não as características de uma curva específica. Desta forma, o cálculo sempre retornará valores semelhantes.

É possível também observar que em média os valores de dimensão fractal para as estruturas de nível $m = 3$ apresentam valores menores que os valores das dimensões fractais para as estruturas de nível $m = 4$. É como se a elevação do nível de construção fizesse aproximar o valor da dimensão fractal da curva ao valor da dimensão fractal do carpete de Sierpinski, sendo este valor aproximadamente 1,8928.

Tabela 3.1: Dimensão fractal das curvas de condutância e potência do ruído de disparo no regime universal.

Simulação	$W = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 4$
Condutância $m = 3$	$1,63 \pm 0,0$	$1,71 \pm 0,005$	$1,69 \pm 0,011$	$1,78 \pm 0,011$
Condutância $m = 4$	$1,74 \pm 0,0$	$1,75 \pm 0,002$	$1,68 \pm 0,008$	$1,81 \pm 0,008$
Ruído de Disparo $m = 3$	$1,73 \pm 0,0$	$1,72 \pm 0,009$	$1,75 \pm 0,010$	$1,75 \pm 0,011$
Ruído de Disparo $m = 4$	$1,79 \pm 0,0$	$1,80 \pm 0,008$	$1,79 \pm 0,011$	$1,80 \pm 0,006$

Conclusão

Com base nos estudos realizados na pesquisa que deu origem a esta dissertação podemos obter algumas conclusões relevantes. O primeiro ponto a ser notado refere-se ao grau de irregularidade que é inserido na curva de condutância e da potência do ruído de disparo quando se aumenta o nível de construção do fractal de $m = 3$ para $m = 4$. Isto ocorre, visto que, ao aumentar o nível de construção aumenta-se a quantidade de buracos na região de espalhamento, tornando o sistema mais caótico.

O regime universal de um sistema é caracterizado por uma determinada força de desordem. Em nossas simulações, para cada sistema estudado este valor foi diferente, entretanto percebemos o seguinte padrão. O valor da força de desordem W necessário para atingir o regime universal na estruturas de nível $m = 3$ são sempre maiores que nas estruturas de nível $m = 4$, isto sugere que a desordem geométrica da região de espalhamento soma-se com a força de desordem inserida no potencial.

Percebemos também que ao aumentar o nível m de construção do tapete de Sierpinski, aumentamos em média o valor da dimensão fractal. A média da dimensão fractal para as curvas geradas utilizando o tapete de Sierpinski de nível $m = 3$ são menores que as geradas no tapete de Sierpinski de nível $m = 4$. Isto possivelmente ocorre em decorrência do aumento das características fractais da região de espalhamento, quanto maior o valor de m mais a estrutura se aproxima do fractal ideal.

Outro ponto que merece atenção é com relação aos valores de dimensão fractal das curvas de condutância e potência do ruído de disparo. Mesmo realizando a medição deste valor em vários *ensembles* percebemos que os valores são aproximados e possuem média 1,75. Além disso este valor é relativamente próximo da dimensão fractal do tapete de Sierpinski que vale aproximadamente 1,8928.

Sugerimos para futuros trabalhos a realização desta mesma análise para o tapete de Sierpinski utilizando uma rede hexagonal em vez de uma rede quadrada. Isto nos daria uma ideia de como seriam os resultados obtidos através de experimentos em amostras reais, por exemplo, de grafeno ou nitreto de boro.

Futuramente também pretendemos realizar estas simulações no tapete de Sierpinski de níveis m mais altos. Com isso, esperamos comprovar se realmente esse aumento faz a dimensão fractal continuar aumentando em média. Também buscaremos entender se o valor da dimensão fractal atinge um valor máximo, ao aumentar cada vez mais o nível

m do carpete de Sierpinski. Esta última sugestão requer um maior esforço computacional, pois para gerar fractais de níveis m mais altos precisaríamos gerar estruturas maiores para conservar as características dos fractais.

Referências Bibliográficas

- [1] AKKERMANS, E.; MONTAMBAUX, G. *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*. [S.l.: s.n.], 2007. ISBN 0-521-85512-8.
- [2] WEBB, R. et al. Observation of he aharonov-bohm oscillations in normal-metal rings. *Physical review letters*, v. 54, p. 2696–2699, 07 1985.
- [3] GUHR, T.; MÜLLER–GROELING, A.; WEIDENMÜLLER, H. A. Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 299, n. 4-6, p. 189–425, jun 1998.
- [4] GROTH, C. W. et al. Kwant: a software package for quantum transport. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 6, p. 063065, jun 2014. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/16/6/063065>>.
- [5] BAIRD, E. The koch curve in three dimensions. 05 2014.
- [6] SO, G.-B.; SO, H.-R.; JIN, G.-G. Enhancement of the box-counting algorithm for fractal dimension estimation. *Pattern Recognition Letters*, v. 98, p. 53–58, 2017. ISSN 0167-8655. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016786551730288X>>.
- [7] CANTOR, G. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, v. 21, p. 1432–1807, 1883.
- [8] SIMON, K.; ORGOVÁNYI, V. Projections of the random menger sponge. arXiv, 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2205.03125>>.
- [9] WITTEN, T. A.; SANDER, L. M. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 47, p. 1400–1403, Nov 1981. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.47.1400>>.
- [10] HUSAIN, A. et al. Fractal dimension of coastline of australia. *Scientific Reports*, v. 11, 03 2021.

- [11] GLENNY, R. W. Emergence of matched airway and vascular trees from fractal rules. *Journal of Applied Physiology*, v. 110, n. 4, p. 1119–1129, 2011. PMID: 21164156. Disponível em: <<https://doi.org/10.1152/jappphysiol.01293.2010>>.
- [12] CARFÌ, D. et al. *Fractal Geometry and Dynamical Systems in Pure and Applied Mathematics I: Fractals in Pure Mathematics*. [S.l.: s.n.], 2013. ISBN ISBN 978-0-8218-9147-6. ISSN: 0271-4132 (print). ISSN: 1098-3627 (online).
- [13] ALVES, B. E. A. et al. Fractal analysis as a complementary tool in the diagnosis of mucoepidermoid carcinoma (mec) and oral squamous cell carcinoma (oscc). *Research, Society and Development*, v. 11, n. 12, p. e284111234511, Sep. 2022. Disponível em: <<https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/34511>>.
- [14] GANAN-CALVO, A. M.; RAMOS, J. A. H. *The fractal time growth of COVID-19 pandemic: an accurate self-similar model, and urgent conclusions*. [S.l.]: arXiv, 2020.
- [15] REZAPOUR, S. et al. A mathematical approach for studying the fractal-fractional hybrid mittag-leffler model of malaria under some control factors. *AIMS Mathematics*, v. 8, n. 2, p. 3120–3162, 2023. ISSN 2473-6988. Disponível em: <<https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/math.2023161>>.
- [16] RIBEIRO, D.; CARRIJO, G. Smart fractal antennas in transition projects to 5g. *IEEE Latin America Transactions*, v. 20, n. 12, p. 2463–2470, Sep. 2022. Disponível em: <<https://latamt.ieeer9.org/index.php/transactions/article/view/6845>>.
- [17] GAMARE, R. et al. Design, simulation and analysis of fractal antenna. In: . [S.l.: s.n.], 2020.
- [18] BRADBURY, R.; REICHEL, R.; GREEN, D. Fractals in ecology: Methods and interpretation. *Marine Ecology-progress Series - MAR ECOL-PROGR SER*, v. 14, p. 295–296, 01 1984.
- [19] VU, D.; IUCCI, A.; SARMA, S. D. Tunneling conductance of long-range coulomb interacting luttinger liquid. *Phys. Rev. Res.*, American Physical Society, v. 2, p. 023246, May 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.023246>>.
- [20] KEMPKES, S. et al. Design and characterization of electrons in a fractal geometry. *Nature Physics*, v. 15, 02 2019.
- [21] CHO, C. et al. Efficient vertical charge transport in polycrystalline halide perovskites revealed by four-dimensional tracking of charge carriers. *Nature materials*, v. 21, n. 12, p. 1388—1395, December 2022. ISSN 1476-1122. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41563-022-01395-y>>.

- [22] KURPAS, M. et al. Charge transport through a semiconductor quantum dot-ring nanostructure. *Journal of physics. Condensed matter : an Institute of Physics journal*, v. 27, 03 2015.
- [23] PENG, J.; DESKINS, W. R.; EL-AZAB, A. Monte-carlo modeling of phonon thermal transport using dft-based anisotropic dispersion relations over the full brillouin zone. *Computational Materials Science*, v. 211, p. 111528, 2022. ISSN 0927-0256. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927025622002816>>.
- [24] ROMANO, G. *Phonon Transport in Patterned Two-Dimensional Materials from First Principles*. arXiv, 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2002.08940>>.
- [25] JUNGFLEISCH, M. Two-dimensional magnon spin transport. *Nature Materials*, v. 21, p. 1–2, 11 2022.
- [26] ROSS, A. et al. Magnon transport in the presence of antisymmetric exchange in a weak antiferromagnet. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 543, p. 168631, 2022. ISSN 0304-8853. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885321008714>>.
- [27] DATTA, S. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. (Cambridge Studies in Semiconductor Physics and Microelectronic Engineering).
- [28] WEBB, R. et al. The aharonov-bohm effect in normal metals-non-ensemble averaged quantum transport. *Physica A*, Elsevier B.V, v. 140, n. 1, p. 175–182, 1986. ISSN 0378-4371.
- [29] BERMUDEZ, E. Light propagation through a turbulent cloud: Comparison of measured and computed extinction. 01 2019.
- [30] Schuster, A. Radiation Through a Foggy Atmosphere. *Astrophys. J.*, v. 21, p. 1, jan. 1905.
- [31] WOLF, D. D. Electromagnetic reflection from an extended turbulent medium: Cumulative forward-scatter single-backscatter approximation. *IEEE transactions on antennas and propagation*, IEEE, v. 19, n. 2, p. 254–262, 1971. ISSN 0018-926X.
- [32] WEBB, R. A.; WASHBURN, S. Quantum interference fluctuations in disordered metals. *Physics Today*, v. 41, p. 46–53, 1988.
- [33] AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 115, p. 485–491, Aug 1959. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.485>>.

- [34] BOHR, N. Neutron Capture and Nuclear Constitution. *Nature*, v. 137, p. 344–348, 1936.
- [35] KOBAYASHI, K.; HASHISAKA, M. Shot noise in mesoscopic systems: From single particles to quantum liquids. *Journal of the Physical Society of Japan*, Physical Society of Japan, v. 90, n. 10, p. 102001, oct 2021.
- [36] LEE, P. A.; FISHER, D. S. Anderson localization in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 47, p. 882–885, Sep 1981. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.47.882>>.
- [37] THOULESS, D. J.; KIRKPATRICK, S. Conductivity of the disordered linear chain. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, v. 14, n. 3, p. 235, jan 1981. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0022-3719/14/3/007>>.
- [38] SOLS, F. Recursive tight-binding green's function method: Application to ballistic and dissipative transport in semiconductor nanostructures. In: _____. *Quantum Transport in Ultrasmall Devices: Proceedings of a NATO Advanced Study Institute on Quantum Transport in Ultrasmall Devices, held July 17–30, 1994, in II Ciocco, Italy*. Boston, MA: Springer US, 1995. p. 329–338. ISBN 978-1-4615-1967-6.
- [39] BOUMRAR, H. et al. *Equivalence of wave function matching and Green's functions methods for quantum transport: generalized Fisher-Lee relation*. arXiv, 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1912.11506>>.
- [40] FALCONER, K. *Fractal geometry - mathematical foundations and applications*. [S.l.]: Wiley, 1990. I-XXII, 1-288 p. ISBN 978-0-471-92287-2.
- [41] MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. 3. ed. New York: W. H. Freeman and Comp., 1983.
- [42] KOCH, H. von. *Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction geometrique elementaire*. Norstedt & soner, 1904. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=kf3NnQAACAAJ>>.
- [43] FROLKINA, O. All projections of a typical cantor set are cantor sets. *Topology and its Applications*, Elsevier BV, v. 281, p. 107192, aug 2020.
- [44] ATHREYA, J.; REZNICK, B.; TYSON, J. Cantor set arithmetic. *The American Mathematical Monthly*, v. 126, 11 2017.
- [45] SIERPINSKI, W. Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 162, p. 629–632, 1916.

- [46] WANG, Z.-W.; CAO, H.; ZHOU, F.-F. The fractal characteristics of the river network in the landslides area. In: *Proceedings of the 2017 3rd International Forum on Energy, Environment Science and Materials (IFEESM 2017)*. Atlantis Press, 2018/02. p. 2090–2093. ISBN 978-94-6252-453-8. ISSN 2352-5401. Disponível em: <<https://doi.org/10.2991/ifeesm-17.2018.375>>.
- [47] TATSUMI, J.; YAMAUCHI, A.; KONO, Y. Fractal Analysis of Plant Root Systems. *Annals of Botany*, v. 64, n. 5, p. 499–503, 11 1989. ISSN 0305-7364. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/oxfordjournals.aob.a087871>>.
- [48] SHAIKH, Y. H.; ZAKDE, K. Self-similarity and fractal character in leaves. v. 44, p. 2249–1929, 04 2014.
- [49] KOLWANKAR, K. M.; KARLE, N. N. *A simple method to estimate fractal dimension of mountain surfaces*. arXiv, 2014. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1412.2747>>.
- [50] CHRISTENSEN, H. M.; DRIVER, O. G. A. The fractal nature of clouds in global storm-resolving models. *Geophysical Research Letters*, American Geophysical Union (AGU), v. 48, n. 23, dec 2021.
- [51] ZHANG, Z. et al. Shape representation of fractal dimension on point cloud. In: *2019 Nicograph International (NicoInt)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 102–105.